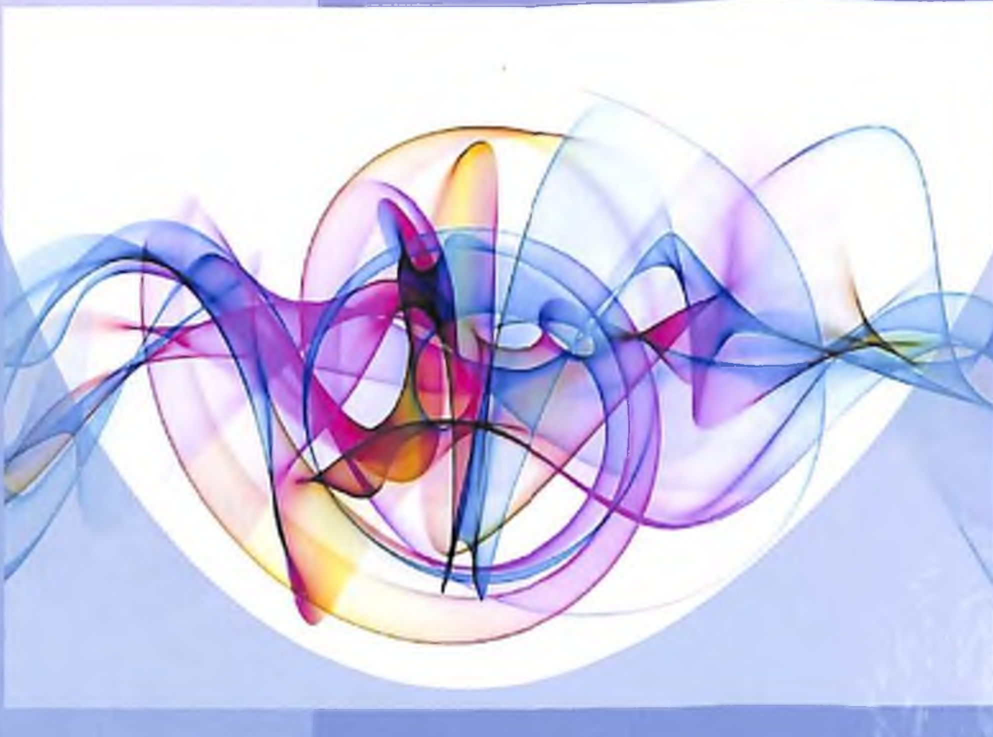
D. G. RAXIMOV

DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALAR
VA KOMMUNIKASIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT
AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

D. G. RAXIMOV

DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

(O‘quv qo‘llanma)

TOSHKENT – 2021

UO'K: 517.9(075)
KBK: 22.161.6
R 29

D. G. Raximov. Differentsial tenglamalar. (O'quv qo'llanma). – T.: «Nihol print» OK, 2021. – 120 b.

ISBN 978–9943–7028–0–5

Ushbu o'quv qo'llanma texnik yo'nalishdagi oliy ta'lim muassasalarining bakalavriyat bosqichida ta'lim oluvchi barcha talabalarning "Differentsial tenglamalar" fanini o'zlashtiriishlari uchun mo'ljallangan. Bu qo'llanma ushbu fanning namunaviy dasturi bo'yicha tuzilgan kalendar-tematik reja asosida yozildi.

UO'K: 517.9(075)
KBK: 22.161.6

Taqrizchilar:

Sh.G. Qosimov – O'zbekiston mulliy universiteti professori, f.-m.f.d., professor;

U.N.Qalandarov – f.-m.f.n., dotsent.

ISBN 978–9943–7028–0–5

So'z boshi

Toshkent axborot texnologiyalari universitetida 2018/2019 o'quv yilidan boshlab kredit texnologiyasi bo'yicha ta'lim joriy qilindi. Bu ta'lim tizimi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalar uchun o'quv rejasiga yangi "Differentsial tenglamalar" fani kiritildi. Shu sababli, bu fan bo'yicha namunaviy dastur va maruzalar matni yozish zaruriyati vujudga keldi. Muallif shu maqsadni ko'zlab fanning 18 ta mavzusini o'z ichiga olgan ushbu o'quv qo'llanmani yozib o'quvchi diqqatiga havola qilyapdi.

Amaliy masalalar aksariyat murakkab, ko'pincha analitik yechimga ega bo'lmaganligi uchun ularni sonli usullar yordamida taqribiy yechish majburiyati vujudga keladi. Ayrim hollarda esa yechimni topish algoritmi katta hajmdagi hisoblarni talab qiladi. Bunday hollarda yetarlicha xatolik bilan bo'lsada taqribiy yechimni topish ma'qul bo'ladi. Ayniqsa texnik yo'nalishdagi fanlarda keng uchraydigan bunday murakkab katta hajmdagi hisoblashlar bilan bog'liq masalalarni kompyuterlarda dasturlar yordamisiz hisoblab bo'lmaydi. Shu sababli, o'quv qo'llanma oxirida differentsial tenglamalarni taqribiy yechish usullari keltirilgan. Bu sohadagi mavjud adabiyotlar aksariyat rus tilida bo'lib, ular ham yetarli hajmda emas.

Ushbu o'quv qo'llanma "Differentsial tenglamalar" fanidan adabiyot taqchilligini bartaraf etish uchun mo'ljallangan. Qo'llanma "Differentsial tenglamalar" fanining namunaviy dasturi asosida o'quv rejaga muvofiq, soatlar taqsimotiga ko'ra tuzilgan. Qo'llanma oxirida bilimlarini mustahkamlash istagida bo'lgan talabalar uchun qo'shimcha adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

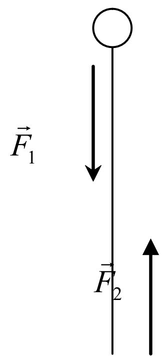
Qo'llanma kamchiliklardan holi bo'lmasligi mumkin. Shu sababli, muallif qo'llanma bo'yicha bildirilgan barcha kamchiliklarni mamnuniyat bilan qabul qiladi.

1-§. Umumiy tushunchalar. Ta’riflar.

1.1. Differentsial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi ayrim masalalar. Kuzatilayotgan jarayonda bir nechta o‘zgaruvchi miqdorlarning o‘zaro munosabatda bo‘lishligiga fizika, matematika fanlarida bir nechta misollar orqali ishonch hosil qilgan edik.

Ular o‘rtasidagi funktsional munosabatlarni biz shu jarayonning tenglamasi deb nomlagan edik. Bu tenglamani shu jarayonning matematik modeli, deb ham atashadi. Shu tenglamaga kiruvchi ayrim o‘zgaruvchilar asosiy o‘zgaruvchilar orqali ifodalanishi mumkin. Masalan, moddiy nuqta harakatini ko‘raylik. U biror t vaqt ichida qandaydir s masofani bosib o‘tadi. Ma’lumki, s t vaqtning funktsiyasidir, ya’ni $s=s(t)$. s masofani moddiy nuqta biror ϑ tezlik bilan bosib o‘tsin. Bilamizki, $\vartheta=s'(t)$, moddiy nuqtaning tezlanishi esa $a=s''(t)$ edi. Jarayonni kuzatish maqsadidan kelib chiqqan holda, jarayon tenglamasi nainki t, s o‘zgaruvchilarni, balki ϑ va a larni, ya’ni s ning birinchi va ikkinchi hosilalarini ham o‘z ichiga olishi mumkin. Shunday holatlarga doir bir nechta misollar ko‘raylik.

1-m i s o l. Massasi m bo‘lgan biror jism yuqoridan tashlangan bo‘lsin. Agar jismga og‘irlik kuchidan tashqari uning tushish tezligi ϑ ga proportsional bo‘lgan havoning qarshilik kuchi ham ta’sir etsa, shu jismning tezligi qanday qonun bilan o‘zgarishini aniqlang.



1-rasm.

Yechish. Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=\vec{F},$$

bu yerda $\frac{d\vartheta}{dt}$ -harakatdagi jismning tezlanishi, $\vec{F}$ esa jismga ta’sir etuvchi kuch. Bu kuch jismning og‘irlik kuchi $\vec{F}_1=mg$ va havoning qarshilik kuchi $\vec{F}_2=-k\vartheta$ lar yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Demak,

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=mg-k\vartheta\ , \qquad (1)$$

ya’ni noma’lum ϑ funktsiya va uning hosilasi $\frac{d\vartheta}{dt}$ larga nisbatan tenglama hosil qildik.

Har qanday

$$\vartheta = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

ko‘rinishdagi funktsiya (1) tenglikni qanoatlantiradi (buni tekshirishni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz).

2-m i s o l. Massasi m bo‘lgan moddiy nuqta vaqtning t momentida ϑ (absolyut) tezlikka ega bo‘lsin. Δt vaqt ichida unga massalari yig‘indisi Δm, qo‘shilgunga qadar tezligi u bo‘lgan zarralar qo‘shilsin. U holda, $t+\Delta t$ momentda nuqta va unga qo‘shilgan zarralar massasi $m+\Delta m$ va tezligi $\vartheta+\Delta\vartheta$ bo‘ladi.

Bu nuqtalar sistemasining t momentdagi harakat miqdori

$$Q = m\vartheta + u\Delta m$$

bo‘lsa, $t+\Delta t$ momentda esa

$$Q + \Delta Q = (m+\Delta m)(\vartheta + \Delta\vartheta)$$

bo‘ladi.

Demak, sistema harakat miqdorining Δt vaqt ichida o‘zgarishi

$$\Delta Q = m\Delta\vartheta + (\vartheta - u)\Delta m + \Delta m\Delta\vartheta$$

ga teng bo‘ladi.

Tezlik kabi massani ham vaqtning uzluksiz va differentsiallanuvchi funktsiyasi, deb faraz qilaylik. Oxirgi tenglikni Δt ga bo‘lib, $\Delta t \to 0$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m\Delta\vartheta}{\Delta t} = 0$$

ekanligidan

$$\frac{dQ}{dt} = m\frac{d\vartheta}{dt} + (\vartheta - u)\frac{dm}{dt}$$

munosabat hosil bo‘ladi. Agar o‘zgaruvchan massali jismga qo‘yilgan tashqi kuchlarning teng ta’sir etuvchisi F ga teng bo‘lsa, harakat miqdori haqidagi teoremaga ko‘ra

$$m\frac{d\vartheta}{dt} + (\vartheta - u)\frac{dm}{dt} = F \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama *Mesherskiy tenglamasi*, deb ataladi. Bu tenglama orqali xarakterlanadigan jarayon reaktiv harakat, deyiladi.

Agar zarralar qo‘shilib borsa, nuqtaning massasi ortib boradi, shu sababli $\frac{dm}{dt} > 0$ bo‘ladi, agar parchalanish jarayoni kuzatilayotgan bo‘lsa, ya’ni nuqtadan zarralar ajralib chiqa boshlasa, $\frac{dm}{dt} < 0$ bo‘ladi, va nihoyat, nuqta massasi o‘zgarmasa, $\frac{dm}{dt}=0$ bo‘lib, (2) tenglama Nyutonning ikkinchi qonunini ifodalaydi.

$$u-\vartheta=u_0$$

miqdor nuqtaga qo‘shilayotgan zarralarning nisbiy tezligi, deb ataladi. *Mesherskiy tenglamasi*ni bu miqdor orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=F+\frac{dm}{dt}u_0 \qquad (3)$$

yoki

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=F+R,$$

bu yerda $R=\frac{dm}{dt}u_0$ reaktiv kuch, deb nomlangan.

Agar o‘zgaruvchan massali nuqtaga tashqi kuchlar ta’sir etmasa, $F=0$ bo‘lib, oxirgi tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=R.$$

3 - m i s o l . Ba’zi elementlar atomlarining yadrolari alfa-, beta- va gamma- nurlar chiqarib boshqa elementlar yadrolariga o‘z-o‘zidan aylanishi *radioaktiv yemirilish,* deyiladi. Radioaktiv yemirilish statistik xarakterga ega: atomlarning yadrolari hammasi birdaniga yemirilmay, balki izotopning butun mavjud bo‘lish davrida yemiriladi. Bunda birlik vaqt ichida yemiriladigan atomlar soni har bir izotop uchun o‘zgarmas bo‘lib, uning yemirilmagan atomlari miqdorining biror qismini tashkil etishi aniqlangan. Bu kattalik *qismiy yemirilish doimiysi,* deyiladi va λ harfi bilan belgilanadi.

Shunday qilib, dt vaqt davomida yemirilgan dN atomlar soni λNdt ga teng, ya’ni

$$dN=-\lambda Ndt, \qquad (4)$$

bu yerda N son t vaqt momentida yemirilmay qolgan atomlar sonidir. Manfiy ishora yemirilmagan atomlar soni N vaqt o‘tishi bilan kamayishini bildiradi.

4 – m i s o l . Kimyoviy reaktsiya mobaynida A va B moddalar C moddaga o‘tsin. Agar harorat o‘zgarmas va reaktsiya tezligi: a) A modda C moddaga o‘tganda A moddaning qolgan miqdoriga; b) A va B moddalar C moddaga o‘tganda tegishli massalar ko‘paytmasiga proportsional bo‘lsa, C moddaning miqdorini topaylik.

C moddaning miqdori x bo‘lsin. Agar a) hol yuz bersa, A moddaning boshlang‘ich miqdorini a va proportsionallik koeffitsientini $k>0$ desak,

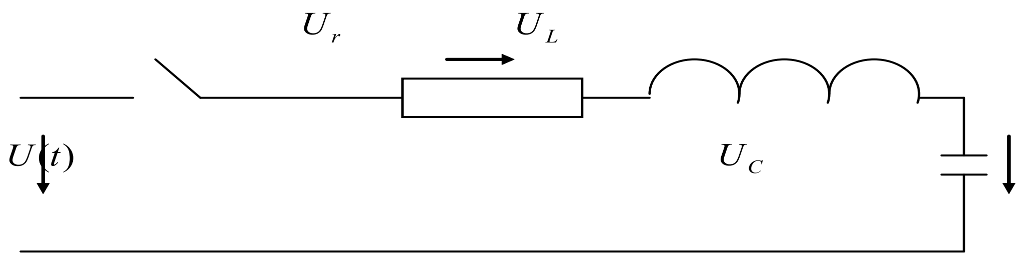
$$\frac{dx}{dt}=k(a-x) \qquad (5)$$

tenglama, va agar b) hol yuz bersa,

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x) \qquad (6)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

5-m i s o l . Qarshiligi r, induktivligi L va sig‘imi C bo‘lgan maydonlar ketma-ket ulangan zanjirda boshlang‘ich $t=0$ vaqt momentida konturdagi tok va kondensatordagi zaryad nolga teng bo‘lsa, shu zanjirdagi o‘tish jarayonlarini



2-rasm.

tekshiring.

Kirkgofning 1-qonuniga ko‘ra, elektr zanjirning tarmoqlarida sarf bo‘layotgan toklar yig‘indisi nolga teng, 2-qonuniga ko‘ra esa elektr zanjirning har qanday yopiq konturining barcha tarmoqlaridagi kuchlanishlar pasayishining yig‘indisi shu konturdagi elektr manbaaning EYuK lari yig‘indisiga teng.

Butun zanjir bo‘ylab kuchlanishning pasayishi barcha maydonlardagi kuchlanishlar pasayishining yig‘indisiga teng (2-rasmga qarang): $U=U_r+U_L+U_C$. Om qonuniga asosan qarshiligi r bo‘lgan maydon uchun $U_r=rI$. Sig‘imi C bo‘lgan kondensator uchun $U_C=\frac{q}{C}$, bu yerda q - kondensatorning zaryadi. Ma’lumki, $I=\frac{dq}{dt}=C\frac{dU_C}{dt}$. Bundan $U_C=\frac{1}{C}\int_0^t Idt$ .Induktivligi L bo‘lgan katushka uchun $U_L=L\frac{dI}{dt}$.

U holda $U = U_r + U_L + U_C = rI + \frac{1}{C}\int_0^t Idt + L\frac{dI}{dt}$ bo‘ladi. Agar bu tenglikni t bo‘yicha differentsiallab yuborsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + r\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}. \qquad (7)$$

1.2. Ta’riflar.

1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi x, uning noma’lum funktsiyasi y va uning hosilalari $y', y'', ..., y^{(n)}$ larni o‘zaro bog‘lovchi tenglama *differentsial tenglama*, deb ataladi.

Differentsial tenglamalar

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

yoki

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin.

2-ta’rif. Tenglamaga kiruvchi hosilalarning eng yuqori tartibi shu differentsial tenglamaning tartibi, deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko‘rilgan misollardagi (1)-(6) tenglamalar 1-tartibli differentsial tenglamalardir, (7) tenglama esa 2-tartibli differentsial tenglamadir.

3-ta’rif. Differentsial tenglamani ayniyatga aylantiruvchi har qanday $y = f(x)$ funktsiya differentsial tenglamaning yechimi yoki integrali, deb ataladi.

Masalan, $\vartheta = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ funktsiya ixtiyoriy o‘zgarmas C son uchun 1-misoldagi hosil qilingan (1) differentsial tenglamaning yechimidir.

6-m i s o l. O‘zgarmas C_1 va C_2 larning har qanday qiymatlarida ham

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

ko‘rinishdagi funktsiyalar ikkinchi tartibli

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

differentsial tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Buni bevosita o‘rniga qo‘yib tekshirish mumkin (buni bajarishni o‘quvchiga havola qilamiz).

Bu misollardan ko‘rinadiki, differentsial tenglama agar yechimga ega bo‘lsa, yechimlari soni cheksiz ko‘p bo‘lar ekan.

Agar noma’lum $y = f(x)$ funktsiya bir erkli o‘zgaruvchining funktsiyasi bo‘lsa, biz ko‘rayotgan tenglama oddiy differentsial tenglama, deyiladi. Bu bobda biz faqat oddiy differentsial tenglamalarni ko‘ramiz.

Agar noma’lum funktsiya bir nechta erkli o‘zgaruvchining funktsiyasi bo‘lsa, u holda bunday tenglamalarni xususiy hosilali differentsial tenglamalar, deb ataymiz.

1.3. Yo‘nalishlar maydoni. Izoklinalar.

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8}$$

tenglama koordinatalari x va y bo‘lgan M nuqtadagi $\frac{dy}{dx}$ hosilaning qiymatini, ya’ni integral egri chiziqning shu nuqtada o‘tkazilgan urinmasining burchak koeffisientini aniqlaydi. Demak, (8) tenglama *Oxy* tekisligida har xil yo‘nalishlar, boshqacha qilib aytganda yo‘nalishlar maydonini aniqlaydi.

Shuning uchun, geometrik nuqtai-nazardan (8) differentsial tenglamani integrallash urinmalari yo‘nalishi qaralayotgan nuqtalarning maydon yo‘nalishlari bilan ustma-usr tushadigan egri chiziqlarni aniqlashdan iborat ekan.

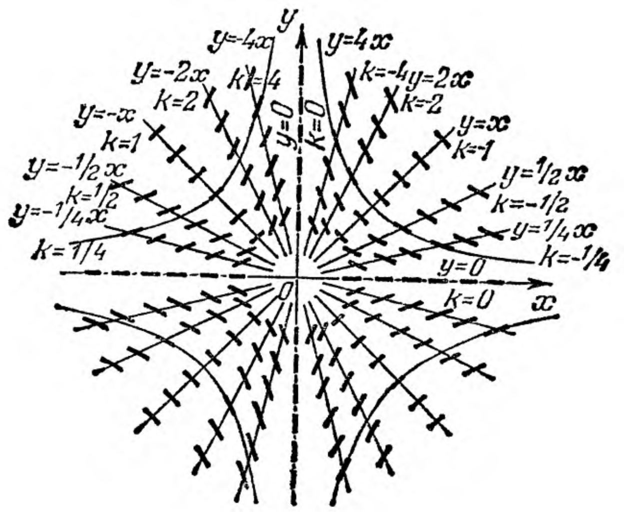
(8) differentsial tenglama uchun $\frac{dy}{dx} = C = Const$ tenglikni qanoatlantiradigan nuqtalarning geometrik o‘rni bu differentsial tenglamaning *izoklinasi* deyiladi.

C ning har xil qiymatlarida har xil izoklinalar hosil bo‘ladi. C ning qiymatiga mos keluvchi izoklina tenglamasi $f(x, y) = C$ bo‘ladi.

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

differentsial tenglama izoklinasining tenglamasi $-\frac{y}{x} = C$ yoki $y = -Cx$. Bu to‘g‘ri chiziqlar oilasidir (3-rasmga qarang).



3-rasm

2-§. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar.

2.1. Umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli differentsial tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{1}$$

Ko‘pincha uni y ga nisbatan yechib olib,

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

ko‘rinishga keltirib olish mumkin.

(2) ko‘rinishdagi tenglamalar yechimlari uchun mavjudlik va yagonalik shartlarini beruvchi quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar (2) tenglamaning o‘ng tomonidagi $f(x, y)$ funk tsiya biror (x_0, y_0) nuqtani o‘z ichiga oluvchi D sohada uzluksiz va y bo‘yicha uzluksiz differentsiallanuvchi bo‘lsa, u holda (2) tenglamaning $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud.

Geometrik nuqtai-nazardan teorema grafigi berilgan (x_0, y_0) nuqtadan o‘tuvchi yagona $y = \varphi(x)$ funktsiya mavjudligini bildiradi.

Bu teoremadan differentsial tenglamaning yechimlari cheksiz ko‘p bo‘lishligi kelib chiqadi, chunki D sohada har xil (x_0, y_0) nuqtalar olsak, ulardan o‘tuvchi mos yechimlar har xil bo‘ladi.

$y(x_0) = y_0$ shart boshlang‘ich shart, deyiladi. Uni quyidagi

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

ko‘rinishda ham yoziladi.

1-ta’rif. 1-tartibli differentsial tenglamaning umumiy yechimi deb shunday

$$y = \varphi(x, C) \tag{3}$$

funktsiyaga aytamizki, u: a) har qanday o‘zgarmas C son uchun differentsial tenglamani qanoatlantiradi; b) boshlang‘ich $y(x_0)=y_0$ shart qanday bo‘lmasin, shunday $C=C_0$ qiymat topiladiki, $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiya boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi.

Qo‘yilgan masalaning yechimi oshkormas

$$\Phi(x,y,C)=0 \tag{4}$$

ko‘rinishda aniqlanishi mumkin. Agar (4) ni y ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, bu ishni bajarib, umumiy yechimni topamiz. Agar buni imkoni bo‘lmasa, yechim oshkormas (4) ko‘rinishda qoladi. Bu holda (4) ni differentsial tenglamaning umumiy integrali, deb ataymiz.

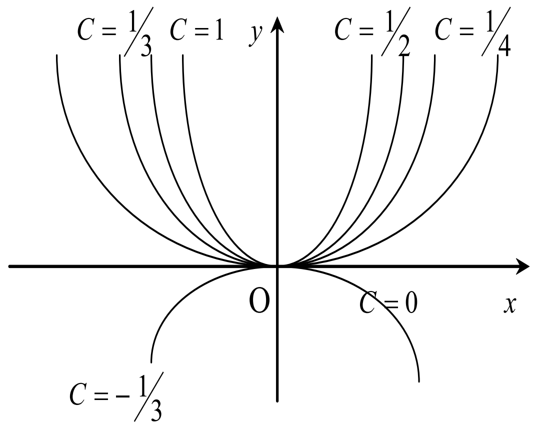
2-ta’rif. Differentsial tenglamaning umumiy (3) yechimida o‘zgarmas C songa biror $C=C_0$ qiymat bersak, hosil bo‘lgan $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiya differentsial tenglamaning xususiy yechimi, deb ataladi. Xuddi shunday $\Phi(x,y,C_0)=0$ funktsiya tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

1-m i s o l. Quyidagi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$$

differentsial tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2$ bo‘lsa, uning $y(1)=1$ boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish uchun $x_0=1, y_0=1$ qiymatlarni umumiy yechim tenglamasiga qo‘ysak, $1=C1^2$, ya’ni $C=1$ bo‘ladi. Demak, berilgan differentsial tenglamaning xususiy yechimi $y=x^2$ bo‘ladi.

Agar umumiy integrallarning koordinatalar tekisligidagi grafiklarini ko‘rsak, ular o‘zgarmas C songa bog‘liq bo‘lgan egri chiziqlar oilasini beradi. Bu egri chiziqlar differentsial tenglamaning integral chiziqlari, deb ataladi. Xususiy yechimga bu oilaning tekislikning biror nuqtasidan o‘tuvchi bitta egri chizig‘i mos keladi.



4-rasm.

Oxirgi ko‘rilgan misolda umumiy $y=Cx^2$ yechim parabolalar oilasini ifodalasa, topilgan xususiy yechim $M_0(1,1)$ nuqtadan o‘tuvchi parabolani ifodalaydi. 4-rasmda bu oilaning $C=1$, $C=1/2$, $C=1/3$, $C=1/4$ va $C=-1/3$ qiymatlarga mos keluvchi a‘zolari ko‘rsatilgan.

Qilayotgan mulohazalarimiz geometrik nuqtai-nazardan tushunarli bo‘lishi uchun tenglamaning yechimi, deb faqat $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiyani o‘zini emas, balki uning grafigi bo‘lmish integral egri chiziqni ham tushunamiz. Masalan, tenglamaning yechimi (x_0,y_0) nuqtadan o‘tadi, deymiz.

Demak, differentsial tenglamani yechish yoki uni integrallash deganda:

a) uning umumiy yechimi yoki umumiy integralini (agar boshlang‘ich shartlar berilmagan bo‘lsa) yoki

b) uning xususiy yechimini (agar boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsa) topishni tushunar ekanmiz.

2.2. O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraluvchi differentsial tenglamalar. Quyidagi

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \tag{5}$$

ko‘rinishga keltirilgan differentsial tenglamalar o‘zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglamalar, deb ataladi.

Uning umumiy integrali (5) ni bevosita integrallab topiladi:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$$

5 - m i s o l. O‘zgaruvchilari ajralgan

$$xdx+ydy=0$$

differentsial tenglamaning ikkala tomonini integrallasak:

$$\int xdx+\int ydy=C,$$

uning

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C$$

umumiy integralini topamiz. Oxirgi tenglik ma‘noga ega bo‘lishi uchun $C>0$ bo‘lishi shart. Shu sababli, agar uni

$$x^2+y^2=2C$$

ko‘rinishda yozib olsak, tenglamaning umumiy yechimi markazi koordinatalar boshida, radiusi $\sqrt{2C}$ bo‘lgan kontsentrik aylanalar ekanligi kelib chiqadi.

Eng sodda o‘zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglamalar quyidagi

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \quad \text{yoki} \quad dy=f(x)dx$$

ko‘rinishdagi tenglamalardir. Uning umumiy yechimi

$$y=\int f(x)dx+C$$

bo‘ladi.

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi yoki

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \qquad (7)$$

ko‘rinishga keltirilgan har qanday differentsial tenglama o‘zgaruvchilari ajraluvchi differentsial tenglamalar, deb ataladi.

Agar tenglama (6) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uni avval

$$\frac{1}{f_2(y)}dy=f_1(x)dx$$

ko‘rinishga keltirib olib, keyin yuqoridagidek bevosita integrallab, uning umumiy integrali topiladi:

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy=\int f_1(x)dx+C.$$

2-m i s o l. Kimyoviy reaktsiya tenglamasi (§1.1, 4-misolni qarang)

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x) \quad \text{yoki} \quad \frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

o‘zgaruvchilari ajraluvchi tenglama. Masalan, chap tomondagi tenglamani quyidagicha yechamiz:

$$\frac{dx}{x-a}=-kdt.$$

Endi oxirgi tenglikni integrallab yuborsak

$$\int\frac{dx}{x-a}=-k\int dt.$$

yoki

$$\ln|x-a|=-kt+\ln C.$$

Bundan

$$x=a+Ce^{-kt}$$

hosil bo‘ladi.

Agar tenglama (7) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, (7) ning ikkala tarafini $N_1(y)M_2(x)$ ifodaga bo‘lib yuborsak, u o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

tenglama ko‘rinishiga keladi.

3 - m i s o l. Ushbu

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

tenglamaning umumiy yechimini topaylik.

Tenglikning ikkala tarafini $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$ ifodaga bo‘lib yuborib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C$$

umumiy integralni topamiz. Agar bu tenglikda sinuslarga o‘tsak

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

kelib chiqadi.

2.3. Bir jinsli tenglamalar.

Ta’rif. Agar $f(x,y)$ funktsiya x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan 0-darajali bir jinsli funktsiya bo‘lsa (13-bob, 9-§ ga qarang), u holda 1-tartibli

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{8}$$

differentsial tenglama bir jinsli, deyiladi.

Oxirgi tenglamaning o‘ng tomonidagi $f(x,y)$ funktsiya 0-darajali bir jinsli funktsiya bo‘lgani uchun har qanday λ son uchun $f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y)$ bo‘ladi, xususan $\lambda = 1/x$ uchun

$$f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

ya’ni 0-darajali bir jinsli funktsiya erkli o‘zgaruvchilar nisbatiga bog‘liq bo‘ladi.

Shuni e‘tiborga olib (8) ni quyidagicha

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \qquad (8‘)$$

yozish mumkin.

Agar bu yerda $u = \frac{y}{x}$, ya’ni $y = ux$ desak, $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$ bo‘ladi. Bularni (8‘) ga olib borib qo‘ysak, u ga nisbatan differentsial tenglama hosil bo‘ladi:

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u).$$

Bu tenglamaning o‘zgaruvchilarini quyidagi tartibda ajratamiz:

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u \qquad \text{va} \qquad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Oxirgi tenglamani integrallagach:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

natijadagi u o‘rniga ${}^{y}\!/_{x}$ ni qo‘yib, berilgan differentsial tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

4 - m i s o l. Quyidagi

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$$

differentsial tenglamaning $y(1) = \pi/2$ boshlang‘ich shartni qanoat-lantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish . Berilgan tenglama bir jinsli (buni tekshirishni o‘quvchiga havola qilamiz), shu sababli unda $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$ almashtirish bajaramiz. Natijada

$$xdu + udx = (u + \sin u)dx; \qquad xdu = \sin u dx; \qquad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Agar oxirgi tenglikni integrallasak:

$$\ln\left|tg(u/2)\right| = \ln|x| + \ln C$$

yoki

$${}^{u}\!/_{2} = arctg(Cx)$$

kelib chiqadi. Agar bu yerda teskari almashtirish bajarsak, ya'ni u o'rniga y/x ni qo'ysak, umumiy yechim $y = 2x\,arctg(Cx)$ hosil bo'ladi. Agar berilgan boshlang'ich shartdan foydalansak: $\pi/2 = 2arctgC$ bo'ladi. Bundan $C=1$ ni topamiz. Demak, so'ralgan xususiy yechim

$$y = 2x\,arctgx$$

ekan.

Eslatma. Quyidagi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ko'rinishdagi tenglama bir jinsli bo'ladi, qachonki $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funktsiyalar birjinslik darajalari bir xil bo'lgan funktsiyalar bo'lsa, chunki birjinslik darajalari bir xil bo'lgan funktsiyalar nisbati 0-darajali birjinsli funktsiya bo'ladi (13-bob, 9-§ ga qarang).

5 - m i s o l . $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$, $(x^4 + 6x^2y^2 + y^2)dx + 4xy^3dy = 0$ tenglamalar bir jinsli differentsial tenglamalardir.

2.4. Bir jinslikka keltiriladigan differentsial tenglamalar. Agar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + by_1 + c_1} \tag{9}$$

ko'rinishdagi tenglamada $c = 0, c_1 = 0$ bo'lsa, bu tenglama bir jinsli bo'ladi, aks holda, ya'ni s va s_1 larning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, bu tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun

$$x = x_1 + h\ ,\quad y = y_1 + k$$

almashtirish bajaramiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$$

bo'lgani uchun, (9) bu almashtirish natijasida

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1} \tag{10}$$

ko'rinishga keladi. Agar h va k larni

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

sistemaning yechimlari qilib tanlasak, (10) quyidagi bir jinsli

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

tenglamaga keladi.

Agar (11) sistema yechimga ega bo‘lmasa, ya’ni $ab_1 = a_1 b$ bo‘lsa, u holda $a = \lambda a_1$ va $b = \lambda b_1$ deb, (9) ni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \qquad (12)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Bu tenglama

$$z = ax + by \qquad (13)$$

almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajraluvchi tenglamaga keladi. Haqiqatan,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}\ . \qquad (14)$$

(13) va (14) larni (12) ga qo‘ysak, o‘zgaruvchilari ajraluvchi

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1}$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Eslatma. Ixtiyoriy uzluksiz f funktsiya uchun

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

ko‘rinishdagi har qanday tenglama yuqoridagi usullar yordamida integrallanadi.

6 - m i s o l . $(2x+y+1)dx + (x+2y-1)dy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish . Buning uchun avval

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

sistemani yechib olamiz: $x = h = -1; y = k = 1$. Endi berilgan tenglamada $x = x_1 - 1; y = y_1 + 1$; $dx = dx_1; dy = dy_1$ almashtirish bajarsak, tenglama

$$(2x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 + 2y_1)dy_1 = 0$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglama $y_1 = ux_1; dy_1 = udx_1 + x_1du$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajraluvchi

$$2(u^2 + u + 1)x_1dx_1 + x_1^{\,2}(1+2u)du = 0$$

tenglamaga keltiriladi. Bu tenglamaning umumiy integrali

$$x_1\sqrt{u^2 + u + 1} = C\,.$$

Agar bu yerda $u = y_1/x_1$ deb, tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak:

$$y_1^{\,2}+x_1y_1+x_1^{\,2}=C^2$$
munosabat hosil bo‘ladi. Eski o‘zgaruvchilar x va y larga qaytish uchun oxirgi tenglikda $x_1=x+1; y_1=y-1$ deb, bir nechta elementar almashtirishlar bajarsak, berilgan tenglamaning umumiy integrali
$$x^2+y^2+xy+x-y+1=C^2$$
kelib chiqadi.

7 - m i s o l . $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish . Bu tenglama uchun (11) sistema yechimga ega emas. Shuning uchun $y+x=z; dy=dz-dx$ almashtirish bajaramiz. Natijada tenglama
$$(z+2)dx+(2z-1)(dz-dx)=0 \quad \text{yoki} \quad (3-z)dx+(2z-1)dz=0$$

ko‘rinishga keladi. O‘zgaruvchilarni ajratib integrallasak:
$$\int\frac{2z-1}{3-z}dz+\int dx=C \quad \text{yoki} \quad -2z-5\ln|z-3|+x=-C$$

hosil bo‘ladi. Endi oxirgi tenglikda $z=x+y$ deb eski o‘zgaruvchilarga o‘tsak, berilgan tenglamaning umumiy integrali kelib chiqadi:
$$x+2y+5|x+y-3|=C\,.$$

3-§. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

Ta’rif. Noma’lum funktsiyaga va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo‘lgan ushbu
$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$
ko‘rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama, deb ataladi, bu erda $P(x),Q(x)$ lar berilgan o‘zgarmas yoki x ning uzluksiz funktsiyalaridir.

Agar $Q(x)\equiv 0$ bo‘lsa, (1) ni bir jinsli[1] tenglama, aks holda bir jinsli bo‘lmagan tenglama deymiz. (1) ko‘rinishdagi tenglamalarni echishning ikki usuli bor.

---

[1] Bu yerda " bir jinsli " atamasi $y'+P(x)y$ ifoda y va y' larga nisbatan bir jinsli funktsiya bo’lgani uchun ishlatildi, shu sababli buni x va y ga nisbatan bir jinsli bo’lgan tenglama bilan chalkashtirish kerak emas.

3.1. Bernulli usuli. (1) ning yechimini

$$y = u(x)\vartheta(x) \qquad (2)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Buning uchun (2) ni differentsiallab, (1) ga olib borib qo‘yamiz:

$$u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx} + P(x)u\vartheta = Q(x)$$

yoki

$$u\left(\frac{d\vartheta}{dx} + P(x)\vartheta\right) + \vartheta\frac{du}{dx} = Q(x). \qquad (3)$$

Agar $\vartheta(x)$ funktsiyani

$$\frac{d\vartheta}{dx} + P(x)\vartheta = 0 \qquad (4)$$

bir jinsli tenglamaning echimi sifatida tanlasak, (3) quyidagi

$$\vartheta(x)\frac{du}{dx} = Q(x) \qquad (5)$$

ko‘rinishga keladi. Natijada noma’lum $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funktsiyalarni topish uchun tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vartheta}{dx} + P(x)\vartheta = 0 \\ &\vartheta\frac{du}{dx} = Q(x). \end{aligned}\right\}$$

(4) tenglama o‘zgaruvchilari ajraluvchi tenglama, shuning uchun

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -P(x)dx$$

bo‘ladi. Agar uni integrallasak:

$$-\ln|C_1| + \ln|\vartheta| = -\int P(x)dx$$

bo‘ladi. Bundan

$$\vartheta(x) = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

kelib chiqadi. Bu (4) ning umumiy yechimi, lekin bizga uning bitta xususiy yechimini bilish kifoya edi, shu sababli $\vartheta(x)$ funktsiya sifatida

$$\vartheta(x) = e^{-\int P(x)dx} \qquad (6)$$

ni olamiz. Ayonki, $\vartheta(x) \neq 0$. Endi (5) ni yechish mumkin, buning uchun (6) ni (5) ga qo‘yib, uning o‘zgaruvchilarini ajratsak:

$$du = \frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx$$

bo‘ladi. Buni integrallasak:

$$u=\int\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx+C$$

hosil bo‘ladi. Va nihoyat, topilgan $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funktsiyalarni (2) ga qo‘ysak, (1) ning umumiy yechimi kelib chiqadi:

$$y=\vartheta(x)\int\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx+C\vartheta(x).$$

Bu haqiqatan umumiy yechim, chunki har qanday $y(x_0)=y_0$ boshlang‘ich shart uchun S ni

$$y_0=\vartheta(x_0)\varphi(x_0)+C\vartheta(x_0)$$

tenglamadan topish mumkin, bu yerda $\varphi(x)=\int\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx$.

1 - m i s o l . O‘zgarmas R qarshilik va L induktivlik ketma-ket ulangan induktivlik zanjiridagi tokning o‘tish jarayonini boshlang‘ich tok I_0 va kuchlanish $U=f(t)$ bo‘lgan hol uchun ko‘raylik.

Yechish . Ma’lumki (§1.1, 5-misolga qarang), bunday zanjirdan tokning o‘tish tenglamasi

$$L\frac{dI}{dt}+RI=U \tag{7}$$

bo‘ladi. Buni qo‘yidagicha yozib olamiz:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{f(t)}{L}.$$

Bu I ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamadir.Bu yerdagi L/R kattalik masala shartiga ko‘ra o‘zgarmas, uni zanjirning vaqt doimiysi deyiladi.

Uning yechimini (2) ko‘rinishda qidiramiz. U holda noma’lum $u(t)$ va $\vartheta(t)$ funktsiyalarga nisbatan hosil bo‘ladigan sistema qo‘yidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{R}{L}\vartheta=0\\&\vartheta\frac{du}{dt}=\frac{f(t)}{L}.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasini yechamiz:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-\frac{R}{L}dt$$

yoki

$$\vartheta = e^{-\int \frac{R}{L}dt} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Buni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo‘yib, $u(t)$ ni topamiz:

$$du = \frac{1}{L} f(t) e^{Rt/L} dt$$

Oxirgi tenglikni integrallab yuborsak:

$$u(t) = \frac{1}{L}\int f(t) e^{Rt/L} dt + C$$

hosil bo‘ladi. U holda yechim

$$I = e^{-Rt/L}\left[C + \frac{1}{L}\int f(t) e^{Rt/L} dt\right]$$

bo‘ladi. Agar boshlang‘ich shartni qo‘llasak:

$$I_0 = C$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, masalaning yechimi

$$I = e^{-Rt/L}\left[I_0 + \frac{1}{L}\int f(t) e^{Rt/L} dt\right]$$

ekan.

3.2. Lagranj usuli. Bu usulning mohiyati shundaki, berilgan bir jinsli bo‘lmagan chiziqli (1) tenglamaning umumiy yechimi unga mos qo‘yilgan

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{8}$$

bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimidagi o‘zgarmas S_1 koeffitsientni o‘zgaruvchi deb faraz qilib topiladi, ya’ni

$$y = C_1(x) e^{-\int P(x)dx}$$

deb, uni (1) tenglamaga qo‘yiladi, natijada noma’lum $C_1(x)$ funktsiyaga nisbatan

$$C_1'(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bundan

$$C(x) = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C$$

kelib chiqadi, bu yerda S ixtiyoriy o‘zgarmas. U holda (1) ning umumiy yechimi

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$$

bo‘ladi.

Eslatma. Lagranj usulini "ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli", deb ham atashadi.

2 - m i s o l . $y'\cos^2 x + y = tgx$ tenglamaning umumiy yechimini Lagranj usuli bilan topaylik.

Yechish . Avval

$$y'\cos^2 x + y = 0$$

bir jinsli tenglamani yechib olamiz. Buning uchun uning o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0 .$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallab yuborsak:

$$\ln y + tgx = \ln C$$

yoki

$$y = Ce^{-tgx}$$

ni hosil qilamiz. Endi berilgan tenglamaning umumiy yechimini topish uchun

$$y = C(x)e^{-tgx} \tag{9}$$

deb olib, berilgan tenglamaga (9) ni va

$$y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\sec^2 x$$

olib borib qo'yamiz:

$$\cos^2 xC'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\sec^2 x\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx$$

yoki

$$C'(x)\cos^2 xe^{-tgx} = tgx .$$

Bundan

$$C(x) = \int \frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

kelib chiqadi. U holda berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

bo'ladi.

4-§. Bernulli tenglamasi.

Quyidagi y ga nisbatan chiziqli bo'lmagan

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1}$$

ko‘rinishdagi tenglama “Bernulli tenglamasi” deb ataladi, bu yerda $n \neq 0$ va $n \neq 1$ bo‘lgan ixtiyoriy haqiqiy son, chunki aks holda, tenglama avvalgi paragrafda ko‘rilgan chiziqli tenglamaning aynan o‘zi bo‘ladi. (1) ni chiziqli tenglamaga quyidagi usul bilan keltiriladi.

Tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo‘lib yuboramiz:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x).$$

Agar oxirgi tenglamada

$$z = y^{-n+1} \tag{2}$$

deb o‘zgaruvchini almashtirsak, u quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x)$$

ya’ni z ga nisbatan chiziqli tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimini avvalgi paragrafdagi ikki usulning biri bilan topib olib, undagi z ni y^{-n+1} ga almashtirsak, Bernulli tenglamasining umumiy integrali kelib chiqadi.

1 - m i s o l . $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$ tenglamani echaylik.

Yechish. Bu Bernulli tenglamasi, shuning uchun $z = y^{-1/3}$ deb o‘zgaruvchini almashtiramiz. U holda tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$z' - \frac{2}{3x}z = -x^2.$$

Buni masalan Lagranj usuli bilan yechaylik:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{3x}z = 0$$

yoki o‘zgaruvchilarini ajratsak:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2}{3}\frac{dx}{x}.$$

Bundan

$$z = C(x)x^{2/3}.$$

Bundan hosila olib, berilgan tenglamaga olib borib qo‘yamiz:

$$C'(x)x^{2/3} + \frac{2}{3}C(x)x^{-1/3} - \frac{2}{3}C(x)x^{-1/3} = -x^2$$

yoki

$$C'(x) = -x^{4/3}.$$

Buni integrallab yuborsak:

$$C(x) = -\frac{3}{7}x^{7/3} + C$$

hosil bo‘ladi. Demak,

$$z = -\frac{7}{3}x^3 + Cx^{2/3}$$

yoki

$$y^{-1/3} = -\frac{7}{3}x^3 + Cx^{2/3}$$

ekan. Bundan

$$y = \frac{1}{\left(-\frac{7}{3}x^3 + Cx^{2/3}\right)^3}$$

kelib chiqadi.

Eslatma. Bernulli tenglamasini o‘zgaruvchini (2) ko‘rinishda almashtirmasdan, bevosita Lagranj usulini qo‘llab yechsa ham bo‘ladi.

2 - m i s o l . $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$ tenglamani Lagranj usulida yechaylik.

Yechish. Avval $y' + \frac{y}{x} = 0$ tenglamani yechib olamiz. Uning umumiy yechimi $y = C/x$ bo‘ladi. Endi $y = C(x)/x$, $y' = C'(x)/x - C(x)/x^2$ larni berilgan tenglamaga qo‘ysak:

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{[C(x)]^4}{x^2}$$

tenglama hosil bo‘ladi. Unda o‘zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4} = \frac{dx}{x}.$$

Bu tenglamani integrallasak:

$$-\frac{1}{3[C(x)]^3} = \ln x - \ln C \qquad \text{yoki} \qquad C(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3\ln\left(C/x\right)}}$$

kelib chiqadi. Demak, umumiy yechim

$$y = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\left(C/x\right)}}$$

bo‘lar ekan.

5-§. To‘la differentsialli tenglamalar.

5.1. Ta’rif. Quyidagi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

differentsial tenglama "to‘la differentsialli" deyiladi, agar $M(x,y), N(x,y)$ lar

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

munosabatda bo‘lgan uzluksiz, differentsiallanuvchi funktsiyalar bo‘lsa.

(1) tenglamaning bunday atalishiga sabab, agar (2) tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda (1) ning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to‘la differentsiali bo‘ladi, va aksincha, agar (1) ning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to‘la differentsiali bo‘lsa, u holda (2) munosabat bajariladi. Haqiqatan, agar

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

bo‘lsa, u holda to‘la differentsialning Ta’rifiga ko‘ra

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ekanligidan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \qquad (3)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bularning birinchisini y bo‘yicha, ikkinchisini esa x bo‘yicha differentsiallasak:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

ga ega bo‘lamiz. Agar ikkinchi hosilalar uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, (2) tenglik (1) ning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to‘la differentsiali bo‘lishi uchun zaruriy shart ekan.

Endi faraz qilaylik, (2) tenglik o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

munosabatdan

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)$$

kelib chiqadi, bu erda x_0 - yechimning mavjudlik sohasidagi ixtiyoriy nuqtaning abtsissasi.

x bo‘yicha integrallaganda y ni o‘zgarmas deb faraz qilingani uchun, integrallash jarayonida hosil bo‘ladigan o‘zgarmasni y ning funktsiyasi, deb hisoblash mumkin.

Endi $\varphi(y)$ ni shunday tanlaymizki, natijada (3) ning ikkinchisi ham o‘rinli bo‘lsin. Buning uchun oxirgi tenglikni y bo‘yicha differentsiallaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

lekin (2) shartga ko‘ra

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N$$

yoki

$$N(x, y)\big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Demak,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

yoki

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C_1.$$

Va nihoyat,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C_1 \qquad (4)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, (2) shart bajarilsa, shunday $u(x, y)$ funktsiya mavjudki,

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

bo‘ladi. Shu sababli, (1) ni

$$du = 0$$

deyish mumkin. Bundan

$$u(x, y) = C$$

tenglik kelib chiqadi. U holda (4) ga asosan

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C, \tag{5}$$

ya'ni (1) ning umumiy integralini hosil qilamiz.

1 - m i s o l . $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu yerda $M(x,y)=x+y-1, N(x,y)=e^y+x$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$, ya'ni (2) shart bajarilyapti, demak, berilgan tenglama to'la differentsialli ekan.

Umumiy yechimni (5) formula bo'yicha topamiz:

$$\int_0^x (x+y-1)dx + \int_0^y e^y dy = C_1$$

yoki

$$\left[\frac{1}{2}x^2+xy-x\right]_0^x + e^y \Big|_0^y = C_1 .$$

Bundan

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y-1=C_1 \text{ yoki } e^y+\frac{1}{2}x^2+xy-x=C$$

ga ega bo'lamiz.

5.2. Agar (2) tenglik bajarilmasa, u holda (1) tenglama to'la differentsialli bo'lmaydi. Bunday tenglamalar uchun ayrim hollarda integrallovchi ko'paytuvchi, deb ataluvchi shunday $\mu(x,y)$ funktsiyani topish mumkinki, berilgan tenglamani shu funktsiyaga ko'paytirilganda, tenglama to'la differentsiallikka aylanadi.

Integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x,y)$ ni topish uchun berilgan tenglamani $\mu(x,y)$ ga ko'paytiramiz:

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0.$$

Ma'lumki, bu tenglama to'la differentsialli bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

yoki

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Tenglikning ikkala tomonini $\mu(x,y)$ ga bo‘lib yuborsak noma’lum $\mu(x,y)$ funktsiyaga nisbatan:

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \tag{6}$$

tenglamani hosil qilamiz. Buni umumiy holda yechish juda murakkab, shu sababli uni ayrim xususiy hollardagina hal qilamiz.

Masalan, (1) tenglama faqat y ning funktsiyasi bo‘lgan integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsin. U holda

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$$

bo‘ladi. Shu sababli, (6) tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Agar bu yerda

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

ifoda faqat y ga bog‘liq bo‘lsa, u holda

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M\,dy}$$

bo‘ladi.

Aynan shundek, agar

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$$

ifoda faqat x ga bog‘liq bo‘lsa, u holda integrallovchi ko‘paytuvchi

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)\Big/N\,dy}$$

ko‘rinishda topiladi.

2 - m i s o l . $ydx-\left(x+y^2\right)dy=0$ tenglamaning umumiy ildizini toping.

Yechish. Bu yerda $M = y, N = -\left(x + y^2\right), \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1,$ ya'ni $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, lekin $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = -\frac{2}{y}$. Shu sababli,

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Berilgan tenglamani shu integrallovchi ko'paytuvchiga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{y} dx - \left(\frac{x}{y^2} + 1 \right) dy = 0.$$

Natijada to'la differentsialli (buni tekshirishni o'quvchiga havola qilamiz) tenglama hosil qilamiz.

$x_0 = 1, y_0 = 1$ deb (5) formulani qo'llaymiz:

$$\int_1^x \frac{1}{y} dx - \int_1^y \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right) dy = C$$

yoki

$$\left. \frac{x}{y} \right|_1^x - \left. \left(-\frac{1}{y} + y \right) \right|_1^y = C.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$\frac{x}{y} - y = C$$

ekan.

6-§. Egri chiziqlar oilasining o'ramasi.

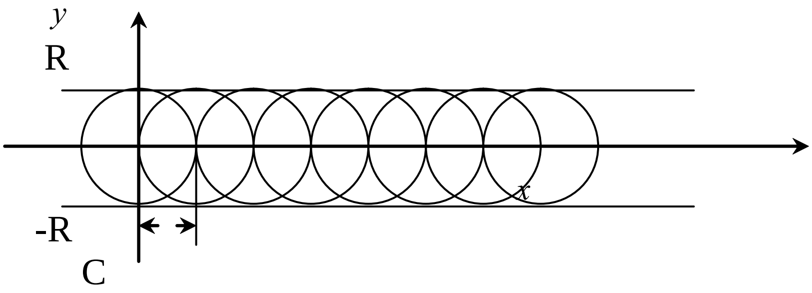
Quyidagi

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

tenglama Oxy dekart koordinatalar tekisligida S ning har bir qiymatida biror egri chiziqni ifodalaydi (3-bob, 1.1-§ qarang). S ning har xil qiymatlariga mos keluvchi egri chiziqlarni bir parametrli egri chiziqlar oilasi deb ataymiz. Demak, (1) tenglama bir parametrli egri chiziqlar oilasini aniqlar ekan.

Ta’rif. L chiziq bir parametrli egri chiziqlar oilasining o‘ramasi deyiladi, agar u o‘zining har bir nuqtasida oilaning biror chizig‘iga urinib o‘tsa va har xil nuqtalarida urinayotgan oilaning chiziqlari ham har xil bo‘lsa.

1-m i s o l . $(x-C)^2+y^2=R^2$ tenglama markazlari Ox o‘qida joylashgan R radiusli aylanalar oilasini beradi. Bu oilaning o‘ramalari $y=R$ va $y=-R$ to‘g‘ri chiziqlardir (5-rasmga qarang).



5-rasm.

Endi o‘ramani topish masalasini ko‘raylik. Faraz qilaylik, (1) egri chiziqlar oilasi berilgan bo‘lsin. Agar u tenglamasi $y=\varphi(x)$ bo‘lgan o‘ramaga ega bo‘lsa, bu yerda $\varphi(x)$-uzluksiz va differentsiallanuvchi funktsiya, u holda bu o‘ramaning har bir $M(x,y)$ nuqtasi (1) oilaning biror egri chizig‘iga tegishli bo‘ladi, bu egri chiziqqa S koeffitsientning M nuqtaning koordinatalari (x,y) ga bog‘liq bo‘lgan aniq bir qiymati mos keladi: $C=C(x,y)$. Demak, o‘ramaning barcha nuqtalari uchun

$$F(x,y,C(x,y))=0 \tag{2}$$

bo‘ladi, ya’ni (2) ni o‘ramaning oshkormas tenglamasi deb qarash mumkin. Faraz qilaylik, $C(x,y)$ koeffitsient x,y larning barcha qiymatlarida o‘zgarmas bo‘lmagan differentsiallanuvchi funktsiya bo‘lsin. O‘ramaning (2) tenglamasidan o‘ramaga uning $M(x,y)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmasining burchak koeffitsientini topaylik. (2) ni x bo‘yicha differentsiallaylik:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right)y'=0$$

yoki

$$F'_x+F'_y y'+F'_C\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0 \tag{3}$$

Ma’lumki, egri chiziqga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti uning tenglamasidan olingan hosilaning shu nuqtadagi qiymatiga teng. Agar oshkormas funktsiyadan olinadigan hosila formulasini eslasak:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

u holda (1) oilaning egri chizig‘iga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti

$$F'_x + F'_y y' = 0 \tag{4}$$

tenglikdan aniqlanadi. O‘ramaga o‘tkazilgan urimaning burchak koeffitsienti egri chiziq urinmasining burchak koeffitsientiga teng bo‘lgani uchun (3) va (4) larga asosan

$$F'_C\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}y'\right) = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. O‘ramada $C(x, y) \neq const$ bo‘lgani uchun

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}y' \neq 0,$$

shu sababli, o‘ramaning barcha nuqtalari uchun

$$F'_C(x, y, C) = 0 \tag{5}$$

bo‘ladi. Natijada o‘ramani topish uchun

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y, C) = 0 \\ F'_C(x, y, C) = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

sistemani hosil qildik. Lekin bu tenglamalarni (1) ning F'_x, F'_y xususiy hosilalarini nolga aylantiradigan statsionar nuqtalar deb ataluvchi nuqtalar koordinatalari ham qanoatlantiradi.

Haqiqatan, maxsus nuqtaning koordinatalarini (1) tarkibiga kiruvchi C parametr orqali ifodalash mumkin:

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \tag{7}$$

Agar bularni (1) ga olib borib qo‘ysak:

$$F(\lambda(C), \mu(C), C) = 0$$

ayniyatni hosil qilamiz. Uni C bo‘yicha differentsiallaylik:

$$F'_x \frac{d\lambda}{dC} + F'_y \frac{d\mu}{dC} + F'_C = 0.$$

x, y lar statsionar nuqtaning koordinatalari bo‘lgani uchun $F'_x = 0, F'_y = 0$ bo‘ladi, shu sababli yuqoridagi tenglikdan $F'_C = 0$ kelib chiqadi.

Demak, (6) ni yechganda, yechim o‘ramani yoki statsionar nuqtalarning geometrik o‘rnini bildirishini aniqlash uchun qo‘shimcha tekshirishlar o‘tkazish lozim ekan.

2-m i s o l. $(x-C)^2+y^2=R^2$ aylanalar oilasining o‘ramasini (6) sistema yordamida aniqlang.

Yechish. Oila tenglamasini S bo‘yicha differentsiallaylik:

$$2(x-C)=0.$$

U holda (6) sistema bu misol uchun quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned}(x-C)^2+y^2&=R^2,\\ 2(x-C)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadan S ni yo‘qotsak:

$$y^2-R^2=0 \quad \text{yoki} \quad y=\pm R$$

hosil bo‘ladi. Shu natijaga biz boshqa usul bilan kelgan edik. Ma’lumki, bu o‘rama edi. Bu yerda ham aylana statsionar nuqtalarga ega bo‘lmagani uchun $y=\pm R$ - o‘rama tenglamasi, degan xulosaga kelamiz.

3 - m i s o l . $y^3-(x-C)^2=0$ yarimkubik parabolalar oilasining o‘ramasini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani S parametr bo‘yicha differentsiallaymiz:

$$2(x-C)=0.$$

Bundan S ni topib, oila tenglamasiga qo‘ysak:

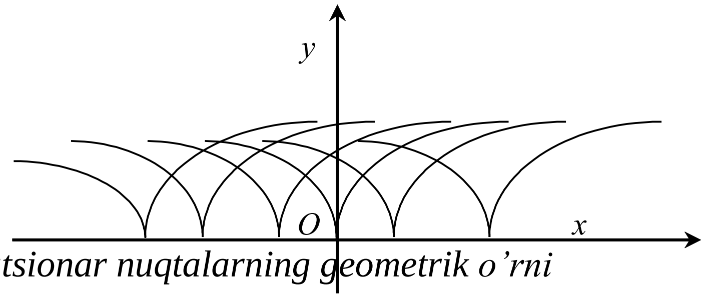
$$y=0$$

bo‘ladi. Bu Ox o‘qining tenglamasi. Uni o‘ramami yoki statsionar nuqtalarning geometrik o‘rnimi ekanligiga ishonch hosil qilish uchun berilgan oilaning statsionar nuqtalarini topaylik. Buning uchun berilgan tenglamani x va y bo‘yicha differentsiallaylik:

$$F_x'=-2(x-C)=0;$$

$$F_y'=3y^2=0.$$

Bundan $x=C$, $y=0$ ekanligi kelib chiqadi. S ga har xil qiymatlar bersak, statsionar nuqtalar Ox o‘qini to‘lg‘izadi, ya’ni Ox o‘qi statsionar nuqtalarning geometrik o‘rni ekan (6-rasmga qarang).



6-rasm

4 - m i s o l . $(y-C)^2-\frac{2}{3}(x-C)^3=0$ oilaning o‘ramasi va statsionar nuqtalarining geometrik o‘rnini toping.

Yechish. Tenglamani C bo‘yicha differentsiallaylik:

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}\cdot 3(x-C)^2=0$$

yoki

$$y-C=(x-C)^2. \qquad (8)$$

Buni berilgan tenglamaga qo‘ysak:

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0$$

yoki

$$(x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0$$

hosil bo‘ladi. Bundan C ning ikkita qiymatini topamiz: $C_1=x$, $C_2=x-2/3$.

Agar (8) ga birinchi qiymatni qo‘ysak:

$$y-x=(x-x)^2$$

yoki

$$y=x$$

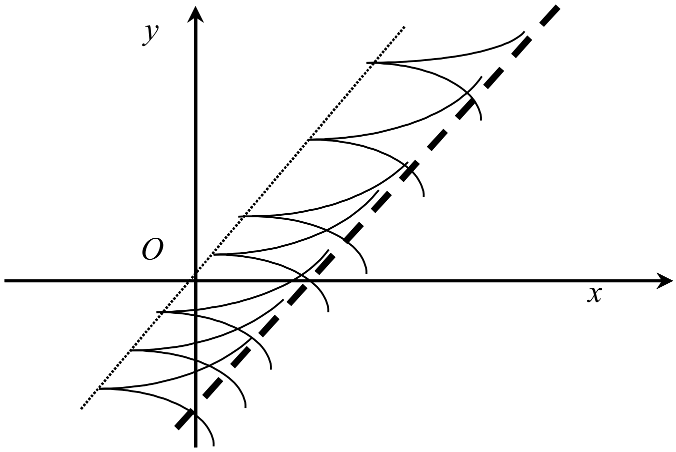
tenglamani hosil qilamiz. Agar (8) ga ikkinchi qiymatni qo‘ysak:

$$y-x+\frac{2}{3}-\left(x-x+\frac{2}{3}\right)^2=0$$

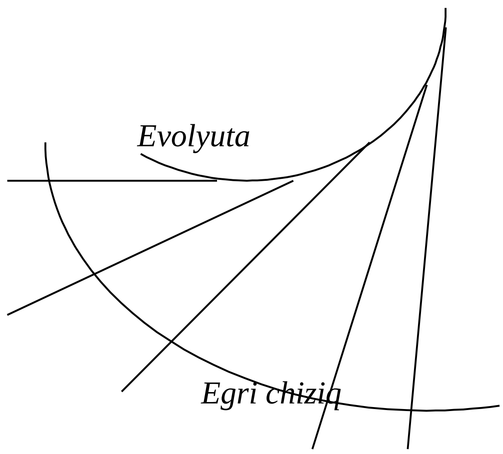
yoki

$$y=x-\frac{2}{9}$$

kelib chiqadi. Topilgan chiziqlarning birinchisi statsionar nuqtalarning gelmetrik o‘rnini, ikkinchisi esa o‘ramani beradi (7-rasmga qarang).



7-rasm



8-rasm

Eslatma. Berilgan egri chiziqning normallari oilasi evolyuta uchun urinmalar oilasi bo‘ladi. Demak, evolyuta berilgan egri chiziqning normallari oilasi uchun o‘rama vazifasini o‘tar ekan (8-rasmga qarang).

7-§. Birinchi tartibli differentsial tenglamalarning maxsus yechimlari.

Berilgan

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

differentsial tenglama

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

umumiy integralga ega bo‘lsin.

Faraz qilaylik, (2) umumiy integralga mos keluvchi umumiy egri chiziqlar oilasi o‘ramaga ega bo‘lsin. Bu o‘rama (1) differentsial tenglamaning integral egri chizig‘i bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan, o‘rama o‘zining har bir nuqtasida oilaning biror egri chizig‘iga urinadi, ya’ni u bilan umumiy urinmaga ega bo‘ladi. Demak, har bir umumiy nuqtada o‘rama va egri chiziq x, y, y' miqdorlarning bir xil qiymatlariga ega bo‘ladi. Lekin oilaning egri chizig‘i uchun x, y, y' sonlar (1) tenglamani qanoatlantiradi. Shu sababli, o‘ramaning har bir nuqtasini abtsissasi, ordinatasi va burchak koeffitsienti (1) tenglamani qanoatlantirishi shart. Bu - o‘rama integral chiziq, uning tenglamasi esa differentsial tenglamaning yechimi ekanligini bildiradi.

Lekin o‘z navbatida o‘rama, umuman aytganda, integral yechimlar oilaning vakili emas, shu sababli, u umumiy integraldan C ning biror xususiy qiymati orqali topilmaydi.

Ta’rif. Differentsial tenglamaning umumiy yechimidan C ning birorta ham qiymati orqali topib bo‘lmaydigan va grafigi umumiy yechimga kiruvchi integral egri chiziqlar oilasining o‘ramasi bo‘lgan yechimi differentsial tenglamaning "*maxsus yechimi*", deb ataladi.

Faraz qilaylik, (2) umumiy integral berilgan bo‘lsin. Undan va $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ tenglamadan C parametrni yo‘qotib, $\phi(x, y) = 0$ tenglamaga kelamiz. Agar bu funktsiya (1) ni qanoatlantirsa-yu, lekin (2) yechimlar oilasiga tegishli bo‘lmasa, u holda Ta’rifga ko‘ra, bu funktsiya maxsus integral bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, maxsus yechimni ifodalovchi egri chiziqning har bir nuqtasidan kamida ikkita integral egri chiziq o‘tadi, ya’ni maxsus yechimning har bir nuqtasida differentsial tenglamaning yechimini yagonaligi buzilyapti.

Shuning uchun yechimning yagonaligi buziladigan nuqtalar "maxsus nuqtalar" deb ataladi. Demak, maxsus yechim maxsus nuqtalardan iborat ekan.

M i s o l . $y^2\left(1 + y'^2\right) = R^2$ tenglamaning maxsus yechimlarini toping.

Yechish. Avval uning umumiy integralini topamiz. Buning uchun tenglamani hosilaga nisbatan yechib olamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

O‘zgaruvchilarini ajratsak:

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

Buni integrallasak:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

umumiy integral hosil bo‘ladi.Ma’lumki (6-§, 1-misolga qarang), bu oilaning o‘ramasi $y = \pm R$ to‘g‘ri chiziqlardir.

$y = \pm R$ funktsiyalar berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Demak, bu funktsiyalar maxsus yechimlar ekan.

8-§. Hosilaga nisbatan yechilmagan differentsial tenglamalar.

Birinchi tartibli quyidagi

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

differentsial tenglama berilgan bo‘lsin. Yuqorida bunday tenglamalar hosilaga nisbatan yechilgan hollar uchun ko‘rildi. Endi ko‘radigan holimizda $F(x, y, y')$ funktsiya y' ga nisbatan chiziqli bo‘lmasin deb faraz qilamiz. Bunday hollarda tenglama har doim ham y' ga nisbatan yechilavermaydi. Shunday bo‘lsada, biz bu paragrafda parametr kiritish yordamida hosilaga nisbatan yechiladigan tenglamaga keltiriladigan ayrim xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

8.1. n-darajali birinchi tartibli tenglamalar. Faraz qilaylik, differentsial tenglama quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$(y')^n + p_1 (y')^{n-1} + p_2 (y')^{n-2} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

bu yerda n -natural son, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ lar x va y larning funktsiyalari.

Agar bu tenglama y' ga nisbatan yechilsa, u holda y' uchun n ta har xil ifoda hosil bo‘ladi:

$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y),\ \ldots,\ y' = f_n(x, y). \tag{2}$$

Bu bilan berilgan tenglamani integrallash hosilaga nisbatan yechilgan n ta (2) tenglamalarga keltirildi.

Agar $\Phi_1(x, y, C_1) = 0,\ \Phi_2(x, y, C_2) = 0,\ \ldots,\ \Phi_n(x, y, C_n) = 0$ lar bu tenglamalarning umumiy integrallari bo‘lsa, u holda berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(x, y, C) = 0$$

ko‘rinishda bo‘ladi (buni tekshirishni o‘quvchiga topshiramiz). Umumiylikka ziyon yetkazmaslik maqsadida barcha $C_1, C_2 \ldots, C_n$ larni bitta C o‘zgarmas bilan almashtirdik.

1 - m i s o l . $(y')^2 - \frac{xy}{a^2} = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Agar tenglamaning chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratsak, tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\left(y' - \frac{\sqrt{xy}}{a}\right) \cdot \left(y' + \frac{\sqrt{xy}}{a}\right) = 0.$$

Bundan

$$y' - \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0 \quad \text{va} \quad y' + \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Ularning umumiy integrallari mos ravishda

$$\sqrt{y} - \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0 \quad \text{va} \quad \sqrt{y} + \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0$$

bo‘ladi (tekshiring!). U holda berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$\left(\sqrt{y} - C\right)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0$$

bo‘ladi.

8.2. y **ga nisbatan yechilgan va** x **qatnashmagan tenglamalar.**

Bizga

$$y = \varphi(y') \tag{3}$$

ko‘rinishdagi tenglama berilgan bo‘lsin.

Agar bu tenglamada $y' = p$ belgilash kiritsak, (3) quyidagi

$$y = \varphi(p) \tag{4}$$

ko‘rinishga keladi. Endi $y' = p$ tenglikni $dx = \frac{dy}{p}$ ko‘rinishda yozib olib integrallasak:

$$x = \int \frac{dy}{p} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p)dp}{p^2} + C \tag{5}$$

hosil bo‘ladi, oxirgi integralga bo‘laklab integrallash usuli qo‘llandi. (4) va (5) lardan tuzilgan tenglamalar sistemasi berilgan tenglamaning parmetrik ko‘rinishdagi umumiy yechimini bo‘ladi. Zaruriyatga qarab,

(4) va (5) lardan p ni yo‘qotib, bu yechimni $\Phi(x,y,C)=0$ ko‘rinishga keltirsa bo‘ladi.

2 - m i s o l . $y=(y')^2+2(y')^3$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'=p$ deb tenglamani $y=p^2+2p^3$ ko‘rinishga keltiramiz. Agar buni x ga nisbatan differentsiallasab, $y'=p$ ekanligini hisobga olsak:

$$y'=\left(2p+6p^2\right)\frac{dp}{dx} \quad \text{yoki} \quad p=\left(2p+6p^2\right)\frac{dp}{dx}$$

Bundan o‘z navbatida $dx=(2+6p)dp$, integrallagandan so‘ng esa $x=2p+3p^2+C$ hosil bo‘ladi. Shu sababli, umumiy yechim quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} x&=2p+3p^2+C,\\ y&=p^2+2p^3. \end{aligned}\right\}$$

8.3. x **ga nisbatan yechilgan va** y **qatnashmagan tenglamalar.**

Bu yerda

$$x=\varphi(y')$$

ko‘rinishdagi tenglama nazarda tutilyapdi. Bunda ham, xuddi yuqoridagidek $y'=p$ belgilash kiritamiz. U holda tenglama

$$x=\varphi(p) \tag{6}$$

ko‘rinishga keladi. Endi $y'=p$ tenglikni $dy=pdx$ ko‘rinishda yozib olib, integrallasak, bo‘laklab integrallash usulini qo‘llagandan so‘ng

$$y=\int pdx=px-\int xdp \quad \text{yoki} \quad y=p\varphi(p)-\int\varphi(p)dp+C$$

hosil bo‘ladi. Demak, umumiy yechim

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(p),\\ y&=p\varphi(p)-\int\varphi(p)dp+C \end{aligned}\right\}$$

parametrik ko‘rinishda bo‘lar ekan.

3 - m i s o l . $x=y'\sin y'$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Agar $y'=p$ desak, u holda $x=p\sin p$ bo‘ladi. Endi $dy=pdx$ tenglikni integrallasak:

$$y=\int pdx=px-\int xdp=px-\int p\sin pdp=px+p\cos p-\int\cos pdp=$$
$$=px+p\cos p-\sin p+C$$

kelib chiqadi. Demak, umumiy yechim

$$\left.\begin{aligned} x &= p\sin p, \\ y &= p^2\sin p + p\cos p - \sin p + C \end{aligned}\right\}$$

bo‘lar ekan.

8.4. Klero tenglamasi. y ga nisbatan yechilgan, x va y ga nisbatan chiziqli, lekin y' ga nisbatan yechilmagan quyidagi tenglama

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (7)$$

"Klero" tenglamasi, deb ataladi. Xuddi yuqoridagidek, bu yerda ham $y' = p$ deb qo‘shimcha parametr kiritamiz. U holda (7) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y = xp + \psi(p)\ . \qquad (7‘)$$

Agar oxirgi tenglikni x bo‘yicha differentsiallasak:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

yoki

$$\left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0$$

tenglikka kelamiz. Har bir ko‘paytuvchini nolga tenglaymiz:

$$\frac{dp}{dx} = 0\,, \qquad (8)$$

$$x + \psi'(p) = 0\,. \qquad (9)$$

Agar (8) ni integrallasak, $p = C$ hosil bo‘ladi, buni (7‘) ga qo‘yib, (7‘) ning umumiy yechimiga

$$y = xC + \psi(C) \qquad (10)$$

ega bo‘lamiz. Ma’lumki, bu to‘g‘ri chiziqlar oilasidir.

Agar (9) dan p parametrni x ning funktsiyasi sifatida aniqlab, (7‘) ga qo‘ysak, hosil bo‘ladigan:

$$y = xp(x) + \psi\left[p(x)\right] \qquad (11)$$

funktsiya (7) ning yechimi bo‘ladi (tekshiring!). Lekin (11) yechim (10) umumiy yechimdan S ning biror qiymatida ham kelib chiqmaydi. Shu sababli, bu yechim maxsus yechim bo‘lib, u quyidagi

$$\left.\begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x &+ \psi'(p) = 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemadan p ni yoki

$$\left.\begin{array}{l} y = xC + \psi(C), \\ x + \psi'(C) = 0 \end{array}\right\}$$

sistemadan S ni yo‘qotish yo‘li bilan hosil qilinadi. Demak, Klero tenglamasining maxsus yechimi (10) umumiy integrallar oilasining o‘ramasi, ya’ni boshqacha qilib aytganda, Klero tenglamasining umumiy yechimi maxsus yechimlariga o‘tkazilgan urinmalar oilasidan iborat bo‘lar ekan.

4 - m i s o l . $y = xy' - e^{y'}$ tenglamani integrallang.

Yechish. Bu tenglamada $y' = p$ deb, uni $y = px - e^p$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglikni differentsiallaylik:

$$dy = pdx + xdp - e^p dp$$

Lekin $dy = pdx$, shuning uchun oxirgi tenglik

$$xdp - e^p dp = 0$$

yoki

$$\left(x - e^p\right)dp = 0$$

ko‘rinishga keladi. Demak, yo $dp = 0$ yo $x = e^p$ bo‘lishi kerak. Agar $dp = 0$ bo‘lsa, u holda $p = C$ bo‘ladi. Buni $y = px - e^p$ ga qo‘ysak:

$$y = Cx - e^C$$

umumiy yechimni hosil qilamiz. Agar $x = e^p$ desak, berilgan tenglamaning maxsus yechimi

$$\left.\begin{array}{l} x = e^p, \\ y = (p-1)e^p \end{array}\right\}$$

sistemaning birinchi tenglamasidan p parametrni aniqlab (bu yyerda u $p = \ln x$ bo‘ladi), ikkinchisiga qo‘ysak, quyidagi

$$y = x(\ln x - 1)$$

ko‘rinishda aniqlanadi. Endi umumiy yechim aniqlagan to‘g‘ri chiziqlar maxsus yechimlarga o‘tkazilgan urinmalar oilasi bo‘lishligini ko‘rsatish qoldi.

Maxsus yechimni differentsiallaylik:

$$y' = \ln x.$$

Hosilaning geometrik ma‘nosidan, maxsus integral chiziqga uning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmasining tenglamasi

$$y - x_0(\ln x_0 - 1) = \ln x_0 (x - x_0)$$

bo‘lishligi kelib chiqadi. Agar buni ixchamlab, $\ln x_0 = C$ deb belgilasak:

$$y = Cx - e^C$$

tenglamani hosil qilamiz.

8.5. Lagranj tenglamasi. "Lagranj tenglamasi", deb quyidagi tenglamaga aytiladi:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \ , \tag{12}$$

bu yerda φ va ψ lar y' ning ma‘lum funktsiyalaridir. Tenglama x va y ga nisbatan chiziqli, avvalgi bo‘limda ko‘rilgan (7) "Klero" tenglamasi (12) ning $\varphi(y') \equiv y'$ bo‘lgandagi xususiy holi. Shu sababli, bu tenglama ham yuqorida ko‘rilgan tenglamalar kabi $y' = p$ parametr kiritish yordamida integrallanadi. U holda, (12) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{12‘}$$

Buni x bo‘yicha differentsiallasak:

$$p = \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p - \varphi(p) = \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} \tag{13}$$

ega bo‘lamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini topish maqsadida uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

va x ni p ning funktsiyasi sifatida qaraymiz. U holda hosil bo‘lgan tenglama x ga nisbatan chiziqli differentsial tenglama bo‘ladi.

Shu bobning 3-§ ida ko‘rilgan usullarning biri bilan uning

$$x = f(p, C)$$

yechimini topamiz. Bundan va (12‘) dan p parametrni yo‘qotsak, (12) ning

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

ko‘rinishdagi umumiy yechimini hosil qilamiz.

(12‘) ni p ning $p_0 - \varphi(p_0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday o‘zgarmas p_0 qiymati ham ayniyatga aylantiradi. (7) ning $p = p_0$ qiymatga mos keluvchi yechimi x ning chiziqli funktsiyasi bo‘ladi. Bu chiziqli funktsiyani topish uchun (12‘) dagi p parametr o‘rniga $p = p_0$ qiymatni qo‘yish kifoya:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0) \quad .$$

Agar bu yechim umumiy yechimdan o‘zgarmasning biror qiymatida hosil bo‘lmasa, u holda bu yechim maxsus yechim bo‘ladi.

5 - m i s o l . $y = xy'^2 + y'^2$ ko‘rinishdagi Lagranj tenglamasini integrallaylik. Buning uchun unda $y' = p$ almashtirish bajaramiz:

$$y = xp^2 + p^2 . \tag{14}$$

Agar (14) ni x bo‘yicha differentsiallasak:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p(1-p) = 2p(x+1)\frac{dp}{dx} \tag{15}$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olaylik:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2}{1-p} = \frac{2}{1-p} .$$

Buning umumiy yechimi

$$x = -1 + \frac{C}{(p-1)^2} \tag{16}$$

bo‘ladi (tekshiring!). Agar (14) va (16) dan p parametrni yo‘qotsak, umumiy yechim

$$y = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2$$

ko‘rinishga keladi.

(15) tenglikni p ning $p = 0$ va $p = 1$ qiymatlari ham qanoatlantiradi. Shu sababli, berilgan tenglamaning shu qiymatlarga mos keluvchi yechimlari

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2 = 0 \quad \text{va} \quad y = x + 1$$

bo‘ladi. Bulardan ikkinchisi maxsus yechim bo‘lmaydi, chunki u umumiy yechimdan S=0 qiymatda hosil bo‘ladi, shu sababli u xususiy yechim, $y = 0$ esa maxsus yechim, chunki u umumiy yechimdan S ning birorta ham qiymatida kelib chiqmaydi.

Eslatma. Odatda "Lagranj" tenglamasi deb, x va y ga nisbatan chiziqli bo‘lgan quyidagi

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0 \tag{18}$$

ko‘rinishdagi har qanday birinchi tartibli differentsial tenglamaga aytiladi. Lekin bu tenglama (12) ko‘rinishga uni $Q(y')$ ga bo‘lib keltirilishi mumkin, bunda

$$\varphi(y') = -\frac{P(y')}{Q(y')} \quad \text{va} \quad \psi(y') = -\frac{R(y')}{Q(y')}$$

bo‘ladi.

Biz bu paragrafda (18) tenglamaning eng sodda ko‘rinishidan boshlab, barcha xususiy hollarini ko‘rib chiqdik.

9-§. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.

9.1. Umumiy tushunchalar. Quyidagi

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

noma’lum funktsiyaning n-hosilasini o‘z ichiga olgan tenglamalar n-tartibli differentsial tenglamalar, deb ataladi. Ayrim hollarda, (1) yuqori tartibli hosilasiga nisbatan yechilgan bo‘lishi mumkin, ya’ni

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{1‘}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lishi mumkin.

Bu paragrafda biz (1‘) ko‘rinishdagi yoki shu ko‘rinishga keltiriladigan tenglamalarni ko‘ramiz. Bunday tenglamalar uchun quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar (1‘) tenglamada $f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$ funktsiya va uning $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo‘yicha olingan xususiy hosilalari $M_0(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)})$ nuqtani o‘z ichiga olgan qandaydir sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda tenglamaning

$$y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud.

(2) shartlar boshlang‘ich shartlar, deb ataladi.

Ta’rif. n-tartibli (1‘) differentsial tenglamaning umumiy yechimi deb, n ta C_1, C_2,...,C_n koeffitsientlarga bog‘liq bo‘lgan shunday

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \dots, C_n\right)$$

funktsiyaga aytamizki, u

1) C_1, C_2,...,C_n koeffitsientlarning har qanday qiymatlarida ham (1‘) ni qanoatlantiradi;

2) C_1, C_2,...,C_n koeffitsientlarning shunday qiymatlari mavjudki, bu qiymatlarda $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ (2) boshlang‘ich shartlarni ham qanoatlantiradi.

Oshkormas $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$ ko‘rinishda topilgan yechim (1‘) ning umumiy integrali, deb ataladi.

C_1, C_2,...,C_n koeffitsientlarning aniq qiymatlari uchun umumiy yechimdan hosil qilinadigan har qanday yechim xususiy yechim, deyiladi.

Xususiy yechimning grafigi differentsial tenglamaning integral chizig‘i, deb ataladi.

Demak, n-tartibli differentsial tenglamani yechish deganda, uning umumiy yechimini yoki boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topishni tushunar ekanmiz.

9.2. Eng sodda n-tartibli tenglamalar. Quyidagi

$$y^{(n)} = f(x) \tag{3}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar eng sodda differentsial tenglamalar, deb ataladi.

Agar $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ ekanligini e’tiborga olib (3) ni integrallasak:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

bo‘ladi, bu yerda x_0 x ning biror qiymati. Agar yana bir marotaba integrallasak:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1(x-x_0) + C_2$$

munosabatni hosil qilamiz. Va nihoyat, shu jarayonni n marotaba bajarsak (3) ning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x} f(x)dx\ldots dx + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_n .$$

Agar (2) ko‘rinishdagi boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsa, unga mos keluvchi xususiy yechimni topish uchun

$$C_n = y_0, C_{n-1} = y_0', \ldots, C_1 = y_0^{(n-1)}$$

deyish kifoya.

1- m i s o l . $y'' = xe^{-x}$ tenglamaning $y(0)=1, y'(0)=0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani ketma-ket integrallab, uning umumiy yechimini topamiz:

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int \left[-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2$$

yoki

$$y = (x+2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Agvr boshlang‘ich shartlardan foydalansak: $1 = 2 + C_2$; $C_2 = -1$; $0 = -1 + C_1$; $C_1 = 1$. Demak, xususiy yechim

$$y = (x+2)e^{-x} + x - 1$$

ekan.

9.3. y **ni bevosita o‘z ichiga olmagan tenglamalar.** Bu turga

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi differentsial tenglamalar kiradi.

Agar (4) da $y^{(k)} = z$ almashtirish bajarsak, uning tartibi k taga pasayadi, ya’ni

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$$

bo‘ladi.

2 - m i s o l . $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$; $y(2) = 1$; $y'(2) = -1$ masalaning yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada y bevosita qatnashmayapti, shu sababli $y' = z$ desak, tenglama quyidagi

$$z' - \frac{z}{x-1} = x(x-1)$$

chiziqli tenglamaga keladi. Buni masalan, Bernulli usuli bilan yechamiz, ya’ni yechimni $z = u\vartheta$ ko‘rinishda qidiramiz. U holda, u va ϑ larga nisbatan

$$\left.\begin{aligned} u' - \frac{u}{x-1} &= 0, \\ u\vartheta' &= x(x-1) \end{aligned}\right\}$$

sistema hosil bo‘ladi. Sistemaning birinchi tenglamasidan

$$u = x - 1$$

ni topib, ikkinchisiga qo‘ysak:

$$\vartheta = \frac{x^2}{2} + C_1$$

kelib chiqadi. U holda, $z = u\vartheta = C_1(x-1) + \frac{1}{2}x^2(x-1)$ bo‘ladi. Bu yerda $z = y'$ ekanligini eslab, yana bir marotaba integrallasak:

$$y = C_1(x-1)^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + C_2$$

hosil bo‘ladi. Bu yerdagi C_1 va C_2 o‘zgarmaslarni boshlang‘ich shartlardan foydalanib topamiz:

$$-1 = C_1 + \frac{1}{2}\cdot 2^2,$$

$$1 = C_1 \cdot 1^2 + \frac{1}{8}\cdot 2^4 - \frac{1}{6}\cdot 2^3 + C_2.$$

Bundan $C_1 = -3;$ $C_2 = \frac{20}{6}.$ Demak, qo‘yilgan masalaning echimi

$$y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3(x-1)^2 + \frac{20}{6}$$

bo‘lar ekan.

3 - m i s o l . Massasi m bo‘lgan biror jismning yuqoridan vertikal holatda erkin tushish masalasini ko‘raylik (1.1-§ dagi 1-misolga qarang). Agar jismga og‘irlik kuchidan tashqari uning tushish tezligi ϑ ning kvadratiga proportsional bo‘lgan havoning qarshilik kuchi ham ta’sir etsa, shu jismning tezligi qanday qonun bilan o‘zgarishini aniqlang.

Yechish. Xuddi 1.1-§ dagi 1-misolga o‘xshab mulahaza yuritib, Nyutonning 2-qonuniga ko‘ra quyidagi

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

differentsial tenglamani hosil qilamiz. Jismning erkin tushish masalasi ko‘rilayotgani uchun boshlang‘ich shartlar

$$s\Big|_{t=0} = 0, \quad \vartheta = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

bo‘ladi. $\frac{ds}{dt} = \vartheta,$ $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}$ bo‘lgani uchun tuzilgan differentsial tenglamani ϑ ga nisbatan birinchi tartibli

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g - \frac{k}{m}\vartheta^2$$

tenglamaga keltirsa bo‘ladi. Agar bu yerda $\frac{mg}{k}=a^2$ desak, unda o‘zgaruvchilarini quyidagicha

$$\frac{d\vartheta}{a^2-\vartheta^2}=\frac{k}{m}dt$$

ajratish mumkin. Endi oxirgi tenglikni integrallasak:

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+\vartheta}{a-\vartheta}=\frac{k}{m}t+C_1$$

ga ega bo‘lamiz. Agar bunga boshlang‘ich shartlarni qo‘llasak, $C_1=0$ chiqadi. Demak,

$$\ln\frac{a+\vartheta}{a-\vartheta}=\frac{2ak}{m}t$$

bo‘ladi. Bundan

$$\vartheta=a\frac{e^{2akt/m}-1}{e^{2akt/m}+1}=a\frac{e^{akt/m}-e^{-2akt/m}}{e^{akt/m}+e^{-akt/m}}=ath(akt/m).$$

Lekin $\frac{ak}{m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{k}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$ bo‘lgani uchun oxirgi tenglikni

$$\frac{ds}{dt}=ath\sqrt{\frac{kg}{m}}t$$

deb yozish mumkin. Bundan

$$s=\sqrt{\frac{m}{kg}}a\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2$$

hosil bo‘ladi. Boshlang‘ich shartning birinchisini qo‘llab $C_2=0$ ni topamiz.

Demak, ko‘rilayotgan jarayon qonuni

$$s=\frac{m}{k}thch\sqrt{\frac{kg}{m}}t$$

formula bilan ifodalanar ekan.

9.4. Erkli o‘zgaruvchini o‘z ichiga olmagan tenglamalar. Bizga

$$F\left(y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0$$

ko‘rinishdagi tenglama berilgan bo‘lsin. Bunday tenglamalarda $y'=z(y)$ almashtirish tenglama tartibini pasaytiradi. Bunda $y'',y''',\ldots$ hosilalar yangi o‘zgaruvchi z orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$y''=z\frac{dz}{dy},\ y'''=z\left[z\frac{d^2z}{dy^2}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right],\ldots.$$

Xususan, agar tenglama 2-tartibli bo‘lsa, u holda u almashtirish natijasida quyidagi 1-tartibli tenglamaga keladi:

$$F\left(y,z,z\frac{dz}{dy}\right)=0$$

4 - m i s o l . $1+y'^2=yy''$ tenglamani yeching.

Yechish. $y'=z(y),y''=z\frac{dz}{dy}$ almashtirish natijasida tenglama quyidagi tenglamaga keladi:

$$1+z^2=yz\frac{dz}{dy}.$$

Uning o‘zgaruvchilarini ajratib integrallaymiz:

$$\frac{zdz}{1+z^2}=\frac{dy}{y};\ \ln\left(1+z^2\right)=2\ln y+2\ln C_1;\ 1+z^2=C_1^2y^2;\ z=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}\,.$$

Endi y o‘zgaruvchiga qaytsak:

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1},\quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx,$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right)=\pm\left(x+C_2\right),$$

yoki

$$y=\frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1}+e^{\mp(x+C_2)C_1}\right)=\frac{1}{C_1}chC_1\left(x+C_2\right)=C_1^*ch\frac{x+C_2}{C_1^*}.$$

9.5. $y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$ **larga nisbatan bir jinsli bo‘lgan tenglamalar.** Bunday tenglamalarning tartibini $y'/y=z$ almashtirish orqali pasaytirish mumkin, bu yerda z - yangi noma’lum funktsiya.

5 - m i s o l . $3y'^2=4yy''+y^2$ differentsial tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning ikkala tarafini y^2 ga bo‘lib yuboramiz:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2-4\cdot\frac{y''}{y}=1.$$

Agar oxirgi tenglikda $y'/y=z$ desak, u holda bundan

$$\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}=z' \quad \text{yoki} \quad \frac{y''}{y}=z'+z^2$$

ega bo‘lamiz. Bularni tenglamaga olib borib qo‘ysak, natijada

$$3z^2-4z^2-4z'=1 \quad \text{yoki} \quad -4z'=1+z^2$$

differentsial tenglamaga kelamiz. Agar buning o‘zgaruvchilarini ajratib integrallasak:

$$arctgz=C_1-\frac{1}{4}x \quad \text{yoki} \quad z=tg\left(C_1-\frac{x}{4}\right)$$

hosil qilamiz. Endi teskari almashtirish bajaramiz:

$$\frac{y'}{y}=tg\left(C_1-\frac{x}{4}\right).$$

Buni integrallasak:

$$\ln y=4\ln\cos\left(C_1-\frac{x}{4}\right)+\ln C_2 \quad \text{yoki} \quad y=C_2\cdot\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right).$$

10-§. Yuqori tartibli chiziqli birjinsli tenglamalar.

10.1. Ta’riflar va umumiy xossalar.

1-ta’rif. n- tartibli differentsial tenglama chiziqli deyiladi, agar u noma’lum funktsiya y ga va uning barcha $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ hosilalariga nisbatan 1-darajali, ya’ni

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bu yerda $a_0, a_1, \ldots, a_n, f(x)$ lar x ning berilgan funktsiyalari yoki o‘zgarmaslar, bundan tashqari (1) tenglama qaralayotgan sohadagi barcha x lar uchun $a_0\neq 0$. Bundan buyon $a_0, a_1, \ldots, a_n$ va $f(x)$ funktsiyalarni x ning qaralayotgan sohadagi barcha qiymatlarida uzluksiz, deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmagan holda, $a_0\equiv 1$, deb faraz qilish mumkin, chunki aks holda, tenglamaning shunday ko‘rinishiga uni a_0 ga bo‘lib keltirsa bo‘ladi. $f(x)$ tenglamaning o‘ng qismi, deb ataladi.

Agar $f(x)\neq 0$ bo‘lsa, (1) ni birjinsli bo‘lmagan tenglama deb, agar $f(x)\equiv 0$ bo‘lsa, ya’ni tenglama

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, birjinsli tenglama, deb ataymiz. Bunday deb atalishiga sabab, (2) ning chap tarafi $y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ larning chiziqli birjinsli funktsiyasidir.

(1) tenglamani qanoatlantiradigan har qanday funktsiya uning yechimi, biror

$$y_{x=x_0}=y_0,\, y'_{x=x_0}=y'_0,\, \dots,\, y^{(n-1)}{}_{x=x_0}=y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini esa uning xususiy yechimi, deb ataymiz. (3) shartlar (1) tenglamaning boshlang‘ich shartlari,deb ataladi.

Chiziqli birjinsli tenglamaning bitta y_1 yechimini bilgan holda $y=y_1\cdot\int zdx$ almashtirish orqali uning va demak, unga mos keluvchi birjinsli bo‘lmagan tenglamaning ham tartibini bittaga pasaytirish mumkin. z ga nisbatan hosil bo‘lgan (n-1)-tartibli tenglama yana chiziqli bo‘ladi.

1 - m i s o l . $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=x$ tenglama va unga mos keluvchi birjinsli tenglamaning $y_1=\ln x$ xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa, uning tartibini pasaytiring.

Yechish. $y=\ln x\cdot\int zdx$ almashtirish bajaramiz. Buni differentsiallab:

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\int zdx+z\cdot\ln x,\quad y''=-\frac{1}{x^2}\cdot\int zdx+\frac{2z}{x}+z'\ln x,$$

$$y'''=\frac{2}{x^3}\cdot\int zdx-\frac{3z}{x^2}+\frac{3z'}{x}+z''\ln x,$$

keyin berilgan tenglamaga olib borib qo‘yamiz. Natijada bir nechta soddalashtirishlardan so‘ng quyidagi:

$$z''\ln x+\frac{2\ln x+3}{x}\cdot z'+\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\right)z=x$$

tenglamaga kelamiz.

2 - m i s o l . $y_1=\frac{\sin x}{x}$ xususiy yechimi ma’lum bo‘lgan

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

differentsial tenglamani integrallang.

Yechish. Agar $y=\frac{\sin x}{x}\cdot\int zdx$ almashtirish bajarsak:

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\int zdx+\frac{\sin x}{x}\cdot z,$$

$$y''=\frac{\sin x}{x}\cdot z'+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^2}\cdot z-\frac{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}{x^3}\cdot\int zdx$$

bo‘ladi. Bularni tenglamaga qo‘ysak:

$$\sin x\cdot z'+2\cos x\cdot z=0$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bundan $z=\frac{C_1}{\sin^2 x}$ ni topamiz. Demak,

$$y=\frac{\sin x}{x}\cdot\int\frac{C_1dx}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{x}\left(C_2-C_1ctgx\right)=C_2\cdot\frac{\sin x}{x}-C_1\cdot\frac{\cos x}{x}.$$

10.2. Chiziqli bir jinsli tenglamalar.

1-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) ning xususiy yechimlari bo‘lsa, u holda y_1+y_2 ham (2) ning yechimi bo‘ladi.

Isboti. Agar y_1 va y_2 lar (2) ning xususiy yechimlari bo‘lsa, u holda

$$y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1=0 \qquad (3‘)$$

$$y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_2'+a_ny_2=0 \qquad (3'')$$

bo‘ladi. Endi y_1+y_2 ni (2) ga olib borib qo‘yib, (3‘),(3") ayniyatlarni inobatga olsak:

$$(y_1+y_2)^{(n)}+a_1(y_1+y_2)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(y_1+y_2)'+a_n(y_1+y_2)=$$
$$=(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1)+(y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_2'+a_ny_2)=0$$

bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

2-teorema. Agar y_1 (2) ning biror xususiy yechimi va C o‘zgarmas bo‘lsa, u holda Cy_1 ham (2) ning yechimi bo‘ladi.

Isboti. Cy_1 ni (2) ga qo‘yamiz:

$$(Cy_1)^{(n)}+a_1(Cy_1)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(Cy_1)'+a_n(Cy_1)=$$
$$=C(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1)=C\cdot 0=0,$$

ya’ni teorema isbot bo‘ldi.

2-ta’rif. Agar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $A_1,A_2,...,A_{n-1}$ sonlarni topish mumkin bo‘lsaki, $[a,b]$ oraliqning barcha x nuqtalarida

$$\varphi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\cdots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa,u holda $\varphi_n(x)$ funktsiya $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_{n-1}(x)$ funktsiyalar orqali chiziqli ifodalanadi, deymiz.

3-ta’rif. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funktsiyalar chiziqli erkli deymiz, agar ularning biri qolganlari orqali chiziqli ifodalanmasa, aks holda ular chiziqli bog‘liq, deyiladi.

Demak, agar $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funktsiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday C_1, C_2,..., C_n sonlar topiladiki

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)=0$$

bo‘ladi.

1 - m i s o l . $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=3e^x$ funktsiyalar chiziqli bog‘liq, chunki C_1=1, C_2=0, C_3=-1/3 lar uchun

$$C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3 3e^x=0.$$

2 - m i s o l . $y_1=1, y_2=x, y_3=x^2$ funktsiyalar chiziqli bog‘liq emas, chunki bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan hech qanday C_1, C_2, C_3 lar uchun

$$C_1\cdot 1+C_2\cdot x+C_3\cdot x^2$$

yig‘indi aynan nolga teng bo‘lmaydi.

3 - m i s o l . $y_1=e^{k_1x}, y_2=e^{k_2x}, \ldots, y_3=e^{k_nx}$ funktsiyalar har xil $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sonlar uchun chiziqli erkli.

Yechish. Teskarisini faraz qilaylik, u holda bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday C_1, C_2,..., C_n sonlar topiladiki

$$C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\cdots+C_ne^{k_nx}=0$$

bo‘ladi. Faraz qilaylik, $C_n\neq 0$ bo‘lsin. Tenglikning ikkala tarafini e^{k_1x} ga bo‘laylik:

$$C_1+C_2e^{(k_2-k_1)x}+\cdots+C_ne^{(k_n-k_1)x}=0. \qquad (4)$$

Agar (4) ni differentsiallasak:

$$C_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\cdots+C_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}=0$$

tenglikka kelamiz. Buni $e^{(k_2-k_1)x}$ ga bo‘lib keyin yana differentsiallasak:

$$C_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_3-k_2)x}+\cdots+C_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)e^{(k_n-k_2)x}=0$$

hosil bo‘ladi. Bu jarayonni n marotaba takrorlab, natijada

$$C_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)\ldots(k_n-k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x}=0$$

tenglikka kelamiz. Bu yerda farazimizga ko‘ra $C_n\neq 0$, shartga ko‘ra $k_n\neq k_1, k_n\neq k_2, \ldots, k_n\neq k_{n-1}$ va har qanday x uchun $e^{(k_n-k_1)x}\neq 0$. Ziddiyatga keldik. Demak, berilgan funktsiyalar haqiqatan ham chiziqli erkli ekan.

4 - m i s o l . $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ funktsiyalar $\beta\neq 0$ uchun $-\infty<x<\infty$ oraliqda chiziqli erkli.

Yechish. Haqiqatan, agar

$$C_1e^{\alpha x}\sin\beta x+C_2e^{\alpha x}\cos\beta x=0$$

tenglikni $e^{\alpha x}\neq 0$ ga bo‘lsak:

$$C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x=0$$

hosil bo‘ladi. Bu tenglik barcha x lar uchun, shu jumladan x=0 uchun ham o‘rinli bo‘lishi kerak. Agar x=0 desak, oxirgi tenglikdan $C_2=0$

ekanligi kelib chiqadi. U holda $C_1 \sin\beta x = 0$ bo‘lishi kerak. Lekin $\sin\beta x \equiv 0$ emas. Shu sababli, $C_1 = 0$.

3-ta’rif. Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar x ning biror (n-1)-marotaba differentsiallanuvchi funktsiyalari bo‘lsa, u holda quyidagi

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantni "Vronskiy determinanti", deb ataymiz.

3-teorema. Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar sistemasi $[a,b]$ oraliqda chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda bu funktsiyalarning Vronskiy determinanti shu oraliqda aynan nolga teng.

Isboti. Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar sistemasi $[a,b]$ oraliqda chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday S_1, S_2,..., S_{n-1} sonlar topiladiki

$$y_n = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}$$

bo‘ladi. Buni (n-1)-marotaba differentsiallaylik:

$$y_n^{(k)} = C_1 y_1^{(k)} + C_2 y_2^{(k)} + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^{(k)}, \quad k = 1,2,\ldots,n-1.$$

U holda

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1} \\ y_1^1 & y_2^{11} & \cdots & C_1 y_1^1 + C_2 y_2^1 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^1 \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y^{(n-1)} + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= C_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_1 \\ y_1^1 & y_2^1 & \cdots & y_1^1 \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_1^{(n-1)} \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_2 \\ y_1^1 & y_2^1 & \cdots & y_2^1 \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_2^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ C_{n-1} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_{n-1} \\ y_1^1 & \cdots & y_{n-1}^1 & y_{n-1}^1 \\ . & \cdots & . & . \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

chunki determinantlarning har birida ikkitadan bir xil ustun bo‘lgani uchun ularning har biri nolga teng. Teorema isbot bo‘ldi.

5 - m i s o l . $\sin x, \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$ va $\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ funktsiyalarning chiziqli bog‘liq ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Bu funktsiyalarning Vronskiy determinantini hisoblaymiz:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin x & -\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

chunki 1- va 2-satrlari o‘zaro proportsional.

6 - m i s o l . 4-misoldagi funktsiyalarning chiziqli erkliligini Vronskiy determinanti yordamida ko‘rsating.

Yechish. Avval bu funktsiyalarning Vronskiy determinantini hisoblab olaylik:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2).$$

Agar $k_1 \neq k_2, k_1 \neq k_3, k_2 \neq k_3$ bo‘lsa, $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ bo‘ladi. Demak, yuqoridagi teoremaga ko‘ra berilgan funktsiyalar chiziqli erkli ekan.

Funktsiyalar sistemasining chiziqli bog‘liqligini tekshirishning yana boshqa bir mezoni mavjud. Endi shu mezonni ko‘raylik.

Bizga $[a,b]$ oraliqda aniqlangan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar berilgan bo‘lsin. Ular uchun

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x)dx, (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

belgilashlar kiritamiz. Quyidagi

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \ldots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \ldots & (y_2, y_n) \\ . & . & \ldots & . \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \ldots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

determinant $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar sistemasining "Gram determinanti", deb ataladi.

4-teorema. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning Gram determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va etarlidir.

Bu teoremaning isbotini tushurib qoldiramiz.

7 - m i s o l . $y_1 = x, y_2 = 2x$ funktsiyalarning [0,1] oraliqda chiziqli bog‘liq ekanligini ko‘rsating.

Yechish. $(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$ $(y_1, y_2) = (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3};$

$(y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}$ bo‘lgani uchun

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, 4-teoremaga ko‘ra bu funktsiyalar chiziqli bog‘liq ekan.

5-teorema. Agar (2) chiziqli birjinsli tenglamaning y_1 va y_2 yechimlarini Vronskiy determinanti $[a,b]$ oraliqning biror $x = x_0$ nuqtasida noldan farqli bo‘lsa, u holda u $[a,b]$ oraliqning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Teoremaning isbotini 2-tartibli chiziqli tenglama uchun bajaramiz.

Isboti. Shartga ko‘ra y_1 va y_2 funktsiyalar (2) ning yechimlari, ya’ni

$$y_1^{11} + a_1 y_1^1 + a_2 y_1 = 0 \text{ va } y_2^{11} + a_1 y_2^1 + a_2 y_2 = 0.$$

Bu tengliklarning birinchisini y_2 ga va ikkinchisini y_1 ga ko‘paytirib, ikkinchisidan birinchisini ayiramiz:

$$\left(y_1 y_2'' - y_1'' y_2\right) + a_1\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0.$$

Ikkinchi qavsda turgan ayirma Ma’lumki y_1 va y_2 funktsiyalarning Vronskiy determinantidir, birinchi qavsda turgani esa shu determinantning hosilasidir. Shu sababli, oxirgi tenglikni

$$W' + a_1 W = 0 \tag{5}$$

deb yozish mumkin. Shu tenglamaning $W|_{x=x_0} = W_0 \neq 0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. Avval (5) ning umumiy yechimini topamiz. Buning uchun uning o‘zgaruvchilarini ajrataylik:

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx.$$

Bu tenglikni integrallaymiz:

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C$$

yoki

$$\ln\frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx.$$

Bundan

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (6)$$

Bu formula "Liuvill formulasi", deb ataladi.

Ayonki, agar $C = W_0$ bo‘lsa, (6) boshlang‘ich shartni ham qanoatlantiradi. Demak,

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}$$

funktsiya (5) ning so‘ralgan xususiy yechimi ekan. $W_0 \neq 0$ bo‘lgani uchun bu funktsiya x ning birorta ham qiymatida nolga aylanmaydi. Teorema isbot bo‘ldi.

Eslatma. Agar Vronskiy determinanti qandaydir $x = x_0$ nuqtada nolga teng bo‘lsa, u holda (6) formuladan ko‘rinib turibdiki, u berilgan oraliqda aynan nolga teng bo‘ladi.

6-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) chiziqli birjinsli tenglamaning $[a,b]$ oraliqda chiziqli erkli bo‘lgan yechimlari bo‘lsa, u holda ularning Vronskiy determinanti $[a,b]$ oraliqning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni berilgan yechimlarning Vronskiy determinanti $[a,b]$ oraliqning biror nuqtasida nolga aylansin. U holda 5-teoremaga ko‘ra u $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalarida nolga aylanadi, ya’ni

$$W = 0 \quad \text{yoki} \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $[a,b]$ oraliqda $y_1 \neq 0$ bo‘lsin. U holda oxirgi tenglikni y_1^2 ga bo‘lsak:

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \quad \text{yoki} \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$$

tenglikka kelamiz. Buni integrallasak:

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = const$$

hosil bo‘ladi, ya’ni y_1 va y_2 lar chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Bu esa teoremaning shartiga zid.

Agar $[a,b]$ oraliqning $x_1, x_2, ..., x_k$ nuqtalarida $y_1 = 0$ bo‘lsa, u (a, x_1) intervalda noldan farqli bo‘ladi. U holda yuqoridagi isbotimizga ko‘ra (a, x_1) intervalda

$$y_2 = \lambda y_1$$

bo‘ladi. y_1 va y_2 lar (2) ning yechimlari bo‘lgani uchun $y = y_2 - \lambda y_1$ funktsiya ham (2) ning yechimi bo‘ladi va u (a, x_1) intervalda aynan nolga teng.

Agar shu mulohazalarimizni $(x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$ oraliqlar uchun ham bajarib chiqsak, $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalarida $y \equiv 0$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu esa $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalarida y_1 va y_2 lar chiziqli bog‘liq ekanligini bildiradi. Yana ziddiyatga keldik. Demak, $[a,b]$ oraliqning birorta ham nuqtasida $W(y_1, y_2)$ nolga teng bo‘lishi mumkin emas.

7-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) ning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C_1 va C_2 o‘zgarmaslar uchun

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{7}$$

(2) ning umumiy yechimi bo‘ladi.

Isboti. (7) funktsiya (2) tenglamaning yechimi bo‘lishi 1- va 2-teoremalardan kelib chiqadi. U (2) ning umumiy yechimi bo‘lishi uchun har qanday $y_{x=x_0} = y_0, y'_{x=x_0} = y'_0$ boshlang‘ich shartlarda ham C_1 va C_2 o‘zgarmaslarning shunday qiymatlari mavjud mumkin bo‘lishi kerakki, bu qiymatlarda (7) xususiy yechim boshlang‘ich shartlarni ham qanoatlantirishi shart.

Boshlang‘ich shartlarni (7) ga qo‘yamiz:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bu sistema yagona yechimga ega, chunki uning asosiy determinanti chiziqli erkli y_1 va y_2 yechimlarning Vronskiy determinantining $x = x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng, 6-teoremaga ko‘ra esa u noldan farqli. Teorema isbot bo‘ldi.

8-teorema. Agar ikkinchi tartibli chiziqli birjinsli tenglamaning biror xususiy yechimi ma‘lum bo‘lsa, u holda uning umumiy yechimini topish funktsiyalarni integrallashga keltiriladi.

Isboti. Faraz qilaylik, y_1 $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ tenglamaning ma‘lum xususiy yechimi bo‘lsin. 7-teoremaga ko‘ra bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini bilish kifoya. Shuning uchun uning y_1 bilin chiziqli bog‘ liq bo‘lmagan boshqa y_2 yechimini topamiz.

Liuvill formulasiga ko‘ra

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = Ce^{-\int a_1 dx},$$

ya’ni y_2 ni topishga doir chiziqli tenglamaga ega bo‘ldik. Bu tenglikni y_1^2 ga bo‘lamiz:

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1 dx} \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1 dx}.$$

Bundan

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C'.$$

Xususiy yechim qidirilayotgani uchun C=1, C' =0 desak:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx \tag{9}$$

hosil bo‘ladi. Demak, umumiy yechim

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx$$

ekan

Eslatma. n-tartibli chiziqli birjinsli differentsial tenglamaning $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va chiziqli erkli n ta xususiy yechimlari shu tenglama yechimlarining fundamental yechimlar sistemasi, deb ataladi.

8 - m i s o l . $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ funktsiya berilgan tenglamaning yechimi (tekshirib ko‘ring!). Ikkinchi yechimini (9) formuladan foydalanib topamiz:

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \int \frac{e^{-2\int \frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}.$$

Shuning uchun umumiy yechim

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$$

bo‘ladi.

10.3. Birjinsli bo‘lmagan chiziqli differentsial tenglamalar. Bizga

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

differentsial tenglama berilgan bo‘lsin.

9-teorema. Birjinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimi uning biror y^* xususiy yechimi bilan unga mos keluvchi

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (2)$$

birjinsli tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimini yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi.

Isboti. $y=y^*+\bar{y}$ funktsiya (1) ning umumiy yechimi ekanligini ko‘rsatishdan avval uni (1) ning yechimi ekanligini ko‘rsataylik. Buning uchun uni (1) ga qo‘yamiz:

$$(y^*+\bar{y})^{(n)}+a_1(y^*+\bar{y})^{(n-1)}+\cdots+a_n(y^*+\bar{y})=f(x)$$

yoki

$$(\bar{y}^{(n)}+a_1\bar{y}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\bar{y}'+a_n\bar{y})+(y^{*(n)}+a_1y^{*(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{*\prime}+a_ny^*)=f(x).$$

$\bar{y}$ (2) ning yechimi bo‘lgani uchun birinchi qavs aynan nolga teng va y^* (1) ning yechimi bo‘lgani uchun ikkinchi qavs $f(x)$ ga teng. Demak, oxirgi tenglik ayniyat ekan.

Endi $y=y^*+\bar{y}$ funktsiya (1) ning umumiy yechimi ekanligini isbotlaylik.

Faraz qilaylik,

$$y_{x=x_0}=y_0,\; y'_{x=x_0}=y'_0,\ldots, y^{(n-1)}_{x=x_0}=y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsin.

Qilingan farazga ko‘ra $\bar{y}$ (2) ning umumiy yechim bo‘lgani uchun avvalgi bo‘limdagi 7-teoremaga ko‘ra uni

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu erda $y_1,y_2,\ldots,y_n$ lar (2) ning chiziqli erkli yechimlari, $C_1,C_2,\ldots,C_n$ lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar. U holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+y^*$$

bo‘ladi. Bu yechim (3) shartlarni ham qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun

$$C_1y_{10}+C_2y_{20}+\cdots+C_ny_{n0}+y_0^*=y_0,$$
$$C_1y'_{10}+C_2y'_{20}+\cdots+C_ny'_{n0}+y_0^{*\prime}=y'_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1y_{10}^{(n-1)}+C_2y_{20}^{(n-1)}+\cdots+C_ny_{n0}^{(n-1)}+y_0^{*(n-1)}=y_{n0}^{(n-1)}.$$

bo‘ladi. Bu tengliklarni quyidagi sistema ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \cdots + C_n y_{n0} = y_0 - y_0^*, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \cdots + C_n y_{n0}' = y_0' - y_0^{*'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \cdots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - y_0^{*(n-1)}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Bu sistemaning determinanti chiziqli erkli bo‘lgan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar Vronskiy determinantining $x = x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng. Shuning uchun u noldan farqli (avvalgi bo‘limning 6-teoremasiga qarang). Demak, (4) sistema yagona yechimga ega. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremadan ko‘rinadiki, agar birjinsli tenglamaning umumiy yechimi ma‘lum bo‘lsa, u holda birjinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimini topish uning biror xususiy yechimini topishga keltirilar ekan.

Berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimini bizga 3.2.-§ dan ma‘lum bo‘lgan o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli deb ataluvchi Lagranj usulini qo‘llab topsa ham bo‘ladi. Bu usul quyidagi tartibda qo‘llaniladi.

Faraz qilaylik, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (2) ning fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsin. U holda (1) ning umumiy yechimini

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \quad (5)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Buni (1) qo‘yamiz. Buning uchun avval uni differentsiallasak:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n' + C_1'(x)y_1 + \cdots + C_n'(x)y_n$$

hosil bo‘ladi. $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ larni shunday tanlaymizki, natijada $C_1'(x)y_1 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$ bo‘lsin. U holda

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n'$$

bo‘ladi. Buni yana differentsiallab, xuddi yuqoridagidek mulohaza qilsak:

$$C_1'(x)y_1' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0 \quad \text{va} \quad y' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \cdots + C_n(x)y_n''$$

bo‘ladi. Shu jarayonni to n-tartibli hosilasigacha davom ettirsak,

$$y^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)} + C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Bu hosilalarni (1) ga qo‘ysak:

$$C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)} + C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} +$$
$$+ a_1\left[C_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}\right] + \cdots + a_n\left[C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n\right] = f(x)$$

yoki

$$C_1(x)\left(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_ny_1\right)+\cdots+C_n(x)\left(y_n^{(n)}+a_1y_n^{(n-1)}+\cdots+a_ny_n\right)+$$
$$+C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)$$

tenglikka kelamiz. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar (2) ning yechimlari bo‘lgani uchun birinchi n ta qavs ichidagi ifodalar nolga teng bo‘ladi. Natijada $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ lar uchun quyidagi sistema hosil bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\cdots+C_n'(x)y_n=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\cdots+C_n'(x)y_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x). \end{array}\right\}$$

Bu sistemaning determinanti chiziqli erkli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalarning Vronskiy determinanti bo‘lgani uchun noldan farqli. Shu sababli, bu sistema yagona yechimga ega. Uni yechsak:

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\ C_2'(x)=\varphi_2(x),\ ¾,\ C_n'(x)=\varphi_n(x)$$

lar topiladi. Bularning har birini integrallasak:

$$C_1=\int\varphi_1(x)dx+\overline{C}_1,\ C_2=\int\varphi_2(x)dx+\overline{C}_2, ¾,\ C_n=\int\varphi_n(x)dx+\overline{C}_n$$

hosil bo‘ladi. Bu topilgan ifodalarni (5) ga $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ lar o‘rniga qo‘ysak, (1) ning umumiy yechimini topamiz.

9 - m i s o l . $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=\dfrac{ctgx}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Shu paragrafning 9.1.-bo‘limidagi 2-misolda

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

tenglamaning xususiy yechimlari topilgan edi: $y_1=\dfrac{\sin x}{x},\ y_2=\dfrac{\cos x}{x}$. Ular chiziqli erkli, chunki ularning Vronskiy determinanti

$$W(y_1, y_2)=-\frac{1}{x^2}\neq 0.$$

Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimini

$$y=C_1(x)\cdot\frac{\sin x}{x}+C_2(x)\cdot\frac{\cos x}{x} \tag{6}$$

ko‘rinishda qidiramiz. $C_1(x)$ va $C_2(x)$ koeffitsientlarni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)\cdot\frac{\sin x}{x}+C_2'(x)\cdot\frac{\cos x}{x}=0,\\ &C_1'(x)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C_2'(x)\cdot\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=\frac{ctgx}{x}. \end{aligned}\right\}$$

Bundan $C_1'(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$ va $C_2'(x)=\cos x$ yoki ularni integrallaga-nimizdan so‘ng:

$$C_1(x)=\ln\left|tg\left(x/2\right)\right|+\cos x+C_1,\ C_2(x)=-\sin x+C_2.$$

Bularni (6) ga qo‘ysak:

$$y=C_1\cdot\frac{\sin x}{x}+C_2\cdot\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\ln\left|tg\left(x/2\right)\right|.$$

10-teorema. Agar y_1^* va y_2^* lar mos ravishda

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f_1(x) \qquad (7)$$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f_2(x) \qquad (8)$$

tenglamalarning yechimlari bo‘lsa, u holda $y^*=y_1^*+y_2^*$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f_1(x)+f_2(x)$$

tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Isboti. Agar (7) va (8) larni hadma-had qo‘shsak:

$$(y_1^*+y_2^*)^{(n)}+a_1(y_1^*+y_2^*)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(y_1^*+y_2^*)'+a_n(y_1^*+y_2^*)=f_1(x)+f_2(x)$$

hosil bo‘ladi. Bundan $y^*=y_1^*+y_2^*$ (2) ning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

10 - m i s o l . $y''+4y=x+3e^x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. $y''+4y=x$ tenglamaning xususiy yechimi $y_1^*=\dfrac{1}{4}x$, $y''+4y=3e^x$ tenglamaning xususiy yechimi esa $y_2^*=\dfrac{3}{5}e^x$. Shu sababli, berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y^*=\frac{1}{4}x+\frac{3}{5}e^x$$

bo‘ladi.

11-§. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli birjinsli differentsial tenglamalar.

Bizga chiziqli birjinsli n-tartibli

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

differentsial tenglama berilgan bo‘lib, undagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffitsientlar o‘zgarmas bo‘lsin.

Avvalgi paragrafning 9.2.-bo‘limidagi 7-teoremaga ko‘ra, (1) ning umumiy yechimini topish uchun uning fundamental yechimlari sistemasini topish kifoya.

Bu xususiy yechimlarni quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$y = e^{kx}, \text{ bu yerda } k = const. \qquad (2)$$

U holda

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Bularni (1) ga qo‘yib ixchamlasak:

$$e^{kx}\left(k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n\right) = 0$$

tenglik hosil bo‘ladi. Ma’lumki, barcha x lar uchun $e^{kx} \neq 0$. Shu sababli,

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0 \qquad (3)$$

bo‘lishi shart. Hosil bo‘lgan (2) algebraik tenglamani (1) ning xarakteristik tenglamasi, deb ataymiz.

Biz bilamizki, har qanday n-darajali algebraik tenglama n ta ildizga ega. Bu ildizlar:

1) haqiqiy va har xil;
2) haqiqiy, lekin ularning orasida karralilari bor;
3) ularning ayrimlari kompleks bo‘lishi mumkin.

Bu hollarning har birini alohida-alohida ko‘rib chiqaylik.

1-hol. Barcha $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ildizlari haqiqiy va har xil.

Bularni (2) ga qo‘yib

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ ¾,\ y_n = e^{k_n x} \qquad (4)$$

xususiy yechimlarini hosil qilamiz. Ma’lumki (9.2.-bo‘limdagi 3-misolga qarang) bu funktsiyalar har xil $k_1, k_2, \ldots, k_n$ lar uchun chiziqli erkli. Shu sababli (4) funktsiyalar (1) ning fundamental yechimlari sistemasini tashkil etadi va shuning uchun (1) ning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$$

bo‘ladi.

1 - m i s o l . $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzib olamiz:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

Uning ildizlari: $k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3$. Bu ildizlar haqiqiy va har xil bo‘lgani uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

bo‘ladi.

2-hol. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ildizlar haqiqiy, lekin ularning ayrimlari karrali. Masalan, $k_1 = k_2 = \ldots = k_l = k$ bo‘lib, qolgan $n - l$ tasi har xil bo‘lsin. Bu holda $y_1 = e^{k_1 x}$ xususiy yechim k ning o‘rniga k_1 ni qo‘yib hosil qilinsa, qolgan $y_2 = e^{k_2 x}$, ¾, $y_l = e^{k_l x}$ lar unga aynan teng bo‘lgani uchun ularni alohida xususiy yechim deb qaralishi mumkin emas. Shu sababli, bunday xususiy yechimlar sifatida

$$y_2 = xe^{k_1 x}, \text{ ¾}, \; y_l = x^l e^{k_1 x}$$

funktsiyalar olinadi (ularni (1) ning yechimi ekanligini o‘rniga qo‘yib tekshirish mumkin, bu vazifani bajarishni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz). Bu funktsiyalar qolgan yechimlar bilan chiziqli erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun (1) ning umumiy yechimi

$$y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_l x^l\right) + C_{l+1} e^{k_{l+1} x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2 - m i s o l . $y''' + 2y'' + y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^3 + 2k + k = 0.$$

Buning ildizlari: $k_1 = k_2 = -1, k_3 = 0$. Ildizlardan biri karrali ekan. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3$$

bo‘ladi.

3-hol. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ildizlar orasida komplekslari bor. Ma’lumki (9-bob, 7-§, 1-teoremaga qarang), agar biror kompleks son algebraik tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda unga qo‘shma kompleks son ham shu tenglamaning ildizi bo‘ladi, shu sababli, qo‘shma $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$ kompleks ildizlarga

$$y_s = e^{(\alpha + i\beta)x}, \; y_{s+1} = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{5}$$

xususiy yechimlar mos keladi. Bular haqiqiy o‘zgaruvchining kompleks funktsiyalaridir.

Agar biror haqiqiy o‘zgaruvchining

$$y = u(x) + i\vartheta(x)$$

kompleks funktsiyasi (1) ni qanoatlantirsa, u holda $u(x)$ va $\vartheta(x)$ lar ham (1) ni qanoatlantiradi.

Shu sababli, agar biz (5) funktsiyalarni

$$y_s = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \text{ va } y_{s+1} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)$$

ko'rinishda yozib olsak, yuqoridagi mulohazaga ko'ra,

$$\tilde{y}_s = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \tilde{y}_{s+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (6)$$

funktsiyalar ham (1) ning xususiy yechimlari bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Bu yechimlar chiziqli erkli, chunki

$$\frac{\tilde{y}_s}{\tilde{y}_{s+1}} = ctg\beta x \neq const.$$

Shuning uchun qo'shma kompleks $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$ ildizlarga mos keluvchi xususiy yechimlar sifatida (5) ni emas, balki (6) yechimlarni olamiz.

Agar $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ ildiz l karrali ildiz bo'lsa, u holda $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ ham l karrali ildiz bo'ladi. Bu holda bunday ildizlarga mos keluvchi xususiy yechimlar sifatida xuddi 2-holdagidek

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funktsiyalar olinadi.

3 - m i s o l . $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + y' - 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 4k^2 + k - 2 = 0$$

yoki

$$(k-2)(k^2+1)^2 = 0$$

oddiy haqiqiy $k_1 = 2$ va ikkikarrali mavhum $k = \pm i$ ildizlarga ega. Shuning uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + xC_3)\cos x + (C_4 + xC_5)\sin x$$

bo'ladi.

12-§. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli birjinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar.

I. Bizga

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

differentsial tenglama berilgan bo‘lsin, bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ koef-fitsientlar o‘zgarmas va $f(x)$ x ning berilgan funktsiyasi.

10.3-bo‘limdagi 9-teoremaga ko‘ra (1) ning umumiy yechimi uning biror xususiy yechimini topishga keladi. Biz hozir $f(x)$ ning maxsus ko‘rinishlarida xususiy yechimni tanlash usuli, deb ataluvchi usul yordamida topish masalasini ko‘ramiz. $f(x)$ funktsiyaning bu usulni qo‘llab bo‘ladigan eng umumiy ko‘rinishi quyidagichadir:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right], \qquad (2)$$

bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ lar x ning mos ravishda n- va m-darajali ko‘phadlari, α,β lar esa o‘zgarmaslar.

Eslatish joizki, boshqa barcha hollarda (1) ning umumiy yechi- mini 9-§ da ko‘rilgan o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli yordamida aniqlash mumkin.

(2) ning bir necha xil xususiy ko‘rinishlarini ko‘raylik.

1-hol. Faraz qilaylik, $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ bo‘lsin. Bunda quyidagi uch holat yuz berishi mumkin:

a) α xarakteristik

$$h_n(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

tenglamaning ildizi emas.

Bu holda xususiy yechimni

$$y^* = \left(A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1}x^{n-1} + A_n x^n\right)e^{\alpha x} = \widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x} \qquad (3)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Buni (1) ga qo‘yib, $e^{\alpha x}$ ga qisqartirsak, u quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\widetilde{P}_n^{(n)} + \frac{h_n^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}\widetilde{P}_n^{(n-1)} + \frac{h_n^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}\widetilde{P}_n^{(n-2)} \dots + h_n'(\alpha)\widetilde{P}_n' + h_n(\alpha)\widetilde{P}_n = P_n(x). \qquad (4)$$

α xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmagani uchun $h_n(\alpha) \neq 0$, shuning uchun tenglikning o‘ng tomonida ham, chap tomonida ham n-darajali ko‘phadlar turibdi. x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsentlarni tenglasak, noma’lum $A_0, A_1, \dots, A_n$ koeffitsentlarni topish uchun n+1 ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

b) α xarakteristik tenglamaning oddiy (bir karrali) ildizi, ya’ni $h_n(\alpha) = 0$, lekin $h_n'(\alpha) \neq 0$. Bu holda xususiy yechimni (3) ko‘rinishda izlab bo‘lmaydi, chunki aks holda (4) dagi tenglikning chap tomonida n-1-darajali, o‘ng tomonida esa n-darajali ko‘phad bo‘lib qoladi, ya’ni

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ larning hech bir qiymatida (4) ayniyatga aylanmaydi. Shu sababli, xususiy yechimni

$$y^* = x\left(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} + A_n x^n\right)e^{\alpha x} = x\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

ko‘rinishda izlaymiz.

v) α xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi, ya’ni $h_n(\alpha) = 0$, $h_n^{(l)}(\alpha) = 0$, $l = 1,2,\ldots,s-1$, $h_n^{(s)}(\alpha) \neq 0$. Agar biz xususiy yechimni (3) ko‘rinishda qidirsak, u holda shuni hisobiga (4) quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\widetilde{P}_n^{(n)} + \frac{h_n^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}\widetilde{P}_n^{(n-1)} + \frac{h_n^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}\widetilde{P}_n^{(n-2)} \cdots + \frac{h_n^{(s)}(\alpha)}{s!}\widetilde{P}_n^{(s)} = P_n(x).$$

Bu tenglikning chap tomonida *n-s*-darajali ko‘phad, o‘ng tarafida esa *n*-darajali ko‘phad bo‘lib qolyapti. Shu sababli, buni oldini olish maqsadida xususiy yechimni (3) ko‘rinishda emas, balki quyidagi

$$y^* = x^s\left(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} + A_n x^n\right)e^{\alpha x} = x^s\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x},$$

ko‘rinishda izlaymiz, chunki differentsiallash jarayonida ozod haddan boshlab dastlabki *s* ta had yo‘qolib ketadi.

1-m i s o l . $y''-2y'-3y = e^{4x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}.$$

Berilgan tenglamaning o‘ng tarafidagi ko‘rsatkichli funktsiya darajasidagi 4 xarakteristik tenglamaning ildizi emas va uning oldida 0-darajali ko‘phad. Shuning uchun xususiy yechimni

$$y^* = Ae^{4x}$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu xususiy yechim uchun (4) tenglama quyidagicha bo‘ladi:

$$5Ae^{4x} = e^{4x}.$$

Bundan A=1/5. Demak, umumiy yechim

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$$

ekan.

2 - m i s o l . $y''-7y'+6y = (x-2)e^x$ tenglamaning umumiy yechimi-ni toping.

Yechish. Tenglamaning o‘ng tarafi $P_1(x)e^{1\cdot x}$ ko‘rinishga ega, darajadagi 1 xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi. Shu sababli, xususiy yechimni

$$y^* = x(A_0 + A_1x)e^x$$

ko‘rinishda izlaymiz. Buni differentsiallab, tenglamaga qo‘yib ixchamlagandan so‘ng quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left(-10A_1x-5A_0+2A_1\right)e^x=\left(x-2\right)e^x.$$

Agar x ning koeffitsientlarini va ozod hadni tenglasak:

$$-10A_1=1,\quad -5A_0+2A_1=-2.$$

Bundan $A_1=-1/10$, $A_0=9/25$. Demak, umumiy yechim

$$y=C_1e^{6x}+C_1e^x+x\left(\frac{9}{25}-\frac{1}{10}x\right)e^x$$

bo‘lar ekan.

3 - m i s o l . $y'''-y''=12x^2+6x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik $k^3-k^2=0$ tenglamaning ildizlari: $k_1=k_2=0, k_3=1$. Shuning uchun mos birjinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}=C_1+C_2x+C_3e^x$$

bo‘ladi. 0 xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo‘lgani uchun berilgan tenglamaning xususiy yechimini

$$y^*=x^2\left(A_0+A_1x+A_2x^2\right)=A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2$$

ko‘rinishda izlaymiz. Buni tenglamaga qo‘yib ixchamlasak:

$$-12A_2x^2+\left(24A_2-6A_1\right)x+\left(6A_1-2A_0\right)=12x^2+6x.$$

Bundan x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglab

$$\left.\begin{array}{l}-12A_2=12,\\ 24A_2-6A_1=6,\\ 6A_1-2A_0=0\end{array}\right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemaning yechimlari: $A_0=-15$, $A_1=-5, A_2=-1$. Demak,

$$y^*=-x^4-5x^3-15x^2.$$

U holda umumiy yechim

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$$

bo‘ladi.

2-hol. Tenglamaning o‘ng tarafi $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ lar x ning mos ravishda *n*- va *m*-darajali ko‘phadlari, α,β lar esa o‘zgarmaslar.

Bu hol 1-holga quyidagi usul bilan keltiriladi. Agar $\cos\beta x$ va $\sin\beta x$ larni Eyler formulasi bilan berilgan ifodalariga almashtirsak, o‘ng taraf quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-\beta x}}{2} + Q_m(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}-e^{i\beta x}}{2i}$$

yoki

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}P_n(x) + \frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2}P_n(x) - \frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha-\beta i)x}. \qquad (5)$$

Demak, bu holda xususiy yechim

$$y^* = x^s e^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$$

ko‘rinishda qidirilar ekan, bu yerda $k=\max(m,n), s$ -esa xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmish $\alpha \pm i\beta$ ning karrasi (agar $\alpha \pm i\beta$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa s=0 bo‘ladi).

4 - m i s o l . $y''+y'-2y = \cos x - 3\sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamaning ildizlari: $k_1 = 1, k_2 = -2$, shuning uchun mos birjinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Berilgan tenglamaning xususiy yechimini

$$y^* = A\cos x + B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz, chunki bu yerda $\alpha = 0, \beta = 1, \alpha + \beta i = i$ xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Buni tenglamaga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(B-3A)\cos x + (-3B-A)\sin x \equiv \cos x - 3\sin x.$$

Bundan

$$\left.\begin{aligned} B-3A &= 1,\\ 3B+A &= 3\end{aligned}\right\}.$$

Sistemani yechsak: $A=0, B=1$ bo‘ladi. Demak, umumiy yechim

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \sin x.$$

5 - m i s o l . $y''-4y'+8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama $k_1 = 2+2i, k_2 = 2-2i$ kompleks ildizlarga ega va $\alpha + \beta i = 2+2i$ xarakteristik tenglamaning ildizi, shu sababli birjinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1\cos 2x + iC_2\sin x)$$

bo‘lsa, berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y^* = xe^{2x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Buni tenglamaga qo‘yib ixchamlasak: $A=-1/4$, $B=-1/4$ kelib chiqadi. Demak, umumiy yechim

$$y = e^{2x}\left(C_1\cos 2x + iC_2\sin 2x\right) - \frac{1}{4}xe^{2x}\left(\cos 2x - \sin 2x\right)$$

bo‘ladi.

II. Eyler tenglamasi. O‘zgaruvchan koeffitsientli chiziqli

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x) \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar "Eyler tenglamasi" deb ataladi, bu yerda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffitsientlar o‘zgarmas va $f(x)$ x ning berilgan funktsiyasi.

Bu tipdagi tenglamalarda $ax+b=e^t$ almashtirish bajarilsa, natijada tenglama yangi o‘zgaruvchiga nisbatan o‘zgarmas koeffitsientli tenglamaga keltiriladi.

6 - m i s o l. $x^2y'' - xy' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini to- ping.

Yechish. Agar $x=e^t$ yoki $t=\ln x$, bundan $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}=e^{-t}$ desak,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t},\quad y'' = \frac{d}{dt}\left[\dot{y}e^{-t}\right]'_t \cdot e^{-t} = \left(\ddot{y}-\dot{y}\right)e^{-2t}$$

bo‘ladi. U holda berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right) - e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y} + y = 0 \quad \text{yoki} \quad \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = k_2 = 1$, shu sababli umumiy yechim

$$y = \left(C_1 + C_2 t\right)e^t \quad \text{yoki} \quad y = \left(C_1 + C_2\ln x\right)x$$

bo‘ladi.

7 - m i s o l . $(4x-1)^2y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Agar $4x-1=e^t$ desak, $dx = \dfrac{1}{4}e^t dt, \dfrac{dt}{dx} = 4e^{-t}$ bo‘ladi. Bundan

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 4e^{-t}\cdot\dot{y},\quad y'' = 16e^{-2t}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right).$$

U holda berilgan tenglama $2\ddot{y} - 3\dot{y} + y = 0$ ko‘rinishga keladi. Uni yechsak:

$$y = C_1e^t + C_2e^{t/2} \quad \text{yoki} \quad y = C_1(4x-1) + C_2\sqrt{4x-1}\,.$$

§13. Fur‘ye qatorlari.

Har qanday $i \neq j$ lar uchun

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0$$

shartni qanoatlantiruvchi $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ functsiyalar sistemasi $[a,b]$ oraliqda ortogonal functsiyalar sistemasi deyiladi.

Bunday sistemalarga trigonometrik functsiyalardan tarkib topgan

$$\{\cos kx;\ \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$$

sistema misol bo‘la oladi, chunki har qanday $i \neq j$ lar uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ix \cdot \sin jx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ix \cdot \cos jx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \cdot \sin jx\,dx = 0 .$$

Agar $[a,b]$ oraliqda aniqlangan $f(x)$ functsiya uchun

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \ , \qquad \textbf{(1)}$$

bu yerda $c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx,\ k = 1,2,3,\ldots$, munosabat o‘rinli bo‘lsa, (1) ni $f(x)$ functsiyaning Fur‘ye qatori deb ataymiz.

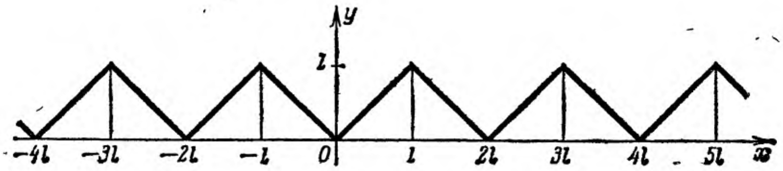
Agar davri 2π bo‘lgan $f(x)$ functsiya uchun

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (2)$$

yoyilma o‘rinli bo‘lsa, (2) tenglik $f(x)$ functsiyaning Fur‘ye qatori bo‘ladi. Bu yerda qator koeffitsiyentlari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$a_0 = \frac{1}{\pi};\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Misol: $[-\pi,\pi]$ oraliqda davriy bo‘lgan $f(x) = |x|$ functsiyani qaraylik.



9-rasm

Bu functsiyani Fur‘ye qatoriga yoyish uchun qator koeffitsiyentlarini

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right] = \pi$$

hisoblaymiz.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx+\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0, & agar\ k\ juft\ bo'lsa,\\ -\frac{4}{\pi k^2}, & agar\ k\ toq\ bo'lsa,\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin kx\,dx\right]=0.$$

Demak, Fur‘ye qatori quyidagi ko‘rinishda bo‘lar ekan:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}+\ldots\right].$$

Fur‘ye qatorlarni ikkinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan differentsial tenglamalarning yechimini topishda qo‘llash mumkin. Buning uchun faraz qilaylik, quyidagi differentsial tenglamaning:

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(0)=0, \qquad y(l)=0 \qquad (4)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak bo‘lsin.

Avval $f(x)$ functsiyani quyidagi Fur‘ye qatoriga yoyib olamiz:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}M_k\sin\frac{k\pi}{l}x\ ,$$

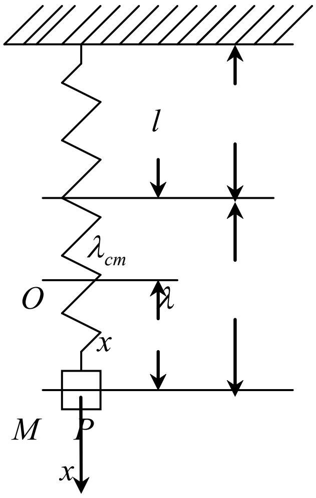
so‘ngra (3) tenglamaning hususiy yechimini quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Noma’lum a_n koeffitsientlarni aniqlash uchun y dan ketma-ket hosila olib (3) tenglamaga olib borib qo‘yamiz. So‘ngra, tenglikni *sinkx* ga ko‘paytirib $[0,l]$ oraliq bo‘ylab integrallaymiz. Natijada noma’lum a_k koeffitsiyentlar uchun quyidagi formula hosil bo‘ladi:

$$\left(a_2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)a_k=\frac{2}{l}M_k \text{ yoki } a_k=\frac{2}{l}\frac{M_k}{\left(a_2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)}.$$

14-§. Differentsial tenglamalarning fizik va mexanik masalalarga qo‘llanishi.



10-rasm.

1. Mexanik tebranishlar. 1-masala. Og‘irligi R bo‘lgan yuk uzunligi l bo‘lgan tinch holatdagi vertikal prujinaga osilgan. Natijada yuk biroz pastga tortilib, keyin prujinaning tarangligi hisobiga yana yuqoriga ko‘tariladi. Prujina massasini va havo qarshiligini hisobga olmay, yukning xarakat qonunini topish masalasini ko‘raylik.

Ox o‘qni yuk osilgan nuqtadan pastga vertikal yo‘nalishda olamiz. Koordinatalar boshi *O* ni yuk muvozanatda bo‘lgan holatda, ya’ni yukning og‘irligi prujinaning reaktsiya kuchi bilan muvozanatlashgan nuqtada olamiz (10-rasmga qarang).

Agar λ - prujinaning boshlang‘ich mo-mentdagi cho‘zilishi, λ_{st} esa statik cho‘zilish, ya’ni cho‘zilmagan prujinaning oxiridan muvozanat holatigacha bo‘lgan masofa, x yukning muvozanat holatidan chetlanishi bo‘lsa, u holda $\lambda=\lambda_{st}+x$ bo‘ladi.

Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra **F**=m**a**, bu yerda **F** - yukka qo‘yilgan kuchlarning teng ta’sir etuvchisi, m=R/g yuk massasi, **a** esa xarakat tezlanishi. Biz ko‘rayotgan masalada **F** kuch prujinaning taranglik kuchi va og‘irlik kuchlari yig‘indisidan iborat.

Guk qonuniga binoan prujinaning taranglik kuchi uning cho‘zi-lishiga proportsional, ya’ni $-s\lambda$ ga teng, bu yerda *s*-o‘zgarmas pro-portsionallik koeffitsienti, u prujinaning birkligi, deyiladi.

Shuning uchun xarakat tenglamasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\lambda + P$$

bo‘ladi.

Muvozanat holatida prujinaning taranglik kuchi og‘irlik kuchi bilan teng bo‘lgani uchun $P = c\lambda_{cm}$ bo‘ladi. Buni tenglamaga qo‘ysak, u

$$\frac{d^2x}{dt^2} + s^2x = 0$$

ko‘rinishga keladi, bu yerda $s^2 = c/m$ deb belgilandi va λ-λ_{st}= x ekanligi e‘tiborga olindi. Bu tenglama yukning "*erkin tebranish*" yoki "*garmonik ostsillyator*" tenglamasi, deb ataladi. Bu o‘zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli differentsial tenglama. Uning xarakteristik tenglamasi $k^2 + s^2 = 0$ mavhum $k_{1,2} = \pm is$ ildizlarga ega. Unga mos keluvchi umumiy yechim

$$x = C_1 \cos st + C_2 \sin st$$

bo‘ladi. Agar buni $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ga ko‘paytirib va bo‘lib,

$$\sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \;\; \cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

desak, u quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$x = A\sin(st + \alpha).$$

Demak, havo qarshiligi bo‘lmasa yuk muvozanat holati atrofida garmonik tebranar ekan. *A* kattalik tebranish amplitudasi, $st+\alpha$ tebranish fazasi, α esa boshlang‘ich fazasi, deyiladi. Tebranish chastotasi $s = \sqrt{c/m}$ prujinaning birkligi va yukning massasiga bog‘liq. $c = P/\lambda_{cm} = mg/\lambda_{cm}$ bo‘lgani uchun tebranish davri

$$T = 2\pi/s = 2\pi\sqrt{m/c} = 2\pi\sqrt{\lambda_{cm}/g}$$

bo‘ladi.

Endi faraz qilaylik, yukka xarakat tezligiga proportsional bo‘lgan havo qarshiligi ta’sir etsin. U holda yukka ta’sir etadigan kuchlar qatoriga havoning qarshilik kuchi $\boldsymbol{R} = -\mu\boldsymbol{v}$ qo‘shiladi, bu yerda manfiy ishoraning olinishiga sabab, ***R*** kuch qarshilik kuchi bo‘lgani uchun xarakat yo‘nalishiga teskari yo‘nalgan bo‘ladi.

Bu holat uchun xarakat tenglamasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}$$

bo‘ladi, bu yerda agar $c/m = s^2, \mu/m = 2n$ desak, u

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + s^2x = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishga keladi. Uning xarakteristik tenglamasi

$$k_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - s^2} \qquad (2)$$

ildizlarga ega.

Bu yerda uch hol ro‘y berishi mumkin. Agar muhit qarshiligi uncha katta bo‘lmasa, u holda $n^2 - s^2 < 0$ bo‘lib, ildizlar $k_{1,2} = -n \pm ik_1$ ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $k_1^2 = s^2 - n^2$ deb belgilandi. Shuning uchun tenglamaning yechimi

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t\right)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar yuqoridagidek almashtirishlar bajarsak, u quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha).$$

Bu yerda amplituda sifatida Ae^{-nt} miqdorni ko‘rishga to‘g‘ri kelyapti, u $t \to \infty$ da, nolga intiladi, ya’ni havo qarshiligi kam bo‘lsa, tebranish so‘nuvchan bo‘lar ekan. Shu sababli bunday tebranishni "so‘nuvchi tebranish", deb ataymiz. So‘nuvchi tebranish davri $T = 2\pi/k_1 = 2\pi\Big/\sqrt{s^2 - n^2}$ ga teng.

So‘nuvchi tebranishning amplitudasi maxraji $e^{-n\pi/k_1}$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Bu miqdor "so‘nish dekrementi", deb ataladi, uni biz D harfi bilan belgilaymiz. Dekrementning natural logarifmi $\ln D = -n\pi/k_1$ "so‘nishning logarifmik dekrementi", deyiladi.

Agar muhitning qarshiligi katta va shu sababli $n^2 - s^2 > 0$ bo‘lsa, u holda ildizlar $k_{1,2} = -n \pm h$ bo‘lib, bu yerda $h^2 = n^2 - s^2$, tenglamaning umumiy yechimi

$$x = C_1 e^{-(n+h)t} + C_2 e^{-(n-h)t}$$

yoki agar $n = h$ bo‘lsa,

$$x = e^{-nt}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu ikkala holda ham $t \to \infty$ da $x \to 0$ bo‘ladi, ya’ni tebranish so‘nuvchi bo‘lar ekan.

2 -masala. Uzunligi l bo‘lgan prujinaga og‘irligi R bo‘lgan yuk osilgan. Agar yukka xarakat tezligiga proportsional bo‘lgan muhit qarshiligidan tashqari qo‘zg‘atuvchi $Q \sin pt$ kuch ta’sir etsa, yukning xarakat qonunini topaylik.

Aynan yuqoridagidek mulohazalar bilan xarakat tenglamasini quyidagi ko‘rinishda hosil qilamiz:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt} + Q \sin pt$$

yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+s^2x=q\sin pt, \qquad (3)$$

bu yerda $s^2=c/m,\mu/m=2n$ va $q=Q/m$, va yuqoridagilardan farqli o‘laroq yukka ta’sir etayotgan qo‘zg‘atuvchi kuch ham e‘tiborga olindi. Bu jarayonda tebranma xarakat qo‘shimcha kuch ta’sirida ham sodir bo‘layotgani uchun bu xarakatni "*majburiy tebranma xarakat*", deb atashadi.

(3) o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli ikkinchi tartibli differentsial tenglamadir.

Avval yukka muhit qarshiligi ta’sir etayotgan holni ko‘raylik, bunda $n\neq 0$ bo‘ladi. Agar $n^2<s^2$ bo‘lsa, u holda xarakteristik tenglama kompleks $k_{1,2}=-n\pm ik_1$ ildizlarga ega bo‘ladi, bu yerda $k_1^2=s^2-n^2$. Shu sababli, mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{x}=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$$

bo‘ladi (1-masalaga qarang). (3) ning xususiy yechimini

$$x^*=M\cos pt+N\sin pt$$

ko‘rinishda izlaymiz. Buni (3) ga qo‘yib ixchamlagandan so‘ng, M va N larning qiymatlarini topamiz:

$$M=-\frac{2npq}{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2},\quad N=\frac{q\left(s^2-p^2\right)}{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}.$$

Demak, xususiy yechim

$$x^*=\frac{q}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}\left[-\frac{2np}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}\cos pt+\frac{s^2-p^2}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}\sin pt\right]$$

bo‘lar ekan. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\frac{q}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}=B,$$

$$\frac{2np}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}=\sin\delta,\quad \frac{s^2-p^2}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}=\cos\delta.$$

U holda xususiy yechim

$$x^*=B\sin(pt-\delta)$$

ko‘rinishni oladi. (3) ning umumiy yechimi esa

$$x=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\delta) \qquad (4)$$

bo‘ladi. Uning birinchi hadi so‘nuvchi teranishni ifodalaydi; $t\to\infty$ da u nolga intiladi. Shu sababli, biror muddatdan keyin uning umumiy yig‘indiga ta’siri bo‘lmay qoladi va asosiy qiymatni majburiy tebranishni aniqlaydigan had beradi. Bu tebranishning chastotasi p tashqi kuchning chastotasiga teng, majburiy tebranishning amplitudasi p ning s ga qanchalik yaqinligi va n ning qanchalik kichikligiga qarab, shunchalik katta bo‘ladi.

Majburiy tebranish amplitudasining n ning har xil qiymatlarida p chastotaning o‘zgarishiga qanchalik bog‘liqligini tekshiraylik. Buning uchun uni differentsiallaymiz:

$$B(p)=\frac{q}{\sqrt{\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}},$$

$$B'(p)=q\frac{\left(s^2-p^2\right)2p-4n^2p}{\left[\left(s^2-p^2\right)^2+4n^2p^2\right]^{3/2}}.$$

Agar $B'(p)=0$ desak, $(s^2-p^2)-2n^2=0$ tenglama hosil bo‘ladi. Uning ildizi tashqi kuchlarning chastotasini beradi: $p=\sqrt{s^2-2n^2}$. Bu qiymatda $B(p)$ maksimum qiymatga erishadi (tekshiring!). Uning maksimum qiymati

$$B_{\max}=\frac{q}{2n\sqrt{s^2-n^2}} \tag{5}$$

ga teng. n qanchalik kichik bo‘lsa, p ning qiymati s ga shunchalik yaqin bo‘ladi va (5) dan ko‘rinadiki, tebranishlar amplitudasi shunchalik katta bo‘ladi:

$$\lim_{p\to s}B(p)=\infty.$$

Agar $p=s$ bo‘lsa, rezonans holati yuz beradi.

Endi faraz qilaylik, $n=0$ bo‘lsin, ya’ni yukka tashqi muhit ta’sir etmasin. U holda xarakat tenglamasi

$$\frac{d^2x}{dt^2}+s^2x=q\sin pt \tag{6}$$

bo‘ladi. Mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{x}=A\sin(st+\alpha).$$

Agar $p\neq s$ bo‘lsa, (6) ning xususiy yechimini

$$x^*=M\cos pt+N\sin pt$$

ko‘rinishda izlaymiz. Buni (6) ga qo‘yib ixchamlagandan so‘ng, M va N larning qiymatlarini topamiz:

$$M = 0, N = \frac{q}{s^2 - p^2}.$$

U holda umumiy yechim

$$x = A\sin(st + \alpha) + \frac{q}{s^2 - p^2}\sin pt$$

bo‘ladi.

Agar $p = s$ bo‘lsa, (6) ning xususiy yechimini

$$x^* = t(M\cos pt + N\sin pt)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bunda M va N lar quyidagicha bo‘ladi:

$$M = -\frac{q}{2s}, N = 0.$$

Demak,

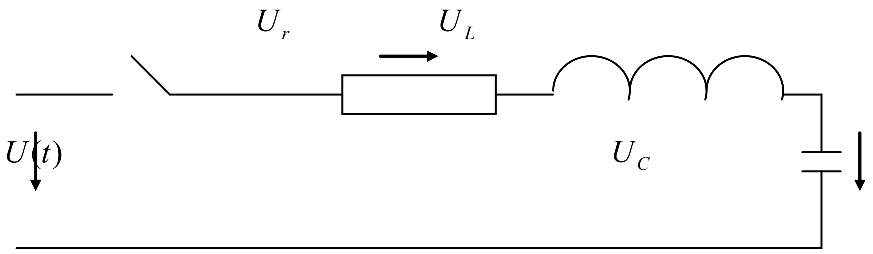
$$x^* = -\frac{q}{2s}t\cos st$$

ekan. U holda umumiy yechim

$$x = A\sin(st + \alpha) - \frac{q}{2s}t\cos st$$

bo‘ladi. O‘ng tarafdagi ikkinchi had t kattalashgan sari tebranish amplitudasi cheksiz orta borishini ko‘rsatadi. Bu holat *rezonans holati*, deb ataladi.

13.2. Elektr zanjiridagi tebranishlar. r qarshilik, L induktivlik va C sig‘im ketma-ket ulangan zanjirda boshlang‘ich $t = 0$ vaqt momentida konturdagi tok va kondensatordagi zaryad nolga teng bo‘lsa, tokning shu zanjirdan o‘tish jarayonini tekshiraylik.



11-rasm.

Biz bu masalani shu bobning 1.1-§ ida 5-misolda ko‘rgan edik. Agar U manbaaning elektr yurituvchi kuchi (e.yu.k.) bo‘lsa, u holda zanjirdan I tokning o‘tish tenglamasi quyidagicha edi:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+r\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dU}{dt} \tag{7}$$

Faraz qilaylik, zanjir manbaasining e.yu.k. o‘zgarmas, ya’ni $U=const$ bo‘lsin. U holda (7) quyidagi bir jinsli tenglamaga aylanadi:

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{r}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=0.$$

Uning xarakteristik tenglamasi

$$k_{1,2}=-\frac{r}{2L}\pm\sqrt{\frac{r^2C-4L}{4L^2C}}$$

ildizlarga ega. Agar $r^2C-4L\geq 0$ bo‘lsa, ildizlar haqiqiy, shuning uchun umumiy yechim nodavriy bo‘ladi. Demak, tok ham nodavriy bo‘ladi. Bu zanjirda hech qanday tebranishlar ro‘y bermasligini bildiradi. Agar $r^2C-4L<0$ bo‘lsa, umumiy yechim

$$I=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right) \tag{8}$$

bo‘ladi, bu yerda $\delta=r/2L, \omega_1^2=1/(LC)-r^2/\left(4L^2\right)$.

C_1 va C_2 koeffitsientlarning

$$I\,|_{t=0}=0, \quad \frac{dI}{dt}\,|_{t=0}=\frac{E}{L}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlarini topaylik. Buning uchun avval (8) ni differentsiallaymiz:

$$\frac{dI}{dt}=e^{-\delta t}\left[-\delta\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+\omega_1\left(-C_2\sin\omega_1 t+C_2\cos\omega_1 t\right)\right].$$

Agar boshlang‘ich shartlardan foydalansak: $C_1=0,\quad C_2=U/\left(L\omega_1\right)$ lar topiladi. Demak, yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘lar ekan:

$$I=\frac{U}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t\,.$$

Endi faraz qilaylik, $U=Q\sin\omega t$ bo‘lsin. U holda (7) tenglama quyidagicha bo‘ladi:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+r\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=Q\omega\cos\omega t\,. \tag{9}$$

Ma’lumki (1.1-§, 5-misolga qarang)

$$I\,|_{t=0}=0, \qquad rI+\frac{1}{C}\int_0^t Idt+L\frac{dI}{dt}=Q\sin\omega t\,.$$

Bundan

$$\frac{dI}{dt}\,|_{t=0}=0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, (9) uchun boshlang‘ich shartlar

$$I|_{t=0}=0, \quad \frac{dI}{dt}|_{t=0}=0$$

bo‘lar ekan. Shu shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topaylik. Agar $\omega_1 \neq \omega$ bo‘lsa, u holda bu yechimni

$$I^* = M\cos\omega t + N\sin\omega t$$

ko‘rinishda qidiramiz. Uni (9) ga qo‘yib, M va N larni 1-masala-dagidek mulohazalar bilan topamiz:

$$M=\frac{Q\omega\left(1/C-L\omega^2\right)}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2r^2}, \quad N=\frac{Q\omega^2 r}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2r^2}.$$

U holda umumiy yechim

$$I=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+$$

$$+\frac{Q}{\left(1/(C\omega)-L\omega\right)^2+r^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t+r\sin\omega t\right]$$

bo‘ladi. Agar $L\omega-1/C\omega=K;\ \sqrt{K^2+r^2}=Z$ desak, yechim

$$I=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)-\frac{Q}{Z^2}\left(K\cos\omega t-r\sin\omega t\right)$$

ko‘rinishni oladi. Boshlang‘ich shartlardan C_1 va C_2 larni topamiz:

$$C_1=\frac{QK}{Z^2}, \quad C_2=-\frac{Q}{Z^2\omega_1}\left(r\omega-K\delta\right).$$

Qavsda turgan ifodani quyidagicha o‘zgartiraylik:

$$r\omega-K\delta=r\omega-\frac{r}{2L}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)=r\omega-\frac{r\omega}{2}+\frac{\delta}{C\omega}=$$

$$=\frac{r\omega}{2}+\frac{\delta}{C\omega}=\delta\left(L\omega+\frac{1}{C\omega}\right)=\delta K',$$ bu yerda $L\omega+\dfrac{1}{C\omega}=K'$ deyildi.

Demak,

$$I=\frac{Q}{Z^2\omega_1}e^{-\delta t}\left(K\omega_1\cos\omega_1 t-K'\delta\sin\omega_1 t\right)-\frac{Q}{Z^2}\left(K\cos\omega t-r\sin\omega t\right).$$

$K'=K+\dfrac{2}{C\omega}$ bo‘lgani uchun

$$K^2\omega_1^2+K'^2\delta^2=K^2\left(\frac{1}{LC}-\delta^2\right)+\left[K^2+\frac{4}{C\omega}\left(K+\frac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2=$$

$$=\frac{K^2}{LC}+\frac{4}{C\omega}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}+\frac{1}{C\omega}\right)\delta^2=\frac{K^2}{LC}+\frac{4Lr^2}{C\cdot 4L^2}=\frac{Z^2}{LC}.$$

Agar

$$\frac{K\omega_1}{\sqrt{K^2\omega_1^2+K'^2\delta^2}}=\sin\alpha_1,\quad \frac{K'\delta}{\sqrt{K^2\omega_1^2+K'^2\delta^2}}=\cos\alpha_1,\quad \frac{K}{Z}=\sin\alpha,\quad \frac{r}{Z}=\cos\alpha$$

desak, u holda yechimni quyidagicha yozish mumkin:

$$I=-\frac{Qe^{-\delta t}}{Z\omega_1\sqrt{LC}}\sin(\omega_1 t-\alpha_1)+\frac{Q}{Z}\sin(\omega t-\alpha).$$

Agar $\omega_1=\omega$ bo‘lsa, u holda xususiy yechimni

$$I^*=t(M\cos\omega t+N\sin\omega t)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu qavs oldidagi t kattalashgan sari tebranish amplitudasi cheksiz orta borishini ko‘rsatadi. Demak, bu holda rezonans holati yuz berar ekan.

13.3. Differentsial tenglamalarning iqtisod dinamikasiga qo‘llanishi. Iqtisod dinamikasining modellarida differentsial tenglamalar yetarlicha ko‘p qo‘llaniladi. Quyida biz makroiqtisod dinamikasiga qo‘llanilishiga doir bir nechta masalalarni ko‘ramiz.

1-masala. Faraz qilaylik, $y(t)$ - biror korxonaning t vaqt momentida sotgan mahsulotlari hajmi bo‘lsin. Agar korxona chiqargan mahsulotini bir xil p narxda sotgan bo‘lsa, u holda korxonaning t vaqt momentida olgan daromadi $Y(t)=py(t)$ bo‘ladi.

$I(t)$ bilan ishlab chiqarishni kengaytirish uchun sarf qilinadigan investitsiya miqdorini belgilaylik. *Tabiiy o‘sish modelida* mahsulotning chiqish tezligi (ya’ni akseleratsiyasi) investitsiya miqdoriga proportsional deb hisoblanadi, ya’ni

$$y'(t)=lI(t). \qquad (1)$$

Investitsiya miqdori $I(t)$ daromadning o‘zgarmas qismini tashkil etadi, deb faraz qilsak:

$$I(t)=mY(t)=mpy(t), \qquad (2)$$

bu yerda proportsionallik koeffitsienti m $0<m<1$ bo‘lgan o‘zgarmas miqdordir.

Agar (2) ifoda (1) ga olib borib qo‘yilsa:

$$y'=ky \qquad (3)$$

differentsial tenglama hosil bo‘ladi, bu yerda $k=mpl$. Bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraluvchi differentsial tenglamadir. Uni yechsak:

$$y(t)=y_0e^{k(t-t_0)},\quad y_0=y(t_0)$$

funktsiya hosil bo‘ladi.

Aytish lozimki, (3) tenglama demografik jarayonda aholini o‘sish dinamikasini, muntazam inflyatsiya davrida narxning o‘sish dinamikasini va xokazo jarayonlarni ifodalaydi.

Amalda bozorning to‘yinish sharti yetarlicha kichik vaqt intervali uchun qabul qilinadi. Umuman talab egri chizig‘i, ya’ni sotilgan mol narxi p ning uning hajmi y ga bog‘likligi $p = p(y)$ kamayuvchi funktsiya bo‘ladi, chunki mahsulot hajmining oshishi bozorning shu molga to‘yinishiga olib keladi, u esa mahsulot narxining kamayishiga olib keladi. Shu sababli, raqobatbardor bozor shartida o‘sish modeli quyidagicha bo‘ladi:

$$y' = mlp(y)y. \tag{4}$$

Bu yana o‘zgaruvchilari ajraluvchi differentsial tenglama. (4) ning o‘ng tomonidagi barcha ko‘paytuvchilar musbat bo‘lgani uchun $y' > 0$, shu sababli u o‘suvchi $y(t)$ funktsiyani ifodalaydi. Bu funktsiyani qavariqlikka tekshirganda tabiiy uning elastiklik tushunchasi ishlatiladi. Xaqiqatan, agar (4) ni differentsiallab yuborsak

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dt}y + p\right)$$

munosabatni hosil qilamiz. Ma‘lumki, narxga nisbatan talabning elastikligi $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$ formula orqali ifodalanadi. U holda oxirgi tengligimizni quyidagicha yozsa bo‘ladi:

$$y'' = mly' p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right).$$

Bu yerda $y'' = 0$ desak, $E_p(y) = -1$ tenglik hosil bo‘ladi. Demak, agar talab elastik bo‘lsa, ya’ni $|E_p(y)| > 1$ yoki $E_p(y) < -1$ bo‘lsa, $y'' > 0$ bo‘lib $y(t)$ funktsiya qavarig‘i tepaga bo‘ladi, agar talab elastik bo‘lmasa, ya’ni $|E_p(y)| < 1$ yoki $-1 < E_p(y) < 0$ bo‘lsa, u holda $y'' < 0$ bo‘lib $y(t)$ funktsiya qavarig‘i pastga bo‘ladi.

1-misol. Agar talab egri chizig‘i $p(y) = 2 - y$ tenglama bilan berilgan, akseleratsiya normasi $1/l = 2$, investitsiya normasi $m = 0{,}5,\ y(0) = 0{,}5$ bo‘lsa, sotilgan mahsulot hajmini toping.

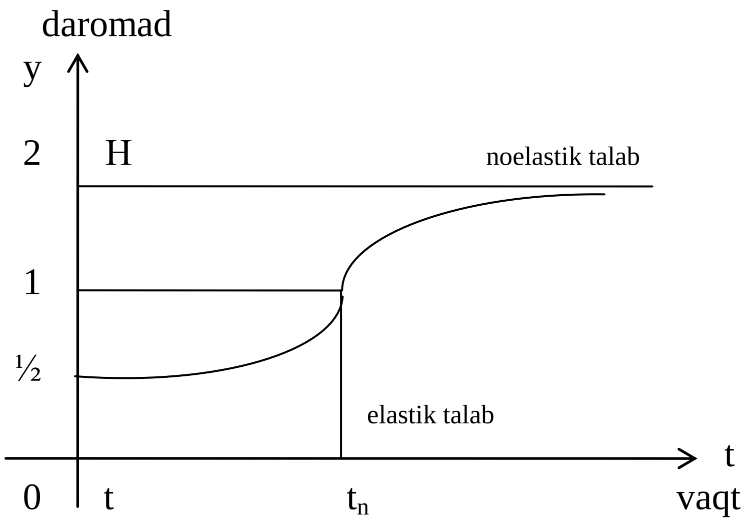
Yechish. Berilgan malumotlarga ko‘ra, (4) tenglama quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$y' = (2 - y)y \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{(2-y)y} = dt.$$

Oxirgi tenglikni integrallab yuborsak:

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + C_1 \quad \text{yoki} \quad \frac{y-2}{y} = Ce^{-2t} \tag{5}$$

hosil bo‘ladi, bu erda $C = \pm e^{C_1}$. Agar $y(0) = 0{,}5$ ekanligini e‘tiborga olsak, $C = -3$ kelib chiqadi. U holda (5) dan $y = \dfrac{2}{1+3e^{-2t}}$ topiladi.



12-rasm

Bu funktsiyaning grafigi yuqoridagi chizmada berilgan. Chizmadagi egri chiziq *logistik chiziq* deyiladi.

2-masala. Biror korxonaning t vaqt momentida olgan daromadi $Y(t)$ investitsiya $I(t)$ va talab miqdori $C(t)$ lar yig‘indisiga teng:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{6}$$

Xuddi tabiiy o‘sish modeliga o‘xshab, bu yerda ham daromadning o‘sish tezligi investitsiya miqdoriga proportsional deb faraz qilamiz, ya’ni

$$bY'(t) = I(t), \tag{7}$$

bu yerda b- daromad o‘sishining kapitalsig‘imi koeffitsiyenti, u mahsulot narxi p o‘zgarmas va $l = 1/pb$ bo‘lsa, (3) ga ekvivalent.

$C(t)$ funktsiyaning o‘zgarishi daromad funktsiya $Y(t)$ ning o‘zgarishiga qay darajada ta‘sir qilishini ko‘raylik.

Faraz qilaylik, $C(t)$ daromadning muayyan qismi bo‘lsin: $C(t) = (1-m)Y(t)$, bu yerda m investitsiya normasi. (6) va (7) lardan

$$Y' = \frac{m}{b} Y \tag{8}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (4) ga $p = const$ bo‘lganda tengkuchli.

Ko‘pincha talab funktsiyasi $C(t)$ oldindan ma‘lum bo‘ladi.

15-§. Oddiy differentsial tenglamalar sistemasi.

15.1. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi. Quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

sistema normal sistema, deb ataladi.

Kuzatilayotgan yoki tadqiqot qilinayotgan ayrim jarayonlar modeli (1) ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi.

1 - m i s o l . A modda P va Q moddalarga parchalansin. Ularning har birini hosil bo‘lish tezligi A moddaning parchalanmagan qismiga proportsional bo‘lsin. Agar P va Q moddalarning t momentdagi miqdorlarini mos ravishda x va y desak, u holda A moddaning t momentdagi miqdori $a - x - y$ bo‘ladi. Masala shartiga ko‘ra bu miqdor x va y miqdorlarning hosilalariga proportsional, ya’ni

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(a - x - y). \end{cases}$$

2 - m i s o l . Biologiyadan Ma’lumki, ayrim bakteriyalar ko‘payishdan tashqari o‘zining miqdorini kamaytirib turuvchi zahar ham ishlab chiqaradi. Faraz qilaylik, bakteriyaning miqdori N o‘zining ko‘payish tezligi dN/dt ga va zahar ishlab chiqarish tezligi dx/dt ga proportsional bo‘lsin, bu yerda x zahar miqdori. U holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dN}{dt}=kN-k_1Nx,\quad \frac{dx}{dt}=k_2N.$$

(1) sistemani integrallash deganda, (1) ni va quyidagi berilgan

$$y_1|_{x=x_0}=y_{10},,\ y_2|_{x=x_0}=y_{20},\ \ldots,y_n|_{x=x_0}=y_{n0} \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi noma’lum $y_1,y_2,\ldots,y_n$ funktsiyalarni topishni tushunamiz.

Bunday sistemalarni integrallash uning ko‘rinishiga qarab, har xil usullar bilan bajarilishi mumkin. Shulardan bir nechtasini ko‘rib chiqamiz.

(1) ning birinchi tenglamasini x bo‘yicha differentsiallaylik:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}.$$

Tenglikning o‘ng tarafidagi dy_1/dx, dy_2/dx, $\ldots,dy_n/dx$ hosilalarni (1) dan $f_1,f_2,\ldots,f_n$ lar orqali ifodalari bilan almashtiramiz, natijada quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n).$$

Bu tenglamani differentsiallab, aynan yuqoridagidek almashtirishlar bajarsak:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu jarayonni davom ettirib, nihoyat

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

tenglamaga kelamiz. Endi hosil bo‘lgan tenglamalardan quyidagi sistemani tuzib olaylik:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\[2mm] \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n).\end{cases} \qquad (3)$$

Bu sistemaning dastlabki $n-1$ ta tenglamasidan $y_2,y_3,\ldots,y_n$ larni $x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)}$ lar orqali ifodalab:

$$y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \qquad (4)$$

sistemaning oxirgi tenglamasiga olib borib qo‘yamiz:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \qquad (5)$$

Bu tenglamadan y_1 ni topamiz:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, \ldots C_n). \qquad (6)$$

Oxirgi tenglikni $n-1$ marotaba differentsiallab, (4) ga qo‘ysak, qolgan $y_2, y_3, \ldots, y_n$ noma’lumlar ham topiladi:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, \ldots C_n),\ y_2 = \psi_2(x, C_1, \ldots C_n), \ldots,\ y_n = \psi_n(x, C_1, \ldots C_n).$$

Agar (2) boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsa, mos $C_1, \ldots, C_n$ koef-fitsientlarni topish xuddi bitta tenglama uchun bajarilgandek amalga oshiriladi.

Agar (1) ning o‘ng tarafidagi funktsiyalar o‘z o‘zgaruvchilariga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda sistemani chiziqli normal sistema deb ataymiz. Chiziqli normal sistemaga mos keluvchi (5) tenglama ham chiziqli bo‘ladi.

3-m i s o l. $\frac{dy}{dx} = y + z, \frac{dz}{dx} = y - z$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani x bo‘yicha differentsiallaymiz:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

va undan y, dy/dx larni yo‘qotamiz. Shu bilan tenglama

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2y = 0$$

ko‘rinishga keladi. Buning xarakteristik tenglamasi $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ il- dizlarga ega. Shuning uchun uning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}}$$

bo‘ladi. z ni topish uchun bu yechimni sistemaning birinchi teng-lamasiga qo‘yamiz:

$$z = \frac{dy}{dx} - y = C_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{x\sqrt{2}} - C_2\left(\sqrt{2} + 1\right)e^{x\sqrt{2}}.$$

Eslatma. Ayrim hollarda sistemaning tenglamalari ustida bir nechta almashtirishlar bajarib, yechimni topishga olib keladigan osongina integrallanadigan tenglama hosil qilish mumkin. Bu usulni integrallovchi kombinatsiyalar usuli, deb atashadi.

4 -m i s o l . $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{2x+3y};\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{2x+3y}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Avval birinchi integrallovchi kombinatsiyani tuzib olamiz. Buning uchun birinchi tenglamani ikkinchisiga bo‘lamiz:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y};\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y};\ \ln x=\ln y+\ln C_1 \quad \text{yoki} \quad x=C_1 y.$$

Ikkinchi integrallovchi kombinatsiyani tuzish uchun birinchi tenglamani 2 ga va ikkinchi tenglamani 3 ga ko‘paytirib, o‘zaro qo‘shamiz:

$$2\cdot\frac{dx}{dt}+3\cdot\frac{dy}{dt}=1;\ 2dx+3dy=dt \quad \text{yoki} \quad 2x+3y=t+C_2.$$

Hosil bo‘lgan tenglamalardan sistema tuzib olib, umumiy yechimni topamiz:

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3},\quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}.$$

15.2. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. Faraz qilaylik, bizga quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{cases} \tag{7}$$

sistema berilgan bo‘lsin, bu yerda barcha koeffitsientlar o‘zgarmas.

Bu sistemani

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

matritsa ko‘rinishida ham yozish mumkin, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \dfrac{dX_1}{dt} \\ \dfrac{dX_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dX_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Berilgan (7) sistemaning yechimini

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t},\ \ x_2 = p_2 e^{\lambda t},\ \ldots, x_n = p_n e^{\lambda t}$$

ko‘rinishda izlaymiz. Agar bularni sistemaning tenglamalariga qo‘yib, o‘xshash hadlarni ixchamlasak, noma’lum $p_1, p_2, \ldots, p_n$ koeffitsientlarga nisbatan quyidagi chiziqli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22}-\lambda)p_2 + \cdots + a_{2n}p_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)p_n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ma’lumki, bunday sistema hamisha birgalikda, masalan, hech bo‘lmaganda nol $p_1 = 0, p_2 = 0, \ldots, p_n = 0$ yechimi mavjud. (8) sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va etarlidir:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Bu λ ga nisbatan n-darajali algebraik tenglama. Uni A matritsaning va shu vaqtning o‘zida (7) sistemaning ham xarakteristik tenglamasi deb ataymiz.

Ma’lumki, bunday tenglama n ta $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ildizlarga ega. Ular A matritsaning xos sonlari bo‘ladi. Har bir λ_k xos songa biror $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$ xos vektor mos keladi.

Bu yerda uch hol yuz berishi mumkin.

1-hol. Barcha xos sonlar har xil: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$ va haqiqiy. U holda, (7) sistema n ta yechimga ega:

$\lambda = \lambda_1$ uchun: $x_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t}, x_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 t}$;

$\lambda = \lambda_2$ uchun: $x_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t}, x_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t}$;

. . . .

$\lambda = \lambda_n$ uchun: $x_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n t}, x_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n t}, \ldots, x_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n t}$.

Biz fundamental yechimlar sistemasini topdik. Umumiy yechim

$$x_1 = C_1 p_{11}e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{1n}e^{\lambda_n t},$$
$$x_2 = C_1 p_{21}e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{22}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{2n}e^{\lambda_n t},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = C_1 p_{n1} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{n2} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}.$$
ko‘rinishda bo‘ladi.

5 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Sistemaning xarakteristik tenglamasini tuzib olaylik:
$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$
Uning $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ ildizlari sistemaning matritsasini xos sonlaridir. $\lambda_1 = 1$ ga mos keluvchi xos vektorni topish uchun
$$\begin{cases} (7-1)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-1)p_2 = 0 \end{cases}$$
sistemani tuzib olamiz. Bu bitta $2p_1 + p_2 = 0$ tenglamaga ekvivalent. Bundan (1;-2) vektorni aniqlaymiz.

Agar λ o‘rniga $\lambda_2 = 10$ ni qo‘ysak, quyidagi sistema hosil bo‘ladi:
$$\begin{cases} (7-10)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-10)p_2 = 0. \end{cases}$$
Bundan (1;1) vektor aniqlanadi.

U holda fundamental yechimlar: $\lambda_1 = 1$ da $x_{11} = e^t, x_{21} = -2e^t$; $\lambda_2 = 10$ da $x_{12} = e^{10t}, x_{22} = e^{10t}$, umumiy yechim esa
$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \quad x_2 = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}$$
bo‘ladi.

2-hol. Xos sonlar har xil, lekin ularning ayrimlari kompleks. Umumiylikni buzmagan holda bu kompleks ildizlar $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ bo‘lsin, deb faraz qilaylik. Bu ildizlarga
$$x_j^{(1)} = p_{j1} e^{(\alpha + i\beta)t}, \ x_j^{(2)} = p_{j2} e^{(\alpha - i\beta)t}, \ (j = 1,2,\dots,n)$$
yechimlar mos keladi.

Aynan 10-§ ning 3-holiga o‘xshagan mulohazalar bilan kompleks yechimning haqiqiy va mavhum qismlari ham yechim bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Shu sababli, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ larga mos keladigan xususiy yechimlar sifatida
$$\tilde{x}_j^{(1)} = e^{\alpha t}\left(q_{j1} \cos \beta t + q_{j2} \sin \beta t\right), \ \tilde{x}_j^{(2)} = e^{\alpha t}\left(q_{j3} \cos \beta t + q_{j4} \sin \beta t\right)$$

funktsiyalarni olish mumkin, bu yerda $q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}, q_{j4}$ lar p_{j1}, p_{j2} lar orqali aniqlanadigan haqiqiy sonlar. Sistemaning umumiy yechimiga shu funktsiyalarning mos kombinatsiyalari kiradi.

6 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Y*echish*. Avval xarakteristik tenglamani tuzib olamiz:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Uning ildizlari: $\lambda_1 = -6 + i, \lambda_2 = -6 - i.$ Birinchi $\lambda_1 = -6 + i$ xos songa mos keluvchi xos vektor (1; 1+i), ikkinchi $\lambda_2 = -6 - i$ xos songa mos keluvchi xos vektor (1; 1-i). U holda bu xos son va xos vektorlarga mos keluvchi berilgan sistemaning yechimlari quyidagicha:

$$x_1^{(1)} = e^{(-6+i)t} = e^{-6t}(\cos t + i\sin t),\ \ x_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)t} = (1+i)e^{-6t}(\cos t + i\sin t),$$
$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t} = e^{-6t}(\cos t - i\sin t),\ \ x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t} = (1-i)e^{-6t}(\cos t - i\sin t),$$

yoki agar ularning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib yozsak:

$$\tilde{x}_1^{(1)} = e^{-6t}\cos t,\ \ \tilde{x}_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t),$$
$$\tilde{x}_1^{(2)} = e^{-6t}\sin t,\ \ \tilde{x}_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

funktsiyalarni xususiy yechim sifatida olish mumkin. Demak, umumiy yechim

$$x_1 = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t,$$
$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

bo‘ladi.

3-hol. Xos sonlarning ayrimlari haqiqiy va karrali.

Umumiylikni buzmagan holda, λ_1 xos son haqiqiy va m karrali bo‘lsin, deb faraz qilamiz. Unga mos keluvchi sistemaning echimi

$$x_1 = p_1(t)e^{\lambda_1 t},\ \ x_2 = p_2(t)e^{\lambda_1 t},\ \ldots, x_n = p_n(t)e^{\lambda_1 t} \tag{9}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ lar darajalari *m-1* dan katta bo‘lmagan ko‘phadlar. Agar (9) ni (7) ga qo‘yib, *t* larning bir xil darajali hadlari oldidagi koeffitsientlarni tenglasak, bu ko‘phadlarning noma’lum koeffitsientlarini topish uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Buning bajarilish tartibini quyidagi misolda ko‘rib chiqaylik.

7 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Avval xarakteristik tenglamani yechib olamiz:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0; \ \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0; \ \lambda_1 = \lambda_2 = 4.$$

$\lambda_1 = 4$ xos songa

$$x_1 = e^{4t}(a_1 t + a_2), \quad x_1 = e^{4t}(b_1 t + b_2)$$

yechimlar mos keladi. Ularni t bo‘yicha differentsiallab, sistemaga qo‘yamiz:

$$a_1 e^{4t} + 4(a_1 t + a_2)e^{4t} = 5e^{4t}(a_1 t + a_2) - e^{4t}(b_1 t + b_2),$$
$$b_1 e^{4t} + 4(b_1 t + b_2)e^{4t} = e^{4t}(a_1 t + a_2) + 3e^{4t}(b_1 t + b_2).$$

Agar bu tengliklarning har birini e^{4t} ga qisqartirib, t ning oldidagi koeffitsientlarni va ozod hadlarni tenglasak:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2 \end{cases}$$

sistemalarni hosil qilamiz. Bundan $a_1 = b_1; a_2 - b_2 = a_1 = b_1$ kelib chiqadi. Agar $a_1 = C_1; a_2 = C_2$ desak, $b_1 = C_1; b_2 = C_2 - C_1$ bo‘ladi, shuning uchun sistemaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).$$

Eslatma. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli yuqori tartibli differentsial tenglamalar sistemasi ham aynan yuqoridagi tartibda ko‘rib chiqilishi mumkin. Masalan, agar sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda uning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lib, uning ildizlariga mos keluvchi umumiy yechim

$$x_1 = C_1 p_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 p_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 p_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 p_4 e^{\lambda_4 t},$$
$$x_2 = C_1 q_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 q_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 q_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 q_4 e^{\lambda_4 t}$$

bo‘ladi.

15.3. Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differentsial tenglamalar sistemasini o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan yechish. Bizga

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{10}$$

sistema berilgan bo‘lsin.

Faraz qilaylik, unga mos keluvchi bir jinsli (7) tenglamalar sistemasining umumiy yechimi ma‘lum bo‘lsin:

$$x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12} + \cdots + C_nx_{1n},$$
$$x_2 = C_1x_{21} + C_2x_{22} + \cdots + C_nx_{2n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \cdots + C_nx_{nn}.$$

Berilgan (10) sistemaning umumiy yechimini

$$x_1 = C_1(t)x_{11} + C_2(t)x_{12} + \cdots + C_n(t)x_{1n},$$
$$x_2 = C_1(t)x_{21} + C_2(t)x_{22} + \cdots + C_n(t)x_{2n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = C_1(t)x_{n1} + C_2(t)x_{n2} + \cdots + C_n(t)x_{nn}$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ lar topilishi lozim bo‘lgan noma’lum funktsiyalar. Bularni (10) ga qo‘yamiz, u holda uning i-tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$C_1'x_{i1} + C_2'x_{i2} + \cdots + C_n'x_{in} + C_1\left(x_1' - a_{11}x_{11} - a_{12}x_{12} - \cdots - a_{1n}x_{1n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + C_n\left(x_n' - a_{n1}x_{n1} - a_{n2}x_{n2} - \cdots - a_{nn}x_{nn}\right) = f_i(t).$$

Qavs ichidagi yig‘indilarning hammasi aynan nolga teng, chunki barcha $k = 1,2,\dots,n$ lar uchun $\left(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}\right)$ lar bir jinsli (7) sistemaning yechimlaridir. Shuning uchun

$$C_1'x_{i1} + C_2'x_{i2} + \cdots + C_n'x_{in} = f_i(t), \quad i = 1,2,\dots,n \tag{11}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. $\left(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}\right)$, $k = 1,2,\dots,n$ lar chiziqli erkli bo‘lgani uchun bu sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ . & \dots & . \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$ larni (11) dan aniqlab, integrallab chiqsak, barcha $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ lar, va demak, (10) ning umumiy yechimi topiladi.

8 - m i s o l . $\frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2$ sistemani yeching.

Yechish. Avval bir jinsli sistemani yechib olamiz:

$$\frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \frac{dy}{dt} + x - y = 0.$$

Buning uchun birinchi tenglamani differentsiallaymiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 0.$$

Ikkinchi tenglamadan $\frac{dy}{dt} = y - x$ ni va birinchi tenglamadan $4y = -\frac{dx}{dt} - 2x$ ni aniqlab, bu tenglamaga qo‘ysak:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 0$$

o‘zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli tenglama hosil bo‘ladi. Uning umumiy yechimi

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}$$

bo‘ladi. Buni $y = -\frac{1}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x$ ga qo‘ysak:

$$y = -C_1e^{2t} + \frac{1}{4}C_2e^{-3t}$$

ham topiladi.

Endi berilgan bir jinsli bo‘lmagan sistemani yechish uchun

$$x = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t}, \ y = -C_1(t)e^{2t} + \frac{1}{4}C_2(t)e^{-3t} \qquad (12)$$

deb faraz qilamiz. (12) ni berilgan sistemaga qo‘ysak:

$$C_1'(t)e^{2t} + 4C_2'e^{-3t} = 1 + 4t, \quad -C_1'(t)e^{2t} + C_2'e^{-3t} = \frac{3}{2}t^2$$

sistema hosil bo‘ladi. Bundan

$$C_1'(t)=\frac{1+4t-6t^2}{5}e^{-2t},\quad C_2'(t)=\frac{1+4t+\frac{3}{2}t^2}{5}e^{3t}.$$

Bularni integrallasak:

$$C_1(t)=\frac{t+3t^2}{5}e^{-2t}+C_1,\quad C_2(t)=\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{5}e^{3t}+C_2$$

hosil bo‘ladi. Bularni (12) ga qo‘yib sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}+t+t^2,\ y=-C_1e^{2t}+\frac{1}{4}Ce^{-3t}-\frac{1}{2}t^2.$$

16-§. Turg‘unlik nazariyasi.

Ko‘p hollarda differentsial tenglamalar yoxud tenglamalar sistemasining echimlari elementar funktsiyalar bilan berilmagani uchun ularni echish uchun taqribiy hisoblash usullari qo‘llaniladi. Bu usullarning kamchiligi shundaki, ular faqat bitta xususiy yechimni topishga imkon beradi. Boshqa xususiy yechimni topish uchun bu usulni yana boshqatdan qo‘llashga to‘g‘ri keladi. Bir xususiy yechimni bila turib, boshqa xususiy yechimlar to‘g‘risida biror fikr aytib bo‘lmaydi.

Texnik va mexanik masalalarning aksariyatida yechimlarning konkret qiymatlari emas, balki bu yechimlarning biror nuqta atrofida yoki argument cheksiz ortib borganda o‘zini qanday tutishi ko‘proq qiziqtiradi. Bu masalalar bilan differentsial tenglamalarning sifatlash nazariyasi shug‘ullanadi. Bu nazariyaga A.M.Lyapunov[1] va A.Puankare[2] lar asos solishgan.

Sifatlash nazariyasida ko‘riladigan asosiy masalalardan biri bu yechimning turg‘unlik masalasidir.

---

[1] A.M.Lyapunov (1857-1918) - rus matematigi.
[2] Anri Puankare - farang matematigi.

16.1. Lyapunov ma‘nosidagi turg‘unlik. Bizga quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ lar (1) ning

$$x_1|_{t=0} = x_{10},\ ,\ x_2|_{t=0} = x_{20},\ \ldots, x_n|_{t=0} = x_{n0} \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, (1) ning boshlang‘ich qiymatlari

$$|y_i(0) - x_{i0}| < \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n$,yechimi uchun

$$|y_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

tengsizliklar barcha $t > 0$ lar uchun bajarilsa, u holda $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ yechim "*Lyapunov ma‘nosida turg‘un*", deyiladi, aks holda bu yechim "*turg‘un emas*", deyiladi.

Demak, yechim Lyapunov ma‘nosida turg‘un bo‘ladi, agar boshlang‘ich qiymatlari bilan unga yaqin bo‘lgan boshqa har qanday yechim barcha $t > 0$ lar uchun ham shu yechimga yaqin bo‘lsa.

Agar Lyapunov ma‘nosida turg‘un bo‘lgan yechim uchun bundan tashqari

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t) - x_i(t)| = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

tengliklar ham o‘rinli bo‘lsa, u holda bu yechim "*asimptotik turg‘un*", deb ataladi.

Bu Ta’rifning ma‘nosi quyidagicha: agar berilgan tenglamalar sistemasi biror harakatni ifodalasa, turg‘un yechimlar holida boshlang‘ich shartlarni yetarlicha kichik miqdorga o‘zgartirganda harakat xarakteri o‘zgarmaydi.

Aytish joizki, yechimning asimptotik turg‘un ekanligidan uning Lyapunov ma‘nosida turg‘un bo‘lishi kelib chiqmaydi.

1- m i s o l. $\frac{dx}{dt}=-y, \frac{dy}{dt}=x$ sistemaning $x(0)=0, y(0)=0$ boshlan- g‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechish. Sistemaning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $x(t)\equiv 0, y(t)\equiv 0$ dir. Bunday yechimni biz sistemaning "*sukut nuqtasi*", deb ataymiz.

Sistemaning $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday boshqa yechimi

$$x(t)=x_0\cos t-y_0\sin t,\ \ x(t)=x_0\sin t-y_0\cos t$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olaylik. Ayonki, har qanday $t>0$ lar uchun

$$|x_0\cos t-y_0\sin t|\le|x_0\cos t|+|y_0\sin t|\le|x_0|+|y_0|,$$

$$|x_0\sin t+y_0\cos t|\le|x_0\sin t|+|y_0\cos t|\le|x_0|+|y_0| \tag{3}$$

tengsizliklar o‘rinlidir. Shuning uchun, agar $|x_0|+|y_0|<\varepsilon$ desak, u holda barcha $t>0$ lar uchun

$$|x_0\cos t-y_0\sin t|<\varepsilon,\ \ |x_0\sin t+y_0\cos t|<\varepsilon \tag{4}$$

bo‘ladi. Demak, agar masalan, $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$ deb olsak, $|x_0|<\delta,\ \ |y_0|<\delta$ bo‘lganda, (3) tengsizliklarga ko‘ra, barcha $t>0$ lar uchun (4) tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi, ya’ni sistemaning nol yechimi Lyapunov ma‘nosida turg‘un ekan, lekin u asimptotik turg‘un emas.

Faraz qilaylik, $\varphi_1(t),\ \ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ lar (1) ning (2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘lsin. Agar

$$y_i(t)=x_i(t)-\varphi_i(t),\ \ i=1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

desak, u holda (1) sistema quyidagi

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}=f_1\big(t,y_1+\varphi_1(t),y_2+\varphi_2(t),\ldots,y_n+\varphi_n(t)\big)-f_1\big(t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\big), \\ \frac{dy_2}{dt}=f_2\big(t,y_1+\varphi_1(t),y_2+\varphi_2(t),\ldots,y_n+\varphi_n(t)\big)-f_2\big(t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt}=f_n\big(t,y_1+\varphi_1(t),y_2+\varphi_2(t),\ldots,y_n+\varphi_n(t)\big)-f_n\big(t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\big) \end{cases} \tag{6}$$

sistemaga almashadi. Bu sistema

$$y_1\,|_{t=0}=0,,\ \ y_2\,|_{t=0}=0,\ \ldots,y_n\,|_{t=0}=0 \tag{7}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_i(t) \equiv 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$, trivial yechimga ega.

Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

1-teorema. (1) sistemaning (2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_1(t), \ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ yechimi Lyapunov ma‘nosida (asimptotik) turg‘un bo‘lishi uchun (6) sistemaning (7) shartlarni qanoatlantiruvchi trivial yechimi Lyapunov ma‘nosida (asimptotik) turg‘un bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Demak, umumiylikni buzmagan holda, (1) sistemaning (7) shart- larni qanoatlantiruvchi trivial yechimini turg‘unlikka tekshirsak kifoya ekan.

2-teorema (Lyapunov). Faraz qilaylik, (1) sistema $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, trivial yechimga ega bo‘lsin. Agar quyidagi

1) $\vartheta(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$ va faqat $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ bo‘lgandagina $\vartheta \equiv 0$;

2) barcha $t \geq 0$ lar uchun

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi differentsiallanuvchi biror $\vartheta(x_1,\ldots,x_n)$ funktsiya mavjud bo‘lsa, u holda $x_i(t) \equiv 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$, trivial yechim Lyapunov ma‘nosida turg‘un bo‘ladi.

Agar bundan tashqari, koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofining tashqarisida barcha $t \geq 0$ lar uchun

$$\frac{d\vartheta}{dt} \leq -\beta < 0$$

bo‘lsa, bu yerda β- o‘zgarmas son, u holda $x_i(t) \equiv 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$, trivial yechim asimptotik turg‘un bo‘ladi.

$\vartheta(x_1,\ldots,x_n)$ funktsiya "*Lyapunov funktsiyasi*", deb ataladi.

2 - m i s o l . $\dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^5 - x_2, \quad \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3$ sistemaning $x_1|_{t=0} = 0,$, $x_2|_{t=0} = 0,$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi trivial yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechish. $\vartheta(x_1, x_n) = x_1^2 + x_2^2$ funktsiyani ko‘raylik. Bu funktsiya uchun 2-teoremada qo‘yilgan 1-shartning bajarilishi ayon, shu sababli 2-shartni tekshiramiz:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2x_1\left(-x_1^5 - x_2\right) + 2x_2\left(x_1 - x_2^3\right) = -2\left(x_1^3 + x_2^4\right) \leq 0.$$

Agar $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ bo‘lsa, u holda barcha $t \geq 0$ lar uchun $\frac{d\vartheta}{dt} \leq -\beta < 0$ bo‘ladi. Demak, berilgan sistemaning trivial yechimi asimptotik turg‘un ekan.

1-eslatma. Lyapunov funktsiyasini $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning quyidagi $\vartheta = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ kvadratik forma ko‘rinishida izlash tavsiya etiladi.

Bu funktsiyaga qo‘yilgan birinchi shart bu kvadratik formaning musbat aniqlanganligini bildirgani uchun, a_{ij} koeffitsientlarni Silvester mezonining shartlarini qanoatlantiradigan qilib olinadi, ya’ni

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & \cdots & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 .$$

2-eslatma. Agar (1) sistema biror harakatni ifodalab, t vaqtni bildirsa va u tenglamalarda oshkor ishtirok etmasa, ya’ni sistema ushbu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda (1) avtonom sistema, deyiladi.

16.2. Sukut nuqtalarining eng sodda ko‘rinishlari. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{8}$$

sistema berilgan bo‘lib, uning barcha koeffitsientlari o‘zgarmas bo‘lsin. $x(t)\equiv 0, y(t)\equiv 0$ bu sistemaning sukut nuqtasi bo‘ladi, buni bevosita o‘rniga qo‘yish usuli bilan tekshirish mumkin. Bu nuqta turg‘un bo‘lishi uchun koeffitsientlar qanday shartlarni qanoatlantirishini tekshiraylik.

Aynan 13.2-§ dagidek yechimni

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t},\ x_2 = p_2 e^{\lambda t},\ \ldots, x_n = p_n e^{\lambda t}$$

ko‘rinishda izlaymiz. (8) ning

$$\Delta(\lambda)\equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamasining ildizlarini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bilan belgilaylik.

3-eslatma. Agar $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)^T$, desak, (8) quyidagi

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{9}$$

vektor ko‘rinishga keladi. Bunda xarakteristik tenglamaning ildizlari A matritsaning xos sonlaridan iborat bo‘ladi.

4-eslatma. 1-teoremaga ko‘ra,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

birjinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasining ixtiyoriy $x(t)$ yechimining Lyapunov ma‘nosida turg‘un (asimptotik turg‘un) bo‘lishi uchun unga mos keluvchi bir jinsli (9) sistemaning trivial yechimini Lyapunov ma‘nosida (asimptotik) turg‘un bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu yerda uch hol yuz berishi mumkin.

1-hol. Barcha xos sonlar har xil: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, haqiqiy va $\lambda_k < 0, k = 1,2,\ldots,n$ bo‘lsin. U holda (8) ning umumiy yechimi

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 p_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{12} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{1n} e^{\lambda_n t}, \\ x_2 &= C_1 p_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{22} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{2n} e^{\lambda_n t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= C_1 p_{n1} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{n2} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \tag{10}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. $C_1, C_2, \ldots, C_n$ koeffitsientlarni bu yechim (2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Agar $t=0$ desak:

$$C_1 p_{k1} + C_2 p_{k2} + \ldots + C_n p_{kn} = x_{k0}, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yerda $\Delta = \det\|p_{ij}\| \neq 0,$ chunki $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk}),$ $k = 1,2,\ldots,n$ lar chiziqli erkli xos vektorlar edi. U holda

$$C_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} x_{j0}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

bu yerda A_{ji}- p_{ji} ning Δ determinantdagi algebraik to‘ldiruvchisi. Quyidagi

$$\max_{i,k=\overline{1,n}} |p_{i,k}| = p, \quad \max_{i,k=\overline{1,n}} |A_{i,k}| = A$$

belgilashlarni kiritaylik.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $\delta(\varepsilon) = \varepsilon|\Delta| / (n^2 pA)$ desak, barcha $t > 0$ lar uchun $\left|e^{\lambda_k t}\right| < 1,$ $k = 1,2,\ldots,n$, bo‘lgani uchun $|x_{i0}| < \delta,$ $i = 1,2,\ldots,n,$ bo‘lganda, $|x_i(t)| < \varepsilon,$ $i = 1,2,\ldots,n,$ bo‘ladi, ya’ni sukut nuqta Lyapunov ma‘nosida turg‘un ekan. Bundan tashqari,

$$\lim_{t \to +\infty} |x_i(t)| = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

va demak, sukut nuqta asimptotik turg‘un ham ekan.

Agar $n = 2$ bo‘lsa, $x_1 O x_2$ tekislik (1) sistemaning faza tekisligi, uning yechimlari esa, quyidagi

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_x} \tag{11}$$

differentsial tenglamaning traektoriyalari, deb ataladi.

O(0,0) koordinatalar boshi (11) tenglamaning maxsus nuqtasi bo‘ladi, chunki bu nuqta tenglama yechimining mavjudlik va yagonalik sohasiga tegishli emas.

(10) ko‘rinishdagi yechim uchun bu maxsus nuqta turg‘un tugun nuqta, deb ataladi. Bunda nuqta $t \to +\infty$ da traektoriya bo‘ylab, maxsus nuqtaga yaqinlashadi deymiz.

2 - m i s o l. $\dfrac{dx}{dt} = -x, \dfrac{dy}{dt} = -2y$ sistemaning $x(0) = 0, y(0) = 0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechish. Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = -1, \lambda = -2$ ildizlarga ega. Sistemaning unga mos keluvchi yechimlari

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-2t}.$$

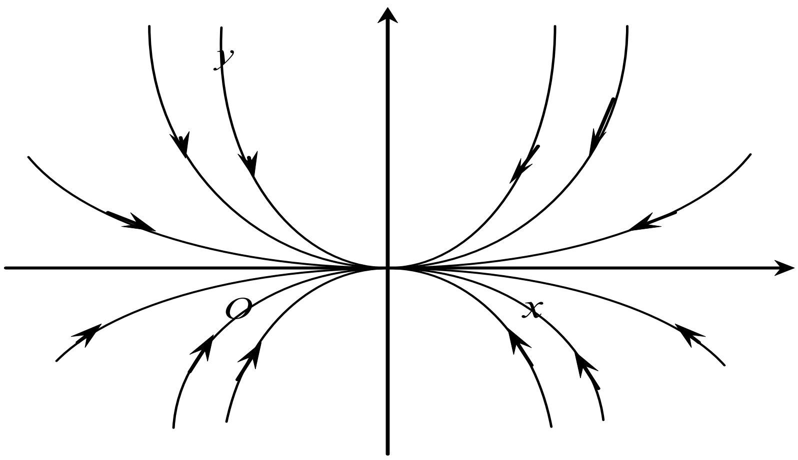
Bulardan boshlang‘ich $x|_{t=0} = x_0, y|_{t=0} = y_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t}. \qquad (12)$$

Bundan ko‘rinadiki, $t \to +\infty$ da $x(t) \to 0, y(t) \to 0,$ ya’ni $x = 0, y = 0$ yechim turg‘un. Endi faza tekisligiga o‘taylik. (12) dan t parametrni yo‘qotsak:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

parabolalar oilasini hosil qilamiz (13-rasmga qarang).



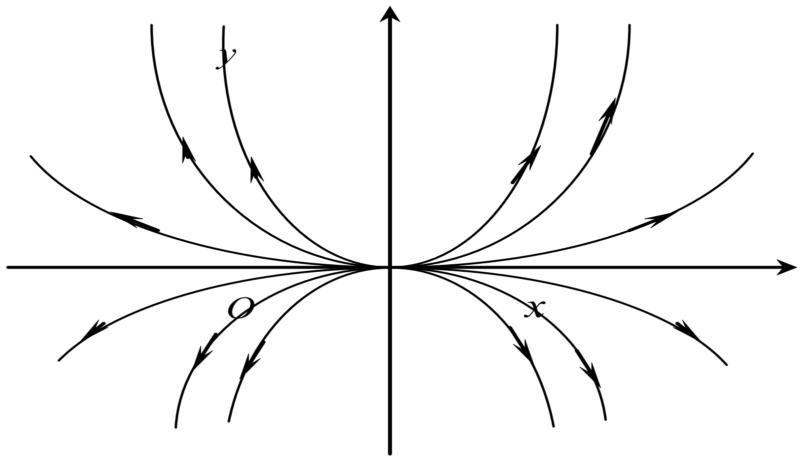
13-rasm.

(12) tenglama bu misol uchun quyidagicha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Bu tenglamaning O(0,0) maxsus nuqtasi turg‘un tugun nuqtadir.

2-hol. Barcha xos sonlar har xil: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, haqiqiy va



14-rasm.

$\lambda_k > 0$, $k = 1,2,\ldots,n$ bo‘lsin. Bu holda ham yechim (10) ko‘rinishda bo‘ladi. $t \to +\infty$ da $e^{\lambda_k t} \to +\infty$, $k = 1,2,\ldots,n$, bo‘lgani uchun boshlang‘ich shartlar qanday bo‘lishidan qat‘iy nazar, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to \infty$, $k = 1,2,\ldots,n$, bo‘ladi, ya’ni yechim turg‘un emas.

$n = 2$ bo‘lganda faza tekisligida sistemaning maxsus nuqtasi turg‘un bo‘lmagan tugun bo‘ladi: $t \to +\infty$ da nuqta traektoriya bo‘ylab $x = 0, y = 0$ sukut nuqtasidan uzoqlasha boradi.

3 - m i s o l . $\dfrac{dx}{dt} = x, \dfrac{dy}{dt} = 2y$ sistemaning yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechish. Bu sistema uchun xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1, \lambda = 2$ ildizlarga ega. Unga mos keluvchi yechimlar: $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{2t}$. $t \to +\infty$ da $|x(t)| \to \infty, |y(t)| \to \infty$, ya’ni yechim turg‘un emas.Agar t ni yo‘qotsak:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

parabolalar oilasi hosil bo‘ladi. O(0;0) maxsus nuqta turg‘un bo‘lmagan tugun nuqtadir (14-rasmga qarang).

3-hol. Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy, lekin har xil ishorali. Umumiylikni buzmagan holda, faraz qilaylik,

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_k < 0$, $1 \le k < n$, bo‘lsin. U holda, agar, unga mos keluvchi umumiy yechimdagi $C_i p_{ik}, i = 1,2,\ldots,n;$ $1 \le k < n$, koeffitsient-larning kamida biri noldan farqli bo‘lsa, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to \infty, 1 \le k \le n$, bo‘ladi, ya’ni yechim turg‘un emas. Bunda sukut nuqtani turg‘un bo‘lmagan egar, deb ataymiz.

4 - m i s o l . $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = -2y$ sistemaning yechimini turg‘unlikka tekshiring.

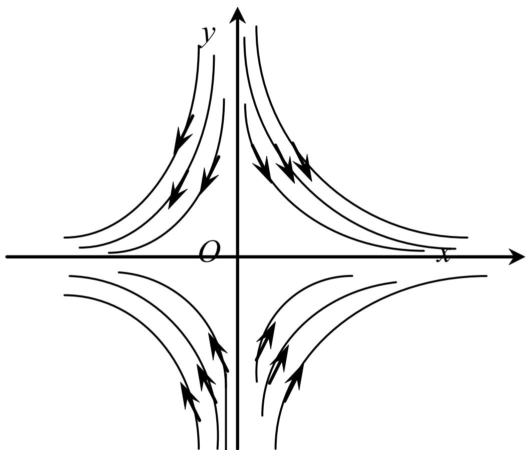
Yechish. Bu sistema uchun xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1, \lambda = -2$ ildizlarga ega. Unga mos keluvchi yechimlar: $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{-2t}$. $t \to +\infty$ da $|x(t)| \to \infty$, ya’ni yechim turg‘un emas. Agar t ni yo‘qotsak:

$$yx^2 = y_0 x_0^2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu faza tekisligida giperbolalar oilasini ifodalaydi (15-rasmga qarang).



15-rasm

Maxsus O(0;0) nuqta turg‘un bo‘lmagan egar nuqtadir.

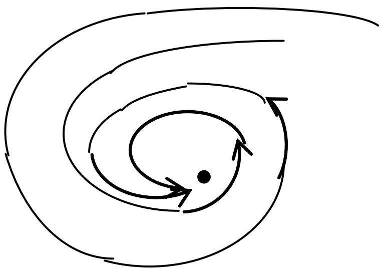
4-hol. Xarakteristik tenglamaning ayrim ildizlari kompleks. Umumiylikni buzmagan holda, faraz qilaylik, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ bo‘lib, qolganlari haqiqiy bo‘lsin.

a) agar $\alpha < 0, \lambda_3 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ bo‘lsa, u holda ularga mos keluvchi umumiy yechim

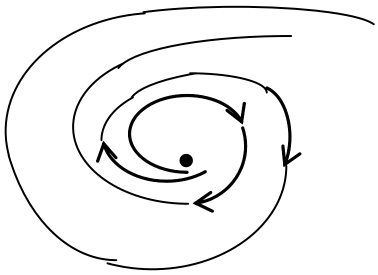
$$x_i = e^{\alpha t}\left(C_1 p_{i1} \sin\beta t + C_2 q_{i1} \cos\beta t\right) + C_3 p_{n3} e^{\lambda_3 t} + \cdots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}, \; i = 1,2,\ldots,n,$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Shu sababli, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to 0,\ 1 \le k \le n,$ bo‘ladi, ya’ni yechim asimptotik turg‘un. Sukut nuqta bu holda turg‘un focus, deb ataladi (16-rasmga qarang).

b) agar $\alpha > 0$ (λ_i, $i = 3,4,\ldots,n,$ larning birortasi musbat) bo‘lsa, u holda $(C_1 p_{i1})^2 + (C_2 q_{i1})^2 \ne 0$ (musbat λ_i oldidagi $C_i p_{ik} \ne 0$) bo‘lsa, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to \infty,\ 1 \le k \le n,$ bo‘ladi, ya’ni yechim turg‘un bo‘lmaydi (17-rasmga qarang). Bu nuqtani turg‘un bo‘lmagan focus, deb ataymiz.



16-rasm.

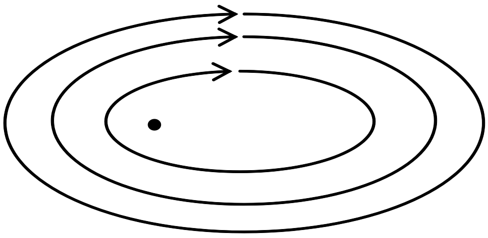


17-rasm.

v) agar $\alpha = 0, \beta \ne 0, \lambda_3 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ bo‘lsa, u holda ularga mos keluvchi umumiy yechim

$$x_i = C_1 p_{i1} \sin(\beta t + \delta) + C_2 q_{i1} \cos(\beta t + \delta) + C_3 p_{n3} e^{\lambda_3 t} + \cdots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t},$$
$$i = 1,2,\ldots,n,$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yechim Lyapunov ma‘nosida turg‘un, lekin, $t \to +\infty$ da $x_k(t), 1 \le k \le n,$ lar nolga intilmagani uchun yechim asipm-totik turg‘un emas. Sukut nuqta bu holda markaz, deb ataladi (18-rasmga qarang).



18-rasm.

§17. Laplas almashtirishlari

17.1. Bizga birinchi tartibli

$$y'(x)+y(x)=1$$

differentsial tenglamaning $y(0)=0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi, argumentning $x>0$ qiymatlari uchun, xususiy yechimini topish talab qilingan bo‘lsin.

Tenglamaning ikkala qismini e^{-px} ga ko‘paytirib 0 dan ∞ ga qadar integrallaymiz:

$$\int_0^\infty e^{-px}y'(x)\,dx+\int_0^\infty e^{-px}y(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-px}dx \qquad \textbf{(1)}$$

Tenglikning o‘ng tomonidagi integral $p>0$ lar uchun yaqinlashadi:

$$\int_0^\infty e^{-px}dx=-\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p}.$$

Tenglikning chap tomonidagi integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int_0^\infty e^{-px}y'(x)\,dx=e^{-px}\,y(x)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-px}y(x)\,dx$$

Agar $y(x)$ funktsiyaga, shunday musbat M va s_0 sonlar mavjudki, barcha $x\in[0,\infty)$ lar uchun $|y(x)|<Me^{s0x}$ tengsizlik o‘rinli, deb talab qo‘ysak, o‘ng tomondagi birinchi qo‘shiluvchi nolga aylanadi. Shuning uchun,

$$\int_0^\infty e^{-px}y'(x)\,dx=p\int_0^\infty e^{-px}y(x)\,dx.$$

U holda (1) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$(p+1)\int_0^\infty e^{-px}y(x)\,dx=\frac{1}{p}$$

yoki

$$\int_0^\infty e^{-px}y(x)\,dx=\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Agar $\int_0^\infty e^{-px}dx==\frac{1}{p}$ va $\int_0^\infty e^{-(p+1)x}dx==\frac{1}{p+1}$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$\int_0^\infty e^{-px}y(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-px}\left(1-e^{-x}\right)dx.$$

Bundan berilgan differentsial tenglamaning yechimi $y(x)=1-e^{-x}$ deyish mumkin.

Biz berilgan differentsial tenglamaning yechimini

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)\,dx$$

integral yordamida hisobladik. Bu integral *Laplas almashtirishi* deb ataladi. $F(p)$ funktsiya *Laplas almashtirishi* bo‘yicha tasvir, $f(x)$ funktsiya esa uning *originali* deb ataladi.

$f(x)$ funktsiyadan uning tasviriga o‘tish quyidagi

$$L\{f(x)\}=F(p) \quad \textbf{yoki} \quad f(x)\doteqdot F(p)$$

ko‘rinishda belgilansa, tasvirdan originalga o‘tish

$$L^{-1}\{F(p)\}=f(x) \quad \textbf{yoki} \quad F(p)\doteqdot f(x)$$

ko‘rinishda belgilanadi.

17.2. Xossalari.

1^0. Agar $f_i(x)\doteqdot F_i(p), i=1,2,...,n,$ va C_i lar ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, u holda $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)\doteqdot \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p).$

2^0. Agar $a>0$ va $f(x)\doteqdot F(p)$ bo‘lsa, u holda $f(ax)\doteqdot \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$

3^0. Agar $f(x)\doteqdot F(p)$ bo‘lsa, istalgan p_0 uchun $e^{-p_0x}f(x)\doteqdot F(p+p_0)$ bo‘ladi.

4^0. Agar $x_0>0$ va $f(x)\doteqdot F(p)$ bo‘lsa, $f(x-x_0)\doteqdot e^{-px_0}F(p)$ bo‘ladi.

5^0. Agar $x_0>0$ va $f(x)\doteqdot F(p)$ bo‘lsa,

$$f(x+x_0)\doteqdot e^{-px_0}\left[F(p)-\int_0^{x_0} e^{-px} f(x)\,dx\right]$$

bo‘ladi.

6^0. Agar $f(x)\doteqdot F(p)$ bo‘lsa, u holda $f'(x)\doteqdot pF(p)-f(0)$ bo‘ladi, xususan, agar $f(0)=0$ bo‘lsa, $f'(x)\doteqdot pF(p)$ bo‘ladi.

7^0. $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $f(x)$ funktsiya uchun $f(x) \doteqdot F(p)$ bo‘lsa, u holda $f^{(n)}(x) \doteqdot p^n F(p)$ bo‘ladi.

8^0. Agar $f(x) \doteqdot F(p)$ bo‘lsa, u holda $\int_0^x f(t)dt \doteqdot \frac{1}{p}F(p)$ bo‘ladi.

17.3. Elementar funktsiyalarning tasvirlari.

1) Quyidagi funktsiyani

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & agar\ t > 0\ bo'lsa, \\ 0, & agar\ t < 0\ bo'lsa \end{cases}$$

Xevisayning birlik funktsiyasi deyiladi. Bu funktsiya uchun $\sigma_0(x) \div \frac{1}{p}$.

2) Faraz qilaylik, $f(x) = sinx$ bo‘lsin. U holda

$$L\{\sin x\} = \int_0^\infty e^{-px}\sin x dx = \left.\frac{e^{-px}(-p\sin x - \cos x)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

Demak, $\sin x \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$.

3) Agar $f(x) = cosx$ bo‘lsa, u holda

$$L\{\cos x\} = \int_0^\infty e^{-px}\cos x dx = \left.\frac{e^{-px}(\sin x - p\cos x)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1},$$

ya'ni $cosx \div \frac{p}{p^2+1}$.

Endi 2^0-hossani qo‘llasak:

$$\sin ax \doteqdot \frac{a}{p^2+a^2} \quad \textbf{va} \quad \cos ax \doteqdot \frac{p}{p^2+a^2}$$

ekanligi kelib chiqadi.

1-misol. Quyidagi

$$f(x) = 3\sin 4x - 2\cos 5x$$

funktsiyaning tasvirini toping.

Yechish. 1^0-hossaga ko‘ra

$$L\{f(x)\} = 3L\{\sin 4x\} - 2L\{\cos x\} = 3\cdot\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

Xuddi shunday berilgan tasvir orqali uning originalini topish mumkin.

2-misol. Tasviri

$$F(p) = \frac{5}{p^2+4} + \frac{20p}{p^2+9}$$

bo‘lgan funktsiyaning originalini toping.

Yechish. Avval $F(p)$ ni qulay ko‘rinishda yozib olamiz:

$$F(p)=\frac{5}{2}\frac{2}{p^2+2^2}+20\cdot\frac{p}{p^2+3^2}=\frac{5}{2}\sin 2x+20\cos 3x.$$

4) $f(x)=e^{-\alpha x}$ bo‘lsin. U holda

$$L\left(e^{-\alpha x}\right)=\int_0^\infty e^{-px}e^{-\alpha x}dx=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)x}dx=\frac{1}{p+\alpha}.$$

Xuddi shunday

$$L\left(e^{\alpha x}\right)=\int_0^\infty e^{-px}e^{\alpha x}dx=\int_0^\infty e^{-(p-\alpha)x}dx=\frac{1}{p-\alpha}.$$

5) $f(x)=e^{-\alpha x}\sin ax$ bo‘lsin. U holda

$$L\left(e^{-\alpha x}\sin ax\right)=\int_0^\infty e^{-px}e^{-\alpha x}\sin axdx=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)x}\sin axdx=F(p+\alpha)=\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}.$$

Xuddi shunday

$$L\left(e^{-\alpha x}\cos ax\right)=\int_0^\infty e^{-px}e^{-\alpha x}\cos axdx=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)x}\cos axdx=F(p+\alpha)=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}.$$

6) $f(x)=x$ bo‘lsin. U holda

$$L(x)=\int_0^\infty e^{-px}xdx=-\frac{1}{p}xe^{-px}\Big|_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px}dx=-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p^2}.$$

7) Xuddi shunday $L\left(x^n\right)=\int_0^\infty e^{-px}x^n dx=\frac{n!}{p^{n+1}}.$

Agar 3^0-xossani va 6)-formulani qo‘llasak:

$$L\left(xe^{-\alpha x}\right)=\int_0^\infty e^{-px}xe^{-\alpha x}dx=\frac{1}{(p+\alpha)^2}.$$

va

$$L\left(x^n e^{-\alpha x}\right)=\int_0^\infty e^{-px}x^n e^{-\alpha x}dx=\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}.$$

8) $f(x)=x\sin ax$ bo‘lsin. U holda

$$L(x\sin ax)=\int_0^\infty e^{-px}x\sin axdx=\frac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}.$$

9) $f(x)=x\cos ax$ bo‘lsin. U holda

$$L(x\cos ax)=\int_0^\infty e^{-px}x\cos axdx=\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}.$$

Ayrim tasvirlar jadvali

№	$f(x)$	$F(p)$
1	$\sigma_0(x)$	$\frac{1}{p}$
2	$sinax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
3	$cosax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
4	$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
5	x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
6	$shax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
7	$chax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
8	$xsinax$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
9	$xcosax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
10	$xe^{-\alpha x}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$

17.4. Laplas almashtirishlarining differentsial tenglamalarga tadbig‘i

Faraz qilaylik, *n*-tartibli o‘zgarmas koeffitsientli differentsial tenglamaga

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$x\geq 0$ lar uchun Koshi masalasi qo‘yilgan bo‘lsin:

$$y(0)=0, y'(0)=0,\ldots,y^{(n-1)}(0)=0. \qquad \textbf{(2)}$$

Bu masalani yechish uchun unga Laplas almashtirishlarini qo‘llaymiz. (1) tenglamaning ikkala tarafiga Laplas almashtirishini qo‘llasak, 1^0- va 7^0-xossalarga asosan bu tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\left(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n\right)\tilde{y}(p)=F(p), \qquad \textbf{(3)}$$

bu yerda $L(y) = \tilde{y}(p), L(f) = F(p)$. (3) tenglamani *yordamchi tenglama* yoki *tasvirlavchi tenglama* deb atashadi. (3) ni $\tilde{y}(p)$ ga nisbatan yechib olamiz:

$$\tilde{y}(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}. \qquad \textbf{(4)}$$

Agar (4) tenglamadan teskari almashtirish orqali $\tilde{y}(p)$ ning originalini $y^*(x)$ topaolsak, yechimning yagonalik teoremasiga ko‘ra

$y^*(x) = y(x)$ bo‘ladi.

16-paragraf boshida ko‘rilgan misolni *tasvirlavchi tenglama* yordamida yechib ko‘raylik:

$$y'(x) + y(x) = 1$$
$$y(0) = 0.$$

Bu masalaning *tasvirlavchi tenglamasi* quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(p+1)\tilde{y}(p) = \frac{1}{p}.$$

Bundan

$$\tilde{y}(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

U holda tasvirlar jadvaliga ko‘ra $y(x) = 1 - e^{-x}$ ekanligi kelib chiqadi.

18-§. Differentsial tenglamalarni taqribiy hisoblash.

18.1. Eyler usuli. Bizga 1-tartibli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

differentsial tenglamaning

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishni talab etuvchi Koshi masalasi berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) nuqtaning biror atrofida mavjudlik teoremasining shartlarini qanoatlantirsin. Quyida keltiriladigan "Eyler[1)] usuli" (1)-(2) masalani analitik yechib bo‘lmaydigan hollarda, bu yechimning biror $y(d)$

[1)] Leonard Eyler (1707-1783)- ulug’ matematik, Rossiya fanlar akademiyasining akademigi, kelib chiqishi bo’yicha shveytsariyalik.

qiymatini, bu yerda $x_0 < d < x_0 + \delta$, taqriban hisoblash imkonini beradi. $[x_0, d]$ oraliqni

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = d$$

nuqtalar bilan n ta teng bo‘laklarga bo‘lamiz. $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqning $h = x_{i+1} - x_i$ uzunligini hisoblash qadami, deb ataymiz. Yechimning x_i nuqtadagi taqribiy qiymatini y_i bilan belgilaylik.

(1) tenglamada hosilani har bir $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtada orttirmalar nisbati bilan almashtiraylik:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i)$$

yoki

$$\Delta y_i = f(x_i, y_i)\Delta x,$$

bu yerda $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 1,2,\ldots,n.$ Xususan, $x = x_0$ nuqtada y_1 ni topish uchun

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$$

yoki

$$y_1 = y_0 + f(x_0 y_0)h \tag{3}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda x_0, y_0, h - lar ma’lum sonlar.

Agar $x = x_1$ desak:

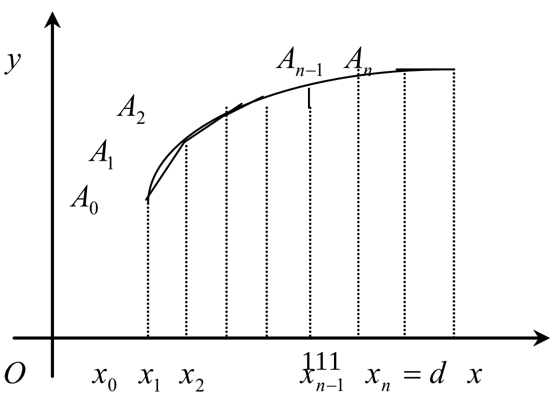
$$y_2 = y_1 + f(x_1 y_1)h$$

tenglik hosil bo‘ladi, bu yerda x_1, h - lar ma’lum sonlar, y_1 esa (3) dan topiladi. Bu jarayonni boshqa nuqtalar uchun davom ettirsak, quyidagi rekurrent formula hosil bo‘ladi:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Koordinatalar tekisligida $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ nuqtalarni birlashtirib, integral chiziqni taqriban ifodalovchi $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$ siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu chiziq "***Eyler siniq chizig‘i*** ", deb ataladi.

(1) tenglamaning $\Delta x = h$ bo‘lgandagi Eyler siniq chizig‘iga mos keluvchi taqribiy yechimini $y = y_n(x)$ deylik. Agar (1) tenglamaning (2)



19-rasm.

shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud bo‘lsa, u holda $[x_0, d]$ oraliqda $\{y_n(x)\}$ ketma-ketlik aniq yechimga tekis yaqinlashadi.

18.2. Runge-Kutta usuli. Bu usul (1)-(2) masala uchun Eyler usuliga nisbatan yuqori tartibli yaqinlashishni beruvchi usullardan biri hisoblanadi. Umuman Eyler usulini Runge-Kutta usulining xususiy holi, deb qarash mumkin.

Faraz qilaylik, taqribiy yechimning x_k nuqtadagi y_k qiymati topilgan bo‘lib, uning $x_{k+1} = x_k + h$ nuqtadagi y_{k+1} qiymatini hisoblash kerak bo‘lsin.

Agar (x_k, y_k) larni (1) ga va uning x bo‘yicha differentsiallangan ifodasiga qo‘ysak:

$$y_k' = f(x_k, y_k) \tag{5}$$

$$y_k'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'\right)_{\substack{x=x_k,\\ y=y_k}} \tag{6}$$

qiymatlarni topamiz.

Yechimning Teylor yoyilmasida $a = x_k, x = x_{k+1} = x_k + h$ deylik:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{2!} y_k'' + O(h^2).$$

Agar bu yerda (5) va (6) ifodalarni e‘tiborga olsak:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k' + \frac{h}{2} y_k'' + O(h^2) = f(x_k, y_k) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f\right)_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}} + O(h^2)$$

bo‘ladi. Ikkinchi qo‘shiluvchini biror $\alpha \neq 0$ songa ko‘paytirib bo‘laylik:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) + \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \alpha h f + O(h^2)\right)_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}} =$$

$$= f(x_k, y_k) - \frac{1}{2\alpha} f(x_k, y_k) + \frac{1}{2\alpha}\left(f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\alpha h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \alpha h f + O(h^2)\right)_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}} =$$

$$= \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} f(x_k, y_k) + \frac{1}{2\alpha} f(x_k + \alpha h, y_k + \alpha h f) = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} k_1 + \frac{1}{2\alpha} k_2,$$

bu yerda $k_1 = f(x_k, y_k)$, $k_2 = f(x_k + \alpha h, y_k + \alpha h k_1)$ deb belgilandi. Natijada quyidagi sxemaga keldik:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} k_1 + \frac{1}{2\alpha} k_2. \tag{7}$$

Bu formuladagi α sonni yaqinlashish tartibi imkon qadar yuqoriroq bo‘ladigan qilib tanlanadi. Aytish joizki, biz hosil qilgan (7) sxema har qanday $\alpha \neq 0$ son uchun ikkinchi tartibli yaqinlashishga ega.

18.3. 2-tartibli tenglama uchun progonka usuli. Bizga quyidagi chiziqli ikkinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{8}$$

differentsial tenglamaga

$$\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A,\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B \tag{9}$$

chegaraviy shartlar qo‘yilgan bo‘lsin, bu yerda $p(x), q(x), f(x)$ lar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funktsiyalardir. Bu masalani yechish uchun $[a,b]$ oraliqni teng n bo‘lakka bo‘lamiz. Bunda tugun nuqtalar orasidagi masofa, ya’ni qadam $h=\frac{b-a}{n}$ ga teng. $x_i = x_0 + ih,\ x_0 = a, x_n = b,\ i=\overline{1,n}$ va $p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i, f(x_i)=f_i$ belgilashlar kiritib, (8) tenglamani quyidagi chekli ayirmalar sistemasiga keltiramiz:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_i y_i = f_i,\ i=1,2,...,n-1. \tag{10}$$

Bir nechta elementar almashtirishlardan so‘ng (10) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$y_{i+1}+m_i y_i + n_i y_{i-1} = \tilde{f}_i h^2,\ i=0,1,...,n-1, \tag{11}$$

bu yerda

$$m_i = \frac{2-q_i h^2}{1+\frac{p_i}{2}h}, n_i = \frac{1-\frac{p_i}{2}h}{1+\frac{p_i}{2}h},\ \tilde{f}_i = \frac{f_i}{1+\frac{p_i}{2}h}.$$

deb belgilandi. Hosilaning chegaralardagi qiymatlarini bir tomonli chekli ayirmalar bilan almashtiramiz:

$$y_0' = \frac{y_1-y_0}{h},\ y_n' = \frac{y_{n-1}-y_n}{-h}.$$

Natijada (9) chegaraviy shartlar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1\frac{y_1-y_0}{h} = A,\ \beta_0 y_n + \beta_1\frac{y_{n-1}-y_n}{-h} = B. \tag{12}$$

(11) ni y_i ga nisbatan yechib olamiz:

$$y_i = \frac{\tilde{f}_i}{m_i}h^2 - \frac{1}{m_i}y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i}y_{i-1}. \tag{13}$$

Bu tenglamadan (11) va (12) lar yordamida y_{i-1} ni yo‘qotamiz:

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}), \tag{14}$$

bu yerda

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \; d_i = \tilde{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}, \; c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \; d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \quad (15)$$

Avval (15) formulalar yordamida ketma-ket barcha c_i va d_i , $i=1,2,\dots,n-1$ larni va

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 \left(c_{n-1} + 1\right)}$$

ni hisoblab olamiz (**to‘g‘ri yo‘nalish**), so‘ngra (14) formula yordamida qolgan $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ larni hisoblaymiz (**teskari yo‘nalish**).

Bu usul "***progonka usuli***", deb ataladi.

MUNDARIJA

D. G. RAXIMOV

DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

(O'quv qo'llanma)

Toshkent – «Nihol print» OK – 2021

Muharrir: Q. Matqurbonov
Tex. muharrir: A. Tog'ayev
Musavvir: B. Esanov
Musahhiha: G. Tog'ayeva
Kompyuterda sahifalovchi: B. Berdimurodov

Nashr.lits. AI №176. 11.06.11.
Bosishga ruxsat etildi: 10.07.2020. Bichimi 60x841 /16.
Shartli bosma tabog'i 7,75. Nashr bosma tabog'i 7,5.
Adadi 100. Buyurtma № 21.