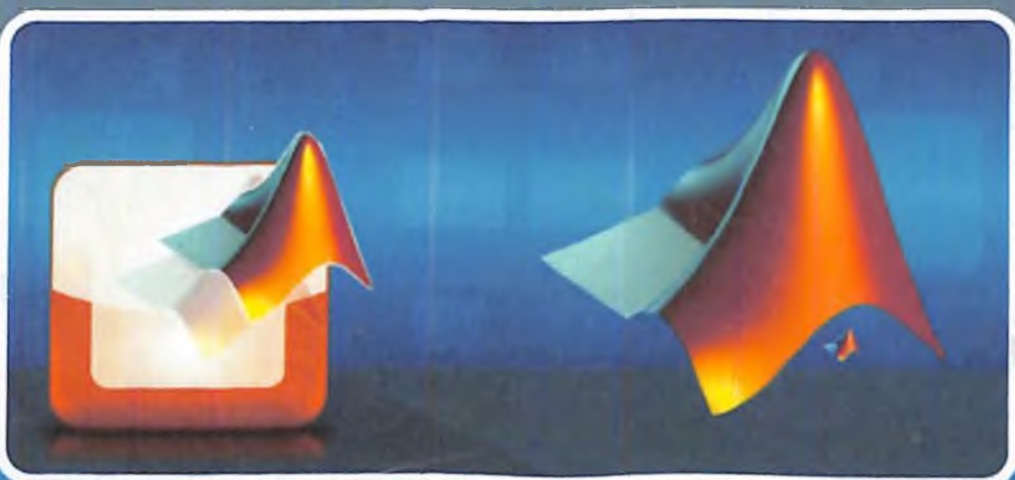
N. USMANOV, A.N. MIRZAYEV,
K.K. SEITNAZAROV

SONLI USULLAR VA DASTURLASH



TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT AXBOROT TESHNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

R.N. USMANOV, A.N. MIRZAYEV, K.K. SEITNAZAROV

SONLI USULLAR VA DASTURLASH

O‘quv qo‘llanma

UO'K: 004.3/.4(075.8)
KBK 32.973-018.2
U-73

U-73 R.N. Usmanov, A.N. Mirzayev, K.K. Seitnazarov. Sonli usullar va dasturlash. –T.: «Fan va texnologiya», 2016, 192 bet.

ISBN 978–9943–11–388–6

O'quv qo'llanma axborot texnologiyalari yo'nalishi «Dasturiy injiniring» va «Compyuter injiniring» mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan va «Sonli usullar va dasturlash» fanini o'qitishga bag'ishlangan. Mazkur oquv qo'llanmada axborot tizimlarini loyihalashtirish, ularning ekspluatatsiyasi va samaradorligini baholash kabi ko'plab amaliy masalalarni yechish jarayonida keng qo'llanilayotgan sonli usullar va algoritmlar, matematik modellashtirish, hisoblash eksperimentlari o'tkazishni tashkil qilish, bunda MATLAB tizimining hisoblash va grafik imkoniyatlaridan keng foydalangan holda olingan yechimlarni tahlil qilish, ular asosida xulosalar chiqarish va keyingi bosqichlarni rejalashtirish kabilar haqida kerakli ma'lumotlar berilgan

***

Учебное пособие посвящается систематическому изложению курса «Численные методы и программирование» и предназначается для специальностей по направлениям «Компьютер инжиниринг» и «Программный инжиниринг» и посвящается вопросам изучения причин возникновения вычислительных погрешностей, их типизации, численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, задач интерполяции и аппроксимации. При этом, изложение учебных материалов осуществляется на основе широкого применения вычислительных и графических возможностей вычислительной системы МАТЛАВ. Изложены вопросы организации, проведения, анализа и интерпретации результатов вычислительных экспериментов. Такие задачи возникают при решении прикладных задач, связанных с эксплуатацией информационных систем, оценкой их производительности, надёжности.

***

Tutorial is dedicated to a systematic presentation of the course "Numerical methods and programming" and is intended for majors in areas of "Computer engineering" and "Software engineering" and is devoted to a systematic exposition of the causes of computer errors, their typing, numerical methods of solution of algebraic and transcendental equations, systems of linear and non-linear algebraic equations, interpolation and approximation problems. At the same time, the representing of training materials is based on the widespread use of computing and graphics capabilities of the computer system MATLAB. The problems of the organization, conduct, analysis and interpretation of the results of computational experiments are considered. Such problems have to be solved in solving practical problems associated with the operation of information systems, assessment of their performance, reliability.

Taqrizchilar:

M.M. Aripov – fizika-matematika fanlari doktori, M.Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, «Informatika va tadbiqiy dasturlash» kafedrasi professori;

F.A. Raxmatov – texnika fanlari nomzodi, TATU Dasturiy injiniring fakulteti dekani.

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti ilmiy Kengashining qaroriga asosan chop etildi.

ISBN 978–9943–11–388–6

KIRISH

Insoniyat taraqqiyoti davomida ish unumini oshirish, obyektiv olamni bilish imkoniyatlarini kengaytirish, yashash sharoitlarini yaxshilash vositalarini ishlab chiqdi va takomillashtirib bordi. Masalan, ko'rish imkoniyatlarini kengaytirish maqsadida mikroskop va teleskoplar ishlab chiqilgan bo'lsa, axborot almashinuvini kuchaytirish uchun telefon, radio, televideniya, zamonaviy kompyuterlar ishlab chiqildi. Ayniqsa, elektron hisoblash mashinalarining ishlab chiqilishi inson idrokining, uning axborotga ishlov berish va biror ishda qarorlar qabul qilish imkoniyatlarini kengaytirdi.

Fizik va texnik muammolarni yechish jarayonida murakkab hisoblashlarni bajarish masalalariga duch kelinadi. Mazkur masalalar doirasiga masalan, integrallarni hisoblash, chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish va h.k., hamda murakkab masalalar – kompyuterlar vositasida o'rganilayotgan jarayonni real vaqtda, ya'ni on line rejimida modellashtirish va boshqarish kabilar kiradi.

Korxonalar, xususan aloqa korxonalari miqyosidagi axborot tizimlarining asosiy vazifasi ishlab chiqarish, ma'muriy va mahsulot ishlab chiqarish yoki aloqa korxonalari ko'rsatayotgan xizmatlarni boshqaruv jarayonlarini axborot bilan ta'min etishdir. Shu sababli axborot texnologiyalari sohasida tez rivojlanayotgan yo'nalishlar sifatida hisoblash tarmoqlarini loyihalashtirishni ko'rsatib o'tish lozim.

Bunda tarmoqning muvaffaqiyatli rivojlanishini ta'minlash maqsadida hisoblash tarmoqlarini yaratish uchun kerakli aloqa liniyalarini qurish, serverlar, ishchi stansiyalar, kommutatorlar, marshrutizatorlar va h.k.larning texnik parametrlarini hisoblash kabi masalalarni hal etishga to'g'ri keladi.

Hisoblash tarmoqlarini loyihalashtirish jarayonini uning matematik modelini yaratish asosida amalga oshirish, model asosida murakkab va ko'p variantli hisoblash eksperimentlarini amalga oshirish, bunda kerakli ma'lumotalrni ajratib olish, ular asosida kerakli xulosalar, yechimlar ishlab chiqish, hamda modellashtirish jarayonida yo'l qo'yiladigan xatoliklar mohiyatini o'rganish hozirda samarali usuldir. Aytib o'tish joizki, ko'pincha hisoblash tarmoqlarini loyihalashtirish tarmoqning matematik modeli asosida olib borilmaydi. bu esa tarmoqning tez-tez ishdan chiqishi va tarmoqdagi yuklanishlarning ortishiga olib keladi.

Fan va texnikaning jadal taraqqiyoti, axborot tizimlari, hisoblash texnikasining zamonaviy imkoniyatlari keng qamrovli dolzarb masalalarining qo'yilishi va ularni tezkor hal qilish talablarini qo'ymoqda. Zamon bilan hamnafas bo'lish mutaxassislardan axborot tizimlari, sonli usullar, kompyuter imkoniyatlari bilan bog'liq nazariy ma'lumotlar, amaliy qoidalarni bilishni talab qiladi. Zamonaviy kompyuter tizimlari, ularning dasturiy ta'minoti mutaxassis va amaliyotchilar uchun keng imkoniyatlar yaratadi. Ko'plab amaliy masalalarni yechish algoritmlari kompyuterlar dasturiy ta'minotiga kiritilgan bo'lib, bu dasturlardan foydalanish jarayonlari imkon boricha soddalashtirilgan. Bu asnoda qulaylik bilan birga, zamonaviy dolzarb muammolarni ham keltirib chiqaradi.

Muammo shundaki, ko'plab mutaxassislar uchun kompyuter sirli sandiqqa aylanib, undan mo'jiza kutishadigan bo'lib qolishgan. Lekin uning qa'rida ro'y berayotgan jarayonlar, ularni kim va qanday boshqarayotganini tushunmaydilar, eng yomoni, tushunishni istamaydilar. Vaholanki, hech qanday kompyuter, qanchalik tezkor bo'lmasin real fikrlovchi mutaxassisning o'rnini bosa olmaydi.

Har bir sohaning faqat mutaxassisgina baholashi mumkin bo'lgan jihatlari mavjud, matematik modellardagi mavjud bo'lgan umumiyatlar turli sohalar masalalari uchun o'xshash algoritmlardan foydalanish imkoniyatini beradi. Lekin har sohaning talabini algoritm va dasturda aks etdirish uchun algoritmni ham to'la tasavvur qilish kerak bo'ladi.

Shuning uchun har bir mutaxassis amaliy masalalarni sonli usullar asosida yechish jarayonida matematik modellashtirish, hisoblash eksperimentlari va axborotlarni raqamlashtirish; matematik model asosida qo'yilgan masalalarni yechish algoritmlarini tanlash yoki yaratish; algoritm asosida dastur tuzish hamda masalani yechish; olingan yechimlarni tahlil qilish, ular asosida xulosalar chiqarish va keyingi bosqichlarni rejalashtirish kabilar haqida tasavvurga ega bo'lishi kerak.

Mazkur oquv qo'llanmada amaliy masalalarni yechishda keng qo'llaniladigan asosiy usullar haqida ma'lumotlar keltirilgan. Shu bilan birga har bir usulning imkoniyatlari, tatbiq qilish doirasi, hamda amaliy namunasi keltirilgan. Ko'proq e'tibor olingan natijalarning sifati, ya'ni qanchalik ishonch bilan foydalanish mumkinligiga qaratilgan.

Shuningdek, mazkur qo'llanmada MATLAB tizimining hisoblash ,grafik va dasturlash imkoniyatlaridan foydalangan holda hisoblash usullarini qo'llash namunalarini yoritishga alohida e'tibor qaratildiki, bunday yondashuv kerakli mavzuni o'zlashtirish jarayonini osonlashtirish bilan birga, talabalarda kompyuter vositasida hisoblash tajribalari o'tkazish imkonini beradi.

Maqsad va niyatimiz kompyuter yordamida amaliy masalani yechayotgan mutaxassis radiopriyomnik ovozini sozlash, avtomobil tezligini o'zgartirish uchun qaysi muruvvatini burash kerakligini bilgandek kompyuterdagi dasturning kerakli muruvvatlarini his qilishini istaymiz.

I BOB. AMALIY MASALALARNI YECHISHDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA HISOBLASH EKSPERIMENTI TEXNOLOGIYALARIDAN FOYDALANISH

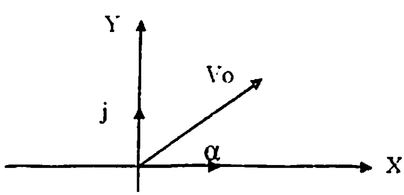
1.1. Obyekt yoki jarayonning matematik modeli

Moddiy dunyo va unda kechadigan jarayonlar ma'lum qonun va qoidalarga bo'ysunadi. Bu qonunlar jarayonlarning ayrim parametrlari orasidagi miqdoriy bog'lanishlar orqali ifodalanadi. O'rganilayotgan jarayon xoh iqtisodiy, xoh tabiiy bo'lsin bu jarayon rivojiga ta'sir etuvchi asosiy faktorlar va parametrlar ajratib olinadi. So'ngra shu faktorlar orasidagi bog'lanishlarni ifodalovchi qonun va miqdoriy munosabatlar topiladi. Tabiiy, bunda ma'lum qonun va qoidalarga suyaniladi. Bu bosqich matematik modellashtirish deyiladi.

Matematik modelashtirish keng qamrovli murakkab yo'nalish bo'lib, har bir soha, har bir jarayon alohida muammo sifatida namoyon bo'lishi mumkin. Shuning bilan birga barcha holatlar uchun umumiy bo'lgan ba'zi bog'in va jihatlar borki, ularni ifodalash jarayonida matematik modellashtirish haqida umumiy tasavvur va amaliy ko'rsatmalar olish mumkin.

Quyidagi masalani ko'raylik. Gorizont tekisligiga α burchak ostida $\overline{V_0}$ tezlik bilan otilgan va massasi m bo'lgan snaryad trayektoriyasi topilsin. Kinematika formulalari va Nyuton qonuniga ko'ra bu jarayon asosiy parametrlari $M(x(t);y(t))$ hamda V_0, α lar orasidagi munosabatlarni aniqlaymiz. Bu yerda $M\ (x(t);y(t))$ snaryadni moddiy nuqta deb qaralganda uning t vaqtdagi o'rni.

OX, OY gorizontal va vertikal koordinat o'qlari.



Koordinat boshi esa snaryad otilgan nuqtada olingan. Shuning uchun $x(0)=0;\ y(0)=0$ deb olinishi kerak.

$$\vec{V}(t)=V_x\cdot\vec{i}+V_y(t)\cdot\vec{j} \text{ deb belgilasak } V_x(t)=\frac{dx}{dt};\ V_y=\frac{dy}{dt}.$$

Nyuton qonuniga ko'ra tezlanish $\vec{a}$, ta'sir etuvchi kuchlar yig'indisi $\vec{F}$ desak, $m\vec{a}=\vec{F}$ bog'lanishga ega bo'lamiz. Bu yerda snaryadga ta'sir etuvchi kuchlar sifatida yerning tortish kuchi(mg), havoning harakatga qarshi yo'nalgan ishqalanish (k) kuchini olish mumkin. Natijada

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=-m\vec{g}-k\cdot\vec{V};\quad \vec{V}(0)=\vec{V}_0$$

ko'rinishdagi Koshi masalasini hosil qilamiz. Bu yerda k - havoning qarshilik koeffitsiyenti bo'lib,snaryad ko'ndalang kesimi yuzasi va kimyoviy tarkibiga bog'liq, shuningdek, temperaturasiga ham bog'liq bo'ladi.

Erkin tushish tezlanishi $g(y)$ esa snaryad joylashgan nuqtaning yer shari markazidan masofasiga bog'liq tarzda o'zgaruvchan bo'ladi. Bunday holatda masala murakkablashib uning yechimini topish qiyinlashib boradi. Shuning uchun matematik modelni soddalashtirish zarurati paydo bo'ladi. Faqat bu soddalashtirish masala yechimini amaliy extiyojlar uchun yaroqli bo'lishini ta'minlashi kerakligini unutmaslik kerak.

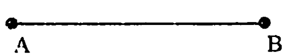
Nazariy tadqiqotlar va amaliy hisob-kitoblar shuni ko'rsatadiki $|V_0|<<7{,}8$ km/sek; $y<<100$ km bo'lgan hollarda bu masala uchun soddalashgan matematik modeldan foydalanish mumkin ekan.

Bunda tenglamani

$$m\frac{dV}{dt}=-m\vec{g};\quad V(0)=V_0$$

ko'rinishda olish mumkin va $g=9{,}81$ m/sek^2 const qiymatdan foydalanish mumkin ekan. Olingan natijalar amaliy savollarga qanoatlanarli javob beradi. Tabiiy, bu model sun'iy yo'ldoshlar, kosmik kemalarni uchirishi bilan bog'liq bo'lgan masalalar uchun to'g'ri kelmaydi.

Elektrotexnikada ham bir jinsli o'tkazgich uchun Om qonuni $I=\frac{U}{R}$



ko'rinishga ega. Bu yerda $U=\varphi_A-\varphi_B$ o'tkazgich uchlaridagi potensiallar ayirmasi (kuchlanish), R-o'tkazgichning umumiy qarshiligi (o'tkazgich uzunligi, ko'ndalang kesimi yuzasi va kimyoviy tarkibiga bog'liq). Agar o'tkazgich shakli va kimyoviy tarkibi A uchidan B uchiga o'zgarib borsa Om qonunini differensial formada olish kerak bo'ladi.

$$\frac{dU}{dx}=I\cdot R(x)$$

Bu yerda $R(x)$ o'tkazgichning x nuqtadagi solishtirma qarshiligi. Bu holda masala murakkablashgani ko'rinib turibdi. Ko'rilgan ikkala masalada ham matematik modelni tanlash soha mutaxassisi uchun qulay va uning vazifasiga kiritilgani ma'qulligi korinadi.

Matematik model tanlangandan so'ng uning yechimini topish va baholashda qo'shimcha savollar paydo bo'ladi. Masalan, birinchi masalada boshlang'ich shartlar $|F_0|$, α -qiymatlari ma'lum o'lchash vositalari yoki texnik xarakteristikalari orqali aniqlangan bo'ladi. Bu qiymatlarni ideal-aniq deyish mumkin emas. Ularni aniqlashda yo'l qo'yilgan xatolar masala yechimiga ham o'z ta'sirini o'tkazadi. Demak, olingan javobning ham qanchalik ishonchli bo'lishini baholash zarurati paydo bo'ladi. Shuningdek, hosil bo'lgan matematik model tarkibidagi tenglamalarni yechishda ham ma'lum taqribiy usullardan foydalanishga to'g'ri kelishi mumkin. Bu ham o'z navbatida masala javobiga o'z ta'sirini o'tkazadi.

Shunday holatlar yuqorida keltirilgan masala tarkibiga kiruvchi boshlang'ich qiymatlar: o'tkazgich uzunligi, ko'ndalang kesimi yuzi, solishtirma qarshiligi kabi qiymatlarni aniqlashda uchraydi. Xulosa qilib aytganda, amaliy masalalarni yechish jarayonida har bir holatda o'ziga xos bo'lgan jiddiy hamda zarur savollar paydo bo'lar ekan.

1.2. Matematik modellashtirish bosqichlari

Har bir amaliy masalani modellashtirish asosida yechish jarayoni aksariyat hollarda quyidagi bosqichlardan iborat bo'ladi:

1. Obyektdan uning matematik modeliga o'tish;
2. Tanlangan matematik model va obyekt mutanosibligini baholash;
3. Hosil bo'lgan matematik model yechimini topish algoritmini tanlash yoki tuzish;
4. Agar tanlangan usul taqribiy (iterasion) usul bo'lsa, yechimni topish va aniqligini baholash;
5. Masala tarkibiga kiruvchi boshlang'ich qiymatlarda mavjud bo'lgan xatoliklarni aniqlash va ularning masala yechimiga ta'sir darajasini baholash;
6. Olingan yechimlarni tahlil qilish, ular asosida ma'lum xulosalar chiqarish, hamda zaruratga ko'ra boshlang'ich qiymatlari yangi qiymatlarida sonli tadqiqotni (yuqorida keltirilgan bosqichlarni) o'tkazishni rejalashtirish.

7. Sonli tadqiqotlar asosida o'rganililayotgan jarayon bo'yicha amaliy tavsiyalarni berish va vizuallashtirish.

Aksariyat hollarda keltirilgan bosqichlardan $2 \div 6$ larini kompyuter zimmasiga yuklash mumkin bo'ladi. Bunda kompyuter qora quti rolini o'ynaydi va masalani yechish jarayoni.

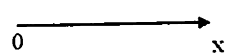
Tabiiy obyekt → Kompyuter → Xulosa

ko'rinishda aks ettiriladi. Bu sxemaning yaxshi ishlashi uchun esa u oldindan yaxshilab sozlangan musiqiy soz singari ishonchli bo'lishi kerak.

Buning uchun esa $2 \div 6$ bosqichlarni yaxshi o'rganish hamda hisoblash jarayonida ularning to'g'ri, mukammal ishlashini ta'minlashimiz kerak. Keyingi paragraf (bo'lim) larda aynan shu taraflariga e'tibor qaratilgan.

Tabiiy jarayonlar va ularning matematik modelini tuzishga ayrim namunalar keltiramiz.

1-masala. uzunligi chegaralanmagan (shartli ravishda) sterjenning bir uchidan qizdirishni boshlansa undagi temperaturaning o'zgarishi qanday kechadi. Agar sterjenning temperaturasini U deb belgilasak va sterjen nuqtalarini $0 < x < \infty$



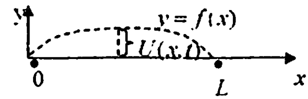
deb belgilasak $U(x,t)$ sterjenning x nuqtasidagi t vaqtdagi temperatura. Sterjen ko'ndalang kesimi kichik, o'zi bir jinsli deb hisoblasak, $U(x,t)$ ni topish uchun

$$\begin{cases} C \cdot \rho \cdot \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + F(x,t) \\ U(x,0) = U_0; U(0,t) = U_1 > U_0; U(\infty,t) = U_0 \end{cases}$$

ko'rinishdagi matematik masalani hosil qilamiz. Bu yerda C - solishtirma issiqlik sig'imi, ρ - solishtirma zichligi, k - issiqlik o'tkazish koeffitsiyenti, $F(x,t)$ - tashqi issiqlik manba'larining ta'siri. Sterjen uzunligi cheklangan deyilsa ohirgi shart o'zgaradi.

Agar $k = const$, ya'ni muhit bir jinsli, issiqlik o'tkazuvchanligi o'zgarmas bo'lsa, keltirilgan chegaraviy masala (model)ni analitik usulda yechish mumkin, aks holda, ya'ni k o'zgaruvchan bo'lsa, mazkur chegaraviy masalani analitik usulda yechib bo'lmaydi, shu sababli sonli usullar qo'llaniladi.

2-masala. Ikki uchi mahkamlangan tor simi tortib qo'yib yuborilsa u tebranma harakat qilishni boshlaydi. Tor nuqtalarini boshlang'ich holatdan siljishini ifodalovchi qiymatlar *U(x, t)*



$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$U(0,t) = 0; U(L,t) = 0; U(x,0) = f(x)$$

masala yechimi sifatida topiladi.

Bu yerda $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ bo'lib T_0-tor taranglik koeffitsiyenti, ρ-tor zichligi.

Ko'rilgan ikkala masala ham hayotda har qadamda uchrab turadigan masalalar-bo'lib ular natijalarini (yechimlarini) bevosita kuzatishga to'g'ri kelgan.

Masalan: Issiq choyga solingan qoshiq bandining qizishi, dutor, yoki rubob torini tortib qo'yib yuborilsa tebranma harakat natijasi sifatida ovoz tarqalishi. Bu jarayonlarni mukammal o'rganish uchun esa yuqoridagi matematik masalalarni yechishga to'g'ri keladi.

1.3. Hisoblash eksperimenti texnologiyasi

Modellashtirish ilmiy bilishning zamonaviy uslubi bo'lib, uning asosida tadqiq etilayotgan obyektni undan oddiyroq bo'lgan va model deb nomlanuvchi obyekt asosida tadqiq etish yotadi. Tadqiqot obyektining barcha xususiyatlarini to'la aks ettiruvchi modelini yaratish qiyin muammo bo'lib, odatda tadqiqot obyektining ayrim, vaziyatga ko'ra asosiy hisoblangan xususiyatlarini aks ettirishga e'tibor qaratiladi. Bu tadqiqot obyektining absolyutligi, tadqiqot obyekti modelining nisbiyligi bilan tavsiflanadi. Bundan, ayrim tadqiqot obyekti(tarmoq, jarayon va h.k.) uchun turli xarakterdagi modellar (fizik, matematik va h.k. modellar) tuzish mumkinligi kelib chiqadi. Modellashtirish uslubidan hozirgi zamon fanida keng foydalanilmoqda. U ilmiy tadqiqot jarayonini yengillashtiradi, ba'zi hollarda esa murakkab obyektlarni o'rganishning yagona vositasiga aylanadi. Mavhum obyekt, olishda joylashgan obyektlar, juda kichik hajmdagi obyektlarni o'rganishda modellashtirishning ahamiyati katta. Modellashtirish uslubidan fizika, astronomiya, biologiya, iqtisod fanlarida obyektning faqat ma'lum xususiyat va munosabatlarini aniqlashda ham foydalaniladi.

Modellarni tanlash vositalariga qarab asosan ikki guruhga ajratish mumkin. Bular **abstrakt va fizik** guruhlar.

Abstrakt modellar qatoriga matematik, matematik-mantiqiy va shu kabi modellar kiradi.

Fizik modellar qatoriga kichiklashtirilgan maketlar, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar va shu kabilar kiritiladi,

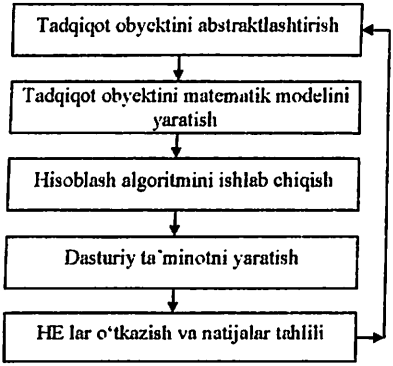
Modellarning mazmuni bilan qisqacha tanishib chiqamiz.

1. *Fizik model.* Tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzilishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o'lchami, tezligi, ko'lami) jihatidan farq qiladigan modellar, masalan, samolyot, kema, avtomobil, poyezd, GES va boshqalarning modellari fizik modelga misol bo'ladi.

Masalan, qurilishi mo'ljallangan imoratlar maketlari, loyihalashtirilayotgan samolyotlar fizik modellari, yer osti foydali qazilmalar konlari qatlamlarini aks ettiruvchi litologik modellar va h.k. Ko'pgina hollarda, iqtisodiy, ekologik yoki xavfsizlik nuqtai nazaridan tadqiqot obyektlarining fizik modellarini yaratish imkoniyatlari cheklangan bo'lishi mumkin. Jumladan, bunday tadqiqotlar o'tkazish ta'qiqlangan (masalan, inson salomatligi bilan bog'liq hollarda), xavfli (masalan, ekologik hodisalarni o'rganishda), umuman mumkin emas (masalan, astrofizik hodisalarni o'rganganda) bo'lishi mumkin

2. ***Matematik modellar*** o'rganilayotgan obyektning tuzilishi, o'zaro aloqalari, vazifasiga oid qonuniyatlarning matematik va mantiqiy-matematik tavsifidan iborat bo'lib, tajriba ma'lumotlariga ko'ra yoki mantiqiy asosda tuziladi, so'ngra tajriba yo'li bilan tekshirib ko'riladi.

O'rganilayotgan obyektni uning matematik modeli asosida tadqiq qilish, ya'ni matematik model asosida obyekt xususiyatlarini o'rganish maqsadida ko'plab eksperimentlar o'tkazish, bunda kompyuterning hisoblash, grafik, multimedia imkoniyatlaridan keng foydalanish, fizik, ximik va boshqa turdagi eksperimentlarni kompyuter asosidagi hisoblash eksperimentlari bilan almashtirish imkonini beradi. Shu sababli, hozirda ko'pgina amaliy masalalarni yechish qaralayotgan obyektlar matematik modellarini yaratish va ular ustida hisoblash eksperimentlari o'tkazishga asoslanadi. Bunday yondoshuv, akademik A.A.Samarskiy tarafidan ilgari surilgan va asoslangan, hamda intellektual yadrosi "matematik model – algoritm - dastur" uchligidan iborat bo'lgan **hisoblash eksperimenti texnologiyasining** asosini tashkil etadi. Hisoblash eksperimenti texnologiyasi asosida fan va texnikaning ko'plab nazariy va amaliy muammolari muvaffaqiyatli yechilmoqda. Buning asosiy sababi sifatida, real obyektlar xarakteristikalari va parametrlarini o'lchash bilan bog'liq fizik eksperimentlarni o'tkazish moliyaviy yoki texnik jihatlardan mumkin bo'lmagan hollarda, bunday eksperimentlarni kompyuter asosidagi hisoblash eksperimentlari bilan almashtirish imkoniyatidir. Hisoblash eksperimenti(HE) deganda, EHM yordamida o'rganilayotgan obyektlarni ularning matematik modellarini qurish va tahlil qilish asosida tadqiq qilishga asoslangan, tadqiqot uslubi tushuniladi. Eksperimentlar o'tkazish shartlari va sharoitlarining obyekt ko'rsatgichlariga ta'sirini o'rganish hisoblash eksperimentlarining mohiyatini tashkil etadi. Masalan, hisoblash tarmoqlarining unumdorligi, ishonchliligi, javob vaqti va h.k. ko'rsatgichlarga tarmoqdagi oqimlar yo'nalishi, kommutatsiya tugunlari yuklanishlari, prosessorlarning takt chastotalari va h.k. parametrlarga bog'liqligini o'rganish. HE lari o'tkazish eksperimental va nazariy tadqiqotlar doirasini kengaytirish imkonini beradi. Axborot tizimlarini (AT) loyihalashtirish jarayonida HE otkazish katta ahamiyatga ega va mazkur jarayon quyidagilarni oz ichiga oladi(1-rasm).



1-rasm. HE o'tkazish sxemasi

Mazkur sxema (1-rasm) tashkil etuvchilarini mohiyatini ko'rsatib o'tamiz:

1. Tadqiqot obyektini abstraktlashtirish quyidagilarni o'z ichiga oladi:

- Asosiy (hisobga olinadigan) va ikkinchi darajali (tashlab yuboriladigan) faktorlarni aniqlash;
- Model strukturasini aniqlash;

• Modelning ishlash chegaralarini baholash.
Natija: Tadqiqot obyektining fizik modeli.
2. Tadqiqot obyektining matematik modelini yaratish.
• Fizik modelni matematik formatga o'tkazish – formatlashtirish;
• Matematik modelni dastlabki tadqiqotini (korrektligi, yechim mavjudligi va yagonaligi) amalga oshirish;
• Matematik model ishlash chegaralarini baholash.
Natija: Tadqiqot obyektining matematik modeli.
3. Hisoblash algoritmini ishlab chiqish.
• Matematik modelni diskretlashtirish;
• Algoritm yaratish;
• Algoritmni tadqiq etish (bajarilishi, turg'unligi, murakkabligi va h.k.).
Natija: Algoritm yaratish.
4. Dasturiy vosita ishlab chiqish.
• Dasturlash texnologiyasi va vositalarini yaratish;
• Loyihalashtirish;
• Dastur tekstini yaratish;
• Dasturni saqlash.
Natija: Dastur yaratish.
5. Hisoblash eksperimentlari o'tkazish va natijalar tahlili.
• Hisoblash eksperimentlarini rejalashtirish;
• Kompyuterda hisoblashlarni amalga oshirish;
• Natijalar tahlili, o'rganilayotgan obyektdagi o'zgarishlarni tahminlash, obyekt parametrlarini optimallashtirish;
• Obyektning fizik, matematik modellari, algoritmlar va dasturiy vositalar ishlash chegaralarini, mutanosibligini aniqlash.
Natija: Tadqiqotlarning yakunlanishi, yoki obyektning fizik, matematik, algoritmik, dasturiy modellarini o'zgartirish va HE mazmunini o'zgartirish va siklik takrorlash.

II BOB. MATLAB TIZIMI VA MUHITI HAQIDA TUSHUNCHALAR

2.1. MATLAB tizimi, interfeysi va oynalari

MATLAB tizimi fan va texnikaning ixtiyoriy sohasi modellashtirish masalalarini yechishga imkon beruvchi interfaol tizimdir. Odatda **MATLAB** ni matematik hisoblashlarni avtomatlashtirish tizimi sifatida qaraladi. **MATLAB** tizimi **AQSH** ning **The MathWorks, Inc.,** kompaniyasi tomonidan 20-asrning 80-yillarida ishlab chiqilgan. **MATLAB** to'g'risidagi ma'lumotlarni www.mathworks.com, www.matlab.ru, www.exponenta.ru, www.softline.ru saytlaridan olish mumkin.

MATLAB tizimining matematik apparati matritsalarni qayta ishlashga asoslangan. Bu esa mazkur tizimning dastur tuzmasdan ma'lumotlarga ishlov berish imkonini yaratishga asoslangan alohida belgisi va xususiyatidir. **MATLABning** nomi, ya'ni **MATrix LABoratory** ham ana shunga asoslangan. **MATLABning** ya'na bir yuqori imkoniyati uning turli maqsadlarga mo'ljallangan maxsus funksiyalari, jumladan, natijalarni grafik ko'rinishda vizuallashtirishga imkon beruvchi maxsus funksiyalari bibliotekasi bo'lib, hisoblanadi. **MATLAB** tizimini foydalanuvchi o'z funksiyalari bilan ham to'ldirishi mumkin. Bu masalada, ya'ni **MATLAB** tizimini kengaytirishga dunyoning matematika, dasturlash va maxsus sohalar bo'yicha yirik ilmiy markazlari ish olib bormoqdalar.

MATLAB tizimi o'zining yuqori darajadagi dasturlash tiliga egadir. Ma'lumotlarning matritsa ko'rinishida berilishi va yuqori imkoniyatli maxsus funksiyalarining mavjudligi sababli **MATLAB** tizimining dasturlash tilini juda yuqori darajadagi algoritmik til sifatida e'tirof etiladi.

MATLAB tizimi to'rtta dasturiy komponentlardan tashkil topgan. Ular **MATLAB, Simulink, Toolbox, Blockset** tizimlaridir. **MATLAB komponenti** tizim yadrosidir, **Simulink** blokli modellashtirishga imkon beruvchi komponenta, **Toolbox, Blockset** lar esa **MATLAB** va Si **MATLAB** tizimini o'rnatish juda oson bo'lib bunda foydalanuvchi o'ziga kerakli paketlardan foydalanishi, ya'ni ulardan o'ziga kerakli paketlar tizimini hosil qilishi mumkin. Quyida ko'p ishlatiladigan kengaytma paketlari haqida ma'lumot keltiriladi (2.1-jadval).

2.1-jadval

Paket nomi	**Paket funksiyasi**
MATLAB	MATLAB yadrosi
Simulink	Simulink yadrosi
Communications Blokset	Aloqa tizimi
Communications Toolbox	Aloqa tizimi
Control System Toolbox	Boshqaruv tizimi
Curve Fitting Toolbox	Egri chiziqlar va berilganlarni yaqinlashtirish
Filter Design Toolbox	Raqamli filtrlarni loyihalashtirish
Fixed Point Toolbox	Qo'zg'almas nuqtali ma'lumotlarga ishlov berish
Optimization Toolbox	Optimizastiya usullari
Signal Processing Blockset	Signallarga ishlov berish
Spline Toolbox	Splayn funksiyalar
System Identification Toolbox	Identifikastiya usullari
Wavelet Toolbox	Veyvlet funksiyalari

MATLAB tizimi o'rnatilganda **Ishchi stolda MATLAB** tizimining uch o'lchovli grafik ko'rinishidagi belgisi hosil bo'ladi. **MATLAB** tizimini ishga tushirish uchun ana shu belgiga sichqonchani bosish yetarli.

MATLAB interfeysi.

MATLAB interfeysini quyidagi oynalar tashkil etadi.

- **Command Window(** Komandalar oynasi) – **asosiy oyna**
- **Command History** (Komandalar tarixi)
- **Current Directory** (Joriy papka)
- **Workspace** (Xotiraning ishchi sohasi)
- **Command Window** (komandalar oynasi) – MATLAB interaktiv tizimining asosiy oynasi bo'lib, bunda foydalanuvchi "savol beradi", tizim esa "javob beradi".

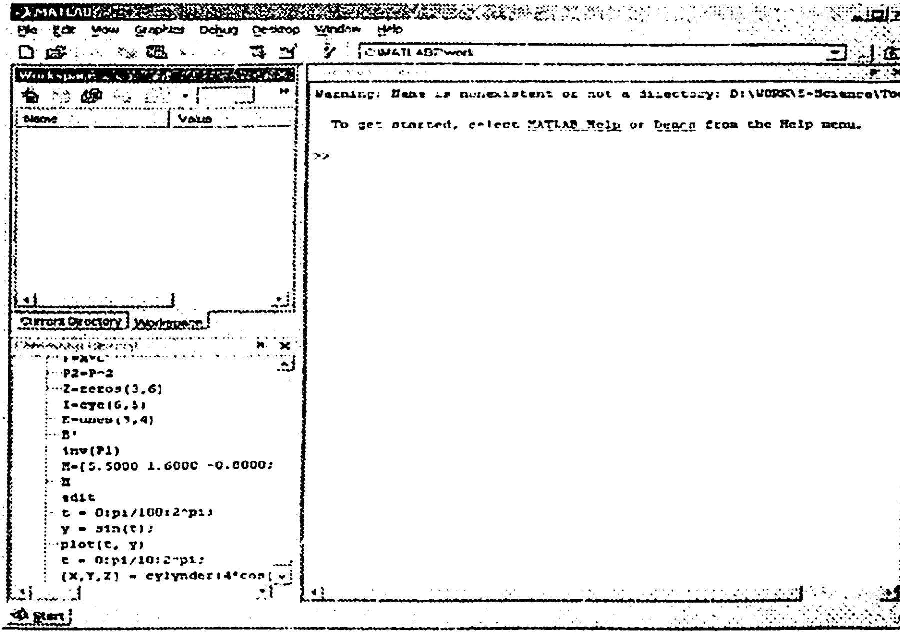
Bunda quyidagi hollarga to'xtalamiz:

1. Tizimning "savolni qabul qilishga tayyor" ekanligi belgisi qator boshidagi >> belgisi xisoblanadi.
2. Foydalanuvchi "savol beradi" (matnni kiritadi) va Enter tugmasini bosadi.

- Command History (komandadar tarixi) – bu oynada "avvalgi savollar", jumladan xatolari ro'yxati keltiriladi. MATLAB ni ishga tushirishda va ishlash jarayonida avval berilgan "savollar"ni qaytarish mumkin, buning uchun Command History oynasida kerakli "savol" ustida sichqonchani ikki marta chertish etarli. Shuningdek, "savol" yoki "savollar"ni Command Window ga o'tkazish mumkin.
- Current Directory (joriy papka) – bu oynada MATLAB instrumentlar oynasi panelida Current Directory ning ochiladigan ro'yxatida ko'rsatilgan papkaning ichidagilar ko'rsatiladi.
- Workspace (xotiraning ishchi sohasi) – bu oynada MATLAB dan chiqishgacha bo'lgan va Workspace ishchi xotirasida saqlanayotgan joriy o'zgaruvchilar ro'yxati ko'rsatiladi.

MATLAB oynasi menyusidan komandalar vazifasi:

- File (fayl) – foydalanuvchining fayllari bilan ishlashga yo'naltirilgan;
- Graphics (grafik) – joriy grafik oynasida grafik imkoniyatlardan foydalanishga yo'naltirilgan;
- Viev (Vid) - Workspace xotirasi sohasi ichidigilarni ko'rishga mo'ljallangan;
- Debug (sozlash) – dasturlash rejimida ishlashga mo'ljallangan komandalar;
- Desktop (stol) – MATLAB oynalarini tashkil qilishga mo'ljallangan komandalar;
- Window (oyna) – tez faollashtiriladigan ochiq oynalar ro'yxati;
- Help (yordam) – MATLABning yordam tizimiga murojaat qilishga mo'ljallangan.



2.1-rasm. MATLAB oynalari.

MATLAB ning yordam tizimi.MATLAB ning yordam tizimi foydalanuvchilarga quyidagi yordam vositalaridan foydalanish imkonini beradi:

- Elektron ma'lumot tizimlari;
- Namoyish misollari.

MATLAB ning yordam tizimiga help komandasi yordamida murojaat qilinadi. Bu komandaning formati:

Help <qidirilayotgan ma'lumot>,

Bu erda <qidirilayotgan ma'lumot> - MATLAB ob'ektining standart nomi: komandalar, funksiyalar.

MATLAB ning ixtiyoriy funksiyasi haqida ma'lumot olish uchun help <funksiya nomi> komandasi yoziladi. Masalan, help sin komandasi Sin(x) funksiyasi haqida ma'lumot beradi.

Barcha papkalar ro'yxati qisqacha help komandasi yordamida beriladi.

2.2. Hisoblash jarayonlarini Matlab muhitida dasturlash

Matlab tizimining amaliy tarafdan muhim xususiyatlaridan biri hisoblashlarni komandalar oynasidan foydalangan holda bevosita amalga oshirish imkoniyatidir. Foydalanuvchi joriy qatorda navbatdagi komandani terib <Enter> tugmasini bosganda, tizim berilgan komandani bajaradi va lozim bo'lsa, natijani monitor ekraniga chiqaradi. Bunda barcha berilgan komandalar Command History (Komandalar tarixi) oynasida takrorlanadi va saqlanadi. Agar bu komandalarni yangi ma'lumotlar bilan ishlatishi yoki ular yangi komandalar tuzishda foydalanish zarurati tug'ilsa,ularni Command History oynasidan Command Window oynasiga chaqirish mumkin. Matlabning bevosita hisoblash muhiti unga murakkab bo'lmagan hisoblashlarni operativ amalga oshirishda qulay hisoblanadi. Hisoblash jarayonlari bir nechta qadamdan tashkil topgan hollarda yoki ma'lum komandalardan turli variantdagi ma'lumotlar asosida foydalanishi kabi hollarda Matlabning bevosita hisoblash muhitidan foydalanish maqsadga muvofiq emas.

Buning sabablari quyidagilardir:

- Diskda hisoblashlarning yakunlangan fragmentlarining saqlanmasligi.
- Turli shartlarga bog'liq bo'lgan murakkab, jumladan, ichma-ich siklarni tashkil etishning murakkabligi;
- Bevosita hisoblash muhitida Matlabni foydalanuvchi dasturlari bilan kengaytirib bo'lmasligi.

Bu muammolarning barchasini bartaraf qilish uchun Matlab dasturlash muhitidan foydalaniladi.

Shu sababli mazkur bob Matlab muhitida dasturlar yaratish vositalarini o'rganishga bag'ishlanadi. Matlab muhitida dasturlar yaratish vositalari haqidagi to'la ma'lumot **matlab/lang** papkada saqlanadi va ular bilan **help lang** komandasi orqali tanishish mumkin.

Matlab muhitida yaratiladigan barcha dasturlar diskda saqlanadi va **m** kengaytma bilan tavsiflanadi, shu sababli ular **M**-fayllar deb ataladi.

M-fayllar ikki turga bo'linadi :

- **Function**-(fayl funksiya);
- **Script**-fayl (fayl stenariy).

M-fayllarda,ularning ko'rinishidan qat'iy nazar Matlab tilining quyidagi talablari bajarilishi lozim.

- o'zgaruvchilar e'lon qilinmaydi;
- metkalar ishlatilmaydi;

• "**go to**" tipidagi shartsiz o'tish operatorlari qatnashmaydi (metkalar ishlatilmasligi tufayli):

2.3. Matlab muhitida operator funksiya tuzish

Matlab muhitida operator funksiya yaratish Matlab paketi matematik ta'minotini kengaytirish vositasidir. Operator funksiya tashqi funksiya ham deb ataladi va quyidagicha tavsiflanadi:

- belgilanishi;
- murojaat

Tashqi funksiya **function** so'zi – operator sarlavha bilan bog'lanadi va quyidagi formatga ega:

function [Y1,Y2...] = < funksiya nomi> (X1,X2,...)

Bu erda:

< funksiya nomi> - tashqi funksiya nomi (function – fayl nomi tashqi funksiya nomi bilan ustma-ust tushadi);

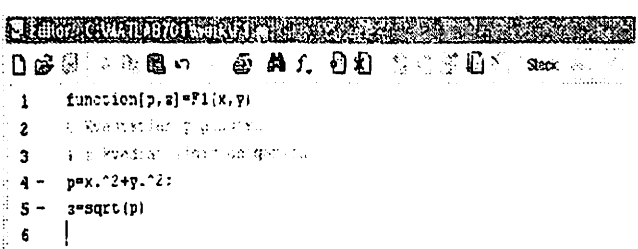
X1,X2,... – kiruvchi formal parametrlar ro'yhati oddiy qavslarga olinadi;

Y1,Y2... - chiquvchi formal parametrlar ro'yhati, kvadrat qavslarga olinadi.

function operatoridan keyin nuqtali vergul qo'yiladi. Funksiya nomidan keyin funksiya tanasi, ya'ni Y1,Y2... chiquvchi parametrlarni $X_1,X_2,...$ kiruvchi parametrlar orqali aniqlaydigan **Matlab** tilida yozilgan dastur joylashtiriladi. Kerakmas oraliq natijalarini bosmaga chiqarmaslik uchun, satrlardan so'ng nuqtali vergul qo'yiladi.

Dastur funksiyasi va parametrlari haqida ma'lumot berilishi izohlar qatorlari orqali (% belgi bilan bog'lanadi) amalga oshiriladi. Quyida operator funksiya work papkasida F1 nomli eng oddiy operator funksiya yaratish va undan Command Window oynasida, ya'ni bevosita hisoblash muhitida foydalanishga misol keltiriladi.

F1 nomli eng oddiy operator funksiyani work papkasida yaratish:



F1 operator-funksiyadan Command Window oynasida, ya'ni bevosita hisoblash muhitida foydalanishga misol:

```
>> u=F1(3,5)

s =

    5.8310

u =

    34

>> u=F1(3,4)

s =

     5

u =

    25

>>
```

Agar chiquvchi parametrlar bitta bo'lsa, qisqa format ishlatiladi, masalan, work papkasida F2 nomli qisqa formatli operator funksiya yaratamiz:

```
function z=F2(x,y,p)
% kvadratlar yig'indisi
z=x.^2+y.^2+p.^2;
```

F2 operator-funksiyadan Command Window oynasida, ya'ni bevosita hisoblash muhitida foydalanishga misol:

```
Command Window
>> F2(3,5,7)

ans =

    83

>>
```

Operator funksiyalarga murojaat script-fayl ichida bevosita hisoblash rejimida uning nomi orqali amalga oshiriladi. Bunda kiruvchi va chiquvchi formal parametrlar o‘rniga faktik parametrlar ko‘rsatiladi. Masalan:

```
Command Window
>> a=5;b=8;
>> [d,c]=F1(a,b)

z =

    9.4340


d =

    89


c =

    9.4340

>>
```

Bu yerda d,c-chiquvchi faktik parametrlar;
a,b-kiruvchi faktik parametrlar

Jumladan, operator funksiyaga (masalan F1, F2 funksiyalarga) quyidagicha murojaat qilish mumkin:

```
Command Window
>> a=2;b=3;c=5;
>> d=F1(a,b)+cos(5+F2(2,5,7))

z =

    3.6056


d =

   13.2495

>>
```

Function fayillar parametrlarining formal va faktik turlarga ajratilishining ma`nosi shuki, formal parametrlar lokal xarakterga ega, ya'ni ular xotira ishchi sohasi Work space ga tashqi funksiyaga murojaat payitida yuklanadi va hisoblashlar tugagandan so`ng ishchi soha Work space dan o`chiriladi. Faktik parametrlar esa Work space saqlanadi.

Tashqi funksiya kiruvchi va chiquvchi parametrlarni sonini quyidagi funksiyalar yordamida topiladi:

nargin ('<funksiya nomi>') % kiruvchi parametrlar soni

nargout ('<funksiya nomi>') % chiquvchi parametrlar soni

tashqi funksiya (function-fayl)ning Command window oynasidagi listingi type < function – fayl nomi> komandasi yordamida chiqariladi:

```
>> type F2

function z=F2(x,y,p)
% kvadratlar yig'indisi
z=x.^2+y.^2+p.^2;
>> |
```

function – fayl izohlar satrlarini ekranga chiqarish help <function – fayl nomi> komandasi orqali amalga oshiriladi. Misol, F1 function – fayl izohlar satirlarini ekranga chiqarish:

```
>> help F1
  Kvadratlar yigindisi
  z kvadrat ildiz chiqarish
```

Operator funksiyadan majburan chiqib ketish return operator orqali amalga oshiriladi.

2.4. script fayllar yaratish

Foydalanuvchi tomonidan tuzilgan asosiy (boshqaruvchi) dastur yoki uning qismlaridan biri script - fayl deyiladi.

script fayl yoki "asosiy dastur" tushunchalari bir xil ma`noni anglatadi.

Foydalanuvchi dasturini tuzishda, dastur boshida sarlavha – operator va tozalash operatori sls beriladi:

script sls, so`ngra Command Window oynasida

Type <script fayl nomi >.

S2 nomli eng oddiy script faylga misol:

Editor - C:\MATLAB701\work\S2.m

```
script
clc
x=0:0.1:7;
y=sin(x);
plot(x,y,'--'), grid
z=cos(x);
plot(x,z), grid
```

script fayl listingni echo on komandasi yordamida chiqariladi va echo off kommandasi yordamida chiqarilmaydi.

Function-fayldan farqli tarzda, script fayldagi barcha o'zgaruvchilar global (umumiy) hisoblanadi va Work space ning ishchi sohasida saqlanadi. Bu esa asosiy (boshqaruvchi) dasturni yagona xotira sohasiga ega mustaqil ishlovchi script fayllar (modullar) ketma-ketligi asosida yaratish imkonini beradi.

2.5. Matlab muhitida dasturlar yaratish
2.5.1. Ma'lumotlarni kiritish va chiqarish

Matlab muhitida o`zgaruvchilar qiymatlarini kiritish va chiqarish **input, menu, disp, num2str, sprintf** operatorlari orqali amalga oshiriladi.

Matlab muhitida ma`lumotlarni kiritish quyidagicha amalga oshiriladi:

<o`zgaruvchi nomi> = **input** ('<matn>').

Mazkur funstiyaning '<matn>' qismi foydalanuvchiga kiritilayotgan o'zgaruvchi haqida ma`lumot berish uchun ishlatiladi.

Misol. Bevosita hisoblash rejimida X1 sonli, X2 – belgili va X3 sonli vektor qiymatlarini kiriting:

```
>> x1=input(        )
x1=5

x1 =

     5

>>  x2=input(        )
x2='ARGUMENT'

x2 =

ARGUMENT

>> x3=input(          
 vektor=[2  4  6  8]          )

x3 =

     2     4     6     8

>> x4=input(            )
matrisa=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

x4 =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> |
```

Kiritiladigan qiymatlar ro‘yxatidan keraklisini kiritish quyidagi funksiya yordamida amalga oshiriladi:

<o‘zgaruvchi nomi>= menu (‘<menyu sarlavhasi>; <alt.1>; <alt.1>;...)

Bu erda :

<O‘zgaruvchan nomi> - oddiy o‘zgaruvchi nomi;

<alt.1>; <alt.1>;... - kiritiladigan alternativ variantlar soni (<32).

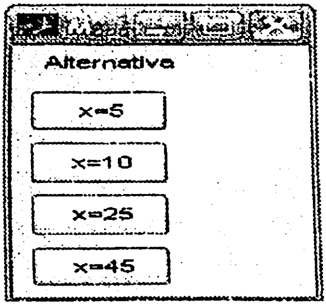
Funksiyaning ishlash tartibi:

menu funksiyasi dastur ishlashini to‘xtatadi va tugmalar ko‘rinishdagi variantlar menyusini chiqaradi, ulardan bittasi tanlanadi, so‘ngra <o‘zgaruvchi nomi> va variant tartib nomeri chiqariladi, so‘ngra dastur ishlashi davom etadi.

Menu funksiyasidan bevosita hisoblash muhitida foydalanishga misol:

```
>> x=menu(          ,      ,      ,      ,      )
```

Enter tugmasi boshlganda so'ng, ekranda menyu paydo bo'ladi (1-rasm):



So'ngra, masalan, X=7 tanlanadi, variant tartib nomeri bosmaga chiqariladi. Matlab ga ma'lumotlarni chiqarish quyidagicha tashkil etiladi:

```
x =

     3

>>
```

Command Window oynasida qiymatlar yoki matn chiqarish disp funksiyasi yordamida amalga oshiriladi:

disp («o'zgaruvchi nomi»)

yoki

disp («matn»)

Misollar:

```
>> x=10;
>> disp(x)
    10

>> x=5;a=3; b='Matlab';
>> disp([x a ])
     5     3

>> disp(b)
Matlab
>>
```

2.5.2. Tarmoqlanuvchi jarayonlarni dasturlash

Matlab tizimida tarmoqlanuvchi jarayonlar ikkiga bo'linadi.

- Shartga ko'ra tarmoqlanish if operatori yordamida amalga oshiriladi:

if <shart>
<dastur formati>
end

Bunda agar <shart> "rost" bo'lsa u holda <dastur fragmenti> bajariladi, aks holda end dan keyin dastur qismi bajariladi.

<shart> oddiy va qo'shma ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

- Oddiy shart quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

<1-ifoda>, <munosabat operastiyasi> <2-ifoda>

Bu yerda:

<1-ifoda>, <2-ifoda> sifatida o'zgarmaslar, oddiy o'zgaruvchilar yoki arifmetik ifodalar qatnashishi mumkin;

<munosabat operastiyasi> - sifatida XvaY operandlar o'rtasidagi tenglik (X==Y, yoki eq (X,Y)), teng emaslik (x~=y, yoki ne (x,y)), kichik (x<y yoki lt (x,y)), katta (x>y yoki gt (x,y)), kichik yoki teng (x<=y yoki le (x,y)), katta yoki teng (x>=y yoki ge (x,y))lar ishlatiladi.

- Qo'shma shart – mantiqiy amallar yordamida oddiy shartlardan hosil qilanadi. Mantiqiy amallarga mantiqiy qo'shish, mantiqiy ko'paytirishlar yoki inkor (not (x) yoki ~ lar kiradi.

1) oddiy shartli if operatoriga misol:

```
> x=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

x =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

> i=2;j=2;if i==j x(i,j)=0, end

x =

     1     2     3
     4     0     6
     7     8     9

> |
```

2) qo‘shma shartli if operatoriga misol:
if (i ==j)&((i+j)>50)
a (i,j)=10
end
If operatori quyidagi ko‘rinishda ham ishlatiladi:
if <shart>
<fragment>
else
<2 fragmenti>
end
Agar <shart> "rost" bo‘lsa, u holda <2 fragmenti> bajariladi.
Misol:

```
>> if i==j
x(i,j)=1;
else
x(i,j)=-1;
end
>>
>> i=2;j=3;
>> if i==j
x(i,j)=-1;
else
x(i,j)=1;
end
>>
>> |
```

Bevosita hisoblash muhitida mazkur operator quydagi formatga ega:
If <shart> <1 fragmenti> else <ffragment >, end
Misol:

```
>> i=2;j=2;
>> a=magic(3)

a =

     8     1     6
     3     5     7
     4     9     2

>> if i==j a(i,j)=0,else a(i,j)=-1,end

a =

     8     1     6
     3     0     7
     4     9     2

>>
```

If operatori bir nechta shartlarga bog'liq tarzda quyidagicha yoziladi:

```
If <1-shart>
    <1-fragment>
 elseif <2-shart>
    <2-fragment>
elseif <3-shart>
    <3-fragment>
----------
 elseif <N-1-shart>
     < N-1-fragment>
else <N-shart>
    < N-fragment>
end
```

Agar <1-shart> qiymati "rost" bo'lsa, u holda <1-fragment> bajariladi, <2-shart> qiymati rost bo'lsa, <2-fragment> bajariladi va h.k.

Bevosita hisoblash muhitida if operatorining to'la formati quydagicha yoziladi:

```
if <1-shart><1-fragment> elseif <2-shart> <2-fragment>....
elseif <3-shart> <3-fragment>... else <N-shart> ,end
```

Arfimetik, mantiqiy yoki belgili ifoda qiymatiga bog'liq ravishta tarmoqlanishni amalga oshirish sitch operatori ishlatiladi:

```
switch <ifoda>
   case <1-qiymat>
        <1-fragment>
case <2-qiymat>
       <2-fragment>
other wise
      <N-fragment>
end
```

switch operatorining bajarilishi, <ifoda> qiymatiga bog'liq, ya'ni <qiymat> ga bog'liq tarzda <fragment> ishga tushadi, agar <ifoda> qiymati berilganlarning birortasiga teng bo'lmasa u holda boshqaruv <N-fragment> ga uzatiladi.

Bevosita hisoblash rejimida sSwitch operatori quyidagi ko'rinishda ishlatiladi:

```
switch <ifoda> case <1-qiymat>,<1-fragment>....
 case <2-qiymat>, <2-fragment>.... other wise <fragment N> end
```

Masalan:

```
>> a=1;b=7;
>> switch a+b,case 6, x=1,y=3, case 8, x=1;y=7,otherwise, x=0,end

y =

     7

>>
```

2.5.3. Siklik jarayonlarni dasturlash

- Takrorlanishlari soni ma'lum bo'lgan siklik jarayonlar.

Bunday stiklik jarayonlarni for operatori orqali amalga oshiriladi:

for <o'zgaruvchi> = <bosh qiymat>:[<qadam>]: <oxirgi qiymat>
<stikl tanasi>
end

bu erda:

<o'zgaruvchi> - stikl o'zgaruvchisi nomi;

<bosh qiymat>,<oxirgi qiymat>,<qadam> - mos ravishda stikl o'zgaruvchisining boshlang'ich, oxirgi qiymati va o'zgarish qadami. Agar <qadam> 1 ga teng bo'lsa, ko'rsatilmasligi mumkin.

Operatorning ishlash prinstipi: <o'zgaruvchi> qiymatlarning <bosh qiymat> dan <oxirgi> qiymatgacha berilgan <qadam> o'zgarishiga bog'liq tarzda <stikl tanasi> yangi qiymat bilan takrorlanadi va stikl tugagandan so'ng end dan keyingi operatorga boshqaruv o'tkaziladi.

Bevosita hisoblash rejimida bunday stikl quyidagicha tashkil qilinadi:

for <o'zgaruvchi> = <bosh qiymat>:>[<qadam>]: <oxirgi qiymat>..... <stikl tanasi>. end

Misol:

```
>> x= [3 5 7 9 10]

x =

     3     5     7     9    10

>> for i=1:5, x(i)=i^2, end

x =

     1     5     7     9    10


x =

     1     4     7     9    10


x =

     1     4     9     9    10


x =

     1     4     9    16    10


x =

     1     4     9    16    25

>>
```

Takrorlanishlari soni noma'lum bo'lgan siklik jarayonlar.

Bunday jarayonlar while operatori yordamida amalga oshiriladi:

while<shart>
  <stikl tanasi>
end

Bu erda <shart>- oddiy shart.

While operatori <shart> "rost" bo'lgan hollar uchun takrorlanadi, aks holda boshqaruv End

Operatoridan keyingi operatorga o'tkaziladi.

Bevosita hisoblash rejimida while operatori formati quydagi ko'rinishga ega.

while<shart>, <stikl tanasi> End.

Misol: $S = \sum_{i=0}^{\infty}(-0,5)^{i}$ yig'indini e=0,0001 aniqlik bilan hisoblang, yig'indi qiymati va hisoblash xatoligini ekranga chiqaring.≤

```
>> n=0;so=0;ep=0.001;
n=0;so=0;ep=100;
while ep>0.001, s=so+(-0.5).^n; ep=abs(s-so);...
so=s;n=n+1,end

n =

     1


n =

     2


n =

     3


n =

     4



n =

    11

>> s

s =

    0.6670

>> |
```

2.5.4. m – fayllar yaratish, tahrirlash va saqlash

m fayllar bilan ishlash quyidagilarni o‘z ichiga oladi:

- Algoritm yaratish va dastur tuzish (asosiy dastur(script), qism dastur (function));
- Matlab muhitida m fayllarni tahrirlash va saqlash;
- M fayllarni ishga tushirish;

script va function fayllarni saqlash uchun work papkasida my book nomli papka yaratamiz. Buning uchun:

1. Matlab oynasida bosh menyuda File bo‘limi tanlanadi va New punkiti ochiladi.
2. Editor oynasida Matlab qoidalariga roiya qilgan holda dastur matni teriladi.
3. Dasturlash m fayl ko‘rinishda saqlash uchun bosh menyuda file → save as komandasi tanlanadi.

4. save as oynasida my book papkasi ochiladi. yangi fayl nomlanadi va save tugmasi bosiladi.

m fayllarni tahrirlash quydagicha amalga oshiriladi:

1. file → open tugmalari bosiladi va tahrirlanuvchi m fayl ochiladi.

2. Open oynasida my book papkasi ochiladi. unda kerakli m fayl tanlanadi va Open tugmasi bosiladi.

3. Ochilgan editor oynasida m fayl tahrirlanadi.

4. Tahrirlangan m fayl o'z nomi bilan saqlanadi.

2.6. Matlab tizimida ikki o'lchovli grafiklar yaratish va rasmiylashtirish

Matlab tizimida ikki o'lchovli grafikasi tekislikda bir o'lchovli funksiya $y=y(x)$ ning grafigini yaratishga asoslanadi. Bunda barcha kerakli ma'lumotlar matritsa shaklida jamlanadi va:

- agar x va y vektorlar bo'lsa, u holda $y=y(x)$ funksiya grafigi yaratiladi;
- agar x matritsa va u vektor bo'lsa. u holda $y=y(x_1)$. $y=y(x_2),\dots$, $y=y(x_n)$ grafiklar yaratiladi:
- agar x vektor u matritsa bo'lsa. $y=y(x_1)$, $y=y(x_2),\dots$, $y=y(x_n)$ grafiklar, ya'ni bir argumentning turli funksiyalardan grafiklari yaratiladi;
- agar x va u matritsalar bo'lsa, u holda $y=y(x)$, $y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$, $x=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ (n-ustunlar, m-satrlar) grafiklar yaratiladi.

Ikki o'lchovli grafiklar yaratish komandalari:

- plot($x_1y_1;x_2y_2,\dots$), $x_1y_1;x_2y_2,\dots$ - jufti bilan elementlari bo'yicha moslashtirilgan argumentlar va funksiyalar;
- plot(x_1,y_1,['s^1_1', 's^1_2', 's^1_3'], x_2,y_2, ['s^2_1', 's^2_2', 's^2_3'],...) bu erda s^i_1 – chiziq tipi, s^i_2 – chiziq rangi, s^i_3 – chiziq markeri.

i=1,2,...

s^i_1 ={'-', ':', '-.',...}

s^i_2 ={'y', 'm', 'c', 'r', ',...}

s^i_3 ={'.', '0', 'x', '+', '*',...}

- subplot(n,m,p),

bu yerda :

mxn – grafik oyna o'lchamlari: m-qatorlar, n-ustunlar, p-chiziladigan grafikning tartib raqami, qatorlar bo'yicha chapdan o'ngga.

Grafiklarni rasmiylashtirish uchun grid, title, xlabel, ylabel, legend, gtext, xlim, ylim funksiyalaridan foydalaniladi.

Matlabda ikki o'lchovli maxsus grafiklar stem, stairs, polar, compass, bar, pie, hist funksiyalari orqali amalga oshiriladi. Ushbu funksiyalarni qulaylik uchun $f_i(U_i)$ ko'rinishida ifodalaymiz, bunda f_i - funksiya nomi, U_i - argumentlari.

2.2-jadval

i	Funksiya nomi	Vazifasi	Umumiy ko'rinishi
1.	stem	ketma-ketliklar grafiklari	• stem(y) • stem(x,y)
2.	stairs	zinasimon funksiyalar grafiklari	• stairs(y) • stairs(x,y)
3.	bar	ustun ko'rinishidagi diagrammalar	• bar(y) • bar(x,y) • bar(x,y, width) width – ustunlar kengligi, standart-0.8
4.	pie	doirasimon diagrammalar	• pie(x, explode)
5.	hist	gistogrammalar	• hist(y,x) • N= hist (y,x), N-markazi x bo'lgan intervallarga tushuvchi y ning qiymatlari soni • [N, xout]= hist(y,x), xout- x elementlar bilan berilgan intervallar markazlari

2.7. Matlab tizimida uch o'lchovli grafika

Uch o'lchovli grafika deyilganda ikki argument (*x* va *u*) ning funksiyasi *z(x,y)* ning grafigini qurish tushuniladi.

Matlab tizimida uch o'lchovli grafiklar yaratishning umumiy jihatlari:

- agar *z* – vektor bo'lsa, *x* va *u* argumentlarning bitta grafigi chiziladi;
- agar *z* – matritsa bo'lsa, argumentlari *x* va *u*, funksiyalari *z* – matritsa ustunlari bo'lgan funksiyalar grafiklari chiziladi;
- uch o'lchovli grafiklar yaratish uchun *x* va *u* argumentlar qiymatlari asosida avvaldan *XOU* tekisligida to'r hosil qilinadi.

1.*XOU* tekisligida to'r hosil qilish.

XOU tekisligida to'r hosil qilish X va U bir xil o'lchamli matritsalar asosida meshgrid(x,y) funksiyasi vositasida amalga oshiriladi.

Bunda [X,Y] = meshgrid(x,y) bu matritsalar satrlar soni *u* vektor uzunligiga, ustunlar soni *x* vektor uzunligiga teng bo'lishi lozim.

Agar *x* va *u* vektorlar uzunliklari bir xil bo'lsa, u holda qisqa format qo'llaniladi:

[X,Y] = meshgrid(x)

2. Uch o'lchovli grafiklar yaratish uchun plot 3, mesh, meshc, meshz, surf, surfl, surfc, contour3 funksiyalaridan foydalaniladi (2.3-jadval).

```
[X,Y]=meshgrid(-3:0.1:3);Z=X.^2-2*Y.^2-X*Y; subplot
(2,2,1),plot3(X,Y,Z),grid
subplot(2,2,2),mesh(X,Y,Z),grid
subplot(2,2,3),meshz(X,Y,Z),grid,hold on
subplot(2,2,4),meshc(X,Y,Z),grid,hold on
```

Matlabning uch o'lchovli grafiklar yaratish asosiy funksiyalari

2.3-jadval

Funksiya nomi	Vazifasi va formati
plot 3	Ikki o'lchovli chiziqlar ko'rinishidagi uch o'lchovli grafiklar • plot 3 (X,Y,Z) bu erda: X,Y – XOU tekisligida to'r hosil qiluvchi matritsalar; Z – funksiya yoki matritsa. • plot 3 (X,Y,Z, ['s_1' 's_2' 's_3']) s_1, s_2, s_3 – grafik xususiyatlarini boshqarish parametrlari.
mesh	Uch o'lchovli to'rsimon grafiklar (avtomatik tarzda to'r to'r hosil qiluvchi). • mesh (X,Y,Z,C) C – ranglar politrasi. • mesh (X,Y,Z,S, ['s_1' 's_2' 's_3'])
meshc	Uch o'lchovli to'rsimon gorizontal qirqimli grafiklar. Formati mesh funksiyasi kabi
meshz	Uch o'lchovli to'rsimon vertikal qirqimli grafiklar. Formati mesh funksiyasi kabi
surf	Uch o'lchovli sirti avtomatik tarzda bo'yaladigan to'rsimon grafiklar. Formati mesh funksiyasi kabi
surfl	Uch o'lchovli sirti avtomatik tarzda bo'yaladigan va yoritiladigan to'rsimon grafiklar. surfl(X,Y,Z, 'light'), 'light' – yoritishni bildiradi.
surfc	Uch o'lchovli to'rsimon gorizontal qirqimli grafiklar. Formati mesh funksiyasi kabi
contour3	Satx chiziqli uch o'lchovli grafiklar: contour3(X,Y,Z,n), n – kontur chiziqlari soni.

Uch o'lchovli grafiklar xususiyatlarini boshqarish.

Uch o'lchovli grafiklar xususiyatlari plot 3. mesh va h.k. funksiyalarda keltirilgan ['s_1' 's_2' 's_3'] komandalari asosida boshqariladi (s_1 – chiziq ko'rinishi, s_2 – chiziq rangi. s_3 – chiziq markeri). Bunga qo'shimcha tarzda:

- colormap(c).
- colormap (<parametrning simvolik nomi>) komandalaridan foydalaniladi.

colormap(c) komandasi ishlatilganda ranglar politrasi (ko'rinishlari)ni [0:1] diapazonda mx3 o'lchamli matritsa ko'rinishida beriladi.

colormap (<parametrning simvolik nomi>) komandasidan foydalanilganda, ranglar ko'rsatiladi, ya'ni

<parametrning simvolik nomi> = {bone(kulrang-ko'k). cool (binafsha – havorang), ...}.

III BOB. AMALIY MASALALARNI SONLI YECHISH JARAYONIDA YUZAGA KELADIGAN XATOLIKLAR VA ULARNING TURLARI

3.1. Xatoliklar manbalari va turlari

Amaliy masalalarni yechish jarayonida vaziyat va imkoniyatdan kelib chiqqan holda turli xatoliklar vujudga kelishi mumkin.

Avvalo o'rganilayotgan jarayon yoki qurilmaning parametrlari orasidagi miqdoriy bog'lanishlarni ifodalovchi munosabatlar (tenglik, tengsizlik, tenglama ...) aniqlanishi kerak. Bunda jarayonning matematik modeli tuziladi. Bu bosqichda matematik model murakkablashib ketmasligi uchun ayrim faktorlar hisobga olinmasligi, bog'lanish munosabatlari biroz soddalashtirilishi mumkin. Tabiiyki, bunda haqiqiy jarayondan chetlashish va bu tufayli xatolik paydo bo'ladi. Bu xatolikni *modellashtirish xatoligi* deyiladi.

Hosil bo'lgan matematik modelga mos masala murakkab bo'lgan hollarda yechimni aniqlash uchun taqribiy usullardan foydalanishga to'g'ri kelishi mumkin. Bu holda yechim ham taqribiy aniqlanadi. Bu bosqichda hosil bo'ladigan xatolik *usul xatoligi* deyiladi.

Hisoblash jarayonida amal natijalarini o'nlik sanoq sistemasida ifodalaganimizda razryadlar soni cheklanganligi tufayli yaxlitlashga to'g'ri keladi. Masalan, $1/3 = 0{,}333\ldots \approx 0{,}3333$ deb ifodalanishi mumkin. Bunda hosil bo'ladigan xatolik *yaxlitlash xatoligi* deb ataladi. Bunday xatolik har bir amal natijasida hosil bo'lishi mumkin. Shuning uchun katta hisoblash jarayonlarida uni e'tibordan chetda qoldirish mumkin emas.

Masala tarkibiga kiruvchi parametrlar qiymatlari turli o'lchash vositalari yordamida aniqlanadi va ularning imkoniyatlariga ko'ra bu qiymatlar ma'lum xatolikka ega bo'ladi. Bu xatoliklar *bartaraf qilib bo'lmas xatoliklar* deyiladi. Chunki hisoblashlar jarayonida bu xatoliklarni tuzatib bo'lmaydi, aksincha, amallar bajarilishi jarayonida yanada ko'payib borishi mumkin. Ularni tahlil qilish orqali natijaning aniqligini baholash mumkin bo'ladi.

3.2. Absolyut va nisbiy xatoliklar tushunchalari

Biz bu yerda bartaraf qilib bo'lmas xatoliklar va ularning natijaga ta'sirini aniqlash usullari haqida to'xtalamiz. Shunday qilib, masala tarkibiga kiruvchi ayrim parametrlar qiymatlari taqribiy aniqlangan bo'lishi mumkin. Ularning qiymatlari mumkin bo'lgan xatolik chegarasini ko'rsatishi bilan beriladi. Qulaylik uchun, an'anaga ko'ra, taqriiy miqdorlarni a^*, b^*, c^* ko'rinishda, aniq miqdorlarni esa a, b, c tarzida ifodalasak

$$|a^* - a| \leq \Delta a \tag{3.1}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi Δa sonlar orasida eng kichigi *limit absolyut xatolik* deyiladi. Uni odatda amaliyotdan, o'lchash vositalari, shkalalari, yoki masala talablariga ko'ra avvaldan aniqlash mumkin. Bizga odatda taqribiy miqdorlar a^*, b^*, c^* lar beriladi. Aniq miqdor haqida esa (1) ko'rinishdagi baho, yoki undan kelib chiqadigan

$$a^* - \Delta a \leq a \leq a^* + \Delta a \tag{3.2}$$

yoki $a \in (a^* - \Delta a;\ a^* + \Delta a)$ ko'rinishdagi ma'lumotni berishimiz mumkin. Masalan, $a^* = 3{,}732;\ \Delta a = 0{,}003$ berilgan bo'lsa, aniq miqdor a esa (1.2) ga ko'ra (3,729; 3,735) intervaldagi ixtiyoriy bir son bo'lishi mumkin ekanligini tushunamiz.

Amaliyotda absolyut xatolik bilan birga, xatolikni taqribiy miqdor tarkibidagi hissasini ifodalash uchun, nisbiy xatolik tushunchasi ham kiritiladi. Ta'rifga ko'ra

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a^*|} \tag{3.3}$$

tenglik bilan aniqlangan qiymat a^* taqribiy qiymatning nisbiy xatoligi deyiladi.

Masalan, $a^* = 725{,}28;$ $\Delta a = 0{,}04$ bo'lsa (3.3) ga ko'ra $\delta a = 0{,}04/725{,}28 = 0{,}000055$ ekanligini ko'ramiz. Nisbiy xatolik yordamida taqribiy miqdor tarkibidagi xatolik foizini ham aniqlash mumkin. Buning uchun $\delta a \cdot 100\%$ formuladan foydalaniladi. Bizning misolda a^* dagi xatolik juda kichik ekanligini aks ettiradi. Shuning uchun xatolikni baholash uchun aksariyat hollarda nisbiy xatolikdan foydalangan ma'qul.

3.3. Taqribiy miqdorning ishonchli raqamlari

Yuqorida ta'kidlanganidek, aksariyat hollarda biz taqribiy miqdorlar bilan ish ko'ramiz. Masalan, $a^* = 2{,}732546$ taqribiy miqdor absolyut xatoligi $\Delta a = 0{,}0004$ ekanligi ma'lum bo'lsin. U holda aniq miqdor

$a \in (2{,}732146;\ 2{,}732946)$ degan ma'lumotga ega bo'lamiz. Demak a ning qiymati bu intervaldagi qaysi son bo'lsa ham uning dastlabki 4 ta raqami o'zgarmasligi, ya'ni ishonchli ekanligi ko'rinadi. Qolgan raqamlari esa shubhali bo'lib qolar ekan. O'nlik pozitsion sanoq sistemada ifodalangan ixtiyoriy taqribiy miqdor ishonchli raqamlarini aniqlashda quyidagi qoidadan foydalaniladi. Taqribiy miqdor

$$a^* = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k}$$

Ko'rinishda bo'lsa (bu yerda a_i son raqamlari) uni

$$a^* = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \dots + a_{-k} 10^{-k}$$

tartibda tushuniladi. Agar uning absolyut xatoligi Δa ma'lum bo'lsa a_{-k} *raqam ishonchli* bo'lishi uchun

$$\Delta a < \omega \cdot 10^{-k} \tag{3.4}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Bu yerda ω birdan kichik musbat son. ω qiymatini tanlashda taqribiy miqdor qiymatini ishonchli raqamlargacha yaxlitlash jarayonida ishonchli raqamlar yo'qolib ketmasligi, yo'qolsa ham yo'qotish bitta raqamdan ortmasligini talab qilish asos qilib olingan. Masalan,

$$a^* = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k+1} a_{-k} a_{-k-1} \dots a_{-n}$$

Taqribiy miqdor absolyut xatoligi uchun $\Delta a < \omega \cdot 10^{-k}$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda a^* ning a_{-k} raqami va undan oldingi barcha raqamlarni uchun (3.4) tengsizlik o'rinli va bu raqamlar ishonchli bo'ladi. Agar biz a^* qiymatini yaxlitlasak, ya'ni barcha shubhali raqamlarni tashlab yuborsak yaxlitlash qoidasiga ko'ra yaxlitlash xatoligi $\frac{1}{2}10^{-k}$ dan ortmaydi va umumiy xatolik $\Delta a_{yu} = \Delta a + \frac{1}{2}10^{-k}$ ga yetishi mumkin. Natijada Δa_{yu} uchun (4) tengsizlik bajarilmay qolishi mumkin, ya'ni a_{-k} raqam ishonchli bo'lmay qoladi. Uni ham yaxlitlaydigan bo'lsak yaxlitlash xatoligi $\Delta a_{xu} = \frac{1}{2}10^{-k+1}$ tartibida bo'ladi va bunda a_{-k+1} raqam ishonchli bo'lishi uchun

$$\Delta a_{yu} = \Delta a + \frac{1}{2} 10^{-k+1} < \omega \cdot 10^{-k+1} \tag{3.5}$$

tengsizlik bajarilishi kerak. (1.5) tengsizlikdan (1.4) ni hisobga olgan holda

$$\omega \cdot 10^{-k} + \frac{1}{2} 10^{-k+1} < \omega \cdot 10^{-k+1}$$

kelib chiqadi. Undan esa $\omega(10^{-k+1}-10^{-k})>\frac{1}{2}10^{-k+1}$ $10^{-k}\cdot\omega\cdot 9>5\cdot 10^{-k}$ yoki $\omega>\frac{5}{9}=0{,}555$ kelib chiqadi. Shuning uchun $\omega=0{,}56$ qiymat umumiy kelishuvga ko'ra qabul qilingan. Shunday qilib taqribiy sondagi a_{-k} raqam ishonchli bo'lishi uchun $\Delta a<0{,}56\cdot 10^{-k}$ bo'lishi kerak.

Bu qoidani yuqorida ko'rilgan misolga tatbiq qilamiz

$$a^{*}=2{,}732546;\ \Delta a=0{,}0004$$

miqdor uchun $\Delta a<0{,}56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=1,2,3$ qiymatlarda o'rinli. Demak, verguldan keyingi 3 ta raqam ishonchli ekan. 5,4,6 raqamlar esa shubhali. Ishonchli raqamlarigacha yaxlitlash qoidasiga ko'ra yaxlitlasak $a^{*}_{yax}=2{,}733$ bo'lib, $\Delta a_{yax}=0{,}000454$; $\Delta a_{yax}=0{,}000854$ bo'ladi $\Delta a_{yax}<0{,}56\cdot 10^{-3}$ tengsizlik bajarilmaydi. Demak, uni ham yaxlitlash kerak bo'ladi. Natijada $a^{*}_{yax}=2{,}73$ barcha raqamlari ishonchli bo'lar ekan.

2-misol. $b^{*}=17{,}238431$; $\Delta b=0{,}0001$ bo'lsa, $0{,}0001<0{,}56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=1,2,3$ larda o'rinli. b^{*} qiymatini ishonchli raqamlargacha yaxlitlasak

$$b^{*}_{yax}=17{,}238;\ \Delta b_{yax}=0{,}0001+0{,}000431=0{,}000531$$

bo'lib uning uchun ham $\Delta b<0{,}56\cdot 10^{-3}$ o'rinli. Demak, b^{*} barcha raqamlari ishonchli bo'lar ekan. Shunday qilib, taqribiy miqdor faqat ishonchli raqamlari bilan berilgan bo'lib, oxirgi raqami a_{-k} bo'lsa, uning absolyut xatoligi $0{,}56\cdot 10^{-k}$ dan ortmas ekan. Masalan, $c^{*}=23{,}4568$ barcha raqamlari ishonchli bo'lsa $\Delta c=0{,}56\cdot 10^{-4}$ deb olish kerak bo'ladi.

3.4. Arifmetik va funksional amallar xatoliklari

Yuqorida ta'kidlanganidek amaliy masalalar tarkibiga kiruvchi parametrlar qiymatlari aksariyat hollarda taqribiy bo'lar ekan va ularning masala yechimiga ta'sirini o'rganish muhim masalalardan biri hisoblanadi. Biz bu yerda funksiya orttirmasi yoki to'la differensiali orqali osongina kelib chiqadigan yakuniy formulani keltiramiz va undan foydalanishga misol ko'ramiz.

Agar $x_1^{*}, x_2^{*},\ldots,x_n^{*}$ taqribiy miqdorlar va ularning absolyut xatoliklari $\Delta X_1, \Delta X_2,\ldots,\Delta X_n$ ma'lum bo'lsa, ular yordamida hisoblangan

$$z^{*}=f(x_1^{*},x_2^{*},\ldots,x_n^{*})$$

taqribiy miqdor xatoligi ko'p argumentli funksiya orttirmasi formulasiga ko'ra

$$\Delta z=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\cdot\Delta x_i \qquad (3.6)$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Absolyut xatoliklar musbat bo'lganligi uchun xususiy hosilalar absolyut qiymat bo'yicha olingan. Nisbiy xatolik esa avvalgidek $\delta z = \Delta z / |z^*|$ formula bo'yicha hisoblanadi. Masalan, $x_1^* = 5.281$; $\Delta x_1 = 0{,}003$ $x_2^* = 12{,}43$; $\Delta x_2 = 0.007$ bo'lsa $z^* = x_1^{*2} \cdot x_2^{*3}$ miqdor absolyut va nisbiy xatoliklari topilsin degan masala qo'yilsa (3.6) formulaga ko'ra

$$\Delta z = |2x_1^* \cdot x_2^{*3}| \cdot \Delta x_1 + |3x_1^{*2} \cdot x_2^{*2}| \cdot \Delta x_2 = 20284{,}277 \cdot 0{,}003 + 12926{,}942 \cdot 0{,}007 =$$
$$= 60.85283 + 90.488594 = 151.34142$$

kelib chiqadi. Odatda xatoliklar ikki yoki uchta qiymatli raqamlari bilan ifodalanadi. Shuning uchvun yaxlitlab $\Delta z = 151$ deb yozish kifoya. $z^* = 53560.633$ ekanligini hisobga olsak $\delta z = 0.0028$ yoki foiz hisobida 0,28% ekanligini ko'ramiz.

Bu yerda ikki narsaga alohida e'tiborni qaratishimiz kerak. Avvalo, natija xatoligi boshlang'ich parametrlar xatoliklaridan 21571 marta ortib ketdi. Bu arzimagan ikki-uchta amalli ifodada kuzatilayotgan holat. Murakkab, ko'p amalli hisoblash jarayonlarida nima bo'lishi mumkinligini tasavvur qilish qiyin emas. Ikkinchidan, nisbiy xatoliklar bo'yicha x_1^*, x_2^* xatoliklarni 0,057%; 0,056% tashkil etadi, z^* xatoligi esa 0,28% ekanligi, nisbiy xatolik 5 baravar ortganligini ko'ramiz. Shuning uchun haqiqiy bahoni nisbiy xatoliklar orqali ifodalashga kelishilgan.

3.5. Amaliy ko'rsatmalar va topshiriqlar

1) $\sqrt{101} \approx 10$ va $\sqrt[3]{126} \approx 5$ taqribiy tengliklarni absolyut va nisbiy xatoligi bo'yicha taqqoslang. $y = \sqrt{x}$ funksiyada $x^* = 100$; $x = 101$ deb olinsa $\Delta x = 1$ bo'ladi. U holda $y^* = \sqrt{x^*}$ xatoligi uchun $\Delta y = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x^*}}$ formulaga ko'ra $\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{100}} = 0{,}05$ kelib chiqadi $\delta y = \frac{\Delta y}{y^*} = \frac{0{,}05}{10} = 0.005$ ya'ni xatolik foizi 0,5% ekanligini ko'ramiz. Xuddi shunday $Z = \sqrt[3]{x}$ funksiyadan $x^* = 125$; $x = 126$ deb olsak $\Delta x = 1$; $z^* = 5$ kelib chiqadi $\Delta z = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^{*2}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0{,}013$ $\delta z = 0{,}0027$ ekanligi xatoligi foizi esa 0,27% kelib chiqadi. Demak, absolyut xato bo'yicha ham nisbiy xatolik bo'yicha ham ikkinchi tenglik aniqroq.

2) Taqribiy miqdorlar $x^* = 4.25$, $y^* = 18.8$ ular absolyut xatoliklari $\Delta x = 0{,}008$, $\Delta y = 0{,}01$ bo'lsa x^*, y^* qiymatlarini ishnochli raqamlargacha yaxlitlang va $Z^* = 2x^* - y^{*2}$ qiymatini hisoblang, uning absolyut xatoligini toping, ishonchli raqamlari bilan ifodalang.

x^* miqdor uchun $\Delta x = 0.008 < 0.56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=1$ da o'rinli. Demak, x^* ning faqat 2 ta raqami (verguldan keyingi bitta raqami) ishonchli. Yaxlitlasak $x^*_{ax} = 4,2$; $\Delta x_{yu} = \Delta x + \Delta x_{ax} = 0.008 + 0.05 = 0.058$ bo'ladi. x^*_{ax} ishonchli raqamlarini topishda $0.058 < 0.56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=0$ da o'rinli ekanligini ko'ramiz. Demak, 2 raqami ham ishonchli emas. Yana yaxlitlasak $x^*_{ax} = 4$ $\Delta x_{yu} = 0,008 + 0.25 = 0.258$ bo'ladi va 4 raqam ishonchli ekanligini ko'ramiz. Huddi shunday y^* uchun ishonchli raqamlarini topamiz $\Delta y = 0,01 < 0.56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=1$ da o'rinli. Demak, y^* barcha raqamlari ishonchli ekan. Z^* ni hisoblaymiz $Z^* = 2\cdot 4 - 18,8^2 = -345,44$ u ning absolyut xatoligi

$$\Delta z = 2\Delta x + 2y^*\cdot\Delta y = 0.516 + 0.376 = 0.892$$

Z^* qiymatini ishonchli raqamlargacha yaxlitlaymiz $\Delta z = 0,892 < 0,56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=1$ da o'rinli, ya'ni 5 raqam ham ishonchli emas. U holda $Z^*_{ax} = -35\cdot 10^1$ ko'rinishda bo'lib, $\Delta z_{yu} = 0,892 + 4,56 = 5,452$ bo'ladi va uning uchun $5,452 < 0,56\cdot 10^1$ tengsizlik o'rinli, ya'ni Z^*_{ax} barcha raqamlari ishonchli.

3) $a^* = 18.32$; $b^* = 5,128$ ishonchli raqamlari bilan berilgan bo'lsa $Z^* = a^* + b^*$ qiymati, xatoligi, ishonchli raqamlari topilsin.

Yechish: Berilishiga ko'ra $\Delta a = 0,56\cdot 10^{-2}$, $\Delta b = 0,56\cdot 10^{-3}$. Demak $\Delta z = \Delta a + \Delta b = 0,616\cdot 10^{-2}$ $Z^* = 23,448$ bo'lib, $0,616\cdot 10^{-2} < 0,56\cdot 10^{-k}$ tengsizlik $k=1$ da o'rinli va Z^* miqdorning faqat 23.4 qismi ishonchli ekan.

4) $x^* = 10,3$; $\Delta x = 0,03$; $y^* = 25.12$; $\Delta y = 0,005$ bo'lsa $Z^* = y^*/x^* + x^{*2}$ taqribiy miqdor, uning absolyut va nisbiy xatoliklari, hamda ishonchli raqamlari aniqlansin.

$$Z^* = 108,5288$$

$$\Delta z = \left| -\frac{y^*}{x^{*2}} + 2x^* \right| \Delta x + \frac{1}{x^*}\Delta y =$$

$$= 20,36\cdot 0,03 + 0,097\cdot 0,005 = 0,6108 + 0,0048 = 0,61$$

$\delta z = \dfrac{\Delta z}{z} = 0,0056$ foizda 0,56% bo'lar ekan. Z^* ishonchli raqamlari $0,61 < 0,56\cdot 10^{-k}$ ga ko'ra $k=1$ da o'rinli, ya'ni dastlabki 2 ta raqami ishonchli. Yaxlitlasak $Z^*_{ax} = 11\cdot 10^1$; $\Delta z_{yu} = \Delta z_{ax} + \Delta z = 1,5 + 0,61 = 2,11$ bo'lar ekan.

Nazorat savollari

1. Hisoblashlardagi xatoliklar turlari va manbalari.
2. Absolyut va nisbiy xato tushunchalari.

3. Shubhali va ishonchli raqam tushunchasi.
4. Arifmetik amallar bajarishdagi absolyut va nisbiy xatoliklar.
5. Elementar funksiyalar qiymatlarini hisoblashdagi xatoliklar.

1-Topshiriq

3.1-jadvaldan guruh jurnali bo'yicha variant tanlansin va:

1. Qaysi tenglik aniqroqligini aniqlang.
2. Sonning shubhali raqamlarini aniqlang.
3. Berilgan son faqat ishonchli raqamlardan tashkil topgan bo'lsa, uning absolyut va nisbiy xatoliklarini toping.
4. Natijani hisoblang va xatoligini aniqlang.

Xatoliklar ustida arifmetik va funksional amallar bajarish topshiriqlari

3.1 - jadval

Variant №	Topshiriq
1	1) $\sqrt{44}=6.63$; $19/41=0.463$ 2) 2.8546, $\delta=0.3\%$ 3) 42.884 4) $X=\left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, bu yerda $a=4.3(\pm0.05)$, $b=17.2(\pm0.02)$, $c=8.2(\pm0.05)$, $m=12.417(\pm0.003)$, $n=8.37(\pm0.005)$
2	1) $\sqrt{30}=5.48$; $7/15=0.467$ 2) 6.4257($\pm$0.0024) 3) 0.527 4) $X=\frac{m(a+b)}{c-d}$, bu yerda $a=13.5(\pm0.02)$, $b=3.7(\pm0.02)$, $c=34.5(\pm0.03)$, $m=4.22(\pm0.004)$, $d=23.725(\pm0.005)$
3	1) $\sqrt{10.5}=3.24$; $4/17=0.235$ 2) 0.7748($\pm$0.0034) 3) 2.045 4) $X=\frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, bu yerda $a=2.754(\pm0.001)$, $b=11.7(\pm0.04)$, $c=10.536(\pm0.002)$, $m=0.16(\pm0.005)$, $d=5.32(\pm0.005)$
4	1) $\sqrt{10}=3.16$; $15/7=2.14$ 2) 0.84484, $\delta=0.4\%$ 3) 0.745 4) $X=\frac{(a+b)m}{\sqrt{c}-d}$, bu yerda $a=23.16(\pm0.02)$, $b=8.26(\pm0.005)$, $c=145.5(\pm0.08)$, $m=0.28(\pm0.006)$, $d=26.6(\pm0.2)$
5	1) $\sqrt{18}=2.19$; $6/7=0.857$ 2) 10.8441, $\delta=0.5\%$ 3) 0.288 4) $X=\frac{(a-b)c}{\sqrt{m}-n}$, bu yerda $a=27.16(\pm0.006)$, $b=5.03(\pm0.01)$, $c=3.6(\pm0.02)$, $m=12.375(\pm0.004)$, $n=86.2(\pm0.05)$

6	1) $\sqrt{6.8}=2.61$; $12/11=1.09$. 2) 0.12376(±0.00036). 3) 5.445 4) $X=\frac{a+b}{\sqrt{c-d}\,m}$ bu yerda $a=16.342(\pm0.001)$; $b=2.5(\pm0.03)$; $c=5.517(\pm0.003)$, $m=1.6(\pm0.04)$, $d=3.14(\pm0.002)$
7	1) $\sqrt{22}=4.69$; $2/21=0.095$. 2) 24.5643, $\delta=0.3\%$ 3) 4.348 4) $S=\frac{1}{54}\pi\sqrt{D^2-d^2}$, bu yerda $D=36.5(\pm0.1)$; $d=26.35(\pm0.005)$ $\pi=3.14$
8	1) $\sqrt{9.8}=3.13$; $23/15=1.53$. 2) 8.3445(±0.0022). 3) 0.576. 4) $X=\frac{m\sqrt{a-b}}{c-d}$, bu yerda $a=9.542(\pm0.001)$; $b=3.128(\pm0.002)$; $c=0.172(\pm0.001)$; $m=2.8(\pm0.03)$; $d=5.4(\pm0.02)$
9	1) $\sqrt{83}=9.11$; $6/11=0.545$. 2) 3.7834(±0.0041) 3) 0.678 4) $y=\frac{\sqrt{a-b}}{m(n-a)}$, bu yerda $a=10.82(\pm0.03)$; $b=2.786(\pm0.0006)$; $m=0.28(\pm0.006)$; $n=14.7(\pm0.06)$
10	1) $\sqrt{52}=7.21$; $17/19=0.895$. 2) 7.521, $\delta=0.12\%$ 3) 0.0748 4) $Q=\frac{(2x-1)\cdot(x+z)}{x-y}$, bu yerda $x=1.0435(\pm0.0001)$, $y=4.2(\pm0.05)$, $z=3.82(\pm0.01)$.
11	1) $\sqrt{44}=6.63$; $21/29=0.724$ 2) 23.6253(±0.0021). 3) 2.16 4) $X=\left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]$, bu yerda $a=4.2(\pm0.04)$; $b=15.32(\pm0.03)$; $c=7.5(\pm0.05)$, $m=21.82(\pm0.002)$, $n=7.56(\pm0.003)$.
12	1) $\sqrt{27}=5.19$; $50/19=2.63$ 2) 0.85637, $\delta=0.21\%$ 3) 236.58. 4) $X=\frac{m^2(a+b)}{c-d}$ bu yerda $a=18.5(\pm0.05)$, $b=5.6(\pm0.02)$; $c=26.3(\pm0.01)$; $m=5.42(\pm0.002)$, $d=14.782(\pm0.006)$

IV BOB. ALGEBRAIK VA TRANSSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH USULLARI

4.1. Taqribiy yechimning turg'unligi

Matematik masalalarda u qanday amaliy masalalardan kelib chiqqanligidan qat'iy nazar korrekt qo'yilgan va nokorrekt qo'yilgan masalalar farqlanadi. Korrekt qo'yilgan masalalar asosiy uchta xossaga ega bo'lishi kerak:

1) Masala yechimining mavjudligi
2) Masala yechimining yagonaligi
3) Masala yechimining boshlang'ich shartlaridan (berilgan qiymatlardan) uzluksiz bog'liqligi.

Bu yerda keltirilgan uchta belgidan dastlabki ikkitasi nisbatan tushunarli bo'lgani uchun, ularni har bir masalada o'ziga xos tabiiy yoki matematik shartlar asosida tekshirish mumkin. Biz bu yerda asosan yechimning mavjudlik va yagonalik shartlari bajarilgan bo'lsa yechimning boshlang'ich shartlardan uzluksiz bog'liqligi, ya'ni turg'unligini tekshirish qoidalarini ko'ramiz.

Umumiy holda turg'unlikni quyidagicha ifodalash mumkin. Masala yechimini topish uchun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlar beriladi va y yechim topiladi. Bu yerda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ixtiyoriy metrik fazo elementlari bo'lib, y ham ma'lum bir metrik fazo elementlari bo'lsin. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'rniga ulardan ozgina ya'ni $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ga farq qiluvchi qiymatlar olinsa yechim y^* chiqishi ma'lum bo'lib y va y^* orasidagi farqning $\|y-y^*\|$ normasi ham yetarli darajada kichik bo'lsa masala yechimi boshlang'ich qiymatlarning kichik o'zgarishlariga nisbatan turg'un bo'ladi deyiladi. Amaliy matematikada asosan turg'un usullardan foydaniladi.

Yuqoridagi mulohazalarni oydinlashtirish uchun bitta oddiy masalani qaraymiz.

$$100 \cdot x = b, \qquad x = ?$$

Agar $b = 200$ deb olsak $x = \frac{b}{100} = 2$ bo'ladi. Bu yerda b boshlang'ich qiymat bo'lib, uning har qanday qiymatida ham yechim bor va yagona ekanligi ayon. Turg'unlikni tekshirish uchun $\Delta b = 0{,}1$ deb olsak $b^* = 200{,}1$

va $x^{*}=\frac{200.1}{100}=2.001$ kelib chiqadi va $\Delta x=0.001$ yetarli darajada kichik ekanligini ko'ramiz.

Ikkinchi masala sifatida avvalgiga o'xshash $0.01\cdot x=b$. tenglamani olsak bu yerda ham yechim $x=\frac{b}{0.01}$ formula bo'yicha hisoblanadi. Bu yerda $b=10$ deb olsak $x=\frac{10}{0,01}=1000$ bo'lib, undagi xatolik $\Delta b=0,1$ bo'lsa $b^{*}=10.1$ bo'lib $x^{*}=\frac{10,1}{0,01}=1010$ kelib chiqadi va $\Delta x=10$ ekanligini ko'ramiz. Bu masala yechimini turg'un deb bo'lmaydi. Chunki boshlang'ich qiymatdagi kichik 0,1 ga teng o'zgarish yechimdan undan 100 barobar katta o'zgarishga olib kelayapti. Bu keltirilgan misollardan ko'zlangan maqsad amaliy masalalarni ishlash jarayonida olinayotgan yechim biror maqsadda tatbiq qilinishini hisobga olgan holda uning qanchalik ishonchli va to'g'ri ekanligini baholash yodimizdan chiqmasligi kerakligini ta'kidlashdan iborat.

Masala jiddiylashgani sari matematik model ham, uning turg'unligini baholash ham o'ziga xos mustaqil muammoga aylanib boradi. Bu muammoni hal qilmasdan amaliy xulosalar ishonchli ekanligiga kafolat bera olmaymiz. Bu yerda ko'plab amaliy masalalar uchun matematik model sifatida foydalaniladigan ayrim masalalarni ko'rib o'tamiz. Ular uchun turg'unlik shartlarini aniqlash yo'llarini ham ko'rsatib o'tamiz.

1) Differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini qaraylik:

$y'=f(x,y);\ y(x_0)=y;\ x_0<x<L$

Bu masala yechimi $y(x)$ funksiya sifatida topiladi, boshlang'ich shart sifatida esa $f(x,y)$ funksiya va y_0 qiymatlar qatnashadi. Ma'lumki, bu masala yechimi mavjud, yagona va turg'un bo'lishi uchun $f(x,y)$ funksiya x bo'yicha uzluksiz, y bo'yicha esa Lifshis shartini qanoatlantirishi kerak ekan.

2) $A\cdot\bar{x}=\bar{b}$ chiziqli algebrik tenglamalarni sistemasi. Berilgan qiymatlar A=($a_{i,j}$) n-tartibli kvadrat matritsa $\bar{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ n-o'lchovli vektorlar (ustun matritsa). Masala yechimi $\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}$ ko'rinishda ifodalanadi. Yechimning $\bar{b}$ ning o'zgarishlariga nisbatan turg'un bo'lishi uchun $\|A\|$ qiymati yetarli darajada katta bo'lishi kerak ekan. Ya'ni har

bir masala turg'unligini tekshirish uchun ma'lum bir matematik obyekt (element) va uning normasini baholash usullari kerak bo'lar ekan.

4.2. Algebraik va transsendent tenglamalar ildizlari joylashgan sohalarni ajratish

$$f(x)=0, \tag{4.1}$$

ko'rinishdagi tenglamani yechish talab qilinsin, $f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda aniqlangan va uzluksiz. Agar $f(x)$ funksiya ko'phad ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda (3.1) tenglama algebraik tenglama deyiladi, agar $f(x)$ funksiya tarkibiga elementar funksiyalar (trigonometrik, logorifmik, ko'rsatkichli va h.k.) kirgan bo'lsa, u holda (3.11) tenglama transsendent tenglama deyiladi. x ning $f(x)$ funksiyaning nolga aylantiruvchi har qanday x^* qiymati, ya'ni $f(x^*)\equiv 0$ (4.1) tenglamaning yechimi deyiladi. (3.1) tenglamaning yechimini topish oddiy hollardagina mumkin, odatda (3.1) tenglamaning koeffitsiyentlari ko'pgina hollarda taqriban aniqlangan bo'ladi va bunday hollarda (3.1) tenglamaning aniq yechimi topish masalasi ma'noga ega bo'lmaydi.

Shuningdek, $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{4.2}$$

ko'rinishdagi n-darajali tenglamalarni (bu yerda $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ berilgan koeffitsiyentlar) yechishning umumiy usuli $n>3$ bo'lganda mavjud emas, hattoki bunday usullarni topish mumkin emasligi isbotlangan.

Shu sababli (3.1) ko'rinishdagi tenglamaning taqribiy ildizlarini topish haqida so'z yuritiladi.

Bunda quyidagi ikki masalani yechish talab qilinadi:

1) ildizlarni ajratish, ya'ni shunday yetarlicha kichik oraliqlarni topish kerakki, ularning har birida tenglamaning faqat bitta ildizi yotsin:

2) ajratilgan oraliqda joylashgan ildizni hisoblash.

Tenglama ildizlari yotgan oraliqlarni ajratishda, masalan [a,b] oraliq uchun, $f(a)\cdot f(b)<0$ shart tekshiriladi, agar shu shart bajarilsa mazkur oraliqda $f(x)=0$ tenglamaning ildizi mavjud deb hisoblanadi. Shuningdek, $f(x)=0$ tenglama ildizlari yotgan oraliqlarni topishda grafik usuldan ham foydalanish mumkin. Agar $f(x)$ning ko'rinishi murakkab bo'lsa, bu holda (3.1) tenglama unga teng kuchli tenglama

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{4.3}$$

ko'rinishda yozib olinadi va $y=f_1(x)$ va $y=f_2(x)$ funksiyalar grafiklari chiziladi va bu grafiklar kesishish nuqtalari absissalari (3.1) tenglamaning taqribiy ildizlari sifatida olinadi. Bunda MATLABning grafik imkoniyatlaridan foydalanish maqsadga muvofiq.

Masalan, $x-2+\sin\frac{1}{x}=0$ tenglamaning [1.2; 2] oraliqdagi yechimi mavjudligini **sonli usulda** tekshirish talab qilinsin. Buning uchun quyidagicha yo'l tutiladi:

1. MATLAB muhitida $y=x-2+\sin\frac{1}{x}$ funksiyani ichiga olgan *func.m* foydalanuvchi funksiyasi tuziladi va $f(a)\cdot f(b)<0$ shart tekshiriladi:

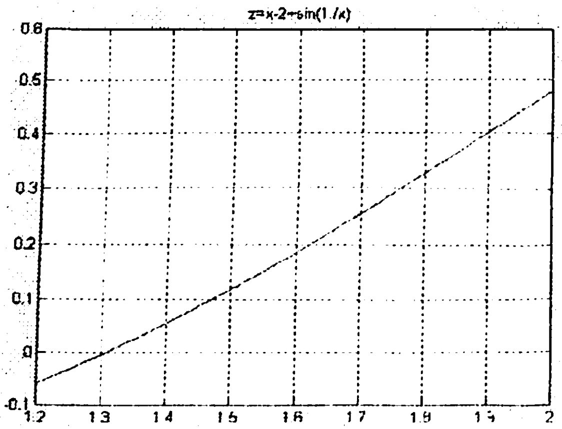
***func.m* ning listingi:**

```
function z=func(x)
z=x-2+sin(1/x);
>> func(1.2)*func(2)
ans =
 -0.0287
```

Demak, $x-2+\sin\frac{1}{x}=0$ tenglamaning [1,2; 2] oraliqda bitta ildizi mavjud.

2. **MATLAB muhitida $x-2+\sin\frac{1}{x}=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini grafik usulda tadqiq qilish**. Buning uchun, berilgan tenglamani y=$x-2+\sin\frac{1}{x}$ ko'rinishda yozib olamiz va *func.m* foydalanuvchi dasturi asosida MATLAB da quyidagi dasturni tuzamiz:

```
>> x=1.2:0.01:2;
>> plot(x,func(x)),title('z=x-2+sin(1./x)'),grid
```



Grafikdan $y = x - 2 + \sin\frac{1}{x}$ funksiya grafigi absissalar o'qini x=1,3 nuqta atrofida kesib o'tishi, bundan esa qaralayotgan tenglama yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

MATLAB tizimining hisoblash va grafik imkoniyatlaridan foydalangan holda $f(x)=0$ algebraik yoki transendent tenglama ildizlari joylashgan sohani kichraytirish, ya'ni $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ shartni qanoatlantiruvchi yangi $[a_1, b_1]$ oraliq hosil qilish masalasini ham samarali yechish mumkin. Buning uchun $f(x)=0$ tenglama ildizi joylashgan oraliqni kichraytirishga imkon beruvchi algoritm asosida operator funksiya tuziladi. Masalan, yuqorida keltirilgan $x - 2 + \sin\frac{1}{x} = 0$ tenglama ildizi joylashgan oraliqni kamaytiruvchi operator funksiya *UmOtd.m* quyidagi ko'rinishga ega:

```
function UmOtd(f,x1,x2,h);
a=x1;
b=x1+h;
while b≤x2
if feval(f,a)*feval(f,b)≤0
a
b
end;
a=b;
b=b+h;
end;
```

UmOtd.m dasturiga a=1,2 v=2 interval chegaralari va **h** =0,1 qiymatlarni kiritib, [1,2:2] oraliq o'miga yangi [1,3 ; 1,4] oraliqni hosil qilamiz.

```
>> UmOtd('func',1.2,2,0.1)
a = 1.3000
b = 1.4000
```

Nazorat savollari

1. Algebraik va transsendent tenglamalar tushunchalari.
2. Tenglama yechimi tushunchasi .
3. Tenglama ildizlarini ajratishning mohiyati.
4. Tenglamalar ildizlarini ajratish usullari.
5. Algebraik tenglamalar ildizlari joylashgan soha chegaralarini topish.

6. Tenglama ildizlari yotgan sohalarni ajratish usullari.
7. Tenglama ildizlari yotgan sohalarni ajratishning grafik usuli.
8. Tenglama ildizlari yotgan sohalarni ajratishning sonli usuli.

2-Topshiriq

1. Transsendent tenglama ildizlari yotgan sohalarni sonli usulda ajrating.
2. Transsendent tenglama ildizlari yotgan sohalarni grafik usulda ajrating

Algebraik va transsendent tenglamalar ildizlari yotgan sohalarni ajratish bo'yicha topshiriqlar

4.1 - jadval

Variant №	Topshiriq
1	$\frac{x}{\ln^2(x-1)}=3$
2	$\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}=1$
3	$\frac{\cos x}{1-\sin x}+1=0$
4	$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}+0,5=0$
5	$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^4}}-1=0$
6	$\sqrt[3]{1-x^3}=x$
7	$\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}-1=0$
8	$2\ln x-\frac{1}{x}+0.5=0$
9	$\frac{x}{tg x}-2=0$
10	$x\cdot 2^{\sqrt{x}}=3$
11	$\frac{1-x}{\ln(x^2-1)}-1=0$
12	$e^{-x}=0.01+\sqrt{x}$

4.3. Algebraik va transsendent tenglamalarni yechishning oddiy iterasiya usuli

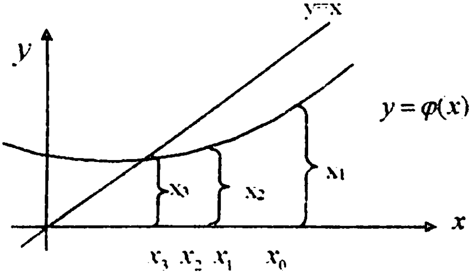
Umumiy holda $f(x)=0$ tenglama berilgan bo'lsa va uning yechimini topishning universal usuli mavjudmi degan savol qo'yilishi tabiiy.

Avvalo, $x=\varphi(x)$ ko'rinishdagi tenglama yechimini topish masalasini tadqiq qilamiz. Bu tenglama yechimi geometrik nuqtai nazardan $y=x$ to'g'ri chiziq va $y=f(x)$ egri chiziq grafiklari kesishgan nuqta abssissasiga teng bo'lar ekan. Haqiqatdan bu nuqta koordinatalari x_0, y_0 bo'lsa, $y_0=x_0$ va $y_0=\varphi(x_0)$ bo'lishi kerak. Bundan esa $x_0=\varphi(x_0)$ ekanligi, ya'ni x_0 qiymat $x=\varphi(x)$ tenglama yechimi ekanligi kelib chiqadi. Geometrik yoki boshqa mulohazalarga ko'ra, $f(x)=0$ tenglama yechimi $x_0 \in (a;b)$ oraliqda ekanligi aniqlangan bo'lsin va (a,b) oraliqda tenglamaning faqat bitta x_0 ildizi mavjud ekanligi ham ma'lum bo'lsin.

x ildizni aniqlashda quyidagi iterasion jarayon tavsiya qilinadi:

- $f(x)=0$ tenglamaning (a,b) oraliqda yechimi bor yoki yo'qligi algebraik ($f(a)\cdot f(b)<0$ shart asosida) yoki grafik usulda aniqlanadi;
- (a,b) oraliqdan boshlang'ich taqribiy qiymatni tanlaymiz: $x_0 \in (a;b)$.

Bunda x_0 ni ildizning dastlabki taqribiy qiymati deb tushunish kerak. Ildizning keyingi taqribiy qiymatlarini esa $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2,3,...$ formula bo'yicha hisoblaymiz. Agar ko'rilayotgan $(a;b)$ oraliqda $\varphi'(x) \le k \le 1$ shart bajarilsa hisoblangan x_n ketma-ketlik qiymatlari tenglama ildiziga intilar ekan.



4.1-rasm

4.1-rasmda $x_0, x_1, x_2, \ldots$ qiymatlar hisoblanish tartibi va ko'rinishi ifodalangan, hamda x_n ketma-ketlik ildizga intilayotganligi aks etgan.

Bu xulosani analitik usulda ham ifodalash mumkin, buning uchun $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ va $x_n = \varphi(x_{n-1})$ tengliklarni bir-biridan ayirib $x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$ ga kelamiz.

Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga ko'ra esa $\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\theta) \cdot (x_n - x_{n-1})$, $\theta \in (x_{n-1}, x_n)$. Bundan esa $|x_n - x_{n+1}| \le k \cdot |x_n - x_{n-1}|$ rekkurent tengsizlik kelib chiqadi. Uning o'ng tarafini $n=1$ gacha davom ettirsak $|x_{n+1} - x_n| < k^n \cdot |x_1 - x_0| \to 0$, $n \to \infty$ da ekanligi kelib chiqadi. Chunki, $k < 1$ shart bajarilishi ma'lum.

Lekin $|\varphi'(x)| \le k < 1$ shart bajarilmagan holda keltirilgan oddiy iteratsiya jarayoni ildizga yaqinlashmasligi, hattoki uzoqlashib ketishi ham mumkin.

4.4. Algebraik va transcendent tenglamalarni yechishning oraliqni ikkiga bo'lish usuli

$f(x) = 0$ tenglama berilgan, $f(x) \in [a,b]$ va $f(a) \cdot f(b) < 0$ shart bajarilgan bo'lsin. $f(x) = 0$ tenglamaning $[a,b]$ oraliqqa tegishli yechimini topish uchun, $[a,b]$ oraliqni teng ikkiga bo'lamiz: $[a, x_0]$ va $[x_0, b]$, bunda $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

Agar $f(x_0) = 0$, u holda x_0 tenglamaning yechimi, aks holda, ya'ni $f(x_0) \ne 0$ bo'lganda, $[a, x_0]$ va $[x_0, b]$ oraliqlardan biri, ya'ni chegara nuqtalarida $f(x)$ funksiya ishoralari turlicha bo'lgani olinadi. Olingan oraliq yana ikkiga bo'linadi va yuqoridagi kabi ish yuritiladi. Oraliqlarni teng ikkiga bo'lish jarayoni chegara nuqtalarida funksiya qiymatlari turlicha ishorali bo'lgan va oraliq uzunligi avvaldan berilgan ε dan kichik bo'lganiga qadar olib boriladi.

Misol. $\sin x^2 + \cos x^2 - 10x = 0$ tenglamani [0;1] oraliqdagi ildizini 0.00001 aniqlikda toping. Yechish jarayoni quyida keltirilgan va MATLAB tizimida tuzilgan dastur asosida amalga oshiriladi.

```
function z=Func(x)
z= sin(x.^2)+cos(x.^2)-10*x; % Funksiyaning berilishi
function Div2(f,x1,x2,esp);
% oraliqni tehg ikki ga bo'lish usuli
% f-funksiya berilishidan iborat m-fayl nomi
```

```
% x1 – Yechim qidirilishi holatida chap chegara kesimi
% x2 - Yechim qidirilishi holatida chap chegara kesimi
% eps – Yechim aniqligi
L=x2-x1;
k=0;
% k – iteratsiyalar soni
while L>esp
c=(x2+x1)/2;
k=k+1; if feval(f,c)*feval(f,x1)<0
% feval(f,c) - x=s qiymat nuqtasida operator hisoblash
% Fayl nomi f qator o'zgaruvchisida saqlanadi
x2=c;else x1=c;end;
L=x2-x1;end;
x=c
k
fx=feval(f,c)
% fx - qiymat
```

Yechish:

```
x=3:0.1:4;
plot(x, Func(x)); grid on
Div2('Func', 0, 1, 0.00001)
x =
  0.1010
k =
  7
fx = 1.5719e-005
```

Tenglamaning taqribiy yechimi x= 0,1010, iteratsiyalar soni 7, xatolik darajasi 1.5719e-005 ekani listingda keltirilgan.

4.5. Algebraik va transsendent tenglamalarni yechishning Nyuton usuli

Bu usulni ixtiyoriy $f(x)=0$ ko'rinishdagi tenglamaga tatbiq qilish mumkin. Tenglama yagona ildizi joylashgan oraliqni $(a;b)$ ajratib olamiz va shu oraliqdan ixtiyoriy $x_0 \in (a;b)$ boshlang'ich qiymatni olamiz. Keyingi qadam qiymatlarini esa $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2,3,...$ formula bo'yicha hisoblaymiz. Hisoblash jarayoni $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ bo'lguncha davom ettiriladi.

Agar $(a;b)$ oraliqda $f'(x)\neq 0$ ekanligi ma'lum bo'lsa bu usul yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatdan ham bu yerda $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ bo'lgani uchun $|f'(x)| \le k < 1$ shartni tekshirib ko'ramiz $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$ $[a,b]$ ildiz atrofidagi oraliq bo'lib $x\in(a,b)$ da $f(x)=0$ bo'lgani uchun $x\in(a;b)$ da $f'(x)$ kichik bo'lishi aniq ekan. Keltirilgan usul Nyuton usuli bo'lib amaliyotda eng keng qo'llaniladigan effektiv va turg'un usullardan hisoblanadi.

Buning namoyishi sifatida $x^2-100=0$ tenglamani olsak, uning ildizi $\alpha=10$ ekani ma'lum, $\alpha\in(5;15)$ deb va boshlang'ich ildiz sifatida $x_0=5$ ni olib, Nyuton usulini tatbiq qilib ko'ramiz.

Bu yerda $f(x)=x^2-100$; $f'(x)=2x$ bo'lib, hisoblash formulasi $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-100}{2x_n} = \dfrac{x_n^2+100}{2x_n}$ ko'rinishni oladi va $x_0=5$ deb hisoblasak

$$x_1 = \frac{5^2+100}{2\cdot 5} = 12{,}5;\quad x_2 = \frac{12{,}5^2+100}{25} = 10{,}25\quad x_3 = \frac{10{,}25^2+100}{20{,}5} = 10{,}003.$$

Agar $x_0=15$ deb olinsa yanada yaxshiroq natijalar kelib chiqadi.

$$x_1 = \frac{15^2+100}{30} = 10{,}83\quad x_2 = \frac{10{,}83^2+100}{21{,}66} = 10{,}032\quad x_3 = \frac{10{,}032^2+100}{20{,}064} = 10{,}00005$$

Bu yerda alohida urg'u berilmoqchi bo'lgan holat boshlang'ich qiymat haqiqiy qiymatidan olis bo'lsa ham hisoblash jarayoni davomida juda tez haqiqiy ildizga yaqinlashib borar ekan. Hattoki biror qadam x_k hisoblashda xatolikka yo'l qo'yilsa ham hisoblash jarayoni bu xatolikni ham tekislab ketar ekan.

Misol. Nyuton usuli bilan $f(x)=\sin x - x + 0{,}15 = 0$ tenglamaning $[0{,}5;1]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon=10^{-4}$ aniqlik bilan toping.

Yechish.

1) $f'(x)$ ni topamiz: $f'(x)=\cos x - 1$

2) Hisoblash formulasini hosil qilamiz:

$x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ formulaga asosan,

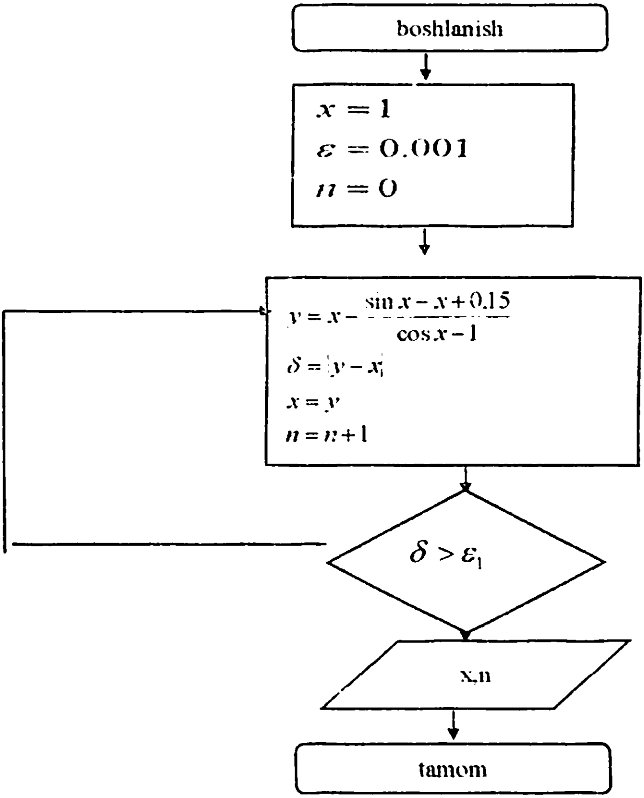
$$x_n = x_{n-1} - \frac{\sin x_{n-1} - x_{n-1} + 0{,}15}{\cos x_{n-1} - 1},\quad n=1,2,3,...$$

3) Boshlang'ich yaqinlashish x_0 ni $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ shartidan topamiz. $f''(x) = -\sin x$, bunda $\forall x\in[0{,}5;1]: f''(x)<0$ bo'lgani uchun, x_0 ni shunday topish kerakki $f(x)<0$ bo'lsin. $x_0=1$ bo'lganda $f(x_0)<0$, ya'ni $f(1)\cdot f''(1)>0$.

4) $|f'(x)|$ ning $[0.5;1]$ oraliqdagi eng kichik qiymati $m_1 = |\cos 0.5 - 1| = |0.88 - 1| = 0.12$. $|f''(x)|$ ning $[0.5;1]$ oraliqdagi eng katta qiymati $M_2 = |-\sin x| = |-\sin 1| = 0.84$.

$\frac{2m_1}{M_2} \geq 10^{-2}$ shartni tekshiramiz: $\frac{2 \cdot 0.12}{0,84} = \frac{2}{7} > 10^{-2}$.

Aniqlik $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-1} \cdot \varepsilon$ formula bilan tekshiriladi.



Algebraik yoki transcendent tenglamani Nyuton usulida yechish algoritmi

Mazkur algoritmning MATLAB tizimida joriy etilishi:

1. $y = \sin x - x + 0.15$ funksiyani hisoblash funksiyasi Func.m tuziladi:

function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;

2. $y=f(x)$ funksiyaning birinchi hosilasini hisoblash funksiyasi Func1.m tuziladi:

```
function z=Func1(x)
z=2*x-cos(x);
```

3. $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi hosilasini hisoblash funksiyasi Func2.m tuziladi:

```
function z=Func2(x)
z=2+sin(x);
```

4.Nyuton usuli asosida $f(x)=0$ tenglamani yechish algoritmini asosida **Nuton.m funksiyasi tuziladi.**

```
function Nuton(f,f1,f2,a,b,esp)
if feval(f,a)*feval(f2,a)>0
  x0=a;
else
  x0=b;
end;
x1=x0-feval(f,x0)/feval(f1,x0);
k=1;
while abs(x1-x0)>esp
  x0=x1;
  x1=x0-feval(f,x0)/feval(f1,x0);
  k=k+1;
end;
x=x1
k
fx=feval(f,x1)
```

5. Mazkur dastur yordamida $f(x)=\sin x-x+0.15=0$ tenglamaning $[0{,}5;1]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon=10^{-4}$ aniqlik bilan topish quyidagicha komanda yordamida amalga oshiriladi:

```
>>Nuton('func','Func1','Func2',0.5,1,0.0001)
x =
  1.4096
k =
  4
fx =
  1.3949e-008
```

4.6. Algebraik va transsendent tenglamalarni MATLAB muhitida yechish funksiyalari

MATLAB muhitida algebraik va transsendent tenglamalarni yechish *solve*(), *fzero*(), *roots*() funksiyalari orqali amalga oshiriladi.

$f(x)=0$ algebraik yoki transsendent tenglama berilgan bo'lsin.

1. *solve*() funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

solve('$f(x)$',x)

bunda:

'$f(x)$' - yechiladigan tenglama;

x - noma'lum.

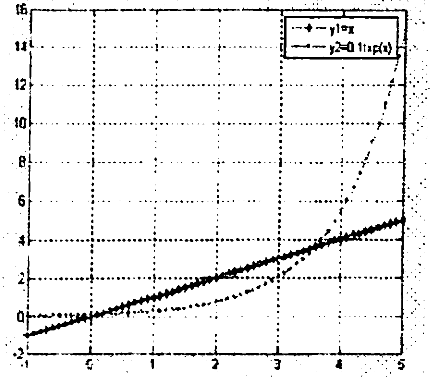
solve() funksiyasini ishlatganda ildizning boshlang'ich qiymati yoki ildiz joylashgan sohani ajratilgani haqidagi ma'lumot so'ralmaydi, shu sababli ba'zi hollarda, masalan, transsendent tenglama yechishda tenglamaning barcha ildizlarini topish imkoniyati bo'lmaydi.

Misollar: Grafik usulda $x-0.1e^x=0$ tenglama ildizlari yotgan oraliqlarni ajratamiz. Buning uchun berilgan tenglamani $x=0.1e^x$ ko'rinishda yozib olamiz va $y_1=x$, $y_2=0.1e^x$ funksiyalar grafigini chizamiz.

```
>> x= -1:0.1:5;
>> y1=x;y2=0.1*exp(x);
>> plot(x,y1,'-*',x,y2,'--.'),legend('y1=x','y2=0.1exp(x)'),grid
```

Tenglamaning bitta ildizi $[0,1]$ oraliqda, ikkinchi ildizi $[3,4]$ oraliqdaligini aniqlab olamiz (4.2-rasm)

$[0,1]$ oraliq uchun $x_0=1$, $[3,4]$ oraliq uchun $x_0=3$ deb olamiz.



4.2- rasm.

2)

```
>> solve('x-0.1*exp(x)',x)
 ans =
 .11183255915896296483356945682027
 3.5771520639572972184093919635120
```

3)

```
>> solve('x-0.1*exp(x)',x)
 ans =
 .11183255915896296483356945682027
 3.5771520639572972184093919635120
```

2. *fzero()* funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

fzero('f(x)',x)

fzero('f(x)',[x1,x2])

fzero('f(x)',x,tol,trace)

fzero('f(x)',[x1,x2],tol)

fzero('f(x)',[x1,x2],tol,trace)

bu yerda

'$f(x)$' - yechiladigan tenglama;

x - qidirilayotgan yechimning boshlang'ich qiymati;

$[x1,x2]$ - ildiz ajratilgan soha;

tol - berilgan aniqlik;

trace - ildizning har bir iteratsiyadagi qiymati.

1-misol.

$e^x-10x=0$ tenglama ildizlari $\varepsilon=0.0001$ aniqlikda topilsin.

```
>> fzero('exp(x)-10.*x'.[0,1],0.0001)
ans =
 0.1118
```

1) va ildizlarni

```
>> fzero('exp(x)-10.*x',[0,1],0.0001)
>> fzero('exp(x)-10.*x',[3,4],0.0001)
```

solve() va *fzero()* funksiyalarini ishlatganda quyidagilarga e'tibor berish lozim:

- Ildizlar joylashgan soha haqidagi ma'lumotlardan foydalangani uchun *solve()* funksiyasi tenglamaning barcha ildizlarini topishga imkon bermaydi;
- *fzero()* funksiyasi tenglamaning faqat haqiqiy ildizlarini topish imkonini beradi.

Demak. MATLAB muhitida algebraik va transsendent tenglamalarni yechish quyidagi bosqichlardan iborat bo'lishi lozim:

- MATLABning grafik imkoniyatlaridan foydalanilgan holda ildizlar joylashgan sohalarni ajratish:
- Tenglamaning haqiqiy ildizlarini berilgan aniqlikda *fzero()* funksiyasi yordamida topish:
- Tenglamaning kompleks ildizlarini *solve()* funksiyasi yordamida topish.

Nazorat savollari

1. Algebraik va transsendent tenglamalarni sonli yechish bosqichlari.
2. Algebraik va transsendent tenglamalarni sonli yechish usullari.
3. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli.
4. Nyuton usuli.
5. Vatarlar usuli.
6. Iteratsiya usuli.
7. $x=f(x)$ tenglamani ildizi mavjud $[a, b]$ oraliqda iteratsiya usulida yechish jarayonida iteratsiya jarayonining yaqinlashuvchi bo'lishining yetarlilik sharti.
8. Oraliqni teng ikkiga bo'lishning algoritmini keltiring.
9. Vatarlar usulining algoritmini keltiring.
10. Nyuton usulining algoritmini keltiring.

3-topshiriq

4.2-jadvaldan mos variant olinsin va quyidagilar bajarilsin:

1. Tenglamani oraliqni teng ikkiga bo'lish, iteratsiyalar va Nyuton usullari bilan 0.001 aniqlikda yeching.
2. Ildizning taqribiy qiymati.iteratsiyalar soni va xatolikni bosmaga chiqaring.
3. Usullarni solishtiring va solishtirish natijalarini keltiring.
4. Tenglamani MATLAB muhitida yeching va natijalar listingini keltiring.

Algebraik va transsendent tenglamalarni sonli yechish mavzusi bo‘yicha topshiriqlar

4.2-jadval

Variant nomeri	Topshiriq	Variant nomeri	Topshiriq
1	$\frac{x}{\ln^2(x-1)}=3$	7	$\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}-1=0$
2	$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=1$	8	$2\ln x-\frac{1}{x}+0.5=0$
3	$\frac{\cos x}{1-\sin x}+1=0$	9	$\frac{x}{\mathrm{tg}\,x}-2=0$
4	$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}+0.5=0$	10	$x\cdot 2^{\sqrt{x}}=3$
5	$\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^3}}-1=0$	11	$\frac{1-x}{\ln(x^2-1)}-1=0$
6	$\sqrt[3]{1-x^3}=x$	12	$e^{-x}=0.01+\sqrt{x}$

V BOB. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMALARINI YECHISHNING ANIQ VA TAQRIBIY USULLARI

5.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarinining sartlanganligini tekshirish

n-ta noma'lumli m-ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (5.1)$$

Bu yerda $x_1, x_2, \ldots x_n$ – noma'lumlar, a_{ij} – koeffisiyentlar, $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$, b_i - ozod hadlar, $i = 1,2,\ldots,m$.

(5.1) sistemada quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$m = n$, tenglamalar va noma'lumlar soni teng;

$m < n$, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik;

$m > n$, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan katta.

(5.1) sistemaning yechimi sifatida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning ixtiyoriy shunday to'plami olinadiki, bu to'plamni (5.2) da o'rniga qo'yilsa, sistemaning har bir tenglamasi ayniyatga aylansin. Quyidagi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

matritsalarni kiritsak (4.1) sistema quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$AX = B \qquad (5.2)$$

$\tilde{A} = A + B$ matritsaga (5.1) yoki (5.1) sistemaning kengaytirilgan matritsasi deyiladi. $r(A)$ va $r(\tilde{A})$ (5.2) sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining rangi bo'lsin.

Kronekker-Kapelli teoremasi. Agar(5.1) yoki (5.2) sistema uchun $r(A) = r(\tilde{A})$ munosabat o'rinli bo'lsa, (5.2) sistema birgalikda deyiladi, bunda agar:

a) $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ bo'lsa, (5.2) sistema yagona yechimga ega bo'ladi;

b) $r(A)=r(\bar{A})<n$ bo'lsa, (5.2) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi;

v) $r(A)\neq r(\bar{A})$ bo'lsa, (5.2) sistema yechimga ega emas deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemalarini(ChATS) yechishning turli usullari mavjud. Bular orasida aniq usullar (Kramer, Gauss, matritsa) va taqribiy-iteratsion usullar (oddiy iteratsiya usuli, Zeydel usuli) ko'p qo'llaniladi. Kramer teoremasiga ko'ra, agar (5.2) sistema koeffisiyentlari matritsasi determinanti $|A|$ noldan farqli bo'lsa, (5.2) sistema yechimga ega. Kramer usulidan tartibi yuqori bo'lmagan tenglamalar sistemalarini yechishda foydalanish mumkin. $n>4$ hollarda yuqori tartibli determinantlar soni ortadi, ularni hisoblash n ortgan sari muammoga aylanib boradi.

Gauss usuliga ko'ra, (4.2) sistemaning kengaytirilgan matritsasi elementar shakl almashtirishlar asosida zinasimon ko'rinishga keltiriladi va sistemaning ildizlari ketma-ket topiladi. Gauss usulini qo'llaganda, agar (5.2) sistema asosiy matritsasi yomon shartlangan bo'lsa, sistemani yechishda xatoliklarga yo'l qo'yiladi.

5.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning aniq usullari

5.2.1.Kramer usuli

ChATS ni yechishda agar n kichik bo'lsa aniq usullardan foydalangan ma'qul. Eng keng qo'llaniladigan aniq usullarga Kramer, matritsalar va Gauss usullari kiradi. Xususan Kramer usuliga ko'ra avval

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix};\ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},\dots,\ \Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

hisoblanadi va $\Delta\neq 0$ bo'lganda sistema ildizlari quyidagicha topiladi.

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\dots,\ x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

formula bo'yicha hisoblash mumkin.

Misol.

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=6 \\ x_1-2x_2+2x_3=1\end{cases}$$

sistemani MATLAB muhitida Kramer usuli asosida yechamiz.

MATLABda yechish quyidagicha amalga oshiriladi:

```
>>A=[1 1 -2; 2 3 1; 1 -2 2];
>> B=[0 ;6;1];
>> d=det(A)
d =
  19
>> AX1=[0 1 -2;6 3 1; 1 -2 2];
>>x1=det(AX1)/d
x1 =
   1
>> AX2=[1 0 -2;2 6 1;1 1 2];
>>x2=det(AX2)/d
x2 =
   1
>> AX3=[1 1 0; 2 3 6; 1 -2 1];
>> x3=det (AX3)/d
x3 =
   1
```

Tekshirish:

```
>>x=[x1;x2;x3];
>> A*x
ans =
   0
   6
   1
```

5.2.2. Matritsalar usuli

Agar teskari matritsa A^{-1} mavjud bo'lsa sistema yechimini $\bar{X} = A^{-1} \cdot \bar{B}$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Tabiiy sistema tartibi n ortgan sari yuqorida keltirilgan, ChATS ni yechishda ishlatilgan aniq usullardagi amallar soni keskin ortib boradi. Xususan Kramer usuli bo'yicha $n=5$ bo'lgan holda 6ta determinant hisoblash kerak bo'lib har bir determinantda 480 ko'paytirish 120 ta qo'shish amalini bajarish kerak bo'ladi. Matritsa usulida ham amallar soni shu tartibda ortib boradi. Bir narsani yodda tutishimiz kerakki, amallar soni ortgan sari natija aniqligi kamayib boradi. Chunki boshlang'ich qiymatlardagi arzimagan xatolar ham qadamba-qadam ortib boradi. Shuningdek, hisoblashlardagi yaxlitlash xatoligi ham amal sayin ko'payib boradi.

Shuning uchun hisoblashlar jarayonining turg'unligini alohida tekshirishga to'g'ri keladi. Bu esa ChATS matritsasi normasi bilan bog'liq bo'lar ekan.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning yana bir keng tarqalgan usuli matritsalar usuli bo'lib, mazkur usulga ko'ra (5.2) sistemaning chap va o'ng qismlari A matritsaning teskarisi A^{-1} ga ko'paytiriladi.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \qquad (5.3)$$

$A^{-1} \cdot A = E$ - birlik matritsa ekanligidan, yechim

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (5.4)$$

formula ko'rinishida qidiriladi.

$$AX=B \qquad (5.5)$$

ChATS berilgan bo'lsin, bunda A-ChATSning asosiy matritsasi, B-ozod hadlar vektori, X - noma'lumlar vektori. A^{-1} - A matritsaga teskari matritsa bo'lsin.

(5.2) sistemaning ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytirsak:

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$ yoki $X = A^{-1} \cdot B$ni hosil qilamiz.

MATLAB muhitida A matritsaning teskarisi inv(A) funksiya orqali topiladi, shunga ko'ra:

$X = inv(A) \cdot B$

komandasi ChATSni matritsa usuli bilan yechish imkonini beradi.

Masalan, avvalgi misoldagi ChATSni matritsalar usulida yechishni ko'raylik:

Yechish:

```
>>A=[1 1 -2; 2 3 1; 1 -2 2];
>>B=[0; 6; 1];
>>X=inv(A)*B
X =
  1
  1
  1
```

Tekshirish:

```
B=A*X
B =
  0
  6
  1
```

ChATSlarini yechishning aniq usullarida ko'plab arifmetik amallarni bajarish kerak. Amallarni hattoki kompyuterda bajarilganda ham ma'lum xonagacha raqamlar qoldirilib oraliq natijalarni yaxlitlashga to'g'ri keladi. Bunda tabiiy yaxlitlash xatoligi paydo bo'ladi va keyingi amallarda ko'payib borishi mumkin. Avvalgi bandda ko'rganimizdek, kichkina xato bora-bora natijani to'g'ri qismini butunlay berkitib yuborishi mumkin.

5.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini Gauss usulida yechish

Arifmetik amallar xatoliklari orasida bo'linma xatoligi bo'luvchi kichik bo'lgan hollarda ayniqsa, katta bo'lib ketishi mumkin ekan. Shuning uchun hisoblash jarayonida kichik songa bo'lish amallarini yo'qotishga harakat qilinadi. Bu g'oya Gauss tomonidan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini noma'lumlarni yo'qotish usuli bilan yechish jarayoniga tatbiq qilingan. Bu usul amalda quyidagi tarzda bajariladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

sistema yechimi mavjud va yagona bo'lgan holda a_{ij} koeffisiyentlar orasidan modul bo'yicha eng kattasi a_{lt} topiladi, uni bosh element deb ataladi. Bu sistemani yana avvalgidek ko'rinishda (yani x_tни x_1 deb x_1ни x_t deb) ifodalasak (1) singari sistema hosil bo'ladi. Faqat bu yerda $|a_{11}| = \max|a_{ij}|$ bo'ladi (1) sistemaning 1-tenglamasini a_{11} ga bo'lib yuboramiz

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani mos ravishda $-a_{21}, -a_{31}, \dots, -a_{n1}$ ga ko'paytirib keyingi tenglamalarga qo'shsak sistema

$$\begin{cases} x_1 + b_{11}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = C_1 \\ \quad b_{22}x_2 + \dots b_{2n}x_n = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n = C_n \end{cases}$$

ko'rinishni oladi.

Bu yerda $b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; C_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ $\quad b_{jk} = a_{jk} - b_{1k} \cdot a_{j1};\ C_j = b_j - C_1 \cdot a_{j1}$.

Keyingi sistemaning so'nggi n-1 ta tenglamasi uchun yuqoridgi shakl almashtirishlarni qollaymiz. Unda faqat x_1 yo'q. yani noma'lumlar soni $n-1$ ta. Bu sistemaga ham avvalgidek jarayonni tatbiq qilib x_2 noma'lum oldidagi koeffitsiyentni bosh element sifatida olamiz,ya'ni $|b_{22}| = \max|b_{i2}|$. aks holda matritsa elementlari o'mini almashtirishga to'g'ri keladi.

Bu jarayonni $n-1$ marta tatbiq qilsak sistema

$$\begin{cases} x_1 + d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n = C_1 \\ x_2 + d_{23}x_3 + d_{2n}x_n = C_2 \\ x_3 + \ldots + d_{3n}x_n = C_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_n \end{cases}$$

ko'rinishni oladi.

Bu sistemada noma'lumlarni ketma-ket $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$ tartibda hisoblash mumkin bo'ladi.Amaliy hisob-kitoblardan bu usul effektiv va ishonchli ekanligi isbotlangan. Hisoblash jarayonini to'la avtomatlashtirish va kompyuterda ishlash mumkin.

Gauss usulining bosqichlarini to'la namoyish qilish uchun quyidagi misolni ko'ramiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 29 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases} \xrightarrow[\text{qadam}]{1-} \begin{cases} 10x_2 + 3x_1 + 2x_3 = 29 \\ 3x_2 + 2x_1 - 4x_3 - 4 \\ -2x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

birinchi qadamda bosh element tanlanib, u birinchi o'ringa o'tkazildi. Uning yordamida 2-,3- tenglamalardan x_2 noma'lum yo'qotiladi.

$$\begin{cases} x_2 + 0{,}3x_1 + 0{,}2x_3 = 2{,}9 & \times(-3)\ \times 2 \\ 3x_2 + 2x_1 - 4x_3 = 4 & + \\ -2x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 9 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 0{,}3x_1 + 0{,}2x_3 = 2{,}9 \\ 1{,}1x_1 - 4{,}6x_3 = -12{,}7 \\ 4{,}6x_1 + 3{,}4x_3 = 14{,}8 \end{cases}$$

Bu yerda ham so'nggi ikki tenglamadan bosh element tanlaymiz va x_1 noma'lumni 3- tenglamadan yo'qotamiz

$$\begin{cases} 4{,}6x_1 + 3{,}4x_3 = 14{,}8 \\ 1{,}1x_1 - 4{,}6x_3 = 12{,}7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3{,}4}{4.6+}x_3 = \frac{14{,}8}{4.6} \cdot (-1.1) \\ \qquad + \\ 1.1x_1 - 4{,}6x_3 = -12.7 \end{cases}$$

Bunda so'nggi uchinchi tenglama

$$\left(-\frac{3.4\cdot 1.1}{4.6}-4.6\right)\cdot x_3=-12.7-\frac{14.8\cdot 1.1}{4,6}$$

ko'rinishni oladi.

Amallarni bajarilsa $\frac{-3.74-21.16}{4.6}\cdot x_3=\frac{-16.28-58.42}{4.6}\Rightarrow -24,9\cdot x_3=-74,7$ yoki $x_3=3$ kelib chiqadi. Boshlang'ich sistema esa uchburchakli ko'rinishga keladi, yani $\begin{cases} x_2+0.3x_1+0.2x_3=2.9 \\ x_1+\frac{3.4}{4.6}x_3=\frac{14.8}{4.6} \\ x_3=3 \end{cases}$

Bu sistemadan pastdan tepaga qarab

$$x_3=3,\quad x_1=1,\quad x_2=2.$$

ekanligini topamiz n katta bo'lganda bu jarayonni avtomatlashtirish kerak. MATLAB muhitida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish **rref ( )** funksiyasi orqali amalga oshiriladi. Yuqorida keltirilgan misolni MATLAB muhitida **rref ( )** funksiyasidan foydalanib yechish quyidagicha amalga oshiriladi:

```
>>A=[2 3 -4; 3 10 2; 4 -2 3];
>> B=[-4; 29; 9];
>>C=[A B];
>> x=rref(C)
x =
  1  0  0  1
  0  1  0  2
  0  0  1  3
>> xx=x(:,4)
xx =
  1
  2
  3
```

Tekshirish :

```
>> A*xx
ans =
  -4
  29
  9
```

5.4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini MATLAB muhitida yechish funksiyalari

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini MATLABning *solve()* funksiyasi yordamida yechish mumkin.

solve() funksiya ChATS uchun quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$solve('f_1','f_2',....,'f_i')$

yoki

$solve('f_1','f_2',....,'f_i',x_1,x_2,.....,x_n)$,

bu yerda

$'f_i'$ - sistemaning i-tenglamasi, $i=1,2,...,n$;

x_i - i-noma'lum, $i=1,2,....,n$.

5.5. Yomon shartlangan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari va ularni yechish

Agar $\|A\|$ juda kichik bo'lsa sistemani ishlashda hatto aniq usullarda ham arzimagan yaxlitlash xatoliklari natijani butunlay o'zgartirib yuborishi mumkin ekan. Shuning uchun yomon shartlangan sistemalarni yechishda juda ehtiyot bo'lish kerak. Bunday sistemalar uchun maxsus nazariya va ishlash usullari ham yaratilgan.

Yomon shartlangan sistemaga ibratli namuna keltiramiz, toki har bir hisobchiga qanchalik ehtiyotkor bo'lish kerakligini eslatib tursin:

$$\begin{cases} 0.01x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5.01 \\ 0.01x_2 + 2x_3 = 2.01 \\ 0.01x_3 = 0.01 \end{cases}$$

Sistema yechimlari $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ekanligi ko'rinib turibdi. Sistema matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0.01 & 2 & 3 \\ 0 & 0.01 & 2 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}; \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0,01-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0.01-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{vmatrix} = 0$$

xos sonlari barchasi bir xil $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.01$ kichik. Demak, sistema yomon shartlangan.

Uning ta'sirini o'rganish uchun faraz qilaylik, oxirgi tenglama o'ng tarafini hisoblashda kichik 0,01 xatoga yo'l qo'yildi va sistema

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5.01 \\ 0,01x_2 + 2x_3 = 2.01 \\ 0,01x_3 = 0,02 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib qolgan bo'lsin. U holda yechimlar

$$x_3 = \frac{0{,}02}{0{,}01} = 2; \quad x_2 = \frac{2{,}01 - 2\cdot 2}{0{,}01} = \frac{-1{,}99}{0{,}01} = -199$$

$$x_1 = \frac{5{,}01 - \lambda\cdot(-1{,}99) - 3\cdot 2}{0{,}01} = \frac{5{,}01 + 398 - 6}{0{,}01} = 39701$$

Bundan ko'rinadiki, arzimagan 0,01 xatolik natijani butunlay o'zgartirib yuboradi.

5.6. Siyraklashgan matritsali sistemalarni yechish usullari

Uch diagonallik sistemalar uchun progonka va matritsali progonka usullari. Progonka usulining turg'unligi.

Texnik va tabiiy jarayonlar bilan bog'liq ko'plab masalalarning matematik modellari differensial tenglamalar bilan bog'liq chegaraviy yoki boshlang'ich shartli masalalarga keltiriladi. Bu turdagi uzluksiz matematik modellardan diskret matematik modellarga o'tishda esa analitik ko'rinishdagi funksiyaning jadval ko'rinishdagi variantini izlashga o'tiladi. Bunda noma'lum funksiya hosilalari chekli ayrimlar bilan almashtiriladi.

Natijada noma'lum funksiya $y(x)$ning $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ lar uchun quyidagi ko'rinishdagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{00}y_0 + a_{01}y_1 = b_0 \\ a_{10}y_0 + a_{11}y_2 + = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1\,n-2}y_{n-2} + a_{n-1\,n-1}y_{n-1} + a_{n-1n}y_n = b_{n-1} \\ a_{n\,n-1}y_{n-1} + a_{nn}y_n = b_n \end{cases} \tag{5.6}$$

Bu sistema matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5.7)$$

uchdiogonallik koʻrinishga ega boʻladi. (5.7) matritsaning bosh diagonali va unga parallel chiziq boʻylab yuqori va pastdagi elementlar noldan farqli boʻlib, qolgan elementlar barchasi nolga teng boʻlar ekan.

Bunday sistemalarni yechishning aniq usullaridan birini ifodalaymiz. (5.6) dastlabki tenglamasidan $y_0=-\frac{a_{01}}{a_{00}}y_1+\frac{b_0}{a_{00}}$ yani $y_0=\alpha_1 y_1+\beta_1$ formulani hosil qilamiz. Uni (1) ning ikkinchi tenglamasiga qoʻysak $a_{10}(\alpha_1 y_1+\beta_1)+a_{11}y_1+a_{12}y_2=b_1 k$ tenglama hosil boʻladi. Bundan $y_1=\alpha_2 y_2+\beta_2$ formulani chiqarish mumkin.

Bu yerda

$$\alpha_2=-\frac{a_{12}}{a_{10}\cdot\alpha_1+a_{11}}, \qquad \beta_2=\frac{b_1-a_{10}\beta}{a_{10}\cdot\alpha_1+a_{11}}$$

Shunday usulda i - tenglamadan

$$y_i=\alpha_{i+1}y_{i-1}+\beta_{i-1} \qquad (5.8)$$

formulani hosil qilamiz α_{i+1},β_{i+1} larni hisoblash uchun esa

$$\alpha_{i-1}=-\frac{a_{ij}+1}{a_{ii-1}\cdot\alpha_i+a_{ii}}; \qquad \beta_{i+1}=\frac{b_i-a_{ii-1}\cdot\beta_i}{a_{ii-1}\cdot\alpha_i+a_{ii}} \qquad i=1,2,\dots,n-1\,, \qquad (5.9)$$

rekkurent formulalar kelib chiqadi. Bu (5.9) formulalar boʻyicha progonka koeffisiyentlarni hisoblash toʻgʻri progonka deyiladi. Soʻnggi tenglama bilan birgalikda

$$\begin{cases} y_{n-1}=\alpha_n y_n+\beta_n \\ a_{nn-1}y_{n-1}+a_{nn}y_n=b_n \end{cases}$$

hosil boʻlgan sistemadan y_n qiymatini aniqlaymiz. Soʻngra $y_i=\alpha_{i+1}\ y_{i+1}+\beta_{i-1}$ $i=n-1,\dots,2,1,0$ boʻyicha $y_{n-1},y_{n-2},\dots,y_2,y_1,y_0$ lar topiladi.

Ularni hisoblash jarayoni teskari progonka deyiladi. (5.6) sistema uchun tatbiq qilinadigan bu usul progonka usuli deyiladi. Bu usuldagi hisoblash jarayoni turgʻun boʻlishi uchun (5.7) matritsaning diagonal elementlari modul boʻyicha shu qator qolgan elementlar modullari yigʻindisidan kam boʻlmasligi kerak ekan. Amaliy masalalardan kelib chiqadigan (5.6) sistemalar uchun bu shart aksariyat hollarda bajariladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun bir namuna keltiramiz. Amaliy mohiyatidan chetlashgan holda quyidagi chegaraviy masalani qaraymiz

$$
\begin{cases}
y'' + P(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x) & a<x<b \\
P\cdot y'|_{x=a} = q_1 & \\
P(\alpha)\cdot y'|_{x=b} = q_2 &
\end{cases}
\qquad (5.10)
$$

Umumiy holda bu masala analitik yechimini topish yo‘li yo‘q. $[a,b]$ oraliqni $h=\frac{b-a}{n}$ qadam bilan $x_i = a+ih \quad i=0,1,2,\dots,n$ nuqtalar yordamida n ta bo`lakka bo`lamiz.

Funksiya qiymatlarini $y(x_i)=y_i$ deb belgilasak (5.10) masalaning diskret analogi

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+P_i\cdot\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}+q_i\cdot y_i=f_i, \quad i=1,2,\dots,n-1 \\
P_0\cdot\dfrac{y_1-y_0}{h}=q_1 \\
P_n\cdot\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=q_2
\end{cases}
\qquad (5.11)
$$

sistema hosil bo`ladi. Bu sistema aynan (5.6) ko‘rinishga ega va progonka usuli bilan yechilishi mumkin. Tabiiy (5.11) masala (5.10)ning diskret analogi bo‘lib uning yechimi (5.10) ning taqribiy yechimi sifatida olinadi. Bunda xatolik $h$ kichiklashgan sari kamaya boradi va aksariyat hollarda $h^2$ tartibida bo`ladi.

Agar ikki o`lchovli sohadagi jarayon uchun qaralayotgan masalani olsak noma`lum funksiya $z(x,y)$ ikki argumentli bo‘lib uni jadval ko‘rinishida aniqlash uchun (1) ga o‘xshash lekin matritsali sistema hosil bo`ladi.

$$
\begin{cases}
A_{00}+Z_{00}+A_{01}+Z_1=b_0 \\
A_{10}+Z_0+A_{11}+Z_1+A_{12}+Z_2=b_2 \\
A_{21}+Z_1+A_{22}+Z_2+A_{23}+Z_3=b_2 \\
------------------ \\
------------------ \\
A_{n-1,n-2}Z_{n-2}+A_{n-1,n-1}Z_{n-1}+A_{n-1,n}Z_n=b_{n-1} \\
A_{n,n-1}Z_{n-1}+A_{n,n}Z_n=b_n
\end{cases}
\qquad (5.12)
$$

Bu sistemaning (5.6) dan farqli A_{ij} lar matritsalar Z_i va b_i lar esa ustun matritsalardan iborat bo`ladi. (5.12) sistema uchun ham (5.6) singari progonka usulini tuzish mumkin. Faqat bu endi matritsali progonka usuli bo`ladi. Bu usullar ko`p yillardan beri turli sohalardagi amaliy masalalarni yechishda samarali tadbiq etib kelinmoqda.

5.7. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarining yaxshi shartlanganligini tadqiq qilish

Chiziqli fazolarda norma kiritilgan bo'lsa, yani $x(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ va $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$, kvadrat matritsalar $A(n \times n)$ shu fazoda chiziqli akslantirishni ifodalaydi, yani ixtiyoriy $\bar{x} \in X$ uchun $A \cdot \bar{x} = y(y_1, y_2, ..., y_n) \in X$ bo'ladi. Faqat $\bar{X}, \bar{Y}$ larni ustun matritsa sifatida ifodalash kerak. A matritsa yoki unga mos chiziqli akslantirish xos vektor va xos sonlari $A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$ tenglikka ko'ra aniqlanadi.

Bu tenglamaning notrivial yechimlari mavjud bo'ladigan λ-qiymatlari matritsaning xos sonlari, bu qiymatlarga mos $\bar{x}$-yechimlar esa xos vektorlari deyiladi.

$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$ yoki $(A - \lambda \cdot E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$ tenglama notrivial yechimga ega bo'lishi uchun esa $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ bo'lishi kerak. Bu tenglama matritsaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

$A(n \times n)$ bo'lsa bu tenglama n-darajali algebraik tenglama bo'lib uning roppa rosa n ta ildizi mavjud ekanligi algebraning asosiy teoremasidan ma'lum. Har bir λ_i xos songa A matritsaning bitta xos vektori mos keladi.

A matritsa normasi deb normasi birga teng bo'lgan barcha $\bar{x}$ vektorlar orasida $\|A\bar{x}\|$ normasi eng katta bo'lgan qiymatga aytiladi, yani $\|A\| = \sup\limits_{\|\bar{x}\|=1} \|A \cdot \bar{x}\|$.

Bu tarifga ko'ra quyidagi tengsizlik o'rinli ekanligini ham ko'ramiz.

$$\|A\bar{x}\| \le \|A\| \cdot \|\bar{x}\|$$

Ma'lum mulohazalar asosida $\|A\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$ ekanligi ham keltirib chiqarilgan.

ChATSni yechishda tatbiq qilinadigan iterasion (ketma-ket yaqinlashish) usullarining barchasida tatbiq qilinadigan asosiy formula

$$\bar{x}^{(k+1)} = B^{-1} \cdot \bar{b} - B^{-1} \cdot C \cdot \bar{x}^{(k)}, \quad k = 1,2,3,...$$

ko'rinishiga ega bo'ladi.

Bu yerda A matritsa $A = B + C$ formulaga ko'ra ikki qismga ajratilgan. Bu jarayon yaqinlashish shartini aniqlash uchun

$$\bar{x}^{(k)} = B^{-1} \cdot \bar{b} - B^{-1} \cdot C \cdot \bar{x}^{(k-1)}, \quad k = 1,2,3,...$$

formulani yuqoridagidan ayirsak

$$\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} = B^{-1} \cdot C \cdot \left(\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Ikki tarafdan norma olinsa

$$\left\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\right\|=\left\|B^{-1}\cdot C\cdot\left(\bar{x}^{(k-1)}-\bar{x}^{(k)}\right)\right\|\le\left\|B^{-1}\cdot C\right\|\cdot\left\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}^{(k-1)}\right\|$$

Bu tengsizlik rekkurent formula sifatida o'ng tarafi davom etdirilsa $\left\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\right\|\le\left\|B^{-1}\cdot C\right\|^{k}\cdot\left\|\bar{x}^{(1)}-\bar{x}^{0}\right\|$ tengsizlikni hosil qilamiz.

Bu yerdan $\left\|B^{-1}C\right\|<1$ bo'lsa, $k\to\infty$ da $\left\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\right\|\to 0$ ekanligi, yani jarayon yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, matritsa normasini aniqlansa ChATS uchun tanlangan iterasion jarayon yaqinlashuvchimi, yo'qmi degan savolga javob topishimiz mumkin ekan. Buning uchun matritsaning modul bo'yicha eng katta xos sonini topilsa yetarli. Agar matritsa xos sonlarining $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ deb belgilasak, bu yerda qulaylik uchun $|\lambda_1|>|\lambda_2|>\dots>|\lambda_n|$ bo'ladigan tartibda joylashtirilgan $\lambda_1=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$. U holda $\|A\|=|\lambda_1|$ bo'ladi.

Ma'lumki, matritsaning barcha λ_i xos sonlariga mos keluvchi xos vektorlar $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n$ chiziqli fazoda bazis tashkil etadi. Ixtiyoriy $\bar{a}$ vektorni bu xos vektorlar bo'yicha yoyib $\bar{A}=\alpha_1\bar{x}_1+\alpha_2\bar{x}_2+\dots+\alpha_n\bar{x}_n$ ko'rinishda ifodalasak bo'ladi. Yoki matritsa ko'rinishda

$$A\cdot\bar{a}=\alpha_1\cdot\lambda_1\cdot\bar{x}_1+\alpha_2\cdot\lambda_2\cdot\bar{x}_2+\dots+\alpha_n\cdot\lambda_n\cdot\bar{x}_n$$

$$A^k\cdot\bar{a}=\alpha_1\cdot\lambda_1^k\cdot\bar{x}_1+\alpha_2\cdot\lambda_2^k\cdot\bar{x}_2+\dots+\alpha_n\cdot\lambda_n^k\cdot\bar{x}_n$$

$$A^{k+1}\cdot\bar{a}=\alpha_1\cdot\lambda_1^{k+1}\cdot\bar{x}_1+\alpha_2\cdot\lambda_2^{k+1}\cdot\bar{x}_2+\dots+\alpha_n\cdot\lambda_n^{k+1}\cdot\bar{x}_n$$

Agar xos vektorlarni koordinat ko'rinishda ifodalasak $\bar{x}_i\left(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n}\right)$ $A^k\bar{a}$ vektorning 1- koordinatasini hisoblaymiz

$$x_1^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\lambda_i^k\cdot x_{i1};\quad x_1^{(k+1)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\lambda_i^{k+1}\cdot x_{i1}$$

U holda $\dfrac{x_1^{(k+1)}}{x_1^{k}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^{k+1}x_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^{k}x_{i1}}$

Bu kasr surat maxhrajini λ_1^k ga bo'lib yuborsak

$$\frac{x_1^{(k+1)}}{x_1^{(k-1)}}=\frac{\alpha_1\lambda_1x_{11}+\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\cdot\alpha_i\lambda_ix_{i1}}{\alpha_1x_{11}+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\alpha_ix_{i1}}$$

hosil qilamiz. Bu yerdan $k\to\infty$ da $\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\to 0$ bo'lgani uchun $\left|\dfrac{x_1^{(k+1)}}{x_1^{(k)}}\right|\to|\lambda_1|$ ekanligi ko'rinadi.

Eslatma: Agar $n \leq 3$ bo'lsa λ_i larni topish uchun xarakteristik tenglamadan foydalangan ma'qul. n ortgan sari λ_i larni topish qiyinlashib boradi.

Shuning uchun yuqorida keltirilgan algoritmdan foydalanish mumkin. Boshlang'ich vektor sifatida xos vektorlardan birortasiga ham teng bo'lmagan ixtiyoriy vektorni olish mumkin. Iteratsion jarayonning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini tekshirish uchun maksimal xos sonning absolyut qiymat bo'yicha birdan kichik bo'lishini baholash yetarli.

Buning uchun esa yuqorida keltirilgan hisoblash jarayonida xos son qiymatini baholash uchun 3,4 qadam yetarli bo'ladi. Chunki xos son aniq qiymatini topish talab qilinmaydi.

Matritsa normasidan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining (ChATS) yaxshi shartlanganligi, ya'ni o'ng tarafning oz o'zgarishi yechimlarning ham oz o'zgarishiga olib kelishini ta'minlovchi shartlarni aniqlashda foydalanish mumkin. Bu yerda ChATSning yaxshi shartlangan bo'lishi uchun

$$A\bar{x} = \bar{b};\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};$$

sistemada A^{-1} mavjud bo'lib, yani sistema yagona yechimga ega bo'lib, $\|A\|$ juda kichik bo'lmasa sistema yaxshi shartlangan deyiladi. Bunday sistemalar yechimini topishda turli iteratsion usullardan ham foydalanish mumkin.

5.8. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning taqribiy usullari

Algebraik tenglamalarda ko'rganimizdek, matritsali tenglamalarda ham yechimni topishning ketma-ket yaqinlashish usulini tavsiya qilish mumkin ekan. Buning uchun (1) sistema asosiy matritsasini ikki qo'shiluvchiga ajratamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = D + B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bu yerda D – diagonal matritsa bo'lib, barcha $a_{ii} \neq 0$ bo'lsa uning teskari matritsasini topish mumkin bo'ladi.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Bu holda sistemani ChATS ni $(D+B)\overline{X} = \overline{b}$ yoki $D \cdot \overline{X} = \overline{b} - B \cdot \overline{X}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Bundan esa $\overline{X} = D^{-1} \cdot \overline{b} - D^{-1} \cdot B \cdot \overline{X}$ kelib chiqadi. Bu formulani ketma-ket yaqinlashish jarayoniga asos qilib olish mumkin ekan.

Agar A matritsa diagonal elementlari modul bo'yicha o'zlari joylashgan qatordagi qolgan elementlarni modullari yig'indisidan katta bo'lsa, quyidagi hisoblash jarayonini tavsiya qilish mumkin ekan.

$$\overline{X}^{(n+1)} = D^{-1} \cdot \overline{b} - D^{-1} \cdot B \cdot \overline{X}^{(n)}, \qquad n = 0,1,2,3,\dots$$

boshlang'ich yaqinlashish sifatida esa ixtiyoriy qiymatlarni, xususan $x_i^{(0)} = 0,\ i = 1,2,3,\dots,n$ yoki $x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = 1,2,3,\dots,n$ larni olish mumkin ekan.

Hisoblash formulasi bu yerda

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_i^{(n)}, \qquad i = 1,2,3,\dots,n.$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu usul ChATS uchun oddiy iteratsiya usuli deyiladi.

Yuqorida keltirilgan shartlar bajarilgan bo'lsa, bu usul yaxshi natijalar beradi. Bu usulni

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 37 \end{cases}$$

sistemaga tatbiq qilinsa, quyidagi hisoblash formulalarini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 1{,}3 - 0{,}3x_2^{(n)} + 0{,}1x_3^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} = 3{,}1 - 0{,}2x_1^{(n)} - 0{,}3x_3^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} = 3{,}7 - 0{,}3x_1^{(n)} - 0{,}2x_2^{(n)} \end{cases}$$

Bu formulalar bo'yicha hisoblash jarayonida $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ deb boshlasak

$x_1^{(1)}=1{,}3$; $x_2^{(1)}=3{.}1$; $x_3^{(1)}=3{,}7$; $x_1^{(2)}=0{.}74$; $x_2^{(2)}=1{.}73$; $x_3^{(2)}=2{,}69$

$x_1^{(3)}=1{,}05$; $x_2^{(3)}=2{.}145$ $x_3^{(3)}=3{.}132$.

qiymatlarni hosil qilamiz. Agar berilgan sistema aniq yechimlari $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$ ekanligini hisobga olsak bu ketma-ketlik yechimga intilayotganiga ishonch hosil qilamiz.

ChATS uchun oddiy isterasiya usuli yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $D^{-1}B$ matritsa normasi birdan kichik bo'lishi kerak ekan, ya'ni $\|D^{-1}B\|<1$ bo'lishi kerak. ChATS uchun iteratsion jarayonlarni tuzishda asosiy talabga mos keladigan bo'laklashni tanlash kerak bo'ladi. A matritsani ikki bo'lakka ajratamiz. $A=B+C$ desak, sistema $B\cdot\overline{X}=\overline{b}-C\cdot\overline{X}$ ko'rinishni oladi.

Bundan esa $\overline{X}=B^{-1}\cdot\overline{b}-B^{-1}\cdot C\cdot\overline{X}$ tenglamani hosil qilamiz.

Bundan esa $\overline{X}^{(n+1)}=B^{-1}\cdot\overline{b}-B^{-1}\cdot C\cdot\overline{X}^{(n)}$, $n=0,1,2,...$ iteratsion jarayonni hosil qilamiz. Bu jarayon yaqinlashuvchi bo'lishi uchun esa $\|B^{-1}C\|<1$ shart bajarilishi kerak.

B va C bo'laklarni tanlash hisobiga bu shart bajarilishini ta'minlash mumkin.

ChATS ni yechishda xoh aniq usul bo'ladimi, xoh iteratsion usul bo'ladimi bu usullarning turg'unligiga alohida etibor qaratish kerak.

n – katta bo'lgan hollarda chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning taqribiy usullaridan foydalaniladi.

5.8.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning oddiy iteratsiya usuli

$A\overline{X}=\overline{b}$ sistemani oddiy iteratsiya usuli bilan yechish talab qilinsin. Sistemaning asosiy matritsasini $A=A_1+A_2$ ko'rinishda ifodalaymiz. Bunda $\det A_1\neq 0$. U holda $(A_1+A_2)\overline{X}=\overline{b}$, $A_1\overline{X}=-A_2\overline{X}+\overline{b}$,

$\overline{X}=-A_1^{-1}\cdot A_2\cdot\overline{X}+A_1^{-1}\cdot\overline{b}$ ga kelinadi.

$\overline{\alpha}=-A_1^{-1}\cdot A_2$, $\overline{\beta}=A_1^{-1}\cdot\overline{b}$ deb belgilasak:

$$\overline{x}=\alpha\overline{x}+\overline{\beta} \tag{5.13}$$

ni hosil qilish mumkin.

Agar $\|\alpha\|<1$ bo'lsa, ixtiyoriy $\overline{x}^{(0)}$ vektor uchun

$$\overline{x}^{(k+1)}=\overline{\alpha}x^{(k)}+\overline{\beta},\ k=0,1,2,... \tag{5.14}$$

formulani keltirib chiqariladi. Bunda, agar $\overline{x}$ ni (5.13) sistemaning yechimi desak, $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{x}^{(k)}=\overline{x}$ munosabat o'rinli.

Ixtiyoriy $A\bar{X}=\bar{b}$ chiziqli tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan yechish quyidagi bosqichlardan iborat:

1. (5.13) sistema uchun asosiy matritsa diagonal elementlarining dominantligi sharti tekshiriladi:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad j \neq i, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{5.15}$$

Agar A matritsa uchun dominantlik sharti bajarilmasa, sistema kengaytirilgan matritsasi ustida elementar shakl almashtirishlar asosida (5.15) shartni qanoatlantiradigan ko'rinishga keltiriladi.

2. Agar barcha $i=\overline{1,n}$ uchun (5.15) shart o'rinli bo'lsa, (5.14) ifoda asosida yechish jarayonini amalga oshiriladi, bunda avvalo yechimga yaqin bo'lgan boshlang'ich vektor $\bar{x}^{(0)}$ topiladi. Odatda $\bar{x}^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashish sifatida $\bar{\beta}$ vektor olinadi: $\bar{x}^{(0)}=\beta$.

3. (4.14) formula asosida:

$$x_{i+1}^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \quad (\alpha_{ii}=0, i=\overline{1,n}; k=0,1,2,\dots) \tag{5.16}$$

ketma-ketlik tuziladi.

4. Avvaldan berilgan ε – aniqlikka erishish uchun har qadamda:

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon, \quad (i=\overline{1,n}); \; k=0,1,2,\dots \tag{5.17}$$

shart tekshirilib boriladi.

5. Ma'lum k - qadamda (5.17) shart barcha $i=\overline{i,n}$ lar uchun o'rinli bo'lsa, $\bar{x} \cong \bar{x}^{(k+1)}$ olinadi.

Misol.

Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi oddiy iteratsiya usuli bilan $\varepsilon=0.001$ aniqlikda yechilsin.

$$\begin{aligned}
1,23x_1 - 3.25x_2 - 8,69x_3 &= 10.33\\
7.03x_1 + 4,81x_2 + 0.27x_3 &= -6,43\\
4.49x_1 - 7.55x_2 + 12.51x_3 &= 41.53
\end{aligned}$$

1. Sistemaning 1 va 2 tenglamalari diagonal dominantlik shartini qanoatlantirmaydi.

Sistemaning ikkinchi tenglamasini birinchi sifatida olamiz, uchinchi tenglamasi o'z o'rnida qoladi, ikkinchi tenglama sifatida birinchi va uchinchi tenglamalar yig'indisini olish mumkin, natijada quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{aligned}
7,03x_1 + 4,81x_2 + 0,27x_3 &= -6,43\\
5,72x_1 + 10,8x_2 + 3,82x_3 &= 51,86\\
4,49x_1 - 7,55x_2 + 12.51x_3 &= 41.53
\end{aligned}$$

Bu sistema uchun (5.15) – diagonal dominantlik sharti bajariladi. Bu sistemadan ekvivalent sistemaga o'tamiz:

$$x_1 = -0{,}684x_2 - 0{,}0384x_3 - 0{,}9146$$
$$x_2 = 0{,}529x_1 + 0{,}3537x_3 - 4{,}8018$$
$$x_3 = -0{,}3589x_1 + 0{,}6035x_2 + 3{,}3197$$

2. Boshlang'ich $\bar{x}^{(0)} = [-0{,}9146; -4{,}8018; 3{,}3197]$ yaqinlashishni tanlaymiz.

3. (5) qonuniyat asosida quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$x_1^{(k+1)} = -0{,}684x_2^{(k)} - 0{,}0384x_3^{(k)} - 0{,}9146$$
$$x_2^{(k+1)} = 0{,}529x_1^{(k)} + 0{,}3537x_3^{(k)} - 4{,}8018$$
$$x_3^{(k+1)} = -0{,}3589x_1^{(k)} + 0{,}6035x_2^{(k)} - 3{,}3197 \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

Shu formulalar asosida keyingi yaqinlashishlarni hisoblaymiz:

$$x_1^{(1)} = -0{,}684 \cdot (-4{,}8018) - 0{,}0384 \cdot 3{,}3197 - 0{,}9146$$
$$x_2^{(1)} = 0{,}529 \cdot (-0{,}9146) + 0{,}3537 \cdot 3{,}3197 - 4{,}8018$$
$$x_3^{(1)} = -0{,}3589 \cdot (-0{,}9146) + 0{,}6035 \cdot (-4{,}8018) + 3{,}3197$$

Barcha $i = \overline{i,3}$ uchun $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| < \varepsilon$ shart tekshiriladi. Agar bu shart barcha $i = 1,2,3$ lar uchun bir vaqtda bajarilmasa, k-ning qiymatini bittaga oshiriladi va 3-punktdagi hisoblashlar takrorlanadi.

5. Berilgan misolda 11-qadamda (5.17) tengsizlik barcha $i = 1,2,3$ lar uchun bir vaqtda bajariladi. Shunga ko'ra sistemaning yechimi sifatida $x_1 \approx 1{,}6469$; $x_2 \approx -3{,}7678$; $x_3 = 0{,}4537$ larni olish mumkin.

5.8.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Zeydel usuli

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun oddiy iteratsiya usuli bilan bir qatorda tezroq yaqinlashuvchi bo'lgan Zeydel usuli ham ishlatiladi.

Quyida Zeydel usuli algoritmini keltiramiz:

$$A\bar{x} = \bar{b} \qquad (5.18)$$

1. Berilgan ko'rinishdagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi A uchun diagonal dominantlik sharti tekshiriladi:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=i}^{n} |a_{ij}|; \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (5.19)$$

2. Agar barcha $i = \overline{1,n}$ uchun (5.19) shart o'rinli bo'lsa, (5.18) sistemaga ekvivalent bo'lgan iterasion jarayon tashkil qilish uchun qulay

$$\bar{x} = \alpha\bar{x} + \bar{\beta} \qquad (5.20)$$

sistemani tuzamiz.

3. Berilgan (5.18) sistemaning yechimi $\bar{x}$ vektorga mumkin qadar yaqin boshlang'ich $\bar{x}^{(0)}$ vektorni tanlab, quyidagi:

$$x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \beta_1 ,$$

$$x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} + \beta_2 , \qquad (5.21)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n .$$

formulalar asosida $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}, \ldots$ vektorlar ketma-ketligini ko'ramiz.

4. Avvaldan berilgan aniqlikga erishish har qadamda

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon \;\; (i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\ldots) \qquad (5.22)$$

shartni tekshirib boramiz.

5. Ma'lum k - qadamda barcha $i = \overline{1,n}$ uchun (5.22) shart o'rinli bo'lsa, u holda yechim sifatida $\bar{x} \approx \bar{x}^{(k+1)}$ olinadi.

Misol.

Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining:

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33 \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43 \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53 \end{cases} \qquad (5.23)$$

yechimni Zeydel usuli bilan $\varepsilon = 0.001$ aniqlikda topilsin.

1. Avvalgi punktda mazkur sistema iterasion jarayon tashkil qilish uchun qulay ko'rinishga keltirilgan edi:

$$\begin{cases} x_1 = -0.6842x_2 - 0{,}0384x_3 - 0{,}9146 \\ x_2 = 0.5296x_1 + 0{,}3537x_3 - 4{,}8018 \\ x_3 = -0{,}3589x_1 + 0{,}6035x_2 + 3{,}3197 \end{cases} \qquad (5.24)$$

2. Boshlang'ich yaqinlashish sifatida (5.24) sistemaning ozod hadini olamiz, ya'ni $\bar{x}^{(0)} = (-0{,}9146; -4.8018; 3{,}3197)^T$.

Qolgan yaqinlashishlarni

$$x_1^{(k+1)} = -0{,}6842x_2^{(k)} - 0{,}0384x_3^{(k)} - 0{,}9146$$
$$x_2^{(k+1)} = 0{,}5296x_1^{(k+1)} + 0{,}3537x_3^{(k)} - 4{,}8018$$
$$x_3^{(k+1)} = -0.3589x_1^{(k+1)} + 0{,}6035x_2^{(k+1)} + 3{,}3197$$

formulalar orqali topamiz.

$k = 0$ bo'lganda $x_1^{(1)}$; $x_2^{(1)}$; $x_3^{(1)}$,

$k=1$ bo'lganda $x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \quad x_3^{(2)}$.

$k=2$ bo'lganda $x_1^{(3)}; x_2^{(3)}; \quad x_3^{(3)}$

3. Avvaldan berilgan aniqlikka erishish uchun, har qadamda (5.22) shartni tekshirib boramiz. 10-yaqinlashishda (5.22) shart barcha $i=1,2,3$ lar uchun bajarilgani uchun hisoblashni to'xtatamiz va berilgan tenglamalar sistemasining $\varepsilon=0,001$ aniqlikdagi taqribiiy yechimi sifatida $x_1 \approx 1,6469$; $x_2 \approx -3,7688$; $x_3 = 0,4537$ ni olamiz.

5.8.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini MATLAB muhitida sonli yechish

MATLAB muhitida ixtiyoriy A matritsaning rangi $rank()$ funksiya yordamida topiladi. Agar sistema birgalikda bo'lsa, asosiy matritsa rangi noma'lumlar soni bilan taqqoslanadi va sistemaning yagona yoki cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi to'g'risida mulohaza yuritiladi.

Kramer usuli. Bunda agar n - kichik $n=2,3,4$, bo'lsa, (5.1) sistemani Kramer usuli yordamida yechish mumkin va yechimlar $x_k = \frac{d_k}{D}$ formula yordamida hisoblanadi. Bunda D - (4 1) sistema asosiy matritsasi determinanti, d_k - asosiy matritsadagi k - ustun elementlarini (5.1) sistemani o'ng tomoni bilan almashtirish hisobiga shakllantirilgan determinant.

MATLAB muhitida matritsa determinanti $det()$ funksiya yordamida hisoblanadi. Matritsa usuli. Bunda (5.1) sistema yechimi $X = A^{-1} \cdot B$ formula yordamida topiladi, bunda A^{-1} A matritsaning teskarisi.

MATLAB muhitida matritsaning teskarisi $inv()$ funksiyasi yordamida topiladi, shunga ko'ra (5.1) sistemaning MATLAB muhitida yechimi quyidagicha topiladi:

$$x = inv(A) * B$$

Oddiy iteratsiya usuli. Quyida MATLAB tizimida oddiy iteratsiya usuli uchun $Iterac.m$ funksiyasi va mazkur funksiyaning listingi keltirilgan:

```
function Iterac(C1,d1,eps)
N=size(C1,1);
R1=d1;
q1=R1;
q2=(C1*q1)+R1;
31
```

```
p=0;
s=0;
for i=1:N
if abs(q2(i)-q1(i))>s
s=abs(q2(i)-q1(i));
end;
end;
while s>eps
p=p+1;
q1=q2;
q2=(C1*q1)+R1;
s=0;q2
(C1*q2)+R1-q2
p
for i=1:N
if abs(q2(i)-q1(i))>s
s=abs(q2(i)-q1(i));
end;
end;
end;
q2
(C1*q2)+R1-q2
p
abs(q2-q1)
```

MATLAB tizimida ChATSlarni Zeydel usulida yechish *Zeidel.m* funksiyasi yordamida amalga oshiriladi. Bunda *Zeidel()* funksiyasi (5.1) sistemani Zeydel usuli asosida quyidagi tartibda yechishni amalga oshiradi:

1) sistemani normal ko'rinishga keltiriladi;

2) normal ko'rinishdagi sistemani Zeydel iteratsion jarayonini tashkil etishga qulay ko'rinishga keltiriladi;

3) Zeydel iteratsion jarayoni asosida yechimi topiladi.

Quyida *Zeidel()* funksiyasining listingi keltirilgan:

```
function Zeidel(A,b,eps);
N=size(A,1);
% CHATS ni normal korinishga keltirish
C=A'*A;
D=A'*b;
% CHATS ni iteratsiya jarajoniga kerakli korinishga keltirish
```

```
for i=1:N
D1(i)=D(i)/C(i,i);
end;
D1=D1'; % matritsani transponirlash
d1=D1;
for i=1:N
for j=1:N
if i==j
C1(i,j)=0;
else
C1(i,j)=-C(i,j)/C(i,i);
end;
end;
end;
% CHATS ni Zeidel usuli bilan echish
R1=d1;
q1=R1;
% oraliq natijalarni saqlash
t=size(C1);
N=t(1,1);
33
q2=zeros(t(1,1),1);
% hisoblashlar sikli
p=0;
s=0;
for i=1:N
if abs(q2(i)-q1(i))>s
s=abs(q2(i)-q1(i));
end;
end;
while s>eps
q2=q1;
p=p+1;
for f=1:N
v=(C1*q1)+R1;
x(f,1)=v(f,1);
q1(f,1)=x(f,1);
end;
s=0;
```

```
for i=1:N
if abs(q2(i)-q1(i))>s
s=abs(q2(i)-q1(i));
end;
end;
q1=x;
end;
'javoblar:'
q2
'Tekshirish:'
A*q2
'qaitarilishlar soni:'
p
abs(q2-q1)
```

Topshiriq:

MATLAB muhitida chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda ekanligini tekshiring va quyidagi usullar bilan yeching:

1) Matritsalar usuli
2) Gauss usuli
3) Oddiy iteratsiya usuli
4) Zeydel usuli

Nazorat savollari

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarining birgalikdaligini tekshirish.
2. Yomon shartlangan matritsalar tushunchasi.
3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning aniq usullari.
4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning taqribiy usullari.
5. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning oddiy iteratsiya usuli.
6. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning Zeydel usuli.
7. Asosiy matritsasi yomon shartlangan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechish usullari.

Topshiriq

5.1-jadvaldan mos variant tanlansin va topshiriq quyidagi tartibda bajarilsin.

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini iteratsiya usuli bilan 0,001 aniqlikda yeching.
2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Zeydel usuli bilan 0,001 aniqlikda yeching.
3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini aniq usullar bilan yeching.
4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullarini taqqoslang.
5. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini MATLAB muhitida yeching va natijalar listingini keltiring.

Chiziqli algebraik tenglamalarini aniq va taqribiy yechish boyicha topshiriq variantlari

5.1-jadval

Variantlar nomeri	Topshiriq
1	$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3. \\ 5{,}5x_1 - \text{[illegible]}\,x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8. \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8. \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4. \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}58 \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3. \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7. \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5. \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6. \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8. \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7. \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7. \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$

5	$\begin{cases} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4, \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6, \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7, \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5, \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 - 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5, \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6, \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 - 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = -14.4, \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6, \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4, \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.1 \\ 3.1x_1 - 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 - 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9, \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 20.4x_3 + 1.7x_4 = 1.8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10, \\ 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19, \\ 1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20, \\ 7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5, \\ 1.1x_1 - 1.5x_2 - 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2, \\ 5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7, \\ 1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2.2x_1 - 3.1x_2 + 4.2x_3 - 5.1x_4 = 6.01, \\ 1.3x_1 + 2.2x_2 - 1.4x_3 + 1.5x_4 = 10, \\ 6.2x_1 - 7.4x_2 + 8.5x_3 - 9.6x_4 = 1.1, \\ 1.2x_1 + 1.3x_2 + 1.4x_3 + 4.5x_4 = 1.6 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 35.8x_1 + 2.1x_2 - 34.5x_3 - 11.8x_4 = 0.5, \\ 27.1x_1 - 7.5x_2 + 11.7x_3 - 23.5x_4 = 12.8, \\ 11.7x_1 + 1.8x_2 - 6.5x_3 + 7.1x_4 = 1.7, \\ 6.3x_1 + 10x_2 + 7.1x_3 + 3.4x_4 = 20.8. \end{cases}$

5.8.4. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini Nyuton usulida yechish

Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (5.25)$$

Agar $F(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ustun vektor kiritsak, (5.25) sistemani

$$F(\bar{x}) = 0 \tag{5.26}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

(5.25) sistemani Nyuton usulida yechish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^{n} - \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]^{-1} \cdot F(\bar{x}^{n}) \tag{5.27}$$

Bu yerda $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]^{-1}$ Yakobi matritsasiga teskari matritsa. (5.27) iterasion jarayon yaqinlashishi uchun, $f_i(\bar{x})$ funksiyalar ma'lum darajada kuchliroq shartlarni qanoatlantirishi lozim.

Misol tariqasida ikkinchi tartibli

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

sistemani ko'raylik. Mazkur sistema uchun Nyuton usuli bo'yicha ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{A_n}{J_n},$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{B_n}{J} \tag{5.29}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots)$$

Bu yerda

$$A_n = \begin{vmatrix} f(x_n,y_n) & f'_y(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) & g'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix},$$

$$B_n = \begin{vmatrix} f'_x(x_n,y_n) & f(x_n,y_n) \\ g'_x(x_n,y_n) & g(x_n,y_n) \end{vmatrix};$$

$$J_n = \begin{vmatrix} f'_x(x_n,y_n) & f'_y(x_n,y_n) \\ g'_x(x_n,y_n) & g'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

Iteratsion jarayon yaqinlashishi uchun (x_0, y_0) boshlang'ich yaqinlashish yechimga yetarlicha yaqin va J_n -ni ma'lum oraliqda noldan farqliligi talab etiladi.

Nyuton usuli algoritmi

1. Grafik usul bilan boshlang'ich yaqinlashish $\bar{x}^{(0)}$ topiladi.

2. Kiritilgan $F(\bar{x})$ vektor funksiyaning $\bar{x}^{(0)}$ nuqtadagi qiymati hisoblanadi.

3. Yakobi matritsasi tuziladi:

$$W(\bar{x})=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (5.30)$$

4. Agar $\det W(\bar{x}^{(0)})\neq 0$ bo'lsa, $W^{-1}(\bar{x}^{(0)})$ matritsani topamiz va

$$\|W^{-1}(\bar{x}^{(0)})\|<1$$

ekanligini tekshiramiz.

5. Yuqoridagi (5.27) formula asosida avval $\bar{x}^1$, so'ngra $\bar{x}^2, \bar{x}^3, ..., \bar{x}^k$ vektorlar ketma-ketligini tuzamiz.

6. Har qadamda

$$\max|x_i^{k+1}-x_i^k|<\varepsilon \quad (5.31)$$

shartni tekshirib boramiz.

7. Agar ma'lum qadamda (5.31) shart o'rinli bo'lsa, $\bar{x}\approx\bar{x}^{k+1}$ ni yechim sifatida qabul qilamiz.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} f_1(x,y)=x^3-y^2-1=0 \\ f_2(x,y)=xy^3-y-4=0 \end{cases}$$

chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasining yechimi Nyuton usuli bilan $\varepsilon=10^{-3}$ aniqlikda topilsin.

1. Boshlang'ich yaqinlashishi grafik usulda topamiz va boshlang'ich yaqinlashish sifatida $x_0=1{,}5$; $y_0=1{,}5$ ni olamiz.

2. $$F(\bar{x})=\begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^3-y^2-1 \\ xy^3-y-4 \end{bmatrix}$$

vektor-funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$F(\bar{x})=\begin{bmatrix} 1{,}5^3-1{.}5^2-1 \\ 1{.}5\cdot1{.}5^3-1{.}5-4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}125 \\ -0{,}4375 \end{bmatrix}$$

3. Yakobi matritsasini tuzamiz:

$$W(\bar{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2-1 \end{bmatrix}$$

Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$Y_0=\begin{vmatrix} 3x_0^2 & -2y_0 \\ y_0^3 & 3x_0y_0^2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6.75 & -3 \\ 3{,}375 & 9.125 \end{vmatrix}=11{,}71875$$

$$A_0=\begin{vmatrix} x_0^3-y_0^2-1 & -2y_0 \\ x_0y_0^3-y_0-4 & 3x_0y_0^2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0.125 & -3 \\ -0.4375 & 9{,}125\end{vmatrix}=-0{,}171875$$

$$B_0=\begin{vmatrix} 3x_0^2 & x_0^3-y_0^2-1 \\ y_0^3 & x_0y_0^3-y_0-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6{,}75 & 0{,}125 \\ 3{,}375 & -0.4375\end{vmatrix}=-3.3750$$

Qolgan hisoblashlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

n	x_n y_n	$f_1(x_n,y_n)$ $f_2(x_n,y_n)$	y_n	A_n	B_n
0	1,5 1,5	0,12500 -0,43750	71,71875	-0,171875	-3,3750
1	1,502397 1,547059	-0,002170 0,015844	77,7327	0,0277998	0,115326
2	1,5020396 1,545570	0,0000017 0,000019			

Berilgan sistemaning $\varepsilon=10^{-3}$ aniqlikdagi yechimi $x\approx 1{,}502$; $y\approx 1{,}545$.

MATLAB muhitida chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini yechish $fsolve()$ funksiyasi orqali amalga oshiriladi.

Mazkur funksiya quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$fsolve('file',x_0)$$

Bu yerda $file$ – m-faylda saqlangan tenglamalar sistemasi, x_0 - boshlang'ich yaqinlashish.

Yuqorida keltirilgan

$$\begin{cases} x^3-y^2-1=0 \\ xy^3-y-4=0 \end{cases}$$

chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini MATLAB muhitida $fsolve()$ funksiyasi yordamida yechishni ko'rib chiqamiz.

Tenglamalar sistemasini $myfun(x)$ foydalanuvchi funksiyasi sifatida ifodalaymiz va uni $myfun.m$ faylida saqlaymiz:

```
function F = myfun(x)
F=[x(1).^3-x(2).^2-1; x(1)*x(2).^3-x(2)-4]
```

Dastur va natijalar quyidagilar:

```
>> x0=[1.5;1.5];
>>X=fsolve('myfun',x0)
```

Enter bosilgandan so'ng quyidagi yechim hosil bo'ladi:

```
x=
  1.5020396
  1.545570
```

Nazorat savollari

1. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini yechish usullari.
2. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini yechishning Nyuton usuli.
3. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini yechishning oddiy iteratsiya usuli.
4. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini yechishning gradiyent tushish usuli.

Topshiriq

5.2-jadvaldan mos variant tanlansin va topshiriq quyidagi tartibda amalga oshirilsin :

- Sistema yechimlari grafik usulda ajratilsin.
- Sistemani Nyuton usulida 0,001 aniqlikda yechilsin.

Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini sonli yechish bo'yicha topshiriq variantlari

5.2- jadval

Topshiriq nomeri	Topshiriq
1	$\begin{cases} tg(xy+0{,}4)=x^2; \\ 0.6x^2+2y^2=1,\ x>0,\ y>0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x+y)-1.6x=0; \\ x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} tg(xy+0.1)=x^2; \\ x^2+2y^2=1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin(x-y)-1.2x=0.2; \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} tg(xy+0.3)=x^2; \\ 0.9x^2+2y^2=1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin(x-y)-1.3x=0; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} tg\,xy=x^2; \\ 0.8x^2+2y^2=1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(x+y)-1.5x=0.1; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

9	$\begin{cases} tg\, xy = x^2; \\ 0{,}7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1{,}2x = 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
11	$\begin{cases} tg(xy + 0{,}2) = x^2; \\ 0{,}6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
12	$\begin{cases} \sin(x + y) = 1{,}5x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

VI BOB. JADVAL KO'RINISHIDA BERILGAN FUNKSIYALAR UCHUN APPROKSIMATSIYA MASALASI

6.1. Interpollyatsiyalash masalasining qo'yilishi

$y=f(x)$ funksiyani unga yaqin bo'lgan $\varphi(x)$ funksiya (analitik yoki jadval ko'rinishida) bilan almashtirishga interpolyatsiyalash deyiladi. Bunda $f(x_i)=\varphi(x_i)$ yoki $f(x_i)\approx\varphi(x_i)$ munosabatlarga bog'liq tarzda aniq yoki taqribiy (yaqinlashish ma'nosida) interpolyatsiya haqida so'z yuritiladi.

Interpolyatsiya tushunchasi modellashtirish jarayonining ilmiy asosi bo'lib, analitik ko'rinishda olingan $\varphi(x)$ interpolyatsiya funksiyasi o'rganilayotgan obyekt yoki jarayonning matematik modeli bo'lib hisoblanadi.

$f(x_i)\approx\varphi(x_i)$ shart asosidagi interpolyatsiyalashga approksimatsiyalash deyiladi. Bunday interpolyatsiya usuli $y=f(x)$ funksiya qiymatlari taqribiy natijalari ichida xatoliklar mavjud bo'lgan hollarda ishlatiladi. Bunda approksimatsiya aniqligi tajriba natijalarini silliqlash hisobiga erishiladi.

Faraz qilaylik, $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),...,\varphi_m(x),...$ funksiyalar yetarlicha silliq va chiziqli erkli funksiyalar sistemasi bo'lsin. Bu funksiyalardan tuzilgan

$$P_m(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_m\varphi_m(x),... \qquad (6.1)$$

chiziqli kombinatsiya ($c_0, c_1,...,c_m$ - o'zgarmas sonlar) umumlashgan ko'phad deyiladi. Xususan, agar $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,...,\varphi_m(x)=x^m,...$ bo'lsa, u holda quyidagi m - darajali ko'phad hosil bo'ladi:

$$P_m(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_mx^m \qquad (6.2)$$

Agar $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=\cos x,\ \varphi_2(x)=\sin x,...,\varphi_{2m-1}(x)=\cos mx,\ \varphi_{2m}(x)=\sin mx,...,$ bo'lsa, u holda

$$P_m(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\sin x+...+a_m\cos mx+b_m\sin mx \qquad (66.3)$$

m - tartibli trigonometrik ko'phad hosil bo'ladi.

Funksiyaning yaqinlashish masalasining mohiyati quyidagichadir: berilgan f(x) funksiyani $P_m(x)$ umumlashgan ko'phad bilan shunday almashtirish mumkin bo'lsaki, bunda berilgan nuqtalarda f(x) funksiyaning $P_m(x)$ umumlashgan ko'phaddan chetlanishi eng kichik bo'lsin.

Agar X to'plam alohida $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalardan iborat bo'lsa, nuqtaviy yaqinlashish va X to'plam [a,b] oraliqdan iborat bo'lsa, integral yaqinlashish haqida so'z yuritiladi. Bunda, agar barcha $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda $f(x_i)=P_m(x_i)$ shart bajarilishi talab qilinsa, u holda funksiyaning yaqinlashishi masalasi interpolyatsiya masalasiga keltiriladi va agar barcha $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda $f(x_i) \approx P_m(x_i)$ shart bajarilishi talab qilinsa, u holda funksiyaning yaqinlashishi masalasi approksimatsiya masalasiga keltiriladi.

Ko'pgina amaliy masalalarni yechishda o'rganilayotgan jarayonlar yoki obyektlar ustida o'tkazilgan va jadval ko'rinishida ifodalangan tajriba natijalari - empirik ma'lumotlarni ularga biror ma'noda yaqin bo'lgan va foydalanishga qulay bo'lgan oddiyroq funksiya bilan almashtirish masalasini yechishga to'g'ri keladi. Bunda, $f(x)$ biror jadval ko'rinishida berilgan noma'lum funksiya, $F(x)$ esa unga biror ma'noda yaqin bo'lgan oddiyroq funksiya bo'lsin. Bundan tashqari, ko'pincha amaliyotda qo'llash noqulay bo'lgan murakkab matematik funksiyalarni ularga biror ma'noda yaqin bo'lgan va foydalanishga qulay va oddiyroq funksiya bilan almashtirish masalasi ham qo'yiladi. Shu asosda, tanlangan $F(x)$ yordamida $f(x)$ funksiyaning jadvalda keltirilmagan qiymatlarini taqriban hisoblash imkoniyati yaratiladi.

Jadval natijalariga yaqinlashuvchi $F(x)$ funksiyani topishning usullaridan biri interpolyatsiya usulidir.

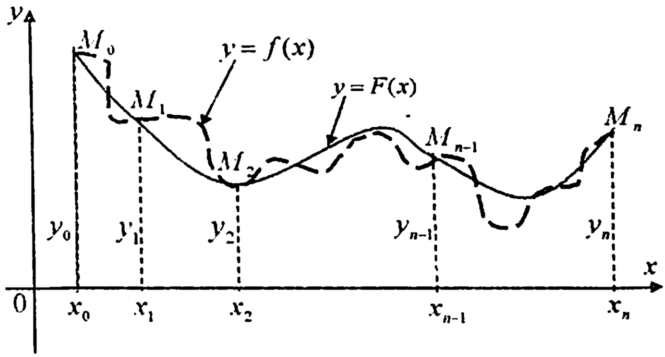
Interpolyatsiya masalasining umumiy qo'yilishi.

$y=f(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvali berilgan bo'lsin:

x	x_0	x_1	...	x_k	...	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	...	y_k	...	y_n

x_k, $k=\overline{0,n}$, nuqtalarda no'ma'lum $f(x)$ funksiyaning jadvalda keltirilgan qiymatlarini qabul qiluvchi, ya'ni $F(x_k)=f(x_k)=y_k$, $k=\overline{0,n}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x)$ funksiyani qurish talab qilinadi. $F(x)$ interpolyatsiyalovchi, $x_0, x_1, ..., x_n$ – nuqtalar esa interpolyatsiya tugunlari deyiladi. Bunda interpolyatsiya tugunlari ustma-ust tushmaydi deb qaraladi, ya'ni, $i \neq j$ shartlarda $x_i \neq x_j$ deb olinadi.

Geometrik nuqtai nazardan interpolyatsiyalash berilgan $M(x_k, y_k)$, $k=\overline{0,n}$ nuqtalardan o'tuvchi $y=F(x)$ egri chiziqni topishga teng kuchli:



Bunday masalaning bir qiymatli yechilishi odatda $F(x)$ funksiyani $P_n(x_i)=f(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ko'phad asosida amalga oshiriladi. Shunga asosan:

$$\begin{cases} P_n(x_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=y_0, \\ \ldots \\ P_n(x_n)=a_nx_n^n+a_{n-1}x_n^{n-1}+\ldots+a_1x_n+a_0=y_n. \end{cases} \tag{6.4}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi.
Quyidagitcha belgilashlar kiritib:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad a=(a_0,\ldots,a_n)^T, \quad y=(y_0,\ldots,y_n)^T,$$

(5.4) sistemani matritsa ko'rinishida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$Xa=y. \tag{6.5}$$

Algebra kursidan ma'lumki, keltirilgan sistema asosiy determinanti $|X|\neq 0$ bo'lganda yechimga ega va X matritsa determinanti Vandermond determinanti deyiladi:

$$|X|=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j),$$

Mazkur determinant barcha $i\neq j$ nuqtalar uchun $x_i\neq x_j$ shart bajarilishi tufayli noldan farqli, bundan interpolyasion ko'phad mavjudligi va yagonaligi kelib chiqadi.

6.2. Ixtiyoriy tugun nuqtalar uchun Lagranj ko‘phadi

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]=[x_0,x_n]$ kesmada $[x_i, y_i=f(x_i)]$, $i=\overline{0,n}$ jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin. Darajasi n bo‘lgan va $L_n(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $L_n(x)$ ko‘phad qurish talab etiladi. Bunday ko‘phad quyidagi ko‘rinishda qidiriladi:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x), \qquad (6.6)$$

Bu yerda $l_i(x)$ – n tartibli va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ko‘phad:

$$l_i(x_k)=\begin{cases} y_i & \text{при } i=k, \\ 0 & \text{при } i\neq k. \end{cases}$$

Uni quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$l_i(x)=c_i(x-x_0)\times\ldots\times(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\times\ldots\times(x-x_n),$$

Bu yerda c_i noma’lum koeffisiyentlar.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_n).$$

Ushbu ifodadan x bo‘yicha hosila olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\Pi'_{n+1}(x)=(x-x_1)\times\ldots\ (x-x_n)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_2)\times\ldots\times(x-x_n)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)\times\ldots\times(x-x_{n-1})=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(x-x_0)\times\ldots\times(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\times\ldots\times(x-x_n).$$

Bundan $x=x_0$ da quyidagini hosil qilamiz:

$$\Pi'_{n+1}(x_0)=(x_0-x_1)\times\ldots\times(x_0-x_n),$$

Xuddi shuningdek, $x=x_1$ da:

$\Pi'_{n+1}(x_1)=(x_1-x_0)(x_1-x_2)\times\ldots\times(x_1-x_n)$ ni hosil qilamiz.

Shu taxlitda davom ettirib, umumiy holda, $x=x_i$ uchun:

$\Pi'_{n+1}(x_i)=(x_i-x_0)\times\ldots\times(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\times\ldots\times(x_i-x_n)$ ni hosil qilamiz.

Bunda $l_i(x_i)=y_i$ bo‘lgani uchun:

$$c_i=\frac{y_i}{\Pi'_{n+1}(x_i)}.$$

Endi, quyidagiga asosan

$$l_i(x)=y_i\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}$$

Lagranj ko'phadini hosil qilamiz:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}. \tag{6.7}$$

Lagranj ko'phadiga ko'ra $L_n(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$. Lekin tugun nuqtalardan boshqa nuqtalarda, ya'ni $x \neq x_i$ bo'lganda $L_n(x) \neq f(x)$ bo'lishi mumkin. Istisno tariqasida $f(x)$ funksiyaning o'zi darajasi n dan yuqori bo'lmagan ko'phad bo'lgan holni qarash mumkin va bu holda ravshanki, $f(x) \equiv L_n(x)$.

6.3. Lagranj interpolyasion ko'phadi xatoligi

Qurilgan $L_n(x)$ ko'phadning $f(x)$ funksiyaga $x \neq x_i$, $i=\overline{0,n}$ nuqtalarda qanchalik yaqinligini baholash, ya'ni interpolyatsiya xatoligi deb ataluvchi $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$ farqning kattaligini baholash masalasi qo'yilgan bo'lsin. Xatolikni baholash uchun $f(x)$ ni $[a,b]=[x_0,x_n]$ oraliqda $(n+1)$-tartibgacha barcha hosilalarga ega deb faraz qilinadi.

Quyidagi yordamchi funksiya kiritamiz:

$$\varphi(z)=f(z)-L_n(z)-K\times\Pi_{n+1}(z),$$

Bu yerda K noma'lum koeffisiyent. Shartga ko'ra, $\varphi(x_i)=0$, $i=\overline{0,n}$.

Faraz qilaylik, x – xatolik aniqlanayotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda K koeffisiyentni $\varphi(x)=0$ sharti asosida tanlaymiz:

$$K=\frac{f(x)-L_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}.$$

K ning shu qiymatida $\varphi(z)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $n+2$ ta $x,x_0,x_1,\dots,x_n$ ildizlarga ega bo'ladi. Roll teoremasiga ko'ra $\varphi'(z)$ hosila kamida $n+1$ nuqtada nolga teng bo'ladi. Roll teoremasini $\varphi'(z)$ *ga* qo'llasak, $\varphi''(z)$ ning kamida n ta nuqtada nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. Huddi shunday mulohazalar asosida $(n+1)$- hosila $\varphi^{(n+1)}(z)$ ning kamida bitta $\xi\in(a,b)$ nuqtada nolga teng bo'lishini, ya'ni $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ isbotlash mumkin.

Lagranj ko'phadining darajasi n ga teng. Shu sababli $L_n^{(n+1)}(z)=0$.

$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_n)$ ifodani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Pi_{n+1}(x)=x^{n+1}+P_n(x),$$

Bu yerda $P_n(x)$ $-n$ tartibli poltnom. $P_n^{(n+1)}(x)=0$, ekanligidan

$$\Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! \text{ kelib chiqadi.}$$

Shunday qilib,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0,$$

demak,

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Topilgan K uchun $\varphi(x) = 0$ bo'lgani uchun,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x),$$

$$x \neq x_i,\ i = \overline{0,n},\ x \in (a,b),\ \xi = \xi(x),\ \xi \in (a,b).$$

Quyidagicha o'zgartirish kiritib:

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

Lagranj formulasi absolyut xatoligini baholash formulasini hosil qilamiz:

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \Pi_{n+1}(x) \right|. \qquad (6.8)$$

Misol.

Quyidagi jadval asosida Lagranj ko'phadini tuzamiz:

x	1	1.5	2.5
$y = f(x) = \frac{1}{x}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$

Interpolyatsiyalash tugunlarini qayta nomerlaymiz:

n	0	1	2
x	1	1.5	2.5
$y = f(x) = \frac{1}{x}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$

Bu yerda, $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$ tugun nuqtalar, $y_0 = 1$, $y_1 = 2/3$, $y_2 = 2/5$lar funksiyaning qiymatlari. Ko'phadning darajasi $n = 2$.

Ko'phadni yozamiz:

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \frac{\Pi_3(x)}{(x - x_i)\Pi'_3(x_i)} =$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Jadvaldagi ma'lumotlar asosida:

$$L_2(x) =$$

$$= 1 \times \frac{(x-3/2)(x-5/2)}{(1-3/2)(1-5/2)} + \frac{2}{3} \times \frac{(x-1)(x-5/2)}{(3/2-1)(3/2-5/2)} + \frac{2}{5} \times \frac{(x-1)(x-3/2)}{(5/2-1)(5/2-3/2)} =$$

$$= \frac{x^2-4x+15/4}{3/4} + \frac{2}{3} \times \frac{x^2-7/2x+5/2}{-1/2} + \frac{2}{5} \times \frac{x^2-5/2x+3/2}{3/2} =$$

$$= \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 5 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{10}{3} + \frac{4}{15}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{4}{15}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{31}{15}.$$

Interpolyatsiyalashning asosiy xususiyati bo'yicha $x_1 = 3/2$ nuqtada $L_2(x_1) = y_1$ shartni tekshiramiz.

$$L_2(x_1 = 3/2) = \frac{4}{15} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} + \frac{31}{15} = \frac{3}{5} - 2 + \frac{31}{15} = \frac{9-30+31}{15} = \frac{2}{3} = y_1,$$

Natija to'g'ri.

Absolyut xatolikni tekshiramiz:

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} |\Pi_3(x)|.$$

Barcha kattaliklarni topamiz:

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6,$$

$$M_3 = \max_{1 \le x \le 2.5} |f^{(3)}(x)| = \max_{1 \le x \le 2.5} \left| -\frac{6}{x^4} \right| = 6,$$

$$|\Pi_3(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| = |(x-1)(x-3/2)(x-5/2)|.$$

Shunday qilib,

$$|R_2(x)| \le |(x-1)(x-3/2)(x-5/2)|.$$

Funksiyaning, ko'phadning va absolyut xatolikning $x = 2$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(2) = 1/2 = 0.5,$$

$$L_2(x=2) = \frac{4}{15} \times 2^2 - \frac{4}{3} \times 2 + \frac{31}{15} = \frac{16}{15} - \frac{8}{3} + \frac{31}{15} = \frac{16-40+31}{15} = \frac{7}{15} = 0.467,$$

$$|R_2(2)| \le |(2-1)(2-3/2)(2-5/2)| = |1 \times 1/2 \times (-1/2)| = 1/4 = 0.25.$$

6.4. Nyuton interpolyasion ko'phadi

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya quyidagi jadval $[x_k, y_k=f(x_k)]$, $k=\overline{0,n}$, ko'rinishida berilgan bo'lsin, $h=x_{k+1}-x_k$:

x	x_0	x_1	...	x_k	...	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	...	y_k	...	y_n

$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i=f(x_{i+1})-f(x_i)$, $i=\overline{0,n-1}$, son birinchi tartibli chekli ayirma deyiladi. Birinchi tartibli chekli ayirmalardan ikkinchi tartibli chekli ayirmalar hosil qilinadi:

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i,\ i=\overline{0,n-1}.$$

Umumiy holda, k-tartibli chekli ayirma quyidagicha topiladi

$$\Delta^k y_m=\Delta^{k-1}y_{m+1}-\Delta^{k-1}y_m.$$

Hosil qilingan chekli ayirmalarni quyidagi jadval ko'rinishida ifodalaymiz:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	...
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	...	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	...		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	...			
x_4	y_4	Δy_4	...				
x_5	y_5	...					
...	...						

6.4.1. Nyutonning birinchi interpolyatsion ko'phadi va uning xatoligini baholash

Faraz qilaylik, bir qadam bilan jadval ko'rinishida berilgan funksiya uchun chekli ayirmalar jadvali tuzilgan bo'lsin. Nyuton usuliga ko'ra, interpolyatsion ko'phad quyidagi ko'rinishda qidiriladi:

$$N_n(x)=$$

$$=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+a_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \quad (6.9)$$

Bu n-darajali ko'phad. Koeffitsiyentlar qiymatlarini interpolyatsiyaning asosiy xossasi, ya'ni $N_n(x_k)=y_k=f(x_k), k=\overline{0,n}$ shart asosida topamiz.

$x = x_0$ desak,

$$N_n(x_0) = y_0 = a_0 \text{ ni hosil qilamiz.}$$

$x = x_1$, desak

$$N_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \text{ ni hosil qilamiz,}$$

Bu yerdan

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

$x = x_2$ desak,

$$N_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

Bu yerdan:

$$2a_2h^2 = y_2 - y_0 - 2a_1h = y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) =$$

$$= (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0,$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Xuddi shunday usul bilan $a_3 = \dfrac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$ ni hosil qilamiz. Umumiy holda

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k} \text{ ni hosil qilamiz.}$$

Topilgan a_k koeffisiyentlarni $N_n(x)$, ifodaga qo'ysak Nyuton formulasini hosil qilamiz:

$$N_n(x) =$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \times \ldots \times (x - x_{n-1}).$$

Amaliyotda bu formula boshqacha ko'rinishda ishlatiladi formula. $x = x_0 + ht$, uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$x - x_0 = ht$,

$x - x_1 = x - (x_0 + h) = h(t - 1)$,

$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = h(t - 2)$ va h.k.

Umumiy holda $x - x_i = h(t - i)$.

Bundan,

$$N_n(x) = N_n(x_0 + ht) =$$

$$= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1) \times \ldots \times (t-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (6.10)$$

Bu formula Nyutonning birinchi interpolyatsion ko'phadi yoki Nyutonning oldinga interpolyatsiyalash ko'phadi deyiladi. Unga $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$ chekli ayirmalar kiradi, shu sababli formulani x_0 nuqta atrofida ishlatish foydali, ya'ni x_0 nuqtadan x nuqtagacha qadamlar soni $t=\frac{x-x_0}{h}$ absolyut qiymat bo'yicha kichik, Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi uchun $t>0$, x_0 sifatida jadvaldagi dastlabki qiymatni olish mumkin.

Nyutonning birinchi interpolyatsion ko'phadi xatoligini baholashda $y=f(x)$ uchun barcha $x\in[a,b]$ lar uchun interpolyatsion ko'phadning yagonaligi xususiyatidan foydalanamiz. Bu esa xususiy holda, Lagranj va Nyuton interpolyatsion ko'phadlarining ayniyligini ifodalaydi, ya'ni $L_n(x)\equiv N_n(x)$. Shu sababli, xatolikni baholash uchun Lagranj ko'phadi xatoligini baholash formulasidan foydalanamiz:

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x),$$

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_n).$$

Bu formulada, $x-x_i=h(t-i)$ desak, quyidagini hosil qilamiz:

$$R_n(x_0+th)=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}T_{n+1},$$

$$T_{n+1}=t(t-1)(t-2)\times\ldots\times(t-n).$$

Absolyut xatolik quyidagi tengsizlik asosida baholanadi:

$$|R_n(x_0+th)|\le\frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}T_{n+1},$$

$$M_{n+1}=\max_{z\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(z)\right|.$$

Kichik h lar uchun quyidagi taqribiy tenglikdan foydalansak:

$$f^{(n+1)}(x)\approx\frac{\Delta^{n+1}f(x)}{h^{n+1}},$$

Quyidagi formulani hosil qilamiz :

$$R_n(x_0+th)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}T_{n+1}\qquad(6.11).$$

6.4.2. Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko'phadi va uning xatoligini baholash

Agar ko'phadning qiymatini x ning qaralayotgan oraliqning oxiriga x_n ga yaqin qiymatlarda hisoblash lozim bo'lsa, Nyutonning birinchi formulasidan foydalanish maqsadga muvofiq emas, chunki bunda qadamlar soni t ortadi va oqibatda interpolyatsiya xatoligi ortadi. Shu sababli bunday hollarda interpolyatsion ko'phad quyidagi ko'rinishda qidiriladi:

$$N_n(x)=$$
$$=a_0+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1).$$

Nyutonning birinchi formulasi kabi koeffisiyentlar funksiya va interpolyatsion ko'phad qiymatlarining tugun nuqtalarda tengligidan topiladi:

$$a_k=\frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}.$$

a_k larning qiymatlarini ko'phadda o'rniga qo'ysak va $x-x_{n-i}=h(t+i)$ ifoda orqali t o'zgaruvchiga o'tsak, Nyutonning ikkinchi formulasini(teskari interpolyatsiyalash) formulasini hosil qilamiz:

$$N_n(x)=N_n(x_n+ht)=$$
$$=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+\frac{t(t+1)\times\ldots\times(t+(n-1))}{n!}\Delta^n y_0.$$

Bu formulaning xatoligini baholash Lagranj formulasining xatoligini baholash formulasidagi x o'zgaruvchini t o'zgaruvchiga $x-x_{n-i}=h(t+i)$ formula orqali o'tish asosida hosil qilinadi:

$$R_n(x_n+th)=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1)\times\ldots\times(t+n),$$

$$|R_n(x_n+th)|\le\frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}t(t+1)\times\ldots\times(t+n),$$

$$R_n(x_n+th)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_n}{(n+1)!}t(t+1)\times\ldots\times(t+n).$$

Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasiga $\Delta y_n, \Delta^2 y_{n-1},\ldots,\Delta^n y_0$ chekli ayirmalar kiradi, shu sababli bu formulani x_n ning boshlang'ich qiymati atrofida ishlatiladi. Bunda interpolyatsiya qadami $t=\frac{x-x_n}{h}<0$, x_n sifatida x ning ixtiyoriy jadval qiymatini olish mumkin.

Shuni e'tiborga olish lozimki, Nyutonning ikkala formulasi Lagranj interpolyatsion ko'phadining boshqacha formadagi ifodasidir, shu sababli bu formulalar yordamida bir xil tugun nuqtalar bo'yicha olingan natijalar ustma-ust tushadi. Lekin turli shartlarda turli interpolyatsion formulalar qo'llaniladi.

6.5. Ixtiyoriy tugun nuqtalar uchun Nyuton interpolyatsion ko‘phadi

Amaliyotda o‘zgaruvchi qadamli, ya'ni $x_{i+1} - x_i \neq Const$ bo‘lgan jadvallar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi:

x	x_0	x_1	...	x_k	...	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	...	y_k	...	y_n

Bunday hollar odatda empirik ma’lumotlar bilan ish ko‘rganda uchraydi. O‘zgaruvchi qadam bilan ish ko‘rganda chekli ayirmalar tushunchasi umumlashtiriladi, ya'ni bo‘lingan ayirmalar tushunchasi kiritiladi. Birinchi tartibli bo‘lingan ayirma deb quyidagi munosabatga aytiladi:

$$f(x_{i+1}, x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \; i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Masalan,

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \; f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ikkinchi tartibli bo‘lingan ayirma deb quyidagi munosabatga aytiladi:

$$f(x_{i+2}, x_{i+1}, x_i) = \frac{f(x_{i+2}, x_{i+1}) - f(x_{i+1}, x_i)}{x_{i+2} - x_i}.$$

Masalan,

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}, \; f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Umumiy holda, k – tartibli bo‘lingan ayirma $(k-1)$ - tartibli ayirmadan quyidagi formula asosida hosil qilinadi:

$$f(x_{i+k}, x_{i+k-1}, \ldots, x_i) = \frac{f(x_{i+k}, \ldots, x_{i+1}) - f(x_{i+k-1}, \ldots, x_i)}{x_{i+k} - x_i}, \; k = \overline{1,n}, \; i = \overline{0, n-k}.$$

Bo‘lingan ayirmalar simmetrik xususiyatga ega:
$f(x_{i+k}, \ldots, x_i) = f(x_i, \ldots, x_{i+k})$.

Ixtiyoriy tugun nuqtalar uchun Nyuton interpolyatsion ko‘phadini hosil qilish uchun quyidagi bo‘lingan ayirmadan foydalanamiz:

$$f(x, x_0) = \frac{\tilde{f}(x) - y_0}{x - x_0},$$

Bu yerda $\tilde{f}(x)$ aniqlanadigan funksiya.

Bundan $\tilde{f}(x)=y_0+f(x,x_0)(x-x_0)$.

Ikkinchi tartibli bo'lingan ayirmadan:

$$f(x,x_0,x_1)=\frac{f(x,x_0)-f(x_0,x_1)}{x-x_1}$$

$$f(x,x_0)=f(x_0,x_1)+f(x,x_0,x_1)(x-x_1) \text{ ni}$$

yoki

$\tilde{f}(x)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x,x_0,x_1)(x-x_0)(x-x_1)$ ni hosil qilamiz.

Uchinchi tartibli bo'lingan ayirmadan quyidagini

$$f(x,x_0,x_1)=f(x_0,x_1,x_2)+f(x,x_0,x_1,x_2)(x-x_2)$$

yoki

$$\tilde{f}(x)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+$$

$+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+f(x,x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ ni hosil qilamiz.

Jarayonni shu tariqa davom ettirsak:

$$\tilde{f}(x)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+f(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+$$
$$+f(x_0,x_1,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_{n-1})+$$
$$+f(x,x_0,x_1,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_n)$$

yoki

$\tilde{f}(x)=N_n(x)+f(x,x_0,x_1,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_n)$ ni hosil qilamiz.

Bu yerda $f(x,x_0,x_1,\ldots,x_n)$ ifoda $(n+1)$- tartibli bo'lingan ifoda. Berilgan jadvalning uzunligi n ga teng bo'lgani uchun $f(x,x_0,x_1,\ldots,x_n)=0$. Demak, jadval ko'rinishida berilgan noma'lum funksiya uchun quyidagi taqribiy tenglik o'rinli:

$$f(x)\approx N_n(x)=$$
$$=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+f(x_0,x_1,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_{n-1})$$

Barcha $x=x_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ lar uchun $y_i=f(x_i)=\tilde{f}(x_i)=N_n(x_i)$, demak, quyidagi funksiya

$$\tilde{f}(x)=N_n(x)=$$
$$=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$
$$+f(x_0,x_1,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_{n-1})$$

iterpolyasion ko'phad bo'ladi va Nyutonning ixtiyoriy tugunlar uchun interpolyatsion ko'phadi deyiladi. Bo'lingan ayirmalarning simmetriklik xossasidan: $N_n(x)=$

$$= y_0 + f(x_1, x_0)(x - x_0) + f(x_2, x_1, x_0)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x - x_0)(x - x_1) \times \ldots \times (x - x_{n-1}).$$

Ixtiyoriy tugunlar uchun interpolyatsion ko'phadning xatoligi Lagranj interpolyatsion ko'phadi xatoligi bilan ustma-ust tushadi, va quyidagi formula asosida hisoblanadi

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \times \ldots \times (x - x_n) \qquad (6.12)$$

Misol: Quyidagi jadval asosida Nyuton ko'phadi tuzing.

n	**0**	**1**	**2**
x	1	1.5	2.5
$y = f(x) = \frac{1}{x}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$

Ko'phadni keltiramiz:

$$N_2(x) = y_0 + f(x_1, x_0)(x - x_0) + f(x_2, x_1, x_0)(x - x_0)(x - x_1).$$

Bo'lingan ayirmalarni hisoblaymiz:

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2/3 - 1}{3/2 - 1} = -\frac{2}{3},$$

$$f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2/5 - 2/3}{5/2 - 3/2} = -\frac{4}{15}$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{-4/15 - (-2/3)}{5/2 - 1} = \frac{4}{15}.$$

Berilganlar asosida hisoblaymiz:

$$N_2(x) = 1 - \frac{2}{3} \times (x - 1) + \frac{4}{15} \times (x - 1)(x - 3/2) =$$
$$= 1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} \times (x^2 - 5/2x + 3/2) =$$
$$= \frac{4}{15}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x + 1 + \frac{2}{3} + \frac{6}{15} =$$
$$= \frac{4}{15}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{31}{15}.$$

Hosil bo'lgan ko'phad ixtiyoriy tugun nuqtalar uchun Lagranj ko'phadi bilan ustma-ust tushadi.

6.6. Splaynlar yordamida interpolyatsiyalash

Interpolyatsiya tugunlari soni katta bo'lganda interpolyatsion ko'phadlar darajasi tez o'sadi, bu esa ulardan hisoblashlarda foydalanishda noqulayliklar tug'diradi. Bunday noqulaylikdan qutilishning bir usuli – interpolyatsiya oralig'ini bir nechta bo'laklarga bo'lish va har bo'lak uchun alohida interpolyatsion ko'phad qurishdir. Bunday interpolyatsiyalash usulining kamchilik jihati sifatida turli interpolyatsion ko'phadlar qo'shilish nuqtalarida ularning birinchi tartibli hosilalarining uzilishga egaligidir. Bunday hollarda bo'lakli – ko'phadli interpolyatsiyaning alohida turi, ya'ni splaynlar asosida interpolyatsiyalash usuli qulaydir.

Splayn – har bir qismiy oraliqda algebraik ko'phad bo'lib, berilgan umumiy sohada o'zining bir necha tartibli hosilalari bilan uzluksiz funksiyadir. Quyida amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigan uchinchi tartibli kubik splayn qurish usuli keltiriladi.

Faraz qilaylik, interpolyatsiyalanuvchi $f(x)$ funksiya nuqtalarda o'zining y_i qiymatlari bilan berilgan bo'lsin.

$[x_{i-1};x_i]$ oraliqda $f(x)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$S(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3 \qquad (6.12)$$

Bu yerda a_i,b_i,c_i,d_i - noma'lum koeffisiyentlar (ularning soni hammasi bo'lib $4n$ ta). $S(x)$ va f funksiyaning jadval qiymatlari ustma-ust tushishi shartidan, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$S(x_{i-1})=y_{i-1}=a_i, \qquad (6.13)$$

$$S(x_i)=y_i=a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3. \qquad (6.14)$$

Bu tenglamalar soni $2n$ ta. Qo'shimcha tenglamalar hosil qilish uchun $S'(x)$ va $S''(x)$ larning $(x_0;x_n)$ oraliqdagi interpolyatsiya tugunlarida uzluksizligidan foydalanamiz.

Quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$b_{i+1}=b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2, \qquad (6.15)$$

$$c_{i+1}=c_i+3d_ih_i \qquad (i=1,2,\dots,n-1).$$

Yana ikkita tenglamani hosil qilish uchun ikkinchi tartibli hosila $S''(x)$ ning x_0,x_n nuqtalarda nolga tengligidan foydalanamiz:

$$c_1=0,\ c_n+3d_nh_n=0. \qquad (6.16)$$

Yuqorida hosil qilingan tenglamalardan a_i ni chiqarib tashlasak, $3n$ ta noma'lumli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$b_i h_i - c_i h_i^2 - d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$c_1 = 0, \tag{6.17}$$

$$c_n + 3d_n h_n = 0.$$

Bu sistemani yechib, $S(x)$ splaynni aniqlovchi noma'lumlar b_i, c_i, d_i qiymatlarini topamiz.

Splayn qurishga doir misol ko'ramiz.

Interpolyatsiyalanuvchi funksiya quyidagi jadval ko'rinishida berilgan:

x_i	2	3	4	5
y_i	4	-2	6	-3

(6.12) formuladan foydalanib, kubik splayn hosil qilamiz:

$$S_1(x) = 4 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_i(x-2)^3, \; 2 \le x \le 3$$

$$S_2(x) = -2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3, \; 3 \le x \le 5$$

$$S_3(x) = 6 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3, \; 5 \le x \le 7$$

(6.17) formulalardan foydalanib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$b_1 + c_1 + d_1 = -6,$$

$$2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8,$$

$$2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9,$$

$$b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0,$$

$$b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0,$$

$$c_2 - c_1 - 3d_1 = 0,$$

$$c_3 - c_2 - 6d_2 = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

$$c_3 + 6d_3 = 0.$$

Sistema koeffisiyentlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

b_1	c_1	d_1	b_2	c_2	d_2	b_3	c_3	d_2	Ozod hadlar
1	1	1	0	0	0	0	0	0	-6
0	0	0	2	4	8·	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	2	4	8	-9
-1	-2	-3	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	-4	-12	1	0	0	0
0	-1	-3	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	-6	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	6	0

Sistemani Gauss usuli bilan yechib, quyidagi natijalarni olamiz:

$b_1 = -11{,}60 \qquad c_1 = 5{,}60 \qquad d_1 = 0$

$b_2 = -0{,}40 \qquad c_2 = 6{.}60 \qquad d_2 = -1{,}70$

$b_3 = 1{,}62 \qquad c_3 = -4{.}59 \qquad d_3 = 0{,}76.$

Olingan koeffisiyentlar asosida splayn quramiz:

$$S_1(x) = 4 - 11{,}6(x-2) + 5{,}6(x-2)^2,$$

$$S_2(x) = -2 - 0{,}4(x-3) + 5{,}6(x-3)^2 - 1{,}7(x-3)^3,$$

$$S_3(x) = 6 + 1{,}62(x-5) - 4{,}59(x-5)^2 + 0{,}76(x-5)^3.$$

VII BOB. APPROKSIMATSIYALOVCHI FUNKSIYANI QURISHNING ENG KICHIK KVADRATLAR USULI

7.1. Eng kichik kvadratlar usuli algoritmi

Faraz qilaylik, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$ n ta tajriba natijalari berilgan bo'lsin. Ana shu ma'lumotlar asosida x va y lar orasida $y=\varphi(x,a)$ funksional bog'lanish tenglamasini topish masalasi qo'yiladi, bu yerda $a=(a_0,a_1,...,a_k)$, $\varphi(x,a)$ funksiya parametrlari vektori. $\varphi(x,a)$ funksiya eng kichik kvadratlar ma'nosida berilgan funksiyaga yaqinlashishi uchun $a_{napa}=(a_0,...,a_k)$ parametrlar qiymatlarini shunday tanlash kerakki, xatolik funksiyasi

$$F(a)=F(a_0,a_1,...,a_k)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a)]^2 \to \min \qquad (7.1)$$

minimum qiymatga erishsin. $\varphi(x,a)$ funksiyaning minimumga erishishiga imkon beruvchi parametrlari $a_0,a_1,...,a_k$ ning qiymatlari quyidagi tenglamalar sistemasini yechish asosida topiladi:

$$\frac{\partial F(a_0,a_1,...,a_k)}{\partial a_j}=0, \quad j=0,1,2,...,k. \qquad (7.2)$$

(7.2) ifoda $a_0,a_1,...,a_k$ noma'lumlarga nisbatan $k+1$ - tartibli algebraik tenglamalar sistemasidir, yani:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a_0,a_1,...,a_k)]\cdot\frac{\partial F}{\partial a_0}=0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a_0,a_1,...,a_k)]\cdot\frac{\partial F}{\partial a_1}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a_0,a_1,...,a_k)]\cdot\frac{\partial F}{\partial a_k}=0 \end{cases} \qquad (7.3)$$

(6.20)- sistema birgalikda va yagona $\tilde{a}=(\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_k)$ yechimga ega. $\varphi(x,a)$ funksiyada a ning o'rniga $\tilde{a}$ ni qo'ysak, jadval ko'rinishida berilgan funksiya eng kichik kvadratlar ma'nosidagi konkret $\varphi(x,a)$ ko'rinishiga keltiriladi. Amaliyotda yaqinlashuvchi funksiya $\varphi(x,a)$ sifatida $P_m(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m$ ko'phad olinadi va uning $x_0,x_1,...,x_n$ nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyadan chetlanishi o'lchovi sifatida:

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} [P_m(x_i) - f(x_i)]^2 \to \min \tag{7.4}$$

sharti tekshiriladi. (7.4) shart asosida qurilgan ko'phadga berilgan funksiyani approksimatsiyalovchi ko'phad deyiladi va approksimatsiyalovchi ko'phadni qurish jarayoniga $f(x)$ funksiyani $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda nuqtaviy kvadratik approksimatsiyalash deyiladi. (7.4) ifodani quyidagicha ifodalanadi:

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i]^2 \to \min, \tag{7.5}$$

bu yerda $y_i = f(x_i)$.

So'ngra (7.3) ga asosan, barcha $a_0, a_1, ..., a_m$ parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olinadi, nolga tenglashtiriladi va natijada $m+1$ ta $a_0, a_1, ..., a_m$ noma'lumlarga nisbatan $m+1$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial S_m}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S_m}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$S_k = x_0^k + x_1^k + ... + x_n^k \quad (k = 0,1,2,...),$$

$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + ... + x_n^k y_n \quad (k = 0,1,2,...).$$

Kiritilgan belgilashlar asosida (7.6) sistema quiydagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\begin{cases} a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + ... + a_m S_m = t_0 \\ a_0 S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + ... + a_m S_{m+1} = t_1 \\ a_0 S_2 + a_1 S_3 + a_2 S_4 + ... + a_m S_{m+2} = t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 S_m + a_1 S_{m+1} + a_2 S_{m+2} + ... + a_m S_{2m} = t_n \end{cases} \tag{7.7}$$

bu yerda $S_0 = n+1$.

$x_i \neq x_j$ $(i, j = 0,1,2,...)$ va $m \leq n$ shartlarda (7.7) sistema birgalikda va yagona yechimga ega. Bunday koeffisiyentlardan iborat $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ ko'phad minimal kvadratik chetlanish $S_{\min}$ xususiyatiga ega. Agar $m = n$ bo'lsa, u holda approksimasyalovchi ko'phad $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalar asosida qurilagan Lagranj ko'phad bilan ustma-ust tushadi va $S_{\min} = 0$. Demak, approksimatsiyalash jarayoni interpolyatsiyalashga nisbatan kengroq tushunchadir. Hisoblashlarni quyidagicha jadval asosida tashkil etish tavsiya etiladi.

Mazkur jadval qulaylik uchun $m=2$ hol uchun keltirilgan, m ning boshqa qiymatlari uchun jadval shakli invariant.

Approksimatsiyalovchi ko'phad qurishda hisoblashlarni tashkil qilish

7.1-jadval

n	x_0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
0	1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	x_0y_0	$x_0^2y_0$
1	1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	x_1y_1	$x_1^2y_1$
2	1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	x_2y_2	$x_2^2y_2$
3	1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	x_3y_3	$x_3^2y_3$
4	1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	x_4y_4	$x_4^2y_4$
	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t_2

1-misol. Quyidagi jadval ma'lumotlari uchun $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ approksimatsiyalovchi ko'phad qurilsin.

Berilgan qitymatlar

7.2-jadval

x	2	4	7	9	12	15	17
y	7	9	12	14	16	15	13

Quyida MATLAB tizimi asosida approksimatsiyalovchi ko'phadni 6.1-jadval asosida qurish jarayoni keltirilgan. Hisoblashlar MATLAB tizimida yuqoridagi 7.1-jadval asosida olib boriladi.

```
> x=[2 4 7 9 12 15 17];
> y=[7 9 12 14 16 15 13];
> tab1=[x; x.^2; x.^3; x.^4; y; x.*y; (x.^2).*y]'

ab1 =

     2      4      8     16      7     14     28
     4     16     64    256      9     36    144
     7     49    343   2401     12     84    588
     9     81    729   6561     14    126   1134
    12    144   1728  20736     16    192   2304
    15    225   3375  50625     15    225   3375
    17    289   4913  83521     13    221   3757

> tab1=[sum(x); sum(x.^2); sum(x.^3); sum(x.^4); sum(y); sum(x.*y); sum((x.^2).*y)]'

ab1 =

    66    808  11160  164116     86    898  11330

> A=[8 66 808 ;66 808 11160 ;808 11160 164116]

 =

     8     66    808
    66    808  11160
   808  11160 164116

> B=[86;898; 11330]

 =

    86
   898
 11330

> xx=inv(A)*B

x =

  0.9821
  2.3761
 -0.0974
```

Bu yerdan a_0, a_1, a_2 koeffisiyentlarni topish uchun (6.23) asosida quyidagi tenglamalar sistemasi hosil boʻladi

$$
\begin{cases}
8a_0 + 56a_1 + 808a_2 = 86 \\
66a_0 + 808a_1 + 11160a_2 = 898 \\
808a_0 + 11160a_2 + 164116a_2 = 11330
\end{cases}
\tag{7.8}
$$

Sistemani $AX = B$ ko'rinishda yozib olamiz,
Bu yerda,

$$
A = \begin{bmatrix} 8 & 66 & 808 \\ 66 & 808 & 11160 \\ 808 & 11160 & 164116 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 86 \\ 898 \\ 11330 \end{bmatrix}
$$

(6.25) sistemani biror usul bilan, masalan A matritsaning teskarisini B matritsaga ko'paytirish orqali yechiladi. MATLAB tizimida buning uchun $inv(A)$ funksiyasidan foydalaniladi, ya'ni $x = inv(A) \cdot B$.

```
A =

         8            66           808
        66           808         11160
       808         11160        164116

>> B=[86;898; 11330]

B =

        86
       898
     11330

>> xx=inv(A)*B

xx =

    0.9821
    2.3761
   -0.0974

>> ym=0.9821+2.3761*x-0.0974*x.^2

ym =

    5.3447    8.9281   12.8422   14.4776   15.4697   14.7086   13.2272

>> t=[x;y;ym;y-ym]

t =

    2.0000    4.0000    7.0000    9.0000   12.0000   15.0000   17.0000
    7.0000    9.0000   12.0000   14.0000   16.0000   15.0000   13.0000
    5.3447    8.9281   12.8422   14.4776   15.4697   14.7086   13.2272
    1.6553    0.0719   -0.8422   -0.4776    0.5303    0.2914   -0.2272
```

```
>> t'

ans =

    2.0000    7.0000    5.3447    1.6553
    4.0000    9.0000    8.9281    0.0719
    7.0000   12.0000   12.8422   -0.8422
    9.0000   14.0000   14.4776   -0.4776
   12.0000   16.0000   15.4697    0.5303
   15.0000   15.0000   14.7086    0.2914
   17.0000   13.0000   13.2272   -0.2272
```

Demak, approksimatsiyalovchi ko'phad

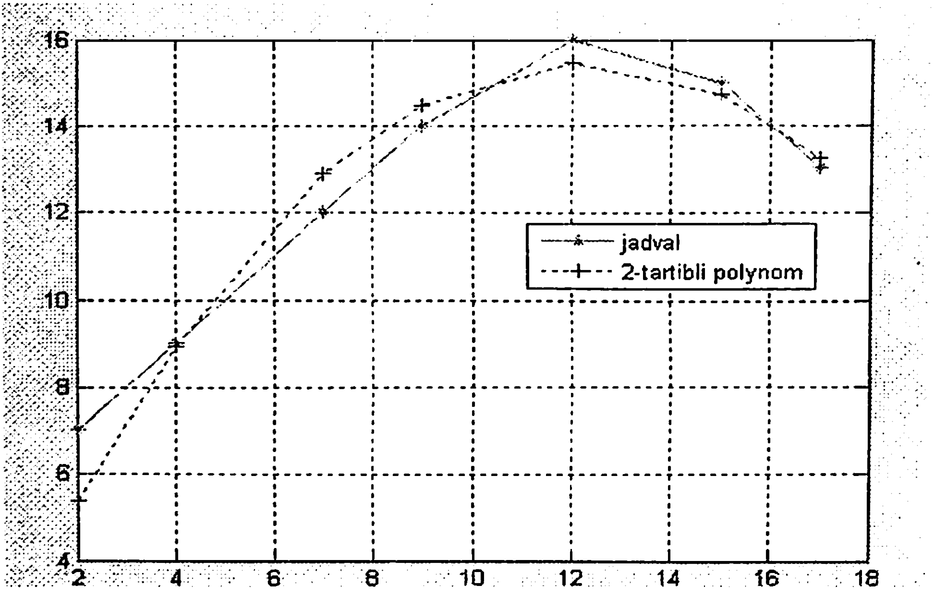
$$\bar{y} = 0{,}9821 + 2.3761x - 0{,}0974x^2 \qquad (7.9).$$

$f(x)$ funksiyaning berilgan qiymatlaridan va (7.9) approksimatsiyalovchi uch had asosida olingan natijalarni solishtirish quyida (7.3-jadval)da va shu jadval asosida chizilgan grafikda (7.1-rasm) keltirilgan:

HE lari natijalari

7.3-jadval

x	y	$\bar{y}$
2	7	5,3447
4	9	8,9281
7	12	12,8422
9	14	14,4776
12	16	15,4697
15	15	14,7086
17	13	13,2272



7.1- rasm.

7.2. Tajriba natijalarini approksimotsiya qilishning integral eng kichik kvadratlar usuli

Faraz qilaylik, $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_k(x)$ funksiyalar uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

$$Q(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+...+a_k\varphi_k(x)\quad, \tag{7.10}$$

Ushbu funksiyaga umumlashgan ko'phad deyiladi, bu yerda $a_0,a_1,...,a_n$- koeffisiyentlar. Berilgan $f(x)$ funksiyani $[\alpha,\beta]$ oraliqda umumlashagan ko'phadlar orqali approksimatsiya qilish talab etilsin. Bunday masala yechimi $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_k(x)$ funksiyalar ma'lum bo'lishi shartida $a_0,a_1,...,a_k$ noma'lum koeffisiyentlarni:

$$\phi(a_0,a_1,...,a_k)=\int_\alpha^\beta[\sum_{i=0}^{k}a_i\varphi_i(x)-f(x)]^2dx\ \rightarrow \min\ , \tag{7.11}$$

ifoda eng kichik qiymatga erishishi shartiga asosan topishga keltiriladi. Bunda, ya'ni ekstremumning zaruriy shartidan foydalanib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial\phi}{\partial a_i}(a_0,a_1,...,a_k)=0\ ,\ i=0,1,2,...,k\ , \tag{7.12}$$

yoki

$$\begin{cases} \int_\alpha^\beta [\sum_{i=0}^k a_i\varphi_i(x) - f(x)]\varphi_0(x)dx = 0 \\ \int_\alpha^\beta [\sum_{i=0}^k a_i\varphi_i(x) - f(x)]\varphi_1(x)dx = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_\alpha^\beta [\sum_{i=0}^k a_i\varphi_i(x) - f(x)]\varphi_k(x)dx = 0 \end{cases} \qquad (7.13)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz $(\varphi.\psi) = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\psi(x)dx$.

Shunga asosan (6.30) sistema quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0,\varphi_0) + a_1(\varphi_1.\varphi_0) + \dots + a_k(\varphi_k,\varphi_0) = (f.\varphi_0) \\ a_0(\varphi_0.\varphi_1) + a_1(\varphi_1.\varphi_1) + \dots + a_k(\varphi_k.\varphi_1) = (f.\varphi_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0(\varphi_0.\varphi_k) + a_1(\varphi_1.\varphi_k) + \dots + a_k(\varphi_k.\varphi_k) = (f,\varphi_k) \end{cases} \qquad (7.14)$$

Agar $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x)$ funksiyalar chiziqli erkli bo'lsa, u holda (6.31) sistema yagona $\bar{a}_0,\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_k$ yechimga ega.

1-misol. $[0,1]$ kesmada $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyani 1-darajali umumlashgan ko'phad yordamida approksimatsiyalang.

Yechish. Umumlashgan ko'phad quyidagi ko'rinishda qidiriladi:
$Q(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$,
bu yerda $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$.

Bu yerda,
$$(\varphi_0.\varphi_0) = \int_0^1 1\cdot 1\cdot dx = 1;$$
$$(\varphi_1.\varphi_0) = \int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = \frac{1}{2};$$
$$(\varphi_1.\varphi_1) = \int_0^1 x\cdot x\cdot dx = \frac{1}{3};$$
$$(f.\varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x}\cdot 1\cdot dx = \frac{2}{3};$$
$$(f.\varphi_1) = \int_0^1 \sqrt{x}\cdot x\cdot dx = \frac{2}{5};$$

a_0,a_1 koefffisiyentlarni topish uchun (7.14) tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

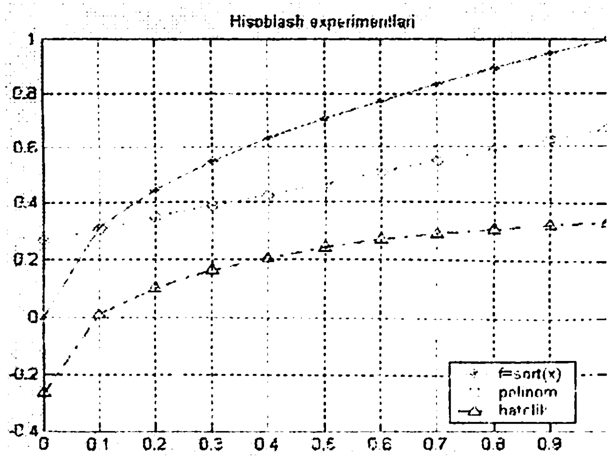
$$1\cdot a_0 + \frac{1}{2}\cdot a_1 = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{2}\cdot a_0 + \frac{2}{3}\cdot a_1 = \frac{2}{5}$$

Sistemani yechib: $\bar{a}_0 = \frac{4}{15}$; $\bar{a}_1 = \frac{4}{5}$ topiladi.

Demak, $x \in [0,1]$; $f(x) \approx Q(x) = \frac{4}{15} + \frac{2}{5}x$.

MATLAB tizimida $f(x)$ va $Q(x)$ funksiyalarining yaqinlashishini quyida keltirilgan hisoblashlar natijalari va grafiklar orqali ifodalash approksimatsiyalash jarayoni haqida tasavvur hosil qilishga imkon beradi.

```
x=0:0.1:1;
>> f=sqrt(x);
>> f2=4./15+2.*x/5;
>> ym=f-f2;
>> w=[x; f; f2; ym]
>> w'
ans =
       0      0 0.2667 -0.2667
  0.1000 0.3162 0.3067 0.0096
  0.2000 0.4472 0.3467 0.1005
  0.3000 0.5477 0.3867 0.1611
  0.4000 0.6325 0.4267 0.2058
  0.5000 0.7071 0.4667 0.2404
  0.6000 0.7746 0.5067 0.2679
  0.7000 0.8367 0.5467 0.2900
  0.8000 0.8944 0.5867 0.3078
  0.9000 0.9487 0.6267 0.3220
  1.0000 1.0000 0.6667 0.3333
```



7.3. Approksimatsiyalovchi ko'phadni qurishda ortogonal funksiyalardan foydalanish

Amaliyotda eng kichik kvadratlar usuli asosida approksimatsiyalovchi ko'phad qurganda, odatda $m=2,3$ qiymatlar olinadi. Agar m ning qiymatalari nisbatan katta bo'lsa hisoblashlar murakkablashib boradi. Bunday hollarda ortogonal funksiyalardan foydalanish maqsadga muvofiq.

1-ta'rif. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $X=\{x_0,x_1,....x_n\}$ to'plamda ortogonal deyiladi, agarda:

$$\sum_{i=0}^{n}\varphi(x_i)\psi(x_i)=0 \tag{7.15}$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

2-ta'rif. $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar sistemasi X to'plamda ortogonal deyiladi, agarda barcha funksiyalar X to'plamda jufti bilan ortogonal bo'lsa.

3-ta'rif. $\varphi(x)$ funksiyaning X to'plamdagi normasi deb quyidagi kattalikka aytiladi:

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\varphi^2(x_i)}=\|\varphi\|_X, \tag{7.16}$$

Agar $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar sistemasi X to'plamda ortogonal bo'lib barcha k lar uchun $\|\varphi_k(x)\|=1$ munosabat o'rinli bo'lsa bunday funksiyalar sistemasi ortonormal deyiladi.

4-ta'rif. $f_k(x)$, $(k=0,1,2,...,m)$ funksiyalar $X=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ to'plamda chiziqli bog'liq emas deyiladi, agarda ular X to'plamda aniqlangan va $\alpha_0 f_0(x_i)+\alpha_1 f(x_i)+...+\alpha_m f_m(x_i)=0$, $(i=0,1,2,...,n)$ tenglikdan barcha $\alpha_k=0$, $(k=0,1,2,...,m)$ kelib chiqsa. Aks holda $f_k(x)$ funksiyalar X to'plamda chiziqli bog'liq deyiladi.

7.4. Tajriba natijalariga ishlov berishda empirik bog'lanish qonunlarini aniqlashtirish usullari

$y=f(x)$ funksiyani(analitik yoki jadval ko'rinishidagi) unga yaqin bo'lgan $\varphi(x)$ funksiya bilan almashtirishga approksimatsiyalash deyiladi. Bunda $f(x_i)=\varphi(x_i)$ yoki $f(x_i)\approx\varphi(x_i)$ munosabatlarga bog'liq tarzda interpolyatsiyalash yoki yaqinlashish haqida so'z yuritiladi. Interpolyatsiyalash masalasining qo'yilishi va usullari avvalgi boblarda ko'rilganligi sababli, mazkur bobda $f(x_i)\approx\varphi(x_i)$ shartlar asosida funksiyaning yaqinlashishi, ya'ni approksimatsiya haqida so'z yuritiladi.

Umumiy holda, approksimatsiyalash jarayoni quyidagi bosqichlardan iborat:

- Approksimatsiyalovchi funksiya ko'rinishini(strukturasini) tanlash;
- Approksimatsiyalovchi funksiya parametrlarini topish;
- Approksimatsiyalovchi funksiya adekvatligini baholash.

Approksimatsiyalovchi funksiya analitik ko'rinishini tanlashda $y=f(x)$ funksiya qiymatlari asosida uning grafigi quriladi va grafik tipik matematik funksiyalar grafiklari bilan solishtiriladi va shu asosda approksimatsiyalash uchun maqbul funksiya tanlanadi.

$f(x_i)\approx\varphi(x_i)$ shart asosidagi yaqinlashtirish yoki approksimatsiyalash usuli $y=f(x)$ funksiya qiymatlari taqribiy natijalari ichida xatoliklar mavjud bo'lgan hollarda ishlatiladi. Bunday hollarda approksimatsiyalash usuli nuqtalardagi aniq interpolyatsiyalash usuliga qaraganda yuqoriroq aniqlikga erishish imkonini beradi. Bunda approksimatsiya aniqligi tajriba natijalarini silliqlash hisobiga erishiladi.

Approksimatsiyalovchi funksiyanin' analitik ko'rinishini tanlashda berilgan $y=f(x)$ funksiya qiymatlari grafigi quriladi va grafik tipik matematik funksiyalar grafiklari b'.an solishtiriladi va shu asosda approksimatsiyalash kerakli funksiya tanlanadi.

Empirik formula tanlashning yana bir usuli:

$x_i, y_i (i=1,2,...,n)$, $n\geq3$ va $x_1<x_2<....<x_n$ tajriba natijalari bo'lsin va

$$y=\overline{f}(x; a,b) \tag{7.17}$$

ko'rinishdagi empirik formula topish talab qilinsin, a,b - noma'lum parametrlar. (x_i,y_i) nuqtalar uchun (1) empirik munosabat o'rinli bo'lishini zaruriy shartini keltirib chiqaramiz. Faraz qilaylik $M_i(x_i,y_i)$, $M_j(x_j,y_j)$, $M_k(x_k,y_k)$ - lar (x_i,y_i) nuqtalar to'plamiga tegishli nuqtalar bo'lsin.

(7.17) chiziq M_i, M_j, M_k nuqtalaridan o'tishi shartida

$$y_i=\overline{f}(x_i; a,b),\ y_j=\overline{f}(x_j; a,b),\ y_k=\overline{f}(x_k; a,b), \tag{7.18}$$

larga ega bo'lamiz.

(7.18) sistemadan a va b parametrlarni chiqarib tashlasak quyidagi munosabatga kelamiz:

$$\Phi(x_i,x_j,x_k,y_i,y_j,y_k)=0 \tag{7.19}$$

(7.19) shartning barcha $i,j,k(1\le i<j<k\le n)$ larda bajarilishi (6.34) munosabat mavjudligining zaruriy shartidir. (7.19) munosabatning bajarilishini tekshirishda hisoblashlarni osonlashtirish uchun odatda boshlang'ich (x_1,y_1), oraliq (x_s,y_s) va oxirgi (x_n,y_n) nuqtalar asosidagi uchlik olinadi, ya'ni $i=1$, $j=s$, $k=n$ deb olinadi. Faraz qilaylik, tajriba natijalari quyidagi jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin:

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_1	y_1	...	y_1

Tanlangan empirik formula $y=\bar{f}(x,a,b)$ ning $y=f(x)$ funksiyaga mosligini tekshirish uchun, tajriba natijalari asosida $\bar{x}_s$ va $\bar{y}_s$ lar hisoblanadi. So'ngra topilgan $\bar{y}_s$ qiymatlar $f(x)$ funksiya qiymatlari jadvalidagi $\bar{x}_s$ ga mos y_s qiymati bilan solishtiriladi. Agar $\bar{x}_s$ qiymat x_i lar ichida uchramasa, u holda $\bar{x}_s$ ni o'z ichiga oluvchi x_i va x_{i+1} nuqtalar uchun chiziqli interpolyatsiya yordamida $\hat{y}_s$ topiladi:

$$\hat{y}_s = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(\bar{x}_s - x_i), \tag{7.20}$$

bu yerda $x_i < \bar{x}_s < x_{i+1}$.

Agar $\left|\bar{y}_s - \hat{y}_s\right|$ qiymat katta bo'lsa, olingan empirik formula tajriba natijalariga mos kelmaydi deb hisoblanadi. Amaliyotda uchraydi, aksariyat masalalar matematik modellari mavjud qonunlarga (Nyuton, Om, Guk qonunlari va h.k.) ko'ra tuzilib, nisbatan soda ko'rinishga ega. Shuning uchun bog'lanish modelini interpolyatsiya usuliga ko'ra yuqori darajali ko'phadlar orqali ifodalash mantiqan zarur emasligi ayon. Undan tashqari jadval qiymatlaridagi mavjud bo'lgan sistematik hatolar ham ko'phad darajasini oshirib $o(h^{n+1})$ tartibdagi aniqlikka erishish mumkinligiga imkon bermaydi. Shuning uchun bog'lanish modelini soddaroq ko'rinishda, ma'lum qonunlardagi singari, izlash maqul. Quyidagi mulohazalar aynan shu yo'nalishda olib boriladi. Amaliyotda tajriba natijalarini approksimatsiya qilish uchun ko'p qo'llaniladigan ikki parametrli funksiyalar va ular uchun oraliq nuqtalar tanlash 7.4-jadvalda berilgan. Mazkur funksiyalar monoton funksiyalar, shu sababli, ular uchun $x_{i+1}-x_i>\Rightarrow f(x_{i+1})f(x_i)>0$ shartlarda o'rinli. Bunda a,b - parametrlar. [Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Е.З. Численний методи анализа. М.: «Наука», 1967., 368 стр.илл.]:

Ikki parametrli model qurish va tanlash sxemasi

7.4-jadval

Formula raqami	$\bar{x}_s$	$\bar{y}_s$	Funksiya ko'rinishi
1	$\frac{x_1+x_n}{2}$	$\frac{y_1+y_n}{2}$	$y=ax+b$
2	$\sqrt{x_1x_n}$	$\sqrt{y_1y_n}$	$y=ax^b$
3	$\frac{x_1+x_n}{2}$	$\sqrt{y_1y_n}$	$y=ab^x$
4	$\frac{2x_1x_n}{x_1+x_n}$	$\frac{y_1+y_n}{2}$	$y=a+\frac{b}{x}$
5	$\frac{x_1+x_n}{2}$	$\frac{2y_1y_n}{y_1+y_n}$	$y=\frac{1}{ax+b}$
6	$\frac{2x_1x_n}{x_1+x_n}$	$\frac{2y_1y_n}{y_1+y_n}$	$y=\frac{x}{ax+b}$
7	$\sqrt{x_1x_n}$	$\frac{y_1+y_n}{2}$	$y=a\lg x+b$

Ikki parametrli modellarni chiziqli ko'rinishga keltirish

7.5-jadval

Funksiya raqami	Funksiya	Chiziqli ko'rinishga keltirish
1	$y=ax+b$	
2	$y=ab^x$	$\ln y=\ln a+x\ln b$
3	$y=ax^b$	$\ln y=\ln a+b\ln x$
4	$y=a+\frac{b}{x}$	$u=\frac{1}{x},\quad y=a+bu$
5	$y=\frac{1}{ax+b}$	$u=\frac{1}{y},\quad u=ax+b$
6	$y=\frac{x}{ax+b}$	$u=\frac{x}{y},\quad u=ax+b$
7	$y=a\lg x+b$	$u=\lg x,\quad y=au+b$

Misol. Quyidagi jadval ma'lumotlariga ko'ra empirik formula tanlang.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u	12	35	75	125	210	315	445	600	800

Ikki parametrli model tanlash bo'yicha HE natijalari

7.6-jadval

Formula raqami	$\bar{x}_s$	$\bar{y}_s$	$\hat{y}_s$	$\lvert \hat{y}_s - \bar{y}_s \rvert$	Empirik formula ko'rinishi
1	$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2+10}{2}6$	$\frac{y_1+y_n}{2}=\frac{12+800}{2}=406$	210	196	$y=ax+b$ mos kelmaydi
2	$\sqrt{x_1x_n}=\sqrt{2\cdot 10}=4.47$	$\sqrt{y_1y_n}=\sqrt{12\cdot 800}=98$	98,5	0,5	$y=ax^b$ mos keladi
3	$\frac{x_1+x_n}{2}=6$	$\sqrt{y_1y_n}=98$	210	112	$y=ab^x$ mos kelmaydi
4	$\frac{2x_1x_n}{x_1+x_n}=3.3$	$\frac{y_1+y_n}{2}=406$	47	359	$y=a+\frac{b}{x}$ mos kelmaydi
5	$\frac{x_1+x_n}{2}=6$	$\frac{2y_1y_n}{y_1+y_n}=23.6$	210	186,4	$y=\frac{1}{ax+b}$ mos kelmaydi
6	$\frac{2x_1x_n}{x_1+x_n}=3.3$	$\frac{2y_1y_n}{y_1+y_n}=23,6$	47	23,4	$y=\frac{x}{ax+b}$ mos kelmaydi
7	$\sqrt{x_1x_n}=4.47$	$\frac{y_1+y_n}{2}=406$	98,5	307,5	$y=a\lg x+b$ mos kelmaydi

Jadval natijalariga ko'ra $y=ax^b$. formula tanlanadi. Mazkur model a va b parametrlarini eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib topamiz. $y=ax^b$ ifodani logorifmlab, chiziqli ko'rinishga keltiriladi $(x_i>0)$:

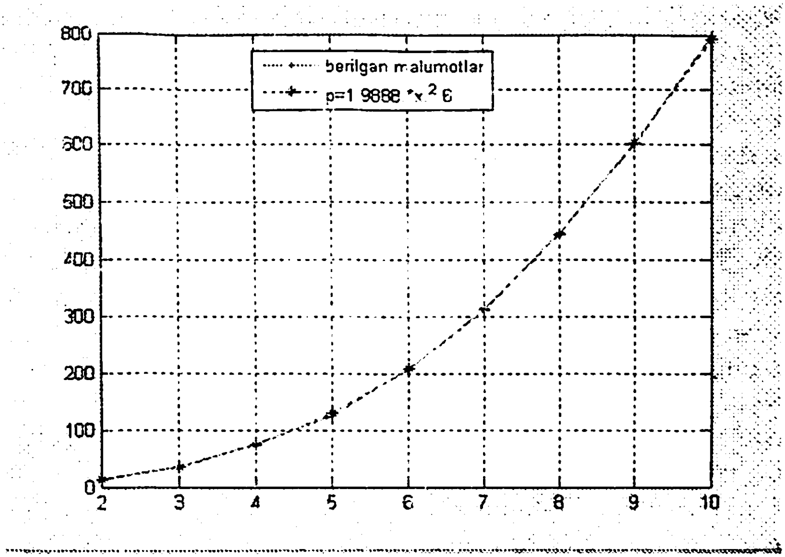
$$\ln y=\ln a+b\ln x, \tag{7.21}$$

bunda $u=\ln y$, $v=\ln x$ belgilash kiritsak: $u=\lg a+bv$.

Quyida, MATLAB tizimida eng kichik kvadratlar usuli asosida (7.38) chiziqli model yaratish va chiziqli modeldan $y=ax^b$ modelga o'tish jarayoni keltiriladi.

```
>> x=[2 3 4 5 6 7 8 9 10];
>> y=[12 35 75 125 210 315 445 600 800];
>> yy=log(y)/log(10);
>> xx=log(x)/log(10);
>> rr=[sum(xx);sum(xx.^2);sum(yy);sum(xx.*yy)]
>> aa=[9 6.5598;6.5598 5.2152]

aa =

    9.0000    6.5598
    6.5598    5.2152

>> bb=[19.7454;15.5203]

bb =

   19.7454
   15.5203

>> t=inv(aa)*bb

t =

    0.2986
    2.6004

>> a1=10.^0.2986

a1 =

    1.9888

>> p=1.9888.*x.^2.6

p =

  Columns 1 through 8

   12.0578   34.6024   73.1050  130.5910  209.7898  313.2175  443.2258  602.0349

  Column 9

  791.7555

>> tt=[x;y;p;y-p]'
```

Natijalar aniqligi quyidagi jadval va 7.2-rasm vositasida ko'rsatiladi.



7.2 - rasm.

Tajriba natijalariga ishlov berishda 2-parametrli empirik formulalar qurish va ulardan ma'lum ma'noda eng yaxshisini tanlashda hisoblash eksperimentlari(HE) o'tkazish maqsadga muvofiqdir. Quyida HE lari o'tkazish jarayonining MATLAB muhitidagi dastur kodi keltirilgan.

```
function [] = approxuz( x,y )
%Eng yahshi model tanlash bo'yicha
%hisoblash eksperimentlari
 nx=size(x);  % X massiv
nx=nx(2);  % uzunligini aniqlash
 ny=size(y);  % Y massiv
ny=ny(2);  % uzunligini aniqlash
 if(ny~=nx)  % Kiritilgan ma'lumotlar korrektliligini tekshirish
       % Massivlar uzunliklari teng bo'lishi lozim
  disp('Berilgan massivlar uzunliklari teng emas!')
else
yma=(y(1)+y(ny))/2;          % y bo'yicha o'rta arifmetik
ymg=sqrt(y(1)*y(ny));          % y bo'yicha o'rta geometrik
ymga=(2*y(1)*y(ny))/(y(1)+y(ny));  % y bo'yicha o'rta garmonik
 xma=(x(1)+x(nx))/2;          % x bo'yicha o'rta arifmetik
```

```
xmg=sqrt(x(1)*x(nx));       % x bo'yicha o'rta geometric
xmga=(2*x(1)*y(nx))/(x(1)+x(nx)); % x bo'yicha o'rta garmonic
% i- model tanlash bo'yicha baholash mezoni
% i=1 y=ax+b chiziqli model
% X-o'rta arifmetik U-o'rta arifmetik
p1=polyfit(x,y,1);
y1=polyval(p1,x);
t1=[x;y;y1;y-y1]'
y1ma=(y1(1)+y1(ny))/2; % olingan modelning o'rta arifmetigi
%i=2 y=ax^b darajali model
% X-o'rta arifmetik U-o'rta geometrik
u=log(y);       % chiziqli modelga keltirish
v=log(x);
p2=polyfit(v,u,1);
b=p2(1);       % koeffitsiyentlarni topish
a=exp(p2(2))
y2=a.*x.^b       % modelga koeffitsiyentlarni qo'yish
a
b
t2=[x;y;y2;y-y2]'
y2mg=sqrt(y2(1)*y2(ny)); % olingan modelning o'rta geometrigi
% i=3  y=ab^x ko'rsatgichli model
% X-o'rta arifmetik U-o'rta geometrik
p3=polyfit(x,u,1);
b=exp(p3(1))      % koeffitsiyentlarni topish
a=exp(p3(2))
y3=a*b.^x;       % modelga koeffitsiyentlarni qo'yish
t3=[x;y;y3;y-y3]'
y3mg=sqrt(y3(1)*y3(ny)); % olingan modelning o'rta geometrigi
% i=4  y=a+b/x normalashgan giperbolik model
% X-o'rta arifmetik U-o'rta arifmetik
u=y.*x;        % chiziqli ko'rinishga keltirish
p4=polyfit(x,u,1);
a=p4(1);       % koeffitsiyentlarni topish
b=p4(2);
y4=a+b./x;       % modelga koeffitsiyentlarni qo'yish
t4=[x;y;y4;y-y4]'
y4ma=(y4(1)+y4(ny))/2; % olingan modelning o'rta arifmetigi
% i=5  y=1/(ax+b) giperbolik model
```

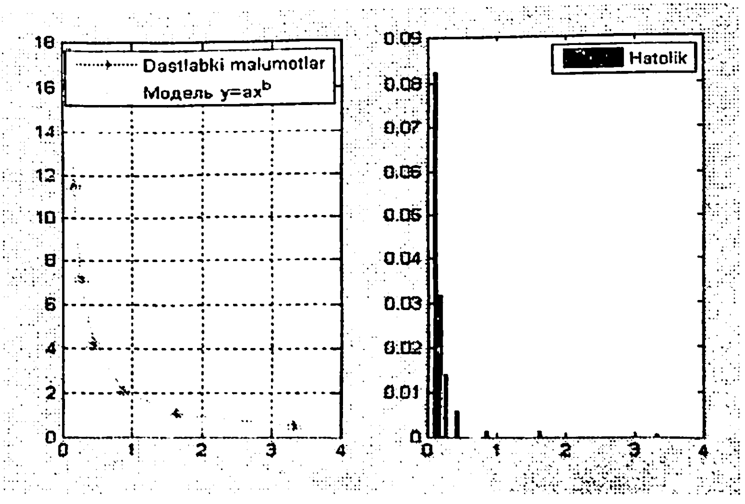
```
% X-o'rta arifmetik U-o'rta garmonik
u=1./y;        % chiziqli ko'rinishga keltirish
p5=polyfit(x,u,1);
a=p5(1);       % koeffitsiyentlarni topish
b=p5(2);
y5=1./(a.*x+b);     % modelga koeffitsiyentlarni qo'yish
t5=[x;y;y5;y-y5]'
y5mga=(2*y5(1)*y5(ny))/(y5(1)+y5(ny));% olingan modelning o'rta garmonigi
%i=6  y=x/(ax+b)
% X-o'rta garmonik U-o'rta garmonik
u=x./y;        % chiziqli ko'rinishga keltirish
p6=polyfit(x,u,1);
a=p6(1);       % koeffitsiyentlarni topish
b=p6(2);
y6=x./(a.*x+b);     % modelga koeffitsiyentlarni qo'yish
t6=[x;y;y6;y-y6]'
y6mga=(2*y6(1)*y6(ny))/(y6(1)+y6(ny));% olingan modelning o'rta garmonigi
%i=7  y=a*lg(x)+b logorifmik chiziqli model
% X-o'rta geometrik U-o'rta arifmetik
p7=polyfit(v,y,1);
a=p7(1);       % koeffitsiyentlarni topish
b=p7(2);
y7=a.*log(x)+b;     % modelga koeffitsiyentlarni qo'yish
t7=[x;y;y7;y-y7]'
y7ma=(y7(1)+y7(ny))/2; % olingan modelning o'rta arifmetigi
% X va Y berilganlarni chiqarish
sx=num2str(x);
sx=strcat('X: ', sx);
disp(sx)
sy=num2str(y);
sy=strcat('Y: ', sy);
disp(sy)
disp(' ')
% Hazorat jadvalini shakllantirish va chiqarish
tab_v={'Xs' xma xmg xma xmga xma xmga xmg;...
  'Ys' yma ymg ymg yma ymga ymga yma;...
  'YMs' y1ma y2mg y3mg y4ma y5mga y6mga y7ma;...
```

```
  'Ys-YMs' abs(yma-y1ma) abs(ymg-y2mg) abs(ymg-y3mg) abs(yma-
y4ma)...
  abs(ymga-y5mga) abs(ymga-y6mga) abs(yma-y7ma);...
  '\' 'y=ax+b' 'y=ax^b' 'y=ab^x' 'y=a+b/x' 'y=1/(ax+b'...
  'y=x/(ax+b' 'y=a(lgx)+b'}';
 disp(tab_v)
  % 7x4 matritsa ko'rinishdagi jadval
 tabs=[ xma xmg xma xmga xma xmga xmg;...
   yma ymg ymg yma ymga ymga yma;...
  y1ma y2mg y3mg y4ma y5mga y6mga y7ma;...
  abs(yma-y1ma) abs(ymg-y2mg) abs(ymg-y3mg) abs(yma-y4ma)...
  abs(ymga-y5mga) abs(ymga-y6mga) abs(yma-y7ma)]';
 % modellar asosida ma`lumotlar orasidagi
 % minimal farq indeksini topish
 format short
 tab=[x; y; y1; y2; y3; y4; y5; y6]'
 min=100000;
for i=1:1:7
  if(tabs(i,4)<min)
   min=tabs(i,4);
   ind=i;
  end
end
ind
% eng yahsi model grafigini yasash
switch ind
 case 1
   disp('Eng yahshi model y=ax+b')
   plot(x,y,'-r*',x,y1,':g*'),grid
   legend('Berilgan ma'lumotlar','Model y=ax+b')
 case 2
   disp('Eng yahshi model y=ax^b')
   plot(x,y,'-r*',x,y2,':g*'),grid
   legend('Berilgan ma'lumotlar','Model y=ax^b')
 case 3
  disp('Eng yahshi model y=ab^x')
  plot(x,y,'-r*',x,y3,':g*'),grid
  legend('Berilgan ma'lumotlar','Model y=ab^x')
case 4
```

```
  disp('Eng yahshi model y=a+b/x')
  plot(x,y,'-r*',x,y4,':g*'),grid
  legend('Berilgan ma`lumotlar','Model y=a+b/x')
 case 5
  disp('Eng yahshi model y=1/(ax+b)')
  plot(x,y,'-r*',x,y5,':g*'),grid
  legend('Berilgan ma`lumotlar','Model y=1/(ax+b)')
 case 6
  disp('Eng yahshi model y=x/(ax+b)')
  plot(x,y,'-r*',x,y6,':g*'),grid
  legend('Berilgan ma`lumotlar','Model y=x/(ax+b)')
 case 7
  disp('Eng yahshi model y=a(lgx)+b')
  plot(x,y,'-r*',x,y7,':g*'),grid
  legend('Berilgan ma`lumotlar','Model y=a(lgx)+b')
end
end
```

7.3-rasm. Ikki parametrli model qurish jarayonining dastur kodi

HE hatijalari 7.4.7.5-rasmlarda keltirilgan.



7.4- rasm. Dastlabki ma`lumotlar asosida qurilgan matematik model, grafigi va xatoligini baholash

```
x =

    3.3340    1.5300    0.8657    0.4323    0.2646    0.1699    0.1145

>> y=[0.482 1.034 2.027 4.247 7.164 11.48 17.6]

y =

    0.4820    1.0340    2.0270    4.2470    7.1640   11.4800   17.6000

>> approx2(x,y)
X:3.334         1.53        0.8657        0.4323        0.2646        0.1699        0.1146
Y:0.482         1.034         2.027         4.247         7.164         11.48         17.6

    'Xm'          'Ym'         'YMm'        'Ym-YMm'      '...'
    [ 1.7243]     [9.0410]     [ 3.5307]    [5.5103]      'y=ax+b'
    [ 0.6161]     [2.9126]     [ 2.9046]    [0.0080]      'y=ax^b'
    [ 1.7243]     [2.9126]     [ 1.6156]    [1.2970]      'y=ab^x'
    [34.0303]     [9.0410]     [ 8.5985]    [0.4425]      'y=a+b/x'
    [ 1.7243]     [0.9382]     [ 0.9523]    [0.0140]      'y=1/(ax+b'
    [34.0303]     [0.9382]     [-0.7851]    [1.7233]      'y=x/(ax+b'
    [ 0.6161]     [9.0410]     [ 5.4939]    [3.5421]      'y=a(lgx)+b'

tab =

    3.3340    0.4820   -2.3827    0.4816    0.3117    0.4666    0.4657    0.5326
    1.5300    1.0340    3.9771    1.0019    1.7791    1.0710    1.0091    0.6396
    0.0657    2.0270    6.0040    2.0201    3.0061    2.1170    1.9505    0.0370
    0.4323    4.2470    8.2769    4.2527    6.0524    4.3525    4.1627    2.6305
    0.2646    7.1640    8.8930    7.1778    7.1841    7.1824    7.4012   -1.3794
    0.1699   11.4600    9.2409   11.5116    7.9145   11.2403   13.2005   -0.4347
    0.1146   17.6000    9.4440   17.5178    8.3747   15.7304   24.3359   -0.2269

ind =

    2

Eng yahshi model y=ax^b
Funktsiya nomerini kiriting 2
```

7.5-rasm. Ikki parametrli model qurish dasturi yordamida olingan natijalar listingi

Topshiriq

1. Jadvalda berilgan ma'lumotlar asosida approksimatsiyalovchi empirik modellar qurilsin. Approksimatsiyalovchi modellar sifatida quyidagilar olinsin:
   - Chiziqli
   - Giperbolik
   - Darajali
   - Ko'rsatkichli
   - Logorifmik
2. Jadval va modellashtirish natijasida olingan qiymatlar chetlanishlarini taqqoslang.
3. Olingan bog'lanishlar grafiklari, argumentlar va funksiyalar qiymatlari jadvalini tuzing.

Ikki parametrli model qurish boyicha topshiriqlar variantlari

7.7-jadval

№	Topshiriq								
1	x	1,20	1,57	1,94	2,31	2,68	3,05	3,42	3,79
	u	2,56	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
2	x	1,73	2.56	3,39	4,22	5.05	5,89	6.70	7,53
	u	0,63	1.11	1,42	1.69	2,30	2,89	3,29	3,87
3	x	-4,38	-3.84	-3.23	-2.76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,60
	u	2,25	2,83	2.34	4.51	5.29	6,55	8,01	10,04
4	x	1,00	1.64	2.28	2.91	3.56	4,29	4,84	5,48
	u	0.28	0.19	0.15	0.11	0,09	0,08	0,07	0.06
5	x	5,89	3.84	6.19	9,22	7,87	6,29	4.43	8,91
	u	79,31	57.43	60,66	90,55	92,12	71,30	70,50	91,25
6	x	2,91	2,94	6.35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96
	u	82,16	61,02	44,56	82,52	99,19	70.24	63.23	66,48
7	x	1.23	1,79	2.24	2,76	3,20	3,68	4,16	4,64
	u	2,10	2,84	3,21	3,96	4.86	6,06	7,47	9,25
8	x	-4.38	-3.84	-3.23	-2,76	-2.22	-1,67	-1,13	-0,60
	u	1,73	2,56	3,39	4,22	5.05	5,89	6,70	7,53
9	x	2,56	2,06	1.58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
	u	0,63	1,11	1,42	1.96	2,30	2,89	3,29	3,87
10	x	79,31	57,43	60,66	90,55	92,12	71,30	70,50	91,25
	u	5,89	3,84	6,19	9,22	7,82	6,29	4,43	8,91
11	x	2,10	2.84	3,21	3,96	4,86	6.06	7,47	9,25
	u	1.00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,29	4,84	5,48
12	x	0,28	0,19	0.15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
	u	82,16	61,02	44,56	82,52	99,19	70.24	63,23	66,48

7.5. MATLAB tizimida approksimatsiya masalalarini yechish

MATLAB tizimida approksimastiyalovchi funksiya sifatida n-tartibli ko'phad, approksimatsiya mezoni sifatida o'rta kvadratik chetlanishdan foydalaniladi. Bunda approksimatsiya qilinadigan funksiya teng yoki tengmas qadamli nuqtalarda beriladi. Approksimasiya qiluvchi ko'phad koeffitsiyentlari esa **polyfit(x,y,n)** funksiyasi yordamida topiladi, bunda:

- – interpolyatsiya nuqtalari to'plami.
- y – funksiyaning interpolyatsiya nuqtalaridagi qiymatlari;

- n – ko'phad darajasi.

Bunda, dastavval ko'phad darajasi aniqlanadi.

Agar $y=f(x)$ ***funksiya jadval ko'rinishida berilgan bo'lib, funksiyaning n-tartibli ayirmalari o'zgarmas bo'lsa, ko'phad darajasi n dan yuqori bo'lmaydi.***

Misol.

x	1	2	3	4	5	6	7
u	2.2	6.5	12.8	21.1	31.4	43.7	58

jadval asosida jadval ayirmalari hosil qilamiz:

x	1	2	3	4	5	6	7
u	2.2	6.5	12.8	21.1	31.4	43.7	58
$\Delta^{(1)}$		4.3	6.3	8.3	10.3	12.3	14.3
$\Delta^{(2)}$		2	2	2	2	2	2

Δ^2ning qiymatlari deyarli tengligidan interpolyatsiya ko'phad darajasini m=2 deb olamiz va ko'phadni $L(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ ko'rinishda izlaymiz. Ko'phad darajasini tanlashda ayirmalar jadvalini hosil qilish uchun MATLABda *diff(u,n)* funksiyasidan foydalaniladi, bu yerda *u* - *f(x)* funksiya vektori, n -chekli ayirmalar tartibi. Keltirilgan misol uchun *div(y,2)*.

Approksimatsiyalovchi ko'phad qiymatlarini hosil qilish uchun **polyval(p,x)** funksiyasidan foydalaniladi.

Bu yerda :

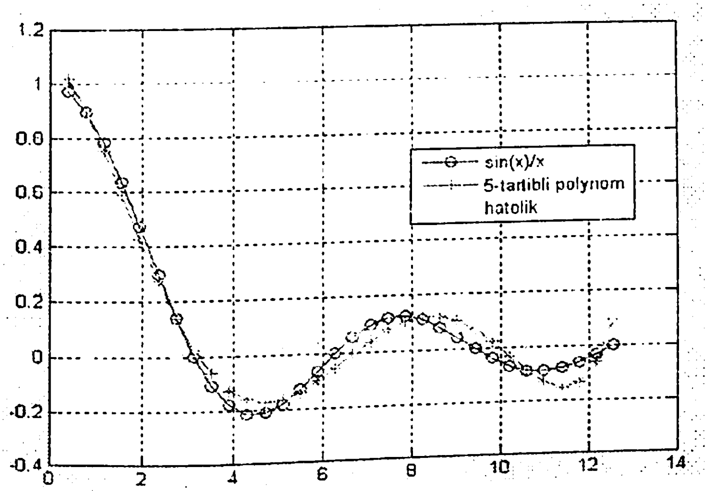
- p – approksimatsiyalovchi ko'phad koeffisiyentlari;
- x – tugun nuqtalari .

Approksimatsiyalovchi ko'phadlar adekvatligi (mosligi) quyidagicha usullar orqali amalga oshiriladi:

- approksimatsiyalovchi funksiyaning tugun nuqtalardagi qiymatlarining berilgan funksiya(jadval) qiymatlari bilan solishtirish;
- berilgan funksiya (jadval) va approksimatsiyalovchi ko'phad grafiklarini taqqoslash;
- approksimatsiyalovchi ko'phad xatoligini baholash.

1.Misol. **y=sin(x)/x** funksiyani $[\pi/8;4\pi]$ oraliqda 5-tartibli ko'phad bilan approksimatsiyalash masalasini ko'raylik. Bunda, x ning qiymatlari (tugun nuqtalari) $\pi/8$ qadam bilan olinsin. Quyida approksimatsiyalash jarayonini **polyfit (x,y,n)** va **polyval (p,x)** funksiyalari yordamida amalga oshiri sh dasturiy kodi va grafik ko'rinishda natijalar keltirilgan:

```
x=pi/8:pi/8:4*pi;
y=sin(x)./x;p=polyfit(x,y,5);yp=polyval(p,x);
err=abs(y-yp);plot(x,y,[illegible],x,yp,[illegible],x,err,[illegible]),grid,legend([illegible],0),hold on
```



2-misol.

$y = f(x)$ funksiya qiymatlari 7.8 - jadvalda berilgan.

$y = f(x)$ **funksiya qiymatlari**

7.8 -jadval

x	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7
y	-0.6931	-0.3567	-0.1054	0.0953	0.2624	0.4055	0.5306

7.8-jadval ma'lumotlari va **MATLAB** funksiyalari asosida $y = f(x)$ funksiyani turli darajadagi algebraik ko'phadlar yordamida approksimatsiya qilish masalasini ko'ramiz. HE lari **polyfit(x,y,n), polyval(p,x)** funksiyalari asosida quyidagi dastur kodi asosida olib boriladi:

```
x=[0.5 0.7 0.9 1.1 1.3 1.5 1.7];
for i=1:7;
    y=log(x);


end;
p1=polyfit(x,y,1);    % [illegible]
y1=polyval(p1,x);     % [illegible]
p2=polyfit(x,y,2);    % [illegible]
y2=polyval(p2,x);     % [illegible]
p3=polyfit(x,y,3);    % [illegible]
y3=polyval(p3,x);     % [illegible]
er1=y-y1;             % [illegible]
er2=y-y2;             % [illegible]
er3=y-y3;             % [illegible]
format short
disp(' ------------------------------------------------------------------------')
disp('                 Hisoblash eksperimentlari natijalari                    ')
disp('    x      y        p1(x)    p2(x)    p3(x)    y-p1(x)    y-p2(x)    y-p3(x) ')
disp(' ------------------------------------------------------------------------')

disp(' ')
exp=[x' y' y1' y2' y3' er1' er2' er3'];
disp(exp)
subplot(3,2,1), plot(x,y,'-o*',x,y1,'--m.'),grid,legend('[illegible]','1-tartibli [illegible]',0),hold on
subplot(3,2,2), stem(x,er1),grid,legend('Xatolik',0),hold on

subplot(3,2,3), plot(x,y,'-o*',x,y2,'--m.'),grid,legend('[illegible]','2-tartibli [illegible]',0),hold on
subplot(3,2,4), stem(x,er2),grid,legend('Xatolik',0),hold on

subplot(3,2,5), plot(x,y,'-o*',x,y3,'--m.'),grid,legend('[illegible]','3-tartibli [illegible]',0),hold on
subplot(3,2,6), stem(x,er3),grid,legend('Xatolik',0), hold on
```

Ko‘phad darajalari 1,2,3 bo‘lgan hollarda jadval va grafik ko‘rinishda quyidagilar keltirilgan :

- ko‘phad qiymatlari;
- 7.9-jadvalda berilgan y lar va turli darajadagi approksimatsiyalovchi ko‘phadlar farqlari

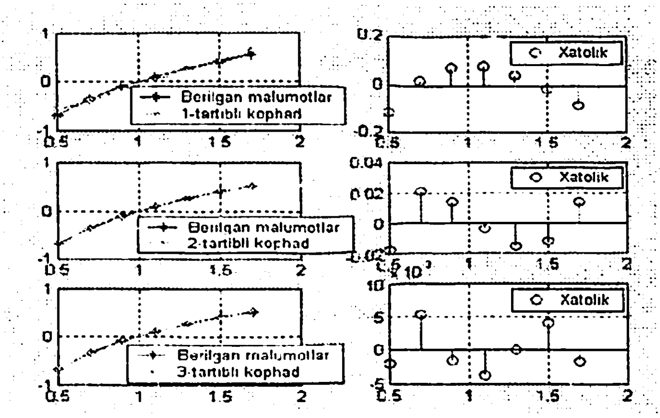
HE natijalari

7.9-jadval

Hisoblash eksperimentlari natijalari

x	y	p1(x)	p2(x)	p3(x)	y-p1(x)	y-p2(x)	y-p3(x)
0.5000	-0.6931	-0.5763	-0.6754	-0.6910	-0.1169	-0.0178	-0.0021
0.7000	-0.3567	-0.3776	-0.3776	-0.3619	0.0209	0.0209	0.0053
0.9000	-0.1054	-0.1789	-0.1194	-0.1038	0.0735	0.0141	-0.0016
1.1000	0.0953	0.0198	0.0991	0.0991	0.0755	-0.0038	-0.0038
1.3000	0.2624	0.2185	0.2779	0.2623	0.0439	-0.0156	0.0001
1.5000	0.4055	0.4172	0.4172	0.4015	-0.0117	-0.0117	0.0039
1.7000	0.5306	0.6159	0.5168	0.5324	-0.0852	0.0139	-0.0018

Ko'phadlar qiymatlari, 7.8-jadvalda berilgan y lar va turli darajadagi approksimatsiyalovchi ko'phadlar farqlari 7.9-jadvalda keltirilgan hamda approksimatsiya natijalari 7. 6-rasmda keltirilgan.



7.6-rasm. HE natijalarining grafiklari

Absolyut va nisbiy xatoliklar qiymatlarining kichikligi, interpolyatsion ko'phaddan $y = f(x)$ funksiya jadvali o'rniga uning modeli sifatida foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

7.6. MATLAB tizimida interpolyatsiya masalalarini yechish

MATLAB tizimida nuqtaviy interpolyatsiyani amalga oshirish uchun **interp1(x,y,xi, usul)** funksiyasidan foydalaniladi. Funksiyadan quyidagicha foydalaniladi:

yi=interp1(x,y,xi, usul),

bu yerda,

- x,y – interpolyatsiya tugunlari va funksiya qiymatlari vektorlari;
- xi – argumentning foydalanuvchi tomonidan berilgan qiymatlari vektori;
- usul – foydalanuvchiga interpolyatsiya usulini tanlash imkonini beruvchi argument.

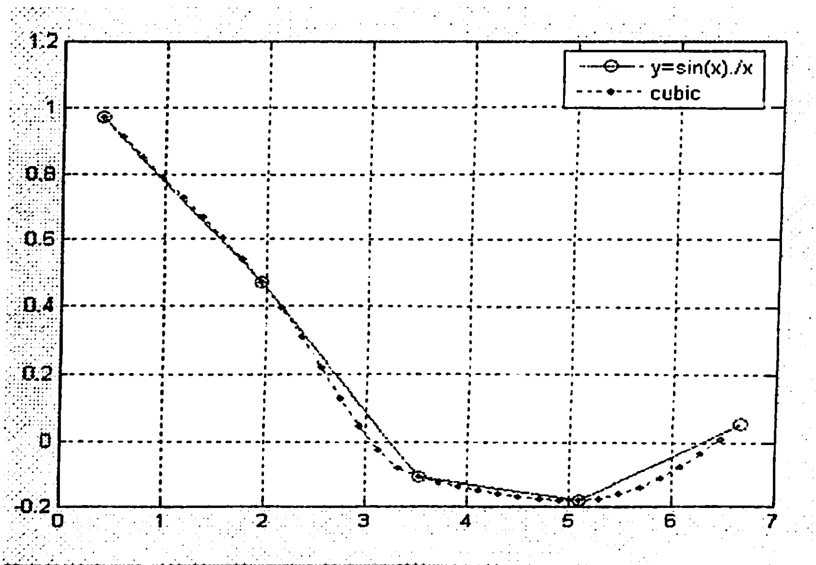
Interpolyatsiya usullari quyidagilardir:

- 'linear' – chiziqli;
- 'nearest' – zinasimon;

- ‘cubic’ – kubik;
- ‘spline’ – kubik splaynlar asosida.

Agar usul ko‘rsatilmasa, u holda chiziqli interpolyatsiya usuli bilan ish ko‘riladi. **y=sin(x)/x** funksiyani uning berilgan teng oraliqli tugun nuqtalardagi qiymatlari asosida kubik ko‘phad va kubik splayn orqali interpolyatsiyalash masalalarini ko‘rib chiqamiz. Ikkala holda ham interpolyatsiyalanuvchi va interpolpolyasiyalovchi funksiyalar grafiklari quriladi (7.7- rasm). MATLAB tizimida interfaol rejimda quyidagicha dastur kodini yozamiz:

```
-> x=pi/8:pi/2:(2*pi+pi/2); y=sin(x)./x;
-> xi=pi/8:pi/16:(2*pi+pi/16);
-> fi1=interp1(x,y,xi,'cubic');
-> plot(x,y,'-o',xi,fi1,':'),grid,legend('y=sin(x)./x','cubic',0)
```



7.7-rasm. Kubik ko‘phad yordamida interpolyatsiyalashga misol.

Nazorat savollari:

1. Funksiyalarning yaqinlashishi, approksimatsiya va interpolyatsiya tushunchalari, ularning farqi.
2. Interpolyatsiyalovchi ko‘phadni tanlash.
3. Lagranj interpolyatsion ko‘phadi va uni qurish.

4. Lagranj interpolyatsion ko'phadi xatoligi.
5. Chekli ayirmalar tushunchasi.
6. Nyutonning birinchi interpolyatsion ko'phadi.
7. Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko'phadi.
8. Splayn tushunchasi va splaynlar asosida interpolyatsiyalash.
9. MATLABda approksimatsiya va interpolyatsiya masalalarini yechish.

VIII BOB. JADVAL KO'RINISHIDA BERILGAN MA'LUMOTLAR ASOSIDA APPROKSIMATSIYALOVCHI TRIGONOMETRIK KO'PHADLARNI TUZISH

8.1.Furye qatorlari

Avvalgi paragraflarda qayd etilganidek approksimatsiyalovchi ko'phad tuzishda bazis funksiyalarni to'g'ri tanlash katta amaliy ahamiyatga ega ekan. Xususan, davriylik xususiyatiga ega bo'lgan axborotlar bilan ishlaganda bazis funksiyalar sifatida ham davriy funksiyalar olingani ma'qul. Axborot uzatish, axborot qabul qilish qurilmalari ishlash jaryonida, uzatilayotgan axborotni diskretlashtirish (raqamlashtirish)da biz davriylik xususiyatiga ega bo'lgan axborotlar (signallar) bilan ish ko'ramiz. Fizik nuqtai nazardan qaraganda ham signallar elektromagnit to'lqinlaridan iborat bo'lib, ular ma'lum chastota diapazonida ekanligi haqida gapiriladi. Bu ham axborotlarning davriyligini yana bir karra tasdiqlaydi.

Signallarga ishlov berish jarayonida ko'p uchraydigan signallar, jumladan arrasimon signallarni quyidagicha trigonometrik ko'phad shaklida ifodalash mumkin:

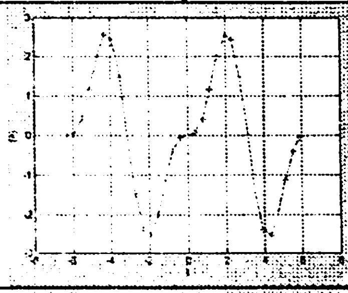
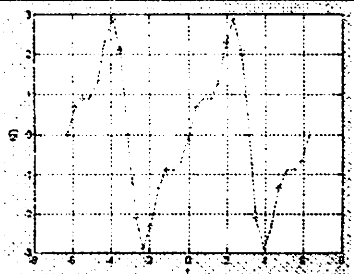
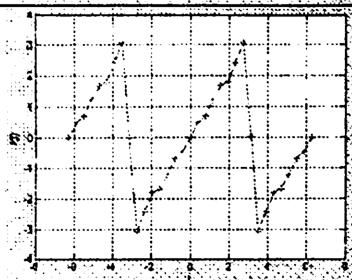
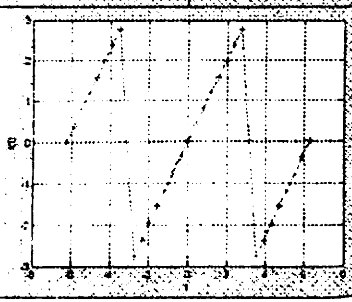
$$f(t)=\sum_{k=1}^{M} b_k \sin kt,$$
$$b_k=(-1)^{k+2}\frac{2}{k} \qquad (8.1)$$

(8.1) ifodada M ning turli qiymatlariga mos trigonometrik qator va grafiklarini hosil qilamiz(8.1-jadval).

Demak, M ning qiymatini oshirish natijasida trigonometrik ko'phaddan arrasimon signalni hosil qilish mumkin ekan. Bu yerda biz bazis funksiyalar $\sin kx$ va $\cos kx$ funksiyalar olingan holda approksimatsiya masalasini yechish usullari haqida muhokama yuritamiz. Avvalo, berilgan funksiya $y=f(x)$ funksiya analitik ko'rinishga ega bo'lgan holni ko'ramiz. $f(x)$ davriy funksiya bo'lsin deymiz, ya'ni ixtiyoriy x uchun $f(x+T)=f(x)$ bu yerda funksiya davri T ga teng ekan deyiladi.

Furye qatori yordamida arrasimon signallarni sakllantirish bo'yicha HE lari

8.1- jadval

K.M	f(t)	Grafik
2	$2\sin t - \sin 2t$	
3	$2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t$	
10	$2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - ..... - \frac{1}{5}\sin 10t$	
100	$\sum_{k}^{100}(-1)^{k+1}\frac{2}{K}\sin kt$	

Qulaylik uchun funksiya davri $T=2\pi$ bo'lsin deb hisoblaymiz. Aks holda, ya'ni $T\neq 2\pi$ bo'lsa $z=\frac{x2\pi}{T}$ almashtirish bilan ixtiyoriy T davrli funksiya davrini 2π davrga keltirishimiz mumkin. Har qanday 2π davrli bo'lakli uzluksiz funksiyani Veyershtrass teoremasiga ko'ra

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{8.2}$$

cheksiz qator bilan ifodalash mumkin. Bu qator koeffitsiyentlari a_0, a_k, b_k larni esa

$$F(a_0,a_1,b_0,\ldots\ldots,a_k,b_0\ldots)=\int_{-\pi}^{\pi}(a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x))^2dx$$

funksional minimal bo'lishi shartidan aniqlaymiz. Bu shartga ko'ra

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}=2\int_{-\pi}^{\pi}(a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x))\cos kxdx=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_k}=2\int_{-\pi}^{\pi}(a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x))b_k\sin kx=0$$

$$k=1,2,3,\ldots$$

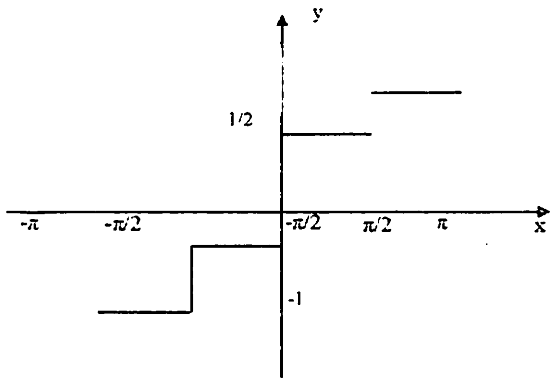
aniqlanadi. Bu yerda bazis funksiyalar $1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots\ldots,\sin kx,\cos kx\ldots\ldots\ldots\ldots$ ortogonal ekanligini bevosita integrallarni hisoblash orqali ko'rishimiz mumkin.

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mxdz=\begin{cases}0;\text{àããð}k\neq m\\ \pi;\text{àããð}k=m\end{cases}$ bo'lsa ekanligini hisobga olsak,

a_0, a_k, b_k larni hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx, b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx;\ k=0,1,2,\ldots \tag{8.3}$$

Bu formulalar bo'yicha hisoblangan koeffitsiyentlarni (8.1) formulaga qo'yilsa, $f(x)$ funksiya uchun trigonometrik qator hosil bo'ladi. Bu qatorlar ularni kashf qilgan fransuz olimi Furye nomi bilan ataladi. Har qanday integrallanuvchi uzluksiz yoki bo'lakli uzluksiz funksiyalar uchun (8.1) ko'rinishdagi Furye qatorlarini tuzish mumkin. Amaliy hisoblarda (8.1) cheksiz qatorning chekli sonlardagi hadlarini olish yetarli bo'lar ekan, chunki n kattalashgan sari a_n va b_n lar nolga intilib boradi, qatorning o'zi esa yaqinlashuvchi bo'ladi. Misol sifatida rasmda keltirilgan funksiya uchun Furye qatorini tuzishni ko'ramiz.



Analitik ko'rinishdagi funksiya ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)=\begin{cases}-1; -\pi < x \le -\pi/2;\\ -1/2; -\pi/2 < x \le 0;\\ 1/2; 0 < x \le -\pi/2;\\ 1; -\pi/2 < x \le \pi;\end{cases}$$

Bu usulda aniqlangan funksiya toq funksiya bo'lganligi uchun barcha $a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-1)\sin kx dx + \int_{-\pi/2}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin kx dx + \int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\left(\cos kx\Big|_{\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{2}\cos kx\Big|_{-\pi/2}^{0} - \frac{1}{2}\cos kx\Big|_{0}^{\pi/2}\right)$$

Bu formuladan

$$b_k = \begin{cases}0; k = 4m\\ 3/k\pi; k = 4m+1\\ -2/k\pi; k = 4m+2\\ 3/k\pi; k = 4m+3\end{cases}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, Furye qatorini

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{4m+1}\sin(4m+1)x - \frac{2}{4m+2}\sin(4m+2)x + \frac{3}{4m+3}\sin(4m+3)x\right)$$

deb yozish mumkin ekan.

Eslatma: Furye qatorining qiymatlarini $f(x)$ funksiyaga aynan teng bo'lishini talab qilish noo'rin. Chunki bu yerda yaqinlik L_2 normada talab qilinayapti. Xususan $f(\pi) = 1$ bo'lgani holda, Furye qatori qiymatlari esa nolga teng chiqyapti. Bu degani $\int_{-\pi}^{\pi}(Q_n(x) - f(x))^2 dx$ integral, ya'ni funksiyalar grafiklari orasida qoladigan yuza minimal bo'lar ekan deganini bildiradi.

8.2. Katta chastotali jarayonlarni matematik modellashda Furye qatorlari

Avvaldagi paragraflarda $y=f(x)$ funksiya analitik ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni Furye qatorlariga yoyish qoidalari keltirildi. Agar funksiya jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni ham Furye qatoriga yoyish mumkinmi va buni qanday amalga oshirsa bo'ladi? Bu holda funksiya

x_i	x_0	x_1	x_2	....	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	....	y_n

ko'rinishda berilgan bo'ladi. Qulaylik uchun bu yerda ham izlanayotgan $f(x)$ funksiya davriy bo'lib, uning davri $T=2\pi$ ekanligi ma'lum deb hisoblaymiz. Jadval tugunlari esa $x_i\in[-\pi;\pi]$ bo'lsin. Mulohazalarni soddalashtirish uchun $x_i=-\pi+ih; i=0,1,2,3...n$ ya'ni teng oraliqlar bilan joylashgan deb hisoblaymiz. Bu yerda a_0, a_k, b_k koeffitsiyentlarni hisoblashda algebraik ko'phadlardagidek

$$a_k=\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n}hy_i\cos kx_i,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n}hy_i\sin kx_i$$

formulalardan foydalanish mumkin emas ekan. Sababi, k ning katta qiymatlarida, ya'ni $k>>n$ bo'lgan hollarda, masalan, $k=mn$ bo'lib qolsa $h=\frac{2\pi}{n}$ ekanligidan barcha $\cos kx$ lar birga, barcha $\sin kx$ lar esa nolga teng bo'lib qoladi. Bu esa $f(x)$ funksiya qiymatlarining rolini yo'qqa chiqarib yuborishi mumkin. Shuning uchun bu yerda jadval bilan berilgan funksiyani bo'lakli o'zgarmas funksiya deb qarab ya'ni

$$f(x)=\begin{cases} y_0;\, x_0\le x<x_0+h/2 \\ y_i;\, x_i-h/2\le x<x_i+h/2 \\ y_n;\, x_n-h/2\le x\le x_n \end{cases}$$

deb hisoblasak va Furye koeffitsiyentlarini (8.3) formulalar bo'yicha hisoblash mumkin. Shartga ko'ra $x_0=-\pi$; $x_n=\pi$ ekanligini hisobga olsak (8.3) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\frac{h}{2}\cdot y_0+\sum_{i=1}^{n-1}hy_i+\frac{h}{2}\cdot y_n\right)$$
$$a_k=\frac{2}{\pi}\left(y_0\cdot\sin\frac{kh}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\cdot\left(\sin k(i+\frac{1}{2})h-\sin k(i-\frac{1}{2})h\right)-y_n\cdot\sin k(i-\frac{1}{2})h\right) \quad (8.4)$$
$$b_k=\frac{2}{\pi}\cdot\left(y_0(\cos\frac{kh}{2}-1)+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\cdot\left(\cos k(i+\frac{1}{2})h-\cos k(i-\frac{1}{2})h\right)+y_n\left(\cos k\pi-\cos(k\pi-\frac{h}{2})\right)\right)$$

(8.3) formulalarda $\sin kx;\cos kx$ funksiyalarning berilgan $[-\pi,\pi]$ oraliqda tez o'zgaruvchanligi hisobga olingan. Agar o'rganilayotgan jarayon davriyligi ma'lum bo'lib, funksiya berilgan oraliq va davri o'zgacha, ya'ni $f(x+T)=f(x)$ va $x\in(x_0;x_0+T)$ bo'lsa $t=\frac{\pi(2(x-x_0)-T)}{T}$ almashtirish yordamida uni $t\in(-\pi;\pi)$ oraliqqa keltirish mumkin. Funksiyalarni Furye qatoriga yoyilgandan so'ng shu qator asosida uni analitik va amaliy tahlil qilish osonlashar ekan. Xususan funksiya (8.1) qatorga yoyilgan bo'lsa $f(x)\approx a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ qatorning har bir hadi uning garmonikalari deyiladi.

Bu garmonikalar amplitudasi

$$C_k\sqrt{a_k^2+b_k^2} \quad k=0,1,2,\dots$$

formulalar bo'yicha hisoblanadi. Ularga asosan jadvaldagi axborotni spektral tahlil qilish mumkin, ya'ni har bir garmonikaning umumiy yig'indidagi hissasini aniqlash mumkin. Parseval tengligiga ko'ra $\|f(x)\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^2$, k-garmonika ulushi $\frac{C_k}{\|f\|}\cdot100\%$ formula bo'yicha hisoblanadi. Ba'zida bu usulda hal qiluvchi bosh garmonikalarni aniqlash ham mumkin bo'lib qoladi.

8.3. Jadval ko'rinishda berilgan funksiyalarni splayn-funksiyalar asosida approksimatsiyalash

Avvalo, splayn-funksiyalar ma'nosi va amaliy zarurati haqida so'z yuritamiz. Approksimatsiyalash masalasida ko'rilgan usullar, ya'ni interpolyatsion ko'phadlar va eng kichik kvadratlar asosida tuzilgan ko'phadlar o'z afzalligi va kamchiliklariga ega. Xususan nuqtalar soni ko'paygan sari interpolyatsion ko'phad darajasi ortib boradi va uni tuzish hamda u asosida hisoblash murakkablashib boradi. Shuningdek, ma'lum tabiiy va texnik jarayonlarda bunday yuqori darajali funksional bog'lanishlar uchramaydi. Ikkinchidan, eng kichik kvadratlar usulida ko'phad darajasini pasaytirish esa o'z navbatida butun oraliq bo'yicha ma'lumotlarni silliqlab yagona bog'lanish formulasini keltirib chiqaradi. Faqat bu holda jarayon yoki bog'lanishning ayrim lokal xususiyatlari ham silliqlash hisobiga e'tibordan chetda qolib ketishi mumkin ekan. Shuning uchun yuqorida ko'rilgan ikkala usulning yaxshi xususiyatlarini o'zida jamlagan va iloji boricha kamchiliklardan holi bo'lgan usulni yaratish zarurati paydo bo'ldi. Buning uchun splayn funksiyalar tushunchasini kiritamiz. Splayn funksiyalar bu yerda ham bazis funksiyalar sifatida tushunilib, ixtiyoriy funksiyaning biror $[c.d]$kichik oraliqdagi qismini ular orqali yetarli aniqlikda oson approksimatsiya qilish mumkin bo'lsin deb talab qilamiz. Splayn-funksiyalar (ulovchi funksiyalar) sifatida

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots\dots + a_{m-1}x + a_m$$

ko'rinishdagi standart ko'phadlarni olish mumkin. Bu yerda $m=1,2,3,\dots$unchalik katta bo'lmagan daraja. Bunda butun jadval oraliqni $m+1$ ta nuqtani o'z ichiga oluvchi qismlarga ajratib chiqamiz, $\{x_k, x_{k+1}, \dots\dots x_{k+m}\}$

Ajratilgan qismidagi jadval bo'lagi

x_k	x_{k+1}	....	x_{k+m}
y_k	y_{k+1}	....	y_{k+m}

qismi uchun $p_m(x)$-interpolyatsion ko'phad tuzamiz. Tuzilgan ko'phad jadval funksiyani $[x_k : x_{k+m}]$oraliqdagina approksimatsiyalaydi. Jadvalni keyingi qismi uchun xuddi shunday usulda $[x_{k+m} : x_{k+2m}]$oraliqda o'rinli bo'lgan m darajali ko'phad tuziladi. Bunday ko'phadlar soni jadvaldagi nuqtalar soniga ko'ra $\frac{n}{m}$-ta oraliq soniga teng bo'ladi. Namuna sifatida ikkinchi darajali splayn-funksiyalar yordamida approksimatsiya qilish algoritmini keltiramiz. Jadvalda berilgan qiymatlar soni toq, oraliqlar soni esa juft bo'lsin.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	.....	x_{2m-1}	x_{2m}	x_{2m+1}
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	.....	y_{2m-1}	y_{2m}	y_{2m+1}

Bu yerda birinchi interpolyatsion ko'phad x_1, x_2, x_3 nuqtalar bo'yicha, ikkinchisi x_3, x_4, x_5, uchinchisi esa x_5, x_6, x_7-nuqtalar bo'yicha tuziladi. Oxirgi m-si esa $x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}$ nuqtalar bo'yicha tuziladi. Xususan ixtiyoriy

x_{2k-1}	x_{2k}	x_{2k+1}
y_{2k-1}	y_{2k}	y_{2k+1}

Uchta juftlik jadval qiymatlari uchun ikkinchi darajali ko'phad quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$L_2^{(k)} = y_{2k-1}\frac{(x-x_{2k})(x-x_{2k+1})}{(x_{2k-1}-x_{2k})(x_{2k-1}-x_{2k+1})} + y_{2k}\frac{(x-x_{2k-1})(x-x_{2k+1})}{(x_{2k}-x_{2k-1})(x_{2k}-x_{2k+1})} + y_{2k+1}\frac{(x-x_{2k-1})(x-x_{2k})}{(x_{2k+1}-x_{2k-1})(x_{2k+1}-x_{2k})} \quad (8.5)$$

Agar jadval qiymatlari teng oraliqlarda berilgan bo'lsa, ya'ni $x_{i+1}-x_i=h;\ i=1,2,\ldots,2m$ bo'lsa (8.5) formula soddalashadi va

$$L_2^{(k)}(x) = \frac{y_{2k-1}}{2h^2}(x-x_{2k})(x-x_{2k+1}) - \frac{y_{2k}}{h^2}(x-x_{2k-1})(x-x_{2k+1}) + \frac{y_{2k+1}}{2h^2}(x-x_{2k-1})(x-x_{2k}) \quad (8.6)$$

$k=1,2,3,\ldots,m$ ko'rinishni oladi. Bu formulalardan foydalanish uchun avvalo, funksiya qiymatini hisoblash kerak bo'lgan $x\in[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ oraliq aniqlanadi va aynan shu oraliqqa mos interpolyatsion ko'phad $L_2^{(k)}(x)$ tuziladi va $f(x)\approx L_2^{(k)}(x)$ bo'yicha hisoblanadi. Avval ta'kidlanganidek, bu qiymatni hisoblashdagi xatolik $O(h^3)$ tartibida bo'ladi. Bu esa amaliy hisoblar uchun aksariyat hollarda yetarli bo'lar ekan. Keltirilgan usulning amaliy tadbiqi sifatida quyidagi misolni ko'ramiz.

i	1	2	3	4	5
x_i	0,1	0.2	0,3	0,4	0,5
y_i	1,2	1,4	1.7	2,1	1,8

Jadval bilan berilgan funksiya qiymatlarini $x=0{,}21$ va $x=0{,}41$ nuqtalarda hisoblansin. Bu jadval bo'yicha ikkita ikkinchi darajali interpolyatsion ko'phad tuzish mumkin.

Bu yerda $h=0{,}1$ deb (8.5) formuladan foydalanish mumkin.

$$L_2^{(1)}(x) = \frac{1{,}2}{2*0{,}01}(x-0{,}1)(x-0{,}3) - \frac{1{,}4}{0{,}01}(x-0{,}1)(x-0{,}3) + \frac{1{,}7}{2*0{,}01}(x-0{,}1)(x-0{,}2) = 5x^2+0{,}5x+1{,}1$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{1{,}7}{2*0{,}01}(x-0{,}4)(x-0{,}5) - \frac{2{,}1}{0{,}01}(x-0{,}1)(x-0{,}5) + \frac{1{,}8}{2*0{,}01}(x-0{,}3)(x-0{,}4) = -35x^2+28{,}5x-3{,}7$$

Funksiya qiymatlarini hisoblashda esa yuqorida keltirilgan qoidaga amal qilamiz.

$$f(0,21) \approx L_2^{(1)}(0.21) = 5*0.21^2 + 0.5*0,21 + 1,1 = 0.2205 + 0.105 + 1.1 = 1.4255$$

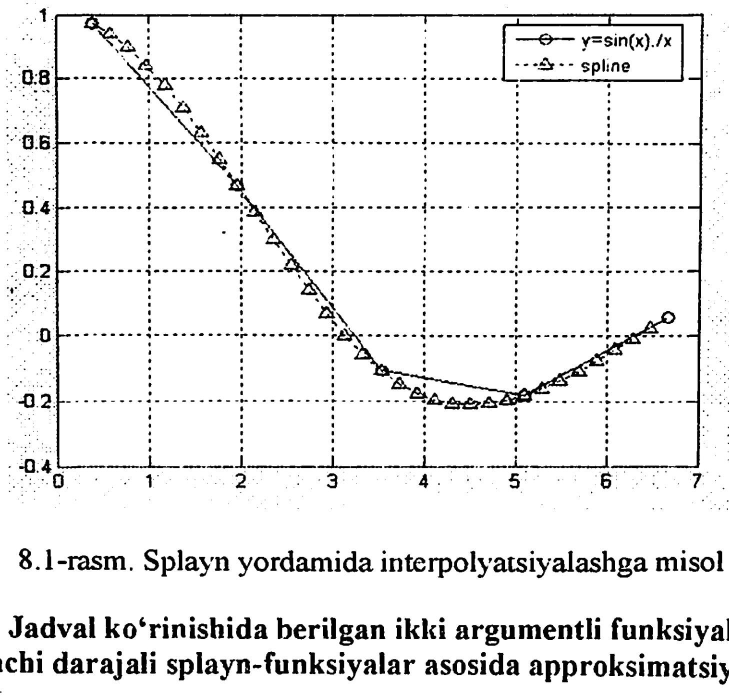
$$f(0,41) \approx L_2^{(2)}(0,41) = -35*0,41^2 + 28,05*0,41 - 3,7 = -5,8835 + 11,685 - 3,7 = 2,1015$$

Topilgan qiymatlar funksiyaning jadval qiymatlariga mos kelayotganligi ko'rinib turibdi.

Splayn-funksiyalar bilan approsimasiyalashning geometrik ma'nosi funksiyaning jadval qiymatlariga ko'ra grafigini chizishda lekalalardan foydalanishga o'xshash bo'lib, funksiyaning lokal xususiyatlarini, ya'ni berilgan nuqta atrofidagi ko'rinishini hisobga oladi.

MATLAB tizimida splayn yordamida interpolyatsiyalash:

```
>> fil=interp1(x,y,xi,'spline');
>> plot(x,y,'-o',xi,fil,'.b:'),grid,legend('y=sin(x)./x','spline',0)
```



8.1-rasm. Splayn yordamida interpolyatsiyalashga misol

8.4. Jadval ko'rinishida berilgan ikki argumentli funksiyalarni birinchi darajali splayn-funksiyalar asosida approksimatsiyalash

Tabiatda kechadigan ko'plab jarayonlarni o'rganishda, odatda, ma'lum bir tizimga bo'ysungan kuzatuvlardan foydalaniladi. Masalan, ob-havo ma'lumotlarini tayyorlashda gidrometeorologik kuzatuv punktlari natijalari (temperatura, bosim, namlik qiymatlari), yer relyefi xaritasini chizishda geodezik kuzatuvlardan foydalaniladi. Kuzatuv olib borilayotgan maydonni koordinata tekisligi desak va ma'lumot olingan nuqtani $(x_i; y_i)$deb belgilasak, hamda kuzatuv qiymatini z_i deb belgilasak

z qiymati x va y bo'yicha o'zgaradi deb qaraymiz. Boshqacha qilib aytganda, z o'zgaruvchi x,y argumentlarning funksiyasi deb tushunish mumkin. Har bir (x,y) nuqtada o'zining qiymati; temperaturasi, bosimi, namligi. Dengiz sathidan balandligi kabi miqdorlar haqida fikr yuritishimiz mumkin. Furye qonuniga ko'ra, temperaturalar farqi (gradiyenti) issiqlik oqimini, bosimlar farqi havoni oqimini, namlik farqi esa namlik oqimini keltirib chiqaradi. Demak, $Z = f(x,y)$ funksiya ko'rinishini aniqlasak, o'rganilayotgan jarayon uchun muhim savollarga javob topishimiz mumkin bo'lar ekan.

Geodeziyada. gidrogeologiyada odatda o'rganilayotgan maydon xaritasini chizib bu maydon o'rganilayotgan miqdor qiymatiga ko'ra turli ranglar bilan bo'yab chiziladi. Ranglar joylashishiga qarab olimlar (issiqlik, havo, namlik) yo'nalishlari va hattoki intensivligigacha baholash mumkin.

Albatta bu ishni ko'zi pishgan tajribali mutaxasislar bajarishadi.

Agar $\quad Z = f(x,y)$, $\hfill (8.7)$

funksiyaning analitik ko'rinishi ma'lum bo'lsa, bu masalani $grad f(x,y)$ bo'yicha hech qanday chizmasiz, xaritasiz hal qilish mumkin bo'lar ekan. Masalani yechish algoritmini topib dasturlangan bo'lsa, axborotlar o'zgarishiga qarab yechimni ham operativ tarzda muvofiqlashtirib tursa bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan misollar ommaviy axborot vositalarida ko'p takrorlanib turadigan jarayonlar bo'lgani uchun ko'pchilik tasavvur qilishi va tahlil qilishi mumkin. Aslida esa nafaqat tabiatda, ko'plab texnik jarayonlarda ham aynan shunday vaziyatlarga duch kelamiz.

Matematik nuqtai nazardan bu masalani quyidagicha ifodalash mumkin. $Z = f(x,y)$ funsiyaning analitik ko'rinishi ma'lum bo'lmay faqat uning ayrim nuqtalardagi qiymatlarigina jadval ko'rinishda berilgan bo'lsin, ya'ni

$$Z_i = f(x_i, y_i) \quad i = 1,2,\dots,n$$

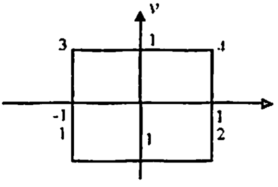
Shu qiymatlar asosida funksiyaning analitik ko'rinishini ma'lum aniqlikda tiklash talab qilinadi. Bu ham approksimatsiya masalasi bo'lib, bir o'zgaruvchilik funksiyaga qaraganda ancha murakkab masala bo'lib, umumiy holda uning yechimini topish qiyin bo'lganligi uchun turli splayn funksiyalardan foydalanish mumkin. Bu yerda biz ba'zi xususiy hollarni keltirib o'tamiz.

Eng sodda holi, $Z = f(x,y)$ funksiya qiymatlari $D = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$ to'g'rito'rtburchak regulyar tugunlarida $Z_{ij} = f(x_i, y_j)$ ko'rinishda berilgan bo'lgan holni qaraymiz. Bu yerda $x_i = a + ih_1$; $y_i = c + ih_2$; $h_1 = (b-a)/n_1$; $h_2 = (d-c)/n_2$ $i = 0,1,2...,n_1, j = 0,1,2...,n_2$

Bunda D soha $D_{ij} = \{x_i \le x \le x_{i+1}; y_j \le y \le y_{j+1}\}$ ko'rinishdagi $n_1 * n_2$ ta to'g'rito'rtburchak bilan qoplanadi. Har bir D_{ij} to'rtburchakda

$$u = (x - x_i - h_1/2)\frac{2}{h_1}; \quad v = (y - y_j - \frac{h_2}{2})\frac{2}{h_2} \qquad (8.8)$$

almashtirish bilan uni u va v o'zgaruvchilar bo'yicha $Q_{ij} = \{-1 \le u \le 1; -1 \le v \le 1\}$ kvadratga o'tkazamiz. Uning uchlarida esa $Z = f(u,v)$ funksiya qiymatlari $f(-1,-1) = Z_{ij}$ $f(1,-1) = Z_{i+1j}$ $f(-1,1) = Z_{ij+1}$ $f(1,1) = Z_{i+1j+1}$ qiymatlarga mos keladi. Har bir Q_{ij} kvadratda esa $Z = f(u,v)$ funksiya yagona algoritm bo'yicha $Z = a_1u + a_2v + a_3uv + a_4$ ko'rinishda izlanadi.



Yechimni topish algoritmini chizmada keltirilgan shablon asosida izlasak, ya'ni kvadrat uchlari chizmadagidek nomerlansa a_1, a_2, a_3, a_4 noma'lum koeffitsiyentlarini aniqlash uchun quyidagi ko'rinishdagi sistema hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} -a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = Z_1 \\ a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = Z_2 \\ -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = Z_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = Z_4 \end{cases} \qquad (8.9)$$

Bu sistemaning matritsasi

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonal matritsa bo'lib, $\det A = 4$ bo'lganligi uchun

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

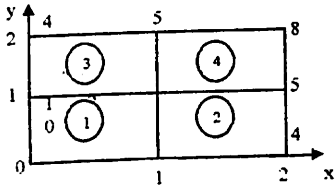
Shuning uchun (8.9) sistema yechimini

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \qquad (8.10)$$

formula bo'yicha hisoblash mumkin. So'ngra (8.5) formulalar asosida x, y o'zgaruvchilarga qaytib har bir D_{ij} to'g'rito'rtburchakda $Z = f(x, y)$ funksiya uchun alohida analitik ko'rinishini hosil qilamiz. Bu usulning afzalligi shundaki, masala yechimini topish uchun (8.7) va (8.9) formulalarni $n_1 * n_2$ marta tadbiq qilsak bo'ladi. Misol tariqasida $Z = x^2 + y^2$ funksiyaning $D = \{0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2\}$ kvadratda berilgan qiymatlar jadvali

y/x	0	1	2
0	0	1	4
1	1	2	5
2	4	8	8

$z = x^2 + 4^2$



asosida uning analitik ko'rinishini tiklash masalasini ko'ramiz. Bu yerda 4 ta kvadrat bo'lib, yechimi 4 bosqichda topiladi. O'tish formulalari (7.7) 1,2,3,4-kvadratlarda mos ravishda

1) $\begin{matrix} u = (x-0,5)2 \\ v = (y-0,5)2 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} u = (x-1,5)2 \\ v = (y-0,5)2 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} u = (x-0,5)2 \\ v = (y-1,5)2 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} u = (x-1,5)2 \\ v = (y-1,5)2 \end{matrix}$

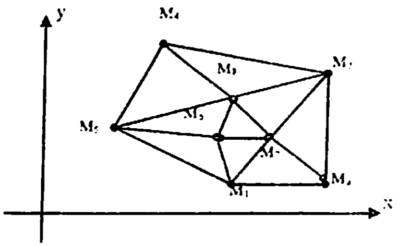
ko'rinishda bo'ladi. Funksiya qiymatlari asosida tuziladigan ustun, matritsa esa bu kvadratlarda mos ravishda

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad 1)\ \overline{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 2)\ \overline{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 3)\ \overline{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 4)\ \overline{Z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu qiymatlarni (6.6) formulaga qo'yib a_1, a_2, a_3, a_4 qiymatlari topiladi. Ularni o'rniga qo'yib 1-,2-,3-,4- kvadratlarda $Z = x + y$; $z = 3x + y - 2$; $Z = x + 3y - 2$; $Z = 3x + 3y - 4$ formulalarni hosil qilamiz.

Topilgan analitik ko'rinishlar jadval qiymatlarga mos ekanligini bevosita o'rniga qo'yish bilan tekshirib ko'rishimiz mumkin. Keltirilgan algoritmni avtomatlashtirish va dastur asosida istalgan oraliqqa istalgan bo'linishlar sonida tadbiq qilishimiz mumkin.

Agar kuzatuvlar regulyar to'r tugunlarida bo'lmay tasodifiy tartibda joylashgan bo'lsa quyidagi sodda algoritmni tavsiya qilish mumkin. Kuzatuv natijalari chizmadagidek tartibda joylashgan bo'lsin



$M_1(x_1,y_1); M_2(x_2,y_2),......,M_8(x_8,y_8)$ nuqtalarda $Z(x_i,y_i)$ qiymatlari aniqlangan bo'lsa, kuzatuvlar berilgan sohani qabariq ko'pburchak bilan chegaralab chiqamiz, M_1,M_2,M_3,M_4,M_5 ko'pburchak hosil bo'ladi. Ichki M_6,M_7,M_8 nuqtalar bilan tutashtirish yordamida butun soha uchburchaklarga ajratiladi. Natijada 9ta uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchaklarning har birida noma'lum funksiya analitik ko'rinishini berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yordamida aniqlashimiz mumkin. Bu yerda ham hisoblash algoritmini yagona tizimga tushirish mumkin.

$A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2)$ $C(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ko'rinishda bo'ladi. Bu determinantni birinchi elementlari bo'yicha yoyib yozilsa

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} - (y-y_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} + (z_3-z_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Bu yerdan noma'lum funksiya uchun

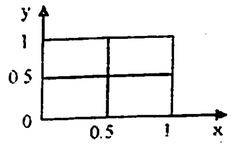
$$Z = Z_1 + \frac{\left((y-y_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} - (x-x_1)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \right)}{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}} \qquad (8.11)$$

formulani hosil qilamiz. (8.11) formula ishchi formula bo'lib, uni sohadagi istalgan uchburchakka tadbiq qilinishi mumkin. Buning uchun kuzatuvlar haqidagi axborotlar to'plamini uchburchaklar bo'yicha ajratib tartiblangan holda berilsa bo'ldi. Masalan: $x1_i, x2_i, x3_i, y1_i, y2_i, y3_i, z1_i, z2_i, z3_i$ $i=0,1,2,...,n$ ko'rinishda berilsa, i-uchburchak nomerini ifodalaydi.

Sohani uchburchaklarga ajratish bevosita axborotlarni tayyorlash jarayonida amalga oshirilgani ma'qul. Chunki bu bosqichni avtomatlashtirish ancha murakkab bo'lib jiddiy topologiya va mantiqiy fikrlashni talab qiladi.

Keltirilgan algoritmlarning universalligi va qulayligini namoyish qilish uchun bitta misolda barcha hisoblash jarayonlarini to'liq bajarish namunasini keltirib o'tamiz. Bu yerda jadval qiymatlari berilgan funksiya sifatida, ya'ni test funksiya sifatida $Z=x^2+y^2-2xy+3x-2y+1$ funksiyaning $D\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$ sohadagi qiymatlari tanlangan. Qadam x va y bo'yicha $h=0.5$ olinib D soha 4ta kvadratga ajratilgan. Bu kvadratlar chizmada 1,2,3,4 nomerlari bilan belgilangan va har birida u,v o'zgaruvchilariga o'tilib noma'lum koeffitsiyentlar yagona (8.6) formula bilan hisoblanaveradi. Funksiya qiymatlari quyidagi jadval ko'rinishida beriladi.

y_i/x_i	0	0,5	1
0	1	2,75	5
0,5	0,25	1,5	3,25
1	0	0,75	2



Berilgan jadval asosida har bir kvadrat uchun a_1,a_2,a_3,a_4 koeffitsiyentlarni hisoblash jarayonini keltiramiz.

1-da o'tish formulalari $u=(x-0,25)4$; $v=(y-0,25)4$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2,75\\0,25\\1,5\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\-2\\-0,5\\5,5\end{pmatrix}$$

2-da o'tish formulalari $u=(x-0.75)4$; $v=(y-0,25)4$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2,75\\5\\1,5\\3,25\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\-3\\-0,5\\12,5\end{pmatrix}$$

3-da o'tish formulalari $u=(x-0.5)4$; $v=(y-0.75)4$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,25\\1,5\\0\\0,75\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\-1\\-0,5\\2,5\end{pmatrix}$$

4-da o'tish formulalari $u=(x-0,75)4;\ v=(y-0.75)4$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,25 \\ 0,75 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -0,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$$

Topilgan koeffitsentlar asosida har bir kvadratda funksiyaning analitik ko'rinishini tiklash mumkin. Masalan, keltirilgan misolda 1-kvadrat uchun quyidagi tartibda bo'ladi.

$$\bar{z}=\frac{1}{4}(3u-2v-0,5uv+5,5)=\frac{1}{4}(3(x-0.25)4-2(y-0,25)4-0,5(x-0,25)4(y-0,25)4+5,5)=3,5x-1,5y-2xy+1$$

Bu funksiya 1-kvadrat barcha uchlarida jadvalga mos keladi. Kvadrat o'rtasida esa $\bar{z}(0,25;0,25)=1,375$ chiqadi. Test funksiya qiymati esa $\bar{z}(0,25;0,25)=1,25$ bo'lib, bu qiymatlar bir biriga yaqinligi ko'rinib turibdi.

Ikki o'lchovli funksiya qiymatlarini teng qadamli setkada interpolyatsiyalash zi = interp2(x,y, z,xi,yi, [,'< usul>']]) funksiyasi orqali amalga oshiriladi. Bu yerda:

x,y – meshgrid funksiyasi yordamida interpolyatsiya tugunlarini hosil qilishga asos bo'luvchi vektorlar;

z – interpolyatsiyalanuvchi funksiya;

xi,yi - interpolyasilovchi ko'phad asosida z ning yangi qiymatlarini topish oraliq nuqtalari;

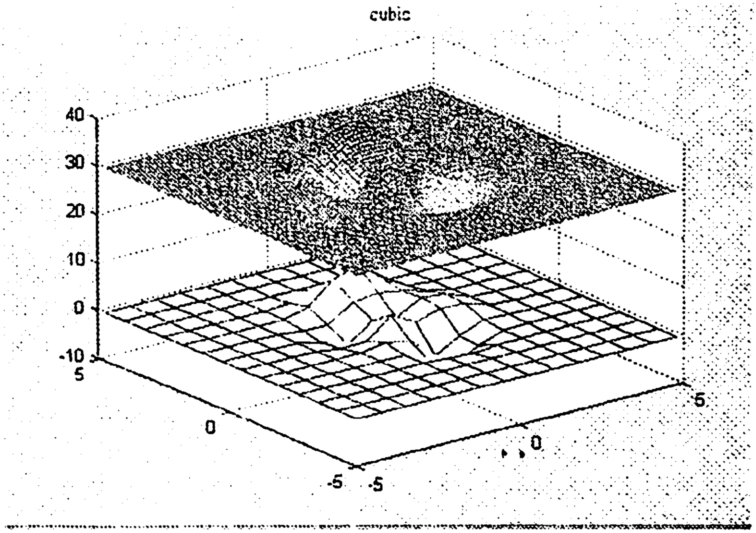
< usul> - ikki o'lchovli interpolyatsiyalovchi funksiya turi :

' linear ' - 1-tartibli ko'phad;

' cubic ' – 3- tartibli ko'phad;

zi – interpolyatsiyalovchi ko'phadning berilgan tugun nuqtalardagi qiymatlari. Misol tariqasida teng qadamli setkada berilgan z=peaks (x,y) funksiyani kubik ko'phad yordamida interpolyatsiyalash masalasini ko'raylik. Interpolyatsiyalanuvchi (z) va interpolyatsiyalovchi (zi) funksiyalar grafiklari 8.2-rasmda keltirilgan.

```
>> [x,y]=meshgrid(-5:0.75:5);z=peaks(x,y);
>> [xi,yi]=meshgrid(-5:0.1:5);
>> zi=interp2(x,y,z,xi,yi,'cubic');
>> mesh(x,y,z),hold on
>> mesh(xi,yi,zi+30),title ('cubic')
```



8.2-rasm. Ikki o'lchovli funksiyani kubik ko'phad asosida bir xil oraliqli qadam bilan interpolyatsiyalash.

IX BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR ASOSIDA IFODALANADIGAN MASALALAR VA ULARNI SONLI YECHISH

Fan va texnikaning ko'pgina masalalarini yechish oddiy differensial tenglamalarga (ODT) keltiriladi. ODT deb tarkibiga noma'lum funksiyaning turli tartibdagi hosilalari kirgan tenglamalar tushuniladi. Umumiy holda ODT quyidagicha ifodalanadi:

$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$, $x-$ erkli o'zgaruvchi, $y^{(i)}$- noma'lum funksiyaning i - tartibli hosilasi, n - tenglama tartibi. n - tartibli ODTning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmasni ichiga oladi, ya'ni ODTning umumiy yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$y=\varphi(x,c_1,....,c_n)$$

ODTning yagona yechimini topish uchun n ta qo'shimcha shart qo'yiladi. Qo'shimcha shartlarning berilishiga ko'ra ikki xil masala qo'yiladi: Koshi masalasi va chegaraviy masala. Agar qo'shimcha shartlar bitta nuqtada berilsa, bunday masala Koshi masalasi deyiladi. Koshi masalasidagi qo'shimcha shartlarga boshlang'ich shartlar deyiladi. Agar qo'shimcha shartlar bir nechta nuqtada berilsa, bunday masala chegaraviy masala deyiladi. Qo'shimcha shartlarga chegaraviy shartlar deyiladi.

Koshi masalasiga misollar:

$$y'=x^2y^3,\ y(1)=1$$

$$y''=y'+xy^2,\ y(1)=1;\ y'(1)=0$$

Chegaraviy masalalariga misollar:

$$y''+2y'-y=\sin x,\ y(0)=1;\ y(1)=0$$

$$y'''=x+xy''-y',\ y(1)=0,\ y'(1)=0,\ y(3)=2$$

Ko'p hollarda Koshi yoki chegaraviy masalalarni analitik yechimini olish imkoni yo'qligi sababli, sonli yechish usullaridan foydalaniladi.

Dastlabki misol sifatida mexanikada ma'lum bo'lgan Nyutonning ikkinchi qonunini eslasak, u $ma=F$ ko'rinishda ifodalanadi. Bu yerda m - moddiy nuqta massasi, a-uning tezlanishi, F-unga ta'sir etayotgan kuch. Agar tezlanish $a=\frac{dv}{dt}$ ekanligini hisobga olsak, bu qonunni $m\frac{dv}{dt}=F$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar ta'sir etuvchi kuch ham vaqt davomida o'zgaruvchi bo'lsa $m\frac{dv}{dt}=F(t)$ ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi. Soddalik uchun bu yerda harakat to'g'ri chiziqli yo'nalishda bo'lib, tezlik va kuchning skalyar ya'ni son qiymatlari nazarda tutilgan. Agar harakat egri chiziqli trayektoriya bo'ylab bo'layotgan bo'lsa, vektor miqdorlarga o'tiladi va tenglama $m\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{F}(t)$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani, harakat tekislikda bo'layotgan bo'lsa, koordinat ko'rinishda ifodalash mumkin. Koordinat ko'rinishda $\overline{v}(v_x,v_y)$; $\overline{F}(F_x,F_y)$ ekanligini hisobga olsak,

$$\begin{cases} m\frac{dx}{dt}=F_x \\ m\frac{dy}{dt}=F_y \end{cases} \qquad (9.1)$$

Ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalarga mos ravishda $\overline{v}|_{t=0}=\overline{v}_0$ boshlang'ich shartni qo'shilsa Koshi masalasi hosil bo'ladi.

Ko'rilgan masala jarayonning eng sodda matematik modeli, uning yechimi ham nisbatan oson topilishi mumkin. Tadbiqiy masalalarning matematik modelini tuzishda differensial tenglamalarning turli ko'rinishlari va turlarini uchratish mumkin. Ularni yechishda maxsus usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Biz bu yerda ayrim tadbiqiy masalalar va ularning matematik modellarini keltirish bilan cheklanamiz. Batafsil ma'lumotlarni tavsiya qilingan adabiyotlardan topish mumkin.

Quyidagi masalaga qaraylik. Ikki uchi mahkamlangan tor simi boshlang'ich momentda tinch holatidan qo'zg'otilib yuborilgan bo'lsa, uning tebranishi qanday kechadi.

Bu masalaning matematik modeli

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ 0<x<e,\ t>0; \\ u(0,t)=u(e,t)=0;\ 0<t<+\infty; \\ u(x,0)=f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=F(x);\ 0<x<e, \end{cases} \qquad (9.2)$$

Ko'rinishda ifodalanar ekan. Bu yerda Ox o'qi tor simi bo'ylab yo'nalgan deb hisoblab uzunligi l bo'lgan sim $0\le x\le l$; qismda joylashgan deb hisoblanadi. $a^2=\frac{E}{\rho_0}$ E-tor simning (uprugost) moduli, ρ_0-uning solishtirma zichligi; $y=f(x)$ simning boshlang'ich holatdagi siljishi $v=F(x)$-tor sim nuqtalarining boshlang'ich momentdagi vertikal tezligi. Bu masala uchun hosil bo'lgan tenglama matematik fizika tenglamalari bo'lib, uning ifodalanishidan ham murakkabligi ko'rinib turibdi. Chertilgan tor simning harakati to'lqinsimon bo'lganligi uchun ham (8.2) tenglama to'lqin tenglamasi ham deb ataladi. Tor simi harakati tufayli vujudga keladigan ovoz to'lqinlarining yoyilishi ham shunga o'xshash tenglamalar bilan ifodalanar ekan. Shuningdek fazoda elektromagnit to'lqinlarning tarqalish qonuniyatlari ham (9.2) tenglamalar bilan ifodalanadi. Faqat bunda tenglama murakkablashib fazoda x,y,z ga bog'liq bo'ladi.

Shuningdek, elektr zanjirining elementlari, ulardagi kuchlanish va tok kuchini bog'lagan holda matematik modelini tuzishda ham differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan masalalarga kelar ekanmiz.

Bunda induktiv hamda sig'imli elementlari bo'lgan qismlari uchun

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt};\, I_c = c\frac{dU_c}{dt}$$

ekanligini hisobga olsak, hamda aktiv elementlarni o'z ichiga olgan qismlari uchun Om qonuni $U_R = RI$ o'rinli deb hisoblanadi. Natijada elektr zanjiridagi har bir kontur va har bir tuguni uchun Kirxgof qonunlarini yozadigan bo'lsak birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi hosil bo'lar ekan.

Kundalik turmushda uchrab turadigan va matematik modellashtirishda differensial tenglamalarga keltirilgan ayrim jarayonlarni sanab o'tamiz.

Ma'lum bir issiqlik manbaidan issiqlik tarqalish jarayoni, xususan bir uchi olovga tutilgan sterjenning qizishi, yoki qizib turgan sterjenning bir uchi sovuq suvga tiqilishida ikki taraflama jarayon sterjen sovushi hamda suvning isishi. Suvga tashlangan tosh tufayli suv yuzida hosil bo'ladigan to'lqinlarning tarqalishi. Bu ro'yhatni yana ko'p davom ettirish mumkin. Maqsad amaliy masalalarni matematik modellashtirishda kelib chiqadigan differensial tenglamalarni yechish bilan bog'liq bo'ladigan usullarning zarurligini takidlashdan iborat. Bu usullar ikki yo'nalishda, avvalo, hosil bo'lgan matematik masalaning yechimini topish, hamda bevosita amaliy masalaning xususiyatlaridan kelib chiqqan holda yaratilgan.

Aksariyat hollarda masala yechimini topish uzluksiz model ya'ni funksiya sifatida emas, diskret axborotlar jadval ko'rinishda aniqlashga mo'ljallangan.

9.1. Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini Eyler va Runge-Kutta usullari yordamida yechish

Avvalgi paragraflarda ta'kidlanganidek, amaliy masalalarni matematik modellashtirishda ko'p hollarda differensial tenglamalar kelib chiqar ekan. Biz bu yerda amaliy masaladan holi, matematik masala sifatida differensial tenglamalar va ularni yechish usullaridan ayrim namunalar keltiramiz.

9.1.1. Eyler usuli

Quyidagi masalani qaraymiz.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (9.3)$$

Bu masala matematikada Koshi masalasi nomi bilan ma'lum. $f(x,y)$ funksiyaning ma'lum ko'rinishlarida yechimini topish usullari mavjud. Umumiy holda esa Koshi masalasining analitik yechimini topish qoida va usullari mavjud emas .

Koshi masalasini sonli yechish talab qilinsin.

$[x_0, x_n]$ oraliq $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ qadam bilan $x_i = x_0 + ih$, $(i = 0,1,...,n)$ nuqtalarga bo'linadi va berilgan ODTning x_i nuqtalardagi taqribiy yechimlarni y_i lar $(i = 0,1,...,n)$ topiladi.

Berilgan ODTni $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqda integrallasak:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx, \quad y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \qquad (9.4)$$

ni hosil qilamiz.

So'nggi ifodadagi integralni sonli integrallashning biror formulasi, masalan chap to'g'ri to'rt burchaklar usuli asosida hisoblasak, ya'ni

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = hf(x_i, y_i) \qquad (9.5)$$

(4) ni (3) da o'rniga qo'ysak:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (i = 0,1,...,n-1) \qquad (9.6)$$

Eylerning oshkor formulasini hosil qilamiz.

(9.6) formula asosida hisoblashlar quyidagicha tartibda olib boriladi: $x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ dan foydalanib, $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ topiladi, so'ngra $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ topiladi va h.k.

(9.6) formulaga Eylerning oshkor usuli deyiladi.

Agar (8.4) integralni hisoblashda o'ng to'g'ri to'rtburchaklar formulasidan foydalansak, ya'ni:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = hf(x_{i+1}, y_{i+1}),\ i = 0,1,...,n-1,$$

natijada Eylerning oshkormas formulasini hosil qilamiz:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),\ i = 0,1,...,n-1 \qquad (9.7)$$

Eylerning oshkor (9.6) yoki oshkormas (9.7) formulalari birinchi tartibli aniqlikka ega.

Amaliyotda Eylerning modifikatsiyalangan usulidan ham foydalaniladi. Mazkur usulga ko'ra y_{i+1} yechimni topish ikki bosqichda amalga oshiriladi:

$$\widetilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \text{ - 1-bosqich}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1})]$$

Mazkur sxema prediktor-korrektor usuli deb ataladi.

Mazkur usulga ko'ra birinchi bosqichda taqribiy yechim yuqori bo'lmagan (h) aniqlikda topiladi, ikkinchi bosqichda esa olingan yechim to'g'rilanadi, ya'ni yakuniy va ikkinchi tartibli aniqlikda topiladi.

9.1.2.Runge-Kutta usuli

Eyler usulinnig asosiy kamchiligi aniqlik masalasida bo'lib, bu yerda aniqlikni oshirish uchun qadamlar, ya'ni hisoblashlar sonini oshirishga to'g'ri keladi.Katta aniqlik talab qilingan hollarda Eyler usuliga ko'ra, effektiv usul yaratish zarurati paydo bo'lgan. Bunday hollarda Runge-Kutta usulidan foydalanish tavsiya qilinadi. Bu usul ham (8.3) Koshi masalasining yechimini jadval ko'rinishda aniqlash imkoniyatini beradi.

Runge-Kutta usuliga ko'ra (1), Koshi masalasi yechimi y ning y_i taqribiy qiymatlari quyidagicha topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

Bu yerda

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),\ (i = 0,1,2,...) \qquad (9.8)$$

$$\left.\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}), \\ k_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}) \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)} \end{aligned}\right\} \qquad (9.9)$$

Runge-Kutta usulining sxemasi

9.1 - jadval

i	x	y	$k = hf(x,y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
-	-	-	-	$\frac{1}{6}\sum \Delta y_0$
1	x_1	y_1	-	-
	-	-	-	-

9.2. Oddiy differensial tenglamalar sistemalarini yechishning sonli usullari

$$\begin{cases} y' = \varphi_1(x, y, z) \\ z' = \varphi_2(x, y, z) \end{cases} \qquad (9.10)$$

$$y(x_0) = y_0, \; z(x_0) = z_0 \qquad (9.11)$$

Koshi masalasini yechish talab qilinsin.

(9.10) – (9.11) Koshi masalasini yechish uchun quyidagicha algoritmlardan foydalaniladi:

1) Eylerning oshkor usuli asosidagi algoritm:

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi_1(x_i, y_i, z_i)$$
$$z_{i+1} = z_i + h\varphi_2(x_i, y_i, z_i)$$

2) Eylerning modifikatsiyalangan usuli asosidagi algoritm:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\varphi_1(x_i, y_i, z_i)$$
$$\tilde{z}_{i+1} = z_i + h\varphi_2(x_i, y_i, z_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\varphi_1(x_i, y_i, z_i) + \varphi_1(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}))$$

$$z_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\varphi_2(x_i, y_i, z_i) + \varphi_2(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}, \widetilde{z}_{i+1}))$$

3) Runge-Kutta usuli asosidagi sxema:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$k_1 = \varphi_1(x_i, y_i, z_i),\ l_1 = \varphi_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = \varphi_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}, z_i + \frac{hl_1}{2}),$$

$$l_2 = \varphi_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}, z_i + \frac{hl_1}{2}),$$

$$k_3 = \varphi_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}. z_i + \frac{hl_2}{2}),$$

$$l_3 = \varphi_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}, z_i + \frac{hl_2}{2}),$$

$$k_4 = \varphi_1(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hl_3)$$

$$l_4 = \varphi_2(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hl_3)$$

Ko'rilgan Eyler, Runge-Kutta usullari formulalari bo'yicha hisoblash jarayonlarini hech qanday qiyinchiliksiz dasturlash va hisoblashlarni kompyuterda bajarish mumkin.

Biz bu yerda birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini yechish usullari haqida qisqacha ma'lumot keltirdik. Shuningdek, oddiy differensial tenglamalarni yechishda MATLAB muhitining funksiyalari, hisoblash hamda grafik imkoniyatlaridan keng foydalanish maqsadga muvofiq. Shu sababli, quyida ODT va ularning sistemalarini MATLAB asosida yechish va yechimlarni tahlil qilishga doir mustaqil ishlar va ularni bajarish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar keltiriladi.

1-TOPSHIRIQ

1) 9.2-jadvaldan mos variant tanlansin va MATLAB tizimida $F(x,y,y')=0$ birinchi tartibli $[a,b]$ oraliqda differensial tenglamaning $y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi $h=0.01$ qadam bilan topilsin.

a) Eyler usuli;

b) Runge-Kutta usuli.

2. Funksiya grafiklarini chizish.

3. Natijalarni taqqoslash va xulosa chiqaring.

a) Berilgan birinchi tartibli differensial tenglamani Eyler usuli bilan yechish

Oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish bo'yicha topshiriqlar

9.2-jadval

Variant raqami	$Y' = f(x,y)$	$Y(x_0)=Y_0$	[a,b]	$Y(x)$
1	$y' = y + e^x$	$y=(0)=0$	[0,1]	$y(x) = xe^x$
2	$y' = 1-(x+1)y + y^2$	$y=(0)=1$	[0,1]	$y(x) = x+1$
3	$y' = x + y$	$y=(0)=1$	[0,1]	$y(x) = 2e^x - x - 1$
4	$y' = x^2 + y \div x$	$y=(2)=0$	[2,3]	$y(x) = \frac{x^3}{2} - 2x$
5	$y' = (2x-y) \div x$	$y=(1)=-9$	[1,2]	$y(x) = x - 10 \div x$
6	$y' = 3x + y \div x$	$y=(1)=8$	[1,2]	$y(x) = 3x^2 + 5x$
7	$y' = 3x^4 + 2y \div x$	$y=(1)=2$	[1,2]	$y(x) = x^5 + x^2$
8	$y' = y^2 e^x - 2y$	$y=(0)=0{,}5$	[0,1]	$y(x) = 1 \div (e^x + e^{2x})$
9	$y' = (x \div y + y \div x)\cdot 2$	$y=(1)=2$	[1,2]	$y(x) = \sqrt{x^2 + 3x)}$
10	$y' = (3-4xy) \div (1+x^2)$	$y=(0)=0$	[0,1]	$y(x) = (x^2+3x) \div (1+x^2)^2$
11	$y' = y - (x^3+4) \div (1+x^2)$	$y=(0)=2$	[0,1]	$y(x) = (x^2+2) \div (1+x)$
12	$y' = x^2 + 2y \div x$	$y=(1)=2$	[1,2]	$y(x) = x^3 + x$

Topshiriqni bajarish bo'yicha uslubiy ko'rsatma. 1-variant misolida topshiriq quyidagi tartibda bajariladi.

1. $y' = y + 2x - x^2$ tenglamani Eyler usulida yechish dasturini tuzamiz.

```
function [X,Y]=Eiler_13(y0,x0,x1,h)
N=(x1-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:N
x(i+1)=x(1)+h*i;
y(i+1)=y(i)+h*F13(x(i),y(i));
end;
X=x;
Y=y;
function z=F13(x,y)
z=x.^2+exp(x);
```

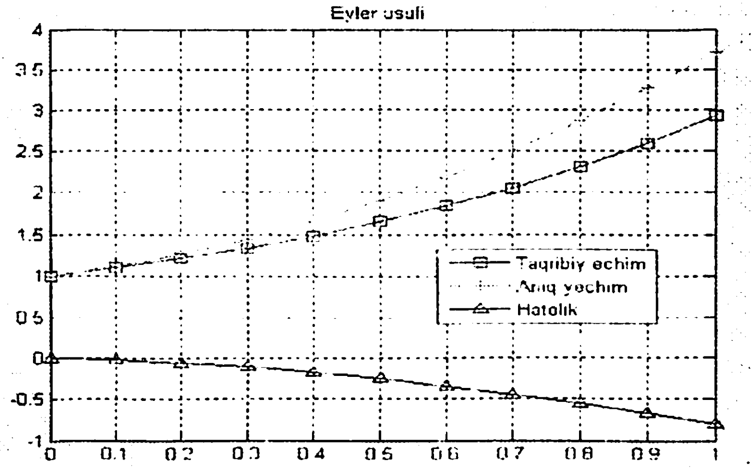
Mazkur dasturdan foydalanib $y' = y + 2x - x^2$ differensial tenglamani berilgan boshlang'ich shartda yechish uchun buyruqlar ketma-ketligini quyidagi tartibda bajaramiz:

```
h=0.1; % qadam
x0=1.2; % integrallash cohasining chap chegarasi
x1=2.2; % integrallash cohasining o'ng chegarasi
y0=1.4; % boshlang'ich shart
% Koshi masalasining sonli echimini topish
[X,Y]=Eiler_13(y0,x0,x1,h);
i=1:length(X);
% aniq echim
Z(i)=x.^2+exp(x);
plot(X,Z,X,Y,'*', X,abs(Z-Y),'.')
```

Aniq, taqribiy yechimlar va ular orasidagi farq grafiklari aniq Eyler usuli asosidagi sonli yechimlar va aniq hamda sonli yechimlar orasidagi farq grafiklari.

$y' = y + 2x - x^2$ tenglamaning Eyler usulida olingan sonli yechimlari hamda aniq va taqribiy yechimlar orasidagi farqi jadvali.

x	Eyler usulida olingan taqribiy yechim	Aniq yechim	Aniq va taqribiy yechimlar farqi
0.0	1.0	1.0	0.0000
0.1000	1.1000	1.1152	-0.0152
0.2000	1.2115	1.2614	-0.0499
0.3000	1.3377	1.4399	-0.1022
0.4000	1.4816	1.6518	-0.1702
0.5000	1.6468	1.8987	-0.2519
0.6000	1.8367	2.1821	-0.3454
0.7000	2.0549	2.5038	-0.4488
0.8000	2.3053	2.8655	-0.5603
0.9000	2.5918	3.2696	-0.6778
1.0000	2.9188	3.7183	-0.7995



$y' = y + 2x - x^2$ tenglamaning Eyler usulida olingan sonli yechimlari hamda aniq va taqribiy yechimlar orasidagi farqi grafiglari.

b) $y' = y + 2x - x^2$ tenglamani Runge-Kutta usuli yordamida yechish dasturini tuzamiz.

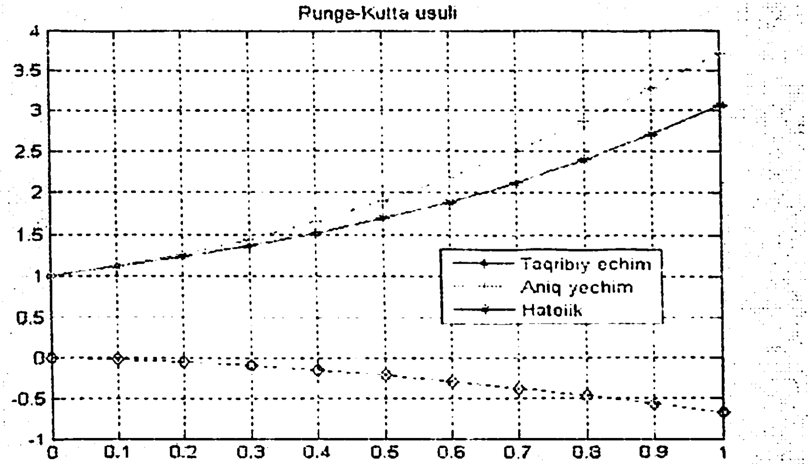
```
function [X,Y]= RungeKutt(y0,x0,x1,h)
N=(x1-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=2:N+1
  x(i)=x(1)+h*(i-1);
  k1=h*F(x(i-1),y(i-1));
  k2=h*F(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k1/2);
  k3=h*F(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k2/2);
  k4=h*F(x(i-1)+h,y(i-1)+k3);
  y(i)=y(i-1)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end;
X=x;
Y=y;
function z=F13(x,y)
z=x.^2+exp(x);
```

Buyruqlar quyidagi tartibda bajariladi:

```
h=0.1; % qadam
x0=1.2; % integrallash cohasining chap chegarasi
x1=2.2; % integrallash cohasining o'ng chegarasi
y0=1.4; % boshlang'ich shart
% Koshi masalasining sonli echimini topish
[X,Y]=RungeKutt(y0,x0,x1,h);
i=1:length(X);
% aniq echim
Z(i)=x.^2+exp(x);
plot(X,Z,X,Y,'*', X,abs(Z-Y),'.')
% aniq, sonli echimlar va ular orasidagi farq grafigi
plot(X,Z,X,Y,'*',X,abs(Z-Y),'.')
```

$y' = y + 2x - x^2$ tenglamaning Runge - Kutta usulida olingan sonli yechimlari hamda aniq va taqribiy yechimlar orasidagi farqi grafiglari.

x	Runge-Kutta usulida olingan taqribiy yechim	Aniq yechim	Aniq va taqribiy yechimlar farqi
0.0	1.0	1.0	0.0000
0.1000	1.1055	1.1152	-0.0097
0.2000	1.2241	1.2614	-0.0373
0.3000	1.3589	1.4399	-0.0810
0.4000	1.5132	1.6518	-0.1387
0.5000	1.6904	1.8987	-0.2083
0.6000	1.8941	2.1821	-0.2880
0.7000	2.1281	2.5038	-0.3757
0.8000	2.3962	2.8655	-0.4693
0.9000	2.7026	3.2696	-0.5670
1.0000	3.0516	3.7183	-0.6667



$y' = y + 2x - x^2$ tenglamani Runge-Kutta usulida olingan sonli yechimlari va aniq hamda sonli echimlar orasidagi farqi grafiglari.

2-TOPSHIRIQ

9.3-jadvaldan mos variant tanlansin va differensial tenglamalar sistemasini $[0, 2]$ oraliqda $h = 0.01$ qadam bilan :

- Eyler
- Runge-Kutta usullari bilan yeching.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -aP_1(t) + mP_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = aP_1(t) - (a-m)P_2(t) + 2mP_3(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = aP_2(t) - (a-m)P_3(t) + 3mP_4(t), \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = aP_3(t) - 3mP_4(t). \end{cases}$$

Bu yerda $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$.

2. Funksiyalar grafigini chizing

3. Natijalarni taqqoslang

Oddiy differensial tenglamalar sistemalarini sonli yechish boyicha topshiriqlar

9.3-jadval

Variant raqami	Topshiriqlar	
	a	m
1	0,2	1,1
2	0,1	1.1
3	0,1	1,2
4	0,2	1,5
5	0,3	1,7
6	0,4	1,9
7	0,5	2
8	0,6	1,9
9	0,7	2,3
10	0,8	2,7
11	0,9	3
12	0,1	1,5
13	0,2	1,1
14	0,3	2

Topshiriqni bajarish bo'yicha uslubiy ko'rsatma.

1- variant misolida topshiriq quyidagi tartibda bajariladi.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -0.2P_1(t) + 1.1P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 0.2P_1(t) + 0.9P_2(t) + 2.2P_3(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = 0.2P_2(t) + 0.9P_3(t) + 3.3P_4(t), \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = 0.2P_3(t) - 3.3P_4(t), \end{cases}$$

$P_1(0)=1;\ P_2(0)=0;\ P_3(0)=0;\ P_4(0)=0;$

2. Berilgan tenglamalar sistemasini Eyler usulida yechish dasturini tuzamiz.

Differensial tenglamalar sistemasini o'ng qismlarini hisoblash fayl-funksiyasi sisdu.m ni yaratamiz:

```
function F=sisdu(t,P);
F = [ -0.2.*P(1)+1.1.*P(2);
  0.2.*P(1)+0.9.*P(2)+2.2.*P(3);
  0.2.*P(2)+0.9.*P(3)+3.3.*P(4);
  0.2.*P(3)-3.3.*P(4) ];
```

Hisoblashlarni quyidagicha olib boramiz:

```
>> t0=[0 1];
>> P0=[1 0 0 0]';
>> options = odeset('RelTol',1e-1);
>> [t,P] = ode23('sisdu', t0, P0, options)
>> plot(t,P)
```

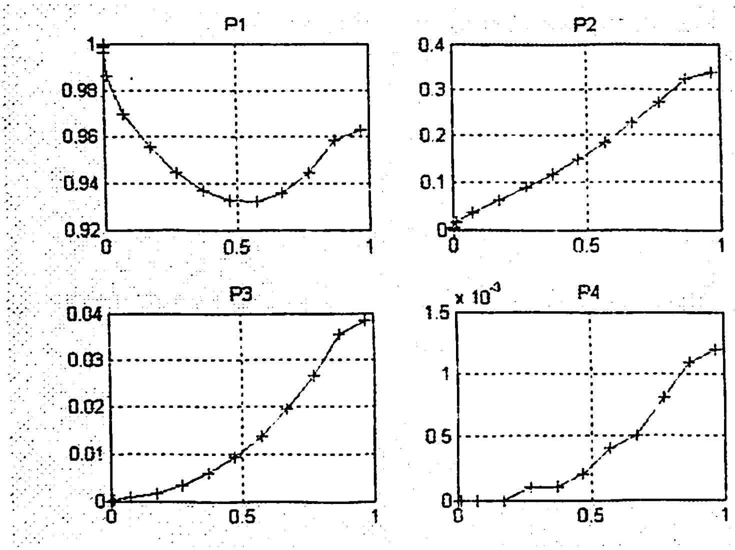
Natijalar 9.4-jadvalda keltirilgan.

Oddiy differensial tenglamalar sistemasini MATLAB tizimida yechih natijalari

9.4- jadval

t	$P_1(t)$	$P_2(t)$	$P_3(t)$	$P_4(t)$
0	1.0000	0	0	0
0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.9999	0.0001	0.0000	0.0000
0.0006	0.9994	0.0006	0.0000	0.0000
0.0029	0.9971	0.0029	0.0000	0.0000
0.0145	0.9862	0.0149	0.0001	0.0000
0.0725	0.9695	0.0368	0.0007	0.0000
0.1725	0.9556	0.0607	0.0017	0.0000
0.2725	0.9447	0.0869	0.0034	0.0001
0.3725	0.9370	0.1158	0.0059	0.0001
0.4725	0.9327	0.1480	0.0093	0.0002
0.5725	0.9323	0.1840	0.0137	0.0004
0.6725	0.9361	0.2247	0.0194	0.0005
0.7725	0.9445	0.2707	0.0266	0.0008
0.8725	0.9580	0.3232	0.0356	0.0011
0.9725	0.9628	0.3389	0.0385	0.0012

Sonli yechimni vizuallashtirish:



Oddiy differensial tenglamalar sistemasini Eyler usulida aniq hamda sonli yechimlari va ular orasidagi farqi grafiklari.

3-TOPSHIRIQ

1. 9.5-jadvaldan mos variant tanlansin va tanlangan yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi ode23 funksiyasi yordamida sonli yechilsin.

2. Funksiya grafigini yasang.

Yuqori tartibli differensial tenglamalarni sonli yechish boyicha topshiriqlar

9.5-jadval

Variant raqami	Topshiriqlar	
	Tenglama	*Boshlang'ich shart*
1	$y''+y=4xe^x$	$y(0)=-2,\ y'(0)=0$
2	$y''+y=4\sin x$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
3	$y''-2y'-3y=e^{4x}$	$y(0)=\frac{26}{5},\ y'(0)=\frac{39}{5}$
4	$y''-2y'-3y=48x^2e^x$	$y(0)=1,\ y'(0)=-\frac{3}{2}$

5	$y'' + 4y' + 4y = 32x^2 e^{2x}$	$y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
6	$y'' - y = 2e^x - x^2$	$y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
7	$y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
8	$y'' + 9y = 6\cos 3x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
9	$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
10	$4y'' + y = ctg\frac{x}{2}$	$y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{2}$
11	$y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$	$y(0) = 2,\ y'(0) = 3$
12	$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$	$y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}$

Namunaviy misol. $y'' - 6y' + 4y = x^2 - x + 3$ differensial tenglamaning $[0,10]$ oraliqda $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini $h = 0.01$ qadam bilan toping.

Yechish:

Differensial tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

1) $y' = y_1$

2) $y_1' = x^2 - x + 3 + 6y_1 - 9y$

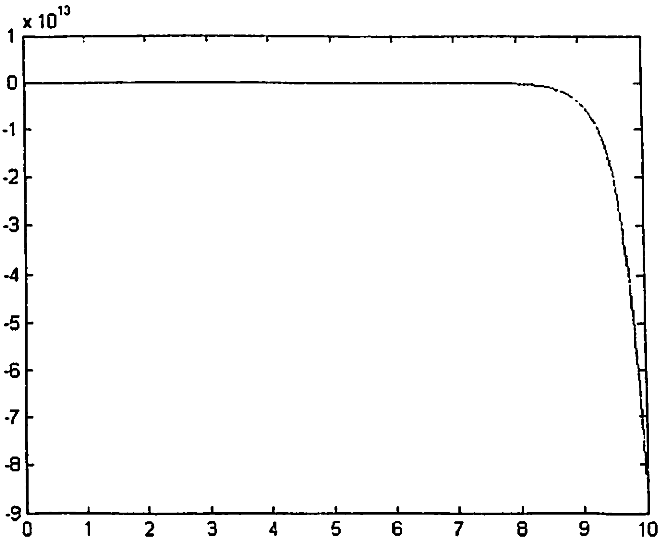
1.Differensial tenglamalar o'ng qismlari hisoblash uchun m-fayl yaratamiz. m-fayl nomi sisdu_15.m bo'lsin:

```
function z=sisdu_15(x,y)
z1 = y(2);
z2 = x*x - x + 3 + 6*y(2) - 9*y(1);
z = [z1;z2];
```

Sistemani yechish jarayonini quyidagi tartibda olib boramiz:

```
x = 0:0.01:10;
x0=0;xf=10;
y0=[4/3,1/27];
plot(x,y0(:,1))
options = odeset('RelTol',1e-1);
[x,y]=ode23('sisdu_15',x,y0,options);
plot(x,y(:,1))
```

ode23 funksiyasi yordamida olingan yechimni vizuallashtiramiz:



Savollar:

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining quyilishi.
2. Eyler usuli.
3. Modifikatsiyalangan Eyler usuli.
4. Runge-Kutta usuli.
5. Birinchi tartibli tenglamalar sistemalarini yechishning Eyler va Runge-Kutta usullari.
6. Yuqori tartibli differensial tenglamalarni sonli yechish.
7. MATLAB muhitida differensial tenglamalarni yechish funksiyalari.

1-ilova

QISQARTMALAR RO"YXATI (GLOSSARIY)

Hisoblash eksperimenti – jarayonlarni hisoblash matematikasi vositalari asosida tadqiq etish.

Hisoblash algoritmi – matematik masalani sonli yechishga imkon beruvchi arifmetik va logik operatsiyalar ketma-ketligi.

Ikki qadamli iteratsion usul - y^{k+1} qadamdagi yechimni topishda avvalgi y^k va y^{k-1} (k- va $k-1$ - iteratsiyalar) yechimlardan foydalanish usuli.

Koshi masalasi – birinchi tartibli differensial tenglama va unga quyilgan boshlang'ich shart bilan tavsiflanuvchi matematik model. Umuman olganda, $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y', y) = 0$ tenglama uchun n ta qo'shimcha shart qo'yiladi.

Interpolyatsiyalovchi funksiya – qabul qilingan kriteriy bo'yicha qiymatlari to'r funksiyaga teng bo'lgan uzluksiz funksiya.

Lagranjning interpolyatsion polinomi – oraliqning ixtiyoriy joylashgan turli nuqtalarida berilgan to'r funksiya asosida qurilgan polinom.

Nyutonning interpolyatsion formulasi – qiymatlari teng oraliqlarda joylashgan to'r funksiya asosida qurilgan polynom.

Chiziqli algebraik tenglmalar sistemalarini yechishning iteratsion usuli – sistema yechimini topishda berilgan boshlang'ich yechim (yaqinlashish) asosida ketma-ket topiladigan taqribiy yechimlar ketma – ketligi.

Zeydel iterasion usuli - chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli yechish usuli.

Chegaraviy masala – ikkinchi tartibli differensial tenglama va ikkita qo'shni bo'lmagan nuqtalarda qo'yilgan chegaraviy shartlar bilan tavsiflanuvchi model.

Kubik splayn interpolyatsiya – uchinchi tartibli polinom asosida splayn-interpolyatsiyalash.

Chiziqli splayn – chiziqli funksiya yordamida splayn- interpolyatsiyalash.

Matematik model – jarayonni algebraik, differensial, integral va boshqa tenglamalar asosida matematik ifodalash.

Oraliqni ikkiga bo'lish usuli – algebraik tenglamalarni yechish usuli.

Nyuton usuli (urunmalar usuli) - algebraik tenglamalarni yechish usuli.

Progonka usuli – chegaraviy masalalarni yechish usuli.

Turg'un bo'lmagan algoritm – hisoblashlar jarayonida boshlang'ich xatoliklarni tez va ko'p o'sishiga olib keluvchi algoritm.

Bartaraf qilib bo'lmas xatolik – sonli usulning boshlang'ich ma'lumotlarda mavjud bo'lgan xatolik.

Diskretlash xatoligi – berilgan masalani (chegaraviy) diskret masalaga o'tkazishda vujudga keladigan xatolik.

Yaxlitlash xatoligi – kompyuterda sonlarning chekli razryadligi sababli ro'y beradigan xatolik.

Siyraklangan matritsa – elementlarining ko'p qismi noldan iborat matritsa.

To'r funksiya – diskret nuqtalar, to'r tugunlarida berilgan funksiya

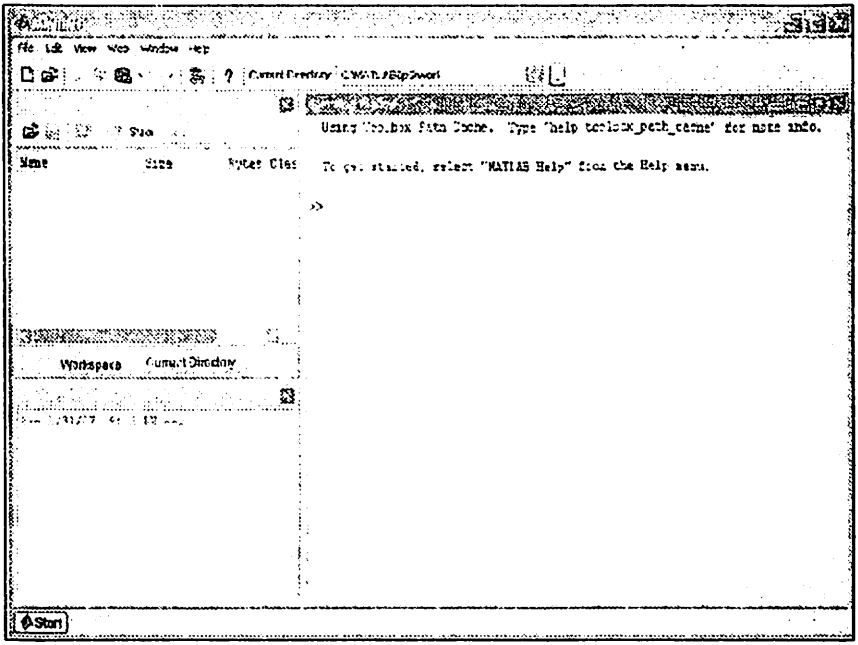
Interpolyatsiya tugunlari – haqiqiy sonlar o'qining to'r funksiya qiymatlari berilgan nuqtalari

2-ilova

MATLAB ning oynalari va grafikasi haqida qisqacha ma'lumotlar

Matlab (MATrix LABoratory) – ilmiy va muhandislik ishlarini bajarishda qo'llaniladigan interaktiv matritsalashga yo'naltirilgan paket.

Dastlabki holatda ishga tushirilgan Matlab dasturi ekranida kombinatsiyalangan to'rtta oyna paydo bo'ladi (1.2-rasm).



1.2. Matlab dasturining asosiy oyna ko'rinishi.

•**Command Window** (Buyruqlar oynasi) – ko'p ishlatiladigan panel. Bu oynada foydalanuvchi buyruq kodlarni kirgizadi va ishlatadi hamda bajarilgan buyruqlar natijasi olinadi.

•**Command History** (Kiritilgan buyruqlar) – bu qismda foydalanuvchi tomonidan kiritilgan barcha buyruqlar ketma-ketligi saqlanadi. Command Window oynasidan farqi, bu oynada kiritilgan buyruqlar natijasi keltirilmaydi.

•**Workspace** (Ishchi bo'lim) – bu oynachada foydalanuvchi tomonidan kiritilgan o'zgaruvchilar kiritilib boriladi.

•**Current Directory** (Joriy katalog) – bunga misol sifatida Window provodnik

« + Ye», faqat Matlab dasturi muhiti uchun qo'llanilishi.

Tizimning asosiy oynasi

Matlab dasturining asosiy menyusi quydagi 6 ta punktdan tashkil topgan:

•File (fayl) – fayllar bilan ishlash;
•Edit (pravka) – o'zgartirish kiritish;
•View (Vid) – oynani boshqarish;
•Web – Internet tarmog'idagi firma ishlab chiquvchilari bilan aloqa;
•Window (Okno) – dastur oynalari o'rtasidagi aloqa;
•Help (spravka) – Matlab ma'lumotnomasi bilan bog'lanish;

File menyusi quydagi buyruqlardan tashkil topgan:
•**New** (Sozdat) – yangi obyekt yaratishni ta'minlaydi:
o **M-file** – dasturga yoziladigan m. kengaytmali fayl;
o **Figure** – mahsus oyna hisoblanib, u grafik shakllarni ekranga chiqarish uchun qo'llaniladi;
o **Model** – Simulink modeli;
o **GUI** – foydalanuvchi grafik interfeysi (Graphical User Interface), asosan grafik prilojeniyalarni yaratishda ishlatiladi.
•**Open** (Ochish) – mavjud bo'lgan standart obyektlarni ochishda ishlatiladi;
•**Close Current Directory** (Joriy katalogni yopish) – joriy ishlatilayotgan katalogni yopish;
•**Import Data** (ma'lumotlarni import qilish) – Matlab dasturidan boshqa ko'rinishdagi fayllarni import qilish.
•**Save Workspace As** – ishchi dasturini saqlash buyrug'i;
•**Set Path** (Sozdat put) – dasturga yo'l ko'rsatishni ta'minlaydi;
•**Preferences** – Matlab dasturida ba'zi qo'llanmalarni o'zgartirish;
•**Page Setup** – sahifa parametrlari;
•**Print** – chop qilish;
•**Exit Matlab** – Matlab tizimida ishni yakunlash.

Edit menyusi quydagi buyruqlardan tashkil topgan:

- **Undo** (Otmenit) – bekor qilish;
- **Redo** (Povtorit) – takrorlash;
- **Cut** (Virezat) – qirqib olish;
- **Copy** (Kopirovat) – nus'ha olish;
- **Paste** (Vstavit) – joylashtirish;
- **Select All** (Videlit vse) – hammasini belgilash;
- **Find** (Nayti) – fayl yoki kiritilgan so'zni qidirish;
- **Paste Special** (spesialnaya vstavka) – maxsus joylashtirish;
- **Clear Command Window** (Ochistit okno komand) – Buyruqlar oynasini tozalash;
- **Clear Workspace** – ishchi stolini o'zgaruvchilardan tozalash;

View menyusi quydagi buyruqlardan tashkil topgan:

- **Desktop Layout** – menyu qismlariga qo'shimcha oynachalarni joylashtirishga yordam beradi;
- **Current Directory Filter** – joriy katalog uchun filtr vazifasini bajaradi;
- **Workspace View Options** – keltirilgan ishchi muhit parametrlari;

1.1.1. Sonlar, o'zgaruvchilar va funksiyalar

Matlab tizimida sonlar musbat va manfiy, butun va haqiqiy bo'ladi. Ular suruluvchi vergulli va fiksirivonniy ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Matlab dasturida sonlarning formati:

- **format short** – qisqa keltirilgan (5 ta belgilan iborat);
- **format short e** – qisqa keltirilgan eksponensial ko'rinishdagi sonlar;
- **format long** – uzun keltirilgan sonlar (15 ta belgidan iborat);
- **format long e** – uzun keltirilgan eksponensial ko'rinishdagi sonlar;

O'zgaruvchilar – ma'lum bir ma'lumotlarni saqlash uchun foydalaniladigan simvol hisoblanib, u o'z nomiga ega. Bu nom *identifikatorlar* deb nomlanadi.

Konstanti – bu unikal songa ega bo'lgan matematik tushunchadir. Matlab dasturida ko'p qo'llaniladigan konstantalar quydagilar:

- **pi** – 3,14;
- **inf** – cheksizlik;
- **ans** – o'zgaruvchilardagi son qiymat natijasi;
- **NaN** – sonli bo'lmagan ma'lumot;

Elementar funksiyalar:

- **abs(x)** – x o'zgaruvchi uchun absolyut qiymat;
- **exp(x)** - e^x funksiyasi ko'rinishi;
- **log(x), log10(x), log2(x)** – ye, 10, 2 asoslarga ko'ra berilgan logarif ko'rinishi;
- **sqrt(x)** – kvadrat ildiz ko'rinishi;
- **sin(x), cos(x), tan (x), cot(x), sec(x), csc(x)** – trigonametrik funksiyalar ko'rinishi;

Keltirilgan funksiyalarni m. fayl kengaytmasida saqlash va undan foydalanish mumkin.

Hisoblash natijalarini vizuallashtirish

Matlab dasturi grafik ko'rinishdagi informatsiyalarga juda boy hisoblanadi. U funksiyalarni ikki o'lchovli va uch o'lchovli ko'rinishda qurish imkoniga egadir.

Ikki o'lchovli grafiklar uchun asosiy funksiyalar:

- **plot(x,y);**
- **plot (x,y,s);**
- **plot (x1, y1, s1, s2, ..., xn, yn, sn);**

1-Jadval. Grafik turlari

Nuqta turi		**Chiziq rangi**		**Chiziq turi**	
.	Nuqta	Y	Sariq	-	Tutash
O	Aylana	M	Siyoh rang	:	Ikkilamchi nuqtali

x	Krest	C	Ko'k	-.	Shtrix nuqtali
+	Plyus	R	Qizil	--	Shtrixli
*	Ko'paytirish	G	Yashil		
S	Kvadrat	B	Siniy		
D	Romb	W	Oq		
V	Uch burchak	K	Qora		
P	Besh yulduz				
H	Olti yulduz				

ASOSIY ADABIYOTLAR

1. Постановление Президента Республики Узбекистан от 27 июня 2013 г. № ПП-1989 «О мерах по дальнейшему развитию Национальной информационно-коммуникационной системы Республики Узбекистан» Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2013 г., № 40, ст. 528.
2. Anthony Ralston&Philip Rabinowitz. A First Course in Numerical Analisys: Second Edition.2012.
3. Rizman Butt. Numerical Analysis Uzing MATLAB. Copyright 2010 by Jones and Barten Publishers, LLC, 2012.
4. Steven T.Karris. Numerical Analysis Uzing MATLAB &Excel. Third Edition.Orchard Publications, 2010.256 pp.
5. Shoichiro Nakamura. Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB. Prentice Hall, 2009.134 pp.
6. Lanrene V. Fauselt. Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Prentice Hall, 2008, 596 pp.
7. Isroilov M.I. Hisoblash usullari. –T.: Oq'ituvchi. 2008.
8. Yuldashev Z.X., Muxitdinova N.M., Sharipxodjayeva Z.Sh. Tenglamalarni ketma-ket yaqinlashish usullari bilan yechish bo'yicha laboratoriya ishlarini uyushtirish uchun metodik ko'rsatmalar. –T.: ToshDU, 1986, 48 b.

Интернет манбаалари

9. www.exponenta.ru
10. www.techno.edu.ru
11. www.toehelp.ru
12. www.math.msu.su

MUNDARIJA

VI BOB. JADVAL KO'RINISHIDA BERILGAN FUNKSIYALAR UCHUN APPROKSIMATSIYA MASALASI

VII BOB. APPROKSIMATSIYALOVCHI FUNKSIYANI QURISHNING ENG KICHIK KVADRATLAR USULI

VII BOB. JADVAL KO'RINISHIDA BERILGAN MA'LUMOTLAR ASOSIDA APPROKSIMATSIYALOVCHI TRIGONOMETRIK KO'PHADLARNI TUZISH

ОГЛАВЛЕНИЕ

QAYDLAR UCHUN

R.N. USMANOV, A.N. MIRZAYEV,
K.K. SEITNAZAROV

SONLI USULLAR VA DASTURLASH

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2016

Muharrir: Sh.Kusherbayeva
Tex. muharrir: M.Holmuhamedov
Musavvir: D.Azizov
Musahhih: N.Hasanova
Kompyuterda sahifalovchi: N.Raxmatullayeva

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 245-57-63, 245-61-61.
Nashr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi: 26.12.2016.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 11,75. Nashriyot bosma tabog'i 12,0.
Tiraji 500. Buyurtma №278.

«Fan va texnologiyalar Markazining
bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.