С.Х.СИРОЖИДДИНОВ
М.М.МАМАТОВ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

С. Ҳ. СИРОЖИДДИНОВ, М. М. МАМАТОВ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

ЎзССР МАОРИФ МИНИСТРЛИГИ
ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТЛАРИ
СТУДЕНТЛАРИ УЧУН ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА
СИФАТИДА ТАСДИҚЛАГАН

ТОШКЕНТ — „ЎҚИТУВЧИ“ — 1980

На узбекском языке

СИРАЖДИНОВ САГДИ ХАСАНОВИЧ,
МАМАТОВ МУФАТ МАМАТОВИЧ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Учебное пособие
для студентов пединститутов**

Ташкент „Ўқитувчи“ 1980

Махсус редактор *М. Мирзаҳмедов*
Редактор *Ў. Ҳусанов*
Бадиий редактор *З. Мартинова*
Техредакторлар: *С. Ахтамова*, *Э. Вильданова*
Корректор *М. Абдунабиева*

ИБ № 1446

Теришга берилди 28.01. 1980 й. Босишга рухсат этилди 02.09. 1980 й. Формати $84 \times 108^1/_{32}$. Тип. қоғози № 2. Юқори босма усулида босилди. .Кегли 10,8 шпонсиз „Литературная“ гарнитураси. Шартли б. л. 13,44. Нашр. л 11,22. Тиражи 5000. Зак. № 256. Баҳоси 75 т.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 253-79.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитетининг Тошкент „Матбуот“ полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1-босмахона. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1980 й.

Типография № 1 Ташкентского полиграфического производственного объединения „Матбуот“ Госкомиздата УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, Хамза, 21.

$C \frac{20203-230}{353(04)-80}$ 134—80 1702060000

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб педагогика институтлари студентлари учун эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан ўқув қўлланма сифатида мўлжалланган.

Китобнинг мазмуни педагогика институтларининг „Эҳтимоллар назарияси“ курси программасига мос келади. Ҳар бир боб охирида шу бобга доир машқлар келтирилган.

Бу китобдан университетларнинг ва олий ўқув юртларининг инженерлик-экономика факультетлари студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Қўлланмани ёзишда мавжуд адабиётдан (айниқса, Б. В. Гнеденко, А. А. Боровков китобларидан) фойдаланилди.

Китобнинг ёзилишида яқиндан ёрдам берганликлари учун Наманган Давлат педагогика институтининг математик анализ кафедраси аъзолари доцент Р. Иброҳимов, катта ўқитувчи О. Саҳобов, ўқитувчилар Д. Отақўзиев, М. Раҳматуллаев, шунингдек, китобнинг қўлёзмасини диққат билан кўриб чиқиб, кўплаб қимматли маслаҳатлар бергани учун китобнинг махсус муҳаррири Меҳнат Қизил Байроқ орденли Тошкент Давлат университетининг доценти М. А. Мирзааҳмедовга авторлар миннатдорчилик билдирадилар.

Авторлар

КИРИШ

Эҳтимоллар назарияси ҳозирги замон математикасининг муҳим тармоқларидан биридир. Эҳтимоллар назариясининг элементлари XVII аср ўрталаридан вужудга кела бошлади. Шу даврда қимор ўйинлари жуда кенг тарқалган бўлиб, ҳатто математикларнинг ҳам эътиборини ўзига жалб қилган эди. Бу ўйинларда кузатилаётган ҳодисалар ўзига хос қонуниятларга бўйсунишини билган Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Яков Бернулли каби олимлар бу қонунларни ҳар томонлама ўргандилар ва эҳтимоллар назариясига оид эҳтимол, математик кутилма ва шунга ўхшаш тушунчаларни киритдилар. Эҳтимоллар назарияси тараққиётининг кейинги босқичи Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон каби олимларнинг номлари билан боғлиқдир. XIX асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб эҳтимоллар назариясининг ривожланишида рус математиклари В. Я. Буняковский, П. Л. Чебишев, А. А. Марков, А. М. Ляпуновнинг хизматлари каттадир. В. Я. Буняковскийнинг Россияда биринчи бўлиб эҳтимоллар назариясидан ёзган дарслиги эҳтимоллар назариясига бўлган эътиборнинг ортишида маълум туртки бўлди. Эҳтимоллар назарияси математик статистиканинг асосий аппаратигина бўлиб қолмай, бундан ташқари унинг методлари оммавий хизмат кўрсатиш назариясида, ишончлилик назариясида, назарий физикада, биологияда, географияда, математик лингвистикада, ишлаб чиқаришни планлаштириш ва оптимал бошқаришда, технологик процессларни анализ қилишда, маҳсулотларнинг сифатини контрол қилишда ва бошқа мақсадларда қўлланилади. Ҳозирги пайтда, эҳтимоллар назарияси билан шуғулланувчилар сони тобора ортиб бораётганлиги, шу соҳага доир китоб ва журналларнинг кўплаб чоп этилаётганлиги эҳтимоллар назарияси ва математик статистикани ўрганишнинг қанчалик муҳимлигини кўрсатади. Совет эҳтимолчилари мактаби умумий проблемаларнинг қўйилиши ва уларнинг ҳал этилиши, фундаментал илмий тадқиқот ишларининг сифати ва салмоғи бўйича жаҳонда олдинги ўринларнинг бирида туради. Мамлакатимизнинг Москва, Ленинград, Киев, Тошкент, Новосибирск, Вильнюс ва бошқа шаҳарларида эҳтимоллар назарияси бўйича жаҳонга машҳур мактаблар мавжуд. Совет математикларидан С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, В. И. Романовский, А. Я. Хинчин, Ю. В. Линник, Ю. В. Прохоров, Н. В. Смирнов, Б. В. Гнеденко, А. А. Боровков, А. В. Скороход, И. А. Ибрагимов, Т. А. Саримсоқов ва бошқалар ҳамда чет эллик олимлардан Г. Крамер, Д. Дуб, В. Феллер, Ю. Нейман ва бошқалар ҳозирги замон эҳтимоллар назариясини ривожлантиришда салмоқли ҳисса қўшдилар ва қўшмоқдалар.

Ўзбекистонда эҳтимолчилар мактабининг вужудга келиши В. И. Романовский ва унинг шогирдлари номи билан боғлиқдир.

I боб

ҲОДИСА ВА ЭҲТИМОЛ ТУШУНЧАСИ

1-§. Элементар ҳодисалар фазоси. Ҳодисалар устида амаллар

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири „тажриба“ ва тажриба натижасида кузатилиши мумкин бўлган ҳодиса тушунчаларидир. Тажриба ҳодисани рўёбга келтирувчи шартлар мажмуи (шартлар комплекси) S нинг бажарилишини таъминлашдан иборатдир. Тажрибадан тажрибага ўтганда рўй бераётган ҳодисалар ўзгариб турадиган ҳоллар ҳаётда кенг миқёсда учраб туради, бу ерда, албатта, тажрибани вужудга келтирувчи шартлар мажмуи (комплекси) S ўзгармас бўлган ҳоллар тушунилади.

Мисоллар. 1. Ўтказилаётган тажриба симметрик, бир жинсли тангани муайян шароитда ташлашдан иборат бўлсин. Албатта, бу ерда тажрибадан тажрибага ўтганда рўй берувчи ҳодисалар ҳар хил бўлади, масалан, бирор тажрибада „герб“ (Г) тушган бўлса, бошқасида танганинг тескари томони „рақам“ (Р) тушиши мумкин (бунда танга қирраси билан тушмайди деб фараз қилинади).

2. Кузатилаётган тажриба бирор алоқа бўлимидан бир кунда жўнатилаётган телеграммалар сони бўлсин, бу ерда ҳам тажрибадан тажрибага ўтганда, яъни кундан кунга ўтганда рўй бериши мумкин бўлган ҳодисалар (телеграммалар сонининг бирор натурал сонга тенглиги) ҳар хил бўлиши мумкин.

Ҳозирги таърифларни интуитив даражада келтирамиз, соф абстракт таърифлар кейинроқ берилади. Тажриба натижасида рўй бериши олдиндан аниқ бўлмаган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* дейилади. Тажрибанинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодиса* дейилади. Тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўплами *элементар ҳодисалар фазоси* дейилади. Элементар ҳодисалар фазосини U орқали, ҳар бир элементар ҳодисани эса $e (e \in U)$ орқали белгилаймиз.

Мисоллар. 3. Тажриба симметрик, бир жинсли тангани икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$e_1 = $ (ГГ) — биринчи ташлашда герб, иккинчисида ҳам герб тушиш ҳодисаси
$e_2 = $ (ГР) — биринчи ташлашда герб, иккинчисида рақам тушиш ҳодисаси
$e_3 = $ (РГ) - биринчи ташлашда рақам, иккинчисида герб тушиш ҳодисаси
$e_4 = $ (РР) — биринчи ташлашда рақам, иккинчисида ҳам рақам тушиш ҳодисаси.

Бу тажрибада элементар ҳодисалар фазоси U тўрт элементдан иборат:

$$U = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}.$$

4. Агар ўша танга уч марта ташланса, рўй бериши мумкин бўлган элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$$e_1 = (\text{ГГГ}),\ e_2 = (\text{ГГР}),\ e_3 = (\text{ГРР}),\ e_4 = (\text{РРР}),$$
$$e_5 = (\text{РГР}),\ e_6 = (\text{РРГ}),\ e_7 = (\text{ГРГ}),\ e_8 = (\text{РГГ}).$$

Бу ҳолда элементар ҳодисалар фазоси саккиз элементар ҳодисадан иборат:

$$U = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8\}.$$

5. Тажриба ёқлари бирдан олтигача номерланган бир жинсли кубни икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бу ҳолда элементар ҳодисалар ушбу кўринишга эга:

$$e_{ij} = (i,\ j).$$

Бу ҳодиса кубни биринчи ташлашда i рақамли ёқ, иккинчи ташлашда j рақамли ёқ тушганлигини билдиради, бу ерда

$$U = \{e_{ij}\},\quad i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ 6$$

ва элементар ҳодисалар сони $N = 6^2 = 36$.

6. Тажриба нуқтани [0, 1] сегментга тасодифий равишда ташлашдан иборат бўлсин, бу ерда элементар ҳодисалар фазоси $U = \{e\}$ [0, 1] тўпламдан иборатдир, яъни у континуум қувватга эга.

Бу айтганларимизни якунлаб, бундай хулоса қилишимиз мумкин: ҳар қандай тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган элементар ҳодисалар ҳодисалар тўпламини вужудга келтиради ва бу ҳодисалар тўплами чекли, саноқли (6- бетга қаранг) ва ҳатто континуум қувватга эга бўлиши мумкин.

Ҳар қандай тасодифий ҳодиса эса элементар ҳодисалар тўпламидан ташкил топган бўлиб, унинг „катта-кичиклиги“ унга кирган элементар ҳодисаларнинг „сони“га боғлиқдир. Тасодифий ҳодисаларни, одатда, латин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, ... лар билан белгиланади. „Энг катта“ ҳодиса U бўлиб, у барча элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир. Агар тажриба натижасида $A(A \subset U)$ га кирган e элементар ҳодисаларнинг бирортаси рўй берса, *A ҳодиса рўй берди* дейилади. Агар шу элементар ҳодисалардан бирортаси ҳам рўй бермаса, A ҳодиса рўй бермайди, унда A ҳодисага *тескари ҳодиса* (уни $\overline{A}$ орқали белгилаймиз) *рўй берган* деймиз. A ва $\overline{A}$ *ўзаро қарама-қарши ҳодисалар* дейилади.

Тажриба натижасида ҳар гал рўй берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* дейилади. Юқорида келтирилган барча элементар ҳодисалар фазоси U муқаррар ҳодисага мисол бўла олади. Бирорта ҳам элементар ҳодисани ўз ичига олмаган ҳодиса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади ва V орқали белгиланади. Табиийки, бу ҳодиса тажриба натижасида сира ҳам рўй бериши мумкин эмас. Рўй бермайдиган ҳодиса V ни тўплам маъносида $\varnothing$ бўш тўплам билан, муқаррар ҳодиса U ни Ω универсал тўплам билан белгилаймиз, яъни

$$U = \Omega, \quad V = \varnothing.$$

Мисоллар. 7. A ҳодиса тўртинчи мисолдаги тажрибада герб икки марта тушишидан иборат бўлсин. Бу ҳолда

$$A = \{e_2, e_7, e_8\}$$

бўлади, яъни тажриба натижасида e_2 рўй берса, ёки e_7 рўй берса, ёки e_8 рўй берса, A ҳодиса рўй берди деймиз. Агар e_2, e_7, e_8 дан бирортаси ҳам рўй бермаса, A ҳодиса рўй бермади деймиз, у ҳолда A га қарама-қарши ҳодиса $\overline{A}$ рўй берган бўлади.

8. B ҳодиса тангани уч марта ташлашда ҳеч бўлмаганда (камида, аҳалли) икки марта герб тушишидан иборат бўлсин, у ҳолда

$$B=\{e_1,\ e_2,\ e_7,\ e_8\}.$$

9. C ҳодиса тангани уч марта ташлашда ҳеч бўлмаганда бир марта герб тушишидан иборат бўлсин, унда

$$C=\{e_1\ e_2,\ e_3,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8\},$$

яъни бунга фақат битта e_4 элементар ҳодиса кирмаган. Бу мисоллардан кўриниб турибдики, C ҳодисанинг рўй бериш имконияти B дан ҳам, A дан ҳам кўпроқ, B ники эса A дан кўпроқ.

Бу мисолларда A, B, C ҳодисаларга қарама-қарши ҳодисалар қуйидагилардан иборат бўлади:

$$\overline{A}=\{e_1,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\},$$

$$\overline{B}=\{e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\},\quad \overline{C}=\{e_4\}.$$

10. Олтинчи мисолдаги тажрибада A ҳодиса ташланган нуқтанинг $a_1=\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right]$ сегментга тушишидан иборат бўлсин.

Агар ташланган нуқта $\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right]$ га тушса, A ҳодиса рўй берди деймиз, демак, бу мисолда A ҳодиса сон қиймати $\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right]$ сегментга тегишли бўлган нуқталар тўпламидан иборат бўлади.

11. Олтинчи мисолдаги тажрибада B ҳодиса ташланаётган нуқтанинг $a_2=\left[0,\ \frac{2}{3}\right]$ сегментга тушишидан иборат бўлсин. Бу ерда B ҳодиса сон қиймати $\left[0,\ \frac{2}{3}\right]$ сегментга тегишли бўлган нуқталар тўпламидан иборат бўлади. Кўриниб турибдики, тажриба натижасида B нинг рўй бериш имконияти A нинг рўй бериш имкониятдан кўпроқ, чунки a_2 сегментнинг узунлиги a_1 сегментнинг узунлигидан ортиқ.

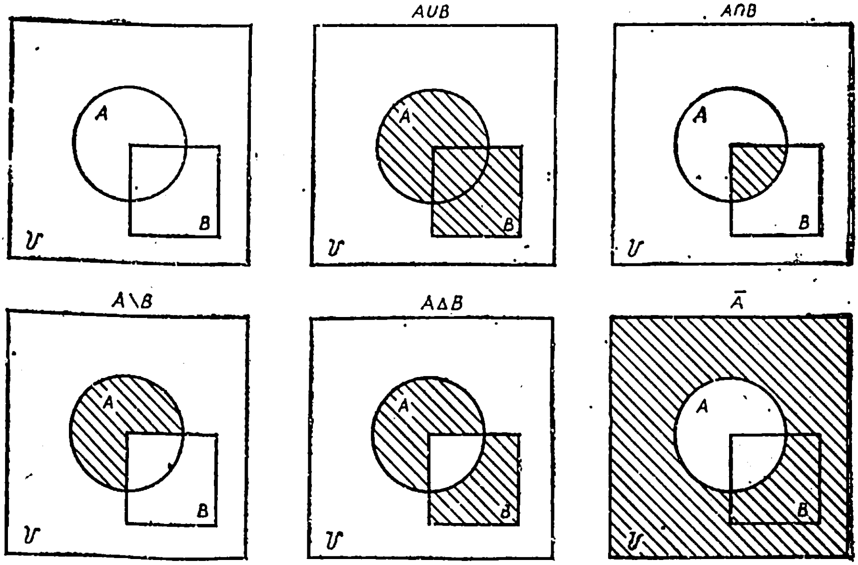
Айтиб ўтганимизга кўра ҳар қандай тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир, бошқача айтганда, тажриба натижасида кузатилиши мумкин бўлган ҳар қандай тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар фазоси U нинг қисм тўпламидир.

Энди тасодифий ҳодисалар орасидаги айрим муносабатларни кўриб чиқайлик.

1. Агар A ҳодисани ташкил этган элементар ҳодисалар B ҳодисага ҳам тегишли бўлса, A *ҳодиса* B *ҳодисани эргаштиради* дейилади ва $A \subset B$ каби белгиланади. Кўриниб турибдики, бу ҳолда A рўй берса, B ҳам албатта рўй беради, лекин B рўй берса, A нинг рўй бериши шарт эмас.

2. A ва B ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалар тўпламидан ташкил топган бўлса, яъни A ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта B га ҳам тегишли ва, аксинча, B ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта A га ҳам тегишли бўлса, A ва B *ҳодисалар тенг* дейилади ва $A = B$ каби белгиланади.

3. A ва B *ҳодисаларнинг йиғиндиси* деб, A ёки B нинг, ёки иккаласининг ҳам рўй беришидан иборат C ҳодисани айтамиз. A ва B ҳодисаларнинг йиғиндисини $A \cup B$ (ёки $A + B$) орқали белгиланади.



1- шакл.

4. A ва B ҳодисаларнинг бир вақтда рўй беришини таъминловчи барча $e \in U$ лардан ташкил топган C ҳодиса A ва B *ҳодисаларнинг кўпайтмаси* дейилади ва $A \cap B$ (ёки AB) каби белгиланади.

5. A ва B ҳодисаларнинг айирмаси деб, A рўй бериб, B рўй бермаслигидан иборат C ҳодисага айтилади. A ва B ҳодисаларнинг айирмаси $A \setminus B$ (ёки $A-B$) каби белгиланади.

6. Агар $A \cap B = \varnothing$ бўлса, A ва B *ҳодисалар биргаликда эмас* дейилади.

7. A ҳодисага қарама-қарши $\overline{A}$ ҳодиса A га кирмаган барча элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир, яъни $A \cap \overline{A} = \varnothing$ ва $A \cup \overline{A} = U$.

8. Агар $A_1 \cup \dots, \cup A_n = U$ бўлса, $A_1, \dots, A_n$ *ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади* дейилади. Хусусан, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2 \dots, n$ ва $A_1 + \dots + A_n = U$ бўлса, $A_1, \dots, A_n$ ҳодисалар *ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади* дейилади.

Ҳодисалар орасидаги юқорида киритилган тушунчаларни 1- шакл ёрдамида тушунтириш қулайдир. S шартлар комплекси 1- шаклдаги катта квадратга нуқтани таваккалига ташлашдан иборат бўлсин.

„Ташланган нуқтанинг квадратчада ётиши“ ҳодисасини A орқали, „ташланган нуқтанинг айлана ичида ётиши“ ҳодисасини B орқали белгилайлик. У ҳолда $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$, $\overline{A}$ ҳодисалар ташланган нуқтанинг 1-шаклдаги мос фигураларнинг штрихланган соҳаларига тушишидан иборат бўлади.

Тасодифий ҳодисаларнинг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин;

а) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — коммутативлик қонуни;

б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативлик қонуни;

в) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ айнийлик қонуни;

г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивлик қонуни.

Бу қонунларни исботлашни китобхонга ҳавола қиламиз

2-§. Элементар ҳодисалар дискрет фазоси. Эҳтимоллар фазоси

Олдинги параграфда кўриб ўтилган 3—5- мисолларда элементар ҳодисалар фазоси Ω чекли бўлиб, 4, 8 ва 36 элементдан иборат эди. Тажриба натижасида рўй берадиган элементар ҳодисалар сони саноқли бўлган ҳол учун бир мисол келтирамиз.

Мисол. Тажриба тангани биринчи бор герб тушгунча ташлашдан иборат бўлсин. Бу мисолда $\Omega = \{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ бўлиб,

$e_1 = \text{Г}$ — биринчи ташлашдаёқ герб тушганини,

$e_2 = \text{РГ}$ — биринчи ташлашда рақам, иккинчисида герб тушганини,

$e_3 = \text{РРГ}$ — биринчи ва иккинчи ташлашда рақам, учинчисида герб тушганини,

. . . .

$e_i = \underbrace{\text{РРР} \ldots \text{Р}}_{i-1}\text{Г}$ — биринчи, иккинчи ва ҳоказо $i-1$-ташлашда рақам, i-ташлашда герб тушганини билдиради.

Агар элементар ҳодисалар фазоси чекли ёки саноқли миқдордаги элементар ҳодисалардан иборат бўлса, у *элементар ҳодисалар дискрет фазоси* дейилади.

Агар Ω да мусбат қийматли $P(e_i)$ функция берилган бўлса ва у $P(\Omega) = \sum\limits_{e \in \Omega} P(e) = 1$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда Ω да *эҳтимоллар тақсимоти берилган* дейилади.

Ҳар қандай $A \in \Omega$ *тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли* деб, ушбу

$$P(A) = \sum_{\in eA} P(e)$$

сонга айтилади.

Мисол. Бир жинсли кубни ташлашда i очко ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) тушиш ҳодисасини e_i билан белгилайлик. У ҳолда элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{e_i\}$, $i = \overline{1, 6}$ бўлади. Куб бир жинсли бўлгани учун e_i ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(e_i) = \frac{1}{6}$ деб ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир.

Худди шунга ўхшаш, симметрик, бир жинсли танга ташлашда e_1 герб (Г), e_2 рақам (Р) тушиш ҳодисаси бўлса, $P(e_1) = P(e_2) = \frac{1}{2}$ дейиш табиийдир. У ҳолда тангани биринчи бор герб тушгунча (11-бетга қаранг) ташлашда e_i орқали i- ташлашда биринчи бор герб тушиши ҳодисаси белгиланса, тегишли эҳтимолларни

$$P(e_1) = \frac{1}{2}, \quad P(e_2) = \frac{1}{2^2}, \ \ldots, \quad P(e_k) = \frac{1}{2^k}, \ \ldots$$

каби берилиши мақсадга мувофиқдир. Бундай берилган функция Ω да эҳтимоллар тақсимотини аниқлайди, чунки ҳар бир $P(e_i) > 0$ ва

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(e_i) = 1.$$

Лекин ҳар сафар ҳам эҳтимолни бунчалик осон аниқлаш мумкин деб тушунсак хато қиламиз. Масалан, 1- § да кўрилган мисолда элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{e_i\}$, e_i- i-кунда жўнатилган телеграммалар сонидан иборат бўлса, бу мисолда $P(e_i)$ ни аниқлаш анча мушкулдир. Бу ерда $P(e_i)$ ни маълум шартлар асосида, математик мулоҳазалар ёрдамида аниқлаш мумкин. Демак, элементар ҳодисалар дискрет фазосида элементар ҳодисалар эҳтимолини киритсак, унда ҳар қандай A ҳодисанинг эҳтимоли

$$P(A) = \sum_{e \in A} P(e)$$

кўринишга эга. Бундай аниқланган эҳтимоллик қуйидаги хоссаларга эга.

1. $P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = \sum_{e \in \Omega} P(e) = 1.$

2. $$P(A \cup B) = \sum_{e \in A \cup B} P(e) = \sum_{e \in A} P(e) + \sum_{e \in B} P(e) -$$
$$- \sum_{e \in A \cap B} P(e) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3. $P(\overline{A}) = \sum_{e \in \overline{A}} P(e) = \sum_{e \in \Omega \setminus A} P(e) = \sum_{e \in \Omega} P(e) -$

$$- \sum_{e \in A} P(e) = 1 - P(A).$$

Иккинчи хоссадан, хусусий ҳолда — $A \cap B = \varnothing$ бўлганда — $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (қўшиш теоремаси) келиб чиқади. Буни *эҳтимолликнинг чекли аддитивлик хоссаси* дейилади ва у биргаликда рўй бермайдиган ($A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$) ҳар қандай $\{A_i\}$ ҳодисалар учун ҳам ўринли, яъни

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Бу хосса қуйидаги

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

муносабатдан ва $n \to \infty$ да

$$P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \to 0$$

дан келиб чиқади.

3- §. Эҳтимолликнинг классик таърифи Комбинаторика элементлари

Агар Ω чекли n та элементар ҳодисадан ташкил топган бўлиб, ҳар бир элементар ҳодиса e_i нинг эҳтимоли $P(e_i)$ ни $\frac{1}{n}$ га тенг деб олинса, e_i элементар ҳодисалар *тенг имкониятли* дейилади. Бундай фазода ҳар қандай A ҳодисанинг эҳтимолини қуйидагича аниқлаш табиий:

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} P(e_i) = \frac{A \text{ га кирган элементлар сони}}{n}.$$

Ҳодисанинг функцияси бўлмиш бу $P(A)$ эҳтимолнинг ҳамма хоссаларига эгалигини текшириб чиқиш қийин эмас. Эҳтимолнинг юқорида киритилган таърифи унинг классик таърифидир. Кўриниб турибдики, классик таъриф фақат тенг имкониятли чекли сондаги элементар ҳодисалардан ташкил топган Ω фазо учун киритилиши мумкин, бу ҳол классик таърифни қўллашни чегаралайди, чунки Ω элементлари чекли бўлибгина қолмай, балки турли имкониятли бўлиши ҳам мумкин-да!

Классик таърифдан фойдаланиб масалалар ечишда комбинаторика элементлари муҳим роль ўйнайди, шуни эътиборга олиб комбинаториканинг баъзи элементлари устида тўхталиб ўтамиз.

1. **Турли группадан биттадан танлаб олишлар комбинацияси.** r та турли группа мавжуд бўлсин. Биринчи группа n_1 та $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)})$ элементдан, иккинчи группа n_2 та $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)})$ элементдан ва ҳоказо, r-группа n_r та $(a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_{n_r}^{(r)})$ элементдан тузилган бўлсин. Ҳар бир группадан фақат биттадан элемент олиб, нечта r элементли группа тузиш мумкин?

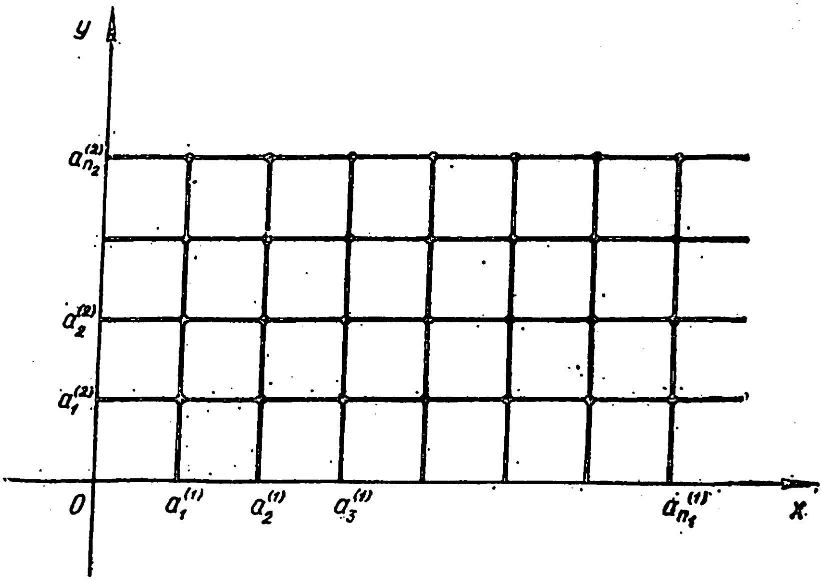
Шундай усулда тузиш мумкин бўлган барча группалар сони

$$N = n_1 n_2 \dots n_r \tag{1}$$

дан иборат бўлади.

Исбот. Бу фактни исботлаш учун математик индукция методини қўллаймиз. Бунинг учун (1) нинг $r = 2$ да тўғрилигини исботлаймиз. Тўғри бурчакли координаталар системасида Ox ўққа биринчи группа элементларини, Oy ўққа иккинчи группа элементларини жойлаштирамиз (2- шакл). У ҳолда барча $(a_i^{(1)}, a_j^{(2)})$ кўринишдаги группалар сони $N = n_1 n_2$ га тенг бўлади. Энди (1) формулани $r - 1$ учун тўғри деб фараз қилиб, унинг r учун тўғрилигини кўрсатамиз. $r - 1$ бўлган ҳолда $(a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_{r-1}}^{(r-1)})$ кўринишдаги группалар сони $N = n_1 n_2 \dots n_{r-1}$ га тенг. Натижада иккита янги группа ҳосил қиламиз. Иккита группа бўлган ҳол юқорида исбот қилинган эди. Демак, бу ҳолда группалар сони $N = n_1 \cdot n_2, \dots, n_r$ га тенг.

2. **Қайтариладиган танлашлар сони.** Фараз қилайлик, n та турли элементга эга бўлган группа $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ берилган бўлсин. Бу группадан битталаб элемент олиб уни фиксирлагач, ўрнига қайтариб қўямиз ва бу процессни яна такрорлаймиз. Бу усулдан r марта фойдаланиб, r элементли $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ группани ҳосил қиламиз. Бу усулда танлаб олишлар сони $N = n^r$



2- шакл.

га тенг. Бу формуланинг исботи (1) дан бевосита келиб чиқади, бунинг учун r та бир хил элементларга эга бўлган ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) группани қараш кифоя.

3. Ўринлаштиришлар сони (қайтарилмайдиган танлашлар). Комбинаторикада ўринлаштириш дейилганда тартибланган жойлаштиришни тушунилади. Агар r та турли элемент n та ячейкага кўпи билан биттадан жойлаштирилган бўлса, у ҳолда (1) формулага кўра барча ўринлаштиришлар сони

$$N = A_n^r = n(n-1)\ \ldots\ (n-r+1)$$

га тенгдир. Агар $r = n$ бўлса, ўринлаштиришлар сони ўрин алмаштиришлар сонига тенг бўлади:

$$N = P_n = n(n-1)\ \ldots\ 1 = n!$$

4. Группалашлар сони (комбинациялар). n та ячейкага r та турли элемент жойлашган бўлсин. У ҳолда группалашлар сони

$$N = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

га тенглигига бевосита ишонч ҳосил қилиш мумкин. Агар n та элементли группа k та группага бўлинган бўлиб, i- группада n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ элемент $(n_1 + \ldots + n_k = n)$ мавжуд бўлса, у ҳолда бу усулда группалашлар сони

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \qquad (2)$$

Исбот. n элементли группани n_1 ва $n - n_1$ элементга эга бўлган иккита группага бўламиз. Бундай группалар сони

$$N_1 = C_n^{n_1}$$

усулда бўлади. Навбатда $n - n_1$ ни n_2 ва $n - n_1 - n_2$ элементли икки группага бўламиз, бундай бўлишлар сони

$$N_2 = C_{n-n_1}^{n_2}$$

усулда бўлади. Бу процессни кетма-кет давом эттириб,

$$N_{k-1} = C_{n-n_1-\ldots-n_{k-2}}^{n_{k-1}}$$

ни ҳосил қиламиз. Натижада (1) формуладан (2) тенгликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди группалашнинг баъзи бир хоссаларини келтирамиз. Ихтиёрий $0 \leqslant m \leqslant n$ лар учун

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

ўринли, ҳақиқатан ҳам,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,([n-(n-m)]!} = C_n^{n-m}.$$

Қуйидаги муносабатларнинг тўғрилигига бевосита ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$C_{n-1}^{l-1} + C_{n-1}^{l} = C_n^l;$$

$$\sum_{m=k}^{n} m(m-1)(m-2) \ldots (m-k+1)\, C_n^m = \qquad (3)$$
$$= n(n-1) \ldots (n-k+1)\, 2^{n-k}.$$

Охирги тенгликни

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m} z^m = (az+b)^n \qquad (4)$$

ҳосил қилувчи функция ёрдамида ҳисоблаймиз, бу ерида a, b — ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Ҳақиқатан ҳам, (4) ифоданинг z бўйича k- тартибли ҳосиласини ҳисобласак,

$$\varphi^{(k)}(z)=\sum_{m=k}^{n} m(m-1)\dots(m-k+1)\,C_n^m a^m b^{n-m} z^{n-k}=$$

$$=n(n-1)\dots(n-k+1)(az+b)^{n-k}a^k \qquad (5)$$

ҳосил бўлади. Бу ифодадан $a=1$, $b=1$, $z=1$ да (3) ни ҳосил қиламиз.

Энди классик таърифдан фойдаланиб, баъзи бир ҳодисаларнинг эҳтимолини ҳисоблаймиз.

1- мисол. Учта шашқолтош ташлаганда тушган очколар йиғиндиси 18 га тенг бўлиш ҳодисасининг эҳтимолини топинг.

Ечиш. $(E_i^{(1)}, E_j^{(2)}, E_l^{(3)})$ $(i, j, l=\overline{1, 6})$ орқали мос равишда биринчи шашқолтошда i, иккинчисида j ва учинчисида l очколар тушишини белгилаймиз, у ҳолда бу кўринишда танлаб олишлар сони $n=6^3=216$. Агар $i=6$, $j=6$ ва $l=6$ бўлса, йиғинди 18 га тенг бўлади, бундай имкониятлар сони эса 216 тадан фақат битта, $m=1$, демак, $P=\frac{1}{216}$.

2- мисол. Пилла қабул қилиш пунктида пилланинг сортини аниқлаш мақсадида 10^4 дона пилладан 100 донасини тасодифий танлаб олинади. Агар 100 дона пилланинг ҳаммаси биринчи сорт бўлса, барча пилла биринчи сортга қабул қилинади, акс ҳолда иккинчи сортга олинади. Ҳамма пиллалар ичида 100 донаси иккинчи сорт бўлсин Лаборант биринчи сортга қабул қиладиган 10^4 дона пилла ичида 100 донаси иккинчи сорт чиқиши ҳодисасининг эҳтимолини топинг.

Ечиш. 10^4 дона пилладан 100 тадан танлаб олишлар сони

$$n=C_{10000}^{100}$$

га тенг. Шартга кўра, олинган 100 дона пилла биринчи сорт бўлса, барча пилла биринчи сортга қабул қилинади. Демак, 100 дона иккинчи сортга тегишли пилла қолган 9900 дона пилла ичида бўлади, бундай танлашлар сони эса $m = C_{9900}^{100}$. Классик таърифга кўра, бу ҳодисанинг эҳтимоли:

$$P = \frac{C_{9900}^{100}}{C_{10000}^{100}} = \frac{9801 \cdot 9802 \ldots 9900}{9901 \cdot 9902 \ldots 10000} \sim \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \sim \frac{1}{e}.$$

3-мисол. Қарталар дастасидан (36 дона қарта) таваккалига тўрттаси олинди. Шулар ичида битта „туз" қарта бўлиш эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. 36 дона қартадан 4 тасини C_{36}^4 усулда олиш мумкин. Битта „туз" қартани C_4^1 усулда ва учта туз бўлмаган қартани C_{32}^3 усулда олиш мумкин, у ҳолда ҳамма қулайлик туғдирувчи имкониятлар сони $C_4^1 \cdot C_{32}^3$ бўлади. Шунинг учун

$$P = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^3}{C_{36}^4} \approx 0{,}3368.$$

4-мисол. Китоб лотереясида жами n та билет бор, улардан m таси ютуқли. Таваккалига олинган k та лотереяда камида битта ютуқ чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. n та билетдан k тасини C_n^k усулда танлаш мумкин. Ютуқ чиқмайдиган билетлар сони $n - m$ та бўлиб, улардан k тасини C_{n-m}^k усулда танлаш мумкин. У ҳолда битта ҳам билетга ютуқ чиқмаслик эҳтимоли

$$\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

нисбатга тенг бўлади. Камида битта билетга ютуқ чиқиш ҳодисаси битта ҳам билетга ютуқ чиқмаслик ҳодисасига қарама-қарши ҳодиса бўлгани сабабли

$$P = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

4-§. Эҳтимолнинг геометрик таърифи

Бирор G соҳа берилган бўлиб, бу соҳа G_1 соҳани ўз ичига олсин, $G_1 \subset G$. G соҳага таваккалига (тасодифан) ташланган нуқтанинг G_1 соҳага ҳам тушиши эҳтимолини топиш талаб этилсин. Бу ерда Ω элементар ҳодисалар фазоси G нинг барча нуқталаридан иборат ва континуум қувватга эга. Бинобарин, бу ҳолда классик таърифдан фойдалана олмаймиз. Ташланган нуқта G га албатта тушсин ва унинг бирор G_1 қисмига тушиш эҳтимоли шу G_1 қисмнинг ўлчовига (узунлигига, юзига, ҳажмига) пропорционал бўлиб, G_1 нинг формасига ва G_1 ни G нинг қаерида жойлашганлигига боғлиқ бўлмасин. Бу шартларда қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли

$$P=\frac{\text{mes } G_1}{\text{mes } G}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу формула ёрдамида аниқланган P функция эҳтимолнинг барча хоссаларини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

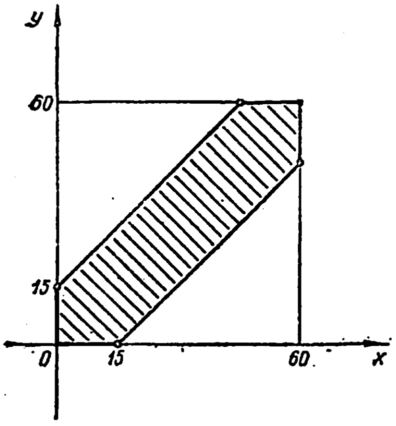
1-мисол. L узунликка эга бўлган кесмага таваккалига нуқта ташлансин. Ташланган нуқтани кесманинг ўртасидан кўпи билан l масофада ётиш ҳодисасининг эҳтимолини топинг.

Ечиш. Юқоридаги шартни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами $-l\leqslant x\leqslant l$ дан иборат (умумийликка ҳалал келтирмасдан, кесманинг ўртасини саноқ боши деб қабул қиламиз). Бу кесманинг узунлиги $2l$ га тенг. Демак, қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли

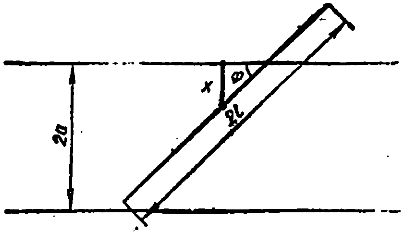
$$P=\frac{2l}{L}.$$

2-мисол. Икки дўст соат 9 билан 10 ўртасида учрашмоқчи бўлишди. Биринчи келган киши дўстини чорак соат давомида кутиши аввалдан шартлашиб олинди, агар бу вақт мобайнида дўсти келмаса, у кетиши мумкин. Агар улар соат 9 билан 10 ўртасидаги ихтиёрий моментда келиши мумкин бўлиб, келиш моментлари кўрсатилган вақт мобайнида тасодифий бўлиб, бу моментлар ўзаро келишиб олинган бўлмаса, у ҳолда бу икки дўстнинг учрашиш эҳтимоли қанчага тенг?

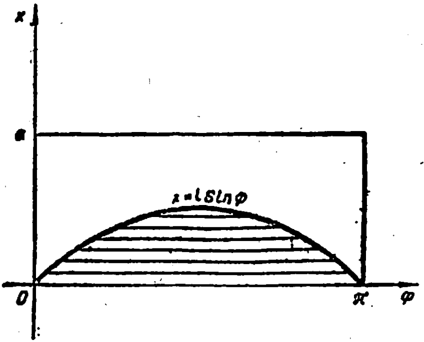
Ечиш. Биринчи кишининг келиш моменти x, иккинчисиники эса y бўлсин. Уларнинг учрашишлари учун $|x-y|\leqslant 15$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. x ва y ларни текисликдаги Декарт координаталари сифатида тасвирлаймиз. Рўй бериши мумкин бўлган барча имкониятлар томонлари 60 бўлган квадрат нуқталаридан ва учрашишга қулайлик туғдирувчи имкониятлар штрихланган юздан иборатдир. Изланаётган эҳтимол штрихланган юзнинг квадрат юзига бўл-



3- шакл.



4- шакл.



5- шакл.

ган нисбатига тенг (3-шакл):

$$P = \frac{7}{16}.$$

3-мисол. Бюффон масаласи. Текисликда бир-биридан $2a$ масофада турувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Текисликка узунлиги $2l$ ($l < a$) бўлган игна таваккалига ташланган. Игнанинг бирорта тўғри чизиқни кесиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. x орқали игнанинг ўртасидан унга яқинроқ бўлган параллелгача бўлган масофани ва φ орқали игна билан бу параллел орасидаги бурчакни белгилаймиз (4- шакл). x ва φ катталиклар игнанинг ҳолатини тўла аниқлайди. Игнанинг барча ҳолатлари томонлари a ва π бўлган тўғри тўртбурчак нуқталари билан аниқланади. Игнанинг параллел тўғри чизиқ билан кесишиши учун $x \leqslant l \sin\varphi$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Қилинган фаразларга кўра изланаётган эҳтимол 5-шаклдаги штрихланган юзнинг тўғри тўртбурчак юзига нисбатига тенг бўлади:

$$P = \frac{1}{a\pi}\int_0^\pi l\sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Бюффон масаласи отишлар назариясига оид кўпгина масалаларни ҳал этишда муҳимдир. Бундан ташқари, Бюффон масаласидан π сонининг қийматини тажриба йўли билан ҳисоблашда фойдаланиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, ечилган масаладан $\pi=\frac{2l}{Pa}$ формула ҳосил бўлади. Игнани ташлаш ёрдамида π ни аниқлаш учун жуда кўп тажрибалар ўтказилган. Улардан баъзи бирларининг натижаларини келтирамиз.

Тажриба ўтказган киши	Йили	Игна ташлашлар сони	π нинг экспериментал қиймати
Фокс	1894	1120	3,1419
Лаццарини	1901	3408	3,1415929

Тажрибалар сони етарлича катта бўлганда

$$\pi\approx\frac{2l\cdot n}{a\cdot m}$$

формула ўринли бўлиб, бунда n — тажрибалар сони, m эса игнанинг параллел чизиқлардан бирини кесиб тушган ҳоллари сонидир.

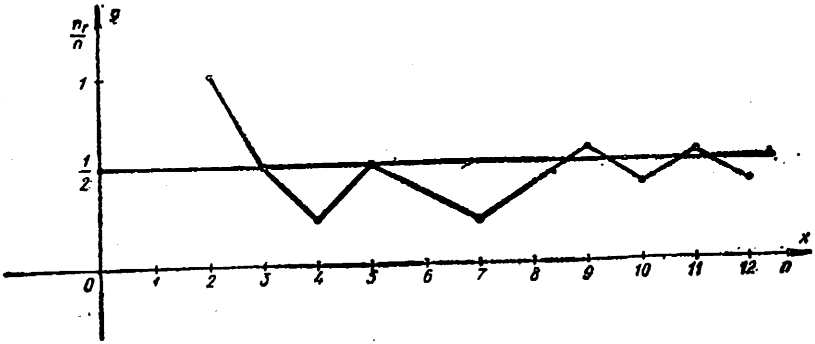
5- §. Эҳтимолнинг статистик таърифи

Шартлар комплекси ўзгармас бўлганда бирор A ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги устида узоқ кузатишлар ўтказилганда, унинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги маълум турғунлик (барқарорлик) характерига эга бўлади. A ҳодисанинг n та тажрибада рўй беришлар сонини ν деб олсак, у ҳолда жуда кўп сондаги кузатишлар серияси учун $\frac{\nu}{n}$ нисбат деярли ўзгармас миқдор бўлиб қолаверади. $\frac{\nu}{n}$ нисбат A ҳодисанинг *рўй бериш частотаси* дейилади. Частотанинг турғунлик хусусияти биринчи бор, демографик характердаги ҳодисаларда очилган. Бизнинг эрамиздан 2238 йил бурун қадимий Хитойда ўғил бола туғилишлар сонининг жами туғилган болалар сонига нисбати деярли $\frac{1}{2}$ га тенглиги ҳисобланган.

Лаплас Лондонда, Петербургда ва бутун Францияда йиғилган жуда кўп статистик материалларга таяниб, туғилган ўғил болалар сонининг жами туғилган болалар сонига нисбати тахминан $\frac{22}{43}$ га тенглигини кўрсатди. Бу соннинг бир неча ўн йиллар мобайнида ўзгармай қолишини статистик маълумотлар тасдиқлади.

Тангани ташлаш мисолини кўрайлик. Бунда тажриба натижаси иккита ҳолатдан иборат: Г — „герб“ ёки Р — „рақам“. Бу тажрибада Г ёки Р тушишини олдиндан айтиш қийин, чунки тангани қайси томони билан тушишига таъсир этувчи ҳамма факторларни эътиборга олишимиз мумкин эмас. Худди шунингдек, битта лотерея билети сотиб олган кишига ютуқ чиқиши ёки чиқмаслиги, ёки жуда мураккаб электрон ҳисоблаш машинасининг белгиланган муддатгача ё ундан сўнг ишдан чиқиши ҳам жуда кўп факторларга боғлиқ. Бундай пайтда алоҳида тажрибанинг бирор қонуниятни очиши жуда қийин. Бироқ тажрибалар сони ошириб борилса, маълум бир қонуниятни пайқаш мумкин.

Тангани n марта ташладик деб фараз қилайлик ва биринчи n та тажрибада „герб“ тушишлар сонини $n_{\text{г}}$ деб белгилайлик. Қуйидаги шаклни ясаймиз: абсцисса ўқида ўтказилган тажрибалар сонини, ордината ўқида эса $\frac{n_{\text{г}}}{n}$ нисбатни белгилаб борамиз. n нинг ортиб бориши билан $\left(n, \frac{n_{\text{г}}}{n}\right)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиқ $y=\frac{1}{2}$ чизиққа яқинлашади (6-шакл). Бу ҳолни тек-



6- шакл.

шириш мақсадида Бюффон тангани 4040 марта ташлади, шулардан 2048 марта герб тушди, чунончи герб тушиши частотаси $\frac{n_{\text{г}}}{n} \simeq 0,5080$. Пирсон тангани 24000 марта ташлаганда, шулардан 12012 тасида герб тушди, $\frac{n_{\text{г}}}{n} \simeq 0,5005$. Бу ҳол умумий характерга эга: бирхил шароитда ўтказилган тажрибалар кетма-кетлигида у ёки бу ҳодисани рўй бериши частотаси бирор $p \in [0,1]$ сонига „яқинлашиб“ боради.

Бу тажрибаларда Г тушиш частотаси ўзгармас сон $p=\frac{1}{2}$ атрофида тебраняпти, шу $p=\frac{1}{2}$ ни симметрик танга ташлаганда Г (герб) тушиши ҳодисасининг эҳтимоли деб олиш табиий. Агар, тажрибалар сони етарлича кўп бўлса, у ҳолда шу тажрибаларда қаралаётган A ҳодисанинг рўй бериш частотаси бирор ўзгармас $p \in [0,1]$ сон атрофида турғун равишда тебранса, шу p сонни A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли деб қабул қиламиз. Бундай усулда аниқланган эҳтимол ҳодисанинг *статистик эҳтимоли* дейилади. Мизес ҳодисанинг эҳтимолини ушбу муносабат ёрдамида киритган:

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{n_{\text{г}}}{n}.$$

Эҳтимолнинг бу таърифи жуда ноқулай, чунки бирор ҳодисанинг рўй бериши частоталари кетма-кетлиги турли экспериментлар ўтказилганда турлича бўлади. Бундан ташқари, амалда биз частоталар кетма-кетлигини эмас, балки унинг чекли элементларини олган бўламиз. Ҳамма кетма-кетликни олиб бўлмайди. Шу сабабли, эҳтимоллар назариясини аксиомалар асосида қуриш мақсадга мувофиқдир.

6- §. Эҳтимоллар назариясини аксиоматик асосда қуриш

Совет математиги С. Н. Бернштейн 1917 йилда биринчи бўлиб эҳтимоллар назариясини аксиоматик асосда қуришга ҳаракат қилди. Академик А. Н. Колмогоров томонидан киритилган эҳтимоллар назариясининг аксиомалари функцияларнинг метрик назариясига асослангандир. Ω — бирор тўплам, $\mathfrak{F}$ — унинг қисм тўпламларининг бирор системаси бўлсин. Агар

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$;

2. $A_i \in \mathfrak{F}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ дан $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}$ келиб чиқса;

3. $A \in \mathfrak{F}$ дан $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ келиб чиқса, $\mathfrak{F}$ система *алгебра ташкил этади* дейилади.

Агар иккинчи шарт ўрнига

$$A_i \in \mathfrak{F}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

дан $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$ келиб чиқсин деган шартнинг бажарилиши талаб қилинса, у ҳолда $\mathfrak{F}$ система *σ-алгебра ташкил этади* дейилади. Одатда, Ω — *элементар ҳодисалар фазоси*, $\Omega = \{e\}$ — фазонинг элементлари, нуқталари *элементар ҳодисалар*, $\mathfrak{F}$ нинг элементлари эса *тасодифий ҳодисалар* дейилади. $\mathfrak{F}$ нинг ўзи эса *ҳодисаларнинг σ-алгебраси* дейилади.

Таъриф. Агар Ω тўплам ва бу тўпламнинг қисм тўпламларидан иборат $\mathfrak{F}$ σ-алгебра берилган бўлса, у ҳолда *ўлчовли фазо берилган* дейилади ва уни $<\Omega, \mathfrak{F}>$ каби белгиланади.

σ-алгебранинг таърифидан $\bar{\Omega} = \varnothing \in \mathfrak{F}$ экани келиб чиқади.

Ω — муқаррар ҳодиса, $\varnothing$ эса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади.

Энди А. Н. Колмогоров аксиомаларини келтирамиз.

1-аксиома. Ихтиёрий $A \in \mathfrak{F}$ ҳодисага унинг эҳтимоли деб аталувчи $P(A) \geqslant 0$ сон мос қўйилсин.

2-аксиома. $P(\Omega) = 1$.

3-аксиома. Қўшиш аксиомаси. Агар $\{A_n\}$ ҳодисалар чекли кетма-кетлиги жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаса, у ҳолда

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Эҳтимоллар назариясининг кўпгина масалаларини ҳал қилишда 3-аксиома ўрнига ундан кучлироқ бўлган аксиомага зарурат туғилади.

3^1-аксиома. Қўшишнинг кенгайтирилган аксиомаси. Агар $\{A_n\}$ ҳодисалар кетма-кетлиги жуфт-жўфти билан биргаликда бўлмаса, у ҳолда

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Эҳтимолнинг бу аксиома билан берилган хоссаси унинг *саноқли аддитивлиги* дейилади.

3^{I} - аксиомани унга эквивалент қуйидаги узлуксизлик аксиомаси билан алмаштириш мумкин.

3^{II}- **аксиома.** Узлуксизлик аксиомаси. Агар $\mathfrak{F}$ σ- алгебрага тегишли бўлган $B_1, B_2, \ldots, B, \ldots$ тасодифий ҳодисалар учун $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ бажарилса ва $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing$ ўринли бўлса, у ҳолда $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = 0$ бўлади.

3^{I}- аксиома ва 3^{II}- аксиоманинг тенг кучли эканлигини кўрсатамиз.

3^{I}- аксиомадан 3^{II}- аксиоманинг келиб чиқишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ ҳодисалар учун $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ бўлсин ва $\bigcap_{k>n} B_k = V$ бажарилган бўлсин, у ҳолда B_n ҳодиса учун

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\overline{B}_{k+1} + \bigcap_{k>n} B_k$$

бажарилади.

Бу қўшилувчилар жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмагани учун 3^{I}- аксиома ва $P\left(\bigcap_{k>n} B_k\right) = 0$ га кўра

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k\overline{B}_{k+1}) + P\left(\bigcap_{k>n} B_k\right) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k\overline{B}_{k+1}),$$

яъни $P(B_n)$ яқинлашувчи қатор $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k\overline{B}_{k+1}) = P(B_1)$ нинг қолдиқ ҳадидир, демак,

$$n \to \infty \text{ да } P(B_n) \to 0.$$

8^{II}- аксиомадан чекли аддитивлик бажарилганда 8^{I}- аксиоманинг келиб чиқишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлиб, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ бўлсин, у ҳолда $B_{n+1} \subset B_n$. Агар B_n ҳодиса рўй берса, $A_i (i \geqslant n)$ лардан бирортаси рўй беради. A_k лар жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмагани учун $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots$ рўй бермайди. Демак, $B_{i+1}, B_{i+2}, \dots$ лар рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодисалар бўлади, бу эса $\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k$ нинг мумкин бўлмаган ҳодиса эканини кўрсатади, у ҳолда $3''$- аксиомага кўра $n \to \infty$ да $P(B_n) \to 0$ аммо $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i + B_{n+1}$ лигидан

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(B_{n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

$< \Omega, \mathfrak{F}, P >$ учлик *эҳтимоллик фазоси* дейилади. Шундай қилиб, эҳтимоллик фазоси $< \Omega, \mathfrak{F}, P >$ ўлчовли фазо ва $\mathfrak{F}$ да берилган манфий бўлмаган, нормалаштирилган, саноқли аддитив P ўлчовдан иборат бўлар экан, P ўлчов *эҳтимоллик ўлчови* дейилади. Одатда, аксиомалар системасига қуйидаги талабларни қўйишади:

1. Аксиомалар системасининг ўзаро зид эмаслиги.
2. Аксиомалар системасининг ўзаро боғлиқ эмаслиги.
3. Аксиомалар системасининг тўлалиги.

Эҳтимоллар назариясининг аксиомалар системаси ўзаро зид эмас, чунки берилган аксиомаларни қаноатлантирадиган реал объектлар мавжуд.

Мисол. Элементар ҳодисалар фазоси

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

бўлсин. Ҳар бир e_k $(k = \overline{1\ n})$ элементар ҳодисага $\frac{1}{n}$ сонни мос қўямиз, $P(e_k) = \frac{1}{n}$. У ҳолда e_k лар тенг эҳтимолли ҳодисалар бўлади. Ω ёрдамида

$$\mathfrak{F} = \{\Omega, V, \{e_1\}, \dots, \{e_n\}, \dots\}$$

алгебрани тузамиз, бу система 2^n та элементдан иборат бўлади. $\mathfrak{F}$ га тегишли ҳар бир A ҳодиса ушбу кўринишда ёзилади:

$$A = \bigcup_{k \in I} e_k, \quad I \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}.$$

A ҳодисанинг эҳтимоли деб қуйидаги йиғиндини оламиз:

$$P(A) = \sum_{k \in I} \frac{1}{n}.$$

Агар I тўпламнинг қуввати k бўлса,

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

бўлади. $\mathfrak{F}$ алгебрада аниқланган бу $P(A)$ функция барча аксиомаларни қаноатлантиришини текширамиз:

1) $P(A) \geqslant 0$. Дарҳақиқат, мисолимизда $k = \overline{0, n}$ бўлгани учун $P(A) = \frac{k}{n} \geqslant 0$ дир;

2) $P(\Omega) = 1$. Ҳақиқатан ҳам, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} e_k$ лигидан

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} e_k\right) = \sum_{k \in N} \frac{1}{n} = 1$$

келиб чиқади;

3) $A \cap B = V$ бўлса, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Агар $A = \bigcup_{k \in I_1} e_k$, $B = \bigcup_{k \in I_2} e_k$, $I_1 \subseteq N$, $I_2 \subseteq N$, $I_1 \cap I_2 = V$ шартлар бажарилса, $A \cap B = V$. Фараз қилайлик, I_1 нинг қуввати k_1, I_2 нинг қуввати k_2 бўлсин, у ҳолда

$$P(A) = \frac{k_1}{n}, \quad P(B) = \frac{k_2}{n}$$

ва

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{k \ni I_1 \cup I_2} e_k\right) = \frac{k_1 + k_2}{n} =$$

$$= \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = P(A) + P(B)$$

бўлади. Демак, Колмогоров аксиомалари системаси зид эмас экан.

Эҳтимоллар назариясининг аксиомалари системаси тўла эмас, яъни тайин бир Ω учун σ- алгебра $\mathcal{F}$ да эҳтимоллик ўлчови P ни турлича усулда аниқлаш мумкин. Агар тажрибамиз шашқолтош ташлашдан иборат бўлса, у ҳолда $\{e_i\}$, $i=\overline{1,\ 6}$ ҳодисаларнинг эҳтимолини шашқолтошнинг қандайлигига қараб,

$$P(e_1)=P(e_2)= \ldots =P(e_6)=\frac{1}{6} \text{ (симметрик ҳол)} \quad (a)$$

ёки, масалан,

$$P(e_1)=P(e_2)=P(e_3)=\frac{1}{4};$$

$$P(e_4)=P(e_5)=P(e_6)=\frac{1}{12} \qquad (б)$$

деб қабул қилиш мумкин. Бу аксиомалар системасини тўла эмаслиги унинг камчилиги эмас.

7- §. Эҳтимолнинг хоссалари

1. $P(V)=0$.

Бу натижа $V \cup \Omega = \Omega$ тенгликдан ва 2, 3- аксиомалардан келиб чиқади.

2. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Бу хосса $A \cup \overline{A}=\Omega$ ва $A \cap \overline{A}=V$ дан келиб чиқади.

3. Агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $P(A) \leqslant P(B)$. $B=A \cup \overline{A}B$ дан бу муносабат келиб чиқади

4. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Бу хоссанинг исботи 3- хоссадан ва 1, 2- аксиомалардан келиб чиқади.

5. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$, чунки.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \quad B=AB+(B \setminus AB).$$

6. $P(A \cup B) \leqslant P(A)+P(B)$. Бу хоссанинг исботи 5- хоссадан келиб чиқади.

7. Фараз қилайлик, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар берилган бўлсин, у ҳолда

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) +$$

$$+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

Бу муносабат *Буль формуласи* дейилади.

Исботни математик индукция методига асосланиб қилишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

8. $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Ҳақиқатан ҳам, $B_n = \Omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_n$ деб белгиласак, у ҳолда

$$A_j B_j \cap A_i B_i = V \qquad (i \neq j),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n A_n$$

тенглик ўринли. Демак,

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

1-мисол. Агар $\{A_n\}$ ҳодисалар кетма-кетлиги берилган бўлиб, $A_n \subset A_{n+1}$ ва $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлса, у ҳолда $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ муносабатнинг ўринлилигини исботланг.

2-мисол. Ўрнига қўйишлар ҳақидаги масала. n та элемент берилган бўлсин. Тасодифий равишда бу элементлар икки марта ўринлаштирилади. Ҳеч бўлмаганда битта элементнинг ўз ўрнида қолиш эҳтимоли топилсин. Ҳамма ўрин алмаштиришлар сони $n!$ Айтайлик, A_k ҳодиса k-элементни ўз ўрнида қолиши бўлсин. Бу ҳодиса $(n-1)!$ имкониятга эга. A_k нинг эҳтимоли эса

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!}.$$

$A_k A_l$ ҳодиса k ва l элементларнинг ўз ўрнида қолиш ҳодисасидан иборат бўлсин:

$$P(A_k A_l) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

ва ҳоказо

$$P(A_1 \ldots A_n) = \frac{(n-(n-1))}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ ҳодиса ҳеч бўлмаганда битта элементнинг ўз ўрнида қолиш ҳодисасидир. Шундай қилиб, Буль формуласидан фойдалансак,

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} =$$

$$= 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Қавс ичидаги ифода e^{-1} нинг ёйилмасидаги биринчи $n+1$ та ҳаддан иборат. Шунинг учун, $n \to \infty$ да

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \to 1 - e^{-1}.$$

8-§. Шартли эҳтимоллар. Ҳодисаларнинг боғлиқсизлиги

Ҳодисанинг эҳтимолини аниқлаш асосида S шартлар комплекси ётишини айтган эдик. Агар $P(A)$ эҳтимолни ҳисоблашда S шартлар комплексидан бошқа ҳеч қандай шартлар талаб қилинмаса, бундай эҳтимол *шартсиз эҳтимол* дейилади. Кўп ҳолларда A ҳодисанинг эҳтимолини бирор B ҳодиса ($P(B) > 0$ деб фараз қилинади) рўй бергандан сўнг ҳисоблашга тўғри келади. Бундай эҳтимол *шартли эҳтимол* дейилади ва $P(A/B)$ каби белгиланади.

1-мисол. Иккита шашқолтош ташланаётган бўлсин. Элементар ҳодисалар фазоси

$$\Omega = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), \ldots, (6,6)\}$$

бўлади. Шашқолтош ташланганда унинг юқори ёқларидаги рақамлар йиғиндиси 8 га тенг бўлиш ҳодисасини A орқали, рақамлар йиғиндисининг жуфт сон бўлиш ҳодисасини B орқали белгилайлик. У ҳолда $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{18}{36}$ бўлади.

Энди B ҳодиса рўй берганда A ҳодисанинг эҳтимолини топайлик:

$$P(A/B)=\frac{5}{18}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}}=\frac{P(A)}{P(B)}.$$

Лекин $A\subset B$ эканидан $AB=A$ келиб чиқади. Шунинг учун

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

2-мисол. Элементар ҳодисалар фазоси Ω $e_1, e_2, \ldots, e_n$ лардан тузилган бўлсин. Шу элементар ҳодисаларнинг k таси A ҳодисага, m таси B ҳодисага ва r таси AB ҳодисага қулайлик туғдирсин. Классик таърифга кўра қуйидагилар ўринли бўлади:

$$P(A)=\frac{k}{n},\quad P(B)=\frac{m}{n},\quad P(AB)=\frac{r}{n},$$

$$P(A/B)=\frac{r}{m}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Умумий ҳолда шартли эҳтимол таърифи қуйидагича киритилади.

1-таъриф. $(\Omega,\mathfrak{F}, P)$ эҳтимоллик фазоси берилган бўлиб, A, $B\in\mathfrak{F}$ ва $P(B)>0$ бўлсин. У ҳолда *A ҳодисанинг B шартдаги эҳтимоли* деб, ушбу формула билан аниқланадиган эҳтимолга айтилади:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Шартли эҳтимолнинг хоссалари
1. $P(A/B)\geqslant 0$.
2. $P(\Omega/B)=1$.
Исботи.

$$P(\Omega/B)=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

3. $A_1,\ A_2\in\Omega,\quad A_1\cap A_2=V$ бўлса, у ҳолда

$$P(A_1+A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи.

$$P(A_1+A_2/B)=\frac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}=P(A_1/B)+P(A_2/B),$$

чунки $A_1\cap A_2=V$ муносабатдан $A_1B\cap A_2B=V$ муносабат келиб чиқади.

4. Агар A ва $\overline{A}$ ҳодисалар ўзаро қарама-қарши ҳодисалар бўлса, у ҳолда

$$P(A/B)=1-P(\overline{A}/B)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. Таърифга асосан

$$P(A+\overline{A}/B)=\frac{P((A+\overline{A})B)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=$$

$$=P(A/B)+P(\overline{A}/B).$$

Шартга асосан $A+\overline{A}=\Omega$ бўлгани учун 2-хоссага асосан $P(A+\overline{A}/B)=1$ бўлади. Ҳосил бўлган тенгликлардан хоссанинг исботи келиб чиқади.

Эҳтимолнинг бошқа хоссалари ҳам шартли эҳтимол учун бажарилишини кўриш қийин эмас. Агар $P(A)>0$ бўлса, B ҳодисанинг A шартдаги эҳтимоли

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

формула ёрдамида топилади.

Шартли эҳтимолни топиш формуласидан ҳодисаларнинг кўпайтмаси эҳтимолини топиш учун ушбу формулани келтириб чиқариш мумкин:

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (1)$$

2-таъриф. Агар $P(A/B)=P(A)$ тенглик бажарилса, A ҳодиса B ҳодисага *боғлиқ эмас* дейилади.

Агар A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $\overline{A}$ ҳодиса B ҳодисага, B ҳодиса A ҳодисага, $\overline{B}$ ҳодиса A ҳодисага, $\overline{A}$ ҳодиса $\overline{B}$ ҳодисага боғлиқ бўлмайди. Булардан A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмаганда B ҳодиса ҳам A га боғлиқ бўлмаслигини исботлайлик, бошқалари ҳам шу каби исботланади. Ҳақиқатан ҳам,

A ҳодиса B га боғлиқ бўлмагани учун 2-таърифга асосан $P(A/B)=P(A)$ бўлади. Агар (1) муносабатда бу тенгликдан фойдалансак,

$$P(B/A)=P(B)$$

муносабат келиб чиқади. Шунингдек, агар A ҳодиса B_1 ва B_2 ҳодисаларга боғлиқ бўлмаса ҳамда $B_1 \cap B_2 = V$ бўлса, у ҳолда A ҳодиса $B_1 \cup B_2$ ҳодисага боғлиқ бўлмайди.

Исботи.

$$P(A(B_1 \cup B_2)) = P(AB_1 \cup AB_2) = P(A)P(B_1) + \\ + P(A)P(B_2) = P(A)\cdot P(B_1 \cup B_2).$$

3-таъриф. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар берилган бўлсин. $1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_s \leqslant n$ сонларни оламиз. Агар

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{s} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{s} P(A_{i_k}) \qquad (1 \leqslant s \leqslant n)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ҳодисалар биргаликда боғлиқ эмас* дейилади.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, ҳодисаларнинг жуфт-жуфти билан боғлиқмаслигидан биргаликда боғлиқмаслиги келиб чиқмайди.

Мисол. (Б. В. Гнеденко, [2].) Тажриба текисликка тетраэдрни ташлашдан иборат бўлсин. Тетраэдрнинг биринчи томони кўк, иккинчи томони яшил, учинчи томони қизил, тўртинчи томони шу учала рангда бўлсин. Бу ҳодисаларни мос равишда К, Я, Қ ва КЯҚ билан белгилаймиз, у ҳолда $P(К)=P(Я)=P(Қ)=\frac{1}{2}$ бўлади. Худди шунингдек,

$$P(К/Я)=P(Қ/Я)=P(К/Қ)=P(Я/Қ)=P(Я/К)= \\ =P(Қ/К)=\frac{1}{2}$$

тенгликларга ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, шундай қилиб К, Я, Қ ҳодисалар жуфт-жуфти билан боғлиқ эмас экан. Аммо К $\cap$ Қ ҳодисанинг рўй бергани аниқ бўлса, у ҳолда албатта Я ҳодиса ҳам рўй берган бўлади, яъни $P(Я/Қ \cap К)=1$. Демак, К, Я, Қ ҳодисалар биргаликда боғлиқ экан.

1-масала Эҳтиёт қисмларни сарфлаш ведомостларини кузатиш автомобиль двигателини ремонт қилишда №1 деталь ўртача 36% ҳолларда, №2 деталь 42% ҳолларда, ҳар иккала деталь бир вақтда ўртача 30% ҳолларда алмаштирилгани аниқланди. Бу маълумотларга асосланиб, №1 деталнинг алмаштирилиши ва №2 деталнинг алмаштирилиши ўртасида статистик боғланиш бор деб хулоса қилиш мумкинми? Двигателни ремонт қилиш пайтида №1 деталь алмаштирилган бўлса, №2 деталнинг ҳам алмаштирилган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш.

№1 деталнинг алмаштирилишини A ҳодиса,
№2 деталнинг алмаштирилишини B ҳодиса,
№1 ва №2 деталларнинг бир вақтда алмаштирилишини AB ҳодиса десак, у ҳолда

$$P(A)=0{,}36;\quad P(B)=0{,}42;\quad P(AB)=0{,}3.$$

Ушбу масаладаги A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ, чунки $P(AB)=P(A)P(B)$ тенглик бажарилмайди, яъни

$$P(A)\cdot P(B)=0{,}36\cdot 0{,}42=0{,}1512,$$
$$P(AB)=0{,}3.$$

Энди масаланинг иккинчи қисмини ҳал этамиз:

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0{,}3}{0{,}36}\approx 0{,}8333.$$

2-масала. Студент имтиҳонга программадаги 25 та саволдан 20 тасини билиб келди. Имтиҳон олувчи ўқитувчи студентга 3 та савол берди. Студентнинг учала саволни ҳам билиш эҳтимолини топинг.

Ечиш.

Студентнинг 1-саволга жавоб бера олиш ҳодисасини A_1, 2-ва 3-саволларга жавоб бера олиш ҳодисаларини мос равишда A_2 ва A_3, учала саволга ҳам жавоб бера олиш ҳодисасини эса A деб белгилаймиз. У ҳолда

$$P(A_1)=\frac{20}{25};\quad P(A_2/A_1)=\frac{19}{24};\quad P(A_3/A_1A_2)=\frac{18}{23}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Агар $A=A_1A_2A_3$ эканини эътиборга олсак, изланаётган ҳодисанинг эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P(A)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}\sim 0{,}5.$$

3-масала. Агар $P(A)=a$ ва $P(B)=b\neq 0$ бўлса, $P(A/B)\geqslant\frac{a+b-1}{b}$ бўлиши исботлансин.

Исботи. Ихтиёрий A ва B ҳодисалар учун $B=AB\cup(B\setminus AB)$, $B\setminus AB\subseteq\bar{A}$ нинг ўринлилигидан

$$P(B)=P(AB)+P(B\setminus AB);\ P(B\setminus AB)\leqslant P(\bar{A}),$$

$$P(AB)=P(B)-P(B\setminus AB)\geqslant P(B)-P(\bar{A})$$

муносабатларга эга бўламиз. $P(\bar{A})=1-a$ эканини эътиборга олсак, исботланиши лозим бўлган ушбу муносабат келиб чиқади:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\geqslant\frac{P(B)-P(\bar{A})}{P(B)}=\frac{b+a-1}{b}.$$

9-§. Тўла эҳтимол формуласи. Бейес формуласи

Фараз қилайлик, B ҳодиса n та жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) биттаси ва фақат биттаси билангина рўй бериши мумкин бўлсин, бошқача қилиб айтганда,

$$B=\bigcup_{i=1}^{n} BA_i.$$

Бу ерда $(BA_i)\cap(BA_j)=V,\quad i\neq j$, у ҳолда қўшиш теоремасига асосан

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(BA_i).$$

Агар $P(BA_i)=P(B/A_i)P(A_i)$ лигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i).$$

Бу тенглик *тўла эҳтимол формуласи* дейилади.

1-масала. Состави қуйидагича бўлган бешта яшик бор. Иккита (A_1 составли) яшикда 2 тадан оқ, 1 тадан қора шар, битта (A_2 составли) яшикда 10 та қора шар, иккита (A_3 составли) яшикда 3 тадан оқ, 1 тадан қора шар бор. Таваккалига танланган яшикдан таваккалига олинган шарнинг оқ шар (B ҳодиса) бўлиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Яшикдан олинган шар ё A_1, ё A_2, ёки A_3 составли яшикдан олинган бўлиши мумкин, у ҳолда $B = A_1B \cup A_2B \cup A_3B$. Тўла эҳтимол формуласига мувофиқ:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3).$$

Классик таърифга ва шартли эҳтимол таърифига асосан қуйидагиларни топамиз:

$$P(A_1) = \frac{2}{5}, \quad P(A_2) = \frac{1}{5}, \quad P(A_3) = \frac{2}{5},$$

$$P(B/A_1) = \frac{2}{5}, \quad P(B/A_2) = 0, \quad P(B/A_3) = \frac{3}{4}.$$

Топилганларни юқоридаги формулага қўйсак,

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{30}$$

ҳосил бўлади.

2-масала. Омборга 360 та маҳсулот келтирилди. Булардан 300 таси 1-корхонада тайёрланган бўлиб, уларнинг 250 таси яроқли маҳсулот; 40 таси 2-корхонада тайёрланган бўлиб, уларнинг 30 таси яроқли ҳамда 3-корхонада тайёрлангани 20 та бўлиб, улардан 10 таси яроқли. Таваккалига олинган маҳсулотнинг яроқли бўлиш эҳтимолини топинг. Классик таърифга кўра $P = \frac{290}{360} \simeq 0,8056$. Аммо юқоридаги формулани эътиборга олиб, қуйидагича ечиш мумкин.

Ечиш. Таваккалига олинган маҳсулот учун қуйидаги гипотезалар ўринли бўлади:

H_1 гипотеза — маҳсулотнинг 1-корхонада тайёрланган бўлиши;

H_2 гипотеза — маҳсулотнинг 2-корхонада тайёрланган бўлиши;

H_3 гипотеза — маҳсулотнинг 3-корхонада тайёрланган бўлиши.

Уларнинг эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(H_1) = \frac{5}{6}; \quad P(H_2) = \frac{1}{9}; \quad P(H_3) = \frac{1}{18}.$$

Агар олинган маҳсулотнинг яроқли бўлишини A ҳодиса деб олсак, у ҳолда бу ҳодисаларнинг турли гипотезалардаги эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6}, \quad P(A/H_2) = \frac{3}{4}, \quad P(A/H_3) = \frac{1}{2}.$$

Юқорида топилганларни тўла эҳтимол формуласига қўйиб, изланаётган ҳодиса учун қуйидагини топамиз:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)P(A/H_3) = \frac{29}{36} \approx 0{,}8050.$$

Энди биз тўла эҳтимол формуласидан фойдаланиб, Бейес формуласини келтириб чиқарамиз. A_i ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси учун ушбу

$$P(A_i/B) = P(B)P(A_i/B) = P(A_i)P(B/A_i)$$

формуланинг ўринлилигидан

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

муносабатга эга бўламиз, энди тўла эҳтимоллар формуласини қўллансак, ушбу Бейес формуласини ҳосил қиламиз:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)P(B/A_k)}.$$

3-масала. Икки мерган нишонга биттадан ўқ узади. Биринчи мерганнинг ўқи нишонга 0,6 эҳтимол билан, иккинчи мерганники эса 0,2 эҳтимол билан тегади. Ўқ узилгандан сўнг нишонга битта ўқ текканлиги маълум бўлди, бу ўқ биринчи мерганники бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Тажриба ўтказишдан олдин қуйидаги гипотезаларни қўямиз:

H_1 — биринчи мерган отган ўқ ҳам, иккинчи мерган отган ўқ ҳам нишонга тегмайди;

H_2 — иккала мерганнинг отган ўқлари ҳам нишонга тегади;

H_3 — биринчи мерганнинг отган ўқи нишонга тегади, иккинчисиники эса тегмайди;

H_4 — биринчи мерганнинг ўқи нишонга тегмайди, иккинчисиники эса тегади.

Бу гипотезаларнинг эҳтимоллари:

$$P(H_1) = 0{,}4\cdot 0{,}8 = 0{,}32,$$
$$P(H_2) = 0{,}6\cdot 0{,}2 = 0{,}12,$$
$$P(H_3) = 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}48,$$
$$P(H_4) = 0{,}4\cdot 0{,}2 = 0{,}08.$$

Бу гипотезаларда кузатилаётган A ҳодисанинг шартли эҳтимоллари қуйидагиларга тенг:

$P(A/H_1)=0$; $P(A/H_2)=0$; $P(A/H_3)=1$; $P(A/H_4)=1$.

Тажрибадан кейин H_1 ва H_2 гипотезалар рўй бермайди. H_3 ва H_4 гипотезаларнинг тажрибадан кейинги эҳтимоллари қуйидагича:

$$P(H_3/A)=\frac{0,48\cdot 1}{0,48\cdot 1+0,08\cdot 1}=\frac{6}{7};$$

$$P(H_4/A)=\frac{0,08\cdot 1}{0,48\cdot 1+0,08\cdot 1}=\frac{1}{7}.$$

Демак, нишонга теккан ўқнинг биринчи мерганга тегишли бўлиш эҳтимоли $\frac{6}{7}$ экан.

4-масала. Лампочка иккита заводда тайёрланади. Иккинчи завод маҳсулотининг ҳажми биринчисиникидан k марта ортиқ. 1-заводда тайёрланган лампочкаларнинг p_1 қисми, 2-заводда тайёрланганларнинг эса p_2 қисми яроқсиз.

Иккала завод маҳсулоти бир вақтда складга келтирилади ва аралаштирилиб юборилади. Харид қилинган лампочканинг яроқсизлиги маълум бўлса, унинг 2-завод маҳсулоти бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Фараз қилайлик, B_1 — сотиб олинган лампочка 1-заводнинг, B_2 эса иккинчи заводнинг маҳсулоти бўлиш ҳодисаси бўлсин. Равшанки,

$$P(B_1)=\frac{1}{1+k},\quad P(B_2)=\frac{k}{1+k}.$$

Харид қилинган лампочканинг яроқсиз бўлиш ҳодисасини A дейлик. Масала шартига асосан

$$P(A/B_1)=p_1 \text{ ва } P(A/B_2)=p_2$$

бўлади. Бейес формуласидан фойдаланиб,

$$P(B_2/A)=\frac{\frac{k}{1+k}p_2}{\frac{1}{1+k}p_1+\frac{k}{1+k}p_2}=\frac{kp_2}{p_1+kp_2}.$$

Шунга ўхшаш, олинган лампочканинг яроқсизлиги маълум бўлганда унинг 1-завод маҳсулоти бўлиш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P(B_1/A)=\frac{p_1}{p_1+k\,p_2}.$$

I БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Ҳодисалар ўртасидаги қуйидаги муносабатларни текшириб кўринг:

а) $(A\cup B)\cdot C=AC\cup BC$;

б) $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$;

в) $A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$;

г) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;

д) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$;

е) $(A\cup B)\setminus B=A\setminus AB=A\overline{B}.$

2. Агар $B=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B_n$ бўлса, у ҳолда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\subseteq\overline{B_n}\ \text{ва}\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\subseteq B$$

муносабатлар ўринлими?

3. Агар учта A_1, A_2, A_3 ҳодисалар $A_1A_2A_3\subset A$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда ушбу тенгсизликни исботланг:

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

4. Қуйидагини исботланг:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

5. ε чексиз кичик бўлиб, $P(A)=p$; $P(B)=1-\varepsilon$ тенгликлар бажарилганда $P(A/B)$ эҳтимолни юқоридан ва қуйидан баҳоланг.

6. Агар $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(AB)$, $P(AC)$, $P(BC)$, $P(ABC)$ берилган бўлса, у ҳолда $P(C/\overline{A}\overline{B})$ ни топинг.

7. Ёш бола З, С, Т, У, О ҳарфли карточкаларни ўйнаб ўтирибди. Бола шу ҳарфларни тасодифан бир қаторга қўйганида „устоз“ сўзининг ёзилиш эҳтимоли қанча?

8. Ёш бола 10 та А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т ҳарфлари ёзилган карточкаларни ўйнаб ўтирибди. Бола карточкаларни тасодифий тартибда терганида „математика“ сўзининг ёзилиш эҳтимолини топинг.

9. Учта шашқолтош ташланади. Агар учала шашқолтошнинг турли томонлари билан тушганлиги маълум бўлса, уларнинг камида биттасида бир очко тушиш эҳтимоли қанчага тенг?

10. Эркак ва аёллар сони тенг деб, ҳамма эркакларнинг 3% и ҳамда аёлларнинг 0,21% и дальтониклар бўлса, тасодифан танланган шахснинг дальтоник бўлиши ва унинг эркак киши бўлиш эҳтимолини топинг.

11. Нуқта R радиусда доира ичига таваккалига ташланган. Нуқтанинг доира ичидаги ихтиёрий соҳага тушиш эҳтимоли шу соҳанинг юзига пропорционал. У ҳолда

а) нуқтанинг марказдан r $(r < R)$ дан кам масофада ётиш эҳтимолини;

б) берилган йўналиш ва нуқтанинг доира маркази билан туташтирувчи чизиқ орасидаги бурчак α дан ортмаслиги эҳтимолини топинг.

12. Фабрикада A, B, C машиналар барча маҳсулотнинг мос равишда 25%, 35% ва 40% ини ишлаб чиқаради. Машиналар ишлаб чиқараётган маҳсулотларнинг мос равишда 5%, 4%, 2% и яроқсиз бўлса, таваккалига олинган маҳсулотнинг A машинада тайёрланган бўлиши, шунингдек B машинада ва C машинада тайёрланган бўлиши эҳтимолини топинг.

II боб

ТАЖРИБАЛАРНИ ТАКРОРЛАШ. СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛИ

1-§. Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи

Бирор ҳодисани кузатиш учун бир нечта тажриба ўтказилса, бу тажрибалар бир-бирига боғлиқ бўлиши ёки боғлиқ бўлмаслиги мумкин. Масалан,

1) Танга ташланганда герб томонини юқорига қараб тушиш ҳодисасини, Г герб томонини юқорига қараб тушмаслик ҳодисасини Р десак, тангани ташлаш тажрибалари ўзаро боғлиқ бўлмайди;

2) Яшикда m та оқ ва n та қора шар бор. Яшикдан олинган шар яна қайтариб солинса, бу ҳолда яшикдан олинган ҳар бир шарнинг оқ чиқиш эҳтимоли $p = \frac{m}{n+m}$ га ва қора чиқиш эҳтимоли $q = \frac{n}{n+m}$ га тенг. Ҳар бир тажрибадан сўнг олинган шар яшикка қайтариб солинса, тажрибалар кетма-кетлиги бир-бирига боғлиқ бўлмайди. Агар яшикдан олинган шар яшикка қайтариб ташланмаса, бу ҳолда ўтказиладиган тажрибалар ўзаро боғлиқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар яшикдан олинган шар оқ бўлса, яшикдан олинадиган иккинчи шарнинг оқ чиқиш эҳтимоли $\frac{m-1}{n+m-1}$ га тенг бўлади.

Фараз қилайлик, боғлиқ бўлмаган n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир тажрибада кузатилаётган A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ва рўй бермаслик эҳтимоли $q = 1 - p$ бўлсин. Кузатилаётган A ҳодисанинг n та тажрибада m марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m)$ ни топиш керак бўлсин. n марта тажриба ўтказилганда кузатилаётган A ҳодисанинг m марта рўй бериб, $n - m$ марта рўй бермаслик имкониятларининг сони C_n^m га тенг эканини кўриш қийин эмас.

n та кетма-кет ўтказилган тажрибани битта мураккаб тажриба десак, бу мураккаб тажриба натижасида рўй берадиган ҳодисанинг кўриниши $A_1\ A_2 \ldots A_n$ бўлиб, $A_i\,(i = \overline{1, n})$ A га ёки $\overline{A}$ га тенг бўлади. Бундай ҳодисалар сони 2^n га тенг. Ҳақиқатан ҳам, $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$ ҳодисалар ичида:

1) $A_i = A$ $(i = \overline{1, n})$ шартни қаноатлантирувчи ҳодисалар битта;

2) биттаси $\overline{A}$, қолганлари A дан иборат бўлган ҳодисалар n та, чунки $\overline{A}$ ни n та ўринга бир мартадан қўйиш билан n та турли ҳодиса ҳосил қилиш мумкин;

. . . .

$(n - m + 1)$ $n - m$ таси $\overline{A}$, қолганлари A дан иборат бўлган ҳодисалар сони — n та ўрннга $n - m$ та $\overline{A}$ ларни жойлаштиришлар сони $C_n^{n-m} = C_n^m$ га тенг ва ҳоказо. Демак, биз кўраётган мураккаб тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар сони

$$C_n^0 + C_n^1 + \ \ldots \ + C_n^n = 2^n$$

га тенг экан. Агар n та тажрибада кузатилаётган A ҳодисанинг m марта рўй бериш ҳодисасини B десак,

$$B = (A \cdot A\ \ldots\ A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot\ \ldots\ \cdot \overline{A}) \cup (A \cdot \overline{A} \cdot A \cdot\ \ldots\ \cdot A \cdot \overline{A} \cdot$$
$$\cdot A \cdot\ \ldots\ \cdot \overline{A}) \cup \ldots \cup\ (\overline{A} \cdot\ \ldots\ \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A \cdot\ \ldots\ \cdot A) \qquad (1)$$

бўлиб, у C_n^m та қўшилувчидан иборат бўлади. Тажрибалар кетма-кетлиги бир-бирига боғлиқ бўлмагани учун, масалан,

$$P(\underbrace{AA\ \ldots\ A}_{m}\ \underbrace{\overline{A}\overline{A}\ \ldots\ \overline{A}}_{n-m}) = P(A)\,P(A)\ \ldots\ P(A)P(\overline{A})\ \ldots$$
$$\ldots\ P(\overline{A}) = p^m q^{n-m}$$

бўлади. Бу ерда $AA\ \ldots\ A\overline{A}\ \ldots\ \overline{A}$ ёзув m та тажрибада A нинг, $n - m$ та тажрибада эса $\overline{A}$ нинг рўй берганлигини билдиради. Бундан ташқари, (1) тенгликнинг ўнг томонидаги C_n^m та ҳодисанинг ихтиёрий иккитаси бир вақтда рўй бермаслигидан

$$P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

келиб чиқади. Агар A ҳодисанинг n та тажрибада m марта рўй бериш эҳтимолини $P_n(m)$ деб белгиласак,

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (2)$$

ҳосил бўлади. (2) ни *Бернулли формуласи* дейилади. $P_n(m)$ эҳтимоллар учун $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$ муносабат ўринли бўлишини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^m = 1.$$

(2) ифода $(px+q)^n$ бином ёйилмасининг x^m қатнашган ҳадининг коэффициенти бўлгани учун $P_n(m)$ ларни *эҳтимолнинг биномиал тақсимот қонуни* дейилади.

Фиксирланган n да $P_n(m)$ эҳтимол m нинг функцияси экани равшан. Бу функцияни текширайлик. Қуйидаги нисбатни кўрамиз:

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}; \tag{3}$$

а) агар $(n-m)p > (m+1)q$, яъни $np - q > m$ бўлса, (3) тенгликдан $P_n(m+1) > P_n(m)$ натижага эга бўлинади;

б) агар $np - q = m$ бўлса, (3) тенгликдан $P_n(m+1) = P_n(m)$ келиб чиқади;

с) агар $np - q < m$ бўлса, (3) тенгликдан $P_n(m+1) < P_n(m)$ натижага эга бўлинади.

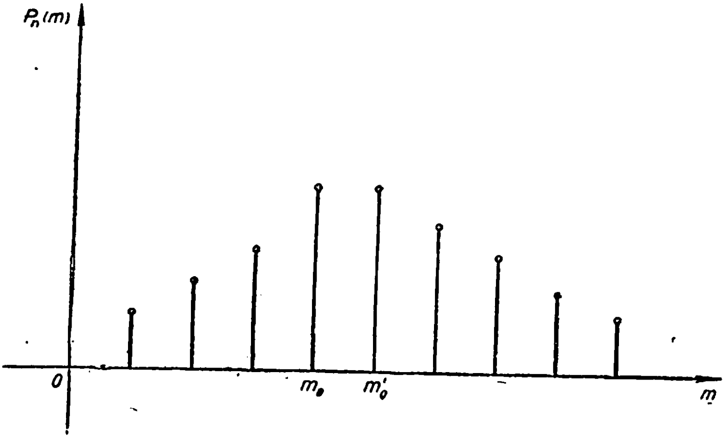
Юқоридаги текширишлардан кўринадики, $P_n(m)$ эҳтимол m нинг ўсиши билан, аввал ўсиб бориб, энг катта қийматига эришиб, m нинг кейинги ўсишларида эса камаювчи функция бўлар экан. Бундан ташқари, агар $np - q$ бутун сон бўлса, $P_n(m)$ эҳтимол m нинг иккита $m_0 = np - q$ ва $m_0' = np - q + 1$ қийматида энг катта қийматга эришишлигини кўрамиз (7- шакл).

Агар $np - q$ бутун сон бўлмаса, $P_n(m)$ эҳтимол ўзининг энг катта қийматига m_0 дан катта бўлган энг кичик бутун сон қийматида эришади (8- шакл).

Агар қаралаётган ҳодисанинг энг катта эҳтимолли юз беришлар сонини μ десак, $np - q$ сон бутун бўлмаганда, ушбу

$$np - q < \mu < np + p$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади, улар n та тажрибада A ҳодисаниг энг катта эҳтимолли юз бериш сони ётадиган чегарани кўрсатади. Юқоридаги тенгсизликлардан μ нинг аниқ битта бутун сонга тенг бўлишини кўриш қийин эмас. Агар $np - q < 0$ бўлса, $P_n(0) > P_n(1) > \dots$



7- шакл.

$\dots > P_n(n)$ ва $np - q = 0$ бўлганда $P_n(0) = P_n(1) > > P_n(2) > \dots > P_n(n)$ бўлишини кўриш қийин эмас (9- шакл).

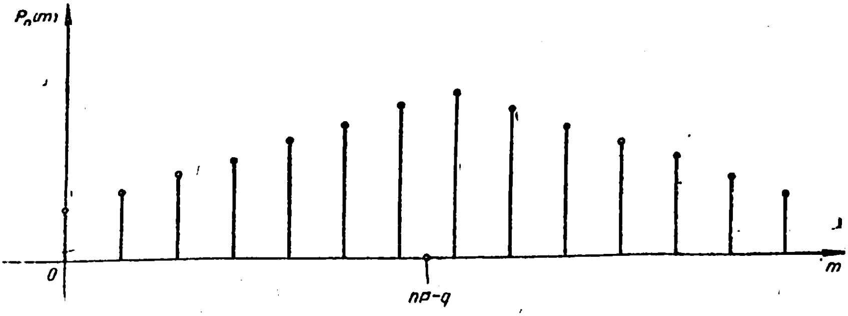
1-мисол. Симметрик танга 8 марта ташланганда 3 марта герб тушиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. $n = 8$; $m = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$. У ҳолда

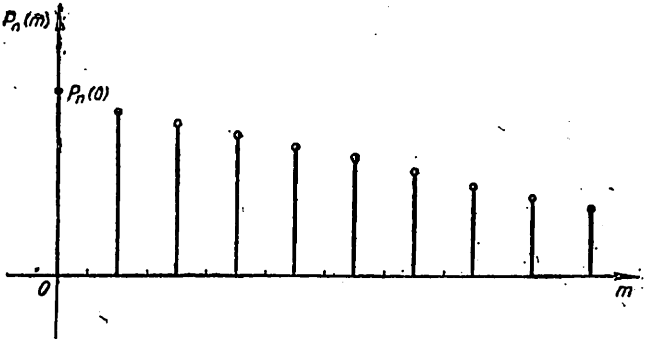
$$P_n(m) = P_8(3) = C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}.$$

Демак,

$$P_8(3) = \frac{7}{32}.$$



8- шакл.



9- шакл.

2-мисол. Ҳар бир отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли $p=\frac{2}{3}$. Отилган 20 та ўқдан 4 тасининг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$, $n=20$, $m=4$;

$$P_{20}(4)=C_{20}^{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{16}.$$

3-мисол. Корхона ишлаб чиқарадиган ҳар бир маҳсулотнинг яроқсиз бўлиши эҳтимоли $p=0{,}005$ бўлсин. Корхона ишлаб чиқарган 10000 та маҳсулотдан 40 тасининг яроқсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. $p=0{,}005$; $n=10000$; $m=40$; $q=0{,}995$

$$P_{10000}(40)=C_{10000}^{40}\cdot(0{,}005)^{40}\cdot(0{,}995)^{9960}=0{,}0214348.$$

4-мисол. Битта деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p=0{,}05$ бўлсин. Ихтиёрий олинган 10000 деталь ичида яроқсиз деталларнинг сони 70 тадан кўп бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Ечиш. μ яроқсиз деталлар сони бўлсин.

$$\mu: 0,1,2,\ \ldots,\ 70;$$

$$P(\mu\leqslant 70)=?$$

$$P(\mu\leqslant 70)=\sum_{m=0}^{70}P_n(m)=\sum_{m=0}^{70}C_{10\,000}^{m}\cdot(0{,}05)^{m}\cdot(0{,}95)^{10\,000-m}.$$

Юқоридаги келтирилган мисоллардан кўринадики, баъзи ҳолларда (3,4-мисоллар) $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ эҳтимолни ҳисоблаш катта қийинчиликларга олиб келар экан. Бундай ҳолларда ҳисоблашни осонлаштирувчи формулаларга эҳтиёж туғилади. Бундай формулаларни навбатдаги параграфларда келтириб чиқарилади.

2-§. Муавр—Лапласнинг локал теоремаси

Агар m ва n катта сонлар бўлса, у ҳолда $P_n(m)$ эҳтимолни Бернулли формуласидан фойдаланиб ҳисоблаш маълум қийинчиликларга олиб келади. Шу сабабли $n\to\infty$ да $P_n(m)$ эҳтимол учун асимптотик формула топиш масаласи туғилади.

Теорема. *Агар n та боғлиқ бўлмаган тажрибанинг ҳар бирида бирор A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p\,(0<p<1)$ бўлса, у ҳолда m нинг ушбу*

$$\frac{|m-np|}{\sqrt{npq}}<c \quad (c - \text{ўзгармас сон})$$

шартни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун текис равишда

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}\left(1+0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

тенглик бажарилади.

Бу теоремани Муавр 1730 йилда Бернулли схемасининг $p=q=\frac{1}{2}$ бўлган хусусий ҳоли учун, сўнгра Лаплас ихтиёрий $p\in\,]0,1[$ учун исботлаган.

Исботи. Теоремани анализ курсидан маълум бўлган ушбу

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n} e^{\theta_n},\ |\theta_n|\leqslant\frac{1}{12n}.$$

Стирлинг формуласидан фойдаланиб исботлаймиз. Энди

$$x=x_{m,n,p}=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

белгилашни киритсак, у ҳолда

$$m=np+x\sqrt{npq}=np\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \qquad (1)$$

ва

$$n - m = nq - x\sqrt{npq} = nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \qquad (2)$$

тенгликлар ўринли бўлади. (1) ва (2) дан кўринадики, $n \to \infty$ да ва $|x| \leqslant c$ шарт бажарилганда m, $n - m$ чексизликка интилади. Шу сабабли $(n - m)!$ ва $m!$ сонлар учун Стирлинг формуласини қўллашимиз мумкин. У ҳолда

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi\, m(n-m)}} \times$$

$$\times \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}\, e^{\theta_{n,m}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$|\theta_{n,m}| \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right). \qquad (3)$$

(1), (2), (3) муносабатлардан ушбу тенгсизлик ўринли бўлади:

$$|\theta_{n,m}| \leqslant \frac{1}{12\,n}\left(1 + \frac{1}{p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right). \qquad (4)$$

Бундан кўринадики, $|x| < c$ бўлгани учун $n \to \infty$ да $e^{\theta_{n,m}} \to 1$. Натижада (4) га асосан катта n лар учун

$$e^{\theta_{n,m}} = 1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (5)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Теорема шартига асосан $x\sqrt{\frac{q}{np}}$ ва $x\sqrt{\frac{p}{nq}}$ миқдорлар n нинг етарлича катта қийматларида исталганча кичик бўлади. Шу сабабли

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \text{ ва } \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$$

ифодаларни даражали қаторга ёйиб,

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{px^2}{np} + 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{px^2}{nq} + 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликларга асосан

$$\ln\frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} = \ln\left(\frac{np}{m}\right)^m + \ln\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} =$$

$$= -m\ln\frac{m}{np} - (n-m)\ln\frac{n-m}{nq} = -\left(np + x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1+\right.$$

$$\left.+x\sqrt{\frac{b}{np}}\right) - \left(nq - x\sqrt{npq}\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -\left(np +\right.\right.$$

$$\left.+x\sqrt{npq}\right)\left[x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] - (np -$$

$$-x\sqrt{npq})\left[-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{px^2}{nq} + 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] = -\frac{x^2}{2} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Натижада (6) дан $e^{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ни эътиборга олган ҳолда

$$\frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (7)$$

ни ҳосил қиламиз. Бевосита ишонч ҳосил қилиш мумкинки,

$$\frac{1}{\sqrt{1+0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}} = 1 + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Шунинг учун (1), (2) тенгликларга асосан

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi npq\left(1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \frac{1+0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{2\pi npq}}. \qquad (8)$$

Шундай қилиб, етарлича катта n лар учун (4), (5), (7), (8) ифодалардан теореманинг ўринлилигига ишонч ҳосил қиламиз. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциянинг x аргумент мусбат қийматларига мос қийматларидан тузилган жадваллар мавжуд (1-илова), $\varphi(x)$ функциянинг жуфтлигидан бу жадваллардан аргументнинг манфий қийматлари учун ҳам фойдаланилади.

1-мисол. Корхонада ишлаб чиқарилган деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли 0,005 га тенг. 10000 та деталдан иборат партиядаги яроқсиз деталлар сони роса 40 та бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу ерда $p = 0{,}005$; $q = 0{,}995$; $n = 10000$, $m = 40$. Шунинг учун

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995} \approx 7{,}05,$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10000 \cdot 0{,}005}{7{,}05} = -1{,}42.$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция жуфт эканлигидан фойдаланиб, унинг $x = 1{,}42$ даги қийматини 1-иловада келтирилган жадвалдан топамиз:

$$\varphi(1{,}42) = 0{,}1456.$$

Демак, $P_{10000}(40) \approx \frac{0{,}1456}{7{,}05} \approx 0{,}0206$. (1- § даги 3-мисолга қаранг).

2-мисол. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, 400 та тажрибада бу ҳодисанинг роса 80 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Шартга кўра $n = 400$; $m = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Юқоридаги теоремадан фойдаланамиз:

$$P_{400}(80) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{1}{8} \varphi(x),$$

бунда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$$

Жадвалдан $\varphi(0) = 0{,}3989$ эканлигини эътиборга олсак,

$$P_{400}(80) \approx \frac{0{,}3989}{8} = 0{,}04986.$$

Асл қиймати 0,049813272

3- §. Муавр—Лапласнинг интеграл теоремаси

Фараз қилайлик, n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p $(0 < p < 1)$ га тенг бўлсин. n та тажрибада A ҳодисанинг камида k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k_1, k_2)$ ни қандай ҳисоблаш мумкин. Бернулли схемасига кўра бу $P_n(k_1, k_2)$ эҳтимол

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2) = \sum_{m=k_1}^{k_2} C_n^m p^m q^{n-m} \tag{1}$$

га тенг. Агар n, k_1, k_2 лар етарлича катта бўлса, (1) ифодани ҳисоблаш анча қийиндир. Бу қийинчиликдан қутулиш мақсадида юқоридаги ифодага асимптотик формула топамиз.

Теорема. *Агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ўзгармас бўлиб, ноль ва бирдан фарқли бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да*

$$P_n(k_1, k_2) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

муносабат a ва b $(-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty)$ га нисбатан текис бажарилади, бу ерда

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Исбот. Аниқлик учун a ва b чекли бўлсин (a ва b чексиз бўлганда ҳам теоремани исботлаш мумкин). У ҳолда Муавр – Лапласнинг локал теоремасига кўра (1) ни

$$P_n(k_1, k_2) = P_n\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= P_n\left(a \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) =$$

$$= \sum_{a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \cdot \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{a < x_m < b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x_m^2} \Delta x_m \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \qquad (2)$$

кўринишда ёзамиз. Бу формулада

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \quad \Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Энди

$$I(x_m) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (3)$$

ёрдамчи функцияни қарайлик. Бу интегралда $x = x_m + u$ алмаштириш бажарамиз, натижада

$$I(x_m)=\int_0^{\Delta x_m} e^{-\frac{x_m^2}{2}} e^{-ux_m-\frac{u^2}{2}}\,du = e^{-\frac{x_m^2}{2}}\int_0^{\Delta x_m} e^{-ux_m-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

n ни етарлича катта қийматларида $0 \leqslant u \leqslant \Delta x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ бўлгани учун u нолга етарлича яқин бўлади, бу эса

$$e^{-ux_m-\frac{u^2}{2}} = 1 + o\left(ux_m + \frac{u^2}{2}\right)$$

эканини кўрсатади. У ҳолда

$$I(x_m) = e^{-\frac{x_m^2}{2}}\Delta x_m\left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

ёки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{a<x_m<b}\int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= \sum_{a<x_m<b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}\cdot\Delta x_m\left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \qquad (4)$$

Натижада $n \to \infty$ да (2) ва (4) ларни солиштириб, ифодаларнинг ўнг томонлари асимптотик тенглигидан, чап томонларининг ҳам асимптотик тенглигига ишонч ҳосил қиламиз. Шу билан теорема исбот бўлди.

Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасини қўллаш билан ечиладиган масалаларда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

ифодани ҳисоблашга тўғри келади. Китобнинг охиридаги 2- иловада бу интеграл учун жадвал келтирилган. Жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг мусбат x ларга мос қийматлари келтирилган, $\Phi(x)$ функциянинг тоқлигидан фойдаланиб, жадвалдан $x < 0$ бўлган ҳолда ҳам фойдаланилади. Жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг $x \in [0,5]$ сегментдаги қийматлари берилган, агар $x > 5$ бўлса, у ҳолда $\Phi(x) \approx 0{,}5$ деб олинади.

Жадвалдан фойдаланиш осон бўлиши учун қуйидаги формуладан фойдаланиш қулайдир:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

1- мисол. Факультет студентларининг имтиҳон сессиясидан „4“ ва „5“ билан ўтиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Тасодифан олинган 400 студентдан 34 тадан 55 тагачаси ҳеч бўлмаса битта фандан „4“ дан кичик баҳо олиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Шартга кўра

$$p = 0{,}1;\ q = 0{,}9;\ n = 400;\ k_1 = 34;\ k_2 = 55.$$

Демак,

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{34 - 400\cdot 0{,}1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{-6}{6} = -1;$$

$$b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 400\cdot 0{,}1}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5.$$

Изланаётган эҳтимол юқоридаги теоремага кўра қуйидагига тенг:

$$P_{400}(34;\ 55) \approx \Phi\ (2{,}5) - \Phi(-1).$$

Жадвалдан

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938,$$

$$\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0{,}3413$$

эканини топамиз. Демак, $P_{400}(34;\ 55) \approx 0{,}4938 + 0{,}3413 = 0{,}8351$. Асл қиймати эса 0,8551

2- мисол. Ихтиёрий олинган пилланинг яроқсиз чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Тасодифан олинган 400 та пилладан 70 тадан 130 тагачаси яроқсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Шартга кўра

$$p = 0{,}2;\ q = 0{,}8;\ n = 400;\ k_1 = 70;\ k_2 = 130.$$

У ҳолда

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = \frac{-10}{8} = -1{,}25;$$

$$b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400\cdot 0{,}2}{8} = \frac{55}{8} = 6{,}25.$$

Жадвалдан $\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}39435$, $\Phi(6{,}25) = 0{,}5$, чунки $x > 5$ да $\Phi(x) = 0{,}5$. Демак,

$P_{400}(70,\ 130) \approx \Phi(6{,}25) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}39435 = 0{,}89435$. Асл қиймати 0,9069927.

4- §. Муавр—Лаплас интеграл теоремасининг татбиқи

Фараз қилайлик, Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасидаги барча шартлар бажарилган бўлсин. $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг ўзгармас p эҳтимолдан четланишининг абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган $\varepsilon > 0$ сондан катта бўлмаслик эҳтимолини топиш масаласи билан шуғулланамиз. Шундай қилиб,

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимолини баҳолаймиз. Ушбу

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

тенгликни эътиборга олсак, Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасига кўра

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right| = 2\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1.$$

Бу муносабат *Бернулли схемаси учун катта сонлар қонуни* ёки *Бернулли теоремаси* дейилади. Бернулли теоремаси эҳтимоллар назариясининг асосий теоремаларидан ҳисобланиб, бу теорема ёрдамида кўпгина татбиқий масалалар ҳал қилинади. Бу ҳақда кейинги бобларда батафсил тўхталиб ўтамиз.

А ҳодисанинг нисбий частотаси $\frac{m}{n}$ нинг ўзгармас p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймат бўйича α сондан ошмаслик эҳтимоли ушбу

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\alpha\right\}\approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (1)$$

формулага кўра топилади.

Шундай қилиб, $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\alpha$ тенгсизликни рўй бериш эҳтимоли тақрибан Лаплас функциясининг $x=\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}$ нуқтадаги қийматининг иккиланганига тенг экан.

1- мисол. Тажриба танга ташлашдан иборат бўлсин. P ташланган танганинг рақамли томони билан тушиш ҳодисаси бўлсин. Тангани 400 марта ташланганда P ҳодисанинг нисбий частотаси $\frac{m}{400}$ нинг $\frac{1}{2}$ эҳтимолдан абсолют қиймат бўйича четланиши 0,08 дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра $n=400$, $p=q=\frac{1}{2}$, $\alpha=0{,}08$. У ҳолда (1) формулага кўра қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$P\left\{\left|\frac{m}{400}-\frac{1}{2}\right|<0{,}08\right\}=2\Phi\left(0{,}08\cdot\sqrt{\frac{400}{\frac{1}{4}}}\right)=2\Phi(3{,}2).$$

Жадвалдан (2- илова)

$\Phi(3{,}2)=0{,}49931$ ёки $P\left\{\left|\frac{m}{400}-\frac{1}{2}\right|<0{,}08\right\}\approx 0{,}99862.$

Бундан қуйидагича хулоса чиқариш мумкин: агар тажриба танга ташлашдан иборат бўлиб, тангани етарлича кўп сонда ташлаб, уни ҳар бир 400 та ташлагандан сўнг ташлаш натижалари фиксирлаб турилса, у ҳолда бу ташлашларнинг тахминан 99,8 % ида нисбий частота билан герб тушиш (рақам тушиш) ҳодисасининг эҳтимоли орасидаги айирма абсолют қиймат жиҳатдан 0,08 дан катта бўлмайди ёки m сон 0,99 эҳтимол билан $168<m<232$ орасида ётади.

2- мисол. Қоракўл терининг яроқсиз чиқиш эҳтимоли $p=0{,}09$ га тенг бўлсин. Нечта қоракўл тери олинганда қоракўлнинг яроқсиз чиқиши нисбий частотасининг 0,09 эҳтимолдан фарқи абсолют қиймати жиҳатдан 0,02 дан кичик бўлиш эҳтимоли 0,9962 га тенг бўлади.

Ечиш. Шартга кўра $p = 0{,}09$; $q = 0{,}91$; $\alpha = 0{,}02$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}09\right| < 0{,}02\right\} = 0{,}9962.$$

Бу ифодадан n ни топамиз. Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасига асосан

$$2\,\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}09\cdot 0{,}91}}\right) \approx 2\,\Phi\,(0{,}071\sqrt{n}) = 0{,}9962.$$

Натижада $\Phi\,(0{,}071\sqrt{n}) = 0{,}4981$, жадвалдан $\Phi\,(2{,}9) = 0{,}4981$ эканини топамиз. Демак, $0{,}071\sqrt{n} = 2{,}9$; $n = 1664$. Ҳосил қилинган натижага кўра, олинган 1664 та қоракўл терининг яроқсиз чиқиш нисбий частотаси 0,9962 эҳтимол билан қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$0{,}07 < \frac{m}{1664} < 0{,}11.$$

Навбатдаги масала

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \alpha\right\} \geqslant \beta \qquad (2)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган минимал n ни топишдан иборат, яъни A ҳодисанинг нисбий частотаси билан унинг p эҳтимоли орасидаги айирма абсолют қиймат жиҳатидан α дан ошмаслик эҳтимоли β дан кичик бўлмаслиги учун кўпи билан нечта тажриба ўтказиш керак. Бу сонни топиш учун (2) ифоданинг чап томонини Муавр — Лаплас теоремасига кўра ёзамиз:

$$2\,\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geqslant \beta \qquad (3)$$

муносабатдан n нинг изланаётган минимал қиймати топилади.

3- мисол. Берилган: $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$, $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}99$. Бу ифодаларни (3) га қўйсак,

$$\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{\frac{3}{16}}}\right) \geqslant 0{,}495. \qquad (4)$$

Жадвалга (2- илова) асосан $\Phi(2{,}58) \geqslant 0{,}495$. Демак, $\Phi(x)$ функциянинг (4) тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматига мос келувчи энг кичик x 2,58 га тенглигини кўрамиз. Буни эътиборга олсак,

$$0{,}01\sqrt{\frac{16}{3}n} \geqslant 2{,}58 \text{ ёки } n > 12481 = n_0.$$

4- мисол. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,25 га тенг. 600 та тажриба ўтказилганда 0,92 эҳтимол билан ҳодиса рўй бериши нисбий частотаси ҳодиса эҳтимолидан қанчага четланиши мумкин?

Ечиш. Шартга кўра $p = 0{,}25$; $q = 0{,}75$; $n = 600$,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0{,}92.$$

Ечимни топиш учун

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз.

$$P\left(\left|\frac{m}{600} - 0{,}25\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}25\cdot 0{,}75}}\right) = 0{,}92$$

ёки

$$\Phi(56{,}57\cdot\varepsilon) = 0{,}46,$$

жадвалдан

$$56{,}57\cdot\varepsilon = 1{,}755.$$

Демак,

$$\varepsilon = 0{,}031.$$

5- §. Пуассон теоремаси

Муавр — Лапласнинг локал теоремаси p ва q эҳтимоллар яримнинг атрофида бўлганда $P_n(m)$ ни ҳисоблаш учун яхши натижа беради, лекин p ва q лар бир ёки ноль сонига яқин бўлган ҳолларда бу формула маълум хатоликка олиб келади. Шунинг учун p ва q лар 1 га ёки 0 га яқин бўлганда $P_n(m)$ учун локал теоремадан бошқа асимптотик формула топиш зарурати пайдо бўлади. Бу масалани ҳал қилиш учун қуйидаги ҳодисалар сериясини қараймиз:

$$\begin{array}{l} E_{11} \\ E_{12},\ E_{22} \\ E_{13},\ E_{23},\ E_{33} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ E_{1n},\ E_{2n},\ E_{3n},\ .\ .\ .\ E_{nn}. \end{array}$$

Қаралаётган ҳар бир сериядаги ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмасдан, ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли p_n, рўй бермаслик эҳтимоли $q_n = 1 - p_n$ бўлсин, бунда n — серия номери. n- сериядаги n та ҳодисадан m тасининг рўй бериш эҳтимолини $P_n(m)$ деб белгилаймиз.

Теорема. *Агар $n \to \infty$ да $p_n \to 0$ муносабат бажарилса, у ҳолда*

$$P_n(m) - \frac{(np_n)^m}{m!} e^{-n p_n} \longrightarrow 0$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. $a_n = np_n$ деб белгилаймиз ва

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

формуладан $p_n = \frac{a_n}{n}$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз.

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{a_n}{n}\right)^m\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a_n^m}{m!}\cdot\frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{n^m}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{n-m} =$$

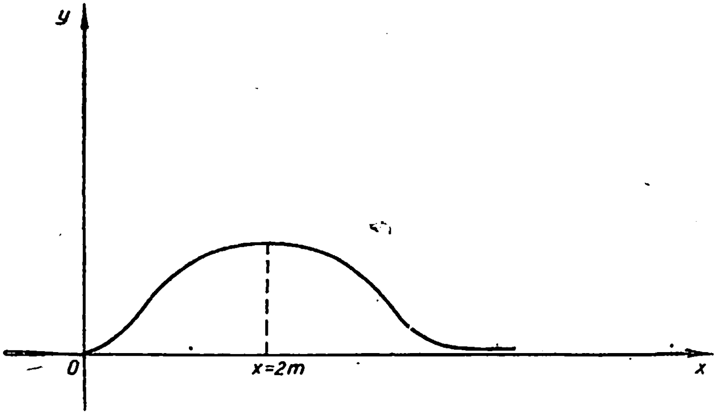
$$= \frac{a_n^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Айтайлик, m тайинланган (фиксирланган) бўлсин. Қуйидаги икки ҳолни кўриб чиқамиз.

1- *ҳол.* a_n — чегараланмаган, яъни $n \to \infty$ да $a_n \to \infty$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $0 \leqslant x \leqslant 1$ учун $1 - x < e^{-x}$ ни ва (1) ни эътиборга олсак,

$$I = \left|P_n(m) - \frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\right| \leqslant P_n(m) + \frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_n^m}{m!}e^{-\frac{n-m}{n}a_n} + \frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n} \quad (2)$$



10- шакл.

ҳосил бўлади. Энди $y=\frac{x^m}{m!}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функцияни қараймиз. Агар $x=0$ бўлса, $y=0$, $x\to\infty$ да $y\to 0$ ва y энг катта қийматни $x=2m$ да олади. Бу функциянинг графиги 10- шаклда келтирилган. Натижада ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай A_ε сон топиладики, етарлича катта $n\,(n>2m)$ лар учун $a_n>A_\varepsilon$ бўлганда

$$\frac{a_n^m}{m!}e^{-\frac{n-m}{n}a_n}<\frac{\varepsilon}{2};\quad \frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

бўлади. Демак, (2) ва (3) дан $I<\varepsilon$ келиб чиқади.

2- *ҳол.* a_n чегараланган бўлсин, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $n_0(\varepsilon)$ топиладики, $n>n_0(\varepsilon)$ бўлганда ушбу тенгсизликлар бажарилади:

$$\left|\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n-e^{-a_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\left.\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Бу тенгсизликлардан ва (1) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|P_n(m)-\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\right|=\left|\frac{a_n^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}\right.\times$$

$$\times\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n-\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\right|=\left|\frac{a_n^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}\times\right.$$

$$\times\left[\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n-e^{-a_n}\right]-\frac{a_n^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{m-1}{n}\right)e^{-a_n}}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}-$$

$$\left.-\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\right|\leqslant\frac{a_n^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n}\times$$

$$\times\left|\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n-e^{-a_n}\right|+\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\times$$

$$\times\left|\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Бу эса теоремани исботлайди.

Пуассон теоремаси *A* ҳодисанинг ҳар бир тажрибада рўй бериш эҳтимоли нолга тенг бўлганда ҳам ўринли эканини таъкидлаб ўтамиз. Бу ҳолда $a_n=0$ бўлади.

Энди

$$P(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

ифодани киритайлик. $P(m)$ миқдорлар $\sum\limits_m P(m)=1$ тенгликни қаноатлантиришини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(m)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}=e^{-a}\cdot e^{a}=1\text{-}$$

Ҳосил қилинган эҳтимоллар тақсимоти *Пуассон қонуни* дейилади.

Энди $P(m)$ ни m нинг функцияси сифатида қараб, уни текширамиз. Шу мақсадда ушбу нисбатни тузиб оламиз:

$$\frac{P(m)}{P(m-1)}=\frac{a}{m}.$$

Бу нисбатдан $m > a$ бўлганда $P(m) < P(m-1)$, $m < a$ бўлганда $P(m) \quad P(m-1)$ ва, ниҳоят, $m = a$ бўлганда $P(m) = P(m-1)$ муносабатларга эга бўламиз. Буларни эътиборга олиб, $P(m)$ миқдор m нинг 0 дан $m_0 = [a]$ гача қийматларида ўсиши ва кейинги қийматларда камайишига ишонч ҳосил қиламиз. Агар a бутун сон бўлса, $P(m)$ функция иккита максимум қийматга эга бўлади ва бу қийматлар $m_0 = a$, $m'_0 = a - 1$ нуқталарда топилади.

Мисол. Ҳар бир отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,001 га тенг. Агар 5000 та ўқ отилган бўлса, иккита ва ундан ортиқ ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Нишонга теккан ўқлар сонини μ_n десак, изланаётган эҳтимол $P(\mu_n \geqslant 2)$ дан иборат бўлиб, у қуйидагига тенг бўлади:

$$P(\mu_n \geqslant 2) = \sum_{m=2}^{n} P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1).$$

$a_n = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$ эканини эътиборга олсак, $P_n(0)$, $P_n(1)$ эҳтимоллар Пуассон формуласи ёрдамида осонгина топилади:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = e^{-5};$$

$$P_{5000}(1) = \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 5e^{-5}.$$

У ҳолда

$$P(\mu_{5000} \geqslant 2) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} \approx 0{,}9596.$$

$P_{5000}(m)$ эҳтимол $m = 4$ ва $m = 5$ бўлганда ушбу максимум қийматга эришади:

$$P_{5000}(4) = P_{5000}(5) \approx 0{,}1755.$$

6- §. Умумлашган Бернулли схемаси

1. Боғлиқ бўлмаган n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир тажрибада кузатилаётган A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли турлича бўлсин. Масалан, i-тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p_i ва рўй бермаслик эҳтимоли $q_i = 1 - p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, яъни ҳодисанинг эҳтимоли тажрибанинг номерига боғлиқ

бўлсин. Бу шартларда A ҳодисанинг n та тажрибада m марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m)$ ни топиш керак бўлсин. Боғлиқ бўлмаган кетма-кет n та тажриба ўтказилган вақтда A ҳодисанинг m марта рўй бериш ҳодисасини B_m орқали белгилайлик. Бундан ташқари, i- тажрибада A ҳодисанинг рўй беришини A_i ва рўй бермаслигини $\overline{A}_i$ орқали белгилайлик. B_m ҳодисани ушбу шаклда ёзиб оламиз:

$$B_m = A_1A_2 \ldots A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_n \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \ldots$$
$$\ldots A_m A_{m+1} \overline{A}_{m+2} \ldots \overline{A}_n \cup \ldots \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots,$$
$$\ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n, \tag{1}$$

бу йиғиндининг ҳар бир қўшилувчисида A ҳодиса турли индекслар билан m марта, $\overline{A}$ ҳодиса эса турли индекслар билан $n-m$ марта қатнашган бўлиб, ўнг томонда турган ҳамма қўшилувчилар сони C_n^m га тенг.

(1) тенгликнинг ўнг томонида турган ҳодисаларнинг ихтиёрий жуфти бир вақтда рўй бермайдиган ҳодисаларнинг йиғиндисидан иборатлигини ва тажрибалар кетма-кетлиги боғлиқ эмаслигини эътиборга олсак, қўшиш теоремасига кўра:

$$P_n(m) = p_1 p_2 \ldots p_m q_{m+1} \ldots q_n +$$
$$+ p_1 q_2 \cdot p_3 \ldots p_m p_{m+1} q_{m+2} \ldots q_n +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+ q_1 q_2 \ldots q_{n-m} p_{n-m+1} \ldots p_n. \tag{2}$$

(2) формуланинг ўнг томонидаги ифодани топиш мақсадида қуйидаги n та иккиҳаднинг кўпайтмасини текширамиз:

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \ldots (q_n + p_n z). \tag{3}$$

Бу ерда z — ихтиёрий параметрдир. (3) нинг ўнг томонидаги биномларни ўзаро кўпайтириб, z^m қатнашган ҳадларнинг ҳаммасидан z^m ни қавсдан ташқарига чиқарилса, z^m нинг олдидаги коэффициент (2) формуланинг ўнг томонидаги йиғиндисидан иборат бўлади. Шунинг учун (3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) \cdot z^m \tag{4}$$

$\varphi_n(z)$ функцияни $P_n(m)$ эҳтимолларни *ҳосил қилувчи функция* дейилади.

Ҳосил қилувчи функция тушунчасидан фойдаланилган ҳолда қуйидаги натижани келтириб чиқариш мумкин: *боғлиқ бўлмаган кетма-кет n та тажрибада A ҳодисанинг m марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m)$*

$$\varphi_n(z) = \prod_{l=1}^{n} (q_l + p_l z)$$

ҳосил қилувчи функциянинг z^m қатнашган ҳадининг коэффициентига. тенг.

Агар

$$p_1 = p_2 = \ldots p_n = p,$$
$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$$

бўлса, бу ҳолда оддий Бернулли схемаси ҳосил бўлиб, унинг ҳосил қилувчи функцияси

$$\varphi_n(z) = (q + pz)^n$$

кўринишда бўлади. Ўнг томондаги иккиҳадни Ньютон биноми формуласи бўйича ёйиб,

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) z^m$$

га эга бўламиз. Бу ерда $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

1- мисол. Турли масофада туриб бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда нишонга қарата 4 та ўқ отилди. Ҳар бир отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли мос равишда $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$. $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,4$ бўлса, отилган 4 та ўқдан бирортасининг ҳам нишонга тегмаслик, биттасини, иккитасини, учтасини ва тўрттасини нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Масалада сўралаётган $P_4(k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ларни топишга киришамиз. Шу мақсадда $P_4(k)$ эҳтимолларнинг ҳосил қилувчи функциясини тузиб оламиз:

$$\varphi_4(z) = \prod_{l=1}^{4} (q_l + p_l z) =$$
$$= (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)(q_3 + p_3 z)\ (q_4 + p_4 z).$$

p_i ва q_i, $i = 1, 2, 3, 4$ ларнинг ўрнига сон қийматларини қўйсак:

$$\varphi_4(z) = (0{,}9 + 0{,}1\,z)\ (0{,}8 + 0{,}2z)\,(0{,}7 + 0{,}3\,z)\,(0{,}6 + 0{,}4z);$$

$$\varphi_4(z) = 0{,}3024 + 0{,}4404\,z + 0{,}2144\,z^2 + 0{,}0404\,z^3 + \\ + 0{,}0024\,z^4$$

кўпҳадни ҳосил қиламиз. Таърифга асосан

$$\varphi_4(z) = P_4(0) + P_4(1)\,z + P_4(2)z^2 + P_4(3)\,z^3 + P(4)\,z^4$$

бўлгани учун

$$P_4(0) = 0{,}3024;\ P_4(1) = 0{,}4404;\ P_4(2) = 0{,}2144; \\ P_4(3) = 0{,}0404;\ P_4(4) = 0{,}0024$$

бўлади.

2. Фараз қилайлик, боғлиқ бўлмаган n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир тажрибада s та A_1, A_2, ... , A_s ҳодисалардан биттаси рўй берсин. Ҳар бир тажрибада A_1, A_2, ... A_s ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоллари мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_s$ ва $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = 1$ бўлсин. n марта тажриба ўтказилганда A_1 ҳодисанинг m_1 марта, A_2 ҳодисанинг m_2 марта, ..., A_s ҳодисанинг m_s марта ($m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$) рўй бериш эҳтимолини топиш керак бўлсин. Бу қаралаётган ҳодисани $B_{m_1, m_2, \ldots, m_s}$ орқали, унинг эҳтимолини эса $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ орқали белгилаймиз. Бизни қизиқтирадиган ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳодисалардан бири

$$\underbrace{A_1 A_1 \ldots A_1}_{m_1}\ \underbrace{A_2 A_2 \ldots A_2}_{m_2} \ldots \underbrace{A_s A_s \ldots A_s}_{m_s} \qquad (5)$$

бўлади. Бу ёзувда n та тажриба ўтказилганда A_1 ҳодисанинг m_1 марта, A_2 ҳодисанинг m_2 марта ва ҳоказо A_s ҳодисанинг m_s марта рўй беришини кўрсатувчи ҳодисалардан биттаси келтирилган. (5) ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига кўра $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ бўлади. Бизни қизиқтираётган ҳодисага қулайлик туғдирадиган ҳар бир ҳодисада A_1 ҳодиса турли ўринларда m_1 марта, A_2 ҳодиса турли ўринларда m_2 марта, ... , A_s ҳодиса турли ўринларда m_s марта қатнашади. Шунинг учун $B_{m_1, m_2, \ldots m_s}$ ҳодисага қулайлик туғдирадиган ҳар бир ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ бўлади. $B_{m_1, m_2, \dots, m_s}$ ҳодисага қулайлик туғдирувчи барча имкониятлар сони

$$\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot \dots m_s!}$$

бўлади. $B_{m_1, m_2, \dots, m_s}$ ҳодисани ташкил этган ҳодисаларнинг ихтиёрий иккитаси бир вақтда рўй бермайдиган ҳодисалар бўлганлиги учун ва тажрибалар бир-бирига боғлиқ бўлмаганлиги сабабли эҳтимолларнинг қўшиш теоремасига кўра қуйидагига эга бўламиз:

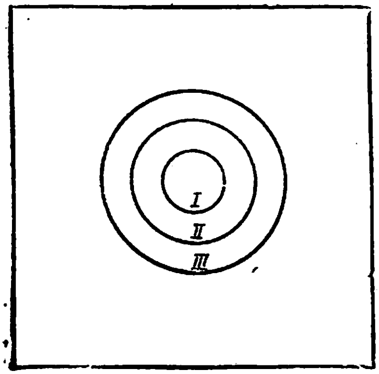
$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_s) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_s!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \quad (6)$$

Оддий Бернулли схемаси учун чиқарилган $P_n(m) = C_n^m p^n q^{n-m}$ формула (6) формуланинг хусусий ҳолидан иборат эканини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $s = 2$ бўлса, (6) формуладан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{n!}{m_1!\cdot m_2!} p_1^{m_1} p_2^{m_2}.$$

(6) формуланинг ўнг томонидаги ифода $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_s x_s)^n$ кўпҳад ёйилмасининг $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s}$ қатнашган ҳади олдидаги коэффициентидан иборат.

2- мисол. Нишон учта зонадан иборат. Ҳар бир зонага отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли мос равишда: $p_1 = 0{,}15$; $p_2 = 0{,}22$; $p_3 = 0{,}13$ бўлсин. Отилган 10 та ўқдан 6 таси биринчи зонадаги нишонга, 3 таси иккинчи зонадаги нишонга ва 1 таси учинчи зонадаги нишонга тегиш эҳтимолини топинг.



11- шакл.

Ечиш. Ўқ отилганда рўй бериши мумкин бўлган ҳодисалар бу мисолда тўртта. Тўртинчи ҳодиса отилган ҳамма ўқларнинг зонадан ташқарига тегиш ҳодисаси бўлади. Тўртинчи ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p_4=1-(p_1+p_2+p_3)=0{,}5$ бўлади. (6) формулага кўра $P_{10}\,(6{,}3,\ 1{,}0)=\frac{10!}{6!\cdot3!\cdot1!\cdot0!}\cdot(0{,}15)^6\cdot(0{,}22)^3\cdot(0{,}13)^1\cdot(0{,}5)^0$, $P_{10}(6{,}3,\,1{,}0)\approx0{,}000013$.

(6) ифода учун ҳам Муавр — Лапласнинг локал ва интеграл теоремаларининг умумлашмаси ўринли.

1- теорема. *Айтайлик,* $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $x_i=\frac{m_i-np_i}{\sqrt{np_iq_i}}$, a_i, b_i $(i=\overline{1,n})$ *чекли сонлар,* $0<p_i<1$, $q_i=1-p_i$ *бўлсин, у ҳолда* $n\to\infty$ да

$$\sqrt{n^{s-1}}\,P_n(m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_s)\to\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}q_i x_i^2}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_1p_2\dots p_s}}$$

муносабат m_i *ларга нисбатан текис бажарилади.*

s ўлчовли фазода $\sum\limits_{i=1}^{s}x_i\sqrt{np_iq_i}=0$ тенглама билан берилган гипертекисликда чегарасининг $s-1$ ўлчовли ҳажми нолга тенг бўлган ихтиёрий G соҳани олайлик.

n та боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказилганда A_1, $A_2,\ \dots,\ A_s$ ҳодисаларнинг рўй беришлар сонини билдирувчи $(m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_s)$ вектор ёрдамида ҳосил қилинган $\left(\frac{m_1-np_1}{\sqrt{np_1q_1}},\ \dots,\ \frac{m_s-np_s}{\sqrt{np_sq_s}}\right)$ векторнинг G соҳага тегишли бўлиши эҳтимоли $P_n(G)$ бўлсин.

2- теорема. $0<p_i<1$ *бўлсин, у ҳолда* $n\to\infty$ *да* G *га нисбатан текис равишда*

$$P_n(G)\to\sqrt{\frac{q_1q_2\dots q_s}{(2\pi)^{s-1}\sum\limits_{i=1}^{s}p_iq_i}}\int\limits_{G}e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}q_ix_i^2}\,dV$$

муносабат ўринли бўлади.

Бу ифодада dV G соҳанинг ҳажм элементи.

Фараз қилайлик, n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибада A_1, $A_2,\ \dots,\ A_s$ ҳодисалар кузатилаётган бўлиб, ҳар бир тажрибада улардан фақат биттаси рўй берсин, j- тажрибада A_i ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p_{ji} $(j=\overline{1,n},\ i=\overline{1;s})$, n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибада A_l ҳодисанинг рўй беришлар сони $\nu_n^{(l)}$ бўлсин. Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$P_n(m) = P\{\nu_n^{(1)} = m_1,\ \nu_n^{(2)} = m_2,\ \dots,\ \nu_n^{(s)} = m_s\}. \tag{2}$$

3- теорема. *$P_n(m)$ эҳтимол*

$$(p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \dots + p_{s1}x_s)(p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \dots + \\ + p_{s2}x_s) \dots (p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \dots + p_{sn}x_s)$$

кўпайтмаларни ёйиб чиққандан сўнг ёйилмадаги $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s}$ ҳаднинг коэффициенти сифатида топилади.

1- пунктдаги $P_n(m)$ ифода учун локал ва интеграл теоремани исботсиз келтирамиз.

Шу мақсадда

$$\sigma^2 = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_sq_s,$$
$$a = p_1 + p_2 + \dots + p_s$$

белгилашларни киритамиз.

4- теорема. *$n \to \infty$ да*

$$P_n(m) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)^2} \to 0$$

муносабатнинг бажарилиши учун $\sigma \to \infty$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

5- теорема. *$n \to \infty$ да*

$$P\left\{m_1 \leqslant \frac{m-a}{\sigma} < m_2\right\} - \int_{m_1}^{m_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \to 0$$

муносабатнинг бажарилиши учун $\sigma \to \infty$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

7- §. Стилтьес интеграли

Биз бу бобда Стилтьес интегралининг таърифини келтирамиз ва Стилтьес интегралининг асосий хоссаларининг исботига тўхталмаймиз. Бу тушунчадан келгуси бобларда фойдаланамиз. Фараз қилайлик, чекли $]a, b[$ интервалда аниқланган $f(x)$ функция ва шу интервалда аниқланган, вариацияси чекли бўлган, камаймовчи $F(x)$ функция берилган бўлсин. Аниқлик учун $F(x)$ чапдан узлуксиз бўлсин деб фараз қиламиз. $]a, b[$ интервални x_i, $i = \overline{0, n}$ нуқталар ёрдамида қуйидагича

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

n та бўлакка бўламиз ва ушбу

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,[F(x_i) - F(x_i - 1)] \qquad (1)$$

йиғиндини топамиз, бу ерда $\overline{x_i}$ нуқта $]x_{i-1}, x_i[$ интервалга тегишли ихтиёрий нуқтадир. Энди, бўлиниш нуқталарининг сонини шундай орттирамизки, максимал узунликка эга бўлган хусусий интервалларнинг узунлиги нолга интилсин. Агар шу ҳолда I_n йиғинди

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

чекли лимитга интилса, бу лимитни $f(x)$ *функциядан* $F(x)$ *интегралловчи функция бўйича олинган Стилтьес интеграли* дейилади ва

$$I = \int_a^b f(x)\,dF(x)$$

каби белгиланади.

Интеграл чегаралари чексиз бўлгандаги Стилтьеснинг хосмас интеграли ҳам одатдагича аниқланади: ихтиёрий $]a, b[$ чекли оралиқда Стилтьес интеграли олинади ва a ҳамда b сонлар ихтиёрий равишда $-\infty$ ва $+\infty$ га интилганда

$$\lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dF(x)$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимитни $f(x)$ *функциядан* $F(x)$ *функция бўйича* $]-\infty, \infty[$ *оралиқда олинган Стилтьес интеграли* дейилади ва

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x)$$

каби белгиланади.

Шунингдек, $f(x)$ функция узлуксиз ва чегараланган бўлса, (1) йиғиндининг лимити интеграллаш оралиқлари чекли бўлганда ҳам, чексиз бўлганда ҳам мавжудлигини исботлаш қийин эмас. Баъзи ҳолларда $f(x)$ функция чегараланмаган бўлганда ҳам Стилтьес интеграли мавжуд бўлади. Бундай интегралларни қараш эҳтимоллар назарияси учун (математик кутилма, дисперсия, моментлар ва бошқаларни ўрганишда) муҳим аҳамиятга эгадир. Бундан кейин ҳамма ерда $|f(x)|$ функциянинг $F(x)$ функция бўйича олинган интеграли мавжуд бўлгандагина $f(x)$ функциянинг $F(x)$ функция бўйича олинган интеграли мавжуд деб қараймиз. Эҳтимоллар назариясининг мақсадларини эътиборга олиб, Стилтьес интегралининг таърифини $f(x)$ функция чекли ёки саноқли сонда узилиш нуқталарига эга бўлган ҳол учун кенгайтириш муҳимдир.

Ҳар қандай чегараланган ҳамда чекли ёки саноқли сондаги узилиш нуқталарига эга бўлган функция вариацияси чегараланган ихтиёрий интегралловчи функция бўйича интегралланувчидир. Бу ҳолда узилиш нуқталарини интервалнинг бўлиниш нуқталари сифатида олишга тўғри келади. Шунингдек, интеграл чегараларини кўрсатишда бу чегара интеграллаш оралиғига тегишли бўлиши ёки тегишли бўлмаслигини кўрсатиш муҳимдир. Ҳақиқатан ҳам, Стилтьес интегралининг таърифидан қуйидагига эга бўламиз ($a-0$ символ a ни интеграллаш оралиғига тегишли бўлишини, $a+0$ символ эса a ни интеграллаш оралиғидан чиқариб ташланганини билдиради):

$$\int_{a-0}^{b} f(x)\,d\,F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\,[F(x_i)-F(x_{i-1})]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n} f(\overline{x_i})\,[F(x_i)-F(x_{i-1})]+\lim_{x_1\to x_0=a} f(\tilde{x}_1)F(x_1)-F(x_0)]=$$

$$=\int_{a+0}^{b} f(x)\,dF(x)+f(a)\,[F(a+0)-F(a)].$$

Шундай қилиб, агар $f(a) \neq 0$ ва $F(x)$ функция $x=a$ нуқтада сакрашга эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{a-0}^{b} f(x)\,dF(x) - \int_{a+0}^{b} f(x)\,dF(x) = f(a)\,[F(a+0) - F(a)].$$

Бу ифода шуни кўрсатадики, битта нуқтага келтириладиган оралиқ бўйича олинган Стилтьес интеграли нолдан фарқли натижа бериши мумкин. Кейинги ёзувларимизда, агар алоҳида кўрсатма берилмаган бўлса, оралиқнинг охирги нуқтасини интеграллаш оралиғидан чиқариб ташлаймиз, бошланиш нуқтасини интеграллаш оралиғига киритишни келишиб оламиз. Бу шарт қуйидаги тенгликни ёзишга имкон беради:

$$\int_{a}^{b} dF(x) = F(b) - F(a).$$

Ҳақиқатан ҳам, таърифга асосан,

$$\int_{a}^{b} dF(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [F(x_n) - F(x_0)] = F(b) - F(a),$$

чунки $F(x)$ функция чапдан узлуксиз бўлгани учун

$$F(b) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)$$

муносабат ўринли бўлади.

Агар $F(x)$ функция ҳосилага эга ва унинг интегралидан иборат бўлса, у ҳолда чекли орттирмалар формуласига асосан

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(\bar{x}_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

муносабатни ёзамиз, бунда $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$, у ҳолда

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dF(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,[F(x_i) - F(x_{i-1})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,p(\bar{x}_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \int_{a}^{b} f(x)\,p(x)\,dx$$

тенглик ўринли бўлиб, Стилтьес интеграли оддий интегралга келтирилади. Агар $F(x)$ функция $x=c$ нуқтада сакрашга эга бўлса, оралиқларни бўлишни шундай танлаймизки, $x_k < c < x_{k+1}$ бўлганда

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{k} f(\overline{x_i})\,[F(x_i) - F(x_{i-1})] + \right.$$

$$\left. + f(c)\,[F(x_{k+1}) - F(x_k)]\right\} + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=k+2}^{n} f(\overline{x}_i)\,F(x_i) - F(x_{i-1})] =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dF(x) + \int_{c+0}^{b} f(x)\,dF(x) + f(c)\,[F(c+0) - F(c)]$$

га эга бўламиз. Хусусий ҳолда $F(x)$ функциянинг сакрашлари $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ нуқталарда бўлса, у ҳолда Стилтьес интеграли қатор кўринишида тасвирланади:

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n)\,[F(c_n + 0) - F(c_n)].$$

Стилтьес интегралининг қуйидаги хоссаларини келтирамиз.

1. $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ бўлганда

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dF(x), \quad [a = c_0, \; b = c_{n+1}].$$

2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dF(x) = c\int_a^b f(x)\,dF(x).$

3. $\displaystyle\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dF(x) = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)\,dF(x).$

4. $f \geqslant 0$ ва $a < b$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) \geqslant 0.$$

5. Агар $F_1(x)$, $F_2(x)$ лар ўзгариши чегараланган монотон функциялар ва c_1, c_2 лар ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,d\,[c_1 F_1(x)+c_2 F_2(x)]=$$

$$=c_1\int_a^b f(x)\,dF_1(x)+c_2\int_a^b f(x)\,dF_2(x).$$

6. Агар $F(x)=\int_c^x g(u)\,dG(u)$, c - ўзгармас сон, $g(u)$— узлуксиз функция ва $G(u)$ чекли вариацияли камаймайдиган функция бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dF(x)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dG(x).$$

II БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. Оилада 8 фарзанд бор. Ўғил ва қиз туғилиш эҳтимоллари ўзаро тенг. Оилада 8 фарзанддан:

а) 3 таси қиз бола, 5 таси ўғил бола;

б) камида 4 таси ўғил бола;

в) кўпи билан 5 таси қиз бола бўлиш эҳтимолини топинг.

2. Группада 25 студент бор. Ҳар бир студентнинг кундалик машғулотга қатнашмаслик эҳтимоли $p\approx 0{,}01$ га тенг. Тавakkалига олинган кунда 2 студентнинг машғулотга қатнашмаслик эҳтимолини топинг.

3. Заводда тайёрланган деталлардан 12 таси текширишга ажратилди. Ҳар бир детальнинг ишга яроқлилик эҳтимоли 0,95 га тенг. Энг кўп эҳтимол билан улардан нечтаси яроқли бўлиши мумкин?

4. Ўғил бола туғилиш эҳтимоли $p=0{,}515$ деб, 10 фарзанди бор оиладаги фарзандларнинг 7 нафари ўғил бола бўлиш эҳтимолини топинг.

5. Бригадада 6 трактор бор, шу трактордан камида 5 таси ишласа, бригаданинг иши нормал дейилади. Тракторнинг айрим сабаблар билан ишламаслик эҳтимоли 0,1 га тенг бўлса, бригаданинг нормал ишлаш эҳтимолини топинг.

6. Бирор партиядаги пилладан 30 % и рангли. Партиядан тасодифий олинган 10 та пилладан 3 тасининг рангли бўлиш эҳтимолини топинг.

7. Эҳтимоллик мулоҳазаларидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликни исботланг:

$$1+\frac{N-m}{N-1}+\frac{(N-m)(N-m-1)}{(N-1)(N-2)}+\dots+$$

$$+\frac{(N-m)\dots 2\cdot 1}{(N-1)\dots(m+1)m}=\frac{N}{m},$$

бу ерда $N \geqslant m \geqslant 1$.

8. 500 саҳифали китобни босиб чиқаришда босмахонада 50 та ҳарфий хатога йўл қўйилган. Таваккалига олинган саҳифада ҳарфий хато бўлиш эҳтимолини топинг.

9. Уруғлик буғдойнинг 0,6% и бегона ўтлар уруғидан иборат. Таваккалига олинган 1000 дона уруғдан камида 6 та уруғ; 10 та уруғ бегона ўт уруғи бўлиш эҳтимолини топинг.

10. Кузатилаётган ҳодисанинг битта тажрибада рўй бериш эҳтимоли 0,3 га тенг. 100 та тажриба ўтказилганда кузатилаётган ҳодисанинг нисбий частотаси 0,2 дан 0,4 гача оралиқда бўлади деб қандай эҳтимол билан айтиш мумкин?

11. Ўзбек ва рус тилидаги китоблар бор кутубхонада таваккалига олинган китобнинг ўзбек тилида бўлиш эҳтимоли 0,6 га тенг бўлса, фонддаги 2500 та китобнинг 1500 таси ўзбек тилида бўлиш эҳтимолини топинг.

Фонддаги 2500 та китоб орасида ўзбек тилидаги китоблар сони:

а) ками билан 1500 ва ортиғи билан 1700 та бўлиши;

б) ками билан 1500 та бўлиши;

в) ортиғи билан 1499 бўлишининг эҳтимолларини топинг.

12. Битта ўқ отилганда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,7 га тенг. 150 та ўқ отилганда нишонга роса 75 марта ўқ тегиш эҳтимолини топинг.

13. Магазинга 100 дона биринчи ва иккинчи сортли маҳсулот келтирилди. Маҳсулотнинг биринчи сорт бўлиш эҳтимоли 0,7 га тенг. Биринчи сорт маҳсулотнинг сони 60 ва 80 сонлари орасида бўлиш эҳтимолини топинг.

14. 10000 та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибанинг ҳар бирида *A* ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,75 га тенг. *A* ҳодисанинг нисбий частотаси билан унинг эҳтимоли орасидаги айирманинг абсолют қиймат жиҳатдан 0,01 дан ошмаслик ҳодисасининг эҳтимолини топинг.

15. *A* ҳодисанинг ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,3 га тенг. 0,98 эҳтимол билан *A* ҳодисанинг нисбий частотаси ва эҳтимоли орасидаги айирманинг абсолют қиймати жиҳатдан 0,02 дан ошмаслиги учун энг камида нечта тажриба ўтказиш керак?

16. 10000 ўтказилган ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибанинг ҳар бирида *A* ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,93 га тенг. Шундай α сон топиш керакки, 0,979 эҳтимоллик билан *A* ҳодисанинг нисбий частотаси ва эҳтимоли орасидаги айирма абсолют қиймат жиҳатдан ε дан кичик бўлсин.

III боб

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

1- §. Тасодифий миқдорлар ва тақсимот функциялар

Олдинги боблардаги мисолларга эътибор берсак, баъзи бир миқдорларнинг у ёки бу тасодифий таъсир натижасида турли қийматларни қабул қилишини кўрамиз.

Масалан, шашқолтошни ташлаганимизда тушган ёқдаги очкони x орқали белгиласак, бу миқдор албатта тасодифий сон бўлади. Унинг қабул қиладиган қийматлари 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамларидан бири бўлиши аниқ, лекин шашқолтош ташлаганда унинг қайси ёғи билан тушишини, яъни x нинг аниқ қайси сонга тенг бўлишини олдиндан айтиб бўлмайди, чунки шашқолтошнинг қайси ёғи билан тушиши турли тасодифий сабабларга боғлиқ бўлади; янги туғилган чақалоқларни 100 тадан группаларга ажратсак, ҳар бир группадаги ўғил (қиз) болалар сони турлича бўлиши мумкин; олинган бир килограмм пахтадан чиққан тола узунлиги бошқа бир килограмм пахтадан чиққан тола узунлигидан фарқ қилади; идишда турган газ молекулалари тезлиги ҳам тасодифий характерга эга, чунки бу молекулалар бирбири билан тўқнашиб, ўз ҳаракат траекториясини ва тезлигини ўзгартириб туради: ҳар йили ерга тушадиган метеоритлар сони ҳам турлича бўлади, яъни тасодифий характерга эга.

Тасодифий миқдор таърифини беришдан аввал ўлчовли функция тушунчасини киритамиз. Бизга $<\Omega, \mathcal{F}>$, $<R, G>$ ўлчовли фазолар ва $\xi : \Omega \to R$ функция берилган бўлиб, бу функция учун $A \in G$ эканидан $\xi^{-1}(A) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ экани келиб чиқса, бундай функция *ўлчовли функция* дейилади. Агар $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ ихтиёрий эҳтимоллик фазоси бўлса, ҳар қандай $\xi : <\Omega, \mathcal{F}> \to <R, G>$ ўлчовли функция *тасодифий миқдор* дейилади.

1- **мисол.** Битта танга ташлаганимизда Ω иккита элементар ҳодиса герб ва рақамдан иборат бўлади. Агар танганинг гербли томони тушса 0 ни, рақамли томони тушса 1 ёзсак, у ҳолда 0 ёки 1 ни қабул қилувчи тасодифий миқдорни ҳосил қиламиз.

2- **мисол.** Агар иккита танга ташласак, ω элементар ҳодисалар ГГ; ГР; РГ; РР дан иборат бўлиб, „герб“ тушишлар сонини $\xi = \xi(\omega)$ деб белгиласак, бу тасодифий миқдорни қуйидаги жадвал билан бериш мумкин:

ω	РР	ГР	РГ	ГГ
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

3- **мисол.** $\{(x, y) \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}$ квадратга ташланган нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа тасодифий миқдордир, чунки $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < t\}$ тўплам ўлчовли.

Тасодифий миқдорнинг таърифига кўра ихтиёрий $x \in R$ учун

$$\{\omega \mid \xi(\omega) < x\} = \{\xi < x\} = \xi^{-1}\,(]-\infty,\ x[) \in \mathfrak{J},$$

чунки $]-\infty,\ x[\ \in G$. Бундан $F_\xi(x) = P\ \{\omega : \xi < x\}$ функцияни R да аниқланганлиги келиб чиқади. Бу функция ξ *тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси* дейилади.

4- **мисол.** ξ тасодифий миқдор 1 ва 0 қийматларни мос равишда p ва q $(p + q = 1)$ эҳтимол билан қабул қилсин, яъни

$$\xi : 0,\ 1, \qquad p = P\ \{\xi = 1\},$$
$$p : q,\ p. \qquad q = P\ \{\xi = 0\}.$$

Бу ҳолда

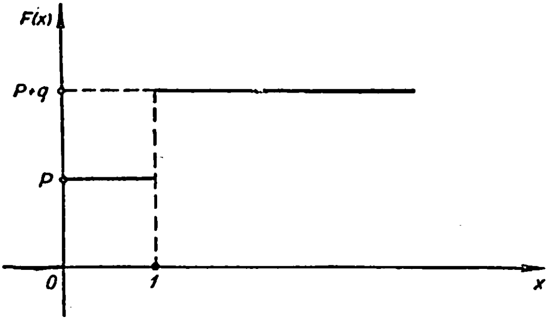
$$P\{\xi < x\} = F(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } & x \leqslant 0 \quad \text{бўлса,} \\ p, \text{ агар } & 0 < x \leqslant 1 \quad \text{бўлса,} \\ 1, \text{ агар } & 1 < x \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

Бу тақсимотнинг графиги қуйидагича бўлади (12- шакл).

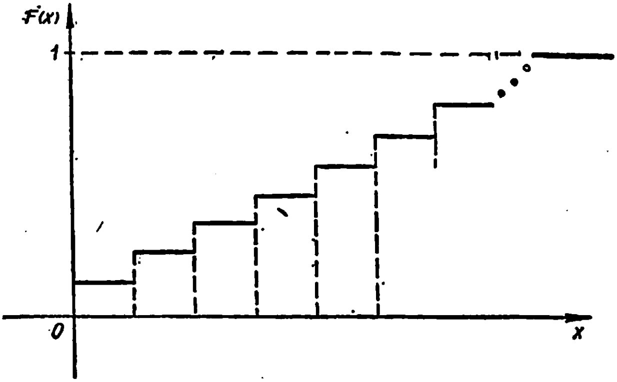
Агар ξ тасодифий миқдор $0, 1, 2, \ldots, n$ қийматларни

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = \overline{0,\ n}$$

эҳтимол билан қабул қилса, бу тасодифий миқдор *биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор*



12- шакл.



13- шакл.

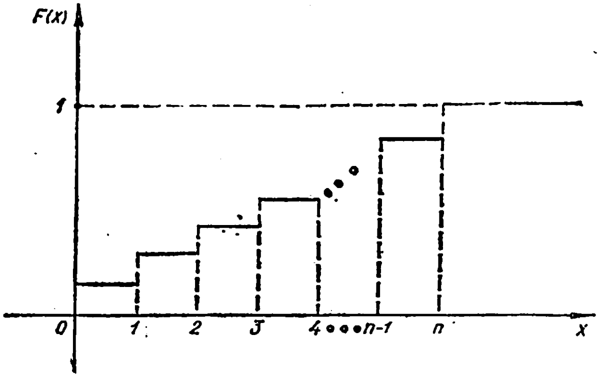
дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса},\\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant n \text{ бўлса},\\ 1, & \text{агар } n<x \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Графиги қуйидагича бўлади (13- шакл).

5- мисол. Агар ξ тасодифий миқдор 0, 1, 2, ... қийматларни

$$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda>0$$



14- шакл.

эҳтимоллар билан қабул қилса, уни Пуассон қонуни *бўйича тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича аниқланади:

$$P(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар} \quad k<0, \text{ бўлса}, \\ \sum\limits_{k<x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & \text{агар} \quad 0\leqslant k\leqslant x \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Графиги қуйидагича бўлади (14- шакл).

6- **мисол.** ξ тасодифий миқдор $x_1, x_2, \ldots, x_N$ қийматларни $P\left\{\xi=x_k\right\}=\frac{1}{N}$, $k=\overline{1,N}$ эҳтимоллар билан қабул қилсин. Бу тасодифий миқдор *текис тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар} \quad x\leqslant x_1 & \text{бўлса}, \\ \frac{k}{N}, & \text{агар} \quad x_k< x\leqslant x_{k+1} & \text{бўлса}, \\ 1 & \text{агар} \quad x_N<x & \text{бўлса}. \end{cases}$$

7- **мисол.** Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$\Phi(x)=c\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du$$

кўринишда бўлса, бундай тасодифий миқдор *нормал тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Бу ерда $c > 0$, $\sigma > 0$, $-\infty < a < \infty$ — ўзгармас сонлар,

Тақсимот функция қуйидаги хоссаларга эга.

1. Барча ҳақиқий x лар учун

$$0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1.$$

2. $F_\xi(x)$ камаймайдиган функция.

Ҳақиқатан ҳам, $x_1 < x_2$ бўлсин. Ушбу

$$A_1 = \{\xi < x_1\} \quad A_2 = \{\xi < x_2\}, \quad B = \{x_1 < \xi < x_2\}$$

ҳодисаларни киритсак;

$$A_2 = A_1 \cup B, \ A_1 \cap B = V$$

муносабатлар ўринли бўлади. Натижада эҳтимолнинг аддитивлик аксиомасига кўра

$$P(A_2) = P(A_1) + P(B)$$

ёки

$$0 \leqslant P(x_1 < \xi < x_2) = P(\xi < x_2) - P(\xi < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

Бундан эса $x_1 \leqslant x_2$ да $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ бўлиб, хоссанинг исботи келиб чиқади.

3. Тақсимот функция чапдан узлуксиз, яъни

$$F_\xi(x) = F_\xi(x-0) = \lim_{x_m \uparrow x} F(x_m).$$

Исбот. Фараз қилайлик, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < < \ldots$ ва $n \to \infty$ да $a_n \uparrow b$ бўлсин, у ҳолда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : \xi(\omega) \in [a_n, b[\right\} = V.$$

Натижада узлуксизлик аксиомасига кўра

$$F_\xi(b) - F_\xi(a_n) = P\{\omega : \xi(\omega) \in [a_n, b]\}$$

ифода $n \to \infty$ да нолга интилади. Бу эса $F_\xi(x)$ нинг чапдан узлуксизлигини кўрсатади.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Исбот. Биз хоссани исботлаш учун иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларни қараймизки, бунда $\{x_n\}$ кетма-кетлик $-\infty$ га монотон камаяди, $\{y_n\}$ эса $+\infty$ га монотон ўсади. $A_n=\{\xi<x_n\}$, $B_n=\{\xi<y_n\}$ белгилашларни киритамиз, $x_n\downarrow-\infty$ лигидан A_n тўпламлар кетма-кетлиги ичма-ич қўйилган бўлади ва $\bigcap A_n=\varnothing$. Эҳтимолнинг узлуксизлик аксиомасига биноан $n\to\infty$ да $P(A_n)\to 0$. У ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)=0$ келиб чиқади. Бундан ва $F(x)$ функциянинг монотонлигидан $\lim\limits_{n\to\infty} F(x)=0$ эканлиги келиб чиқади. $\{y_n\}$ кетма-кетлик $n\to\infty$ да $+\infty$ га монотон яқинлашганлиги учун B_n тўпламлар кетма-кетлиги ҳам „ўсувчи“ бўлади ва $\bigcup B_n=\Omega$, бинобарин, эҳтимолнинг хоссасига асосан $P(B_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

Бундан, худди аввалгидагидек,

$$\lim_{n\to\infty}F(y_n)=1,\quad \lim_{n\to\infty}F(y)=1$$

муносабатлар келиб чиқади.

Агар $x=x_0$ нуқтада $F(x_0+0)-F(x_0-0)=C_0>0$ бўлса, функция $x=x_0$ нуқтада сакрашга эга бўлиб, унинг катталиги C_0 га тенг бўлади.

5. Тақсимот функциянинг сакрашга эга бўлган нуқталари тўплами кўпи билан саноқли бўлиши мумкин.

Исбот. $F(x)$ тақсимот функциянинг сакраши $\frac{1}{2}$ дан катта бўлган нуқталарнинг сони фақат 1 та (чунки 2 та бўлса, уларнинг йиғиндиси 1 дан катта бўлади, бунинг эса бўлиши мумкин эмас).

$F(x)$ нинг $C_0>\frac{1}{2}$ бўлган сакрашлар сони 1 та,

$F(x)$ нинг $\frac{1}{4}<C_0\leqslant\frac{1}{2}$ бўлган сакрашлар сони 3 та

$F(x)$ нинг $\frac{1}{8}<C_0<\frac{1}{4}$ бўлган сакрашлар сони 7 та

. . . . , ...

$F(x)$ нинг $\frac{1}{2^n}<C_0\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ бўлган сакрашлар сони 2^{n-1} та

Бу нуқталарни кетма-кет номерлаб чиқиш мумкин, чунки саноқли сондаги чекли тўпламларнинг йиғиндиси яна саноқли бўлади.

1- таъриф. Агар ξ тасодифий миқдор чекли ёки саноқли сондаги $\{x_k\}$ қийматларни $\{p_k\}$ $(\sum\limits_k p_k=1)$ эҳтимоллар билан қабул қилса, уни *дискрет тасодифий миқдор* дейилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \sum_{\{k:x_k<x\}} p_k$$

формула билан аниқланади. Юқорида келтирилган 4—6-мисоллар дискрет тасодифий миқдорга мисол бўлади.

2- таъриф. ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, бу тасодифий миқдорни *абсолют узлуксиз тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Бу ердаги $p(u)$ функция ξ тасодифий миқдорнинг *зичлик функцияси* дейилади.

2- таърифга кўра $F'(x) = p(x)$ бўлади.

Зичлик функция қуйидаги хоссаларга эга.

1. Зичлик функция манфий эмас:

$$p(x) \geqslant 0.$$

Ҳақиқатан ҳам, $F(x)$ тақсимот функциянинг камаймаслигидан унинг ҳосиласи деярли ҳамма нуқталарда доим мусбат бўлади.

2. Агар $p(x)$ зичлик функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + dx)$ эҳтимол зичлик функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида эквивалент бўлади:

$$P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + dx) \approx p(x_0)\,dx.$$

3. Зичлик функциядан $]-\infty, +\infty[$ оралиқ бўйича олинган интеграл 1 га генг:

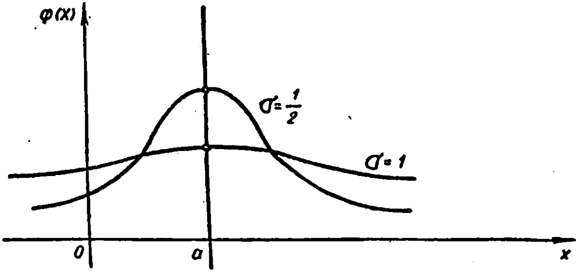
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$$

Бу бевосита тақсимот функция хоссасидан келиб чиқади.

Юқоридаги 7- мисолда келтирилган тасодифий миқдор узлуксиз тасодифий миқдордир. Нормал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

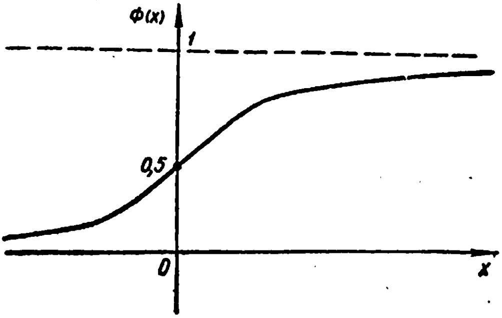
га тенг. $\varphi(x)$ зичлик функция $x=a$ нуқтада энг катта қийматга эришади ва унинг графиги $x=a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашган, бу функция учун Ox ўқ горизонтал асимптота, $x=a\pm\sigma$ нуқталар бу функциянинг букилиш нуқталари бўлади. Буларни эътиборга олсак, $\varphi(x)$ функциянинг графиги қуйидагича бўлишини кўриш қийин эмас (15- шакл). Хусусан $a=0$, $\sigma=1$ бўлганда тақсимот функция



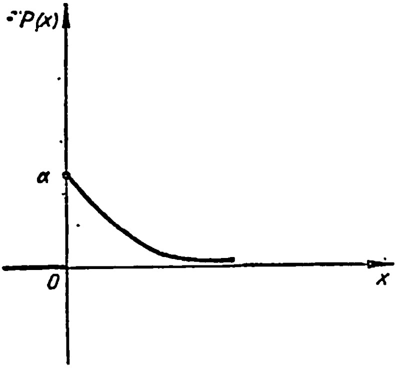
15- шакл.

$$\Phi_{(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

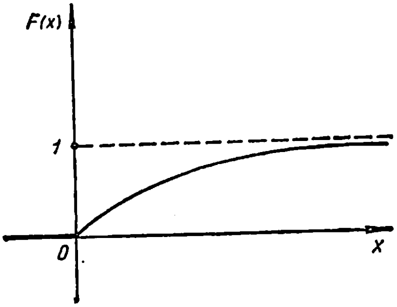
кўринишга эга бўлади. Унинг графиги 16- шаклда келтирилган. $\Phi_{(0,1)}(x)$ тақсимот функция (0,1)-*параметрли стандарт нормал қонун* дейилади.



16- шакл.



17- шакл.



18- шакл.

Қуйида узлуксиз тасодифий миқдорларга бир нечта мисол келтирамиз.

9- мисол. α параметрли экспоненциал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

кўринишга, тақсимот функцияси эса

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади. Бу функцияларнинг графиклари 17, 18- шаклларда кўрсатилган.

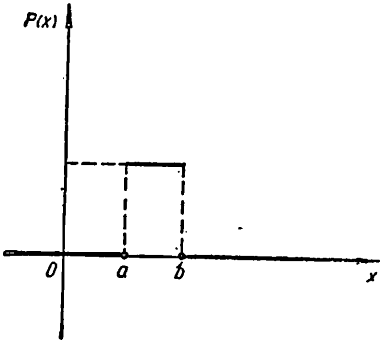
10- мисол. Агар ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \overline{\in}]a, b[\quad \text{бўлса,} \\ \frac{1}{b-a}, & \text{агар } x \in [a, b] \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

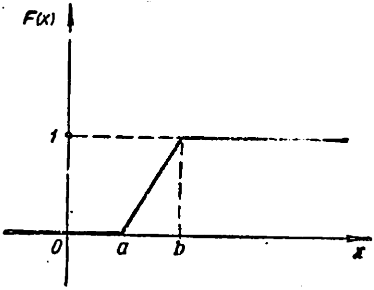
кўринишда берилган бўлса, ξ тасодифий миқдор $[a, b]$ да текис тақсимланган тасодифий миқдор дейилади. Бу тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < a \quad \text{бўлса,} \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{агар } a \leqslant x < b \quad \text{бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \geqslant b \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

Бу функцияларнинг графиклари 19, 20- шаклларда кўрсатилган.



19- шакл.



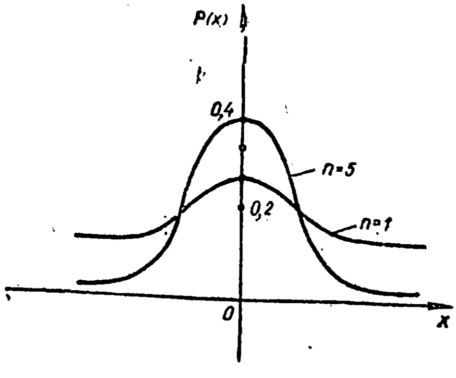
20- шакл.

11-мисол. Зичлик функцияси

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

дан иборат бўлган тасодифий миқдорни *эрклилик даражаси n бўлган Стьюдент қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади, бу ерда $\Gamma(x)$ — гамма функциядир (21-шакл). Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

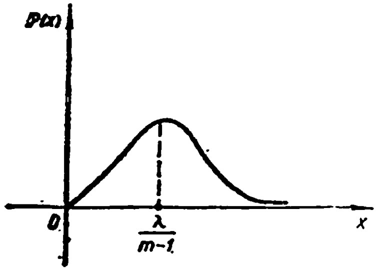
$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} du.$$



21- шакл.

12- мисол. Зичлик функцияси

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$



22- шакл.

кўринишда (22- шакл) бўлган тасодифий миқдор (m, λ) параметрли Эрланг қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\lambda^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

13- мисол. Зичлик функцияси

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x v^{\alpha-1} e^{-\beta v}\, dv, & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

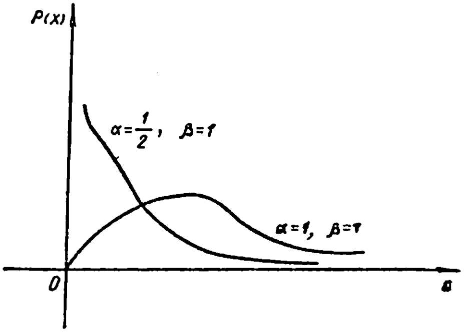
дан иборат (23- шакл) бўлган тасодифий миқдор (α, β) *параметрли Гамма қонун бўйича тақсимланган* тасодифий миқдор дейилади. Унинг тақсимот функцияси эса қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x v^{\alpha-1} e^{-\beta v} dv, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

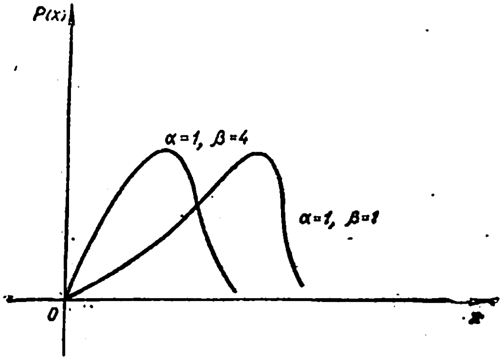
14- мисол. Зичлик функцияси

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} x^\alpha (1 - x)^\beta, & x \in]0, 1[\\ 0 & x \overline{\in}]0, 1] \end{cases}$$

дан иборат (24- шакл) бўлган тасодифий миқдор (α, β) *параметрли Бета қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:



23- шакл.



24- шакл.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}\displaystyle\int_0^x u^\alpha (1-u)^\beta du, & x\in]0,1[\\ 1 & x\geqslant 1. \end{cases}$$

15-мисол. Зичлик функцияси

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

кўринишда бўлган тасодифий миқдор *Коши қонуни билан тақсимланган тасодифий миқдор* **дейилади.**

Агар g функция дифференциалланувчи **бўлиб,** ξ $f(x)$ зичлик функцияга эга бўлса, у ҳолда $g(\xi)$ нинг **зичлик** функцияси мавжуд бўлиб, у қуйидагига тенг:

$$f_{g(\xi)}(x)=f(g^{-1}(x))(g^{-1}(x))'=\frac{f(g^{-1}(x))}{g'(x)}.$$

Бундан фойдаланиб, зичлик функцияси мавжуд бўлган тасодифий миқдорлардан тузилган функцияларнинг зичлик функцияларини топиш мумкин.

16- мисол. Агар $g(\xi)=a+b\xi$, $b>0$ бўлса,

$$f_{g(\xi)}(x)=\frac{1}{b}f\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad F_{g(\xi)}(x)=F_{\xi}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

17- мисол. Айтайлик, $\eta=\xi^2$ бўлсин, у ҳолда $y<0$ лар учун $F_{\eta}(y)=0$; $y\geqslant 0$ лар учун эса

$$F_{\eta}(y)=P(\xi^2<y)=P(-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y})=$$
$$=F_{\xi}(\sqrt{y})-F_{\xi}(-\sqrt{y})-P(\xi=-\sqrt{y}),$$

чунки

$$P(\xi>-\sqrt{y})=1-F_{\xi}(-\sqrt{y})-P(\xi=-\sqrt{y}).$$

Агар $F_{\xi}(x)$ зичлик функцияга эга бўлса, у ҳолда зичлик функциянинг иккинчи хоссасига кўра

$$P\{\xi=-\sqrt{y}\}=0.$$

Натижада

$$F_{\eta}(y)=F_{\xi}(\sqrt{y})-F_{\xi}(-\sqrt{y}).$$

Бундан $y\geqslant 0$ лар учун

$$f_{\eta}(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_{\xi}(\sqrt{y})+f_{\xi}(-\sqrt{y})].$$

Агар $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорларнинг ҳар бирининг тақсимот функцияси $F(x)$ дан иборат бўлса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги *бир хил тақсимланган* дейилади.

2- §. Кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар

Фараз қилайлик, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ эҳтимоллик фазосида $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар берилган бўлсин. Ушбу

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$$

векторни қарайлик.

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар ёрдамида бериладиган $\xi: \Omega \to R^n$ акслантириш *тасодифий вектор* ёки *кўп ўлчовли тасодифий миқдор* дейилади.

Агар R^n даги Борель тўпламлари* σ- алгебрасини $\mathscr{E}$ десак, у ҳолда $\Omega \to R^n$ акслантиришни $< \Omega, B >$ фазони $< R^n, \mathscr{E} >$ фазога ўлчовли акслантириш деб қарашимиз мумкин. Шунинг учун ихтиёрий $\mathscr{E}$ Борель тўплами учун ξ векторнинг тақсимоти деб аталадиган $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ функция аниқланган.

Ушбу

$$F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}$$

функция $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ тасодифий векторнинг *тақсимот функцияси* ёки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорларнинг *биргаликдаги тақсимот функцияси* дейилади. Тақсимот функциянинг мувофиқлик хоссалари деб юритиладиган баъзи хоссаларини келтирамиз:

1. $\lim\limits_{x_n \to \infty} F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

2. $\lim\limits_{x_n \to -\infty} F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Бу ерда лимит охирги аргумент бўйича олинган, лекин бу шарт эмас бўлиб ихтиёрий аргумент бўйича лимитга ўтиш мумкин эди. 1 ва 2-хоссалар бир ўлчовли тасодифий миқдорлар тақсимот функциясининг хоссалари каби исботланади.

3. $F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тақсимот функция ҳар бир аргументи бўйича камаймайдиган функция.

4. $F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тақсимот функция ҳар бир аргументи бўйича чапдан узлуксиз.

5 $F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$ муносабат ўринли.

Бу хоссаларнинг исботини китобхонга қолдирамиз.

Ихтиёрий $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция n ўлчовли тасодифий векторнинг тақсимот функцияси бўлиши учун юқорида келтирилган хоссаларга яна қуйидаги хоссани

---

* *Саримсоқов Т. А.* Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялар назарияси, „Ўқитувчи“ Т., 1968.

қўшиш зарур: ихтиёрий α_i ва β_i ҳақиқий сонлар учун қуйидаги ифода манфий эмас:

$$P\{\alpha_1\leqslant\xi_1\leqslant\beta_1,\ \alpha_2\leqslant\xi_2\leqslant\beta_2,\ \dots,\ \alpha_n\leqslant\xi_n\leqslant\beta_n\}=$$

$$=F(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)-\sum_{i=1}^{n}p_i+\sum_{i<j}^{2}p_{ij}-\dots+$$

$$+(-1)^nF(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),$$

бу ерда $p_{i,j,\dots,k}$ билан $F(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$ функциянинг $\eta_i=\alpha_i,\ \eta_j=\alpha_j,\ \dots,\ \eta_k=\alpha_k$ ва қолган η_s ларда β_s га тенг қийматлари белгиланган.

$<R^n,\mathcal{E}>$ фазода $P_\xi(B)$ эҳтимоллик ўлчовининг киритилиши бу ўлчов бўйича интеграллаш имконини беради. Агар φ функция R^n ни R га акслантирувчи Борель функцияси бўлса, у ҳолда $\varphi(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ функция бошланғич фазони Ω га ўлчовли акслантиради ҳамда

$$\int_\Omega\varphi(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))\,p(d\omega)$$

интеграл аниқланган бўлади. Биз интеграл таърифидан фойдаланиб, юқоридаги интеграл

$$\int_{R^n}\varphi(\vec{x})\,p_\xi(d\vec{x}),\quad \vec{x}=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R^n$$

билан бир хил эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Худди бир ўлчовли тасодифий миқдорлар каби тасодифий векторни дискрет ва абсолют узлуксиз типларга ажратиб ўрганиш мумкин.

1-таъриф. Агар чекли ёки саноқли $\{(x_{m_1},x_{m_2},\dots,x_{m_k})\}$ нуқталар тўплами учун

$$P(\xi_1=x_{m_1},\xi_2=x_{m_2},\dots,\xi_n=x_{m_k})=p_{x_{m_1},x_{m_2},\dots,x_{m_k}}$$

ва

$$\sum_{(x_{m_1},\dots,x_{m_k})}p_{x_{m_1},\dots,x_{m_k}}=1$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ *дискрет типдаги тасодифий вектор* дейилади.

2-таъриф. Агар функция $f(t_1, \ldots, t_n) \geqslant 0$ бўлиб, тасодифий векторнинг тақсимот функцияси ушбу

$$F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n$$

кўринишда бўлса, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *абсолют узлуксиз типдаги тасодифий вектор* дейилади.

$$\int\limits_{R^n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n = 1$$

эканлиги равшан. Юқоридаги $f(t_1, \ldots, t_n)$ функция $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ тасодифий векторнинг *зичлик функцияси* дейилади.

Деярли ҳамма ерда

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

муносабат ўринли бўлади.

Агар

$$F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \ldots F_{\xi_n}(x_n)$$

тенглик бажарилса, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ эмас* дейилади.

1-мисол. n ўлчовли $a_i \leqslant \xi_i \leqslant b_i$, $i = \overline{1, n}$ параллелепипедда текис тақсимланган $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ тасодифий векторнинг тақсимот функцияси

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{агар ҳеч бўлмаганда битта } i \text{ учун } x_i \leqslant a_i \\ \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i - a_i}{b_i - a_i}, & a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = \overline{1, n} \\ 1, & \text{агар } x_i > b_i,\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. Зичлик функцияси

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \cdot Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

кўринишга эга бўлган $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ тасодифий вектор *нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий вектор* дейилади, бунда

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

мусбат аниқланган квадратик форма,

$$|A| = \det \| a_{ij} \|.$$

Хусусан $n = 2$ бўлса,

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right]}, \qquad (1)$$

бу ерда a, b — ҳақиқий сонлар, $-1 \leqslant r \leqslant 1$, σ_1, σ_2 — мусбат сонлар.

Агар $r = \pm 1$ бўлса, ξ_1 ва ξ_2 лар чизиқли боғланган бўлади.

Нормал тақсимланган тасодифий векторнинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, \ldots, x_n)} dx_1 \ldots dx_n.$$

Агар $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ векторнинг компоненталари нормал қонун бўйича тақсимланган бўлиб, улар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда унинг зичлик функцияси қуйидагига тенг:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \qquad (2)$$

Демак, (1), (2) ларни солиштирадиган бўлсак, $r = 0$ лигини кўрамиз, шундай қилиб, тасодифий векторнинг компоненталари ўзаро боғлиқ бўлмаса ва ҳар бир компонентаси нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, $r = 0$ бўлади. Юқоридаги мулоҳазаларга асосан, ҳар бир компонентаси нормал қонун бўйича тақсимланган $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ тасодифий векторнинг компоненталари ўзаро боғлиқ бўлмаслиги учун $a_{ij} = 0\,(i \neq j)$ бўлиши зарур ва етарлилигини кўриш қийин эмас.

3- §. Тасодифий миқдорларнинг функциялари

Айтайлик,

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \tag{1}$$

тасодифий миқдорлар берилган бўлсин, бу тасодифий миқдорларни билган ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ \eta_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k &= f_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \end{aligned} \tag{2}$$

муносабатлар ёрдамида янги тасодифий миқдорлар тузамиз, бу ерда $f_1, \ldots, f_k$ — ўлчовли функциялар. Бу параграфда (1) тасодифий миқдорларнинг тақсимот функциясини билган ҳолда (2) тасодифий миқдорларнинг тақсимот функциясини топишни мақсад қилиб қўямиз. Фараз қилайлик, (1) узлуксиз типдаги тасодифий миқдорлар бўлиб, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уларнинг биргаликдаги зичлик функцияси бўлсин, у ҳолда

$$\begin{aligned} &P(\eta_1 < y_1, \eta_2 < y_2, \ldots, \eta_k < y_k) = \\ &= \int\limits_D \cdots \int p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \end{aligned} \tag{3}$$

бўлади, бу ерда

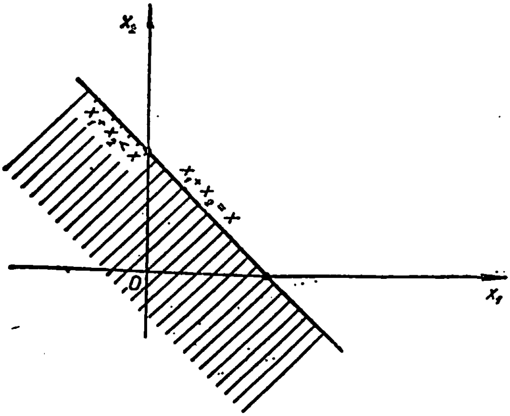
$$D\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant y_i, \quad i = \overline{1, k}\}.$$

Қўйилган масаланинг бир нечта хусусий ҳолларини кўрайлик. $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ йиғиндининг тақсимот функцияси (3) га кўра

$$P(\eta < x) = \int\limits_D \cdots \int p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

га тенг, бунда

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_i x_i \leqslant x\}.$$



25- шакл.

Хусусан, $n=2$ бўлган ҳолда (25- шакл)

$$P(\xi_1+\xi_2<x)=\iint_{D_1} p(x_1,\ x_2)\,dx_1dx_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{x-x_2} p(x_1,\ x_2)\,dx_1\Big)dx_2=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1,\ z-x)\,dx_1dz.$$

$$D_1=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1+x_2\leqslant x\}.$$

Бундан η тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$P(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1,\ x-x_1)\,dx_1. \qquad (4)$$

Агар ξ_1 ва ξ_2 ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса, Стилтьес интегралининг хоссасига кўра

$$P(\xi_1+\xi_2<x)=\int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x-z)\,dF_{\xi_2}(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-z)\,dF_{\xi_1}(z).$$

Ҳосил бўлган муносабатни $F_{\xi_1}(x)$ ва $F_{\xi_2}(x)$ *тақсимот функцияларнинг композицияси* дейилади ва $F_{\xi_1}*F_{\xi_2}$ каби белгиланади. Демак,

$$F_{\xi_1+\xi_2}=F_{\xi_1}*F_{\xi_2}.$$

1-мисол. Агар ξ_1 ва ξ_2 ўзаро боғлиқ бўлмаган ва]0, 1[да текис тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x_1)\,p_{\xi_2}(x-x_1)\,dx_1=$$

$$=\int_{0}^{1} p_{\xi_2}(x-x_1)\,dx_1=\int_{x-1}^{x} p_{\xi_2}(y)\,dy=I$$

бўлади. Айтайлик, $0<x\leqslant 1$ бўлсин, у ҳолда

$$I=\int_{x-1}^{0} p_{\xi_2}(y)\,dy+\int_{0}^{x} p_{\xi_2}(y)\,dy=x,$$

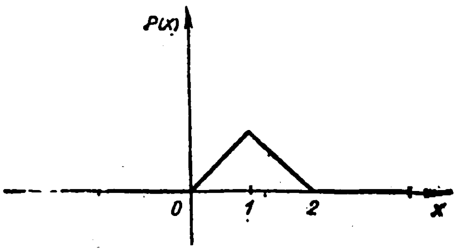
агар $1<x\leqslant 2$ бўлса,

$$I=\int_{x-1}^{1} p_{\xi_2}(y)\,dy=\int_{x-1}^{1} dy=2-x.$$

Шундай қилиб,

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } 0<x\leqslant 1 \text{ бўлса,}\\ 2-x, & \text{агар } 1<x\leqslant 2 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 26-шаклда берилган. Демак, ξ_1, ξ_2 текис тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлса, уларнинг йиғиндиси текис тақсимланган бўлмас экан. Бу зичлик функцияга мос келган тасодифий миқдор *Симпсон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади.



26- шакл.

2-мисол. ξ_1, ξ_2 ўзаро боғлиқ бўлмаган

(0, 1)- параметрли нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлсин. Улар йиғиндисининг зичлик функциясини топайлик. (4) га кўра

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2}} dx_1 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}+x_1x-\frac{x^2}{2}} dx_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2+xx_1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}} dx_1 = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi\, 2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Агар

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

лигини эътиборга олсак,

$$p(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2}}.$$

Демак, боғлиқ бўлмаган ξ_1, ξ_2 ларнинг ҳар бири (0, 1) нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлса, уларнинг йиғиндиси (0, 2) нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлар экан.

3- мисол. Айтайлик, ўзаро боғлиқ бўлмаган (a, σ^2) параметрли нормал қонун бўйича тақсимланган ξ_1, ξ_2, . . . , ξ_n тасодифий миқдорлар берилган бўлсин, булардан

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-a)^2 \qquad (5)$$

йиғиндини тузамиз ва ξ_1, ξ_2, . . . , ξ_n тасодифий миқдорларнинг биргаликдаги зичлик функцияси

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-a)^2}{\sigma^2}} \qquad (6)$$

ни билган ҳолда χ^2 тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси ва тақсимот функциясини топишни ўз олдимизга мақсад қилиб қўямиз. Биринчи навбатда $\zeta = \frac{\chi}{\sqrt{n}}$ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини излаймиз. Бу тақсимот функция

$$P(\zeta < x) = \int\limits_{D} \cdot \, \cdot \int p(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

га тенг, бунда D соҳа $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{(x_j - a)^2}{\sigma^2} < x^2 n$

дан иборат.

Агар $\frac{x_j - a}{\sigma} = y_j$ алмаштиришни бажарсак,

$$P(\zeta < x) = \int\limits_{\Sigma y_k^2 < x^2 n} \dots \int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1} y_j^2} dy_1 \dots dy_n$$

ни ҳосил қиламиз. Бу интегрални ҳисоблаш мақсадида

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \cos\theta_{n-1}, \\ y_2 &= \rho \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n &= \rho \sin\theta_1, \\ -\frac{1}{2} &< \theta_i < \frac{\pi}{2},\ i = \overline{1,\ n-1},\ \rho < x\sqrt{n} \end{aligned}$$

алмаштириш бажарамиз ва

$$P(\zeta < x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{n-1} D(\theta_1, \dots$$

$$\dots, \theta_{n-1})\, d\rho\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

ифодани ҳосил қиламиз, $D(\theta, \ldots, \theta_{n-1})\cdot\rho^{n-1}$ ўтиш якобиани. Агар

$$C_n = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-},$$

белгилаш киритилса,

$$P(\zeta < x) = C_n\int\limits_0^{x\sqrt{n}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}d\rho$$

ҳосил бўлади, лекин

$$P(\zeta < +\infty) = 1 = C_n\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}d\rho = C_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Демак,

$$P(\zeta < x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^{x\sqrt{n}}\rho^{n-1}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho. \tag{7}$$

Бундан тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини топамиз:

$$p(x) = \frac{n^{\frac{n}{2}}x^{n-1}e^{-\frac{nx^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x \geqslant 0. \tag{8}$$

Хусусан, $n = 1$ да нормал қонуннинг иккиланган зичлик функциясини, $n = 3$ да Максвелл қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p_{\xi}(x) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

ни ҳосил қиламиз. Энди (8) ёрдамида χ^2 нинг зичлик функцияси

$$p_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}$$

га тенглигига ишонч ҳосил қиламиз, бундан эса χ^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топамиз:

$$P(\chi^2 < x) = \int_0^x p_{\chi^2}(x)\,dx.$$

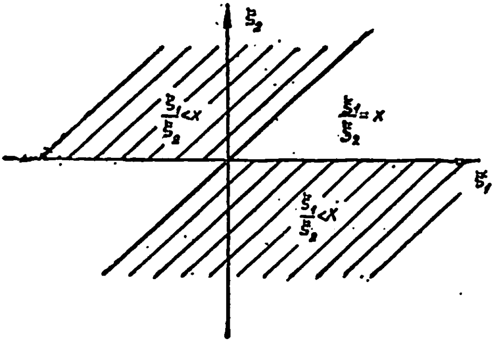
4-мисол. Бўлинманинг тақсимот функцияси. Энди $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ тасодифий миқдорнинг $(P\{\xi_2 = 0\} = 0)$ тақсимот функциясини топайлик. Айтайлик, (ξ_1, ξ_2) тасодифий векторнинг зичлик функцияси $p(x_1, x_2)$ бўлсин, у ҳолда

$$P(\xi < x) = F_\xi(x) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x_2x} p(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 - \\ - \int_{-\infty}^0 \int_{x_2x}^\infty p(x_1, x_2)\,dx_1dx_2. \qquad (9)$$

Агар ξ_1 ва ξ_2 ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдор бўлса, (9) дан қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$F_\xi(x) = \int_0^\infty F_{\xi_1}(x\,x_2)\,p_{\xi_2}(x_2)\,dx_2 + \\ + \int_{-\infty}^0 (1 - F_{\xi_1}(xx_2))\,p_{\xi_2}(x_2)\,dx_2 = \\ = \int_0^\infty F_{\xi_1}(xx_2)\,dF_{\xi_2}(x_2) + \int_{-\infty}^0 (1 - F_{\xi_1}(xx_2))\,dF_{\xi_2}(x_2). \qquad (10)$$

5-мисол. ξ_1, ξ_2 лар ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлиб, $\xi_1\left(0, \frac{1}{n}\right)$ параметрли нормал қо-



27- шакл.

нун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор, ξ_2 нинг зичлик функцияси эса

$$p_{\xi_2}(x_2)=\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x_2\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-\frac{nx_2^2}{2}}$$

дан иборат бўлсин. У ҳолда (10) дан

$$\frac{dF_\xi(x)}{dx}=p_\xi(x)=\int\limits_0^\infty x_2p_{\xi_1}(x_2x)p_{\xi_2}(x_2)\,dx_2-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^0 x_2p_{\xi_1}(x_2x)p_{\xi_2}(x_2)\,dx_2=$$

$$=\int\limits_0^\infty x_2\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-\frac{nx_2^2x^2}{2}}\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x_2\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-\frac{nx_2^2}{2}}dx_2$$

ёки $u=\frac{nx_2^2}{2}(x^2+1)$ алмаштириш ёрдамида

$$p_\eta(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

ни, яъни Стьюдент қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини ҳосил қилдик. Хусусан, $n=1$ да $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ Коши қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини ҳосил қиламиз.

Фараз қилайлик, ξ_1 ва ξ_2 дискрет тақсимланган бўлсин:

$$P(\xi_1 = x_k) = p_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$P(\xi_2 = y_s) = q_s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Агар $\eta = \xi_1 + \xi_2$ бўлса, $P(\eta = z_m)$ топилсин. Биз бу ерда $x_k = k$; $y_s = s$; $\eta = m$ ҳолни кўрамиз. Бевосита ишонч ҳосил қилиш мумкинки,

$$P(\eta = m) = P(\xi_1 + \xi_2 = m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi_1 = n,\ \xi_2 = m - n).$$

Агар ξ_1 ва ξ_2 лар ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса,

$$P(\xi_1 = k,\ \xi_2 = s) = P(\xi_1 = k)\,P(\xi_2 = s) = p_k q_s$$

бўлади, у ҳолда

$$P(\eta = m) = P(\xi_1 + \xi_2 = m) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi_1 = n)\,P(\xi_2 = m - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n q_{n-m}.$$

6-мисол. ξ_1 ва ξ_2 ўзаро боғлиқ эмас ҳамда

$$\begin{array}{llll} \xi_1: & -1 & 0 & 1 \\ p: & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \qquad \text{ва} \qquad \begin{array}{lllll} \xi_2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ p: & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

бўлса, $\eta = \xi_1 + \xi_2$ нинг тақсимот конунини топинг.

Ечиш.

$$P(\eta = 0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{20},$$

$$P(\eta = 1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{4}$$

ва ҳоказо. Демак,

$$\begin{array}{llllllll} \eta: & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p: & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{8}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20}. \end{array}$$

III БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. Агар

$$\begin{array}{llll} \xi: & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ p: & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

бўлса, ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.

2. $P(\xi < x) = F(x)$ бўлсин, у ҳолда

а) $\eta = \alpha\xi + \beta$, α ва β — ҳақиқий сонлар,

б) $\eta = \frac{1}{\xi}$, $(P(\xi = 0) = 0)$;

в) $\eta = \operatorname{tg} \xi$,

г) $\eta = \cos \xi$

тасодифий миқдорларнинг тақсимот функциясини топинг.

3. Тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p(x) = \frac{4c}{e^x + e^{-x}}$$

бўлса, ўзгармас параметр c нинг қийматини топинг.

4. 10 та деталдан иборат партияда 8 та стандарт деталь бор. Таваккалига 2 та деталь олинган бўлса, бу деталларнинг стандарт бўлишининг тақсимот қонунини топинг.

5. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad x \leqslant -1 \quad \text{бўлса,} \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{агар} \quad -1 < x \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{бўлса,} \\ 1, & \text{агар} \quad x > \frac{1}{3} \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

Унинг зичлик функциясини топинг.

6. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad x \leqslant 0 \quad \text{бўлса,} \\ \sin 2x, & \text{агар} \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{бўлса,} \\ 1, & \text{агар} \quad x > \frac{\pi}{4} \quad \text{бўлса,} \end{cases}$$

унинг зичлик функциясини топинг.

7. Агар тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad x\leqslant 1 \quad \text{бўлса},\\ x-\frac{1}{2}, & \text{агар} \quad 1<x\leqslant 2 \quad \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар} \quad x>2 \quad \text{бўлса},\end{cases}$$

кўринишда бўлса, унинг тақсимот функциясини топинг.

8. ξ тасодифий миқдор экспоненциал тақсимланган бўлсин:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases} \qquad (\lambda>0).$$

Унинг зичлик функциясини топинг.

9. τ_1 ва τ_2 тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаган ва ҳар бири Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлсин, $\tau_1+\tau_2$ йиғиндининг тақсимот қонунини топинг.

10. ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ қатъий монотон ва узлуксиз бўлсин. $\eta=F(\xi)$ миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

11. Ихтиёрий тақсимот функция қуйидаги хоссаларга эга эканлигини исботланг:

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^{\infty}\frac{1}{z}dF(z)=0, \quad \lim_{x\to+0} x\int_x^{\infty}\frac{1}{z}\,dF(z)=0.$$

12. Агар $F(x)$ тақсимот функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий $h\neq 0$ да

$$\Phi(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F(z)\,dz, \quad \Psi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F(z)\,dz$$

функция ҳам тақсимот функция бўлишини исботланг.

13. ξ_1 ва ξ_2 ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар ва уларнинг зичлик функцияси қуйидагига тенг:

$$p_{\xi_1}(x)=p_{\xi_2}(x)=\frac{C}{1+x^4}.$$

C ўзгармасни топинг ҳамда $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ бўлинма Коши қонуни бўйича тақсимланганлигини исботланг.

IV боб

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

1-§. Математик кутилма

Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларнинг математик кутилмаси (ўрта қиймати) тушунчасини алоҳида-алоҳида кўриб ўтамиз.

1-таъриф. ξ тасодифий миқдор $\{x_k\}$ қийматларни $\{p_k\}$ эҳтимоллар билан қабул қилсин.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ қатор йиғиндиси (агар бу қатор абсолют яқинлашувчи бўлса) ξ тасодифий миқдорнинг *математик кутилмаси* дейилади ва

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \qquad (1)$$

каби белгиланади.

1-мисол. A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, битта тажрибада A ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилмасини топинг.

Ечиш. Битта тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш сонини ξ деб белгилайлик. У ҳолда

$$\begin{array}{lll} \xi: & 0 & 1 \\ p: & q = 1 - p & p. \end{array}$$

1-таърифга асосан

$$M\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

2-мисол. Биномиал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

Ечиш. ξ орқали A ҳодисанинг n та ўзаро боғлиқмас тажрибаларда рўй бериш сонини белгиласак,

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

тенглик ўринли экани бизга маълум. Математик кутилма (ўрта қиймат) таърифига кўра

$$M\xi=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

3-мисол. Пуассон қонуни билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

Ечиш. Бу ҳолда, маълумки,

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \lambda>0.$$

Таърифга асосан

$$M\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

Демак, λ параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси λ параметрга тенг экан.

ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $p(x)$ бўлсин.

2-таъриф. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг *математик кутилмаси* деб, ушбу

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p(x)\,dx \tag{2}$$

интегралга (агар бу интеграл абсолют яқинлашувчи бўлса) айтилади.

4-мисол. $(a,\ \sigma^2)$ параметрли нормал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

Ечиш. Таърифга асосан

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+a=a.$$

Демак, (a, σ^2)-нормал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси a параметрга тенг экан.

5-мисол. ν параметрли экспоненциал қонун бўйича тақсимланган τ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси:

$$M\tau = \int_0^\infty x\nu e^{-\nu x} dx = \frac{1}{\nu}.$$

6-мисол. $[a, b]$ оралиқда текис тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси қуйидагича топилади:

$$M\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}.$$

3-таъриф. Тақсимот функцияси $F(x)$ бўлган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \qquad (3)$$

каби аниқланади.

Умуман, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ эҳтимоллик фазосида берилган ξ тасодифий миқдорнинг *математик кутилмаси* деб,

$$M\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$$

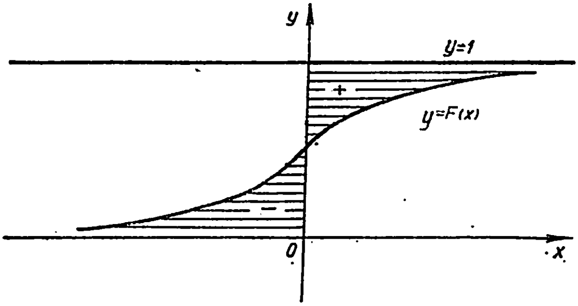
интегралнинг сон қийматига (агар бу интеграл мавжуд бўлса) айтилади.

Математик кутилманинг геометрик тасвирини кўз олдимизга келтириш мақсадида (3) интегрални қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$M\xi = -\int_{-\infty}^{0} F_\xi(x) dx + \int_0^\infty (1 - F_\xi(x)) dx.$$

Бу ифоданинг геометрик тасвири 28-шаклда берилган.

Тасодифий миқдорларнинг математик кутилмаси ҳамма вақт ҳам мавжуд бўлавермаслигини эслатиб ўтамиз. Масалан, тасодифий миқдор Коши қонуни билан тақсимланган бўлсин, унинг зичлик функцияси



28- шакл.

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

кўринишда бўлади ва

$$M||\xi|| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\,dx = \infty.$$

n ўлчовли $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ деб белгилайлик.

4-таъриф. n ўлчовли $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ *тасодифий векторнинг математик кутилмаси* деб, $M\xi = (M\xi_1, M\xi_2, \dots, M\xi_n)$ га айтилади, бу ерда

$$M\xi_k = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x_k\,dF(x_1, x_2, \dots, x_k) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_k\,dF_k(x_k), \qquad k = \overline{1, n}$$

бўлиб, $F_k(x)$ эса ξ_k тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясидир.

7-мисол. (ξ_1, ξ_2) тасодифий миқдор ушбу икки ўлчовли нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. 4- таърифга асосан

$$M\xi_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1,\ x_2)\,dx_1dx_2=\int_{-\infty}^{\infty} x_1p_1(x_1)\,dx_1=a_1,$$

$$M\xi_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_1,\ x_2)\,dx_1dx_2=\int_{-\infty}^{\infty} x_2p_2(x_2)\,dx_2=a_2.$$

Нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини эсга олсак, қуйидагиларни ёза оламиз:

$$p_1(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\cdot\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma_1^2}},\quad p_2(x_2)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_2-b)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Буларни эътиборга олсак, шу параграфдаги 4- мисолга асосан $a_1=a$, $a_2=b$ эканини топамиз.

Математик кутилма қуйидаги хоссаларга эга:

1- хосса. Ўзгармас соннинг математик кутилмаси шу соннинг ўзига тенг.

Исбот. c ўзгармас сонни фақат битта c қийматни 1 эҳтимол билан қабул қилувчи тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Шунинг учун

$$Mc=c\cdot 1=c.$$

2- хосса. $|M\xi|\leqslant M|\xi|$ тенгсизлик ўринли.

Бу хоссанинг исботи математик кутилманинг таърифидан бевосита келиб чиқади.

3- хосса. $M\xi$, $M\eta$ ва $M(\xi+\eta)$ ларнинг ихтиёрий иккитаси мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Исботни дискрет ҳол учун келтирамиз. Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$ қийматларни мос равишда $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k,\ \ldots,$ эҳтимоллар билан, η тасодифий миқдор эса $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_k,\ \ldots$ қийматларни мос равишда $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k,\ \ldots$ эҳтимоллар билан қабул қилсин, у ҳолда $\xi+\eta$ йиғиндининг қабул қиладиган қийматлари $\{x_k+y_l\}$ $(k=1,2,\ \ldots;\ l=1,2,\ \ldots)$ кўринишдаги сонлардан иборат.

$p_{k,l}$ орқали ξ нинг x_k ва η нинг y_l қийматларни қабул қилиш эҳтимолини белгилаймиз. У ҳолда тўла эҳтимоллик формуласига асосан

$$M(\xi+\eta)=\sum_{k,l=1}^{\infty}(x_k+y_l)\,p_{k,l}=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\left(\sum_{l=1}^{\infty}p_{k,l}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}y_l\left(\sum_{k=1}^{\infty}p_{k,l}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k+\sum_{l=1}^{\infty}y_l q_l=M\xi+M\eta.$$

1-натижа. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилмаси шу тасодифий миқдорлар математик кутилмаларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$M\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\sum_{k=1}^{n}M\xi_k.$$

4-хосса. Ўзгармас сонни математик кутилма ишорасидан ташқарига чиқариб ёзиш мумкин, яъни

$$Mc\xi=cM\xi, \qquad c — \mathrm{const}.$$

5-хосса. Агар $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$ бўлса, $\alpha\leqslant M\xi\leqslant\beta$ бўлади.

6-хосса. Агар $\xi\geqslant 0$ ва $M\xi=0$ бўлса, у ҳолда $\xi=0$ тенглик 1 эҳтимол билан бажарилади.

7-хосса. ξ ва η тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмасин. Агар $M\xi$ ва $M\eta$ мавжуд бўлса, у ҳолда $M\xi\eta=M\xi\cdot M\eta$.

Исбот. Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор x_1, $x_2, \ldots, x_k, \ldots$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \ldots,$, $p_k \ldots$ эҳтимоллар билан, η тасодифий миқдор $y_1, y_2, \ldots$ $y_k, \ldots$ қийматларни $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ эҳтимоллар билан қабул қилсин.

ξ ва η тасодифий миқдорларнинг ўзаро боғлиқ эмаслигидан $\xi\cdot\eta$ тасодифий миқдор $x_i\cdot y_j$ кўринишидаги қийматларни $p_i q_j$ эҳтимол билан қабул қилади, натижада

$$M\xi\eta=\sum_{i,j}x_i y_j P(\xi=x_i,\ \eta=y_j)=\sum_{i,j}x_i y_j p_i q_j=$$

$$=\sum_i x_i p_i\left(\sum_j y_j q_j\right)=M\xi M\eta.$$

Теореманинг тескариси доим ҳам тўғри эмас, яъни $M\xi\eta = M\xi M\eta$ дан ξ ва η нинг ўзаро боғлиқ бўлмаслиги келиб чиқмайди. Масалан, фараз қилайлик ξ, η ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлиб, $M\xi = M\eta = 0$ бўлсин. Янги $\zeta = \xi\eta$ тасодифий миқдор тузамиз. Ҳосил бўлган ξ ва ζ боғлиқ тасодифий миқдорлар эканлиги кўриниб турибди, лекин шу билан бир вақтда

$$M\xi\zeta = M\xi^2\eta = M\xi^2 M\eta = 0 = M\xi \cdot M\eta.$$

2-§. Дисперсия

1-таъриф. Тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб,

$$M(\xi - M\xi)^2$$

ифодага айтилади ва $D\xi$ каби белгиланади.

Демак,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{1}$$

Агар ξ тасодифий миқдор $\{x_k\}$ қийматларни $\{p_k)$ эҳтимоллар билан қабул қилса, $\eta = (\xi - M\xi)^2$ тасодифий миқдор $\{(x_k - M\xi)^2\}$ қийматларни ҳам $\{p_k\}$ эҳтимоллар билан қабул қилади ва шу тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси учун

$$M\eta = D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k \tag{2}$$

формула ўринли бўлади.

ξ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ушбу формула билан ҳисоблаш қулайдир:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \tag{3}$$

Ҳақиқатан ҳам, математик кутилманинг хоссаларидан фойдаланиб, (3) ни исботлаш мумкин:

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = \\ &= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + M(M\xi)^2 = \\ &= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2. \end{aligned}$$

1-мисол. A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, битта тажрибада A ҳодиса рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг.

Ечиш. 1-§, 1-мисолдаги тасодифий миқдор

$$\xi = \begin{cases} 0, & q = 1 - p \\ 1, & p \end{cases}$$

ни киритиб, $M\xi = p$ эканини эътиборга олсак, (2) га асосан

$$D\xi = (0 - M\xi)^2 \cdot q + (1 - M\xi)^2 p = p^2 q + (1 - p)^2 p =$$
$$= p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq.$$

2-мисол. Биномиал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. 1-§, 2-мисолга кўра $M\xi = np$ эди. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ тенгликка асосан

$$D\xi = \sum_k k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 =$$

$$= np\Bigg|\,(n-1)p\sum_k^n C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{a-k} +$$

$$+ \sum_k^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}\Bigg] - (np)^2 =$$

$$= np((n-1)p + 1) - (np)^2 = npq.$$

3-мисол. Пуассон қонуни билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. Шу бобдаги 1-§, 3-мисолга асосан

$$M\xi = \lambda;$$

(3) тенгликка асосан

$$D\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2. \qquad (4)$$

(4) даги қаторнинг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\Bigg] = \lambda[\lambda + 1] = \lambda^2 + \lambda.$$

Буни (4) га қўйсак,

$$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Демак, Пуассон қонуни билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва ўрта қиймати ўзаро тенг экан.

Энди узлуксиз тасодифий миқдор дисперсиясининг таърифини берамиз. ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $p(x)$ бўлсин.

2-таъриф. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси* деб қуйидаги

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x)\, dx$$

интегралнинг қийматига айтилади.

4-мисол. (a, σ^2)-параметрли нормал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. $M\xi = a$ эканини эътиборга олган ҳолда, (5) дан фойдаланамиз:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

$\frac{x-a}{2} = z$ алмаштиришни киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Ҳосил бўлган интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$D\xi = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sigma^2.$$

Демак, (a, σ^2)- параметрли нормал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсияси иккинчи параметрга тенг экан.

5-мисол. ν параметрли экспоненциал қонун бўйича тақсимланган τ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. $M\tau = \frac{1}{\nu}$ эканини эътиборга олган ҳолда (3) формуладан фойдалансак:

$$D\tau = \nu \int_0^\infty x^2 e^{-\nu x} dx - \frac{1}{\nu^2} = \frac{2}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2}.$$

6-мисол. $[a, b]$ оралиқда текис тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. $M\xi = \frac{a+b}{2}$ эканини ҳисобга олсак:

$$D\xi = \int_a^b x^2 \cdot \frac{dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3-таъриф. Тақсимот функцияси $F(x)$ бўлган тасодифий миқдорнинг дисперсияси бундай аниқланади:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x). \qquad (7)$$

Тасодифий миқдорнинг дисперсияси тасодифий миқдор билан унинг математик кутилмаси орасидаги айирманинг—фарқнинг квадратига боғлиқ эканига эътибор берайлик. Бу фарқ қанчалик катта бўлса, дисперсиянинг қиймати ҳам катта ва аксинчадир. Шунинг учун дисперсия қийматини қаралаётган тасодифий миқдор қийматларининг унинг ўрта қийматига нисбатан тарқоқлик характеристикаси деб қараш мумкин.

Дисперсия қуйидаги хоссаларга эга.

1-*хосса.* Ўзгармас соннинг дисперсияси нолга тенг.

Исбот. 1-таърифга асосан

$$Dc = M(c - Mc)^2 = M(c - c)^2 = M \cdot 0 = 0.$$

2-*хосса.* Ўзгармас сонни квадратга ошириб, дисперсия ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни

$$Dc\xi = c^2 D\xi.$$

Исбот. Таърифга асосан

$$Dc\xi = M(c\xi - Mc\xi)^2 = M(c\xi - cM\xi)^2 =$$
$$= c^2M(\xi - M\xi)^2 = c^2D\xi.$$

3- хосса. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси бу тасодифий миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Исбот. Таърифга асосан

$$D(\xi + \eta) = M[(\xi + \eta) - M(\xi + \eta)]^2.$$

Математик кутилманинг хоссасидан фойдалансак:

$$D(\xi + \eta) = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = M(\xi - M\xi)^2 +$$
$$+ M2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + M(\eta - M\eta)^2 =$$
$$= D\xi + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + D\eta. \qquad (8)$$

$\xi - M\xi$ ва $\eta - M\eta$ лар ўзаро боғлиқ эмас, у ҳолда

$$M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)\cdot M(\eta - M\eta) = 0$$

бўлади. Буни эътиборга олсак, (8) дан хоссанинг исботи келиб чиқади.

1- натижа. Чекли сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси улар дисперсияларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$D\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \sum_{k=1}^{n}D\xi_k.$$

Исбот. Таърифга асосан

$$D\sum_{k=1}^{n}\xi_k = M\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - M\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 = M\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\right)^2 =$$
$$= M\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j) = \sum_{k=1}^{n}D\xi_k +$$
$$+ \sum_{k\neq j}M(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j). \qquad (9)$$

Ихтиёрий ξ_k ва ξ_j $(k \neq j)$ ларнинг ўзаро боғлиқ эмаслигидан $k \neq j$ бўлганда

$$M(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j) = 0.$$

(9) да буни эътиборга олсак, натижанинг исботи келиб чиқади.

ξ тасодифий миқдор берилган бўлсин. Одатда $\eta = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ тасодифий миқдорни *нормалаштирилган ва марказлаштирилган тасодифий миқдор* дейилади.

7-мисол. $M\eta = 0$, $D\eta = 1$ эканини исботланг.

Ечиш.

$$M\eta = M\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{1}{\sqrt{D\xi}}\cdot(M\xi - MM\xi) = \frac{1}{\sqrt{D\xi}}\cdot(M\xi - M\xi) = 0.$$

ξ ва $M\xi$ лар ўзаро боғлиқ эмаслигидан дисперсиянинг 2,3-хоссаларига кўра

$$D\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{D\xi + D(-M\xi)}{D\xi} = \frac{D\xi}{D\xi} = 1.$$

8- мисол. ξ ва η тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса,

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$$

бўлади.

Ечиш. 2 — 3- хоссаларга асосан

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D(-\eta) = D\xi + (-1)^2 D\eta = D\xi + D\eta.$$

Мисол. Ўзаро боғлиқ бўлмаган ва ҳар бири

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & q \\ 1, & p \end{cases} \qquad (10)$$

қонун билан тақсимланган $\xi_1, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар берилган, $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ йиғиндининг дисперсиясини топинг.

Ечиш. 2- натижага асосан

$$D\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = n \cdot D\xi_k.$$

Шу параграфдаги 1- мисолда $D\xi_k = pq$ экани топилган эди. У ҳолда

$$D\sum_{k=1}^{n} \xi_k = npq.$$

3- §. Юқори тартибли моментлар ва улар учун тенгсизликлар

1- таъриф. ξ тасодифий миқдорнинг *k-тартибли бошланғич моменти* деб, дискрет тасодифий миқдорлар учун

$$a_k = M\xi^k = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i^k P\{\xi = x_i\}$$

ифодага, узлуксиз тасодифий миқдорлар учун

$$a_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)\,dx$$

ифодага айтилади. Бу ерда $p_\xi(x)$ — ξ нинг зичлик функцияси.

2- таъриф. ξ тасодифий миқдорнинг *k- тартибли абсолют моменти* деб, дискрет тасодифий миқдорлар учун

$$m_k = M|\xi|^k = \sum_{-\infty}^{\infty} |x_i|^k P\{\xi = x_i\}$$

ифодага, узлуксиз тасодифий миқдорлар учун

$$m_k = M|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k p_\xi(x)\,dx$$

ифодага айтилади.

3- таъриф. ξ тасодифий миқдорнинг *k- тартибли марказий моменти* деб, дискрет тасодифий миқдорлар учун

$$\nu_k = M(\xi - M\xi)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} (x_i - M\xi)^k P(\xi = x_i)$$

ифодага, узлуксиз тасодифий миқдорлар учун

$$\nu_k = M(\xi - M\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k p_\xi(x)\,dx$$

ифодага айтилади.

Агар $M\xi = 0$ бўлса, у ҳолда $\nu_k = a_k$, яъни марказий момент бошланғич моментга тенг бўлади.

Демак, a_1 момент ξ нинг математик кўтилмаси, ν_2 момент эса ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси экан.

4-таъриф. ξ тасодифий миқдорнинг *k- тартибли марказий абсолют моменти* деб, дискрет тасодифий миқдорлар учун

$$\mu_k = M|\xi - M\xi|^k = \sum_{l=\infty}^{\infty} |i - M\xi|^k \cdot P\{\xi = l\}$$

ифодага, узлуксиз тасодифий миқдорлар учун

$$\mu_k = M|\xi - M\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M\xi|^k p_\xi(x)\,dx$$

ифодага айтилади.

Хусусан, агар $M\xi = 0$ бўлса, k- тартибли марказий абсолют момент k- тартибли бошланғич абсолют момент билан устма-уст тушади.

Қуйида моментларга доир баъзи муҳим тенгсизликларни кўриб чиқамиз.

Коши—Буняковский тенгсизлиги. Иккинчи тартибли моментга эга бўлган ихтиёрий ξ ва η тасодифий миқдорлар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$M|\xi \cdot \eta| \leqslant \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}. \qquad (1)$$

Исбот. Маълумки, $|\xi \cdot \eta| \leqslant \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ ҳамда $M\xi^2$ ва $M\eta^2$ моментларнинг чеклилигидан $M|\xi \cdot \eta| < \infty$ келиб чиқади. x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган мусбат аниқланган ушбу

$$M(x|\xi| + y|\eta|)^2 = x^2 M\xi^2 + 2xyM(|\xi| \cdot |\eta|) + y^2 M\eta^2$$

квадратик форманинг дискриминанти

$$(2M(\xi\eta))^2 - 4M\xi^2 M\eta^2 \leqslant 0,$$

бундан эса (1) тенгсизликнинг ўринлилиги келиб чиқади.

Агар $\eta = 1$ бўлса, (1) дан

$$M|\xi| \leqslant \sqrt{M\xi^2}.$$

Шунингдек, (1) муносабатдан ушбу муҳим

$$\sqrt{M(\xi + \eta)^2} \leqslant \sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Дарҳақиқат,

$$M(\xi+\eta)^2 = M\xi^2 + 2M\xi\eta + M\eta^2 \leqslant (\sqrt{M\xi^2}+\sqrt{M\eta^2})^2.$$

Йенсен тенгсизлиги. Агар $M|\xi| < \infty$ ва $g(x)$ функция ботиқ бўлса, у ҳолда

$$g(M\xi) \leqslant Mg(\xi).$$

Исбот. Агар $g(x)$ функция ботиқ бўлса, у ҳолда ҳар бир y учун шундай $g_1(y)$ топиладики,

$$g(x) \geqslant g(y) + (x-y)\,g_1(y)$$

бўлади. Агар $x=\xi$, $y=M\xi$ десак ва бу тенгсизликнинг ҳар икки томонидан математик кутилма олсак, $Mg(\xi) \geqslant g(M\xi)$ келиб чиқади.

Ляпунов тенгсизлиги. Агар $0<\tau<t$ бўлса, у ҳолда

$$(M|\xi|^\tau)^{\frac{1}{\tau}} \leqslant (M|\xi|^t)^{\frac{1}{\tau}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Гёльдер тенгсизлиги. Айтайлик, $\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0$ ва p, q сонлар учун $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ муносабатлар ўринли бўлсин. Агар $M\xi^p < \infty$ ва $M\eta^q < \infty$ бўлса, у ҳолда

$$M\xi\eta \leqslant (M\xi^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (M\eta^q)^{\frac{1}{q}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{(M\xi^p)^{\frac{1}{p}}}; \qquad \eta_1 = \frac{\eta}{(M\eta^q)^{\frac{1}{q}}}$$

ва $M\xi_1 \cdot \eta_1 \leqslant 1$ тенгсизликни исботлаймиз.

$\ln x$ функциянинг қавариқ бўлганлиги туфайли ихтиёрий x_1, x_2 учун

$$\ln[x_1(1-y)+x_2y] \geqslant (1-y)\cdot\ln x_1 + y\ln x_2 =$$
$$= \ln(x_1^{1-y}\cdot x_2^y),$$

яъни

$$x_1(1-y)+x_2y \geqslant x_1^{1-y}\cdot x_2^y$$

тенгсизлик бажарилади. Энди

$$x_1 = \xi_1^p, \; x_2 = \eta_1^q, \; y = \frac{1}{q}, \; 1 - y = \frac{1}{p}$$

деб олсак, у ҳолда

$$\xi_1\eta_1 \leqslant \frac{1}{p}\xi_1^p + \frac{1}{q}\eta_1^q$$

ва

$$M\xi_1\eta_1 \leqslant \frac{1}{p}M\xi_1^p + \frac{1}{q}M\eta_1^q$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$$M\xi_1^p = M\eta_1^q = 1, \quad \text{демак,} \quad M\xi_1\eta_1 \leqslant 1.$$

Охирги тенгсизликдан эса керакли тенгсизлик келиб чиқади.

Гёльдер тенгсизлигида $p = q = 2$ деб олинса, Коши—Буняковский тенгсизлиги келиб чиқади.

Эҳтимоллар назарияси ва унинг татбиқларида тасодифий миқдорларнинг қуйидаги характеристикалари ҳам керак бўлади.

Таъриф. Узлуксиз тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг *модаси* деб, $p(x)$ зичлик функция максимумга эришадиган нуқталарга айтилади ва Мо каби белгиланади. Агар айтилаётган нуқталар битта бўлса, $p(x)$ функцияни *унимодал*, иккита бўлса, *бимодал*, агар бир нечта бўлса, *полимодал* дейилади. Агар $p(x)$ зичлик функция битта ҳам максимал қийматга эришмаса, уни *антимодал* дейилади.

Таъриф. $F(x) = p$ тенгламанинг ечими ξ тасодифий миқдорнинг *p-тартибли квантили* дейилади. Агар $p = \frac{1}{2}$ бўлса, бундай квантиль *тақсимотнинг медианаси* дейилади ва $\text{Me} = x$ каби белгиланади. Демак, $F(x)$ тақсимотнинг медианаси x аргументнинг шундай $x = \text{Me}$ қийматики, унинг учун

$$F(\text{Me} - 0) \leqslant 0{,}5 \leqslant F(\text{Me} + 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси мавжуд бўлмаса ҳам унинг медианаси доимо мавжуд бўлаверади.

ξ тасодифий миқдорнинг *вариация коэффициенти* деб $\nu = \frac{\sigma}{m_1}$ га айтилади, бу ерда

$$m_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x),\ \sigma = \sqrt{D\xi}.$$

Вариация коэффициенти тасодифий миқдорнинг ўзгарувчанлигини характерлайди ҳамда процентларда ифодаланади. Носимметрик тасодифий миқдорларни характерлаш учун ўлчамсиз миқдор—асимметрия коэффициенти тушунчаси киритилади. Одатда асимметрия коэффициенти $m_1 = M\xi$ га нисбатан, яъни ўрта қийматга нисбатан симметрикликнинг бузилганлигини билдиради. ξ тасодифий миқдорнинг асимметрия коэффициенти деб $\gamma_1 = \frac{\nu_3}{\sigma^3}$ га айтилади, бунда $\nu_3 = M\,[(\xi - m_1)^3]$.

ξ тасодифий миқдорнинг *эксцессия коэффициенти* деб

$$\gamma_2 = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3$$

га айтилади, бунда

$$\nu_4 = M\,[(\xi - m_1)^4].$$

Нормал тақсимот учун $\frac{\nu_4}{\sigma^4} = 3$, шу сабабли нормал тақсимотнинг эксцессия коэффициенти нолга тенг.

Агар зичлик функция нормал қонуннинг зичлик функциясига нисбатан „тик“ ва „юқори чўққили“ бўлса, эксцессия коэффициенти мусбат, акс ҳолда манфий бўлади.

4- §. Шартли математик кутилма*

Фараз қилайлик, $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ эҳтимоллик фазоси берилган ва $B \in \mathcal{F}$ ҳодиса учун $P(B) > 0$ бўлсин. Янги $<\Omega, \mathcal{F}, P_B>$ эҳтимоллик фазосини қараймиз, бу ерда P_B ўлчов ихтиёрий $A \in \mathcal{F}$ учун қуйидаги тенглик билан берилади:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A/B).$$

---

* Бу параграфда А. А. Боровковнинг „Теория вероятностей“, „Наука“. М., 1976 й. китобидан фойдаландик.

Айтайлик, ξ тасодифий миқдор $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ да аниқланган, шунингдек, ξ ни $<\Omega, \mathcal{F}, P_B>$ да аниқланган деб қараш мумкин. $<\Omega, \mathcal{F}, P_B>$ фазода ξ *тасодифий миқдорнинг В га нисбатан шартли математик кутилмаси* деб,

$$M(\xi/B)=\int_\Omega \xi(w)\, P_B(dw)$$

га айтилади.

P_B ўлчовнинг таърифига мувофиқ,

$$M(\xi/B)=\int_\Omega \xi(w)\, P(dw/B)=\frac{1}{P(B)}\int_\Omega \xi(w)\times$$
$$\times P(dw\cap B)=\frac{1}{P(B)}\int_B \xi(w)\, P(dw).$$

Охирги интеграл $M\xi$ дан шуниси билан фарқ қиладики, бунда интеграллаш фақат B тўплам бўйича олинади. Бу интегрални қуйидагича белгилаймиз:

$$M(\xi,\ B)=\int_B \xi(w)\, P(dw),$$

у ҳолда

$$M(\xi, B)=\frac{1}{P(B)}M(\xi;\ B).$$

$<\Omega, \mathcal{F}, P_B>$ фазода қаралаётган ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x/B)=P_B(\xi<x)=$ $=P(\xi<x/B)$ дан иборатлигини кўриш қийин эмас. $F(x/B)$ функция ξ *тасодифий миқдорнинг В шартидаги тақсимот функцияси* дейилади. У ҳолда

$$M(\xi/B)=\int x\cdot dF(x/B)$$

каби ёзиш ҳам мумкин.

Чекли ёки саноқли $\{B_n\}$ ҳодисалар кетма-кетлиги берилган бўлиб, $B_i\cap B_j=\varnothing$, $\bigcup B_n=\Omega$ ва ихтиёрий n учун $P(B_n)>0$ бўлсин. У ҳолда

$$M\xi=\int_\Omega \xi(w)\, P(dw)=\sum_n\int_{B_n}\xi(w)\, P(dw)=$$
$$=\sum_n M(\xi;\ B_n)=\sum_n P(B_n)\ M(\xi/B_n). \qquad (1)$$

(1) ни унга эквивалент бўлган ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} P(\eta = x_n)\, M(\xi/\eta = x_n), \qquad (2)$$

бу ерда $(\eta = x_n) = B_n$ ёки яна ҳам соддароқ қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M\xi = M\,[M(\xi/\eta)]. \qquad (3)$$

(1) — (3) ифодалар математик кутилмалар учун *тўла эҳтимоллар формуласи* дейилади.

1-мисол. Асбобнинг хизмат вақти ξ тасодифий миқдордан иборат бўлиб, унинг тақсимот функцияси $F(x)$ бўлсин. Асбобнинг a вақт ишлагани маълум бўлсин. Асбобнинг қолган хизмат вақти қандай тақсимланган ва унинг математик кутилмаси нимага тенг?

Ечиш. Бу мисолда $P(\xi - a \geqslant x/\xi \geqslant a)$ ва $M(\xi - a/\xi \geqslant a)$ ларни топишимиз керак. Албатта, $\overline{F}(a) = 1 - F(a) = P(\xi \geqslant a) > 0$ деб талаб қилинади. Юқоридаги формулаларга асосан

$$P(\xi - a \geqslant x/\xi \geqslant a) = \frac{\overline{F}(x+a)}{\overline{F}(a)},$$

$$M(\xi - a/\xi \geqslant a) = \frac{1}{\overline{F}(a)} \int_0^{\infty} x \cdot d\overline{F}(x+a).$$

Кўпгина амалий масалаларни ҳал қилишда, хусусан, кўп сондаги ишончли элементлардан тузилган мураккаб системаларнинг ишлаш даври ξ ҳақида гап кетганда ξ ни экспоненциал қонун бўйича тақсимланган деб қараш мумкин:

$$\overline{F}(x) = P(\xi \geqslant x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0.$$

Бироқ экспоненциал тақсимот учун системанинг қолган хизмат муддатининг тақсимоти тўхтовсиз ишлаш вақтининг ушбу

$$P(\xi - a \geqslant x/\xi \geqslant a) = \frac{\overline{F}(x+a)}{\overline{F}(a)} = e^{-\lambda x} = \overline{F}(x) \qquad (4)$$

тақсимоти билан устма-уст тушади.

(4) муносабат узлуксиз функциялар синфида фақат экспоненциал тақсимот учун ўринли, шу сабабли (4)

тенглик *экспоненциал тақсимотнинг характеристик хоссаси* дейилади.

(4) тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\overline{F}(x+a)=\overline{F}(x)\cdot\overline{F}(a).$$

5-§. Корреляция коэффициенти

Тасодифий миқдорларни ўрганишда уларнинг бир-бирига қай даражада боғланганлигини ва боғланиш характерини билиш жуда муҳимдир. ξ ва η тасодифий миқдорларнинг мос равишда k, s- тартибли *бошланғич аралаш моменти* деб, ξ^k ва η^s миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилмасига айтилади:

$$\alpha_{k,s}=M\xi^k\eta^s.$$

ξ ва η тасодифий миқдорларнинг мос равишда k, s *тартибли марказий аралаш моменти* деб қуйидаги миқдорга айтилади:

$$\mu_{k.s}=M(\xi-m_\xi)^k(\eta-m_\eta)^s,$$

бу ерда

$$m_\xi=M\xi,\qquad m_\eta=M\eta.$$

Киритилган аралаш моментлар ёйиб ёзилса, қуйидагича бўлади:

$$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j i^k j^s p_{ij};\quad \mu_{k,s}=\sum_i\sum_j(i-m_\xi)^k\,(j-m_\eta)^s p_{ij},$$

бу ерда

$$p_{ij}=P(\xi=i,\ \eta=j).$$

Узлуксиз тасодифий миқдорлар учун:

$$\alpha_{k,s}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^k y^s f(x,y)dxdy,$$

$$\mu_{k,s}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_\xi)^k\,(y-m_\eta)^s f(x,y)\,dx\,dy,$$

$f(x,y)$ функция $(\xi,\ \eta)$ тасодифий векторнинг зичлик функцияси.

Таъриф. ξ ва η тасодифий миқдорларнинг *ковариацияси* ёки *корреляцион* моменти деб,

$$M[(\xi - M\xi)\ (\eta - M\eta)]$$

га айтилади ва $\mathrm{cov}\ (\xi;\ \eta)$ каби белгиланади.

Узлуксиз тақсимланган тасодифий миқдорларнинг ковариацияси ушбу

$$\mathrm{cov}\ (\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)\ (y - m_\eta)\ f\ (x,\ y)\ dx\ dy = K_{\xi,\eta}$$

формула билан ҳисобланади. Дискрет тақсимланган тасодифий миқдорларнинг ковариацияси эса

$$\mathrm{cov}\ (\xi,\eta) = \sum_i \sum_j (x_i - m_\xi)\ (y_j - m_\eta)\ p_{ij} = K_{\xi,\eta}$$

формула билан топилади. Математик кутилманинг таърифидан фойдаланиб, юқоридаги ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathrm{cov}\ (\xi,\ \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta.$$

Бундан

$$\mathrm{cov}\ (\xi,\xi) = D\xi \qquad \mathrm{cov}\ (\xi,\eta) = \mathrm{cov}\ (\eta,\xi)$$

муносабатлар келиб чиқади. Дисперсиянинг таърифидан

$$D\ (\xi + \eta) = M\ [(\xi - M\xi)^2 + (\eta - M\eta)^2] +$$
$$+ 2M\ [(\xi - M\xi)\ (\eta - M\eta)]$$

ва ковариация таърифидан ихтиёрий ξ ва η тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси учун

$$D\ (\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{cov}\ (\xi,\eta)$$

формула ҳосил бўлади. Ушбу

$$\begin{vmatrix} D\xi & \mathrm{cov}\ (\xi,\eta) \\ \mathrm{cov}\ (\xi,\eta) & D\eta \end{vmatrix} = D\xi\ D\eta - \mathrm{cov}^2\ (\xi,\eta) \geqslant 0$$

тенгсизликнинг тўғрилигини кўрсатиш қийин эмас, бундан

$$|\mathrm{cov}\ (\xi,\ \eta)| \leqslant \sqrt{D\xi\ D\eta}.$$

Демак, ξ ва η тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлмаслиги учун $\mathrm{cov}\ (\xi,\ \eta) = 0$ тенгликнинг ўринли бўлиши зарур.

Шундай қилиб, агар $\operatorname{cov}(\xi,\eta) \neq 0$ бўлса, у ҳолда ξ ва η тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлади. ξ ва η тасодифий миқдорларнинг боғлиқлик даражасини миқдорий жиҳатдан характерлаш мақсадида қуйидаги

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi\, \sigma_\eta},$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \quad \text{ва} \quad \sigma_\eta = \sqrt{D\eta}$$

корреляция коэффициентидан фойдаланилади.

Корреляция коэффициенти қуйидаги хоссаларга эга.

1. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффициенти нолга тенг:

$$r_{\xi,\eta} = 0.$$

2. $|r_{\xi,\eta}| \leqslant 1$.

Ҳақиқатан ҳам,

$$0 \leqslant D\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)^2 = \\ = 2 \pm 2r_{\xi,\eta},$$

бундан $|r_{\xi,\eta}| \leqslant 1$ экани келиб чиқади.

3. $|r_{\xi,\eta}| = 1$ бажарилиши учун шундай A ва B сонлар мавжуд бўлиб, $P(\eta = A\xi + B) = 1$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Айтайлик, $P(\eta = A\xi + B) = 1$ бўлсин. $M\xi = \alpha$ ва $\sqrt{D\xi} = \beta$ деб белгилаймиз, у ҳолда

$$r_{\xi,\eta} = M\,\frac{\xi - \alpha}{\beta} \cdot \frac{A\xi + B - A\alpha - B}{|A|\beta} = \operatorname{sign} A.$$

Энди $|r_{\xi,\eta}| = 1$ деб оламиз. Масалан, айтайлик, $r_{\xi,\eta} = 1$ бўлсин, у ҳолда

$$D\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = 2(1 - r_{\xi,\eta}) = 0.$$

Бу эса дисперсиянинг хоссасига мувофиқ фақат ва фақат

$$P\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = C\right) = 1$$

тенглик бажарилганда ўринли. Агар $r_{\xi,\eta}=-1$ бўлса, у ҳолда

$$D\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)$$

ни текшириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}=C\right)=1.$$

Агар тасодифий миқдорларнинг корреляцион моменти нолга тенг бўлса, бундай тасодифий миқдорлар *корреляцион боғланмаган* (коррелирланмаган) дейилади.

Юқорида кўрдикки, тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлмаса, улар корреляцион боғланишда бўлмайди, яъни $K_{\xi,\eta}=0$. Бу шарт тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлмаслиги учун зарурий шарт, бироқ етарли эмас. Тасодифий миқдорларнинг боғлиқ эмаслигидан уларнинг корреляцион боғлиқмаслиги келиб чиқади, бироқ тасодифий миқдорларнинг корреляцион боғланмаганлигидан уларнинг боғлиқ эмаслиги келиб чиқмайди. Корреляция коэффициенти фақат чизиқли боғланишни ифодалайди.

Мисол. Маркази координаталар бошида, радиуси R га тенг D доирада текис тақсимланган тасодифий миқдорлар системаси (ξ, η) ни қарайлик. (ξ, η) миқдорнинг зичлик функцияси қуйидагича аниқланади:

$$f(x, y)=\begin{cases} a, & \text{агар} \quad x^2+y^2\leqslant R^2 \quad \text{бўлса,} \\ 0, & \text{агар} \quad x^2+y^2>R^2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy=\iint_{(D)} a\,dxdy=1 \text{ шартидан}$$

$$a=\frac{1}{\pi R^2}$$

ни топамиз. Бу мисолда ξ ва η боғлиқ миқдорлар. Ҳақиқатан ҳам, масалан $\xi=0$ бўлса, у ҳолда η миқдор $-R$ дан то R гача ҳамма қийматларни бир эҳтимол билан қабул қилади. Умуман, η нинг қабул қиладиган қийматлари ξ нинг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ. Бу миқдорлар корреляцион боғланмаган бўладими? Энди $m_\xi = m_\eta = 0$ ни эътиборга олиб, корреляция коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$K_{\xi,\eta} = \iint\limits_{(D)} xy f(x, y)\, dxdy = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{(D)} xy\, dx\, dy \qquad (1)$$

интегрални ҳисоблаш учун интеграллаш соҳасини (D доирани) D_1, D_2, D_3, D_4 секторларга бўламиз. Интеграл остидаги функция D_1 ва D_2 секторларда мусбат, D_3 ва D_4 секторларда манфий; абсолют қийматлари бўйича бу секторлардаги интеграллар бир-бирига тенг, бундан (1) интегралнинг нолга тенглиги келиб чиқади, демак, (ξ, η) миқдорлар корреляцион боғланмаган экан.

Агар $r_{\xi,\eta} > 0$ бўлса, ξ ва η лар *мусбат корреляцион боғланишга эга* дейилади, агар $r_{\xi,\eta} < 0$ бўлса, манфий корреляция ҳақида гапирилади. Тасодифий миқдорлар орасида мусбат корреляцион боғланиш бир тасодифий миқдорнинг ўсиши иккинчисининг ҳам ўсишига олиб келишини кўрсатса, манфий корреляция эса бир тасодифий миқдорнинг ўсиши иккинчисининг камайишига олиб келишини кўрсатади.

6- §. Чебишев тенгсизлиги

Тасодифий миқдорнинг математик кутилма атрофида тарқоқлик даражасини характерлайдиган катталик, хусусан, тасодифий миқдорнинг дисперсияси эканлиги бизга маълум. Агар дисперсия кичик сон бўлса, у ҳолда тасодифий миқдор қийматлари математик кутилма атрофида зичроқ жойлашган бўлади. Бу фактни тасдиқловчи қуйидаги Чебишев тенгсизлигини келтирамиз.

Чебишев тенгсизлиги. Агар ξ тасодифий миқдор чекли дисперсияга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун ушбу тенгсизлик ўринли бўлади:

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Исбот. Исботни биринчи навбатда дискрет типдаги тасодифий миқдорлар учун келтирамиз. Маълумки, агар ξ тасодифий миқдор x_1, x_2, ..., x_k, ... қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, эҳтимоллар билан қабул қилса, у ҳолда

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^2 \, p_i \tag{1}$$

бўлади. $\overline{A}_i$ билан $|x_i - M\xi| < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирадиган i индекслар тўпламини, A_i билан эса $|x_i - M\xi| \geqslant \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирадиган i индекслар тўпламини белгилаймиз, у ҳолда

$$D\xi \geqslant \sum_{i \in A_i} (x_i - M\xi)^2 \, p_i \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i \in A_i} p_i = \varepsilon^2 \; P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\},$$

бу эса Чебишев тенгсизлигининг ўринли эканлигини кўрсатади.

Қуйидаги

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} = \int\limits_{|x - M\xi| \geqslant \varepsilon} dF(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \, dF(x) = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

ифода Чебишев тенгсизлигининг умумий ҳолда ҳам ўринли эканлигини кўрсатади.

Мисол. Тажриба Ойнинг суратини олиш ёрдамида унинг диаметрини ўлчашдан иборат бўлсин. Бунинг учун Ойни турли вақтда олинган суратларидан фойдаланилади. Маълумки, турли вақтда олинган сурат атмосфера таъсири натижасида турли катталикка эга. Ой дискининг ҳақиқий қийматини бирор масштабда a билан белгиласак, у ҳолда $\xi - a$ айирма ҳар бир ўлчаш натижаси a дан қай даражада фарқланишини белгилайди. Фараз қилайлик, боғлиқсиз равишда n та ўлчаш олиб борилган бўлсин. Ушбу

$$S_n = \frac{1}{n} \; (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$$

ифодани тузайлик. Бу ерда ξ_i лар ўзаро боғлиқ эмас ва $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ бўлсин. Демак, $MS_n = a$, $DS_n = \frac{\sigma^2}{n}$. n ўсиши билан S_n ва a орасидаги фарқ кичрайиб боришини кўрамиз. Шунинг учун a сонни S_n орқали баҳолаш мумкин, яъни

$$P\{|S_n - a| \leqslant \varepsilon\} < \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}. \tag{2}$$

Хусусан, $P(|S_n - a| \geqslant 0,1) \leqslant 0,02$ тенгсизлик ўринли бўлиши учун камида нечта ўлчаш ўтказиш кераклигини аниқлаймиз. Бунинг учун (2) дан фойдаланамиз:

$$P(|S_n - a| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{\sigma^2}{0,01n} \leqslant 0,02,$$

бундан $\sigma^2 = 1$ десак, $n \geqslant 5000$.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун

$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M\xi}{\varepsilon}$$

тенгсизлик ўринлидир. Бу тенгсизликнинг тўғрилиги қуйидаги ҳисоблашлардан келиб чиқади:

$$M\xi \geqslant M(\xi;\ \xi > \varepsilon) \geqslant \varepsilon M\ (1;\ \xi \geqslant \varepsilon) = \varepsilon P(\xi \geqslant \varepsilon).$$

IV бобга доир мисоллар

1. ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{a}}$$

кўринишда. Буни *Лаплас тақсимоти* дейилади. Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг.

2. ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидагича:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad x \leqslant 0 \quad \text{бўлса,} \\ \frac{x}{4}, & \text{агар} \quad 0 < x \leqslant 4 \quad \text{бўлса,} \\ 1, & \text{агар} \quad x > 4 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

3. ξ ва η тасодифий миқдорлар боғлиқ эмас ҳамда

$$M\xi = 2, \quad D\xi = 1, \quad M\eta = 1, \quad D\eta = 4$$

бўлса, қуйидаги тасодифий миқдорларнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг:

а) $S_1 = \xi - 2\eta$;
б) $S_2 = 2\xi - \eta$.

4. Агар ξ тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари $x_1, x_2, \ldots, x_k$ бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да қуйидагиларни исботланг:

$$\text{а)}\ \frac{M\xi^{n+1}}{M\xi^n} \longrightarrow \max_{1<l<k} x_l;$$

$$\text{б)}\ \sqrt[n]{M\xi^n} \longrightarrow \max_{1<l<k} x_l.$$

5. ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ бўлсин. Агар $M\xi$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$M\xi = \int_0^\infty [1 - F(x) + F(-x)]\, dx$$

бўлишини исботланг. ($M\xi$ нинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{x \to -\infty} xF(x) = \lim_{x \to \infty} x[1 - F(x)] = 0$$

бўлиши зарур.)

6. ξ тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, $M|\xi - a|$ ни ҳисобланг, бу ерда $a = M\xi$.

7. ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p(x) = \begin{cases} Ax^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant 1\ (a > 0,\ b > 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \quad x < 0 \quad \text{ва } x > 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлса, A ни, математик кутилмани ва дисперсияни топинг.

8. (ξ, η) тасодифий вектор нормал тақсимланган ва

$$M\xi = M\eta = 0, \quad D\xi = D\eta = 1$$

бўлиб, ρ эса ξ ва η орасидаги корреляция коэффициенти бўлса, у ҳолда қуйидагиларни исботланг:

а) $\rho = \cos q\pi$, бу ерда $q = P\{\xi\eta < 0\}$;

б) $M \max(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.

V боб

КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ. ЯҚИНЛАШИШ ТУРЛАРИ

1-§. Катта сонлар қонуни

Бирор ўзаро боғлиқмас тажрибалар кетма-кетлиги ўтказилган бўлсин ва ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га ва рўй бермаслик эҳтимоли $1-p$ га тенг бўлсин. A ҳодисанинг k- тажрибада рўй бериш сонини ξ_k десак, у ҳолда

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & q = 1-p, \\ 1, & p \end{cases}$$

Натижада $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \ldots$ ўзаро боғлиқ бўлмаган бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу тасодифий миқдорлар учун $M\xi_k = p$, $D\xi_k = pq$ экани маълум. Бу тасодифий миқдорлар n тасининг ўрта арифметиги A ҳодиса рўй беришларининг нисбий частотаси $\frac{S_n}{n}$ бўлади, бу ерда $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибада A ҳодисанинг рўй беришлар сони. Маълумки, $MS_n = np$, $DS_n = npq$. Бундай схема учун қуйидаги теорема (Бернулли теоремаси) ўринли.

1-теорема. *Ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *сон учун*:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Исбот. Чебишев тенгсизлигига асосан

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Бу тенгсизликдан $n \to \infty$ да лимитга ўтилса, теореманинг исботи келиб чиқади.

Демак, тажрибалар сони етарлича катта бўлса, A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига яқин бўлар экан.

1-теоремадан шундай хулоса чиқариш мумкин: айрим шартлар остида қўшилувчилар сони етарлича катта бўлганда тасодифий миқдорлар йиғиндиси ўзининг тасодифийлик характерини маълум маънода „йўқотар“ экан. Ана шу шартларни билиш эҳтимоллар назариясида асосий масалалардан бири ҳисобланади.

Фараз қилайлик, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги, ва $\eta_n = f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ функция берилган бўлсин.

1 таъриф. Агар шундай ўзгармас сонлар кетма-кетлиги $\{a_n\}$, $n=1,2,. .$ мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\eta_n - a_n| < \varepsilon\} = 1$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги *катта сонлар қонунига бўйсунади* дейилади.

2-теорема. (Чебишев теоремаси.) *Агар $\xi_1, \xi_2, \dots,$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари с сон билан текис чегараланган бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M\xi_j\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0,$$

яъни $\xi_1, \xi_2 \dots,$ тасодифий миқдорлар катта сонлар қонунига бўйсунади.

Исбот. 1-таърифда $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$, $a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M\xi_j$ деб олиш керак.

Чебишев тенгсизлигига мувофиқ $\{\xi_j\}$ ларнинг жуфт-жуфти билан боғлиқсизлигини ҳисобга олган ҳолда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M\,\xi_j\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} D\xi_j}{n^2\varepsilon^2} \qquad (1)$$

тенгсизликни ёза оламиз. Агар $D\xi_j$ ларнинг C билан текис чегараланганлигини эътиборга олсак, (1) дан

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M\,\xi_j\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\,\xi_j\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0.$$

Демак, Чебишев теоремасига кўра $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқсиз ва дисперсиялари текис чегараланган бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметиги n ўсиши билан бу тасодифий миқдорлар ўрта қийматларининг ўрта арифметигига исталганча яқин бўлар экан.

Бернулли ва Чебишев теоремаларининг турли хил умумлашмалари (ёки хусусий ҳоллари) мавжуд, шулардан баъзи бирларини келтирамиз. Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлигида A ҳодисанинг k- тажрибада рўй бериш эҳтимоли p_k га тенг, яъни тажрибанинг номерига боғлиқ бўлсин. У ҳолда ξ_k тасодифий миқдорни қуйидагича киритамиз:

$$\xi_k=\begin{cases}0, & q_k=1-p_k,\\ 1, & p_k.\end{cases}$$

$D\xi_k=p_kq_k\leqslant\frac{1}{4}$ лигини эътиборга олсак, бу ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ учун катта сонлар қонуни ўринли бўлишини кўрамиз:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1. \qquad (2)$$

Марков теоремаси. *Агар*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \qquad (3)$$

тасодифий миқдорлар учун $n\to\infty$ да

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0 \qquad (4)$$

муносабат бажарилса, (3) *тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонлар қонунига бўйсунади.*

Хусусан, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса ва $D\xi_k<C$ бўлса, (4) шарт бажарилади. Бу эса Чебишев теоремаси Марков теоремасининг хусусий ҳоли эканлигини кўрсатади. Марков теоремасининг исботини келтириб ўтирмаймиз.

2-§. Катта сонлар қонунининг бажарилиши учун зарурий ва етарли шарт

А. Н. Колмогоров 1926 йилда ўзаро боғлиқ бўлмаган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг катта сонлар қонунига бўйсуниши учун зарурий ва етарли шартни кўрсатган. 1928 йилда эса А. Я. Хинчин ўзаро боғлиқ бўлмаган, бир хил тақсимланган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонлар қонунига бўйсуниши учун $M\xi_n$ нинг мавжудлиги етарли эканини исботлади. Кейинчалик, Чебишев методидан фойдаланган ҳолда ихтиёрий $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун қуйидаги теорема исботланди.

Теорема. *Ихтиёрий $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонлар қонунига бўйсуниши учун $n\to\infty$ да*

$$M\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\ \xi_k)\right)^2}{n^2+(\Sigma(\xi_k-M\xi_k))^2}\to 0 \qquad (1)$$

муносабатнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Фараз қилайлик, (1) шарт бажарилсин.

$$\Phi_n(x)=P\{\eta_n<x\}=P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)<x\right\}$$

белгилашни киритайлик. У ҳолда

$$P\{|\eta_n|\geqslant\varepsilon\}=\int\limits_{|x|>\varepsilon}d\,\Phi_n(x)\leqslant\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}d\,\Phi_n(x)=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,M\,\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}$$

тенгсизликка эга бўламиз ва бу тенгсизликдан катта сонлар қонунининг ўринлилиги келиб чиқади.

Айтайлик, катта сонлар қонуни ўринли бўлсин. Қуйидаги тенгсизликнинг тўғрилигини кўриш қийин эмас

$$P\{|\eta_n|\geqslant\varepsilon\}=\int\limits_{|x|>\varepsilon}d\Phi_n(x)\geqslant\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)-\int\limits_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2}{1+x^2}d\Phi_n(x)-\varepsilon^2=M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}-\varepsilon^2,$$

у ҳолда

$$0\leqslant M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\leqslant\varepsilon^2+P\{|\eta_n|\geqslant\varepsilon\}.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонини ε ва n ни танлаш ҳисобига кичик қилишимиз мумкин. Бу эса (2) ифоданинг ўринлилигини кўрсатади.

Олдинги параграфларда баён этилган теоремалар бу теоремалардан хусусий ҳол сифатида келиб чиқишини кўриш мумкин. Энди юқорида эслатиб ўтилган Хинчин теоремасини баён этамиз.

Теорема (Хинчин теоремаси). *Агар $\xi_1, \xi_2, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ўзаро боғлиқ бўлмаган, бир хил тақсимланган бўлиб, математик кутилмалари мавжуд бўлса, бу тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун катта сонлар қонуни ўринли бўлади, яъни $M\xi_i=a$ бўлганда*

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Исбот. Теореманинг исботини дискрет тасодифий миқдорлар учун келтирамиз, умумий ҳолда ҳам теореманинг исботи шу каби бажарилади. ξ_i тасодифий миқдорлар ёрдамида янги $\bar{\xi}_i$ ва $\bar{\bar{\xi}}_i$ тасодифий миқдорларни қуйидагича киритамиз.

$$\bar{\xi}_i=\xi_i,\ \bar{\bar{\xi}}_i=0,\ \text{агар } |\xi_i|<\delta\cdot n \text{ бўлса,}$$
$$\bar{\xi}_i=0,\ \bar{\bar{\xi}}_i=\xi_i,\ \text{агар } |\xi_i|\geqslant\delta\cdot n \text{ бўлса,} \qquad (2)$$

бу ерда $i=\overline{1, n}$, $\delta>0$ — фиксирланган сон. У ҳолда ихтиёрий i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ учун

$$\xi_i = \bar{\xi}_i + \bar{\bar{\xi}}_i. \tag{3}$$

Теорема шартига кўра

$$M|\xi_i| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(\xi_i = x_j) = A < \infty. \tag{4}$$

Буни эътиборга олсак,

$$B_n = M\bar{\xi}_i = \sum_{|x_j|<\delta n} x_j P(\xi_i = x_j) \tag{5}$$

ифода (2) га кўра $n \to \infty$да a га интилади ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун етарлича катта n ларда $|B_n - M\xi_i| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда (4) ва (5) га кўра

$$D\bar{\xi}_i \leqslant M\bar{\xi}_i^2 = \sum_{|x_j|<\delta n} x_j^2 P(\xi_i = x_j) \leqslant$$

$$\leqslant \delta n \sum_{|x_j|<\delta n} |x_j| P(\xi_i = x_j) \leqslant \delta n\, A. \tag{6}$$

Теорема шартига кўра $\{\xi_i\}$ лар ўзаро боғлиқ бўлмагани учун $\{\bar{\xi}_i\}$ лар ҳам ўзаро боғлиқ бўлмайди, у ҳолда Чебишев тенгсизлиги ва (6) га кўра

$$P\left\{\left|\frac{\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \ldots + \bar{\xi}_n}{n} - B_n\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{D\bar{\xi}_i}{n\cdot\varepsilon^2} \leqslant \frac{A\delta}{\varepsilon^2}.$$

(6) ни эътиборга олган ҳолда охирги тенгсизликдан қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$P\left\{\left|\frac{\bar{\xi}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n}{n} - M\xi\right| \geqslant 2\varepsilon\right\} \leqslant \frac{A\delta}{\varepsilon^2}. \tag{7}$$

Иккинчи томондан, (4) ни ҳисобга олган ҳолда

$$P(\bar{\bar{\xi}}_j \neq 0) = \sum_{|x_j|>\delta n} P(\xi_i = x_j) \leqslant \frac{1}{\delta n} \sum_{|x_j|>\delta n} |x_j| P(\xi_i = x_j)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади ва математик кутилманинг мавжудлиги сабабли $n \to \infty$ да

$$P(\bar{\bar{\xi}}_1 + \bar{\bar{\xi}}_2 + \ldots + \bar{\bar{\xi}}_n \neq 0) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(\bar{\bar{\xi}}_k \neq 0) \leqslant \delta \tag{8}$$

ҳосил бўлади. Уз навбатида

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = (\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \ldots + \bar{\xi}_n) + (\bar{\bar{\xi}}_1 + \bar{\bar{\xi}}_2 + \ldots + \bar{\bar{\xi}}_n)$$

тенгликни эътиборга олсак, (7) ва (8) га кўра

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - a\right| \geqslant 2\varepsilon\right\} \leqslant P\left\{\left|\frac{\bar{\xi}_1+\ldots+\bar{\xi}_n}{n} - a\right| \geqslant 2\varepsilon\right\} + P\{\bar{\bar{\xi}}_1 + \ldots + \bar{\bar{\xi}}_n \neq 0\} \leqslant \frac{\delta A}{\varepsilon^2} + \delta.$$

ε ва δ ларнинг ихтиёрийлигидан теорема исботланганига ишонч ҳосил қиламиз.

3- §. Катта сонларнинг кучайтирилган қонуни

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ва $\eta > 0$ лар учун шундай n_0 сонни топиш мумкин бўлсаки, ихтиёрий $s > 0$ ва ушбу $n_0 \leqslant n \leqslant < n_0 + s$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча n ларда

$$P\left\{\max_{n_0 < n < n_0+s} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги *„катта сонларнинг кучайтирилган қонуни"га бўйсунади.* дейилади. Катта сонлар қонуни билан катта сонларнинг кучайтирилган қонуни ўзаро фарқ қилади. Агар

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг $n \in [n_0, n_0 + s]$ га нисбатан текис бажарилиши талаб қилинса, биз катта сонларнинг „кучайтирилган қонуни"га, аксинча,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг етарлича катта n да бажарилиши талаб қилинса, оддий, „катта сонлар қонуни“га эга бўламиз.

А. Н. Колмогоров тенгсизлиги. Агар ўзаро боғлиқ бўлмаган $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар чекли $D\xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ дисперсияларга эга бўлса, ушбу тенгсизлик ўринли бўлади:

$$P\left\{\max_{k=\overline{1,n}}\left|\sum_{s=1}^{k}(\xi_s - M\xi_s)\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k,$$

бу ерда $\varepsilon > 0$—ихтиёрий сон.

Исбот Энди $\eta_k = \xi_k - M\xi_k$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j$,

$$F_k = \{\omega : |S_j| < \varepsilon,\ \ j \leqslant k - 1\} \cap \{\omega : |S_k| \geqslant \varepsilon\},$$
$$E_0 = \{\omega : |S_j| < \varepsilon,\ j \leqslant n\}$$

белгилашларни киритайлик, у ҳолда

$$\{\omega : \max_{k=\overline{1,n}} |S_k| \geqslant \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

бўлади. Бу тенгликдан $E_j \cap E_i = V$, $i \neq j$ бўлганлигидан

$$P\{\max_{k=\overline{1,n}} |S_k| \geqslant \varepsilon\} = \sum_{k=1}^{n} P(E_k). \tag{2}$$

S_n нинг дисперсиясини ҳисоблайлик:

$$DS_n = \sum_{k=0}^{n} P(E_k)\cdot M(S_n^2/E_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(E_k)\, M(S_n^2/E_k).$$

Бу ерда

$$M(S_n^2/E_k) = M\{S_k^2 + 2\sum_{j>k} S_k\eta_j + \sum_{j>k}\eta_j^2 +$$
$$+ 2\sum_{j>n>k}\eta_j\eta_n/F_k\} \geqslant M\{S_k^2 + 2\sum_{j>k} S_k\eta_j + 2\sum_{j>n>k}\eta_j\eta_n/E_k\}.$$

E_k нинг рўй бериши $\xi_i, i=\overline{1, k}$ ларгагина таъсир этади, лекин бошқа ξ_i, $i=\overline{(k+1), n}$ тасодифий миқдорларга таъсир қилмайди, чунки ξ_i, $i=\overline{k+1, n}$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ эмаслигича қолади. Шунинг учун

$$M(S_k\cdot\eta_j/E_k)=M(S_k/E_k)\cdot M(\eta_j/E_k)=0$$

ва

$$M(\eta_j\,\eta_h/E_k)=0,$$

бу ерда $h\neq j$, $h>k$, $j>k\geqslant 1$. Бундан ташқари, $k\geqslant 1$ бўлганда

$$M(S_k^2/E_k)=\frac{1}{P(E_k)}\int\limits_{(E_k)}x^2dF(x)\geqslant\frac{\varepsilon^2}{P(E_k)}\int\limits_{(E_k)}dF(x)=\varepsilon^2.$$

Шу сабабларга кўра

$$DS_n\geqslant\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n}P(E_k), \qquad (3)$$

ва ниҳоят, (2) ва (3) дан

$$P\{\max_{k=1,n}|S_k|\geqslant\varepsilon\}=\sum_{k=1}^{n}P(E_k)\leqslant\frac{DS_n}{\varepsilon^2}.$$

Шу билан А. Н. Колмогоров тенгсизлиги исбот бўлди.

Тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига қандай шартлар қўйилганда катта сонларнинг кучайтирилган қонуни ўринли бўлади, деган саволга А. Н. Колмогоровнинг қуйидаги теоремалари жавоб беради.

1-теорема. *Ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ ($M\xi_k=0$, $k=\overline{1,\infty}$) *катта сонларнинг кучайтирилган қонунига бўйсуниши учун ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{n^2}<+\infty$$

муносабатнинг бажарилиши етарли.

Исбот. Фараз қилайлик,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad D\xi_k = \sigma^2$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $n \to \infty$ да

$$P\left(\sup_{k>n} \left|\frac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

эканини кўрсатиш теоремани исбот қилиш, демакдир. Агар

$$A_n = \left\{\omega: \max_{2^{n-1}<k<2^n} \left|\frac{S_k(\omega)}{k}\right| > \varepsilon\right\}$$

десак,

$$\left\{\omega: \sup_{k>n}\left|\frac{S_k(\omega)}{k}\right| > \varepsilon\right\} \subset \bigcup_{m=l}^{\infty} A_m$$

бўлади. Бундан

$$P\left(\sup_{k>n}\left|\frac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right) \leqslant P\left(\bigcup_{m=l}^{\infty} A_m\right).$$

Бу ерда l ни $2^l \leqslant n < 2^{l+1}$ дан аниқланади. Табиийки, $l \to \infty$ дан $n \to \infty$ келиб чиқади. Энди $l \to \infty$ да $P\left(\bigcup_{m=l}^{\infty} A_m\right) \to 0$ эканини кўрсатайлик. Колмогоров тенгсизлигидан фойдаланиб,

$$P(A_n) \leqslant P\left(\max_{2^{n-1}<k<2^n} |S_k| > \varepsilon 2^{n-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P(|\widetilde{S}_{2^n}| > \varepsilon 2^{n-1}) \leqslant 4\frac{DS_n}{\varepsilon^2 2^{2^n}}$$

га эга бўламиз. Бу ифодада $\widetilde{S_n} = \max(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|)$. Олдинги тенгсизликнинг ихтиёрий $n \in N$ да ўринли эканидан ушбу тенгсизликнинг ўринли эканини кўрамиз:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leqslant 4\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} \sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \sum_{\{k:2^R>j\}} 2^{-2k} \leqslant 4\varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \frac{2}{j^2} < +\infty.$$

Бу эса $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ қаторнинг яқинлашувчанлигини кўрсатади. Демак, $l \to \infty$ да

$$P\left(\bigcup_{m=l}^{\infty} A_m\right) \leqslant \sum_{m=l}^{\infty} P(A_m) \to 0.$$

Теорема исботланди.

Натижа. Агар ўзаро боғлиқ бўлмаган ξ_k тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари битта C ўзгармас сон билан чегараланган бўлса, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонларнинг кучайтирилган қонунига бўйсунади.

Бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун катта сонларнинг кучайтирилган қонуни ўринли бўлишлигининг зарурий ва етарли шартини А. Н. Колмогоров қуйидаги теоремада берган.

2-теорема. *Ўзаро боғлиқ бўлмаган бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонларнинг кучайтирилган қонунига бўйсуниши учун улар математик кутилмасининг мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.*

Фараз қилайлик, бирор $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Катта сонларнинг кучайтирилган қонунига оид дастлабки натижалардан бири — Борель теоремасини келтирамиз. Бу теорема А. Н. Колмогоров теоремасининг хусусий ҳоли, аммо тарихан қизиқарлилиги. ва ажойиб исботи туфайли бу ерда келтирилди.

Аввал қуйидаги леммани исботлайлик.

1-*лемма.* Агар ихтиёрий бутун мусбат r да

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{r}\right\} < \infty \qquad (1)$$

бажарилса, у ҳолда

$$P\{\xi_n \to \xi\} = 1 \qquad (2)$$

ёки

$$P\{\xi_n \not\to \xi\} = 0$$

бўлади.

Исботи. Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$E_n^r = \left\{|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{r}\right\}$$

ва

$$S_n^r = \sum_{k=1}^{\infty} E_{n+k}^r .$$

Ушбу

$$P(S_n^r) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P\{E_{n+k}^r\} = \sum_{c=n+1}^{\infty} P\left(|\xi_c - \xi| \geqslant \frac{1}{r}\right)$$

муносабатдан (1) га асосан

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n^r) = 0 \qquad (3)$$

келиб чиқади. Энди фараз қилайлик,

$$S^r = S_1^r \cdot S_2^r \cdot S_3^r \cdot \ \ldots$$

Бироқ S_n^r ҳодиса ихтиёрий S^r ҳодисани ўз ичига олгани сабабли (3) га кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(S^r) = 0. \qquad (4)$$

Ушбу $S = S^1 + S^2 + \ldots$ ҳодисани кўрайлик. Бу ҳодиса қуйидаги тенгсизликнинг бажарилишини билдиради·

$$|\xi_{n+k} - \xi| \geqslant \frac{1}{r}. \qquad P(S) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} P(S^r)$$

бўлгани учун (4) га кўра $P(S) = 0$.

Борель теоремаси. *n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларда A ҳодисанинг рўй беришлар сони* μ, бу тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p, $P(\bar{A}) = q = 1 - p$ бўлсин, у ҳолда $n \to \infty$ да

$$P\left(\frac{\mu}{n}-p\to 0\right)=1.$$

Исботи. A ҳодисанинг i-тажрибада рўй беришлари сонини μ_i билан белгилаймиз. У ҳолда

$$M\left(\frac{\mu}{n}-p\right)^4=$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}M(\mu_i-p)(\mu_j-p)(\mu_k-p)(\mu_l-p).$$

Элементар ҳисоблар

$$M\left(\frac{\mu}{n}-p\right)^4=\frac{np}{n^4}\left[n(p^3+q^3)+3pq(n^2-n)\right]<\frac{1}{4n^2}$$

муносабатнинг тўғрилигини кўрсатади. Бу тенгсизлик ва Чебишев тенгсизлигига кўра

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\geqslant\frac{1}{r}\right\}\leqslant r^4 M\left(\frac{\mu}{n}-p\right)^4<\frac{r^4}{4n^2}.$$

Бундан,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\geqslant\frac{1}{r}\right\}$$

қаторнинг яқинлашиши келиб чиқади. Бу эса 1-леммага асосан, Борель теоремасининг тўғрилигини кўрсатади.

4-§. Яқинлашиш турлари

Биз тасодифий миқдорларни битта $\langle\Omega,\mathfrak{F},P\rangle$ эҳтимоллик фазосида берилган деб фараз қиламиз. Ўлчовли функциялар назариясидан маълумки, ўлчовли функциялар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш ва (махраждаги функция нолдан фарқли бўлса) бўлиш амали бажариш натижасида ҳосил бўладиган функция яна ўлчовли, шу билан бирга ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг лимити (агар мавжуд бўлса) яна ўлчовли бўлади. Шунга ўхшаш натижалар тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли. Тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг яқинлашиши, масала талабига қараб, турлича бўлиши мумкин.

1-таъриф. Агар ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сон учун $n \to \infty$ да $P\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} \longrightarrow 0$ бўлса, у ҳолда ξ_1 $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги p *эҳтимол бўйича* ξ *тасодифий миқдорга яқинлашади* деймиз ва

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$$

каби белгилаймиз.

Айтайлик, g ихтиёрий узлуксиз, чегараланган функция бўлсин. Агар $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ бўлса, у ҳолда

$$Mg(\xi_n) \longrightarrow Mg(\xi). \tag{1}$$

Агар ξ_n ва ξ ларнинг тақсимот функцияларини мос равишда $F_n(x)$ ва $F(x)$ деб белгиласак, у ҳолда (1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_n(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x). \tag{2}$$

2-таъриф. Агар ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун

$$P\{\omega: \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ξ *тасодифий миқдорга 1 эҳтимол билан яқинлашади* деймиз, яъни бундай яқинлашиш учун $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ муносабатни қаноатлантирмайдиган ω нуқталарнинг ўлчови нолга тенг бўлади.

Биз бир эҳтимол билан яқинлашишни $\xi_n \xrightarrow{p(1)} \xi$ каби белгилаймиз. 1 эҳтимол бўйича яқинлашиш

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega: \sup_{m>n} (\xi_n - \xi| > \varepsilon)\} = 0$$

га тенг кучлидир.

3-таъриф. Агар $n \to \infty$ да $M|\xi_n - \xi|^r \longrightarrow 0$ шарт бажарилса, $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ξ га *ўртача r-тартибда яқинлашади* деймиз. Бу яқинлашишни $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ каби белгилаймиз. Хусусан $r = 2$ да бу яқинлашиш *ўрта квадратик яқинлашиш* дейилади ва

$$\text{l.i.m.}\,\xi_n = \xi$$

каби белгиланади. Юқоридаги таърифлардан 1 эҳтимол бўйича яқинлашишдан эҳтимол бўйича яқинлашиш келиб чиқади лекин аксинчаси, умуман олганда, ўринли эмаслигини қуйидаги мисолдан кўриш мумкин.

Мисол. Фараз қилайлик, $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F}$ эса Борель тўпламларининг σ-алгебраси, P — Лебег ўлчови бўлсин ва

$$A_n^k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right],$$

$$\chi_n^k = I_{A_n^k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{агар} \quad \omega \in A_n^k \quad \text{бўлса,} \\ 0, & \text{агар} \quad \omega \notin A_n^k \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

(бу ердаги $I_{A_n^k}(\omega)$ ни A_n^k тўпламнинг индикатори деймиз). У ҳолда

$$\{\chi_2^1, \chi_2^2, \chi_3^1, \chi_3^2, \chi_3^3, \dots\}$$

тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги эҳтимол бўйича нолга интилади, бироқ ҳеч бир $\omega \in [0,1]$ нуқтада лимитга эга эмас. Энди ўртача r-тартибда яқинлашишга тўхталиб ўтамиз. Чебишев тенгсизлигига асосан

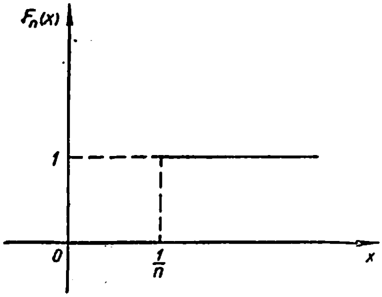
$$P\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^2}.$$

Бу тенгсизлик эса r-тартибда яқинлашишдан эҳтимол бўйича яқинлашиш келиб чиқишини кўрсатади.

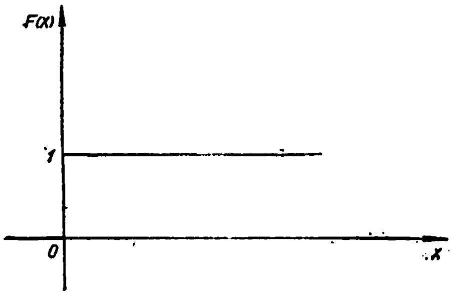
Бизга $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$ бўлсин.

4-таъриф. Агар $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлиги $n \to \infty$ да $F(x) = P\{\xi < x\}$ га $F(x)$ тақсимот функциянинг ҳар бир узлуксизлик нуқтасида яқинлашса, у ҳолда $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ξ га *тақсимот бўйича яқинлашади* дейилади ва $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ каби белгиланади (бу ерда D инглизча „distribution" — тақсимот сўзининг бош ҳарфидан олинган).

Аввало тақсимот бўйича яқинлашишда нима учун яқинлашиш нуқталари сифатида ҳамма нуқталар эмас,



29- шакл.



30- шакл.

балки фақатгина $P(\xi = x) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ҳар бир x нуқта олинишини ойдинлаштириб ўтайлик. Агар $\xi_n = \frac{1}{n}$, $\xi = 0$ деб олсак, у ҳолда $F_n(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графиклари қуйидагича бўлади. (29, 30- шакллар).

Бундан кўринадики, $x = 0$ нуқтадан ташқари барча x нуқталарда $F_n(x) \to F(x)$. Шунинг билан бирга, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $n \to \infty$ да $P\{|\xi_n| \geqslant \varepsilon\} \to 0$, бу эса ξ_n тасодифий миқдорнинг тақсимоти лимит тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси атрофида жамланишини кўрсатади. Бу мисол ξ_n тасодифий миқдорларнинг қийматларини ξ_n лимит қийматлари атрофида „қуюқлашувини“ $F(x)$ функциянинг узиладиган нуқталарида англаб бўлмаслигини кўрсатади. Шунинг учун ҳам, ҳамма нуқталарни эмас, балки, фақатгина

$$P\{\xi = x\} = 0$$

шартни қаноатлантирувчи нуқталарни оламиз.

Тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг тақсимот бўйича яқинлашишидан уларнинг эҳтимол бўйича яқинлашиши, умуман олганда, келиб чиқмайди, яъни

$$\xi_n(\omega) \xrightarrow{D} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi.$$

$\{\xi_n(\omega)\}$ тасодифий миқдорларнинг $\{F_{\xi_n(\omega)}(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлигини ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясига яқинлашишини текшириш осон иш эмас, бунга нисбатан, масалан, бу тақсимотлар моментларининг яқинлашишини текшириш осонроқ:

$$m_k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF_{\xi_n}(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF_{\xi}(x) = m_k, \; n \longrightarrow \infty.$$

Шу сабабли тақсимот бўйича яқинлашишга эквивалент бўлган тақсимот характеристикалари синфини ажратиш табиий. Шундай характеристика сифатида Лебег — Стилтьес интегралини олиш қулай ҳисобланади:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dF_{\xi}(x).$$

Аввало, қандай $f(x)$ функциялар учун $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$ яқинлашишдан қуйидаги

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dF_{\xi_n}(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dF_{\xi}(x) \tag{5}$$

яқинлашиш келиб чиқишини тушуниб олайлик. Бу интеграллар бир вақтда мавжуд бўлишлиги учун (ўлчовли) чегараланган $f(x)$ функцияни оламиз. Бироқ бундай функциялар учун $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$ яқинлашишдан, умуман олганда, (5) яқинлашиш келиб чиқмайди.

Мисол. Айтайлик,

$$\xi_n(\omega) \equiv \frac{1}{n}, \quad \xi(\omega) \equiv 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

бўлсин, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dF_{\xi_n}(x) = Mf(\xi_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dF_{\xi}(x) = Mf(\xi) = f(0) = 0.$$

Демак, $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$, аммо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_{\xi_n}(x) \not\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_{\xi}(x).$$

Бироқ $f(x)$ узлуксиз ва чегараланган функция бўлса, у ҳолда тақсимот бўйича яқинлашишдан (5) келиб чиқади ва, аксинча.

Айтайлик, $\mathcal{H}=\{H\}$ тўплам $H=H(x)$ функциялардан иборат синф бўлиб, бу тўпламдаги функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

а) $H(x)$ — камаймайдиган функция;
б) $H(-\infty)=0$, $H(+\infty)\leqslant 1$;
в) $H(x)$ чапдан узлуксиз функция.

Биз $\mathfrak{F}=\{F\}$ деб H синфнинг шундай қисм тўпламини оламизки, бунда $F(+\infty)=1$, яъни $F(x)$ ξ тасодифий миқдор тақсимот функциясининг худди ўзи.

Таъриф. Агар ихтиёрий узлуксиз ва чегараланган $h(x)$ функция учун

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dH_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dH(x) \tag{6}$$

тенглик ўринли бўлса, $\mathcal{H}\ni H_n$ функциялар кетма-кетлиги $\mathcal{H}\ni H$ функцияга *суст яқинлашади* дейилади ва қисқача $H_n \xrightarrow{W} H$[*] каби белгиланади, бу ерда W ҳарфи инглизча „Weak“ — „суст“, сўзининг бош ҳарфидан олинган.

1-теорема. *Фараз қилайлик, $F_n, F\in\mathfrak{F}$, у ҳолда*

$$(F_n \xrightarrow{W} F) \Longleftrightarrow (F_n \xrightarrow{D} F).$$

Бу теоремани $\mathcal{H}$ синфдаги функциялар учун қуйидагича баён этиш мумкин.

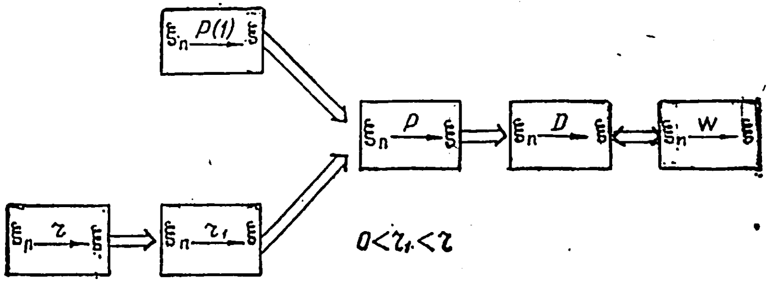
2-теорема. *Фараз қилайлик, $H_n, H\in\mathcal{H}$, у ҳолда*

1) $(H_n \xrightarrow{W} H) \Longrightarrow (H_n \xrightarrow{D} H);$ (7)

2) $H_n \xrightarrow{D} H,\ H_n(+\infty)\to H(+\infty) \Longrightarrow H_n \xrightarrow{W} H.$ (8)

---

[*] Баъзида (6) ўринли бўлса, $\{\xi_n\}$ кетма-кетлик ξ га *суст яқинлашади* дейилади ва $\xi_n \xrightarrow{W} \xi$ каби ёзилади.



31- шакл.

Юқорида айтилганларга кўра турли яқинлашишлар орасидаги боғланишни ифодаловчи схемани келтиришимиз мумкин (31- шакл).

V БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. Ўзаро боғлиқ бўлмаган ва бир хил тақсимланган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги қуйидагича аниқланган:

а) $P\{\xi_n = k\} = \frac{C}{k^2\lg^2 k}$; $\quad (k \geqslant 2,\ C^{-1} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2\lg^2 k})$;

б) $P\{\xi_n = 2^{k - \lg k - 2\lg\cdot\lg k}\} = \frac{1}{2^k}$ $\quad (k = 1, 2, 3, \ldots.)$.

Бу кўринишдаги кетма-кетликлар учун катта сонлар қонуни ўринли бўлишини исботланг.

2. Агар $\{\xi_k\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги қуйидагича аниқланган бўлса:

$$P\{\xi_k = k^\alpha\} = P\{\xi_k = -k^\alpha\} = \frac{1}{2},$$

у ҳолда катта сонлар қонуни бажарилиши учун $\alpha < \frac{1}{2}$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарли эканини кўрсатинг.

3. Агар боғлиқ бўлмаган $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ушбу

$$\max_{1<k<n} \int\limits_{|x|>N} |x|\, dF_k(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда $\{\xi_n\}$ кетма-кетлик катта сонлар қонунига бўйсунишини исботланг.

4. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ўзаро боғлиқ бўлмаган, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлса:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a},$$

бу тасодифий миқдорлар учун Хинчин теоремаси ўринлими?

5. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар берилган ҳамда $D\xi_n \leqslant c$ ва $|i-j| \to \infty$ да $r_{i,j} \to 0$ бўлса, бу тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун катта сонлар қонуни ўринли бўлишини исботланг. Бу ерда r_{ij} — корреляция коэффициенти.

6. Фараз қилайлик, $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $|\xi_n|^r \leqslant \eta$ ва $M\eta < \infty$ бўлсин, у ҳолда $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ муносабатни исботланг.

7. Агар $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{p} 0$ бўлса, у ҳолда $\xi_n^2 \xrightarrow{p} \xi^2$ муносабат тўғрими?

8. $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлиб,

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$P(\xi_n = n^{\frac{2}{r}}) = \frac{1}{n}$$

бўлсин. У ҳолда $\xi_n \xrightarrow{p} 0$, бироқ $\xi_n \not\xrightarrow{r} 0$ бўлишини исботланг.

9. Фараз қилайлик, $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб,

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \qquad P(\xi_n = 1) = \frac{1}{n}$$

бўлсин, у ҳолда $\xi_n \xrightarrow{p} 0$, $\xi_n \xrightarrow{r} 0$ ва $\xi_n \xrightarrow{D} 0$ бўлишини исботланг.

10. Шундай $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига мисол келтирингки, $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_\xi$ ўринли бўлиб, $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ўринли бўлмасин.

VI БОБ

ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Характеристик функция ва унинг хоссалари

$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ эҳтимоллик фазосида ξ тасодифий миқдор берилган бўлсин.

Таъриф. Тасодифий миқдорнинг *характеристик функцияси* деб ҳақиқий ўзгарувчининг ушбу функциясига айтилади:

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \tag{1}$$

бу ерда t — ҳақиқий сон, $-\infty < t < \infty$, $F(x)$ эса ξ нинг тақсимот функцияси. Агар ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $f(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

бўлади, бу эса $f(x)$ функция Фурье алмаштиришининг ўзидир. Умуман олганда, $\varphi_\xi(t)$ характеристик функция $F(x)$ тақсимот функциянинг Фурье — Стилтьес алмаштиришидир.

Ушбу

$$|\varphi_\xi(t)| = |Me^{it\xi}| \leqslant 1$$

тенгсизликдан ихтиёрий ξ тасодифий миқдорнинг характеристик функцияси мавжудлиги келиб чиқади.

Боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндисининг хоссаларини ўрганишда характеристик функциялар методи жуда қулай методлардан бири ҳисобланади.

Характеристик функциянинг хоссалари.

1. Ихтиёрий ξ тасодифий миқдор учун $\varphi_\xi(0) = 1$ ва барча t лар учун $|\varphi_\xi(t)| \leqslant 1$.

2. $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$.

Дарҳақиқат,

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Me^{iat\xi} = e^{itb}\varphi_\xi(at).$$

3. Агар $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ йиғиндининг характеристик функцияси

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \ldots \varphi_{\xi_n}(t)$$

га тенг.

Исбот.

$$\varphi_{S_n}(t) = Me^{it(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = Me^{it\xi_1}.e^{it\xi_2} \ldots e^{it\xi_n} =$$

$$= Me^{it\xi_1} Me^{it\xi_2} \ldots Me^{it\xi_n} = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) \ldots \varphi_{\xi_n}(t).$$

4. $\varphi_\xi(t)$ характеристик функция R^1 да текис узлуксиздир.

Исбот.

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| \, dF_\xi(x) =$$

$$= \int_{|x|<N} |e^{ihx} - 1| \, dF_\xi(x) + \int_{|x|>N} |e^{ihx} - 1| \, dF_\xi(x) = I_1 + I_2$$

Бу ерда берилган $\varepsilon > 0$ учун N ни танлаш ҳисобига $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ қилиш мумкин, сўнгра h ни шундай танлашимиз мумкинки, $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади, натижада

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5. $\overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$, бу ерда функция устидаги чизиқча комплекс қўшмани билдиради.

Бу хоссанинг исботи

$$\overline{\varphi_\xi(t)} = \overline{Me^{it\xi}} = M\overline{e^{it\xi}} = Me^{-it\xi}$$

тенгликдан келиб чиқади.

6. Пойа теоремаси. *Фараз қилайлик, $\varphi(t)$, $t \in R$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

а) $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 1$, $t \to \infty$ да $\varphi(t) \to 0$,

б) $\varphi(t)$ *узлуксиз, жуфт ва ботиқ, у ҳолда* $\varphi(t)$ *бирор тақсимот функциянинг характеристик функцияси бўлади.*

Бу теореманинг исботини келтирмаймиз.

7. Агар $M|\xi|^n < \infty$ бўлса, $\varphi_\xi(t)$ характеристик функция n- тартибли узлуксиз ҳосилага эга ва қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx}\, dF_\xi(x), \qquad k \leqslant n, \tag{3}$$

$$M\xi^k = \frac{\varphi_\xi^k(0)}{i^k}, \quad k \leqslant n, \tag{4}$$

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} M\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\left[\varepsilon(t) + M\xi^n\right], \tag{5}$$

бу ерда $t \to \infty$ да $\varepsilon(t) \to 0$ ва барча t ларда

$$|\varepsilon(t)| \leqslant 3M|\xi|^n.$$

Исбот. Қуйидаги ифодани қараймиз:

$$\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx}-1}{h}\, dF_\xi(x).$$

Маълумки, $\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right| \leqslant 1$ ҳамда шартга кўра $n = 1$ да

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF_\xi(x) < \infty.$$

У ҳолда мажорант яқинлашиш* ҳақидаги теоремага биноан

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{ihx}-1}{h}\, dF_\xi(x)$$

мавжуд ва $i\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx}\, dF_\xi(x)$ ифодага тенг, шунинг учун

$$\varphi'_\xi(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = i\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx}\, dF_\xi(x).$$

Шунга ўхшаш,

$$\left| e^{i\lambda} - \left(1 + \frac{i\lambda}{1!} + \ldots + \frac{(i\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right| \leqslant \frac{\lambda^k}{k!}$$

---

* Т. А. Саримсоқов. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси, Т., „Ўқитувчи“, 1968 й.

тенгсизликдан фойдаланиб, (3) формула исботланади ҳамда (3) дан (4) келиб чиқади.

(5) ни исботлаш учун Тейлор формуласидан фойдаланамиз, у ҳолда ҳақиқий y лар учун

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iy)^k}{k!} +$$

$$+\frac{(iy)^n}{n!}[\cos\theta_1 y + i\sin\theta_2 y],$$

$$|\theta_1| \leqslant 1 \quad \text{ва} \quad |\theta_2| \leqslant 1.$$

Шунинг учун

$$e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}[\cos(\tilde{\theta}_1 t\xi) + i\sin(\tilde{\theta}_2 t\xi)]. \qquad (6)$$

Бу ерда $\tilde{\theta}_1$ ва $\tilde{\theta}_2$ — тасодифий миқдорлар ва $|\tilde{\theta}_1| \leqslant 1$, $|\tilde{\theta}_2| \leqslant 1$.

Энди

$$|\xi^n[\cos(\tilde{\theta}_1 t\xi) + i\sin(\tilde{\theta}_2 t\xi) - 1]| \leqslant 3|\xi|^n \qquad (7)$$

ҳамда

$$\varepsilon(t) = M\xi^n[\cos\tilde{\theta}_1 t\xi + i\sin\tilde{\theta}_2 t\xi - 1].$$

Функция учун мажорант яқинлашиш ҳақидаги теоремани эътиборга олсак, $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$. Шундай қилиб, (6), (7) га асосан (5) келиб чиқади.

Энди кўп ишлатиладиган тақсимот функцияларнинг характеристик функцияларини ҳисоблайлик.

1-мисол. Агар бир эҳтимол билан $\xi = c = \mathrm{const}$ бўлса, $\varphi_\xi(t) = e^{itc}$ бўлади.

2-мисол. Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор учун $P(\xi = 0) = q$, $P\{\xi = 1\} = p$ ва $p + q = 1$ бўлсин, у ҳолда

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = pe^{it} + q.$$

3-мисол. Ўзаро боғлиқ бўлмаган бир хил тақсимланган $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин ва

$$P(\xi_1 = 0) = q, \qquad P(\xi_1 = 1) = p = 1 - q.$$

Қуйидаги $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ йиғиндини тузамиз. У ҳолда 3- хоссага кўра

$$\varphi_{S_n}(t) = [pe^{it} + q]^n.$$

Агар нормалаштирилган ва марказлаштирилган

$$\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

тасодифий миқдорни олсак, у ҳолда 2- хоссага асосан

$$\frac{\varphi_{S_n - np}(t)}{\sqrt{npq}} = e^{-it\sqrt{\frac{np}{q}}} \cdot \left[pe^{it \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}}} + q\right]^n = \left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + \right.$$

$$\left. + pe^{it\frac{1}{\sqrt{npq}} - it\sqrt{\frac{p}{nq}}}\right)^n = \left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + pe^{it - \sqrt{\frac{q}{np}}}\right)^n.$$

4- мисол. Фараз қилайлик, ξ стандарт N (0, 1) нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. У ҳолда

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Агар η тасодифий миқдор $N(m, \sigma^2)$ нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда 2- хоссага асосан

$$\varphi_\eta(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Буни ўзингиз мустақил исботлашга уриниб кўринг.

2- §. Характеристик функция орқали тақсимот функцияни ифодалаш формуласи

Ҳар бир тасодифий миқдор учун унга мос характеристик функция мавжудлигини аввалги параграфда кўрдик. Турли тақсимот функцияларга турли характеристик функциялар мос келади ҳамда тақсимот функция характеристик функция орқали бир қийматли аниқланади.

Теорема. *Агар $\varphi(t)$ ва $F(x)$ функциялар мос равишда ξ тасодифий миқдорнинг характеристик ва* *тақсимот функциялари бўлса ҳамда x_1 ва x_2 $F(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқталари бўлса, у ҳолда*

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt$$

тенглик ўринли бўлади.

Хусусан,

$$F(x_2)=\lim_{x_1\to-\infty}\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Бу теоремадан қуйидаги натижани исботлаш мумкин: *агар $\varphi(t)$ абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)=F'(x)$ мавжуд, узлуксиз, чегараланган ва*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Исбот. Қуйидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$I_c=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(u-x_1)}-e^{it(u-x_2)}}{it}dF(u)\,dt.$$

Агар интеграл остидаги функцияларнинг $-\infty<u<+\infty$, $|t|\leqslant c$ оралиқларда чегараланганлигини эътиборга олсак,

$$I_c=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-c}^{c}\frac{e^{it(u-x_1)}-e^{it(u-x_2)}}{it}dt\right)dF(u)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{c}\frac{e^{it(u-x_1)}-e^{-it(u-x_1)}-e^{it(u-x_2)}+e^{it(u-x_2)}}{it}dt\right)dF(u)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\int_{0}^{c}\Bigg(\frac{\sin(u-x_1)t}{t}-\frac{\sin(u-x_2)t}{t}dt\Bigg)dF(u)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-c(u-x_2)}^{c(u-x_1)}\frac{\sin t}{t}dt\right)dF(u).$$

Математик анализ курсидан маълумки,

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\sin t}{t}\,dt=1. \tag{2}$$

Ушбу

$$S_c(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-c(u-x_2)}^{c(u-x_1)}\frac{\sin t}{t}\,dt \tag{3}$$

ифода c бўйича текис чегаралангандир. Демак,

$$\lim_{c\to+\infty} I_c=\lim_{c\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_c(u)dF(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{c\to+\infty}S_c(u)\,dF(u).$$

Бевосита ишонч ҳосил қилиш мумкинки, $u<x_1$ ва $u>x_2$ лар учун

$$\lim_{c\to+\infty}S_c(u)=0.$$

Натижада

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-\infty}^{x_1}S_c(u)\,dF(u)=0,\quad \lim_{c\to\infty}\int_{x_2}^{+\infty}S_c(u)dF(u)=0. \tag{4}$$

Шу билан бирга (3) дан ва $\frac{\sin t}{t}$ функциянинг жуфтлигидан

$$\lim_{c\to+\infty}S_c(u)=\begin{cases}1, & \text{агар } x_1<u<x_2 \text{ бўлса},\\ \frac{1}{2}, & \text{агар } u=x_1,\ u=x_2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Агар x_1 ва x_2 нуқталарни $F(u)$ функциянинг узлуксиз нуқталари эканлигини эътиборга олсак, охирги тенгликдан

$$\int_{x_1}^{x_2}\lim_{c\to\infty}S_c(u)\,dF(u)=\int_{x_1}^{x_2}dF(u)=F(x_2)-F(x_1) \tag{5}$$

ифода ҳосил бўлади. Агар I_c интегрални

$$I_c=\int_{-\infty}^{x_1}S_c(u)\,dF(u)+\int_{x_1}^{x_2}S_c(u)\,dF(u)+\int_{x_2}^{+\infty}S_c(u)\,dF(u)$$

кўринишда ифодалаш мумкинлигини эътиборга олсак, (4), (5) лардан ва охирги тенгликдан теорема исботи келиб чиқади.

Натижа. Ягоналилик теоремаси. Тақсимот функция ўз характеристик функцияси орқали бир қийматли аниқланади. Агар $F(x_2)-F(x_1)$ айирма $x_1\to\infty$ да $F(x_2)$ функцияни бир қийматли аниқлашини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги теоремадан натижанинг исботи келиб чиқади.

Характеристик функциялардан фойдаланиб, нормал қонуннинг қуйидаги муҳим хоссасини келтирамиз. Нормал қонун бўйича тақсимланган боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси яна нормал тақсимотга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорлар мос равишда (a_1, σ_1^2) ва (a_2, σ_2^2) параметрлар бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда $\xi+\eta$ йиғиндининг характеристик функцияси:

$$\varphi_{\xi+\eta}(t)=\varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(t)=e^{ita_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\cdot e^{ita_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}}=$$

$$=e^{it(a_1+a_2)}\cdot e^{-t^2\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}=e^{it(a_1+a_2)-\frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}.$$

Демак, $\xi+\eta$ йиғинди $(a_1+a_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ параметрли нормал тақсимотга эга.

Аксинча, $\varphi_1(t)$ ва $\varphi_2(t)$ характеристик функциялар учун

$$\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

бўлса, у ҳолда

$$\varphi_1(t)=e^{iat-\sigma^2\frac{t^2}{2}},\quad \varphi_2(t)=e^{-iat-\frac{(1-\sigma^2)}{2}t^2},0\leqslant\sigma\leqslant1$$

бўлишлигини Г. Крамер исботлаган, яъни ўзаро боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорлар йиғиндиси $\xi+\eta$ нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда қўшилувчиларнинг ҳар бири ҳам нормал қонун бўйича тақсимланган бўлади.

λ параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор берилган бўлсин. Унинг характеристик функцияси қуйидагига тенг:

$$\varphi'_{\xi}(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp\left[\lambda (e^{it} - 1)\right].$$

Энди ўзаро боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорлар мос равишда λ ва ν параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлсин. Улар йиғиндисининг характеристик функцияси қуйидагига тенг:

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}\cdot e^{\nu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\nu)(e^{it}-1)}$$

Демак, $\xi+\eta$ тасодифий миқдор $\lambda+\nu$ параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлади.

Д. А. Райков ўзаро боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорларнинг $\xi+\eta$ йиғиндиси Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда қўшилувчиларнинг ҳар бири Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлишлигини исботлаган.

3- §. Узлуксиз мослик ҳақидаги теоремалар

1-теорема (тўғри лимит теорема). *Агар $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлиги бирор $F(x)$ тақсимот функцияга суст яқинлашса, уларга мос $\{\varphi_n(t)\}$ характеристик функциялар кетма-кетлиги $\varphi(t)$ характеристик функцияга t нинг ҳар бир чекли оралиғида текис яқинлашади.*

2-теорема (тескари лимит теорема). *Агар $\{\varphi_n(t)\}$ характеристик функциялар кетма-кетлиги узлуксиз бўлган бирор $\varphi(t)$ функцияга интилса, бу характеристик функцияларга мос $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлиги $F(x)$ тақсимот функцияга суст яқинлашади ва*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

бўлади.

Теоремаларни исботлаш учун бир нечта ёрдамчи леммаларни исботлаймиз.

1- *лемма.* $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлиги бирор камаймайдиган $F(x)$ функцияга суст яқинлашиши учун $R=(-\infty, \infty)$ нинг ҳамма ерда зич бирор D нуқталар тўпламида $n \to \infty$ да $F_n(x) \to F(x)$ муносабатнинг бажарилиши етарли.

Исботи. Ихтиёрий x_1, $x_2 \in D$ нуқталар учун $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ тенгсизлик ўринли бўлганда

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_1) \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf F_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup F_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} F_n(x_2)$$

бўлади. Демак,

$$F(x_1) \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf F_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup F_n(x) \leqslant F(x_2),$$

лекин D нинг нуқталари ҳақиқий сонлар тўпламида зичлигини эътиборга олсак, у ҳолда $F(x)$ нинг узлуксизлик нуқталарида

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

1- лемма исботланди.

2- *лемма.* Ҳар қандай $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлигидан бирор камаймайдиган $F(x)$ функцияга суст яқинлашувчи $\{F_{nn}(x)\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Исботи. Айтайлик, $D=\{x_n\}$ ҳақиқий сонлар тўпламида зич саноқли тўплам бўлсин. $x=x_1$ деб, лемма шартида берилган $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлигидан $\{F_n(x_1)\}$ чегараланган сонли кетма-кетликни ҳосил қиламиз. $\{F_n(x_1)\}$ нинг чегараланганлигидан фойдаланиб, ундан яқинлашувчи $\{F_{1n}(x_1)\}$ қисмий кетма-кетликни ажратамиз. Энди $\{F_{1n}(x_2)\}$ кетма-кетликни кўрайлик. Бу кетма-кетлик ҳам чегараланган сонли кетма-кетлик бўлгани учун ундан яқинлашувчи $\{F_{2n}(x_2)\}$ қисмий кетма-кетликни ажратиш мумкин. Агар $\{F_{1n}(x_1)\}$ ва $\{F_{2n}(x_2)\}$ кетма-кетликнинг лимитларини мос равишда $G(x_1)$ ва $G(x_2)$ билан белгилаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} F_{1n}(x_1) = G(x_1), \quad \lim_{n\to\infty} F_{2n}(x_2) = G(x_2).$$

Бу процессни давом эттириб,

$$\{F_{3n}(x_i)\},\ i=\overline{1,\ 3};\quad \{F_{4n}(x_i)\},$$
$$i=\overline{1,\ 4};\ \ldots,\ \{F_{kn}(x_i)\},\ i=\overline{1,\ k};\ \ldots$$

ларнинг ҳосил қилинишини ва

$$\lim_{n\to\infty} F_{kn}(x_i) = G(x_i), \qquad i=\overline{1, k}$$

эканини кўриш қийин эмас. Энди $\|F_{kn}(x)\|$, $k=\overline{1, \infty}$, $n=\overline{1, \infty}$ матрицанинг диагоналида ётувчи тақсимот функциялардан тузилган $\{F_{nn}(x)\}$ диагонал кетма-кетликни олайлик. Ихтиёрий $x_k \in D$ да $\{F_{nn}(x_k)\}$ сонли кетма-кетликнинг биринчи $k-1$ та қийматигина юқоридаги $\{F_{kn}(x_k)\}$ кетма-кетликка тегишли бўлмаслиги мумкин. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} F_{nn}(x_k) = G(x_k),$$

демакдир.

Шу тарзда D да аниқланган $G(x)$ функция монотон ўсувчи ва чегаралангандир. Бу функцияни R да аниқланган, монотон ўсувчи, чегараланган $F(x)$ функциягача, D нинг R да зичлигидан фойдаланиб, давом эттириш қийин эмас. Буни ўқувчига ҳавола қиламиз.

3-*лемма*. Агар $\varphi(x)$ функция $R=(-\infty, \infty)$ да узлуксиз, чегараланган бўлиб, $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлиги $F(x)$ тақсимот функцияга суст яқинлашса, ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. Аввало, агар a, $b \in R$ да $F(x)$ узлуксиз бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} \varphi(x)\, dF_n(x) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\, dF(x)$$

ни ўринлилигини кўрсатайлик. Лемма шартидан $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да текис яқинлашувчи, узлуксиздир, шу сабабли ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $[x_k, x_{k+1}] \subset [a, b]$ қисмий интерваллар мавжуд бўладики, барча k лар ва $x \in [x_k, x_{k+1}]$ учун $|\varphi(x) - \varphi(x_k)| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Олинган $a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$ нуқталарни $F(x)$ нинг узлуксизлик нуқталари сифатида танлаш ҳеч қандай зиддиятга олиб келмайди

Ёрдамчи $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x_k)$, $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$ функцияни киритамиз, у ҳолда

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)-\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)\right|\leqslant\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)-\right.$$

$$\left.-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF(x)\right|+\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF_n(x)\right|+$$

$$+\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)\right|=I_1+I_2+I_3$$

тенгсизлик ўринли. Ушбу

$$I_1\leqslant\varepsilon\int_a^b dF(x)=\varepsilon[F(b)-F(a)], \tag{2}$$

$$I_3\leqslant\varepsilon[F_n(b)-F_n(a)] \tag{3}$$

тенгсизликларнинг тўғрилигини кўриш қийин эмас. Иккинчи қўшилувчини эса

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(x_k)[F(x_{k+1})-F(x_k)]-\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(x_k)[F_n(x_{k+1})-\right.$$

$$\left.-F_n(x_k)]\right|=\left|\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(x_k)[F(x_{k+1})-F_n(x_{k+1})]-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(x_k)[F(x_k)-F_n(x_k)]\right|$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Айтайлик, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$ бўлсин, у ҳолда етарли катта n ларда барча k лар учун

$$|F(x_k)-F_n(x_k)|<\frac{\varepsilon}{M\cdot N}$$

тенгсизлик ўринли бўлади ва

$$I_2\leqslant 2\varepsilon \tag{4}$$

ε ни ихтиёрий мусбат сонлигини эътиборга олган ҳолда (2), (3) ва (4) дан

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) = \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)$$

ҳосил бўлади. Энди

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dF_n(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dF(x) - \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dF_n(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_{a}^{b} \varphi(x)\,dF(x) - \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dF_n(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_{b}^{\infty} \varphi(x)\,dF(x) - \int_{b}^{\infty} \varphi(x)\,dF_n(x)\right| = I_1 + I_2 + I_3 \quad (5)$$

қўшилувчиларни баҳолаймиз. Агар $M = \sup|\varphi(x)|$ бўлса, $I_1 \leqslant M[F(a) - F_n(a)]$ нинг ўринлилигини кўриш қийин эмас. Бунда a ни $F(x)$ нинг узлуксизлик нуқтаси деб фараз қилиб, n ни шундай танлаймизки, натижада

$$I_1 < \varepsilon \quad (6)$$

бажарилади. Худди, шунингдек,

$$I_3 < \varepsilon. \quad (7)$$

Натижада (5) да a ва b ларни $F(x)$ нинг узлуксизлик нуқталари сифатида танлаб, етарлича катта n лар учун

$$I_2 < \varepsilon \quad (8)$$

ни ҳосил қиламиз. (5) — (8) лардан лемманинг исботи келиб чиқади.

Теоремаларнинг исботи. 3-леммадан $n\to$ да

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) = \varphi(t).$$

Бу эса 1-теореманинг ўринлилигини кўрсатади.

2- леммага кўра, $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлигидан $F(x)$ га яқинлашувчи $\{F_{n_l}(x)\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. 2- теоремани исботлаш учун $F(x)$ нинг тақсимот функциялигини кўрсатиш кифоя. Агар $F(x)$ тақсимот функция бўлмаса эди, у ҳолда $\delta=F(+\infty-F(-\infty)<1$ бўлар эди. Маълумки, $\varphi(t)$ характеристик функция ихтиёрий $[-\tau, \tau]$ да интегралланувчи, $\varphi(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$ ва $\varphi(t)$ нинг узлуксизлигини эътиборга олсак, шундай етарлича кичик $\tau>0$ топиладики, олдиндан танланган ε ($\varepsilon<1-\delta$, $\delta>0$) учун

$$\frac{1}{2\tau}\left|\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)\,dt\right|>1-\frac{\varepsilon}{2}>\delta+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (9)$$

Шундай $X>\frac{4}{\tau\varepsilon}$ ва шундай $k>K$ (K — етарлича катта) танлаш мумкинки,

$$F_{n_k}(X)-F_{n_k}(-X)<\delta+\frac{\varepsilon}{4}.$$

Иккинчи томондан

$$\int_{-\tau}^{\tau}\varphi_{n_k}(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\tau}^{\tau}e^{itx}\,dt\right|dF_{n_k}(x)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{|x|<X}\left[\int_{-\tau}^{\tau}e^{itx}\,dt\right]dF_{n_k}(x)+$$

$$+\left|\int_{|x|>X}\left[\int_{-\tau}^{\tau}e^{itx}\,dt\right]dF_{n_k}(x)\right|. \qquad (10)$$

Етарли катта n лар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\left|\int_{|x|<X}\left[\int_{-\tau}^{\tau}e^{itx}\,dt\right]dF_{n_k}(x)\right|\leqslant 2\tau\int_{|x|<X}dF_{n_k}(x)\leqslant\left(2\tau\delta+\frac{\varepsilon}{4}\right). \qquad (11)$$

Ишонч ҳосил қилиш мумкинки,

$$\left|\int\limits_{|x|>X}\left[\int\limits_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\,dt\right]dF_{n_k}(x)\right| \leqslant \int\limits_{|x|>X}\left|\int\limits_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\,dt\right|dF_{n_k}(x) =$$

$$= \int\limits_{|x|>X}\left|\frac{e^{i\tau x}-e^{-i\tau x}}{ix}\right|dF_{n_k}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x|>X} \frac{2}{x}\sin\tau x\,dF_{n_k}(x) \leqslant \frac{2}{x} \qquad (12)$$

(10) – (12) дан

$$\frac{1}{2\tau}\left|\int\limits_{-\tau}^{\tau}\varphi_{n_k}(t)\,dt\right| \leqslant \delta + \frac{\varepsilon}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан $k \to \infty$ да

$$\frac{1}{2\tau}\left|\int\limits_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \delta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ҳосил қилган ифодамиз (9) га зид натижа бўлди. Бу эса $F(x)$ нинг тақсимот функция эканлигини кўрсатади. Теорема исботига эътибор берсак, $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялар кетма-кетлигининг барча қисмий кетма-кетликлари $F(x)$ тақсимот функцияга суст интилишини кўрамиз. Биринчи теормага кўра $F(x)$ га мос характеристик функция $\varphi(t)$ дан иборат бўлади.

VI БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. Қуйидаги функциялардан қайси бири характеристик функция бўлади:

а) $1 + t$;

б) $\frac{1}{1+t}$;

в) $\sin t$;

г) $\cos t$;

д) $\frac{1}{1+t^2}$?

2. Қуйидаги характеристик функцияларга мос келувчи тақсимот функцияларни топинг:

а) $\cos t$;
б) $\cos^2 t$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt$, бу ерда $a_k \geqslant 0$ ва $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$.

3. Қуйидаги тақсимотларнинг характеристик функцияларини топинг:

а) $(-a, a)$ интервалдаги текис тақсимот;
б) биномиал тақсимот;
в) зичлик функцияси $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ бўлган Коши тақсимоти:
г) экспоненциал тақсимот:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

д) зичлик функцияси

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-\ x|}$$

кўринишда бўлган икки томонлама экспоненциал тақсимот.

4. Агар $\varphi(t)$ характеристик функция бўлса, у ҳолда

$$f(t) = e^{\varphi(t)-1}$$

функция ҳам характеристик функция бўлишини исботланг.

5. Агар $\varphi(t)$ характеристик функция бўлса, у ҳолда

$$g(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t \varphi(t) dt$$

функция ҳам характеристик функция бўлишини исботланг.

6. Ихтиёрий ҳақиқий $\varphi(t)$ характеристик функция қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиришини кўрсатинг:

$$1-\varphi(2t)\leqslant 4\,(1-\varphi(t));$$
$$1+\varphi(2t)\geqslant 2\,(\varphi(t))^2.$$

7. Ушбу

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{\operatorname{ch} t},\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{\operatorname{sh} t},\quad \varphi_3(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\,.$$

характеристик функциялар қуйидаги

$$p_1(x)=\frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}};\quad p_2(x)=\frac{\pi}{4\operatorname{ch}^2\frac{\pi x}{2}};\quad p_3(x)=\frac{x}{2\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}$$

зичлик функцияларга мос келишини исботланг.

8. Агар тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси мавжуд бўлса, у ҳолда $t\to\infty$ да бу тасодифий миқдорнинг херактеристик функцияси нолга интилишини кўрсатинг.

9. Қуйидагича аниқланган функциялар характеристик функция бўладими:

1) $f(t)=f(-t)$; $\quad f(t+2a)=f(t)$

2) $f(t)=\frac{a-t}{a}$, бу ерда $0\leqslant t\leqslant a$?

10. ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси қуйидагича:

$$p(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}\,e^{-\beta x}, \text{ агар } x>0 \text{ бўлса,}\end{cases}$$

у ҳолда $\alpha\to\infty$ да $\frac{\beta\xi-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ тасодифий миқдор $a=0,\ \sigma^2=1$ параметрли нормал қонунга интилишини исботланг.

11. Агар ξ тасодифий миқдор λ параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлса, $\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ тасодифий миқдор $\lambda\to\infty$ да (0,1)-нормал қонун бўйича тақсимланганини кўрсатинг.

VII БОБ

МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМА

1- §. Масаланинг қўйилиши

Кўп ҳолларда тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонунларини аниқлашга тўғри келади. Фараз қилайлик, ўзаро боғлиқ бўлмаган $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ берилган бўлсин ва ҳар бир ξ_i, $i = \overline{1, n}$ тасодифий миқдор „0" ёки „1" қийматни мос равишда q ва p эҳтимоллик билан қабул қилсин. У ҳолда S_n тасодифий миқдор биноминал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, унинг математик кутилиши np, дисперсияси эса npq га тенг бўлади. S_n тасодифий миқдор $0, 1, \ldots, n$ қийматларни қабул қила олади ва демак, n нинг ортиши билан S_n тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари исталганча катта сон бўлиши мумкин, шунинг учун S_n тасодифий миқдор ўрнига

$$\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

тасодифий миқдорни кўриш мақсадга мувофиқдир. Бу ифодада A_n, B_n лар n га боғлиқ бўлган сонлар. Хусусан, A_n ва B_n ларни

$$A_n = MS_n = np, \quad B_n = DS_n = npq$$

кўринишда танланса, у ҳолда Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасини қуйидагича баён этиш мумкин: *агар* $0 < p < 1$ *бўлса,* $n \to \infty$ *да ихтиёрий* $a, b \in (-\infty, \infty)$ да

$$P\left\{a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (1)$$

муносабат ўринли бўлади.

Табиий бундай савол туғилади: (1) муносабат ихтиёрий тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли бўладими? (1)

ўринли бўлиши учун S_n даги қўшилувчиларнинг тақсимот функцияларига қандай шартлар қўйиш керак?

Бу масалани ҳал қилишда П. Л. Чебишев ва унинг шогирдлари А. А. Марков, А. М. Ляпуновнинг хизматлари каттадир. Уларнинг тадқиқотлари шуни кўрсатадики, қўшилувчи тасодифий миқдорларга жуда ҳам умумий шартлар қўйиш мумкин экан. Бу шартларнинг маъноси айрим олинган қўшилувчининг умумий йиғиндига сезилмайдиган таъсир кўрсатишини таъминлашдир.

Мисол. Тажриба сизот сувларнинг чуқурлигини (ер юзидан) ўлчашдан иборат бўлсин. Албатта ўлчаш натижасида йўл қўйиладиган хатолар жуда кўп факторларга боғлиқ. Бу факторларнинг ҳар бири маълум хатога олиб келиши мумкин. Лекин, ўлчашлар сони етарлича катта бўлиб, улар бир хил шароитда олиб борилса, ўлчашда кузатилаётган хатолик тасодифий миқдор бўлиб, жуда кўп сондаги, катталиги жиҳатидан сезиларсиз ва ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий хатолар йиғиндисидан иборат бўлади. Ўлчаш натижасида бу хатоларнинг биргаликдаги таъсири сезиларли бўлади, шунинг учун ҳам тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимотини топиш катта аҳамиятга эгадир.

Таъриф. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар шундай $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $B_n > 0$ сонлар кетма-кетлиги мавжуд бўлсаки, $n \to \infty$ да

$$P\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-A_n}{B_n} < x\right\} \to$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

муносабат $x \in (-\infty, \infty)$ да бажарилса, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун *марказий лимит теорема* ўринли дейилади. Бу ҳолда

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-A_n}{B_n}$$

тасодифий миқдор $n \to \infty$ да *асимптотик нормал тақсимланган* дейилади.

2- §. Бир хил тақсимланган боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теорема

Математик кутилиши a ва дисперсияси σ^2 бўлган боғлиқ бўлмаган, бир хил тақсимланган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Умумийликка зарар келтирмасдан, $a = 0$, $\sigma^2 = 1$ деймиз. Қуйидаги тасодифий миқдорларни киритамиз:

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \quad \eta_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Теорема. *Юқорида келтирилган $\{\xi_n\}$ кетма-кетлик учун $n \to \infty$ да*

$$P\{\eta_n < x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

муносабат ихтиёрий x ($x \in R$) да бажарилади,

Исбот. Теоремани исботлаш учун $n \to \infty$ да η_n тасодифий миқдорнинг характеристик функцияси $\varphi_{\eta_n}(t)$ нинг $e^{-\frac{t^2}{2}}$ га интилишини кўрсатиш кифоя. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаганлиги учун, характеристик функциянинг хоссасига кўра

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \tag{1}$$

бу ерда $\varphi(t) = \varphi_{\xi_1}(t)$.

ξ_i тасодифий миқдорлар чекли дисперсияга эга бўлганлиги учун, характеристик функциянинг хоссасига кўра

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \cdot (1 + \varepsilon(t),$$

бу ерда $t \to 0$ да $\varepsilon(t) \to 0$.

Шунингдек,

$$\varphi(t/\sqrt{n}) = 1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2n}\, \varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \tag{2}$$

$$\varphi^n(t/\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2n} \cdot \varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \sim \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n.$$

Шунинг учун ихтиёрий фиксирланган $t \in R$ да (1) ва (2) дан $n \to \infty$ да

$$\varphi_{\eta_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

экани келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

3- §. Боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теорема

Боғлиқ бўлмаган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун

$$M\xi_k = a_k, \qquad D\xi_k = \sigma_k^2$$

бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

$$\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n},$$

$$F_k(x) = P(\xi_k < x), \quad L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 \, dF_k(x),$$

$$f_k(t) = Me^{it\xi_k}, \qquad \varphi_n(t) = Me^{it\eta_n}.$$

Теорема. *Ихтиёрий $\tau > 0$ учун $n \to \infty$ да*

$$L_n(\tau) \to 0 \qquad (1)$$

бўлса, $\{\xi_n\}$ учун марказий лимит теорема ўринли бўлади.

(1) шарт *Линдберг шарти* дейилади. Линдберг шартининг бажарилиши ихтиёрий k да $\frac{1}{B_n}(\xi_k - a_k)$ қўшилувчиларнинг текис равишда кичиклигини таъминлайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$P(|\xi_k - a_k| > \tau B_n) = \int\limits_{|x-a_k| > \tau B_n} dF_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\tau B_n)^2} \int\limits_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 \, dF_k(x)$$

эканлигини эътиборга олинса,

$$P\left\{\max_{1<k<n} |\xi_k - a_k| > \tau B_n\right\} = P\left\{\bigcup_{k=1}^{n} (|\xi_k - a_k| > \tau B_n)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k - a_k| > \tau B_n) \leqslant \frac{1}{\tau^2 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k| > \tau B_n} (x-a_k)^2\, dF_k(x).$$

Агар Линдберг шарти бажарилса, у ҳолда охирги тенгсизликнинг ўнг томони, $\tau > 0$ сон ҳар қандай бўлганда ҳам, $n \to \infty$ да нолга интилади.

Теореманинг исботи. Айтайлик,

$$\varphi_{k,n}(t) = Me^{it\xi_{k,n}} = Me^{it\frac{\xi_k - a_k}{B_n}}$$

бўлсин, у ҳолда $\{\xi_k\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг ўзаро боғлиқ эмаслигини эътиборга олсак,

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{k,n}(t) \tag{2}$$

бўлади.

Теоремани исботлаш учун (1) шарт бажарилганда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

эканини кўрсатиш кифоя. Маълумки, ихтиёрий $\alpha > 0$ ҳақиқий сон учун*

$$\left| e^{i\alpha} - \sum_{k=0}^{l} \frac{(i\alpha)^k}{k} \right| \leqslant \frac{\alpha^{l+1}}{(l+1)!}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

---

*Ҳақиқатан ҳам,

$$\left| e^{i\alpha} - \sum_{k=0}^{l} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \right| = \left| \int_0^{\alpha} \left(e^{ix} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(ix)^k}{k!} \right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\alpha} \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(ix)^k}{k!} \right| dx \leqslant \int_0^{\alpha} \frac{x^l}{l!}\, dx = \frac{\alpha^{l+1}}{(l+1)!}.$$

ва ихтиёрий β $\left(|\beta| \leqslant \frac{1}{2}\right)$ учун

$$\ln(1+\beta) = \beta + R_n, \quad |R_n| \leqslant \beta^2 \tag{4}$$

тенгсизлик ўринли.

Текшириб кўриш мумкинки, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ва n да

$$D\xi_{k,n} \leqslant \varepsilon^2 + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x).$$

Демак, $n \to \infty$ да

$$D\xi_{k,n} \to 0. \tag{5}$$

У ҳолда (3), (5) га асосан барча k ва етарлича катта n учун $|t| \leqslant T < +\infty$ шартни қаноатлантирувчи t ларда

$$|\varphi_{k,n}(t) - 1 \ | = |M(e^{it}\,\xi_{k,n} - 1 - it\xi_{k,n})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^2}{2}\ M\xi^2_{k,n} = \frac{t^2}{2}\, D\xi_{k,n} \to 0.$$

Шунинг учун

$$\ln \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_{k,n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 + (\varphi_{k,n}\ (t) - 1)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{k,n}\ (t) - 1) + R_n \tag{6}$$

формула ўринлидир. Агар (4) ифодани эътиборга олсак, (5), (6) га асосан

$$\left|R_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\varphi_{k,n}(t) - 1\right|^2 \leqslant \max_{1<k<n} \left|\varphi_{k,n}(t) - 1\ \right| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \left| \varphi_{k,n}(t) - 1 \right| \leqslant \max_{1<k<n} \left| \varphi_{k,n}(t) - 1 \right| \cdot \sum_{k=1}^{n} M \frac{t^2 \xi^2_{k,n}}{2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} \max_{1<k<n} \left| \varphi_{k,n}(t) - 1 \right| \to 0.$$

(6) даги биринчи ҳадни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi_{k,n}(t) - 1) = -\frac{t^2}{2} + \rho_n,$$

бу ерда

$$\rho_n = \sum_{k=1}^{n} M \left(e^{it\xi_{k,n}} - 1 - it\xi_{k,n} + \frac{t^2 \xi^2_{k,n}}{2} \right).$$

Энди $n \to \infty$ да $\rho_n \to 0$ лигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$|\rho_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\varepsilon} \left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right| dF_{n,k}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} \left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right| dF_{n,k}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\varepsilon} \frac{|t|^3 x^3}{6} dF_{r,k}(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} t^2 \lambda^2 \, dF_{n,k}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|t|^3 \varepsilon}{6} \sum_{k=1}^{n} M\xi^2_{n,k} + t^2 L_n(\varepsilon).$$

Ихтиёрий $\eta > 0$ учун ва $|t| < T$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай t учун ε ни шундай танлаш мумкинки, $\frac{|t|^3}{6} \varepsilon < \frac{\eta}{2}$ ўринли бўлади. Иккинчи томондан, худди шу ε ларда шундай n_0 мавжудки, $n \geqslant n_0$ бўлганда $t^2 L_n(\varepsilon) < \frac{\eta}{2}$ бўлади. Демак, ихтиёрий $\eta > 0$ ва T учун $t \in [-T, T]$ шартни қаноатлантирувчи t ларда

$$|\rho| < \eta \qquad (7)$$

етарлича катта n лар учун ўринли эканини кўрамиз. Бу эса t нинг ҳар бир $t \in [-T, T]$ чекли оралиғида $\rho_n \to 0$ эканини билдиради. Шундай қилиб, $n \to \infty$ да (6), (7) дан

$$\ln \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2} + \rho_n + R_n \to -\frac{t^2}{2},$$

яъни

$$\varphi_n(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Хусусан, агар $\{\xi_k\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бир хил тақсимланган бўлса, у ҳолда юқоридаги теоремадан 1-§ даги теорема келиб чиқади, ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $B_n^2 = \sigma^2 \cdot n, 0 < \sigma^2 < \infty$ ва $n \to \infty$ да ихтиёрий $\tau > 0$ учун

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_{|x-a| > \tau\sigma\sqrt{n}} (x-a)^2 \, dF(x) \to 0.$$

Айтайлик, бирор $\delta > 0$ сон учун

$$C_k^{2+\delta} = M|\xi_k - a_k|^{2+\delta}$$

мавжуд бўлсин ва

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k^{2+\delta}$$

дейлик.

Теорема (А. М. Ляпунов). *Агар $n \to \infty$ да $\frac{C_n}{B_n^{2+\delta}} \to 0$ шарт бажарилса, $n \to \infty$ да $P(\eta_n < x) \to \Phi(x)$ муносабат $x \in (-\infty.\ \infty)$ да бажарилади.*

Исботи. Ляпунов шарти бажарилганда Линдберг шарти ўринли бўлишини кўрсатамиз. $|x - a_k| \geqslant \tau B_n$

тенгсизликдан ушбу

$$\frac{|x-a_k|}{\tau B_n} \geqslant 1$$

ни ҳосил қиламиз, у ҳолда

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\tau B_n)^\delta}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}|x-a_k|^{2+\delta}\,dF_k(x) \leqslant \frac{C_n}{\tau^\delta\, B_n^{2+\delta}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

бу эса теоремани исботлайди.

Мисол. Қуйидаги боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теореманинг ўринлилиги текширилсин:

$$P(\xi_k=\pm k)=\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}k,\ P(\xi_k=0)=1-k^{-\frac{1}{2}}.$$

Ечиш. Ляпунов шартини текширамиз:

$$M\xi_k=0; \qquad D\xi_k=k^{\frac{3}{2}}=\sigma_k^2; \qquad B_n^2\approx A_1\ n^{5/2}$$

$$c_k^3=k^{5/2}; \qquad C_n=\sum_{k=1}^{n}k^{5/2}\approx A_2\ n^{7/2},$$

Демак,

$$\frac{C_n}{B_n}\sim\frac{A_2 n^{7/2}}{A_1\, n^{15/4}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Шундай қилиб, марказий лимит теорема ўринли экан.

4- §. Локал лимит теорема

Бу параграфда бир хил тақсимланган, боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун локал лимит теоремани келтирамиз. Агар шундай a ва $h>0$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(\xi=a+kh)=1$$

тенглик бажарилса, у ҳолда ξ тасодифий миқдор *h қадамли панжарасимон тақсимотга эга* дейилади.

ξ эса *панжарасимон тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади.

Биноминал ва Пуассон қонунлари бўйича тақсимланган тасодифий миқдорлар панжарасимон тақсимланган тасодифий миқдорларга мисол бўла олади.

Лемма. ξ панжарасимон тақсимланган тасодифий миқдор бўлиши учун бирор $t \neq 0$ да ξ тасодифий миқдор характеристик функциясининг модули бирга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. t тасодифий миқдорни панжарасимон тақсимланган деб фараз қилсак, у ҳолда

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{it(a+kh)} = e^{iat}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ithk},$$

бу ифодада $p_k = P(\xi = a + kh)$, хусусан $t = \frac{2\pi}{h}$ да

$$f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = e^{2\pi i\frac{a}{h}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{2\pi ik} = e^{2\pi i\frac{a}{h}}.$$

Демак, бундан

$$\left|f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1.$$

Энди, фараз қилайлик, бирор $t_1 \neq 0$ да ξ тасодифий миқдор характеристик функциясининг модули бирга тенг бўлсин. Бу эса бирор θ да $f_\xi(t_1) = e^{i\theta}$ эканлигини кўрсатади, ёки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x}\,dF(x) = e^{i\theta}.$$

Охирги тенгликнинг иккала томонини $e^{i\theta}$-га бўлиб,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1x-\theta)}\,dF(x) = 1$$

ни ҳосил қиламиз, натижада

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t_1 x - \theta)\, dF(x) = 1.$$

Бундан

$$\cos(t_1 x - \theta) = 1$$

ёки

$$x = \frac{\theta}{t_1} + k\frac{2\pi}{t_1}$$

келиб чиқади.

Лемма исботланди.

Агар ҳеч бир b ($-\infty < b < \infty$) ва $h_1 > h$ да ξ тасодифий миқдорнинг барча қийматларини $b + kh_1$ кўринишда ифодалаб бўлмаса, у ҳолда h сон тақсимотнинг *максимал қадами* дейилади. Энди $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ боғлиқ бўлмаган, панжарасимон тақсимотга эга бўлган ва бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини қараймиз. У ҳолда $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ йиғинди ҳам панжарасимон тақсимланган бўлиб, унинг қийматларини $\{na + kh\}$ кўринишда ифодалаш мумкин.

Айтайлик, $P_n(k) = P(S_n = na + kh)$ бўлсин.

$$z_{n,k} = \frac{an + kh - A_n}{B_n}; \quad A_n = MS_n, \quad B_n^2 = DS_n = nD\xi_1.$$

Қуйидаги икки теорема Б. В. Гнеденко. теоремасидир.

1-теорема. *Агар $0 < D\xi_1 < \infty$ бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да*

$$\frac{B_n}{h} \cdot P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_{n,k}^2}{2}} \longrightarrow 0$$

муносабат k га нисбатан текис бажарилиши учун h нинг максимал қадам бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Агар h максимал қадам бўлмаса, у ҳолда $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ йиғиндининг энг яқин қийматлари орасидаги фарқ dh дан кичик бўла олмайди, бунда d ушбу S_n йиғинди қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари айирмаларининг h га бўлинганининг энг катта ўмумий бўлувчиси.

Агар h максимал қадам бўлмаса, у ҳолда h нинг барча қийматларида $d > 1$ бўлади.

ξ_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ ва S_n тасодифий миқдорларнинг характеристик функциялари мос равишда

$$f\,(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\, e^{iat + itkh} = e^{ikt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\, e^{itkh},$$

$$f^n\,(t) = e^{iant} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n(k)\, e^{itkh}.$$

Охирги тengликнинг иккала томонини $e^{-iant-ithk}$ ифодага кўпайтириб ҳамда $-\frac{\pi}{h}$ ва $\frac{\pi}{h}$ оралиқда интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{2\pi}{h} P_n\ (k) = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\pi/h} f^n\,(t)\ e^{-iant-itkh}\, dt.$$

Агар $hk = B_n \cdot z_{n,k} + A_n - an$ эканини эътиборга олсак,

$$\frac{2\pi}{h} P_n\ (k) = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} f^{*n}\,(t)\ e^{-itz_{n,k} B_n}\, dt,$$

бу ерда $f^*(t) = e^{-\frac{itA_n}{n}} f\,(t)$.
Интегралда $x = tB_n$ алмаштириш бажариб,

$$\frac{2\pi B_n}{h} P_n\ (k) = \int_{-\frac{\pi B_n}{h}}^{\frac{\pi B_n}{h}} e^{-itz_{n,k}x} f^{x*n}\left(\frac{x}{B_n}\right) dx$$

тенгликка эга бўламиз. Маълумки,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_{n,k}^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iz_{n,k}x-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Энди қуйидаги

$$R_n=2\pi\left[\frac{B_n}{h}P_n(k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_{n,k}^2}{2}}\right]$$

айирмани юқоридан баҳолаймиз. Шу мақсадда уни тўртта қисмга ажратамиз:

$$R_n=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

$$I_1=\int_{-A}^{A}e^{-iz_{n,k}x}\left[f^{*n}\left(\frac{x}{B_n}\right)-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]dx,$$

$$I_2=-\int_{|x|>A}e^{-iz_{n,k}x-\frac{x^2}{2}}dx,\quad I_3=\int_{\varepsilon B_n<|x|<\frac{\pi B_n}{h}}e^{-iz_{n,k}x}f^{*n}\left(\frac{x}{B_n}\right)dx,$$

$$I_4=\int_{A<|x<|\varepsilon B_n}e^{-iz_{n,k}x}f^{*n}\left(\frac{x}{B_n}\right)dx.$$

$A>0$ етарлича катта, $\varepsilon>0$ етарлича кичик сон бўлсин, уларнинг қийматларини кейинроқ танлаймиз. 2- § даги теоремага кўра t нинг ихтиёрий чекли оралиқдаги қийматлари учун $n\to\infty$ да

$$f^{*n}\left(\frac{t}{B_n}\right)\longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

муносабат t га нисбатан текис бажарилади, бундан A сон ҳар қандай бўлганда ҳам $n\to\infty$ да

$$I_1\to 0$$

бўлади. Сўнгра

$$|I_2|\leqslant\int_{|x|>A}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\leqslant\frac{2}{A}e^{-\frac{A^2}{2}}.$$

Демак, A ни танлаш ҳисобига I_2 интегрални исталганча кичик қилиб олишимиз мумкин.

Агар ξ_i лар h максимал қадамли, панжарасимон тасодифий миқдорлар эканлигини эътиборга олсак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $c_0 > 0$ топиш мумкинки,

$$\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \frac{2\pi}{h} - \varepsilon$$

да

$$|f(t)| \leqslant e^{-c_0}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Охирги тенгсизликни эътиборга олган ҳолда

$$|I_3| = \int\limits_{\varepsilon B_n < |x| < \frac{\pi B_n}{h}} \left|f^*\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|^n dx \leqslant e^{-nc_0} 2B_n\left(\frac{\pi}{h} - \varepsilon\right)$$

муносабатга келамиз. Бундан эса $n \to \infty$ да

$$I_3 \to 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Теорема шартига кўра $t = 0$ нуқта атрофида $f^*(t)$ характеристик функцияни қуйидагича

$$f^*(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$$

ёзишимиз мумкин ва $|t| \leqslant \varepsilon$ да

$$|f^*(t)| < 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} < e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Натижада $|x| \leqslant \varepsilon B_n$ бўлганда

$$\left|f^*\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|^n < e^{-\frac{n\sigma^2 t^2}{4B_n}} = e^{-\frac{t^2}{4}}$$

бўлади. Демак,

$$|I_4| \leqslant 2\int\limits_A^{\varepsilon B_n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < 2\int\limits_A^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} dt.$$

A ни танлаш ҳисобига $n \to \infty$ да

$$I_4 \to 0$$

эканлигини кўриш қийин эмас. Теорема исботланди.

Агар боғлиқ бўлмаган $\{\xi_j\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги абсолют узлуксиз тақсимотга эга бўлса, у ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

2-теорема. *$\{\xi_n\}$ боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги умумий $F(x)$ тақсимот функцияга эга бўлсин ва уларнинг ўрта қийматлари ҳамда дисперсиялари чекли бўлиб, бирор n_0 номердан бошлаб $\frac{S_n - A_n}{\sqrt{nD\xi_1}}$ йиғинди $p_n(x)$ зичлик функцияга эга бўлсин.*

$$p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$$

муносабат $n \to \infty$ да $x\,(-\infty < x < \infty)$ га нисбатан текис бажарилиши учун $p_{n_1}(x) < \infty$ тенгсизликни қаноатлантирадиган n_1 соннинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу теорема ҳам биринчи теоремага ўхшаш исботланади.

VII БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. ξ тасодифий миқдор $\lambda = 1$ параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган бўлса, $n \to \infty$ да

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

бўлишини исботланг.

2. $n \to \infty$ да қуйидаги

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^n} \int_0^{1 + t\sqrt{\frac{2}{n}}} z^{\frac{n}{2} - 1} e^{-\frac{nz}{2}} dz \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

муносабат ўринлилигини исботланг.

3. Қуйидаги ξ_k тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда улар учун марказий лимит теорема ўринли бўладими?

а) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$;

б) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}$.

4. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлмаган, бир хил тақсимланган ва $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\eta = \sqrt{n}\,\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

миқдор (0, 1) параметрли асимптотик нормал бўлишини исботланг.

5. Агар $f(x)$ $[0, \infty]$ да аниқланган узлуксиз ва чегараланган функция бўлса, у ҳолда $h > 0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \frac{(nh)^k}{k!} e^{-hn} = f(x + h)$$

бўлишини исботланг.

6. A ҳодисанинг i- тажрибада рўй бериш эҳтимоли p_i га тенг. n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибада A ҳодисанинг рўй беришлари сони μ бўлса,

$$P\left\{\frac{\mu - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k}} < x\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

муносабатнинг бажарилиши учун

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_k q_k = \infty$$

бўлиши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

VIII боб

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Математик статистиканинг асосий масалалари

Статистика сўзи латинча бўлиб, ҳолат, вазият деган маънони англатади. Статистика табиатда ва жамиятда бўладиган оммавий ҳодисаларни ўрганади. Математик статистиканинг вазифаси статистик маълумотларни тўплаш, уларни таҳлил қилиш ва шу асосда баъзи бир хулосалар чиқаришдан иборатдир.

Энди математик статистиканинг асосий масалалари билан танишиб чиқамиз.

1. Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор устида n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказиб, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни олган бўлайлик. $x_1, x_2 \ldots, x_n$ лар бўйича ξ тасодифий миқдорнинг номаълум $F(x)$ тақсимот функциясини баҳолаш математик статистиканинг вазифаларидан биридир.

2. ξ тасодифий миқдор k та номаълум параметрга боғлиқ маълум кўринишдаги тақсимот функцияга эга бўлсин.

ξ тасодифий миқдор устидаги кузатишларга асосланиб, бу номаълум параметрларни баҳолаш математик статистиканинг навбатдаги вазифасидир.

Мисол. Фараз қилайлик, A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p бўлиб, бу p номаълум бўлсин ва уни баҳолаш талаб этилсин. Демак, бу ҳолда ξ тасодифий миқдор 1 ни p эҳтимол билан, 0 ни $1-p=q$ эҳтимол билан қабул қилади деб фараз қилиш мумкин, натижада ξ тасодифий миқдорнинг тақсимоти фақат p параметрга боғлиқ бўлади.

Айтайлик, ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$f(x, a, \sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

берилган бўлсин. Бу ҳолда a маълум, σ номаълум; σ маълум, a номаълум ҳамда a ва σ лар номаълум бўлиши мумкин. Номаълум σ ва a ни баҳолаш талаб этилади. Бу масалани аниқроқ қилиб қуйидагича баён этиш мумкин. ξ тасодифий миқдор устида олиб борилган кузатишлар натижасида $x_1, x_2, \ldots, x_n$ миқдорлар ҳосил қилинган бўлсин, шундай

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

функцияларни топиш керакки, кузатишлар сони етарлича катта бўлганда, бу функцияларни, мос равишда, ξ тасодифий миқдорнинг баҳоланаётган ўрта қиймати a ва дисперсияси σ нинг тақрибий қиймати сифатида қабул қилиш мумкин бўлсин. Баъзи ҳолларда a ва σ нинг тақрибий қийматларини топиш ўрнига тажрибаларнинг натижаларига ва маълум миқдорларга боғлиқ бўлган шундай a', a'' (σ' ва σ'') функцияларни излаш фойдалироқ бўладики, етарлича ишонч (бизни қаноатлантирадиган эҳтимол) билан

$$a' < a < a,'' \qquad \sigma' < \sigma < \sigma''$$

тенгсизликлар ўринли бўлишини таъкидлаш мумкин бўлсин. (a', a''), (σ', σ'') интервалларни a ва σ лар учун *ишончлилик интерваллари* дейилади.

3. Кузатилаётган миқдорларнинг тақсимот қонунлари, баъзи характеристикалари ҳақидаги ҳар қандай фаразларни „*статистик гипотезалар*“ деб аталади. Фараз қилайлик, баъзи мулоҳазаларга асосланиб, ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини $F(x)$ деб ҳисоблаш мумкин бўлсин, шу $F(x)$ функция ҳақиқатан ҳам ξ нинг тақсимот функциясими ёки йўқми деган савол статистик гипотеза ҳисобланади.

У ёки бу гипотезани текшириш учун кузатишлар орқали ёки махсус тажрибалар ўтказиш йўли билан маълумотлар олиб, уларни қилинган гипотезага мувофиқ назарий жиҳатдан кузатилаётган маълумотлар билан таққослаб кўриш керак. Агар олинган маълумотлар ҳақиқатан ҳам назарий жиҳатдан кутилган маълумотлар билан мос келса, у вақтда бу факт ўша гипотезанинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиши билан, уни қабул қилиш учун асос бўлиши мумкин. Агар олинган маълумотлар назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотга етарлича тўғри келмаса, у ҳолда қилинган гипотезани қабул қилишга асос бўлмайди.

Умуман, кузатиш натижалари билан назарий жиҳатдан кутиладиган натижа орасидаги фарқ турлича бўлиши мумкин. Шу фарқни статистик баҳолаш натижасида у ёки бу гипотезани маълум эҳтимол билан қабул қилиш мумкин, яъни шу фарқ катта бўлса, гипотеза қабул қилинмайди, акс ҳолда қабул қилинади, албатта бу фарқ қанчалик бўлганда гипотезани қабул қилиш мумкинлиги масаланинг қўйилишига боғлиқ бўлади.

2- §. Бош тўплам. Танланма тўплам

Фараз қилайлик, бирор территориядаги сизот сувлар чуқурлигини аниқлаш вазифа қилиб қўйилган бўлсин. Бунинг учун ўша территориянинг турли жойларида маълум чуқурликда бир нечта махсус қудуқлар қазилиб, ўлчаш ишлари олиб борилади ва ўша территориядаги сизот сувларни ўртача чуқурлигини аниқлаш мумкин бўлади. Шу территориянинг ҳамма нуқталарида юқоридаги каби ишларни бажариш амалий нуқтаи назардан мумкин бўлмайди. Ёки, маълум пахта майдонидаги кўсакларнинг ўртача оғирлигини аниқлаш масаласини кўрайлик. Бунинг учун ўша майдоннинг турли жойларидан тенг миқдордаги кўсакларни йиғиб олиб, уларнинг оғирликларини ўлчаш ва шу майдондаги кўсакларнинг ўртача оғирлиги тўғрисида фикр юритиш мумкин. Текширишнинг бундай усули *танланма усул* дейилади, йиғиб олинган кузатиш натижалари (территориянинг турли жойларида аниқланган сизот сувнинг чуқурлиги, маълум жойлардан йиғиб олинган кўсаклар) *танланма тўплам* дейилади. Бу мисолларда территориянинг барча нуқталаридаги сизот сувларнинг чуқурликлари, кузатилган пахта майдонидаги барча кўсаклар тўплами *бош тўплам* дейилади. Шундай қилиб, *танланма тўплам* деб тасодифий равишда олинган объектлар тўпламига, *бош тўплам* деб эса танланма тўплам ажратиб олинадиган объектлар тўпламига айтилади.

Бош тўплам ёки танланма тўпламнинг *ҳажми* деб бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, юқоридаги биринчи мисолда сизот сувларнинг чуқурлигини аниқлашда 20 та нуқтада турли вақтларда 5 та ўлчаш олиб борилган бўлса, танланма тўпламнинг ҳажми 100 га тенг бўлади. Бош тўплам ҳажмини N, танланма тўплам ҳажмини эса n билан белгилаймиз. Танланмаларни икки усулда олишимиз мумкин. Агар бош тўпламлардан танланма тўплам ажратиб, бу тўплам устида кузатиш олиб борилгандан сўнг бу танланма тўплам кейинги, танлашдан олдин яна бош тўпламга қайтарилса ва кейин яна танланма олинса ва ҳ. к. бундай танлаш усули *такрорий танланма* дейилади. Агар бош тўпламдан танланма тўплам ажратиб, бу тўплам устида кузатиш олиб борилгандан сўнг бош тўпламга қайтарилмаса, бундай танлаш усули *такрорий бўлмаган танланма* дейилади. Практикада кўпинча такрорий бўлмаган танлаб олиш усулидан фойдаланилади. Албатта, бу иккала танлаб олиш усулида ҳам танланма тўплам бош тўпламнинг барча хусусиятларини сақлаган ҳолда олиниши керак, яъни танланма тўплам бош тўпламга „ўхшаш“ бўлишини таъминлайдиган қилиб танлаш лозим. Агар танланма тўплам бош тўпламни деярли барча хусусиятларини ўзида сақласа, у ҳолда бундай танланма *репрезентатив* (ваколатли) *танланма* дейилади.

Репрезентатив танланма ҳосил қилиш учун биз танланмани тасодифий қилиб тузамиз. Танлаб олиш усули бош тўпламнинг бизни қизиқтирадиган белгисига ҳеч қандай таъсир қилмайди ва бош тўпламнинг ҳар бир элементи танланмада бир хил имконият билан қатнашиши таъминланади. Агар танланма тўплам репрезентативлигини сақламаса, у ҳолда танланма тўплам устида чиқарилган хулосани бош тўпламга татбиқ қилиш нотўғри хулосага олиб келиши мумкин.

Мисол. 1936 йили АҚШ президентлигига Ф. Д. Рузвельт номзоди ва А. М. Ландон номзоди кўрсатилади. Америка журналларидан бири бу икки номзоддан қайси бирининг президент бўлиши мумкинлигини олдиндан айтмоқчи бўлган, бунинг учун бош тўплам сифатида барча сайловчиларни, танланма сифатида хусусий телефонлар қайд қилинган китобдан — маълумотномадан тахминан 4 миллион кишининг фамилиясини ажратади ва уларнинг фикрини билиш учун ҳар бирига хат ёзади ҳамда жавобларни йиғиб кўргач, А. М Ландон президент бўлиши мумкинлигини эълон қилади. Шу вақтда америкалик социологлар Гэллен ва Роупер бош тўпламдан фақат 4 минг сайловчини ажратиб оладилар.

Сайловчиларни ажратиб олишда уларнинг жамиятдаги тутган ўринлари, социал тенгсизликлар, сайловчиларнинг жамиятдаги нисбати каби факторларга эътибор берганлар. Бу социологларнинг танланмасида репрезентативлик сақланган. Натижада улар бу 4 минг сайловчининг фикри бўйича сайловда Ф. Д. Рузвельт сайланиши мумкинлигини айтадилар. Сайлов ўтгандан сўнг Гэллен ва Роупернинг фикри тасдиқланади. Биринчи ҳолда танланма тўпламниг ҳажми катта бўлгани билан репрезентативлик сақланмагани учун нотўғри хулоса чиқаришга асос бўлган. Бу мисолдан кўринадики, танланма тўпламни тўғри танлаган ҳолда бош тўплам ҳақида фикр юритилса, математик статистиканинг хулосалари тўғри бўлади.

3-§. Вариацион қатор. Танланманинг характеристикалари ва тақсимот функцияси

Бирор ξ тасодифий миқдор устида n марта кузатиш ўтказиб,

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \tag{1}$$

натижалар олинган бўлсин. Тажрибалар бир хил шароитда, бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ўтказилган деб фараз қилинади. Маълумки, тажриба натижалари (1), яъни 1-тажриба натижаси x_1 (1-ўринда ёзилган), 2-тажриба натижаси x_2 (2-ўринда ёзилган), ..., n-тажриба натижаси x_n (n-ўринда ёзилган) бўлиб, улар сон қийматлари бўйича тартибсиз жойлашган бўлиши мумкин. Агар (1) ифодани қийматлар бўйича ўсиш (ёки камайиш) тартибида

$$x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^* \text{ (ёки } x_n^* \geqslant x_{n-1}^* \geqslant \ldots \geqslant x_2^* \geqslant x_1^*)$$

каби жойлаштирилса, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ *вариацион қатор* дейилади. (1) танланмадаги x_i. $i=1,\ 2, \ldots, n$ ларни эса *вариантлар* ҳам деб юритилади.

Масалан, 10 туп ғўзанинг поясидаги бўғинлар сонини ҳисоблаш натижаси қуйидаги сонлардан — вариантлардан иборат бўлсин:

11; 13; 15; 14; 16; 12; 11; 12; 13; 12.

Бунга мос вариацион қатор ушбу кўринишда ёзилади:

$$11;\ 11;\ 12;\ 12;\ 12:\ 13;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16.$$

Умуман, (1) да варианталарнинг ҳар бири бир неча марта такрорланиши мумкин: айтайлик, x_1^* варианта n_1 марта, x_2^* варианта n_2 марта, ... , x_n^* варианта эса n_k марта такрорлансин ва $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ бўлсин, n_1, n_2 ... , n_k сонлар *частоталар* дейилади.

Вариацион қатор ва унга мос частоталар қатори ушбу

$$x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^* \qquad n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$$

кўринишда ёзилади.

Бундан кейин, соддалик учун вариацион қатордаги * белгисини қўймаймиз. Агар, анализ қилиниши лозим бўлган танланма тўпламда варианталар сони кўп бўлса, уларни группаларга ажратиб кузатиш олиб бориш мақсадга мувофиқ бўлади. Албатта, варианталарни группаларга сифат жиҳатдан ёки сон жиҳатдан ажратиш мумкин. 1- жадвалда Наманган Давлат педагогика институти математик анализ кафедраси ва география кафедраси аъзолари томонидан Норин — Қорадарё оралигидаги сизот сувларнинг чуқурлигини ўлчаш бўйича (метр ҳисобида) олиб борилган тажрибаларнинг натижалари келтирилган. Биз танланманинг баъзи характеристикаларини ана шу материал асосида тушунтирамиз.

1-жадвал

1- группа

Ойлар / Йиллар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1968	1,67	1,62	1,55	1,49	1,45	1,44	1,40	1,36	1,33	1,34	1,90	1,65
1969	1,66	1,68	1,61	1,55	1,46	1,41	1,36	1,32	1,33	1,36	1,39	1,62
1970	1,65	1,6	1,71	1,08	1,07	1,62	0,97	0,83	0,70	1,19	1,24	1,60
1971	1,75	1,72	2,58	2,69	2,54	1,92	1,58	2,11	2,22	2,66	2,68	2,85
1972	2,91	2,99	2,91	2,97	2,89	2,13	2,03	2,01	2,40	2,85	2,90	2,56
1973	2,60	2,65	2,69	2,71	2,66	2,53	2,20	2,33	2,25	2,34	2,90	2,90
1974	2,00	2,00	2,36	2,45	2,37	1,67	2,68	2,55	1,51	1,56	1,59	1,65
1975	1,69	1,68	1,68	1,82	1,58	1,77	1,76	1,80	1,75	1,85	1,84	1,92
1976	2,11	2,34	2,46	2,36	2,02	1,88	1,79	1,82	1,88	1,92	2,07	2,27
1977	2,20	2,02	2,13	2,13	1,88	1,14	1,20	1,30	1,55	1,84	1,98	2,23

2- группа

Ойлар Йиллар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1968	1,12	1,07	1,01	0,97	0,92	0,91	0,89	0,86	0,44	0,84	0,15	1,15
1969	1,11	1,14	1,08	1,07	0,97	0,88	0,84	0,81	0,81	0,8	0,90	0,92
1970	1,08	1,21	1,20	1,65	1,12	0,47	0,31	0,23	0,23	0,28	0,68	0,98
1971	1,06	0,91	0,80	0,97	0,61	0,38	0,31	0,34	0,23	0,39	0,51	0,59
1972	0,63	0,30	1,28	1,46	1,11	0,78	0,71	0,72	0,57	0,64	0,79	0,81
1973	0,86	0,93	0,98	1,01	1,43	1,21	1,08	1,13	1,10	0,92	0,95	1,02
1974	1,50	1,50	1,60	1,62	1,57	1,58	1,56	1,44	1,39	1,47	1,53	1,57
1975	1,60	1,60	1,58	1,52	1,11	1,07	1,50	0,63	0,96	0,69	0,76	1,86
1976	0,99	1,13	1,22	1,42	1,11	1,63	1,56	1,15	0,64	0,69	0,77	0,99
1977	1,18	1,20	1,46	1,46	0,82	0,76	0,97	0,82	0,99	1,39	0,71	0;97

3- группа

Ойлар Йиллар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1968	1,47	1,42	1,36	1,32	1,2	1,26	1,23	1,20	1,16	1,16	1,18	1,42
1969	1,48	1,51	1,38	1,30	1,27	1,19	1,15	1,02	1,01	1,07	1,11	1,33
1970	1,48	1,56	1,55	1,72	1,11	0,74	0,70	0,69	0,68	0,70	0,93	1,11
1971	1,50	1,75	1,73	1,47	1,14	0,94	0,91	0,91	0,68	0,79	0,91	1,24
1972	1,16	1,16	1,25	2,65	1,21	1,97	2,82	2,67	0,75	0,95	1,10	0,97
1973	1,72	1,72	0,98	1,00	2,49	2,45	2,32	2,37	2,35	2,06	1,10	1,10
1974	1,81	1,82	2,01	2,08	2,01	1,30	1,27	1,16	1,10	1,19	1,25	1,32
1975	1,38	1,36	1,31	1,43	1,31	1,12	0,90	0,68	0,72	0,83	0,90	0,97
1976	1,04	1,15	1,28	1,37	1,28	1,16	1,21	0,69	0,90	1,04	1,12	0,75
1977	1,24	1,58	1,48	1,48	0,87	0,84	0,68	0,62	0,75	1,11	0,65	0,64

4- группа

Ойлар Йиллар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1968	0,79	0,73	0,69	0,65	0,62	0,60	0,60	0,58	0,55	0,55	0,59	0,84
1969	0,80	0,86	0,75	0,72	0,68	0,62	0,57	0,50	0,52	0,55	0,58	0,81
1970	0,99	1,00	0,99	1,93	1,47	1,22	0,85	0,97	1,27	1,39	1,44	1,47
1971	1,50	1,44	2,09	2,06	1,23	0,59	0,54	0,43	0,76	1,61	1,69	1,76
1972	2,10	2,09	1,80	1,61	1,17	0,62	0,51	0,66	0,76	0,98	1,06	1,80
1973	1,89	2,06	2,10	2,12	1,65	1,55	1,39	1,45	1,40	1,51	1,54	1,54
1974	1,68	2,10	2,27	2,23	2,07	2,18	2,12	2,00	1,87	1,93	1,90	2,04
1975	2,10	1,22	2,03	1,98	1,95	0,92	0,81	0,64	0,66	0,69	0,75	0,84
1976	0,96	1,81	1,38	1,63	1,83	3,01	1,15	0,66	1,11	1,39	1,50	1,73
1977	1,95	1,89	1,59	1,59	1,12	0,62	0,51	0,64	0,63	0,79	1,27	1,52

5- группа

Ойлар Йиллар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1968	1,43	1,36	1,29	1,23	1,18	1,16	1,13	1,11	1,08	1,08	1,11	1,28
1969	1,43	1,48	1,37	1,17	1,14	1,12	1,07	1,03	1,03	1,06	1,09	1,11
1970	1,30	1,47	1,49	1,73	1,93	1,00	0,73	0,80	0,91	1,57	1,67	1,76
1971	1,89	1,87	1,57	1,43	2,55	2,87	2,16	2,09	0,48	1,95	2,86	3,18
1972	3,10	2,97	2,86	2,91	2,91	2,35	2,35	2,32	2,60	2,75	2,95	1,63
1973	1,91	1,91	1,65	1,06	1,87	1,75	2,57	1,69	1,58	1,70	2,90	2,90
1974	2,90	2,80	2,81	2,79	2,75	1,95	1,91	1,77	1,69	1,75	1,81	1,86
1975	1,92	2,34	2,27	2,46	1,47	1,54	2,10	1,57	1,60	1,72	1,75	1,86
1976	1,98	2,06	2,12	2,05	1,94	1,94	1,37	1,33	1,26	1,37	1,45	1,49
1977	1,16	1,08	1,35	1,35	1,18	0,85	1,99	1,29	1,31	1,57	1,58	1,45

Бу ўлчашлар беш участкада 10 йил давомида ҳар ойда олиб борилган. Бу танланмани ҳар бир участканинг хусусиятларини эътиборга олиб, бешта группага ажратамиз, ўрганилаётган беш территория ўз хусусияти билан ҳар хил бўлиши мумкин. Шунинг учун ҳам группаларга мос қилиб тузилган жадваллар алоҳида-алоҳида келтирилди.

Ҳар бир частотанинг танланма ҳажмига нисбати шу вариантанинг *нисбий частотаси* дейилади ва

$$W_i=\frac{n_i}{n},\quad i=\overline{1,k}$$

каби белгиланади.

Энди ушбу жадвални тузамиз:

$$x_i:\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k;$$
$$W_i:\ W_1,\ W_2\ \ldots,\ W_k. \tag{2}$$

Кўп ҳолларда (2) жадвал ξ тасодифий миқдорнинг *статистик* ёки *эмпирик тақсимоти* дейилади.

Нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг бўлади:

$$W_1+W_2+\ldots+W_k=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\ldots+\frac{n_k}{n}=$$
$$=\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

1-жадвалнинг 1-группасида берилган варианталарни апрель ойи бўйича эмпирик тақсимотини қуйидагача ёзамиз:

x_i: 1,49; 1,55; 1,08; 2,69; 2,97; 2,71; 2,45; 1,82; 2,36; 2,13;
W_i: 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1

1-жадвалнинг 1-группасида берилган варианталарни сон жиҳатдан группаларга ажратиб кузатиш ҳам мумкин. 2-жадвалда 1-группанинг варианталари сон жиҳатдан 10 та группага ажратиб ёзилган, яъни, 2-жадвални қуйидагича тушуниш мумкин. Бу жадвал 2-устунининг 1-қаторида 0,83 ва 1,046 сонлари, 2-қаторида 3 сони турибди. Бундай ёзув 1-жадвалнинг 1-группасидаги варианталардан 3 таси [0,83; 1,046] сегментда ётишини билдиради. Бундай группаларга ажратишда имкони борича группа оралиғини бир хилда танлаш керак.

2-жадвал

Мет x	0,83 1,046	1,046 1,262	1,262 1,478	1,478 1,694	1,694 1,910	1,910 2,126	2,126 2,342	2,342 2,558	2,558 2,774	2,774 2,990
n	3	6	15	25	15	13	12	9	12	10

2-жадвалда группа узунлигини аниқлашда

$$\Delta x_i=\frac{x_{max}-x_{min}}{10}=\frac{2,99-0,83}{10}=0,216$$

дан фойдаландик. Ҳар бир группа узунлигининг ўртачасини топиб, янги

$$\begin{array}{l} \tilde{x}_i:\ 0,938;\ 1,154;\ 1,370;\ 1,586;\ 1,802;\ 2,018;\ 2,234;\ 2,450;\ 2,666;\ 2,882; \\ n_i:\ 3;\ 6;\ 15;\ 25;\ 15;\ 13;\ 12;\ 9;\ 12;\ 10 \end{array} \tag{3}$$

жадвал ҳосил қилинади. Натижада бу жадвалдан фойдаланиб, 1-жадвалдаги 1-группа варианталари учун эмпирик тақсимотни ҳисоблашимиз мумкин:

$$\tilde{x}_i;\ 0,938;\ 1,154;\ 1,370;\ 1,586;\ 1,802;\ 2,018;\ 2,234;\ 2,450;\ 2,666;\ 2,882 \tag{4}$$

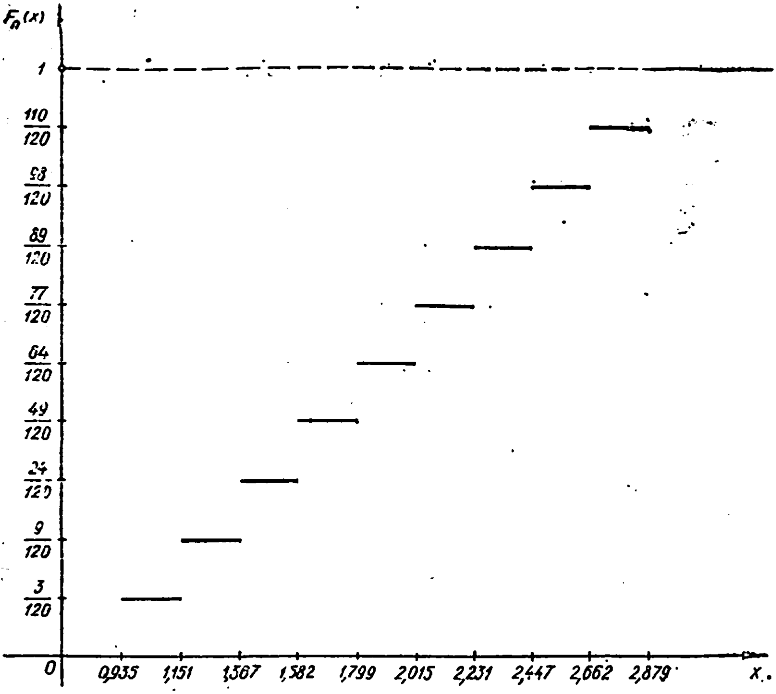
$$W_i;\ \frac{3}{120},\ \frac{6}{120},\ \frac{15}{120},\ \frac{25}{120},\ \frac{15}{120},\ \frac{13}{120},\ \frac{12}{120},\ \frac{9}{120}\ \frac{12}{120},\ \frac{10}{120}.$$

Тўплам варианталарининг бир қисми (улуши) бирор x сондан кичик, тенг ёки ундан катта бўлиши мумкин. Варианталарнинг x сондан кичик бўлган қийматларининг нисбий частотаси

$$F_n(x) = \frac{m(x)}{n}$$

эмпирик тақсимот функция дейилади, бу ерда $m(x)$ x дан кичик бўлган варианталар сони, n эса танланма тўпламнинг ҳажми. (4)- ифодада келтирилган варианталарнинг эмпирик тақсимот функциясини ҳисоблайлик:

$$F_{120}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant 0,933, \\ \frac{3}{120}, & 0,938 < x \leqslant 1,154, \\ \frac{9}{120}, & 1,154 < x \leqslant 1,370, \\ \frac{24}{120}, & 1,370 < x \leqslant 1,586, \\ \frac{49}{120}, & 1,586 < x \leqslant 1,802, \\ \frac{64}{120}, & 1,802 < x \leqslant 2,018, \\ \frac{77}{120}, & 2,018 < x \leqslant 2,234, \\ \frac{89}{120}, & 2,234 < x \leqslant 2,450, \\ \frac{98}{120}, & 2,450 < x \leqslant 2,666, \\ \frac{110}{120}, & 2,666 < x \leqslant 2,882, \\ 1, & 2,882 < x < \infty. \end{cases}$$



32- шакл.

Бу функциянинг графиги 32-шаклда келтирилган.

Равшанки, эмпирик тақсимот функциянинг қийматлари [0,1] кесмага тегишли, монотон ўсувчи ва чапдан узлуксиз ҳамда бу функциянинг сакраш нуқталарининг сони вариацион қаторнинг ҳадлари сонига тенг бўлади. Эмпирик тақсимотни график усулда тасвирлашда полигон ва гистограмма муҳим роль ўйнайди.

Частоталар полигони деб (x_1, n_1); (x_2, n_2); . . .; (x_k, n_k) нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. *Нисбий частоталар полигони* деб (x_1, W_1): (x_2, W_2); . . .; (x_k, W_k) нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади.

(4) ифода учун нисбий частоталар полигони 33-шаклда келтирилган. *Частоталар гистограммаси*

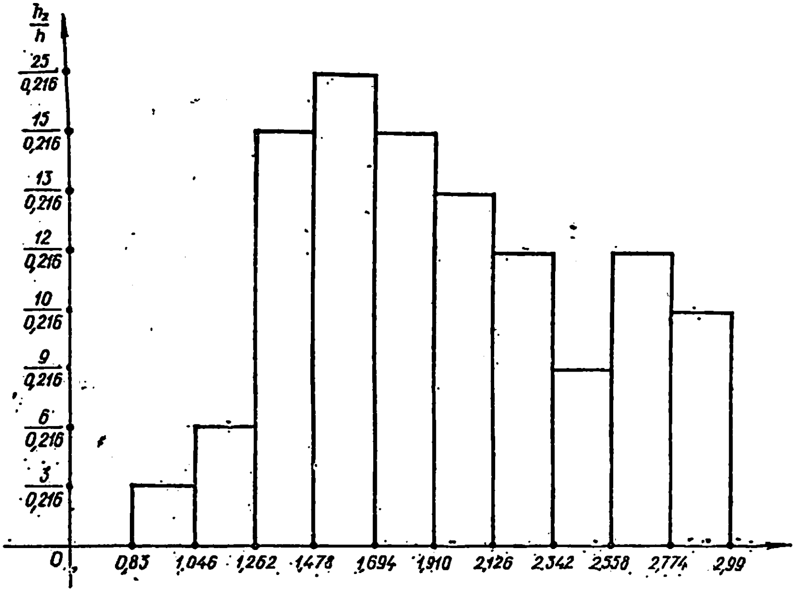
33- шакл.

деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса n_i дан иборат бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонасимон фигурага айтилади, бу ерда h—бош тўпламнинг бизни қизиқтирадиган белгисининг кузатиладиган қийматларини ўз ичига олган интервал узунлиги, n_i эса i-интервалга тушган варианталар сони. Кўп ҳолларда частота гистограммаси белги узлуксиз бўлган ҳолда қўлланади.

Шаклдан кўринадики, гистограмманинг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланманинг ҳажмига тенг бўлади.

2-жадвалда келтирилган натижалар гистограммаси 34-шаклда берилган, бу ерда $h = 0{,}216$.

Нисбий частоталар гистограммаси асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{W_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонасимон фигурадан иборат.



34- шакл.

Математик статистика ўрганадиган масалалардан бири, юқорида айтиб ўтганимиздек, тақсимотнинг турли сонли характеристикаларини баҳолашдан иборат.

(1) *танланманинг ўрта арифметик қиймати* деб,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (5)$$

га айтамиз.

1-жадвалдан сизот сувлар чуқурлигининг 1968 – 1977 йиллар бўйича ўрта арифметик қиймати мос равишда $\bar{x}_1=1,27$; $\bar{x}_2=1,11$; $\bar{x}_3=1,16$; $\bar{x}_4=1,47$; $\bar{x}_5=1,78$; $\bar{x}_6=1,79$; $\bar{x}_7=1,80$; $\bar{x}_8=1,40$; $\bar{x}_9=1,50$; $\bar{x}_{10}=1,28$

га тенг.

Умумий 1—5-группанинг ўртача арифметиги эса $\bar{x}=$ $=1,457$ га тенг. Агар тасодифий миқдор устида олиб борилган кузатиш натижалари $x_1, \ldots, x_k$ мос равишда

$n_1, \ldots, n_k$ марта такрорланса, у ҳолда ўрта арифметик қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

Мисол. (3) да берилган вариацион қаторнинг ўрта арифметигини ҳисоблаймиз:

$$\bar{x} = \frac{3\cdot 0,938 + 6\cdot 1,154 + 15\cdot 1,370 + 25\cdot 1,586 + 15\cdot 1,802}{120} +$$
$$+ \frac{13\cdot 2,018 + 12\cdot 2,234 + 9\cdot 2,450 + 12\cdot 2,666 + 10\cdot 2,882}{120} \approx 1,963.$$

Ўртача арифметик қиймат танланма тўплам учун сон белгининг қайси қиймати характерли эканлигини кўрсатади, лекин у танланма тўпламни характерлаш учун етарли эмас, чунки танланма тўпламнинг ҳадларини ўзгарувчанлиги тўпламнинг асосий хусусияти ҳисобланади. Юқоридаги масалаларда вариантаnarнинг қийматлари уларнинг ўртача арифметигидан озми-кўпми тарқоқ бўлиши мумкинлигини кўрдик. Шу тарқоқликни характерлаш учун танланма дисперсия тушунчасини киритамиз.

(1) танланманинг *танланма дисперсияси* деб,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \qquad (6)$$

ифодага айтилади.

Мисол. 1-жадвалда келтирилган кузатишларни йиллар бўйича дисперсиясини ҳисоблайлик. 1-жадвалдан фойдаланиб, $(x_i - \bar{x})^2$ айирма учун 3-жадвални тузамиз ва (6) формула асосида

$$\sigma_1^2 = 0,141; \quad \sigma_2^2 = 0,1156; \quad \sigma_3^2 = 0,1936; \quad \sigma_4^2 = 0,5776;$$
$$\sigma_5^2 = 0,7744; \quad \sigma_6^2 = 0,3969; \quad \sigma_7^2 = 0,2025; \quad \sigma_8^2 = 0,25;$$
$$\sigma_9^2 = 0,2704; \quad \sigma_{10}^2 = 0,2304 \qquad (7)$$

ифодаларга эга бўламиз. Умумий 5 та группа учун танланма дисперсияни 3-жадвал ёрдамида $\sigma = 0{,}3136$ эканини топамиз.

Танланма дисперсиядан мусбат ишора билан олинган квадрат илдиз

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i}} \tag{8}$$

га *тақсимотнинг ўртача квадратик хатоси (ўртача квадратик оғиши)* дейилади.

(6) ва охирги ифолага ўхшаб, *бош танланманинг дисперсияси ва ўртача квадратик хатосини* киритиш мумкин:

$$\sigma_Б^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i (x_i - \overline{x})^2}{N}, \qquad \sigma_Б = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i (x_i - \overline{x})^3}{N}},$$

бу ерда $N = \sum\limits_{i=1}^{s} n_i$.

3-жадвал

$(x_i - \overline{x})^2$ *1-группа*

йиллар / ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,152	0,362	0,240	0,078	0,656	0,277	0,040	0,084	0,372	0,846
2	0,115	0,324	0,177	0,062	0,740	1,464	0,04	0,079	0,706	0,548
3	0,073	0,250	0,302	1,232	0,810	1,277	0,313	0,078	0,922	0,722
4	0,044	0,193	0,64	1,488	0,846	1,416	0,422	0,032	0,740	0,722
5	0,029	0,122	0,008	1,145	0,757	1,232	0,325	0,137	0,270	0,270
6	0,026	0,090	0,212	0,202	0,548	0,122	0,017	0,130	0,144	0,020
7	0,014	0,062	0,036	0,012	0,168	0,062	0,774	0,160	0,084	0,006
8	0,64	0,044	0,109	0,410	0,292	0,053	0,562	0,425	0,102	0,000
9	0,25	0,048	0,084	0,563	0,212	0,384	0,084	0,202	0,144	0,593
10	0,36	0,062	0,001	1,416	0,302	1,144	0,058	0,194	0,177	0,314
11	0,01	0,078	0,006	1,164	1,232	1,254	0,044	0,176	0,325	0,490
12	0,137	0,260	0,194	1,877	1,232	0,608	0,022	0,276	0,593	0,902
Σ	1,850	1,758	2,003	9,950	7,795	0,295	2,703	2,925	4,476	5,435

2- группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,026	0,000	0,006	0,168	1,325	0,865	0,090	0,04	0,280	0,01
2	0,044	0,001	0,002	0,314	0,230	0,865	0,090	0,04	0,137	0,006
3	0,073	0,001	0,002	0,449	0,250	0,672	0,040	0,632	0,078	0,032
4	0,096	0,001	0,240	0,25	0,102	0,608	0,032	0,014	0,006	0,032
5	0,130	0,020	0,001	0,740	0,449	0,130	0,053	0,084	0,152	0,212
6	0,137	0,529	0,476	1,188	1,000	0,144	0,048	0,109	0,190	0,270
7	0,152	0,080	0,728	1,346	1,145	0,504	0,058	0,01	0,004	0,696
8	0,176	0,090	0,846	1,277	1,124	0,436	0,130	0,592	0,122	0,217
9	0,194	0,090	0,346	1,538	1,464	0,476	0,168	0,194	0,740	0,053
10	0,194	0,053	0,774	1,166	1,300	1,145	0,109	0,518	0,656	0,012
11	0,16	0,044	0,230	0,922	0,980	0,706	0,073	0,404	0,533	0,096
12	0,017	0,036	0,032	0,707	0,941	0,593	0,053	0,212	0,260	0,096
Σ	1,398	0,938	4,196	10,064	10.397	7,144	0,765	2,166	2,726	1,128

3- группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,036	0,137	0,102	0,001	0,384	0,005	0,000	0,000	0,212	0,002
2	0,020	0,160	0,160	0,078	0,384	0,005	0,000	0,002	0,122	0,040
3	0,006	0,073	0,152	0,068	0,281	0,044	0,008	0,048	0,048	0,010
4	0,002	0,360	0,314	0,757	0,624	0,078	0,048	0,048	0,017	0,010
5	0,000	0,026	0,002	0,102	0,325	0,490	0,044	0,008	0,048	0,168
6	0,000	0,006	0,176	0,281	0,036	0,436	0,25	0,078	0,116	0,194
7	0,002	0,002	0,212	0,314	1,085	0,287	0,281	0,250	0,084	0,360
8	0,006	0,008	0,221	0,314	0,706	0,334	0,410	0,518	0,056	0,436
9	0,014	0,010	0,230	0,624	1,061	0,314	0,490	0,463	0,66	0,287
10	0,014	0,001	0,212	0,462	0,689	0,533	0,373	0,325	0,212	0,029
11	0,010	0,000	0,529	0,314	0,008	0,476	0,302	0,810	0,144	0,384
12	0,020	0,048	0,002	0,053	0,656	0,476	0,230	0,185	0,562	0,410
Σ	0,130	0,832	1,999	2,616	7,672	4,020	2,54	2,735	2,370	2,283

4-группа

йиллар / ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,240	0,096	0,003	0,001	0,162	0,014	0,014	0,492	0,292	0,449
2	0,302	0,062	0,026	0,009	0,096	0,073	0,090	0,032	0,960	0,372
3	0,348	0,130	0,029	0,384	0,000	0,096	0,221	0,397	0,014	0,096
4	0,397	0,152	0,592	0,348	0,029	0,109	0,185	0,281	0,469	0,026
5	0,436	0,105	0,096	0,057	0,000	0,020	0,073	0,302	0,109	0,436
6	0,462	0,240	0,004	0,774	1,346	0,058	0,144	0,230	2,280	0,593
7	0,462	0,293	0,096	0,865	1,613	0,160	0,102	0,348	0,122	0,410
8	0,490	0,372	0,036	1,082	1,254	0,116	0,040	0,578	0,766	0,422
9	0,533	0,348	0,012	0,504	1,040	0,152	0,005	0,548	0,152	0,240
10	0,533	0,314	0,053	0,020	0,640	0,078	0,017	0,504	0,012	0,240
11	0,476	0,281	0,078	0,048	0,519	0,062	0,010	0,422	0,000	0,096
12	0,194	0,090	0,096	0,084	0,000	0,062	0,058	0,314	0,053	0,058
Σ	4,874	2,482	1,122	3,169	6,701	1,087	0,978	4,508	4,702	3,198

5-группа

йиллар / ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,202	0,102	0,020	0,176	1,742	0,014	1,21	0,270	0,230	0,014
2	0,006	0,137	0,096	0,160	1,416	0,014	1,00	0,840	0,314	0,040
3	0,000	0,676	0,109	0,010	1,166	0,020	1,020	0,757	0,384	0,005
4	0,002	0,004	0,325	0,002	1,277	0,533	0,980	1,124	0,302	0,005
5	0,010	0,001	0,593	1,166	1,277	0,006	0,902	0,005	0,193	0,010
6	0,017	0,000	0,026	0,360	0,360	0,002	0,022	0,020	0,194	0,185
7	0,022	0,002	0,185	0,476	0,325	0,608	0,012	0,490	0,137	0,504
8	0,029	0,006	0,130	0,384	0,292	0,010	0,001	0,029	0,032	0,000
9	0,040	0,066	0,062	0,980	0,672	0,044	0,012	0,040	0,058	0,001
10	0,040	0,002	0,168	0,230	0,941	0,008	0,002	0,102	0,017	0,084
11	0,029	0,000	0,260	1,932	1,369	1,232	0,000	0,122	0,002	0,090
12	0,000	0,000	0,960	2,756	0,022	1,232	0,004	0,212	0,000	0,029
Σ	0,217	0,937	2,333	8,633	11,092	3,724	5,160	4,054	1,991	1,967

Демак, (7), (8) дан сизот сувлар чуқурлигининг ўрта арифметигидан ўртача квадратик оғиши

$\sigma_1 = 0,375$; $\sigma_2 = 0,34$; $\sigma_3 = 0,44$; $\sigma_4 = 0,76$; $\sigma_5 = 0,88$;

$\sigma_6 = 0,63$; $\sigma_7 = 0,45$; $\sigma_8 = 0,5$; $\sigma_9 = 0,52$; $\sigma_{10} = 0,48$; $\sigma = 0,56$

каби бўлади.

Танланма тўпламнинг ўрта арифметик қиймати ва танланма дисперсиясидан бошқа характеристикалари ҳам мавжуд, шулардан баъзи бирларини келтирамиз. Энг катта частотага эга бўлган варианта *мода* дейилади ва μ_0 билан белгиланади.

(3) ифодада келтирилган варианталар учун мода $\mu_0 = 1,586$ га тенг, чунки унга мос частота — энг катта частота $n_4 = 25$ дир.

Вариацион қаторни варианталар сони тенг бўлган икки қисмга ажратадиган варианта вариацион қаторнинг *медианаси* дейилади ва m_e каби белгиланади. Агар варианталар сони тоқ, яъни $n = 2k+1$ бўлса, у ҳолда $m_e = x_{k+1}$ бўлади, варианталар сони жуфт, яъни $n = 2k$ бўлса, у ҳолда

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

деб олинади.

(3) ифоданинг медианаси

$$m_e = \frac{1,802 + 2,018}{2} = 1,910$$

га тенг.

Вариация узунлиги $x_{\max} - x_{\min}$ (ёки $x_n^* - x_1^*$) формула ёрдамида аниқланади.

1- жадвалдаги қийматлар учун вариация узунлиги

$$R = 2,99 - 0,23 = 2,76$$

га тенг.

Вариация коэффициенти деб

$$v = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\ \%$$

ифодага айтилади.

1- жадвалда келтирилган сизот сувлар чуқурлиги тақсимотининг вариация коэффициенти

$$V = \frac{0,56}{1,457} \cdot 100\% = 38,43\%.$$

Вариация коэффицентининг катталиги, тарқоқлик катталигини билдиради. Ҳақиқатан ҳам, 1- жадвалдаги сизот сувларнинг чуқурлиги анча катта тарқоқликка эга, шунинг учун ҳам кутилганидек вариация коэффициенти $V=38,43\%$ — сезиларли қийматга эга.

Тақсимотнинг *асимметрия* (қийшайганлик) *коэффициенти* деб

$$A_s = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^3}{\sigma^3}$$

ифодага айтилади.

Бу коэффициент ёрдамида тақсимотни носимметриклигини аниқланади. Симметрик тақсимот функциялар учун $A_s = 0$.

3- жадвалдан фойдаланиб, $(x_i - \overline{x})^3$ ларни ҳисоблаб, 4- жадвалда келтирамиз.

4- жадвал

I- группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,059	0,166	0,118	0,022	1,443	0,531	0,001	0,244	0,227	0,779
2	0,039	0,185	0,741	0,002	1,772	0,636	0.000	0,022	0,592	0.405
3	0,020	0,000	0,163	1,368	1,443	0,001	0,176	0,022	0.885	0,614
4	0,009	0,085	−0,001	1,816	1,685	0,779	0,275	0,074	0,636	0,614
5	0,004	0,043	−0 001	1,225	1,368	0,669	0,185	0,006	0,141	0,141
6	0,005	0,003	0,097	0,091	0,043	0,405	−0,002	0,051	0,055	−0,003
7	0,002	0,016	−0,000	0,001	0,016	0,069	0,681	0,047	0.024	−0,001
8	0,512	0,009	−0,036	0.262	0,022	0,157	0,426	0,006	0.033	0,000
9	0,125	0,011	−0,024	0,422	0,238	0,097	−0.024	0,043	0,055	0,020
10	0,216	0,016	0,000	1,685	1.223	0,166	0,014	0,091	0,074	0,176
11	0,001	0,022	0,001	1,702	1,405	1,368	−0,009	0,085	0,185	0 343
12	0,051	0,133	0,085	2,571	0,474	1,368	−0,003	0,141	0,466	0,804
Σ	1,043	1,230	2,468	1,259	11,124	6,236	−1,714	0,866	3.368	3,891

2- группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	−0,004	0,000	−0,000	−0,069	−1,521	−0,04	−0,027	0,008	−0,133	−0,001
2	−0,009	0,000	0,000	−0,176	−0,110	−0,593	−0,027	0,008	−0,051	−0,000
3	−0,020	0,000	0,000	−0,301	−0,125	−0,551	−0,008	0,006	−0,026	0,006
4	−0,030	0,000	0,118	−0,125	−0,033	−0,474	−0,006	0,002	−0,000	0,006
5	−0,047	−0,003	0,000	−0,636	−0,301	−0,047	−0,012	−0,024	−0,059	−0,067
6	−0,051	−0,012	−0,328	−1,295	−1,000	−0,055	−0,011	−0,036	0,002	−0,140
7	−0,019	−0,020	−0,684	−1,161	−1,225	−0,358	−0,014	0,001	0,000	−0,030
8	−0,074	−0,027	−0,779	−1,448	−1,191	−0,281	−0,047	−0,456	−0,043	−0.097
9	−0,085	−0,027	−0,779	−1,907	−1,178	−0,328	−0,069	−0,035	−0,636	−0,024
10	−0,085	−0,012	−0,681	−1,260	−1,482	−0,255	−0,036	−0,338	−0,531	0,001
11	−0,064	−0,009	−0,110	−0,850	−0,970	−0,593	−0,020	−0,262	−0,389	−0.030
12	−0,002	−0,007	−0,006	−0,681	−0,913	−0,456	−0,012	0,097	−0,133	−0,030
Σ	−0,529	−0,116	−3,181	−0,335	−0,047	−4,158	−0,288	0,693	−1,994	−0,439

3- группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,007	0,051	0,033	0,000	−0,238	−0,000	0,000	0,000	−0,037	0,000
2	0,003	0,064	0,064	0,022	−0,238	−0,07	0,000	0,000	−0,043	0,003
3	0,000	0,020	0,059	0,011	−0,149	−0,531	0,003	−0·001	−0,011	0,001
4	0,0	0,007	0,176	0,000	0,658	−0,493	0,022	0,000	−0,002	0,001
5	0,000	0,004	−0,000	−0,036	−0,185	0,34	0,009	−0,001	−0,011	−0,069
6	0,000	0,000	−0,074	−0,000	0,149	0,287	−0,125	−0,022	−0,039	−0,035
7	−0,000	0,000	−0,097	−1,176	0,125	0,149	−0,149	−0,025	−0,024	−0,216
8	−0,000	−0,001	−0,104	−0,176	−0,593	0,195	−0,262	−0,873	−0,531	−0,294
9	−0,002	−0,001	−0,110	−0,483	−1,093	0,176	−0,349	−0,314	−0,126	−0,148
10	−0,002	0,000	−0,094	−0,314	−0,572	−0,389	−0,227	−0,185	−0,097	−0,005
11	−0,001	−0,000	−0,012	−0,176	−0,474	−0,328	−0,166	−0,729	−0,055	−0,282
12	0 003	0,011	−0,000	−0,012	−0,531	−0,328	−0,110	−0,030	−0,422	−0,262
Σ	0,009	0,154	−0,164	−1,343	−2,039	−0,991	−1,342	−1,830	−1,548	−1,302

4- группа

йиллар / ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	−0,118	−0,030	−0,005	−0,000	0,033	0,001	−0,002	−0,343	−0,157	−0,801
2	0,166	−0,016	0,004	−0,000	0,030	0,020	0,027	−0,006	0,030	0,227
3	−0,205	−0,047	−0,005	−0,238	0,000	0,030	0,104	0,250	−0,002	0,030
4	−0,250	−0,059	0,456	−0,205	−0,005	0,036	0,030	0,149	0,002	0,030
5	−0,287	−0,030	0,030	0,014	0,000	−0,000	−0,003	−0,020	0,166	−0,004
6	−0,314	−0,118	0,000	−0,681	−1,561	−0,014	0,055	−0,110	3,443	−0,287
7	−0,314	−0,157	−0,030	−0,604	−2,048	−0,064	−0,033	−0,205	−0,043	−0,456
8	−0,343	−0,227	−0,007	−1,125	−1,405	−0,040	0,003	−0,439	−0,593	−0,262
9	−0,889	−0,205	0,001	−0,858	−1,061	−0,059	0,000	−0,405	−0,059	−0,275
10	−0,889	−0,176	0,012	0,003	−0,512	−0,022	0,002	−0-358	−0,001	−0,178
11	−0,828	−0,149	0,022	0,011	−0,873	−0,016	0,001	−0,275	0,000	0,000
12	−0,085	−0,027	−0,030	0,024	0,000	−0,016	0,014	−0,176	0,012	0,014
Σ	−3,19	−1,265	0,442	−3,861	−9,137	−0,163	0,319	−1,212	2,808	−0,801

5- группа

йиллар / ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,003	0,033	0,003	0,074	1,300	0,002	1.334	0,141	0,110	−0,003
2	0,000	0,051	0,030	0,064	1,685	0,002	1,000	1,830	0,176	−0,008
3	0,000	0,175	0,036	0,001	1,260	−0,003	1,630	0,658	0,238	0,000
4	−0,000	0.000	0,185	0,000	1,443	−0,389	0,970	1,191	0,166	0,000
5	−0,001	0,000	0,456	1,260	1,443	0,000	0,857	0,000	0,085	−0,001
6	−0,002	0,000	−0,004	0,216	0,219	0,000	0,033	0,003	0,085	−0,019
7	−0,003	0,000	−0,030	0,328	0,185	0,474	0,001	0,343	0,051	0,355
8	−0,005	−0,000	−0,047	0,288	0,157	0,001	0,000	0,005	−0,006	0,000
9	−0,003	−0,000	−0,016	−0,970	0,551	0,009	−0,001	0,008	−0,014	0,000
10	−0,007	−0,000	0,069	0,110	0,918	−0,001	−0,000	0,033	−0,002	0,024
11	−0,005	0,000	0,133	2,686	1,602	1,368	0,000	0,043	−0,000	0,027
12	0,000	0,000	0,216	4,574	−0,008	1,368	0,000	0,097	0,000	0,005
Σ	−0,028	0,257	0,982	8,963	11,752	2,831	5,222	3,352	0,871	0,389

4- жадвалдан фойдаланиб, 1968 — 1977 йиллар учун Норин — Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги тақсимотининг асимметрия коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$A_s = \frac{0,033}{0,1756} \approx 0,18.$$

Демак, асимметрия коэффициенти анча кичик, бу эса тақсимот функциянинг симметриклигини маълум даражада ифодалайди, чунки практикада $A_s < 0,25$ бўлганда симметриклик унча бузилмаган деб қаралади.

Тақсимотнинг эксцесси деб

$$e_k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^4}{\sigma^4} - 3$$

ифодага айтилади.

3- жадвалдан фойдаланиб, $(x_i - \overline{x})^4$лар учун 5- жадвални тузамиз.

5-жадвал

I-группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,023	0,057	0,058	0,006	1,630	0,430	0,002	0,007	0,138	0,716
2	0,013	0,106	0,031	0,004	2,144	0,547	0,002	0,006	0,479	0,299
3	0,005	0,062	0,092	1,518	1,630	0,656	0,098	0,006	0,849	0,522
4	0,000	0,037	0,230	0,215	2,005	0,716	0,178	0,031	0,547	0,522
5	0,000	0,015	0,000	1,501	1,518	0,573	0,606	0,001	0,073	0,731
6	0,001	0,008	0,045	0,041	0,015	0,300	0,000	0,019	0,021	0,000
7	0,021	0,004	0,001	0,000	0,003	0,028	0,600	0,017	0,007	0,000
8	0,410	0,000	0,011	0,168	0,003	0,085	0,716	0,026	0,010	0,000
9	0,062	0,002	0,008	0,316	0,148	0,045	0,007	0,015	0,021	0,352
10	0,130	0,391	0,000	2,005	1,309	0,092	0,003	0,041	0,031	0,098
11	0,000	0,006	0,000	1,355	1,574	1,518	0,002	0,037	0,106	0,240
12	0,010	0,068	0,037	3,523	0,370	1,518	0,000	0,073	0,352	0,814
Σ	0,684	0,757	0,513	0,652	1,349	6,508	1,214	0,279	2,653	4,296

2-группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,001	0,000	0,000	0,028	1,749	0,748	0,008	0,002	0,068	0,000
2	0,002	0,000	0,000	0,098	0,053	0,748	0,008	0,002	0,019	0,000
3	0,005	0,000	0,000	0,202	0,062	0,452	0,002	0,001	0,006	0,001
4	0,009	0,000	0,058	0,062	0,010	0,370	0,001	0,000	0,000	0,001
5	0,017	0,000	0,000	0,547	0,202	0,017	0,003	0,007	0,023	0,045
6	0,019	0,280	0,277	1,412	1,000	0,021	0,023	0,012	0,000	0,073
7	0,023	0,005	0,531	1,811	1,311	0,254	0,003	0,000	0,000	0,009
8	0,031	0,008	0,716	0,630	1,262	0,190	0,017	0,331	0,015	0,045
9	0,037	0,008	0,716	2,364	2,144	0,227	0,028	0,037	0,547	0,010
10	0,037	0,003	0,600	1,360	1,689	1,311	0,012	0,269	0,430	0,000
11	0,026	0,002	0,053	0,849	0,960	0,498	0,005	0,168	0,284	0,009
12	0,000	0,001	0,000	0,500	0,885	0,352	0,003	0,045	0,068	0,009
Σ	0,207	0,308	2,900	9,864	11,328	5,186	0,113	0,893	1,460	0,195

3-группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,001	0,019	0,010	0,000	0,148	0,000	0,000	0,000	0,045	0,000
2	0,000	0,026	0,026	0,006	0,148	0,000	0,000	0,000	0,015	0,002
3	0,000	0,005	0,022	0,004	0,079	0,005	0,000	0,201	0,201	0,000
4	0,000	0,130	0,098	0,000	0,573	0,389	0,006	0,201	0,000	0,000
5	0,000	0,001	0,000	0,012	0,106	0,240	0,002	0,000	0,002	0,028
6	0,000	0,000	0,031	0,079	0,001	0,190	0,062	0,006	0,013	0,037
7	0,000	0,000	0,045	0,098	1,176	0,079	0,079	0,081	0,007	0,130
8	0,000	0,000	0,000	0,098	0,498	0,113	0,168	0,269	0,430	0,190
9	0,000	0,000	0,053	0,390	1,126	0,098	0,240	0,214	0,130	0,079
10	0,000	0,000	0,045	0,214	0,474	0,284	0,138	0,106	0,448	0,001
11	0,000	0,000	0,280	0,098	0,370	0,227	0,092	0,656	0,021	0,148
12	0,000	0,002	0,000	0,003	0,430	0,227	0,053	0,034	0,316	0,168
Σ	0,002	0,183	0,610	1,002	5,503	1,851	0,840	1,768	1,628	0,782

4-группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,576	0,924	0,000	0,000	0,026	0,000	0,000	0,240	0,079	0,202
2	0,092	0,004	0,001	0,000	0,009	0,005	0,008	0,001	0,009	0,138
3	0,121	0,017	0,001	0,178	0,000	0,009	0,049	0,158	0,000	0,009
4	0,158	0,023	0,352	0,021	0,001	0,012	0,034	0,079	0,000	0,009
5	0,190	0,011	0,009	0,003	0,000	0,000	0,005	0,092	0,012	0,001
6	0,214	0,576	0,000	0,528	1,811	0,009	0,021	0,053	0,199	0,190
7	0,214	0,085	0,009	0,748	2,601	0,026	0,010	0,121	0,015	0,352
8	0,240	0,138	0,001	1,170	1,574	0,013	0,002	1,334	0,498	0,168
9	0,284	0,121	0,000	0,254	1,082	0,023	0,000	0,300	0,023	0,178
10	0,284	0,098	0,003	0,000	0,410	0,006	0,000	0,254	0,014	0,058
11	0,227	0,079	0,006	0,002	0,269	0,004	0,000	0,178	0,000	0,000
12	0,037	0,008	0,009	0,007	0,000	0,004	0,003	0,098	0,003	0,003
Σ	2,635	2,084	0,391	2,973	7,781	0,106	0,132	2,912	0,852	1,307

5-группа

йиллар ойлар	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1	0,000	0,010	0,000	0,031	3,036	0,000	1,464	0,073	0,053	0,000
2	0,000	0,019	0,009	0,026	2,005	0,000	1,000	0,781	0,098	0,002
3	0,000	0,457	0,012	0,000	1,360	0,000	1,041	0,573	0,148	0,000
4	0,000	0,000	0,106	0,000	1,630	0,284	0,960	1,262	0,092	0,000
5	0,000	0,000	0,352	1,360	1,630	0,000	0,814	0,000	0,037	,0000
6	0,000	0,000	0,001	0,130	0,200	0,000	0,000	0,000	0,037	0,034
7	0,000	0,000	0,034	0,227	0,105	0,370	0,000	0,210	0,019	0,254
8	0,001	0,000	0,017	0,148	0,085	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000
9	0,002	0,000	0,004	0,960	0,452	0,194	0,000	0,002	0,003	0,000
10	0,002	0,000	0,028	0,053	0,885	0,000	0,000	0,010	0,000	0,007
11	0,001	0,000	0,068	3,733	1,874	1,518	0,000	0,015	0,000	0,008
12	0,000	0,000	0,130	7,593	0,000	1,518	0,000	0,045	0,000	0,001
Σ	0,006	0,586	0,769	14,260	13,194	3,885	4,280	3,002	0,488	0,306

5- жадвалдан фойдаланиб, 1968 — 1977 йиллар учун Норин — Қорадарё оралиғидаги сизот сувларнинг чуқурлиги тақсимотининг эксцесси

$$e_k = -\frac{148,46}{600\cdot 0,098} - 3 = -0,48$$

эканлигини топамиз.

4- §. Гливенко теоремаси

1- *лемма.* Агар E ҳодиса чексиз сондаги $E_1, E_2, \dots$ ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришига эквивалент бўлса, яъни $E = E_1\cdot E_2, \dots$, ҳамда ушбу $\dots E_{n+1} \subset E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_1$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).$$

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, E_1 ҳодисани биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг йиғиндиси шаклида қуйидаги икки усулда ёзиш мумкин:

$$E_1 = E_1\overline{E}_2 + E_2\overline{E}_3 + \dots + E_{n-1}\overline{E}_n + E_n$$

ҳамда

$$E_1 = E_1\overline{E}_2 + E_2\overline{E}_3 + \dots + E_n\overline{E}_{n+1} + \dots + E.$$

Бундан

$$P\{E_1\} = P(E_1\overline{E}_2) + \dots + P(E_{n-1}\overline{E}_n) + P(E_n)$$

ва

$$P(E_1) = P(E_1\overline{E}_2) + \dots + P(E_n\overline{E}_{n+1}) + \dots + P(E).$$

Охирги икки тенгликни таққослаб, $P(E) = P(E_n) - \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k\overline{E}_{k+1})$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бироқ тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди яқинлашувчи қаторнинг қолдиқ ҳади бўлгани сабабли

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).$$

2- *лемма*. Агар чекли ёки чексиз $E_1, E_2, \ldots, E_n,$ ... кетма-кетликдаги ҳодисаларнинг ҳар бири бирга тенг эҳтимол билан рўй берса, у ҳолда уларнинг биргаликда рўй бериши эҳтимоли ҳам бирга тенг.

Исботи. Аввало иккита E_1 ва E_2 ҳодисани қараймиз, улар учун $P(E_1) = P(E_2) = 1$ бўлсин. Аммо

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$$

ва

$$P(E_1 + E_2) = 1$$

бўлгани сабабли

$$P(E_1 E_2) = 1.$$

Бундан, математик индукция методига асосланиб,

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n) = 1$$

муносабатни қаноатлантирувчи ихтиёрий n та ҳодиса учун

$$P(E_1 E_2 \ldots, E_n) = 1$$

тенглик бажарилишини кўрсатиш мумкин.

Айтайлик, $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ ҳодисалар берилган бўлсин ҳамда улар учун

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n) = \ldots = 1$$

бўлсин. Бироқ

$$E_1 E_2 E_3 \ldots = E_1 (E_1 E_2)(E_1 E_2 E_3) \ldots$$

тенглик равшан ҳамда тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир кўпайтувчиларнинг аввалгиси кейингисини ўз ичига олади, у ҳолда 1- леммага кўра

$$P(E_1 E_2 E_3 \ldots) = \lim_{n\to\infty} P(E_1 E_2 \ldots E_n).$$

Бу тенглик 2- леммани исботлайди.

В. И. Гливенко теормаси. *ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ бўлсин, ξ тасодифий миқдор устида ўтказилган n та ўзаро боғлиқ бўлмаган кузатишлар натижаларининг эмпирик тақсимот функцияси $F_n(x)$ бўлсин, у ҳолда $n \to \infty$ да*

$$P\{\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| \to 0\} = 1.$$

Исботи. Ушбу

$$F(x-0) = F(x) \leqslant \frac{k}{r} \leqslant F(x+0) \quad (k = \overline{1,r})$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларнинг энг кичигини $x_{r,k}$ билан белгилаймиз. Айтайлик, $A = \{\xi < x_{r,k}\}$ бўлсин. У ҳолда $P(A) = F(x_{r,k})$. Бироқ A ҳодисанинг рўй бериш частотаси $F_n(x_{r,k})$ бўлгани сабабли Борель теоремасига асосан

$$P\{F_n(x_{r,k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x_{r,k})\} = 1. \qquad (1)$$

Айтайлик,

$$E_k^r = \left\{F_n(x_{r,k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x_{r,k})\right\}$$

ва

$$E^r = E_1^r E_2^r \ldots E_r^r$$

бўлсин. У ҳолда E^r ҳодиса $n \to \infty$ да ушбу муносабатга эквивалент:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant r} |F_n(x_{r,k}) - F(x_{r,k})| \to 0.$$

Бироқ (1) га кўра

$$P(E_1^r) = P(E_2^r) = \ldots = P(E_r^r) = 1.$$

У ҳолда 2- леммага асосан $P(E^r)=1$. Агар $E = E^1E^2E^3\ldots$ деб олсак, у ҳолда яна 2- леммага мувофиқ $P(E) = 1$.

S ҳодиса $n \to \infty$ да

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \to 0$$

эканлигини билдирсин. Ихтиёрий $x \in (x_{r,k}, x_{r,k+1})$ учун қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$F_n(x_{r,k}+0) \leqslant F_n(x) \leqslant F_n(x_{r,k+1})$$

ҳамда

$$F(x_{r,k}+0) \leqslant F(x) \leqslant F(x_{r,k+1}),$$

бироқ

$$0 \leqslant F(x_{r,k+1}) - F(x_{r,k}+0) \leqslant \frac{1}{r},$$

бундан

$$F_n(x_{r,k}+0)-F(x_{r,k+1})\leqslant F_n(x)-F(x)\leqslant$$
$$\leqslant F_n(x_{r,k+1})-F(x_{r,k}+0)$$

хулосани чиқарамиз, яъни

$$|F_n(x)-F(x)|\leqslant\max_{1<k<r}|F_n(x_{r,k})-F(x_{r,k})|+\frac{1}{r}$$

ва, демак,

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|\leqslant\max_{1<k<r}|F_n(x_{r,k})-F(x_{r,k})|+\frac{1}{r}.$$

Бироқ r — ихтиёрий сон, у ҳолда охирги тенгсизликдан $E\subset S$ келиб чиқади. Демак,

$$P\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|\to 0\right\}=1.$$

Шу билан теорема исбот бўлди. Гливенко теоремаси $F_n(x)$ эмпирик тақсимот функциянинг $F(x)$ назарий тақсимот функцияга интилишини кўрсатади, холос. Шунинг учун

$$D_n=\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|$$

айирманинг тақсимот функциясини топиш масаласи жуда муҳимдир. Бу масалани А. Н. Колмогоров 1933 йилда ҳал қилган. Биз қуйида шу теоремани исботсиз келтирамиз.

Колмогоров теоремаси. *Агар $F(x)$ тақсимот функция узлуксиз бўлса, у ҳолда $n\to\infty$ да*

$$P(\sqrt{n}D_n<z)\to K(z)=\begin{cases}0, & \text{агар } z\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2}, & \text{агар } z>0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

муносабат ўринли бўлади.

z аргументнинг $0{,}28\leqslant z\leqslant 3$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматларида $K(z)$ функция учун махсус жадвал тузилган*.

---

* Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Изд. физ-мат. лит., М., 1961 г.

IX боб

СТАТИСТИК БАҲОЛАР. РЕГРЕССИЯ ТЕНГЛАМАСИ

1-§. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар

Танланма тўплам бош тўпламнинг қисмидан иборат бўлгани учун бош тўплам тўғрисида танланма тўплам асосида фикр юритиш статистик характердаги хатоларга олиб келади.

Статистик хато катталиги бош тўпламдан тасодифий равишда олинган танланмага кирган кузатишлар сонига боғлиқ бўлади. Шунинг учун кузатишлар сони қанча катта бўлса, статистик хато шунча кичик бўлади. Бундан ташқари ўрганилаётган белги ўзгарувчан бўлса, бу статистик хатонинг кўпайишига олиб келади, шунинг учун бош тўпламнинг ҳадлари оз ўзгарувчан бўлса, статистик хато шунча кичик бўлади. Асосий масала — статистик хатоларни иложи борича камайтиришдан иборатдир. Одатда кузатувчи ихтиёрида бош тўпламдан олинган n та кузатиш натижаси $x_1, x_2, \ldots, x_n$ бўлади. Бу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ миқдорларни ўзаро боғлиқ бўлмаган бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Назарий тақсимот номаълум параметрининг баҳосини топиш учун кузатиш натижаларининг шундай функциясини топиш керакки, бу функция баҳоланадиган параметрнинг тақрибий қийматини берсин. Назарий тақсимот номаълум параметрининг *статистик баҳоси* деб, кузатиш натижаларининг ихтиёрий функциясига айтилади. Масалан, тақсимот математик кутилмасини баҳолаш учун ушбу

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

функция хизмат қилишини кўргандик.

Статистик баҳолар баҳоланаётган параметрга „яхши“ яқинлашиши учун статистик баҳолар айрим шартларни қаноатлантириши талаб қилинади. Фараз қилайлик, назарий тақсимотнинг θ номаълум параметрининг статистик баҳоси $\theta^* = \theta^* (x_1, \ldots, x_n)$ бўлсин. Агар $M\theta^* = \theta$ бўлса, θ^* *силжимаган баҳо* дейилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} M\theta^* = \theta$ бўлса, θ^* *асимптотик силжимаган* баҳо дейилади. Табиийки, $D\theta^*$ нинг кичик бўлишини таъминлашга ҳаракат қилишимиз керак. Шу мақсадда эффектив баҳо тушунчасини киритамиз. θ параметр учун θ_1^* ва θ_2^* баҳолар таклиф этилган деб фараз қилайлик. $M\theta_1^* = \theta$, $M\theta_2^* = \theta$ бўлсин. Агар $M(\theta_1^* - \theta)^2 < M(\theta_2^* - \theta)^2$ бўлса, у вақтда θ_1^* баҳо θ_2^* баҳога қараганда *эффективроқ* дейилади. Берилган n ҳажмли танланма тўпламдаги энг кичик дисперсияга эга бўлган статистик баҳо *эффектив баҳо* дейилади, яъни бундай баҳо учун дисперсия аниқ қуйи чегара $\inf\limits_{\theta_i^*} M(\theta_i^* - \theta)^2$ га эришади.

Умуман айтганда, эффектив баҳо мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Агар

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(\theta^*(x_1, x_2, \ldots x_n) - \theta)^2}{\inf\limits_{\theta_i^*} M(\theta_i^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \theta)^2} = 1$$

бўлса, θ^* баҳо *асимптотик эффектив баҳо* дейилади.

Агар кузатишлар сонини чексиз орттирилганда $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ баҳо баҳоланаётган θ параметрга эҳтимол бўйича яқинлашса, яъни ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун ушбу

$$P\{|\theta^* - \theta| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ баҳо θ параметрнинг *асосли баҳоси* дейилади. Бундан, θ^* нинг дисперсияси $n \to \infty$ да нолга интилса, баҳо асосли бўлиши келиб чиқади. Маълумки, катта сонлар қонунига асосан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун $n \to \infty$ да

$$P\{|\bar{x} - M\xi| > \varepsilon\} \longrightarrow 0.$$

Демак, $\bar{x}$ баҳо $M\xi$ учун асосли баҳо бўлади ва шу билан бирга $M\xi$ учун силжимаган баҳо ҳам бўла олади, чунки

$$M\bar{x} = M\xi.$$

Хусусан, агар ξ нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда $\bar{x}$ $M\xi$ учун эффектив баҳо бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси учун баҳо сифатида танланма дисперсияни кўрайлик. $m = M\xi$, $\sigma_1^2 = D\xi$ деб белгилаймиз:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i - m - (\bar{x} - m)]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - \frac{2}{n}(\bar{x} - m)\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) + \frac{n}{n}(\bar{x} - m)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - \frac{2}{n}(\bar{x} - m)(\bar{x} - m)\,n + (\bar{x} - m)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\bar{x} - m)^2. \qquad (1)$$

Агар $M(\bar{x} - m)^2 = D\bar{x} = \frac{1}{n}\sigma_1^2$ лигини эътиборга олсак,

$$M\sigma^2 = \frac{1}{n}M\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - M(\bar{x} - m)^2 = \sigma_1^2 - \frac{1}{n}\sigma_1^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma_1^2. \qquad (2)$$

Демак, танланма дисперсия $D\xi$ учун силжимаган баҳо бўлолмас экан, шу сабабли танланма дисперсия учун баҳо сифатида

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \qquad (3)$$

ифода қаралади, чунки (2) га асосан

$$M\frac{n}{n-1}\sigma^2 = \sigma_1^2,$$

яъни (3) $D\xi$ учун силжимаган баҳо бўлар экан. Танланма дисперсиянинг $n \to \infty$ да $D\xi$ учун асосли баҳо эканлигини кўрсатишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

2- §. Параметрларни баҳолаш. Ишончлилик интервали

Биз 1- § да ўрта қиймат ва дисперсия учун баҳо сифатида танланма ўрта қиймат ва танланма дисперсияни кўрдик. Энди фараз қилайлик, θ^* ξ тасодифий миқдор $F(x)$ назарий тақсимот функциясининг параметри бўлсин, яъни $F(x) = F(x, \theta^*)$. У ҳолда

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, \theta^*) = m_1(\theta^*).$$

Танланма ўрта қиймат

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n^*(x)$$

эса кузатиш натижалари x_i ларнинг функцияси, бу ерда $F_n^*(x)$ — эмпирик тақсимот функция. Натижада битта θ^* номаълум параметрни топиш учун битта $m_1(\theta^*) = \bar{x}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси бир нечта номаълум параметрга боғлиқ бўлсин. Агар танланма тўплам асосида $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$ параметрларни баҳолаш масаласи қўйилса, у ҳолда ξ тасодифий миқдор $F(x, \theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*)$ назарий тақсимотининг k- моменти

$$m_j(\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j dF(x, \theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*),$$
$$j = \overline{1, k}$$

ва ξ нинг k- тартибли эмпирик моменти тенглаштирилиб, k номаълумли k та тенглама ҳосил қилинади. Бу тенгламани ечиб, $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$ параметрлар топилади.

Номаълум параметрни бундай усулда топиш *моментлар усули* дейилади. Умуман айтганда, параметрларни бундай усулда баҳолаш сезиларли хатоликка олиб келади ва баҳо асимптотик эффектив баҳо бўлавермайди, лекин бу усулнинг соддалигини эътиборга олиб, практикада баъзан шу усулдан ҳам фойдаланилади.

Параметрларни баҳолашнинг яна бир усули *ҳақиқатга максимал яқинлик усулидир*. Агар $F(x, \theta)$ тақсимот функция $p(x, \theta)$ зичлик функцияга эга бўлса, у ҳолда

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta)\, p(x_2, \theta) \dots p(x_n, \theta)$$

функция *ҳақиқатга ўхшашлик функцияси* дейилади. Фиксирланган $x_1, x_2, \dots x_n$ ларда L ни θ нинг функцияси деб қараймиз. Ҳақиқатга максимал даражада яқинлик методига асосан, θ нинг баҳоси θ^* сифатида θ аргументнинг L функция максимал қийматга эришадиган қиймати (агар у мавжуд бўлса), яъни

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

тенгламанинг ечими $\theta^* = \theta^*(x_1, \dots, x_n)$ олинади. Бу ерда L функция ўрнига $\ln L$ функция олинди, чунки бу иккала функция битта нуқтада максимумга эришади.

Хусусан, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ параметрлар баҳоланадиган бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \qquad i = \overline{1, k}$$

тенгламалар системасининг ечимлари θ_i^* $(i = 1, 2, ., . k)$ лар θ_i учун баҳо сифатида олинади. Маълум шартларда $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ тенгламанинг θ^* ечими мавжуд ва бу ечим номаълум параметр θ учун асосли, асимптотик эффектив ва асимптотик нормал баҳо бўлади*.

Мисол. Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор a, σ_1^2 номаълум параметрли нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин. Ҳақиқатга максимал яқинлик методи билан a, σ_1^2 параметрлар учун баҳо тузайлик. Бизнинг ҳолда

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a, \sigma_1^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma_1)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln \sigma_1^2 - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

---

* Бу тасдиқнинг исботини Г. Крамернинг „Математические методы статистики“, Мир, М., 1975 г, китобидан топиш мумкин.

Сўнгги ифодани a ва σ_1^2 бўйича дифференциаллаб, қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0,$$

$$-\frac{n}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_1^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = 0.$$

Булардан

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x},$$

$$\sigma_1^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2.$$

Бу баҳоларнинг асосли эканлигини аввал кўргандик.

Эндиги масала $|\theta - \theta^*|$ айирмани баҳолашдан иборат. Ихтиёрий $\delta > 0$ сон олайлик. Статистик методлар θ^* баҳо $|\theta - \theta^*| < \delta$ тенгсизликни албатта қаноатлантиради деб тасдиқлашга тўла имкон бермайди, шу сабабли бу тенгсизлик амалга ошиши мумкин бўлган эҳтимол ҳақида гапириш мумкин. Агар $|\theta - \theta^*| < \delta$ тенгсизлик ν эҳтимол билан ўринли, яъни $P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \nu$ бўлса, у ҳолда ν эҳтимол θ параметр θ^* баҳосининг *ишончлилик эҳтимоли* дейилади. Одатда баҳонинг ишончлилик эҳтимоли олдиндан берилган бўлади ва бирга яқин қилиб олинади. Фараз қилайлик,

$$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \nu$$

бажарилган бўлсин, у ҳолда бу ифода

$$P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \nu$$

билан тенг кучлидир, яъни $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ оралиқнинг θ номаълум параметрини ўз ичига олиш эҳтимоли ν га тенг.

Номаълум θ параметрни берилган ν ишончлилик эҳтимоли билан ўз ичига олган $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ оралиқ *ишончлилик интервали* дейилади. ξ тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин. Бу тақсимотнинг a параметри учун σ_1^2 маълум ва σ_1^2 номаълум бўлган ҳолларда ишончлилик оралиқлари тузамиз.

1. Айтайлик, σ_1^2 маълум бўлсин, a учун ишончлилик оралиғи тузамиз. a номаълум параметрнинг баҳоси сифатида, аввал кўрганимиздек, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ ни оламиз, бу ерда $x_1, \ldots, x_n$ лар боғлиқ эмас ва (a, σ_1^2)-нормал қонун бўйича тақсимланган. Демак, бу ҳолда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_k$$

$\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$-параметрли нормал қонун бўйича тақсимланган бўлади. Шунинг учун

$$P\left\{\frac{|\bar{x}-a|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \delta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ишончлилик эҳтимоли (коэффициенти) ν берилса, нормал қонун жадвали (иловадаги 1-жадвал) дан δ_ν ни шундай танлаймизки,

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta_\nu}^{\delta_\nu} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi(\delta_\nu) \qquad (1)$$

бўлсин, бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Лаплас функцияси. У ҳолда

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\nu, \quad \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\nu\right) \qquad (2)$$

оралиқ a параметр учун ишончлилик эҳтимоли ν бўлган ишончлилик оралиғи бўлади, яъни

$$P\left\{\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\nu < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\nu\right\} = P\left\{\frac{|\bar{x}-a|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \delta_\nu\right\} = \nu.$$

Мисол. Фараз қилайлик, сизот сувларнинг чуқурлиги (1- жадвал, 1969 йил учун) нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин ва нормал қонуннинг дисперсияси сифатида $\sigma_1^2 = 0,116$ (танланма дисперсия) ни оламиз. Тақсимотнинг ўрта қийматини $\gamma = 0,95$ ишончлилик эҳтимоли билан баҳолаш талаб этилсин.

Ечиш. (1) га асосан

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{60}}{0,34}\right) = 0,95.$$

Иловадаги 1- жадвалдан қуйидагини топамиз:

$$\frac{\delta\sqrt{60}}{0,34} = 1,96,$$

бундан

$$\delta = \frac{1,96\cdot 0,34}{\sqrt{60}} \approx 0,086$$

У ҳолда $\bar{x} = 1,11$ лигини эътиборга олсак, (2) га кўра a учун ишончлилик оралиғи (1,024; 1,196) бўлади.

2. Фараз қилайлик, σ^2 номаълум бўлсин, a ни баҳолаймиз. Қуйидаги

$$T = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}}$$

тасодифий миқдорларни қараймиз, бу ерда $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma$. Бу ҳолда T озодлик даражаси $n - 1$ бўлган Стьюдент қонуни бўйича* тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, унинг зичлик функцияси

$$S(x, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

бўлади.

---

* Г. Крамер, Математические методы статистики, „Мир", М., 1975 г.

$S(x, n)$ функция x бўйича жуфт бўлгани учун

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-a}{\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}}\right| < \delta_\nu\right\} = 2\cdot\int_0^{\delta_\nu} S(t, n)\,dt = \nu$$

ёки

$$P\left(\bar{x} - \delta_\nu\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \delta_\nu\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = \nu.$$

Демак, ν эҳтимол билан

$$\bar{x}-\delta_\nu\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \delta_\nu\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

бўлади.

Мисол. Фараз қилайлик, 1-жадвалда 1970 йил учун келтирилган сизот сувларнинг чуқурлиги нормал қонун бўйича тақсимланган бўлиб, σ^2 номаълум бўлсин. a ни баҳолайлик.

Ечиш. Маълумки, 1970 йил учун

$$n = 60;\quad \bar{x} = 1{,}16;\quad \bar{\sigma} = \frac{60}{59}\cdot 0{,}44 = 0{,}447.$$

Агар $\nu = 0{,}95$ бўлса, у ҳолда иловадаги 6-жадвалга кўра $\delta_\nu = 2{,}001$. У ҳолда (3) га кўра $1{,}045 < a < 1{,}275$.

Бу ҳолда шуни таъкидлаб ўтиш керакки, агар танланманинг ҳажми кичик бўлса, у ҳолда a учун баҳо олишда маълум хатоликка эга бўлишимиз мумкин. ξ белги σ_1^2 дисперсияга эга бўлган ихтиёрий қонун бўйича тақсимланган (нормал бўлиши шарт эмас) бўлса ҳам, унинг ўрта қиймати a ни баҳолаш мумкин*. Агар σ_1^2 номаълум бўлса, у ҳолда σ_1^2 ўрнига $\bar{\sigma}^2$ ифодани қабул қилиш мумкин. Лекин ўзаро боғлиқ бўлмаган x_i тасодифий миқдорларнинг ҳар бири $F(x)$ қонун бўйича тақсимланган бўлиб, $\sigma_1^2 < \infty$ бўлса, уларнинг $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ йиғиндиси $n \to \infty$ да нормал қонун бўйича тақсимланган

---

* Г. Крамер. Математические методы статистики, „Мир", М., 1975 г.

бўлади. Шу сабабли, юқорида a учун чиқарилган (2), (3) ишончлилик оралиқлари етарлича катта n ларда нормал қонундан фарқли тақсимот учун ҳам ўринли бўлади, чунончи келтирилган мисолларимизда сизот сувлар чуқурлиги тақсимоти нормал қонунга бўйсунмаса ҳам a учун топилган ишончлилик оралиғи ўринлидир. x_1, $x_2, \ldots, x_n$ танланма нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин, у ҳолда тақсимотнинг σ_1^2 параметри учун ишончлилик оралиғини тузайлик.

Ҳақиқатан ҳам, бизга маълумки,

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{n\sigma^2}{\sigma_1^2} \tag{4}$$

тасодифий миқдор озодлик даражаси $n-1$ бўлган χ^2 қонун билан тақсимланган тасодифий миқдор бўлади.

Берилган ν ишончлилик эҳтимоли бўйича χ_1^2, χ_2^2 ларни

$$\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} K(n-1,\ x)\ dx=\nu$$

тенгламадан топамиз. Бу ерда $K(n-1,\ x)$ — χ^2 тақсимотнинг зичлик функцияси. χ_1^2 ва χ_2^2 ларни аниқлаш учун қўшимча

$$\int_{0}^{\chi_1^2} K(n-1,x)\,dx=\frac{1-\nu}{2},\qquad \int_{\chi_2^2}^{\infty} K(n-1,x)\,dx=\frac{1-\nu}{2}$$

шартлар бажарилишини талаб қиламиз, у ҳолда ν ва n маълум бўлганда χ^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясига (иловадаги 5- жадвал) қараб, χ_1^2, χ_2^2 лар аниқланади. Натижада

$$P\left(\chi_1^2<\frac{n\sigma^2}{\sigma_1^2}<\chi_2^2\right)=\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} K(n-1,\ x)\ dx=\nu.$$

Демак, ушбу $\left(\frac{n\sigma^2}{\chi_2^2},\ \frac{n\sigma^2}{\chi_1^2}\right)$ оралиқ σ_1^2 учун ν эҳтимолли ишончлилик оралиғи бўлади.

3-§. Статистик гипотезалар

Кўп ҳолларда ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси номаълум бўлиб, бу тақсимот функцияни ξ устида олиб борилган кузатиш асосида ҳосил қилинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ миқдорлар ёрдамида аниқлаш масаласи қўйилади. 1- жадвалда келтирилган Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлигининг эмпирик тақсимот функциясини тузиш мумкин. Шу асосда Норин—Қорадарё оралиғида сизот сувлар чуқурлиги қандай тақсимотга бўйсунишини аниқлаш масаласи жуда муҳимдир.

Номаълум тақсимотнинг кўриниши ёки маълум тақсимотларнинг параметрлари ҳақида қилинган фаразлар *статистик гипотезалар* дейилади. Масалан, қуйидаги гопотезалар статистик гипотеза бўлади: 1) Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувларнинг чуқурлиги нормал қонун бўйича тақсимланган; 2) нормал қонунга бўйсунадиган иккита танланманинг дисперсиялари тенг. Биринчи ҳолда номаълум тақсимот функция тўғрисида, иккинчисида эса маълум тақсимотнинг номаълум параметри ҳақида гипотеза олдинга сурилади. Олдинга сурилган гипотеза текшириш натижасида қабул қилиниши ёки рад этилиши мумкин. Асосий гипотезадан ташқари қарама-қарши гипотеза ҳам олдинга сурилади. *Асосий гипотеза* деб илгари сурилган H_0 гипотезага, *конкурент (альтернатив) гипотеза* деб, асосий гипотезага зид бўлган H_1 гипотезага айтилади. Масалан, асосий гипотеза деб „Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги нормал қонунга бўйсунади“ деган гипотеза олинсин. Бу ҳолда:

$$H_0 : F\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

$$H_1 : F\,(x) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\ du.$$

Фақат битта даъвони ўз ичига олган гипотеза *оддий гипотеза,* биттадан ортиқ сондаги даъволарни ўз ичига олган гипотеза *мураккаб гипотеза* дейилади. Гипотеза олдинга сурилгандан сўнг уни текшириш керак бўлади, кузатиш натижалари гипотезани тасдиқласа, гипотеза қабул қилинади, акс ҳолда эса рад этилади.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — кузатиш натижалари бўлсин. Бу сонларни R^n фазо нуқтасининг координаталари деб қарашимиз мумкин. R_n ни кесишмайдиган иккита R_{n_1} ва R_{n_2} қисмларга ажратамиз: $R_n = R_{n_1} \cup R_{n_2}$, $R_{n_1} \cap R_{n_2} = \varnothing$. Агар $(x_1, \ldots, x_n) \in R_{n_1}$ бўлса, гипотеза қабул қилинади, агар $(x_1, \ldots, x_n) \in R_{n_2}$ бўлса, гипотеза рад этилади.

R_{n_2} тўплам *критик соҳа* дейилади. Демак, гипотезани текшириш қоидаси критик соҳани танлашга тенг кучлидир. $R_{\text{кр}}$ *критик нуқта* деб критик соҳани гипотезанинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқтага айтилади. Агар тўғри гипотеза рад этилса, қилинган хатоликни *биринчи тур хатолик*, агар нотўғри гипотеза қабул қилинса, қилинган хатолик *иккинчи тур хатолик* дейилади. Демак, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар R_{n_2} соҳага тегишли бўлса, биринчи тур хатоликка йўл қўйилади. Агар критик соҳа берилган бўлса, у ҳолда биринчи ва иккинчи тур хатоликларнинг эҳтимолини ҳисоблаш мумкин. Бу ҳақда тўхталиб ўтирмаймиз.

Айтайлик, ξ тасодифий миқдорнинг номаълум $F_\xi(x)$ тақсимот функцияси сифатида $F(x)$ қабул қилинсин, яъни

$$H_0 : F_\xi(x) = F(x); \qquad H_1 : F_\xi(x) \neq F(x).$$

Шу гипотезани текшириш талаб қилинади. Тажрибада кузатилган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ миқдорларни k та бўлакка ажратамиз ва

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \tag{1}$$

частоталарни тузамиз. Шу билан бирга бирор мулоҳаза асосида

$$n_1^*, n_2^*, \ldots, n_k^* \tag{2}$$

назарий частоталар аниқланган бўлсин. Агар бу иккала қаторнинг бир-биридан фарқи кичик бўлса, у ҳолда танланманинг тақсимот функцияси сифатида (2) частоталарнинг тақсимот функциясини қабул қилиш мумкин. Кўпинча, $F(x)$ гипотетик тақсимот функцияга асосланиб n_i^* топилади, чунки $P_i = \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} dF(x)$, бу ерда $[\alpha_i, \beta_i]$ — i - интервал, $n_i^* = nP_i$, n — танланма ҳажми. Энди

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i} \qquad (3)$$

миқдорни тузамиз, у ҳолда $\chi^2_{\text{кузат}}$ миқдор $n \to \infty$ да озодлик даражаси $k - p - 1$ бўлган χ^2 тақсимот бўйича тақсимланган бўлади, бу ерда p — $F(x)$ тақсимот функциянинг параметрлари сони. Масалан, нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор учун $p = 2$, Пуассон қонуни ва экспоненциал қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорлар учун $p = 1$.

$F(x)$ гипотетик тақсимот функцияга асосан (3) дан $\chi^2_{\text{кузат}}$ топилади ва сўнгра *муҳимлилик даражаси* деб аталмиш α эҳтимол ва озодлик даражаси бўйича иловадаги жадвалга асосан $\chi^2_{\text{кр}}$ аниқланади. Агар

$$P(\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}) \geqslant \alpha$$

тенгсизлик бажарилса, H_0 гипотеза қабул қилинади ва $F(x)$ нинг a, σ^2 параметрлари сифатида $\bar{x}$, $\bar{\sigma}^2$ қабул қилинади, акс ҳолда H_1 гипотеза қабул қилинади.

Практикада деярли $nP_i \geqslant 10$ бўлган ҳолда χ^2 мезон (критерий) — Пирсон мезони ишлатилади. Кўп ҳолларда муҳимлилик даражаси $\alpha = 0{,}8$; $\alpha = 0{,}9$; $\alpha = 0{,}95$ деб олинади.

Мисол. 2-жадвалда келтирилган танланманинг тақсимоти муҳимлилик даражаси $\alpha = 0{,}95$ бўлганда нормал қонунга интилиш-интилмаслиги текширилсин.

Ечиш. Пирсоннинг χ^2 мезонидан фойдаланамиз. Фараз қилайлик, Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги нормал қонун бўйича тақсимланган ва $M\xi \approx \overline{x}$, $D\xi \approx \sigma_1^2$ бўлсин. Маълумки, $k = 10$; $\overline{x} = 1,96$; $\sigma_1^2 = 0,3136$. Иловадаги 1- жадвалдан фойдаланиш мақсадида $\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_1}$ алмаштириш бажариб, 2-жадвалдан

$$n_i^* = nP_i = n \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} d\Phi(x)$$

лигини эътиборга олган ҳолда, 6-жадвални ҳосил қиламиз.

6-жадвал

Частота	n_i	
2,0214 1,0635	3	0,096 0,588 3,588
1,635 1,248	6	0,05 0,52 5,48
1,248 0,862	15	1,713 4,284 10,716
0,862 0,476	25	7,634 10,516 14,484
0,476 0,089	15	0,441 2,82 17,82
0.089 0.297	13	1,612 5,456 18,456
0,297 0,683	12	1,025 4,056 16,056
0,683 1,070	9	1,084 3,72 12,72
1.070 1,456	12	1,518 3,576 8,424
1,456 1,842	10	5,496 5,296 4,704

6- жадвалдан $\chi^2_{\text{кузат}} = 20,669$, иловадаги 5-жадвалдан $\alpha = 0,95$ ва озодлик даражаси $\nu = 7$ бўлган ҳолда критик нуқта 2,17 га тенг, демак,

$$\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр.}}.$$

Бу эса $H_0 : F(x) = \Phi(x)$ гипотезани рад қилишга асос бўлади. Баъзи ҳолларда

$$t_{\chi^2} = \frac{|\chi^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}}$$

формуладан фойдаланиб, n_i нинг n_i^* га яқинлигини аниқлаш мумкин, бу ерда ν χ^2 нинг озодлик даражаси. Агар t_{χ^2} ифода 3 дан кичик бўлса, гипотеза α эҳтимоллик билан қабул қилинади, акс ҳолда гипотеза рад этилади. Юқоридаги мисол учун $t_{\chi^2} > 3$ лигини текшириб кўринг.

Бу эса яна бир бор Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувлари чуқурлиги тақсимоти нормал қонунга бўйсунмаслигини кўрсатади, лекин Пирсон эгри чизиқлари* усулида Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги тақсимотининг зичлик функцияси

$$y = 0{,}7 \cdot \left(1 + \frac{x}{3{,}25}\right)^{10{,}62} \cdot \left(1 - \frac{x}{1{,}87}\right)^{5{,}67}$$

дан иборатлиги кўрсатилган.

Олдинги бобдаги 4-§ да келтирилган А. Н. Колмогоров теоремаси Колмогоров мослик (мувофиқлик) мезонининг асоси ҳисобланади. $F(x) = F_0(x)$ гипотетик тақсимот функция бўлсин ва кузатиш натижалари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ га асосланиб, $F_n(x)$ эмпирик тақсимот функция қурилган бўлсин. Энди

$$D_n = \sup_x |F_0(x) - F_n(x)|$$

дейлик. Сўнгра α муҳимлилик даражаси берилиб, $K = K(x)$ тақсимот функциянинг жадвалидан $K(\lambda_\alpha) = \alpha$ тенгликни қаноатлантирадиган λ_α топилади. Агар D_n ушбу $\sqrt{n}\, D_n \leqslant \lambda_\alpha$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $F_n(x)$ билан $F_0(x)$ ўртасидаги фарқ кузатиш натижаларининг тасодифийлик хусусияти туфайли дейилиб, H_0 гипотезанинг эксперимент билан мос (мувофиқ) келиши тан олинади, акс ҳолда H_0 гипотеза инкор этилади.

---

* В. И. Романовский. Математическая статистика (книга первая) изд-во АН УзССР, Ташкент, 1961 г.

Л. К. Лохотин. Кривые распределения и построение для них интерполяционных формул по способам Пирсона и Брауна. Гиз. М. 1922 г.

4- §. Статистик муносабатлар. Корреляция коэффициенти. Регрессия тенгламаси.

Кўпинча ξ тасодифий миқдор устида кузатиш олиб бориш натижасида ҳосил қилинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ миқдорларга бошқа η тасодифий миқдорнинг таъсирини ўрганишга тўғри келади.

Агар ξ тасодифий миқдорнинг ҳар бир қийматига бирор қонун асосида η тасодифий миқдорнинг аниқ қиймати мос келса, у ҳолда ξ ва η орасидаги муносабат *статистик* ёки *корреляцион муносабат* дейилади. Агар ξ ва η тасодифий миқдорлар устида кузатиш олиб борилган бўлиб, кузатишлар натижалари мос равишда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лардан иборат бўлса, у ҳолда ξ ва η орасидаги муносабатни ушбу жадвал кўринишида ифодалаш мумкин:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_n
η	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Агар кузатишлар натижасида ҳосил бўлган (x_i, y_i) жуфтларнинг сони катта бўлса ва айрим жуфтлар такрорланадиган бўлса, у ҳолда юқоридаги жадвал ўрнига қуйидаги жадвални келтириш мумкин.

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	x_3	...	x_k	m_η
y_1	m_{11}	m_{12}	m_{13}	...	m_{1k}	m_{y_1}
y_2	m_{21}	m_{22}	m_{23}	...	m_{2k}	m_{y_2}
y_3	m_{31}	m_{32}	m_{33}	...	m_{3k}	m_{y_3}
...	...	...	...	...	...	...
y_s	m_{s_1}	m_{s_2}	m_{s_3}	...	m_{s_k}	m_{ys}
m_ξ	m_{x_1}	m_{x_2}	m_{x_3}	...	m_{xk}	n

Бу ерда

$$m_{y_l} = \sum_{s=1}^{k} m_{ls}; \qquad m_{x_l} = \sum_{l=1}^{s} m_{ll}$$

ва

$$\sum_{l=1}^{s} m_{y_l} = \sum_{l=1}^{k} m_{xl} = n,$$

m_{ij} эса (x_i, y_j) жуфтларнинг такрорланиши. Корреляцион жадвалга мисол тариқасида Норин—Қорадарё оралиғидаги 1968—1977 йиллар бўйича сизот сувлари x (метр ҳисобида) ва ёғингарчилик y (миллиметрлар ҳисобида), йиллик ҳосилдорлик z (центнер ҳисобида) жадвалини қараш мумкин.

7-жадвал

x	1,27	1,11	1,16	1,47	1,78	1,79	1,80	1,40	1,50	1,28
y	160	480	160	90	230	160	200	120	270	310
z	27,5	27,6	27,7	27,8	33,5	31,9	33,8	33,1	30,3	32,9

Корреляцион муносабатлар тўғри, тескари, тўғри чизиқли ва эгри чизиқли, оддий ва кўп белгилар орасидаги боғланишлар бўлиши мумкин. Тўғри корреляцион муносабатда белгилардан бирининг ортиши (камайиши) бошқасининг ортишига (камайишига) олиб келади. Боғлиқлик миқдорини—корреляция коэффициентини

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\,\sigma_x\,\sigma_y} \qquad (1)$$

формула ёрдамида аниқлаш мумкин, бу ерда σ_x, σ_y мос равишда x ва y нинг ўртача квадратик четланиши, $\bar{x}$ ва $\bar{y}$—танланманинг ўртача арифметиги. Бундан ташқари, боғланиш қонуниятини акс эттирувчи ва боғланиш чизиғини ясашга имкон берувчи $y = f(x)$ функцияни топиш мумкин. Мисол тариқасида Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувларнинг чуқурлиги ёғингарчилик ва ҳосилдорлик орасидаги r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} корреляция коэффициентларини (1) формула билан ҳисоблашни олиш мумкин.

8-жадвал

x	1,27	1,11	1,16	1,47	1,78	1,49	1,80	1,40	1,50	1,28
y	160	480	160	90	230	160	200	120	270	310
z	27,5	27,6	27,7	27,8	33,5	31,5	33,8	33,1	30,3	32,5
xy	204	533	186	132	409	286	360	168	405	397
xz	3492	3063	3213	40 86	59 63	57 10	60 84	46 34	45 45	42 11
yz	4400	13280	4432	2502	7705	5104	6760	3962	8181	10199
x^2	1,61	1,23	1,35	2,16	3,17	2,12	3,24	1,96	2,25	1,64
y^2	256400	23000	25600	8100	52900	25600	40000	14400	72900	96100
z^2	756	761	767	772	1122	1018	1142	1096	918	1082

8- жадвалдан фойдаланиб,

$$\bar{x} = 1{,}45, \quad \bar{y} = 219; \quad \bar{z} = 30{,}6;$$

$$\sigma_x = 0{,}28; \quad \sigma_y = 90; \quad \sigma_z = 2; \quad r_{xy} = -0{,}36;$$

$$r_{xz} = 0{,}94; \quad r_{yz} = 0{,}22.$$

ларни топамиз.

Назарий корреляция коэффицентининг хоссалари (1) ифода учун ҳам ўринлидир. Агар $-1 \leqslant r_{xy} < 0$ бўлса, у ҳолда бу миқдорлардан бирининг ортиши мос равишда иккинчисининг камайишига олиб келади. Юқоридаги мисолда $r_{xy} = -0{,}36$ лиги сизот сувларнинг чуқурлиги ёғингарчиликка боғлиқ эканлигини ва ёғингарчилик миқдорининг кўпайиши мос равишда сизот сувлар чуқурлигининг камайишига, яъни ер сатҳига яқинлашишига олиб келишини кўрсатади.

Агар $|r_{xy}| = 1$ бўлса, бу ҳол x ва y орасида чизиқли корреляция мавжудлигини кўрсатади ва аксинча. Хусусан, юқоридаги мисолда сизот сувларнинг чуқурлиги ҳосилдорликни ўзгаришига чизиқли боғлангандир. Ёғингарчиликнинг ҳосилдорликка таъсири эса чизиқли бўлмасдан, ҳар ҳолда унинг ўзгаришига сабаб бўла олишини $r_{yz} = 0{,}22$ лигидан кўриш мумкин.

Корреляция коэффициенти иккита белгининг ўзаро боғланиш даражасини кўрсатади, лекин бир белгининг иккинчи белгига қараб сон жиҳатдан қандай ўзгаришини очиб бера олмайди. Бу муносабатни x ва y белгилар орасидаги регрессия тенгламаси деб аталувчи боғланиш маълум даражада очиб бера олади. Бунда x нинг ўзгаришига қараб, y ни аниқлаш, ва аксинча, y нинг ўзгаришига қараб, x ни аниқлаш мумкин. Энг кичик квадратлар усули* деб аталувчи усулдан фойдаланиб, x ва y лар орасидаги чизиқли регрессия тенгламаси $y_x = kx + b$ ни тузамиз, бу ерда k ва b — номаълум коэффициентлар. Маълумки, бу усулга кўра, агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар кузатиш натижаларидан иборат бўлиб, бу қийматлар билан y_x нинг $x_1, x_2 \ldots, x_n$ ларга мос келувчи қийматлари орасидаги айирмалар квадратларининг йиғиндиси кичик бўлса, яхши натижага эришилган бўлади.

Шу мақсадда

$$F(k, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_{x_i} - y_i)^2 \tag{2}$$

ёки

$$F(k, b) = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i)^2$$

функцияни қараймиз. Бу ифода энг кичик қийматга эришиши учун

$$\frac{\partial F(k, b)}{\partial k} = 2\sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i)\, x_i = 0,$$

$$\frac{\partial F(k, b)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i) = 0$$

ёки

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

---

* Г. Крамер. Математические методы статистики, „Мир“, М., 1975 г.

тенгликлар бажарилиши керак. Бу системанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \bar{y} - k\bar{x}.$$

$r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ифода y нинг x га *нисбатан регрессия коэффициенти* дейилади. x нинг y га нисбатан корреляция коэффициентини $R_{x/y}$ орқали белгиласак, у ҳолда y нинг x га нисбатан регрессия тенгламаси $y_x = R_{y/x}\cdot(x-\bar{x}) + \bar{y}$, x нинг y га нисбатан регрессия тенгламаси эса

$$x_y = R_{x/y}\ (y - \bar{y}) + \bar{x}$$

кўринишда бўлади. Агар Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувларнинг чуқурлиги ва ҳосилдорлик орасидаги корреляция коэффициенти $r_{zx} = 0{,}94$ лигини эътиборга олсак, у ҳолда бу икки миқдор учун 8- жадвалдан фойдаланиб регрессия тенгламасини тузиш мумкин:

$$z_x = 6{,}71\,x + 20{,}88; \qquad 1{,}11 \leqslant x \leqslant 1{,}8.$$

Демак, регрессия коэффициенти $R_{z/x} = 6{,}71$ га тенг. Бу тенгламадан кўринадики, сизот сувларнинг чуқурлиги тахминан 1,8 метрга яқин бўлганда ҳосилдорлик юқори бўлади, агар сизот сувларнинг чуқурлиги ер сатҳига яқин бўлса, ҳосилдорлик камайиб кетади.

Чизиқли регрессиядан ташқари эгри чизиқли регрессия ҳам мавжуд.

Энг содда эгри чизиқли регрессия тенгламалари сифатида

$$y_x = ax^2 + bx + c\,;\ y_x = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y_x = \frac{a}{x} + b$$

ларни қараш мумкин.

Иккинчи тартибли $y_x = ax^2 + bx + c$ регрессия тенгламасининг коэффициентларини ҳам энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топиш мумкин. Улар ушбу системанинг ечимларидир:

$$\begin{cases} a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i , \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i , \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \qquad (3)$$

Биз ҳозиргача иккита белги орасидаги корреляцион боғланишни кўрдик. Агар бир нечта белги орасидаги боғланиш ўрганилаётган бўлса, улар орасидаги боғланишни *кўплик корреляция* дейилади. Учта белги учун энг оддий боғланиш

$$z = ax + by + c \qquad (4)$$

кўринишда бўлади. (4) тенглама ўрнига

$$z - \bar{z} = A\,(x - \bar{x}) + B\,(y - \bar{y})$$

кўринишдаги боғланишни қараш мумкин. У ҳолда A ва B коэффициентларни энг кичик квадратлар усули ёрдамида топсак, улар қуйидагича бўлади:

$$A = \frac{r_{xy} - r_{yz}\, r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x}; \qquad B = \frac{r_{yz} - r_{xz}\, r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y} .$$

Мисол. 8-жадвалдан фойдаланиб, Норин—Қорадарё оралиғидаги сизот сувларни ва ёғингарчиликни ҳосилдорликка таъсирини аниқловчи регрессия тенгламаси тузилсин.

Ечиш. 8-жадвалдан фойдаланиб, тегишли ҳисобларни бажаргандан сўнг $a = 8{,}66$; $b = 0{,}01$; $c = 15{,}85$ сонларни ҳосил қиламиз. Буларни этиборга олсак, (4)га асосан

$$z = 8{,}66\,x + 0{,}01\,y + 15{,}85$$

тенгламани оламиз, бу ерда

$$1{,}11 \leqslant x \leqslant 1{,}80, \qquad 90 \leqslant y \leqslant 480.$$

IX БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Бош тўпламдан ҳажми 60 га тенг бўлган танланма ажратиб олинган бўлиб, унинг тақсимот қонуни қуйидагича:

$$x_i : 1 \quad 3 \quad 6 \quad 26$$
$$n_i : 8 \quad 40 \quad 10 \quad 2$$

Ўрта қийматнинг силжимаган баҳоси топилсин.

2. Ҳажми n га тенг бўлган тенланмада варианталар қуйидагича тақсимланган:

$$x_i : x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_k$$
$$n_i : n_1 \; n_2 \; \ldots \; n_k.$$

У ҳолда

$$\bar{x} = c + \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i u_i}{n}$$

эканлигини исботланг, бу ерда $u_i = x_i - c$.

3. Қуйида берилган жадвалдан фойдаланиб, y билан x орасидаги чизиқли регрессия тенгламасини тузинг:

x y	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	—	—	—	—	—	—	3
120	3	4	3	—	—	—	—	—	10
140	—	—	5	10	8	—	—	—	23
160	—	—	—	1	—	6	1	1	9
180	—	—	—	—	—	—	4	1	5
	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

4. Қуйида берилган корреляцион жадвалдан фойдаланиб, y нинг x га нисбатан тўғри чизиқли регрессия тенгламасини тузинг:

x y	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	—	—	—	—	8
20	—	4	4	—	—	—	8
30	—	—	7	35	8	—	50
40	—	—	2	10	8	—	20
50	—	—	—	5	6	3	14
	3	9	13	50	22	3	100

5. x нинг тақсимоти қуйидаги қатор кўринишида берилган:

3,0–3,6	3,6—4,2	4,2—4,8	4,8—5,4	5,4—6,0	6,0—6,6	6,6—7,2
2	8	35	43	22	15	5

Агар муҳимлилик даражаси $\alpha = 0{,}01$ бўлса, у ҳолда „$H_0: x$ нормал тақсимланган“ деган гипотеза текширилсин.

X боб

ТАСОДИФИЙ ПРОЦЕССЛАР

1-§. Боғлиқ тажрибалар кетма-кетлиги. Марковнинг дискрет занжири

Ҳозирга қадар биз ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар билан иш кўрган эдик. Энди эса боғлиқ тажрибалар кетма-кетлигининг содда ҳоли билан танишайлик. Мумкин бўлган натижалари чекли ёки саноқли $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ тўпламдан иборат бўлган S тажрибани кўрайлик. Бу тажрибани кетма-кет такрорлайлик ва E_{x_n} орқали n- тажриба натижасини белгилайлик. Умуман олганда, E_{x_n} нинг эҳтимоли олдинги $(n-1)$ та тажриба натижасида қандай ҳодисалар рўй берганига боғлиқдир. Агар E_{x_n} нинг эҳтимоли $(n-1)$-тажриба натижаси $E_{x_{n-1}}$ гагина боғлиқ бўлиб, аввалги $(n-2)$ та тажрибада қандай ҳодисалар рўй берганига боғлиқ бўлмаса, бундай тажрибалар кетма-кетлиги *Марков занжири* ташкил этади дейилади.

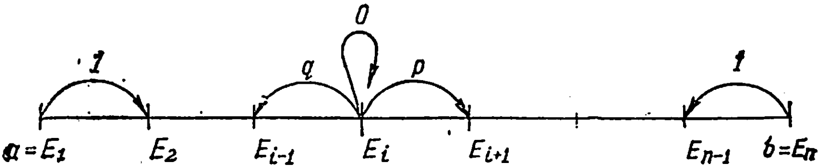
Марков занжири аниқ таърифини қуйидаги ҳол учун берамиз: бутун қийматлар қабул қилувчи $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини оламиз. Агар n- тажрибада E_j ҳодиса рўй берса, $x_n = j$ деб ҳисоблаймиз. Агар

$$P(x_n = j / x_0 = k_0, x_1 = k_1, \ldots, x_{n-2} = k_{n-2}, x_{n-1} = i) = $$
$$= P(x_n = j / x_{n-1} = i) \equiv p_{ij}(n)$$

шарт бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *Марков занжири* дейилади.

Марков занжирини бошқача талқин этиш ҳам мумкин: ҳақиқатан ҳам, мумкин бўлган ҳолатлари тўплами $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ дан иборат бўлган бирор физик система берилган бўлиб, x_0 нинг бошланғич тақсимоти

$$P(x_0 = j) = p_j^0, \qquad \sum p_j^0 = 1$$



35- шакл.

берилган ва вақтнинг бутун қийматли моментларида (онларида) система ўз ҳолатини ўзгартирсин. Шу билан бирга системанинг вақтнинг n-моментида E_j ҳолатда бўлиш эҳтимоли, олдинги моментларнинг барчасида система қайси ҳолатда бўлганлиги маълум бўлса ҳам, уларга боғлиқ бўлмасдан, фақат вақтнинг $(n-1)$-моментида система қайси ҳолатда бўлганига боғлиқ бўлсин. Бундай боғлиқлик Марков занжиридир.

1-мисол. Заррача $[a, b]$ да ҳаракатлансин. Бу заррача вақтнинг $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ моментларида тасодифий туртки таъсирида бир қадам ўнгга ёки чапга, мос равишда, p, $q = 1 - p$ эҳтимол билан силжиши мумкин. Заррачанинг ўз ўрнида қолиш эҳтимоли эса нолга тенг бўлсин. Агар заррача a нуқтада бўлса, туртки натижасида бир эҳтимол билан ўнгга, b нуқтада бўлса, бир эҳтимол билан чапга силжисин. Заррачанинг баён этилган қонун бўйича ҳаракати Марков занжирига мисол бўла олади.

Энди $p_{ij}^{(m,n)} = P(x_n = j / x_m = i)$ эҳтимолни қарайлик. Бу $p_{ij}^{(m,n)}$ эҳтимол системанинг m- тажрибада E_i ҳолатда бўлиб, n тажрибада E_j ҳолатга ўтиш эҳтимоли деб ўқилади.

Марков занжирида ҳолатлар чекли, шунингдек, чексиз бўлиши мумкин. Биз ҳолатлари сони чекли бўлган ҳолни қараймиз. Ушбу

$$P(m, n) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m,n)} & p_{12}^{(m,n)} & \dots & p_{1s}^{(m,n)} \\ p_{21}^{(m,n)} & p_{22}^{(m,n)} & \dots & p_{2s}^{(m,n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_{s1}^{(m,n)} & p_{s2}^{(m,n)} & \dots & p_{ss}^{(m,n)} \end{pmatrix}$$

матрица *ўтиш эҳтимоллари матрицаси* дейилади. Бу матрицанинг тартиби Марков занжирининг ҳолатлар сони s га тенг бўлади.

Марков теоремаси. *Агар* $0 < m < k < n$ *бўлса, у ҳолда ўтиш эҳтимоллари матрицаси* $P\ (m,n)$ *билан аниқланувчи Марков занжири учун ушбу муносабат ўринлидир:*

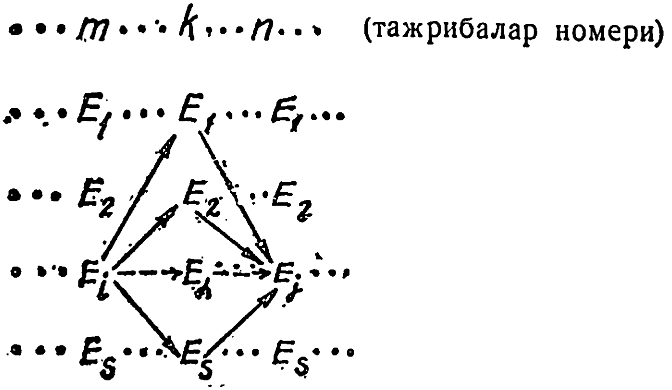
$$P(m,n) = P(m,k) \cdot P(k,n). \tag{1}$$

Бу тенглама баъзан *Марков тенгламаси* ҳам дейилади.

Исботи. Системанинг m- тажрибада E_i ҳолатда бўлиб, n- тажрибада E_j ҳолатда бўлиш ҳодисасини $A_{ij}^{(m,n)}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда ушбу тенглик ўринли:

$$A_{ij}^{(m,n)} = A_{i1}^{(m,k)} \cdot A_{1j}^{(k,n)} + A_{i2}^{(m,k)} \cdot A_{2j}^{(k,n)} + \dots + \\ + A_{i,s-1}^{(m,k)}\ A_{s-1,j}^{(k,n)} + A_{is}^{(m,k)}\ A_{sj}^{(k,n)}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенгликнинг ўринли эканлигига қуйидаги схемага караб ишонч ҳосил қилиш мумкин:



Схемадан кўриниб турибдики, бу йиғиндидаги қўшилувчиларнинг исталган иккитаси биргаликда рўй бермайди. У ҳолда

$$p_{ij}^{(m,n)} = P(A_{ij}^{(m,n)}) = \sum_{l=1}^{s} P(A_{il}^{(m,k)} \cdot A_{lj}^{(k,n)})$$

бўлади. Система марков занжирини ташкил этгани учун E_α ҳолатдан E_j ҳолатга ўтиш ҳодисаси система E_α ҳолатга қайси ҳолатдан ўтганига боғлиқ эмас, яъни $A_{i\alpha}^{(m,k)}$ ҳодиса $A_{\alpha j}^{(k,n)}$ ҳодисага боғлиқ эмас. Шунинг учун

$$P(A_{i\alpha}^{(m,k)}\cdot A_{\alpha j}^{(k,n)}) = P(A_{i\alpha}^{(m,k)})\cdot P(A_{\alpha j}^{(k,n)}).$$

У ҳолда

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{l=1}^{s} p_{il}^{(m,k)}\cdot p_{li}^{(k,n)} = p_{i1}^{(m,k)}\ p_{1j}^{(k,n)} + $$
$$+ p_{i2}^{(m,k)}\cdot p_{2j}^{(k,n)} + \dots + p_{ij}^{(m,k)}\ p_{sj}^{(k,n)}.$$

Бу эса матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра

$$P(m,n) = P(m,k)\cdot P(k,n),$$

демакдир. Агар $k = m+1$ деб олинса, у ҳолда (1) дан

$$P(m,n) = P(m, m+1)\ P(m+1, n) =$$
$$= P(m, m+1)\ P(m+1, m+2)\ \dots\ P(n-1, n).$$

$P(m, m+1) = P(m)$ га *бир қадамда ўтиш эҳтимоллари* матрицаси дейилади.

Бундан фойдаланилса,

$$P(m,n) = P(m)\,P(m+1)\ \dots\ P(n-1), \tag{2}$$

хусусий ҳолда эса

$$P(1,n) = P(1)\,P(2)\ \dots\ P(n-1)$$

формулага эга бўламиз.

Ҳар бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицаси берилган бўлса, Марков занжири берилган дейилади. Агар $p_{ij}^{(k,k+1)} = p_{ij}^{(k)}$ десак,

$$P(k) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1s}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2s}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_{s1}^{(k)} & p_{s2}^{(k)} & \dots & p_{ss}^{(k)} \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицаси бўлиб, умуман айтганда, k ўзгариши билан $P(k)$ ўзгаради, яъни $P(k)$ тажриба номерига боғлиқдир. Агар ўтиш эҳтимоллари тажриба номерига боғлиқ бўлмаса, яъни $p_{ij}^{(k)} = p_{ij}$ бўлса, бундай занжир *бир жинсли Марков занжири* дейилади. Демак, бир жинсли Марков занжирининг бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицаси

$$\pi_1 = P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлар экан. Бундан ва (2) дан бир жинсли Марков занжири учун m- тажрибада E_i ҳолатда бўлиб, n-тажрибада E_j ҳолатга ўтиш эҳтимоллари матрицаси

$$P(m, n) = P(m)\,P(m+1)\,\dots\,P(n-1) = [P]^{n-m} = \pi_{n-m}$$

бўлишлиги келиб чиқади.

Демак, бир жинсли Марков занжирини бериш учун бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицасини бериш етарли экан. 1-мисолдаги „дайди заррача“ ҳаракат қонуни бир жинсли Марков занжирига мисол бўлади. Бу мисолда бир қадамда ўтиш эҳтимолларининг матрицаси

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \; 0 \end{pmatrix}$$

кўринишга эга. Заррачанинг E_2 ҳолатдан E_5 га 10 та туртки натижасида (10 қадамдан сўнг) ўтиш эҳтимолини топмоқчи бўлсак, $[P]^{10}$ ни ҳисоблаб, сўнг унинг 2- йўл. 5- устунидаги $p_{2,5}$ элементни олиш кифоя.

Ўтиш эҳтимоллари матрицаси қуйидаги хоссаларга эга.

1-*хосса.* Ўтиш эҳтимоллари матрицасининг ҳар бир элементи учун $0 \leqslant p_{ij}^{(m,n)} \leqslant 1$ тенгсизлик ўринли.

2-*хосса.* $\sum\limits_{j=1}^{s} p_{ij}^{(m,n)} = 1$ (ҳар бир сатрдаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг), яъни система m-тажрибада E_i ҳолатда бўлса, n- тажрибада E_1, E_2, . . ., E_s ҳолатларнинг бирига албатта ўтади.

3-*хосса.* Бирор устуннинг ҳамма элементлари ноль бўла олмайди. Масалан, j- устуннинг ҳамма элементлари нолдан иборат бўлсин. Бу эса системанинг ҳеч қачон j- ҳолатда бўла олмаслигини билдиради. Демак, бу ҳолда ҳолатлар сони s дан кичик бўлур эди.

Таъриф. Агар n чексизликка интилганда ихтиёрий i, j, $k = 1, 2, \dots, s$ учун

$$\left|p_{ij}^{(m,n)} - p_{kj}^{(m,n)}\right| \longrightarrow 0$$

бажарилса, бу ўтиш эҳтимоллари билан берилган *Марков занжири эргодик принципга бўйсунади* дейилади.

Қандай шартлар бажарилганда Марков занжири эргодик принципга бўйсунади? $s = 2$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда ўтиш эҳтимоллари матрицалари

$$P(k) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ ва } P(m,n) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m,n)} & p_{12}^{(m,n)} \\ p_{21}^{(m,n)} & p_{22}^{(m,n)} \end{pmatrix}$$

Бу ҳолда таърифдан кўринадики, эргодик принципнинг ўринли бўлиши

$$\left|p_{11}^{(m,n)} - p_{21}^{(m,n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \left|p_{12}^{(m,n)} - p_{22}^{(m,n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

лардан бирининг бажарилишига тенг кучлидир.

Агар

$$p_{11}^{(k)} = \alpha_k, \quad p_{22}^{(k)} = \beta_k$$

десак,

$$P(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 1-\alpha_k \\ 1-\beta_k & \beta_k \end{pmatrix}$$

бўлади ва

$$\det P(k) = \alpha_k\beta_k - 1 + \beta_k + \alpha_k - \alpha_k\beta_k = \alpha_k + \beta_k - 1.$$

Теорема. $s = 2$ *бўлганда Марков занжири эргодик принципга бўйсуниши учун ушбу*

$$\sum_{k=1}^{\infty} [1 - |\alpha_k + \beta_k - 1|]$$

қаторнинг узоқлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

Исботи. $m = 1$ деб олишимиз мумкин, у ҳолда $n \to \infty$ да

$$\left|p_{11}^{(1,n)} - p_{21}^{(1,n)}\right| \to 0 \text{ ёки } \left|p_{12}^{(1,n)} - p_{22}^{(1,n)}\right| \to 0$$

эканини кўрсатамиз. Лекин

$$\det P(1,n)=\begin{vmatrix} p_{11}^{(1,n)} & p_{12}^{(1,n)} \\ p_{21}^{(1,n)} & p_{22}^{(1,n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11}^{(1,n)} & 1-p_{11}^{(1,n)} \\ p_{21}^{(1,n)} & 1-p_{21}^{(1,n)} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1-p_{12}^{(1,n)} & p_{12}^{(1,n)} \\ 1-p_{22}^{(1,n)} & p_{22}^{(1,n)} \end{vmatrix}$$

Бундан

$$|p_{11}^{(1,n)}-p_{21}^{(1,n)}|=|p_{12}^{(1,n)}-p_{22}^{(1,n)}|=|\det P(1,n)|.$$

Демак, (3) ни исботлаш учун $n\to\infty$ да

$$\det P(1,n)\to 0$$

ни кўрсатиш кифоя. $P(1,n)=P(1)\,P(2)\ldots P(n-1)$ лигидан ва $|\det P(1,n)|=\prod_{k=1}^{n-1}|\det P(k)|=\prod_{k=1}^{n-1}|\alpha_k+\beta_k-1|$ дан (3) нинг $n\to\infty$ да $\prod_{k=1}^{n-1}|\alpha_k+\beta_k-1|\to 0$ га тенг кучли эканини кўрамиз. Математик анализ курсидан маълумки, $n\to\infty$ да $\prod_{k=1}^{n} a_k\to 0$ бўлиши учун $\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_k)=+\infty$ бўлиши зарур ва етарлидир. Шунга асосан $n\to\infty$ да

$$\prod_{k=1}^{n-1}|\alpha_k+\beta_k-1|\to 0 \text{ бўлиши учун}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[1-|\alpha_k+\beta_k-1|]=\infty$$

бўлиши зарур ва етарли. Теорема исботланди.

Бир жинсли Марков занжири учун бир қадамда ўтиш матрицаси система s та ҳолатли бўлганда

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

бўлади. Бу ҳол учун қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. *Агар бирор $k > 0$ сон учун ўтиш эҳтимоллари матрицаси $\pi_k = [P_1]^k$ нинг ҳамма элементлари мусбат бўлса, у ҳолда занжир эргодик бўлади ва i га боғлиқ бўлмаган шундай $p_j (1 \leqslant j \leqslant s)$ сонлар мавжудки,*

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$$

бўлади.

Мисол. Ўтиш матрицаси

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

бўлган 3 ҳолатли, бир жинсли Марков занжири эргодик принципга бўйсунадими?

Ечиш. Ҳамма элементлари мусбат бўлган π_k ни топамиз:

$$\pi_2 = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Демак, бу занжир эргодик принципга бўйсунади.

2-§. Содда Пуассон процесси

$\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ эҳтимоллик фазосида аниқланган ва t параметрга $(t \in T)$ боғлиқ бўлган $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$ тасодифий миқдорлар оиласи *тасодифий процесс* дейилади. Бирор идишдаги газ молекуласининг ҳаракатини кузатайлик. Кузатилаётган молекула вақт ўтиши билан бошқа бир молекула билан тўқнашиши натижасида ҳаракат траекториясини ўзгартириши мумкин, демак, бу тажрибада кузатилаётган траекториянинг вақт боғлиқлиги равшан. Бу траекториялар эса тасодифий процессни ташкил қилади. Сув омборидаги сув миқдори вақт ўтиши билан ўзгаришда бўлади, ва демак, сув омборидаги сув миқдори ҳам тасодифий процессдир. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ҳам тасодифий процесс деб қаралиши мумкин, бунда $n \in T$,

$$T = \{1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Агар T тўплам саноқли элементлардан ташкил топган бўлса, $\xi(t)$ процесс *дискрет „вақтли“* (параметрли) *процесс* ва T тўплам бирор $(a,\ b)$ интервалдан иборат бўлса, $\xi(t)$ процесс *узлуксиз „вақтли“* (параметрли) *процесс* дейилади. Хусусан, t параметр фиксирланса, $t = t_0$, у ҳолда $\xi(t_0,\ \omega)$ тасодифий миқдорга эга бўламиз. Элементар ҳодиса ω фиксирланса, $\omega = \omega_0$, биз „вақт“нинг функцияси $\xi(t,\ \omega_0)$ ни оламиз. Бу функция тасодифий процесснинг *реализацияси* (траекторияси, танланма функцияси) дейилади.

Айтайлик, бирор A ҳодиса $[0,t]$ оралиқда текширилаётган бўлсин. Масалан, A ҳодиса телефон станциясига $[0,t]$ вақт оралиғида келган телефон чақириқлари сонидан иборат бўлиши мумкин. $l_0\ (t)$ орқали A ҳодисанинг $[0,t]$ вақт орасида бирор марта ҳам рўй бермаслик ҳодисасини белгилаймиз. l_k орқали эса A ҳодисанинг $[0,\ t]$ оралиқда k марта рўй беришини белгилаймиз, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$. Биз ўрганаётган процессимизга қуйидаги шартларни қўямиз.

1. Стационарлик шарти. Кесишмайдиган оралиқларда A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли фақат интерваллар узунлигига боғлиқ бўлиб, шу интервалларни ўзгармас $h > 0$ га бир вақтда силжитишда ўзгармай қолса, у ҳолда $\xi(t)$ тасодифий процесс *стационарлик шартига бўйсунади* дейилади. Бошқача айтганда, бизнинг ҳолда, $P_k(t_l,\ t)$ A ҳодисанинг $(t_l,\ t_l + t)$ оралиқда k марта рўй бериш эҳтимоли бўлса, ушбу

$$P_k(t_l,\ t_l + t) = P_k(t)$$

тенглик бажарилсин, бунда $P_k(t)$ A ҳодисанинг t вақт давомида k марта рўй бериш эҳтимоли.

2. Таъсирсизлик шарти. Бу шарт—бирор (t_1, t_1+t) ораликда A нинг k марта рўй бериш ҳодисаси $(t_1; t_1+t)$ билан кесишмайдиган бошқа оралиқларда A нинг неча марта рўй бериши ҳодисасига боғлиқ бўлмаслик шартидир.

3. Биргиналик шарти. Айтайлик, Δt кичик вақт орасида A ҳодисанинг икки ва ундан ортиқ марта рўй бериш эҳтимоли Δt га нисбатан чексиз кичик миқдор бўлсин, яъни агар $P_k(\Delta t)$ орқали A ҳодисанинг Δt кичик вақт оралиғида k марта рўй бериш эҳтимолини белгиласак,

$$P_k(\Delta t) = o(\Delta t), \qquad k > 1 \tag{1}$$

бўлсин. Шу билан бирга A ҳодисанинг Δt кичик вақт орасида бир марта рўй бериш эҳтимоли

$$P_1(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t) \tag{2}$$

га тенг бўлсин, бунда μ — мусбат сон. Бу (1), (2) икки шарт процесснинг *биргиналик шарти* дейилади.

Стационарлик, таъсирсизлик ва биргиналик шартларини қаноатлантирувчи тасодифий процесс $\xi(t)$ *содда Пуассон процесси* дейилади.

Теорема. *Содда Пуассон процесси учун*

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\} = \frac{e^{-\mu t}\cdot(\mu t)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

бўлади.

Исботи. (3) формуланинг аввал $k=0$ учун тўғрилигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, юқоридаги шартларни эътиборга олиб, ушбу

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\,P_0(\Delta t) = P_0(t)\cdot[1-\mu\Delta t + o(\Delta t)] =$$
$$= P_0(t) - \mu P_0(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

муносабатни ёза оламиз. Бунда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} P_l(\Delta t) = 1$ экани эътиборга олинди. Бундан

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\mu P_0(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

ёки

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\mu P_0(t)+o(1).$$

Натижада $\Delta t \to 0$ да

$$P_0'(t)=-\mu P_0(t),$$

бундан

$$P_0(t)=Ce^{-\mu t}.$$

Аммо $P_0(0)=1$, бундан $C=1$, демак, $P_0(t)=e^{-\mu t}$ бўлади. Энди (3) формулани ихтиёрий $k \geqslant 1$ учун исботлаймиз.

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)P_0(\Delta t)+P_0(t)P_1(\Delta t)=$$
$$=P_1(t)[1-\mu\Delta t+o(\Delta t)]+P_0(t)[\mu\Delta t+o(\Delta t)].$$

Бундан

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\mu[P_1(t)-P_0(t)]+o(1).$$

ёки $\Delta t \to 0$ да

$$P_1'(t)=-\mu[P_1(t)-P_0(t)]. \tag{4}$$

Худди шунингдек,

$$P_k(t+\Delta t)=\sum_{l=0}^{k}P_{k-l}(t)P_l(\Delta t)=P_k(t)P_0(\Delta t)+$$
$$+P_{k-1}(t)P_1(\Delta t)+\sum_{l=2}^{k}P_{k-l}(t)P_l(\Delta t). \tag{5}$$

Лекин чекли k лар учун (1) га асосан

$$\sum_{l=2}^{k}P_{k-l}(t)P_l(\Delta t)\leqslant\sum_{l=2}^{k}P_l(\Delta t)=o(\Delta t)$$

тенгсизлик ўринлидир. (1), (2), (5) ва охирги тенгсизликдан

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\mu[P_k(t)-P_{k-1}(t)]+o(1).$$

Энди $\Delta t \to 0$ да

$$P'_k(t) = -\mu\,[P_k(t) - P_{k-1}(t)], \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{6}$$

бўлади. Энди $P_k(t)$ нинг $\Phi(t, x)$ ҳосил қилувчи функциясини киритамиз:

$$\Phi(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, x^k. \tag{7}$$

Равшанки,

$$\Phi(0, x) = P_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(0)\, x^k = 1, \tag{8}$$

$$\Phi(t, 1) = 1,$$

шу билан бирга (7) қатор $|x| \leqslant 1$ да текис яқинлашувчи, ва демак, (6) га асосан:

$$\frac{\partial\Phi(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dP_k(t)}{dt}\, x^k = -\mu \sum_{k=0}^{\infty} [P_k(t) - P_{k-1}(t)]\, x^k =$$

$$= -\mu \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, x^k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} P_{k-1}(t)\, x^k = -\mu\Phi(t, x) +$$

$$+ \mu x \Phi(t, x).$$

Бундан

$$\frac{\partial\Phi(t, x)}{\partial t} = -\mu\,\Phi(t, x)\,(1 - x)$$

ёки

$$\Phi(t, x) = c\, e^{-\mu(1-x)\,t}.$$

Лекин (8) га асосан $c = 1$, демак,

$$\Phi(t, x) = e^{-\mu(1-x)\,t}. \tag{9}$$

Агар $e^{\mu t x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t\, x)^k}{k!}$ лигини эътиборга олсак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, x^k = e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!}\, x^k,$$

бундан

$$P_k(t) = e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

келиб чиқади. Шу билан (3) муносабат исботланди.

ИЛОВАЛАР

1- жадвал

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция қийматлари жадвали

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-жадвал

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ функциянинг қийматлари жадвали

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	071879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Давоми

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

3-жадвал

$P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ **функция қийматлари жадвали**

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000036
7					000001	000003

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224042
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168531
5	000696	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000164	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8	000001	000002	000004	000009	000859	008102
9				000001	000191	002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

4-жадвал

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{a^m e^{-a}}{m!}$$ функция қийматлари жадвали

m \ a	0,1	0.2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,906531	0,548812
1	0,995321	0,932477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996400	0,992074	0,985612	0,976885
3	0,999996	0,999943	0,999734	0,999224	0,998248	0,996642
4	1,000000	0,999998	0,999984	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

m \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,986542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,999954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

5-жадвал

Пуассон тақсимоти

$\overline{\Pi}(x) = \sum\limits_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} e^{-\lambda}$ функциянинг қийматлари жадвали

λ x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,0952	0,1813	0,2592	0,3297	0,3935
2	,0047	,0175	,0369	,0616	,0902
3	,0002	,0011	,0036	,0079	,0144
4	,0000	,0001	,0003	,0008	,0018
5		,0000	,0000	,0001	,0002
6				,0000	,0000

λ x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	0,4512	0,5034	0,5507	0,5934	0,6321
2	,1219	,1558	,1912	,2275	,2642
3	,0232	,0341	,0474	,0629	,0803
4	,0034	,0058	,0091	,0135	,0190
5	,0004	,0008	,0014	,0023	,0037
6	,0000	,0001	,0002	,0003	,0006

λ x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
1	0,6988	0,7534	0,7981	0,8347	0,8647
2	,3374	,4082	,4751	,5372	,5940
3	,1205	,1665	,2166	,2694	,3233
4	,0338	,0537	,0788	,1087	,1429
5	,0077	,0143	,0237	,0364	,0527
6	,0015	,0032	,0060	,0104	,0166
7	,0003	,0006	,0013	,0026	,0045
8	,0000	,0001	,0003	,0006	,0011
9		,0000	,0000	,0001	,0002
10				,0000	,0000

λ x	2,2	2,4	2.6	2,8	3,0
1	0,8892	0,9003	0,9257	0,9392	0,9502
2	,6454	,6916	,7326	,7689	,8009
3	,3773	,4303	,4816	,5305	,5768
4	,1806	,2212	,2640	,3081	,3528
5	,0725	,0859	,1226	,1523	,1847
6	,0249	,0357	,0490	,0651	,0839
7	,0075	,0116	,0172	,0244	,0335
8	,0020	,0033	,0053	,0081	,0119
9	,0005	,0009	,0015	,0024	,0038
10	,0001	,0002	,0004	,0007	,0011
11	,0000	,0000	,0001	,0001	,0003
12			,0000	,0000	,0001

λ x	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
1	0,9817	0,9933	0,9975	0,9991	0,9997
2	,9084	,9596	,9826	,9227	,9970
3	,7619	,8753	,9380	,9704	,9862
4	,5665	,7350	,8488	,9182	,9576
5	,3712	,5595	,7149	,8270	,9004
6	,2149	,3840	,5543	,2993	,8088
7	,1107	,2378	,3937	,5503	,6866
8	,0511	,1334	,2560	,4013	,5470
9	,0214	,0681	,1528	,2709	,4075
10	,0081	,0318	,0839	,1695	,2834
11	,0028	,0137	,0426	,0985	,1841
12	,0009	,0055	,0201	,0534	,1119
13	,0002	,0020	,0088	,0270	,0638
14	,0001	,0007	,0036	,0128	,0342
15	,0000	,0002	,0014	,0057	,0173
16		,0001	,0005	,0024	,0082
17		,0000	,0002	,0010	,0037
18			,0001	,0004	,0016
19			,0000	,0001	,0007
20				,0000	,0003
21					,0001
22					,0000

Давоми

x \ λ	9	10	11	12	13
1	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,10000
2	,9988	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000
3	,9938	,9972	,9988	,9995	0,9998
4	,9718	,9897	,9950	,9977	,9990
5	,9450	,9707	,9849	,9924	,9963
6	,8843	,9329	,9625	,9797	,9893
7	,7932	,8999	,9212	,9542	,9714
8	,6761	,7798	,8568	,9105	,9460
9	,5443	,6672	,7680	,8450	,9002
10	,4126	,5421	,6594	,7576	,8342
11	,2940	,4170	,5401	,6528	,7483
12	,1987	,3032	,4207	,5384	,6468
13	,1242	,2084	,3113	,4240	,5369
14	,0739	,1355	,2187	,3185	,4270
15	,0415	,0835	,1460	,2280	,3249
16	,0220	,0487	,0926	,1556	,2364
17	,0111	,0270	,0559	,1013	,1645
18	,0053	,0143	,0322	,0630	,1096
19	,0024	,0072	,0177	,0374	,0698
20	,0011	,0035	,0093	,0213	,0427
21	,0004	,0016	,0047	,0116	,0250
22	,0002	,0007	,0023	,0061	,0141
23	,0001	,0003	,0010	,0030	,0076
24	,0000	,0001	,0005	,0015	,0040
25		,0000	,0002	,0007	,0020
26			,0001	,0003	,0010
27			,0000	,0001	,0005
28				,0001	,0002
29				,0000	,0001

Изоҳ. $\lambda > 13$ бўлганда

$$\Pi(x) \approx \Phi_0\left(\frac{x - 0,5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

формуладан фойдаланиш мумкин.

6-жадвал

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвали

Озодлик даражалари сони, k	α муҳимлилик даражаси					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43.0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,3	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

7-жадвал

Муқаррарлик критерийсини аниқлаш учун Стьюдент — Фишер жадвали

ν озодлик даражалари сони	р эҳтимолда t кўрсаткичлари			
	$p = 0{,}95$	$p = 0{,}98$	$p = 0{,}99$	$p = 0{,}999$
1	12,71	31,821	63,630	636,20
2	4,30	6,965	9,925	31,60
3	3,18	4,541	5,484	12,94
4	2,78	3,747	4,604	8,61
5	2,57	3,365	4,032	6,86
6	2,45	3,143	3,707	5,96
7	2,36	2,998	3,499	5,40
8	2,31	2,896	3,335	5,04
9	2,26	2,821	3,256	4,78
10	2,23	2,764	3,169	4,59
11	2,20	2,718	3,106	4,49
12	2,18	2,681	3,055	4,32
13	2,16	2,650	3,012	4,12
14	2,14	2,624	2,977	4,14
15	2,13	2,602	2,947	4,07
16	2,12	2,583	2,921	4,02
17	2,11	2,567	2,898	3,96
18	2,10	2,552	2,878	3,92
19	2,09	2,539	2,865	3,88
20	2,09	2,528	2,845	3,85
21	2,08	2,518	2,831	3,82
22	2,07	2,508	2,819	3,79
23	2,07	2,500	2,807	3,77
24	2,06	2,492	2,797	3,75
25	2,06	2,485	2,787	3,72
26	2,06	2,479	2,779	3,71
27	2,05	2,473	2,771	3,69
28	2,05	2,467	2,763	3,67
29	2,05	2,462	2,750	3,66
30	2,04	2,457	2,750	3,64

АДАБИЁТ

1. А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974 г.
2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. „Наука“, М., 1969 г.
3. А. А. Боровков. Курс теории вероятностей. „Наука“, М., 1976 г.
4. Г. Крамер. Методы математической статистики. „Мир“, М., 1975 г.
5. В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М., 1978 г.
6. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и её приложения, т. I, Т. II. „Мир“, М., 1967 г.
7. М. Лоэв. Теория вероятностей. ИЛ, М., 1962 г.
8. В. И. Тутубалин. „Теория вероятностей“. Изд-во МГУ. 1972 г.
9. Ван дер Варден. Математическая статистика. ИЛ, М., 1960 г.
10. И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. Теория вероятностей и математическая статистика, “Высшая школа“, М., 1973 г.
11. И. В., Дунин-Барковский, Н. В., Смирнов Теория вероятностей и математическая статистика, ГТТИ, М., 1955 г.
12. М. Султанова. „Вариацион статистика“, „Ўқитувчи“, Т., 1977 г.
13. Л. Д. Мешалкин. Сборник задач по теории вероятностей. Изд-во МГУ, 1963 г.

МУНДАРИЖА

Сўз боши 3
Кириш 4

I боб. **Ҳодиса ва эҳтимол тушунчаси**

1-§. Элементар ҳодисалар фазоси. Ҳодисалар устида амаллар 5
2-§. Элементар ҳодисаларнинг дискрет фазоси. Эҳтимоллар фазоси 11
3-§. Эҳтимолликнинг классик таърифи 11
Комбинаторика элементлари 13
4-§. Эҳтимолнинг геометрик таърифи 18
5-§. Эҳтимолнинг статистик таърифи 21
6-§. Эҳтимоллар назариясини аксиоматик асосда қуриш . . 23
7-§. Эҳтимолнинг хоссалари 28
8-§. Шартли эҳтимоллар. Ҳодисаларнинг боғлиқсизлиги . . 30
9-§. Тўла эҳтимол формуласи. Бейес формуласи 35
I бобга доир масалалар 39

II боб. **Тажрибаларни такрорлаш. Стилтьес интеграли**

1-§. Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи 41
2-§. Муавр — Лапласнинг локал теоремаси 46
3-§. Муавр — Лапласнинг интеграл теоремаси 49
4-§. Муавр — Лаплас интеграл теоремасининг татбиқи . . . 53
5-§. Пуассон теоремаси 56
6-§. Умумлашган Бернулли схемаси 60
7-§. Стилтьес интеграли 66
II бобга доир мисоллар 71

III боб. **Тасодифий миқдорлар**

1-§. Тасодифий миқдорлар ва тақсимот функциялар 74
2-§. Кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар 86
3-§. Тасодифий миқдорларнинг функциялари 91
III бобга доир мисоллар 100

IV боб. **Тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари**

1-§. Математик кутилма 102
2-§. Дисперсия 108
3-§. Юқори тартибли моментлар ва улар учун тенгсизликлар 114

4-§. Шартли математик кутилма 118
5-§. Корреляция коэффициенти 121
6-§. Чебишев тенгсизлиги 125
IV бобга доир мисоллар 127

V боб. Катта сонлар қонуни. Яқинлашиш турлари

1-§. Катта сонлар қонуни. Яқинлашиш турлари 129
2-§. Катта сонлар қонунининг бажарилиши учун зарур ва етарли шарт 132
3-§. Катта сонларнинг кучайтирилган қонуни 135
4-§. Яқинлашиш турлари 141
V бобга доир мисоллар 147

VI боб. Характеристик функциялар

1-§. Характеристик функция ва унинг хоссалари 149
2-§. Характеристик функция орқали тақсимот функцияни ифодалаш формуласи 153
3-§. Узлуксиз мослик ҳақидаги теоремалар 157
VI бобга доир мисоллар 163

VII боб. Марказий лимит теорема

1-§. Масаланинг қўйилиши 166
2-§. Бир хил тақсимланган боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар учун марказий лимит теорема 168
3-§. Боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теорема 169
4-§. Локал лимит теорема 174
VII бобга доир мисоллар 180

VIII боб. Математик статистика элементлари

1-§. Математик статистиканинг асосий масалалари 182
2-§. Бош тўплам. Танланма тўплам 184
3-§. Вариацион қатор. Танланманинг характеристикалари ва тақсимот функцияси 186
4-§. Гливенко теоремаси 206

IX боб. Статистик баҳолар. Регрессия тенгламаси

1-§. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар 210
2-§. Параметрларни баҳолаш. Ишончлилик интервали . . . 213
3-§. Статистик гипотезалар 220
4-§. Статистик муносабатлар. Корреляция коэффициенти . . 225
Регрессия тенгламаси 225
IX бобга доир мисоллар 231

X боб. Тасодифий процесслар

1-§. Боғлиқ тажрибалар кетма-кетлиги 232
Марковнинг дискрет занжири 232
2-§. Содда Пуассон процесси 240
Иловалар 244
Адабиёт 254