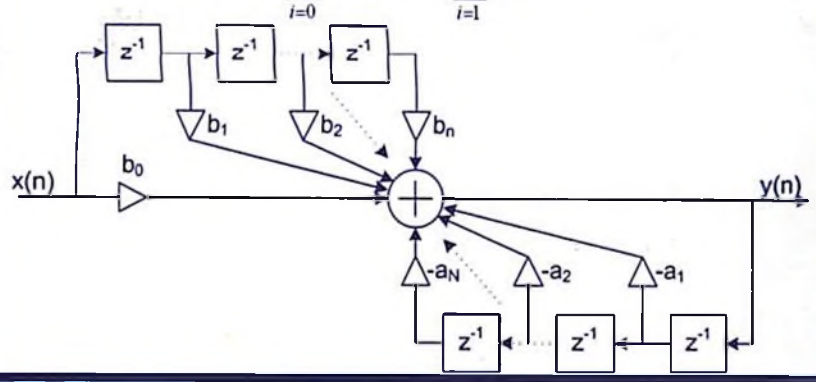
А.А. Абдуазизов, И.Р. Фазилжанов, Я.Т. Юсупов

СИГНАЛЛАРГА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$$



Ўзбекистон алоқа ва ахборотлаштириш агентлиги

Тошкент ахборот технологиялари университети

А.А. Абдуазизов, И.Р. Фазилжанов, Я.Т. Юсупов

СИГНАЛЛАРГА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

Тошкент 2012

А.А.Абдуазизов, И.Р. Фазилжапов, Я.Т.Юсупов. Сигналларга рақамли ишлов бериш. Ўқув қўлланма. 132 бет.

Мазкур ўқув қўлланмада сигналларни таърифлаш ва сигналларга рақамли ишлов бериш умумлашган схемаси, дискрет сигналларни алмаштириш, Фурье дискрет алмаштириши (ФДА) ва тескари ФДА, Уолш алмаштириши, Адамар алмаштириши, Вейвлет алмаштириши, Z-алмаштириш, корреляция ва ўрам ҳамда уларнинг хоссалари, рақамли фильтрларни яратиш асослари, рақамли фильтр коэффициентларини ҳисоблаш, импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрларни лойиҳалаш ва унинг босқичлари, импульс характеристикаси чекли ва чексиз рақамли фильтрлар техник характеристикалари, импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрлар коэффициентларини ҳисоблаш усуллари, турли тезликларда сигналларга ишлов бериш асослари, адаптив фильтрлар ҳақида асосий тушунчалар ва адаптив фильтрлардан амалий фойдаланиш етарли даражада ёритилган.

Ўқув қўлланма олий ўқув юртларининг "Радиотехника", "Телевидение, радиоалоқа ва радиоэшиттириш", "Мобиль алоқа тизимлари" таълим йўналишлари талабалари учун мўлжалланган.

Тақризчилар: Назаров А.М. – ТДТУ Электроника ва автоматика факультети декани, т.ф.д., профессор;
Д.А. Давронбеков – ТАТУ Радиоалоқа қурилмалари ва тизимлари кафедраси доценти, т.ф.н.

КИРИШ

Ҳозирги замон рақамли радиоэлектрон қурилмалари ва тизимлари халқ хўжалигининг турли соҳалари (радиоалока, телевидение, космик учиш аппаратлари, радиобошқарувли ракеталар, радиолокацион тизимлар, медицина қурилмалари)да кенг қўлланилади. Ушбу қурилмаларни яратиш ва улардан унумли фойдаланиш инженер-техник ходимлардан чуқур билим талаб қилади.

Сигналларга рақамли ишлов бериш (СРИБ) фани Радиотехника, Мобил алоқа тизимлари, Телевидение, радиоалоқа ва телерадиоэшиттириш йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлаш ўқув режасидаги танлов фанлари қаторига киради.

Фан ўз навбатида Электр занжирлар назарияси, Дискрет математика, Электроника ва Схемотехника, Радиотехник занжирлар ва сигналлар, Сигналларни шакллантириш ва ишлов бериш, Рақамли техника ва микропроцессор фанларидан талабалар олган билимига асосланади.

Фанни ўрганиш жараёнида талабалар қуйидагиларни ўрганиши керак:

- аналог сигналларни рақамли сигналларга айлантириш ва рақамли қайта ишлаш услубларининг асосий ривожланиш йўналишлари, сигналларга рақамли ишлов бериш ва фильтрлаш;
- турли кўринишдаги сигналларни шакллантириш, уларни таҳлил этиш ва синтезлаш, рақамли фильтрлаш ва уларга ишлов беришнинг замонавий услублари;
- сигналларга рақамли ишлов беришда z-алмаштириш, Уолш, Адамар, Вейвлет, Фурье тез алмаштиришлари, рақамли фильтрларни яратиш (лойиҳалаш), импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрларни лойиҳалаш, турли тезликларда сигналларга рақамли ишлов бериш, таҳлил этиш ва адаптив фильтрлар тўғрисида тушунчага эга бўлишлари керак.

СРИБ фани назарий билимларни амалий тарзда мустаҳкамлашга имконият беради. Турли рақамли узатиш ва қабуллаш қурилмалари ва тизимларининг асосий функционал қисмларидаги физик жараёнлар, уларнинг асосий кўрсаткичларини оптималлаш имкониятини беради. Уларни замонавий элементлар асосида яратиш устидаги билимларни амалда тадбиқ этишга шароит ва кўникма яратади.

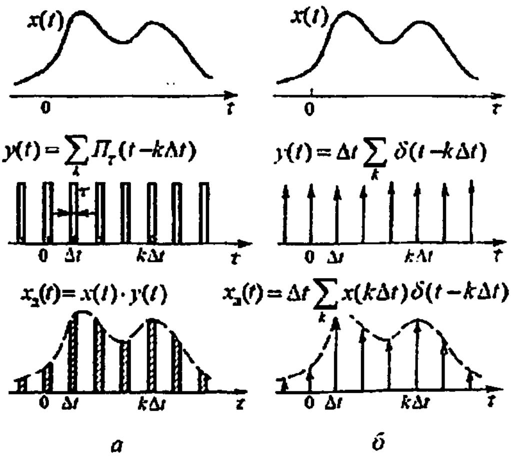
Ўқув қўлланма олий ўқув юртларининг “Радиотехника”, “Телевидение, радиоалоқа ва радиоэшиттириш”, “Мобил алоқа тизимлари” таълим йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлашга мўлжалланган бўлиб, ундан “Телекоммуникация” таълим йўналиши талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

1. СИГНАЛЛАРНИ ТАЪРИФЛАШ ВА СИГНАЛЛАРГА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ УМУМЛАШГАН СХЕМАСИ

1.1. Сигналларнинг асосий турлари

Сигналларнинг асосий турларига қуйидагилар киради: аналог, дискрет ва рақамли.

Аналог сигналлар узлуксиз ва бўлаклари узлуксиз $x(t)$ функция билан ифодаланади, бунда функциянинг ўзи ва аргументи ҳар қандай қийматларни қабул қилиши мумкин, яъни $t_1 \le t \le t_2$, $x_1 \le x \le x_2$ (1.1*а*-расм).



1.1-расм. Узлуксиз сигнални дискретлаш.

Дискрет сигнал $x_д(t)$ узлуксиз сигнал $x(t)$ ни дискретизациялаш функцияси $y(t)$ га кўпайтириш натижасида хосил қилинади. Бунда $y(t)$ дискретлаш функцияси Δt одим билан даврий такрорланувчи кичик давомийли импульслар кетма-кетлиги (1.1*а*-расм)дан фойдаланилади. Идеал ҳолатда дискретлаш функцияси сифатида дельта-функциялар даврий кетма-кетлигидан фойдаланилади (1.1*б*-расм).

$T = k\Delta t$ оралиқ дискретлаш даври деб аталади, унга тескари бўлган катталик дискретлаш частотаси деб аталади,

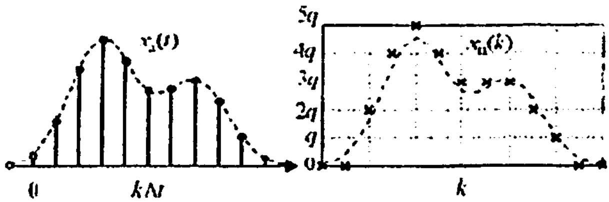
$$f_n = \frac{1}{T}.$$

Дискрет сигналнинг nT вақтлаги қийматлари унинг оний қийматлари деб аталади. Дискрет сигнал ҳақиқий ёки комплекс бўлиши мумкин.

Комплекс сигналнинг ҳақиқий ва мавҳум қисми ҳақиқий кетма-кетликлар орқали ифодаланади

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

Рақамли сигнал $x_р(t)$ квантланган панжарасимон функция (1.2-расм), яъни қатор дискрет сатхларни квантлаш сатҳи mq қийматларга nT вақтларда эга бўлувчи панжарасимон функциядир. Бунда q – сатх бўйича квантлаш одими, m – квантлаш оралиғи тартиб рақами, $m = 0, 1, 2, ..., M-1$, $M = 2^n$ бўлиб, n – бутун мусбат сон.



1.2-расм. Рақамли сигнал.

Рақамли сигнал чекланган разрядли сонлар кетма-кетлиги орқали ифодаланади. Баъзан дискрет ва рақамли сигналларни ифодалашда нормаллаштирилган вақт i тушунчасидан хам фойдаланилади, яъни

$$i = \frac{t}{T},$$

деб қабул қилинади ва у $t = nT$ бўлса, олинган оний қиймат тартиб рақами n ни англатади, n-чи дискрет вақт $n = \frac{t}{T} = i$. Нормаллаштирилган вақт тушунчаси дискрет сигнал $x_д(t)$ ни ўзгарувчан бутун сон функцияси $x(n)$ шаклида ифодалаш имкониятини беради. Бунда дискрет сигнални ифодалаш учун бир-бирига айнан тенг қуйидаги ифодалардан фойдаланиш мумкин:

$$x(n) \text{ ва } x(nT); \; x(nT) \equiv x[n].$$

1.2. Дискрет сигналларнинг математик моделлари

Дискрет сигнални қуйидаги математик ифодалар орқали аниқлаш мумкин:

– дискрет вақт функцияси $nT_д$: $x(nT_д) = x(t)|t = nT_д$, бунда $n = 0, 1, 2, ...,$ лар аналог сигналнинг дискрет даврий такрорланувчи вақтдаги оний (танланган) қийматларига мос келувчи нормаллаштирилган вақт;

– олинган қиймат тартиб рақами n-функцияси: $x(n)=x(nT_д)|T_д=1$, умуман олганда вақт билан тўғридан-тўғри боғланмаган;

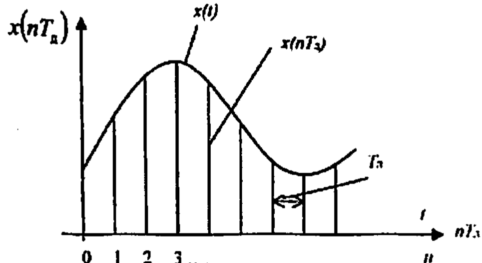
– узлуксиз вақт функцияси:

$$x(t)=x(t)f_\delta(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_д)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_д)\delta(t-nT_д) \qquad (1.1)$$

аналог сигнал $x(t)$ ни дискретлаш функцияси $f_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_д)$ га кўпайтириш натижасида қуйидаги чексиз киска давомийли импульслар даврий кетма-кетлиги учун ифодани оламиз:

$$\delta(t-nT_д)=\begin{cases}\infty, t=nT_д,\\ 0, t\neq nT_д.\end{cases}$$

Дискрет сигналлар танлаш тартиб рақами n ёки дискрет вакт $nT_д$ функцияси кўринишида тасвирланиши мумкин (1.3-расм).



1.3-расм. Узлуксиз $x(t)$ ва дискрет $x(nT_д)$ сигнал графиклари.

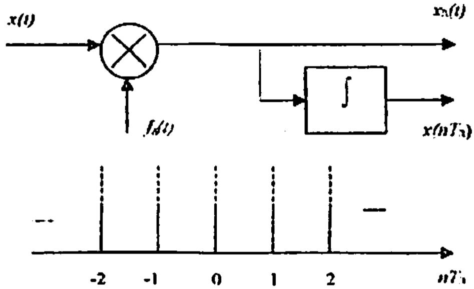
1.3-расмда келтирилган вакт узлуксиз функциясини дискрет сигнал $x(nT_д)$ га мос келувчи аналог $x(t)$ сигналга ёки $x(n)$ ўровчисига тенглаштириш мумкин.

$x_д(t)$ ва $x(nT_д)$ сигналлари бир-бири билан чизикли боғликликда

$$x(nT_д)=\int_{(n-0.5)T_д}^{(n+0.5)T_д}x_д(t)dt$$

ва бир хил хоссаларга эга, аммо ўлчов бирликлари турлича.

Танланган оний кийматларни тартиб рақами n орқали ифодаланган сигналларни рақамлар кетма-кетлиги деб ҳам аталади. Узлуксиз вакт функцияси (1.1) ни дискрет сигнал кўринишида аниқлаш баланс модуляция сигналига ёки даврий такрорланувчи $f_\delta(t)$ δ импульслар $x(t)$ дискретланган сигналлар оний қийматларига пропорционал юзага эга бўлган импульслар кетма-кетлиги ёки унинг $x(nT_д)$ вақтларидаги импульслар оний қийматларига кўпайтмасига тенг деб ҳисоблаш мумкин (1.4-расм). Бу таъриф аналог сигнал ва тизимларни таърифловчи усуллар (метод) ёрдамида математик ифодаларни олиш ҳамда уларни дискрет сигнал ва тизимларга хос хусусиятлар (кўрсаткичлар) билан солиштириш имконини беради.



1.4-расм. Сигнални вақт бўйича дискретлаш эквивалент схемаси.

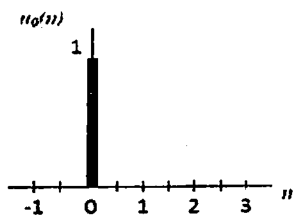
1.3. Синов дискрет сигналлари

Сигналларга рақамли ишлов бериш (СРИБ)да бир қатор сигнал турларидан таъсир этувчи синов сигналлари сифатида фойдаланилади. Энг кўп фойдаланиладиган синов сигналларига қуйидаги сигналлар киради:

1. *Рақамли бирлик импульс*, қуйидаги кетма-кетлик билан ифодаланади:

$$u_0(n)=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.2}$$

яъни, бу сигнал $n=0$ бўлганда бирга тенг ва n нинг бошқа ҳамма қийматларида нольга тенг бўлади (1.5-расм).

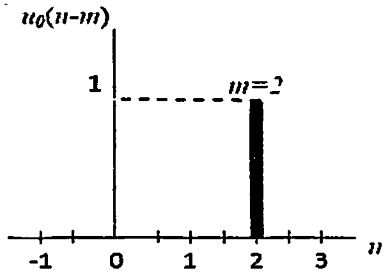


1.5-расм. Рақамли бирлик импульс.

Кечиктирилган (ушланиб қолган) рақамли бирлик импульс қуйидаги кетма-кетлик орқали ифодаланади:

$$u_0(n-m)=\begin{cases}1, & n=m;\\ 0, & n\neq m\end{cases} \quad (1.3)$$

яъни, бу сигнал кечиктирилмаган сигналдан фарклирок, $n=m$ бўлганда бирга тенг ва n нинг бошка ҳамма кийматларида нольга тенг бўлади (1.6-расм).



1.6-расм. Кечиктирилган ракамли бирлик импульс.

Кечиктирилган рақамли бирлик импульс таърифидан куйидаги тенглик келиб чиқади

$$x(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x(m)u_0(n-m). \quad (1.4)$$

2. *Рақамли битта сакраш* қуйидаги кетма-кетлик билан ифодаланади

$$u(n)=\begin{cases}1, n\geq 0;\\ 0, n<0.\end{cases} \quad (1.5)$$

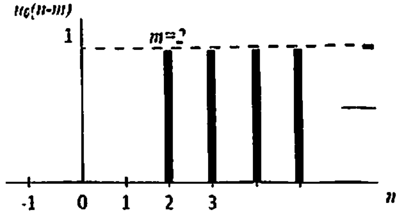
яъни, бу сигнал n нинг ҳамма манфий бўлмаган қийматларида бирга тенг (1.7-расм).

1.7-расм. Ракамли битта сакраш.

Кечиктирилган рақамли бирлик сакраш қуйидаги кетма-кетлик оркали ифодаланади

$$u_1 = (n-m)\begin{cases}1, & n \geq m;\\ 0, & n < m.\end{cases} \quad (1.6)$$

яъни, бу сигнал кечиктирилмаган сигналдан фарқлирок, $n \geq m$ нинг ҳамма қийматларида бирга тенг ва n нинг бошка ҳамма қийматларида нолга тенг бўлади (1.8-расм).



1.8-расм. Кечиктирилган рақамли битта сакраш.

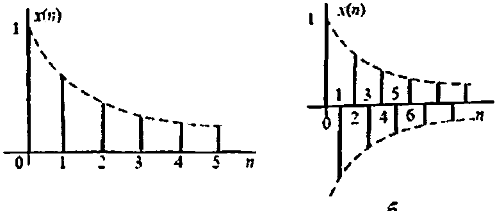
3. *Дискрет экспонента* куйидаги кетма-кетлик оркали ифодаланади

$$x(n) = \begin{cases}a^n, n \geq 0.\\ 0, n < 0.\end{cases} \quad (1.7)$$

бунда, a – ҳақиқий ўзгармас катталик (константа).

a нинг қиймати ва белгиси (+ ёки -) га боғлиқ равишда дискрет экспонента куйидагича номланади:

- $|a|<1$ ва $a>0$ – кичиклашувчи белгиси ўзгармас (1.9*а*-расм) $|a|=1$, $a<0$;
- $|a|<1$ ва $a<0$ – кичиклашувчи ўзгарувчан белгили (1.9*б*-расм);
- $|a|>1$ – катталашувчи (ўсувчи);
- $|a|=1$ ва $a>0$ – рақамли бирлик сакраш (1.7-расм);
- $|a|=1$ ва $a<0$ – белгиси ўзгарувчан бирликлар кетма-кетлиги.



а *б*

1.9-расм. Белгиси ўзгармас (*а*) ва
белгиси навбат билан ўзгарувчи (*б*) дискрет экспоненталар.

4. *Дискрет гармоник сигнал*, мисол учун дискрет косинусоида қуйидаги кетма-кетлик орқали ифодаланади

$$x(nT) = x(n) = A\cos(2\pi f nT_д) = A\cos(\omega nT_д). \tag{1.8}$$

бунда $T_д$ – дискретлаш даври; A – амплитуда; ω - айланма частота бўлиб, циклик (даврий) частота f билан пропорционаллик коэффициенти 2π орқали боғланган ($\omega = 2\pi f$).

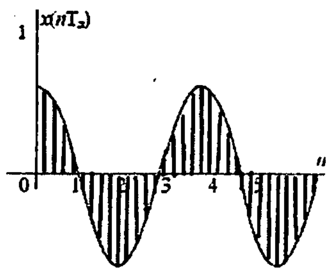
Дискрет косинусоида аналог косинусоидадан узлуксиз вақтли дискрет вақт $nT_д$ билан алмаштириш орқали олинади, яъни

$$x(t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\omega t)$$

бўлса ва узлуксиз вақт t ни $nT_д$ билан алмаштириш натижасида қуйидагини оламиз (1.10-расм)

$$x(nT) = x(n) = A\cos(\omega t)|_{t=nT_д} = A\cos(\omega nT_д). \tag{1.9}$$

Дискрет синусоида ҳам шунга ўхшаш шаклда ифодаланади.



1.10-расм. Дискрет косинусоида.

5. *Дискрет комплекс гармоник сигнал*, комплекс кетма-кетлик билан ифодаланади

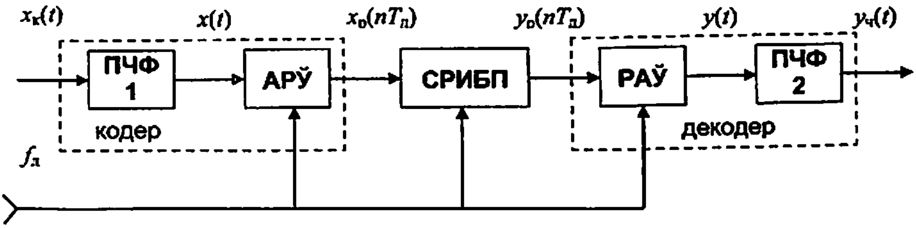
$$x(n) = Ae^{j\omega nT_д}$$

ёки икки ҳақиқий кетма-кетлик: косинусоида (ҳақиқий қисми) ва синусоида (мавҳум қисми) орқали ифодаланиши мумкин

$$x(nT) = A\cos(\omega nT_д) + jA\sin(\omega nT_д).$$

1.4. Сигналларга рақамли ишлов бериш умумлашган схемаси

Бирламчи кириш аналог сигнали $x_к(t)$ ни бошқа чиқиш аналог сигнали $y_ч(t)$ га берилган алгоритм асосида рақамли ҳисоблаш техникаси ёрдамида ўзгартириш жараёни кетма-кетлиги 1.11-расмда келтирилган.



1.11-расм. Сигналларга рақамли ишлов бериш умумлашган схемаси.

Сигналларга рақамли ишлов беришда қуйидаги уч босқични алоҳида ажратиш мумкин:

- бирламчи сигнал $x_к(t)$ дан рақамли $x_р(nT_д)$ ни шакллантириш;
- рақамли сигнал $x_р(nT_д)$ асосида рақамли $y_р(nT_д)$ сигналини шакллантириш;
- натижавий чиқиш аналог сигнал $y_ч(t)$ ни рақамли $y_р(nT_д)$ асосида шакллантириш.

СРИБ умумлашган схемасида бу уч босқичга уч функционал қурилма мос келади:

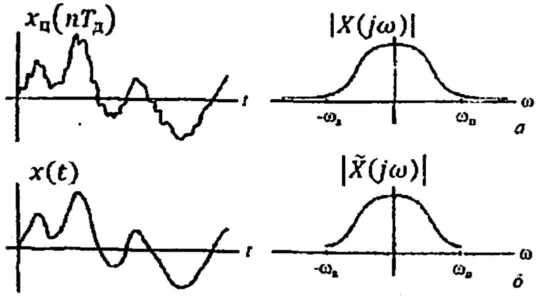
- кодер;
- СРИБ процессори;
- Декодер.

Биринчи босқичда кодер бирламчи кириш аналог сигнал $x_к(t)$ ни $x_р(nT_д)$ рақамли шаклга келтиради, чунки бу шакллантиришни амалга оширмасдан сигналларга рақамли ишлов бериш умуман мумкин эмас. Кодер таркибига аналог паст частоталар фильтри (ПЧФ-1) ва аналог-рақам ўзгартиргич (АРЎ) киради. Паст частоталар аналог фильтри бирламчи сигнал $x_к(t)$ спектри $x(j\omega)$ ни чегаралашга хизмат қилади.

Бирламчи сигнал спектрини чегаралаш Котельников теоремаси талабидан келиб чиқади, чунки бу теоремага асосан дискретлаш частотаси $f_д$ қуйидаги шарт асосида танланади: $f_д \geq 2f_ю$, бунда $f_ю$ – сигнал спектри энг юқори частотаси.

Сигнал спектрини чегаралаш имконияти унинг энергиясининг ўзига хос хусусиятиига боғлиқ: сигнал энергиясининг асосий қисми $f \leq f_ю$ да тўпланган, яъни сигнал спектрал ташкил этувчилари амплитудаси қандайдир $f > f_ю$ дан бошлаб кескин кичиклашади. Сигнал юқори частотаси $f_ю$ ни чегаралаш сигнал турига ва ечиладиган масалага боғлиқ. Аудио ва видеосигналларга ишлов беришда $f_ю$ ушбу сигналларни қабуллаш импульс характеристикаси физиологик хусусиятларига боғлиқ. Мисол учун, стандарт телефон сигнали учун $f_ю = 3{,}4$ кГц ва минимал дискретлаш частотаси $f_д = 8$ кГц.

ПЧФ чиқишида частотаси спектри чегараланган (финит) $x(t)$ спектри $\tilde{x}(j\omega)$ бўлган аналог сигнал шакллантирилади (1.12-расм). Аналог-рақам ўзгартиргич $x(t)$ сигнални дискретлаш ва квантлаш натижасида ўз чиқишида рақамли $x_р(nT_д)$ сигнални шакллантиради.



1.12-расм. Сигналлар ва уларнинг ПЧФ кириши (a) ва чиқишидаги ($б$) амплитуда спектрлари.

Вақт бўйича дискретизациялаш (оддий дискретизациялаш) жараёни аналог $x(t)$ сигналдан дискретлаш одими даври $T_д$ га тенг оралиқларда унинг оний қиймат (ҳисоб)ларини аниқлашдан иборат. Рақамли сигнал $x_р(nT_д)$ ўлчови $x(t)$ сигналнинг $t = nT_д$ вақтдаги оний қийматларига тенг (мос) келади:

$$x_ц(nT_д) = x(t)\big|_{t=nT_д}.$$

Сатҳ бўйича квантлаш (квантлаш) рақамли сигнал $x_р(nT_д)$ нинг аниқ ўлчовлари $x_р(nT_д)$ ларини чекланган разрядли иккилик сонлар – квантланган ўлчов $x_р(nT_д)$ лар орқали ифодалаш мақсадида амалга оширилади. Бунинг учун дискрет сигнал $x(nT_д)$ нинг динамик диапазони сони чекланган дискрет сатҳларига – квантлаш сатҳларига бўлинади ва ҳар бир ўлчовга маълум қоида асосида унга энг яқин бўлган сатҳлардан бири бириктирилади. Квантлаш сатҳлари умумий сатҳлар сони R га боғлиқ равишда разрядлари сони b га тенг бўлган иккилик код билан кодланади:

$$R \le 2^b,$$

бундан $b = \mathrm{int}(\log_2 R)$, int – олинган натижа юқори томондаги бутун сонни олиш амалини бажаришини англатади.

Квантланган ўлчов $x_р(nT_д)$ ни ($n = 0, 1, ...$) кодлаш натижасида олинган иккилик сигнал рақамли сигнал деб аталади.

Аналог сигнални рақамлига ўзгартириш натижасидаги квантлаш хатолиги $\varepsilon_{кв}(n)$ аввалдан маълум ва тасодифий қисмини баҳолаш қуйидагича ифодаланади:

$$\varepsilon_{кв}(n) = x(nT_д) - x_р(nT_д).$$

Иккинчи босқичда СРИБ процессори рақамли сигнал $x_р(nT_д)$ ни рақамли сигнал $y_р(nT_д)$ га берилган алгоритм асосида ўзгартиради. СРИБ процессори (СРИБП) ўрнига сигналларга рақамли ишлов бериш махсус дастур асосида амалга оширилиши мумкин.

Умуман олганда СРИБ қурилмалари (СРИБП ёки дастурий амалга оширилиши) реал вақт ёки нореал вақтларда ишлаши мумкин. Сигналларга реал вақтда ишлов бериш кириш сигнали $x(t)$ нинг ўлчовлари $x_р(nT_д)$ ($n = 0, 1, ...$) нинг унинг кириши тезлигига қараб шу онда амалга оширилиши керак ва қуйидаги талабларни қондириши лозим.

- $y_р(nT_д)$ нинг ўлчовларини ҳисоблаш цикли вақти $\Delta t_ц$ $x_р(nT_д)$ нинг икки қўшни ўлчовлари орасидаги вақтдан катта бўлмаслиги, яъни дискретлаш вақти $T_д$ дан кичик бўлиши керак:

$$\Delta t_ц \le T_д.$$

- процессор такт частотаси $x_р(nT_д)$ сигнал дискретлаш частотаси $f_д$ дан анча катта бўлиши керак,

$$f_т >> f_д.$$

Охирги талаб $y_р(nT_д)$ битта ўлчамини ҳисоблашга керакли СРИБ алгоритмларидаги бажариши керак бўладиган амаллар сони жуда кўплигидан келиб чиқади.

Мисол учун, дискретлаш частотаси 8 кГц бўлган стандарт телефон сигнали учун такт частотаси 6 МГц дан кичик бўлмаслиги керак. Бирламчи аналог сигнал $x(t)$ ни рақамли алоқа каналари, шу жумладан Internet орқали узатиш уларга реал вақтда ишлов беришни талаб қилади. СРИБлар реал вақтда ишлов беришини талаб қиладиган вазифаларга қуйидагилар киради: сигналларни қидириб топиш, фильтрлаш, сиқиш, танлаш ва ҳ.к.

Сигналларни тадқиқот қилиш билан боғлиқ бўлган СРИБ нореал вақтда бажарилиши мумкин. Нореал вақтда СРИБ вазифаларига қуйидагилар киради: аудио ва видео сигналларга студияда ишлов бериш, турли физик табиий катталикларни электр сигналига ўзгартириб берувчи (датчик) қурилмалардан олинган маълумотларга ишлов бериш ва бошқалар.

–Учинчи босқичда рақамли сигнал $y_р(nT_д)$ асосида декодер натижавий чиқиш сигнали $y_{чик}(t)$ ни шакллантиради. Декодер таркибига рақам-аналог ўзгартиргич (РАЎ) ва силлиқловчи паст частоталар фильтри (ПЧФ-2) киради. Рақам-аналог ўзгартиргич рақамли сигнал $y_р(nT_д)$ ни зинасимон аналог сигнал $y(t)$ га айлантиради. Силлиқловчи фильтр РАЎ чиқишидаги $y_{чик}(t)$ даги зинасимон ўзгаришларни текислайди.

Назорат саволлари

1. Сигналларнинг асосий турларини айтинг ва уларга қисқа таъриф беринг.

2. Вақт ва сатҳ бўйича дискретлаш деганда нимани тушунасиз?

3. Котельников теоремасини айтиб беринг.

4. Рақамли сигнал деб қандай сигналга айтилади?

5. Рақамли сигнал нима учун математик ифодани ёзинг ва тушунтириш беринг.

6. Вақт бўйича дискретлаш ва сатҳ бўйича квантлаш ҳақида чизма асосида сўзлаб беринг.

7. Квантлаш хатолиги нимани англатади ва унинг қиймати нимага тенг?

8. Рақамли сигнал кодлари разрядлари сони нимага боғлиқ.

9. Дискрет сигнал математик модели ҳақида тушунча беринг.

10. Тажриба сигналлари турларини санаб ўтинг ва улар ҳақида нималарни биласиз?

11. Сигналга ишлов бериш умумлашган структуравий схемасини чизинг ва ҳар бир ташкил этувчисининг вазифасини айтиб беринг.

2. ДИСКРЕТ СИГНАЛЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Сигнал ва функцияларни одатдагича, уларнинг қийматларини маълум аргументлар (вақт, чизиқли ёки фазовий координаталар ва шунга ўхшашлар) билан ташқари маълумотларга ишлов бериш ва уларни таҳлил этишда сигналларни аргументи динамик шаклда ифодалашдагига тескари бўлган аргументли математик ифодалардан ҳам кенг фойдаланилади. Мисол учун, вақтга тескари бўлган аргумент бу частотадир. Бу шаклда ифодалаш ушбу сигнал ўзининг берилган вақт оралиғида чексиз кўп бўлмаган қийматларга эга бўлса, ҳар қандай мураккаб кўринишдаги сигнални нисбатан содда, оддий элементар сигналлар йиғиндиси орқали ифодалаш мумкин, ва хусусий ҳолда оддий гармоник тебранишлар йиғиндиси кўринишида, яъни Фурье алмаштириши орқали бажарилиши мумкин. Юқоридагидан келиб чиққан ҳолда сигнални элементар гармоник ташкил этувчиларга ёйиш узлуксиз ёки бошлангич фазаси қийматлари орқали ифодаланади. Узлуксиз ёки дискрет вақт аргументлари уларга тескари бўлган ифодалашга мос келади. Сигнал ёйилган гармоник ташкил этувчиларнинг мажмуаси ушбу сигналнинг амплитуда спектри деб аталади ва бошланғич фазалар мажмуаси фаза спектри деб аталади. Ушбу икки спектр сигналнинг тўлиқ спектрини ташкил этади ва бу математик ифода ўз аниқлиги билан сигнални динамик кўринишда ифодалашга тўлиқ мос келади.

Фурье гармоник қаторидан ташқари сигнални яна бошқа кўринишдаги элементар ташкил этувчиларга ёйишлардан ҳам фойдаланилади, булар Уолш, Адамар, Вейвлет ва бошқалардир. Бундан ташқари Чебишев, Лаггер, Лежандр полиномлари ва бошқаларга ёйиш усуллари ҳам мавжуд. Сигналларга рақамли ишлов беришда Фурье дискрет алмаштириши (ФДА) ва уни тезкор ҳисоблаш усули – Фурье тез алмаштириши (ФТА) дан кенг фойдаланилади. Бунга бир неча сабаблар бор: улар частоталар координатасида энг қисқа вақт давом этадиган сигналлардан (<1с) ташқари сигналларни тўлиқ – аниқ ифодалайдилар; частота бўйича қисқартирилган Фурье ташкил этувчилари маълумотларни бошқа даражали қаторларга нисбатан аниқроқ ифодалайди. Унинг алоҳида ташкил этувчилари синусоида кўринишида бўлиб, чизиқли тизимлар орқали узатилганда бузилмайдилар (ўз шаклларини ўзгартирмайдилар), шу сабали улардан яхши синов сигналлари сифатида фойдаланиш мумкин.

Сигналларни элементар ташкил этувчиларга ёйишда асосий шарт бирқийматлик ва математик ифоданинг тўлиқ мослиги – ёйилаётган элементар функциялар ўзаро ортогонал бўлишлари керак. Аммо сигнал сифатли таҳлил этилган тақдирда уларнинг фойдали физик маълумотларини акс эттириш учун керакли, ўзига хос хусусиятларини кўрсатувчи ноортогонал функциялардан ҳам фойдаланиш мумкин. Сигналларга рақамли ишлов беришда энг кўп қўлланиладиган сигналларни ёйиш усулларини кўриб чиқамиз.

2.1. Фурье қатори

Ҳар қандай даврий сигнал $S(t)$ ни чексиз кўп синусоидал ва косинусоидал аргументи каррали ташкил этувчилар ва доимий ташкил этувчи йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. Бундай ифодалаш Фурье қаторига ёйиш деб аталади ва қуйидаги математик ифода орқали ифодаланади

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega T)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega T), \tag{2.1}$$

бунда t – мустақил ўзгарувчи бўлиб, одатда вақтни англатади, аммо у масофа ёки ҳар қандай бошқа катталик бўлиши мумкин; $S(t)$ – кўп ҳолларда кучланиш функциясининг аргумент вақтга боғлиқлигини билдиради, аммо ҳар қандай бошқа сигнални ҳам билдириши мумкин; $\omega=2\pi/T_p$ – циклик частота асосий (биринчи) гармоникаси бўлиб, асосий даврий частота f билан $\omega=2\pi f$ кўринишида боғлиқ, T_p – сигнал такрорланиш даври.

Фурье қатори доимий ташкил этувчиси a_0 қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}S(t)dt.$$

Сигналнинг доимий ташкил этувчиси $S(t)$ сигналнинг бир давр вақт бўйича ўртача қийматига мос келади. Мисол учун ўзгармас кучланиш сатҳи

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}S(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}S(t)\sin(n\omega t)dt.$$

$n\omega$ частота ω частотанинг n-чи гармоникаси дейилади. Демак чексиз қатор частотага боғлиқ бўлган турли амплитудали a_n ва b_n косинусоидал ва синусоидал частоталари мусбат $n\omega$ гармоникали ташкил этувчилардан иборат. Бу қаторни экспоненциал функция ёрдамида импульс характеристикаси ихчамроқ шаклда ҳам ифодалаш мумкин

$$S(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n e^{in\omega t}, \tag{2.2}$$

бунда $$d_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} S(t) e^{-in\omega t} dt \tag{2.3}$$

комплекс сонлар бўлиб, $|d_n|$ – вольтларда баҳоланадиган катталик.

(2.1) ифодада элементар ташкил этувчилар йиғиндисини аниқлашда n нинг манфий қийматлари ҳам ҳисобга олинади, қаторнинг ярим ташкил этувчилари $n\omega$ манфий частотага эга бўлади. Улар физик қийматга эга бўлмайдилар ва фақат математик тушунчалар бўлиб, бунинг натижасида комплекс амплитуда d_n ларнинг модуллари $|d_n|$ миқдор жиҳатдан икки марта кичик қилиб олинган. Бу мусбат ва манфий частоталарда мос амплитудалар бир-бирига тенг этиб тақсимланганлигини англатади. Натижада частотаси $n\omega$ бўлган ташкил этувчининг ҳақиқий қиймати ҳисоблаб аниқланган қийматни иккига кўпайтириш орқали аниқланади.

Сигналнинг комплекс ва тригонометрик шаклдаги ифодалари бир-бири билан қуйидагича боғланган:

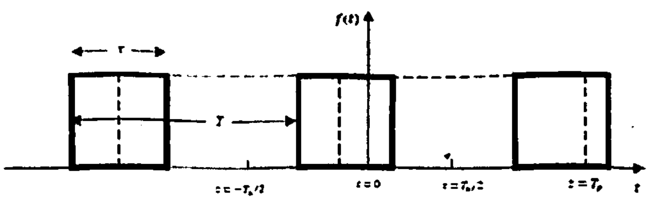
$$|d_n| = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

$$\varphi_n = -arctg\left(b_n / a_n\right), \tag{2.5}$$

бунда φ_n – n-чи гармоникали ташкил этувчиси бошланғич фазаси бўлиб, уни d_n нинг мавҳум ва ҳақиқий ташкил этувчиларининг арктангенси сифатида аниқланади. Демак, сигналнинг ҳар бир гармоникаси ўзининг амплитудаси ва фазаси силжиши билан характерланади.

2.2. Фурье алмаштириш

Агар сигнал даврий бўлмаса, у ҳолда Фурье қаторига ёйиш мослаштирилади. Мисол тариқасида 2.1a-расмда келтирилган тўғри бурчакли импульслар кетма-кетлигидан импульслар такрорланиш даври T_p ни чексизликкача давом эттириш натижасида ягона тўртбурчакли импульсни ҳосил бўлишини кўриб чиқамиз.



2.1-расм. Даврий такрорланувчи тўғрибурчакли импульс.

T_p ни катталаштириб борилса гармоникалар орасидаги $1/T_p = \omega / 2\pi$ бўлган масофа $d\omega/2\pi$ гача кичиклашиб боради ва нольга тенг бўлади. Бу ўзгарувчи дискрет частота $n\omega$ дан узлуксиз ўзгарувчи ω га ўтишга, шу билан бир вақтда фазавий ва амплитудавий спектр ҳам узлуксиз бўлишига олиб келади. Демак, $T_p \to \infty$ бўлганда $d_n \to d\omega$ бўлади. ушбу ўзгартиришларни эътиборга олсак (2.3) ифода қуйидаги кўринишни олади

$$d(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (2.6)$$

Кулай бўлиши учун (2.6) ифодани $d\omega/2\pi$ га бўлиб қуйидаги ифодани оламиз

$$\frac{d(\omega)}{d(\omega)/2\pi} = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (2.7)$$

Бу формуладаги $F(j\omega)$ Фурье интеграли ёки оддийгина Фурье тасвири (кўриниши) деб аталади. Агар $F(j\omega)$ ни ҳақиқий ва мавҳум қисмлари йиғиндиси шаклида қуйидагича ифодалаш мумкин. Агар

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}(j\omega) + j\,\mathrm{Im}(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (2.8)$$

бўлса, у ҳолда

$$|F(j\omega)| = \left[\mathrm{Re}^2(j\omega) + \mathrm{Im}^2(j\omega)\right]^{1/2} \qquad (2.9)$$

бўлади ва бу катталик вольтда эмас В/Гц ларда баҳоланади. $F(j\omega)$ ни амплитуда зичлиги, баъзан эса амплитуда спектри зичлиги ёки амплитуда спектри деб аталади. Амплитуда спектрига мос равишда фаза силжиши $\varphi(\omega)$ қуйидагича аниқланади

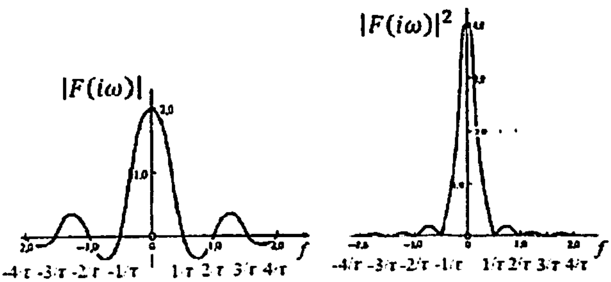
$$\varphi(\omega) = arctg\left[\mathrm{Im}(j\omega)/\mathrm{Re}(j\omega)\right]. \qquad (2.10)$$

$|F(j\omega)|^2$ қиймати $B^2/Гц^2$ шаклида баҳоланади. Нормаллаштирилган электр қуввати, яъни қаршилиги 1 Ом бўлган қаршиликда ажралиб чиқаётган қувват B^2 ларда баҳоланади, бу Дж/с ёки Дж·Гц (Джоул бу энергия бирлиги)ни англатади, у ҳолда $B^2/Гц^2$ катталик ДжГц·Гц$^{-2}$= Дж·Гц$^{-1}$ га тенг бўлади. Демак $|F(j\omega)|^2$ бир тақсим Гц энергияни, яъни $|F(j\omega)|^2$– спектр энергиясининг зичлигини англатади. $|F(j\omega)|$ нинг f га боғлиқлиги графиги остидаги юза асоси $f_0 - df$ ва $f_0 + df$ полоса f_0 частотаси ўртача кучланишини ифодалайди. $|F(j\omega)|^2$ нинг f га боғлиқлиги графиги остидаги юза f_0 частотадаги энергия ўртача қийматига тенг бўлади. Бундан ташқари спектр таҳлилида кўп ҳолларда спектр энергияси зичлигининг частотага боғлиқлик графиги (чизмаси) ҳам қурилади.

Агар импульсдан оний қиймат олиш унинг марказига (қоқ ўртасига) мос келса, яъни $x=\frac{1}{2}$ бўлганда ушбу импульснинг Фурье шакли (кўриниши) қуйидагича берилади

$$F(i\omega) = \frac{A\tau \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau\,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2) \qquad (2.11)$$

ва ҳақиқий ҳисобланади. $|F(j\omega)|$ функция узлуксиз бўлиб, унинг $A=1$ В, $T_p=10$ с ва $\tau=2$ с қийматлари учун графиги 2.2*а*-расмда тасвирланган. Бу амплитуда спектри оний қийматлар функциясига пропорционал бўлиб, ҳамма вақт идеал паст частота фильтрига тўғрибурчакли импульс таъсирида ҳосил бўлади, шу билан бирга хар қандай давомийлиги t билан чекланган импульс таъсирида ҳам юзага келиши мумкин.



а *б*

2.2-расм. Импульс амплитудаси 2В: а) амплитуда спектри; б) энергия спектри.

Амплитудаси 2 В бўлган импульс энергия спектрал зичлиги графиги 2.2*б*-расмда тасвирланган, 2.2*а*-расмда эса амплитуда спектри тасвирланган.

Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, функциянинг частотага боғлиқлигидан вақт функциясига Фурье тескари алмаштириши ёрдамида ўтиш мумкин. Бу ҳолда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,df \qquad (2.12)$$

2.3. Фурье дискрет алмаштириши (ФДА) ва тескари ФДА

Амалда сигнал Фурье ташкил этувчилари, унга аналог ишлов бериш натижасида эмас, рақамли ҳисоблашлар натижаси орқали аниқланади. Аналог сигнал чексиз кўп бир-бирига яқин нуқталардан иборат бўлганлиги учун, унинг ҳамма қийматларини ифодалаш мумкин эмас. Шунинг учун рақамли тизимлардан фойдаланиш учун аналог сигнални бир хил вақт оралиқларида дискретлаш керак бўлади ва бу оний қиймат(ўлчов)ларни иккилик рақамли сигнал шаклига келтириш керак бўлади. Бу оний қийматни ўлчаш хотирада сақлаш контури ёрдамида амалга оширилади, сўнгра аналог-рақамли ўзгартириш амалга оширилади. Аналог сигнални юқори аниқлик билан тиклаш учун бу бир секунд давомида олинган оний қиймат(ўлчаш)лар сони етарли даражада. Назарий нуқтаи назардан дискретлаш керакли тезлиги Найквист частотаси деб аталади ва $2f_ю$ га тенг, $f_ю$ – сигналнинг амплитудаси сезиларли даражада катта энг юқори частотали синусоидал кўринишдаги ташкил этувчиси частотаси.

Шундай қилиб, ўзгартирилиши керак бўлган ҳамма маълумотлар энди дискрет ва нодаврий ҳам бўлиши мумкин. Шунинг учун Фурье алмаштиришидан фойдаланиш мумкин эмас, чунки у узлуксиз маълумотлар учун мўлжалланган. Аммо, шундай аналог алмаштириш борки, уни дискрет маълумотларга ҳам қўллаш мумкин – бу Фурье дискрет алмаштириши (ФДА).

Фараз қилайлик, аналог сигнални бир хил вақт T оралиқларида дискретлаш натижасида N та оний қиймат(ўлчаш)га эга бўлган қуйидаги дискрет кетма-кетлик олинган бўлсин $\{x(nT)\} = x(0), x(t), ..., x[(N-1)T]$, бунда n – олинган оний қиймат тартиб рақами бўлиб, $n=0$ дан $n=N-1$ гача қийматларни қабул қилади. $x(nT)$ қиймати фақат кучланиш спектрига тегишли вақт қаторига тегишли қийматларни ифодалаганда ҳақиқий катталик бўлади.

Шунинг учун сигналнинг вақт бўйича ҳақиқий бўлган N та қийматлари ФДАнинг частота бўйича N та комплекс қийматларига айланади

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega nT}, \quad k = 0, 1, ..., N-1 \qquad (2.13)$$

бунда F_D орқали Фурье дискрет алмаштириши белгиланган.

Тескари Фурье дискрет алмаштириши (ТФДА) қуйидагича аниқланади

$$x(nT) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{ik\Omega nT}, n = 0, 1, ..., N-1 \qquad (2.14)$$

бунда F_D^{-1} орқали тескари Фурье дискрет алмаштириши белгиланган.

2.4. Дискрет косинус алмаштириш (ДКА)

Дискрет косинус алмаштиришлардан корреляция ва свертка (ўрам)ни ҳисоблашни тезлаштиришда ва спектр таҳлилида фойдаланилади. Бундан ташқари бу усуллардан маълумотларни сиқиш, мисол учун овозни (товуш) ёки тасвирни узатиш, электрокардиограмма ва электроэнцеграмма каби медицина сигналларини ёзиш учун фойдаланилади. Шунингдек ДКАдан тасвир ва нусха (шаблон)ларни танишда ҳам фойдаланилади. Бунинг натижасида сигналларни узатиш учун кодлашда талаб этиладиган “бит”лар сони камаяди, бу сигнал узатиш тезлигини оширади. Бу эса нисбатан тор полосали алока линияларидан фойдаланиш имкониятини келтириб чиқаради, шунингдек нусха (шаблон)ларни танишни осонлаштиради (бу ахборот ҳажми камайтирилиши ҳисобига рўй беради). ДКАнинг ушбу хусусиятлари уни сигналларни сиқиш нуқтаи назаридан самарадорлигини билдиради, бу сигнал энергиясининг паст частоталарда тўпланиши натижасида рўй беради. Бундан ташқари ҳисоблашларнинг соддалиги ва ўртача квадратик хатоликнинг кичик (минимал) бўлишини таъминлайди.

Юқоридаги фикрлар Фурье дискрет косинус алмаштиришдан (ФДКА) фойдаланишни тақозо этади. Умуман олганда ФДКА Фурье дискрет алмаштиришининг ҳақиқий қисмидан иборат, чунки Фурье қатори ҳақиқий ва жуфт қисми фақат косинусоидал ташкил этувчилардан иборат бўлиб, мисол учун кучланишнинг дискрет қийматларидан фойдаланилганда маълумотлар ҳақиқий бўлади, уларни икки марта кўп қилиш учун уларга акс ташкил этувчиларини қўшиш керак бўлади.

(2.13) формулага асосан ФДА қуйидаги кўринишда бўлади

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 .$$

Ушбу алмаштиришнинг ҳақиқий қисми ДКАни англатади

$$X_c(k) = \mathrm{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k 2\pi n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 .$$

Бу ДКАнинг бир хусусий кўриниши. ДКАнинг умумий кўриниши қуйидагича аниқланади

$$X_c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k 2\pi n + k\pi}{2N}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{k\pi(2n+1)}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{2.15}$$

2.5. Уолш алмаштириши

Ҳозиргача кўриб чиқилган алмаштиришлар синус ва косинус функцияларига асосланган эди. Импульсга ўхшаш +1 ва −1 га асосланган алмаштириш нисбатан осон ва тез ҳисоблаш имкониятини беради. Бундан ташқари бундай алмаштиришлар узлуксизлиги бузилган сигналларни ифодалашда анча қулай ҳисобланади, мисол учун, тасвир сигналларини алмаштиришда. Шу билан бирга улар узлуксиз сигналларни ифодалашда анча ноқулай бўлиб, улар фазалари бўйича мосликни таъминламайдилар, бу сигнал спектрининг бузилишига ва натижада сигнал шаклининг бузилишига олиб келади. Шунинг учун Уолш алмаштиришидан одатда тасвир сигналларига ишлов бериш (астрономия ва спектроскопия)да сигналларни кодлаш ва фильтрлашда фойдаланилади.

Фурье дискрет алмаштириши гармоник синусоидал ва косинусоидал ташкил этувчилар орқали ифодаланганидек, Уолш дискрет алмаштириши (УДА) Уолш функциялари деб аталувчи тўғри тўртбурчакли ўровчили гармоник сигналлар тўплами орқали ифодалашга асосланган. Аммо тўғрибурчакли импульслар учун уларнинг такрорланиш частотаси номаълум бўлгани учун аналог сигнал учун фойдаланиладиган "кетма-кетлик" атамасидан фойдаланилади. "Кетма-кетлик" – бу вақт бирлигида нольни кесиб ўтишлар сонининг ярмига тенг бўлади. 2.3-расмда $N=8$ гача бўлган тартибдаги Уолш функциялари катталашиш тартибида кўрсатилган. Бу кўринишни Уолш бўйича тартибга келтирилган функция деб аталади. Давомийлик вақти t га ва тартиби n га тенг Уолш функцияси қуйидагича белгиланади $\mathrm{WAL}(n,t)$. 2.3-расмдан кўринадики худди Фурье қаторида тоқ ва жуфт синусоидал ва косинусоидал функциялар бир-бирига тенг бўлганидек, Уолш функциясида ҳам бир хил сонли тоқ ва жуфт функциялар бўлади. Уолш $\mathrm{WAL}(2k,t)$ жуфт функциялари $\mathrm{CAL}(k,t)$ кўринишида ифодаланади ва $\mathrm{WAL}(2k+1,t)$ тоқ функциялари $\mathrm{CAL}(2k+1,t)$ кўринишида ифодаланади, бу ерда $k=1,2,...,N/2-1$.

Ҳар қандай $S(t)$ сигнални Уолш функциялари мажмуа (жамлама)ларига ёйиш мумкин (худди Фурье қаторига ёйгандек)

$$S(t)=a_0\mathrm{WAL}(0,t)+\sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{N/2-1}[a_i\mathrm{SAL}(i,t)+b_i\mathrm{CAL}(j,t)]. \qquad (2.16)$$

бунда a_i ва b_i – қатор коэффициентлари.

Ҳар қандай иккита Уолш функцияси учун қуйидаги ифода кучга эга

$$\sum_{t=0}^{N-1}\mathrm{WAL}(m,t)\mathrm{WAL}(n,t)=\begin{cases}N & агар\ n=m,\\ 0 & агар\ n\neq m.\end{cases}$$

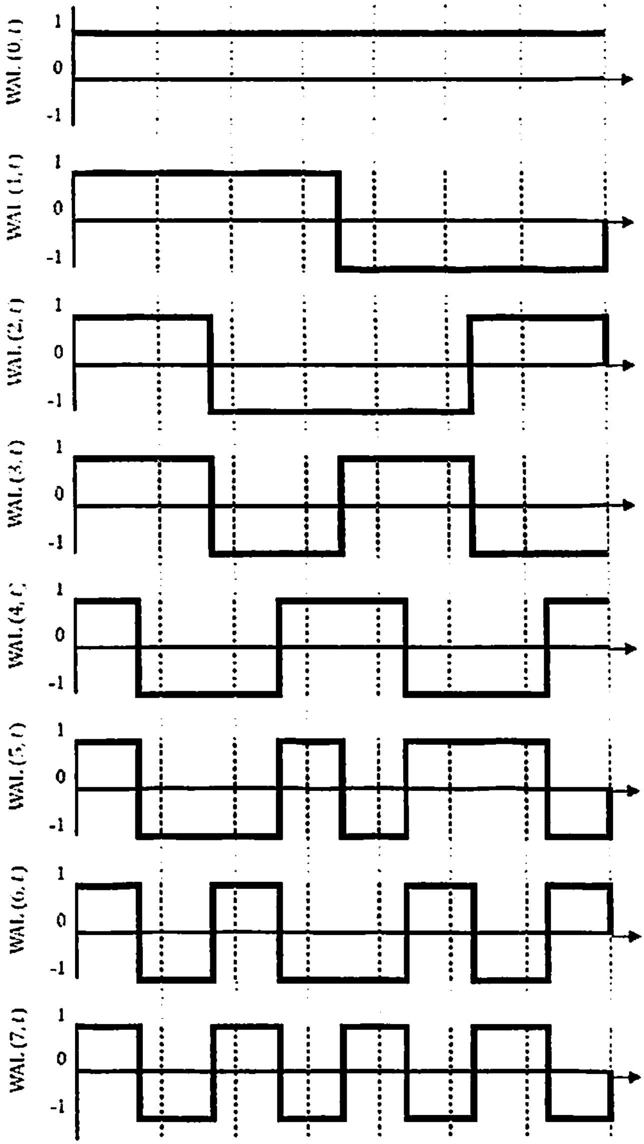
яъни Уолш функциялари ўзаро ортогонал.

Уолш алмаштириши учун тўғри ва тескари алмаштиришларни тадбиқ этиш мумкин:

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_i\mathrm{WAL}(k,i)\ ,\quad k=0,1,\dots,N-1. \qquad (2.17)$$

$$x_i=\sum_{i=0}^{N-1}X_k\mathrm{WAL}(k,i)\ ,\quad k=0,1,\dots,N-1. \qquad (2.18)$$

Агар $1/N$ кўпайтмани эътиборга олинмаса тескари алмаштириш тўғри алмаштириш билан бир хил ва $\mathrm{WAL}(k,i)=\pm1$ бўлади.



2.3-расм. Уолшнинг 8×8 тартибли алмаштириши матрицаси учун унинг кетма-кет катталашиши $n = 7$ гача тартибга келтирилган функциялари.

Шунинг учун "шакл"лар жуфтларини матрицаларни рақамли усул (метод) асосида кўпайтириш натижасида топиш мумкин. Аммо фаза ҳақидаги ахборот йўқлиги учун УДА тез корреляция (корреляция оралиғи кичик)ларни ва ўрамларни ҳисоблаш учун яроқсиз.

(2.17) тенглик УДА k нчи элементини дискрет сигнал ҳар бир элементи x_i ни k кетма-кетликли Уолш функциясига кўпайтириши ва k нинг ҳамма қийматлари учун қўшиш орқали олиш мумкин $k = 0,1,..., N-1$. k нинг ҳамма элементлари учун уни матрица кўринишида ёзиш мумкин

$$\mathbf{X}_k = x_i \mathbf{W}_{ki} . \tag{2.19}$$

бунда $x_i = [x_0 x_1 x_2 ... x_{N-1}]$ – маълумотлар кетма-кетлиги.

$$\mathbf{W}_{ki} = \begin{bmatrix} W_{01} & W_{02} & ... & W_{0,N-1} \\ W_{11} & W_{12} & ... & W_{1,N-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & ... & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

– Уолш алмаштириши матрицаси, $X_k = [X_0 X_1 X_2 ... X_{N-1}]$ – $(N-1)$ УДА матрицаси ташкил этувчилари.

Алоҳида таъкидлаймиз, W_{ki} – бу $N \times N$ тартибли матрица, бунда N берилган нуқталар сони, яъни дискрет сигнал нуқталари. Агар N берилган нуқталар сони бўлса, у ҳолда Уолш функциясининг дастлабки N та тартибга келтирилганларини кўриб чиқиш керак бўлади. Уларнинг ҳар бири N марта дискретизацияланади, бунда W_{ki} матрицанинг k нчи қатори k компонента кетма-кетлигининг N та дискрет қийматларига тўғри келади.

2.6. Адамар алмаштириши

Адамар алмаштириши ёки Уолш-Адамар алмаштириши бу ҳам мазмунан Уолш алмаштириши бўлиб, фақат бошқа тартибдаги Уолш функциялари ва бошқа алмаштириш матрицаси қаторидир. Бундай ўрин алмаштиришлар натижасида олинадиган Адамар матрицаси, иккинчи тартибли матрицанинг массив остини ўз ичига олади. 2.4-расмда Адамарнинг 8×8 тартибли матрицаси кўрсатилган бўлиб, у ^8H кўринишида белгиланади.

Уни матрицалар орқали ёзиш мумкин

$$^2\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad и \quad -{}^2\mathrm{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

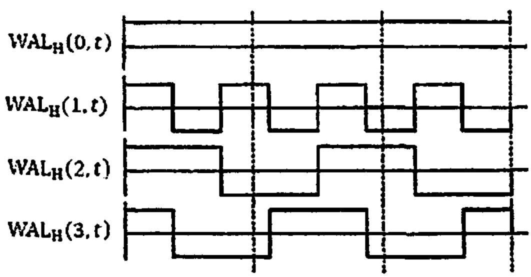
Адамарнинг ҳар қандай $2N$ тартибли матрицасини ^2H дан рекурсив шаклда олиш мумкин, яъни

$$^{2N}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} ^N\mathrm{H} & ^N\mathrm{H} \\ ^N\mathrm{H} & ^N\mathrm{H} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & i \rightarrow \\
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

2.4-расм. Адамарнинг 8×8 тартибли алмаштириш матрицаси.

Бу рекурсивлик хоссасидан Уолш функциясини Адамар томонидан аниқланган тартибда жойлаштириш натижасида олинган Уолш-Адамар тез алмаштиришини УДАга нисбатан анча катта тезлик билан ҳисоблаш мумкин. Адамар тартибида жойлашган Уолш (ёки табиий тартибда жойлашган) функцияси 2.5-расмда кўрсатилган.



2.5-расм. Адамар 4×4 тартибли алмаштириш матрицаси учун дискретизациялаш вақтини кўрсатувчи $n=7$ гача Адамар тартибида жойлашган Уолш функцияси.

2.7. Вейвлет алмаштириши

Гейзенберг номаълумлик (ноаниқлик) физик принципига асосан, бир вақтнинг ўзида x заррачанинг ҳолати ва унинг импульси p ни аниқ билиш мумкин эмас. Амалда

$$xp \geq h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}. \tag{2.21}$$

бунда h – Планк доимийси. Эйнштейннинг $E = mc^2$ тенгламаси асосида бу принципни сигналларга ишлов бериш соҳасида ҳам қўллаш мумкин. Бунда Гейзенберг принципи қуйидагича таърифланади: бир вақтнинг ўзида ҳар қандай аниқлик билан вақт ва частотани аниқлаш мумкин эмас, яъни

$$\Delta f \cdot T \geq 1, \tag{2.22}$$

бунда Δf ва T частота ва вақт бўйича фарқланишни ифодалайди. Агар частота қиймати юқори аниқлик билан фарқланса (аниқланса), у ҳолда частота нисбатан кам аниқлик билан баҳоланади ва аксинча.

Натижада бир вақтнинг ўзида сигнал ташкил этувчилари частотасини ва унинг пайдо бўлиш вақтини ёки сигнал турли частотали ташкил этувчиларини вақт бўйича ажратиш талаб даражасидаги юқори аниқлик билан ўлчаш етарли даражада мураккаб бўлиши мумкин. Бу ҳолат агар сигнал юқори частотали ташкил этувчилардан иборат бўлса ва улар вақт соҳасида узоқ давомийли ташкил этувчиларга жуда ҳам яқин жойлашган бўлса ва улар ҳам ўз вақтида частота соҳасида яқин жойлашган бўлса, ҳамда турли онлар (вақтлар)да ҳосил бўлса юз бериши мумкин.

Бундай сигналлар даврий бўлмайди. Бу частота-вақт таҳлили умумий муаммосини ечиш учун Вейвлет алмаштиришдан фойдаланилади (wavelet transform), у ностационар сигналларни таҳлил этиш воситаси ҳисобланади. Вейвлет алмаштиришдан сигналларни фильтрлашда, шовқинларни йўқотишда, синулярлик жойини топиш ва уларнинг тақсимланишини аниқлаш каби масалаларни ечишда фойдаланиш мумкин.

Фурье алмаштиришида сигнал қиймати даражаси кўрсаткичида мавҳум бўлган ҳисса (весовой) коэффициенти бўлса ва аргумент гармоник шаклда бўлиб частотага боғлиқ бўлса, яъни синусоидал ташкил этувчи бўлса, Вейвлет алмаштиришда хусусий ҳисса коэффициентлари қиймати сифатида Вейвлет функциялардан фойдаланилади.

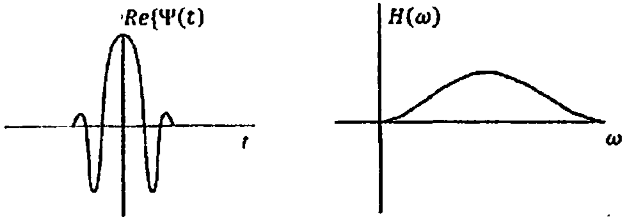
Ҳамма Вейвлет функциялар асосий (базавий) Вейвлет функциясидан олинади. Баъзи ҳиссалар бўлишини таъминлаш учун бир қатор асосий (базавий) функциялардан фойдаланилади. Талаб этиладиган хоссаларга эга бўлиш учун Вейвлет функция тебранишлар шаклида бўлиб, доимий ташкил этувчиси бўлмаслиги керак, спектри маълум бир кичик полосада жойлашган бўлиши, кичик вақт ичида нольга тенг қийматгача кичиклашиши ва аксинча, кичик вақт оралиғида ўзининг энг катта қийматига эга бўлиши керак. Бу хусусият Вейвлет алмаштириш бир қийматли бўлишига кафолат беради. Асосий функцияни $\Psi(t)$ кўринишида ёзиш мумкин. Мисол учун, Морлет ёки Гаусс модификацияланган асосий функцияси (Морле вейвлети) қуйидагича ифодаланади

$$\Psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}. \tag{2.23}$$

Унинг Фурье кўриниши

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}} \tag{2.24}$$

Бу икки сигнал 2.6-расмда келтирилган бўлиб, бундан кўринадики $\Psi(t)$ функция юқорида келтирилган талабларга жавоб беради, яъни тебранувчан ва нольгача кичиклашади.



2.6-расм.Модификациялаштирилган Гаусс ёки Морлет, $\Psi(t)$ она (асосий) вейвлет функцияси ва унинг Фурье кўриниши $H(\omega)$.

Қолган (қиз, иккиламчи) функциялар бирламчи асосий функциялар масштабини ўзгартириш натижасида олинади, булар функциялар оиласини ташкил этадилар. Ҳар бир иккиламчи (қиз) функцияни қуйидагича ифодалаш мумкин

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\{(t-\tau)/a\}.$$

бунда a – масштабни ўзгартириш ўзгарувчан коэффициенти, τ – олиб ўтиш ўзгармас коэффициенти. Агар a нинг масштаби катталашса функциянинг амплитудаси ва аргументи кичиклашади. Амплитуда берилган қийматида аргументнинг кичиклашиши частотанинг кичиклашишини англатади.

Масштабни ўзгартириш коэффициенти a ва олиб ўтиш ўзгармас коэффициенти τ ёрдамида катта ва кичик (турли) амплитудали, юқори ва паст (турли) частотали функцияларни яратиш мумкин ва уларни вақтнинг турли онларига жойлаштириш мумкин.

Шундай қилиб турли вақт оралиғига жойлашган турли частотали ташкил этувчиларга эга ностационар сигналларни турли вейвлет функциялар йиғиндиси орқали ифодалаш мумкин. Вейвлет функциясидан шу мақсадларда фойдаланилади.

Узлуксиз вейвлет алмаштиришни (УВА) (a,τ) қуйидагича ифодалаш мумкин

$$\text{УВА}(a,\tau) = \left(1/\sqrt{a}\right)\int s(t)\Psi\{(t-\tau)/a\}dt. \tag{2.25}$$

Бу тенглама парамтерларини дискретлаш натижасида дискрет параметрли вейвлет алмаштириши (ДПВА) (m,n) ни олиш мумкин, у қуйидагича аниқланади

$$ДПВА(m,n) = a_0^{-m/2} \int s(t)\,\Psi\{(t - n\tau_0 a_0^m)/a_0^m\}dt, \qquad (2.26)$$

бунда қуйидаги алмаштиришлар амалга оширилган: $a = a_0^m$, $\tau = n\tau_0 a_0^m$. Бу алмаштиришларда a_0 ва τ_0 лар a ва τ лар учун дискретизациялаш оралиғи; m ва n лар эса бутун сонлар.

Кўп ҳолларда $a_0 = 2a$, $\tau_0 = 1$ га тенг деб олинади. Юқоридагиларни эътиборга олинса

$$ДПВА(m,n) = 2^{-m/2} \int s(t)\,\Psi\{(t - n2^m)/2^m\}dt =$$

$$= 2^{-m/2} \int s(t)\Psi\{2^{-m}t - n\}\,dt.$$

Бу вақт ўқини 2^{-m} маротаба кенгайтиради, натижада вейвлет функция вақт бўйича мусбат томонга $2^m n$ катталикка сурилади.

Вейвлет функцияни вақт бўйича дискретизациялаш, дискрет вақтли вейвлет алмаштириши (ДВВА)ни беради, у қуйидагича аниқланади

$$ДВВА(m,n) = a_0^{-m/2} \sum_k s(k)\Psi(a_0^{-m}\,k - n\tau_0). \qquad (2.27)$$

Агар қайтадан $a_0 = 2a$ ва $\tau_0 = 1$ деб ҳисобласак у ҳолда ДВМИ қуйидагича аниқланади

$$ДВВА(m,n) = 2^{-m/2} \sum_k s(k)\Psi(2^{-m}\,k - n). \qquad (2.28)$$

(2.28) ифода вейвлет дискрет алмаштириши ҳисобланади.

Шундай қилиб, вейвлет дискрет алмаштириши узлуксиз вейвлет алмаштиришидан масштаб параметри a ни, олиб ўтиш ўзгармас коэффициенти τ ва вақтли дискретизациялаш, сўнгра дискретлаш оралиғи қийматлари $a_0 = 2$ ва $\tau_0 = 1$ деб ҳисоблаш натижасида олинади.

Вейвлет алмаштиришлардан сигналлар частота-вақт таркибларини ўрганишда фойдаланишдан ташқари, улардан сигналларни фильтрлаш, яъни шовқиннинг қандайдир қисмини олиб ташлашда ҳам фойдаланиш мумкин. Бунинг учун сигнал ташкил этувчиларга ажратилиши керак. Сўнгра таққослаш асосида шовқин ташкил этувчилари олиб ташланади. Ва ниҳоят шовқинлардан тозаланган сигнал ташкил этувчилари вейвлет функциялари орқали қайта тикланади. Узлуксиз вейвлет алмаштиришидан фойдаланилганда сигнални қайта тиклаш (тескари алмаштириши) ифодаси қуйидаги кўринишда бўлади

$$s(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a>0}^{\infty} НВП(a,\tau) \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\right\} \Psi\{(t-\tau)/a\} \left\{\frac{1}{\sqrt{a^2}}\right\} da\,dt. \qquad (2.29)$$

бунда $$C_{\Psi} = \int_0^{\infty}\{|H(\omega)|^2/\omega\}d\omega < \infty .$$

ва $H(\omega)$ – асосий импульс $\Psi(t)$ нинг Фурье кўриниши.

Назорат саволлари

1. Даврий сигнални Фурье қаторига ёйинг ва унинг ташкил этувчилари ҳақида сўзлаб беринг.

2. Фурье тўғри ва тескари алмаштириши формуласини ёзинг ва тушунча беринг.

3. Фурье тўғри ва тескари дискрет алмаштиришидан фандай сигналлар ва қайси ҳолларда фойдаланилади?

4. Фурье дискрет косинус алмаштириши ҳақида тушунтириш беринг.

5. Уолш алмаштириши ҳақида тушунча беринг.

6. Адамар алмаштириши ҳақида тушунча беринг.

7. Вейвлет алмаштириш ҳақида тушунча беринг.

3. Z-АЛМАШТИРИШ

Дискрет вақт сигнал ва тизимлариини анализ ва лойиҳалашда қўлланилиши энг қулай бўлган алмаштириш бу z-алмаштириш хисобланади.

3.1. Дискрет вакт тизимлари

Дискрет вақт тизими – бу киришига $x(n)$ сигнал кетма-кетлиги берилганда чиқишида $y(n)$ кетма-кетлигини ҳосил қилиш математик алгоритми. Дискрет вақт тизимларига қуйидагиларни мисол қилиб келтириш мумкин: рақамли контроллер (назоратлаш қурилма)лари, спектр рақамли анализаторлари ва рақамли фильтрлар.

Дискрет вақт тизими чизиқли ва ночизиқли, вақт бўйича кўрсаткичлари ўзгармас (инвариант) ёки ўзгарувчан бўлиши мумкин.

Дискрет вақт тизими чизиқли деб аталади, агар бу тизимга нисбатан акс таъсир унинг киришига бир вақтда бир неча сигнал берилгандаги қиймати ҳар бир кириш сигналлари алоҳида-алоҳида унга таъсир эттандаги алоҳида-алоҳида акс таъсирлар йиғиндисига тенг бўлса.

Мисол учун, унинг биринчи киришига $x_1(n)$ сигнал берилса чиқишида $y_1(n)$ ҳосил бўлади ва иккинчи киришига $x_2(n)$ сигнал берилса чиқишида $y_2(n)$ ҳосил бўлади. У ҳолда тизимнинг ҳар икки таъсир сигналига акс таъсири, яъни чиқишидаги сигнал қуйидагича аниқланади

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \to a_1y_1(n) + a_2y_2(n) . \tag{3.1}$$

бунда a_1 ва a_2 – ҳар қандай ўзгармас катталик (константа).

Дискрет вакт тизими (вақтга боғлиқ эмас) инвариант ёки унга сигнал таъсир этиш вақтига боғлиқ эмас деб ҳисобланади, агар унинг чиқишидаги сигнал $y(n)$ киришига қайси вақтда сигнал $x(n)$ берилганига, яъни $x(n-k)$ га боғлиқ эмас, бунда k – сигнал кечикиш вақти. Мисол учун, агар унинг киришига $x(n)$ сигнал берилса чиқишида $y_1(n)$ ҳосил бўлади, агар $x(n-k)$ сигнал берилса чиқишида $y_1(n-k)$ сигнал ҳосил бўлади, яъни

$$x(n) \to y(n). \tag{3.2а}$$

$$x(n-k) \to y(n-k), \tag{3.2б}$$

бўлади, яъни кириш сигнали қанча вақтга кечикса чиқиш сигнали ҳам шунча вақтга кечикади. Чизиқли инвариант тизим (ЧИТ) кириш ва чиқиш сигналлари орасидаги боғлиқлик ўровчи (свертка) йиғиндиси орқали берилади

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \tag{3.3}$$

бунда $h(k)$ – тизим импульс характеристикаси. $h(k)$ нинг қиймати дискрет вақт тизимини вақт бўйича ўзгаришини тўлиқ аниқлайди. Агар ЧИТ импульс характеристикаси қуйидаги талабга жавоб берса, у барқарор ҳисобланади

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)| < \infty. \tag{3.4}$$

Бу шарт агар $h(k)$ чекланган давомийликка ёки k катталашиши билан $h(k)$ нолга интилганда кучга эга.

Фақат киришида сигнал бўлганда чиқишида акс сигнал ҳосил бўладиган тизим – физик жиҳатдан амалга оширилиши мумкин бўлган тизим деб аталади. Умуман олганда, дискрет вақт кетма-кетлигида мавжуд $x(n)$ ёки дискрет вақт тизими импульс характеристикаси физик жиҳатдан амалга ошириш мумкин бўлган тизимлар учун вақт нолинчи онигача нолга тенг бўлади, яъни $x(n)=0$, $n<0$ ёки $h(k)=0$, $k<0$.

3.2. Тўғри ва тескари z-алмаштиришлар

$x(n)$ нинг n нинг ҳамма қийматлари учун ҳақиқий бўлган z-алмаштиришни аниқлаймиз

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \tag{3.5}$$

бунда z – комплекс ўзгарувчи.

Акс таъсири мавжуд тизимларда $x(n)$ фақат $0<n<\infty$ оралиғида нолга тенг бўлмайди ва (3.5) тенгламадан бир томонлама z-алмаштириш деб аталадиган қуйидаги алмаштириш ифодасини оламиз

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \tag{3.6}$$

тескари z-алмаштириши (z^{-1}) $x(n)$ дискрет вақт кетма-кетлигини унинг z-кўриниши орқали тиклаш имкониятини беради. z^{-1} тескари z-алмаштириши СРИБда кенг фойдаланилади, мисол учун рақамли фильтрларнинг импульс характеристикасини аниқлашда. Символик шаклда z-алмаштириши қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]. \tag{3.7}$$

бунда $X(z)$ – $x(n)$ кетма-кетликнинг z-кўриниши, Z^{-1} эса z-тескари алмаштириш амалини англатувчи символ.

$x(n)$ кетма-кетлик албатта акс таъсир ҳосил бўлишига олиб келади деб ҳисоблаб, (3.6) тенгламадан $X(z)$ нинг z-кўринишини даражали қуйидаги қаторга ёйиш мумкин:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots \quad (3.8)$$

(3.8) қатордан кўринадики кетма-кетлик қийматлари $x(n)$ – бу z^{-n} $(n = 0, 1, \ldots)$ коэффициентлари бўлиб, шунинг учун уларни тўғридан-тўғри аниқлаш мумкин. Амалиётда, кўп ҳолларда $X(z)$ ни z^{-1} дан ёки унга тенг кучли бўлган z дан олинган икки кўпҳаднинг нисбати оркали ифодалш мумкин:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}}. \quad (3.9)$$

$x(n)$ нинг бу кўринишдаги z-алмаштиришини қуйидаги усуллардан бири ёрдамида аниқлаш мумкин:

а) даражали қаторга ёйиш усули;

б) элементар сонлар нисбати (каср сонлар) кўринишида ифодалаш усули;

в) айириш усули (вычет).

3.2.1. Даражали қаторга ёйиш усули

Агар $X(z)$ акс таъсирли кетма-кетлик (3.6) z-алмаштириши берилган бўлса, у ҳолда уни z^{-1} ёки z га нисбатан устун (столбик)га бўлиш синтетик бўлиш усули деб аталувчи усулдан фойдаланиб чексиз қаторга ёйиш мумкин:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}} =$$

$$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots \quad (3.10)$$

Бу усулдан фойдаланилганда $X(z)$ функциясининг махражи ва сурати дастлаб z нинг даражаси камаювчи шаклида ёки z^{-1} нинг даражаси катталашувчи қатор сифатида ифодаланади, сўнгра уларни бўлиш натижасида хусусий қиймати топилади.

3.2.2. Элементар сонлар нисбати (каср сонлар) кўринишида ифодалаш усули

Бу усулдан фойдаланилганда дастлаб z-алмаштириш каср сонлар нисбати шаклида ёйилади. Ҳар бир элементар касрнинг z-тескари алмаштириши топилади. Бу натижаларни қўшиш натижасида умумий z-алмаштириш олинади. Амалда кўп ҳолларда z-алмаштириш z ёки z^{-1} кўп ҳадлиларнинг нисбати кўринишда берилади ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X(z) = \frac{b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\ldots+b_N z^{-N}}{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_M z^{-M}} =$$
$$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ \ldots \qquad (3.11)$$

Агар $X(z)$ функциянинг қутблари биринчи тартибли бўлса ва $N = M$ бўлса, у ҳолда уни қуйидаги қаторга ёйиш мумкин:

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1-p_2 z^{-1}} + \ \ldots + \frac{C_M}{1-p_M z^{-1}} =$$
$$= B_0 + \frac{C_1 z}{z-p_1} + \frac{C_2 z}{z-p_2} + \ \ldots + \frac{C_M z}{z-p_M} = B_0 + \sum_{k=1}^{M} \frac{C_k z}{z-p_k}. \qquad (3.12)$$

бунда p_k – $X(z)$ функциянинг қутблари, C_k – элементар касрларнинг коэффициентлари ва

$$B_0 = b_N/a_N\,. \qquad (3.13)$$

C_k коэффициентларини баъзан $X(z)$ функциянинг айирмаси (вычет) деб ҳам аталади.

Агар (3.11) тенгламада суратнинг даражаси махражнинг даражасидан кичик бўлса, яъни $N < M$ бўлса, у ҳолда B_0 нолга тенг бўлади. Агар $N > M$ бўлса, у ҳолда $X(z)$ ни $N \le M$ ни кўринишида олиш учун дастлаб уни сурат ва махражнинг z^{-1} ни даражаси камайиб борувчи кўринишда ёзилган ифодасини устунга бўлиш керак бўлади. Қолдиқни (3.12) тенгламада келтирилган кўринишда ифодалаш мумкин.

C_k коэффициентнинг p_k қутб билан боғлиқ қийматини (3.12) тенгламанинг чап ва ўнг томонини $(z-p_k)/z$ га кўпайтириш, сўнгра $z = p_k$ алмаштиришни амалга ошириб топиш мумкин:

$$C_k = \frac{X(z)}{z}(z - p_k)|_{z=p_k}. \qquad (3.14)$$

Агар $X(z)$ функция бир ёки бир неча биринчи тартиблидан катта қутбларга эга бўлса (яъни мос келувчи қутбларга), у ҳолда буни эътиборга олиш учун (3.12) тенгламага қўшимча ҳадлар қўшиш керак бўлади.

Мисол учун, агар $X(z)$ функция $z = p_k$ нуқтада m-тартибли қутбга эга бўлса, у ҳолда элементар касрларга ёйишга қуйидаги кўринишдаги ҳадлар кириши керак:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{(z-p_k)^i}. \qquad (3.15)$$

D_i коэффициентларининг қийматларини қуйидаги боғлиқликдан топиш мумкин:

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!}\frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}}\left[(z-p_k)^m \frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=p_k} \quad (3.16)$$

3.2.3.Айириш усули

Бу усулда z^{-1} контур интегралини ҳисоблаш орқали аниқланади:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c z^{n-1}X(z)dz\,. \quad (3.17)$$

бунда C – бу интеграллаш контури бўлиб, $X(z)$ нинг ҳамма қутбларини ўз ичига олади (қамраб олади). Рационал кўпҳадлар учун (3.17) тенгламадан контур бўйича интеграл комплекс ўзгарувчилар назарияси асосий натижасига асосланиб, айиришлар (вычет) ҳақидаги Коши теоремаси ёрдамида аниқланади:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c z^{n-1}X(z)dz =$$

$= z^{n-1}X(z)$ нинг C ичидаги ҳамма қутблари айирмалари йиғиндиси (3.18)

Аввалги мулоҳазаларда C_k ни элементар ташкил этувчиларга ёйиш коэффициентини $X(z)$ функциянинг айирмалари деб аталади деб айтиб ўтилган ва унинг қийматларини ҳисоблаш усуллари келтирилган эди. Шуни эслаб қолиш керакки, ҳар бир айирма C_k қутб p_k билан боғлиқ. Бу усулда эса $z^{n-1}X(z)$ нинг p_k қутбдаги айирмаси ($X(z)$ функциянинг айирмалари эмас) қуйидаги кўринишда берилади:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-p_k)F(z)]|_{z=p_k}\,. \quad (3.19)$$

бунда $F(z) = z^{n-1}X(z)$, m – бу p_k нуқтадаги қутб тартиби, $\mathrm{Res}[F(z), p_k]$ – $F(z)$ нинг $z = p_k$ нуқтадаги айирмаси (вычети). Оддий (алоҳида) қутб учун (3.19) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = (z-p_k)F(z) = (z-p_k)z^{n-1}X(z)|_{z=p_k}\,.$$

3.2.4. Z-тескари алмаштириш усулларини таққослаш

Кўриб чиқилган z-тескари алмаштиришларини ҳисоблаш усулларини таққослаймиз. Даражали қаторга ёйиш усулининг камчилиги шундан иборатки, бу усул аналитик кўринишдаги ечимни бермайди (баъзан оддий ҳолларда уни аниқлаш мумкин), аммо у содда бўлиб компьютер ёрдамида ҳисоблашда фойдаланиш мумкин. Аммо у табиатан рекурсив характерга эгалиги учун z-тескари алмаштиришнинг берилган нуқталари кўп бўлса хатолик ошиб бориши мумкин.

Элементар касрларга ёйиш усули ва вычетлар усули аналитик кўринишда натижа олиш имконини беради. Бу усулларнинг асосий камчилиги махраж кўп ҳадлиги кўпайткичини ёйиш талаб этилиши, яъни $X(z)$ функциянинг қутбларини топиш талаб этилиши ҳисобланади. Агар $X(z)$ функция юқори тартибли бўлса ва функция ёйилган шаклда берилмаган бўлса, у ҳолда унинг қутбларини қидириш етарли даражада қийин масала ҳисобланади.

3.3. Z-алмаштиришнинг хоссалари

Қуйида сигналларга рақамли ишлов беришда кенг фойдаланиладиган z-алмаштиришнинг баъзи фойдали хоссаларини қисқача келтирамиз.

1. *Чизиқлилик.* Агар $x_1(n)$ ва $x_2(n)$ кетма-кетликлар $X_1(z)$ ва $X_2(z)$ шаклидаги z-кўринишларга эга бўлса, у ҳолда z-кўринишларнинг чизиқли комбинацияси қуйидагича ифодаланади:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow aX_1(z) + bX_2(z). \qquad (3.20)$$

2. *Кечикиш ёки силжиш.* Агар $x(n)$ кетма-кетликнинг z-кўриниши $X(z)$ бўлса, у ҳолда m элементга кечиккан кетма-кетликнинг z-кўриниши $z^{-m}X(z)$ бўлади. Бу хоссадан дискрет вақт тизимлари узатиш функцияси z ни вақт бўйича фарқланувчи тенгламага айлантиришда кенг фойдаланилади

$$x(n) \rightarrow X(z),$$
$$x(n-m) \rightarrow z^{-m}X(z).$$

3. *Свертка (ўрам).* Кириш сигнали $x(n)$ ва импульс характеристикаси $h(k)$ бўлган дискрет вақт тизими берилган бўлса, тизим чиқишидаги сигнал қуйидагича аниқланади:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \qquad (3.21а)$$

z-кўринишлар орқали тизим кириш ва чиқиши қуйидагича боғланган:

$$Y(z) = H(z)X(z). \qquad (3.21б)$$

бунда $X(z)$, $H(z)$ ва $Y(z)$ лар мос равишда $x(n)$, $h(k)$ ва $y(n)$ кетма-кетликларнинг z-кўринишлари. Агар $X(z)$ ва $H(z)$ берилган бўлса, у ҳолда $y(n)$ ни $Y(z)$ нинг тескари z-алмаштириши орқали топиш мумкин. Юқоридагидан кўринадики (3.21*а*) тенгламадан свертка (ўрам) олиш жараёни z-соҳада кўпайтириш амалига айланиб қолади.

4. *Дифференциаллаш.* Агар $X(z)$ орқали $x(n)$ кетма-кетлик z-кўриниши ифодаланса, у ҳолда $nx(n)$ нинг z-кўринишини $X(z)$ ни дифференциаллаш орқали топиш мумкин

$$x(n) \to X(z).$$
$$nx(n) \to -z\frac{dX(z)}{dz}. \qquad (3.22)$$

Z-алмаштиришнинг бу хоссасидан $X(z)$ юқори тартибли қутбларга эга бўлганда, унинг тескари z-алмаштиришини ҳисоблашда фойдаланилади.

3.4. Дискрет вақт тизимларини қутб ва ноллар орқали ифодалаш

Амалда фойдаланиладиган кўпгина дискрет вакт тизимлари учун z-алмаштиришли, яъни тизим узатиш функцияси $H(z)$ ни унинг кутби ва ноли орқали ифодалаш мумкин. Мисол шаклида, N-тартибли дискрет вакт оддий фильтри учун қуйидаги z-алмаштиришни кўриб чиқамиз ($N = M$ бўлган ҳолат учун):

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}. \qquad (3.23)$$

бунда
$$N(z) = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N.$$
$$D(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N.$$

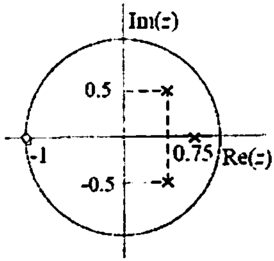
a_k ва b_k – фильтр коэффициентлари.

Агар $H(z)$ функция $z = p_1, p_2, \dots, p_N$ нуқталарда кутбларга эга бўлса ва $z = z_1, z_2, \dots, z_N$ нуқталарда нолга тенг бўлса, у ҳолда $H(z)$ функцияни кўпайтмаларга ёйиш ва қуйидаги кўринишга олиб келиш мумкин:

$$H(z) = \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}. \qquad (3.24)$$

бунда z_i – i-нчи ноль, p_i – i-нчи қутб ва K – кучайтириш коэффициенти. z-алмаштиришнинг қутблари деб z нинг функция $H(z)$ ни чексизликка тенг бўлишига олиб келувчи қийматларига айтилади. z нинг $H(z)$ ни нолга тенг бўлишини таъминловчи қийматлари унинг ноллари деб аталади. $H(z)$ функциянинг қутб ва ноллари ҳақиқий ёки комплекс бўлиши мумкин. Агар қутб ва ноллар комплекс бўлса, у ҳолда улар функцияга комплекс мослашган жуфтлик бўлиб кирадилар, чунки a_k ва b_k коэффициентлар ҳақиқий бўлиши керак. (3.24) тенгламадан кўринадики, агар $H(z)$ функциянинг қутб ва ноллари жойлашиши маълум бўлса, у ҳолда $H(z)$ функцияни ўзгармас катталик (константа)гача аниқлик билан қайта тиклаш мумкин.

z-кўринишдаги ахборотни қутб ва ноллорнинг диграммаси кўринишида тасвирлаш қулай (3.1-расм). Ушбу диаграммада қутбларнинг ўрни (*) билан белгиланган, ноль эса (0) билан белгиланган. 3.1-расмдаги мисолда $z = 0.5 \pm 0.5i$ ва $z = 0.75$ нуқталарида қутблар жойлашган, ноль эса $z = -1$ нуқтада жойлашган.



3.1-расм. z-алмаштиришни қутб (*) ва ноллар (0) диаграммаси кўринишида тасвирлаш.

Қутб ва нолларнинг диаграммаси дискрет вақт тизими хоссаларини олиб беради. Мисол учун, қутб ва нолларнинг жойлашишига қараб тизимнинг амплитуда-частота характеристикасини ва унинг қандай даражада барқарорлигини билиб олиш мумкин. Барқарор тизимлар учун ҳамма қутблар, бирлик ўлчам (радиус)га эга доира ичида бўлиши ёки бирлик ўлчамли доира нолларига мос бўлиши мумкин.

Кўп ҳолларда z-алмаштиришни ёйилган кўринишда ифодалаш мумкин эмас, уни (3.24) тенгламадагидек кўп ҳадлар нисбати сифатида ифодалаш мумкин. Бу ҳолларда $H(z)$ ни унинг ноль ва қутблар z-кўринишида ифодалаш учун, махраж кўпҳадлиги $D(z)$ ва сурат кўпҳадлиги $N(z)$ нинг илдизларини топиш керак бўлади.

$ax^2 + bx + c$ кўринишида бериладиган иккинчи тартибли кўпҳаднинг илдизлари қуйидаги формула орқали топилади:

$$\frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}. \tag{3.25}$$

$N(z)$ ва $D(z)$ кўпҳадларнинг нисбатан юқори тартибли илдизларини топиш мураккаб масала ҳисобланади. Амалда бу илдизларни топишда рақамли усуллардан фойдаланилади ёки Ньютон ёки/ҳамда Бэйстоу (Baistow) алгоритмларидан фойдаланилади.

3.5. Барқарорликни тадқиқот қилиш

Кўп ҳолларда дискрет вақт тизимларини яратишда уларнинг барқарорлигини (устойчивость) таҳлил этиш керак бўлади. Тизимлар барқарорлигининг фойдали етарли мезонини қуйидагича таърифлаш мумкин:

ҳамма кириш сигналларига тизимнинг акс таъсири ҳам чекланган бўлиши керак. Бу шарт КЧЧЧ (кириш чеклаш, чиқиш чеклаш) шарти деб аталади. Одатда КЧЧЧ тизими барқарор деб қаралади факат қуйидаги барқарорлик шарти бажарилса:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty . \tag{3.26}$$

бунда $h(k)$ – тизим импульс характеристикаси. Маълумки, агар импульс характеристикаси чекланган бўлса юқорида келтирилган шарт бажарилади, чунки импульс характеристикалар коэффициенти чекли қийматга эга бўлади. Шундай қилиб, барқарорликни таҳлил этишни фақат импульс характеристикалари чексиз давомли тизимларга нисбатан қўллаш мумкин.

Чиқиш сигнали сатҳи чекланган бўлиши учун, ҳамма қутблар бирлик радиусли доира ичида бўлиши шарт. Агар қутблар бирлик радиусли доира ташқарисида бўлса, тизим барқарор эмас деб ҳисобланади. Амалда қутби бирлик доира устида жойлашган тизимлар ҳам барқарор бўлмаган тизим деб ҳисобланади ёки потенциал нобарқарор деб ҳисобланади, чунки жуда кичик қўзғатувчи куч ёки сезиларли хатолик тизимни барқарор бўлмаган ҳолатга олиб келади. Бундан бирлик доирадаги қутб нолга мос келган ҳолатда унинг таъсири бир-бирини қоплайди (компенсация қилади). Барқарор бўлмаган тизим импульс характеристикаси вақтга боғлиқ шаклда чексиз катталашиб боради.

Тизимнинг барқарорлигини назорат қилиш жуда осон: z-алмаштириш қутблари жойларини аниқлаш керак, агар қандайдир қутб бирлик доира устига тўғри келса ёки ундан ташқарида бўлса тизим барқарор эмас деб ҳисобланади (фақат қутб ҳолати бирлик доира устидаги нолга мос келмаса). Амалда қутблар ҳолатини аниқлаш осон масала бўлмаслиги мумкин.

Агар $H(z)$ тизими z-кўринишини кўпҳадларга ёйиш мумкин бўлмаса, оддий текшириш усули бу етарли сондаги импульс характеристикаларини топиш ва тескари z-алмаштиришни ҳисоблаб чиқиб графигини чизишдан иборат. Агар тизим импульс характеристикаси вақт ўтиши билан чексиз катталашиб борса ёки тезда нолга интилса, у ҳолда тизим барқарор эмас ёки жуда кам даражада барқарор бўлади.

3.6. Фарқланиш тенгламаси

Фарқланиш тенгламаси дискрет вақт тизимининг кириш маълумотлари устидан керакли чиқиш сигнали учун реал бажарадиган амалини таърифлайди. Кўпгина амалиётда муҳим ҳолатлар фарқланиш тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k). \tag{3.27}$$

бунда $x(n)$ – кириш сигнали кетма-кетлиги элементи, $y(n)$ – чиқиш сигнали кетма-кетлиги элементи, $y(n-k)$ – битта аввалги чиқиш сигнали, a_k ва b_k – тизим коэффициентлари. (3.27) тенгламадан кўринадики, жорий $y(n)$ жорий қиймати кетма-кетлигининг шу ондаги ва битта аввалги элементлари ва битта аввалги чиқиш сигналига $y(n-k)$ лар орқали олинади (аниқланади). Z-алмаштиришнинг кечикиш хоссасидан фойдаланиб, вақт дискрет тизими узатиш функцияси учун қуйидаги фарқланиш тенгламасини олиш мумкин ва аксинча:

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z).$$

$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k z^{-k} X(z).$$

Шундай қилиб (3.27) тенгламани қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} Y(z). \quad (3.28)$$

(3.28) ифодани соддалаштириб z-қийматлари мажмуаси учун дискрет тизим узатиш функцияси $H(z)$ нинг ифодасини оламиз

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}. \quad (3.29)$$

Агар махраж b_k нинг ҳамма қийматлари нолга тенг бўлса, у ҳолда (3.27) ва (3.28) тенгламалар қуйидаги кўринишларни оладилар:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k).$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}. \quad (3.30)$$

Энди чиқиш сигнали $y(n)$ кириш кетма-кетлигининг фақат шу ондаги ва аввалги элементларига боғлиқ бўлади ва (3.27) тенгламада ифодаланган чиқиш сигнали аввалги қийматига боғлиқ бўлмайди. Ушбу ҳолатда a_k коэффициент тизим импульс характеристикаси бўлиб, одатда $h(k)$ символи орқали белгиланади. Бу тур тизимларни чекланган импульс характеристикали тизимлар деб аталади, чунки $h(k)$ кетма-кетлик давомийлиги албатта чекланган бўлади. (3.27) ва (3.29) тенгламалар орқали ифодаланадиган тизимлар учун унинг махражларидан камида биттаси нолга тенг бўлмайди, бундай тизимлар чексиз импульс характеристикали тизимлар деб аталади. Импульс характеристикаси чексиз тизимларда қутблардан камида биттаси нолга тенг бўлмайди, импульс характеристикаси чекланган тизимларнинг эса одатда қутблари бўлмайди.

3.7. Импульс характеристикасини баҳолаш

Дискрет вақт тизимларини лойиҳалашда кўп ҳолларда уларнинг импульс характеристикаларини ҳисоблашга эҳтиёж туғилади. Мисол учун тизимни лойиҳалашда уни амалга ошириш учун чекланган импульс характеристикасини билиш керак бўлади ва чексиз импульс характеристикали тизимни лойиҳалашда эса унинг баркарорлигини таҳлил этиш учун керак. Шунингдек тизим частота характеристикасини баҳолашда ҳам импульс характеристикасидан фойдаланиш мумкин.

Дискрет вақт тизими импульс характеристикасини унинг импульс характеристикаси $H(z)$ га тескари z-алмаштиришни амалга ошириш натижасида аниқлаш мумкин:

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)], \quad k = 0,1,...$$

Агар $H(z)$ нинг z-алмаштиришини даражали қаторга ёйилса, яъни

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \ ... \qquad (3.31)$$

бўлса,у ҳолда z-алмаштириш коэффициентлари тўғридан-тўғри $H(z)$ импульс характеристикасига тенг бўлади.

Импульс характеристикани дискрет вақт тизимининг $u(n)$ бирлик сакрашнинг $n=0$ бўлганда бирга тенг бўлиши ва n нинг бошқа ҳамма қийматлари учун нолга тенг бўлган тизим акс таъсири деб қаралиши мумкин. Бундай қараш агар тизим кириш сигнали $x(n)$ ни бирлик сакраш импульси $u(n)$ га тенг, яъни $x(n)=u(n)$ бўлганда тизим чиқиш сигнали тизим характеристикаси $h(n)$ га тенг бўлишини англатиши билан ўзини оқлайди

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k) =$$
$$h(0)n(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + \ ... = h(n), \quad n = 0,1,... \qquad (3.32)$$

Бу $h(n)$ ҳисоблашнинг яна бир тенг кучли усулини беради (амалда эса, z-алмаштиришнинг яна бир усулини оламиз).

Назорат саволлари

1. Вақт дискрет тизими деганда нимани тушунасиз?

2. Чизиқли ва ночизиқли вақт бўйича инвариант тизимлар бир-биридан қандай фарқланади?

3. Тўғри ва тескари z-алмаштириш ҳақида умумий тушунтириш беринг.

4. Z-алмаштиришда даражали қаторга ёйиш усули ҳақида тушунча беринг.

5. Z-алмаштиришда элементар каср сонлар қаторига ёйиш усули ҳақида тушунча беринг.

6. Z-алмаштиришда чеклаш (айириш) усулидан фойдаланиш ҳақида тушунча беринг.

7. Z-алмаштиришнинг асосий хоссаларини айтинг.

8. Дискрет вақт тизимларини қутб ва ноллар орқали таърифлаш деганда нимани тушунасиз?

9. Фарқланиш тенгламаларидан дискрет тизимларда нима мақсадда фойдаланилади?

10. Фарқланиш тенгламасини ёзинг ва ундаги ифодаларга таъриф беринг.

11. Импульс характеристикаси нимани англатади?

4. КОРРЕЛЯЦИЯ ВА ЎРАМ

Корреляция тушунчаси сигналларга ишлов беришда муҳим ўрин тутади. Бу математик аппаратдан қуйидаги масалаларни ечишда фойдаланилади. Масалан, компьютер орқали кўриш ёки масофадан ер сунъий йўлдоши орқали зондлашда турли тасвирларни таққослашда, радар ёки гидроакустика қурилмаларида масофани ўлчаш ва сигнал нурлатиш манбаи жойлашган жойни аниқлашда (пеленгацияда), яъни узатиладиган ва қабул қилинган сигналларни таққослашда фойдаланиш мумкин.

Корреляция бир жараённинг иккинчи бир жараёнга боғлиқ эмаслигини ёки уларнинг бир-бирига ўхшашлигини аниқлаш имкониятини беради. Корреляция, шунингдек ўрам олиш жараёнининг бир кисми ҳисобланади, бу икки маълумотлар кетма-кетлигининг корреляциясини ҳисоблашда улардан бирининг кетма-кетлигини вақт бўйича мурожаат қилинади. Бу корреляция ва сверткани ҳисоблашда ягона алгоритмдан фойдаланиш мумкинлигини англатади.

4.1. Корреляция функцияси ҳақида умумий тушунчалар

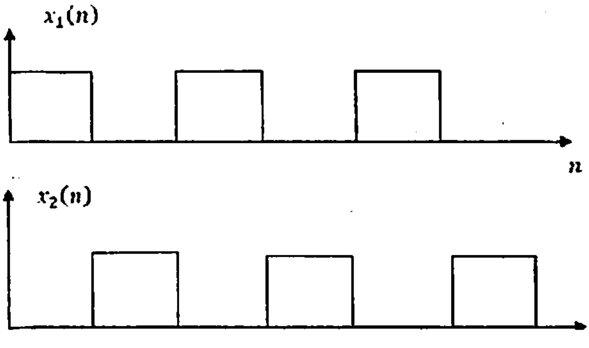
Агар икки сигнал бир-бирига ўхшаш бўлиб, бир нуқтадан бошқасига ўтганда унинг корреляцияси миқдорини ушбу икки жуфт нуқталардаги кўпайтмалар йиғиндиси орқали ҳисоблаш мумкин. Юқорида келтирилган фикр агар икки бир-бирига боғлиқ бўлмаган, тасодифий маълумотлар кетма-кетлигини кўриб чиқишда нисбатан асосли бўлади. Бу ҳолда бир жуфт нуқталар кўпайтмасининг йиғиндиси чексиз кичик тасодифий сонга интилади. Бу мусбат ва манфий сонлар бир хил эҳтимоллик билан пайдо бўлиши, натижада кўпайтмаларнинг жуфтликлари йиғиндиси бир-бирини қоплайди (компенсациялайди), йўққа чиқаради. Шу билан бирга йиғинди қиймати чекли, яъни нолга тенг бўлмаса, бу улар орасида корреляция борлигини билдиради. Манфий корреляция (манфий йиғинди) бир ўзгарувчининг катталашиши иккинчисининг кичиклашиши билан боғлиқ. Шундай қилиб, икки маълумотлар N та элементлар кетма-кетлиги $x_1(n)$ ва $x_2(n)$ ларнинг ўзаро корреляцияси r_{12} ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

Ўзаро корреляцияни бу усулда аниқлаш натижаси олинган нуқталар сонига боғлиқ. Бу боғлиқликни йўқотиш учун r_{12} ни олинган нуқталар сони N га бўлинади. Бу амални кўпайтмалар йиғиндисининг ўртача қийматини аниқлаш деб қараш мумкин

$$r_{12} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n). \qquad (4.1)$$

Баъзи ҳолларда юқорида келтирилган усул билан аниқланган корреляция қиймати икки кетма-кетлик ҳақиқатда бир-бирига 100% бўлган ҳолда нолга тенг бўлиши мумкин. Бу икки сигнал бир-бири билан фазаси билан фарқланганда, мисол учун синус ва косинус функциялар орасидаги ўзаро корреляция, ҳисоблаш натижасида нолга тенг, аммо улар бир-биридан $\pi/2$ га фарқланади. Фазалари фарқланувчи импульслар кетма-кетлиги (4.1-расм) корреляциясини ҳисоблаш натижаси кечикиш нолга тенг бўлганда нолга тенг.

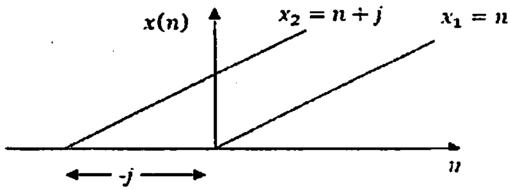


4.1-расм. Фазаси фарқланувчи 100% корреляцияланган сигналлар кечикиш нолга тенг бўлганда корреляция нолга тенг.

4.1-расмда келтирилган ҳар бир импульслар жуфтликлари учун корреляция функцияси нолга тенг, демак натижавий корреляция функцияси ҳам нолга тенг, чунки x_1 ва x_2 лардан бири ҳамма вақт нолга тенг. Аммо сигналлар бир-бири билан кучли корреляцияга (боғликликка) эга. Бу икки сигналлардан бирини: x_1 ни қандайдир эталон сигнал, x_2 ни эса тизим чиқишидаги кечиккан сигнал деб қараш мумкин. Корреляция функциясини аниқлаш учун улардан бирини вақт бўйича суриш (кечиктириш) керак бўлади. Одатда, корреляцияни ҳисоблаш учун x_2 чап томонга сурилади. Буни 4.2-расмда кўрсатилгандек, $x_2(n)$ ни $x_2(n+j)$ га алмаштирилган деб тасаввур этиш мумкин (бунда j – x_2 ни кечиктириш қиймати ёки импульсни j га тенг сонли дискрет вақтга силжитиш билан тенг кучга эга). Умуман олганда x_1 ни ўнг томонга силжитиш x_2 ни ўнг томонга силжитиш билан тенг кучли. Натижада ўзаро корреляцияни аниқлаш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+j) = r_{12}(-j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)x_1(n-j). \quad (4.2)$$

Амалда икки сигнал орасида корреляция бўлса, кўп ҳолларда улар орасидаги фазавий боғлиқлик номаълум бўлади, шунинг учун кореляцияни силжиш (кечикиш)нинг бир неча қийматлари учун аниқлаш ва улардан энг каттасини корреляция ҳақиқий қиймати деб ҳисоблаш керак.



4.2-расм. x_1 сигналга нисбатан j оралиқ вақтга силжитилган $x_2 = x_1 + j$.

Бундан ташқари корреляция функциясини узлуксиз вақт давомийлигида ҳам аниқлаш мумкин. Узлуксиз сигналлар корреляция функциясини аниқлашда аналог сигналлар корреляторлари ушбу алгоритм асосида ишлайди. Вақт узлуксиз бўлганда $n \to t$ га ва $j \to \tau$ га алмаштирилади

$$r_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t+\tau) dt. \tag{4.3}$$

Шу билан бирга, агар $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ лар такрорланиш даври T га тенг бўлса, у ҳолда (4.3) формула нисбатан соддалашади

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t) x_2(t+\tau) dt. \tag{4.4}$$

Агар маълумотлар сигнали чекланган энергияга эга бўлса, мисол учун даврий бўлмаган импульссимон сигналлар, у ҳолда T вақт бўйича ўртача қийматни аниқлаш $T \to \infty$ да бажарилмайди, чунки бу ҳолда $1/T$ нолга интилади ($1/T \to 0$) ва $r_{12}(\tau)$ ҳам нолга интилувчи кичик қийматга эга бўлади. Бу ҳолда қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (t) x_2(t+\tau). \tag{4.5}$$

Амалиётда чекланган давомийликка эга бўлган сигналларга ишлов берилади, шунинг учун (4.2) ёки (4.6) формулалардан фойдаланилади

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_2(t+\tau) dt. \tag{4.6}$$

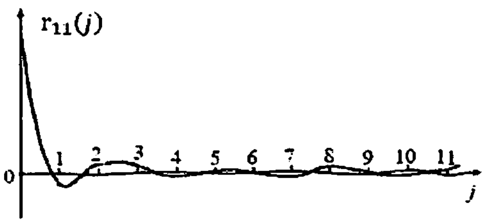
$x_1(n) = x_2(n)$ бўлган хусусий ҳол, сигналнинг ўзини ўзи билан корреляциясини аниқлаймиз. Бу жараён автокорреляция функциясини аниқлаш жараёни деб аталади. Сигнал автокорреляция функцияси қуйидагича аниқланади

$$r_{11}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_1(n+j).$$

Автокорреляция функцияси битта жуда фойдали хоссага эга, яъни

$$r_{11}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) = S.$$

бунда S – сигнал нормаллаштирилган энергияси. Натижада сигнал энергиясини аниқлаш усулини оламиз. Агар сигнал тизимга оқ шовқин – Гаусс шовқини кўринишида таъсир этса, унинг автокорреляция функцияси $\tau = 0$ бўлганда ўзининг энг катта қийматига эга бўлади ва $j \neq 0$ бўлиши билан унинг автокорреляция функцияси $j = 0$ даги қийматидан тасодифий ўзгарувчан кичик қийматгача кичиклашади (4.3-расм).



4.3-расм. Тасодифий сигнал автокорреляция функцияси.

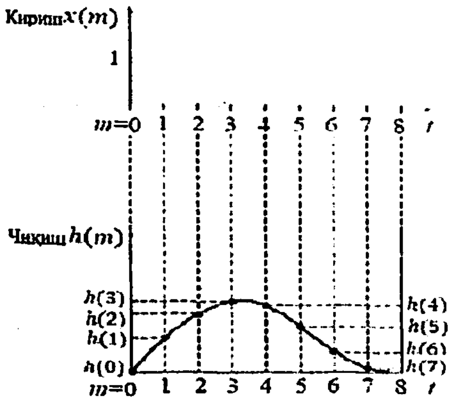
4.2. Ўрамнинг таърифи

Ўрам тизим чиқиш сигнали унинг кириш сигнали билан ўзаро таъсирланиши орқали аниқланишини ифодалайди. Одатда, тизим чиқиш сигнали кириш сигналининг кечиккан, сусайган (амплитудаси кичиклашган) ёки кучайтирилган кўринишда бўлади. Тизим чиқишида импульс кириш сигнали таъсири натижасида ҳосил бўлган сигнал вақт бўйича ўзгарувчан бўлиб, маълум бир вақтда ўзининг максимал қийматига эга бўлади (4.4-расм).

4.4-расмдан кўринадики, унга $n = 0$ вақтда таъсир этган бирлик импульс таъсирида чиқишидаги сигналдан олинган оний қийматлар $h(m)$ га тенг бўлади. Бу катталик тизимнинг импульс характеристикаси ёки унинг импульсга акс таъсири деб аталади.

Тизим киришига m вақтларда $x(m)$ импульслар кетма-кетлигини берилишидаги жараёнларни кўриб чиқамиз. Чиқиш сигнали вақт нолга тенг бўлганда $y(0)$ га тенг бўлади, шу билан бирга

$$y(0) = h(0)x(0).$$



4.4-расм. Кириш импульси ва тизимнинг унга мос импульс характеристикаси.

Дискрет вақт $m=1$ бўлганда чиқиш сигнали мусбат $h(1)x(0)$ га тенг (киришда $x(1)$ бўлганда чиқишда $h(0)x(1)$, бу $m=0$ да берилган сигналнинг кечиккан таъсири), натижада

$$y(1) = h(1)x(0) + h(0)x(1).$$

Шундай қилиб, келгуси чиқиш сигналлари қуйидагича ёзилади:

$$y(2) = h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0)x(2).$$
$$y(3) = h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3).$$
$$\vdots$$
$$y(n) = h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \cdots + h(0)x(n). \quad (4.7)$$

Агар тизим чизиқли бўлса чиқиш сигналини аввалги кириш сигналлари таъсирининг чизиқли йиғиндиси орқали аниқлаш мумкин. Биринчи тартибли чизиқли тизим чиқиш сигнали (4.7) тенглама орқали ифодаланади.

Келтирилган ифодаларни ўрганиш натижасида чиқиш сигнали кириш сигнали кетма-кетлигини тизим импульс характеристикасининг вақт бўйича мурожаати нуқталаридаги қийматига кўпайтириш орқали олиниши ҳақидаги хулосага келамиз. (4.7) тенгликни қуйидаги кўринишда ҳам ифодалаш мумкин:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n)x(0). \quad (4.8)$$

Демак, чиқиш сигналини тизим импульс характеристикаси жуфт нуқталаридаги қийматларининг кириш сигнали кетма-кетлигининг вақт бўйича мурожаат қиладиган қийматлари кўпайтмаси шаклида аниқлаш мумкин.

Демак, ўрам йиғиндиси бир кетма-кетлик ва вақт бўйича мурожаат қиладиган бошқа кетма-кетликлар орасида ўзаро корреляция функциясига мос келади.

(4.7) ва (4.8) тенгламаларни қуйидаги ихчам кўринишда ҳам ифодалаш мумкин:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m). \tag{4.9}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m). \tag{4.10}$$

Ушбу функция кириш сигналларининг импульс характеристикаси билан ўрами йиғиндиси деб аталади ва чиқиш сигнали кириш сигналининг тизим импульс характеристикаси билан ўрами орқали аниқланади.

(4.9) ва (4.10) тенгламаларни чексиз давомийли сигналлар учун ҳам қўллашда уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \odot h(n). \tag{4.11}$$

ва

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) \odot x(n). \tag{4.12}$$

Келтирилган тенгламаларда " " $\odot$лгиси ўрам амалани англатади.

Агар кириш сигнали узлуксиз импульслар кетма-кетлигидан иборат бўлса, у ҳолда юқорида келтирилган тенгламалардаги йиғиш амалини интеграллаш амали билан амлаштириш мумкин. Бу ҳолда (4.11) тенгламани қуйидаги шаклга келтириш мумкин:

$$y(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda\,. \tag{4.13}$$

(4.13) – ўрам интеграли деб аталади.

Ўрам деганда уни биз тор маънода тизим импульс характеристикасининг кириш сигнали билан ўрамини тушунамиз. Умуман олганда ўрам тушунчасини ҳар қандай икки маълумотлар тўпламига қўллаш ва бу атамани нисбатан кенг маънода қўллаш мумкин.

(4.11)-(4.13) тенгламалардан кўринадики ўрамни олиш амали вақт функцияси – вақт бўйича ўрам олишни англатади. Маълумки, частоталар орқали тизимнинг f частотасидаги чиқиш сигнали $Y(f)$ қуйидагича аниқланади:

$$Y(f) = H(f)X(f). \tag{4.14}$$

бунда $H(f)$ – тизимнинг f частотадаги частота характеристикаси, $X(f)$ – кириш сигнали $x(t)$ нинг Фурье кўриниши. Бундан ташқари $H(f)$ тизим частота характеристикаси $h(t)$ нинг Фурье кўриниши эканлигини ҳам тасдиқлаш мумкин. (4.14) тенгламанинг ҳар икки қисмига Фурье тескари алмаштиришини қўллаб қуйидагини оламиз:

$$F^{-1}[Y(f)] = y(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]. \qquad (4.15)$$

(4.13) ва (4.15) тенгламаларни биргаликда таҳлил этиб (4.16) тенгламани оламиз

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t) \odot h(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]. \qquad (4.16)$$

Шундай қилиб, икки сигналнинг вақт бўйича ўрами (сверткаси) ушбу сигнал Фурье кўринишларига Фурье тескари алмаштиришини қўллашга мос келади. Ушбу хулосани қисқача “вақт бўйича ўрам олиш частота бўйича кўпайтиришга тенг (мос) келади” дейилади.

Келтирилган таъсирнинг яна бир унга мос иккинчиси ҳам бор, яъни частота бўйича ўрам вақт бўйича кўпайтиришга тенг (мос) келади. Шундай қилиб қуйидаги ифодани оламиз:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)H(u)du = X(f) \odot H(f) = F[x(t)h(t)]. \qquad (4.17)$$

Шундай қилиб, икки вақт кетма-кетликлари Фурье кўриниши кўпайтмаси икки кетма-кетлик Фурье кўриниши ўрамига мос келади.

4.3. Ўрамнинг хоссалари

1. Коммутативлик қонуни

$$x_1(t) \odot x_2(t) = x_2(t) \odot x_1(t). \qquad (4.18)$$

Шуни таъкидлаймизки (4.18) ифода қуйидаги ифода билан тенг кучга эга

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, x_1(t-\tau)d\tau.$$

2. Дистрибутивлик қонуни

$$x_1(t) \odot [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) \odot x_2(t) + x_1(t) \odot x_3(t). \qquad (4.19)$$

3. Ассоциативлик қонуни

$$x_1(t) \odot [x_2(t) \odot x_3(t)]=[x_1(t) \odot x_2(t)] \odot x_3(t). \qquad (4.20)$$

4.4. Тизимларни идентификациялаш

(4.12) тенгламада тизим кириш сигнали $x(n)$ ва чиқиш сигнали $y(n)$ орасидаги боғлиқлик келтирилган. Идентификация атамаси тизимнинг импульс характеристикаси $h(n)$ ни аниқлашни англатади. Тизим киришига $x(n)$ синов сигналини бериб, чиқиш сигнали $y(n)$ ва импульс характеристика $h(n)$ ни қуйидаги кетма-кетликда аниқлаш мумкин: (4.8) тенгламадан чиқиш сигналини аниқлаймиз

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n)x(0).$$

$n = 0$ бўлганда $y(0) = h(0)x(0)$ бўлади, шунинг учун

$$h(0) = \frac{y(0)}{x(0)}. \tag{4.21}$$

Энди (4.10) тенгламадан фойдаланиб, қуйидагини оламиз

$$y(n) = h(n)x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m). \quad n \geq 1; \tag{4.22}$$

бундан

$$h(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)}{x(0)}. \quad n \geq 1,\ x(0) \neq 0. \tag{4.23}$$

4.5. Ўрамнинг мурожаати

Агар тизим импульс характеристикаси ва чиқиш сигнали маълум бўлса, номаълум кириш сигналини излаш (қидириш) учун ўрам мурожаатидан фойдаланилади. Ўрамни мурожаатга айлантиришни тизимни идентификациялашда фойдаланиладиган жараёндан фойдаланиб бошқариш мумкин. (4.14) тенгламадан фойдаланиб қуйидагини оламиз:

$$y(n) = h(0)x(n) + \sum_{m=1}^{n} h(m)x(n-m). \tag{4.24}$$

Агар $n = 0$ бўлса $y(0) = h(0)x(0)$, шунинг учун

$$x(0) = \frac{y(0)}{h(0)}. \tag{4.25}$$

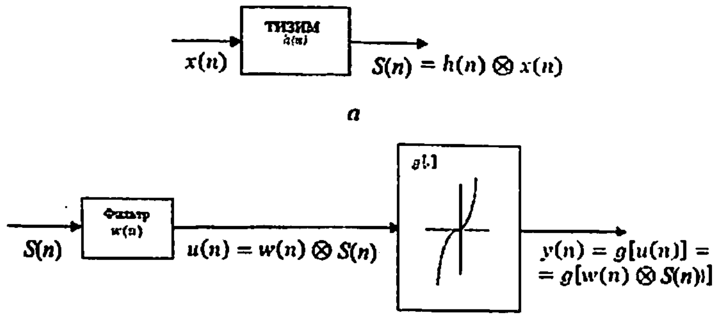
(4.24) тенгламадан $x(0)$ – кириш сигналини аниқлаш учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$x(0) = \frac{y(n) - \sum_{m=1}^{n} h(m)x(n-m)}{h(0)}. \tag{4.26}$$

4.6. Ўрамнинг "кўрона" мурожаати

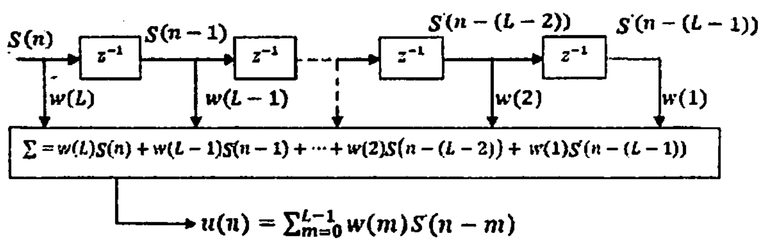
Тизим импульс характеристикаси номаълум бўлганда кириш сигналини чиқиш сигнали орқали аниқлаш жараёнини ўрам кўрона мурожаати деб аталади. Қуйида келтириладиган усулда кириш сигналини аниқлаш Белл ва Сежновски ишланмаларига асосланган.

Ушбу усул ёрдамида масалани ечиш жараёни 4.6-расмда тасвирланган.



4.6-расм. Ўрамнинг кўрона мурожаати.

4.6*а*-расмда аниқланиши керак бўлган $x(n)$ бирламчи сигнал импульс характеристикаси $h(n)$ бўлган тизим орқали узатилиши натижасида ўлчанган чиқиш сигнали $S(n)$ олинади. $S(n)$ сигнал $h(n)$ ни $x(n)$ билан ўрами ($h(n) \odot x(n)$)ни ифодалайди, натижада у $x(n)$ нинг кечиккан нусхаси таъсирида қисман бузилган бўлади. Масалада $x(n)$ га яхши даражада мос (ўхшаш) сигнал $u(n)$ ни ҳисоблаш талаб этилади. Демак 4.6*б*-расмда тасвирланганидек $S(n)$ кириш сигналини ўраш натижасида керакли $u(n)$ чиқиш сигналини берувчи $w(n)$ фильтрини топиш талаб этилади. Бундай фильтр сифатида 4.7-расмда тасвирланган трансверсал фильтрдан фойдаланиш мумкин.



4.7-расм. Кўрона ўрам учун $w(n)$ трансверсал фильтр.

Бу фильтр чиқиш сигнали қуйидагига тенг

$$u(n) = \sum_{m=0}^{L-1} w(m) s(n-m),$$

бўлиб, уни вазифасини бажариш қобилиятига эга бўлган ифодани қуйидаги матрица кўринишида ифодалаймиз

$$U = WF,$$

бунда $\mathbf{U} = \{u(0), u(1), \ldots, u(N)\}^T.$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w(L) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ w(L-1) & w(L) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(L) & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & w(1) & \cdots & w(L) \end{pmatrix},$$

$F = \{S(0), S(1), \ldots, S(N)\}^T$, N – вақт қаторидаги элементлар сони.

Масалани ечиш учун миқдор коэффициентларни адаптив ҳисоблаш алгоритмидан фойдаланиб ахборотни максималлаштириш принципидан фойдаланиш мумкин. Натижада $u(n)$ нуқталари орасидаги қийматлари орасидаги статистик боғлиқликни камайтириш орқали созлаш амалини бажариш керак бўлади. Бундай ёндашиш $u(n)$ ни оқартириш усули сифатида маълум, чунки оқ шовқин кетма-кетлигида олинган оний қийматлари статистик боғлиқ эмас. Бу натижага эришиш учун юқори тартибли статистик боғлиқликларни бартараф қилиш керак. Бунинг учун $u(n)$ тизимга $g[u(n)]$ ночизиқли узатиш функцияси орқали борилади ва унинг чиқишидаги $y(n) = g[u(n)]$ ахборот максималлаштирилади. Коэффициентларни янгилаш қуйидаги формулалар орқали амалга оширилади:

$$\Delta w(L-j) \propto \sum_{n=j}^{N} \left(\frac{1}{w(L)} - 2x(n)y(n)\right) \tag{4.27}$$

$$\Delta w(L-j) \propto \sum_{n=j}^{N} \left(-2x(n-1)y(n)\right). \tag{4.28}$$

Ҳисоблаш алгоритми $\Delta w(L)$ ва $\Delta w(L-j)$ лар кичик бўлгунгача давом эттирилади. Сўнгра топилган кечикиш ва маълумотларнинг ишлов бериш учун топилган миқдор коэффициентларидан фойдаланиб, тегишли фильтр амалга оширилади.

Назорат саволлари

1. *Автокорреляция ва ўзаро корреляция тушунчалари нимани англатади?*
2. *Ўрам тушунчасидан қандай ҳолларда фойдаланилади ва унинг қандай асосий хоссалари бор?*
3. *Тизим импульс характеристикасига таъриф беринг.*

4. *Идентификация тушунчаси нимани англатади?*
5. *Трансверсал фильтр деб қандай фильтрларга айтилади?*
6. *Трансверсал фильтр умумлашган структуравий схемасини чизинг ва ишлаш принципини айтиб беринг.*

5. РАҚАМЛИ ФИЛЬТРЛАРНИ ЛОЙИҲАЛАШ

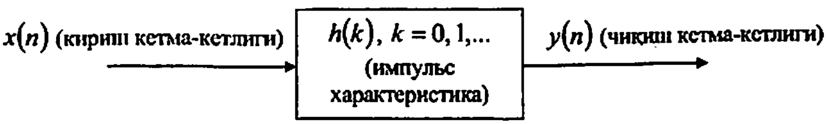
Рақамли фильтр атамаси орқали кириш сигнали рақамли сигнал бўлган ва чикиш сигнали бошқа рақамли сигнални олишни таъминловчи математик алгоритмни аппарат ёки дастурий таъминот орқали амалга оширувчи қурилма тушунилади. Бунда рақамли фильтрнинг амплитуда ва фаза характеристикаси махсус шаклантирилган бўлади. Кўп ҳолларда рақамли фильтрлардан фойдаланиш афзалликларга эга, улар амплитуда ва фаза характеристикалари қийматларини нисбатан аниқ таъминлаш имкониятини беради.

5.1. Рақамли фильтрларнинг турлари: импульс характеристикалари чекли ва импульс характеристикалари чексиз фильтрлар

Рақамли фильтрлар икки катта турга бўлинади:

- чексиз импульс характеристикали фильтрлар;
- чекли импульс характеристикали фильтрлар.

Ҳар икки тур фильтрларни (стандарт кўринишда) уларнинг импульс характеристикалари коэффициенти $h(k)$ $(k=0,1,...)$ орқали 5.1-расмда келтирилгандек тасвирлаш мумкин.



5.1-расм. Рақамли фильтрни концептуал тасвирлаш.

Фильтр кириш ва чиқиш сигналлари ўрам амали орқали бир-бирига боғланган. Ушбу боғлиқлик (5.1) формула орқали импульс характеристикаси чексиз фильтр учун ва (5.2) формула орқали импульс характеристикаси чекли фильтрлар учун келтирилган.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (5.1)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \quad (5.2)$$

Ушбу (5.1) ва (5.2) тенгламалардан шуни хулоса қилиш мумкинки, импульс характеристикаси чексиз фильтрларнинг импульс характеристикалари чексиз давомийликка эга ва импульс характеристикаси чекли фильтрлар учун импульс характеристикаси давомийлиги чекланган, чунки импульс характеристикаси чекланган фильтр импульс характеристикаси $h(k)$ фақат N та қийматни қабул қилади. Амалда импульс характеристикаси чексиз фильтр чиқиш сигналини (5.1) тенгламадан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин эмас, чунки акс таъсир импульс характеристикаси жуда катта миқдорда давомли (назарий нуқтаи назардан чексиз катта). Шунинг учун импульс характеристикаси чексиз фильтр учун (5.1) тенгламани рекурсив шаклда қуйидагича ифодалаймиз:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k). \quad (5.3)$$

бунда a_k ва b_k – фильтр коэффициентлари. Шундай қилиб (5.2) ва (5.3) тенгламалар импульс характеристикаси чекланган ва импульс характеристикаси чекланмаган фильтрларнинг фарқли тенгламалари ҳисобланади. Ушбу тенгламалардан рақамли фильтрларни лойиҳалаш билан боғлиқ масалаларни ечишда кенг фойдаланилади.

(5.3) тенгламада тизим чиқиш сигналининг реал вақтдаги оний қийматлари $y(n)$ ундан олдинги чиқиш функциялари бўлиб, ҳозир унинг киришига таъсир этаётган ва бундан аввалги таъсир этган кириш сигналлари оний қийматларининг ҳам функцияси ҳисобланади. Импульс характеристикаси чексиз фильтр – бу тескари боғланишли тизим. Импульс характеристикаси чекли фильтрларнинг чиқиш сигнали оний қийматлари $y(n)$ аввал таъсир этган ва ҳозирда таъсир этаётган кириш сигнали қийматига боғлиқ. Агар (5.3) тенгламанинг ҳамма b_k коэффициентларини нолга тенг қилиб олинса, у ҳолда (5.2) тенглама келиб чиқади.

(5.4) тенгламаларда импульс характеристикаси чексиз ва чекли фильтрлар уларнинг узатиш функциялари орқали ифодаланган бўлиб, бундай кўринишда талқин этиш уларнинг частота характеристикаларини баҳолашда қулайликлар келтириб чиқаради:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}. \quad (5.4а)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} / \left(1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}\right). \quad (5.4б)$$

Рақамли фильтрларни лойиҳалашда (5.4а) ёки (5.4б) тенгламалардан фойдаланиш лойиҳаланаётган фильтрнинг қайси тур фильтр гуруҳига - импульс харктеристикаси чекли ёки чексиз турига тегишлилигига боғлиқ. Шунинг учун рақамли фильтрларни бир-биридан фарқини билиш уларнинг ўзига хос характеристикаларини ва энг кераклиги қайси тур фильтрни танлашни билиш керак.

5.2. Импульс характеристикаси чексиз ва чекли фильтрларни танлаш

Импульс характеристикаси чексиз ва чекли фильтрлардан бирини танлаш уларнинг ўзига хос афзалликларига боғлиқ.

1. Импульс характеристикаси чекли рақамли фильтрлар юқори даражада чизиқли фазавий характеристикага эга. Шунинг учун у сигнал спектрал ташкил этувчилари фазалари орасидаги муносабатларнинг бузилишига йўл қўймайди, натижада сигнал шакли бузилмайди. Бу кўп

ҳолларда муҳим ҳисобланади, мисол учун, маълумотларни узатишда, биомедицинада, аудио ва видео сигналларга ишлов беришда ва ҳ.к. Импульс характеристикаси чексиз фильтрларнинг фазавий характеристикалари ночизикли, айниқса сигнал ўтказиш полосаси чеккаларида.

2. Импульс характеристикаси чекли фильтрлар норекурсив амалга оширилган, яъни улар ҳамма вақт барқарор (бу 5.2-формула таҳлилидан келиб чиқади). Импульс характеристикаси чексиз фильтрларнинг барқарорлигига ҳамма вақт ҳам кафолат бериб бўлмайди.

3. Фильтрларни амалда қўллаш учун чекланган битлар сонидан фойдаланилади. Бунинг амалий таъсири импульс характеристикаси чекли фильтрларга қараганда импульс характеристикаси чексиз фильтрларга нисбатан кам (мисол учун, бутунлаш шовқини ва квантлаш хатолиги).

4. Чекланган давомийли импульс характеристикани олишда частота характеристикасининг қиялиги катта бўлиши учун импульс характеристикаси чекланмаган фильтрникига қараганда кўп коэффициентлар керак бўлади. Натижада импульс характеристикаси чекланган АЧХ берилган фильтрни амалга ошириш учун импульс характеристикаси чексизга нисбатан катта ҳисоблаш қуввати ва хотира керак бўлади.

5. Аналог фильтрларни уларга эквивалент бўлган импульс характеристикаси чексиз фильтрга алмаштириш нисбатан осон. Импульс характеристикаси чекли фильтрлар учун бундай алмаштириш мумкин эмас, чунки унга ўхшаш аналог фильтр турлари йўқ. Аммо импульс характеристикаси чекли фильтрлар ёрдамида исталган АЧХли фильтрни яратиш осон.

6. Импульс характеристикаси чекли фильтрларни синтезлаш агар компьютердан фойдаланилмаса алгебраик жиҳатдан мураккаброқ.

7. Импульс характеристикаси чекли фильтрлар рекурент. Бу у орқали "вақт бўйича тескари"сига ўзгарувчи ягона сигнални берганда, умуман олганда, биз бошқа натижаларни оламиз. Агар бу вақт бўйича анизатропия нутқ сигнали учун табиий бўлгани билан, тасвир сигналлари учун қўллаш мумкин эмас. Шунинг учун импульс характеристикаси чексиз фильтрлардан фойдаланиш учун бир қатор чекланишлар мавжуд.

Юқорида келтирилган хулосалар асосида импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрларни танлашда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

- агар фильтр АЧХ сигнал ўтказиш полосасида бир хил узатиш коэффициентига ва сигнал ўтказиш имконияти катта бўлиши ягона талаб бўлса импульс характеристикаси чексиз фильтрлардан фойдаланиш керак, чунки импульс характеристикаси чекланмаган (айниқса эллептик характеристикасидан фойдаланиладиган) фильтрлар импульс характеристикаси чекли фильтрларга қараганда кам сонли коэффициентларни аниқлашни талаб этади;

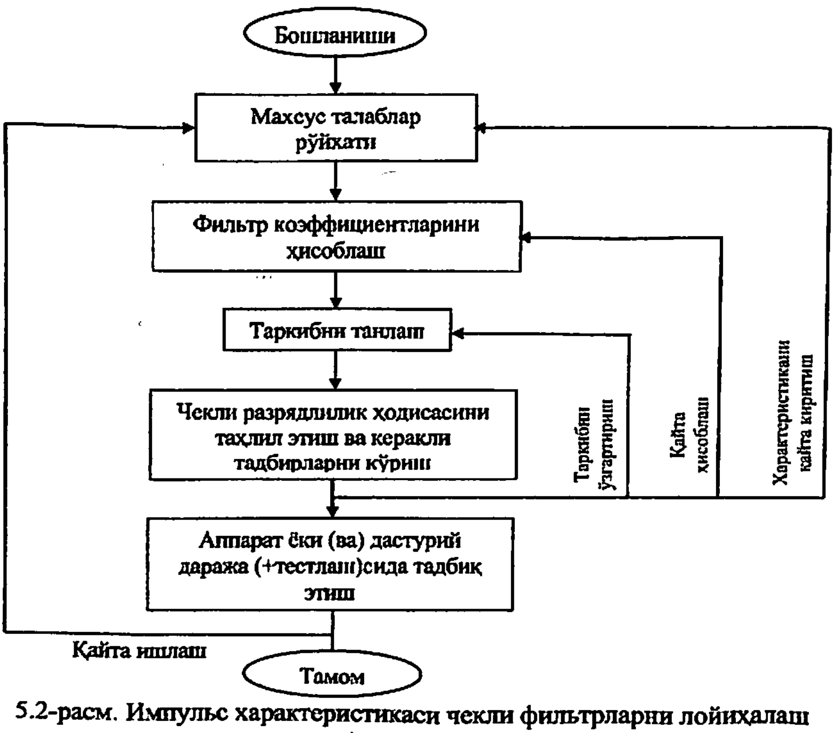
- импульс характеристикаси чекли фильтрлардан, агар фильтрлар коэффициентлари унча катта бўлмаган, хусусан агар фаза характеристикасида бузилишлари бўлмаслиги ёки кичик бўлганда фойдаланиш тавсия этилади. Бундан ташқари сўнгги йилларда яратилган сигналларга рақамли ишлов бериш процессорлари импульс характеристикаси чекли фильтрлар архитектураси (тузилиши)га асосланган бўлиб, улардан баъзилари махсус импульс характеристикаси чекли фильтрлар учун ишлаб чиқилган.

5.3. Фильтрларни лойиҳалаш босқичлари

Рақамли фильтрларни лойиҳалаш беш босқичда ўтади (5.2-расм).

1. Фильтрга қўйиладиган асосий техник талаблар.
2. Фильтрнинг мос келувчи коэффициентларини ҳисоблаш.
3. Фильтрнинг тегишли структурасини тасаввур этиш.
4. Фильтрнинг ишлаш сифатига разрядлар сони чекланганлигини таҳлил этиш.
5. Фильтрни дастурий ёки (ва) аппарат даражасида амалга ошириш.

Юқорида келтирилган беш босқич баъзан бир-бирига боғлиқ бўлади: бундан ташқари улар ҳамма вақт ҳам келтирилган тартибда жойлашган бўлади. Амалда иккинчи босқични учинчи ва тўртинчи босқичлар билан бирга қуриш имкониятини берадиган усуллар ҳам бор.



5.2-расм. Импульс характеристикаси чекли фильтрларни лойиҳалаш босқичлари.

Аммо самарадор фильтрни олиш учун ушбу жараённи бир неча "итерация" – яқинлаштиришлардан фойдаланиб амалга ошириш тўғри келади, айникса фильтрга бўлган махсус талаблар тўлиқ маълум бўлмаган ҳолларда ёки ишлаб чикарувчи бошқа тенг кучли СРИБ фильтрини таҳлил этмокчи бўлган ҳолларда юз беради.

5.3.1. Махсус талаблар рўйхати

Махсус талаблар рўйхати қуйидагилардан иборат:

1) сигнал характеристикалари (сигнал ва уни олувчи тури, сигнални киритиш-чиқариш интерфейси, маълумотларни узатиш тезлиги ва полоса кенглиги, энг юқори частота);

2) фильтр характеристикалари (талаб этиладиган АЧХ ва ФЧХ ва ушбу характеристикаларга талабларнинг қанчалик қатъийлиги, ишлаш тезлиги ва фильтр иш режими (реал ёки кечиктирилган (модел) вақт));

3) амалга ошириш принципи (мисол учун, компьютер учун юқори даражали дастурлаш тилида ёки процессорга асосланган СРИБ тизими, шу билан бирга сигнал процессорини танлаш ҳам амалга оширилади);

4) фильтр таркиби (структураси)га қўйиладиган бошқа талаблар (мисол учун, фильтр таннархи). Лойиҳаловчи ва ишлаб чиқарувчи бошланғич босқичларида тўлиқ ахборот (маълумот)ларга эга бўлмаслиги мумкин. Аммо лойиҳалаш ва ишлаб чиқариш жараёнини соддалаштириш учун иложи борича кўп сонли талаблар маълум бўлгани маъқул.

Фильтрлар характеристикалари кўп ҳолларда частоталарга боғланган кўринишда берилади. Частота танловчан фильтрлар; паст частота фильтрлари; частота полосаси фильтри учун одатда махсус талаблар рухсат этиладиган фарқланишлар чизмаси орқали ифодаланади. Паст частота фильтри учун шундай чизма 5.3-расмда келтирилган.

Штрихланган горизонтал чизиқлар рухсат фарқланишлар чегарасини белгилайди. Асосий ўтказиш полосасида амплитуда-частота характеристикасининг энг катта фарқланиши δ_p, ўтказмаслик полосасида энг катта фарқланиш δ_s.

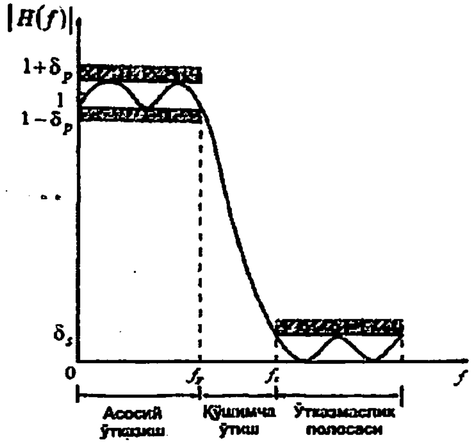
Қўшимча ўтиш полосаси кенглиги фильтр характеристикаси қандай даражада тиклигини билдиради. АЧХ узатиш коэффициенти $H(f)$ бу қисмида аста-секин, то ўтказмаслик полосасига қадар камайиб боради. Амалда қуйидаги асосий кўрсаткичлар асосий қизиқиш билдиради:

δ_p – ўтказиш полосасидаги фильтр узатиш коэффициенти $H(f)$ нинг фарқланиши (ўзгариши);

δ_s – ўтказмаслик полосасидаги фильтр узатиш коэффициенти $H(f)$ нинг фарқланиши (ўзгариши);

f_p – ўтказиш полосаси чегаравий частотаси;

f_s – ўтказмаслик полосаси чегаравий частотаси.



5.3-расм. Паст частоталар фильтри учун рухсат этиладиган фарқланишлар чизмаси.

Чегаравий частоталар нормаллаштирилган кўринишда берилади, яъни дискретлаш частотаси f/F_s улуши кўринишида, аммо кўп ҳолларда гц ёки кГц ларда берилган махсус талаблардан фойдаланилади. Ўтказиш полосасидаги ва ўтказмаслик полосасидаги фарқланишлар оддий сонлар орқали ёки децибелларда ифодаланиши мумкин. Мисол учун, ўтказмаслик полосасидаги сўнишнинг энг кичик қиймати A_s ва ўтказиш полосасидаги максимал ўзгариш (фарқланиш) децибелларда импульс характеристикаси чекли фильтрлар учун қуйидагича ифодаланади:

$$A_s\,(\text{ўтказмаслик полосасидаги сўниш}) = -20\lg(1+\delta_s) \qquad (5.5а)$$

$$A_p\,(\text{ўтказиш полосасидаги фарқланиш}) = -20\lg(1+\delta_p). \qquad (5.5а)$$

Рақамли фильтр фаза-частота характеристикасига талаблар кўп ҳолларда фаза характеристикаси ночизиқлилиги кўрсаткичи келтирилади ёки фаза характеристикаси идеал чизиқли бўлиши талаб этилади.

5.3.2. Рақамли фильтр коэффициентларини ҳисоблаш

Бу босқичда аппроксимация усулларидан бири танланади ва импульс характеристикаси чекли фильтрлар учун $h(k)$ коэффициентлар ва импульс характеристикаси чексиз фильтрлар учун a_k ва b_k коэффициентлар ҳисобланади. Коэффициентларни ҳисоблаш усули ушбу коэффициентларнинг импульс характеристикаси чекли ёки чексиз фильтрга тегишли эканлигига боғлиқ.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрнинг коэффициентларини ҳисоблаш аньана бўйича маълум аналог фильтрларнинг характеристикаларини унга мос рақамли фильтрлар характеристикаларига алмаштиришга асосланган. Бунда икки асосий ёндашишдан фойдаланилади: импульс характеристикани инвариант алмаштириш ва бичизиқли алмаштириш усули.

Импульс характеристикани инвариант усулдан фойдаланиб алмаштиришда аналогли фильтрни рақамлига алмаштирилганда бирламчи аналог фильтрнинг импульс характеристикаси сақланмайди. Ички бир-бирини устига тушиши сабабли ушбу усулни юқори частота фильтрлари ва режектор фильтрлар учун қўллаб бўлмайди.

Иккинчи томондан бичизиқли (икки чизиқли) усул жуда самарали фильтрлашни таъминлайди ва частота танловчан фильтрларнинг коэффициентларини ҳисоблашга яхши мос келади. Натижада анъанавий характеристикали рақамли фильтрларни: Баттерворт, Чебишев ва эллиптик фильтрларни яратиш мумкин бўлади.

Бичизиқли усулда яратилган фильтрлар, умуман олганда анъанавий фильтрлар амплитуда характеристикасига ўхшаш, аммо вақт бўйича бошқа хоссаларга эга бўлади. Импульс характеристикани инвариант алмаштириш усули аналог тизимларни моделлаш учун яхши бўлиб, аммо частота танловчи импульс характеристикаси чексиз фильтрлар учун бичизиқли усулдан фойдаланилгани маъқул.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрлар коэффициентларини ҳисоблашда унинг ўрнини босувчи (алтернатив) ноль ва қутбларни жойлаштириш усулидан ҳам фойдаланса бўлади – бу усулдан оддий фильтрларнинг коэффициентларини осон ҳисоблаш имкониятини беради. Шу билан бирга, бу усулдан яхши амплитуда характеристикали фильтрларни ҳисоблаш учун тавсия этилмайди, чунки бунда жуда кўп ноль ва қутблар борлиги ҳисоблаш ҳажмини ошириб юборади.

Импульс характеристикаси чекли фильтрлар коэффициентларини бир неча усуллар билан ҳисоблаш мумкин: кесиш (тортиш – вазнни аниқлаш), частота бўйича танлаш ва Паркс-Мак-Клиппан оптимал алгоритми.

Кесиш усули импульс характеристикаси чекли фильтрлар коэффициентларини ҳисоблашнинг жуда осон ва мослашувчан усули ҳисобланади, аммо лойиҳаловчи, ишлаб чиқарувчига фильтр параметрларини керакли миқдорда ўзгартириш имкониятини бермайди.

Частота бўйича танлаш усули шу билан ўзига эътиборни тортадики, у ёрдамида импульс характеристикаси чекли фильтрларни рекурсив шаклда амалга ошириш имкониятини беради, бу сонли ҳисоблашни қўллаш нуқтаи назаридан эътиборли. Аммо бу усулга фильтр параметрларини бошқариш ва ўзгартириш учун мослашувчанлик етишмайди.

Ҳозирда саноат ишлаб чиқараётган рақамли фильтрларда оптимал усулдан фойдаланилади, чунки бу усул билан импульс характеристикаси чекли фильтрларнинг унга қўйилган техник талабга жавоб беришига эришилади. Шунинг учун бундай фильтрларни лойиҳалашда дастлаб оптимал усулдан фойдаланиб кўриш керак (агар бошқа усулдан фойдаланиш шарти аввалдан белгиланган бўлмаса).

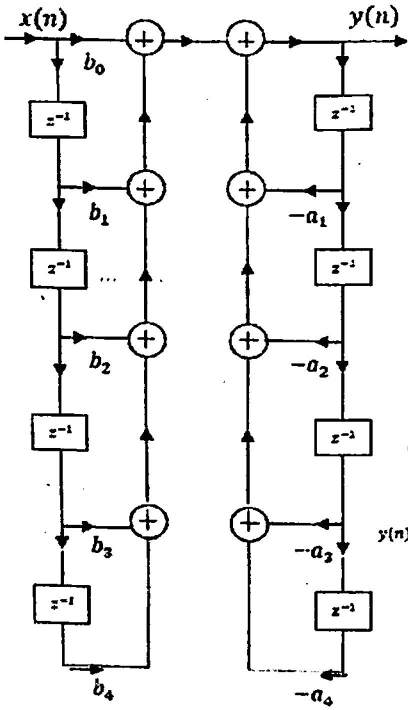
5.3.3. Фильтрни унга мос келувчи структура орқали ифодалаш

Бу босқичда берилган $H(z)$ узатиш коэффициентини унга мос фильтрловчи таркиб (структура) орқали ифодалаш амалга оширилади. Фильтр таркибини тасвирлаш учун кўп ҳолларда блок-схемалар ёки функционал схемалардан фойдаланилади ва уларда рақамли фильтрни амалга оширишни осонлаштириш учун ҳисоблаш амалларини бажариш кетма-кетлиги ҳам кўрсатилади.

Фойдаланиладиган структура қайси тур фильтрни импульс характеристикаси чекли ёки чексиз фильтрни танланганлигига боғлиқ.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрлар учун қуйидаги уч шакл структуралардан фойдаланилади: тўғри, каскадли ва параллел шаклдагилар.

Тўғри шакл – бу импульс характеристикаси чексиз фильтр узатиш функциясини тўғридан-тўғри ифодалаш (5.4-расм).



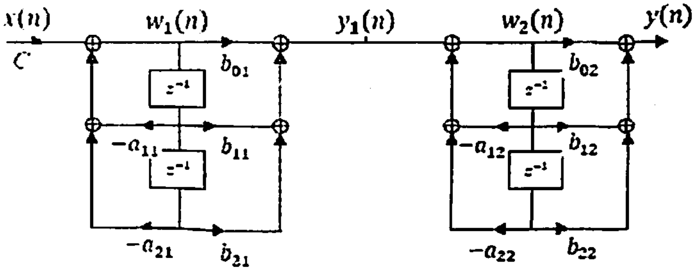
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{4} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{4} a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{4} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{4} a_k y(n-k)$$

5.4-расм. Тўртинчи тартибли импульс характеристикаси чексиз фильтрни амалга ошириш тўғри шакл структураси.

Каскад шаклида – импульс характеристикаси чексиз фильтр узатиш функцияси (5.5-расм) бир неча бор такрорланади ва иккинчи тартибли звенолар кўпайтмаси орқали ифодаланади.

Параллел шаклда – $H(z)$ иккинчи тартибли звенолар йиғиндиси шаклида жойлаштирилади (бунда элементар касрлардан фойдаланилади). 5.6-расмда узатиш коэффициентлари ва фарқланиш тенгламаларининг фильтр структурасини тасвирловчи турлари келтирилган.

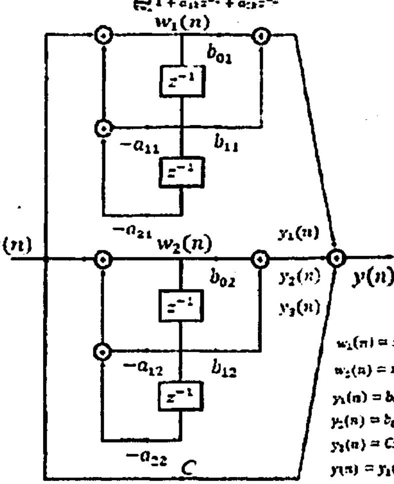


$$H(z)=C\prod_{k=1}^{2}\frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$

$$w_1(n)=Cx(n)-a_{11}w_1(n-1)-a_{21}w_1(n-2)$$
$$y_1(n)=b_{01}w_1(n)+b_{11}w_1(n-1)+b_{21}w_1(n-2)$$
$$w_2(n)=y_1(n)-a_{12}w_2(n-1)-a_{22}w_2(n-2)$$
$$y(n)=b_{02}w_2(n)+b_{12}w_2(n-1)+b_{22}w_2(n-2)$$

5.5-расм. Тўртинчи тартибли импульс характеристикаси чексиз фильтрни амалга ошириш каскад структураси.

$$H(z)=C+\sum_{k=1}^{2}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$

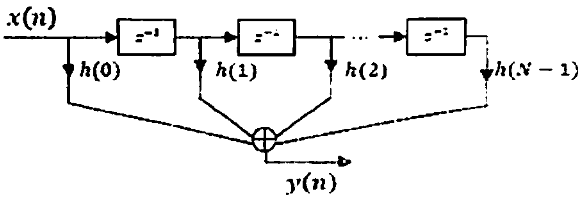


$$w_1(n)=x(n)-a_{11}w_1(n-1)-a_{21}w_1(n-2)$$
$$w_2(n)=x(n)-a_{12}w_2(n-1)-a_{22}w_2(n-2)$$
$$y_1(n)=b_{01}w_1(n)+b_{11}w_1(n-1)$$
$$y_2(n)=b_{02}w_2(n)+b_{12}w_2(n-2)$$
$$y_3(n)=Cx(n)$$
$$y(n)=y_1(n)+y_2(n)+y_3(n)$$

5.6-расм. Тўртинчи тартибли импульс характеристикаси чексиз фильтрни амалга ошириш параллел структураси.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрларни лойиҳалаш ва яратишда параллел ва каскад структураларидан энг кўп фойдаланилади, чунки улар нисбатан содда фильтрация алгоритмлари орқали амалга оширилади ва уларнинг чекланган сонли битлардан фойдаланиб амалга оширилишига сезгирлиги тўғри структурали фильтрларнинг сезгирлигига нибатан кичикроқ.

Импульс характеристикаси чекли фильтрларни лойиҳалаш ва яратишда энг кўп фойдаланиладиган структура – бу тўғри структура (5.7-расм), чунки уни амалга ошириш бошқа структураларга қараганда осон.



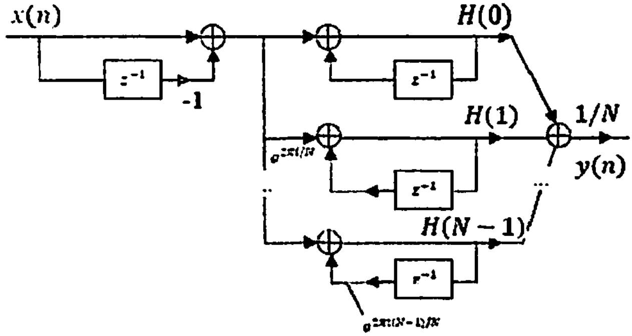
5.7-расм. Импульс характеристикаси чекли фильтрни амалга ошириш тўғри структураси (трансверсал фильтр).

Импульс характеристикаси чекли фильтрларнинг (5.7-расм) бундай структура асосида яратилганини баъзан бир неча чиқиш нуқталари бор кечиктириш линияси ёки трансверсал фильтр деб аталади. Бундан ташқари, яъни бошқа икки структурадан фойдаланилади: частотаси танланган структура ва тезкор ўраш структурасидан ҳам фойдаланилади (5.8-расм).

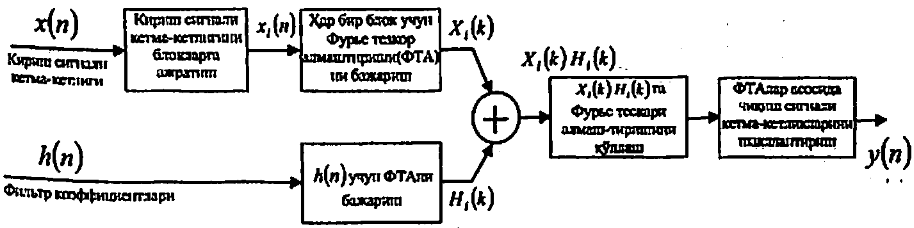
Трансверсал структурага қараганда танланган частота (қиймати) бўйича ҳисоблаш нисбатан самарадор, чунки кам сонли коэффициентларни ҳисоблаш талаб этилади. Аммо уни амалга ошириш осон эмас, чунки у катта хотирани талаб қилади. Тезкор ўрам (свертка)дан Фурье тезкор алмаштириши (ФТА) афзалликларидан фойдаланилади, бу усул яна шуниси билан эътиборлики, у ёрдамида сигнал спектрини ҳам ҳисоблаш имкони мавжуд.

Бундан ташқари рақамли фильтрларни амалга оширишнинг жуда кўп структуравий схемалари мавжуд, аммо уларнинг кўпчилиги фақат маълум соҳаларда фойдаланиш учун мўлжалланган.

Мисол учун панжарасимон структурадан нуқт сигналларига ишлов беришда ва чизиқли башоратлаш соҳаларида фойдаланилади. Панжарасимон структурадан импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрларини ифодалашда ҳам фойдаланиш мумкин, бунда улар ягона кириш ва бир жуфт чиқишлар орқали (5.9-расм) стандарт кўринишда тасвирланадилар.

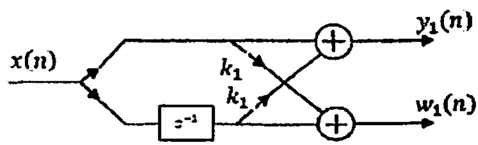


а



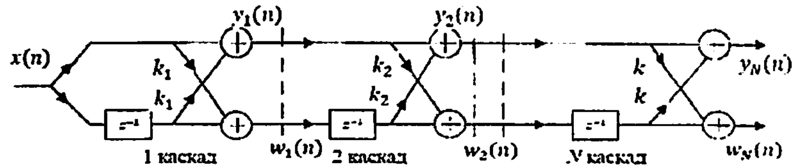
б

5.8-расм. Импульс характеристикаси чекланган фильтрни танланган частота асосида амалга ошириш структураси (*а*) ва тезкор ўрам олиш схемаси (*б*).

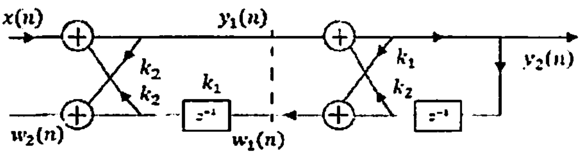


5.9-расм. Панжарасимон структура.

У асосида олинган панжарасимон структура орқали импульс характеристикаси чекли N нуқтали фильтрни таърифловчи схема 5.10*а*-расмда келтирилган ва ҳамма қутблари маълум иккинчи тартибли (фақат махраж коэффициентлари келтирилган) импульс характеристикаси чексиз фильтрни ифодалашга мўлжалланган структура 5.10*б*-расмда келтирилган.



а



б

5.10-расм. N каскадли панжарасимон импульс характеристикаси чекли фильтр (*а*) ва икки каскадли панжарасимон ҳамма қутблари берилган импульс характеристикаси чексиз фильтр структураси.

5.3.4. Разрядлар сони чекланганлигининг фильтр тезкорлиги ва барқарорлигига таъсири

Аппроксимациялаш ва амалга ошириш босқичлари фильтрларни чексиз аниқлик билан ёки жуда юқори аниқлик билан ишлашини назарда тутади. Шунинг билан бирга уларни амалга оширишда фильтр коэффициентларини чекланган сонли битлар (одатда 8 дан 16 тагача битлар) орқали ифодалаш талаб этилади. Бундан ташқари фарқланиш тенгламасидаги амаллар аниқлиги чекланган арифметикадан фойдаланиб амалга оширилади.

Разрядлардаги битлар сонининг чекланганлиги фильтр тезкорлигини камайишига олиб келади ва натижада фильтр барқарорлиги ёмонлашади. Шунинг учун лойиҳаловчи ушбу ҳолатларни албатта эътиборга олиши ва фильтр коэффициентларини ифодалаш учун тегишли давомийликни (битлар сонини) танлаши, фильтр ўзгарувчанлари (яъни, кириш ва чиқиш сигналлари ўлчамлари)ни ва фильтрда арифметик амалларни бажарилишини эътиборга олиши керак. Фильтр тезкорлигини ёмонлашишига олиб келувчи сабаблар қуйидагилардан иборат.

- *Сигнални фильтр кириши ва чиқишида квантлаш.* Хусусан, вақт бўйича кириш сигналларини квантлаш натижасида АРЎда ҳосил бўладиган шовқин – бу эътиборга лойиқ катталик.
- *Коэффициентларни квантлаш.* Ушбу жараён импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрлар частота характеристикаларининг бузилишига ва импульс характеристикаси чексиз фильтрларнинг барқарор бўлмаслигига олиб келиши мумкин.
- *Бутунлаш хатолиги.* Фильтрлаш учун чекланган аниқликдаги арифметикадан фойдаланиш натижаларини ифодалаш қўшимча битлар киритилишини талаб қилади. Агар квантлаш натижасида олинган кодлар

разряди (битлар сони) чекланган бўлса, бутунлаш шовқини пайдо бўлади. Натижада импульс характеристикаси чексиз фильтрларда барқарорликнинг ёмонлашишига ўхшаш ҳолатлар юз бериши мумкин.

o *Тўлиш.* Бу ҳодиса йиғиш натижаси "сўз" учун рухсат этилган давомийликдан катта бўлганда рўй беради. Бу чиқиш сигнали ўлчамларининг нотўғри бўлишига ва импульс характеристикаси чексиз фильтрлар барқарорлиги ёмонлашишига сабаб бўлади.

Рақамли фильтр сифат кўрсаткичларининг ёмонлашиши қуйидагиларга боғлиқ:

1) фильтрлашда фойдаланиладиган сўзлар узунлиги ва арифметика турига;

2) фильтр коэффициентларини квантлаш ва ўзгарувчан коэффициентларни танланган ўлчамларга олиб келиш усулига;

3) фильтр структурасига.

Ушбу сабабларни билган ҳолда лойиҳаловчи ва ишлаб чиқарувчи разрядлар сони чекланганлигининг фильтр тезкорлигига таъсирини баҳолаши ва тегишли чора-тадбирлар кўриши мумкин бўлади.

Фильтрларга қўйилган талабларга қараб баъзи салбий таъсирларни эътиборга олмаслик мумкин. Мисол учун, агар фильтр дастур шаклида юқори даражали тилда бўлиб, компьютер ёрдамида амалга оширилса, у ҳолда коэффициентларни квантлаш ва бутунлаш хатоликларини эътиборга олмаслик мумкин. Кириш ва чиқиш сигналларини фильтр коэффициентлари ва арифметик амаллар натижаларига реал вақтда ишлов беришда давомийлиги чекланган сўзлар (одатда 8, 12 ва 16 бит)дан фойдаланилади. Бу ҳолларда амалда ҳамма вақт квантлашни фильтр тезкорлигига таъсирини таҳлил этиш керак.

5.3.5. Рақамли фильтрни лойиҳалаш

Рақамли фильтр коэффициентларини ҳисоблаш унга мос амалга ошириш структурасини танлаш, танланган давомийликдаги сўзларга тегишли коэффициентларни ва фильтр ўзгарувчи аргументларнинг рақамлига алмаштириш натижасида фильтр сифат кўрсаткичларининг ёмонлашиши рухсат этилганидан катта эмаслигига ишонч ҳосил қилгандан сўнг фарқланиш тенгламаларини аппарат ёки дастур даражасида амалга ошириш талаб этилади. Танланган усулдан қатъий назар фильтр чиқишидаги сигнал ҳар бир ўлчам учун фарқланиш тенгламасига асосланган тартибда ҳисобланиши керак (бунда вақт бўйича амалга ошириш назарда тутилган).

Фарқланиш тенгламалари (5.2) ва (5.3) лардан кўринадики $y(n)$ ни фильтр чиқиш сигналини ҳисоблаш, кўпайтириш, қўшиш, айириш ва кечиктириш амаллари орқали бажарилади. Демак фильтрни амалга ошириш учун қуйидаги асосий ташкил этувчилар бўлиши талаб қилинади:

- хотира (масалан, ПЗУ) фильтр коэффициентларини сақлаш учун;

- хотира (масалан, ОЗУ) ҳозирги ва аввалги кириш ва чиқиш сигналларини хотирада саклаш учун, яъни $\{x(n), x(n-1), \ldots\}$ва $\{y(n), y(n-1), \ldots\}$;
- аппарат ёки дастурий кўпайтиргич (кўпайтиргичлар);
- йиғувчи ёки арифметик мантиқ схемаси.

Рақамли фильтрларни ишлаб чиқарувчи унга тегишли асосий маълумотларни ва ундан маълум масалани ечиш учун мўлжалланганлигига кафолат беради. Рақамли фильтрни яратишда у бажарадиган вазифа – сигналларга рақамли ишлов бериш реал вақтда ёки моделда (пакетли ишлов бериш) фойдаланишига қараб турли структура ва элементлардан ташкил топган бўлади.

Модел вақтда сигналларга ишлов беришда ҳамма маълумотлар қандайдир хотира қурилмасида сақланаётган бўлади. Бу ҳолат қандайдир тажриба натижаларини олиш ва сўнгра уларга ишлов беришда юз беради. Бундай ҳолларда рақамли фильтр кўп ҳолларда юқори даражали дастурлаш тилида амалга оширилади ва универсал компьютерда бажарилади. Шундай қилиб, сигналга моделли ишлов беришни фақат дастурий амалга ошириш кўринишда таърифлаш мумкин. Бунда ишлаб чиқарувчи сигналга рақамли ишлов бериш жараёнини тезлаштириш учун қўшимча аппарат воситаларини киритиши мумкин.

Сигналларга реал вақтда ишлов беришда фильтрлардан қуйидагилар талаб этилади: кириш сигнали ўлчами $x(n)$ бор вақтда ишлаш ва чқиш сигнали $y(n)$ ўлчамини, кириш сигнали навбатдаги ўлчами пайдо бўлгунгача ҳосил қилиш, ёки кириш сигналлари блокларига пропорционал бўлган чиқиш сигналлари блокларин олиш (мисол учун, Фурье тезкор алмаштиришдан фойдаланиб). Агар дискретизациялаш частотаси жуда катта ёки юқори тартибли фильтр керак бўлса реал вақтда фильтрлаш тезкор ва махсус аппарат воситасини талаб қилиши мумкин. Аудиосигналлар билан ишлашда фойдаланиш учун кўп ҳолларда DSP56000 (Motorola) ёки TMS320C25 (Texas Instruments) фирмаларининг СРИБ процессорлари тезкорлиги етарли ҳисобланади. Бу процессорлар таркибида ҳамма талаб қилинадиган асосий блоклари, шу жумладан кўпайтириш аппаратуралари бор. СРИБ блокларини ишлаб чиқарувчи (лойиҳаловчи) унинг таркибига, маълумот манбаи ва уни олувчи турига қараб фильтрга унга мос рақамли аппарат билан таъминланган киритиш-чиқариш интерфейсларини ҳам киритиши мумкин (мисол учун, аналог-рақам ўзгартиришларда).

Назорат саволлари

1. Импульс характеристикаси чекли ва чексиз фильтрларнинг бир-биридан фарқи нимада?

2. Рекурсив ва норекурсив фильтрларнинг бир-биридан фарқи нимада?

3. Импульс характеристикаси чекланган фильтрлар фазавий характеристикаси қандай кўринишга эга?

4. Рақамли фильтрларнинг барқарорлигини қандай аниқлаш мумкин?

5. Импульс характеристикаси чекланган фильтрларни лойиҳалаш босқичлари нималардан иборат?

6. Импульс характеристикаси чекланган ва чекланмаган фильтрларнинг структуравий схемаларини чизиб кўрсатинг.

7. Частоталар қиймати ва тезкор ўрами орқали амалга ошириладиган импульс характеристикаси чекланган фильтр структуравий схемасини келтиринг.

8. Импульс характеристикаси чекланган фильтр панжарасимон структуравий схемаси.

6. ИМПУЛЬС ХАРАКТЕРИСТИКАСИ ЧЕКЛИ ФИЛЬТРЛАРНИ ЛОЙИҲАЛАШ

Рақамли фильтрларни лойиҳалашни бир-бири билан боғлиқ бешта босқичга ажратиш мумкин: фильтрга қўйиладиган асосий техник талаблар, коэффициентларни ҳисоблаш, хатоликларни таҳлил қилиш, фильтрни аппарат шаклида ва (ёки) дастур шаклида амалга ошириш.

Фильтрга асосий техник талаблар ундан фойдаланиш соҳасига боғлик бўлиб, амплитуда ва (ёки) фаза характеристикасига талаблар албатта киритилиши керак.

Коэффициентларни ҳисоблаш, бу асосан фильтрга қўйиладиган техник талабларга жавоб берадиган $h(k)$ кийматларини топишдан иборат. Импульс характеристикаси чекланган фильтрлар коэффициентларини ҳисоблашда энг кўп фойдаланиладиган усуллар: кесиш (вазнини аниклаш); частотани танлаш (аниқлаш) ва оптимал усуллар.

6.1. Импульс характеристикаси чекли фильтрларнинг асосий хусусиятлари

1. Стандарт импульс характеристикаси чекланган фильтрлар қуйидаги тенгламалар билан характерланади:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)\,, \qquad (6.1а)$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)z^{-k}\,. \qquad (6.1б)$$

бунда $h(k)$, $k=0,1,...N-1$ – импульс характеристика коэффициенти, $H(z)$ – фильтр узатиш коэффициенти, N – фильтр коэффициентлари сони. (6.1а) формула бу импульс характеристикаси чекланган фильтр фаркланиш тенгламаси. Ушбу тенглама аргументи вакт бўлиб, у импульс характеристикаси чекли фильтрни рекурсив кўринишда ифодалайди: ҳозирда унинг чиқишидаги сигнал $y(n)$ киришидаги сигнал $x(n)$ нинг ҳозирги вақтдаги ва олдинги вақтлардаги кийматлари функцияси. Импульс характеристикаси чекли фильтрни ушбу шаклда, яъни (6.1а) формула тўғри тасаввур этилса, у ҳолда фильтрлар ҳамма вақт баркарор бўлади. (6.1б) формула оркали фильтр узатиш коэффициентини таҳлил қилиш ва амплитуда-частота характеристикасини ҳисоблаш мумкин.

2. Импульс характеристикаси чекли фильтрлар аник чизиқли фазавий характеристикага эга.

3. Импульс характеристикаси чекли фильтрларни амалга ошириш жуда осон. Ҳозирда ишлаб чиқилган СРИБ процессорларидан импульс характеристикаси чекли фильтрлар сифатида фойдаланиш мумкин. Бундан

ташқари норекурсив импульс характеристикаси чекли фильтрлар импульс характеристикаси чексиз фильтрларга қараганда разрядлар сони чеклилигига кам боғлик.

6.2. Чизиқли фазавий характеристикали рақамли фильтрлар

Импульс характеристикаси чекли фильтрларнинг асосий муҳим хусусиятларидан бири уларда юқори даражада чизиқли фазавий характеристика олиш мумкин. Сигнал рақамли фильтрдан ўтганда унинг амплитуда ва (ёки) фазаси модификацияланади. Сигналнинг ўзгариш сабаби ва қиймати фильтрнинг амплитуда ва фаза характеристикасига боғлиқ. Фазани модификацияланиш қийматини баҳолашнинг қулай турларидан бири сигналнинг фазаси ёки гуруҳий кечикиши ҳисобланади. Агар сигнал спектри бир неча частоталардан иборат бўлса (мисол учун, товуш ва модуляцияланган сигналлар) фильтр фазасининг кечикиши бу вақт бўйича кечикиш қиймати бўлиб, у сигналнинг ҳар бир спектрал ташкил этувчилари фильтрдан ўтишдаги кечикиши. Гуруҳий кечикиш бу сигнал спектри ташкил этувчиларининг вақт бўйича ўртача кечикиши. Математик усулда фазавий кечикиш фаза сурилиши манфий қийматининг частотага нисбати (бўлиш) орқали аниқланади, гуруҳий кечикиш эса – бу фазадан частота бўйича олинган ҳосиланинг минусли қийматига тенг:

$$T_p = -\theta(\omega)/\omega, \qquad (6.2а)$$

$$T_g = -d\theta(\omega)/d\omega. \qquad (6.2б)$$

Ночизиқли фазавий характеристикали фильтр у орқали ўтадиган сигнал фазасини ўзгартиради (бузади). Бунда сигнал спектрининг ташкил этувчилари уларнинг частоталарига пропорционал бўлмаган қийматларга ўзгаради, натижада улар орасидаги гармоник боғланишлар (фазалар) ўзгаради. Бундай бузилишлар кўп ҳолларда зарарли бўлиб, уни рўй бермаслиги учун сигнал спектри жойлашган частоталар диапазонида фазавий характеристикаси чизиқли фильтрлардан фойдаланиш керак (мисол учун, маълумотларни узатишда, мусиқани эшитиш, видеотасвирларни кўриш ва биомедицинада сигнал ўтаётган фильтр фазавий характеристикаси чизиқли бўлишига алоҳида талаблар қўйилади).

Агар қуйидаги муносабатлар бажарилса фильтр чизиқли фазавий характеристикага эга деб ҳисобланади:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega, \qquad (6.3а)$$

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega, \qquad (6.3б)$$

бунда α ва β – ўзгармас катталиклар. Агар фильтр (6.3а) шартига жавоб берса, у ҳолда ўзгармас гуруҳ ва фаза кечикиши рўй беради. (6.3а) шарт бажарилиши учун фильтр импульс характеристикаси мусбат ва симметрик бўлиши керак. Бу ҳолат учун фильтр фазавий характеристикаси факат фильтр узунлигининг функцияси бўлади

$$h(n) = h(N - n - 1), \begin{cases} n = 01...(N-1)/2(N - \text{ток}). \\ n = 01...(N/2) - 1(N - \text{ток}). \end{cases}$$
$$\alpha = (N-1)/2.$$

(6.3б) шарт бажарилиши учун фильтр гуруҳий кечиктириши факат ўзгармас бўлиши керак. Бу ҳол учун фильтр импульс характеристикаси манфий симметрик бўлади:

$$h(n) = -h(N - n - 1).$$
$$\alpha = (N-1)/2. \ \beta = \pi/2.$$

Фазавий характеристикаси чизиқли импульс характеристикаси чекланган фильтрлар импульс характеристикаси чекли фильтрлар оиалсида алоҳида ўринга эга бўлиб, факат уларнинг ўзига хос кўрсаткичларга эга бўлган, ушбу фильтрларни лойиҳалаш ва амалга оширишга таъсир кўрсатади.

6.3. Чизиқли фазавий характеристикали импульс характеристикаси чекли рақамли фильтрларнинг турлари

Чизиқли фазавий характеристикали импульс характеристикаси чекли фильтрларнинг тўртта тури бўлиб, улар N нинг жуфтлиги ва $h(n)$ нинг симметриклик тури (мусбат ва манфий) билан бир-биридан фарқ қилади. 6.1-расмда чизиқли фазавий характеристикали тўрт тур фильтрлар импульс характеристикалари келтирилган.

Ушбу фильтрларнинг асосий ўзига хос хусусиятлари жадвал шаклида келтирилган (6.1-жадвал).

Иккинчи тур фильтр частота характеристикаси (мусбат симметрик коэффициентлар ва жуфт давомийлик) $f = 0{,}5$ бўлганда ҳамма вақт нолга тенг (дискретлаш частотасининг ярим қиймати, чунки ҳамма частоталар дискретлаш частотасига нисбатан нисбийлаштирилган (нормаллаштирилган)). Шунинг учун бу тур фильтрлардан юқори частота фильтрлари сифатида фойдаланиб бўлмайди. 3- ва 4-фильтрлар (манфий симметрик коэффициентли) 90° га тенг бўлган фаза силжишини киритади ва бундай фильтрларнинг частота характеристикаси $f = 0$ бўлганда нолга тенг, шунинг учун бу турдаги фильтрлардан паст частота фильтри сифатида фойдаланиб бўлмайди. Бундан ташқари 3-тур фильтрларнинг характеристикалари $f = 0{,}5$ бўлганда ҳамма вақт нолга тенг, шунинг учун фильтр бу туридан юқори частота фильтри сифатида фойдаланиб бўлмайди.

6.1-жадвал.

Чизиқли фазавий характеристикали импульс характеристикаси чекланган тўрт турли фильтрларнинг ўзига хос хусусиятлари

Импульс характеристикаси симметрияси	Коэффи-циентлар сони, N	Частота характеристикаси, $H(\omega)$	Чизиқли фазавий харак-теристика тури
Мусбат симметрия, $h(n)=h(N-1-n)$	ток	$e^{-i\omega(N-1)/2}\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$	1
	жуфт	$e^{-i\omega(N-1)/2}\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos(\omega(n-1/2))$	2
Манфий симметрия, $h(n)=-h(N-1-n)$	ток	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]}\sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n)\sin(\omega n)$	3
	жуфт	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]}\sum_{n=1}^{N/2} a(n)\sin(\omega(n-1/2))$	4

$$a(0)=h[(N-1)/2],\ a(n)=2h[(N-1)/2-n],\ b(n)=2h(N/2-n).$$

1-тур фильтрлар энг универсал ҳисобланади. 3- ва 4-тур фильтрлардан фильтрларнинг дифференциялаш элементи (қисми) шаклида ва улар 90° га фаза силжишини амалга ошириш хусусиятларига эга бўлганликлари учун улардан Гильберт алмаштириш (ўзгартириш)ини амалга ошириш учун кўп ҳолатларда қўлланилади.

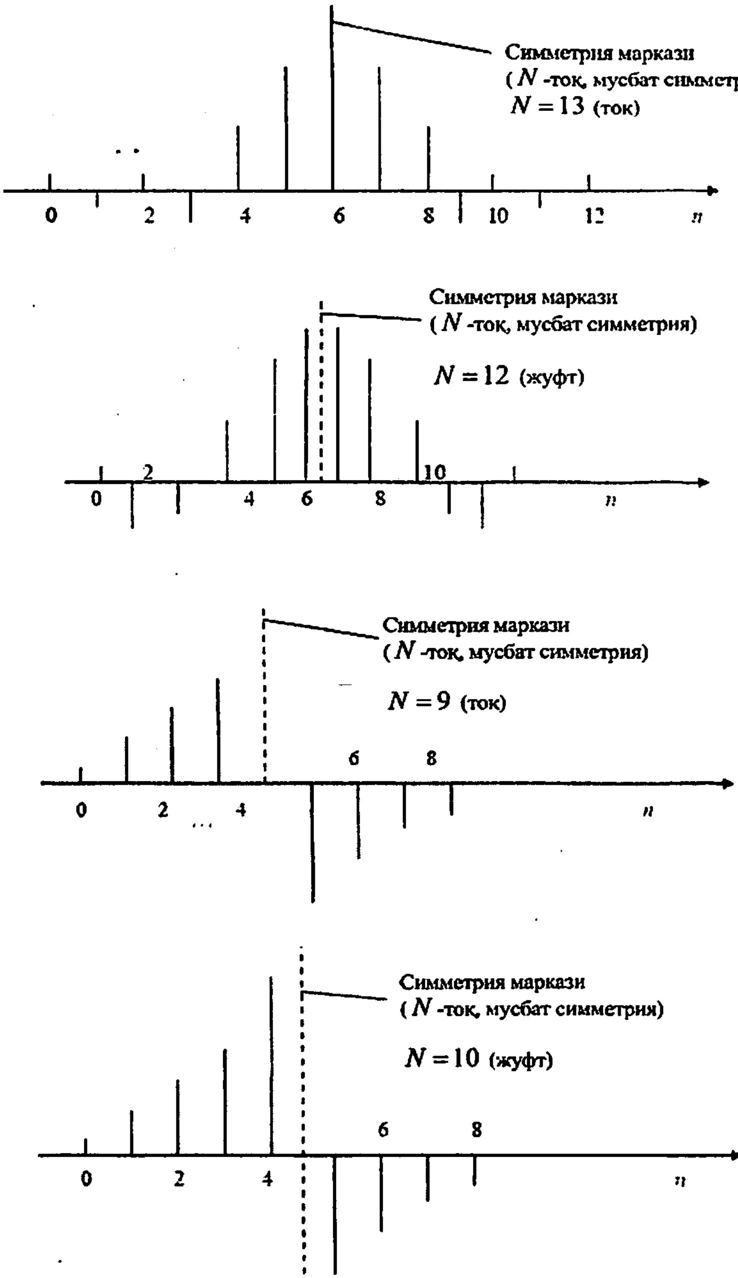
Фаза кечикишини (1-ва 2-турдаги фильтрлар учун) ёки гуруҳий кечикишини (ҳамма тўрт тур фильтрлар учун) фильтр коэффициентлари орқали ифодалаш мумкин, уларни фильтр коэффициентлари сони орқали шундай ифодалаш мумкинки, натижада фильтр фазавий ва гуруҳий силжитиши нолга тенг бўлиши таъминланади. Мисол учун, биринчи ва иккинчи тур фильтрлар учун фаза кечикиши қуйидагича ифодаланади:

$$T_p=\left(\frac{N-1}{2}\right). \qquad (6.4а)$$

ва учинчи ҳамда тўртинчи турлари учун гуруҳий кечикиши эса қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$T_g=\left(\frac{N-1-\pi}{2}\right). \qquad (6.4б)$$

бунда T – дискретлаш даври.



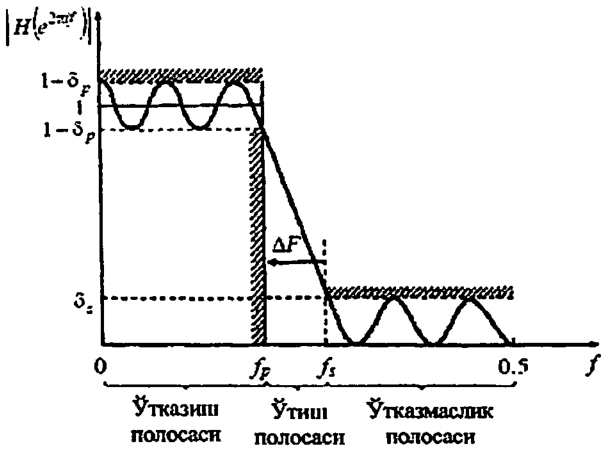
6.1-расм. Чизикли фазавий характеристикали тўрт турдаги фильтрлар импульс характеристикалари коэффициентлари.

6.4. Импульс характеристикаси чекли фильтрларни лойиҳалаш босқичлари

Импульс характеристикаси чекли фильтрларни яратиш босқичлари, умуман олганда 5.3-параграфда кўрилган рақамли фильтрларни яратиш босқичларидан фарқ қилмайди. Аммо, улар баъзи ўзига хос хусусиятларга эга бўлиб, уларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

6.4.1. Импульс характеристикаси чекли рақамли фильтрлар техник характеристикалари

Рақамли фильтрларнинг фазавий характеристикаларини таҳлил этишда унинг хоссаларини кўрсатиш учун унинг жуфт ёки тоқ симметрик эканлигини билиш етарли (бунда фильтр фазавий характеристикаси чизиқли деб фараз этилади). Импульс характеристикаси чекли фильтр амплитуда-частота характеристикаси одатда рухсат этилган фарқланишлар орқали берилади. Ушбуни паст частота фильтрлари учун тасвирловчи чизма 6.2-расмда келтирилган.



6.2-расм. Паст частоталар фильтри техник характеристикалари. Ўтказиш ва ўтказмаслик полосаларидаги фарқлар дБ ларда ифодаланади. Ўтказиш полосасида фарклар $20\lg(1+\delta_p)$ дБ га; ўтказмаслик полосасидаги фарқлар $-20\lg(\delta_s)$ дБ га тенг.

Амалда δ_p ва δ_s лар децибелларда ифодаланади (6.2-расм). f_s ва f_p частоталари орасидаги кенглик фильтрнинг асосий ўтказиш полосаси билан сигнал спектр ташкил этмайдиган чегара орасидаги частоталар полосаси – ўтиш полосаси деб аталади. Фильтрнинг яна бир асосий параметри – бу унинг узунлиги N бўлиб, у фильтр коэффициентлари сонини билдиради.

Кўп ҳолларда юқорида келтирилган кўрсаткичлар импульс характеристикаси чекли фильтр частота характеристикасини аниқлайди.

Бундан ташқари рақамли фильтр яна бир қатор амалий аҳамиятга эга бўлган техник кўрсаткичларга эга: мисол учун, фильтр учун максимал коэффициентлар сони (бундай чеклашлар маълум ҳолларда киритилади, мисол учун сигналга ишлов бериш тезлиги чекланган ва маълум бўлса).

6.4.2. Импульс характеристикаси чекли фильтрлар коэффициентларини ҳисоблаш усуллари

Кўпчилик импульс характеристикаси чекли фильтрлар коэффициентларини ҳисоблаш (тақрибий ҳисоблаш) усулларининг ягона мақсади $h(n)$ қийматларини олиш бўлиб, бу фильтрлар амплитуда-частота характеристикаларига, хусусан уларнинг сигнал ўтказиш қобилиятига тегишли бўлган техник талабларга жавоб бериши керак. $h(n)$ ни ҳисоблашнинг бир неча усуллари мавжуд. Улардан энг кўп фойдаланиладиганлари: кесиш усули, оптимал усул ва танланган частоталар усули.

Ҳар қайси уч усул импульс характеристикаси чекли фильтр учун чизиқли фазавий характеристика олиш имкониятини беради.

Таққослаш усули. Бу усулда фильтр частота характеристикаси $H_D(\omega)$ ушбу фильтр импульс характеристикаси $h_D(n)$ билан Фурье тескари алмаштириши орқали боғланганлигидан фойдаланилади:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega)e^{i\omega n}d\omega. \qquad (6.5)$$

D индексидан идеал ва реал амалдаги импульс характеристикаларини бир-бирудан фарқлаш фойдаланилади. Бундай фарқни билишга нима эҳтиёж борлигини бироз кейинроқ кўриб чиқамиз. Агар $H_D(\omega)$ маълум бўлса $h_D(n)$ ни (6.5) тенгламанинг ҳар икки томонига Фурье алмаштиришини қўллаш орқали олиш мумкин. Юқоридагини тасдиқлаш учун паст частоталар фильтрини яратиш керак деб ҳисоблаймиз. Ишни 6.3*а*-расмда келтирилган идеал частота характеристикасидан бошлаймиз, бу расмда ω_c – нормаллаштирилган частоталар шкаласидаги кесиш частотаси ($T = 1$).

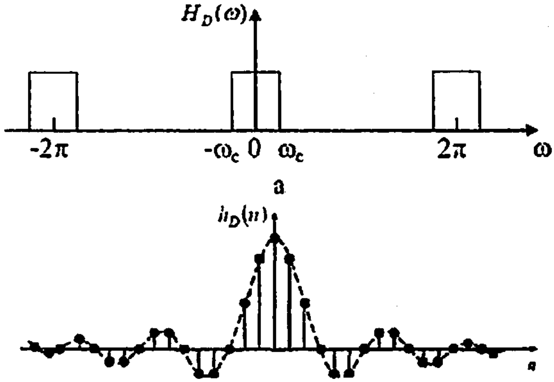
Идеал фильтр частоталар характеристикасида частота $-\omega_c$ дан ω_c гача ўзгаради деб, интеграллаш амалини соддалаштирамиз ва қуйидаги импульс характеристикасини оламиз:

$$h_D(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\times e^{i\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{i\omega n}d\omega=$$

$$=\frac{2f_c\sin(n\omega_c)}{n\omega_c},\quad n\neq 0,\quad -\infty\leq n\leq\infty. \qquad (6.6)$$

$$=2f_c,\qquad n=0.$$

Юқори частоталар идеал фильтри полоса фильтри ва режектор фильтрларининг импульс характеристикалари (6.6) тенглама 6.2-жадвалдан топилади.



6.3-расм. Паст частоталар фильтрининг идеал частота характеристикаси (*а*), паст частоталар фильтрининг импульс характеристикаси (*б*).

6.2-жадвал.

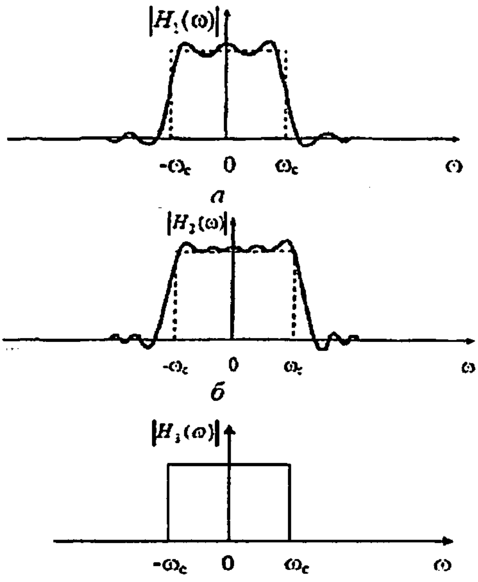
Стандарт частота танловчи фильтрларнинг идеал импульс характеристикалари.

Фильтр тури	Идеал частота характеристикаси, $h_D(0)$	
	$h_D(n)$, $n\neq 0$	$h_D(0)$
Паст частоталар фильтри	$2f_c\frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Юқори частоталар фильтри	$-2f_c\frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1-2f_c$
Полоса фильтри	$2f_2\frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}-2f_1\frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2-f_1)$
Тўсқинлик қилувчи фильтр	$2f_1\frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}-2f_2\frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1-2(f_2-f_1)$

6.2-жадвалда f_c, f_1 ва f_2 лар частота ўтказиш полосалари чегаравий частоталари ёки частота ўтказмаслик частоталари, N – фильтр узунлиги.

Паст частота фильтри импульс характеристикаси 6.3*б*-расмда келтирилган бўлиб, ундан $h_D(n)$ нинг $n=0$ га нисбатан симметриклиги (яъни $h_D(n)=-h_D(n)$) маълум бўлади. Шунинг учун унинг фазавий характеристикаси чизиқли (фазалар қиймати нолга тенг). Таърифланган масалага оддий ёндашиш баъзи бир муаммолар билан боғлиқ. Улардан энг муҳими $n=0$ нуқтадан узоқлашган сари $h_D(n)$ характеристикаси кичиклашиб боради, бу жараён назария нуқтаи назардан $n=\pm\infty$ гача давом этади. Демак олинган фильтр импульс характеристикаси чекланган фильтр эмас.

Идеал импульс характеристикаси $n=0$ дан узоқлашган сари сўнишини эътиборга олиб, уни қандайдир катталик M ан катта бўлган n қийматлари учун $h_D(n)=0$ деб ҳисоблаб қисқартирилиши мумкин. Аммо, бунинг натижасида зарарли (кераксиз) нотекислик ва тебранишлар Гиббс хоссаси деб аталадиган ҳолат юз беради. Коэффициентларни қисқартиришнинг фильтр характеристикасига таъсири 6.4-расмда келтирилган.



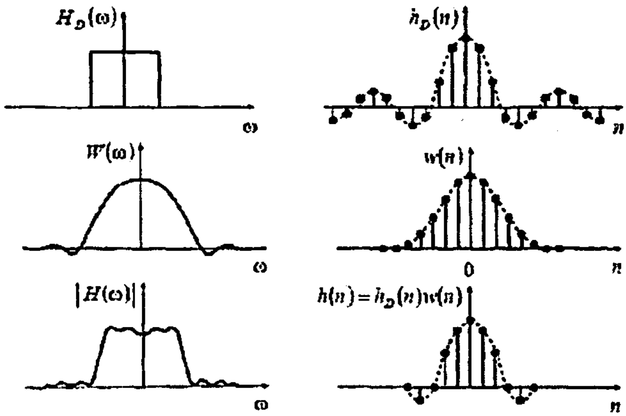
6.4-расм. Идеал импульс характеристика коэффициентлари сонини қисқартириш (чеклаш)ни унинг частоталар характеристикасига таъсири *а*) 13 та коэффициент қолдирилган; *б*) 25 та коэффициент қолдирилган; *в*) коэффициентлар сони чексиз кўп.

Қанча кўп коэффициентлар қолдирилган бўлса фильтр орқали ўтган сигнал спектри идеал фильтр характеристикасига яқин бўлади (6.5*а*,*б*-расмлар). Юқорида таърифланганидек $h_D(n)$ нинг тўғридан-тўғри кесилиши фильтр идеал характеристикасини тўғри тўртбурчак шаклидаги вазн функциясига кўпайтмаси билан тенг қийматга эга

$$\omega(n)=1, \quad |n|=0,1,\ldots,(M-1)/2$$
$$=0.$$

Бу частоталар бўйича $H_D(\omega)$ ни $W(\omega)$ билан ўрамига эквивалент бўлади, бунда $W(\omega)$ – $w(n)$ нинг Фурье кўриниши. $W(\omega)$ одатдаги классик $\sin(x)/x$ кўринишида бўлса, у ҳолда $h_D(n)$ ни қисқартирилиши фильтр частоталар характеристикасида тебранишлар пайдо бўлишига олиб келади. Амалиётда $h_D(n)$ идеал частота характеристикаси унга мос келувчи давомийлиги чекланган вазн функцияси $W(n)$ га кўпайтирилади (6.5-расм).

6.5*а*-расмда фильтрнинг идеал частоталар характеристикаси ва унга мос бўлган идеал импульс характеристикаси келтирилган. 6.5*б*-расмда давомийлиги чекланган вазн функцияси ва унинг спектри келтирилган. 6.5*в*-расмда $h_D(n)$ ни $w(n)$ га кўпайтириш натижасида олинадиган $h(n)$ функция келтирилган.



6.5-расм. $h(n)$ фильтр коэффициентлари вазнини аниқлашни кўрсатувчи расмлар.

Тегишли частоталар характеристикасидан кўринадики, тўғридан-тўғри кесишга хос бўлган нотекислиги ва тебранишлари сезиларли даражада бартараф этилганлиги кўринади. Шу билан бирга ўтиш полосаси кенглиги, тўғри тўртбурчакли функциясига қараганда катта. Маълумки, ўтиш полосаси кенглиги, вазн функцияси асосий япроқчаси кенглиги билан аниқланади. Функция ён япроқчалари фильтрнинг ўтказиш ва ўтказмаслик полосасида нотекисликларнинг пайдо бўлишига сабаб бўлади.

Вазнни аниқлаш методи қулай ҳисобланади, чунки ундан фойдаланиш содда ва тушуниш осон. Бу методдан фойдаланиш ҳисоблашлар ҳажмини камайтиради.

Бу методнинг асосий камчилиги – ундан фойдаланиш имкониятлари чекли фильтрнинг сигнал спектрал ташкил этувчиларини ўтказиш ва ўтказмаслик полосасидаги максимал нотекисликлар тахминан бир-бирига тенг, шунинг учун лойиҳаловчи фильтр ўтказиш полосасида жуда кичик нотекисликни ёки ўтказмаслик полосасида ҳаддан ташқари катта сўнишларни олиши мумкин.

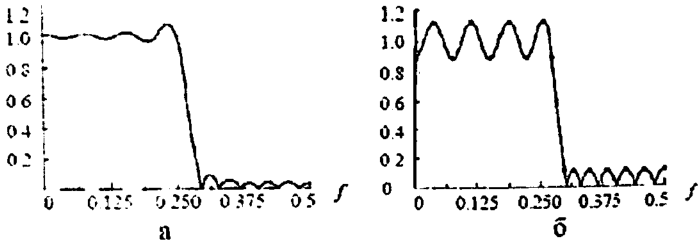
Ушбу методда кесувчи функция ва талаб этиладиган характеристикаси ўрами қатнашганлиги сабабли фильтрнинг ўтказиш ва ўтказмаслик полосалари чегараларини аниқ талаб этиш мумкин эмас.

Берилган функция учун унинг частота характеристикасидаги тебранишлар амплитудаси N нинг қандай катта қилиб танланишидан қатъий назар маълум бир катталикка эга бўлади. Худди шунингдек фильтр ўтказмаслик полосасидаги сўнишлар ҳам ушбу танланган техник функция орқали белгиланади. Шундай қилиб, фильтрдан талаб этиладиган техник кўрсаткич сўнишларни таъминлаш учун лойиҳаловчи ушбу талабга жавоб берадиган функцияни танлаши (топиши) керак.

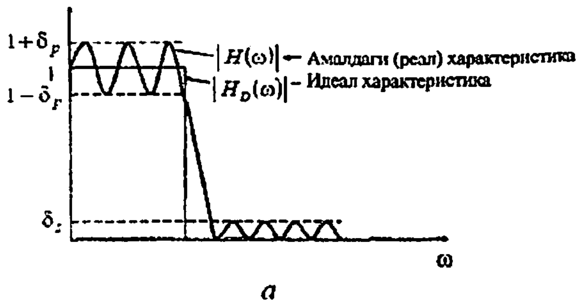
Баъзи ҳолларда $H_D(\omega)$ формуладан фойдаланиш шунчалик мураккаб бўлиши мумкинки (6.5) формула орқали $h_D(n)$ ни аналитик усулда топиш мақсадга мувофиқ эмас. Бундай ҳолларда $h_D(n)$ ни танланган частоталар методи асосида олиш, сўнгра вазн функциясини қўллаш керак.

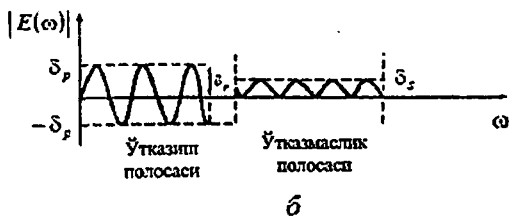
Оптималлаштириш методи. Фильтр коэффициентларини кесиш (қисқартириш) методи асосида ҳисоблашда талаб этиладиган ёки идеал частота характеристикасини тўғри тасвирловчи – аппроксимацияловчи функцияни танлаш муаммоси келиб чиқади. Баъзи коэффициентларни таққослаш (взвешивание) методидан фойдаланилганда фильтр частота характеристикаси юқори чегарасида тебранишлар амплитудаси катта бўлади ва ундан узоқлашган сари кичиклашади (6.6*а*-расм). Агар ушбу тебранишлар фильтрининг ўтказиш ва ўтказмаслик полосаларида бир хил катталикда бўлса, у ҳолда талаб этиладиган частота характеристикасини аппроксимациялаш функцияси нисбатан юқори аниқликни таъминлашига эришиш мумкин (6.6*б*-расм).

Оптимизациялаш методи учун фильтр ўтказиш ва ўтказмаслик полосаларидаги тебранишлар ҳар бир полоса ичида бир хил катталикларга эга, аммо ҳар икки полосада умуман олганда турличалигини асос қилиб олинган. Паст частоталар фильтрининг 6.7-расмда тасвирланган частоталар характеристикасини кўриб чиқамиз. Фильтр ўтказиш полосасида реал характеристика $1-\delta_p$ дан $1+\delta_p$ гача орасида тубранади (ўзгаради). Фильтр ўтказмайдиган полосасида унинг характеристикаси 0 ва δ_s оралиғида бўлади.



6.6-расм. Фильтр частоталар характеристикасини таққослаш: *а*) фильтрнинг кесиш (қисқартириш) методи асосида олинган частоталар характеристикаси, *б*) оптимал фильтр частоталар характеристикаси.





6.7-расм. Паст частоталар оптимал фильтри частота характеристикаси (*а*). Идеал ва реал характеристикалар орасидаги хатолик характеристикалари (*б*).

Фильтрлар идеал ва реал частота характеристикалари орасидаги фарқни хатолик функцияси сифатида қараш мумкин

$$E(\omega) = W(\omega)[H_D(\omega) - H(\omega)]. \tag{6.7}$$

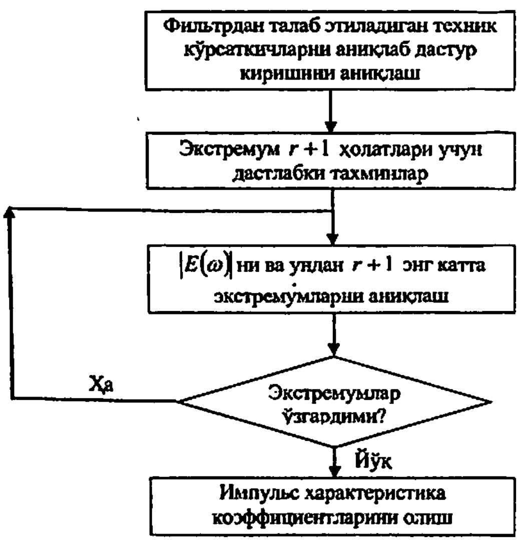
бунда $H_D(\omega)$ – идеал ёки талаб этиладиган частоталар характеристикаси, $W(\omega)$ – вазн функцияси бўлиб, у турли полосаларда аппроксимациялаш хатолигини аниқлаш имконияти беради.

Оптималлаш методининг мақсади – максимал ўлчанган хатолик $|E(\omega)|$ максимал қиймати ўтказиш ва ўтказмаслик полосасида минимал бўлишини таъминловчи $h(n)$ фильтр коэффициентларини аниқлашдан иборат бўлиб, уни қуйидагича ифодалаш мумкин

$$\min[\max|E(\omega)|].$$

$\max|E(\omega)|$ ни минималлаштирилганда фильтр ўтказиш ва ўтказмаслик полосалари орасида бир хил тебранишлар амплитудасига эришилади, шу билан бирга частота характеристикаси тебраниш қутблари турлича бўлган сатҳлар орқали ўтади (6.6б-расм). Частота характеристикаларидаги тебранишларни энг катта ва энг кичик қийматларга ажратиш шарт эмас, уларни белгилаш етарли ҳисобланади. Мисол учун, чизиқли фаза характеристикали паст частоталар фильтрлари учун $r+1$ ёки $r+2$ экстремумлар мавжуд, бунда $r=(N+1)/2$ (1-тур фильтрлар учун) ёки $r=N/2$ (2-тур фильтрлар учун), 6.6б-расмда экстремумлар кичик айланалар билан белгиланган.

Фильтр учун техник талабларда полосалар чегарасида жойлашганларидан бошқа экстремал частоталар аввалдан берилмайди, яъни $f=f_p$ ва $f=F_s/2$ частоталардан бошқа частоталардаги экстремумлар номаълум бўлади. Демак оптималлаш методининг асосий вазифаси – экстремал частоталар жойлашган қийматини аниқлашдан иборат. Бундай масалани ечишда Ремез алмаштириш алгоритмига асосланган методдан фойдаланамиз (6.8-расм).



6.8-расм. Оптимал методнинг соддалаштирилган функционал схемаси.

Экстремум частоталари жойлашган частоталарини аниқлаш натижасида ҳақиқий частоталар характеристикасини олиш мумкин, демак унинг импульс характеристикасини ҳам аниқлаш мумкин. Фильтрни лойиҳалаш учун берилган техник талаблар (яъни ўтказиш полосаси чегаравий қиймати N ва фильтр ўтказиш ва ўтказмаслик полосасидаги тебранишлар амплитудаси нисбати) учун оптимал метод қуйидаги асосий босқичларга эга:

- Ремез алмаштириш алгоритми методидан фойдаланиб, экстремал частоталар оптимал частоталарини топиш;
- экстремумлар жойлашган частоталардан фойдаланиб, частоталар характеристикасини аниқлаш;
- импульс характеристикалар коэффициентларини олиш.

Частота танлаш усули. Частота танлаш усули норекурсив фильтрлар таркибига кирувчи оддий частота танловчи фильтрлар (паст частоталар фильтри, юқори частоталар фильтри ва частоталар полосаси фильтрлари)ини ва ҳар қандай частота характеристикали фильтрларни лойиҳалаш (яратиш) имкониятини беради. Частота танлаш методининг ўзига хос хусусияти шундан иборатки, у импульс характеристикаси чекли фильтрларни рекурсив усулда ҳисоблашда самарали ҳисоблаш усулидан фойдаланиш имкониятини беради. Баъзи ҳолларда импульс характеристикаси чекли, коэффициентлари бутун сон бўлган рекурсив фильтрларни ҳисоблаш имкониятини беради. Бу усулдан фақат оддий арифметик амалларни бажаришга асосланган стандарт микропроцессорлардан фойдаланиладиган тизимлар учун қулай ҳисобланади.

Частоталари танланган норекурсив фильтрлар. Мисол учун, частота характеристикаси 6.9*а*-расмда келтирилган импульс характеристикаси чекли фильтр учун коэффициентларни аниқлаш керак бўлсин. Дастлаб частоталар характеристикаси kF_s/n, $k=0,1,...,N-1$ нуқталари учун N та частоталарни танлаймиз. Фильтр коэффициентлари $h(n)$ ни танланган N та частоталар учун Фурье тескари дискрет алмаштиришини қўллаб аниқлаш мумкин

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{i(2\pi/N)nk}. \qquad (6.8)$$

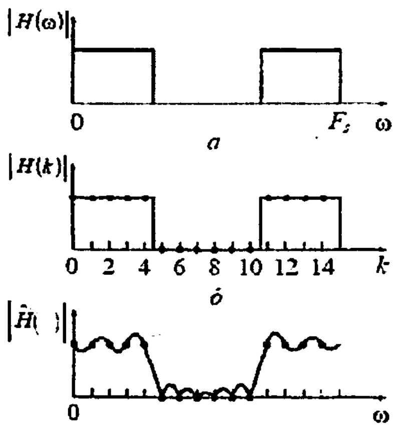
бунда $H(k)$, $k=0,1,...,N-1$ – идеал ва лойиҳаланиши мақсад қилиб қўйилган фильтр частоталар характеристикасида танланган частоталар (6.8) тенгликни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|H(k)|e^{-i2\pi\alpha k/N}e^{i2\pi kn/N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|H(k)|e^{i2\pi(n-\alpha)/N}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|H(k)|\cos[2\pi(n-\alpha)/N]+i\sin[2\pi(n-\alpha)/N]=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|H(k)|\cos[2\pi(n-\alpha)/N], \qquad (6.9)$$

бунда $\alpha=(N-1)/2$, $N(k)$ – фильтр частоталар характеристикасида kF_s/n нуқталардаги танловлар, $h(n)$ – тўлик ҳақиқий функция.



6.9-расм. Частоталарни танлаш ҳақида тушунча: *а*) паст частоталар идеал фильтрининг частота характеристикаси; *б*) идеал паст частоталар фильтрида частоталар танлаш; *в*) *б* расмда танланган нуқталар учун лойиҳаланган паст частоталар фильтри частоталар характеристикаси.

Кўпчилик муҳим ҳолларда, фаза характеристикаси чизиқли бўлганда $h(n)$ симметрик бўлади ва уни қуйидагича ифодалаш мумкин:

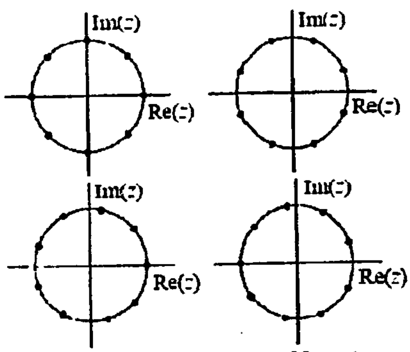
$$h(n)=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N/2-1}2|H(k)|\cos[2\pi(n-\alpha)/N+H(0)]\right] \qquad (6.10)$$

Агар N тоқ бўлса, йиғинди юқори чегараси $(N-1)/2$ га тенг бўлади. Натижада олинадиган фильтр частоталар характеристикаси частоталари танланган идеал частота характеристикасига тўлиқ мос келади. Шунинг билан бирга, характеристикада танланган нуқталарда катта фарқ бўлиши мумкин (6.9*в*-расм). Лойиҳаланадиган фильтр частоталар характеристикасини аппроксимациялаш учун етарли сондаги частоталарни танлаш керак.

Частота танлашга асосланиб қурилган, альтернатив (2-тур фильтр)ни олиш учун қуйидаги нуқталарда частоталар танлаш керак:

$$f_k = (k + 1/2)F_s / N, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6.11}$$

6.10-расмда частоталар танлаш иккита структуравий схемаси таққосланган. Техник талаблар бир хил бўлишига қарамай бу икки метод бир-биридан фарқланувчи частоталар характеристикаларини келтириб чиқаради. Лойиҳаловчининг вазифаси шу икки фильтрдан қайси бири қўйилган масалани ечиш учун кўпроқ мос келишини аниқлашдан иборат.



1-тур, N-жуфт 2-тур, N-жуфт

6.10-расм. Икки тур фильтрлар учун частота танлашнинг бўлиши мумкин бўлган тўртта структураси (комплекс текисликда тасвирланган).

Танланган частоталар рекурсив фильтрлари. Агар танланган частоталарнинг кўпчилик қийматлари нолга тенг бўлса, у ҳолда рекурсив шаклдаги танланган частота фильтрларини ҳисоблаш норекурсив фильтрларни ҳисоблашга қараганда сезиларли даражада қулай. Импульс характеристикаси чекли фильтр узатиш коэффициенти $H(z)$ ни рекурсив кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{2\pi jk/N} z^{-1}} = H_1(z) H_2(z), \tag{6.12}$$

бунда

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N},$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{2\pi jk/N} z^{-1}}.$$

Рекурсив шаклда $H(z)$ ни икки каскадли фильтрлардан иборат деб қараш мумкин: бирлик радиусли доира ичида бир текис жойлашган N та ноллардан иборат тароқсимон фильтр $H_1(z)$ ва бир қутбли N та $H_2(z)$ фильтрлар йиғиндиси сифатида. Тароқсимон фильтр ноллари ва бир қутбли фильтрларнинг қутблари бирлик радиусли айланади $z_k = e^{\pi k/N}$ нуқталарда бир-бирига мос келади. Натижада ноллар қутблар билан ўзаро бир-бирини компенсациялайди ва $H(z)$ қутбларга эга бўлмагани учун у чекланган импульс характеристикага тенг бўлади.

Амалда сўзларнинг давомийлиги чеклангани учун $H_2(z)$ нинг қутблари бирлик айланада аниқ жойлашмаслиги нолларни тўлиқ компенсацияламайди ва $H(z)$ потенциал – кафолатли барқарор бўлмаган чексиз импульс характеристикали фильтрга айланади. Барқарорлик муаммосини $H(z)$ ни радиуси ўлчами r бўлган бирдан кичик айланада дискретлаш орқали биртараф қилиш мумкин. Бу ҳолда узатиш коэффициенти қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - re^{2\pi jk/N} z^{-1}}. \qquad (6.13)$$

Умуман олганда $H(k)$ нинг танланган частоталари – бу комплекс катталиклар бўлиб, (6.12) ёки (6.13) тенгламаларни тўғридан-тўғри ечиш комплекс сонлар арифметикасидан фойдаланишни талаб қилади. Ушбу мураккабликларга дуч келмаслик учун ҳар қандай импульс характеристикаси чекли импульс характеристикаси $h(n)$ ҳақиқий бўлган фильтр частоталар характеристикаларига хос бўлган симметриялик хоссасидан фойдаланамиз.

Оддий фаза характеристикаси чизиқли бўлган частота танловчи импульс характеристикаси жуфт – симметрик фильтр узатиш коэффициенти қуйидагича ифодаланади:

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \times$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{M} \frac{|H(k)| 2\cos(2\pi k\alpha / N) - 2r\cos[2\pi k(1+\alpha)/N] z^{-1}}{1 - 2r\cos(2\pi k / N) z^{-1} + r^2 z^{-2}} + \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} \right]. \qquad (6.14)$$

бунда $\alpha = (N-1)/2$. N тоқ бўлганда $M = (N-1)/2$ ва N жуфт бўлганда $M = N/2 - 1$.

Оддий коэффициентли частотаси танланган фильтрлар. Импульс характеристикаси чекли фильтрларни рекурсив лойиҳалаш ва амалга оширишни рақамли фильтрларда амалга ошириладиган арифметик амалларни сезиларли даражада камайтиради. Шу билан бирга, агар фильтр бутун сонли коэффициентларга эга бўлса (шу жумладан иккининг даражалари кўринишида), у ҳолда унинг ҳисоблаш самарадорлиги ошади, бу айниқса арифметик амалларни бажаришда оддий процессорлардан фойдаланишда самарали ҳисобланади. Аммо бутун сон кўринишидаги коэффициентларни фақат узатиш коэффициентларининг қутблари маълум ҳолатларда жойлашган бўлиши керак (6.14-тенглама). Ушбу таъкидлашни қуйидагича ифодалаш мумкин: бутун сонли коэффициентларга эга фильтрларни фақат маълум частоталарда созлаш (симметрик кўринишдаги частота характеристикаларига эга бўлиш) мумкин. Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, фильтр коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлгани учун қутбларни бирлик радиусли айланага идеал ҳолда жойлаштириш мумкин. Ушбу юқорида келтирилган усулда яратилган фильтрлар частотаси танланган фильтрларни хусусий кўринишлари ҳисобланади.

Назорат саволлари

1. Импульс характеристикаси чекланган фильтрларни лойиҳалаш босқичларини айтиб беринг.

2. Рақамли фильтр фаза характеристикаси чизиқли бўлиши қандай таъминланади?

3. Чизиқли фазавий характеристикали импульс характеристикаси чекланган фильтрларнинг қандай турлари мавжуд?

4. Импульс характеристикаси чекланган фильтрларни лойиҳалаш босқичларини айтиб беринг.

5. Паст частоталар рақамли фильтрлар амплитуда-частота характеристикаси умумий кўринишини чизинг ва унинг ўзига хос хусусиятларини айтиб беринг.

6. Импульс характеристикаси чекланган фильтрларни ҳисоблаш усулини айтиб беринг.

7. Импульс характеристикаси чекланган фильтр паст частоталар фильтри оптимал частоталар характеристикаси қандай ҳисобланади?

8. Танланган частоталар усулидан норекурсив фильтрларни лойиҳалашнинг афзалликлари нималардан иборат?

7. ИМПУЛЬС ХАРАКТЕРИСТИКАСИ ЧЕКСИЗ ФИЛЬТРЛАРНИ ЛОЙИҲАЛАШ

7.1. Импульс характеристикаси чексиз фильтрларнинг характеристикалари

Импульс характеристикаси чексиз рақамли фильтрлар қуйидаги рекурсив тенглама орқали характерланади:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{N}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{M}a_k y(n-k). \qquad (7.1)$$

бунда $h(k)$ – фильтрнинг импульс характеристикаси бўлиб, назарий нуқтаи назардан чексиз катта давомийликка эга, b_k ва a_k – фильтр коэффициентлари, $x(n)$ ва $y(n)$ – фильтр кириш ва чиқиш сигналлари.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрнинг узатиш функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_N z^{-N}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_M z^{-M}}=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M}a_k z^{-k}}. \qquad (7.2)$$

Импульс характеристикаси чексиз фильтрларни лойиҳалашдаги муҳим жараёнлардан бири бу b_k ва a_k коэффициентларини шундай қийматларини топишдан иборатки, натижада фильтрнинг маълум характеристикалари, мисол учун частота характеристикаси маълум кўринишга эга бўлиши керак. импульс характеристикаси чексиз фильтрларни ифодаловчи формулалар (7.1) ва (7.2) лардан иборат.

(7.1) тенгламада фильтрнинг ушбу ондаги чиқиш сигнали $y(n)$ ўтган чиқиш сигналлари $y(n-k)$ ва ушбу ондаги кириш сигнали $x(n)$ ва унинг аввалги дискрет қийматлари $x(n-k)$, яъни импульс характеристикаси чексиз фильтр бу маълум кўринишдаги тескари боғланишли тизим. Импульс характеристикаси чексиз фильтрнинг афзаллиги тескари алоқа натижасида эришиладиган мослашувчанлиги ҳисобланади. Мисол учун, импульс характеристикаси чексиз фильтрларни лойиҳалаш, одатда бир хилдаги техник талабларни бажариш учун импульс характеристикаси чекланган фильтрларга қараганда кам сонли коэффициентларни талаб қилади, шунинг учун импульс характеристикаси чексиз фильтрлардан частота характеристикасининг ўтказиш ва ўтказмаслик полосалари орасидаги ўтиш полосаси кичик бўлган ҳолатларда, яъни частота характеристикаси ўтиш қисми қиялиги кескин бўлиши талаб этилганда фойдаланилади. Натижада импульс характеристикаси чексиз фильтр потенциал барқарорлигининг ёмонлашиши ва бундан ташқари лойиҳалашда махсус чора кўрилмаса фильтрнинг ишлаш тезлиги камаяди.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрнинг узатиш коэффициенти $H(z)$ ни ифодаловчи (7.2) формулани қуйидагича ёйиш мумкин:

$$H(z)=\frac{K(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_M)}. \tag{7.3}$$

бунда z_1, z_2,... – узатиш коэффициенти $H(z)$ ноллари, яъни $H(z)$ нолга тенг бўлишини таъминловчи z нинг қийматлари, p_1, p_2,... – $H(z)$ нинг қутблари, яъни z нинг $H(z)$ чексизликка тенг бўладиган қийматлари.

Узатиш коэффициенти функцияси қутб ва нолларининг жойлашиши графиги ноль ва қутбларнинг диаграммаси деб аталади ва фильтрни комплекс ясси юзада тасвирлаш ва таҳлил учун қулай восита ҳисобланади. Фильтр барқарор бўлиши учун ҳамма қутблар бирлик радиусли доира ичида (ёки ноллар билан мос бирлик радиус айланасида) жойлашган бўлиши керак. Нолларнинг жойлашиш ҳолатига чекланишлар йўқ.

7.2. Импульс характеристикаси чексиз рақамли фильтрларни лойиҳалаш босқичлари

Умуман олганда импульс характеристикаси чексиз рақамли фильтрларни лойиҳалаш босқичлари импульс характеристикаси чекли рақамли фильтрларни лойиҳалаш босқичларидан кам фарқланади. Аммо уни лойиҳалашнинг ўзига хос хусусиятлари бўлиб, биз уларни келгусида кўриб чиқамиз.

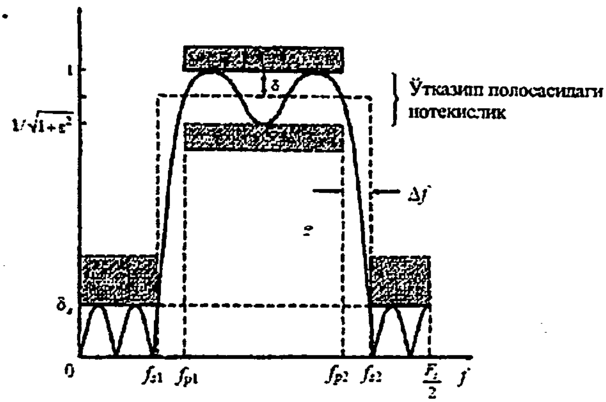
7.2.1. Импульс характеристикаси чексиз рақамли фильтрларнинг тезкорлигига бўлган техник талаблар

Бошқа кўпгина технологик масалаларга ўхшаш импульс характеристикаси чексиз фильтрларни лойиҳалаш унинг тезкорлигига қўйиладиган талаблар рўйхатини тузишдан бошланади. Талаблар рўйхатида қуйидагилар келтирилиши керак:

Частота танловчи фильтрлар каторига кирувчи паст частоталар фильтри ва полоса фильтрлари учун частота характеристикалари допуск чизмаси кўринишида берилади. Мисол тариқасида 7.1-расмда импульс характеристикаси чексиз полоса фильтри учун допусклар чизмаси келтирилган.

Импульс характеристикасининг штрихланган қисмлари допускларни белгилайди. Частота характеристикасини баҳолашда одатда қуйидаги параметрлардан фойдаланилади:

ε^2 – ўтказиш полосасидаги нотекисликларни баҳоловчи параметр; δ_p – ўтказиш полосасидаги оғиш амплитудаси; δ_s – ўтказмаслик полосасидаги оғиш амплитудаси; f_{p1} ва f_{p2} ўтказиш полосаси чегаравий частоталари; f_{s1} ва f_{s2} ўтказмаслик полосаси чегаравий частоталари.



7.1-расм. Импульс характеристикаси чексиз полоса фильтри учун допусклар графиги.

Чегаравий частоталарнинг нормаллашган қиймати келтирилади, яъни дискретлаш частотаси улуши сифатида (f/F_s), аммо баъзан оддий частота қийматида Герц ёки килогерцларда ҳам келтирилади. Ўтказиш ва ўтказмаслик полосаларида амплитуда оғишини оддий катталик ёки децибеллар орқали ифодаланган кўринишда ифодалаш мумкин: оғишлар (нотекисликлар) амплитудаси ўтказиш полосасида децибелларда қуйидагича баҳоланади:

$$A_p = 10\lg\left(1+c^2\right) = -20\cdot\lg\left(1-\delta_p\right), \qquad (7.4а)$$

ва ўтказмаслик полосасида оғишлар амплитудаси децибелларда қуйидагича баҳоланади:

$$A_s = -20\cdot\lg\left(\delta_s\right). \qquad (7.4б)$$

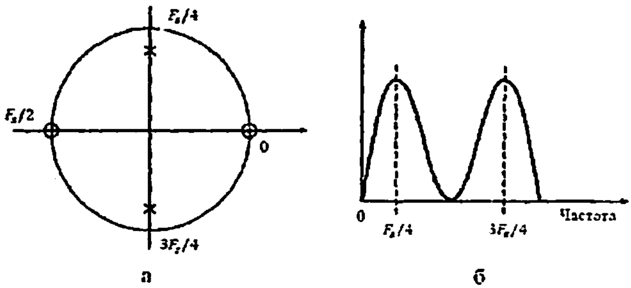
Импульс характеристикаси чексиз фильтрлар учун оғиш (нотекислик) – бу ўтказиш полосасидаги максимал ва минимал оғишлар қийматининг фарқи.

7.2.2. Импульс характеристикаси чексиз фильтрлар коэффициентларини ҳисоблаш усули

Бу босқичда келгусида a_k ва b_k коэффициентлари қийматларини (7.2) тенглама асосида ҳисоблашни таъминлайдиган аппроксимациялаш методи танланади, коэффициентларнинг ҳисоблаш натижасида олинган қийматлари лойиҳалаш биринчи босқичида фильтр амплитуда-частота характеристикаси учун олинган талабларни қониқтириши керак.

Импульс характеристикаси чексиз фильтр коэффициентлари қийматларини оддий равишда олиш учун унинг қутб ва ноллари комплекс юзада жойлаштириш натижасида фильтрдан талаб этиладиган амплитуда-частота характеристикасини олиш мумкин. Ушбу қутб ва нолларни жойлаштириш орқали фильтр коэффициентларини аниқлаш методи, фақат оддий фильтрларни лойиҳалашда қўлланилиши мумкин, мисол учун тор полосали ўтказиш полосасидаги нотекисликларига бўлган талаблар нисбатан аниқ берилмаган режектор фильтрларни лойиҳалашда фойдаланиш қулай ҳисобланади. Нисбатан самарали метод, бу дастлаб техник талабларга жавоб берадиган аналог фильтрни лойиҳалаш, сўнгра уни эквивалент рақамли фильтрга алмаштириш ҳисобланади. Кўпгина импульс характеристикаси чексиз рақамли фильтрлар шу метод асосида яратилади. Ушбу методдан кенг фойдаланилишига сабаб, ҳозирда аналог фильтрларни лойиҳалаш ҳақида етарли даражада манба ва маълумотлар мавжуд бўлиб, улардан рақамли фильтрларни лойиҳалашда фойдаланиш мумкин. Аналог фильтрларни уларга мос келувчи рақамли фильтрларга алмаштиришда қуйидаги уч методдан фойдаланиш мумкин: импульс характеристикани инвариант алмаштириш; мослашган z-алмаштириш ва бичизикли (икки чизиқли) z-алмаштириш.

Фильтр коэффициентларини ноль ва қутбларни жойлаштириш усули билан ҳисоблаш. Агар қандайдир комплекс юзага нолни жойлаштирсак, у ҳолда ушбу нуқтада частота характеристикаси қиймати нолга тенг бўлади. Шу билан қутб фильтр частота характеристикасида максимум пайдо бўлишига сабаб бўлади (7.2-расм). Бирлик радиусли айланага яқин жойлашган қутблар, амплитуда-частота характеристикасида катта чўққилар пайдо бўлишига сабаб бўлади ва шу билан бирга бирлик радиусли айланага яқин жойлашган ёки устига тушган ноллар амплитуда-частота характеристикада минимумлар пайдо бўлишига олиб келади. Шундай қилиб ноль ва қутбларнинг комплекс юзада жойлаштириш натижасида оддий паст частоталар фильтрини ёки бошқа частота танловчи фильтрни олиш мумкин.



7.2-расм. Оддий фильтрнинг ноль ва қутблари диаграммаси (*а*); ушбу фильтр частота характеристикасининг схематик тасвири (*б*).

Рақамли фильтрларни лойиҳалашда қуйидаги муҳим ҳолатга алоҳида аҳамият бериш керак: фильтр коэффициентлари ҳақиқий бўлиши учун қутб ва ноллар ҳақиқий бўлишлари ёки ўзаро комплекс мослашган бўлиши керак.

Фильтр коэффициентлари импульс характеристикасини инвариант алмаштириш усули билан ҳисоблаш. Бу усул рақамли фильтр импульс характеристикаси $h(t)$ ни мос аналог фильтр узатиш функцияси $H(s)$ дан Лаплас алмаштириши ёрдамида олишга асосланган. Сўнгра импульс характеристика $h(t)$ ни дискретизациялаш натижасида олинган $h(nT)$ функция устидан z алмаштириши бажарилади ва натижада биз излаётган узатиш функцияси $H(z)$ олинади (T – дискретлаш оралиғи). Агар аналог фильтр узатиш функцияси қуйидаги функция орқали ифодаланган бўлса

$$H(s)=\frac{C}{s-p}. \tag{7.5}$$

бунда p – $H(s)$ функция қутби, C – доимий, ўзгармас катталик (константа).

Бу ҳолда импульс характеристикаси $h(t)$ Лаплас тескари алмаштириши орқали қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=L^{-1}\left(\frac{C}{s-p}\right)=Ce^{pt}.$$

бунда L^{-1} Лаплас тескари алмаштиришини англатади. Импульс характеристикасини инвариант алмаштириш методи асосида эквивалент рақамли фильтр импульс характеристикаси $h(nT)$ аналог фильтр импульс характеристикаси $h(t)$ нинг дискрет вақтлар $t=nT$ даги қийматлари йиғиндисига тенг ($n=0,1,2,\ldots,$), яъни

$$h(nt)=h(t)\big|_{t=nT}=Ce^{pnT}.$$

$H(z)$ узатиш коэффициенти z алмаштиришни $h(nT)$ га таъсири натижаси сифатида аникланади:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}ce^{pnT}z^{-1}=\frac{c}{1-e^{pT}z^{-1}}$$

Демак, юқорида келтирилган натижадан фойдаланиб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\frac{C}{s-p}\to\frac{C}{1-e^{pT}z^{-1}} \qquad (7.6)$$

Импульс характеристикаси чекланмаган юқори (мисол учун M-чи) тартибли оддий қутбли фильтрларга импульс характеристикасини инвариант методини қўллашда, дастлаб фильтр узатиш функцияси $H(s)$ ни оддий каср сонларга ёйиш керак (бундай ёйиш ягона қутбли оддий фильтрлар кетма-кетлигини англатади):

$$H(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{C_M}{s-p_M}=\sum_{k=1}^{M}\frac{C_k}{s-p_k}. \qquad (7.7)$$

бунда p_k – $H(s)$ функциянинг қутби. (7.7) тенгламанинг ўнг томонидаги ҳар бир ташкил этувчиси (7.6) формула кўринишида бўлиб, натижавий фильтр $H(s)$ функцияси ҳар бир алоҳида фильтрлар хусусий функциялари йиғиндисига тенг. Демак

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{C_k}{s-p_k}\to\sum_{k=1}^{M}\frac{C_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}. \qquad (7.8)$$

Юқори тартибли импульс характеристикаси чексиз фильтрлар одатда кетма-кет каскадлар ёки параллел каскадлар кўринишидаги иккинчи тартибли фильтрлар шаклида амалга оширилади. Кўп ҳолларда $M=2$ - иккинчи тартибли фильтрлардан фойдаланилади. $M=2$ бўлган ҳолат учун (7.8) алмаштириш қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}\to\frac{C_1}{1-e^{p_1T}z^{-1}}+\frac{C_2}{1-e^{p_2T}z^{-1}}=$$

$$=\frac{C_1+C_2-(C_1e^{p_2T}+C_2e^{p_1T})z^{-1}}{1-(e^{p_1T}+e^{p_2T})z^{-1}+e^{(p_1+p_2)T}z^{-2}}. \qquad (7.9)$$

Агар p_1 ва p_2 қутблар комплекс мослашган бўлса, у ҳолда C_1 ва C_2 лар ҳам комплекс мослашган бўлади ва (7.9) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{C_1}{1-e^{p_1T}z^{-1}}+\frac{C_1^*}{1-e^{p_1^*T}z^{-1}}=$$
$$=\frac{2C_{re}-\left[C_{re}\cos(p_{im}T)+C_{im}\sin(p_{im}T)\right]2e^{p_{re}T}z^{-1}}{1-2e^{p_{re}T}\cos(p_{im}T)z^{-1}+e^{2p_{re}T}z^{-2}}, \tag{7.10}$$

бунда C_{re} ва C_{im} лар C_1 нинг ҳақиқий ва мавҳум қисми, p_{re} ва p_{im} лар p_1 нинг ҳақиқий ва мавҳум қисми, "*" – комплекс мослашганликни англатувчи белги.

Кўпчилик импульс характеристикаси инвариант алмаштириш схемаси асосида амалга оширилиш бўлган импульс характеристикаси чексиз фильтрларнинг узатиш коэффициентиларини ҳисоблаш учун (7.6), (7.9) ва (7.10) алмаштиришларини бажариш етарли ҳисобланади. Ушбу бобга илова шаклида фильтр коэффициентларини юқорида келтирилган тартибда С тилида дастури келтирилган бўлиб, қуйидаги келтирилган мисол ушбу асосий методни тасдиқлайди.

Шундай қилиб, инвариант алмаштириш методидан фойдаланиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак бўлади:

1. Рақамли фильтрдан талаб этиладиган техник кўрсаткичларга жавоб берадиган аналог фильтр нормаллаштирилган частота характеристикасини аниқлаш.

2. Сўнгги босқичда бажариладиган амалларни осонлаштириш учун $H(s)$ ни элементар касрлар йиғиндисига ёйиш.

3. Ҳар бир касрга z-алмаштиришни қўллаб (7.8) га ўхшаш ифодани олиш.

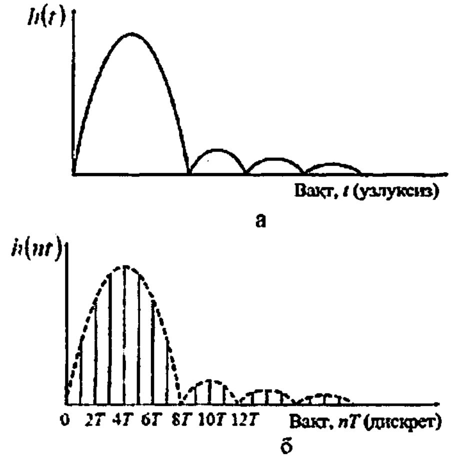
4. 3-бандни ташкил этувчиларини иккинчи тартибли ташкил этувчи ҳадлар гуруҳи кўринишига келтириб (ёки биринчи тартибли) $H(z)$ ни аниқлаш. Агар реал дискретлаш частотасидан фойдаланилган бўлса, у ҳолда $H(z)$ ни T га кўпайтириш керак бўлади.

Импульс характеристикасини инвариант алмаштириш методи бир қатор хусусиятларга эга:

1. Рақамли фильтр импульс характеристикаси $h(nT)$ аналог фильтр импульс характеристикаси $h(t)$ нинг дискрет вақт $t=nT$, $n=0,1,...$ лардаги қийматларига инвариант (мос) келади (7.3-расм). Шунинг учун бу методни импульс характеристикасини инвариант алмаштириш методи деб аталади.

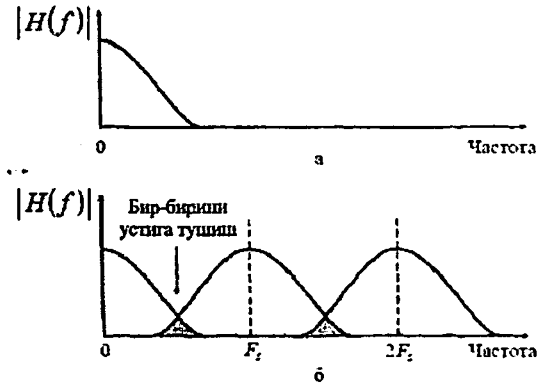
2. Импульс характеристикани инвариант алмаштириш схемаси асосида лойиҳаланган рақамли фильтрнинг частота характеристикасига дискретлаш частотаси таъсир қилади. Лойиҳалаштирилаётган рақамли фильтр частота характеристикаси аналог фильтр частота характеристикасига яқин (ўхшаш) блиши учун етарли даражада катта дискретлаш частотаси талаб қилинади.

3. Вақт бўйича дискретланган тизимларга ўхшаш $H(z)$ га мос импульс характеристикаси инвариант алмаштирилган рақамли фильтр (ўтказиш полосаси) спектри ҳам бирламчи аналог фильтр спектри (ўтказиш полосаси) $H(s)$ га ўхшаш дискретлаш частотасига тенг равишда даврий такрорланади ва спектрнинг бир-бирини устига тушишига сабаб бўлади (7.4-расм). Шу билан бирга бирламчи аналог фильтр частота характеристикасининг олд ва орқа кесимлари етарли даражада тик бўлса ёки аналог фильтр частота ўтказиш полосаси импульс характеристикасини инвариант алмаштиришдан аввал чегараланган бўлса, у ҳолда спектрларнинг бир-бири устига тушиши кичик (сезиларсиз) бўлади.



7.3-расм. Аналог фильтр импульс характеристикаси $h(t)$ (a) ва унга эквивалент рақамли фильтр $h(nT)$ ($б$) импульс характеристикасини таққослаш.

Дискретлаш частотасини катталаштириш орқали ҳам юқоридаги натижани, спектр бир-бири устига тушишини кескин камайтириш мумкин. Шундай қилиб, юқоридагилар асосида бу методдан чегаралаш қиялиги етарли даражада тик бўлган паст частоталар фильтрини яратишда дискретлаш частотасини катта танлаш асосида спектрлар бир-бирининг устига деярли тушмайдиган ҳолларда фойдаланиш тавсия этилади. Бу методдан юқори частоталар ва режектор фильтрларни лойиҳалашда фойдаланиш учун спектрлар бир-бирининг устига тушмаслигини таъминловчи ҳимояловчи фильтрдан фойдаланиш керак бўлади.



7.4-расм. Аналог фильтр амплитуда-частота характеристикаси (спектри) (а); импульс характеристикасини инвариант алмаштириш методи орқали олинган эквивалент рақамли фильтр амплитуда-частота характеристикаси (спектри) (б), бунда бир-бирини устига тушиш ҳолати штрихланган.

Мослашган z-алмаштириш ёрдамида фильтр коэффициентларини ҳисоблаш. Мослашган z-алмаштириш аналог фильтрни рақамли фильтрга алмаштириш имкониятини яратади. Бу методда аналог фильтрнинг ҳар бир қутб ва ноллари s юзадан z юзага (комплекс юзага) ўтказилади:

$$(s-a)\rightarrow(1-z^{-1}e^{aT}). \qquad (7.11)$$

бунда T – дискретлаш даври. (7.11) алмаштириш $s=a$ нуқтада жойлашган қутб (ёки нол)ни комплекс юзадаги $z=e^{aT}$ нуқтасида жойлашган қутб (ёки нол)га ўтказишни тасвирлайди.

Юқори тартибли аналог фильтр узатиш коэффициенти бир неча қутб ва (ёки) нолларга эга бўлиб, уларни s юзадан z юзага ўтказиб тасвирлаш талаб этилади. Энг юқори даражали турли қутб ва нолларга эга аналог фильтр узатиш коэффициентини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}. \qquad (7.12)$$

бунда z_k ва p_k – узатиш коэффициенти $H(s)$ нинг ноль ва қутблари.

Энди (7.12) тенглама ҳар бир ташкил этувчисига мослашган z-алмаштириш билан таъсир этамиз:

$$(s-z_k)\rightarrow(1-z^{-1}e^{z_kT}).$$
$$(s-p_k)\rightarrow(1-z^{-1}e^{p_kT}).$$

Импульс характеристикаси чексиз юқори тартибли фильтрларда асосий фильтрловчи ташкил этувчи блок бу иккинчи тартибли блок ҳисобланади. Шунинг учун (7.12) тенгламада бизни $M=N=2$ бўлган ҳолат алоҳида қизиқтиради. Бу ҳолат учун аналог фильтр узатиш коэффициенти қуйидаги кўринишни олади:

$$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} \tag{7.13}$$

Ушбу функцияга мослашган z-алмаштиришини қўллаб қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}\to\frac{1-(e^{z_1T}+e^{z_2T})z^{-1}+e^{(z_1+z_2)T}z^{-2}}{1-(e^{p_1T}+e^{p_2T})z^{-1}+e^{(p_1+p_2)T}z^{-2}} \tag{7.14}$$

Агар иккинчи тартибли звено ноль ва қутблари комплекс мослашган жуфтликларни шакллантирса, у ҳолда $p_2=p_1^*$ ва $z_2=z_1^*$ ва (7.14) тенгламанинг ўнг томони қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{1-2e^{z_{re}T}\cos(z_{im}T)z^{-1}+e^{z_{re}T}z^{-2}}{1-2e^{p_{re}T}\cos(p_{im}T)z^{-1}+e^{p_{re}T}z^{-2}}, \tag{7.15}$$

бунда z_{re} ва z_{im}; p_{re} ва p_{im} лар мос равишда z_1 ва p_1 ларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари.

Амалда иккинчи тартибли аналог фильтрлаш блокларини бизларга таниш бўлган рационал каср шаклида ифодалаш қулай, яъни

$$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{A_0+A_1s+A_2s^2}{B_0+B_1s+B_2s^2}.$$

Бу ҳолат учун узатиш коэффициенти $H(s)$ нинг қутб ва ноллари қуйидаги ифодалар орқали аниқланади:

$$p_{1,2}=-\frac{B_1}{2B_2}\pm\left[\left(\frac{B_1}{2B_2}\right)^2-\frac{B_0}{B_2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.16а}$$

$$z_{1,2}=-\frac{A_1}{2A_2}\pm\left[\left(\frac{A_1}{2A_2}\right)^2-\frac{A_0}{A_2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.16б}$$

Амалда (7.16а) ва (7.16б) аналог фильтр узатиш функциялари орқали тўғридан-тўғри ноль ва қутблари жойлашган нуқталар (демак, уларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари)ни аниқлаш мумкин бўлади. $H(s)$ нинг қутб ва нолларининг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини аниқлаш асосида (7.14) ёки (7.15) тенгламалар орқали аналог фильтрга мос рақамли фильтрнинг узатиш коэффициенти $H(z)$ ни ҳисоблаш мумкин.

Шундай қилиб, мослашган z-алмаштириш методидан фойдаланиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак:

1. Лойиҳаланиши талаб этилаётган рақамли фильтр кўрсаткичларига мос келувчи аналог фильтр узатиш функцияси $H(s)$ ни аниқлаш.

2. $H(s)$ нинг қутб ва ноллари ўрнини топиш.

3. (7.11) формуладан фойдаланиб қутб ва нолларни s юзадан z юзага акс эттириш. Иккинчи даражали блоклар учун (7.14) ва (7.15) формулалардан фойдаланиш мумкин.

4. z юзада ёзилган тенгламани $H(z)$ узатиш коэффициентини олиш учун бирлаштириш.

Мослашган z-алмаштириш методи бир қатор хусусиятларга эга:

1. Мослашган z-алмаштириш методи аналог фильтр узатиш коэффициентларининг ноль ва қутбларининг жойлашиш нуқталарини билишни талаб қилади. Бу ҳақидаги маълумотларни олиш учун аналог узатиш функцияси $H(s)$ ни кўпайтувчиларга ёйиш мумкин.

2. Мослашган z-алмаштириш ва импульс характеристикаларни инвариант алмаштириш методлари айнан бир хил махражли рақамли фильтрларни беради.

3. Рақамли фильтрларда фойдали частоталар ўтказиш полосаси ноль ва Найквист частотаси (дискретлаш частотасининг ярми) орасида жойлашган бўлади, аналог фильтрларда эса нолдан чексизликкача бўлган частоталар орасида бўлади. Натижада мослашган z-алмаштириш акс таъсири аналог фильтр чексиз ўтказиш полосалар частотасини чекли частоталар полосасигача торайтиради. Бу эквивалент рақамли фильтрлар частота характеристикасини аналог фильтр частота характеристикасига нисбатан фарқланишига – бузилишига сабаб бўлади. Мослашган z-алмаштиришга асосланган фильтрлар аналог фильтрларга қараганда катта узатиш коэффициентига эга.

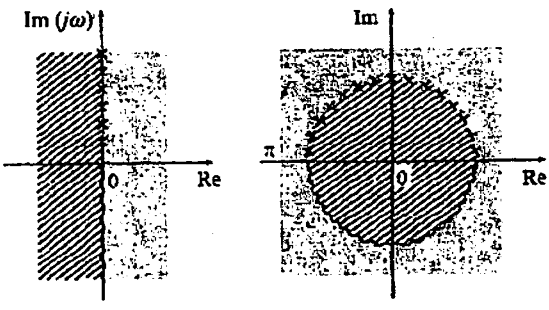
4. Агар аналог фильтр Найквист частотасига яқин частоталарда қутбларга эга бўлса ёки Найквист частотасидан катта частоталарда нолларга эга бўлса, у ҳолда ҳосил бўладиган рақамли фильтр частота характеристикаси уст-устига тушиш ҳодисаси натижасида бузилган бўлади. Бундай ҳолатларда юзага келадиган аналог фильтр частота характеристикасининг Найквист частотасидан юқори қисми сезиларли даражада бўлади. Частота характеристикасининг бу қисмини керакли, ўтказиш полосасига ўтказиш учун ноошкор дискретлаш жараёнидан фойдаланилади.

5. Мослашган z-алмаштириш ҳам бир қутбли фильтрларни рақамлига алмаштириш учун яроқсиз, чунки у Найквист частотасидан ташқарида нолларга эга эмас. Бу ҳолатни $z=-1$ (яъни Найквист частотасида) нуқтасида нолларни қўшиш билан бироз яхшилаш мумкин.

Бичизиқли (икки чизиқли) z-алмаштириш ёрдамида фильтр коэффициентларини ҳисоблаш усули. Ушбу усул $H(s)$ аналог фильтр характеристикасини унга эквивалент (тенг кучли) рақамли фильтр характеристикасига қуйидаги алмаштиришни амалга оширади:

$$s=k\frac{z-1}{z+1},\ k=1 \text{ ёки } k=2/T \tag{7.17}$$

Юқорида келтирилган алмаштириш s юзада ифодаланган $H(s)$ аналог узатиш функциясини 7.5-расмда кўрсатилгандек комплекс юзадаги узатиш функцияси $H(z)$ шаклида акс эттиради. Шунга алоҳида эътибор бериш керакки, 7.5-расмда $j\omega$ ўқи s юзасида бирлик радиусга эга айланада акс эттирилади, s юзанинг чап ярми бирлик радиусли айлана ичида акс эттирилади, ўнг ярми эса бирлик айлана ташқарисида акс эттирилади.



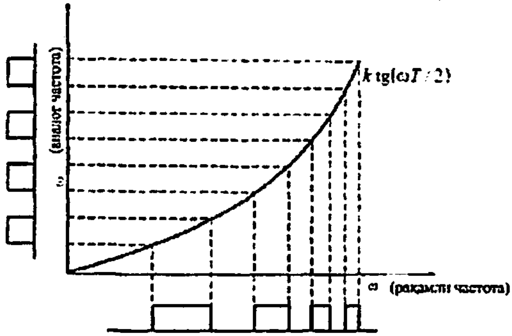
7.5-расм. Бичизиқли z-алмаштиришдан фойдаланиб s юзани комплекс z юзада акс эттиришга оид расм.

Шундай қилиб, s юза чап ярмидаги қутбли барқарор аналог фильтр бирлик радиусли айлана ичидаги рақамли фильтрга айланади.

Шунга алоҳида эътибор бериш керакки, бир хил оралиқда жойлашган қутблар юқори частоталарда алмаштирилгандан сўнг сиқилади ва зичроқ жойлашади. Афсуски, s ни тўғридан-тўғри $H(s)$ га алмаштириш, яъни (7.17) формулада ифодалангандек кераклигидан катта фарқланувчи рақамли фильтрни ҳосил бўлишига сабаб бўлади. Буни (7.17) тенгламадаги $z=e^{j\omega T}$ ва $s=j\omega'$ ларни ўзаро алмаштириш орқали кўрсатиш мумкин. Соддалаштириш натижасида аналог частота ω' ва рақамли частота ω бир-бири билан қуйидагича боғлиқлигини топамиз:

$$\omega' = ktg\left(\frac{\omega T}{2}\right),\ k = 1 \text{ ёки } k = 2/T. \qquad (7.18)$$

(7.18) боғлиқлик 7.6-расмда акс эттирилган. Бундан кўринадики, аналог частота ω' рақамли частота ω билан частота ω нинг кичик қийматларида деярли чизиқли боғлиқликка эга, аммо ω нинг катта қийматларида бу боғлиқлик ночизиқли бўлади, бу натижада рақамли фильтр частота характеристикасининг бузилишига (деформацияланишига) олиб келади.



7.6-расм. Деформациялашни тасвирловчи, аналог ва рақамли частоталар орасидаги боғлиқлик.

Аналог фильтр ўтказиш полосаси чап томони ўзгармас кенгликка эга бўлади ва унинг маркази бир хил ораликларда жойлашган бўлади, рақамли фильтрнинг ўтказиш полосаси эса бироз зичлашган бўлади. Бу ҳолатни йўқотиш учун бичизиқли алмаштиришни қўллашдан аввал аналог фильтр бир ёки бир неча критик частоталарда деформацияланади. Мисол учун паст частоталар фильтрини лойиҳалашда чегаравий (кесиш) частотаси дастлаб денормаллаштириш (деформация)

$$\omega'_p = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \qquad (7.19)$$

бунда ω_p – берилган чегаравий (кесиш) частотаси;

ω'_p – дастлаб деформацияланган чегаравий (кесиш) частотаси;

$k = 1$ ёки $k = 2/T$; T – дискретлаш даври.

Импульс характеристикаси чексиз фильтрлар учун бичизиқли z-алмаштиришдан фойдаланиш босқичларини қуйидагича умумлаштириш мумкин:

1. Рақамли фильтрга қўйилган техник талаблар асосида узатиш коэффициенти $H(s)$ бўлган мос аналог фильтрни аниқлаш керак.

2. Керакли фильтр учун чегара (кесиш) частотасини топиш ва деформациялаш керак. Паст ва юқори частота фильтрлари учун ягона чегара

(кесиш) частотаси ω_p мавжуд. Полоса ва режектор фильтрлар ўтказиш полосалари ω_{p1} ва ω_{p2} иккита чегара (кесиш) частоталарига эга бўлиб, уларнинг ҳар бирини деформациялаш керак бўлади (худди шунингдек ўтказмаслик полосасининг чегара частоталари ҳам берилган бўлиши мумкин):

$$\omega'_p = tg\left(\frac{\omega_p T}{2}\right); \quad (7.20а)$$

$$\omega'_{p1} = tg\left(\frac{\omega_{p1} T}{2}\right); \quad \omega'_{p2} = tg\left(\frac{\omega_{p2} T}{2}\right). \quad (7.20б)$$

3. Мос аналог фильтр узатиш коэффициентидаги s ни лойиҳаланаётган фильтр турига қараб қуйидаги алмаштиришларнинг биридан фойдаланиб бошқаси билан алмаштириш орқали деформациялаш керак:

$s = \dfrac{s}{\omega'_p}$ паст частотани паст частотага, (7.21а)

$s = \dfrac{\omega'_p}{s}$ паст частотани юқори частотага, (7.21б)

$s = \dfrac{s^2 + \omega_0^2}{W_s}$ паст частотани полоса частотасига, (7.21в)

$s = \dfrac{W_s}{s^2 + \omega_0^2}$ паст частотани режекторлаш частотасига, (7.21г)

бунда $\omega_0^2 = \omega'_{p2}\omega'_{p1}$, $W = \omega'_{p2} - \omega'_{p1}$.

4. Бичизиқли z-алмаштириш методини қўллаб, керакли рақамли фильтр узатиш функцияси $H(z)$ ни олиш учун денормаллаштирилган узатиш функцияси $H'(s)$ даги s ни қуйидаги қиймати билан алмаштириш олинади:

$$s = \frac{z-1}{z+1}.$$

Назорат саволлари

1. Импульс характеристикаси чексиз фильтр асосий характеристикаларини тушунтиринг.

2. Импульс характеристикаси чексиз фильтрларни лойиҳалаш босқичлари нималардан иборат?

3. Импульс характеристикаси чексиз фильтр АЧХсини чизинг ва унинг асосий кўрсаткичларини айтиб беринг.

4. Импульс характеристикаси чексиз фильтрларни лойиҳалашнинг қандай усулларини биласиз?

8. СИГНАЛЛАРГА ТУРЛИ ТЕЗЛИКЛАРДА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ

Рақамли фильтрларга замон талабларининг ошиб бориши турли дискретлаш частотасили сигналларга рақамли ишлов бериш имкониятига эга бўлган, турли тезликдаги дискрет сигналларга рақамли ишлов берувчи фильтрларни яратишни тақазо этади. Дискрет сигналларга бундай ишлов беришда қуйидаги икки амалдан фойдаланилади: турли узатиш тезликларини самарали навбатма-навбат амалга оширишни таъминловчи децимациялаш ва интерполяциялаш амаллари. Децимациялаш сигналдаги ахборотни сақлаган ҳолда уни сиқиш ҳисобига дискретлаш частотасини кичиклаштиради. Интерполяциялаш натижасида эса тескари дискретлаш частотаси катталаштирилади.

Аудио сигналларга ишлов бериш соҳасида бир неча тезликларда ишлов бериш уни сақлашга керакли хотиралаш қурилмаси ҳажми кичик бўлишини ёки узатиш тезлигини кичиклаштиришни таъминлайди. Аудио сигналларга рақамли ишлов беришда фойдаланиладиган нисбатан арзон юқори аниқликда аналог-рақам ўзгартиришни таъминлаш одатдаги кетма-кет яқинлашиш методи ўрнига дискретлаш натижасида олинадиган қийматларни заҳирали методидан фойдаланишга ўтишни талаб қилди.

Турли тезликларда сигналларга ишлов бериш, сигналларга рақамли ишлов бериш функциясини самарали амалга оширишни таъминлайди. Мисол учун импульс характеристикаси чекли тор полосали рақамли фильтрлашни одатдаги СРИБдан фойдаланиб амалга ошириш бир неча эътиборга лойиқ муаммоларни келтириб чиқаради, чунки бундай фильтрлар уларнинг частота характеристикаларига қўйилган жиддий талабларни бажариш учун жуда кўп коэффициентларини ҳисоблашни талаб қилади.

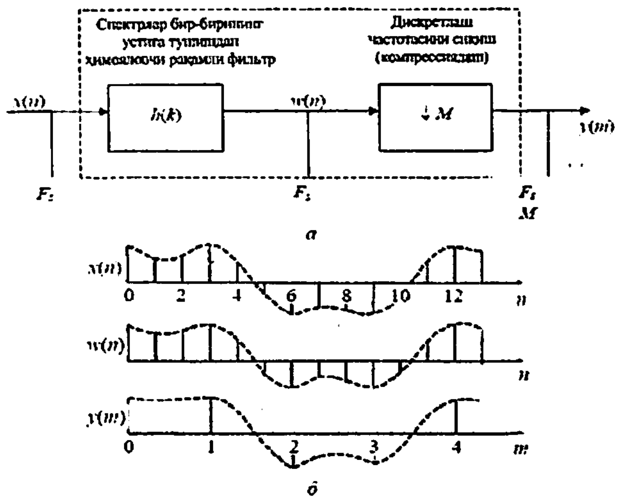
Турли тезликларда сигналларга ишлов бериш методи уни жуда катта самара билан амалга ошириши натижасида анча кичик тезликларда фильтрлашни, натижада фильтр тартибини анчагина пасайтиради.

8.1. Сигналларга турли тезликларда ишлов бериш асослари

Рақамли сигнал дискретлаш частотасини камайтиришнинг энг оддий, осон усули – бу уни дастлабки аналог кўринишига қайтариш ва қайтадан бошқа частотада дискретизациялаш. Аммо рақам-аналог ўзгартириш жараёни қуйидаги камчиликларга эга: квантлаш ва йиғишда ҳосил бўладиган хатоликлар, сигнал шаклининг сезиларли даражада бузилишига сабаб бўлади. Шунинг учун агар сигнал рақамли кўринишда берилган бўлса, унга рақамли метод асосида ишлов берган маъқул. Турли тезликларда рақамли ишлов бериш бу сигнал дискретлаш частотасини рақамли метод асосида самарали ўзгартириш бўлиб, бунда сигналларга рақамли ишлов беришнинг анъанавий методларидан фойдаланилади. Мисол учун, сигнал спектрларининг бир-бирининг устига тушиши ва акс частота таъсирини камайтириш учун СРИБни реал вақтда рақамли шаклда амалга ошириш мумкин, натижада фильтрлар амплитуда-частота характеристикалари қияликлари кескин ошади ва фаза характеристикаси чизиқли бўлишига эришилади.

8.2. Дискретлаш частотасини кичиклаштириш: бутун қадамли децимация

8.1*а*-расмда $x(n)$ сигнални бутун кадам M лар орқали децимациялаш блок-схемаси келтирилган. Бу расмда $h(k)$ спектрларини уст-устига тушищдан химояловчи ва дискретлаш частотасини сиқиш (компрессиялаш)ни амалга оширувчи рақамли фильтр структуравий схемаси келтирилган. Бунда M дискретлаш коэффициенти бўлиб, у бирламчи дискретлаш частотаси F_s ни F_s / M гача камайтиради.



8.1-расм. *а*) децимациялаш қурилмаси блок-схемаси, *б*) $M = 3$ билан децимациялаш вақт диаграммалари.

Нисбатан паст дискретлаш частотасида спектрларнинг уст-устига тушмаслигини таъминлаш учун аналог сигнал дискретлащдан аввал ўтказиш полосаси $F_s / 2M$ бўлган фильтрдан ўтказилади. Дискретлаш частотасини камайтириш хар бир M та оний қийматдан $M-1$ таси эътиборга олинмайди. Децимациялаш қурилмаси чиқиш ва кириш сигналлари бир-бири билан қуйидагича боғланишга эга:

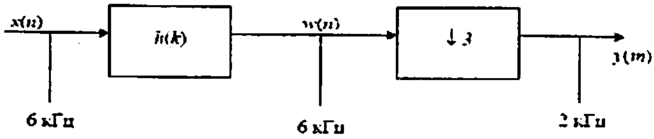
$$y(m) = \omega(mM) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(mM - k), \qquad (8.1а)$$

бунда

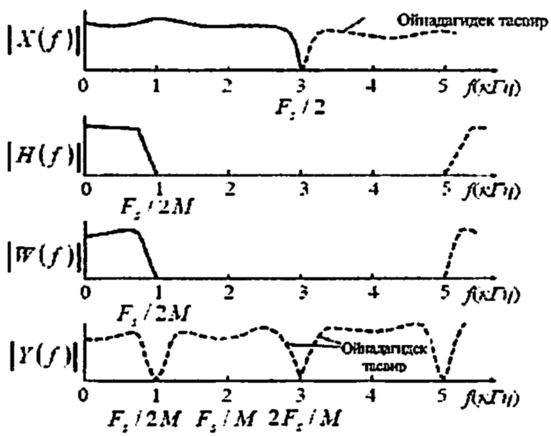
$$\omega(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n - k). \qquad (8.1б)$$

8.1*б*-расмда $M=3$ бўлган, яъни $x(n)$ нинг ҳар учта оний қийматидан иккитаси эътиборга олинмаган оддий ҳолат тасвирланган. Децимациялаш бу амалда маълумотларни сиқиш жараёни ҳисобланади.

8.2-расмда киришига кенг полосали сигнал $x(n)$ берилган ҳолат учун децимациялаш жараёнини спектрал кўринишда ифодалаш келтирилган.



а



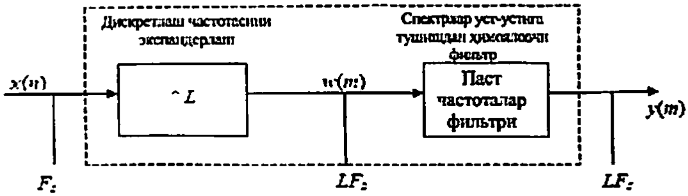
б

8.2-расм. Частотаси 6 кГц бўлган сигнални 2 кГц гача децимациялашнинг спектрал кўринишда тасвирлаш.

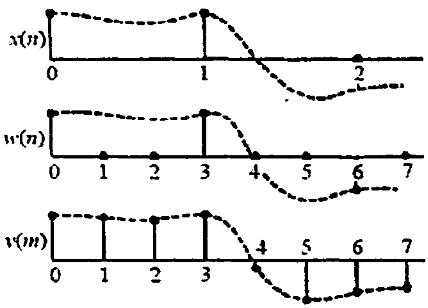
8.3. Дискретлаш частотасини катталаштириш: бутун қадамли интерполяциялаш

Интерполяция – бу аналог рақамли ўзгартиришнинг рақамли эквиваленти бўлиб, бунда рақам-аналог ўзгартиргич киришига берилган рақамли оний қийматлардан интерполяция ёрдамида аналог сигнал тикланади.

Берилган дискретлаш частотаси F_s бўлган $x(n)$ сигнал интерполяциялаш натижасида дискретлаш частотаси L марта катталашади, яъни LF_s га тенг бўлади. Интерполятор структуравий схемаси 8.3*а*-расмда келтирилган.



а



б

8.3-расм. Вақт бўйича $L = 3$ қадам билан интерполяциялашни тасвирлаш.

Интерполяциялаш қурилмаси қуйидаги қисмлардан ташкил топган: дискретлаш частотасини интерполяциялаш коэффициенти L бўлган дискретлаш частотаси экспандери. Кириш сигнали $x(n)$ нинг ҳар бир оний қиймати учун қўшимча $(L-1)$ та янги оний қиймат киритиш орқали янги дискретлаш частотаси LF_s бўлган $w(m)$ сигнални шакллантиради. Сўнгра бу сигнал дискретлаш частотасини катталаштириш натижасида ҳосил бўлган акс частотали ташкил этувчисини йўқотиш учун паст частоталар фильтридан ўтказилади ва $y(m)$ чиқиш сигнали олинади.

$(L-1)$ та нолларнинг киритилиши ҳар бир дастлабки оний қиймат энергиясини L та чиқиш сигнали оний қийматларига тақсимланишига олиб келади, яъни ҳар бир дастлабки оний қиймат L марта кичиклашади. Ушбу ҳолатни бартараф этиш учун чиқиш сигнали $y(n)$ ни L га кўпайтириш керак. Интерполяция жараёни амалга оширилганда кириш ва чиқиш сигналлари қуйидаги боғланишлар орқали ифодаланади:

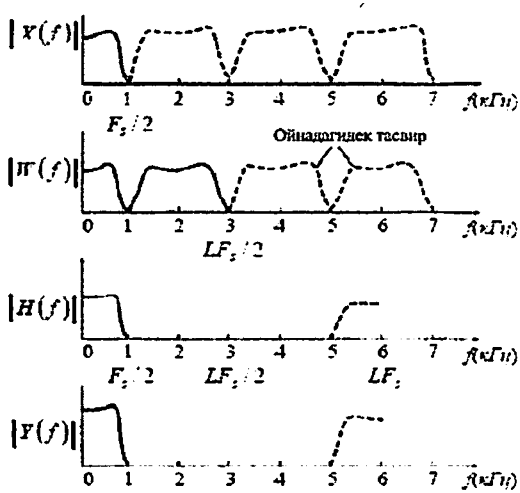
$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) w(m-k) \,. \tag{8.2а}$$

бунда

$$w(m) = \begin{cases} x(m/L), & m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 \end{cases} \tag{8.2б}$$

$L = 3$ ҳолат учун вақт бўйича интерполяциялаш жараёни 8.3б-расмда келтирилган. Бунда ҳар бир кириш оний қиймати учта чиқиш оний қиймати шаклланишига сабаб бўлади (экспандер иккита ноль оний қийматларни киритади).

Ушбу жараённи частота функцияси орқали ифодаланиши 8.4-расмда келтирилган.



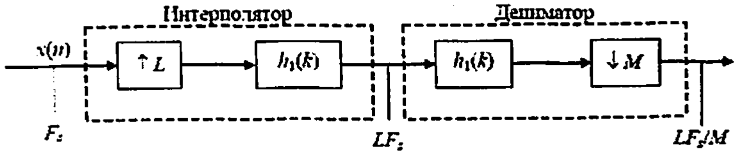
8.4-расм. Сигнални 2 кГц дан 6 кГц га интерполяциялашни спектрал кўринишда тасвирлаш.

$X(f)$, $W(f)$ ва $Y(f)$ функциялар мос равишда $x(n)$ $w(n)$ ва $y(m)$ сигналларнинг частота характеристикаси (спектри). $H(f)$ – бу акс частоталарни йўқотиш фильтри амплитуда-частота характеристикаси. Бу фильтр $W(f)$ да пунктир чизиқлар билан белгиланган акс частота ташкил этувчиларини йўқотиш учун керак. Шуни таъкидлаш керакки, децимациялаш ва интерполяциялаш жараёнлари бир жуфтлик (иккилик) ни ташкил этади, яъни бир-бирига тескари амаллар. Бу жуфтлик хоссаси интерполяторни экспандердан осонгина олиш мумкин ва аксинча, экспандердан интерполяторни олиш мумкин.

8.4. Дискретлаш частотасини бутун бўлмаган қадамли алмаштириш

Баъзи ҳолларда дискретлаш частоталарини бутун бўлмаган сонга ўзгартиришга эҳтиёж туғилади. Мисол учун, рақамли аудио тизимида, маълумотларни бир хотира қурилмасидан бошқасига узатишда уларнинг дискретлаш частотаси турлича бўлиши мумкин (ноқонуний нусха кўчиришнинг олдини олиш учун). Мисол учун, бу компакт дисклардаги маълумотларни қайта эшитишда 44,1 кГц уни аудио тасма (лента)га рақамли шаклда ёзишда (48 кГц). Ушбу жараённи амалга ошириш учун компакт диск дискретлаш частотасини 48/44,1 марта катталаштириш керак бўлади.

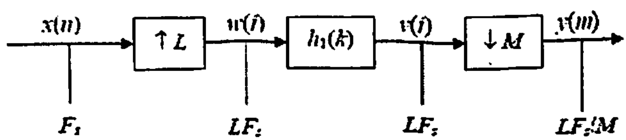
Амалда бундай бутун сон бўлмаган кўпайтма (коэффициентлар)ни рационал сон кўринишида, яъни икки бутун сонлар L ва M лар нисбати шаклида бўлган, талаб этиладиган кўпайтмага иложи борича яқин бўлган каср сон шаклида ифодаланади. Дискретлаш частотасини алмаштириш икки босқичда амалга оширилади: маълумотларни L қадам билан интерполяциялаш ва M қадам билан децимациялаш (8.5-расм).



8.5-расм. Рационал қадам билан интерполяциялашни тасвирлаш.

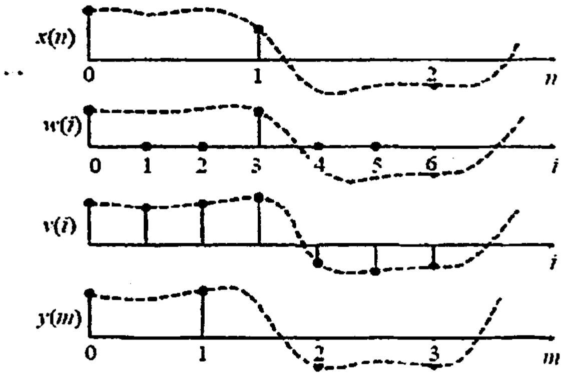
Ҳамма вақт децимациялашдан олдин интерполяциялаш жараёни амалга оширилиши керак, акс ҳолда децимациялаш натижасида баъзи частотали ташкил этувчилар йўқотилиши мумкин. Юқорида келтирилган (компакт дискдан рақамли аудиотасмага) алмаштиришдаги талаб этиладиган 48/44,1 ни қуйидагича амалга ошириш мумкин: $L = 160$ бўлган қадам билан интерполяциялаш ва сўнгра $M = 147$ қадам билан децимациялашни амалга ошириш керак, яъни дастлаб компакт диск тезлиги $L = 160$ марта 7056 кГц гача катталаштирилади, сўнгра $M = 147$ марта, яъни 48 кГц гача кичиклаштирилади.

8.5-расмдаги паст частоталар фильтри $h_1(k)$ ва $h_2(k)$ кетма-кет каскад шаклида улангани ва бир хил дискретлаш частотасига эгалиги учун уларни бирлаштириш натижасида ягона дискретлаш частотаси конверторини олиш мумкин (8.6-расм).



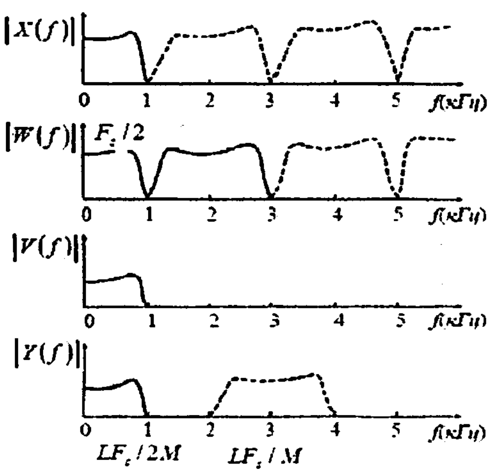
8.6-расм. Рационал қадамли интерполяциялаш қурилмаси структуравий схемаси.

Агар $M > L$ бўлса, у ҳолда конвертор томонидан бажариладиган амал бутун бўлмаган қадамли децимациялаш ва $M < L$ бўлса интерполяциялаш деб аталади. Бундан ташқари агар $M = 1$ бўлса умумлашган схема – конвертор бажараётган амал оддий бутун қадамли интерполяция ва $L = 1$ бўлган ҳолда эса бутун қадамли децимация бўлади. 8.7-расмда қадами 3/2 бўлган интерполяциялаш тасвирланган. Бунда дастлаб дискретлаш частотаси 3 марта оширилади ($x(n)$ нинг ҳар бир оний қийматига иккита нолли оний қиймат қўшилади), сўнгра сигнал паст частоталар фильтридан ўтказилади ва натижада $v(i)$ олинади.



8.7-расм. Рационал қадамли интерполяциянинг вақт диаграммалари.

Кейинги босқичда фильтрланган сигналдан дастлабкисига қараганда икки марта катта қадам билан оний қийматлар олинади, яъни ҳар икки $v(i)$ оний қийматдан биттаси қолади. Ушбу жараённи частоталар областидаги тасвирланиши 8.8-расмда келтирилган.



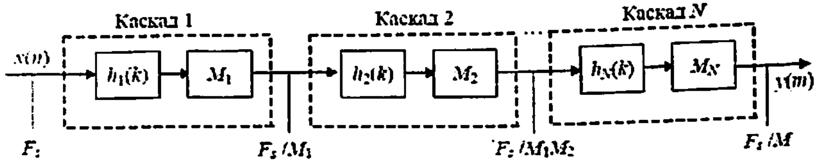
8.8-расм. Дискретлаш частотасини 2 кГц дан 3/2 марта оширишни спектрал кўринишда тасвирлаш.

Дастлаб кириш сигнали $x(n)$ дискретлаш частотаси 2 кГц 3 (уч) маротаба катталаштирилади ва 6 кГц га тенг бўлади, сўнгра сигнал спектрининг бир-бирини устига тушишига сабаб бўлувчи акс частоталарни йўқотиш учун фильтрлапади ва шиҳоят, бу сигнал частотаси икки мартага камайтирилади.

8.5. Дискретлаш частотасини кўп каскадли алмаштириш

Дискрстлаш частотасини ягона децимациялаш ва интерполяциялаш коэффициентидан фойдаланиб амалга ошириш мумкин. Агар дискретлаш частотасини жуда кўп маротаба катталаштириш ёки кичиклаштириш талаб этилса, у ҳолда дискретлаш частотасини алмаштиришни бир неча босқичда амалга ошириш мақсадга мувофиқ ҳисобланади, бунда бир неча кетма-кет уланган каскадлардан фойдаланилади. Амалда турли катталикдаги дискретлаш частоталарига рақамли ишлов беришда кўп каскадли методдан фойдаланилади. Натижада дискретлаш частотасини аста-секин камайтириш ва катталаштириш орқали спектрларининг бир-бири устига тушмаслигини таъминловчи фильтрларга қўйиладиган талаблар пасаяди, шу билан бирга акс частоталарни йўқотиш сифати ошади.

M та каскадли децимациялашни амалга оширувчи қурилма структуравий схемаси 8.9-расмда келтирилган.



8.9-расм. Кўп каскадли децимациялашни амалга оширувчи қурилма структуравий схемаси.

Децимациялаш умумий қадами кичик қадамлар кўпайтмаси орқали ифодаланади, яъни

$$M = M_1 M_2 \ldots M_N. \qquad (8.3)$$

бунда M_N – бутун сон N-каскад децимациялаш қадами. Ҳар бир каскад алоҳида – мустақил дециматор бўлиб, пунктир чизиқлар билан чизилган тўғритўртбурчакдан иборат. Агар $M >> 1$ бўлса, кўп каскадли дециматор ҳисоблашга ва унинг хотирасига бўлган талабларни камайтиради, децимациялашда фойдаланиладиган фильтрлар характеристикаларига бўлган талабларни пасайтиради ва натижада чекланган разрядлилик хоссасига кам сезгир бўлган фильтрлардан фойдаланиш имкониятини беради. Келтирилган афзалликларни қурилмани лойиҳалашни ва амалга оширишни мураккаблаштириш ҳисобига амалга оширилади.

8.6. Фильтрларга қўйиладиган асосий талаблар

Рақамли фильтр конверторидан сигнал спектрининг бир-бири устига тушишини ёки акс частота ташкил этувчисини йўқотишда фойдаланилади. Турли тезликда сигналларга ишлов бериш тезкорлиги фойдаланиладиган фильтр тури ва сифатига боғлиқ. Децимациялаш ва интерполяциялашда импульс характеристикаси чексиз ва чекли фильтрлардан фойдаланиш мумкин, аммо импульс характеристикаси чекли фильтрлардан кўп ҳолларда фойдаланилади.

Турли тезликда сигналларга ишлов беришда, сигналларга оддий рақамли ишлов беришда импульс характеристикаси чекли фильтрни ҳисоблаш самарадорлиги импульс характеристикаси чексиз фильтрларники билан деярли бир хил, баъзи ҳолларда катта. Дискретлаш частотасини камайтириш натижасида дециматор сигнал спектри бир-бирининг устига тушмаслигини таъминлаш учун фильтр қуйидаги талабларга жавоб бериши керак:

$$\text{сигнал частоталарини ўтказиш полосаси} - \ 0 \le f \le f_p\,, \qquad (8.4а)$$

$$\text{сигнал частоталарини ўтказмаслик полосаси} - F_s/2M \le f \le F_s/2\,, \qquad (8.4б)$$

$$\text{ўтказиш полосасидаги фарқланишлар} - \delta_p\,, \qquad (8.4в)$$

$$\text{ўтказмаслик полосасидаги фарқланишлар} - \delta_s\,, \qquad (8.4г)$$

бунда $f_p < F_s/2M$ бўлиб, F_s – бирламчи дискретлаш частотаси. Одатда f_p – бирламчи сигнал эътиборга олинадиган энг катта частота.

Интерполяциялашда бошқа муаммо – акс частота муаммоси юзага келади. Бу муаммони ҳал қилиш учун фақат фойдали ахборот спектр ташкил этувчиларини ўтказувчи ва дискретлаш частотаси ўзгарган сигналлар спектрини $F_s/2$ гача ўтказади. Аммо энг катта эътиборга олинадиган частота интерполяция натижасида LF_s гача катталаштирилганлигини эътиборга олсак $LF_s/2$ га тенг бўлади, сигнални дискретизациялаш теоремасига асосан унинг полосасини $F_s/2$ чеклаш керак, чунки бу $x(n)$ нинг энг катта эътиборга олинадиган частотаси.

Интерполяциялашда фойдаланиладиган фильтрга умумий талаблар:

$$\text{фильтр ўтказиш полосаси} - \ 0 \le f \le f_p\,, \qquad (8.5а)$$

$$\text{фильтр ўтказмаслик полосаси} - F_s/2 \le f \le LF_s/2\,, \qquad (8.5б)$$

$$\text{фильтр ўтказиш полосасидаги фарқланишлар} - \delta_p\,, \qquad (8.5в)$$

фильтр ўтказмаслик полосасидаги фарқланишлар – δ_s, (8.5г)

бунда $f_p < F_s/2$.

Интерполяциялаш натижасида сигнал амплитудасининг кичиклашиши ўрнини қоплаш (компрессиялаш) учун фильтр ўтказиш полосасидаги спектр ташкил этувчилари энергиясини L марта ошириш керак.

8.7. Каскадлар сони ва децимациялаш қадамини аниқлаш

Рақамли фильтрни кўп каскадли шаклда лойиҳалаш ҳисоблаш ва хотирага бўлган талабларда бир каскадли структурага қараганда сезиларли тежамкорликни таъминлайди. Тежамкорлик даражаси фойдаланиладиган каскадлар сонига ва алоҳида каскадлар децимациялаш қадамини танланишига боғлиқ. Бунда асосий масала каскадлар оптимал сонини аниқлаш ва ҳар бир каскад учун децимациялаш қадамини аниқлаш ҳисобланади. Каскадларнинг энг оптимал сони бирга тенг, чунки бунда ҳисоблашлар ҳажми энг кичик бўлади, агар уни бир сонияда бажариладиган амаллар сони (САС) орқали баҳоласак ёки коэффициентларни сақлаш учун умумий талаб этиладиган хотира (УТХ) қуйидагилар орқали аниқланади:

$$CAC = \sum_{i=1}^{N} K_i F_i, \quad (8.6а)$$

$$УТХ = \sum_{i=1}^{N} K_i, \quad (8.6б)$$

бунда K_i – i чи каскад коэффициентлари сони бўлиб, бунда фильтр коэффициентлари симметрик эканлиги эътиборга олинмайди.

Каскадлар сони N ва децимациялаш қадамини танлаш – бу (нетривиал) оддий масала эмас. Одатда, амалда каскадлар сони 3 ёки 4 га тенг этиб танланади. Бундан ташқари M нинг берилган қиймати учун чекланган бутун сонлар кўпайтмаси мавжуд. Демак M ни келтириб чиқарувчи ҳамма кўпайтмалар M_i қийматлари, яъни M_i нинг қийматлари ва унга мос бўлган САС ва УТХ параметрларини аниқлаш керак. Сўнгра улар орасидан энг оптимал ва масалани ечиш учун энг мақсадга мувофиқини танлаш керак.

Умуман олганда САС ва УТХ параметрлари оптимал қийматларига эришиш учун децимациялаш қадами қуйидаги талабга жавоб бериши керак:

$$M_1 > M_2 > \ldots > M_i. \quad (8.7)$$

бунда M_N ($i=1,...,N$) ўзгармас катталик. Шунинг билан бирга агар кўпайтма ташкил этувчилари бутун сонлар бўлса, N нинг маълум кийматлари учун (8.7) тенгсизликни ҳамма вақт ҳам бажариш мумкин бўлмайди, мисол учун, агар $N=3$ ва $M=32$ бўлган ҳолда.

$N=2$ яъни икки каскадли дециматор учун УТХ параметрларини минималлаштирувчи децимациялаш оптимал қадами қуйидагига тенг бўлади:

$$M_{1opt}=\frac{2M}{2-\Delta f+(2M\Delta f)^{1/2}}. \qquad (8.8a)$$

$$M_{2opt}=\frac{M}{M_{1opt}}. \qquad (8.8б)$$

Агар $N>2$ бўлган ҳолат учун оддий аналитик ифода мавжуд эмас, шунинг учун оптимал децимациялаш қадами M_i ни аниқлаш учун компьютерда оптималлаштириш дастуридан фойдаланиб сонли ҳисоблашни қўллаш керак.

Назорат саволлари

1. Дискретлаш частотасини камайтиришдан қандай ҳолатларда фойдаланилади?

2. Бутун қадамли децимациялаш қандай амалга оширилади?

3. Децимациялаш қурилмаси структуравий схемасини чизинг ва унда бажариладиган жараёнларни тушунтиринг.

4. Децимациялашнинг спектрал усули қандай амалга оширилади?

5. Дискретлаш частотасини оширишдан қандай ҳолатларда фойдаланилади?

6. Вақт ва спектр бўйича интерполяциялаш усули ҳақида сўзлаб беринг.

7. Дискретизациялаш частотасини бутун бўлмаган қадамга алмаштириш қандай амалга оширилади?

8. Кўп каскадли децимациялаш ҳақида асосий тушунчангизни айтиб беринг.

9. АДАПТИВ ФИЛЬТРЛАР ҲАҚИДА АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Сигналларга оптимал ишлов бериш усулларини ишлашда кўп ҳолларда сигнал ва шовқинларнинг статистик моделларидан фойдаланиш тавсия этилади. Кўп ҳолларда сигналларга ишлов бериш қурилмаси чизиқли режимда ишлайди ҳамда унга стационар ва нормал тақсимот қонунига бўйсунувчи сигнал таъсир этади деб фикр юритилади. Аммо реал шароитда юқорида қабул қилинган шартлар тўлиқ бажарилмайди ва натижа сигнални қабул қилиш усулига ҳам боғлиқ бўлади. Бундай ҳолларда кириш сигналларининг статистик кўрсаткичларига қараб ўз параметрларини ўзгартирувчи адаптив фильтрлардан фойдаланиш ўринли ҳисобланади.

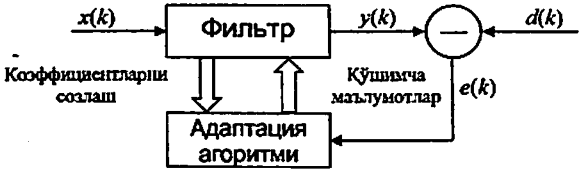
Ҳозирда адаптив фильтрлар ҳисоблаш амалининг мураккаблиги, ўзгарувчанлик хусусиятлари, фойдаланиладиган дастлабки маълумотлар ва мослашадиган (адаптив) фильтрлар таркибий узилишига ҳам боғлиқ.

Адаптив фильтрларни бир неча турларга ажратиш мумкин. Бунда асосий белгилардан бири бу эталон (андозавий) ёки таянч сигналининг бор ёки йўқлиги ҳисобланади. Агар эталон сигнали бор бўлса, у ҳолда адаптация (мослашиш) жараёни ўқитувчи ёрдамида билим олиш деб аталади. Бу ҳолда адаптив фильтр ўз чиқиш сигналини иложи борича эталон сигналга мослаштиришга интилади. Мослашиш даражаси адаптив фильтрларнинг ишлаш алгоритмига боғлиқ. Эталон сигналсиз мослашиш "кўр-кўрона" мослашув ёки ўқитувчисиз билим олиш деб аталади. Бу ҳолда албатта қабул қилинаётган кириш сигналининг таркиби ҳақида баъзи кўрсаткичлар маълум бўлиши керак (мисол учун, модуляция тури ва унинг ўзгариш чегаралари). Кўр-кўрона адаптацияни амалга ошириш эталон сигнални адаптация усулига қараганда анча мураккаб ҳисоблаш амалларини бажаришни талаб қилади.

Адаптив фильтрларни турларга ажратишда эътибор берилиши керак бўладиган белгилардан яна бири, бу сигналга ишлов бериш тизимидир. Бунда адаптив тизимлар ўз навбатида икки турга: чизиқли ва чизиқсиз тизимларга ажратилади. Бунда чизиқлилик кириш сигнали сатҳига боғлиқлиги эмас, адаптация жараёнида созланадиган параметрга боғлиқлиги назарда тутилади. Кўп ҳолларда сигналларга норекурсив фильтрларда ишлов беришга асосланган чизиқли адаптив тизимлардан фойдаланилади. Норекурсив фильтрларнинг асосий афзалликларидан бири фильтр коэффициентларининг ҳар қандай қийматларида унинг иш ҳолати барқарорлигидир. Шуни эътиборга олиш керакки, адаптацияланиш алгоритми тескари боғланиш занжирига эга бўлиб, бу мослашувчи тизимнинг барқарорлигини ёмонлаштириши мумкин.

Ночизиқли адаптив тизимларга тирик организмларнинг иш ҳолатини маълум даражада моделлашга аосланган нейрон тармоқлари киради. Ничизиқли адаптив тизимларнинг яна бир тури бу рекурсив адаптив фильтрлардир. Аммо бу тур фильтрларни яратиш унинг барқарорлигини таъминловчи муҳим муаммоларни келтириб чиқариши сабабли бу тур фильтрлардан кенг миқёсда фойдаланилмайди.

Эталон сигналидан фойдаланишга асосланган адаптив фильтрларни кўриб чиқамиз. Бу тур адаптив фильтрнинг таркибий схемаси 9.1-расмда келтирилган.



9.1-расм. Адаптив фильтр структура схемаси.

Кириш дискрет сигнали $x(k)$ га дискрет фильтрда ишлов бериш натижасида чиқиш сигнали $y(k)$ ҳосил бўлади. Бу чиқиш сигнали эталон сигнал $d(k)$ билан таққосланиши натижасида хатолик сигнали $e(k)$ ҳосил бўлади. Адаптив фильтрнинг вазифаси хатолик даражасини минималлаштириш орқали эталон сигнални яратишдан иборат. Шу мақсадда адаптация блоки ҳар бир оний қийматга ишлов беришдан сўнг хатолик сигнали $e(k)$ ни ва фильтрдан олинаётган қўшимча маълумотларни таҳлил қилади, ушбу таҳлил натижаларидан фильтр параметрлари (коэффициентлари)ни қўшимча созлаш учун фойдаланилади.

Радиотехник тизимларда амалда асосан икки тур адаптив фильтрлаш алгоритмларидан фойдаланилади. Булар энг кичик квадратик хатолик усулидан фойдаланишга асосланган алгоритм (ЭККХ) ва энг кичик квадратик хатолик рекурсив усулига асосланган алгоритм (ЭККХРУ). Бу ҳар икки алгоритм оптимал фильтрлаш тенгламаларига асосланиб амалга оширилади. Оптимал фильтрлаш масаласи турлича ечилиши мумкин, булар: градиент усулида оптимал фильтрлаш ва статистик ёндашишдан фойдаланишга асосланган усул.

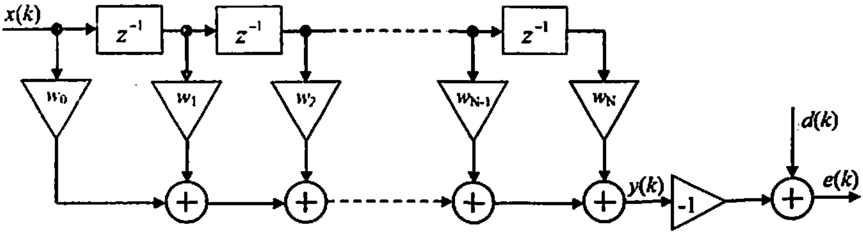
9.1. Винер оптимал фильтри

Оптимал фильтрлаш ҳақида фикр юритилганда қуйидаги икки нарсага асосланиш керак: кириш сигнали математик модели ва оптималлаштириш сифати мезони. Бу шартлар маълум бўлса, оптимал фильтрлаш масаласи – оптималлаштириш математик моделини тузиш ва уни аналитик ёки сонли шаклда ечишга олиб келади.

Мисол шаклида, киришига тасодифий дискрет сигнал $\{x(k)\}$ N-тартибли коэффициентлари $\{w_n\}$, $n=0,1,....,N$ бўлган дискрет фильтрлар орқали ишлов беришини кўриб чиқамиз (9.2-расм).

Ушбу фильтр чиқиш сигнали қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$y(k)=\sum_{n=0}^{N} w_n x(k-n). \tag{9.1}$$



9.2-расм. Хатолик сигналини шакллантириш.

Кириш сигнали $\{x(k)\}$ дан ташқари яна намунавий тасодифий сигнал $d(k)$ ҳам бўлиб, намунавий сигнални қайта акс эттириш хатолиги қуйидагига тенг:

$$e(k)=d(k)-y(k)=d(k)-\sum_{n=0}^{N}w_n x(k-n). \tag{9.2}$$

Ушбу масалани ечиш учун дискрет фильтр коэффициентлари $\{w_n\}$ нинг чиқиш сигнали $y(k)$ ни намунавий сигналга энг катта ўхшаш қийматини аниқлаш, яъни $e(k)$ хатоликнинг энг кичик қийматини таъминловчи қийматларини топиш керак бўлади. $e(k)$ тасодифий жараён бўлгани учун уни баҳолашда ўртача квадратик хатолик тушунчасидан фойдаланамиз. Шундай қилиб оптималлаштирилаётган функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$J(\{w_n\})=\overline{e^2(k)}\rightarrow \min. \tag{9.3}$$

Бу масалани ечиш учун (9.2) ифодани матрица кўринишига келтирамиз. Бунинг учун фильтр коэффициентлари вектор устунларини $\overline{\mathrm{w}}$ орқали ва фильтр k-чи қадамидаги кечиктириш линияси чиқишидаги қийматини $\overline{\mathrm{x}}(\mathrm{k})$ орқали белгилаймиз

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \dots \\ x(k-N) \end{bmatrix}. \tag{9.4}$$

(9.4) ни эътиборга олиб (9.2) тенгликни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$e(k)=d(k)-\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}. \tag{9.5}$$

Хатолик $e(k)$ квадрати қуйидагига тенг бўлади:

$$e^2(k)=\left(d(k)-\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}\right)^2=d^2(k)-2d(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}+\left(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}\right)^2=$$
$$=d^2(k)-2d(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}+\mathbf{w}^2\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}. \qquad (9.6)$$

(9.6) ифодани статистик ўртача қиймати қуйидагича аниқланади:

$$\mathcal{J}(\mathbf{w})=\overline{e^2(k)}=\overline{d^2(k)}-2\overline{\left(d(k)\mathbf{x}(k)\right)}^T\mathbf{w}+\mathbf{w}^T\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}. \qquad (9.7)$$

Хатолик ўртача статистик қиймати $\overline{e^2(k)}$ ни аниқлаш ифодаси (9.7) ташкил этувчиларини алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз:

1. $\overline{d^2(k)}$ – бу намунавий сигналнинг ўртача квадратик қиймати. (9.7) ифоданинг алоҳида ташкил этувчиси бўлиб, у фильтр коэффициентлари қийматларига боғлиқ эмас, шунинг учун уни эътиборга олмаслик мумкин, аммо у фильтр коэффициентларининг оптимал қийматларида хатолик ўртача квадратик қийматига таъсир этади.

2. $\overline{d(k)\mathbf{x}(k)}$ – бу намунавий сигнал k-қиймати ва кечиктириш фильтри k-қадамидаги қийматлари ўзаро корреляциясининг вектор устуни. $x(k)$ ва $d(k)$ – тасодифий жараёнларни биргаликда стационар жараёнлар деб ҳисоблаймиз, у ҳолда уларнинг корреляция векторлари оний қийматларини олиш одими тартиб рақами k га боғлиқ бўлмайди:

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}\overline{d(k)x(k)}\\ \overline{d(k)x(k-1)}\\ \dots\\ \overline{d(k)x(k-N)}\end{bmatrix}. \qquad (9.8)$$

3. $\overline{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)}$ – бу $(N+1)\times(N+1)$ ўлчамли квадратик матрица бўлиб, у сигналнинг корреляция матрицаси деб аталади. Стационар тасодифий жараёнлар учун корреляция матрицаси бўлиб унинг диагоналларига корреляция функция қийматлари мос келади:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) & \dots & R_x(N)\\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1)\\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2)\\ \dots & \dots & \dots & & \dots\\ R_x(N) & R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0)\end{bmatrix}, \qquad (9.9)$$

бунда, $R_x(\Delta k)=\overline{x(k)x(k-\Delta k)}$ – кириш сигнали корреляция функцияси.

Киритилган белгиланишларни эътиборга олиб (9.7) формулани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$J(\mathbf{w})=\sigma_d^2-2\mathbf{p}^T\mathbf{w}+\mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w}. \qquad (9.10)$$

(9.10) ифода $\mathbf{w}$ га нисбатан квадратик шакл бўлиб, $\mathbf{R}$ матрица ягона минимумга эга ва функция минимум қийматини топиш учун градиент векторини нолга тенглаштириш керак

$$\nabla J(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{9.11}$$

Ушбу (9.11) ифодадан Винер-Хопф тенгламасини оламиз:

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{p}. \tag{9.12}$$

(9.12) тенгликнинг чап қисмини тескари корреляция матрицаси $\mathbf{R}^{-1}$ га кўпайтириб, оптимал фильтр учун керакли ечимни оламиз,

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}. \tag{9.13}$$

(9.13) тенглама билан ифодаланадиган фильтр Винер фильтри деб аталади.

Винер фильтрини ифодаловчи (9.13) тенгламага (9.10) ифодани киритиб хатолик сигнали дисперсиясининг эришиши мумкин бўлган минимал қиймати аниқланади:

$$\overline{e^2(k)}_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}. \tag{9.14}$$

$\overline{e(k)y(k)} = 0$ ва $\overline{e(k)x(k)} = 0$ эканлиги, Винер фильтри чиқишидаги хатолик сигнали унинг чиқишидаги ва киришидаги сигналлар билан корреляцияланган эмас, яъни улар бир-бирига боғлиқ эмаслигини билдиради.

Узатилган сигнални қайта тиклаш, албатта фильтрдан ўтишда сигнални маълум бир вақтга кечикишига сабаб бўлади, шунинг учун намунавий сигнал узатилаётган сигналнинг кечиккан нусхаси бўлиши керак,

$$d(k) = x_0(k - \Delta k). \tag{9.15}$$

Фильтр кечиктириш линиясининг k чи одимига мос чиқишларида бузилган сигналнинг k, $k-1, k-2$, ..., $k-N$ тартиб рақамли оний қийматлари мос келади, бунда N – фильтрнинг тартиби. Ушбу оний қийматларнинг ҳар бири узатилган сигнал оний қийматлари чизиқли комбинациясини ташкил этади:

$$x(k-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_0(m) h_{k-n-m}. \tag{9.16}$$

Бирламчи сигнал оний қийматлари статистик боғлиқ бўлмаганлиги учун $\mathbf{p}$ векторнинг n чи элементини ҳисоблашда ўртача қиймати (9.15) ифоданинг фақат бир ташкил этувчиси учун нолга тенг бўлмайди. Бунда $x_0(k)$ сигналнинг ўртача квадратик қиймати бирга тенглигини ҳам эътиборга олиш керак,

$$p_n = \overline{x(k-n)d(k)} = \overline{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_0(m) h_{k-n-m} x_0(k-\Delta k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{k-n-m} \overline{x_0(m) x_0(k-\Delta k)} = h_{\Delta k-n}. \quad (9.17)$$

Шундай қилиб, p вектор каналнинг тўнтарилган импульс характеристикасини (керак ҳолларда ҳар икки томонидан ёки бир томонидан ноллари кесилган ёки ноллари тўлдирилган) англатади:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} h_{\Delta k} \\ h_{\Delta k-1} \\ \ldots \\ h_1 \\ h_0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

9.2. Оптимал ечимни градиентли излаш

Адаптив алгоритмлардан энг кўп фойдаланиладигани бу (9.11) мақсад функциясининг минимумини (энг кичик қийматини) энг тез тушиш усули орқали топиш ҳисобланади. Ушбу усулдан фойдаланилганда фильтр коэффициентлари вектори итерация тартиб рақами k га боғлиқ, яъни $\mathbf{w}(k)$. Ҳар бир итерацияда векторлари мақсад функцияси градиентининг ушбу нуқтадаги қийматига пропорционал равишда силжийди:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \frac{\mu}{2}\nabla J(\mathbf{w}(k)) = \mathbf{w}(k) + \mu\mathbf{p} - \mu\mathbf{R}\mathbf{w}(k), \quad (9.19)$$

бунда, μ – мусбат коэффициент бўлиб, у одим ўлчами деб аталади.

Юқорида келтирилган (9.19) алгоритм

$$0 < \mu < 2/\lambda_{max}, \quad (9.20)$$

бўлганда яқинлашади. Бунда λ_{max} – $\mathbf{R}$ корреляция матрицасининг максимал хусусий миқдори. Яқинлашиш тезлиги корреляция матрицаси $\mathbf{R}$ қийматларининг ёзилганлигига боғлиқ бўлиб $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ нисбати қанча кичик бўлса, итерация жараёни шунча қисқа вақтда бўлиб ўтади.

Энг кичик ўртача квадратик хатоликни таъминловчи адаптивланувчи (мослашувчи) алгоритм. (9.19) формула асосида энг тез тушиш (яқинлашиш)ни амалга ошириш учун градиент қийматларини ҳисоблаш керак, буни амалга ошириш учун ўз навбатида матрица **R** ва вектор **p** ларнинг қийматларини билиш керак. Амалда бу параметрларнинг фақат кириш сигналлари олинган баҳолари маълум бўлиши мумкин. Бундай баҳолардан бири корреляция матрицаси ва ўзаро корреляция вектори оний қийматлари ҳисобланади. Бу қийматлар ҳеч қандай ўрталаштиришларсиз олинади:

$$\mathbf{R}(k)=\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k),\qquad \mathbf{p}(k)=d(k)\mathbf{x}(k). \tag{9.21}$$

Бу баҳолашлардан фойдаланилганда (9.19) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathbf{w}(k+1)=\mathbf{w}(k)+\mu d(k)\mathbf{x}(k)-\mu\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{w}(k)=\mathbf{w}(k)+\mu\mathbf{x}(k)\left(d(k)-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{w}(k)\right). \tag{9.22}$$

Қавс ичидаги ифодалар намунавий сигнал ва фильтр чиқишидаги k одим (қадам)даги сигнал фарқи, яъни фильтрлаш хатолиги $e(k)$ га тенг. Юқоридаги эътиборга олинса, фильтр коэффициентларини рекурсив янгилаш ифодаси жуда содда бўлади, яъни қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathbf{w}(k+1)=\mathbf{w}(k)+\mu e(k)\mathbf{x}(k). \tag{9.23}$$

(9.23) формулага асосланган адаптив фильтрлаш алгоритми энг кичик квадратик қиймат (LMS – Least Mean Square) алгоритми номи билан юритилади. Ушбу (9.23) формулани ўртача квадратик хатолик $\overline{e^2(k)}$ статистик градиенти ўрнига унинг оний қиймати $e^2(k)$ билан алмаштириш орқали ҳам олиш мумкин. LMS алгоритми содда кўринишга эгалигига қарамасдан аниқ аналитик ечими йўқ мураккаб масала ҳисобланади.

Ушбу алгоритм μ нинг кичик оралиқда ўзгарувчи қийматларида $\overline{e^2(k)}$ нинг минимал қийматларини таъминлаши мумкин, бунда μ нинг энг катта чегаравий қиймати

$$\mu_{\max}\approx\frac{2}{\sum_{n=0}^{N}\lambda_n}=\frac{2}{trace(\mathbf{R})}=\frac{2}{(n+1)\sigma_x^2}, \tag{9.24}$$

бунда, λ_n – корреляция матрицаси **R** нинг хусусий сонлари, σ_x^2 – фильтр кириш сигналининг ўртача квадратик қиймати.

Нормаллашган LMS алгоритмидан фойдаланилганда μ коэффициентининг ҳар бир одим (қадам)даги қиймати кечиктириш линиясидаги сигнал энергияси асосида ҳисобланади, яъни

$$\mu(k)=\frac{\mu_0}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\varepsilon}, \qquad (9.25)$$

бунда μ_0 – μ нинг 0 ва 2 оралиғида жойлашган нормаллашган қиймати, ε эса кичик мусбат катталик бўлиб, фильтр киришидаги сигнал бўлмаган ҳолатда μ нинг катталашишини чегаралайди.

(9.25) ифодадан кўринадики μ нинг энг катта қиймати $\frac{\mu_0}{\varepsilon}$ га тенг. Рақамли фильтр коэффициентлари қийматлари $k\to\infty$ бўлган ҳолатда ҳам ўзининг оптимал қиймати атрофида тасодифий қийматларга ўзгариб туради. Шунинг учун ўтиш жараёни тугагандан сўнг ҳам фильтрлаш хатолиги Винер фильтри хатолиги $\overline{e^2(k)}_{\min}$ дан катта бўлади:

$$\overline{e^2(k)}_{LMS}=\overline{e^2(k)}_{\min}+E_{yx}, \qquad (9.26)$$

бунда, E_{yx} – LMS алгоритми ортиқча хатолик ўртача квадратик қиймати.

Ортиқча ўртача квадратик хатолик ва Винер фильтри хатолигининг нисбати хатоликлар фарқланиш коэффициенти деб аталади ва қуйидагича аниқланади:

$$M=\frac{\overline{e^2(k)}_{LMS}}{\overline{e^2(k)}_{\min}}-1=\frac{E_{yx}}{\overline{e^2(k)}_{\min}}\approx\frac{\mu\sum\limits_{n=0}^{N}\lambda_n}{2-\mu\sum\limits_{n=0}^{N}\lambda_n}=\frac{\mu(N+1)\sigma^2_{кир}}{2-\mu(N+1)\sigma^2_{кир}}=\frac{\mu}{\mu_{\max}-\mu}. \qquad (9.27)$$

Коэффициент μ нинг қийматлари LMS алгоритмининг икки асосий кўрсаткичлари: тенглашишга интилиш тезлиги ва фарқланиш коэффициентига таъсир қилади. μ қанча катта бўлса тенглашишга интилиш алгоритми шунча тез бажарилади, аммо фарқланиш коэффициенти M шунча катта бўлади ва аксинча.

LMS алгоритмининг асосий афзаллиги ҳисоблашнинг соддалиги ҳисобланади, бунда фильтр коэффициентларини созлаш учун ҳар бир одим (қадам)да $2(N+1)$ га тенг сонли "кўпайтириш ва қўшиш" амалларини бажариш керак бўлади. Аммо тенглашишга интилиш тезлигининг секинлиги ва ўтиш жараёни тугагандан сўнг ҳам хатолик дисперсиясининг нисбатан катталиги унинг камчилигидир. Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, тенглашишга интилишни тезлаштириш ва ҳисоблашлар ҳажмини камайтириш бир-бирига зид бўлган талаблардир.

Ҳозирда сигналларга рақамли ишлов беришнинг бир қатор алгоритмлари мавжуд бўлиб, улардан амалда энг кенг фойдаланиладиганлари қуйидагилардир:

- оптимал фильтрлашга детерминантли масала деб қараш;
- адаптив RLS алгоритми;
- экспонента бўйича хотирадан чиқариш.

Оптимал фильтрлашга детерминантли масала шаклида ёндашиш. LMS алгоритмидан фойдаланилганда фильтр киришидаги сигнални тасодифий жараён деб ҳисоблаб, намунавий сигнални фильтр чиқишидаги фарқланиши – хатолиги дисперсиясини минималаштирган эдик. Оптимал фильтрлашга детерминантли масала шаклида ёндашишда статистик методдан фойдаланилмайди. Мисол учун, кириш сигналининг $\{x(k)\}$ оний қийматларига ишлов бериш керак бўлсин, бунда N-тартибли норекурсив фильтрнинг коэффициентлари $\{w_n\}$ ($n = 0, 1, ..., N$) тўпламини ташкил этади ва намунавий сигнал оний қийматлари эса $\{d(k)\}$ орқали баҳоланади. Бу ҳолда фильтр чиқиш сигнали (9.1), кириш сигналини қайта тиклаш хатолиги (9.2) ёки вектор шаклида (9.5) формулалар орқали аниқланади.

Оптимал фильтрлаш масаласини ечиш учун фильтрнинг чиқиш намунавий сигналини қайта тиклаш хатолиги ўртача квадратик қийматининг минимал қийматини таъминловчи $\{w_n\}$ коэффициентлари аниқланади, бу ҳолда

$$J(\{w_n\}) = \sum_{k=0}^{K-1} |e(k)|^2 \quad \rightarrow \min . \tag{9.28}$$

Бунинг учун (9.5) формулани матрица шаклига ўтиш, чиқиш сигнали вектор-устунлари – $\mathbf{y}$ ва кириш сигналини қайта тиклаш хатолиги – $\mathbf{e}$ ни аниқлаймиз:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}^T\mathbf{w}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}^T\mathbf{w}, \tag{9.29}$$

бунда, $\mathbf{d}$ – намунавий сигнал оний қийматлари вектор-устуни ва $\mathbf{X}$ – матрица устунлари кечиктириш линияси турли трактларидаги қийматлари:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ ... \\ d(K-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = [\mathbf{x}(0)\mathbf{x}(1)..\mathbf{x}(N-1)].$$

Хатоликнинг энг кичик қийматига эришиш учун

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{e}^T\mathbf{e} \rightarrow \min \tag{9.30}$$

бўлиши керак, бунинг учун $\nabla J(\mathbf{w}) = -2\mathbf{X}\mathbf{d} - 2\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{w} = 0$ шарти бажарилиши талаб этилади. Фильтр оптимал бўлиши учун қуйидаги шартни бажариш керак:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}\mathbf{X}\mathbf{d} \tag{9.31}$$

бўлади, яъни (9.31) ифода (9.12) ифодага ўхшаш бўлиб, статистик маънода оптимал бўлган Винер фильтрини эслатади. Ҳақиқатда ҳам агар $(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}/K$ сигнални вақт бўйича ўртачалаштирилган ягона кузатиш натижасида олинган корреляцион матрицасининг баҳоси деб ҳисобласак ва $\mathbf{X}\mathbf{d}/K$ ни намунавий сигнал ва кечиктириш линияси чиқишидаги сигнал билан ўзаро корреляция функцияси деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда (9.12) ва (9.31) формулалар бир хил мазмунга эга бўлади.

RLS адаптив алгоритми. Сигналларга рақамли фильтрларда ишлов беришда кириш сигналининг ҳар бир k-чи оний қиймати аниқланганда (9.31) фомула орқали фильтр коэффициентларини ҳисоблаш мумкин. Аммо бу усулдан фойдаланиш ҳисоблашлар ҳажмининг ниҳоятда катталашишига олиб келади. Ҳақиқатда ҳам ҳар бир одим (қадам)да $\mathbf{X}$ матрица ўлчами катталашади, бундан ташқари ҳар бир матрица учун тескари матрица $(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}$ қийматларини қайта ҳисоблаш талаб этилади. Ҳисоблашлар ҳажмини ҳар бир одимдан сўнг $\mathbf{X}$ матрицага яна бир янги устун қўшиш ва $\mathbf{d}$ векторга янги бир ташкил этувчи қўшиш керак бўлади. Натижада ҳисоблашларни рекурсив ташкил этиш имконияти пайдо бўлади. Бу алгоритм энг кичик қийматни рекурсив ҳисоблаш методи деб номланади.

RLS адаптив алгоритмидан фойдаланилганда кириш сигналининг ҳар бир оний қийматлари олингандан сўнг қуйидаги амалларни бажариш керак:

1. Кириш сигналининг навбатдаги $\mathbf{x}(k)$ оний қийматлари олингандан сўнг фильтрнинг навбатдаги $\mathbf{w}(k-1)$ коэффициентларидан фойдаланиб фильтрлаш ва чиқишидаги намунавий сигнал хатолиги ҳисобланади:

$$y(k) = \mathbf{x}(k)^T\mathbf{w}(k-1), \qquad e(k) = d(k) - y(k). \tag{9.32}$$

2. Кучайтириш коэффициентлари вектори устунлари ҳисобланади. Бунда ҳар бир навбатдаги ҳисоблашларда кучайтириш коэффициенти $\mathbf{K}$ нинг қиймати қайтадан ҳисобланади, яъни ҳисоблаш рекурсив бўлмайди, сўнгра икки ҳисоблашларда каср махражи скаляр катталик бўлади (матрица эмас):

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}{1 + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}. \tag{9.33}$$

3. Сигнал тескари корреляция матрицаси баҳосини янгилаш амали бажарилади:

$$\mathbf{P}(k)=\mathbf{P}(k-1)-\frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T\mathbf{P}(k-1)}{1+\mathbf{x}(k)^T\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}. \tag{9.34}$$

4. Фильтр коэффициентлари янгиланади:

$$\mathbf{w}(k)=\mathbf{w}(k-1)+\mathbf{K}(k)e(k). \tag{9.35}$$

Навбатдаги вазифа $\mathbf{P}$ матрица ва $\mathbf{w}$ векторнинг рекурсив янгиланадиган бошланғич қийматларига нисбатан аниқлик киритишдан иборат. Одатда фильтр коэффициентлари вектори $\mathbf{w}$ алгоритми бўйича амални бажаришдан аввал ноллар билан тўлдирилади. $\mathbf{P}$ матрицани таҳлил қилиш шуни кўрсатадики, кечиктириш линияси кириш сигналлари оний қийматлари билан тўлдирилгандан сўнг, ҳисоблаш натижаси бошланғич шартларга боғлиқ бўлмайди, агарда

$$\mathbf{P}(-1)=\begin{matrix}\infty & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \infty & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \infty & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \infty\end{matrix}. \tag{9.36}$$

Амалда матрица диагонали катта мусбат қийматлар билан тўлдирилади, мисол учун уни $100/\sigma_x^2$ га тенг қилиб олиш тавсия этилади.

LMS алгоритмига қараганда RLS алгоритми нисбатан кўп ҳисоблаш амалларини бажаришни талаб қилади. Фильтр коэффициентларини янгилаш учун ҳисоблашларни оптимал ташкил этилганда $2{,}5N^2+4N$ жуфт "кўпайтириш ва қўшиш" амалларини бажариш талаб этилади. Бунда ҳисоблашларни оптимал ҳисоблаш деганда $\mathbf{P}$ матрицанинг симметрик эканлигини эътиборга олиш назарда тутилган. Шундай қилиб, RLS алгоритмида бажариладиган амаллар сони фильтр тартибига боғлиқ квадратик қонун бўйича кўпайиб боради. Аммо RLS алгоритмидан фойдаланилганда LMS алгоритмига қараганда тенгликка интилиш тезроқ амалга ошади. RLS алгоритми ҳар бир одим (қадам)да фильтр коэффициентлари (9.31) формулага мос келувчи оптимал қийматларга эга бўлади, сигналга ишлов бериш бошида ўтиш жараёни $\mathbf{P}$ матрица баҳосини рекурсив ҳисоблашга ва кечиктириш линиясининг кириш сигнали оний қийматлари билан аста-секин тўлишига боғлиқ.

Экспонента қонуни бўйича унутиш. (9.28) ва (9.30) формулаларда хатолик қийматларига сигнал узатиш вақти давомида бир хил талаб қўйилади. Натижада кириш сигнали статистик қийматлари вақт давомида ўзгариши фильтрлаш сифатининг ёмонлашишига сабаб бўлади. Фильтрга кириш сигналининг ностационарлигини кузатиш имкониятини бериш учун (9.28) формулага экспоненционал қонун бўйича унутиш имкониятини бериш, яъни хатолик сигнали аввалги қийматларини экспонента бўйича кичиклаштириш коэффициентини киритиш керак бўлади:

$$J(\mathbf{w})=\sum_{k=0}^{K-1}\lambda^{K-1-k}|e(k)|^2, \tag{9.37}$$

бунда λ – унутиш коэффициенти ($0<\lambda\le 1$).

Экспонента бўйича унутишдан фойдаланилганда (9.33) ва (9.34) формулалар қуйидаги кўринишни оладилар:

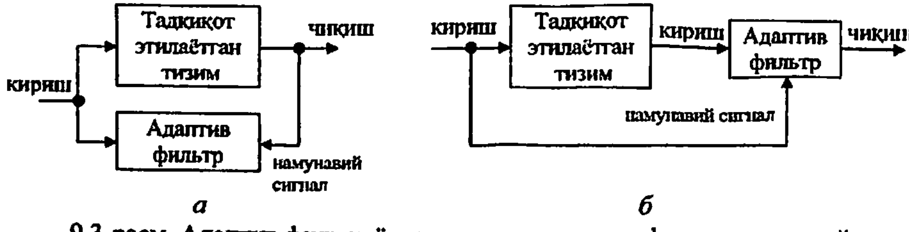
$$\mathbf{K}(k)=\frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}{\lambda+\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(n)},$$

$$\mathbf{P}(k)=\frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{P}(k-1)-\mathbf{K}(k)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{P}(k-1)\right). \tag{9.38}$$

9.3. Адаптив фильтрлардан амалий фойдаланиш

Адаптив фильтрлардан сигналларга ишлов бериш билан боғлиқ тизимларда кенг фойдаланилади. Адаптив фильтрлашни амалга ошириш идентификациялаш масаласини ечиш, яъни тизимнинг баъзи характеристикаларини аниқлаш орқали амалга оширилади. Идентификациялашни амалга оширишнинг икки: тўғри ва тескари усули мавжуд. Биринчи ҳолатда адаптив фильтр тадқиқот этилаётган тизимга параллел уланади (9.3а-расм). Бунда кириш сигнали тадқиқот этилаётган тизим ва адаптив фильтр учун умумий бўлади, чиқиш сигнали эса адаптив фильтр учун намунавий сигнал вазифасини бажаради. Адаптацияланиш жараёнида фильтрнинг вақт ва частота характеристикалари тадқиқот этилаётган тизимнинг мос характеристикаларига интилади.

Иккинчи ҳолатда, тескари идентификация усулидан фойдаланилганда адаптив фильтр тадқиқот этилаётган тизимга кетма-кет уланади (9.3б-расм). Бу усулда тадқиқот этилаётган тизимнинг чиқиш сигнали адаптив фильтр киришига берилади, тизим кириш сигнали эса адаптив фильтр учун намунавий сигнал вазифасини бажаради.

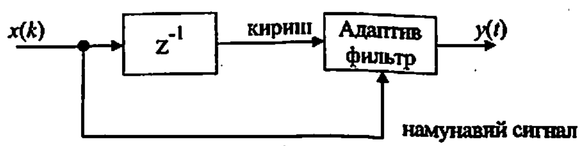


9.3-расм. Адаптив фильтр ёрдамида тизим идентификацияси: *а* – тўғри, *б* – тескари.

Шундай қилиб, адаптив фильтр тадқиқот этилаётган тизим таъсирини – бузилишларни бартараф этиб, бирламчи кириш сигналини тиклайди. Энди умумлашган схемалардан адаптив фильтрлардан фойдаланиб, аниқ бир вазифани бажарувчи қурилмаларни кўриб чиқамиз.

9.3.1. Чизиқли башоратлаш

Башоратловчи фильтрлар сигналнинг аввалги оний қийматлари асосида ўз чиқишларида ҳақиқий кириш сигналидан энг кам ўртача квадратик хатолик билан фарқланувчи сигнални тиклайди. Ушбу вазифани биз кўриб ўтган Винер фильтри ҳам бажариши мумкин, бунда намунавий сигнал сифатида сигналнинг жорий оний қийматидан ва фильтр кириш сигнали сифатида бир тактга кечитирилган сигналдан фойдаланилади. Адаптив алгоритмлар иш жараёнида Винер оптимал ечимини таъминлашга интиладилар. Шунинг учун чизиқли башоратлаш масаласини ечиш учун структуравий схемаси 9.4-расмда келтирилган адаптив фильтрдан фойдаланиш мумкин. Адаптация (мослашиш) жараёнида фильтр коэффициентлари авторегрессия модели коэффициентларига интилади, натижада хатолик сигнали ушбу моделни қўзғатувчи "оқ шовқин" моделини беради.

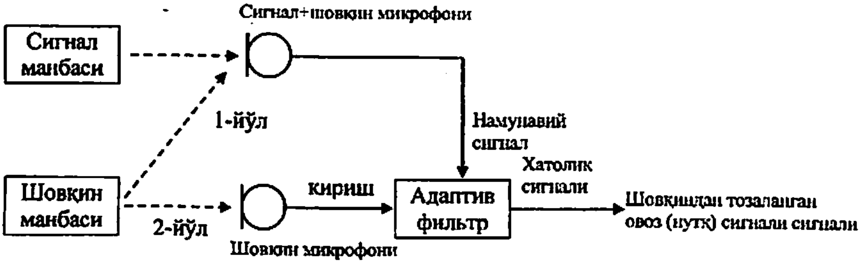


9.4-расм. Адаптив фильтр ёрдамида чизиқли башоратлаш.

9.3.2. Шовқинни бартараф этиш

Мисол учун самолётни бошқарувчиларни – учувчиларини ёки трактор ҳайдовчисини нутқ алоқа тизими билан таъминлаш керак бўлсин. Бу ҳолда, табиийки, микрофон орқали қабул қилинаётган бошқарувчи фойдали товуши катта сатҳли двигатель шовқини таъсирида бўлади. Бу ҳолда ушбу шовқин таъсирини тўғридан-тўғри йўқотиш мумкин эмас, аммо унинг таъсирини йўқотиш, камайтириш учун двигателга ёки бошқа манбага яқин масофага микрофон ўрнатиб шовқин сигнали намунасини олиш мумкин. Маълумки, ушбу шовқин сигналини овоз ва шовқиндан иборат сигналдан оддий усулда айириб, шовқинни бартараф этиш мумкин эмас, чунки улар микрофонларгача турли масофани босиб ўтадилар ва турлича бузилишлар оладилар (9.5-расм). Аммо ҳар икки шовқин ҳам тасодифий жараён бўлиб, улар ўзаро корреляция – боғлиқликка эга бўладилар. Чунки уларнинг манбалари ҳар икки шовқин учун умумий – ягона. Шу билан шовқин сигнали овоз сигнали билан корреляцияга эга эмас, бир-бирига боғлиқ эмас.

Адаптив фильтр ёрдамида сигнал+шовқинни микрофонгача тўғри идентификациялаш амали бажарилади. Адаптив фильтр кириш сигнали вазифасини қўшимча шовқин микрофони чиқишидаги сигнал бажаради (9.5-расмда – шовқин микрофони), намунавий сигнал вазифасини сигнал+шовқин аралашмаси сигнали бажаради (9.5-расм, асосий микрофон).



9.5-расм. Адаптив фильтр ёрдамида шовқинни бартараф этиш.

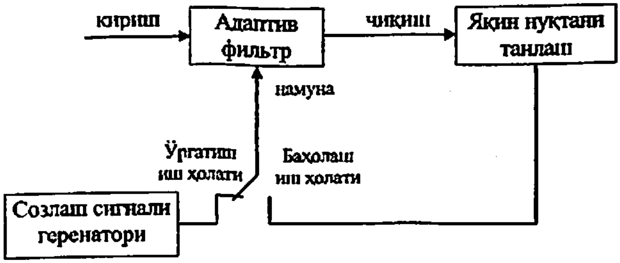
Адаптив фильтр кириш сигналини шундай ўзгартирадики, натижада у намунавий сигналга (ўртача квадратик хатолик билан) яқинлашади. Фильтр киришидаги сигнал+шовқин аралашмасининг фақат шовқин ташкил этувчи қисми билан намунавий сигналнинг фақат шовқин ташкил этувчиси корреляцияга эга, боғлиқликка эгалиги учун адаптация жараёни охирида фильтр чиқишида шовқиннинг баҳоси ҳосил бўлади. Хатолик сигнали адаптив фильтр чиқиш сигнали ва намунавий сигал орасидаги фарқ шаклида аниқланади ва у шовқиндан тозаланган овоз товушига тенг бўлади.

Юқорида келтирилган методдан радиотехника, радиоалоқа ва сигналларга ишлов бериш қурилмаларида ҳам фойдаланиш мумкин.

9.3.3. Алоқа канали частоталар характеристикасини тўғрилаш

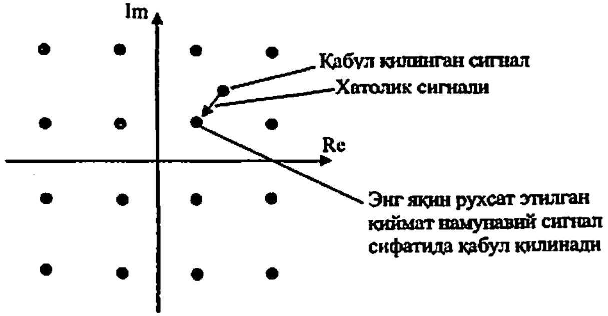
Алоқа канали орқали сигнал узатилганда реал шароитларда кириш сигнали шакли албатта қисман бузилади. Бу бузилишлар натижасида рақамли алоқа тизимлари орқали дискрет хабарларни узатишда хатоликлар келиб чиқишига сабаб бўлади. Ушбу хатоликларни йўқотиш (ёки қисман камайтириш) учун алоқа каналининг сигналга таъсирини йўқотиш (камайтириш) талаб этилади, бунинг учун тескари идентификациялаш муаммосини ечиш керак бўлади (9.3б-расм). Алоқа канали таъсирида сигналлар бузилишини умуман йўқотиш (ёки камайтириш) учун, унинг частоталар характеристикасини тўғрилаш (тузатиш) керак бўлади. Ушбу вазифани бажарувчи тўғриловчи фильтрлар эквалайзерлар деб аталади.

Адаптив фильтрлардан эквалайзерлар сифатида фойдаланилганда намунавий сигнални олиш муаммоси юзага келади. Бу муаммо алоқа канали орқали маълумотлар узатишдан олдин, у орқали махсус созловчи сигналларни узатиш орқали ечилади. Ушбу созловчи сигнал сифатида "1" ва "0" лар тасодифийсимон кетма-кетлигидан фойдаланилади. Созловчи сигнални шакллантириш алгоритми кўп ҳолларда қайдлаш томонида маълум бўлади ва уни қабуллаш томонида мустақил генерациялаш ва ундан намунавий сигнал сифатида адаптив фильтрни бошқариш (ўргатиш, ўқитиш) учун фойдаланиш мумкин. Бу иш ҳолати адаптив фильтрни бошқариш (ўргатиш, ўқитиш) иш ҳолати деб аталади (9.6-расм).



9.6-расм. Алоқа канали частоталар характеристикасини адаптив фильтр ёрдамида тўғрилаш.

Алоқа канали орқали созлаш сигнали узатиш тугаллангандан сўнг асосий маълумотларни узатиш иш ҳолатига ўтилади. Бунда қабуллаш қурилмаси кириш сигналини баҳолаш иш ҳолатида бўлади. Намунавий сигнални олиш учун рақамли алоқа тизимларида сигналларнинг шакл (кўриниш)лари чеклангангидан фойдаланилади. Навбатдаги оний қиймат қабул қилингандан сўнг унга яқин бўлган рухсат этилган қиймат қидириб топилади. Бу сигналдан намунавий сигнал сифатида фойдаланилади. Ушбу сигнал ва қабул қилинган сигнал орасидаги фарқ хатолик сигнали бўлиб, ундан адаптивлаштириш учун фойдаланилади. 9.7-расмда юқоридаги фикрлар 16-ҳолатли квадратура манипуляцияли сигнал мисолида акс эттирилган.

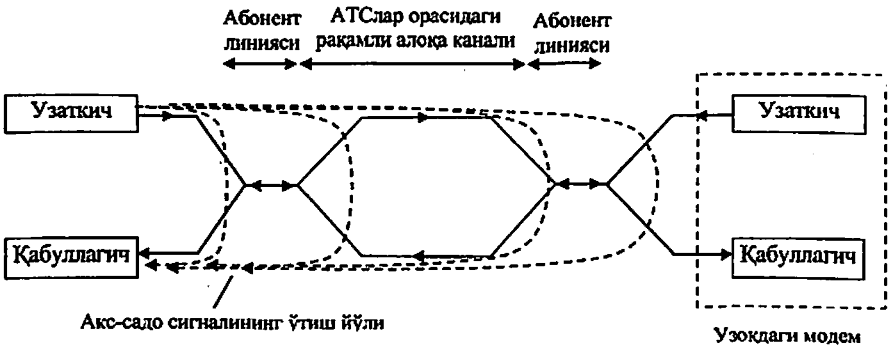


9.7-расм. Баҳолаш иш ҳолатида намунавий сигнални ва хатолик сигналини шакллантириш.

Эквалайзер бошқариш иш ҳолатида созлангандан сўнг, фильтр чиқишидаги шовқин шундай катталикка эга бўлиши мумкинки, энг яқин турган рухсат этилган нуқта сақланиб қолади (хатолик эҳтимоллиги кичик), бу иш ҳолатида адаптив фильтр ўз баркарорлигини саклаб қолади.

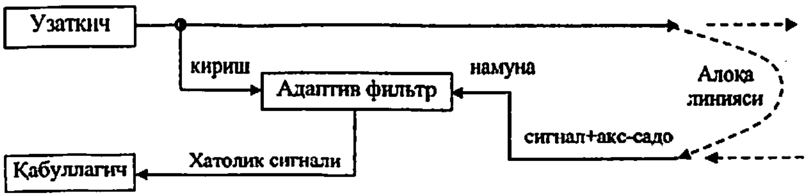
9.3.4. Акс садони бартараф этиш

Ушбу методдан худди алоқа каналлари частоталар характеристикасини тўғрилаш методидек замонавий модемларда кенг фойдаланилади. Катта тезлик билан ишловчи модемлардан дуплекс иш ҳолатида – бир вақтнинг ўзида сигнал узатиш ва қабуллашда фойдаланилади. Дуплекс иш ҳолатида сигналларни узатиш ва қабуллашда ягона – умумий частоталар полосасидан фойдаланилади. Бу иш ҳолатида узатилаётган сигнал ушбу станциянинг қабуллаш қурилмасига тўғридан-тўғри таъсир қилиб, унинг иш ҳолатига халақит беради. Ушбу узатиш станцияси нурлатаётган сигнал турли йўллар билан тарқалиши ва турлича бузилиши мумкин (9.8-расм). Бу акс-садо сигналини адаптив фильтр ёрдамида йўқотиш мумкин. Бунда акс-садо тарқалиш трактини тўғри индетификациялаш усулидан фойдаланиш мумкин.



9.8-расм. Акс-садо сигналининг шаклланиши.

Адаптив фильтр киришига узатиш қурилмаси модеми сигнали таъсир қилади ва намунавий сигнал сифатида акс-садоли қабулланган сигналдан фойдаланилади (9.9-расм). Адаптив фильтр акс-садо сигнал баҳосини шакллантиради ва хатолик сигнали акс-садодан тозаланган қабул қилинаётган фойдали сигналга мос бўлади.



9.9-расм. Адаптив фильтр ёрдамида акс-садони йўқотиш тизими структуравий схемаси.

Акс садони йўқотиш тизими тўғри ишлаши учун узатилаётган ва қабул қилинган сигналлар ўзаро корреляцияси – боғлиқлиги бўлмаслиги керак. Бунинг учун узатиш қурилмаси модемига берилаётган дискрет маълумотлар дастлаб скремблерлаш жараёнидан ўтказилади, яъни псевдотасодифий битлар кетма-кетлигига алмаштирилади. Бунда икки бир-бири билан бирга ишловчи модемларда турли скремблерлардан фойдаланали, натижада улар узатилаётган сигналларнинг бир-бири билан корреляцияси бўлмаслиги таъминланади. 9.9-расмда келтирилган структуравий схема асосида акс-садони йўқотиш методидан ҳамма замонавий модемларда фойдаланилади.

Назорат саволлари

1. *Қандай фильтр адаптив фильтр деб аталади?*
2. *Адаптив фильтр структуравий схемасини чизинг ва унинг ишлаш принципини сўзлаб беринг.*
3. *Энг кичик ўртача квадратик хатолик деганда қандай хатолик назарда тутилади?*
4. *Қандай фильтр Винер оптимал фильтри деб аталади?*
5. *Рақамли фильтрларда хатолик сигнали шаклланиш жараёнини унинг структуравий схемаси (9.2-расм) ёрдамида тушунтириб беринг.*
6. *Адаптив фильтрлашда намунавий сигнал қандай вазифани бажаради?*
7. *Винер-Хопф фильтрини ифодаловчи ифодани ёзинг ва унинг ишлаш принципини тушунтириб беринг.*
8. *Адаптив фильтрлашда энг кичик ўртача квадратик хатоликни таъминловчи LMS алгоритми ҳақида тушунча беринг.*
9. *LMS алгоритми қандай афзалликка ва камчиликларга эга?*
10. *Оптимал фильтрлашнинг детерминантли усули ҳақида тушунтириш беринг.*
11. *Оптимал RLS адаптив усулидан фойдаланилганда қандай амалларни бажариш керак бўлади?*
12. *LMS ва RLS алгоритмларини бир-бири билан таққосланг, улар нисбатан қандай афзаллик ва камчиликларга эга?*
13. *Оптимал фильтрлашда экспонента қонуни билан унутиш усулидан қандай мақсадда фойдаланилади?*

14. Идентификациялаш деаганда қандай жараённи тушунасиз ва у адаптив фильтрлар ёрдамида қандай амалга оширилиши мумкин?

15. Адаптив фильтр ёрдамида чизиқли башоратлаш қурилмаси структуравий схемасини чизинг ва унинг ишлаш принципини тушунтиринг.

16. Адаптив фильтр ёрдамида шовқинни бартараф этиш усули ҳақида тушунтириш беринг.

17. Қандай ҳолларда эквалайзерлардан фойдаланилади?

18. Адаптив фильтр ёрдамида алоқа канали частоталар характеристикасини тўғрилашдан нима мақсадда фойдаланилади?

19. Адаптив фильтр ёрдамида акс-садо сигналини йўқотиш тизими структуравий схемасини чизинг ва ишлаш принципини айтиб беринг.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Рабинер Л., Гоулд. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Под ред. / Ю.Н. Александрова. – М.: Издательство МИР, 1978.
2. Голд Б., Рейдер. Цифровая обработка сигналов. Под ред. / А.М. Трахтмана – М.: Сов Радио, 1973.
3. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Бином-ПРЕСС, 2006.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2007,
5. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов – М.: Радио и связь, 2004.
6. Гадзиковский В.И. Проектирование цифровых фильтров – М.: Радио и связь, 2008.
7. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов – М.: Радио и связь, 1990.
8. Оппенгейм А.В., Шеффер Р.В. Цифровая обработка сигналов – М.: Связь, 1979.
9. Скляр Бернард. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение – М.: Издательский дом Вильямс, 2007.
10. Прокс Дж. Цифровая связь – М.: Радио и связь, 2002.
11. Юкио Сато. Обработка сигналов. Первое знакомство – М.: Изд. Дом «Додэка-XXI».
12. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы – М.: Радио и связь, 2002.
13. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы – М.: Высшая школа, 2000.
14. Абдуазизов А. Электр алоқа назарияси – Т.: Фан ва технологиялар, 2011.
15. Карташашев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров – М.: Высшая школа, 1982.
16. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: Практический подход. 2-ое изд.: Изд. дом Вильямс, 2004.
17. Степанов А.В., Матвеев С.А. Методы компьютерной обработки сигналов систем радиосвязи – М.: Солон-пресс, 2003.
18. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Политехника, 1998.
19. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования – СПб.: Политехника, 1999.
20. Мала С. Вейвлеты в обработке сигналов – М.: Мир, 2005.

МУНДАРИЖА

Амонжон Абдумаджидович Абдуазизов
Исмаил Рустамович Фазилжанов
Ярашбек Тохирбаевич Юсупов

СИГНАЛЛАРГА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

Ўқув қўлланма ТАТУнинг
Илмий-услубий Кенгаши томонидан
чоп этишга тавсия этилган
2012 йил 29 январ 47 сонли баённома.

Маъсул муҳаррир: А.А. Абдуазизов
Муҳаррир: С.Х. Абдуллаева

Бичими 60х84 1/16. Босма табоғи 8.25
Адади 100. Буюртма №145.
Тошкент ахборот технологиялари университети
"Нашр-матбаа" бўлимида чоп этилди.
Тошкент ш., Амир Темур кўчаси, 108-уй.