A. GAZIYEV,
I. ISRAILOV,
M. U.YAXSHIBOYEV

MATEMATIK ANALIZDAN MUSTAQIL ISHLAR

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\bigcup$$

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$$

1 - QISM

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

A. GAZIYEV, I. ISRAILOV, M. U.YAXSHIBOYEV

MATEMATIK ANALIZDAN MUSTAQIL ISHLAR

1 - QISM

(O'quv qo'llanma)

O'zbekiston Respublikasi
Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan
o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan.

TOSHKENT – 2018

UO‘K: 517(075.8)
KBK: 22.161
G 14

G 14. A. Gaziyev, I. Israilov, M. Yaxshiboyev. Matematik analizdan mustaqil ishlar, 1-qism. O‘quv qo‘llanma. – T.:«Aloqachi», 2018. 432 bet.

ISBN 978–9943–5145–3–9

O‘quv qo‘llanma ikki qismdan iborat bolib, unda fanning amaldagi o‘quv rejasida belgilangan, auditoriyada va auditoriyadan tashqarida talabalar bajarishi shart bo‘lgan mustaqil ishlar va ularning bajarilish tartibi hamda baholash mezoni o‘z ifodasini topgan. Mazkur 1-qismda «Matematik analiz» fanining to‘plamlar, haqiqiy sonlar, sonlar ketma-ketligi va uning limiti, funksiya va uning limiti, uzluksizligi va tekis uzluksizligi, funksiyaning hosilasi va differensiali, funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiali, differensial hisobning asosiy teoremalari, Lopital qoidalari va Teylor formulasi, funksiyani to‘la tekshirish, aniqmas integral, aniq integral va uning tatbiqlari, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar kabi bo‘limlari bo‘yicha talabalar tomonidan o‘quv jarayonining 1-kurs 1-, 2-semestrlarida ajratilgan soatlarda bajarilishi lozim bo‘lgan barcha ishlar turlari bo‘yicha materiallar qamrab olingan.

Qo‘llanma bakalavriatning 5130100 – matematika, 5130200–amaliy matematika va informatika, 5440200–mexanika va texnik oliy ta’lim muassasalarining matematika chuqur o‘rganiladigan, 5330500– kompyuter injiniring (“Kompyuter injiniring”, “AT-servis”), 5330600–dasturiy injiniring, 5350400–AKT sohasida kasb ta’limi, 5350100–telekommunikatsiya texnologiyalari, 5330300–axborot xavfsizligi (sohalar bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishlari talabalari hamda o‘qituvchilar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, u amaldagi davlat ta’lim standartlari va «Matematik analiz» fani namunaviy dasturiga asosan yozildi.

UO‘K: 517(075.8)
KBK: 22.161

Taqrizchilar: U.E. Mamirov – SamDU matematik analiz kafedrasi dotsenti;
U.X. Narzullayev – TATU Samarqand filiali dotsenti.

ISBN 978–9943–5145–3–9

MUNDARIJA

KIRISH

O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi tomonidan 1997-yilda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonun hamda "Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi" Respublikamiz uzluksiz ta'lim tizimida inqilobiy islohotlarga asos bo'ldi. Keyingi yillarda respublikamizda oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirishga oid mamlakatimiz Prezidenti va Vazirlar Mahkamasining qator qarorlari qabul qilindi hamda ularning ijrosi ta'minlanmoqda. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 20-apreldagi "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi Qarorida oliy ta'lim tizimini yanada takomillashtirish va kompleks rivojlantirish bo'yicha eng muhim vazifalardan biri–yangi avlod o'quv adabiyotlarini yaratish va ularni oliy ta'lim muassasalarining ta'lim jarayoniga tatbiq etish, oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy o'quv, o'quv-metodik va ilmiy adabiyotlar bilan ta'minlash, shu jumladan, eng yangi xorijiy adabiyotlar sotib olish va tarjima qilish, axborot-resurs markazlari fondlarini muntazam yangilab boorish ekanligi ko'rsatib o'tilgan.

Ayniqsa, oily ta'limning ikki bosqichli tizimi shakllanganligi hamda bosqichlarda amal qilayotgan o'quv rejalarida talabalarning umumiy o'quv yuklamasining yarmi yoki undan ko'prog'i mustaqil ishlashga ajratilganligi o'quv jarayonining tashkiliy qismi bo'yicha yangi vazifalar qo'ymoqda. Ulardan biri – talabalarning har bir fan bo'yicha barcha turdagi mustaqil ishlari mazmini va ularni bajarish bo'yicha o'quv-uslubiy adabiyotlar yaratish hisoblanadi.

Ushbu o'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim muassasalarida talabalar mustaqil ishi, uni tashkil yetish va nazorat qilish bo'yicha amaldagi me'yoriy hujjatlar hamda ularning ijrosi bo'yicha mavjud ilg'or tajribalar bilan bir qatorda, xorijiy mamlakatlardagi nufuzli oily ta'lim muassasalarida mustaqil ishni bajarish va nazorat qilish bo'yicha amalga oshirilgan ishlarni tahlil qilish natijasida yuzaga keldi [4, 31, 33-44]. Jumladan, [36] Rossiya Federasiyasi va undan tashqaridagi oliy ta'lim muassasalarida talabalarning bandligi: ish tajribasi va foydali tajribaning o'zaro aloqasi, aniq mustaqil ish va uning nazorati kabilarga bag'ishlangan [39]. AQSH Prinston universiteti matematika fakulteti talabalari uchun mustaqil ish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalardan iborat bo'lib, unda mustaqil ishning turlari va uning bajarilish muddati, bajarilishi darajasining nazorati hamda tashkiliy mulohazalar o'z aksini topgan [41] Talaba o'qish jarayonining markazida bo'lishini ta'minlaydigan o'qish va o'qitish uslubining nazariyasi va amaliyoti asoslariga bag'ishlangan bo'lib, u Yevropa talabalar uyushmasi tomonidan Buxarestda tashkil etilgan konferensiya (2010-yil) materiallarini o'z ichiga olgan [43]. Texnika yo'nalishidagi oliy ta'lim muassasalari talabalarining mustaqil ishi psixologik-pedagogik tadqiqotiga bag'ishlangan bo'lib, unda talabalar mustaqil ishi, mustaqil ishni bajarishga tayyorgarlik saviyasi, mustaqil ishni bajarishga zarur bilimlar tizimi taqdimoti, o'quvchi va talabalarining hamkorligi, hamda fanni o'zlashtirishning nazorati kabilar o'z ifodasini topgan.

Mazkur qo'llanma, ikki qismdan iborat va shu sohadagi dastlabki urinishlardan bo'lib, uning birinchi qismi bakalavriatning "Matematika", "Mexanika", "Amaliy matematika va informatika", "Kompyuter injiniring ("Kompyuter injiniring", "AT-servis"), "Dasturiy injiniring", "AKT sohasida kasb ta'limi", "Telekommunikatsiya texnologiyalari", "Axborot xavfsizligi (sohalar bo'yicha)" yo'nalishlari talabalari "Matematik analiz" fanidan o'quv jarayonining 1-kurs 1- va 2- semestrlarida bajarishi rejalashtirilgan mustaqil ishlarning barcha turlari bo'yicha materiallarni qamrab olgan.

Qo'llanmada «Matematik analiz» fanning quyidagi bo'limlari bo'yicha mustaqil ishlar topshiriqlari keltirilgan: *to'plamlar; haqiqiy sonlar; sonlar ketma-ketligi va uning limiti; funksiya va uning limiti; funksiyaning uzluksizligi va tekis uzluksizligi; funksiyaning hosilasi va differensiali; funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiali; differensial hisobning asosiy teoremalari; Lopital qoidalari va Teylor formulasi; funksiyani to'la tekshirish;aniqmas integral; aniq integral va uning tatbiqlari; ko'p o'zgaruvchili funksiyalar.*

Har bir mustaqil ish: 1) ko'rsatilgan mavzular bo'yicha asosiy tushunchalar, teorema va tasdiqlarning qisqacha bayoni; 2) mavzular bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari; 3) mavzular bo'yicha nazariy (muammoli) topshiriqlar; 4) mavzularga oid amaliy topshiriqlar kabi qismlardan iborat.

Ushbu qo'llanma bilan ishlash quyidagi tartibda bajariladi. Talaba, avvalo, mustaqil ishlarning o'quv jarayonidagi o'rni va ularga oid me'yoriy hujjatlar hamda uslubiy tavsiyalar keltirilgan, 1-ilovaning mazmuni bilan tanishadilar. So'ngra o'rganilayotgan mavzular bo'yicha asosiy ta'rif va tushunchalar, teorema va tasdiqlarni mazkur qo'llanma va 2-ilovada tavsiya etilgan adabiyotlardan o'rgangan holda, nazariy va o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblarni mustaqil o'rganishi (savollarga javoblarni qayerdan olish mumkinligi ko'rsatilgan) va nazariy topshiriqlarni yozma ravishda bajarishi ko'zda tutiladi.

Undan keyin talaba, 3-ilovadan foydalangan holda, mavzular bo'yicha amaliy topshiriqlarni bajarishga kirishishi mumkin. Amaliy topshiriqlar har bir talaba uchun alohida bo'lib, bir necha masalalarni o'z ichiga oladi va talabaga o'qituvchi tomonidan beriladi. Qo'llanmada o'qituvchiga har bir talaba bo'limdagi mavzularning har biridan kamida bittadan misol yecha olishiga ishonch hosil qilish imkoniyati yaratilgan, ya'ni har bir mavzu bo'yicha bitta yoki ikkita topshiriq (masala) berilgan bo'lib, ularning har biri 26 ta misolni o'z ichiga oladi, har bir mavzu bo'yicha 26-misol batafsil bayoni bilan yechilib, natija Maple tizimi vositasida tekshirildi. Bu esa, qo'llanmadagi berilgan topshiriqlarni uy vazifasi shaklidagi mustaqil ishga tavsiya qilish ham mumkinligini ko'rsatadi.

Qo'llanmaning ilovalar bo'limida eslatib o'tilganlardan tashqari, quyidagilar ham berilgan. 4-ilova fanning texnologik xaritasiga bag'ishlangan bo'lsa, 5-ilovada amaliyot darslari va uy vazifalari uchun topshiriqlar keltirilgan. Navbatdagi, 6-ilovada talabalar o'zlashtirishining oralik nazorati uchun savollar va yozma ish variantlari namunalari keltirilgan. 7- ilovada yakuniy nazorat savollari va yozma ish variantlari namunalari berilgan. 8-ilovada o'rganilgan bo'limlar va mavzular bo'yicha test savollari berilgan bo'lsa, oxirgi, 9-ilova talabalar uchun individual topshiriqlar variantlarini o'z ichiga olgan.

Mazkur qo'llanma mualliflarning ko'p yillik pedagogik faoliyatida "Matematik analiz" fanidan o'qigan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlari natijasida yuzaga kelgan bo'lib, uning mazmuni hamda tuzilishi haqidagi fikr-mulohazalar uchun oldindan minnatdorchilik bildiramiz.

Mazkur qo'llanma oliy ta'lim muassalarida mustaqil ishni tashkillashtirish va uning nazoratiga bag'ishlangan ilk urinishlardan bo'lib, u matematik analiz fani misolida yozilgan va undan boshqa fanlar bo'yicha o'xshash qo'llanmalar yozish uchun andoza sifatida foydalanish mumkin.

Qo'llanmadagi ilovalardan samarali foydalanishni ko'zda tutgan holda, quyidagi belgilashlar kiritilgan: ◊ **-2-ilova** (Fanning ma'ruzalar bo'yicha mazmuni (ishchi reja)); ▪ - **5-ilova** (Amaliyot darslari va uy vazifalari uchun topshiriqlar); • - mustaqil ishlardagi yakka topshiriqlarga qarash; ▶ - mustaqil ishlardagi muammoli topshiriqlarga qarash; o-**9-ilova** (Mustaqil bajariladigan kontrol ishlar).

Mualliflar.

1. FANNING MAQSAD VA VAZIFALARI

1.1. Fanning maqsadi

Fanning maqsadi – talabalarni funksiyalarni tekshirishning analitik usullariga, hosilalar, integrallar, yuzalar, hajmlarni hisoblash, qatorlar, xosmas integrallar yaqinlashishini aniqlashga o'rgatishdan iborat.

1.2. Fanning vazifalari

- talabalarni nazariy va amaliy masalalarni yechishda kerakli matematik apparat asoslari bilan tanishtirish,
- talabalarda matematik analiz bo'yicha adabiyotlarni mustaqil o'rganish ko'nikmalarini hosil qilish,
- talabalarda mantiqiy va algoritmik fikrlashni rivojlantirish,
- talabalarda o'z fikrlarini abstraktlashtirish va qat'iy (lo'nda) ifodalash ko'nikmasini tarbiyalash,
- talabalarda amaliy masalalarni matematik tilda ifodalash va ularni matematik tahlil qilish ko'nikmalarini hosil qilish.

2. FANNI O'ZLASHTIRISH BO'YICHA TALABLAR[1]

2.1. Fanni o'zlashtirish darajasi (saviyasi)

1. Sonli sistemalar, funksiyaning limiti, uzluksizligi, tekis uzluksizligi, differensiallanuvchiligi va differensial hisobning tatbiqlari, aniqmas va aniq integrallar, Riman integrali va uning tatbiqlari, sonlar ketma-ketligi, sonli qatorlar, funksional ketma-ketliklar va funksional qatorlarning yaqinlashishi hamda tekis yaqinlashishi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning va akslantirishlarning differensiallanuvchiligi, shartsiz va shartli ekstremum masalalari, parametrga bog'liq integrallar, xosmas integrallar, egri chiziqli, karrali va sirt integrallari, Stoks formulalari va maydonlar nazariyasi elementlari hamda Furye qatori haqida **tasavvurga ega bo'lishi;**

2. Haqiqiy sonlar nazariyasini, funksiya limitining xossalarini, uzluksiz funksiyalarning lokal va global xossalarini, differensiallashuvchi funksiyalar haqida asosiy teoremalarni, aniqmas integrallarni hisoblashni, aniq integralning xossalarini, sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlarini, ko'p o'zgaruvchili differensiallanuvchi funksiyaning xossalarini, oshkormas funksiyalar nazariyasi va uning natijalarini, egri chiziqli integrallarning xossalarini, Jordan o'lchovini, Fubini teoremasi va karrali

[1] Ushbu bandda fanning barcha bo'limlarini (1-4 semestrlar) o'zlashtirish bo'yicha talablar to'la keltirilmoqda.

integrallarda o‘zgaruvchilarni almashtirishni, sirtning yuzi va sirt integrallarining xossalarini, Grin, Gauss-Ostrogradskiy, Stoks formulalarini, Furye qatorlarining xossalarini, Furye almashtirishlarini **bilishi va ulardan foydalana olishi;**

3. Funksiyaning limitini hisoblash, funksiyani uzluksizlikka tekshirish, differensial hisobdan funksiyani tekshirishda foydalanish, boshlang‘ich funksiyalarni topish, aniq integralni yuzalarni, yoy uzunliklarini hisoblashga qo‘llash, sonli qatorlarning yaqinlashishini tekshirish, funksional ketma-ketliklar va qatorlarni tekis yaqinlashishga tekshirish, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning xususiy hosilalarini hisoblash, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni ekstremumga tekshirish, xosmas integrallarni, parametrga bog‘liq integrallarni hisoblash, egri chiziqli va karrali integrallarni hisoblash, Grin, Gauss-Ostrogradskiy, Stoks formulalarini qo‘llash, funksiyalarni Furye qatoriga yoyish, Furye almashtirishini hisoblash **ko‘nikmalariga ega bo‘lishi shart.**

2.2. Avval o‘rganilgan fanlar bilan bog‘liqligi

Maktab, akademik litsey va kollejlar matematikasi

3. FAN BO‘YICHA O‘QUV MASHG‘ULOTLARI TURLARI VA ULARNING HAJMI (SOATLARDA)

O‘quv mashg‘ulotlari turi	Jami	Semestrlar			
		1	2	3	4
Fan bo‘yicha umumiy soatlar hajmi	846	258	254	207	127
Auditoriya mashg‘ulotlari	416	126	124	102	64
Ma’ruzalar	210	62	60	54	34
Amaliy mashg‘ulotlar (seminarlar)	198	62	62	46	28
Laboratoriya ishlari (Seminarlar)	8	2	2	2	2
Mustaqil ish	430	132	130	105	63
Baholash turlari		J.n. O.n. Ya.n.	J.n. O.n. Ya.n.	J.n. O.n. Ya.n.	J.n. O.n. Ya.n.

4. FANNING MAZMUNI

4.1. Fanning bo'limlar bo'yicha mazmuni

1-bo'lim. To'plam. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Haqiqiy sonlar

To'plam tushunchasi. To'plamlar ustida amallar. To'plamlarni taqqoslash. Akslantirishlar. Akslantirishlarning turlari. Teskari akslantirishlar.

Ratsional sonlar to'plami va uning xossalari. Haqiqiy son tushunchasi (cheksiz o'nli kasrlar bo'yicha yoki kesim bo'yicha kiritilishi). Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari. Haqiqiy sonlar ustida amallar. Sonli to'plamlarning chegaralari. Haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi haqidagi teorema.

2- bo'lim. Sonlar ketma-ketligi

O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Sonlar ketma-ketligining limiti. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar orasidagi bog'lanishlar. Aniqmas ifodalar. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti. Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremalarning tatbiqlari. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass lemmasi. Koshi teoremasi. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari.

3- bo'lim. Funksiya. Funksiyaning limiti

Funksiya tushunchasi. Teskari funksiya. Elementar funksiyalar va ularning xossalari. Murakkab funksiya. Funksiyaning grafigi. Natural argumentli funksiyalar (sonlar ketma-ketligi). Natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi)ning limiti. Limitning xossalari. Monoton ketma-ketliklarning limiti. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi. Koshi teoremasi. Ixtiyoriy argumentli funksiya limiti ta'riflari. Funksiya limitining mavjudligi haqidagi teoremalar. Funksiyalarni solishtirish ($"O"$, $"o"$ – belgilar).

4- bo'lim. Funksiyaning uzluksizligi

Funksiya uzluksizligining ta'riflari. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar. Murakkab funksiyaning tuzilishi. Elementar funksiyalarning uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalarning xossalari. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi.

5- bo'lim. Funksiyaning hosilasi va differensiali

Funksiya hosilasining geometrik hamda mexanik ma'nolari. Hosilani hisoblash qoidalari va formulalari. Funksiyaning differensiallanuvchiligi. Funksiyaning differensiali. Taqribiy hisoblash formulasi. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Differensial hisobning asosiy teoremalari. Teylor formulasi.

6- bo'lim. Differensial hisobning ba'zi tatbiqlari

Hosila tushunchasidan foydalanib, funksiyaning o'suvchi hamda kamayuvchiligini aniqlash. Funksiyaning maksimumi va minimumi, ularni hosila yordamida topish. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Funksiyalarni to'liq tekshirish.

7- bo'lim. Aniqmas integrallar

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integrallar tushunchalari. Integralning sodda xosslari, sodda qoidalari. Aniqmas integral jadvali. Integrallash usullari. Ratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik va ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash.

8- bo'lim. Aniq integrallar

Aniq integralning (Riman integrali) ta'riflari. Aniq integralning mavjudligi va integrallanuvchi funksiyalar sinfi. Integralning xossalari va uni hisoblash. Integralni taqribiy hisoblash formullari. Aniq integralning geometriyaga, fizikaga, mexanikaga tatbiqlari.

9- bo'lim. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

R^m fazo va unda metrika tushunchasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya, uning karrali va takroriy limitlari. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi va tekis uzluksizligi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari, uning differensiallanuvchanligi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali. Ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyaning differensiallanuvchanligi. Yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilalari va differensiallari. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun aralash hosilalarning tengligi haqidagi teorema. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlari. Oshkormas funksiya tushunchasi. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema va uning xususiy hosilalarini hisoblash.

4.2. Fanning asosiy darslik, o'quv va o'quv-uslubiy qo'llanmalar bilan ta'minlanganlik darajasi

4.2.1. Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.

2. Aksoy A. G., Khamsi M. A. A problem book in real analysis. Springer, 2010.

3. Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. Matematik analizdan ma'ruzalar. I, II q. T.: "Voris-nashriyot", 2010.

4. Shoimqulov B. A., Tuychiyev T. T., Djumaboyev D. X. Matematik analizdan mustaqil ishlar. T.: "O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati", 2008.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1, 2, 3 т. М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

4.2.2. Qo'shimcha adabiyotlar

6. Sadullayev A., Mansurov X. T., Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Gulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. 1, 2, 3-q. T.: "O'qituvchi", 1995, 1995, 2000.

7. SHokirova X. R. Karrali va egri chiziqli integrallar. T.: "O'zbekiston", 1990.

8. Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу. М.: «Наука», 1997.

9. Canuto C., Tabacco A. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008.

10. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. 1, 2 т. М.: «Проспект», 2007.

11. Зорич В.А. Математический анализ. 1, 2 т. М.: «Наука», 1981.

12. Azlarov T. A., Mansurov X. T. Matematik analiz. 1, 2 q. T.: "O'qituvchi", 1994, 1995.

13. Кудряцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, 1, 2, 3 т. М.: «Наука», 2003.

14. Azlarov T.A., Mirzaahmedov M.A., Otaqo'ziyev D.O., Sobirov M.A., To'laganov S.T. Matematikadan qo'llanma, II q. T.: «O'qituvchi», 1990.

15. Alimov SH.O., Ashurov R.R. Matematik tahlil, ma'ruzalar matni. T.: 2007.

16. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.:Наука,1985.

17. Бруй И.Н., Гаврилюк А.В и др. Лабораторный практикум по математическому анализу. – Минск.: Выщейша школа, 1991.

18. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.– Задачи упражнения по математическому анализу, М.: Изд. МГУ, 1988.

19. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. 1,2.т. М.: "Наука" 1980.

20. A. Gaziyev, I.Isroilov, M.U.Yaxshiboyev. Matematik analizdan misol va masalalar, 1-qism (o'quv qo'llanma). T.: Turon-iqbol nashriyoti, 2009. 480 bet.

21. A. Gaziyev, I.Isroilov, M.U.Yaxshiboyev. Matematik analizdan misol va masalalar, 2-qism (o'quv qo'llanma). T.: «Fan va texnologiyalar» nashriyoti, 2012. 384 bet.

22. Кудрявцев Л.Д.Курс математического анализа.Т.1.,Т.2. М., 1981.

23. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике.- М.: Высш. шк., 1983.

24. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Голович Г.П. – Справочное пособие по математическому анализу, Киев.: «Высшая школа», 1984.

25. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. - М.: «Наука», 1970.

26. Матросов А. Maple-6. Решения задач высшей математики и механики. Петер.Санкт-Петербург, 2000.

27. Никольский С.М.Курс математического анализа.Т.1.,Т.2.М.: «Наука», 1983.

28. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

29. Архипов Г.И. Садовничий В.А. Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.- М., 2004.

30. Thomas' CALCULUS. Tenth Edition. - Boston, San Francisco, New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, Madrid….2001.

31. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2009 yil 14 avgustdagi 286-son buyrug'i.

32. A.Navoiy nomidagi Samarqand davlat universitetining "Talabalar mustaqil ishini tashkil etish" bo'yicha Nizomi.

33. "Talabalar mustaqil ishini tashkil etish" bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar. Tuzuvchilar: A.Solyeyev, H.Qurbonov. Samarqand, SamDU nashriyoti, 2012 yil, 63 bet.

34. O'zbekiston oliy ta'lim tizimida mustaqil ta'lim salohiyatini rivojlantirish. Uslubiy qo'llanma. Toshkent Vestminster universiteti

xodimlari tomonidan 2005–2006 yillarda amalga oshirilgan loyiha natijalari.T.,2006. -66 b.

35. Самостоятельная работа студентов. Методические рекомендации. Составители: Г.Г.Силласте, Е.Е.Письменная, Н.М.Белгарокова. Москва, Финансовый университет, 2013. - 35 с.

36. Самостоятельная работа студентов. Методические рекомендации.Составители: А.С.Зенькин,В.М.Кирдяев, Ф.П.Пильгаев, А.П. Лащ-Саранск.: Изд-во Морд.ун-та, 2009. - 35 с.

37. Дыбина О.В., Щетинина В.В. Построение системы организации самостоятельной работы бакалавров в ВУЗЕ // Научное мнение. 2013. № 3. С. 126–131.

38. Higher Education in Russia and Beyond / №1(3) / Spring 2015.

39. Independent work in the Mathematics Department (A guide for mathematics majors). http://blogs.princeton.edu/mathclub/guide/research/.

40. Princeton Department of Mathematics guide to independent work. With deadlines for academic year 2014–2015.

41. Student Centered Learning. An Insight Into Theory And Practice. European Students union. Bucharest, 2010, 47p.

42. Карпиевич Е.Ф. Самостоятельная работа студентов в современном университете: формы, содержание, управление. Материалы пятой международной научно-практической конференции (Минск, 24–25 марта 2005 г.) / Белорусский государственный университет. Центр проблем развития образования. Мн.: Пропилеи, 2005. 360 с.

43. Ефименко С.В. Управление самостоятельной работой студентов технического вуза. ISNN 1812-1853. Российский психологический журнал. 2011 том 8 № 1.

44. Листенгартен В.С. Самостоятельная деятельность студентов: Пособие для преподавателей вузов/ В.С.Листенгартен, С.М.Годник. - Воронеж, 1996.–94 с.

4.2.3 Davriy nashrlar

1. Математика в школе.
2. Matematika, fizika va informatika.
3. Uzluksiz ta'lim.

4.2.4 Internet resurslari

1. http://www.ziyonet.uz/
2. http://www.allmath.ru/
3. http://www.mcce.ru/
4. http://lib.mexmat.ru/

5. http://www.webmath.ru/
6. http://www.exponenta.ru/
7. http://www.google.uz.
8. http://www.edu.uz.

5. FANNING BO'LIMLARI VA MASHG'ULOT TURLARI (SOATLARDA) 1-SEMESTR

T/r	Fanning bo'limlari	Semestr	Haftalar	Jami	Auditoriya mashg'ulotlari va talabalarning mustaqil ishlari hamda ularning mehnat hajmi (soatlar miqdori)			O'zlashtirish-ning joriy (kunlik) nazorat (JN) shakli (semestrning haftalari bo'yicha). Oraliq-ning nazorat (ON) shakli (semestr bo'yicha)	Tavsiya qilingan adabiyot-lar va ilovalarga qarang
					Ma'ruzalar	Amaliy mashg'ulotlar	Mustaqil ish		
1	Bir o'zgaruvchili funksiyalarning limitlar nazariyasi va differensial hisobi.	1	1-18	256	62	62	132	Yakuniy nazorat yozma yoki test yoki og'zaki (1-semestr o'tilgan mavzular bo'yicha) shaklda bo'ladi	
1	**To'plam. To'plamlar ular ustida amallar va ularning xossalari. Haqiqiy sonlar.**	1	1-3	36	10	8	1- bo'lim bo'yicha mustaqil ishlar jami 18 soat		
							4	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	◊ 2-ilovadagi 294 bet va 1-mustaqil ishdagi. Asosiy tushunchalar va teoremalar 43–53-betlarga qarang

							4	2) Ratsional sonlarni cheksiz o'nli kasr shaklida tasvirlash *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	[10], 1-q., 29-40, 44-45 b.
							4	3) 1.2.1-1.2.23 nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	► 1-mustaqil ishdagi 62–63 betdagi (muammoli) topshiriqlar
							4	4) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadagi topshiriqlar 314 b
							2	5) **1.3.1–1.3.2** - amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 1-mustaqil ishdagi 64–68-betlardagi yakka topshiriqlar
2	**Sonlar ketma-ketligi.**	1	3-5	40	12	8	20	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga*	◊ 2-ilovadagi 294–295--betlar va 1-mustaqil ishdagi asosiy tushuncha-

								javob tayyorlash)	lar va teoremalar 53–60-betlarga qarang
								2) Geyne-Borel lemmasi (Konspektlash tirish).	[11], 1-q, 80-81 b., [5], 1-t., 181-152 b., [28], 245-246 b.
								3) **1.2.24–1.2.47**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	► 1-mustaqil ishdagi 63–64-betdagi (muammoli) topshiriqlar
								4) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadaqi topshiriqlar 314–315 b.
								5) **1.3.3–1.3.10**-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 1-mustaqil ishdagi 64–79-betlardagi yakka topshiriqlar
3	**Funksiya. Funksiyaning limiti.**	1	6-8	50	10	14	26	1)Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki*	◊ 2-ilovadagi 295–296-betlar va 2-mustaqil ishdagi asosiy tushuncha-

								yozma ishga javob tayyorlash)	lar va teoremalar 80–90-betlarga qarang
								2) Baza bo'yicha limit tushunchasi *Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	[11], 1-q., 137-141b.
								3) **2.2.11–2.2.20**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	▶ 2-mustaqil ishdagi 98–99-betdagi (muammoli) topshiriqlar
								4) Sinf va uy vazifasini bajarish	◘ 5-ilovadaqi topshiriqlar 315-317 b.
								5) **2.3.1,2.3.2–2.3.11**-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 2-mustaqil ishdagi 101–114-betlardagi yakka topshiriqlar
4	**Funksiyaning uzluksizligi.**	1	9-11	36	10	8	18	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy	◊ 2-iloyadagi 296-bet va

								materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	2-mustaqil ishdagi asosiy tushunchalar va teoremalar 90–96-betlarga qarang
								3) Funksiyaning uzluksizlik moduli *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	[3], 1-q., 113-115b., [12], 1-q., 174-176 b.
								3) **2.2.21–2.2.44**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	► 2-mustaqil ishdagi 99–10-betdagi (muammoli) topshiriqlar
								4) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadagi topshiriqlar 317–318-b.
								5) **2.3.12–2.3.17**-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 2-mustaqil ishdagi 114–124--betlardagi yakka topshiriqlar

								6) 1-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	○ 9-ilovada keltirilgan 399–406-betlardagi na'munalarga qarang
5	**Funksiyaning hosilasi va differensiali.**	1	12-14	42	8	12	22	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	◊ 2-ilovadagi 296–297-betlarga va 3-mustaqil ishdagi asosiy tushunchalar va teoremalar 125–134-betlarga qarang
								2) Teylor formulasi qoldiq hadining turli shakllari (*Konspektlashtiish)*	[3], 1-q., 152–155-b.; [12], 1-q., 218–221-b.
								3) **3.2.1–3.2.16**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab. ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	► 3-mustaqil ishdagi 155–156-etdagi (muammoli) topshiriqlar
								4) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadaqi topshiriqlar 318-319 b.
								5) **3.3.1–3.3.15**- amaliy topshiriqlarda	● 3-mustaqil ishdagi

								gi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	158–178-betlardagi yakka topshiriqlar
6	**Differensial hisobning ba'zi tatbiqlari.**	1	15-18	52	12	12	28	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	0 2-ilovadagi 297–298-betlarga bet va 3-mustaqil ishdagi asosiy tushunchalar va teoremalar 131–153-betlarga qarang
								2) Nuqtada differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyalarning ekstremumi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	[10], 1-q., 268–270-b.
								3) Lopitalning 2-qoidasi (*Konspektlashtirish)*	[3], 1-q., 174–175-b.; [12], 1-q., 250–254-b.; [5], 1-t., 320-322 b.
								4) Segmentda funksiyaning	[12], 1-q., 236–237-

								eng katta va eng kichik qiymatlarini izlash *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	b.; [5].1-t., 288–294-b.
								5) **3.2.16–3.2.43**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	▶ 3-mustaqil ishdagi 156–158-betdagi (mu-am-moli) topshiriqlar
								6) Sinf va uy vazifasini bajarish	▪ 5-ilovadaqi topshiriqlar 319–32-b.
								7) **3.3.16–3.3.23**-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	⊙ 3-mustaqil ishdagi 178–191-betlardagi yakka topshiriqlar
								8) 2-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	○ 9-ilovada keltirilgan 406–411-betlardagi na'munalarga qarang

	2-SEMESTR								
11	**Aniqmas integral, aniq integral va unug tatbiqlari. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limitlar nazariyasi va differensial hisobi.**	2	1-18	252	60	62	130	Yakuniy nazorat yozma yoki test yoki og'zaki (2-semestr o'tilgan mavzular bo'yicha) shaklida bo'ladi	
7	**Aniqmas integrallar.**	**2**	**1-5**	**62**	**16**	**14**	**32**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	◊ 2-ilovadagi 298–299-betlarga va 4-mustaqil ishdagi asosiy tushunchalar va teoremalar 192–200-betlarga qarang
								2) Eyler almashtirishlari. *(Konspektlash tirish)*	[12], 1-q., 280–282-b.; [5], 2-t., 56–59-b.
								3) Ostrogradskiy usulining isboti *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	[5], 1-t., 43–50-b. [28], 322-b.
								3) **4.2.1–4.2.19**-nazariy (muammoli)	► 4-mustaqil ishdagi 214–

								topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab. ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	215-betdagi (muammoli) topshiriqlar
								4) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadaqi topshiriqlar 321–323-b.
								5) **4.3.1–4.3.8**- amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 4-mustaqil ishdagi 216–226-betlardagi yakka topshiriqlar
8	**Aniq integrallar va uning tatbiqlari.**	2	6-10		16	20	36	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	◊ 2-ilovadagi 299–300-betlarga bet va 4-mustaqil ishdagi asosiy tushunchalar va teoremalar 200–212-betlarga qarang
								2) Aniq integralning ba'zi tatbiqlari; bir jinsli bo'lmagan sterjenning massasi va og'irlik mar-	[12], 1-q., 274–276-b.; [5],2-t. 225–244-b.; [3], 1-q., 288–293-b.

								kazi, o'zgaruvchi kuchning ishi (*Konspektlashtirish)*	
								3) **4.2.20–4.2.23**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	► 4-mustaqil ishdagi 214–216-betdagi (muammoli) topshiriq-lar
								4) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadaqi topshiriqlar 323–325-b.
								5) **4.3.9–4.3.14**- amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 4-mustaqil ishdagi 227–235-betlardagi yakka topshiriqlar
								6) 3-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	o 9-ilovada keltirilgan 412–416-betlardagi na'munalarga qarang
9	**Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limitlar nazariyasi**	2	11-17		28	28	62	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'-*	◊ 2-ilovadagi 300–301-betlarga va 5-mustaqil ishdagi

	va differensial hisobi.							*rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	asosiy tushunchalar va teoremalar 236–256-betlarga qarang
								2) funkiyaning shartli ekstremumi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	[28], 605–613-b.; [10], 632–637-b.
								3)Ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar, mavjudligi, uzluksizligi hamda hosilaga ega bo'lishi haqidagi teoremalarning isboti. (*Konspektlashtirish)*	[12],2-q., 113–118-b.; [3], 2-q., 111–116 -b.
								4) **5.2.1–5.2.21**-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	► 5-mustaqil ishdagi 257–259-betdagi (muammoli) topshiriqlar
								5) Sinf va uy vazifasini bajarish	■ 5-ilovadaqi topshiriqlar 325–328-b.

								6) **5.3.1–5.3.11**- amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	• 5-mustaqil ishdagi 259–281-betlardagi yakka topshiriqlar
								7) 4-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	o 9-ilovada keltirilgan 416–424-betlardagi na'munalarga qarang

6.MUSTAQIL ISHLAR (SOATLARDA)

6.1 Talabalar mustaqil ishi bajarilishining nazorati:

a) O'tilgan nazariy mavzularni mustahkamlash.

b) Mavzular bo'yicha nazariy topshiriqlarni bajarish.

s) Mavzular bo'yicha amaliy topshiriqlarni bajarish.

g) Mavzular bo'yicha amaliy darsda beriladigan uy vazifa. (U/V)ni bajarish.

d) O'z bilimini sinab ko'rish uchun test topshiriqlari va savollari ustida ishlash.

e) Bo'limlar bo'yicha rejalashtirilgan kontrol ishlarni bajarish.

j) 5-banddagi mustaqil bajarishga mo'ljallangan nazariy va amaliy mavzular bo'yicha referat yozish.

k) Mustaqil ishlarni bajarishda kompyuter texnologiyalaridan foydalanish.

*) Talabalarning mustaqil ishiga ajratilgan umumiy soatlar quyidagicha taqsimlandi:

- ma'ruza mashg'ulotlariga – umumiy soatlar miqdorining 30% i;
- amaliy mashg'ulotlarga – umumiy soatlar miqdorining 30% i;
- auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ishlarga – umumiy soatlar miqdorining 40% i.

6.2.TALABALAR MUSTAQIL ISHLARI GRAFIGI

T/r	Fanning bo'limlari	O'zlashtirishning joriy (kunlik) nazorat (JN) shakli (semestrning haftalari bo'yicha). Oraliq nazorat (ON) shakli (semestr bo'yicha)	Ajratilgan soatlar
I		*I-semestr uchun mustaqil ishlar*	132
1	**To'plam. To'plamlar, ular ustida amallar va ularning xossalari. Haqiqiy sonlar.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	4
		2) Ratsional sonlarni cheksiz o'nli kasr shaklida tasvirlash *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	2
		3) 1.2.1–1.2.13- nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)(62–63-b.)*	4
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	4
		5) 1.3.1, 1.3.2 - amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)(64–6- b.)*	4
2	**Sonlar ketma-ketligi.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	4
		2) Geyne-Borel lemmasi (Konspektlashtirish).	4
		3) 1.2.24–1.2.47-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)(63–64-b.)*	4
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	4
		5) 1.3.3–1.3.10-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)(64–79-b.)*	4
3	**Funksiya. Funksiyaning limiti.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	5
		3) Baza bo'yicha limit tushunchasi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	4
		3) 2.2.11–2.2.20-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)(98–99-b.q.)*	6
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	5
		5) 2.3.1, 2.3.2–2.3.11-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (101–114-b.q.)*	6

4	**Funksiyaning uzluksizligi.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	3
		2) Funksiyaning uzluksizlik moduli *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	3
		3) 2.2.21–2.2.44-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish) (99–101-b.q.)*	3
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	3
		5) 2.3.12–2.3.17-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (114–124-b.q.)*	4
		6) 1-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi) (399-406 b.q.)*	2
5	**Funksiyaning hosilasi va differensiali.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	4
		2) Teylor formulasi qoldiq hadining turli shakllari (Konspektlashtirish)	4
		3) 3.2.1–3.2.16-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish) (155–156-b.q.)*	4
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	4
		5) 3.3.1–3.3.15-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (158–178-b.q.)*	6
6	**Differensial hisobning ba'zi tatbiqlari.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	4
		2) Nuktada differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyalarning ekstremumi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	2
		3) Lopitalning 2- qoidasi (*Konspektlashtirish)*	2
		4) Segmentda funksiyaning eng katta va eng kichik kiymatlarini izlash *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	2
		5) 3.2.16–3.2.43-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish) (156–158-b.q.)*	4

		6) Sinf va uy vazifasini bajarish	4
		7) 3.3.16–3.3.23-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (178-191 b.q.)*	6
		8) 2-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi) (406–411-b.q.)*	2
II	*2-semestr uchun mustaqil ishlar*		130
7	**Aniqmas integrallar.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	6
		2) Eyler almashtirishlari Ratsional funksiyalarni integrallash: ko'phad va uning ildizlari haqida (Konspektlashtirish)	5
		3) Ostrogradskiy usulining isboti *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	5
		3) 4.2.10–4.2.19-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish) (214–215-b.q.)*	5
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	5
		5) 4.3.1–4.3.8-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (216-226 b.q.)*	6
8	**Aniq integrallar va uning tatbiqlari.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	8
		2) Aniq integralning ba'zi tatbiqlari; bir jinsli bo'lmagan sterjenning massasi va og'irlik markazi, o'zgaruvchi kuchning ishi *(Konspektlashtirish)*	6
		3) 4.2.1–4.2.9, 4.2.20–4.2.23-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish) (214–216-b.q.)*	4
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	6
		5) 4.3.9–4.3.14-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (227–235-b.q.)*	8
		6) 3-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi) (412–416-b.q.)*	4
9	**Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar-**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	12

	ning limitlar nazariyasi va differensial hisobi	2) funkiyaning shartli ekstremumi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	4
		3) Ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar, mavjudligi, uzluksizligi hamda hosilaga ega bo'lishi haqidagi teoremalarning isboti. (*Konspektlashtirish)*	6
		4) 5.2.1–5.2.21-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish) (257–259-b.q.)*	8
		5) Sinf va uy vazifasini bajarish	12
		6) 5.3.1–5.3.11-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish) (259–281-b.q.)*	14
		7) 4-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi) (416–424-b.q.)*	6

7. JN (MAKS.B.=35) VA ON (MAKS.B.=35) LAR UCHUN AJRATILGAN MAKSIMAL BALLNING TAQSIMLANISHI:

7.1. Talabalar bilimi (o'zlashtirishi)ning joriy va oraliq nazoratlari grafigi

1-semestr uchun JN (maks.b.=35) va ON (maks.b.=35) larga ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi ***(4-ilovada keltirilgan 311–312-betlardagi na'munalarga qarang):***

T/t	Fanning bo'limlari	O'zlashtirishning joriy (kunlik) nazorat (JN) shakli (semestrning haftalari bo'yicha). Oraliq nazorat (ON) shakli (semestr bo'yicha)	Bajarish muddati (1–18 haftalar)	JN lar uchun ajratilgan maksimal ballning taqsimla-nishi maks.b.=35	ON lar uchun ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi maks.b.=35
1	**To'plam. To'plamlar, ular ustida amallar va ularning xossalari. Haqiqiy sonlar.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materi-alni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	1,2,3	-	2
		2) Ratsional sonlarni cheksiz o'nli kasr shaklida tasvirlash *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	2	-	2

		3) 1.2.1–1.2.11-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	3	-	1
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	1,2,3	1	-
		5) 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 - amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	3	2	
		1-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		3	5
2	**Sonlar ketma-ketligi.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	4,5	-	2
		2) Geyne-Borel lemmasi (Konspektlashtirish).	5	-	1
		3) 1.2.28–1.2.47-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	5		2
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	4,5	2	-
		5) 1.3.4–1.3.11-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	4,5	2	-
		2-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		4	5
3	**Funksiya. Funksiyaning limiti.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	6,7,8	-	2

		2) Baza bo'yicha limit tushunchasi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	8	-	1
		3) 2.2.10–2.2.20-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	8	-	2
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	6,7,8	2	-
		5) 2.3.1–2.3.2– 2.3.11-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	6,7,8	3	-
		3-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		**5**	**5**
4	**Funksiyaning uzluksizligi.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	10,11	-	2
		3) Funksiyaning uzluksizlik moduli *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	11	-	2
		3) 2.2.21–2.2.44-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	11	-	1
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	10,11	2	-
		5) 2.3.12–2.3.17-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	10,11	3	-

		6) *1-kontrol ish (kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	11	4	-
		4-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		9	5
	1–4-bo'limlar bo'yicha 1-JN va 1-ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar (Oraliq nazoratlar uchun savollar va variantlar namunalari 6-ilovadagi 329–337-betlarda keltirilgan)			**21**	**20**
5	**Funksiyaning hosilasi va differensiali.**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	12,13,14	-	2
		2) Teylor formulasi qoldiq hadining turli shakllari (Konspektlashtirish)	13		1
		3) 3.2.1–3.2.16-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	14		2
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	12,13,14	2	-
		5) 3.3.1–3.3.15-amaliy topshiriqlardagi o'z variantì bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*		3	-
		5-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		5	5
6	**Differensial hisobning ba'zi tatbiqlari**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	15,16,17,18	-	2
		2) Nuktada differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyalarning ekstremumi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	16		2

		3) Lopitalning 2- qoidasi (*Konspektlashtirish*)	17	-	1
		4) Segmentda funksiyaning eng katta va eng kichik kiymatlarini izlash *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	18	-	1
		5) 3.2.16–3.2.43-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	18	-	2
		6) Sinf va uy vazifasini bajarish	15,16,17,18	2	-
		7) 3.3.16–3.3.23-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	17.18	3	-
		8) *2-kontrol ish (kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	18	4	
		6-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		9	8
	5–6-bo'limlar bo'yicha 2-JN va 2-ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar (Oraliq nazoratlar uchun savollar va variantlar namunalari *6-ilovadagi* 337–341-betlarda keltirilgan)			14	13
	Rag'bat ballari	1- semester davomida olimpiada, ilmiy anjumanlarga qatnashgan talballarga		-	2
	Jarima ballari	Har bir sababsiz qoldir(SQ)gan 2 soat dars uchun 0,5 ball talabaning to'plagan umumiy ballidan ayirib tashlanadi		JN-0,5* SQ soat=talaba reytingi	ON-0,5* SQ soat= talaba reytingi
	1-semestr uchun JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ball			**35**	**35**

2-semestr uchun JN (maks.b.=35) va ON (maks.b.=35) lar uchun ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi ***(4-ilovada keltirilgan 312–313-betlardagi na'munalarga qarang):***

T/r	Fanning bo'limlari	O'zlashtirishning joriy (kunlik) nazorat (JN) shakli (semestrning haftalari bo'yicha). Oraliq nazorat (ON) shakli (semestr bo'yicha)	Bajarish muddati (1–18-haftalar)	JN lar uchun ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi maks.b.=35	ON lar uchun ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi maks.b.=35
7	Aniqmas integrallar	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	1,2,3,4	-	3
		2) Eyler almashtirishlari Ratsional funksiyalarni integrallash: ko'phad va uning ildizlari haqida (Konspektlashtirish)	3	-	1
		3) Ostrogradskiy usulining isboti *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	2	-	1
		3) 4.2.10–4.2.19-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	4	-	2
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	1,2,3,4	3	1
		5) 4.3.1–4.3.8-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	1,2,3,4	3	
		7-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		6	8

8	**Aniq integral va uning tatbiqlari**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	5,6,7,8, 9,10	-	4
		2) Aniq integralning ba'zi tatbiqlari; bir jinsli bo'lmagan sterjenning massasi va og'irlik markazi, o'zgaruvchi kuchning ishi *(Konspektlashtirish)*	9,10	-	2
		3) 4.2.1–4.2.9, 4.2.20–4.2.23-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish *(Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	9,10	-	3
		4) Sinf va uy vazifasini bajarish	5,6,7,8, 9,10	4	-
		5) 4.3.9–4.3.14-amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	7,8,9,10	4	-
		6) *3-kontrol* ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	10	4	-
		8-bo'lim bo'yicha JN va ON lar uchun ajratilgan maksimal ballar		**12**	**9**
	7–8-bo'limlar bo'yicha 1-JN va 1-ONlar uchun ajratilgan maksimal ballar (Oraliq nazoratlar uchun savollar va variantlar namunalari *6-ilovadagi* 341--348--betlarda keltirilgan)			**18**	**17**
9	**Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limitlar nazariyasi va differensial hisobi**	1) Bo'limdagi mavzular bo'yicha nazariy materialni o'zlashtirish *(Og'zaki so'rovga yoki yozma ishga javob tayyorlash)*	11,12,13, 14,15,16, 17,18	-	6
		2) funkiyaning shartli ekstremumi *(Referat yozib, ma'ruza o'qituvchisi qatnashgan holda kafedrada himoya qilish)*	14,15,16,	-	2

		3) Ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar, mavjudligi, uzluksizligi hamda hosilaga ega bo'lishi haqidagi teoremalarning isboti. (*Konspektlashtirish)*	14,15,16.	-	2
		4) 5.2.1–5.2.21-nazariy (muammoli) topshiriqlarni bajarish (*Yozma ravishda tayyorlab, ma'ruza o'qituvchiga topshirish)*	17,18	-	4
		5) Sinf va uy vazifasini bajarish	11,12,13, 14,15,16, 17,18	7	-
		6) 5.3.1–5.3.11- amaliy topshiriqlardagi o'z varianti bo'yicha vazifalarni bajarish *(Yozma ravishda amaliy mashg'ulot o'qituvchisiga topshirish)*	11,12,13, 14,15,16, 17,18	6	-
		7) 4-kontrol ish *(kontrol ishni amaliy mashg'ulot o'tgan o'qituvchi tuzadi)*	17	4	
		9-bo'lim bo'yicha JN va ONlar uchun ajratilgan maksimal ballar		**17**	**14**
	9-bo'lim bo'yicha 2-JN va 2-ONlar uchun ajratilgan maksimal ballar (Oraliq nazoratlar uchun savollar va variantlar namunalari *6-ilovadagi* 349–353-betlarda keltirilgan)			17	14
	Rag'bat ballari	1- semester davomida olimpiada, ilmiy anjumanlarga qatnashgan talballarga		-	4
	Jarima ballari	Har bir sababsiz qoldir (SQ)gan 2 soat dars uchun 0,5 ball talabaning to'plagan umumiy ballidan ayirib tashlanadi		JN-0,5* SQ soat=talaba reytingi	ON-0,5* SQ soat= talaba reytingi
	2-semestr uchun JN va ON larga ajratilgan maksimal ball			**35**	**35**

8. YAN UCHUN AJRATILGAN MAKSIMAL BALLNING TAQSIMLANISHI (maks. b.=30):

T/r	Yakuniy nazorat yozma yoki test yoki og'zki shakilda (semestrda o'tilgan mavzular bo'yicha)	Tavsiya qilingan ilovalarga qarang	YaN ballari	
			maks	O'zgarish oralig'i
1	Agar fan bo'yicha yakuniy nazorat mavjud bo'lib u yozma ish shakilda bo'lsa, 5 ta yakuniy nazorat savollari bo'lib, u quyidagicha taqsimlanadi: - 3 ta nazariy savol * 6 balldan =18 ball; - 2 ta misol * 6 balldan =12 ball	*7-ilovada* keltirilgan 354–364 (1-sem.) 364–374 (2-sem.)-betlardagi na'munalar-ga qarang	30	0-30
2	Agar fan bo'yicha yakuniy nazorat mavjud bo'lib u test shakilda bo'lsa, test ballari quyidagicha bo'ladi: - 30 ta test*1 balldan=30 ball yoki - 15 ta test*2 balldan=30 ball	*8-ilovada* keltirilgan 375–386 (1-sem.), 386–398 (2-sem.)-betlardagi na'muna-larga qarang	30	0-30
3	Agar fan bo'yicha yakuniy nazorat mavjud bo'lib u og'zaki shakilda bo'lsa, 5 ta savol bo'lib, unda nazorati ballari quyidagicha bo'ladi: -2 ta nazariy savol * 6 balldan=12 ball ; - 2 ta misol * 6 balldan=12 ball; - 3 ta qo'shimcha savol bo'lib, har bir savolga 2 balldan =6 ball	*6-ilovada* keltirilgan 329–341 (1-sem.), 341–353 (2-sem.) betlardagi na'muna-larga qarang	30	0-30

Eslatma. Yakuniy nazorat bo'yicha variantning bitta savoli (yoki misoli) talabalar mustaqil ishiga ajratilgan mavzu bo'yicha tanlanishi shart.

9. FANNI O'ZLASHTIRISH UCHUN KERAKLI JIHOZLAR VA (ASBOB USKUNALAR) APPARATURA

Matematik analiz fanini o'zlashtirishda har xil matematik paketlar va kompyuter texnologiyalaridan foydalanish samara beradi.

1-MUSTAQIL ISH.

TO'PLAM, TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR. HAQIQIY SONLARNING DEDEKIND NAZARIYASI. MATEMATIK INDUKSIYA USULI. SONLAR KETMA-KETLIGI VA UNING LIMITI

Mavzular:

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA TEOREMALAR

1.1. To'plam tushunchasi. To'plamlar ustida amallar

"To'plam" tushunchasi matematikaning ta'rifsiz qabul qilingan asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, ba'zi belgilariga asoslanib birgalikda qaraladigan obyektlar yoki narsalar (predmetlar) majmuasidir. To'plamni tashkil qiluvchi har bir obyekt yoki narsa uning "elementi" deyiladi. To'plam tushunchasi misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, Samarqand shahridagi oliy ta'lim muassasalarida o'qiydigan talabalar, barcha butun sonlar, kutubxonadagi kitoblar va hokazolar to'plamni tashkil yetadi.

To'plamlar lotin yoki grek alfavitining bosh harflari bilan, uning elementlari esa, kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, C, D, ..., X, Y, Z$ lar bilan to'plamni, $a, b, c, d, ..., x, y, z$ lar balan esa, to'plamning elementlari belgilanadi.

Agar A to'plamning elementi a bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Aks holda, ya'ni a element A to'plamga tegishli bo'lmasa, unda $a \notin A$ (yoki $a \bar{\in} A$) kabi yoziladi va «a

element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi. Masalan, $A\{2,4,6,8\}$ bo'lsa, u holda, $4 \in A$, $3 \notin A$.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to'plam chekli, cheksiz sondagi to'plamlardan tashkil topgan to'plamga esa, cheksiz to'plam deb ataladi. Masalan, Samarqand Davlat universiteti Jomiy nomli ilmiy axborot-resurs markazi fondida mavjud kitoblar to'plami chekli to'plamni, natural sonlar to'plami esa cheksiz to'plamni tashkil yetadi.

Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi. Bo'sh to'plamlarga quyidagilar misol bo'la oladi: $a)$ $x^2+4=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami; $b)$ o'zaro parallel ikkita turli to'g'ri chiziqning umumiy nuqtalari to'plami; $c)$ $|x-4|<-2$ tengsizlikning yechimlari to'plami va h.k.

Ko'pincha to'plamlar, ularning elementlari chekli yoki cheksiz bo'lishidan qat'i nazar, simvolik ravishda doirachalar bilan tasvirlanadi. Bu tasvirlash to'plamlar ustida bajariladigan amallarni tasavvur qilishda va ular orasidagi munosabatlarni o'rganishda ancha qulayliklar tug'diradi.

1.1-ta'rif. Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning *qism yoki qism to'plami* (to'plam osti) deb ataladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi . Bu quyidagicha o'qiladi: "B to'plam A to'plamni o'z ichiga oladi".

1.1-eslatma. Bo'sh to'plam har qanday A to'plamning qism to'plami hisoblanadi: $\varnothing \subset A$. Har qanday A to'plam o'z-o'zining qism to'plami hisoblanadi: $A \subset A$.

1.2-eslatma. n ta elementdan iborat bo'lgan to'plamning qism to'plamlari soni 2^n ga teng.

1.3-eslatma. Agar $A, B, C, \ldots$ to'plamlarning har biri J to'plamning qism to'plamlari bo'lsa, J to'plamga *universal to'plam* deyiladi.

1.2-ta'rif. Agar A to'plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, ya'ni $A \subset B$, $B \subset A$ bo'lsa, u holda, A va B *to'plamlar bir-biriga teng* deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

1.3- ta'rif. B ixtiyoriy to'plam bo'lib, A to'plam uning biror qismi bo'lsin. B to'plamning A ga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A ning B ga qadar *to'ldiruvchisi* deyiladi va u $C_B(A)$ kabi belgilanadi.

1.4-ta'rif. A va B ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. Agar C to'plam A va B to'plamlarning barcha elementlaridan iborat bo'lib, boshqa elementlari bo'lmasa, u holda, C to'plam A va B to'plamlarning *yig'indisi (birlashmasi)* deyiladi va u $A \cup B = C$ kabi belgilanadi .

1.4-eslatma. Shuni qayd qilib o'tish kerakki, agar biror element ham A to'plamga, ham B to'plamga qarashli bo'lsa, bu element yig'indi C to'plamda bir marta hisoblanadi.

1.5-ta'rif. A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan C to'plam, A va B to'plamlarning *umumiy qismi yoki ko'paytmasi (kesishmasi)* deyiladi va $C = A \cap B$ kabi belgilandi .

1.5-eslatma. Biz to'plamlarning yig'indisi hamda ko'paytmasi ta'riflarini ikkita to'plam uchun keltirdik. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsa, ularning $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ yig'indisi hamda $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ko'paytmasi ham yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi.

1.6-ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning *ayirmasi* deyiladi va $C = A \setminus B$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagi 1.4-, 1.5-,1.6-ta'riflardan to'plamlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1^0. $A \cup A = A$.

2^0. $A \cup B = B \cup A$.

3^0. $A \cup \varnothing = A$.

4^0. Agar $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup B = B$ bo'ladi.

5^0. $A \cap A = A$.

6^0. $A \cap B = B \cap A$.

7^0. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8^0. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda, $A \cap B = A$ bo'ladi.

9^0. $A \setminus \varnothing = A$.

10^0. $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

11^0. $A \setminus A = \varnothing$.

1.7-ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan va B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* deb ataladi va $C = A \Delta B$ kabi belgilanadi, ya'ni $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1.8-ta'rif. Birinchi elementi X to'plamga va ikkinchi elementi Y to'plamga tegishli barcha (x, y) juftlardan iborat bo'lgan nuqtalar to'plami X va Y to'plamlarning *Dekart (to'g'ri) ko'paytmasi* deyiladi va u $[X, Y]$ (yoki $X \times Y$) kabi belgilanadi, ya'ni $C = X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

1.6-eslatma. A to'plamni o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasi quyidagicha belgilanadi: $A^2 = A \times A = \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$.

1.2. To'plamlarni taqqoslash

A va B chekli to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning elementlarini sanash bilan ularning elementlari soni bir-biriga tengligini yoki birining elementlari ikkinchisining elementlaridan ko'p yoki kamligini aniqlash mumkin. Bu holni to'plamlar elementlarini bir-biriga mos qo'yish yo'li bilan ham tekshirish mumkin. Masalan, $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,9,25,49,81,121\}$ to'plamlar berilganda, A to'plamning har bir $2n-1$ $(n=1,2,3,4)$ elementiga B to'plamning $(2n-1)^2$ elementini mos qo'yib (ya'ni $2n-1\to(2n-1)^2$: $1\to1$, $3\to9$, $5\to25$, $7\to49$), B to'plam elementlari soni A to'plam elementlari sonidan ko'p ekanligini aniqlashimiz mumkin.

Agar A va B to'plamlar cheksiz to'plamlar bo'lsa, ularning elementlarini sanash yo'li bilan ularni taqqoslab bo'lmaydi, lekin bu to'plamlarni ularning elementlarini bir-biriga mos qo'yish yo'li bilan taqqoslash mumkin. Masalan,

$N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$, $N'=\{1,4,9,\ldots,n^2,\ldots\}$ to'plamlar berilganda, N to'plamning har bir $n=(1,2,3,\ldots)$ elementiga N' to'plamning n^2 $(n=1,2,3,\ldots)$ elementini mos qo'yish bilan, N va N' to'plamlarni taqqoslab, ular elementlarining soni jihatidan «teng» degan xulosaga kelamiz, lekin cheksiz to'plamlarni har doim bu misoldagi kabi osonlikcha taqqoslash mumkin bo'lavermaydi.

1.9-ta'rif. Agar A va B to'plamlar berilgan bo'lib, A to'plamning har bir a elementiga B to'plamning bitta b elementi, shunday mos qo'yilgan bo'lsaki, bunda B to'plamning har bir elementi uchun A to'plamda unga mos keladigan bittagina element bor bo'lsa, u holda, A va B to'plamlar orasida *o'zaro bir qiymatli moslik (o'.b.m.) o'rnatilgan* deb ataladi.

1.10-ta'rif. Agar A va B to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ular *bir-biriga ekvivalent to'plamlar* deb ataladi va $A\sim B$ kabi belgilanadi. Masalan,

$$A=\{1,2,3,4,5\},\ B=\{4,5,6,7,8\},\ N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\},\ N'=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$$

to'plamlar berilgan bo'lsa, unda $A\sim B$ va $N\sim N'$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Ekvivalentlik tushunchasi quyidagi sodda xossalarga ega:

1-xossa. Har doim $A\sim A$ bo'ladi.

2-xossa. Agar $A\sim B$ bo'lsa, $B\sim A$ bo'ladi.

3-xossa. Agar $A\sim B$ va $B\sim C$ bo'lsa, $A\sim C$ bo'ladi.

Ekvivalentlik tushunchasi to'plamlarni sinflarga ajratish imkonini tug'diradi. Masalan, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{11,12\}$, $D=\{1,3,5,7\}$, $E=\{3\}$

to'plamlar berilgan bo'lsin. Bunda $A \sim D$, $B \sim C$, lekin E to'plam A, B, C, D to'plamlarning hech biriga ekvivalent emas.

x biror o'zgaruvchi bo'lib, uning qiymatlari biror X to'plamni tashkil etsin va har bir x ga A_x to'plam mos qo'yilgan bo'lsin. Elementlari A_x to'plamlardan iborat H to'plam *to'plamlar ketma-ketligi* yoki *to'plamlar sistemasi* deyiladi va $H = \{A_x\}$, $(x \in X)$ kabi belgilanadi. Masalan, agar: 1) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ bo'lsa, $H = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ bo'ladi; 2) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$, $X_1 = \{, 2, , 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ bo'lsa, unda $H = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots\}$, $H = \{A_2, A_4, A_6, \dots, A_{2n}, \dots\}$ bo'ladi; 3) Oxy tekisligini olib, X to'plam deb Ox o'qni, A_x to'plam deb, Ox o'qni x nuqtada kesib o'tuvchi vertikal to'g'ri chiziqni olsak, u holda, H to'plamlar sistemasi tekislikdagi barcha vertikal to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi.

$H = \{A_X\}, (x \in X)$ni tashkil etuvchi A_X to'plamlarning yig'indisini va ko'paytmasini quyidagicha kiritish mumkin:

$-H = \{A_X\}, (x \in X)$ to'plamlar sistemasini tashkil etuvchi A_X to'plamlar sistemasining yig'indisi deb, shunday C to'plamga aytiladiki, A_X to'plamlarning har biri C to'plamning qismi bo'lib, C to'plamning har bir elementi A_X to'plamning kamida bittasiga qarashli bo'ladi. To'plamlar sistemasi yig'indisi uchun, ushbu $C = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$ belgi ishlatiladi. Masalan, yuqoridagi uchinchi misolda to'plamlar sistemasining yig'indisi tekislikdagi barcha nuqtalardan iborat bo'ladi;

$-H = \{A_X\}, (x \in X)$ to'plamlar sistemasining ko'paytmasi deb, shunday C to'plamga aytiladiki, C to'plamning har bir elementi barcha A_X to'plamlarning tegishli bo'ladi va aksincha A_X to'plamlarning barchasiga tegishli har qanday element C to'plamga ham kiradi. To'plamlar sistemasining ko'paytmasi

$$C = \bigcap_{x \in X} A_X$$

kabi belgilanadi. To'plamlar sistemasining Dekart ko'paytmasi ta'rifini qulaylik uchun, to'plamlar ketma-ketligi uchun beramiz. $H = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ to'plamlar ketma-ketligining Dekart (to'g'ri) ko'paytmasi deb, elementlari barcha $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ketma-ketliklardan iborat to'plamga aytiladi. To'plamlar ketma-ketligining Dekart ko'paytmasi $\prod\limits_{x=1}^{\infty} A_X$ kabi belgilanadi.

Odatda, A to'plamga ekvivalent bo'lgan to'plamlar sinfi $\overline{\overline{A}}$ bilan belgilanadi. $\overline{\overline{A}}$ A to'plamning quvvati (kardinal soni) deyiladi. Chekli to'plamning quvvati (kardinal soni) sifatida odatda, bu to'plam elementlarining soni olinadi.

1.11-ta'rif. Natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plam *sanoqli to'plam* deyiladi.

Quvvatlari α va β bo'lgan ixtiyoriy A va B to'plamlar berilgan bo'lsin: $\overline{\overline{A}} = \alpha$, $\overline{\overline{B}} = \beta$.

1.12-ta'rif. V to'plamda A to'plamga ekvivalent B' qism mavjud bo'lsa, B to'plamning quvvati A to'plamning quvvatidan katta, A to'plamning quvvati esa, B to'plamning *quvvatidan kichik* deyiladi va $\alpha < \beta$ yoki $\beta > \alpha$ kabi yoziladi.

Masalan, agar

$$A = \{3,6,9,12,15,...,300\}, \quad \overline{\overline{A}} = 100,$$

$$B = \{1,2,3,4,5,...,200\}, \quad \overline{\overline{B}} = 200$$

bo'lsa, A to'plam B to'plamga ekvivalent emas, ammo uning $B' = \{1,2,3,\ldots,100\}$ qismiga ekvivalent. Demak, $\alpha = \overline{\overline{A}} = 100 < \overline{\overline{B}} = \beta = 200$.

Ravshanki, har qanday chekli to'plamning quvvati har qanday cheksiz to'plamning quvvatidan kichik. Ixtiyoriy ikkita A va V chekli to'plamlarning quvvatlarini solishtirish mumkin, ya'ni ularning quvvatlari uchun quyidagi munosabatlarning biri albatta bajariladi:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}.$$

1.13-ta'rif. A to'plamning quvvati N to'plamning quvvatidan katta bo'lsa, A to'plamga *sanoqsiz to'plam* deyiladi. R to'plam sanoqsiz to'plamga misol bo'la oladi.

Natural sonlar to'plami N ga ekvivalent bo'lgan barcha to'plamlar sanoqli to'plamlar sinfini tashkil yetadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, har qanday sanoqli to'plamning elementlarini barcha natural sonlar bilan nomerlab chiqish mumkin, demak, sanoqli to'plamni quyidagi cheksiz ketma-ketlik shaklida yozish mumkin: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

1.1-teorema. Ratsional sonlar to'plami sanoqlidir.

1.2-teorema. $[0,1]$ segmentning nuqtalaridan iborat bo'lgan to'plam sanoqsizdir.

1.3. Haqiqiy sonlarning Dedekind nazariyasi

1.3.1. Sonli to'plamlar. Sanoq uchun ishlatiladigan sonlar *natural sonlar* deb ataladi. Barcha natural sonlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlar ishtirokida hosil qilinadi. Natural sonlar to'plami $N=\{1,2,3,...,n,...\}$ kabi belgilanadi.

Ishorasi natural sonlarning ishorasiga qarama-qarshi bo'lgan sonlar *manfiy natural sonlar* deyiladi. Barcha manfiy natural sonlar, nol soni va barcha natural sonlardan iborat to'plam *butun sonlar* to'plami deyiladi va u odatda, $Z=\{...,-n,...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$kabi belgilanadi.

Ravshanki, natural sonlar to'plami butun sonlar to'plamining qism to'plamidir: $N\subset Z$.

Qisqarmaydigan $\frac{p}{q}$, $p\in Z$, $q\in N$ kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son *ratsional son* deyiladi. Barcha ratsional sonlar to'plami $Q=\left\{x:x=\frac{p}{q},\ p\in Z,\ q\in N\right\}$ kabi belgilanadi.

Ravshanki, $Z\subset Q$, demak $N\subset Q$, chunki, $N\subset Z$. Jumladan, agar $q=1$ bo'lsa, $Z=Q$ bo'ladi.

Haqiqiy sonlarni qurishda Dedekind nazariyasi ratsional sonlar to'plami Q ning tartiblanganlik xossasiga asoslangan bo'lib, u quyidagicha amalga oshiriladi:

Q to'plamni bo'sh bo'lmagan va kesishmaydigan ikkita, quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan, A va B sinflarga ajratamiz:

1) $A\cup B=Q$; 2) $\forall a\in A,\ \forall b\in B\Rightarrow a<b$.

Q to'plamni bunday sinflarga ajratish *kesim bajaradi* deyiladi va u (A,B) kabi belgilanadi, bunda A – kesimning *quyi sinfi*, B esa, *yuqori sinfi* deyiladi.

Misollar: 1) $A=\{a:a\in Q, a<3\}$, $B=\{b:b\in Q,\ b\geq 3\}$;

2) $A=\{a:a\in Q, a\leq 3\}$, $B=\{b:b\in Q,\ b>3\}$;

3) $A=\{a:a\in Q, a^2<3\}$, $B=\{b:b\in Q,\ b^2>3\}$.

Osonlik bilan ko'rsatish mumkinki, Q to'plamni 1)–3) ko'rinishlarda sinflarga ajratish kesim bajaradi.

Haqiqatan ham, 1) $A=\{a:a\in Q, a<3\}$, $B=\{b:b\in Q,\ b\geq 3\}$ deylik. Bunda, $A\neq Q,\ B\neq Q,\ Q=A\cup B,\ A\cap B=\varnothing$ bo'ladi. $\forall a\in A,\ \forall b\in B\Rightarrow a<b$ bo'ladi.

Demak, bunday tuzilgan A va B to'plamlar Q to'plamda kesim bajaradi.

$3\in B$ va B sinfdagi eng kichik sondir, lekin A sinfda eng katta son yo'q. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni eng katta $a\in Q$ son bor desak, $a<3$

bo'lgani uchun ratsional sonlar to'plamining zichlik xossasiga asosan, a va 3 sonlar orasida biror ratsional a_1 sonni ko'rsatish mumkin, $a < a_1 < 3$. Natijada, a_1 eng katta son bo'lib qoladi, demak, a son A sinfda eng katta son bo'lsin, degan farazimiz noto'g'ri ekan. Shunday qilib, A da eng katta son mavjud emasligiga ishonch hosil qildik.

2-misol ham xuddi 1-misol singari $3 \in A$ bo'lib, unda eng katta sondir, B da eng kichik son yo'qligini ko'rsatiladi.

3) $A = \{a : a \in Q, a \le 3\}$, $B = \{b : b \in Q, b > 3\}$ deylik. Q to'plamni bunday sinflarga ajratish kesim bajarishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu holda, quyi A sinfda eng katta va yuqori B sinfda esa, eng kichik son yo'qligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, $a \in A$ bo'lsa, $a^2 < 3$ bo'ladi. U holda, shunday n natural son mavjudki, $a^2 < 3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi a bilan birga $a + \frac{1}{n}$ ham A sinfga tegishli bo'ladi, ya'ni $(a + \frac{1}{n})^2 < 3$. Bundan

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 3 - a^2. \tag{1.1}$$

$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2a}{n} + \frac{1}{n}$ bo'lgani uchun, agar $\frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 3 - a^2$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, (1.1) tengsizlik albatta, bajariladi. Oxirgi tengsizlikdan $n > \frac{2a+1}{3-a^2}$.

Shunday qilib, $a \in A$ son A da eng katta son bo'lsin desak, undan katta $a + \frac{1}{n}$ son topiladiki, u ham A ga qarashli bo'ladi. Demak, A da eng katta son yo'q ekan, yuqoridagidek, B da eng kichik sonning yo'qligi ham ko'rsatiladi.

Bu misollardan ko'rinadiki, birinchi misolda A sinfda eng katta son mavjud emas, B sinfda esa, eng kichik son mavjud. Ikkinchi misolda A sinfda eng katta son mavjud, B sinfda esa eng kichik son mavjud emas. Uchinchi misolda esa, A sinfda eng katta son, B sinfda eng kichik son mavjud emas. Shunday qilib, Q da bajariladigan kesimlar faqat uch xil bo'lishi mumkin:

1.Quyi A sinfda eng katta son yo'q, yuqori B sinfda eng kichik son bor.

2.Quyi A sinfda eng katta son bor, yuqori B sinfda eng kichik son yo'q.

3.Quyi A sinfda eng katta son yo'q, yuqori B sinfda eng kichik son yo'q.

1- va 2-hollarda (A,B) kesim, biror chegaraviy r ratsional sonni aniqlaydi deymiz va uni $r=(a,b)$ kabi yozamiz. Bundan keyin biz 1- va 2-hollardagi kesimlarni birlashtirib A sinfda eng kata son yo'q, B sinfda esa, eng kichik son mavjud deb, uni birinchi tur – ratsional kesim deb ataymiz. 3-holda kesim hech qandan chegaraviy ratsional soni aniqlamaydi, ya'ni chegaraviy ratsional son mavjud emas. 3-holdagi har qanday kesim kesim biror chegaraviy yangi son – α irratsional soni aniqlaydi deb kelishib olamiz va bu kesimni ikkinchi tur irratsional kesim deb ataymiz. Bu α irratsional son A sinfdagi hamma a sonlar va B sinfdagi hamma b sonlar orasidagi chegaraviy son bo'lib hisoblanadi. Hamma irratsional sonlar to'plamini J deb belgilaymiz.

Ratsional va irratsional sonlar to'plamining birlashmasi *haqiqiy sonlar* to'plami deyiladi va R kabi belgilanadi, ya'ni $R=Q\cup J$ osonlik bilan ko'rish mumkinki $R/Q=J, R/J=Q$ $R\cap Q=Q$, $Q\cap J=\varnothing$, $J\subset R$, $Q\subset R$..

Haqiqiy sonlar to'plami quyidagi xossalarga ega:

1^0. Haqiqiy sonlar to'plami tartiblangan to'plam.

2^0. Haqiqiy sonlar to'plami zich to'plam.

3^0. Haqiqiy sonlar to'plami to'liq (uzluksiz) to'plam.

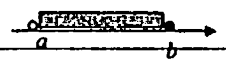
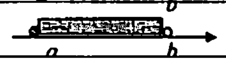
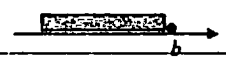
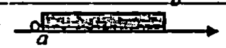
1.3.2. Son o'qi. Biror l to'g'ri chiziqda ixtiyoriy O nuqtani belgilab (O nuqta sanoq boshi), so'ngra [0;1] birlik kesmani tanlaymiz va yo'nalishni belgilaymiz. Bunday holda koordinata to'g'ri chizig'i, ya'ni *son o'qi berilgan* deyiladi . Har bir natural yoki kasr songa l to'g'ri chiziqda bitta nuqta mos keladi.

1.7-eslatma. Koordinata boshi O nuqtaga mos kelgan "0" (nol) soni musbat ham, manfiy ham hisoblanmaydi, u koordinata to'g'ri chizig'idagi musbat koordinatali nuqtalarni manfiy koordinatali nuqtalardan ajratib turadi.

Koordinata to'g'ri chizig'idagi berilgan yo'nalishni (odatda, u o'ng tomonga yo'nalgandir) musbat, berilgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishni esa manfiy yo'nalish deyiladi.

1.3.3. Sonli oraliqlar. $a<b$ shartni qanoatlantiradigan a va b sonlarni olamiz va ularni koorrdinata to'g'ri chizig'ida nuqtalar bilan belgilaymiz.

Amalda "interval", "kesma", "yarim interval", "nur" terminlaridan ko'pincha foydalanmasdan, ular bir nom bilan, "sonli oraliq" deb ishlatiladi.

Oraliqlar turi	Geometrik tasviri	Belgilanishi	Tengsizliklar yordamida yozilishi
Interval		(a,b)	$a<x<b$
Kesma		$[a,b]$	$a\leq x\leq b$
Yarim interval		$(a,b]$	$a<x\leq b$
Yarim interval		$[a,b)$	$a\leq x<b$
Nur		$[a,+\infty)$	$x\geq a$
Nur		$(-\infty;b]$	$x\leq b$
Ochiq nur		$(a,+\infty)$	$x>a$
Ochiq nur		$(-\infty;b)$	$x<b$
Son o'qi		$(-\infty;\infty)$	$-\infty<x<\infty$

1.4. Matematik induksiya usuli

Har qanday matematik izlanishning asosida deduktiv va induktiv uslublar yotadi.

Umumiy xulosadan xususiy xulosalarni keltirib chiqarish usuli, *deduktiv usul* deyiladi.

Xususiy tasdiqdan umumiy tasdikni keltirib chiqarish usuli *induktiv yoki induksiya usuli* deyiladi.

Induksiya usuli to'la va to'la bo'lmasligi mumkin.

Agar tasdiq kuzatishga ulgura olinmagan hollarga ham tegishli bo'lsa, bunga to'la bo'lmagan *matematik induksiya* usuli deyiladi.

Agar mulohazalar ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha hollarni o'z ichiga olsa va shu asosda xulosa qilinsa, bunday induksiya to'la *matematik induksiya usuli* deyiladi.

To'la matematik induksiya usuliga quyidagi tamoyil (prinsip) asos qilib olinadi: biror $p(n)$ tasdiq berilganda:

1) $n=1$ uchun $p(n)$ tasdiqning to'g'riligi tekshiriladi;

2) $n=k(k\in N)$ uchun $p(k)$ tasdiq to'g'ri deb faraz qilinganda, undan $n=k+1$ uchun $p(k+1)$ tasdiqning to'g'riligi kelib chiqsa, bu $p(n)$ tasdiq har qanday natural n uchun o'rinli bo'ladi, deb xulosa chiqariladi. Bu prinsipning 1-bandi induksiya bazisi, 2-bandi esa, *induksiya qadami* deyiladi. Ba'zi hollarda, $p(n)$ tasdiqni n ning faqat natural qiymatlari uchungina emas, balki uning Z to'plamga qarashli barcha qiymatlari uchun ham to'g'riligini isbotlash talab qilinadi. Bunday hollarda yuqoridagi to'la matematik induksiya usulidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

1.5. Nuqtaning atrofi

1.14-ta'rif. Quyidagi $U_\varepsilon(a)=\{x:x\in R, a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$ to'plam, a nuqtaning ε *atrofi* deyiladi, ε- *son esa, atrofning radiusi* deyiladi.

Ushbu $U_\varepsilon^+(a)=\{x:x\in R, a<x<a+\varepsilon\}$ to'plam, a nuqtaning *o'ng atrofi*, $U_\varepsilon^-(a)=\{x:x\in R, a-\varepsilon<x<a\}$, to'plam esa, a nuqtaning *chap atrofi* deyiladi.

Ushbu $0<|x-a|<\varepsilon$ tengsizlik, $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon, x\neq a$ tengcizliklarga teng-kuchli bo'lib, ularning har ikkalasini a nuqtaning $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ atrofi shaklida ifodalash mumkin: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)=\{x:x\in R, a-\varepsilon<x<a+\varepsilon, x\neq a\}$.

Ba'zi hollarda, $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ atrof, a nuqtaning *teshik atrofi* deb ham yuritiladi.

Haqiqiy sonlar to'plami R tarkibiga $-\infty$ va $+\infty$ simvollarni $\forall x\in R$ uchun $-\infty<x$ va $x<+\infty$ xususiyat orqali qo'shib, $\bar{R}$ to'plamni hosil qilamiz:

$$\bar{R}=R=\{-\infty\}\cup\{+\infty\}.$$

$\bar{R}$ da $-\infty$ va $+\infty$ «nuqta» larning atrofi tushunchalari quyidagicha kiritiladi: $U_c(+\infty)=\{x:x,c\in R, c<x<+\infty\}$, $U_c(-\infty)=\{x:x,c\in R, -\infty<x<c\}$, $U_c(\infty)=\{x:x\in R, c\in R, |x|>c\}$.

1.6. Natural argumentli funksiya va uning limiti

N va R to'plamlar berilgan bo'lib, f- har bir natural $n\,(n\in N)$ songa biror haqiqiy $x_n\,(x_n\in R)$ sonni mos qo'yuvchi qoida yoki usul bo'lsin: $f:n \to x_n$. Bu holda, N *to'plamda natural argumentli funksiya aniqlangan* deyiladi va u $x_n = f(n)$ kabi belgilanadi.

1.15-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu M sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n\,(n \in N)$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ *ketma - ketlik yuqoridan chegaralangan* deb ataladi.

1.16-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu m sondan kichik bo'lmasa, ya'ni $\forall n\,(n \in N)$ uchun $m \le x_n$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *ketma-ketlik quyidan chegaralangan* deyiladi.

1.17-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday M va m o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, $\forall n\,(n \in N)$ uchun $m \le x_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ *ketma-ketlik chegaralangan* deyiladi.

1.3-teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lishi uchun, shunday $A > 0$ son mavjud bo'lib, $\forall n\,(n \in N)$ uchun $|x_n| \le A$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

1.18- ta'rif. Agar ixtiyoriy $A > 0$ (istalgancha katta) son olinganda ham, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hech bo'lmaganda bitta x_{n_0} elementi topilib, $|x_{n_0}| \ge A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlik* deyiladi.

1.19-ta'rif. Agar $\forall A > 0$($A-$ istalgancha katta son bo'lganda ham) son uchun $\exists n_0(A)$ nomer mavjud bo'lib, $n \ge n_0(A)$ dan boshlab, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

1.20-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ (ε- istalgancha kichik olinganda ham) $\exists n_0(\varepsilon)$ nomer mavjud bo'lib, $n \ge n_0(\varepsilon)$ dan $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi.

1.7. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning asosiy xossalari

1-xossa. Ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi va ayirmasi $\{x_n \pm y_n\}$, yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Bu xossadan ushbu natija kelib chiqadi:

1-natija. Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig'indisi, yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

2-xossa. Cheksiz kichik ketma-ketlik bilan chegaralangan ketma-ketlikning ko'paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

3-xossa. Har qanday cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi.

2-natija. Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning ko'paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

4-xossa. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, u holda, biror n_0 nomerdan boshlab $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik aniqlangan bo'ladi va u cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Agar $\{y_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikning hamma hadlari noldan farqli bo'lsa, u holda, $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

1.8. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari

1.21- ta'rif. Agar shunday haqiqiy a son mavjud bo'lib, $\{x_n - a\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi. Bunda, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va u $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ kabi yoziladi.

1.22– ta'rif. Agar shunday haqiqiy a son mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi. Bunda a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi. Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ifodalash mumkin $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

1.23- ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atrofi olinganda ham, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga joylashsa, a *son*, $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning limiti* deyiladi.

Bu ta'rifni qisqacha,

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0.\quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : \forall n \ge n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon\right)$$

kabi ifodalash ham mumkin.

Yuqoridagi ta'riflar o'zaro ekvivalent ta'riflardir.

1.24- ta'rif. Agar ixtiyoriy a son va ixtiyoriy n_0 son olinganda ham shunday ε_0 son va shunday $n > n_0$ natural son topilib, $|x_n - a| \ge \varepsilon_0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *limitga ega emas* deyiladi.

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ta'riflash mumkin:

$$\forall n_0 \in N,\ \exists\varepsilon_0,\ \exists n \in N : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

1.25- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa, u *uzoqlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

1.26- ta'rif. Limiti nolga teng bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right)$ *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi.

1.27- ta'rif. Limiti cheksiz bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty\right)$ *cheksiz katta ketma-ketlik* deb ataladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo'ladi.

2-xossa. Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi, aks holda ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi.

3-xossa. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, ular, mos ravishda, a va b limitlarga ega bo'lsa, u holda, $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b; \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

4-xossa. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n (n \in N)$ uchun $x_n \leq y_n$ $(x_n \geq y_n)$ bo'lsa, u holda, $a \leq b$ $(a \geq b)$ bo'ladi.

5-xossa. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsin. Agar $\forall n (n \in N)$ uchun $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda, $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo'ladi.

1.8-eslatma. Agar yaqinlashuvchi ketma-ketlikning hamma elementlari $x_n > b$ qat'iy tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda, bu ketma-ketlikning limiti x har doim $x > b$ bo'lmaydi.

6-xossa. Agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma hadlari $[a, b]$ kesmaning ichida joylashsa. U holda, uning limiti x ham $[a, b]$ kesmaning ichida joylashadi.

1.9-eslatma. Ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishidan bu $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning har birining yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

1.9. Monoton ketma-ketlikning ta'riflari

1.28- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari $\forall n\in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{x_n\}$ *o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

1.29- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari $\forall n\in N$ uchun $x_n \ge x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{x_n\}$ *kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

1.30- ta'rif. O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan *monoton ketma-ketliklar* deb ataladi.

1.10. Monoton ketma-ketlikning yaqinlashishi haqidagi teoremalar

1.4- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u yaqinlashuvchi (chekli limitga ega) bo'ladi; agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda, u uzoqlashuvchi (limiti $+\infty$) bo'ladi.

1.5- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, u yaqinlashuvchi (chekli limitga ega) bo'ladi; agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda, u uzoqlashuvchi (limiti $-\infty$) bo'ladi.

Bu teoremalardan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1- natija. O'suvchi ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

2- natija. Kamayuvchi ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning quyidan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

1.6- teorema. Monoton $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi (chekli limitga ega) bo'lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

1.10- eslatma. Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik monoton ketma-ketlik bo'lavermaydi.

1.11- eslatma. Yuqoridagi teoremalardan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: yuqoridan chegaralangan o'suvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma hadlari uning limiti $\bar{x}$ dan katta $(x_n \le \bar{x})$ bo'la olmaydi. Xuddi shunday, quyidan chegaralangan kamayuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma hadlari uning limiti $\underline{x}$ dan kichik $(\underline{x} \le x_n)$ bo'la olmaydi.

1.7- teorema. Ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Agar: 1) $\{x_n\}$ o'suvchi, $\{y_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik; 2) $\forall n \in N$ uchun $x_n < y_n$; 3) $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ bo'lsa, u holda, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

1.8- teorema. Agar $[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset [a_3;b_3] \supset ... \supset [a_n;b_n] \supset ...$ munosabatda bo'lgan, $[a_1;b_1], [a_2;b_2], [a_3;b_3], ..., [a_n;b_n] ...$ kesmalar ketma-ketligi uchun $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda, $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar bitta limitga ega bo'ladi hamda bu limit barcha kesmalarga tegishli bo'lgan yagona nuqta bo'ladi.

1.11. Ixtiyoriy ketma-ketliklarning quyi va yuqori limitlari

Ushbu ixtiyoriy $x_1, x_2, ... x_n, ...$ ketma-ketlik va butun musbat o'suvchi $k_1, k_2, ..., k_n,$ ixtiyoriy sonlar ketma-ketliklarini qaraylik. $\{x_n\}$ ketma-ketlik elementlari ichidan $k_1, k_2, ..., k_n, ...$ nomerdagilarini olib, ularni indeksning o'sish tartibida joylashtiramiz. Natijada, biz $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}, ...$ketma-ketlikga ega bo'lamiz va uni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi deb ataymiz. Xususan holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o'zini $(k_n = n)$ ham qismiy.

1.9- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, u holda, uning har qanday qismiy ketma-ketligi ham shu a limitga ega bo'ladi.

1.11-eslatma. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy ketma-ketliklarining limitga ega bo'lishidan, berilgan ketma-ketlikning limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

1.31-ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy ketma-ketligining limiti, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *qismiy limiti* deyiladi.

1.10- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma qismiy ketma-ketliklari yaqinlashuvchi bo'lib, ularning har biri bitta a limitga ega bo'lsa, u holda, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, u ham shu a limitga ega bo'ladi.

1.32- ta'rif. Agar x $(x \in (-\infty;+\infty))$ nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari joylashsa, x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limit nuqtasi* deyiladi.

1.11- teorema. Har qanday haqiqiy sonlar (chegaralangan va chegaralanmagan) ketma-ketligidan chekli songa, $+\infty$ yoki $-\infty$ larga intiluvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

1.12- teorema (Bolsano-Veyershtrass). Har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

1.33- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan $x\ (x\in(-\infty;+\infty))$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limit nuqtasi* deyiladi.

1.34- ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik limit nuqtalarining eng kattasiga, bu ketma-ketlikning *yuqori limiti* deyiladi va $\bar{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k>n}x_k$ kabi belgilanadi.

1.35- ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik limit nuqtalarining eng kichigiga, bu ketma-ketlikning *quyi limiti* deyiladi va $\underline{x}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k>n}x_k$ kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x=+\infty$ bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralanmagan bo'lsa, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\infty$ bo'ladi.

1.13- teorema. Har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqori (quyi) (chekli, $+\infty$ yoki $-\infty$) limitga ega.

1-natija. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, uning quyi va yuqori limitlari chekli bo'ladi.

Ketma-ketlikning quyi va yuqori limitlari quyidagi xossalarga ega.

Ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\bar{x}$ bo'lsin. U holda, $\forall\varepsilon<0$ son olinganda ham:

1^0. $\exists n_0\in N$ son topiladiki, $\forall n>n_0$ uchun $x_n<\bar{x}+\varepsilon$ bo'ladi.

2^0. $\forall n_1\in N$ son uchun ε va n_1 larga bog'liq, shunday natural son $n'>n_1$ topiladiki, $x_{n'}>\bar{x}-\varepsilon$ bo'ladi.

Agar $\bar{x}$ son 1^0 va 2^0 shartlarni qanoatlantirsa, u holda, $\bar{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{n>k}\{x_n\}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ bo'ladi.

Endi $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\underline{x}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ bo'lsin. U holda, $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham:

1^0. $\exists n_0\in N$ son topiladiki, $\forall n>n_0$ uchun $x_n>\underline{x}-\varepsilon$ bo'ladi.

2^0. $\forall n_1\in N$ son uchun ε va n_1 larga bog'liq natural son $n>n_1$ topiladiki, $x_{n'}<\underline{x}+\varepsilon$ bo'ladi.

Agar $\underline{x}$ son 1^0 va 2^0 shartlarni qanoatlantirsa, u holda, $x = \lim_{k \to \infty} \inf_{k \ge n} \{x_k\} = \varliminf_{n \to \infty} x_n$ bo'ladi.

1.14-teorema. $\forall \{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lishi uchun $\varliminf_{n \to \infty} x_n = \varlimsup_{n \to \infty} x_n = a$ tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

1.15-teorema (Koshi kriteriysi). $\forall \{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi (chekli limitga ega) bo'lishi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $n_0 \in N$ son mavjud bo'lib, $\forall n > n_0$ va $\forall m > n_0$ lar uchun

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Agarda (1.2) shart bajarilmasa, ya'ni

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall k \in N, \ \exists n \ge k, \ \forall m \ge k : \ |x_m - x_n| \ge \varepsilon_0$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi.

1.1. O'z-o'zini tekshirish savollari

1.1.1. To'plam tushunchasi. Qism to'plam ta'rifi ([1],1-t., 3-bo'lim; [3],1-q., 5–6-betlar; [12], 1-q., 5–9-betlar; [9], 1-t., 1-bo'lim).

1.1.2. To'plamlar ustida amallar: to'plamlarning tengligi, to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi), ko'paytmasi (kesishmasi), ayirmasi, simmetrik ayirmasi, Dekart ko'paytmasi ([1],1-t., 3-bo'lim; [3],1-q., 6–8-betlar; [12], 1-q.,8–11-betlar; [9], 1-t., 1-bo'lim).

1.1.3. To'plamlarni taqqoslash: to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik (o'.b.m), ekvivalent to'plamlar, sanoqli va sanoqsiz to'plamlar ([1],1-t., 3-bo'lim; [3],1-q., 13–15-betlar; [12], 1-q.,16–18-betlar; [9], 1-t., 1-bo'lim).

1.1.4. Sonli to'plamlar. Son o'qi ([1],1-t., 3-bo'lim; [3],1-q., 5-bet; [12], 1-q.,20–21-betlar; [9], 1-t., 1-bo'lim).

1.1.5. Haqiqiy sonlarning (Dedekind bo'yicha) ta'rifi ([5], 1-t.,11–26-betlar; [12], 1-q.,34–38-betlar).

1.1.6. Haqiqiy sonlar to'plamining xossalari:

1^0. Haqiqiy sonlar to'plami – tartiblangan to'plam. ([3],1-q., 16–21--betlar; [5], 1-t.,27-42-betlar; [12], 1-q.,34–35-betlar).

2^0. Haqiqiy sonlar to'plami – zich to'plam ([5], 1-t.,27–42-betlar; [12], 1-q.,35-bet).

3^0. Haqiqiy sonlar to'plami –to'liq (uzluksiz) ([5], 1-t.,27–42-betlar; [12], 1-q.,35–38-betlar).

1.1.7. Matematik induksiya usuli. Uni qo'llash bosqichlari ([14], 152–210-betlar, [20], 31–42-betlar).

1.1.8. Sonlar ketma-ketligining ta'rifi ([3],1-q., 37-bet; [5], 1-t..41–45-betlar; [12], 1-q.,64–65-betlar, [15], 26-27-betlar). Chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar va ularga misollar ([1],1-t., 5-, 6-bo'limlar; [3],1-q., 37–38-betlar; [5], 1-t.,83–89-betlar; [9], 1-t., 3-bo'lim, [30], 11-bo'lim).

1.2.9. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklarning ta'riflari va ularga misollar ([1],1-t., 5-, 6-bo'limlar; [3],1-q., 49–51-betlar; [5], 1-t.,47–56-betlar; [12], 1-q.,70–72, 81–82-betlar; [9], 1-t., 3-bo'lim, [30], 11-bo'lim).

1.2.10. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari ([1],1-t., 5-, 6-bo'limlar; [3],1-q., 49–51-betlar; [5], 1-t.,47–52-betlar; [12], 1-q.,72–75--betlar; [9], 1-t., 3-bo'lim, [30], 11-bo'lim).

1.2.11. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari ([1],1-t., 5-, 6-bo'limlar; [3],1-q., 43–46-betlar; [5], 1-t.,46–54-betlar; [12], 1-q.,72–74-betlar; [9], 1-t., 3-bo'lim, [30], 11-bo'lim).

1.2.12. Ketma-ketlik limitining ta'riflari ([3],1-q., 38–42-betlar; [5]. 1-t.,46–47-betlar; [12], 1-q.,68–69-betlar).

1.2.13. Tengsizliklarda limitga o'tish ([1],1-t., 5-, 6-bo'limlar; [3],1-q., 44–46-betlar; [5], 1-t.,56–57-betlar; [12], 1-q.,79–81-betlar; [9], 1-t., 3-bo'lim, [30], 11-bo'lim).

1.2.14. Monoton ketma-ketliklar va ularning chekli limitga ega bo'lishi haqidagi teoremalar ([1],1-t., 5-, 6-bo'limlar; [3],1-q., 51–53-betlar; [5], 1-t.,70–82-betlar; [12], 1-q.,86–89-betlar; [9], 1-t., 3-bo'lim, [30], 11-bo'lim).

1.2.15. Ixtiyoriy ketma-ketlikning limitga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi ([3],1-q., 56–57-betlar; [5], 1-t.,83–85-betlar; [12], 1-q.,101–104-betlar, [9], 1-t., 3-bo'lim).

1.2.16. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano – Veyershtrass teoremasi ([3],1-q., 57–60-betlar; [5], 1-t.,83–89-betlar; [12], 1-q.,98–101-betlar, [9], 1-t., 3-bo'lim).

1.2.17. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari ta'rifi va ularga misollar ([3],1-q., 60–62-betlar; [5], 1-t.,83–89-betlar; [12], 1-q.,104–108-betlar, [9], 1-t., 3-bo'lim).

1.2. Nazariy (muammoli) topshiriqlar

1.2.1. Ushbu $\{a,b,c\}=\{\{a,b\},c\}$ munosabat o'rinli bo'ladimi?

1.2.2. Ushbu $A\setminus(B\cup C)=A\setminus B\setminus C$ ayniyatni isbotlang.

1.2.3. Ratsional sonlar to'plamining sanoqli to'plam ekanligini isbotlang.

1.2.4. Ushbu $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ munosabatning o'rinli ekanligini isbotlang.

1.2.5. Ushbu $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ munosabatning o'rinli ekanligini isbotlang.

1.2.6. Ushbu $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ munosabatning o'rinli ekanligini isbotlang.

1.2.7. Ushbu $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ munosabatning o'rinli ekanligini isbotlang.

1.2.8. Ushbu $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ sonning irratsional son ekanligini isbotlang.

1.2.9. Q - ratsional sonlar to'plamini quyidagi $A=\{a: a\in Q,\quad a\leq 5\}$, $B=\{b: b\in Q,\ b>5\}$ ko'rinishda sinflarga ajratish kesim bo'lishini ko'rsating.

1.2.10. Q - ratsional sonlar to'plamini quyidagi $A=\{a: a\in Q,\ a<5\}$, $B=\{b: b\in Q,\ b\geq 5\}$ ko'rinishda sinflarga ajratish kesim bo'lishini ko'rsating.

1.2.11. Q - ratsional sonlar to'plamini quyidagi $A=\{a: a\in Q, a^2<5\}$ $B=\{b: b\in Q, b^2>5\}$ ko'rinishda sinflarga ajratish kesim bo'lishini ko'rsating.

1.2.12. $\sqrt{2}$ sonni aniqlovchi $A\setminus B$ kesim quyidagicha qurilgan: A sinfga $a^2<2$ bo'lgan hamma $a-$ ratsional sonlar tegishli, B sinfga qolgan hamma ratsional sonlar tegishli. Bunda A sinfda eng katta son, B sinfda esa, eng kichik son yo'qligini isbotlang.

1.2.13. c - biror butun sonning kvadratiga teng bo'lmagan musbat son bo'lsin. $\sqrt{c}$ - haqiqiy sonni aniqlovchi $A\setminus B$ kesim quyidagicha qurilgan: B sinfga $b^2>c$ bo'lgan hamma musbat ratsional sonlar tegishli , A sinfga esa, qolgan hamma ratsional sonlar tegishli. Bunda A sinfda eng katta son, B sinfda eng kichik son yo'qligini isbotlang.

1.2.14. Ushbu $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$ tengsizlikni isbotlang.

1.2.15. Ushbu $|x+x_1+x_2+...+x_n|\geq|x|-(|x_1|+|x_2|+...+|x_n|)$ tengsizlikni isbotlang.

1.2.16. Ushbu $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ tenglikni isbotlang.

1.2.17. Ushbu $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)^2}{3}$ tenglikni isbotlang.

1.2.18. Ushbu $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \dfrac{x - (n+1)x^{n-1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$ tenglikni isbotlang.

1.2.19. Ushbu $2^n > 2n+1,\ n > 3$ tengsizlikni isbotlang.

1.2.20. Ushbu $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin(2n-1)x}{2\sin x}$ tenglikni isbotlang.

1.2.21. Ushbu $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ tenglikni isbotlang.

1.2.22. Ushbu $(1+a)^n \geq 1 + na,\ a > -1$ tengsizlikni isbotlang.

1.2.23. Ushbu $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, $x_i > 0,\ i = 0,1,2,\ldots,n$ tengsizlikni isbotlang.

1.2.24. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ bo'lishini isbotlang.

1.2.25. $x_n = \dfrac{3^n}{n^3}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini isbotlang.

1.2.26. Agar $\{x_n\}, \{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralangan bo'lsa, u holda, $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketliklarning ham chegaralanganligini isbotlang.

1.2.27. Agar $\{x_n\}, \{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralanmagan bo'lsa, $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketliklar haqida nima deyish mumkin?

1.2.28. $\{n^2\}$ ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligini isbotlang.

1.2.29. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ ketma-ketlikning limiti nol bo'lishini ta'rifga asosan isbotlang.

1.2.30. Ushbu $\{x_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ekanligini isbotlang.

1.2.31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0, k \in N$ ekanligini isbotlang.

1.2.32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{n^n} = 0$ ekanligini isbotlang.

1.2.33. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 1$ ekanligini isbotlang.

1.2.34. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ekanligini isbotlang.

1.2.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1)$ ekanligini isbotlang.

1.2.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0(a>1)$ ekanligini isbotlang.

1.2.37. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0\ (|q|<1)$ ekanligini isbotlang.

1.2.38. $\{x_n\}$ ketma-ketlik Koshi kriteriysini qanoatlantirsa, $\{x_n^2\}$, $\{\sqrt{|x_n|}\}$ ketma-ketliklar ham Koshi kriteriysini qanoantlantirishini ko'rsating.

1.2.39. Agar $\{x_n\},\{y_n\}$ ketma-ketliklar Koshi kriteriysini qanoatlantirsa, $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$ ketma-ketliklar ham Koshi kriteriysini qanoantlantirishini ko'rsating.

1.2.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$ ekanligini isbotlang.

1.2.45. $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty\ (|a|>1)$ ekanligini isbotlang.

1.2.46. Quyidagi tasdiqlar o'rinlimi? 1) Har qanday cheksiz katta ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi; 2) Har qanday chegaralangan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

1.2.47. Ushbu $\{x_n\}=\left\{1+\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ ketma-ketlikning quyi va yuqori limitlarini toping.

1.3. Amaliy topshiriqlar

1.3.1- masala. A va B to'plamlar berilganda, $A\cup B$, $A\backslash B$, $A\cap B$ larni toping.

1.3.1.1. $A=\{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,3,5,7,9\}$, $B=\{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$.

1.3.1.2. $A=\{2,4,6,8,10,12,......\}$, $B=\{3,6,9,12,15,18,......\}$.

1.3.1.3. $A=\{x\in N:\ 2<x\le 6\}$, $B=\{x\in N:1<x<4\}$, $C=\{x\in N:x^2-4=0\}$ to'plamlar berilganda: 1) $B\cup C$; 2) $A\cap B\cap C$; 3) $A\cup B\cup C$ larni toping.

1.3.1.4. A va B to'plamlar, mos ravishda, $a=4n+2$, $b=3n$, $n\in N$ elementlardan tashkil topgan. $A\cap B$ ni toping.

1.3.1.5. A, B va C to'plamlar, mos ravishda, $A=\{x:x\in N,\ 3\le x<7\}$, $B=\{x:x\in N,\ 1|<x<7\}$, $C=\{x:x\in N,\ x^2-5=0\}$ ko'rinishda berilganda: 1) $A\cup B\cup C$, 2) $A\cap C$; 3) $A\cap B\cap C$ to'plamlarni toping.

1.3.1.6. A va B mos ravishda, $A=\{x: x\in N;\ \ x^2-5x+6\le 0\}$, $B=\{x: x\in N: 2x^2-5x<0\}$ ko'rinishda berilganda: 1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) A/B; 4) B/A to'plamlarni toping.

1.3.1.7. $B=\{(x,y)\in R\times R:\ x+y\ge 1\}$, $A=\{(x,y)\in R\times R:\ x^2+|y|\le 1\}$ to'plamlar berilganda: 1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $A\setminus B$, 4) $B\setminus A$ to'plamlarni toping.

1.3.1.8. A, B va C to'plamlar, mos ravishda, $A=\{x: x\in N,\ 2<x\le 6\}$, $B=\{x: x\in N, 1<x<4\}$, $C=\{x: x\in N,\ x^2-4=0\}$ ko'rinishda berilganda: 1) $B\cup C$; 2) $(A\cap B)\cup(B\cup C)$; 3) BxC; 4) CxB to'plamlarni toping.

1.3. 1.9. 1) $A\cup B=B$; 2) $A\cap B=A$ tengliklarning o'rinli bo'lishi uchun $A\subset B$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

1.3.1.10. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup C$ tenglik o'rinli bo'lishi uchun $C\subset A$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

1.3.1.11. $A=\{x: x\in R,\ x>1\}$, $B=\{x: x\in R,\ x<2\}$ bo'lganda $A\cup B$, $A\cap B$ to'plamlarni toping.

1.3.1.12. $A=\{1;2\}$, $B=\{2;3\}$ bo'lganda, $A\times B$ to'plamni toping.

1.3.1.13. $A=\{1;2\}$, $B=\{2;3\}$ bo'lganda, $B\times A$ to'plamni toping.

1.3.1.14. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$ bo'lganda, $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to'plamlarni toping.

1.3.1.15. $A=\{x: x\in R;\ x>1\}$, $B=\{x: x\in R;\ x<2\}$ bo'lganda. $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to'plamlarni toping.

1.3.1.16. $A=\{\pm 2;\pm 4;\pm 6;\pm 8;\pm 10;\pm 12;\pm 14,...\}$
$B=\{\pm 3;\pm 6;\pm 9;\pm 12,......\}$ to'plamlar berilganda, $A\setminus B$ to'plamni toping.

1.3.1.17. $A=\{\pm 2;\pm 4;\pm 6;.......\}$, $B=\{\pm 3;\pm 6;\pm 9;\pm 12.....\}$ to'plamlar berilganda, $A\cup B$ to'plamni toping.

1.3.1.18. $\{a,b,c\}$ to'plamning kism to'plamlarini toping.

1.3.1.19. $A=\{-1;1\}$, B esa, $(x-1)^2(x+1)^2=0$ tenglamaning ildizlaridan iborat bo'lsa, u holda, A va B to'plamlarni solishtiring.

1.3.1.20. A to'plam n elementdan, B to'plam m elementdan, $A\cap B$ to'plam esa k elementdan tashkil topgan bo'lsa, u xolda: 1) $A\cup B$; 2) $A\times B$ to'plamlarning elementlari sonini aniklang.

1.3.1.21. $A=\{x: x\in R,\ x>2\}$, $B=\{x: x\in R,\ x<3\}$ bo'lganda $A\cup B$, $A\cap B$ to'plamlarni toping.

1.3.1.22. $A=\{3;2\}$, $B=\{3;4\}$ bo'lganda, $A\times B$ to'plamni toping.

1.3.1.23. $A=\{5;6\}$, $B=\{6;7\}$ bo'lganda, $B\times A$ to'plamni toping.

1.3.1.24. $A=\{2,3,4\}$, $B=\{1,2,4,5\}$ bo'lganda, $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to'plamlarni toping.

1.3.1.25. $A=\{x:x\in R;\ x>6\}$, $B=\{x:x\in R;\ x<7\}$ bo'lganda, $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to'plamlarni toping.

1.3.1.26-misol. Agar $A=\{x:x\in N,\ x^2-4x\le 0\}$, $B=\{x:x\in Z,\ x^2-x-6\le 0\}$ bo'lsa, 1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $A\setminus B$; 4) $B\setminus A$ to'plamlarni toping.

Yechilishi ([1],1-t., 3-bo'lim; [2], 1-bo'lim; [3], 26-27-betlar). Ravshanki, $x^2-4x\le 0$ tengsizlikning natural yechimlari $1, 2, 3, 4$ lardan iborat bo'lib, $A=\{1,2,3,4\}$ to'plamni tashkil qiladi. $x^2-x-6\le 0$ tengsizlikning butun yechimlari $-2,-1,0,1,2,3$ lardan iborat bo'lib, ular $B=\{-2,-1,0,1,2,3,\}$ to'plamni tashkil yetadi. 1.4-,1.5-,1.6-ta'riflarga ko'ra, 1) $A\cup B=$ $=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$, 2) $A\cap B=\{1,2;3\}$, 3) $A\setminus B=\{4\}$, 4) $B\setminus A=\{-2;-1;0\}$ dan iborat bo'ladi.

1.3.2 - masala. Matematik induksiya usulidan foydalanib, quyidagi tengliklar va tengsizliklarni isbotlang:

1.3.2.1. $S_n=1+2+3+.......+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.3.2.2. $S_n=1+3+5+......+(2n-1)=n^2$.

1.3.2.3. $S_n=1^3+2^3+3^3+......+n^3=(1+2+3+....+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.3.2.4. $S_n=1^3+3^3+5^3+.....+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

1.3.2.5. $S_n=1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+.....+n\cdot(3n+1)=n(n+1)^2$.

1.3.2.6. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+.....+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

1.3.2.7. $x+x^3+x^5+.....+x^{2n-1}=\dfrac{x-x^{2n+1}}{(1-x)^2},\quad x\ne1$.

1.3.2.8. $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}........\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$.

1.3.2.9. $2^n>2n+1,\quad n>3$.

1.3.2.10. $\frac{1\cdot 3\cdot 5....2n-1}{2\cdot 4\cdot 6....2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n>1$.

1.3.2.11. $2^n\cdot n<n^n$, $n>2$.

1.3.2.12. $3^{n-1}>2n^2-n$ $n\geq 5$.

1.3.2.13. $4^n>7n-5$, $n\in N$.

1.3.2.14. $2^n>5n+1$, $n\in N$, $n\geq 5$.

1.3.2.15. $3^n-2^n\geq n$, $n\in N$.

1.3.2.16. $4^n\geq n^2+3^n$, $n\in N$.

1.3.2.17. n^3+5n, $n\in N$ ning 6 ga karrali ekanligini isbotlang.

1.3.2.18. $7^{2n}-1$, $n\in N$ ning 24 ga karrali ekanligini isbotlang.

1.3.2.19. $15^{2n}+6$, $n\in N$ ning 7 ga karrali ekanligini isbotlang.

1.3.2.20. n juft bo'lganda 3^n+7 ning 8 ga karrali ekanligini isbotlang.

1.3.2.21. n toq bo'lganda 7^n+9 ning 8 ga karrali ekanligini isbotlang.

Matematik induksiya usulidan foydalanib, quyidagi tengliklarni isbotlang:

1.3.1.22. $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.......+\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$;

1.3.1.23. $S_n=2+4+6+......+2n=n(n+1)$;

1.3.1.24. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;

1.3.1.25. $S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+.......+\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}=2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)$.

1.3.2.26-misol. Barcha n $(n\in N)$ sonlar uchun ushbu

$$S_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$$

sonning 133 ga karrali ekanligini isbotlang.

Yechilishi: ([2], 2-bo'lim; [3], 1-q., 5–8-betlar). I. $n=1$ bo'lganda, $S_1=11^{1+2}+12^{2+1}=11^3+12^3=133\cdot 23$ bo'lib, S_1 son 133 ga karrali. Demak, $p(1)$ tasdiq to'g'ri.

II. $n=k$ natural son uchun S_k son 133 ga karrali bo'lsin, ya'ni $S_k=133\cdot m$ $(m\in N)$ deb faraz qilib. Yendi $n=k+1$ bo'lganda S_{k+1} sonining 133 ga karrali, ya'ni $S_{k+1}=133\cdot q$ $(q\in N)$ ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatan ham,

$$S_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11\cdot 11^{k+2} + 12^{2}\cdot 12^{2k+1} = 11\cdot 11^{k+2} + 144\cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11\cdot(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133\cdot 12^{2k+1} = 11\cdot S_k + 133\cdot 12^{2k+1} = 11\cdot 133\cdot m + 133\cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 133\cdot(11\cdot m + 12^{2k+1}) = 133\cdot q,$$

bunda, $q = 11\cdot m + 12^{2k+1}$.

Demak, matematik induksiya usuliga asosan, $\forall n$ $(n\in N)$ lar uchun S_n sonning 133 ga karrali ekanligi isbotlandi.

1.3.3- masala. $\{x_n\}$ketma-ketlikning limiti a ga teng ekanligini ta'rif bo'yicha isbot qiling va $n_0(\varepsilon)$ nomerni ko'rsating.

1.3.3.1. $x_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$, $a = \dfrac{1}{2}$.

1.3.3.2. $x_n = \dfrac{5n-3}{3n-4}$, $a = \dfrac{5}{3}$.

1.3.3.3. $x_n = \dfrac{8+n^2}{1-2n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.4. $x_n = \dfrac{2-4n^2}{3+8n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.5. $x_n = \dfrac{1+n^3}{2-2n^3}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.6. $x_n = \dfrac{n+1}{1-2n}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.7. $x_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a = -2$.

1.3.3.8. $x_n = \dfrac{n}{2n-1}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.9. $x_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

1.3.3.10. $x_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.11. $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$, $a = \dfrac{2}{3}$.

1.3.3.12. $x_n = \dfrac{1+2n^2}{2-4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.13. $x_n = \dfrac{1-3n}{6+n}$, $a = -3$.

1.3.3.14. $x_n = \dfrac{3n^3}{n^3-2}$, $a = 3$.

1.3.3.15. $x_n = \dfrac{6n+12}{6-n}$, $a = -6$.

1.3.3.16. $x_n = \dfrac{3n-1}{2-4n}$, $a = -\dfrac{3}{4}$.

1.3.3.17. $x_n = \dfrac{10n+1}{20n-5}$, $a = \dfrac{1}{2}$.

1.3.3.18. $x_n = \dfrac{25-3n}{3-n}$, $a = 3$.

1.3.3.19. $x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-3}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

1.3.3.20. $x_n = \dfrac{1+3n}{6+n}$, $a = 3$.

1.3.3.21. $x_n = \dfrac{n+2}{4n+1}$, $a = \dfrac{1}{4}$.

1.3.3.22. $x_n = \dfrac{2n-5}{3n-4}$, $a = \dfrac{2}{3}$.

1.3.3.23. $x_n = \dfrac{8+n^2}{1-4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{4}$.

1.3.3.24. $x_n = \dfrac{2-3n^2}{3+6n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.3.3.25. $x_n = \dfrac{1+n^3}{2-5n^3}$, $a = -\dfrac{1}{5}$.

1.3.3.26-misol. $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$ ketma-ketlikning limiti $\frac{2}{3}$ ga teng ekanligini ta'rif bo'yicha isbot qiling va $n_0(\varepsilon)$ nomerni ko'rsating.

Yechilishi: ([2], 2-bo'lim; [3], 1-q., 38–42-betlar). Ixtiyoriy musbat ε sonni olamiz. Bu songa ko'ra, shunday $n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, $\forall n > n_0(\varepsilon)$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikning o'rinli ekanligini ko'rsatish kerak. Buning uchun

$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{5}{3(3n+1)}\right| = \frac{5}{3(3n+1)} < \varepsilon$$

tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz:

$$\frac{5}{3\varepsilon} < 3n+1, \quad \frac{5}{3\varepsilon} - 1 < 3n, \quad \frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon} < n.$$

$n_0(\varepsilon)$ natural son (izlanayotgan nomer) sifatida $\left[\dfrac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right] = n_0(\varepsilon)$ son olinsa,

u holda, $\forall n > n_0(\varepsilon)$ uchun $\left|\dfrac{2n-1}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

1.3.4- masala. Quyidagi sonlar ketma-ketligining limitini hisoblang:

1.3.4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2-n)^2 + (2+n)^2}{(2-n)^2 - (2+n)^2}$.

1.3.4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(2-n)^3 - (2+n)^3}$.

1.3.4.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5-n)^2 - (5+n)^2}{(5+n)^2 - (2-n)^2}$.

1.3.4.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+2n)^2 + 6n^2}$.

1.3.4.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4-n)^2}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$.

1.3.4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3 + (n+3)^3}{(n+1)^4 - (n+2)^4}$.

1.3.4.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2 - 3n}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$.

1.3.4.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^3 - (n+5)}{(3n-1)^3 + (2n+3)}$.

1.3.4.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3 - (4n+3)^3}{(2n+1)^3 - (n-2)^3}$.

1.3.4.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$.

1.3.4.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^4 + 3n^2 - 1}$.

1.3.4.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$.

1.3.4.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}$.

1.3.4.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3 - (n+2)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$.

1.3.4.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4-3n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)}$.

1.3.4.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^3}{(3-n)^3}$.

1.3.4.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

1.3.4.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2+(2n+1)^2}{(n+3)^3-(n+2)^3}$.

1.3.4.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{3}-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$.

1.3.4.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+2)^3+(n-2)^3}$.

1.3.4.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

1.3.4.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7-n)^4-(4-n)^4}{(8-n)^3-(5+n)^3}$.

1.3.4.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(9-n)^2-(7+n)^2}{(2+n)^2-(2-n)^2}$.

1.3.4.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+4n)^3-7n^3}{(1+4n)^2+6n^2}$.

1.3.4.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4-2n)^2}{(3n+1)^2-(3n+1)^3}$.

1.3.4.26-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n-3)^4+(n+2)^4}{(n+5)^4+3}$ limitni hisoblang.

Yechilishi: ([2], 2-bo'lim; [3], 1-q., 37–44-betlar) Bu limitni hisoblashda $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{b}{c}$ formulani bevosita qo'llab bo'lmaydi, chunki berilgan kasr ifodaning surati va maxraji chekli limitga ega emas, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}(n-3)^4+(n+2)^4=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}((n+5)^4+3)=\infty$. Shunday qilib, $\dfrac{(n-3)^4+(n+2)^4}{(n+5)^4+3}$ ifoda $n\to\infty$ da $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bu limitni hisoblashda, ya'ni aniqmaslikni ochish uchun kasr ifodaning surat va maxrajini n^4 ga bo'lamiz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^4+\left(1+\frac{2}{n}\right)^4}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^4+\frac{3}{n^4}}.$$

Endi shakl o'zgartirish natijasida xosil bo'lgan kasr ifodaning limitini hisoblashda yuqorida keltirilgan formulani qo'llash mumkin. Shunday qilib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)^4+(n+2)^4}{(n+5)^4+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^4+\left(1+\frac{2}{n}\right)^4}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^4+\frac{3}{n^4}}=\frac{(1-0)^4+(1+0)^4}{(1+0)^4+0}=2.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

> Limit(((n-3)^4+(n+4)^4)/((n+5)^4+3),n=infinity)=limit(((n-3) ^4+ +(n+4)^4)/((n+5)^4+3),n=infinity).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)^4+(n+4)^4}{(n+5)^4+3}=2.$$

1.3.5- masala. Quyidagi sonlar ketma-ketligining limitini hisoblang:

1.3.5.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

1.3.5.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}$.

1.3.5.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$.

1.3.5.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3-7}+\sqrt[3]{2n^2+3}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$.

1.3.5.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$.

1.3.5.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{\left(n-7\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-n+1}}$.

1.3.5.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[7]{n^7+3}+\sqrt{n-3}}$.

1.3.5.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$.

1.3.5.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

1.3.5.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

1.3.5.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$.

1.3.5.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}$.

1.3.5.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

1.3.5.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

1.3.5.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$.

1.3.5.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[6]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$.

1.3.5.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$.

1.3.5.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.

1.3.5.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

1.3.5.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$.

1.3.5.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}}$.

1.3.5.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}$.

1.3.5.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt{n-3}}$.

1.3.5.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3-9}+\sqrt[3]{2n^2+4}}{\sqrt[4]{n^3+5}+\sqrt{n}}$.

1.3.5.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^5}}{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-5n^2}$.

1.3.5.26-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^3-3}}{\sqrt[10]{n^{20}+3}+\sqrt{n-3}}$ limitni hisoblang.

Yechilishi: ([12], 1-q., 3-bo'lim; [3], 1-q., 37–44-betlar). Bu limitni hisoblashda ham $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{b}{c}$ formulani bevosita qo'llab bo'lmaydi, chunki berilgan kasr ifodaning surati va maxraji chekli limitga ega emas. Bu limitni hisoblashda kasr ifodaning surati va maxrajidagi irratsional ifodadan n ni chiqarib, uning eng katta darajasiga bo'lamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}-n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{n^3}}}{n^2\sqrt[10]{1+\frac{3}{n^{20}}}+n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}-n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt[10]{1+\frac{3}{n^{20}}}+n^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=1.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

> Limit((sqrt(n^4+3)-sqrt(n^3-3))/((n^20+3)^(1/10)+sqrt(n-3)), n=infinity)=limit(((sqrt(n^4+3)-sqrt(n^3-3))/((n^20+3)^(1/10)+ +sqrt(n-3))), n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^3-3}}{(n^{20}+3)^{(1/10)}+\sqrt{n-3}}=1.$$

1.3.6-masala. Quyidagi sonlar ketma-ketligining limitini hisoblang:

1.3.6.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}\right)+\left(n^2-1\right)$.

1.3.6.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$.

1.3.6.3. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}]$.

1.3.6.4. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}]$.

1.3.6.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

1.3.3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}]$.

1.3.6.7. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)\cdot(n+3)}]$.

1.3.6.8. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}]$.

1.3.6.9. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$.

1.3.6.10. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}]$.

1.3.6.11. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$.

1.3.6.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

1.3.6.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

1.3.6.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2-\sqrt{n^2-3}\right)$.

1.3.6.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$.

1.3.6.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$.

1.3.6.17. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}]$.

1.3.6.18. $\lim\limits_{n\to\infty}[n-\sqrt{n(n-1)}]$.

1.3.6.19. $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}]$.

1.3.6.20. $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}]$.

1.3.6.21. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2-2})$.

1.3.6.22 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)$.

1.3.6.23. $\lim\limits_{n\to\infty}n[\sqrt{n(n-3)}-\sqrt{n^2-5}]$.

1.3.6.24. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2-5)}-\sqrt{n^4-6}]$.

1.3.6.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$.

1.3.6.26-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$ ni hisoblang.

Yechilishi: ([2], 2-bo'lim; [3], 1-q., 37–44-betlar).

$$x_n=\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\frac{n^2}{(n^2-n^3)^{2/3}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}$$

ekanligini ko'rish qiyin emas, bundan,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-1\right)^{2/3}-\left(\frac{1}{n}-1\right)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}.$$

1.3.7-masala. Quyidagi sonlar ketma-ketligining limitini hisoblang:

1.3.7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+....+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

1.3.7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}]$.

1.3.7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

1.3.7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+3}-n]$.

1.3.7.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)}{(n+3)!}$. **1.3.7.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

1.3.7.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n-3)!}$. **1.3.7.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$.

1.3.7.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+...+n}$. **1.3.7.10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

1.3.7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$. **1.3.7.12.** $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n+2}{1+2+3+.....+n}-\frac{2}{3}]$.

1.3.7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+..+n}{n-n^2+3}$. **1.3.7.14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

1.3.7.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+......+3n}{n^2+4}$. **1.3.7.16.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+...+2n}{n+3}-n\right)$.

1.3.7.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n-2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$. **1.3.7.18.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+....+(5n-3)}$.

1.3.7.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6.....+2n}{1+3+5+.....+(2n-1)}$. **1.3.7.20.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

1.3.7.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)!}$. **1.3.7.22.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-5^{n+1}}{3^{n+1}+5^{n+2}}$.

1.3.7.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!+(2n+1)!}{(2n+3)!}$. **1.3.7.24.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$.

1.3.7.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}$.

1.3.7.26-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...\frac{1}{n^2+5n+6})$ ni hisoblang.

Yechilishi: ([30], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 37–44-betlar). Berilgan ketma-ketlikni shakl o‘zgartirish natijasida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x_n=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+....+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

Hosil bo‘lgan kasr ifodaning limitini hisoblashda yaqinlashuvchi ketma-ketliklar haqidagi 3-xossani qo‘llash mumkin.

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3})=\frac{1}{3}$.

1.3.8- masala. Quyidagi sonlar ketma-ketligining limitini hisoblang:

1.3.8.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$.

1.3.8.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

1.3.8.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

1.3.8.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

1.3.8.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

1.3.8.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

1.3.8.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

1.3.8.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

1.3.8.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

1.3.8.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

1.3.8.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$.

1.3.8.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^2}$.

1.3.8.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

1.3.8.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

1.3.8.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

1.3.8.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

1.3.8.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

1.3.8.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$.

1.3.8.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

1.3.8.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

1.3.8.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+31}\right)^{n}$.

1.3.8.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n+1}\right)^{n+1}$.

1.3.8.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{3n^2+1}\right)^{n^2}$.

1.3.8.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{55n-7}{55n+4}\right)^{3n+2}$.

1.3.8.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2+4}\right)^{n^2}$.

1.3.8.26-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2-4}\right)^{n^2}$ limitni hisoblang.

Yechilishi: ([30], 4-bo'lim; [3], 1-q., 37–44-betlar).

$\left(\dfrac{n^2+4}{n^2-4}\right)^{n^2}=\dfrac{(1+\frac{4}{n^2})^{n^2}}{(1-\frac{4}{n^2})^{n^2}}$. Bu kasrning surati va maxrajiga $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{b}{c}$

formulani qo'llasak, natijada, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ formulaga asosan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2-4}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{4}{n^2})^{n^2}}{(1-\frac{4}{n^2})^{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{4}{n^2})^{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{4}{n^2})^{n^2}}=\frac{e^4}{e^{-4}}=e^8$$

ekanligini topamiz.

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit(((n^2+4)/(n^2-
4))^n^2,n=infinity)=limit(((n^2+4)/
(n^2-4))^n^2,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2-4}\right)^{(n^2)}=e^8.$$

1.3.9-masala. Koshi kriteriysi, monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema yoki limitlar ustidagi amallar haqidagi teoremalardan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

1.3.9.1. $x_n=\dfrac{\sin 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\sin 2}{2\cdot 3}+.....+\dfrac{\sin n}{n\cdot(n+1)}$.

1.3.9.2. $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+...+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

1.3.9.3. $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+.....+\dfrac{1}{n^2}$.

1.3.9.4. $x_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$.

1.3.9.5. $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)....\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

1.3.9.6. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)...\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

1.3.9.7. $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

1.3.9.8. $x_n=\dfrac{\lg n}{n}$.

1.3.9.9. $x_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$.

1.3.9.10. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1.3.9.11. $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

1.3.9.12. $x_n = \dfrac{\cos 1}{3} + \dfrac{\cos 2}{3^2} + ... + \dfrac{\cos n}{3^n} + ... + \dfrac{\cos n}{3^n}$, $n \in N$.

1.3.9.13. $x_n = \dfrac{\sin a}{2} + \dfrac{\sin 2a}{2^2} + \dfrac{\sin 3a}{2^3} + ... + \dfrac{\sin na}{2^n}$, $n \in N$.

1.3.9.14. $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$, $n \in N$ $(2n+1)!!$–1 dan $2n+1$ gacha bo'lgan toq sonlar ko'paytmasi.

1.3.9.15. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

1.3.9.16. $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1.3.9.17. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{n^n}$.

1.3.9.18. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + .. + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

1.3.9.19. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ..., $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2}}}$.

1.3.9.20. $x_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{3^2} + ... + \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

1.3.9.21. $x_n = \dfrac{\sin 1}{3} + \dfrac{\sin 2}{3^2} + ... + \dfrac{\sin n}{3^n}$.

1.3.9.22. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{2} + \dfrac{\cos 2!}{2^2} + ... + \dfrac{\cos n!}{2^n}$.

1.3.9.23. $x_n = \dfrac{\sin 1}{5} + \dfrac{\sin 2}{5^2} + ... + \dfrac{\sin n}{5^n}$.

1.3.9.24. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{7} + \dfrac{\cos 2!}{7^2} + ... + \dfrac{\cos n!}{7^n}$.

1.3.9.25. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$.

1.3.9.26-misol. Ushbu $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligini Koshi kriteriysi orqali ko'rsating.

Yechilishi: ([2], 2-bo'lim; [3], 1-q., 37–44-betlar). $\forall \varepsilon > 0$ sonni olaylik. U holda,

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}=\frac{p}{n(n+p)}=\frac{\frac{p}{n+p}}{n}<\frac{1}{n}.$$

$n_0(\varepsilon)=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ deb olinsa, u holda, $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ tengsizlik $\forall p\in N$ uchun bajariladi.

Shunday qilib, berilgan ketma-ketlik, Koshi kriteriysiga ko‘ra, yaqinlashuvchi bo‘ladi.

1.3.10-masala. Quyidagi ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlarini toping.

1.3.10.1. $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$. **1.3.10.2.** $x_n=(-1)^{n+1}$.

1.3.10.3. $x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$. **1.3.10.4.** $x_n=\cos\frac{n\pi}{4}$.

1.3.10.5. $x_n=3^{(-1)^n}n$. **1.3.10.6.** $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

1.3.10.7. $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{5}{4},\ldots\ldots,\frac{1}{2^{\cdot}},\ldots\ldots,\frac{2^n+1}{2^n},\ldots\ldots\right\}$

1.3.10.8. $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\ldots,\frac{9}{4},\ldots,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\ldots,\frac{3^n}{2^n},\ldots\right\}$

1.3.10.9. $x_n=n^{(-1)^n}$. **1.3.10.10.** $x_n=1-\frac{1}{n}$.

1.3.10.11. $x_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$. **1.3.10.12.** $x_n=(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$.

1.3.10.13. $x_n=1+\frac{n}{n+1}\cos^2\frac{n\pi}{2}$. **1.3.10.14.** $x_n=(-1)^n\frac{3n-1}{n+2}$.

1.3.10.15. $x_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$. **1.3.10.16.** $x_n=1+\frac{5n}{5n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$.

1.3.10.17. $x_n=(-1)^n.n$ **1.3.10.18.** $x_n=1+n\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$.

1.3.10.19. $x_n=1+\frac{n}{n+1}\cos^2\frac{\pi n}{2}$. **1.3.10.20.** $x_n=(-1)^n\frac{2n+1}{3n}$.

1.3.10.21. $x_n=(-1)^{n+1}$.

1.3.10.22. $x_n = (-1)^n \dfrac{3n-1}{5n+3}$. **1.3.10.23.** $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{3\pi n}{4}$.

1.3.10.24. $x_n = \dfrac{3n-2}{3n+1}\cos\dfrac{\pi n}{4}$. **1.3.10.25.** $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3}$.

1.3.10.26-misol. Ushbu $x_n = 1 + \dfrac{n}{1+n}\cos\dfrac{\pi n}{2}$ ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlarini toping.

Yechilishi: ([2], 3-bo'lim; [3], 1-q., 37–56-betlar). Ravshanki, $x_{4n-2} < x_{2n-1} < x_{4n}$ tengsizlik o'rinli. Bunda osonlik bilan ko'rsatish mumkin, $\{x_{4n-2}\}$ ketma-ketlik kamayuvchi, $\{x_{4n-2}\}$ ketma-ketlik o'suvchi. Shuning uchun:

$$\inf\{x_n\} = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4n-2}{4n-1}\right) = 0, \quad \sup\{x_n\} = \varlimsup_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4n}{4n+1}\right) = 2.$$

2-MUSTAQIL ISH.
FUNKSIYANING LIMITI. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI VA TEKIS UZLUKSIZLIGI

Mavzular

2.1. Ixtiyoriy argumentli funksiyaning limiti.

2.2. Funksiya limitga ega bo'lishining zaruriy va yetarli sharti (Koshi kriteriysi).

2.3. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar.

2.4. Aniqmas ifodalar.

2.5. Murakkab funksiyaning limiti.

2.6. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar.

2.7. Funksiyalarni solishtirish. $O(f)$ va $o(f)$ belgilar.

2.8. Funksiyaning yuqori va quyi limitlari.

2.9. Uzluksiz funksiyaning ta'riflari.

2.10. Funksiya uzilish nuqtalarining turlari.

2.11. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning lokal xossalari.

2.12. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

2.13. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

2.14. Monoton funksiyalarning uzluksizligi.

2.15. Teskari funksiyaning uzluksizligi.

2.16. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar).

2.17. Funksiyaning tekis uzluksizligi.

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA TEOREMALAR

2.1. Ixtiyoriy argumentli funksiyaning limiti

2.1-ta'rif. Agar $U_\varepsilon(a)$ $(\varepsilon>0)$ atrofda hech bo'lmaganda X to'plamning a dan farqli bitta nuqtasi joylashsa, a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi (quyuqlanish nuqtasi)* deb ataladi.

1^0. Agar a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari (elementlari) joylashgan bo'ladi.

2^0. Agar a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, X to'plam nuqtalaridan (elementlaridan) har doim a ga intiluvchi $\{x_n\}$ $(x_n \in X,\ x_n \neq a;\ n=1,2,...)$ ketma-ketlik tuzish mumkin.

2.2-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ $(x_n \in X, x_n \neq a; n=1,2,...)$ ketma-ketlik olganda ham, unga mos kelgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona (chekli yoki cheksiz) b limitga intilsa, shu b limit $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi (yoki $x \to a$ dagi) limiti* deb ataladi va u $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ yoki $x \to a$ da $f(x) \to b$ kabi belgilanadi.

2.3-ta'rif (Koshi ta'rifi). Agar istalgan $\forall \varepsilon > 0$ con uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x-a| < \delta, x \in X$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi ($x \to a$dagi) limiti* deb ataladi.

2.1-eslatma. 2.2- va 2.3- ta'riflar o'zaro ekvivalent ta'riflardir.

Agar $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C = C(\varepsilon) > 0$: $\forall x, x > C, x \in X, |f(x)-b| < \varepsilon$;

$\forall x, x < -C, x \in X, |f(x)-b| < \varepsilon$; $\forall x, |x| > C, x \in X, |f(x)-b| < \varepsilon$

u holda, ular, mos ravishda, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ kabi yoziladi.

2.4-ta'rif (funksiya limitining $x \to \infty$ da Geyne ta'rifi). Agar X to'plamning nuqtalaridan (elementlaridan) tuzilgan har qanday cheksiz katta $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, unga mos kelgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning *$x \to \infty$ dagi limiti* deyiladi va u $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

2.5-ta'rif (funksiya limitining $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) da Geyne ta'rifi). Agar X to'plamning musbat (manfiy) elementlaridan tuzilgan har qanday cheksiz katta $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, unga mos kelgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b limitga intilsa, shu b limit $f(x)$ funksiyaning *$x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) dagi limiti* deyiladi va u $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$) kabi belgilanadi.

2.6-ta'rif (funksiyaning chekli nuqtadagi cheksiz limitlari). Agar istalgan $\forall E > 0$ son uchun shunday $\exists \delta = \delta(E) > 0$ mavjud bo'lib, $\forall x \in \dot{U}_E(a) \cap X$ uchun $|f(x)| > E$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, ya'ni $f(x) \in U_E(\infty) = \{x : x \in R, |x| > E\}$, u holda, $f(x)$ funksiya $x \to a$ $(x=a)$ *da ∞ limitga ega* deyiladi va $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ kabi yoziladi.

2.7-ta'rif. Agar $\forall E > 0$ son uchun shunday $\exists \delta = \delta(E) > 0$: $: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap X$ uchun $f(x) > E$ ($f(x) < -E$) bo'lsa, u holda, $f(x)$ funksiya

$x \to a$ $(x = a)$ da $+\infty$ $(-\infty)$ *limitga* *ega* deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty)$ kabi yoziladi.

2.8-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar X to'plamning nuqtalaridan (elementlaridan) tuzilgan va har biri hadi a dan katta (kichik) bo'lib, a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, unga mos kelgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b songa intilsa, shu b son $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi o'ng (chap)* limiti deb ataladi.

2.9-ta'rif (Koshi ta'rifi). Agar istalgan $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument x ning $U_\delta^+(a)$ $(U_\delta^-(a))$ atrofdagi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng (chap) limiti* deb ataladi va u, mos ravishda, quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ yoki } f(a+0) = b \;\; (\lim_{x\to a-0} f(x) = b \text{ yoki } f(a-0) = b).$$

Ravshanki, 2.8 - va 2.9- ta'riflar o'zaro ekvivalent ta'riflardir.

2.2-eslatma. Funksiyaning biror nuqtada bir tomonli limitlari mavjud bo'lishidan, uning shu nuqtada limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

2.1- teorema. $f(x)$ funksiyaning a nuqtada b limitga ega bo'lishi uchun, uning shu nuqtada o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

2.2. Funksiya limitga ega bo'lishining zaruriy va yetarli sharti (Koshi kriteriysi)

$f(x)$ funksiya $X (X \subset R)$ to'plamda aniqlangan, a (chekli yoki cheksiz) nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

2.10-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, argument x ning $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' $x' \in X$, $x'' \in X$ qiymatlarida

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada *Koshi sharti* bajariladi, deyiladi.

$f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi shartining bajarilmasligi quyidagicha ifodalanadi: $\forall\delta > 0$ son olingada ham, shunday $\varepsilon > 0$ va

$0<|x'-a|<\delta,\ 0<|x''-a|<\delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x', x'' $(x'\in X, x''\in X)$ lar uchun, $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2.2- teorema (Koshi). $f(x)$ funksiyaning a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun, uning uchun a nuqtada Koshi shartining bajarilishi zarur va yetarli.

2.3- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'ladi va agar $f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty\ (-\infty)$ bo'ladi.

2.3. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar

$X\ (X\subset R)$ to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. $f(x)$, $h(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

2.4- teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega va ularning limitlari, mos ravishda, b va c bo'lsa, u holda, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(c\neq 0)$ funksiyalar ham shu a nuqtada chekli limitga ega bo'ladi va ushbu

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=b\pm c, \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=b\cdot c. \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\to a}(kf(x))=k\lim_{x\to a}f(x)=kb,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c} \tag{2.3}$$

munosabatlar o'rinli.

2.3-eslatma. Yuqoridagi (2.1) va (2.2) qoidalar, qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lganda ham o'rinli.

2.4-eslatma. (2.1), (2.2) va (2.3) qoidalarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyalarning limitga ega bo'lishidan, bu funksiyalar har birining limitga ega bo'lishi, har doim ham kelib chiqavermaydi.

2.5- teorema. Agar a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofidan olingan x ning barcha qiymatlarida $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $x\to a$ da

$g(x)$ va $h(x)$ funksiyalar limitga ega bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ bo‘lsa, u holda, $f(x)$ funksiya ham a nuqtada limitga ega va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo‘ladi.

2.4. Aniqmas ifodalar

Yuqoridagi 2.4- teoremada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalardan quyidagi ikki shart bajarilishi talab qilingan edi: 1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada chekli limitga ega; 2) $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limitiga doir mulohazalarda esa, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c\neq 0$ bo‘lsin, deb faraz qilingan edi. Agar $x\to a$ da bu shartlarning birortasi bajarilmasa, ya’ni jumladan: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ bo‘lsa, ularning $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbati $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, ularning $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbati $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi; 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, ularning $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytmasi $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. 4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty\,(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty\,(+\infty)$ bo‘lsa, u holda, $f(x)+g(x)$ ifoda $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bu hollarda $x\to a$ va $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning o‘z limitlariga qanday intilish xususiyatlariga qarab, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)+g(x)$ ifodalarning xarakterini aniqlash, *aniqmaslikni ochish* deb yuritiladi.

2.5. Murakkab funksiyaning limiti

$t=\varphi(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan va bu funksiyaning qiymatlar to‘plamida T da $y=f(t)$ funksiya aniqlangan bo‘lib, ular yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya aniqlangan bo‘lsin. a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Murakkab funksiya X to‘plamida aniqlangan.

2.6-teorema. Agar: 1) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=c$ limit o‘rinli bo‘lib, a nuqtaning shunday $\dot{U}_\delta(a)$ atrofi mavjud bo‘lsinki, barcha $x\in U_\delta(a)$ lar uchun $\varphi(x)\neq c$ bo‘lsa; 2) c nuqta T to‘plamning limit nuqtasi bo‘lib, $\lim\limits_{t\to c} f(t)=b$ limit mavjud bo‘lsa, u holda, $x \to a$ da $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = \lim_{t \to c} f(t) = b \qquad (2.4)$$

bo‘ladi.

$f(t)$ funksiya c nuqtada uzluksiz bo‘lgan holda, (2.4) tenglikni

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to a} \varphi(x)\right)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

2.5-eslatma. Teoremadagi a nuqtaning $\dot{U}_\delta(a)$ atrofida $\varphi(x) \neq c$ bo‘lsin degan shartni $f(t)$ funksiya $t = c$ nuqtada aniqlangan va $\lim_{t \to c} f(t) = f(c) = b$ tengliklar o‘rinli bo‘lsin degan shart bilan almashtirish mumkin.

2.6-eslatma. Yuqoridagi a, c va b larning biri chekli, ikkinchisi ∞ yoki barchasi cheksiz bo‘lganda ham 2.6- teorema o‘rinli bo‘ladi.

Funksiyaning limitini hisoblashda quyidagi ajoyib limitlar muhim rol o‘ynaydi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e \quad (e \approx 2{,}71828...) \qquad (2.5)$$

2.7-eslatma. Agar biror $\dot{U}_\delta(x_0)$ atrofda $\alpha(x) \neq 0$ va $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, u holda, $\lim_{x \to x_0}(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$ bo‘ladi.

2.8-eslatma. Agar biror $\dot{U}_\delta(x_0)$ atrofda $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$ va $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lambda$ bo‘lsa, u holda, $\lim_{x \to x_0}(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}} = e^\lambda$ bo‘ladi. Xususiy holda, $\lim_{x \to x_0}(1 + \mu\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e^\mu$, $\mu = const$.

(2.5) formuladan natija sifatida kelib chiqadigan ushbu

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0,$$

(xususiy holda $a = e$ bo‘lganda)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

formulalar funksiya limitini hisoblashda ko‘p qo‘llaniladi.

Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lib, $f(x) > 0$ hamda a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda, daraja ko'rsatkichli funksiyaning limiti

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)]}$$

formula orqali topiladi, ya'ni daraja ko'rsatkichli funksiyaning limitini topish masalasi, $\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)]$ limitni topishga olib kelinar ekan. Bu limitni hisoblashda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1). Agar $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \ln f(x) = B$ bo'lsa, u holda, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = e^B$ va

$$e^{\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)]} = e^{AB} = (e^B)^A = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

formula o'rinli bo'ladi.

2). Agar $\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)] = +\infty$ bo'lsa, u holda, $e^{\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)]} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)] = -\infty$ bo'lganda esa, $e^{\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)]} = 0$ bo'ladi.

Agar $\lim\limits_{x \to a}[g(x)\ln f(x)] = \infty$ va $g(x)\ln f(x)$ ko'paytma funksiyaning biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofda ishorasi saqlanmasa, u holda, $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ funksiya $x \to a$ da limitga ega bo'lmaydi.

3). $g(x)\ln f(x)$ ko'paytma funksiyada $x \to a$ da birining limiti nul, ikkinchisining limiti esa cheksiz bo'lsa, bu holda, quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

$a)$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (∞^0),

$b)$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ (0^0),

$c)$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ (1^∞).

2.9-eslatma. Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ bo'lsa, u holda, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik, 1) holni e'tiborga olgan holda,

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to a}\left\{[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a}(f(x)-1)g(x)}$$

formula yordamida ochiladi.

2.6. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar

X to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. X to'plamda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

2.11-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da *cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

Agar X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya $x\to a$ da b limitga ega bo'lsa, u holda, $\alpha(x)=f(x)-b$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Chunki $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-b)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-b=0$.

Demak, b limitga ega bo'lgan har qanday $f(x)$ funksiyani

$$f(x)=b+\alpha(x)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda, $\alpha(x)$ – cheksiz kichik funksiya.

2.12- ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ da *cheksiz katta funksiya* deyiladi.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi (ayirmasi) cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2^0. Cheksiz kichik funksiya bilan chegaralangan funksiyalarning ko'paytmasi cheksiz kichik bo'ladi.

3^0. Agar $\alpha(x)$ $(\alpha(x)\neq 0)$ cheksiz kichik funksiya bo'lsa, $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

4^0. Agar $\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo'lsa, $\dfrac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

5^0. Agar $x\to a$ da $f(x)$ cheksiz katta funksiya bo'lsa, $g(x)$ esa biror $U_\delta(a)$ da $|g(x)|>c$ $(x\neq a,\ c$ - biror musbat son) bo'lsa, u holda, $f(x)g(x)$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

2.10-eslatma. Cheksiz katta funksiyalarning yig'indisi (ayirmasi) va nisbati cheksiz katta funksiya bo'lmasligi ham mumkin.

2.7. Funksiyalarni solishtirish. $O(f)$ va $o(f)$ belgilar

X to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lsin. a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni solishtiramiz.

2.13- ta'rif. Agar shunday $\delta>0$ va $C>0$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, $\forall x\in U_\delta(a)$ uchun $|f(x)|\le C|g(x)|$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi va $f(x)=O(g(x))$ kabi yoziladi.

Xuddi shunday $x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ da ham, $f(x)=O(g(x))$ yozish saqlanadi.

Xususiy holda, $f(x)$ funksiya $\dot{U}_\delta(a)$ atrofda chegaralangan bo'lsa, u $x\to a$ da $f(x)=O(1)$ kabi yoziladi.

2.14-ta'rif. Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x)=O(g(x))$ $g(x)=O(f(x))$ va munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda, $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar bir xil tartibli funksiyalar deb ataladi va $f(x)\asymp g(x)$, $x\to a$ kabi belgilanadi.

2.7-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ mavjud bo'lib, $k\neq 0$ bo'lsa, u holda, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ da bir xil tartibli funksiyalar bo'ladi.

2.15-ta'rif. Agar biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ cheksiz kichik funksiyalar uchun $f(x)=\varphi(x)g(x)$ tenglik o'rinli bo'lib, bunda $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo'lsa, u holda, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi va u $f(x)=o(g(x))$ kabi belgilanadi.

Xususiy holda, agar $g(x)=1$ bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)=o(1)$ ifoda $f(x)$ funksiyaning cheksiz kichik funksiya ekanligini anglatadi, ($x\to a$ da $f(x)\to 0$).

Xuddi yuqoridagidek, $f(x)=o(g(x))$ simvolik ifodaning mazmuni $x\to a-0$, $x\to a+0$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ da ham saqlanadi.

2.8-teorema. $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ cheksiz kichik funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya bo'lishiga, $\forall x\in\dot{U}_\delta(a)$ uchun $g(x)\neq 0$ bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

$o(f)$, $O(f)$ belgilar (simvol) bilan ishlash vaqtida quyidagi qoidalarga amal qilish kerak:

1) $o(cf)=o(f)$, c – o'zgarmas son. 2) $o(f)+o(f)=o(f)$.

3) $o(f)\cdot o(g)=o(f\cdot g)$. 4) $o(o(f))=o(f)$.

5) $O(cf)=O(f)$. 6) $O(o(f)=O(f)$.

7) $O(o(f)=o(O(f))=o(f)$. 8) $g\cdot O(f)=O(g\cdot f)$, $g\cdot o(f)=o(g\cdot f)$.

9) $O(f)\cdot O(f)=O(f^2)$, $O(f)\cdot o(f)=o(f^2)$, $o(f)\cdot o(f)=o(f^2)$.

2.16- ta'rif. Agar biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x)=\varphi(x)g(x)$ tenglik o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$

bo'lsa, $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar *o'zaro ekvivalent funksiyalar* deb ataladi va $x \to a$ da $f(x) \sim g(x)$ kabi belgilanadi.

2.9-teorema. $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $\dot{U}_\delta(a)$ da $(g(x) \neq 0\ f(x) \neq 0)$ o'zaro ekvivalent bo'lishi uchun,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Odatda,, ekvivalentlik tushunchasi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz kichik va cheksiz katta bo'lgan hollarda ishlatiladi.

Funksiyalarning ekvivalentlik tushunchasi quyidagi sodda xossalarga ega:

1) $x \to a$ da $f(x) \sim f(x)$;

2) agar $f(x) \sim g(x)$ bo'lsa, $g(x) \sim f(x)$ ham bo'ladi;

3) $x \to a$ da $f(x) \sim g(x)$. va $g(x) \sim h(x)$ bo'lsa, u holda, $f(x) \sim h(x)$ bo'ladi;

4) agar $f(x) \sim g(x)$ bo'lsa, u holda, $f(x) = O(g(x))$ bo'ladi;

5) agar $f(x) \sim g(x)$ va $h(x) \sim S(x)$ bo'lsa, $f(x)h(x) \sim g(x)S(x)$ bo'ladi;

6) agar $\lim_{x \to a} f(x) = k \neq 0$ bo'lsa, $f(x) \sim k$ bo'ladi.

Bu xossalardan quyidagi munosabat kelib chiqadi: agar $f(x) \sim g(x)$ bo'lsa, u holda, $f(x) - g(x) = o(g(x))$ yoki $f(x) = g(x) + o(g(x))$ (2.6) munosabat o'rinli. Agar $f(x)$ funksiya (2.6) ko'rinishda tasvirlangan bo'lsa, u holda, $g(x)$, $x \to a$ da $f(x)$ ning *bosh qismi* deb ataladi.

Funksiyalarning limitini hisoblashda $x \to 0$ da ekvivalent quyidagi funksiyalar ko'proq ishlatiladi:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

2.8. Funksiyaning yuqori va quyi limiti

$f(x)$ funksiya X $(X \subset R)$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

2.17- ta'rif. Agar X to'plamning elementlaridan tuzilgan va $x_n \to a$ shunday $\{x_n\}$ $(x_n \neq a,\ n = 1,2,...)$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi qismiy limiti deb ataladi. Cheksiz va bir tomonli qismiy limitlar ham, xuddi shunday ta'riflanadi.

Funksiyaning qismiy limitlari ichida har doim eng kattasi va eng kichigi topiladi. Ular, mos ravishda, funksiyaning yuqori va quyi limiti deb ataladi va $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$, $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ kabi belgilanadi. $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ tenglikning bajarilishi funksiyaning limitga ega bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartidan iborat.

2.9. Uzluksiz funksiyaning ta'riflari

$f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin, $a \in X$.

2.18-ta'rif. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(a)$ ga teng, ya'ni:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (2.7)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

$a = \lim\limits_{x\to a} x$ ekanligini e'tiborga olgan holda, (2.7) tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$.

Demak, funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsa, "lim" belgisi bilan funksiyaning xarakteristikasi "f" ning o'rnini almashtirish mumkin.

2.19-ta'rif (Geyne). Agar X to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, funksiyaning unga mos qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

2.20-ta'rif (Koshi). Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon, a)>0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

2.21-ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning barcha $x \in U_\delta(a)$ qiymatlarida $f(x)$ funksiyaning mos qiymatlari $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deyiladi .

Matematik belgilardan foydalanib, 2.19-, 2.20-, 2.21-ta'riflarni, mos ravishda, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\forall\{x_n\}: \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a);$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0: \ \ \forall x: |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0: \ \ \forall x: U_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Bunda, $x-a$ ayirmaga argument orttirmasi, $f(x)-f(a)$ ayirmaga esa, funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular, mos ravishda, Δx va Δy yoki $\Delta f(a)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a).$$

Argument va funksiya orttirmasini quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$x = a + \Delta x, \quad \Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) \qquad (2.8)$$

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsa, (2.7) va (2.8) munosabatlardan $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa, funksiya uzluksizligini quyidagicha ta'riflash ham mumkinligini ko'rsatadi.

2.22-ta'rif. Agar x argumentning a nuqtadagi Δx orttirmasi nolga intilganda, $f(x)$ funksiyaning unga mos Δf orttirmasi ham nolga intilsa, ya'ni $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deyiladi

2.11-eslatma. X to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, a X to'plamning limit nuqtasi bulmasa, ya'ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ma'noga ega bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligi haqida gapirishning ma'nosi yo'q.

$X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniklangan bo'lib, $a \in X$ esa, X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

2.23-ta'rif. Agar $x \to a+0$ $(x \to a-0)$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va u $f(a)$ ga teng, ya'ni:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0),\ f(a+0) = f(a).$$
$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0),\ f(a-0) = f(a)\right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz* deyiladi.

2.24-ta'rif (Geyne). Agar X to'plamning elementlari (nuqtalari) dan tuzilgan va har bir hadi $x_n > a$ $(x_n < a)$ $(n = 1,2,\ldots)$ bo'lib, a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, unga mos kelgan $\{f(x_n)\}$ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ qiymatga intilsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada o'ng (chap) dan uzluksiz* deyiladi.

2.25-ta'rif (Koshi). Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $\delta > 0$ son topilib, argument x ning $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada o'ng (chap) dan uzluksiz* deyiladi.

Ma'lumki, funksiya limitining Geyne va Koshi ta'riflari o'zaro ekvivalent bo'lgani singari, funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining Geyne va Koshi ta'riflari ham o'zaro ekvivalent bo'ladi.

2.26-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya *X to'plamda uzluksiz* deyiladi.

2.27-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lib, $x=a$ nuqtada o'ngdan, $x=b$ nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ *kesmada uzluksiz* deyiladi.

2.10-teorema. $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

2.10. Funksiya uzilish nuqtalarining turlari

$f(x)$ funksiya X $(X\subset R)$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin, $a\in X$.

2.28-ta'rif. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiyaning: 1) limiti mavjud va chekli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty)$; 3) limiti mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada uzilishga* ega deyiladi.

Funksiyaning berilgan nuqtada uzilishga ega bo'lish hollarini alohida qarab o'tamiz:

1-hol. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ va chap $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ limitlari mavjud bo'lib, $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$ munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada yo'qotilishi mumkin bo'lgan uzilishga* ega deyiladi.

2-hol. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib, ular bir-biriga teng bo'lmasa $(f(a-0)\neq f(a+0))$, $f(x)$ funksiya *a nuqtada birinchi tur uzilishga* ega deyiladi.

Ushbu $|f(a+0)-f(a-0)|=h$ ayirmaga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *sakrashi* deyiladi va u $\Delta f(a)$ kabi belgilanadi.

3-hol. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiyaning:

1) o'ng va chap limitlaridan hech bulmaganda bittasi mavjud bo'lmasa;

2) o‘ng va chap limitlaridan biri cheksiz yoki o‘ng va chap limitlari turli ishorali cheksizdan iborat bo‘lsa;

3) (funksiyaning o‘ng va chap limitlari cheksiz) limiti cheksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada ikkinchi tur uzilishga* ega deyiladi.

Agar chap $f(a-0)$ yoki o‘ng $f(a+0)$ limitlardan hech bo‘lmaganda biri ∞ ga teng bo‘lsa, $x=a$ nuqta $f(x)$ funksiyaning cheksiz uzilish nuqtasi deyiladi.

2.11. Nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning lokal xossalari

$f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. X to‘plamdan biror $a\in X$ nuqta olib, bu nuqtaning shu X to‘plamga tegishli bo‘lgan yetarli kichik $U_\delta(a)$ atrofini qaraylik.

1^0. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda, a nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo‘ladi, ya’ni:

$$\exists\delta>0\ \exists C>0:\ \forall x\in U_\delta(a)\rightarrow|f(x)|\le C.$$

2^0. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a)\neq 0$ bo‘lsa, $f(a)$ son bilan a nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ funksiyaning ishorasi bir xil bo‘ladi, ya’ni $\exists\delta>0:\ \forall x\in U_\delta(a)\rightarrow sign f(x)=sign f(a)$.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lib, bu nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x nuqtalarda ham musbat, ham manfiy ishorali qiymatlarni kabul qilaversa, funksiyaning a nuqtadagi qiymati nolga teng bo‘ladi.

3^0. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, a nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x' va x'' nuqtalar uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bunda $\forall\varepsilon>0$ son.

Funksiyaning nuqta atrofidagi xususiyatlariga uning lokal xususiyatlari deyiladi.

2.12. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar

Uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

2.11-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X\subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ularning har biri $a\in X$ nuqtada uzluksiz, ya’ni $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$ bo‘lsa, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$ funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz va

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = f(a)\pm g(a),$$
$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = f(a)\cdot g(a),$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad (g(a)\neq 0)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

2.12-eslatma. Ikkita funksiyaning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbati uzluksiz bo‘lishidan, bu funksiyalardan har birining uzluksiz bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

2.13. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

$y = f(x)$ funksiya X to‘plamda, $z = \varphi(y)$ funksiya esa, Y to‘plamda aniqlangan va $E(\varphi)\subseteq X$ bo‘lsin. U holda, ular yordamida, $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiyani tuzish mumkin bo‘ladi.

2.12-teorema. $y = f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada, $z = \varphi(y)$ funksiya esa a nuqtaga mos kelgan $y_a = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

2.14. Monoton funksiyalarning uzluksizligi

2.13- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, uzilishga ega bo‘lsa, uning uzilishi faqat birinchi tur uzilish bo‘ladi.

Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, uning qiymatlari Y oraliqni tutash to‘ldirsa (ya’ni funksiya har bir $y\in Y$ qiymatni hech bo‘lmaganda bir marta qabul qilsa) bu funksiya X oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

2.15. Teskari funksiyaning uzluksizligi

2.14- teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘lsa, u holda, $[f(a), f(b)]$ da teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo‘lib, u uzluksiz va qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘ladi.

2.16. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar)

$[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan funksiyalarni qaraymiz. bunda a va b nuqtalardagi uzluksizliklar mos ravishda, o'ngdan va chapdan uzluksizlik, deb qaraladi.

2.15-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi, ya'ni $\exists C>0 : \forall x\in[a;b] \to |f(x)|\le C$.

2.16-teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni $[a;b]$ kesmada shunday x_1 va x_2 nuqtalar topiladiki,

$$f(x_1)=\sup_{x\in[a;b]}\{f(x)\},\qquad f(x_2)=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2.17- teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, shunday x_0 $(a<x_0<b)$ nuqta topiladiki, unda $f(x)$ funksiya nolga aylanadi: $f(x_0)=0$.

2.18- teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida $f(a)=A$, $f(b)=V$ qiymatlar qabul qilsa hamda $A\ne B$ bo'lsa, A va B sonlar orasidan ixtiyoriy S son olinganda ham, a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki, $f(s)=S$ bo'ladi.

2.13-eslatma. Veyershtrassning birinchi teoremasi $(a,\ b)$ oraliq uchun har doim ham o'rinli emas.

2.14-eslatma. Uzilishga ega bo'lgan funksiya $[a;b]$ kesmaning har bir nuqtasida aniqlangan, lekin bu kesmada chegaralanmagan.

2.15-eslatma. $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lmagan funksiya uchun Veyershtrassning ikkinchi teoremasi o'rinli emas.

2.16-eslatma. (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun Veyershtrassning ikkinchi teoremasi o'rinli bo'lmasligi ham mumkin.

2.17-eslatma. Xususiy hollarda, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz (uzilishga ega) bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu oraliqda eng kichik va eng katta qiymatiga erishishi mumkin.

2.17. Funksiyaning tekis uzluksizligi

$f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin. X to'plamning har bir nuqtasi uning limit nuqtasi bo'lsin.

2.29-ta'rif. $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilib, X to'plamning $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x',x''$ $(x',x''\in X)$ nuqtalari uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *tekis uzluksiz* deyiladi.

Bu ta'rifni qisqacha,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x',x''\in X,\ |x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

ko'rinishda ifodalash ham mumkin.

2.18-eslatma. $f(x)$ funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifidagi $\delta>0$ son, $\varepsilon>0$ songa bog'liq bo'lib, qaralayotgan x nuqtalarga bog'liq emas.

$f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi tekis uzluksizligi inkorini qisqacha quyidagcha ta'riflash mumkin:

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta(\varepsilon)>0,\ \exists x',x''\in X,\ |x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon.$$

2.19-teorema (Kantor teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.

2.1. O'z-o'zini tekshirish savollari

2.1.1. Funksiyaning ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish sohasi va o'zgarish sohasi. Funksiyaning berilish usullari ([1], 1-t., 3- bo'lim, [3], 1-q., 63–65-betlar; [5], 1-t., 93–114-betlar; [12], 1-q.,109–112-betlar; [9], 1-t., 2- bo'lim).

2.1.2. Funksiyaning chegaralanganligi. Juft va toq funksiyalar, misollar ([1], 1-t., 3- bo'lim, [3], 1-q., 65–68-betlar; [5], 1-t., 93–114-betlar; [12], 1-q.,113–114-betlar; [9], 1-t., 2- bo'lim).

2.1.3. Davriy funksiyalar va ularning xossalari, misollar ([3], 1-q., 66–68-betlar; [5], 1-t., 93–114-betlar; [12], 1-q.,114–119-betlar).

2.1.4. Monoton funksiyalar. Elementar funksiyalar ([1], 1-t., 3- bo'lim, [3], 68–74-betlar; [5], 1-t., 93–114-betlar; [12], 1-q.,119–120-betlar; [9], 1-t., 2- bo'lim, [30], 7-bo'lim).

2.1.5. Murakkab va teskari funksiyalar hamda misollar ([3],1-q., 69–70-betlar; [5], 1-t., 93–114-betlar; [12], 1-q.,120–121-betlar).

2.1.6. Funksiya limiti. To'plamning limit nuqtasi va uning xossalari. Funksiya limitining ta'riflari. Funksiyaning bir tomonli limitlari ([1], 1-t., 9- bo'lim, [3], 1-q., 75–84-betlar; [5], 1-t., 115–135-betlar; [12], 1-q.,127–133-betlar [9], 1-t., 3- bo'lim, [30], 2-bo'lim).

2.1.7. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalari ([1], 1-t., 9-bo'lim, [3], 1-q., 85–68-betlar; [5], 1-t., 115–135-betlar; [12], 1-q.,136–138-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.8. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar ([1], 1-t., 9- bo'lim, [3], 1-q., 85–88-betlar; [5], 1-t., 115–135-betlar; [12], 1-q.,138–139-betlar; [9], 4-t., 3- bo'lim, [30], 2-bo'lim).

2.1.9. Murakkab funksiyaning limiti ([5], 1-t., 115–135-betlar; [12], 1-q.,139–141-betlar).

2.1.10. Monoton funksiyaning limiti ([1], 1-t., 9- bo'lim, [3],1-q., 88–89-betlar; [5], 1-t., 115–135-betlar; [12], 1-q.,141–142-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.11. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar ([1], 1-t., 9-bo'lim, [3],1-q., 91 bet; [5], 1-t., 115–135-betlar; [12], 1-q.,145 bet; [30], 2-bo'lim).

2.1.12. Funksiyalarni taqqoslash. «*O*» va «*o*» belgilar ([1], 1-t., 9-bo'lim, [3], 1-q., 92–96-betlar; [5], 1-t., 136–145-betlar; [12], 1-q.,146–150-betlar; [9], 1-t., 5- bo'lim).

2.1.13. Funksiya uzluksizligi ta'riflari ([3],1-q., 97–98-betlar; [5], 1-t., 146–147-betlar; [12], 1-q.,151–153-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.14. Funksiyaning bir tomonli uzluksizliklari ta'riflari ([3],1-q., 98–99-betlar; [5], 1-t., 150–151-betlar; [12], 1-q.,153–155-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.15. Funksiyaning uzilishlari va ularning turlari ([3],1-q., 101–102-betlar; [5], 1-t., 150–151-betlar; [12], 1-q.,155–158-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.16. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi haqidagi teorema ([3],1-q., 102–103-betlar; [5], 1-t., 154–155-betlar; [12], 1-q.,158–159-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.17. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalar ([3],1-q., 99–101-betlar; [5], 1-t., 148–149-betlar; [12], 1-q.,159–161-betlar; [30], 2-bo'lim).

2.1.18. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema ([3],1-q., 104–105-betlar; [5], 1-t., 156–157-betlar; [12], 1-q.,151 bet; [30], 2-bo'lim).

2.1.19. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizlikdan foydalanish ([12], 1-q.,162–164-betlar;).

2.1.20. Uzluksiz funksiyaning lokal xossalari ([3],1-q., 103–105-betlar; [12], 1-q.,164–165-betlar, [10], 1-q., 167–169-betlar, [28],101bet).

2.1.21. Uzluksiz funksiyaning global xossalari (Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalari) ([3],1-q., 105–108-betlar; [5], 1-t., 175–178-betlar; [12], 1-q.,168–169-betlar).

2.1.22. Uzluksiz funksiyaning global xossalari (Bolsano-Koshining birinchi va ikkinchi teoremalari) ([3],1-q., 108–109-betlar; [5], 1-t., 168–172-betlar; [12], 1-q.,165–168-betlar).

2.1.23. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifi va unga misollar ([3],1-q., 110–111-betlar; [5], 1-t., 178-179-betlar; [12], 1-q.,170–171-betlar).

2.1.24. Kantor teoremasi ([3],1-q., 113–115-betlar; [5], 1-t., 179–182-betlar; [12], 1-q.,172–174-betlar).

2.2. Nazariy (muammoli) topshiriqlar

2.2.1. Analitik usulda berilgan, aniqlanish sohasi faqat bitta sondan iborat bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.2. Analitik usulda berilgan, aniqlashish sohasi [1,2] kesmaning nuqtalardan iborat bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.3. Analitik usulda berilgan, qiymatlar to'plami faqat bitta sondan iborat bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.4. Analitik usulda berilgan, qiymatlar to'plami faqat ikkita sondan iborat bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.5. Analitik usulda berilgan, qiymatlar to'plami natural sonlardan iborat bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.6. Analitik usulda berilgan, qiymatlar to'plami barcha butun sonlardan iborat bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.7. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, monoton bo'lsa, u holda, $f(x)$ funksiya ham monotonligini ko'rsating.

2.2.8. Agar barcha $x \in X$ lar uchun $f(x) > 0$ va monoton bo'lsa, u holda, $\frac{1}{f(x)}$ funksiyaning ham monotonligini isbotlang.

2.2.9. (a,b) intervalda o'suvchi funksiyalarning yig'indisi yana (a,b) da o'suvchi bo'lishini isbotlang.

2.2.10. (a,b) intervalda kamayuvchi funksiyalarning yigindisi yana (a,b) da kamayuvchi bo'lishini isbotlang.

2.2.11. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning biror x_0 nuqtada limitga ega emasligidan, $f(x)+g(x)$ va $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalarning ham bu nuqtada limitga ega emasligi kelib chiqadimi?

2.2.12. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo'lsa, u holda, $x \to x_0$ da $f(x)=O(1)$ bo'lishini isbotlang.

2.2.13. Quyidagi:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$; 3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$

tasdiqlarni logik simvollar (belgilar) yordamida yozing.

2.2.14. Quyidagi: $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega; 2) $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega emas, degan tasdiqlarni logik simvollar yordamida yozing.

2.2.15. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ funksiyaning $a=0$ nuqtada limitga ega emasligini isbotlang.

2.2.16. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ funksiyaning $a=0$ nuqtada limitga ega emasligini isbotlang.

2.2.17. α va β larning qanday qiymatlarida $f(x)=\dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$ funksiya cheksiz kichik bo'ladi?

2.2.18. $O(O(f))=O(f)$ ekanligini isbotlang.

2.2.19. $o(f)+O(f)=O(f)$ ekanligini isbotlang.

2.2.20. α va β larning kanday qiymatlarida $g(x)=\alpha x^{\beta}$, $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ funksiyalar $x\to 0+0$ da o'zaro ekvivalent bo'ladi.

2.2.21. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishining zaruriy va yetarli shartlarini bayon qiling.

2.2.22. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasligini "$\varepsilon-\delta$" tilida yozing.

2.2.23. Birorta ham nuqtada uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

2.2.24. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya esa, shu x_0 nuqtada uzilishga ega bo'lsa, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ va $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalar to'g'risida nima deyish mumkin.

2.2.25. Faqat bir nuqtada, ikki nuqtada va n ta nuqtada uzluksiz bo'lib, qolgan nuqtalarda uzluksiz bo'lmagan funksiyalarga misollar keltiring.

2.2.26. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

2.2.27. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning o'z aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lishini "$\varepsilon-\delta$" tilida isbotlang.

2.2.28. x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya uzluksiz, $g(x)$ funksiya esa uzilishga ega bo'lib, ularning ko'paytmasi x_0 nuqtada 1) uzilishga ega: 2) uzluksiz bo'ladigan funksiyalarga misollar keltiring.

2.2.29. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, ularning nisbati esa x_0 nuqtada uzilishga ega bo'ladigan funksiyalarga misol keltiring.

2.2.30. $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da uzluksiz va chekli $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ mavjud bo'lganda $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty)$ da chegaralanganligini isbotlang.

2.2.31. $f(x)$ funksiya (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda uzluksiz va chekli $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b}f(x)$ limitlar mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning $(a.b)$ da chegaralangan bo'lishini isbotlang.

2.2.32. $[0;1]$ oraliqda chegaralangan, lekin shu oraliqda uzilishga ega bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

2.2.33. $f(x)=\sin x-x+1$ funksiyaning $[0;\pi]$ oraliqning hech bo'lmaganda bitta nuqtasida nolga aylanishini isbotlang.

2.2.34. Funksiyaning biror oraliqda chegaralanganligidan, uning shu oraliqda uzluksiz bo'lishi har doim ham kelib chiqadimi?

2.2.35. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada faqat va faqat $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ tenglik bajarilganda uzluksiz bo'lishini isbotlang.

2.2.36. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar $f(x_0)>0$ bo'lsa, u holda, shunday $\delta>0$ mavjud bo'ladiki, barcha $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ uchun $f(x_0)>0$ shart bajariladi. Isbotlang.

2.2.37. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar $f(x_0)>0$ bo'lsa, u holda, shunday $\delta>0$ mavjud bo'ladiki, barcha $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ uchun $f(x_0)<0$ shart bajariladi. Isbotlang.

2.2.38. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar $f(x)<g(x)$ bo'lsa, u holda, shunday $\delta>0$ mavjud bo'ladiki, barcha $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ uchun $f(x)<g(x)$ tengsizlik bajariladi. Isbotlang.

2.2.39. Agar $f(x)$ funksiya barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, $|f(x)|$ funksiya ham o'sha nuqtalarda uzluksiz bo'lishini isbotlang.

2.2.40. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqdagi xar bir x, t nuqtalar jufti uchun, $|f(x)-f(t)|\le|x-t|$ xossani qanoatlantirsin, u holda, $f(x)$ funksiyaning (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lishini isbotlang.

2.2.41. Agar $f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=Z$ limit mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlang.

2.2.42. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda, funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladimi?

2.2.43. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda o'zining aniq yuqori va aniq quyi chegaralariga crishadimi?

2.2.44. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda tekis uzluksiz bo'ladimi?

2.3. Amaliy topshiriqlar

2.3.1-masala. $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping $(D(f)=?)$.

2.3.1.1. $y=\mathrm{tg}\sqrt{16-x^2}$.

2.3.1.2. $y=\sqrt{5x+2}-\sqrt{x+3}$.

2.3.1.3. $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$.

2.3.1.4. $y=\log_2(x^2-9)$.

2.3.1.5. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

2.3.1.6. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

2.3.1.7. $y=\ln[1-\lg(x^2-5x+6)]$.

2.3.1.8. $y=\arccos x+\sqrt{\dfrac{2}{\pi x-3}}$.

2.3.1.9. $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\lg(9-8x)}$.

2.3.1.10. $y=\sqrt{\cos x}$.

2.3.1.11. $y=\ln\sin x$.

2.3.1.12. $y=\lg\dfrac{3-x^2}{x-1}$.

2.3.1.13. $y=(6-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

2.3.1.14. $y=\arccos(2-x)$.

2.3.1.15. $y=\arcsin\dfrac{3x}{2+x}$.

2.3.1.16. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sin\pi x}$.

2.3.1.17. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

2.3.1.18. $y=3^x-5^{x+1}$.

2.3.1.19. $y=4-3\cos x$.

2.3.1.20. $y=\sqrt{6-5x-x^2}$.

2.3.1.21. $y = \ln \cos x$.

2.3.1.22. $y = \lg \dfrac{4 - x^2}{x - 1}$.

2.3.1.23. $y = (3 - 2x - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

2.3.1.24. $y = \arcsin(4 - x)$.

2.3.1.25. $y = \log_2(x^2 - 16)$.

2.3.1.26-misol. $f(x) = \dfrac{\arccos(x-2) + \sqrt{9 - x^2}}{\log_3(5 - 2x)}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Birinchidan, arkkosinus ma'noga ega bo'lishi uchun uning belgisi ostidagi ifodaning absolyut qiymati 1 dan katta bo'lmasligi, ya'ni $|x-2| \le 1$ yoki $1 \le x \le 3$; ikkinchidan, $9 - x^2 \ge 0$ yoki $-3 \le x \le 3$ bo'lishi; uchinchidan esa, $5 - 2x > 0$ va $\log_3(5 - 2x) \ne 0$ yoki $x < 2{,}5$ va $x \ne 2$ bo'lishi kerak. x ning bu uchta shartni bir vaqtda qanoatlantiradigan barcha qiymatlari to'plami $D(f) = [1;2) \cup (2;2{,}5)$ dan iborat.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = [1;2) \cup (2;2{,}5)$ bo'ladi.

2.3.2-masala. Funksiya limitining Koshi ta'rifidan foydalanib, quyidagi tenglikni isbotlang:

2.3.2.1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10$.

2.3.2.2. $\lim\limits_{x \to 0,5} \dfrac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5$.

2.3.2.3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7$.

2.3.2.4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

2.3.2.5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$.

2.3.2.6. $\lim\limits_{x \to 3} x^4 = 81$.

2.3.2.7. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6$.

2.3.2.8. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

2.3.2.9. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1/2} = 5$.

2.3.2.10. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7$.

2.3.2.11. $\lim\limits_{x \to -0,5} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5$.

2.3.2.12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$.

2.3.2.13. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1$.

2.3.2.14. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81$.

2.3.2.15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = 0$.

2.3.2.16. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5$.

2.3.2.17. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 5x - 1}{x - 1} = 6$.

2.3.2.18. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10$.

2.3.2.19. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6$.

2.3.2.20. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4$.

2.3.2.21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{x+1}=-6.$ **2.3.2.22.** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0.$

2.3.2.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=-1.$ **2.3.2.24.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=1.$

2.3.2.25. $\lim\limits_{x\to -0.5}\dfrac{-6x^2-x+1}{x+1/2}=5.$

2.3.2.26-misol. $\lim\limits_{x\to -2}x^2=4$ bo'lishini Koshi ta'rifi bo'yicha ko'rsating.

Yechilishi. ([2], 4-bo'lim; [3], 1-q., 75-85-betlar, [30], 2- bo'lim). *a)* *δ ni topish.* Faraz qilaylik ixtiyoriy $\varepsilon>0$ berilgan bo'lsin. Biz shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sonni izlaymizki, x ning $0<|x-(-2)|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|x^2-4|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Buning uchun avvalo, $|x^2-4|$ va $|x-(-2)|$ ifodalar orasidagi bog'lanishni topish zarur. Bu bog'lanishni topish uchun esa, ularning ikkalasini ham soddalashtiramiz:

$$|x^2-4|=|x-2||x+2| \text{ va } |x-(-2)|=|x+2|.$$

$|x-2|$ ko'paytuvchi butun sonlar o'qida chegaralanmagan. Shuning uchun ko'paytuvchini sodda holda baholash uchun -2 nuqtani o'z ichida saqlaydigan biror oraliqni ajratamiz. Masalan, $a=-2$ nuqtaning $\delta=1$ atrofi $(-3;-1)$ ni qaraylik. $\forall x\in(-3;-1)$ uchun $|x-2|<5$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib,
$$|x^2-4|<5|x+2| \tag{2.9}$$
tengsizlik o'rinli bo'ladi. $a=-2$ nuqtaning δ atrofi bo'lgan $(-2-\delta;\ -2+\delta)$ oraliq $(-3;\ -1)$ atrofdan chiqib ketmasligi kerak, buning uchun $\delta=\min\left(1;\ \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$ deb olish yetarli.

b) δ ning «ishlash»ini (yaroqliligi) ko'rsatamiz.

Agar $0<|x-(-2)|<\dfrac{\varepsilon}{5}$ bo'lsa, bundan $5|x-(-2)|<\varepsilon$ bo'lishi va (2.9) ga muvofiq, $|x^2-4|<\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

Shunday qilib,
$$\lim_{x\to -2}x^2=4.$$

2.3.3- masala. Quyidagi funksiyaning limitlarini hisoblang:

2.3.3.1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.   2.3.3.2. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

2.3.3.3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.   2.2.3.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

2.2.3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.   2.2.3.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

2.2.3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.2.2.3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

2.2.3.9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.   2.2.3.10. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

2.2.3.11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.   2.3.3.12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

2.3.3.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$.   2.3.3.14. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

2.3.3.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.   2.3.3.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

2.3.3.17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}(m,n\in N)$.   2.3.3.18. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}$.

2.3.3.19. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.   2.3.3.20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

2.3.3.21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{x}-1}$.   2.3.3.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5+20x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-1}$.

2.3.3.23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{2x-4}+2}{x+2}$.   2.2.3.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^3-1}$.

2.2.3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[3]{1-2x}}$.

2.3.3.26-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+8}-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{x+4}}$ limitni hisoblang.

Yechilishi. ([2], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 75–85-betlar, [30], 2- bo‘lim). Limitni hisoblash uchun kasr ifodani surati va maxrajining qo‘shmalariga ko‘paytiramiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+8}-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+8}-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{x+4}}\cdot\frac{\sqrt{x+8}+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{x+4}}\cdot\frac{2+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+8}+2\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+8-8)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{(4-x-4)\left(\sqrt{x+8}+2\sqrt{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((sqrt(x+8)-2*sqrt(2))/(2-
sqrt(x+4)),x=0)=limit((sqrt(x+8)-2*sqrt(2))/(2-
sqrt(x+4)),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+8} - 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{x+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.3.4 - masala. Quyidagi funksiyaning limitlarini hisoblang:

2.3.4.1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

2.3.4.2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

2.3.4.3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

2.3.4.4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

2.3.4.5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}$.

2.3.4.6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$.

2.3.4.7. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

2.3.4.8. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} + \dfrac{1}{x-1} \right)$.

2.3.4.9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

2.3.4.10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

2.3.4.11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x4-1}{2x^4-x^2-1}$.

2.3.4.12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

2.3.4.13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

2.3.4.14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

2.3.4.15. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{2x-x^2} + \dfrac{1}{x^2-3x+2} \right)$.

2.3.4.16. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

2.3.4.17. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

2.3.4.18. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

2.3.4.19. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+4x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

2.3.4.20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

2.3.4.21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$.

2.3.4.22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-10x+9}{x^2-1}$.

2.3.4.23. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

2.3.4.24. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

2.3.4.25. $\lim\limits_{x \to x} \dfrac{x^2-11x+10}{x^2-1}$.

2.3.4.26-misol. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}$ limitini hisoblang.

Yechilishi. ([2], 4-bo'lim; [3], 1-q., 75-85-betlar, [30], 2- bo'lim). Limitni hisoblash uchun kasr ifodaning surat va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2+3x+9}=\frac{1}{27}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((x^2-5*x+6)/(x^3-27),x=3)=limit((x^2-
5*x+6)/(x^3-27),x=3);
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\frac{1}{27}$$

2.3.5 – masala. Quyidagi funksiyaning limitini hisoblang:

2.3.5.1. $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}$.

2.3.5.2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

2.3.5.3. $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\mathrm{tg}\,(\pi(2+x))}$.

2.3.5.4. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

2.3.5.5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

2.3.5.6. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

2.3.5.7. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

2.3.5.8. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

2.3.5.9. $\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4\,\mathrm{arctg}\,3x}$.

2.3.5.10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x^2+5x}$.

2.3.5.11. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$.

2.3.5.12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

2.3.5.13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3\,\mathrm{arctg}\,x}$.

2.3.5.14. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

2.3.5.15. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

2.3.5.16. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

2.3.5.17. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$.

2.3.5.18. $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

2.3.5.19. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

2.3.5.20. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

2.3.5.21. $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{tg\,3x}$.

2.3.5.22. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

2.3.5.23. $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\mathrm{tg}\,(\pi(2+x))}$.

2.3.5.24. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x+4x^2}$.

2.3.5.25. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}$.

2.3.5.26-misol. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 7x-\sin 3x}$ limitni hisoblang.

Yechilishi. ([2], 4-bo'lim; [3], 1-q., 75–85-betlar, [30], 2- bo'lim). Limitni hisoblashda quyidagi:

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x,\ \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

formulalardan foydalanamiz: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 7x-\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{2\sin 2x\cos 5x}=0$ ekanligini topamiz.

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((1-cos(2*x))/(sin(7*x)-
sin(3*x)),x=0)=limit((1-cos(2*x))/(sin(7*x)-
sin(3*x)),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\sin(7x)-\sin(3x)}=0$$

2.3.6 - masala. Quyidagi funksiyaning limitini hisoblang:

2.3.6.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

2.3.6.2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

2.3.6.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

2.3.6.4. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

2.3.6.5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$.

2.3.6.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{\mathrm{tg}^2 \pi x}$.

2.3.6.7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\cos 2x}$.

2.3.6.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\mathrm{tg}\, \pi x}$.

2.3.6.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2x+1-1}}{\ln x}$.

2.3.6.10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg 3x}{\mathrm{tg}\, x}$.

2.3.6.11. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4x^2}}$.

2.3.6.12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

2.3.6.13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$.

2.3.6.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

2.3.6.15. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(x|2)}{\pi-x}$.

2.3.6.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

2.3.6.17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

2.3.6.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

2.3.6.19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

2.3.6.20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\, \pi x}{x+2}$.

2.3.6.21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\lg x}$.

2.3.6.22. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 5x}$.

2.3.6.23. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 9\pi x}{\sin 10\pi x}$. 2.3.6.24. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin 2x}$.

2.3.6.25. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2^x-8}{\sin \pi x}$.

2.3.6.26-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\left(3-\sqrt{9-x}\right)\sin x}$ ni hisoblang.

Yechilishi ([2], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 75-85-betlar, [30], 2- bo‘lim). Funksiyaning limitini hisoblashda quyidagi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ajoyib limitdan foydalanamiz

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\left(3-\sqrt{9-x}\right)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x\left(3+\sqrt{9-x}\right)}{\left(3-\sqrt{9-x}\right)\left(3+\sqrt{9-x}\right)\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\left(3+\sqrt{9-x}\right)}{x}=12.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((1-cos(2*x))/((3-sqrt(9-
x))*sin(x)),x=0)=limit((1-cos(2*x))/((3-sqrt(9-
x))*sin(x)),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{(3-\sqrt{9-x})\sin(x)}=12$$

2.3.7 - masala. Quyidagi funksiyaning limitini hisoblang:

2.3.7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$. 2.3.7.2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{3+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

2.3.7.3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{5+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$. 2.3.7.4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$.

2.3.7.5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$. 2.3.7.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

2.3.7.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{\frac{2}{x+2}}$. 2.3.7.8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$.

2.3.7.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$. 2.3.7.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

2.3.7.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$. 2.3.7.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

2.3.7.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$. 2.3.7.14. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$.

2.3.7.15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{11x+8}{22x+1}\right)^{\cos^2 x}$. **2.3.7.16.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.

2.3.7.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$. **2.3.7.18.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\cos^4 x}$.

2.3.7.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+5}{x+10}\right)^{\frac{4}{x+2}}$. **2.3.7.20.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{\frac{2}{x+1}}$.

2.3.7.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}}$. **2.3.7.22.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2+x}{5+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x^3}}$.

2.3.7.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{5+x}\right)^{\frac{1-x^3}{1-x}}$. **2.3.7.24.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{7x-1}\right)^{2x}$.

2.3.7.25. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{5x-1}\right)^{3x}$.

2.3.7.26- misol. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$ ni hisoblang.

Yechilishi. ([2], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 75–85-betlar, [30], 2- bo‘lim). $\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}=\dfrac{(1+\frac{4}{x^2})^{x^2}}{(1-\frac{4}{x^2})^{x^2}}$. Bu kasrning surat va maxrajiga (2.3) formulani qo‘llasak, natijada, (2.5) formulaga asosan,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{4}{x^2})^{x^2}}{(1-\frac{4}{x^2})^{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x^2})^{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{4}{x^2})^{x^2}}=\frac{e^4}{e^{-4}}=e^8$$

ekanligini topamiz.

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit(((x^2+4)/(x^2-
4))^((x)^2),x=infinity)=limit(((x^2+4)/(x^2-
4))^((x)^2),x=infinity);
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{(x^2)}=e^8$$

2.3.8- masala. Quyidagi funksiyaning limitini hisoblang:

2.3.8.1. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$. **2.3.8.2.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

2.3.8.3. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

2.3.8.4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

2.3.8.5. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

2.3.8.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

2.3.8.7. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

2.3.8.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

2.3.8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2.3.8.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

2.3.8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

2.3.8.12. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

2.3.8.13. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

2.3.8.14. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

2.3.8.15. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

2.3.8.16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

2.3.8.17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

2.3.8.18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

2.3.8.19. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

2.3.8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$.

2.3.8.21. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{7x-3}{x+21}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-2}}$.

2.3.8.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-2}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

2.3.8.23. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos x}{\cos a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

2.3.8.24. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

2.3.8.25. $\lim\limits_{x\to 4}\left(2-\dfrac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}$.

2.3.8.26- misol. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$ ni hisoblang.

Yechilishi. $\cos x = 1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ ekanligini e'tiborga olib, (2.5) formulaga asosan, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lambda}$, bunda

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{-x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Shunday qilib, izlanayotgan limit $e^{\frac{1}{2}}$ ga teng bo'lar ekan, ya'ni:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((cos(x))^(-1/(x)^2),x=0)=limit((cos(x))^(-1/(x)^2),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=e^{(1/2)}$$

2.3.9- masala. Quyidagi funksiyaning limitini hisoblang:

2.3.9.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-arctg3x}$.

2.3.9.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{2x}-6^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

2.3.9.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{arctgx+x^3}$.

2.3.9.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$.

2.3.9.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$.

2.3.9.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.

2.3.9.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

2.3.9.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+tgx^2}$.

2.3.9.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$.

2.3.9.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-tgx^2}$.

2.3.9.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.

2.3.9.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}$.

2.3.9.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$.

2.3.9.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2tgx-\sin x}$.

2.3.9.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-tgx}$.

2.3.9.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-tg2x}$.

2.3.9.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$.

2.3.9.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctgx-\sin x}$.

2.3.9.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$.

2.3.9.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$.

2.3.9.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{2x}-3^{3x}}{2x-arctg3x}$.

2.3.9.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-4^{-2x}}{\sin 5x-2x}$.

2.3.9.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-9^{3x}}{arctgx+x^2}$. **2.3.9.24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{5x}-2^x}{x-\sin 5x}$.

2.3.9.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-5x}}{x+\sin 3x}$.

2.3.9.26-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ ni hisoblang.

Yechilishi. ([2], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 75–85-betlar, [30], 2- bo‘lim). Limitni hisoblash uchun kasr ifodaning suratiga birni qo‘shib va ayirib, so‘ngra surat va maxrajini x ga bo‘lamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)/x-(e^{-x}-1)/x}{\sin x/x}.$$

Funksiyaning limitini hisoblashda, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ajoyib limitlardan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)/x+\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}-1)/(-x)}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x}=2.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((exp(x)-exp(x))/(sin(x)),
x=0)=limit((exp(x)-exp(-x))/(sin(x)),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{(-x)}}{\sin(x)}=2$$

2.3.10 - masala. $y=f(x)$, funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlari $(f(x_0+0), f(x_0-0))$ topilsin.

2.3.10.1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$, $x_0=2$. **2.3.10.2.** $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0=0$.

2.3.10.3. $f(x)=\arccos x(x-1)$, $x_0=0$. **2.3.10.4.** $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-5}}}$, $x_0=5$.

2.3.10.5. $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{|x|}$, $x_0=0$. **2.3.10.6.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, $x_0=0$.

2.3.10.7. $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}$, $x_0=0$. **2.3.10.8.** $f(x)=\dfrac{x}{(x-3)^3}$, $x_0=3$.

2.3.10.9. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{2-x}}}$, $x_0=2$. **2.3.10.10.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, $x_0=0$.

2.3.10.11. $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{|x|}$, $x_0=0$. **2.3.10.12.** $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$, $x_0=0$.

2.3.10.13. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$, $x_0=1$.

2.3.10.14. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2,\\ -2x+1, & x>2\end{cases}$, $x_0=2$.

2.3.10.15. $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$, $x_0=-1$. **2.3.10.16.** $f(x)=\operatorname{sign}(\cos x)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

2.3.10.17. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=1$. **2.3.10.18.** $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

2.3.10.19. $f(x)=\arccos(x-1)$, $x_0=0$. **2.3.10.20.** $f(x)=\dfrac{\cos x}{3-2\sin x}$, $x_0=0$.

2.3.10.21. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4-x}$. $x_0=4$. **2.3.10.22.** $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$, $x_0=0$.

2.3.10.23. $f(x)=\arccos x(x-2)$, $x_0=0$.

2.3.10.24. $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-3}}}$. $x_0=3$. **2.3.10.25.** $f(x)=\dfrac{|tgx|}{|x|}$, $x_0=0$.

2.3.10.26-misol. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1,\\ -2x+1, & x>1,\end{cases}$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlarini toping.

Yechilishi. ([2], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 75–85-betlar, [30], 2- bo‘lim). $x=1$ nuqtada funksiyaning o‘ng va chap limitlarini topamiz:

$$\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2=f(1-0),\ \lim_{x\to 1+0}(-2x+1)=-1=f(1+0).$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit(x^2+1,x=1,left)= limit(x^2+1,x=1,left);

Limit(-2*x+1,x=1,right)=limit(-2*x+1,x=1,right);
```

$$\lim_{x\to 1-}x^2+1=2\ ,\qquad \lim_{x\to 1+}-2x+1=-1\ .$$

2.3.11 - masala. Quyidagi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $x\to x_0$da $f(x)\sim g(x)$ ekanligini ko‘rsating.

2.3.11.1. $f(x)=10+x$, $g(x)=10e^x$, $x\to 0$.

2.3.11.2. $f(x)=\dfrac{7}{x}$, $g(x)=\dfrac{7}{\ln(1+x)}$, $x\to 0$.

2.3.11.3. $f(x)=x^2+4x-5$, $g(x)=3(x^2-1)$, $x\to 1$.

2.3.11.4. $f(x)=(10^x-1)\lg 2$, $g(x)=2^x-1$, $x\to 0$.

2.3.11.5. $f(x)=2^x-11x-21,\quad g(x)=x^x-9x+14,\quad x\to 7.$
2.3.11.6. $f(x)=\log_a(1+3x)\ (0<a\neq 1),\ g(x)=2x,\quad x\to 0.$
2.3.11.7. $f(x)=x-a,\quad g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{a},\ (a>0)\quad x\to a.$
2.3.11.8. $f(x)=x^2+4x-5,\quad g(x)=x^2-1,\quad x\to 2.$
2.3.11.9. $f(x)=x^4-x^3+x^2-3x+2,\quad g(x)=x^3-x^2-x+1,\quad x\to 1.$
2.3.11.10. $f(x)=x^2-101x+100,\quad g(x)=x^2-2x+1,\quad x\to 1.$

Quyidagi tasdiqlarning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlang:

2.3.11.11. $\sin x^3=O(x^2),\quad x\to 0.$
2.3.11.12. $x^2=O(\sin x^3),\quad x\to 0.$
2.3.11.13. $1+x^2=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\to 0.$
2.3.11.14. $\ln(1+x^2)=O(\operatorname{tg}x),\quad x\to 0.$
2.3.11.15. $\ln\cos x=O(\operatorname{tg}^2x),\quad x\to 0.$
2.3.11.16. $x^2+4x-5=O(x^2-1),\quad x\to\infty.$
2.3.11.17. $(1+x^{11}+7x^{13})=O(1+x^4)^{10},\quad x\to\infty.$
2.3.11.18. $\sqrt{x-2}-2=O(x-6),\quad x\to 6.$
2.3.11.19. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=O(\sqrt{3-2\cos x}),\quad x\to\frac{\pi}{6}.$
2.3.11.20. $\sin x=O(\pi^2-x^2),\quad x\to\pi.$
2.3.11.21. $f(x)=11+x,\quad g(x)=11e^x,\quad x\to 0.$
2.3.11.22. $f(x)=\frac{9}{x},\quad g(x)=\frac{9}{\ln(1+x)},\quad x\to 0.$
2.3.11.23. $f(x)=x^2-4x+3,\quad g(x)=2(x^2-1),\quad x\to 1.$
2.3.11.24. $f(x)=(10^x-1)\lg 2,\quad g(x)=2^x-1,\quad x\to 0.$
2.3.11.25. $f(x)=5(x^2-10x+21),\quad g(x)=4(x^2-9x+14),\quad x\to 7.$

2.3.11.26-misol. $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad g(x)=x^{\frac{1}{8}}$ funksiyalarning $x\to+0$ da ekvivalent ekanligini ko‘rsating.

Yechilishi. ([2], 4-bo‘lim; [3], 1-q., 75–85-betlar, [30], 2- bo‘lim). 2.9- teoremaga asosan,

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{1/8}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{1/8}\sqrt{2x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\sqrt{x}+1}}}{x^{1/8}}=1.$$

Demak, $x\to+0$ da $\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{1/8}$.

2.3.12-masala. $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligini ta'rif yordamida isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ni toping).

2.3.12.1. $f(x)=2x^2-4, x_0=3$. **2.3.12.2.** $f(x)=2x-1, x_0=5$.

2.3.12.3. $f(x)=x^2, x_0=4$. **2.3.12.4.** $f(x)=4x^2-2, x_0=6$.

2.3.12.5. $f(x)=2x+6, x_0=2$. **2.3.12.6.** $f(x)=x^3, x_0=8$.

2.3.12.7. $f(x)=-2x^2-5, x_0=2$. **2.3.12.8.** $f(x)=-5x^2-9, x_0=3$.

2.3.12.9. $f(x)=2x^2+6, x_0=7$. **2.3.12.10.** $f(x)=4x^2+4, x_0=5$.

2.3.12.11. $f(x)=5x^2+1, x_0=7$. **2.3.12.12.** $f(x)=-2x^2-4, x_0=3$.

2.3.12.13. $f(x)=-3x^2-6, x_0=1$. **2.3.12.14.** $f(x)=-5x^2-8, x_0=2$.

2.3.12.15. $f(x)=-4x^2-7, x_0=1$. **2.3.12.16.** $f(x)=-4x^2+9, x_0=4$.

2.3.12.17. $f(x)=5x^2-1, x_0=6$. **2.3.12.18.** $f(x)=3x^2+5, x_0=8$.

2.3.12.19. $f(x)=5x^2+3, x_0=8$. **2.3.12.20.** $f(x)=4x^2-1, x_0=6$.

2.3.12.21. $f(x)=x^2-2, x_0=2$. **2.3.12.22.** $f(x)=2x-3, x_0=4$.

2.3.12.23. $f(x)=x^2+2, x_0=4$. **2.3.12.24.** $f(x)=4x^2+2, x_0=6$.

2.3.12.25. $f(x)=2x^2+6, x_0=2$.

2.3.12.26-misol. $f(x)=6x^2+2$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada uzluksiz ekanligini ta'rif yordamida isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ni toping).

Yechilishi. ([2], 5-bo'lim; [3], 1-q., 97–103-betlar, [30], 2- bo'lim). $f(x)=6x^2+2$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada uzluksizligini Koshi ta'rifi, ya'ni 2.3-ta'rif bo'yicha ko'rsatamiz. $\forall\varepsilon>0$ son berilgan bo'lsin.

a) Berilgan $\varepsilon>0$ son bo'yicha $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ni topish bilan shug'ullanamiz. Buning uchun, avvalo, $|6x^2+2-(6\cdot4+2)|$, $|x-2|$ ifodalar orasidagi bog'lanishni topamiz. Birinchi ifodaning shaklini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$|6x^2+2-(6\cdot4+2)|=|6x^2-24|=6|x^2-4|\le 6|x-2|\,(|x|+|2|).$$

$|x|<3$ lar uchun $|6x^2+2-(6\cdot4+2)|<30|x-2|$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Demak, $|6x^2+2-(6\cdot4+2)|$ ifoda berilgan ε dan kichik bo'lishi uchun $\delta=\frac{\varepsilon}{30}$ deb olish yetarli.

b) *Endi topilgan δ ning «ishlashi»ni ko'rsatamiz.* $|x-2|<\frac{\varepsilon}{30}$ bo'lsin. Bundan $\varepsilon>30|x-2|$, $|x|<3$ bo'lganda $30|x-2|>6|x-2|\,(|x|+|2|)$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\varepsilon>30|x-2|>6|x-2|\,(|x|+|2|)\ge 6|x^2-4|=|6x^2+2-(6\cdot4+2)|$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Demak, $|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{30}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-f(x_0)|=|6x^2+2-(6\cdot 2^2+2)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lar ekan.

Shunday qilib, 2.3- ta'rifga asosan, $f(x)=6x^2+2$ funsiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz ekan

4.3.13-masala. Quyidagi funksiya a ning qanday qiymatlarida uzluksiz bo'lishini aniqlang:

2.3.13.1. $y=\begin{cases}\frac{(1+x)^n-1}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.2. $y=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.3. $y=\begin{cases}x ctg 2x, x\neq 0, |x|<\frac{\pi}{2},\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.4. $y=\begin{cases}\frac{1+x}{1+x^3}, x\neq -1,\\ a, x=-1.\end{cases}$

2.3.13.5. $y=\begin{cases}(\pi+2x)tgx, -\pi<x<\frac{\pi}{2}, x\neq -\frac{\pi}{2},\\ a, x=-\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

2.3.13.6. $y=\begin{cases}\cos x, x\leq 0,\\ a(x-1), x>0.\end{cases}$

2.3.13.7. $y=\begin{cases}(\arcsin x)ctgx, x\neq 0.\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.8. $y=\begin{cases}x^2+a, x>0,\\ 1-x^2, x\leq 0.\end{cases}$

2.3.13.9. $y=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0, 0<c.\end{cases}$

2.3.13.10. $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.11. $y=\begin{cases}\frac{x}{\ln(1+2x)}, x\neq 0.\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.12. $y=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.13. $y=\begin{cases}\frac{shx}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.14. $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.15. $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

2.3.13.16. $y=\begin{cases}x^2+a, x>0,\\ 1-x^2, x\leq 0.\end{cases}$

2.3.13.17. $y=\begin{cases} x\ln x^2, x\neq 0, \\ a, x=0. \end{cases}$

2.3.13.18. $y=\begin{cases} 2^x, x\geq 0 \\ a(x-1), x<0. \end{cases}$

2.3.13.19. $y=\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0, \\ a, x=0. \end{cases}$

2.3.13.20. $y=\begin{cases} ax^2+1, x>0, \\ -x, x=0. \end{cases}$

2.3.13.21. $y=\begin{cases} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}, x\neq 0, \\ a, x=0. \end{cases}$

2.3.13.2. $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{2x}, x\neq 0 \\ a, x=0. \end{cases}$

2.3.13.23. $y=\begin{cases} xctg3x, x\neq 0, |x|<\dfrac{\pi}{2}, \\ a, x=0. \end{cases}$

2.3.13.24. $y=\begin{cases} \dfrac{1-x}{1-x^3}, x\neq 1, \\ a, x=1. \end{cases}$

2.3.13.25. $y=\begin{cases} (\pi-2x)tgx, -\dfrac{\pi}{2}<x<\pi, x\neq\dfrac{\pi}{2}, \\ a, x=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

2.3.13.26- misol. a ning qanday qiymatlarida

$$f(x)=\begin{cases} \cos x,\ x<0 & bo'lganda, \\ a(x-2)^2,\ x>0 & bo'lganda \end{cases}$$

funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi?

Yechilishi. ([2], 5-bo'lim; [3], 1-q., 97–103-betlar, [30], 2- bo'lim). Berilgan $f(x)$ funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun, quyidagi $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$ tenglik bajarilishi kerak. Buni tekshirish uchun, funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} a(x-2)^2=4a,\ f(0)=1.$$

Demak, $a=\frac{1}{4}$ bo'lganda berilgan funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lar ekan, $a\neq\frac{1}{4}$ qiymatlarda funksiya uzilishga ega.

2.3.14-masala. Quyidagi funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

2.3.14.1. $y=\dfrac{x}{4-x^2}$.

2.3.14.2. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

2.3.14.3. $y=\dfrac{x+3}{9-x^2}$

2.3.14.4. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2.3.14.5. $y=\frac{x^2-1}{x^3-3x+1}$.

2.3.14.6. $y=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

2.3.14.7. $y=\frac{|x|-x}{x^2}$.

2.3.14.8. $y=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

2.3.14.9. $y=\frac{x}{\sin x}$

2.3.14.10. $y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

2.3.14.11. $y=\frac{|x+2|}{x+2}$.

2.3.14.12. $y=\cos^2\frac{1}{x}$.

2.3.14.13. $y=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$.

2.3.14.14. $y=arctg\frac{1}{x}$.

2.3.14.15. $y=\frac{1}{\cos x}$.

2.3.14.16. $y=\sqrt{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

2.3.14.17. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

2.3.14.18. $y=\frac{x}{\ln(1+2x)}$.

2.3.14.19. $y=\frac{1+x}{1+x^3}$.

2.3.14.20. $y=\frac{1}{\sin x}$.

2.3.14.21. $y=\frac{x}{9-x^2}$.

2.3.14.22. $y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

2.3.14.23. $y=\frac{x+3}{9-x^2}$

2.3.14.24. $y=3^{\frac{1}{x}}$

2.3.14.25. $y=\frac{x^2-1}{x^3-3x^2+2x}$.

2.3.14.26-misol. $y=\frac{|x-1|}{x^2-x^3}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang.

Yechilishi. Ma'lumki,

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x-1>0 \ \textit{yoki} \ x>1 \ \textit{bo'lganda}, \\ -(x-1), & x-1<0 \ \textit{yoki} \ x<1 \ \textit{bo'lganda}. \end{cases}$$

$y=\frac{|x-1|}{x^2-x^3}$ funksiya uchun $x=0$ va $x=1$ nuqtalar uzilish nuqtalari bo'ladi.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x-1|}{x^2(1-x)}=\infty$. Demak, $x=0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

Endi $x=1$ nuqtada funksiyaning o'ng va chap limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{x^2-x^3} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{x^2(1-x)} = -1,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{|x-1|}{x^2-x^3} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-(x-1)}{x^2(1-x)} = 1.$$

Shunday qilib, $x=1$ nuqta berilgan funksiya uchun birinchi tur uzilish nuqtasi bo'lib, funksiyaning bu nuqtadagi sakrashi $\Delta f(1) = |-2| = 2$ bo'ladi.

2.3.15- masala. Quyidagi funksiyani tekis uzluksizlikka tekshiring:

2.3.15.1. $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, $-1 \le x \le 1$.

2.3.15.2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $0 < x < \pi$.

2.3.15.3. $f(x) = x\sin x$, $0 \le x < +\infty$.

2.3.15.4. $f(x) = \ln x$, $0 < x < 1$.

2.3.15.5. $f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x}$, $0 < x < 1$.

2.3.15.6. $f(x) = e^x$, $-\infty < x < +\infty$

2.3.15.7. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $0 < x < \pi$.

2.3.15.8. $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $1 \le x < +\infty$

2.3.15.9. $f(x) = e^{-\arcsin x}$, $-1 \le x \le 1$.

2.3.15.10. $f(x) = x^2$, $-e \le x \le e$.

2.3.15.11. $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

2.3.15.12. $f(x) = arctgx$, $-\infty < x < +\infty$.

2.3.15.13. $f(x) = 2\sin x - \cos x$, $x \in R$.

2.3.15.14. $f(x) = \sin x = \sin\dfrac{1}{x}$, $0 < x < 1$.

2.3.15.15. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $1 \le x \le 2$.

2.3.15.16. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $1 \le x < +\infty$

2.3.15.17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $0 < x < +\infty$.

2.3.15.18. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x-2}$, $2 < x < 3$.

2.3.15.19. $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x < +\infty$.

2.3.15.20. $f(x) = x + \sin x$, $-\infty < x < +\infty$.

2.3.15.21. $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x^2}$, $-1 \le x \le 1$.

2.3.15.22. $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$, $0<x<\pi$.

2.3.15.23. $f(x)=(x+2)\sin 3x$, $0\le x<+\infty$.

2.3.15.24. $f(x)=\ln 2x$, $0<x<1$.

2.3.15.25. $f(x)=e^{2x}\sin\frac{1}{x}$, $0<x<1$.

2.3.15.26-misol. $f(x)=e^{x}\sin\frac{1}{x}$ funksiyani $X=(0,1)$ da tekis uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. ([2], 5-bo'lim; [3], 1-q., 110–115-betlar). $X=(0,1)$ to'plamdan $x_n'=\frac{2}{(4n-1)\pi}$, $x_n''=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ nuqtalarni olamiz.

$$|x_n'-x_n''|=\left|\frac{2}{(4n-1)\pi}-\frac{2}{(4n+1)\pi}\right|=\frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1}\right|=\frac{1}{\frac{\pi}{4}(16n^2-1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left|e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}}\sin\left((4n-1)\frac{\pi}{2}\right)-e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|=$$

$$=\left|-e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}}-e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right|=\left|e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}}+e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right|\ge 2=\varepsilon.$$

Demak, berilgan funksiya $(0;1)$ da tekis uzluksiz emas.

2.3.16-masala. Uzluksiz funksiyalarning global xossalaridan foydalanib, quyidagi masalani yeching:

2.3.16.1. $\sin x-x+1=0$ tenglama yechimga egami?

2.3.16.2. $x^5-18x+2=0$ tenglamaning $[-1;1]$ kesmaga karashli yechimi mavjudmi?

2.3.16.3. Toq darajali haqiqiy koeffitsiyentli har qanday

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

algebraik tenglama hech bo'lmaganda bitta haqiqiy ildizga ega ekanligini isbotlang.

2.3.16.4. $[-2;2]$ kesmada

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & -2\le x\le 0 \text{ bo'lganda},\\ -(x^2+2), & 0\le x\le 2 \text{ bo'lganda},\end{cases}$$

funksiya berilgan. $[-2;2]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta mavjudmi?

2.3.16.5. $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin\pi x+3$ funksiya $[-2;2]$ kesmada $2\frac{1}{3}$ qiymatni qabul qiladimi?

2.3.16.6. $[-1;1]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan ushbu

$$f(x)=\begin{cases}2^x+1, & -1\le x<0,\\ 2^x, & x=0,\\ 2^x-1, & 0<x\le 1\end{cases}$$

funksiya. $[-1;1]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatga ega emasligini isbotlang.

2.3.16.7. $y=arcctg\frac{x^2+1}{2x}+2^{\sin x}-x^2$ funksiya $[1;5]$ da chegaralanganmi? U bu kesmada eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

2.3.16.8. $x^3+\ln x-2^x=0$ tenglama $[1;2]$ kesmada (bitta) yechimga ega ekanligini isbotlang.

2.3.16.9. $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & -1\le x<0,\\ -x^2, & 0\le x\le 1.\end{cases}$ funksiya $[-1;1]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymat qabul qiladimi? Bu qiymatlarni toping.

2.3.16.10. $f(x)=\sin\pi x-\frac{x^3}{16}+1$ funksiya $[-4;4]$ kesmada 3 qiymatni qabul qiladimi?

2.3.16.11. $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin\pi x+3$ funksiya $[-2;2]$ kesmada 3,5 qiymatni qabul qiladimi?

2.3.16.12. $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{x^2+1}{2}+2^{\sin x}-x^2$ funksiya $[0;3]$ kesmada chegaralanganmi?

2.3.16.13. $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{x^2+1}{2}+2^{\sin x}-x^2$ funksiya $[0;3]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatiga erishadimi?

2.3.16.14. $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & -1\le x<0,\\ 3^x, & x=0,\\ 3^x-1, & 0<x<1.\end{cases}$ funksiya berilgan sohada eng katta va eng kichik qiymatiga erishmasligini ko'rsating. Nima uchun?

2.3.16.15. $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & -1\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-1, & 0<x<1.\end{cases}$ funksiya berilgan sohada eng katta va eng kichik qiymat qabul qiladimi?

2.3.16.16. $f(x)=2x+\sin x$ funksiya uchun teskari funksiya mavjudmi?

2.3.16.17. $f(x)=\ln^2 x$ funksiya uchun teskari funksiya mavjudmi?

2.3.16.18. $f(x)=5^{x^2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}+(x^2-x+2)\sin\sqrt{3+x^2}$ funksiya $[0;100]$ da chegaralanganmi?

2.3.16.19. $x^5-4x^2+3=0$ tenglama $[-2;\ 0]$ kesmada yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

2.3.16.20. $8^x-3\cdot 2^x-16=0$ tenglama $[0;2]$ kesmada yagona yechimga egami?

2.3.16.21. $\operatorname{arctg}x-x+1=0$ tenglama yechimga egami?

2.3.16.22. $x^3-10x+2=0$ tenglamaning $[-1;1]$ kesmaga karashli yechimi mavjudmi?

2.3.16.23. $f(x)=\lg^2 x$ funksiya uchun teskari funksiya mavjudmi?

2.3.16.24. $[-3;3]$ kesmada

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3, & -3\le x\le 0 \quad \text{bo'lganda},\\ -(x^2+3), & 0\le x\le 3 \quad \text{bo'lganda},\end{cases}$$

funksiya berilgan. $[-3;3]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta mavjudmi?

2.3.16.25. $f(x)=\dfrac{x^3}{8}-\sin 2\pi x+3$ funksiya $[-3;3]$ kesmada $3\frac{1}{3}$ qiymatni qabul qiladimi?

2.3.16.26- misol. $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari mavjudmi?

Yechilishi. Ravshanki, x^3 va $3x$ funksiyalarning har biri $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada uzluksiz. 2.11-teoremaga asosan, berilgan $f(x)$ funksiya ham $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. U hoida, Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra, berilgan funksiya $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ kesmada aniq yuqori va aniq quyi chegaralariga erishadi:

$$\sup_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}\{f(x)\}=f(-1)=2, \qquad \inf_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}\{f(x)\}=f(1)=2.$$

2.3.17-masala. Quyida berilgan $f(x)$ funksiyaning X to'plamda tekis uzluksizligini isbotlang:

2.3.17.1. $f(x)=3x-1,\ X=R.$

2.3.17.2. $f(x)=x^2,\ X=(-1;1).$

2.3.17.3. $f(x)=\dfrac{x}{3-x^2},\ X=[-1;1].$

2.3.17.4. $f(x)=\sin x^2,\ X=(-3;3].$

2.3.17.5. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ X=(0;\pi).$

2.3.17.6. $f(x)=\cos x,\ X=R.$

2.3.17.7. $f(x)=\sqrt{x},\ X=(0;+\infty).$

2.3.17.8. $f(x)=\dfrac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}},\ X=(-1;1).$

2.3.17.9. $f(x)=\sin(\dfrac{1}{x}),\ X=[0{,}01;+\infty).$

Quyidagi berilgan $f(x)$ funksiyaning X to'plamda tekis uzluksiz emasligini isbotlang:

2.3.17.10. $f(x)=\cos(\dfrac{1}{x}),\ X=[0;1).$

2.3.17.11. $f(x)=\sin x^2,\ X=R.$

2.3.17.12. $f(x)=e^x,\ X=R.$

2.3.17.13. $f(x)=ctgx.\ X=(0;1).$

2.3.17.14. $f(x)=\ln x.\ X=(0;1).$

2.3.17.15. $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}.\ X=(0;1).$

2.3.17.16. $f(x)=x\sin x.\ X=(0;\infty).$

2.3.17.17. $f(x)=\sin(\dfrac{1}{x}),\ X=(0;1).$

Quyidagi berilgan $f(x)$ funksiyani X to'plamda tekis uzluksizlikka tekshiring:

2.3.17.18. $f(x)=e^{-\arcsin x},\ X=[-1;1]$

2.3.17.19. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ X=R.$

2.3.17.20. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -1\le x\le 0,\\ 1+x, & 0<x\le 1.\end{cases}\ X=[-1;1]$

Quyida berilgan $f(x)$ funksiyaning X to'plamda tekis uzluksizligini isbotlang:

2.3.17.21. $f(x)=5x-2,\ X=R.$

2.3.17.22. $f(x)=x^4,\ X=(-1;1).$

2.3.17.23. $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2},\ X=[-0,5;0,5].$

2.3.17.24. $f(x)=\cos x^2,\ X=(-3;3].$

2.3.17.25. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{3x},\ X=(0;\pi).$

2.3.17.26-misol. $f(x)=x+\sin x$ funksiyaning R da tekis uzluksizligini isbotlang.

Yechilishi. ([2], 5-bo'lim; [3], 1-q., 110–115-betlar). *a) "δ" ni topish.* $\forall\varepsilon>0$ son berilgan bo'lsin. Berilgan $\forall\varepsilon>0$ ga ko'ra, shunday x ga bog'liq bo'lmagan $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ni topish kerakki, $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x',x''\in R$ lar uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. Buning uchun, $|f(x')-f(x'')|$, $|x'-x''|$ ifodalar o'rtasidagi bog'lanishni topamiz:

$$|f(x')-f(x'')|=|x'+\sin x'-x''-\sin x''|=|x'-x''-(\sin x''-\sin x')|\le$$

$$\le|x'-x''|+2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\le 2|x'-x''|<\varepsilon$$

bo'lishi uchun $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ deb olish yetarli.

b). δ ning «ishlash»ini (yaroqliligini) ko'rsatamiz. $|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ bo'lsin.

Bundan, $\dfrac{|x'-x''|}{2}\ge\left|\sin\dfrac{x'-x''}{2}\right|$, $1\ge\left|\cos\dfrac{x'+x''}{2}\right|$ tengsizliklarni e'tiborga olgan holda,

$$\varepsilon>2|x'-x''|=|x'-x''|+2\frac{|x'-x''|}{2}\cdot 1\ge|x'-x''|+2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\left|\cos\frac{|x'+x''|}{2}\right|=$$

$$=|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|\ge|x'+\sin x'-x''-\sin x''|=|f(x')-f(x'')|$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Demak, berilgan ε bo'yicha topilgan δ tekis uzluksizlik ta'rifini qanoatlantiradi.

3-MUSTAQIL ISHLAR.
FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI. FUNKSIYANING YUQORI TARTIBLI HOSILASI VA DIFFERENSIALI. LOPITAL QOIDALARI VA TEYLOR FORMULASI. FUNKSIYANI TO'LIQ TEKSHIRISH

Mavzular:

3.1. Funksiya hosilasining ta'riflari.
3.2. Hosilaning geometrik ma'nosi.
3.3. Hosilaning fizik ma'nosi.
3.4. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari.
3.5. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvali.
3.6. Funksiyaning differensiali.
3.7. Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.
3.8. Funksiyaning yuqori tartibli differensiali.
3.9. Nuqtada funksiyaning o'sishi (kamayishi). Funksiyaning lokal ekstremum qiymatlari.
3.10. Differensial hisobning asosiy teoremalari.
3.11. Funksiyaning monotonlik sharti.
3.12. Lopital qoidalari.
3.13. Teylor formulasi.
3.14. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash.
3.15. Funksiyaning ekstremum qiymatlari.
3.16. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.
3.17. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi.
3.18. Funksiya grafigining egilish nuqtalari.
3.19. Funksiya grafigining asimptotalari.
3.20. Funksiyani to'liq tekshirish va uning grafigini chizish.

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA TEOREMALAR

3.1. Funksiya hosilasining ta'riflari

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lsin. Bu oraliqdan x_0 nuqta olib, unga $x_0+\Delta x\in(a,b)$ bo'lgan Δx ($\Delta x<0$ yoki $\Delta x>0$) orttirma beraylik, y holda $f(x)$funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y=\Delta f(x_0)=$ $=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi. Ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$(\Delta x\neq 0)$ nisbatni qaraymiz. Ravshanki, bu nisbat Δx ning funksiyasi bo'lib, u Δx ning noldan farqli qiymatlarida, jumladan, nol nuqtaning yetarli kichik $\dot{U}_\delta(0)$ atrofida aniqlangan, bunda $\Delta x=0$ nuqta- $\dot{U}_\delta(0)$ to'plamning limit nuqtasi.

3.1- ta'rif. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi hosilasi* deyiladi va

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

kabi belgilanadi.

Agar $x_0+\Delta x=x$ deb olinsa, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta x\to 0$ da $x\to x_0$, natijada (3.1) ning ko'rinishi

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3.2}$$

shaklda bo'ladi. Hosila quyidagi $y'(x_0)$, y'_x (*Lagranj*), $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ (*Leybnis*), Dy, Df (*Koshi*) belgilar yordamida ham yoziladi.

Berilgan nuqtada chekli hosilaga ega bo'lgan funksiya, shu nuqtada albatta uzluksiz bo'ladi, ya'ni funksiyaning nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi uchun, uning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur, lekin yetarli emas.

3.2- ta'rif. Agar $\Delta x\to +0$ $(\Delta x\to -0)$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ning chekli limiti

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad\left(\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi* deb ataladi va u $f'(x_0+0)\,(f'(x_0-0))$ kabi belgilanadi. Odatda, funksiyaning o'ng va chap hosilalari bir tomonli hosilalar deb ham aytiladi.

3.1- eslatma. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada bir tomonli $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ hosilalarga ham ega bo'lib, $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi

3.2- eslatma. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U(x_0)$ atrofida uzluksiz, x_0 nuqtada bir tomonli $f'(x_0+0)$ va $f'(x_0-0)$ hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'ladi va $f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ tengliklar o'rinli.

3.3- eslatma. Agar $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat aniq ishorali cheksiz limitga ega, ya'ni:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\pm\infty$$

bo'lsa, u ham $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi hosilasi* deb yuritiladi. Bunday hosila *cheksiz hosila* deb ataladi.

3.2. Hosilaning geometrik ma'nosi

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda, $f(x)$ funksiyaning grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud bo'ladi. Ma'lumki, funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi, shu urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. Urinma chiziq tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \tag{3.3}$$

bo'lib, bunda $f'(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha$, egri chiziqning $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan normalning tenglamasi esa,

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{3.4}$$

ko'rinishda bo'ladi. $y_1=f_1(x)$ va $y_2=f_2(x)$ funksiyalar grafiklarining $M(x_1, y_1)$ kesishish nuqtasida o'tkazilgan urinmalar orasidagi φ burchak berilgan ikki egri chiziq orasidagi burchak bo'ladi va

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{f_2'(x_1)-f_1'(x_1)}{1+f_1'(x_1)f_2'(x_1)} \tag{3.5}$$

formuladan topiladi.

3.3. Hosilaning fizik ma'nosi

Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakati $s=f(t)$ tenglama orqali ifodalangan bo'lsin, bunda t – vaqt, s – shu vaqt ichida o'tilgan yo'l (masofa). $s=f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi $s=f(t)$ qonun bo‘yicha harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini bildiradi, ya’ni:

$$v = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Moddiy nuqtaning berilgan $t = t_0$ momentdagi a tezlanishi esa, v tezlikdan t vaqt bo‘yicha olingan hosilaning $t = t_0$ dagi qiymatiga tengdir, ya’ni:

$$a = v'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

3.4. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari

1. O‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng: $(C)' = 0$ (bunda, $C-$ o‘zgarmas son).

2. O‘zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$(Cf(x))' = C \cdot (f(x))' \quad \text{(bunda } C\text{–o‘zgarmas son).}$$

3. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsa, $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \tag{3.6}$$

formula bo‘yicha topiladi.

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{3.7}$$

formula bo‘yicha topiladi.

5. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $g(x) \neq 0$ bo‘lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{3.8}$$

formula bo‘yicha topiladi.

6. $f(x)$ funksiya 2.14-teoremaning hamma shartlarini qanoatlantirsin. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiyaga teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiya ham x_0 nuqtaga mos bo'lgan y_0 $(y_0 = f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega va bu hosila

$$\left[f^{-1}(y)\right]'\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{3.9}$$

formula orqali topiladi.

7. $y = F(u)$funksiya (c,d) orqali aniqlangan, $u = f(x)$ funksiya esa, (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida $y = F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $u = f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $y = F(u)$ funksiya esa, x_0 nuqtaga mos u_0 $(u_0 = f(x_0))$ nuqtada $F'(u_0)$ hosilaga ega bo'lsa, $\Phi(x) = F(f(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega va bu hosila $\Phi'(x) = [F(f(x))]'|_{x=x_0} = F'(u_0) \cdot f'(x_0)$ formula orqali topiladi.

8. Oshkormas $F(x,y) = 0$ funksiya uchun

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} \tag{3.10}$$

formula o'rinli.

9. Parametrik tenglamasi bilan berilgan $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, (t_0 \le t \le t_1)$ funksiyaning hosilasi quyidagi:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \quad \text{yoki} \quad y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \tag{3.11}$$

formula bo'yicha topiladi.

3.5. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvali

1. $y = C$. $y' = 0$. **2.** $y = x^{\alpha}$ $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$.

3. $y = \sqrt{x}$. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **4.** $y = e^x$. $y' = e^x$.

5. $y = a^x$. $y' = a^x \ln a$. **6.** $y = \ln x$. $y' = \dfrac{1}{x}$.

7. $y=\log_a x$. $y'=\dfrac{\log_a e}{x}=\dfrac{1}{x\ln a}$. 8. $y=\lg x$. $y'=\dfrac{1}{x}\lg e=\dfrac{1}{x\ln 10}$.

9. $y=\sin x$. $y'=\cos x$. 10. $y=\cos x$. $y'=-\sin x$.

11. $y=\operatorname{tg} x$. $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$.

12. $y=\operatorname{ctg} x$. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$.

13. $y=\arcsin x$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 14. $y=\arccos x$. $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $y=\operatorname{arctg} x$. $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$. 16. $y=\operatorname{arcctg} x$. $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $y=\sec x$. $y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\cdot\sec x^2 x$.

18. $y=\operatorname{cosec} x$. $y'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=-\cos x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$.

19. $y=\operatorname{sh} x$. $y'=\operatorname{ch} x$. 20. $y=\operatorname{ch} x$. $y'=\operatorname{sh} x$.

21. $y=\operatorname{th} x$. $y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. 22. $y=\operatorname{cth} x$. $y'=\dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

23. $y=\operatorname{Arsh} x$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 24. $y=\operatorname{Arch} x$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

25. $y=\operatorname{Arth} x$. $y'=\dfrac{1}{1-x^2}$. 26. $y=\operatorname{Arcth} x$. $y'=\dfrac{-1}{1-x^2}$.

27. $y=x^x$. $y'=x^x(1+\ln x)$. 28. $y=u^v$; $y'=u^v\left[\dfrac{v}{u}\cdot u'+v'\ln u\right]$.

3.6. Funksiyaning differensiali

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda berilgan bo'lsin. $x_0\in(a.b)$ nuqtani olib, unga Δx ($\Delta x<0$ yoki $\Delta x>0$) orttirma beramiz ($x_0+\Delta x\in(a.b)$). Natijada, berilgan funksiya ham shu nuqtada orttirma oladi va u $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ kabi ifodalanadi.

3.3- ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x_0\in(a,b)$ nuqtadagi Δy orttirmasi ushbu

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{3.12}$$

bunda, $A-\Delta x$ ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son, $\alpha=\alpha(\Delta x)$ bo'lib, $\Delta x\to 0$ da $\alpha(\Delta x)\to 0$) ko'rinishda tasvirlansa, funksiya x_0 nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi. (3.12) munosabatni quyidagicha:

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$
yozish ham mumkin.

3.4-ta'rif. $f(x)$ funksiya Δy orttirmasining Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismi $A\Delta x$ ga funksiyaning *differensiali* deyiladi va $dy = df(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, $dy = df(x_0) = A\Delta x$, $\Delta x = dx$ ekanligini e'tiborga olsak, $dy = Adx$ bo'ladi (erkli o'zgaruvchi x ning orttirmasi Δx ni uning differensiali dx bilan almashtirish mumkin). (3.12) formulani ushbu
$$y(x_0+\Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x$$
ko'rinishda ham yozish mumkin. Agar $dy(x_0)\neq 0$ bo'lsa, funksiyaning $x_0+\Delta x$ nuqtadagi qiymatini
$$y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0) + dy(x_0) \qquad (3.12)$$
taqribiy formula bilan hisoblash mumkin.

3.1- teorema. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Agar $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa,
$$dy = f'(x)dx \qquad (3.13)$$
ekanligini ko'rish qiyin emas. Ma'lumki, differensiallanuvchi funksiyalar uchun dy bilan dx lar proporsional o'zgarib, $f'(x)$ proporsionallik koeffitsiyentini ifodalaydi.

Ixtiyoriy differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun quyidagi:
$$d(\alpha u\pm\beta v) = \alpha\, du \pm \beta\, dv,\ \alpha,\beta\in R;\quad d(u\cdot v) = v\,du + u\,dv;$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},\ v\neq 0 \qquad (3.14)$$
tengliklar o'rinli.

Funksiya differensialining (3.13) ifodasidan foydalanib, elementar funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1. $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx\ (x>0)$.
2. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx,\ (a>0,\ a\neq 1)$.
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\, dx,\ (a>0,\ a\neq 1)$.
4. $d(\sin x) = \cos x dx$.
5. $d(\cos x) = -\sin x dx$.
6. $d(e^x) = e^x dx$.
7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx,\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.
8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx,\ x\neq k\pi,\ k\in Z$.

9. $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx.$

10. $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, -1<x<1.$

11. $d(\arccos x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1.$

12. $d(arctgx)=\frac{1}{1+x^2}dx.$ 13. $d(arcctgx)=-\frac{1}{1+x^2}dx.$

3.7. Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda berilgan bo'lsin.

3.5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir $x\in(a,b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu $f'(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi* deb ataladi va $y''_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\Big|_{x=x_0}$ belgilardan biri orqali belgilanadi.

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir $x\in(a,b)$ nuqtasida $(n-1)$ - tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f^{(n-1)}(x)$ funksiyaning $x_0\in(a,b)$ nuqtadagi hosilasi (agar u mavjud bo'lsa), $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi n*-tartibli hosilasi* deb ataladi va u $y^{(n)}_{x=x_0}$, $f(x_0)^{(n)}$, $\left((\frac{d^ny}{dx^n})_{x=x_0}\right)$ belgilardan biri orqali belgilanadi. Odatda,, $f(x)$ funksiyaning $f'(x), f''(x),...$ hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Agar $s=s(t)$ – to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan material nuqtaning harakat qonunini ifodalasa, u holda, $s''(t)$ – shu nuqtaning t vaqtdagi ichidagi tezlanishini ifodalaydi. Demak, ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi – material nuqtaning tezlanishidan iborat ekan.

3.4-eslatma. $f(x)$ funksiyaning biror $x\in(a,b)$ nuqtadagi $f'(x)$ hosilasi mavjudligidan, uning shu nuqtadagi yuqori tartibli hosilalarga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lib, ular $x\in(a,b)$ nuqtada n- tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin (buni quyidagicha tushunish lozim: $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtani o'z ichiga olgan

$(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ oraliqda $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$, $g', g'', \ldots, g^{(n-1)}$ hosilalarga ega bo'lib, x nuqtada esa, $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega). U holda:

1) $[Cf(x)]^{(n)} = Cf^{(n)}(x)$, $C = const$; 2) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;

3) $$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) +$$
$$+ C_n^2 f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) + \ldots +$$
$$+ C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + \ldots + f(x) g^{(n)}(x). \qquad (3.15)$$

bunda $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. (3.15) formulaga *Leybnis formulasi* deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalarning n- tartibli hosilalarini topish formulalari:

1. $y = x^m$ $\quad y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

Agar m butun son va $n > m$ bo'lsa, $y^{(n)}(x) = 0$ bo'ladi. Xususiy holda, $m = -1$ bo'lsa, $y = \dfrac{1}{x}$ funksiyaning n- tartibli hosilasi $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ bo'ladi.

2. $y = \ln x$, $\quad y^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

3. $y = \log_a x$, $\quad y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a} \dfrac{1}{x^n}$.

4. $y = e^{bx}$, $\quad y^{(n)} = b^n e^{bx}$.

5. $y = a^{bx}$, $\quad y^{(n)} = b^n a^x \ln^n a$.

6. $y = \sin bx$, $\quad y^{(n)} = b^n \sin(bx + n\dfrac{\pi}{2})$.

7. $y = \cos bx$, $\quad y^{(n)} = b^n \cos(bx + n\dfrac{\pi}{2})$

8. $y = (ax + b)^\alpha$, $\quad y^{(n)} = ((ax + b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(ax + b)^{\alpha - n}$.

3.8. Funksiyaning yuqori tartibli differensiali

$y = f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda berilgan bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiyaning differensiali ushbu $dy = f'(x)dx$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin. U holda, belgilangan dx lar uchun funksiyaning dy

differensiali faqat x ning funksiyasi bo'ladi va uning differensialini hisoblash mumkin, bunda ham $dx=\Delta x$ deb olinadi.

3.6-ta'rif. $f(x)$ funksiya differensiali dy ning $x\in(a,b)$ nuqtadagi differensialiga berilgan $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tartibli differensiali* deb ataladi va u d^2y ёки $d^2f(x)$ kabi belgilanadi, ya'ni $d^2y=d(dy)$ ёки $d^2f(x)=d(df(x))$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali uning ikkinchi tartibli hosilasi orqali quyidagicha yoziladi:

$$d^2y=y''dx^2, \tag{3.16}$$

Bunda. $dx^2=dx\cdot dx=(dx)^2$.

$f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada n- tartibli $f^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Funksiyaning $(n-1)$ - tartibli differensiali $d^{n-1}y$ dan olingan differensial, berilgan $f(x)$ funksiyaning $x\in(a,b)$ nuqtadagi n- *tartibli differensiali* deb ataladi va u d^ny yoki $d^nf(x)$ kabi belgilanadi, ya'ni:

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right) \text{ yoki } d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right), \quad d^ny=y^{(n)}dx^n. \tag{3.17}$$

Erkli o'zgaruvchi x ning n - tartibli differensiali $n>1$ da, ta'rif bo'yicha, $d^nx=0$ deb olinadi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda berilgan bo'lib, ular $x\in(a,b)$ nuqtada differensialga ega bo'lsin. U holda quyidagi:

1) $d^n[Cf(x)]=Cd^nf(x)$, $C=const$;

2) $d^n[f(x)\pm g(x)]=d^nf(x)\pm d^ng(x)$;

3) $d^n[f(x)\cdot g(x)]=d^n[f(x)]\cdot g(x)+C_n^1d^{n-1}[f(x)]\cdot d[g(x)]+....+$
$+C_n^kd^{n-k}[f(x)]\cdot d^k[g(x)]+....+f(x)\cdot d^n[g(x)]$,

formulalar o'rinli bo'ladi, bunda, $C_n^k=\dfrac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!}$.

$u=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda, $y=F(u)$ funksiya esa, (c,d) oraliqda berilgan bo'lib, ular yordamida $y=F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin. $u=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$, $F(u)$ funksiya esa, mos $u\in(c,d)$ nuqtada $F'(u)$ hosilaga ega deb, $y=F(f(x))$ funksiyaning differensialini hisoblaymiz:

$$dy=F'(f(x))\cdot f'(x)dx=F'(f(x))\cdot df(x).$$

3.5-eslatma. (3.16) va (3.17) formulalar, $n>1$ bo'lganda, faqat x - erkli o'zgaruvchi bo'lgan holda o'rinli.

x-erksiz o'zgaruvchi bo'lgan holda, ya'ni $y=y(x(t))$ murakkab funksiya uchun (3.16) formula ushbu:

$$d^2y = d(dy) = d(y'_x dx) = d(y'_x)\cdot dx + y'_x d(dx) = y''_{xx}dx^2 + y'_x d^2x \qquad (3.18)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar x- erkli o'zgaruvchi bo'lsa, $d^2x = 0$ bo'ladi va (3.16) formula (3.18) formula bilan ustma-ust tushadi.

3.9. Nuqtada funksiyaning o'sishi (kamayishi). Funksiyaning lokal ekstremum qiymatlari

$y = f(x)$ funksiya biror belgilangan c nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lsin.

3.7-ta'rif. Agar c nuqtaning shunday $U_\delta(c)$ atrofi mavjud bo'lib, $x<c$ bo'lganda $f(x)<f(c)$ tengsizlik, $x>c$ bo'lganda esa, $f(x)>f(c)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ *funksiya c nuqtada o'sadi* deyiladi.

3.8-ta'rif. Agar c nuqtaning shunday $U_\delta(c)$ atrofi mavjud bo'lib, $x<c$ bo'lganda, $f(x)>f(c)$ tengsizlik, $x>c$ bo'lganda esa, $f(x)<f(c)$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ *funksiya c nuqtada kamayadi* deyiladi.

3.9-ta'rif. Agar c nuqtaning shunday $U_\delta(c)$ atrofi mavjud bo'lib, $f(c)$ qiymat, funksiyaning $U_\delta(c)$ atrofdagi qiymatlari ichida eng kattasi (eng kichigi) bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya *c nuqtada lokal maksimum (lokal minimum) ga ega* deyiladi.

Odatda, funksiyaning c nuqtadagi lokal maksimum va lokal minimum qiymatlari birgalikda lokal *ekstremum qiymatlari* deb yuritiladi.

3.2-teorema (funksiyaning nuqtada o'suvchi, kamayuvchi bo'lishining yetarli sharti). Agar $y=f(x)$ funksiya c nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning bu nuqtadagi $f'(c)$ hosilasi musbat (manfiy) bo'lsa, u holda, bu funksiya c nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

3.6-eslatma. $y=f(x)$ funksiyaning c nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun uning shu nuqtadagi $f'(c)$ hosilasining musbat (manfiy) bo'lishi zaruriy shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^2$ funksiya $x=0$ nuqtada o'suvchi, lekin uning $x=0$ nuqtadagi hosilasi $f'(0)=0$.

3.7-eslatma. Agar funksiya x_0 nuqtada o'suvchi bo'lsa, uning x_0 nuqtaning biror atrofida o'suvchi bo'lishi shart emas.

3.10. Differensial hisobning asosiy teoremalari

3.3-teorema (Ferma teoremasi). $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan bo'lib, bu oraliqning ichki c nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar c nuqtada funksiya chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda, $f'(c)=0$ bo'ladi.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma'noga ega. $y=f(x)$ funksiya Ferma teoremasining shartlarini qanoatlantirganda, $f(x)$ funksiyaning grafigidagi $(c,f(c))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

Ferma teoremasining fizik ma'nosi quyidagicha: to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan zarrachaning qaytish momenti tezligi nolga teng.

3.8-eslatma. $f'(c)=0$ shart, funksiyaning c nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lishi uchun yetarli shart bo'la olmaydi.

3.4-teorema (Roll teoremasi). $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ da aniqlangan bo'lib: 1) uzluksiz; 2) hech bo'lmaganda (a,b) da chekli hosilaga ega; 3) $[a,b]$ kesmaning chetlarida o'zaro teng $(f(a)=f(b))$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda, kamida bitta shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $f'(c)=0$.

Roll teoremasining geometrik ma'nosi quyidagicha: $y=f(x)$ funksiya Roll teoremasining hamma shartlarini qanoatlantirganda, bu funksiyaning grafigida shunday $(c;f(c))$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

3.9-eslatma. Roll teoremasida $y=f(x)$ funksiyadan, uning $[a,b]$ kesmada uzluksizligi, kesmaning ichki nuqtalarida esa, uning differensiallanuvchiligi, talab qilingan edi. Funksiya kesmaning ichki nuqtalarida differensiallanuvchiligidan, uning shu nuqtalarda uzluksizligi kelib chiqadi, shuning uchun Roll teoremasida funksiyaga qo'yilgan 1) shartning o'rniga, $f(x)$ ning a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa, chapdan uzluksiz bo'lishini talab qilish yetarli.

3.10-eslatma. Roll teoremasining barcha shartlari muhim. Agar teoremadagi $y=f(x)$ funksiyaga qo'yilgan shartlarning birortasi bajarilmasa, teoremaning tasdig'i o'rinli bo'lmasligi mumkin.

3.5- teorema (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya: 1) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) hech bo'lmaganda (a,b) oraliqda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda, shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{3.19}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi quyidagicha: faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirsin. $f(x)$ funksiya grafigining $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ nuqtalarini to'g'ri chiziq orqali tutashtiramiz. $f'(x)$- $f(x)$ funksiya grafigining $(x,f(x))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentidir, ya'ni $tg\alpha=f'(x)$. Shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $f(x)$ funksiya grafigiga $(c,f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi.

(3.19) formulani boshqacha ham yozish mumkin: $\forall x_0\in[a;b]$ nuqtani olib, unga ixtiyoriy Δx orttirma beramiz $(x_0+\Delta x\in[a;b])$. $[x_0,x_0+\Delta]$ kesma uchun (3.19) Lagranj formulasini yozamiz:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(c), \tag{3.20}$$

bunda $\forall c\in(x_0,x_0+\Delta x)$. Agar $c=x_0+\theta\Delta x$, $0<\theta<1$ deb belgilasak,

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(x_0+\theta\Delta x). \tag{3.21}$$

Odatda,, (3.21) formula, chekli orttirmalar haqidagi *Lagranj formulasi* deb yuritiladi.

3.11-eslatma. Agar (3.19) formulada $f(a)=f(b)$ deb olinsa, u holda, $f'(c)=0$ $(a<c<b)$ bo'lib, Lagranj teoremasidan Roll teoremasining kelib chiqishini ko'ramiz.

Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan natijalar.

3.1-natija. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqda $f'(c)=0$ bo'lsa, u holda, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zgarmas bo'ladi.

3.2-natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar biror (a,b) oraliqda uzluksiz, bu oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $f'(x)=g'(x)$, $x\in(a;b)$ bo'lsa, u holda, bu funksiyalarning biri ikkinchisidan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni $f(x)=g(x)+C$.

3.3-natija. $f(x)$ funksiya biror x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida uzluksiz va $U_\delta(x_0)$ atrofda differensiallanuvchi bo'lsin. Agar chekli $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$ mavjud bo'lsa, u holda, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x_0)=A$ bo'ladi.

3.6-teorema (Koshi teoremasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar:

1) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz;

2) (a,b) oraliqda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a,b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsin.

U holda, shunday $c(a < c < b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3.22}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Odatda, (3.22) formula – *Koshi formulasi* deb ataladi.

3.12-eslatma. (3.19) Lagranj formulasi, (3.22) Koshi formulasidan, $g'(x) = x$ bo'lganda kelib chiqadi.

3.13-eslatma. (3.22) formulada $b > a$ deb olish shart emas.

3.11. Funksiyaning monotonlik sharti

Kamaymovchi (o'smovchi), o'suvchi (kamayuvchi) funksiyalarning ta'riflarini yana bir marta eslatib o'tamiz.

1^0. $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$, $(f(x_1) \geq f(x_2))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda *kamaymovchi (o'smovchi)* deyiladi.

2^0. $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ uchun $f(x_1) < f(x_2)$, $(f(x_1) > f(x_2))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) *oraliqda o'suvchi (kamayuvchi)* deyiladi. Ba'zan, o'suvchi (kamayuvchi) iboralarii o'rniga *qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi)* iboralari ham ishlatiladi.

3.7-teorema. (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya shu oraliqda kamaymovchi (o'smovchi) bo'lishi uchun, bu funksiyaning $f'(x)$ hosilasi (a, b) oraliqda manfiy (musbat) bo'lmasligi zarur va yetarli.

3.8-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiyaning xosilasi $f'(x)$ funksiya (a, b) oraliqda musbat (manfiy) bo'lsa, u holda, $f(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

3.14-eslatma. $f(x)$ funksiyaning (a, b) oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun uning hosilasi $f'(x)$ ning musbat (manfiy) bo'lishi zaruriy shart bo'la olmaydi.

3.12. Lopital qoidalari

Funksiyalarning limitini hisoblash jarayonida, $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty - \infty$, $0^0, \infty^0, 1^\infty$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochish vaqtida, ba'zan qiyinchiliklarga duch kelinadi. Agar berilgan funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lsa, ulardan foydalanganda, berilgan aniqmasliklarni ochish yengillashadi. Odatda, hosilalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish *Lopital qoidalari* deb ataladi.

1. **Lopitalning birinchi qoidasi** $\left(\frac{0}{0}\right)$. Agar $x \to a$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning $x \to a$ dagi limiti $\left(\frac{0}{0}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Ba'zi hollarda, $x \to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini topishga qaraganda $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatning limitini topish yengil bo'ladi.

3.9- teorema (Lopitalning birinchi qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda aniqlangan, uzluksiz bo'lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

2) (a, b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A-chekli yoki cheksiz) bo'lsin.

U holda, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud va

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \qquad (3.23)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3.15- eslatma. Teoremaning 3) sharti bajarilmaganda ham, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo'lishi mumkin.

3.16- eslatma. 3.9- teoremada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarning $x=a$ nuqtada uzluksizligi talab qilinsa, u holda, $g'(a)\neq 0$ shartda (3.23) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{3.24}$$

3.17-eslatma. 3.9- teorema $a=+\infty$ yoki $a=-\infty$ bo'lgan hol uchun ham o'rinli, ya'ni $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $c<x<\infty$ oraliqda aniqlangan va shu oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0\,, \qquad g'(x)\neq 0\,,\ \forall x\in(c;+\infty).$$

U holda, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

3.18-eslatma. Agar $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar 3.9-teoremaning hamma shartlarini qanoatlantirsa, Lopital qoidasini takroriy qo'llash mumkin, ya'ni:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots$$

2. Lopitalning ikkinchi qoidasi $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Agar $x\to a$ da $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ bo'lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning $x\to a$ dagi limiti $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bunday aniqmasliklarni ochishda ham $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning hosilalaridan foydalanish muhim rol o'ynaydi.

3.10-teorema (Lopitalning ikkinchi qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) (a, b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $\forall x\in(a, b)$, $g'(x)\neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A-chekli yoki cheksiz), u holda,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3.19-eslatma. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo'lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $(0\cdot\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bu ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishda, uni

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\left(\frac{0}{0}\right)$ yoki $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, Lopital qoidalari qo'llaniladi.

3.20-eslatma. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ bo'lsa, $f(x)-g(x)$ ifoda $(\infty-\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifoda qiladi, uni ham quyidagi:

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$$

kabi yozish orqali $\left(\frac{0}{0}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi va Lopital qoidalari qo'llaniladi.

3.21- eslatma. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $1, 0$ va ∞, $g(x)$ funksiya esa, mos ravishda ∞, 0 va 0 ga intilganda $(f(x))^{g(x)}$ – daraja - ko'rsatkichli ifoda $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ifoda qiladi. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun, avvalo, berilgan ifoda logarifmlanadi:

$$\ln y=g(x)\cdot\ln f(x),$$

bu ifoda, $x\to a$ da $(0\cdot\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi, ya'ni yuqorida o'rganilgan holga keladi.

Shunday qilib, 1). $(0\cdot\infty)$ yoki $(\infty-\infty)$ ko'rinishdagi aniqmasliklar, algebraik almashtirishlar natijasida, $\left(\frac{0}{0}\right)$ yoki $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltiriladi va ularga Lopital qoidasi qo'llaniladi.

2). $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ ko'rinishdagi aniqmasliklar logarifmlash natijasida, yoki $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$ shakl o'zgartirishlar orqali $(0\cdot\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi, so'ngra uni $\left(\frac{0}{0}\right)$ yoki $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, Lopital qoidasi qo'llaniladi.

3.13. Teylor formulasi

3.11-teorema (Teylor teoremasi). $f(x)$ funksiya biror a nuqtaning atrofida $n+1$ tartibgacha hosilalarga ega, $x-$ funksiya argumentining a nuqtaning atrofidagi ixtiyoriy qiymati, p – ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda, a va x nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$f(x)=(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x) \quad (3.25)$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda:

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\cdot\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}\cdot f^{(n+1)}(\xi). \quad (3.26)$$

(3.25)- formula *Teylor formulasi* deyiladi, $R_{n+1}(x)$ ifoda esa, Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi. Odatda,, (3.26) ko'rinishdagi qoldiq hadni umumiy ko'rinishdagi qoldiq had deb ham yuritiladi.

Teylor formulasidan kengroq foydalanish maqsadida, uning qoldiq hadining umumiy ko'rinishi (3.26) dan xususiy holda kelib chiqadigan quyidagi turli xil ko'rinishlarini keltiramiz:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], \quad (3.27)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}\cdot(1-\theta)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], \quad (3.28)$$

$$R_{n+1}(x)=o[(x-a)^n]. \quad (3.29)$$

Qoldiq hadning bu ko'rinishlari, mos ravishda, qoldiq hadning *Lagranj, Koshi va Peano ko'rinishlari* deyiladi.

3.22-eslatma. Peano ko'rinishidagi qoldiq hadni keltirib chiqarishda 3.11-teoremadagi $f(x)$ funksiyaga nisbatan qo'yilgan shartni «yengillashtirish» mumkin, ya'ni, $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida $f'(x), f''(x),...., f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $f^{(n)}(x)$ hosila esa, a nuqtada uzluksiz bo'lsin, degan shart yetarli bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning (3.25) Teylor formulasida $a=0$ deb olinsa, ushbu

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \quad (3.30)$$

formula hosil bo'ladi. Odatda,, bu formulaga Makloren formulasi deyiladi. Bu holda, $R_{n+1}(x)$ qoldiq had:

1) Lagranj ko'rinishida: $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$;

2) Koshi ko'rinishida: $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)$;

3) Peano ko'rinishida: $R_{n-1}(x)=o(x^n)\quad (0<\theta<1)$
kabi yozilishi mumkin.

Ko'p hollarda, (3.25) Teylor formulasi quyidagi ko'rinishda yozilishi ham mumkin. Buning uchun (3.25) formulada $a=x_0,\ x-a=\Delta x$ va qoldiq had Lagranj ko'rinishida olinsa,

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+ \\ +\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\cdot(\Delta x)^{n+1}\quad (0<\theta<1) \tag{3.31}$$

formula hosil bo'ladi.

(3.31) Teylor formulasi chekli orttirmalar haqidagi Lagranj formulasining umumlashmasi hisoblanadi. Xususiy holda, (3.31) dan, $n=0$ deb olinsa, Lagranj formulasi kelib chiqadi.

Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lib, x argumentning $x_0=0$ nuqta atrofidagi barcha qiymatlarida, hamda $\forall n\in N$ uchun,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda, ushbu

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le M\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

x ning har bir belgilangan qiymatida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda, n ning yetarli katta qiymatlarida $R_{n+1}(x)$ ning yetarli kichik bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. Bu holda, $x_0=0$ nuqtaning atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ko'p had bilan taqribiy almashtirish mumkin bo'ladi:

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Agar $f(x)$ funksiya $x_0=0$ nuqtaning atrofida istalgan tartibdagi hosilaga (cheksiz differensiallanuvchi) ega bo'lsa:

a) $f(x)$ – juft bo'lganda, $\forall n\in N$ uchun $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{2k}(0)}{(2k)!}x^{2k}+R_{2n+1}(x)$,

b) $f(x)$– toq bo'lganda, $\forall n\in N$ uchun

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+R_{2n+2}(x);$$

bo'ladi.

3.13.1. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi

Ushbu

$$f(x)=e^x,\ f(x)=\sin x,\ f(x)=shx,\ f(x)=\cos x,$$

$$f(x)=chx,\ f(x)=(1+x)^m,\ f(x)=\ln(1+x)$$

funksiyalar uchun Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulalari, mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ ;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-....+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\ ;$$

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\ ;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+....+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\ ;$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+....+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\ ;$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+....+\frac{m(m-1)....(m-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)$$

yoki

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{n}C_\alpha^k x^k+0(x^n),\ \ C_\alpha^0=1,C_\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-(k-1))}{k!},\ k=1,2,...$$

Xususiy holda,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n),\qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n),$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\ .$$

3.14. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lsin.

3.12-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Funksiyaning shu oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun

$$f'(x) \geq 0 \ \ (f'(x) \leq 0), \ x \in (a,b)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

3.13-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda chekli hosilaga ega bo'lib, $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

3.14-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning (a,b) oraliqda o'zgarmas bo'lishi uchun

$$f'(x)=0, \ x \in (a,b)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda aniqlangan, chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega va $\forall x \in (a;b)$ oraliqda $f'(x)=g'(x)$ bo'lsa, (a,b) da bu funksiyalarning biri ikkinchisidan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni $f(x)=g(x)+C$, $\forall x \in (a;b)$.

3.13 *-teoremaning geometrik ma'nosi quyidagicha:*

1) $f'(x)>0$ $(\mathrm{tg}\alpha>0)$ shart funksiya grafigining har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinma abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak tashkil qilishini;

2) $f'(x)<0$ shart esa, usha urinma o'tmas burchak tashkil qilishini anglatadi.

3.23-eslatma. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu funksiyaning (a,b) oraliqda qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuchi) bo'lishidan, $f'(x)$ ning $\forall x \in (a,b)$ da musbat (manfiy) bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Funksiya hosilasining (a,b) oraliqda musbat (manfiy) bo'lishi funksiyaning qat'iy monoton bo'lishi uchun zaruriy shart bo'la olmaydi.

Funksiyani monotonlikka tekshirganda avvalo, uning hosilasini topish (u mavjud bo'lgan joyda) kerak, so'ngra hosila musbat (manfiy) bo'ladigan oraliqlarni aniqlash kerak. Hosilasi musbat (manfiy) bo'lgan oraliqlarda funksiya monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

3.15. Funksiyaning ekstremum qiymatlari

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

3.10-ta'rif. Agar $x_0 \in (a,b)$ nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi mavjud bo'lib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *lokal maksimumga (lokal minimumga)* ega deyiladi. $f(x_0)$ qiymat esa, $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofdagi *lokal maksimumi (lokal minimumi)* deyiladi.

3.11-ta'rif. Agar $x_0 \in (a,b)$ nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi mavjud bo'lib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga) ega deyiladi. $f(x_0)$ qiymat esa, $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofdagi *qat'iy lokal maksimumi (qat'iy lokal minimumi)* deyiladi.

Funksiyaning maksimumi va minimumi, umumiy nom bilan, uning *ekstremumi* deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardagi x_0 nuqta, $f(x)$ funksiyaning *lokal maksimum (lokal minimum), qat'iy maksimum (qat'iy minimum) nuqtasi*, deb yuritiladi. Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalari uning *ekstremum nuqtalari* deyiladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofdagi lokal maksimum (lokal minimum) qiymatlari $f(x_0) = \max\limits_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\}$ $\left(f(x_0) = \min\limits_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\}\right)$ kabi belgilanadi.

6.15-teorema (funksiya ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti). Agar $f(x)$ funksiya x_0 $(x_0 \in (a,b))$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, u shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Bu shart funksiya ekstremumga ega bo'lishi uchun yetarli shart bo'la olmaydi. Odatda, funksiyaning hosilasi nolga aylanadigan nuqtalar *statsionar (turg'un, kritik) nuqtalari* deb ataladi.

Funksiyaning hosilasi nolga, cheksizga teng yoki uning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham ekstremum mavjud bo'lishi mumkin. Odatda, bunday nuqtalar *ekstremumga shubhali nuqtalar* deb ataladi.

a) Ekstremum mavjud bo'lishining birinchi yetarli sharti. $x_0 \in (a,b)$ nuqtaning

$$U_\delta^-(x_0)=\{x\in R:\ x_0-\delta<x<x_0;\ \delta>0\},\ U_\delta^+(x_0)=\{x\in R:\ x_0<x<x_0+\delta;\ \delta>0\}$$

chap va o'ng atroflarini qaraymiz. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $\mathring{U}_\delta(x_0)$ da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin (x_0 nuqtada hosila mavjud bo'lmasligi ham mumkin).

1. Agar $\forall x\in U_\delta^-(x_0)$ uchun, $f'(x)>0$, $\forall x\in U_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x)<0$ bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *lokal maksimumga* erishadi.

2. Agar $\forall x\in U_\delta^-(x_0)$ uchun $f'(x)<0$, $\forall x\in U_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x)>0$ bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *lokal minimumga* erishadi.

Agar $\forall x\in U_\delta^-(x_0)$ uchun $f'(x)>0$, $\forall x\in U_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x)>0$

yoki $\forall x\in U_\delta^-(x_0)$ uchun $f'(x)<0$, $\forall x\in U_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x)<0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

$y=f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtalarni birinchi tartibli hosila yordamida topish qoidasi:

1. $f'(x)$ hosila topiladi.
2. $y=f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari, ya'ni $f'(x)$ hosila nolga aylanadigan yoki uzilishga ega bo'lgan nuqtalar topiladi.
3. Topilgan kritik nuqtalar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini oraliqlarga ajratadi, shu oraliqlarda $f'(x)$ hosilaning ishorasi tekshiriladi.
4. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

b) Ekstremum mavjud bo'lishining ikkinchi yetarli sharti. x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni $f'(x_0)=0$ bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *maksimumga (minimumga)* erishadi.

$y=f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtalarni ikkinchi tartibli hosila yordamida topish qoidasi:

1. $f'(x)$ hosila topiladi.
2. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalari, ya'ni $f'(x)=0$ bo'ladigan nuqtalar topiladi.

3. $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila topiladi.

4. Ikkinchi tartibli hosilaning ishorasi har bir kritik nuqtada tekshiriladi. Bunda, agar ikkinchi tartibli hosila manfiy bo'lsa, u holda, funksiya nuqtada maksimumga, musbat bo'lsa, minimumga ega bo'ladi. Agar ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo'lsa, u holda, funksiyaning ekstremumini birinchi yetarli shart bo'yicha tekshirish yoki yuqori tartibli hosilalardan foydalanib tekshirishga to'g'ri keladi (c) bandga q.).

5. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi:

c) *Ekstremum mavjud bo'lishining uchinchi yetarli sharti.* $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ hosilalari mavjud bo'lib, biror $n>2$ son uchun $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lsin.

Agar: *a*) n juft son bo'lib $(n = 2m, m \in N)$, $f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga; $f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

b) n toq son bo'lsa $(n = 2m+1, m \in N)$, $f(x)$ funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

3.16. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra, funksiyaning $[a;b]$ kesmada eng katta hamda eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi va funksiya bu qiymatlarga kesmaning nuqtalarida erishadi.

Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ oraliqdagi maksimum qiymatlari topiladi.
- $\{\max f(x)\}$ $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ oraliqdagi hamma maksimum qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin.

2) $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmaning chetlaridagi, ya'ni $x=a, x=b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi. So'ngra $\{\max f(x)\}$ to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi, $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng katta

qiymati bo'ladi. Xuddi shu usulda funksiyaning eng kichik qiymati ham topiladi.

Biror oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

1) bu oraliqda funksiyaning tegishli statsionar nuqtalarini topish, bu topilgan statsionar nuqtalarni ekstremumga tekshirish va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblash;

2) funksiyaning oraliqning chetki nuqtalaridagi qiymatlarini topish ;

3) topilgan qiymatlarni funksiyaning oraliqning ichidagi nuqtalarida qiymatlari biian solishtirish kerak; bu qiymatlarning eng kichigi va eng kattasi, mos ravishda, funksiyaning qaralayotgan oraliqdagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'ladi.

3.17. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$oraliqda berilgan bo'lsin.

3.12-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $(a;b)$ oraliqning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan yuqorida (pastda) yotsa, bu funksiyaning grafigi qavariq (botiq) deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

3.16-teorema. $f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqda qavariq (qatiy qavariq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasining shu oraliqda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

3.17-teorema. $f(x)$ funksiyaning (a,b) oraliqda botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasining shu oraliqda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

$y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin.

3.18-teorema. $f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun $f''(x)\geq 0$ $(f''(x)\leq 0)$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

3.18. Funksiya grafigining egilish nuqtalari

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U_\delta(x_0)$ $(\delta>0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin.

3.13-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $U_\delta^-(x_0)$ oraliqda botiq (qavariq) bo'lib, $U_\delta^+(x_0)$ oraliqda esa, qavariq (botiq) bo'lsa, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtadan o'tishda o'z qavariqligining yo'nalishini o'zgartirsa, u holda, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *egilish nuqtasi* deyiladi va bunda $(x_0, f(x_0))$ nuqta - $f(x)$ funksiya grafigining *egilish nuqtasi* deyiladi.

Agar $x_0 \in (a,b)$ - $f(x)$ funksiya grafigi egilish nuqtasining abssissasi bo'lsa, bu nuqtada ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga aylanadigan yoki mavjud bo'lmaydigan nuqtalar *II tur kritik nuqtalar* deyiladi. Bu nuqtalarda egilish mavjud bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

3.19-teorema (egilish nuqtasi bo'lishning zaruriy sharti). Agar $M(x_0, f(x_0))$ nuqta $f(x)$ funksiya grafigi uchun egilish nuqtasi bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda, $f''(x_0)=0$ bo'ladi.

Bu shart funksiya grafigi egilish nuqtasiga ega bo'lishi uchun yetarli shart bo'la olmaydi.

3.20-teorema (egilish nuqtasi bo'lishning birinchi yetarli sharti). $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega va $f''(x_0)=0$ bo'lsin. U holda, ko'rsatilgan atrofda ikkinchi tartibli $f''(x_0)$ hosila x_0 nuqtaning chap va o'ng atrofida har xil ishoraga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning grafigi $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada egilishga ega bo'ladi.

3.21-teorema (egilish nuqtasi bo'lishning ikkinchi yetarli sharti). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli uchinchi tartibli hosilaga ega va bu nuqtada $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda, $f(x)$ funksiyaning grafigi $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada egilishga ega bo'ladi.

3.22-teorema (egilish nuqtasi bo'lishning uchinchi yetarli sharti). $n\geq 2-$ biror juft son bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n- tartibli hosilaga, x_0 nuqtaning o'zida esa $n+1$ - tartibli hosilaga ega bo'lib,

$$f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0,\ f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$$

shartlar bajarilsa, u holda, $f(x)$ funksiyaning grafigi $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada egilishga ega bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtalarini topish qoidasi:

1.Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ topiladi.

2. $y=f(x)$ funksiyaning I I tur kritik nuqtalari, ya'ni $f''(x)$ hosila nolga aylanadigan yoki uzilishga ega bo'lgan nuqtalar topiladi.

3. Topilgan kritik nuqtalar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini oraliqlarga ajratadi. Bu oraliqlarda ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaning ishorasi tekshiriladi. Agar bunda x_0 kritik nuqta, qavariqlik va botiqlik oraliqlarini ajratib tursa, u holda, x_0 - funksiya grafigining egilish nuqtasi abssissasidan iborat bo'ladi;

4.Funksiyaning egilish nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

3.19. Funksiya grafigining asimptotalari

3.15-ta'rif. Agar o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta funksiya grafigi bo'yicha koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda, $y=f(x)$ funksiya grafigidagi o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqdagi $N(x_1,y_1)$ nuqtagacha bo'lgan $d=MN$ masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi deyiladi.

Oy va Ox o'qlarga parallel hamda koordinata o'qlariga parallel bo'lmagan asimptotalarni qaraymiz.

3.19.1. Vertikal asimptotalar. $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $\varepsilon>0$ atrofida aniqlangan, ya'ni $x\in \dot{U}_\varepsilon(a)$ bo'lsin.

3.16-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ lardan biri yoki ularning ikkalasi ham cheksiz bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining *vertikal* yoki *Oy o'qqa parallel asimptotasi* deyiladi .

Demak, $y=f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotalarini izlash uchun funksiyaning qiymatini cheksizlikka aylantiradigan (cheksiz uzilishga ega bo'lgan) $x=a$ nuqtani topish kerak ekan. Bunda $x=a$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

3.24-eslatma. Umuman olganda, $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bir nechta vertikal asimptotalarga ega bo'lishi ham mumkin.

3.19.2. Gorizontal asimptotalar.

3.17-ta'rif. Agar $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=b\ (b\in R)$ bo'lsa, $y=b$ to'g'ri chiziq $x\to+\infty\ (x\to-\infty)$ da $y=f(x)$ funksiya grafigining *gorizontal yoki Ox o'qqa parallel asimptotasi* deyiladi.

3.19.3. Og'ma asimptotalar.

3.18-ta'rif. Shunday k va b chekli sonlar mavjud bo'lib, $x\to+\infty\ (x\to-\infty)$da $f(x)$ funksiya quyidagi $f(x)=kx+b+\alpha(x)$ ko'rinishda ifodalansa (bunda $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$), $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining *og'ma asimptotasi* deyiladi. Xususiy holda $k=0$ bo'lsa, $y=b$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi.

3.23-teorema. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x\to\pm\infty$ da $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b \tag{3.32}$$

munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarli.

(3.32) limitlarni hisoblashda quyidagi xususiy hollar bo'ladi:

1-hol. Argument x ning ishorasiga bog'liq bo'lmagan holda, ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$$

ikkala limit ham mavjud va chekli . Bu holda, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining *ikki tomonlama og'ma asimptotasi* bo'ladi.

2-hol. Argument x ham musbat, ham manfiy ishorali cheksizlikka intilganda, ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b_1,\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b_2$$

limitlar mavjud, lekin ular o'zaro har xil (hech bo'lmaganda, $k_1\neq k_2$, yoki $b_1\neq b_2$). Bu holda, $y_1=k_1x+b_1$ va $y_2=k_2x+b_2$ to'g'ri chiziqlar funksiya grafigining, mos ravishda, ikkita *bir tomonli (o'ng va chap) og'ma asimptotalari* bo'ladi.

3-hol. Faqat $x\to+\infty$ da $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k,\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$

ikkala limit ham mavjud. Bu holda, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining *faqat o'ng og'ma asimptotasi* bo'ladi.

4-hol. Faqat $x\to-\infty$ da $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k,\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$ ikkala limit ham mavjud. Bu holda, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining *faqat chap og'ma asimptotasi* bo'ladi.

Agar yuqoridagi hollarning barchasida $k=0$ bo'lsa, $y=b$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi.

Funksiya grafigining asimtotalarga nisbatan joylashishini aniqlash uchun, har bir $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ hollarda $f(x)-(kx+b)$ ayirmaning ishorasi tekshiriladi.

Agar ayirmaning ishorasi musbat (manfiy) bo'lsa, funksiya grafigi asimptotadan yuqori (past)da joylashgan bo'ladi. Agar ayirma ishorasini o'zgartirsa, u holda, asimptota funksiya grafigini kesadi.

3.25-eslatma. Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun faqat $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ mavjud bo'lmasa (yoki cheksiz) bo'lsa, berilgan funksiyaning grafigi asimptotaga ega bo'lmaydi, lekin asimptotik yo'nalishga ega bo'ladi.

3.20. Funksiyani to'liq tekshirish va uning grafigini chizish

Funksiyaning o'zgarish xarakterini hosila yordamida o'rganish funksiya grafigini aniqroq yasashda muhim rol o'ynaydi. *Funksiyani to'liq tekshirish va uning grafigini yasashni quyidagi sxema bo'yicha olib borish maqsadga muvofiq bo'ladi:*

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.
2. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish.
3. Funksiyaning juft, toqligi hamda davriyligini aniqlash.
4. Funksiya grafigining o'qlar bilan kesishish nuqtalarini topish.
5. Funksiyaning ishorasi saqlanadigan oraliqlarni aniqlash.
6. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.
7. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini topish va ekstremumga tekshirish.
8. Funksiya grafigining qavariqligi hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish.
9. Funksiyaning grafigini chizish.

3.1. O'z-o'zini tekshirish savollari

3.1.1. Funksiyaning hosilasi. Egri chiziqqa urinma o'tkazish masalasi ([1], 1-t., 10- bo'lim; [3], 1-q., 120–121-betlar; [5], 1-t., 189–196-betlar; [12], 1-q., 182–185-betlar; [30], 3-bo'lim).

3.1.2. Hosilaning geometrik va fizik ma'nosi ([3], 1-q., 123–124-betlar; [5], 1-t., 186–188-betlar; [12], 1-q., 185–188-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim).

3.1.3. Funksiyaning uzluksiz bo'lishi va uning hosilaga ega bo'lishi orasidagi bog'lanish ([3], 1-q., 124–125-betlar; [12], 1-q., 188 bet; [9], 1-t., 6- bo'lim; [30], 3- bo'lim).

3.1.4. Funksiyaning differensiallanuvchilik sharti ([3], 1-q., 139-140-betlar; [5], 1-t., 211–214-betlar; [12], 1-q., 196–198-betlar).

3.1.5. Teskari funksiyaning hosilasi ([3], 1-q., 128–131-betlar; [5], 1-t., 196–198-betlar; [12], 1-q., 188–189-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [9],1-t., 6- bo'lim; [30], 7- bo'lim).

3.1.6. Murakkab funksiyaning hosilasi ([3], 1-q., 128 bet; [5], 1-t., 202–209-betlar; [12], 1-q., 189–190-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [9],1-t., 6- bo'lim; [30], 7- bo'lim).

3.1.7. Oshkormas funksiyaning hosilasi ([16], 156 bet; [30], 14-bo'lim).

3.1.8. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari ([3], 1-q., 125–127-betlar; [5], 1-t., 199–202-betlar; [12], 1-q., 190–196-betlar; [1], 1-t., 10-bo'lim; [9], 1-t., 6- bo'lim; [30], 3- bo'lim).

3.1.9. Elementar funksiyalarning hosilalari ([3], 1-q., 131–132-betlar; [5], 1-t., 193–196-betlar; [12], 1-q., 190–196-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [9], 1-t., 3- bo'lim; [30], 3- bo'lim).

3.1.10. Funksiyaning differensiali ([3], 1-q., 139–141-betlar; [5], 1-t., 213–215-betlar; [12], 1-q., 198–199-betlar; [30], 3- bo'lim).

3.1.11. Differensiallashning sodda qoidalari ([3], 1-q., 141–143-betlar; [5], 1-t., 215–216-betlar; [12], 1-q., 200 bet; [30], 3- bo'lim).

3.1.12. Taqribiy hisoblashda differensialdan foydalanish ([3], 1-q., 143–145-betlar; [5], 1-t., 218–220-betlar; [12], 1-q., 201–202-betlar, [30], 3- bo'lim).

3.1. 13. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari ([3], 1-q., 145–146-betlar; [5], 1-t., 231–232-betlar; [12], 1-q., 202–207-betlar; [30], 3-bo'lim).

3.1. 14. Leybnis formulasi ([3], 1-q., 147–148-betlar; [5], 1-t., 236–238-betlar; [12], 1-q., 205–206-betlar).

3.1. 15. Funksiya yuqori tartibli differensiallarining invariant emasligi ([3], 1-q., 150–151-betlar; [5], 1-t., 242–243-betlar)

3.1. 16. Ferma teoremasi ([3], 1-q., 133 bet; [5], 1-t., 223–224-betlar; [12], 1-q., 210–211-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [30], 4- bo'lim).

3.1. 17. Roll teoremasi ([3], 1-q., 134 bet; [5], 1-t., 225–226-betlar; [12], 1-q., 211–212-betlar; [1], 1-t.,10- bo'lim; [9], 1-t., 6- bo'lim; [30], 3- bo'lim).

3.1. 18. Chekli ortirmalar haqidagi formula (Lagranj formulasi). Lagranj teoremasi ([3], 1-q., 134–135-betlar; [5], 1-t., 226–228-betlar; [12], 1-q., 212–213-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [9], 1-t., 6- bo'lim; [30], 4- bo'lim).

3.1.19. Koshi teoremasi ([3], 1-q., 135–136-betlar; [5], 1-t., 229–230-betlar; [12], 1-q., 213–214-betlar).

3.1.20. Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan natijalar: funksiyaning o'zgarmaslik sharti, funksiyaning monotonlik sharti ([3], 1-q., 135 bet; [28], 168–171-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [30], 4- bo'lim).

3.1.21. Teylor formulasi. Qoldiq hadning har xil ko'rinishlari. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi ([3], 1-q., 151–157-betlar; [5], 1-t., 246–257-betlar; [12], 1-q., 214–226-betlar; [9], 1-t., 7- bo'lim).

3.1.22. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremum qiymatlari ([3], 1-q., 158–164-betlar; [5], 1-t., 268–290-betlar; [12], 1-q., 227–236-betlar; [30], 4- bo'lim).

3.1.23. Funksiya grafigining qavariqlari va botiqligi ([3], 1-q., 165–168-betlar; [5], 1-t., 294–304-betlar; [30], 4- bo'lim).

3.1.24. Funksiya grafigining egilish nuqtaliri ([3], 1-q., 168–169-betlar; [5], 1-t., 294–304-betlar; [12], 1-q., 242–243-betlar; [30], 4- bo'lim).

3.1.25. Egilishning zaruriy va yetarli shartlari([5], 1-t., 294–304-betlar; [30], 4- bo'lim).)

3.1.26. Funksiya grafigining asimptotalari ([3], 1-q., 169–170-betlar; [5], 1-t., 308–311-betlar; [12], 1-q., 243–245-betlar; [30], 2- bo'lim).

3.1.27. Funksiya grafigini chizish ([5], 1-t., 305–306-betlar; [12], 1-q., 245–246-betlar; [30], 4- bo'lim).

3.1.28. Aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi ([3], 1-q., 170–176-betlar; [5], 1-t., 314–322-betlar; [12], 1-q., 246–256-betlar; [1], 1-t., 10- bo'lim; [30], 4- bo'lim).

3.2. Nazariy (muammoli) topshiriqlar

3.2.1. $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilaga ega emasligini isbotlang.

Quyidagi funksiyalarning ko‘rsatilgan nuqtalarda o‘ng va chap hosilalarini toping:

3.2.2. $f(x)=[2^x-2],\ x_0=1.$ **3.2.3.** $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x},\ x_0=1, x_0-1.$

3.2.4. $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \ bo'lganda, \\ 0, & x=0 \ bo'lganda. \end{cases}\ x_0=0.$

3.2.5. $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \ bo'lganda, \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & x>0 \ bo'lganda, \end{cases}\ x_0=0.$

3.2.6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0 \ bo'lganda, \\ 0, & x=0 \ bo'lganda, \end{cases}\ x_0=0.$

3.2.7. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \ bo'lganda, \\ 0, & x=0 \ bo'lganda, \end{cases}\ x_0=0.$

3.2.8. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $f(x)$ funksiya $x_0\in X$ nuqtada hosilaga ega, $g(x)$ esa, bu nuqtada hosilaga ega bo‘lmasin. U holda, *a)* $f(x)+g(x)$, *b)* $f(x)\cdot g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilalari haqida nima deyish mumkin? Misollar keltiring.

3.2.9. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $f(x)$ ham, $g(x)$ ham, $x_0\in X$ nuqtada hosilaga ega bo‘lmasa, u holda, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalarning x_0 nuqtadagi hosilalari haqida nima deyish mumkin? Misollar keltiring.

3.2.10. Hosilaga ega bo‘lgan juft funksiyaning hosilasi toq funksiya ekanligini isbotlang.

3.2.11. Hosilaga ega bo‘lgan toq funksiyaning hosilasi juft funksiya ekanligini isbotlang.

3.2.12. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va $f(x_0)\neq 0$, $g(x)$ funksiya esa, bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lmasa, u holda,

$f(x)\cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensallanuvchi bo'lmasligini isbotlang.

3.2.13. Agar hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya davriy bo'lib, uning davri T ga teng bo'lsa, u holda, $f'(x)$ funksiyaning davri ham T ga teng bo'lishini isbotlang.

3.2.14. $f'(x_0)$ va $f''(x_0)$ hosilalar mavjud emas, lekin $f^{(3)}(x_0)$ hosila mavjud bo'ladigan $f(x)$ funksiyaga misol keltiring.

3.2.15. Ox o'qning hech bir nuqtasida hosilaga ega bo'lmasdan, uning kvadrati esa, Ox ning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'ladigan funksiyaga misol keltiring.

3.2.16. Qanday nuqtalarda $y=\frac{x+2}{x-2}$ funksiya grafigiga o'tkaziladigan urinma Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan 135° li burchak tashkil etadi?

3.2.17. $y=\sin x$ funksiyaning grafigi abssissalar o'qini qanday burchaklar ostida kesadi?

3.2.18. Qanday nuqtalarda $y=(3-x^2)e^x$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi?

3.2.19. Qanday nuqtalarda $y=2x^3-3x^2-12x+7$ funksiya grafigiga o'tkazilgan o'rinma Ox o'qqa parallel bo'ladi?

3.2.20. Qanday nuqtalarda $f(x)=x^3-3x^2-+2$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma $y=3x$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi?

3.2.21. Qanday nuqtada $f(x)=x^2-7x+3$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma $5x+y-3=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi?

3.2.22. $y=f(x)$ funksiya parametrik ko'rinishda, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[a,b]$, tenglama orqali berilganda uning $y^{(3)}(x)$ hosilasini toping.

3.2.23. $y=\operatorname{arctg} x$ funksiya uchun n – tartibli hosilani topish formulasini keltirib chiqaring.

3.2.24. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (bunda a, b, c, d lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar) funksiya uchun n – tartibli hosilani topish formulasini keltirib chiqaring.

3.2.25. $y=x(x^2-1)$ funksiyaning $[-1;1]$ va $[0;1]$ kesmalarda Roll teoremasining shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

3.2.26. $f(x)=(x^2-1)(x-2)$ funksiya uchun $(-1;1)$ va $(1;2)$ oraliqlarda shunday nuqtalarni topish kerakki, bu nuqtalarda funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma abssissa o'qiga parallel bo'lsin.

3.2.27. Lagranj teoremasidan foydalanib, quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \quad x, y \in R$; b) $|\cos x - \cos y| \le |x - y|, \quad x, y \in R$

3.2.28. Lagranj teoremasidan foydalanib, quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

a) $|arctgx - arctgy| \le |x - y|, \quad x, y \in R$. b) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \frac{1}{2}|x - y|, \quad x, y \in [1; +\infty]$.

3.2.29. $\sqrt[3]{x^2} - 1$ funksiya (-1;1) oraliqning ichki $x = 0$ nuqtasida o'zining eng kichik qiymatiga erishsa ham, bu funksiya uchun Ferma teoremasining tasdig'i o'rinli emasligini isbotlang.

3.2.30. $f(x) = \sin x$ funksiya uchun [0;2] kesmada Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

3.2.31. Ushbu $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} (0 < b < a)$ tengsizlikni Lagranj teoremasidan foydalanib isbotlang.

3.2.32. Ushbu $f(x) = e^x, g(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$. funksiyalar $[-3; 3]$ kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoantlantiradimi?

3.2.33. Shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta mavjud bo'lib, $f'(\xi) = 0$ bo'lishi uchun, Roll teoremasining shartlari zarur va yetarlimi?

3.2.34. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3$ funksiyalar uchun $[-1; 1]$ oraliqda Koshi teoremasi o'rinlimi?

3.2.35. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lib, $f(a) - f(b)$ bo'lsa, u holda, $\exists \xi \in (a; b)$ bo'lib, $f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2} f'(\xi)$ munosabat o'rinli ekanligini isbotlang.

3.2.36. y ni $\sin(m \arcsin x)$, $\cos(m \arcsin x)$, $\sin(m \arccos x)$, $\cos(m \arccos x)$ funksiyalardan biri deb olib, uning uchun $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$ tenglikning o'rinli ekanligini isbotlang.

3.2.37. $y = e^{-x} \cos x$ funksiyaning $y^{(4)} + 4y = 0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

3.2.38. $y = ce^{-x} + c_1 e^{-2x}$ funksiyaning $y'' + 3y' + 2y = 0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

3.2.39. $y = arctgx$ deb olib, $y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ ekanligini isbotlang.

3.2.40. Material nuqta $s(t)=2t^2+\frac{5}{3}t$ ($s-$ metrlarda, t esa, sekundlarda o'lchanadi) qonun bo'yicha harakatlanadi. Uning harakat boshlangandan 5 sekund o'tgandan keyingi tezlanishini toping.

3.2.41. $s(t)=ae^t+be^{-t}$ qonun bo'yicha harakat qilayotgan jismning tezlanishi, bosib o'tilgan yo'lga tengligini isbotlang.

3.2.42. Birinchi nuqta $s_1(t)=t^3+\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$, ikkinchi nuqta esa, $s_2(t)=\frac{2}{3}t^3+3t^2-5t$ (s_1, s_2 lar metrlarda, t esa, sekundlarda o'lchanadi) qonunlar bo'yicha harakatlansin. Ularning tezliklari teng bo'lgan nuqtalarda tezlanishlari topilsin.

3.2.43. $f(x)=x^2$ va $g(x)=x^3$ funksiyalar uchun $[-1;1]$ kesmada Koshi teoremasining o'rinli emasligini tushuntiring.

3.3. Amaliy topshiriqlar

3.3.1-masala. Hosila ta'rifidan foydalanib, quyidagi funksiyaning hosilasini toping:

3.3.1.1. $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **3.3.1.2.** $f(x)=\sqrt{x}$.

3.3.1.3. $f(x)=3^x\cos x$ **3.3.1.4.** $f(x)=x\sqrt[3]{x}$.

3.3.1.5. $f(x)=3^{x+2}$. **3.3.1.6.** $f(x)=\ln x$.

3.3.1.7. $f(x)=\cos 2x$. **3.3.1.8.** $f(x)=\operatorname{tg} x$.

3.3.1.9. $f(x)=\arcsin 2x$. **3.3.1.10.** $f(x)=\arcsin 3x$.

3.3.1.11. $f(x)=2\cdot\sin 2x$. **3.3.1.12.** $f(x)=1+\ln 2x$

3.3.1.13. $f(x)=x+\operatorname{tg} x$. **3.3.1.14.** $f(x)=x^3$.

3.3.1.15. $f(x)=\cos ax$. **3.3.1.16.** $f(x)=6x^2-5x$.

3.3.1.17. $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Berilgan funksiyaning quyida ko'rsatilgan nuqtada chekli hosilaga ega emasligini ko'rsating:

3.3.1.18. $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$, $x_0=0$. **3.3.1.19.** $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$, $x_0=1$.

3.3.1.20. $f(x)=3|x|+1$, $x_0=0$. **3.3.1.21.** $f(x)=\sqrt[7]{x^5}$, $x_0=0$.

3.3.1.22. $f(x)=\sqrt[5]{x-1}$, $x_0=1$. **3.3.1.23.** $f(x)=3|x-2|+1$, $x_0=2$.

3.3.1.24. $f(x)=\sqrt[7]{x-3}$, $x_0=3$. **3.3.1.25.** $f(x)=3|x+3|$, $x_0=-3$.

3.3.1.26-misol. Ushbu $y=\operatorname{tg}x$ funksiyaning hosilasini, ta'rifdan foydalanib, toping.

Yechilishi ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 120–122-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). Ma'lumki, $y=\operatorname{tg}x$ funksiya R ning $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in z)$ nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan. $\forall x\in D(y)$ nuqtani olib, unga $x+\Delta x\in D(y)$ bo'ladigan Δx orttirma beraylik. Bunda berilgan funksiya ham, argumentning Δx orttirmasiga mos,

$$\Delta y=\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x=\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cos x} \tag{3.33}$$

orttirma oladi. (3.33) ning ikkala tomonini Δx ga bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cos x}$$

nisbatni hosil qilamiz va uning $\Delta x\to 0$ dagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak, $y'=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad\forall x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ k\in Z.$

3.3.2-masala. Hosilalar jadvali va hosilani topishning sodda qoidalari yordamida funksiyaning hosilasini toping.

3.3.2.1. $y=x^5-\frac{1}{5}x^4+3{,}5x^3-0{,}2x^2+\frac{1}{3}x+0{,}01.$

3.3.2.2. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+0{,}01x^{12}.$ **3.3.2.3.** $y=\frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}.$

3.3.2.4. $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}.$ **3.3.2.5.** $y=\frac{\ln 5}{x^2}+e^3.$

3.3.2.6. $y=x^{\sqrt{3}}-e^{-x\sqrt{3}}.$ **3.3.2.7.** $y=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$

3.3.2.8. $y=e^x(\cos x+\sin x).$ **3.3.2.9.** $y=2e^x+\frac{\ln x}{2}.$

3.3.2.10. $y=\frac{e^x+\sin x}{xe^x}.$ **3.3.2.11.** $y=6x\cdot\sin x.$

3.3.2.12. $y=(x^2-8x+7)e^x.$ **3.3.2.13.** $y=\sqrt{x}(x^3-\sqrt{x}+1)$

3.3.2.14. $y = 9x^{20} + 20x^{-5}$.

3.3.2.15. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$.

3.3.2.16. $y = \log_x 2$.

3.3.2.17. $y = (x-a)(x-b)$.

3.3.2.18. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

3.3.2.19. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

3.3.2.20. $y = \left(1+nx^m\right)\left(1+mx^n\right)$

3.3.2.21. $y = e^x(\cos 2x - \sin 3x)$.

3.3.2.22. $y = \frac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+11}$.

3.3.2.23. $y = \sqrt{x}\left(x^4 - x\sqrt{x} + 1\right)$

3.3.2.24. $y = \log_{x^2+3} 2$.

3.3.2.25. $y = (x+1)(x+4)^3(x+5)^2$.

3.3.2.26-misol. Hosilalar jadvali va sodda qoidalari yordamida quyidagi $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 0.2x^5$ funksiyaning hosilasini toping .

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 125–128-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). Hosilani hisoblashning 1-4 sodda qoidalari va hosilalar jadvalidan foydalanib, hosilani topamiz:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 0{,}2x^5\right)' = \left(x^{1/3} + x^{-1/2} - 0{,}2x^5\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 0{,}2\cdot 5x^4 =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - x^4.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
>Diff((x)^(1/3)+1/sqrt(x)-
0.2*(x)^5,x)=diff((x)^(1/3)+1/sqrt(x)-
0.2*(x)^5,x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x^{(1/3)} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 0.2\,x^5\right) = \frac{1}{3\,x^{(2/3)}} - \frac{1}{2\,x^{(3/2)}} - 1.0\,x^4.$$

3.3.3.- masala. Quyidagi berilgan funksiyaning hosilacini toping, so'ngra hosilaning ko'rsatilgan nuqtadagi xususiy qiymatini aniqlang:

3.3.3.1. $y = 2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{16}{x}$, $x_0 = -8$.

3.3.3.2. $y = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}$, $x_0 = 0{,}01$.

3.3.3.3. $y = \frac{\cos 2t}{1-\sin t}$, $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

3.3.3.4. $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $x_0 = -2$.

3.3.3.5. $y=(x-a)(x-b)(x-c),\ x_0=c.$

3.3.3.6. $y=\dfrac{x-a}{x-b},\ a\neq b,\ x_0=a.$

3.3.3.7. $y=\left(1+ax^b\right)\left(1+bx^a\right),\ x_0=1.$

3.3.3.8. $y=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1984)\cdot(x-1985),\ x_0=0.$

3.3.3.9. $y=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x,\ x_0=0.$

3.3.3.10. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x+x\sin x},\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

3.3.3.11. $y=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x,\ x_0=0.$

3.3.3.12. $y=\operatorname{arctg} x\cdot\arccos x,\ x_0=0.$

3.3.3.13. $y=\log_2 x\cdot\ln 2x.\ x_0=1.$

3.3.3.14. $y=\dfrac{x^2}{\ln x},\ x_0=e.$

3.3.3.15. $y=x^5e^{-x},\ x_0=5.$

3.3.3.16. $y=(x-1)(x-2)\ldots(x-10),\ x_0=2.$

3.3.3.17. $y=(x-1)(x-2)^2\ldots(x-10)^{10},\ x_0=1.$

3.3.3.18. $y=(x-1)^{10}(x-2)^9\ldots(x-10),\ x_0=10.$

3.3.3.19. $y=x^2(x-1)^3\ldots(x-10)^{12},\ x_0=1.$

3.3.3.20. $y=x^{21}(x-1)^{20}\ldots(x-10),\ x_0=20.$

3.3.3.21. $f(x)=(x-2)^2(x+3)^3,x_0=-3.$

3.3.3.22. $y=\arcsin x\cdot\arccos x,\ x_0=0.$

3.3.3.23. $y=x^6e^{-x},\ x_0=6.$

3.3.3.24. $y=\left(1+3x^4\right)\left(1+4x^3\right),\ x_0=1.$

3.3.3.25. $y=(x-1)^3\ldots(x-10)^{12},\ x_0=1.$

3.3.3.26-misol. Ushbu $f(x)=(x-1)^2(x+3)$ funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi hosilasini, ta'rifdan foydalanib toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 120–122-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). 1-banddagi (3.2) formulaga asosan, $f(1)=0$ va

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-1}=0$$

bo'ladi. Demak, $f'(1)=0$.

3.3.4-masala. Berilgan egri chiziqqa quyida ko'rsatilgan x_0 nuqtada o'tkazilgan urinma chiziq va normal tenglamalarini tuzing.

3.3.4.1. $y=2x^2+3,\ x_0=-1.$ **3.3.4.2.** $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},\ x_0=1.$

3.3.4.3. $y=2x+\frac{1}{x}$, $x_0=1$.

3.3.4.4. $y=\frac{-2(x^8+2)}{3(x^4+1)}$, $x_0=1$.

3.3.4.5. $y=\frac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$.

3.3.4.6. $y=\frac{x^{16}+9}{1-5x^2}$, $x_0=1$.

3.3.4.7. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$, $x_0=1$.

3.3.4.8. $y=\frac{1}{3x+2}$, $x_0=2$.

3.3.4.9. $y=\frac{x}{x^2+1}$, $x_0=-2$.

3.3.4.10. $y=\frac{(x^2-3x+3)^3}{9}$, $x_0=3$.

3.3.4.11. $y=\frac{2x}{x^2}+1$, $x_0=1$.

3.3.4.12. $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0=1$.

3.3.4.13. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$, $x_0=1$.

3.3.4.14. $y=\frac{x^2}{10}+3$, $x_0=2$.

3.3.4.15. $y=\frac{x^2-2x-3}{4}$, $x_0=4$.

3.3.4.16. $y=\frac{1}{3}(3x-2x^3)$, $x_0=1$.

3.3.4.17. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}, x_0=1$.

3.3.4.18. $y=\frac{1}{3}(x^2-3x)$, $x_0=3$.

3.3.4.19. $y=\frac{1}{3x+2}$, $x_0=2$.

3.3.4.20. $y=\frac{x}{x^2+1}$, $x_0=-2$.

3.3.4.21. $y=5(\sqrt[5]{x}-4\sqrt{x})$, $x_0=1$.

3.3.4.22. $y=\frac{1}{4x+2}$, $x_0=2$.

3.3.4.23. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$, $x_0=-2$.

3.3.4.24. $y=\frac{(x^2-3x+3)^2}{3}$, $x_0=3$.

3.3.4.25. $y=\frac{1}{3}(x^3-6x)$, $x_0=3$.

3.3.4.26-misol. Ushbu $y=x^3+3x$ funksiya grafigiga $M_0(1;4)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 123–124-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3-bo'lim). Urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topish uchun, avvalo berilgan funksiyaning hosilasini topamiz: $y'=3x^2+3$.

Bu hosilaning $x=1$ nuqtadagi qiymati urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi, ya'ni $f'(1)=3\cdot1+3=6$. Shunday qilib, (3.3) va (3.4) formulalarga asosan, urinma va normal chiziq tenglamalari, mos ravishda, quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi:

$$y-4=6(x-1) \text{ yoki } y=6x-2,\quad y-4=-\frac{1}{6}(x-1) \text{ yoki } y=-\frac{1}{6}x+4\frac{1}{6}.$$

3.3.5-masala. Quyida berilgan funksiyaning hosilasini hisoblang:

3.3.5.1. $y=\frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$. **3.3.5.2.** $y=\frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^2}}{12\cdot x^{12}}$.

3.3.5.3. $y=\frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$. **3.3.5.4.** $y=\frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

3.3.5.5. $y=\frac{1}{3}(3x-2x^3),\ x_0=1$. **3.3.5.6.** $y=(x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$

3.3.5.7. $y=\frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$. **3.3.5.8.** $y=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

3.3.5.9. $y=\frac{(x^2-8)\cdot\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$. **3.3.5.10.** $y=(x^2-2)\sqrt{4+x^2}$.

3.3.5.11. $y=\frac{\sqrt{x-1}\cdot(3x+2)}{4x^2}$. **3.3.512.** $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$.

3.3.5.13. $y=\frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{(x^2+5)}}$. **3.3.5.14.** $y=3\frac{\sqrt[3]{x^2+5}}{x+1}$.

3.3.5.15. $y=\frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$. **3.3.5.16.** $y=\frac{2+x^2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

3.3.5.17. $y=\frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$. **3.3.5.18.** $y=\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

3.3.5.19. $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$. **3.3.5.20.** $y=\frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

3.3.5.21. $y=\frac{x^2}{(x^2+6)\sqrt{(x^2+4)}}$. **3.3.5.22.** $y=\frac{\sqrt[5]{x^2+4}}{x+2}$.

3.3.5.23. $y=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+2x}}$. **3.3.5.24.** $y=\frac{3+x^3}{\sqrt{1-x^4}}$.

3.3.5.25. $y=\frac{3x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+4}}$.

3.3.5.26-misol. $y=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechilishi. Hosilani hisoblashning 1-5 sodda qoidalari va hosilalar jadvaldan foydalanib topamiz:

$$y'=\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)'\cdot\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)-\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)'\cdot\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}=\frac{x^2-\frac{10}{3}x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt[6]{x}}}{\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Diff((x^2+sqrt(x))/(x-2*x^(1/3)),
x)=diff((x^2+sqrt(x))/(x-2*x^(1/3)),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-2\,x^{(1/3)}}\right)=\frac{2\,x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x-2\,x^{(1/3)}}-\frac{(x^2+\sqrt{x})\left(1-\frac{2}{3\,x^{(2/3)}}\right)}{(x-2\,x^{(1/3)})^2}$$

3.3.6-masala. Quyidagi funksiyaning hosilasini toping:

3.3.6.1. $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x.$

3.3.6.2. $y=\mathrm{tg}^2 x/\left(\mathrm{tg}\, x^2\right)$

3.3.6.3. $y=\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x).$

3.3.6.4. $y=2x\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)-\sqrt{4x^2-1}.$

3.3.6.5. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sin x\right).$

3.3.6.6. $y=\arccos\frac{x^{24}-1}{x^{24}+1}.$

3.3.6.7. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right)^2.$

3.3.6.8. $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}.$

3.3.6.9. $y=2^{\sin x^2}.$

3.3.6.10. $y=3^{\cos^2 x}.$

3.3.6.11. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$

3.3.6.12. $y=\log_2\log_3\log_5 x.$

3.3.6.13. $y=\ln\ln\ln x^2.$

3.3.6.14. $y=\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\mathrm{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}.$

3.3.6.15. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x^2}{2}$.

3.3.6.16. $y = \dfrac{1}{\sin^4 x + 1} + \ln \dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x + 1}$.

3.3.6.17. $y = \ln \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos x}$.

3.3.6.18. $y = x^x$.

3.3.6.19. $y = \dfrac{7}{x^{\ln x}}$.

3.3.6.20. $y = x^{\ln x} - 2x^{\log_x e} e^{1+\ln x}$.

3.3.6.21. $y = 3^{\sin^2 x}$.

3.3.6.22. $y = e^{\sqrt{\frac{1-3x}{1+3x}}}$.

3.3.6.23. $y = \log_3 \log_4 \log_8 x$.

3.3.6.24. $y = \lg \lg \lg x^2$.

3.3.6.25. $y = 3^{x^{x^2}}$

3.3.6.26-misol. $y = 2^{x^x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechilishi. ([2], 6-bo‘lim; [3], 1-q., 130–132-betlar; [9], 1-t., 6-bo‘lim; [30], 3-bo‘lim). Ko‘rsatkichli va daraja-ko‘rsatkichli funksiyalarning hosilalarini topish formulasidan foydalanib topamiz:

$$y' = (2^{x^x})' = 2^{x^x} \ln 2 \left(x^x\right)' = 2^{x^x} \ln 2\, x^x\, (\ln x + 1).$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Diff((2^((x)^x)),x)=diff((2^((x)^x)),x);
```

$$\frac{d}{dx} 2^{(x^x)} = 2^{(x^x)} x^x (\ln(x) + 1) \ln(2)$$

3.3.7-masala. Berilgan funksiyaga teskari bo‘lgan funksiyaning ko‘rsatilgan nuqtada hosilasini hisoblang.

3.3.7.1. $y = x + \dfrac{1}{5}x^5$, $y = \dfrac{6}{5}$.

3.3.7.2. $y = 2x - \dfrac{\cos x}{2}$; $y = -\dfrac{1}{2}$.

3.3.7.3. $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$, $y = 1$.

3.3.7.4. $y = 2x^2 - x^4, x > 1, y = 0$.

3.3.7.5. $y = 2x^2 - x^4, 0 < x < 1, y = \dfrac{3}{4}$.

3.3.7.6. $y = x + x^5$, $y = 2$.

3.3.7.7. $y = x + \ln x$, $y = 1$.

3.3.7.8. $y = x + e^x$, $y = 1$.

3.3.7.9. $y = x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y = 0$.

3.3.7.10. $y = x + \operatorname{arctg} x$, $y = 0$.

3.3.7.11. $y = x + \arcsin x^3$, $y = 0$.

Quyidagi funksiyaga teskari funksiyaning hosilasini hisoblang:

3.3.7.12. $y = x + \ln x,\ x > 0.$

3.3.7.13. $y = x + e^x.$

3.3.7.14. $y = shx;$

3.3.7.15. $y = thx.$

3.3.7.16. $y = \dfrac{x^2 1 + x^2}{1 + x^2},\ x < 0.$

3.3.7.17. $y = chx,\ x > 0.$

3.3.7.18. $y = 2x^3 + 3x^5 + x.$

3.3.7.19. $y = 3x - \dfrac{1}{2}\cos x.$

3.3.7.20. $y = \arcsin \sqrt{x}.$

3.3.7.21. $y = x + \lg x,\ y = 1.$

3.3.7.22. $y = x + 3^x,\ y = 1.$

3.3.7.23. $y = 2 + x + \lg x,\ x > 0.$

3.3.7.24. $y = x + \dfrac{1}{2}\cos 2x,\ y = 0.$

3.3.7.25. $y = x - e^{2x}.$

3.3.7.26-misol. $y = x + \dfrac{1}{5}x^5$ funksiyaga teskari funksiyaning $y = 0,\ y = \dfrac{6}{5}$ nuqtalardagi hosilasini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 128-129-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). Berilgan funksiya $\forall x \in R$ da qat'iy o'suvchi, $y'_x = 1 + x^4$ funksiya R ning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi. Shuning uchun, bu funksiyaga teskari funksiya mavjud va uning hosilasi (3.9) formula orqali topiladi:

$x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{1 + x^4}$. $y = 0$ bo'lganda, $0 = x\left(1 + \dfrac{1}{5}x^4\right)$, $x = 0$ bo'ladi.

$x'_y(0) = 1.$ $y = \dfrac{6}{5}$ bo'lganda esa, $6 = 5x + x^5$, $x^5 + 5x - 6 = 0$, $x = 1$.

$x'_y\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{1}{2}$ bo'ladi.

3.3.8-masala. Quyidagi funksiyaning differensialini toping:

3.3.8.1. $y = \ln \ln\left(\dfrac{x}{3}\right).$

3.3.8.2. $y = \cos \dfrac{1}{\log_2 x}.$

3.3.8.3. $y = 10^{\frac{x}{\log 3x}}.$

3.3.8.4. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$

3.3.8.5. $y = \ln \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos x}.$

3.3.8.6. $y = \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \ln \sqrt{\dfrac{e^x}{e^x + 1}}.$

3.3.8.7. $y = \sqrt[x]{x}\ (x > 0).$

3.3.8.8. $y = x^{x^a} + x^{x^x},\ a > 0,\ x > 0.$

3.3.8.9. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right)$

3.3.8.10. $y = arctg \dfrac{\ln x}{x}.$

3.3.8.11. $y=\frac{x^2\ln x}{x}$.   3.3.8.12. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

3.3.8.13. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.   3.3.8.14. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$.

3.3.8.15. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.   3.3.8.16. $y=\frac{x^2 2^x}{x^x}$.

3.3.8.17. $y=\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}$.   3.3.8.18. $y=\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}$.

3.3.8.19. $y=\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}$. 3.3.8.20. $y=\frac{(2x-1)\sqrt[3]{2+3x)}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

3.3.8.21. $y=\frac{x^3\ln x}{2+x}$.   3.3.8.22. $y=\frac{3+\ln x^3}{\sqrt{x}}$.

3.3.8.23. $y=\frac{x^3}{\left(x^2+4\right)\sqrt{\left(x^2+8\right)}}$.   3.3.8.24. $y=\frac{\sqrt[5]{x^2+4x}}{x^2+2}$.

3.3.8.25. $y=\sqrt[3]{x+2x}\quad (x>0)$.

3.3.8.26-misol. $y=x^{x^2}$ funksiyaning differensialini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 139-142-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). Berilgan funksiyaning differensialini, (3.13) va daraja- ko'rsatkichli funksiyalarning hosilalarini topish formulalaridan foydalanib, topamiz:

$$dy=d(x^{x^2})=\left(x^{x^2}\right)'dx=[x^{x^2}\ln x\left(x^2\right)'+x^2\,x^{x^2-1}]dx=x^{x^2+1}[2\ln x+1]dx.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Diff((x^(x^2)),x)*D(x)=diff((x^(x^2)),x)*D(x);
```

$$\left(\frac{d}{dx}x^{(x^2)}\right)\mathrm{D}(x)=x^{(x^2)}(2x\ln(x)+x)\mathrm{D}(x)$$

3.3.9-masala. Quyidagi funksiyaning hosilasini toping:

3.3.9.1. $y=\sqrt{x}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)-\sqrt{x-a}$.

3.3.9.2. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

3.3.9.3. $y=\ln^2(x+\cos x)$.

3.3.9.4. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

3.3.9.5. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

3.3.9.6. $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$.

3.3.9.7. $y = \log_4 \log_2 tgx$.

3.3.9.8. $y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}$.

3.3.9.9. $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

3.3.9.10. $y = \ln \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

3.3.9.11. $y = \ln^3(1+\cos x)$.

3.3.9.12. $y = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

3.3.9.13. $y = \log_{16} \log_5 \mathrm{tg}\, x$.

3.3.9.14. $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2$.

3.3.9.15. $y = \lg \ln \mathrm{ctg}\, x$.

3.3.9.16. $y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

3.3.9.17. $y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$.

3.3.9.18. $y = \ln\left(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}\right)$

3.3.9.19. $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

3.3.9.20. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$

3.3.9.21. $y = \ln \cos \frac{2x+3}{x+4}$.

3.3.9.22. $y = \log_3 \log_2 ctgx$.

3.3.9.23. $y = \lg \cos \frac{2x+3}{2x+1}$.

3.3.9.24. $y = \frac{x^3}{\sqrt{1-6x^4}}$.

3.3.9.25. $y = \lg \frac{a^4+x^4}{a^4-x^4}$.

3.3.9.26-misol. $y = \ln \frac{\ln x}{\sin 1/x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 128–129-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). Berilgan funksiyaning hosilasini topishda, avvalo, ifodaning shaklini o‘zgartirib, so‘ngra murakkab logarifmik va kasr funksiyalarning hosilalarini topish formulalaridan foydalanamiz:

$$y' = \left(\ln(\ln x) - \ln\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{x\ln x} + \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2\sin\frac{1}{x}}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Diff((ln(ln(x))-ln(sin(1/x))),
x)=diff((ln(ln(x))-ln(sin(1/x))),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(\ln(x)) - \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \frac{1}{x\ln(x)} + \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

3.3.10- masala. Quyidagi funksiyaning hosilasini toping:

3.3.10.1. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \text{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3x-1}{3x^2-2x+1}.$

3.3.10.2. $y = \ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}+\sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\text{arctg}(4x-1)\right)$

3.3.10.3. $y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}.$

3.3.10.4. $y = 5x - \ln\left(1+\sqrt{1+e^{10x}}\right) - e^{-5x}\arcsin\left(x^2+1\right)$

3.3.10.5. $y = \sqrt{x^2-8x+17}\cdot\text{arctg}(x-4) - \ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right).$

3.3.10.6. $y = \ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right) + \arcsin x\left(e^{-3x}\right)$

3.3.10.7. $y = \ln\left(2x-3+\sqrt{4x^2-12x10}\right) - \sqrt{4x^2-12x+10}\cdot\text{arctg}(2x-3).$

3.3.10.8. $y = \arcsin e^{-4x} + \ln\left(e^{4x}+\sqrt{e^{2x}-1}\right)$

3.3.10.9. $y = \ln\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right) - \sqrt{25x^2+1}\cdot\text{arctg}\,5x.$

3.3.10.10. $y = (3x+1)^4\arcsin\frac{1}{3x+1} + \left(3x^2+2x+1\right)\sqrt{9x^2+6x},\quad 3x+1>0.$

3.3.10.11. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}} + \frac{2x+1}{4x^2+4x+3}.$

3.3.10.12. $y = \ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right) + \arcsin e^{-3x}.$

3.3.10.13. $y = \arcsin e^{-2x} + \ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{2x}+2}\right).$

3.3.10.14. $y = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}.$

3.3.10.15. $y = x^3\arcsin x + \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$

3.3.10.16. $y = 3\arcsin\dfrac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2+2x-2}$, $4x+1>0$.

3.3.10.17. $y = \sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

3.3.10.18. $y = 2\arcsin\dfrac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}$, $3x+4>0$.

3.3.10.19. $y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$

3.3.10.20. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}x.$

3.3.10.21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x^2-1}{3x^4-2x^2+1}.$

3.3.10.22. $y = \lg\left(8x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}+\sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\operatorname{arcctg}(4x-1)\right)$

3.3.10.23. $y = \dfrac{x+3}{x^2+4x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}.$

3.3.10.24. $y = 5x - \lg\left(1+\sqrt{1+e^{10x}}\right) - e^{-6x}\arccos(x+1).$

3.3.10.25. $y = \sqrt{x^2-8x+17}\cdot\operatorname{arcctg}(x-4) - \lg\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right).$

3.3.10.26-misol. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$

funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechilishi. ([2], 6-bo‘lim; [3], 1-q., 128–132-betlar; [9], 1-t., 6-bo‘lim; [30], 3- bo‘lim). Berilgan funksiyaning hosilasini topishda, avvalo, ifodaning shaklini o‘zgartirib, so‘ngra murakkab, logarifmik, arktangens va kasr funksiyalarning hosilalarini topish formulalaridan foydalanamiz:

$$y' = \left(\frac{1}{12}\ln\left(x^4-x^2+1\right) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)' = \frac{2x^3-x}{6\left(x^4-x^2+1\right)} -$$

$$-\frac{x}{3\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)' = \frac{2x^3-x}{6\left(x^4-x^2+1\right)} - \frac{x}{3\left(x^2+1\right)} +$$

$$+\frac{x}{2\left(x^4-x^2+1\right)} = \frac{x^3}{\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
>Diff((1/12)*ln(x^4-x^2+1)-(1/6)*ln(x^2+1)-
(1/(2*sqrt(3)))*arctan(sqrt(3)/(2*x^2-
1)),x)=diff((1/12)*ln(x^4-x^2+1)-(1/6)*ln(x^2+1)-
(1/(2*sqrt(3)))*arctan(sqrt(3)/(2*x^2-1)),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}\ln(x^4-x^2+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)-\frac{1}{6}\sqrt{3}\,\mathrm{arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)\right)=$$

$$\frac{4x^3-2x}{12(x^4-x^2+1)}-\frac{x}{3(x^2+1)}+\frac{2x}{(2x^2-1)^2\left(1+\dfrac{3}{(2x^2-1)^2}\right)}.$$

3.3.11-masala. Differensial yordamida quyidagi berilgan ifodaning berilgan nuqtadagi taqribiy qiymatini hisoblang:

3.3.11.1. $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=65.$ **3.3.11.2.** $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=125{,}1324$

3.3.11.3. $y=\sqrt[4]{x}, \quad x=90.$ **3.3.11.4.** $y=\sqrt[4]{x}, \quad x=15{,}8.$

3.3.11.5. $y=\sin x, \quad x=29^0.$ **3.3.11.6.** $y=\sin x, \quad x=35^0.$

3.3.11.7. $y=\mathrm{tg}\,x, \quad x=44^0 50'.$ **3.3.11.8.** $y=\mathrm{arctg}\,x, \quad x=1{,}05.$

3.3.11.9. $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=27{,}54.$ **3.3.11.10.** $y=\arcsin x, \quad x=0{,}08.$

3.3.11.11. $y=\sqrt[5]{x^2}, \quad x=1{,}03.$ **3.3.11.12.** $y=x^7, \quad x=2{,}002.$

3.3.11.13. $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}, \quad x=0{,}15.$ **3.3.11.14.** $y=\ln\mathrm{tg}\,x, \quad x=47^0 15'.$

3.3.11.15. $y=\sqrt{4x-3}, \quad x=1{,}78.$ **3.3.11.16.** $y=\sqrt{4x-1}, \quad x=2{,}56.$

3.3.11.17. $y=\cos x, \quad x=151^0.$ **3.3.11.18.** $y=\arcsin x, \quad x=0{,}51.$

3.3.11.19. $y=\lg x, \quad x=11.$ **3.3.11.20.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x=4{,}16.$

3.3.11.21. $y=\cos x, \quad x=29^0.$ **3.3.11.22.** $y=\cos x, \quad x=35^0.$

3.3.11.23. $y=ctg\,x, \quad x=44^0 50'.$ **3.3.11.24.** $y=arcctg\,x, \quad x=1{,}05.$

3.3.11.25. $y=\sqrt[4]{x}, \quad x=81{,}0081.$

3.3.11.26-misol. Differensial yordamida quyidagi berilgan $y=\mathrm{arctg}\,x$ ifodaning berilgan $x=0.98$ nuqtadagi taqribiy qiymatini hisoblang:

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 143-145-betlar; [9], 1-t., 6- bo'lim; [30], 3- bo'lim). Taqribiy qiymatni $y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\Delta x$ formula yordamida hisoblaymiz. Bizda $y=\mathrm{arctg}\,x$, $x=0.98, x_0=1$, $\Delta x=x-x_0$ $=-0.02$ ekanligidan,

$$y(x_0)=arctg1=\frac{\pi}{4},\ y'(x)\big|_{x_0=1}=(\mathrm{arctg}\,x)'\big|_{x_0=1}=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x_0=1}=\frac{1}{2}, y'(1)=\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Topilgan qiymatni yuqoridagi formulaga olib borib qo'yamiz:

$$y(0{,}98)=y(1-0{,}02)=\frac{\pi}{4}-0{,}5\cdot 0{,}02\approx 0{,}775.$$

3.3.12-masala. Quyidagi, tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini hisoblang:

3.3.12.1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$

3.3.12.2. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

3.3.12.3. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

3.3.12.4. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{cases}$

3.3.12.5. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

3.3.12.6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

3.3.12.7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

3.3.12.8. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

3.3.12.9. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

3.3.12.10. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3.3.12.11. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

3.3.12.12. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3.3.12.13. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

3.3.12.14. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

3.3.12.15. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

3.3.12.16. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

3.3.12.17. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

3.3.12.18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

3.3.12.19. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

3.3.12.20. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1} \\ y = \ln t. \end{cases}$

3.3.12.21. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$

3.3.12.22. $\begin{cases} x = e^{3t} \cos 2t, \\ y = e^{3t} \sin 2t. \end{cases}$

3.3.12.23. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^4}, \\ y = \dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$

3.3.12.24. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 2t, \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2t}. \end{cases}$

3.3.12.25. $\begin{cases} x = t^2 + \sin 2t, \\ y = 4 - \cos 2t. \end{cases}$

3.3.12.26-misol. Ushbu tenglamasi,

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechilishi. ([30], 3- bo'lim). (3.11) formuladan foydalanib, funksiyaning hosilasini topamiz:

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a\sin t. \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> s:=diff(a*(1-cos(t)),t)/diff(a*(t-sin(t)),t);
```

$$s := \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$$

3.3.13- masala. Quyida berilgan funksiyaning ko'rsatilgan tartibdagi hosilasini toping:

3.3.13.1. $y = (3x+5)^2 \cdot (2x^2+3)(x+7)^2, y^{(6)} = ?$

3.3.13.2. $y = \sqrt[5]{x^2},\ y^{(3)} = ?$

3.3.13.3. $y = \dfrac{x^3}{x-1},\ y^{(3)} = ?$

3.3.13.4. $y = x^5 \ln x,\ y^{(3)} = ?$

3.3.13.5. $y = x^2 \cos 3x, y^{(4)} = ?$

3.3.13.6. $y = x^2 e^{2x}, y^{(50)} = ?$

3.3.13.7. $y = e^x \sin x,\ y^{(4)} = ?$

3.3.13.8. $y = arctg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) y^{(3)} = ?$

3.3.13.9. $y = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) y^{(4)} = ?$

3.3.13.10. $y = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2+1},\ y^{(2)} = ?$

3.3.13.11. $y = arctg \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},\ y^{(2)} = ?$

3.3.13.12. $y = \dfrac{a}{x^m},\ y^{(4)} = ?$

3.3.13.13. $y = \dfrac{x^3}{x-1},\ y^{(3)} = ?$

3.3.13.14. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}},\ y^{(100)} = ?$

3.3.13.15. $y=\frac{e^x}{x}, y^{(10)}=?$

3.3.13.16. $y=\frac{\ln x}{x}, y^{(5)}=?$

3.3.13.17. $y=x^2\cdot\sin 2x,\ y^{(50)}=?$

3.3.13.18. $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}, y^{(3)}=?$

3.3.13.19. $y=\frac{x^2}{1-x},\ y^{(8)}=?$

3.3.13.20. $y=\sqrt{x}, y^{(10)}=?$

3.3.13.21. $y=(2x+3)^3\cdot(2x^2+3)(x+7)^3, y^{(2)}=?$

3.3.13.22. $y=\sqrt[5]{x^3},\ y^{(4)}=?$

3.3.13.23. $y=\frac{x^2}{x-1},\ y^{(4)}=?$

3.3.13.24. $y=x^2\lg x,\ y^{(4)}=?$

3.3.13.25. $y=x^3\cos 2x, y^{(3)}=?$

3.3.13.26-misol. $y=\sin^2 x\cdot 2^{3x}$ funksiyaning $y^{(6)}$ tartibli hosilasini toping.

Yechilishi, ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 145–150-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3- bo'lim). Berilgan funksiyaning hosilasini quyidagi:

$$y^{(n)}=\left(a^{bx}\right)^{(n)}=b^n a^{bx}\ln^n a,\qquad y^{(n)}=(\cos bx)^{(n)}=b^n\cos(bx+n\frac{\pi}{2})$$

va (3.15) formulalardan foydalanib topamiz:

$$y^{(6)}=\left(\sin^2 x\cdot 2^{3x}\right)^{(6)}=\frac{1}{2}\left(2^{3x}-\cos 2x\ 2^{3x}\right)^{(6)}=2^{3x-1}3^6(\ln 2)^6-$$

$$-729\cdot 2^{3x-1}(\ln 2)^6\cos 2x+729\cdot 2^{3x+1}(\ln 2)^5\sin 2x+1215\cdot 2^{3x+1}(\ln 2)^4\cos 2x-$$

$$-135\cdot 2^{3x+4}(\ln 2)^3\sin 2x-135\cdot 2^{3x+3}(\ln 2)^2\cos 2x+18\cdot 2^{3x+4}(\ln 2)\sin 2x+2^{3x+5}\cos 2$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
>
Diff((sin(x))^2*2^(3*x),x$6)=diff((sin(x))^2*2^(3*
x),x$6);
```

$$\frac{d^6}{dx^6}(\sin(x)^2\,2^{(3x)})=32\cos(x)^2\,2^{(3x)}+576\sin(x)\,2^{(3x)}\ln(2)\cos(x)-32\sin(x)^2\,2^{(3x)}$$
$$-1080\cos(x)^2\,2^{(3x)}\ln(2)^2-4320\sin(x)\,2^{(3x)}\ln(2)^3\cos(x)$$
$$+1080\sin(x)^2\,2^{(3x)}\ln(2)^2+2430\cos(x)^2\,2^{(3x)}\ln(2)^4$$
$$+2916\sin(x)\,2^{(3x)}\ln(2)^5\cos(x)-2430\sin(x)^2\,2^{(3x)}\ln(2)^4$$
$$+729\sin(x)^2\,2^{(3x)}\ln(2)^6$$

Olingan ifodani ikki xil usul bilan soddalashtirish mumkin:

```
> combine(%);
```

$$\frac{d^6}{dx^6}\left(\frac{2^{(3x)}}{2}-\frac{1}{2}2^{(3x)}\cos(2x)\right)=32\,2^{(3x)}\cos(2x)+288\,2^{(3x)}\ln(2)\sin(2x)$$
$$-1080\,2^{(3x)}\ln(2)^2\cos(2x)-2160\,2^{(3x)}\ln(2)^3\sin(2x)+2430\,2^{(3x)}\ln(2)^4\cos(2x)$$
$$+1458\,2^{(3x)}\ln(2)^5\sin(2x)+\frac{729}{2}2^{(3x)}\ln(2)^6-\frac{729}{2}2^{(3x)}\ln(2)^6\cos(2x)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d^6}{dx^6}\left(-\frac{1}{2}(-1+\cos(2x))\,8^x\right)=-\frac{1}{2}8^x(-64\cos(2x)-576\ln(2)\sin(2x)$$
$$+2160\ln(2)^2\cos(2x)+4320\ln(2)^3\sin(2x)-4860\ln(2)^4\cos(2x)$$
$$-2916\ln(2)^5\sin(2x)-729\ln(2)^6+729\ln(2)^6\cos(2x))$$

3.3.14- masala. Quyida berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $y^{(n)}$ hosilasini toping:

3.3.14.1. $y=\sin 2x+\cos(x+1)$. **3.3.14.2.** $y=\sqrt[5]{e^{7x+1}}$.

3.3.14.3. $y=\dfrac{4x+7}{2x+3}$. **3.3.14.4.** $y=\lg(5x+2)$.

3.3.14.5. $y=2^{3x}$. **3.3.14.6.** $y=\dfrac{x}{2(3x+2)}$.

3.3.14.7. $y=\dfrac{2x+5}{13(3x+1)}$. **3.3.14.8.** $y=4^{3x+5}$.

3.3.14.9. $y=\sin(x+1)+\cos 2x$. **3.3.14.10.** $y=\sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

3.3.14.11. $y=\dfrac{4x+15}{5x+1}$. **3.3.14.12.** $y=\lg(3x+1)$.

3.3.14.13. $y=7^{5x}$. **3.3.14.14.** $y=\dfrac{x}{9(4x+9)}$.

3.3.14.15. $y=5^{2x+3}$. **3.3.14.16.** $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

3.3.14.17. $y=x\cos^2 x$. **3.3.14.18.** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$.

3.3.14.19. $y=e^{ax}\cos(bx+c)$. **3.3.14.20.** $y=\dfrac{11+12x}{6x+5}$.

3.3.14.21. $y=\sin 3x+\sin(x+21)$. **3.3.14.22.** $y=\sqrt[5]{e^{7x+1}}$.

3.3.14.23. $y=\dfrac{2x+7}{3x+5}$. **3.3.14.24.** $y=\ln(4x+3)$.

3.3.14.25. $y=7^{5x}$.

3.3.14.26-misol. $y=\sqrt{e^{3x+1}}$ funksiyaning n-tartibli $y^{(n)}$ hosilasini hisoblang.

Yechilishi. $y^{(n)}=(e^{bx})^{(n)}=b^n e^{bx}$ formulaga asosan, berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$y^{(n)}=\left(\sqrt{e^{3x+1}}\right)^{(n)}=\left(e^{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}\right)^{(n)}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\sqrt{e^{3x-1}}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> 
Diff(sqrt(exp(3*x+1)),x$n)=diff(sqrt(exp(3*x+1)),x
$n);
```

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\sqrt{e^{(3x+1)}}\right)=\frac{d^n}{dx^n}\left(\sqrt{e^{(3x+1)}}\right)$$

3.3.15- masala. Quyidagi funksiyaning berilgan nuqtadagi ko‘rsatilgan tartibdagi differensialnii toping:

3.3.15.1. $y=(x+5)^5$; $n=3$, $x=0$.

3.3.15.2. $y=\dfrac{7x+1}{(3x-2)^2}$; $n=10$, $x=1$.

3.3.15.3. $y=\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)^2$; $n=16$, $x=1$.

3.3.15.4. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$; $n=10$, $x=\dfrac{\pi}{6}$.

3.3.15.5. $y=\left(2x^2+1\right)sh^2x$; $n=8$, $x=0$.

3.3.15.6. $y=\arcsin x$; $n=19$, $x=0$.

3.3.15.7. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; $n=2$, $x=1$.

3.3.15.8. $y=\dfrac{3x+2}{x^2-2x+5}$; $n=2$, $x=0$.

3.3.15.9. $y=x\sqrt[3]{(x-5)^2}$, $n=2$, $x=-3$.

3.3.15.10. $y=arctg\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$. $x=0$.

Quyidagi funksiyaning (u - x ning funksiya bo‘lgan holda) ko‘rsatilgan tartibdagi differensialini toping:

3.3.15.11. $y=u^2$; $d^{10}y$. **3.3.15.12.** $y=e^u$; d^4y.

3.3.15.13. $y=\ln u$; d^3y.

Quyida berilgan funksiyaning ko‘rsatilgan tartibdagi differensialini toping:

3.3.15.14. $y=\frac{\log_2 x}{x^3}$, $n=3$.

3.3.15.15. $y=(2x+3)\ln^2 x, n=3$.

3.3.15.16. $y=x^2\sin(5x-3)$, $n=3$.

3.3.15.17. $y=e^{1-2x}\sin(2+3x)$, $n=4$.

3.3.15.18. $y=(x+7)\ln(x+4)$, $n=5$.

3.3.15.19. $y=(x^2+3x+1)e^{3x+2}$, $n=5$.

3.3.15.20. $y=\frac{\ln(x-2)}{x-2}, n=5$.

3.3.15.21. $y=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, n=3$.

3.3.15.21. $y=(x+7)^4$; $n=3$, $x=0$.

3.3.15.22. $y=\frac{5x+2}{(5x-2)^2}$; $n=8$, $x=1$.

3.3.15.23. $y=\left(\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x-1}\right)^2$; $n=6, x=1$.

3.3.15.24. $y=\sin x\sin 3x\sin 6x$; $n=6$, $x=\frac{\pi}{6}$.

3.3.15.25. $y=(2x^3+1)ch^2x$; $n=4, x=0$.

3.3.15.26-misol. Ushbu $y=\sin 5x\cdot\cos 2x$ funksiyaning 6-tartibli differensialini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 145–150-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 3-bo'lim). Berilgan funksiyani $y=\frac{1}{2}[\sin 7x+\sin 3x]$ ko'rinishda ifodalaymiz. Bu funksiyaning 6-tartibli differensialini topish uchun, $y^{(n)}=(\sin bx)^{(n)}=b^n\sin(bx+n\frac{\pi}{2})$ va $d^n y=y^{(n)}dx^n$ formulalardan foydalanamiz:

$$d^6y=y^{(6)}dx^6=\frac{1}{2}\left[7^6\sin\left(7x+\frac{6\pi}{2}\right)+3^6\sin\left(3x+\frac{6\pi}{2}\right)\right]dx^6=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[7^6\sin 7x+3^6\sin 3x\right]dx^6.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
>
Diff((sin(5*x)*cos(2*x)),x$6)*D(x)^6=diff((sin(5*x
)*cos(2*x)),x$6)*D(x)^6;
```

$$\left(\frac{d^6}{dx^6}(\sin(5x)\cos(2x))\right)D(x)^6 =$$

$$(-59189\sin(5x)\cos(2x) - 58460\cos(5x)\sin(2x))D(x)^6$$

```
> combine(%);
```

$$-\frac{729}{2}D(x)^6\sin(3x) - \frac{117649}{2}D(x)^6\sin(7x) =$$

$$-\frac{729}{2}D(x)^6\sin(3x) - \frac{117649}{2}D(x)^6\sin(7x)$$

3.3.16-masala. Quyida berilgan funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini ko'rsating:

3.3.16.1. $y = x^2 - 1.$ **3.3.16.2.** $y = 1 - x^2.$

3.3.16.3. $y = 3x - x^2.$ **3.3.16.4.** $y = \frac{2x}{1+2x}.$

3.3.16.5. $y = x + \sin x.$ **3.3.16.6.** $y = 8x^3 - x^4.$

3.3.16.7. $y = (x-1)^3(2x+3)^3.$ **3.3.16.8.** $y = xe^{-3x}$.

3.3.16.9. $y = x^2e^{-x2}.$ **3.3.16.10.** $y = x - x^2.$

3.3.16.11. $y = 2x^2 - 6x - 1$ **3.3.16.12.** $y = |x^2 - 1|.$

3.3.16.13. $y = x^2 - x + 4.$ **3.3.16.14.** $y = -3x^2 6x - 1.$

3.3.16.15. $y = \cos\frac{\pi}{x}.$ **3.3.16.16.** $y = x^n e^{-x}, (n > 0, x \geq 0).$

3.3.16.17. $y = x\sqrt{(x+1)^3}.$ **3.3.16.18.** $y = e^{\pi x}\cos\pi x.$

3.3.16.19. $y = x^2 2^{-x}.$ **3.3.16.20.** $y = x^2 - \ln x^2.$

3.3.16.21. $y = x^3 - x.$ **3.3.16.22.** $y = 4 - x^4.$

3.3.16.23. $y = 3x - x^3.$ **3.3.16.24.** $y = \frac{3x}{1+3x}.$

3.3.16.25. $y = x + \cos x.$

3.3.16.26-misol. Ushbu $f(x) = x^2\ln x$ funksiyani monotonlikka tekshiring.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 158–160-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 4- bo'lim). Berilgan funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x) = 2x\ln x + x$ bo'ladi. Endi 3.7-teoremaga ko'ra, a) $f'(x) \geq 0$, ya'ni $2x\ln x + x \geq 0$ yoki b) $f'(x) \leq 0$, ya'ni $2x\ln x + x \leq 0$ bo'ladigan nuqtalar to'plamini topamiz:

$$a)\ x(2\ln x + 1) \geq 0 \Rightarrow\ 2\ln x + 1 \geq 0 \Rightarrow\ x \geq e^{-\frac{1}{2}},\ [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty),$$

b) $x(2\ln x+1)\le 0 \Leftrightarrow 2\ln x+1\le 0 \Rightarrow x\le e^{-\frac{1}{2}}, (0;e^{-\frac{1}{2}}]$.

Bundan, berilgan funksiya uchun, $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty)$ oraliqda $f'(x)\ge 0$, $(0;e^{-\frac{1}{2}}]$ kesmada $f'(x)\le 0$ bo'lishini olamiz.

Demak, berilgan funksiya $(0;e^{-\frac{1}{2}}]$ kesmada kamayuvchi, $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty)$ oraliqda esa, o'suvchi ekan.

3.3.17-masala. Quyidagi funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini toping:

3.3.17.1. $y=3x^2-x^3$.

3.3.17.2. $y=\frac{a^2}{a^2+x^2}(a>0)$

3.17.3. $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

3.3.17.4. $y=\sqrt{1+x^2}$.

3.3.17.5. $y=x+\sin x$.

3.3.17.6. $y=e^{-x^2}$

3.3.17.7. $y=\ln(1+x^2)$

3.3.17.8. $y=x\cdot\sin(\ln x)(x>0)$

3.3.17.9. $y=x^x(x>0)$

3.3.17.10. $y=\cos x$.

3.3.17.11. $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$.

3.3.17.12. $y=e^{2x-x^2}$.

3.3.17.13. $y=2x^x+\ln x$.

3.3.17.14. $y=(x^2-1)^3$.

3.3.17.15. $y=4x^2+\frac{1}{x}$.

3.3.17.16. $y=\frac{ax}{x^2+b^2}$, $a\ne 0$.

3.17.17. $y=e^{\cos x}$.

3.3.17.18. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$.

3.3.17.19. $y=\sqrt{1-x^3}$.

3.3.17.20. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

3.3.17.21. $y=\frac{1}{2}x^2-x^3$.

3.3.17.22. $y=\frac{4x}{4+x^2}$.

3.17.23. $y=1+x^{\frac{2}{3}}$.

3.3.17.24. $y=\sqrt{3+x^3}$.

3.3.17.25. $y=x+\cos x$.

3.3.17.26-misol. $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+12$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 165–168-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 4- bo'lim). Berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x, f''(x)=36x^2-48x+12,\ 36x^2-48x+12=0$$

tenglamadan $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$, $f''(1)=0$, $f''\left(\frac{1}{3}\right)=0$. Quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$-\infty<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	$1<x<\infty$
sign f''	+	-	+
$f(x)$	$\cup$ qavariq	$\cap$ botiq	$\cup$ qavariq

Shunday qilib, $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, $(1;\infty)$ oraliqlarda $f''(x)>0$, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ oraliqda esa, $f''(x)<0$ bo'ladi. Demak, 3.17-teoremaga asosan, $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ va $(1;\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ oraliqda botiq, $x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$ nuqtalardan o'tishda $f''(x)$ hosila o'z ishorasini o'zgartiradi. U holda, 3.19-teoremaga asosan, $(1;13)$, $\left(\frac{1}{3};\frac{335}{27}\right)$nuqtalar berilgan funksiyaning grafigi uchun egilish nuqtalari bo'ladi.

3.3.18- masala. Quyidagi funksiyaning maksimum va maksimum qiymatlarini toping:

3.3.18.1. $y=x^3-4x^2$. **3.3.18.2.** $y=x(x-3)^2(x+1)^3$.

3.3.18.3. $y=2\sin x+\cos 2x$. **3.3.18.4.** $y=\frac{1}{(x^3-2x^2-x+2)}$.

3.3.18.5. $y=(x-5)e^x$. **3.3.18.6.** $y=x^2e^{1/x}$.

3.3.18.7. $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$. **3.3.18.8.** $y=\frac{x^4}{4}-2x^6+\frac{11}{2}x^2-6x+3$.

Quyidagi funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping:

3.3.18.9. $y=x^4-8x^2+12$. **3.3.18.10.** $y=\begin{cases}x^2+1, & x\neq 0,\\ 2. & x=0\end{cases}$.

3.3.18.11. $y=x^4-4x^3+6^24x+5$. **3.3.18.12.** $y=(x^3-10)(x+5)^2$

3.3.18.13. $y=(x+2)^2(x-3)^3$. **3.3.18.14.** $y=\frac{1}{x^2-x}$.

3.3.18.15. $y=\frac{x}{x^2+4}$. **3.3.18.16.** $y=\frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$.

3.3.18.17. $y=\frac{x^3 2x^2}{(x-1)^2}$. 3.3.18.18. $y=\frac{x^4}{(x+1)^3}$.

3.3.18.19. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$. 3.3.18.20. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

3.3.18.21. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$. 3.3.18.22. $y=\frac{1}{3}x^3-4x$.

3.3.18.23. $y=x(x+1)^3$. 3.3.18.24. $y=2\sin x+\sin 2x$.

3.3.18.25. $y=(x-3)^2 e^{2x}$.

3.3.18.26-misol. $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$ funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 160–164-betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 4- bo'lim). Berilgan funksiya R ning $x=1$ nuqtadan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan va differensiallanuvchi. Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=\frac{x(x^2-3x-4}{(x-1)^3},\quad f''(x)=\frac{14x+4}{(x-1)^4}.$$

$x(x^2-3x-4)=0$ tenglamadan $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=4$ statsionar nuqtalarni topamiz. Ikkinchi tartibli hosilaning har bir statsionar nuqtadagi ishorasini aniqlaymiz: $f''(-1)=-\frac{5}{8}<0$ $f''(0)=4>0$, $f''(4)=\frac{20}{27}>0$.

Shunday qilib, funksiya, ekstremum mavjud bo'lishining ikkinchi yetarli shartiga ko'ra, $x_1=-1$ nuqtada maksimumga, $f_{max}(-1)=\frac{1}{4}$, $x_2=0$ nuqtada minimumga $f_{min}(0)=0$, $x_3=4$ nuqtada esa, minimumga $f_{min}(4)=\frac{32}{3}$ ega bo'lar ekan.

3.3.18.27-misol. $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin(x)+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{12}\pi x^2$ berilgan bo'lsa **max** va **min** ni toping.

Yechilishi. ***Maple tizimidan foydalanib misolning javobini tekshirish:***

```
> readlib(extrema):
>y:=(x^2-1/2)*arcsin(x)/2+x*sqrt(1-x^2)/4-Pi*x^2/12:
extrema(y,{},x,'s');s;
```

$$\{-\frac{1}{24}\pi+\frac{1}{16}\sqrt{3},-\frac{1}{4}\arcsin(0)\}$$

$\{\{x=\frac{1}{2}\},\{x=0\}\}$.

3.3.18.28-misol. $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ funksiya ekstremumini toping va ikkinchi tartibli hosila orqali uning xarakterini aniqlang.

Yechilishi. ***Maple tizimidan foydalanib misolning javobini tekshirish:***

> restart:y:=x^3/(4-x^2): readlib(extrema):readlib(maximize):
>readlib(minimize): extrema(y,{},x,'s');s;

$$\{-3\sqrt{3},3\sqrt{3}\};$$

$$\{\{x=2\sqrt{3}\},\{x=-2\sqrt{3}\},\{x=0\}\}.$$

Ikkita ekstremum va uchta kritik nuqtalar hosil bo'ldi. Tekshirishni ikkinchi tartibli hosila yordamida davom ettirish mumkin:

> d2:=diff(y,x$2): x:=0: d2y(x):=d2;

$$d2y(0):=0$$

> x:=2*sqrt(3):d2y(x):=d2;

$$d2y(2\sqrt{3}):=-\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

> x:=-2*sqrt(3):d2y(x):=d2;

$$d2y(-2\sqrt{3}):=\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

Xuddi shunday, $y''(0)=0$, ya'ni $x=0$ nuqtada ekstremum yo'q; xuddi shunday $y''(2\sqrt{3})<0$, ya'ni $x=2\sqrt{3}$ nuqtada max bo'ladi: xuddi shunday $y''(-2\sqrt{3})>0$, ya'ni $x=-2\sqrt{3}$ nuqtada min bo'ladi. Matn rejimiga o'ting va javobni quyidagi ko'rinishda yozing: "$(2\sqrt{3},-3\sqrt{3}/4)$ nuqtada maksimum, $(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3}/4)$ nuqtada minimum ".

3.3.19-masala. Quyidagi funksiyaning ko'rsatilgan oraliqlardagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

3.3.19.1. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$, $[1;4]$.

3.3.19.2. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $[1;4]$.

3.3.19.3. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$, $[0;6]$.

3.3.19.4. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $[-3;3]$.

3.3.19.5. $y=2\sqrt{x}-x$, $[0;4]$.

3.3.19.6. $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$, $[-1;5]$.

3.3.19.7. $y=x-4\sqrt{x}+5$, $[1;9]$.

3.3.19.8. $y = x/(1 + x^2)$, $[0;3]$.

3.3.19.9. $y = \sqrt[3]{2(x + 1)^2(5 - x)} - 2, [-3;3]$.

3.3.19.10. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59$, $[2;4]$.

3.3.19.11. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x + 2)^2}$, $[-1;2]$.

3.3.19.12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x - 3)}$, $[-1;6]$.

3.3.19.13. $y = 2(-x^2 + 7x - 7)/(x^2 2x + 2)$, $[1;4]$.

3.3.19.14. $y = x - 4\sqrt{x + 2} + 8, [-1; 2]$.

3.3.19.15. $y = \sqrt[3]{2(x - 2)^2(5 - x)}$, $[1;5]$.

3.3.19.16. $y = 4x/(4 + x^2)$, $[-4;2]$.

3.3.19.17. $y = -x^2|2 + 8|x + 8, [-4;-1]$.

3.3.19.18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x - 6)}$, $[-2;4]$.

3.3.19.19. $y = -2x(2x + 3)/(x^2 4x + 5)$, $[-2;1]$.

3.3.19.20. $y = -2(x^2 + 2x + 5)$, $[-2;1]$.

3.3.19.21. $y = x^2 + \dfrac{9}{x^2} - 9, [1;3]$.

3.3.19.22. $y = x - \dfrac{2}{x^2}$, $[1;4]$.

3.3.19.23. $y = \sqrt[3]{3(x - 3)^2(4 - x)} - 1$, $[0;4]$.

3.3.19.24. $y = \dfrac{3(x^2 - 4)}{x^2 - 2x + 3}$, $[-3;3]$.

3.3.19.25. $y = 4\sqrt{x^3} - x$, $[0;2]$.

3.3.19.26-misol. Ushbu $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ funksiyaning $[-1; 1]$ oraliqda eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo‘lim; [9], 1-t., 6- bo‘lim; [30], 4- bo‘lim). Berilgan funksiya $[-1; 1]$ oraliqda noldan farqli hosilaga ega: $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{5 - 4x}}$. Bundan, funksiya eng katta va eng kichik qiymatiga oraliqning chetki nuqtalarida erishishi kelib chiqadi: $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning $[-1; 1]$ oraliqdagi eng katta qiymati 3 ga, eng kichik qiymati esa 1 ga teng:

$$f_{eng\ katta} = f(-1) = 3, \quad f_{eng\ kichik} = f(1) = 1.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> f:=sqrt(5-4*x): maximize(f, x=-1..1);
```

$$\sqrt{9}$$

```
> f:=sqrt(5-4*x): minimize(f, x=-1..1);
```

$$1$$

3.3.20- masala. Quyidagi funksiya grafigining asimptotalarini toping:

3.3.20.1. $y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$. **3.3.20.2.** $y=\dfrac{2x^2-a}{\sqrt{x^2-1}}$.

3.3.20.3. $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$. **3.3.20.4.** $y=\dfrac{2x^3-3x^2-2x+1}{1-3x^2}$.

3.3.20.5. $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$. **3.3.20.6.** $y=\dfrac{21-x^2}{7x+9}$.

3.3.20.7. $y=\dfrac{x^3+3x^2 2x-2}{2-3x^2}$. **3.3.20.8.** $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$.

3.3.20.9. $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$. **3.3.20.10.** $y=\dfrac{x^2 6x+4}{3x-2}$.

3.3.20.11. $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$. **3.3.20.12.** $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$.

3.3.20.13. $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$. **3.3.20.14.** $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$.

3.3.20.15. $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$. **3.3.20.16.** $y=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$.

3.3.20.17. $y=\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$. **3.3.20.18.** $y=\dfrac{2x^3+2x^a-3x-1}{2-4x^2}$.

3.3.20.19. $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$. **3.3.20.20.** $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.

3.3.20.21. $y=\dfrac{x^3-2x^2}{2-x^2}$. **3.3.20.22.** $y=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

3.3.20.23. $y=\dfrac{x^3-11}{5x^2-3}$. **3.3.20.24.** $y=\dfrac{3x^3-3x^2}{4-3x^2}$.

3.3.20.25. $y=\dfrac{3x^2-4}{\sqrt{x^2-3}}$.

3.3.20.26-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 169–170-betlar; [9], 1-t., 6- bo'lim; [30], 4-bo'lim). $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b$ formuladan foydalanib, k va b larni topamiz:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,\ k=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}=-1,\ b=-1.$$

Demak, 3.23-teoremaga ko'ra, $y=x-1$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k\neq 0$ bo'lganligi uchun funksiya grafigi gorizontal asimptotaga ega emas.

Endi berilgan funksiyaning vertikal asimptotasini topamiz. Funksiya $x=1$ nuqtada 2-tur uzilishga ega. $x\to 1\pm 0$ da berilgan funksiyaning limitini hisoblaymiz: $\lim_{x\to 1\pm 0}f(x)=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^2-2x}{x-1}=\pm\infty$.

Demak, 3.16-ta'rifga ko'ra, berilgan funksiyaning grafigi uchun $x=1$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

3.3.21-masala. Quyidagi funksiyani to'la tekshiring va grafigini chizing.

3.3.21.1. $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$. **3.3.21.2.** $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

3.3.21.3. $y=12\sqrt[3]{6(x-2)^2}/(x^2+8)$. **3.3.21.4.** $y=x(x-1)^3$

3.3.21.5. $y=(x+2)^2(x-1)^2$. **3.3.21.6.** $y=\frac{20x^2}{(x-1)^2}$.

3.3.21.7. $y=\sqrt[3]{x(x+2)}$. **3.3.21.8.** $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

3.3.21.9. $y=x^2\sqrt{x+1}$. **3.3.21.10.** $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

3.3.21.11. $y=-x^3+4x-3$. **3.3.21.12.** $y=x=(x+1)^{3/2}$.

3.3.21.13. $y=\frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$. **3.3.21.14.** $y=\frac{x^5-8}{x^4}$.

3.3.21.15. $y=3\sqrt[3]{(x-3)^2}-2x+6$. **3.3.21.16.** $y=4x+8-6\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

3.3.21.17. $y=\sqrt[3]{x(x+2)}$. **3.3.21.18.** $y=\sqrt[3]{x^2 4x+3}$.

3.3.21.19. $y=6x-6-9\sqrt[3]{(x-1)^2}$. **3.3.21.20.** $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.

3.3.21.21. $y=x-\sqrt[3]{x^2}$. **3.3.21.22.** $y=2x-6\sqrt[3]{x^2}$.

3.3.21.23. $y=\sqrt[3]{6(x-2)^2}$. **3.3.21.24.** $y=x^2(x-1)^2$

3.3.21.25. $y=(x+2)(x-3)^3$.

3.3.21.26-misol. Ushbu $f(x)=\frac{x^3}{6(3-x)^2}$ funksiyani to'liq tekshiring va uning grafigini chizing.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [9], 1-t., 7- bo'lim; [30], 4- bo'lim). **1.** Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

2. $x=3$ nuqta - funksiyaning 2-tur uzilish nuqtasi:

$$\lim_{x\to 3\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{x^3}{6(3-x)^2}=+\infty.$$

3. Shuningdek, funksiya davriy ham emas, juft ham emas, toq ham emas, chunki $f(-x)=\frac{(-x^3)}{6(3+x)^2}=\frac{x^3}{4(3+x)^2}\neq\begin{cases} f(x),\\ -f(x).\end{cases}$

4. Funksiyaning koordinatalar o'qlari bilan kesishishi: Oy o'qi bilan $x=0$ da $y=0$ bo'ladi; Ox o'qi bilan $y=0$ bo'lganda $x=0$ bo'ladi. Shunday qilib, bitta $O(0;0)$ nuqtada kesishadi.

5. Funksiyaning ishorasi saqlanadigan oraliqlarni aniqlaymiz, aniqlanish sohasini nuqtalar yordamida funksiya nolga teng bo'ladigan oraliqlarga ajratamiz. Bu oraliqlarning har birida funksiyaning ishorasini tekshiramiz natijada quyidagi jadvalni tuzamiz:

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
sign y	$-$	0	$+$	∞	$+$
$y=f(x)$ funksiya grafigining joylanishi	Ox o'qdan pastda		Ox o'qdan yuqorida		Ox o'qdan yuqorida

6. Funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

a) Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar – vertikal asimptotalar bo'ladi.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{6(3-x)^2}=+\infty$$

bo'lgani uchun $x=3$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota.

b) Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar-gorizontal asimptotalar bo'ladi. Funksiyaning grafigi gorizontal asimptotaga ega emas.

g) Ox va Oy o'qlarga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar og'ma asimptotalar bo'ladi, ya'ni $y=kx+b$ og'ma asimptotaning formulasidan k va b larni hisoblaymiz:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{6x(3-x)^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6\left(\frac{3}{x}-1\right)^2}=\frac{1}{6}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{6(3-x)^2}-\frac{1}{6}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(3-x)^2}{6(3-x)^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-9x}{(3-x)^2}=1.$$

Demak, $y=\frac{1}{6}x+1$ - to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi.

7. Funksiyaning monotonlik oraliqlari va ekstremum qiymatlarini topamiz: $y'=\frac{x^2(x-9)}{6(3-x)^3}$.

a) $x=0$, $x=9$ nuqtalarda $y'=0$ bo'ladi. b) $x=3$ nuqtada $y'=\infty$ bo'ladi.

$$y'\geq 0,\ \frac{x^2(x-9)}{6(x-9)^3}\geq 0\ \Rightarrow (x-3)(x-9)\geq 0\ \Rightarrow\ (-\infty;3)\cup[9;\infty)$$

$$y'\leq 0,\ \Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+9)\leq 0\Rightarrow & x\in(-3;9]\\ x\neq 3\end{cases}.$$

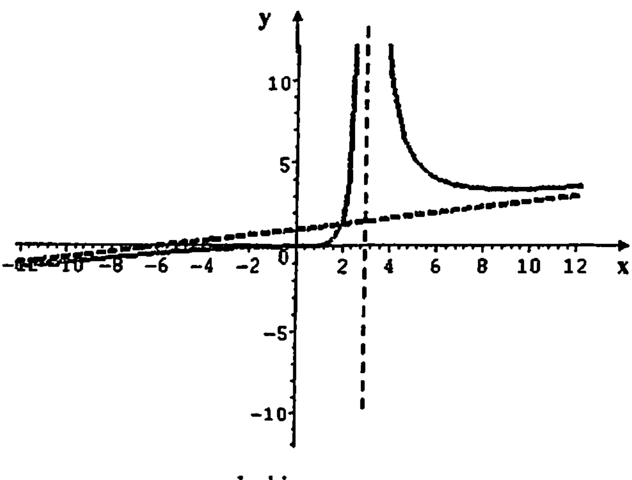
$y_{\min}(9)=\frac{27}{8}$. $A\left(9;\frac{27}{8}\right)$- berilgan funksiya grafigining minimum nuqtasi bo'ladi.

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;9)$	+	$(9;\infty)$
sign y''	+	0	+	∞	-	0	+
funksiyaning o'zgarishi	↗	0	↗	∞	↘	$\frac{27}{8}$	↗

8. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini topamiz, buning uchun ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $y'' = \frac{9x}{(x-3)^4}$. $x=0$ va $x=3$ nuqtalar berilgan funksiyaning 2-tur kritik nuqtalari bo'ladi. $x=0$ bo'lganda $y''(0)=0$. $x=3$ bo'lganda esa $y''(3)=\infty$ bo'ladi. Endi jadval tuzamiz:

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
sign y''	-	0	+	∞	+
Funksiya grafiginig qavariqlik yo'nalishi	$\overset{\frown}{\uparrow}$	0	$\underset{\smile}{\downarrow}$	∞	$\underset{\smile}{\downarrow}$

Funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma.

3.3.22-masala. Quyidagi funksiyani Makloren formulasi bo'yicha $o(x^n)$ hadgacha yoying:

3.3.22.1. $y = e^{5x-1}$.

3.3.22.2. $y = \sin(2x+3)$.

3.3.22.3. $y = \cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$.

3.3.22.4. $y = \frac{1}{1-2x}$.

3.3.22.5. $y=\left(x^2-x\right)e^{-x}$. 3.3.22.6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}$.

3.3.22.7. $y=\ln\left(e^x+2\right)$ 3.3.22.8. $y=3^{2-x}$.

3.3.22.9. $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Quyidagi funksiyani Teylor formulasi bo'yicha x_0 nuqtaning atrofida $o\left((x-x_0)^n\right)$ hadgacha yoying:

3.3.22.10. $y=\ln\sqrt[3]{7x-2},\ x_0=1$. 3.3.22.11. $y=\dfrac{1}{x},\ x_0=2$.

3.3.22.12. $y=\sqrt{x},\ x_0=1$. 3.3.22.13. $y=\sin(2x-3),\ x_0=1$.

3.3.22.14. $y=xe^{2x},\ x_0=-1$ 3.3.22.15. $y=x^2e^{-2x},\ x_0=-1$.

3.3.22.16. $y=\left(x^2-1\right)e^{2x},\ x_0=-1$. 3.3.22.17. $y=\ln(2x+1),\ x_0=\dfrac{1}{2}$.

3.3.22.18. $y=\ln\left(2+x-x^2\right),\ x_0=1$. 3.3.22.19. $y=\log_3\sqrt[3]{3x-\dfrac{1}{3}},\ x_0=3$.

3.3.22.20. $y=\ln\left(x^2-7x+12\right),\ x_0=1$. 3.3.22.21. $y=e^{4x-2}$.

3.3.22.22. $y=\cos(2x+4)$. 3.3.22.23. $y=\left(x^2-2\right)e^{-2x}$.

3.3.22.24. $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+2\right)$. 3.3.22.25. $y=\dfrac{1}{6-3x}$.

3.3.22.26-misol. $y=\dfrac{1}{3x+4}$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha $o\left(x^n\right)$ hadgacha yoying.

Yechilishi. ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 152–157 betlar; [9], 1-t., 7-bo'lim; [30], 4- bo'lim). Berilgan $\dfrac{1}{3x+4}$ funksiyani $\dfrac{1}{3x+4}=\dfrac{1}{3\left(1+\frac{4}{3}x\right)}$ kabi tasvirlab, $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$ formulani e'tiborga olgan holda,

$$\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{4}{3}\right)^k\cdot x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{4^k}{3^{k+1}}\cdot x^k+o(x^n).$$

yoyilmaga ega bo'lamiz.

3.3.22.27-misol. Quyidagi $f(x)=e^{2x+3x^2}$ funksiyani Teylor formulasi bo'yicha $x_0=1$ nuqtaning atrofida $o\left((x-1)^6\right)$ hadgacha yoying.

Yechilishi. ***Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:***

```
> Order:=6;
  series(exp(2*x+3*x^2),x=1);
```

$$Order := 6$$

$$e^5+8e^5(x-1)+35e^5(x-1)^2+\frac{328}{3}e^5(x-1)^3+\frac{1627}{6}e^5(x-1)^4+\frac{8476}{15}e^5(x-1)^5+O((x-1)^6)$$

3.3.23-masala. Teylor formulasidan foydalanib, quyidagi limitni hisoblang:

3.3.23.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

3.3.23.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

3.3.23.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$.

3.3.23.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

3.3.23.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctgx-\arcsin x}{x^2}$.

3.3.23.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{\sin x-x}$.

3.3.23.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctgx-\arcsin x}{tgx-\sin x}$.

3.3.23.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x-\arcsin 2x}{x^3}$.

3.3.23.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

3.3.23.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$.

3.3.23.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.

3.3.23.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-xctgx}{x\cdot\sin x}$.

3.3.23.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

3.3.23.14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

3.3.23.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sqrt[3]{1+3x+\dfrac{9}{2}x^2}}{x^3}$.

3.3.23.16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)-2\sin x+2x\cos x^2}{arctgx^3}$.

3.3.23.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-x}{tg^3x}$.

3.3.23.18. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$.

3.3.23.19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$.

3.3.23.20. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\cdot tgx}\right)$.

3.3.23.21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$.

3.3.23.22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$.

3.3.23.23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-1+2x^2}{x^4}$.

3.3.23.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

3.3.23.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x - arc\sin 2x}{x^2}$.

3.3.23.26- misol. Teylor formulasi va Lopital qoidalaridan foydalanib, limitni toping: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Yechilishi ([2], 6-bo'lim; [3], 1-q., 171-176 betlar; [9], 1-t., 6-bo'lim; [30], 4- bo'lim). *1-usul.* $\operatorname{tg} x = x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$ yoyilmalardan foydalanib berilgan limitni topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=\frac{1}{2}.$$

2-usul. $f(x)=tgx-\sin x$, $g(x)=x^3$ bo'lib, ular Lopital birinchi qoidasining hamma shartlarini qanoatlantiradi, jumladan, $x=0$ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x, \quad g'(x)=3x^2$$

hosilalar mavjud bo'lib, $g'(x)=3x^2\neq 0$ $(x\neq 0)$. Lekin, $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$ va $g''(x)$ funksiyalar ham o'z navbatida $x=0$ nuqtaning kichik atrofida 3.9- teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun, berilgan limitni hisoblashga Lopitalning birinchi qoidasini uch marta qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(tgx-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^3 x}\sin x+\sin x}{6x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6}{\cos^4 x}\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}+\cos x}{6}=\frac{1}{2}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Limit((tan(x)-sin(x))/(x^3),x=0)=limit((tan(x)-
sin(x))/(x^3),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

4-MUSTAQIL ISH.
ANIQMAS VA ANIQ INTEGRALLAR, ULARNING TATBIQLARI

Mavzular:

4.1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi .
4.2. Aniqmas integral tushunchasi.
4.3. Aniqmas integralning xossalari .
4.4. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali.
4.5. Integrallash usullari.
4.6. Sodda kasrlarni integrallash.
4.4.Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash.
4.8.Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash.
4.9.Aniq integralning ta'rifi.
4.10. Aniq integralning xossalari.
4.11. Aniq integrallarni hisoblash.
4.12.Aniq integralning geometriyaga va mexanikaga qo'llanilishi.

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA TEOREMALAR

4.1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi

$f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar biror (a, b) (chekli yoki cheksiz) oraliqda aniqlangan bo'lsin.

4.1-ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $\forall x \in (a; b)$ lar uchun $F'(x)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a, b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

4.1-eslatma. Agar $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada aniqlangan, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lib, $\forall x \in (a,b)$ lar uchun

$$F'(x)=f(x)$$

munosabat bajarilsa, a va b nuqtalarda esa,

$$F'(a+0)=f(a), \quad F'(b-0)=f(b)$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

4.1-lemma. $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalarning har biri (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, ularning har biri bitta $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, bu $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni :

$$G(x)=F(x)+C, \quad x\in(a,b).$$

4.2. Aniqmas integral tushunchasi

Agar $f(x)$ funksiyaning biror $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, uning boshqa istalgan boshlang'ich funksiyasi, ushbu

$$F(x)+C \quad (C=const)$$

formula orqali topiladi.

4.2-ta'rif. (a,b) oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning shu oraliqdagi barcha boshlang'ich funksiyalari to'plamiga $f(x)$ funksiyaning *aniqmas integrali* deyiladi va u

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi, bunda $\int$ – integral belgisi; $f(x)$ – integral ostidagi funksiya, $f(x)\,dx$ esa, integral ostidagi ifoda deyiladi.

Agar $F(x)$ funksiya (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda, $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad \text{yoki} \quad \int f(x)dx=\{F(x)+C\}$$

kabi yoziladi, bunda, C–ixtiyoriy o'zgarmas son.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amali, uni differensiallash amaliga teskari amal bo'lib hisoblanadi.

4.3. Aniqmas integralning xossalari

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lsin.

4.3.1-xossa. Agar $F(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa,

$$\int dF(x)=F(x)+C \quad \text{yoki} \quad \int F'(x)dx=F(x)+C$$

bo'ladi.

4.3.2-xossa. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin. U holda, $\forall x \in (a,b)$ uchun

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

tenglik o'rinli.

4.3.3-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda boshlang'ich funksiyalarga ega va $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ bo'lib, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ bo'lsa, u holda, $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ funksiya ham, (a,b) oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi va

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int f(x)dx + \lambda_2 \int g(x)dx$$

tenglik o'rinli.

4.4. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali

1. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \ \mu \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ x \neq -1.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$

9. $\int shx dx = chx + C.$

10. $\int chx dx = shx + C$

11. $\int \dfrac{1}{ch^2 x} dx = thx + C.$

12. $\int \dfrac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} arcctgx + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C, \ |x| \lhd |a|.$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad |x| \lhd |a|.$

4.5. Integrallash usullari

4.5.1. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash. $t=\varphi(x)$ funksiya $X=(a,b)$ oraliqda aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lsin. $t=\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari to'plami $-E$ bo'lsin.

Agar $U(t)$ funksiya T to'plamda aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lib, $E(\varphi)\subseteq T$ va

$$U'(t)=\psi(t) \tag{4.1}$$

bo'lsa, u holda, X to'plamda $F(x)=U(\varphi(x))$ murakkab funksiya aniqlangan va u differensiallanuvchi, ya'ni:

$$F'(x)=[U(\varphi(x))]'=U'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=\psi(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \tag{4.2}$$

(4.1) va (4.2) dan, agar $U(t)$ funksiya $\psi(t)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda, $U(\psi(t))$ funksiya $\psi(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, ya'ni:

$$\int\psi(t)dt=U(t)+C\ , \tag{4.3}$$

$$\int\psi(\varphi(x))\varphi'(x)dx=U(\varphi(x))+C \tag{4.4}$$

yoki

$$\int\psi(\varphi(x))d\varphi(x)=U(\varphi(x))+C. \tag{4.5}$$

(4.4) yoki (4.5) formulaga *o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi* deyiladi. Oxirgi, (4.5) formula (4.3) dan, $t=\varphi(x)$ almashtirish natijasida kelib chiqadi.

4.5.2. Aniqmas integralni bo'laklab integrallash usuli

4.1- teorema (aniqmas integralni bo'laklab integrallash usuli). Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lib, (a,b) oraliqda $\int vdu$ integral mavjud bo'lsa, u holda, shu oraliqda $\int udv$ integral ham mavjud bo'ladi va

$$\int udv=uv-\int vdu$$

tenglik o'rinli.

4.6. Sodda kasrlarni integrallash

Ushbu $\dfrac{A}{(x-a)^m},\ \dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ $(A,\,B,\,C,\,a,\,p,\,q\in R\ ,\ k,m\in N)$

ko'rinishidagi ifodalar *sodda kasrlar* deyiladi.

1) $m=1$ bo'lsa, $\int\dfrac{A}{x-a}dx=A\int\dfrac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

2) $m>1$ bo'lsa, $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int (x-a)^{-m}dx = \frac{A}{1-m}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$.

3) $k=1$ bo'lsa, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $x + \frac{p}{2} = t$ almashtirish olib, kvadrat uchhadni $x^2 + px + q = a^2 + t^2$ ko'rinishga keltirib, berilgan kasrning aniqmas integralini topamiz:

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx = B\int \frac{tdt}{a^2+t^2} + \frac{(2D-Bp)}{2}\int \frac{dt}{a^2+t^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2D-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C .$$

4) $k>1$ bo'lsa, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $x + \frac{p}{2} = t$ almashtirish olib, kvadrat uchhadni $x^2 + px + q = a^2 + t^2$ ko'rinishga keltiramiz va berilgan kasrning aniqmas integralini topamiz:

$$\int \frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \frac{B}{2}\frac{1}{1-k}\frac{1}{\left(a^2+t^2\right)^{k-1}} - \frac{(2D-Bp)}{2}\int \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^k}.$$

Oxirgi ifoda esa, quyidagi:

$$\int \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left(\frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^{k-1}} - (2k-3)\int \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^{k-1}}\right)$$

rekurrent formula orqali topiladi.

Ratsional funksiyalarni integrallash. $f(x)$ ratsional funksiya bo'lib, uni integrallash talab etilgan bo'lsin. Ma'lumki, har qanday ratsional funksiya ikkita haqiqiy koeffitsientli algebraik ko'phadlar nisbati shaklida tasvirlanadi (bunday kasr – haqiqiy koeffitsientli ratsional kasr deb yuritiladi).

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i} \quad (a_n \neq 0,\ b_m \neq 0).$$

Agar $P(x)$ ko'p hadning darajasi $Q(x)$ ko'phadning darajasidan kichik bo'lsa, u holda, ratsional kasr *to'g'ri ratsional kasr* deb ataladi, agar aksincha bo'lsa, u *noto'g'ri ratsional kasr* deb ataladi.

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kasr noto'g'ri kasr bo'lsa, uning butun qismi ajratilib, butun ratsional funksiya hamda to'g'ri kasr yig'indisi shaklida ifodalanadi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

U holda,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx \qquad (*)$$

bo'ladi. (*) da $\int R(x)dx$ integral, butun ratsional funksiyaning integrali bo'lib, u oson integrallanadi. Shunday qilib, noto'g'ri ratsional kasrni integrallash, to'g'ri ratsional kasrni integrallashga keltiriladi. To'g'ri kasrni integrallashda quyidagi teorema muhim rol o'ynaydi:

4.2-teorema. Har qanday to'g'ri kasr sodda kasrlar yig'indisi shaklida tasvirlanadi.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ - to'g'ri kasr bo'lib, $Q(x)$ ushbu

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{\beta} \cdot (x-\alpha_2)^{\beta_2} \cdots (x-\alpha_n)^{\beta_m} \cdot \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda} \cdot \left(x^2+p_2x+q_2\right)^{\lambda_2} \cdots \left(x^2+p_nx+q_n\right)^{\lambda_n}$$

ko'rinishdagi n-darajali ko'phad, $n_1+n_2+...+n_k+2(m_1+m_2+...+m_i)=n$, bo'lib, $x^2+p_jx+q_j\,(j=1,2,...,i)$ kvadrat uchhadlar haqiqiy ildizga ega bo'lmasa, u holda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{B_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{B_\beta^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\beta_1}} + \ldots + \frac{B_1^{(m)}}{x-\alpha_m} + \frac{B_2^{(m)}}{(x-\alpha_m)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{p_m}^{(m)}}{(x-\alpha_m)^{\beta_m}} +$$

$$+ \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+Px+q_1} + \frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}} + \ldots + \frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{x^2+p_nx+q_n} + \qquad (**)$$

$$+ \frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{\left(x^2+p_nx+q_n\right)^2} + \ldots + \frac{M_{\lambda n}^{(n)}x+N_{\lambda n}^{(n)}}{\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{\lambda_n}}$$

Bu yoyilmada $B_1^{(1)}, B_2^{(1)},...,B_{\beta_m}^{(m)}$, $M_1^{(1)}, N_1^{(1)},...,M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ - noma'lum haqiqiy o'zgarmas sonlar, bularning ba'zilari nolga teng bo'lishi ham mumkin. Bu noma'lum o'zgarmas sonlarni topish uchun (**) ni umumiy maxrajga keltirib, tenglikning o'ng va chap tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffisientlarini tenglashtirib, no'ma'lum koeffisientlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi, bu sistemani yechib no'ma'lum koeffisientlar topiladi.

4.7. Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash

4.7.1. $R(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}})dx$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R,\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$ $m-$butun musbat son) **ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.** Bunday ifodalarni integrallash uchun $t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ almashtirish bajarilsa, integral ostidagi ifoda ratsional ifodaga aylanib, integrallash, ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

4.7.2. $\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{p_1},\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{p_2},...,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{p_n}\right)dx.$ $(p_1,\ p_2,...,p_k\in Q,$ $\alpha,\beta,\gamma\ \delta\in R,\ \alpha\delta-\gamma\beta\neq 0)$, **ko'rinishdagi integralni hisoblash**. Berilgan integralni hisoblash uchun, $t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ almashtirish bajarilsa, integral ostidagi ifoda ratsional ifodaga aylanib, integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi, bunda m son $p_1,\ p_2,...,p_k$ ratsional sonlarning umumiy maxraji.

4.7.3. Binomial differensiallarni integrallash

4.3-ta'rif. Ushbu $x^m(a+bx^n)^p dx$-ko'rinishdagi ifodaga *binomial differensial* deyiladi, bunda a,b – haqiqiy sonlar, m,n,p - lar esa, ratsional sonlar.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{4.6}$$

ko'rinishdagi integralni hisoblash quyidagi uchta holda ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi:

1-hol. $p-$ butun son. Bu holda, m,n kasr sonlar maxrajlarining eng kichik umumiy bo'luvchisini λ- orqali belgilab, (4.6) integralda $x=t^\lambda$ almashtirish bajarilsa, integral ostidagi ifoda ratsional ifodaga aylanib, (4.6) integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

2-hol. $\frac{m+1}{n}$ – butun son. Bu holda, (4.6) integralda $a+bx^n=t^s$, (s son – p kasr sonning maxraji) almashtirish bajarilsa, integral ostidagi ifoda ratsional ifodaga aylanib, (4.6) integralni hisoblash ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

3-hol. $\frac{m+1}{n}+p$–butun son bo'lsin. Bu holda, (4.6) integral $t^s = ax^{-n}+b$ (s son – p kasr sonning maxraji) almashtirish natijasida ratsional funksiya integralini hisoblashga keltiriladi.

4.7.4. $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ $\left(a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0\right)$ **ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.** Ushbu

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{4.7}$$

integralni hisoblash quyidagi uchta almashtirish yordamida ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi:

1-hol. $a>0$ bo'lganda, (4.7) integralda $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$ almashtirish bajariladi.

2-hol. $c>0$ bo'lganda, (4.7) integralda $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ almashtirish bajariladi.

3-hol. $a\neq 0,\ b^2-4ac>0$ bo'lganda, (4.7) integralda $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ yoki $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$ almashtirish bajariladi.

Odatda,, yuqorida keltirilgan uchta almashtirishlar – *Eyler almashtirishlari* deyiladi.

4.8. Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash

4.8.1. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ **ko'rinishdagi integralni hisoblash.**

Ushbu

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \tag{4.8}$$

integralni qaraymiz.

1) $R(\sin x;\cos x)$ - $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasi. Bu holda, (4.8) integralda $t=tg\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ universal almashtirish olinadi va u t ga nisbatan ratsional funksiyaning integralini hisoblashga keltiriladi. Haqiqatan ham, quyidagi:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

munosabatlarni e'tiborga olsak, (8.1) integral

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

ko'rinishga keladi.

2) $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$ bo'lsa, u holda, $t=\cos x,\ x\in(0;\pi)$ almashtirish bajariladi va (4.8) integral ostidagi ifoda z ning ratsional funksiyasiga keltiriladi.

3) $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$ bo'lsa , u holda, $t=\sin x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ almashtirish bajarilib, (4.8) integral ostidagi ifoda z ning ratsional funksiyasiga keltiriladi.

4) $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$ bo'lsa, u holda, $t=tgx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ yoki $z=\cos 2x$ almashtirishlardan biri bajarilib, (4.8) integral ostidagi ifoda z ning ratsional funksiyalaridan biriga keltiriladi.

4.8.2. $\int \sin^m x\cos^n x dx\ (n,\ m\in Z)$ **ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.** Bunda quyidagi hollarga e'tibor qilish muhim:

1) agar $m+n-$ juft son bo'lsa, $t=tgx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ yoki $t=\cos 2x$ almashtirishlardan biri bajarilib, $\int \sin^m x\cos^n x dx$ integral ostidagi ifoda z ning ratsional funksiyasiga keltiriladi.

2) agar $m+n-$ toq son bo'lsa, $t=\cos x,\ x\in(0;\pi)$ yoki $t=\sin x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ almashtirishlardan biri bajarilib, $\int \sin^m x\cos^n x dx$ integral ostidagi ifoda z ning ratsional funksiyasiga keltiriladi.

4.8.3. $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x dx$ **ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.** Bu integrallarda integral ostidagi ifodalarda ushbu

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x]$$

formulalarni qo'llab, ularni integrallash tavsiya qilinadi.

4.9.Aniq integralning ta'rifi

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada berilgan bo'lsin. $[a,b]$ kesmani, ushbu

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots x_n=b$$

munosabatda bo‘lgan ixtiyoriy chekli sondagi nuqtalar yordamida bo‘laklarga bo‘lamiz. Bu bo‘linishni $[a,b]$ kesmaning *bo‘linishi* deb ataymiz va uni $P=\{x_k, k=\overline{0,n}\}$ kabi belgilaymiz. Bunda x_k $(k=0,1,...,n)$ nuqtalar P bo‘linishning bo‘luvchi nuqtalari, $[x_k, x_{k+1}]$ kesma esa, P-bo‘linishning oralig‘i, $\lambda_P = \max\limits_{0\le k\le n-1}\{\Delta x_k\}$ - uning diametri deyiladi.

$\forall P$ ni va bu bo‘linishning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,...,n-1)$ oralig‘idan ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib, $f(x)$ funksiyaning ξ_k nuqtadagi qiymatini hisoblab, uni $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ga ko‘paytirib,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (4.9)$$

yig‘indini tuzamiz. (4.9) yig‘indi $f(x)$ funksiyaning *Riman integral yig‘indisi* deyiladi. Bu yig‘indi $f(x)$ funksiyaga, $[a,b]$ ning P bo‘linishiga va ξ_k nuqtaga bog‘liq, shuning uchun uni $\sigma_P(f)$ deb belgilanadi. $[a,b]$ kesmaning shunday

$$P_1, P_2, ..., P_n, ... \qquad (4.10)$$

bo‘linishlar ketma-ketligini qaraylikki, ularning mos diametrlaridan tuzilgan $\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, ..., \lambda_{P_n}, ...$ ketma-ketlik nolga intilsin. $f(x)$ ning $[a,b]$ kesmaning (4.10) bo‘linishlariga mos kelgan

$$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, ...$$

integral yig‘indilari ketma-ketligini tuzamiz.

4.4-ta’rif. Agar $[a,b]$ kesmaning har qanday (4.10) ko‘rinishdagi $\{P_n\}$ bo‘linishlar ketma-ketligi olinganda ham, unga mos kelgan $\{\sigma_n\}$ integral yig‘indilar ketma-ketligi, ξ_k nuqtalarni tanlab olishga bog‘liq bo‘lmagan holda, har doim bitta I songa intilsa, bu I son σ integral yig‘indining limiti deyiladi va

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma = \lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = I$$

kabi belgilanadi.

4.5-ta’rif. Agar $\lambda_P \to 0$ da $f(x)$ funksiyaning (4.9) integral yig‘indisi chekli limitga ega bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada (*Riman ma'nosida*) *integrallanuvchi* deyiladi, σ-integral yig‘indining chekli limiti I ga esa, $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi *aniq integrali* deb ataladi va u $\int\limits_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

Bunda, a son – aniq integralning *quyi chegarasi*, b son esa, uning *yuqori chegarasi* deb ataladi.

4.2-eslatma. Agar $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'lsa, u shu kesmada integrallanmaydi.

4.2-teorema (funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u shu kesmada chegaralangan bo'ladi.

Aniq integralning mavjudlik shartlari.

4.3-teorema. Chegaralangan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lishi uchun, $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham, shunday $\delta>0$ topilib, $[a,b]$ kesmaning diametri $\lambda_P < \delta(\varepsilon)$ bo'lgan har qanday P bo'linishiga mos kelgan Darbu yig'indilari

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va yetarli. Bunda,

$$s_p(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,\ S_p(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,\ m_i = \inf\{f(x)\}, M_i = \sup\{f(x)\},\ x \in [x_i, x_{i+1}]$$

yig'indilar, mos ravishda, Darbuning *quyi* hamda *yuqori* yig'indilaridir.

4.3-eslatma. Chegaralangan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lishi uchun, $\lim\limits_{\lambda_P \to 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli, bunda $\omega_i = M_i - m_i$ funksiyaning tebranishi.

Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari.

4.4-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4.5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan bo'lib, u shu kesmada chekli sondagi nuqtalarda uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4.6-teorema. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan va monoton bo'lsa, funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4.4-eslatma. Integrallanuvchi funksiyaning qiymatini chekli sondagi nuqtalarda o'zgartirish bilan funksiyaning integrallanuvchi bo'lishligiga va integralning qiymatiga ta'sir qilmaydi.

4.7-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, chegaralangan bo'lib, $[a,\eta]$, $\forall\eta\in[a,b)$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa va chekli

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_0^{\eta} f(x)dx = A$$

mavjud bo'lsa, funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4.10. Aniq integralning xossalari

1) Tengliklar bilan ifoda qilinadigan xossalar.

4.10.1-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u ixtiyoriy $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi.

4.10.2-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi va $a<c<b$ bo'lsa, u holda,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (4.11)$$

tenglik o'rinli.

4.5-eslatma. Agar $a<c<b$ bo'lib, $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ kesmalarda integrallanuvchi bo'lsa, u $[a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi va (4.11) tenglik o'rinli.

4.6-eslatma. Agar $a=b$ bo'lib, $f(x)$ funksiya a nuqtada aniqlangan bo'lsa, u holda, $\int_a^a f(x)dx=0$ ni ta'rif sifatida qabul qilamiz.

Agar $a<b$ bo'lib, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad a<b$$

deb qabul qilamiz.

4.10.3-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $k\,f(x)$ $(k=const)$ funksiya ham shu kesmada integrallanuvchi va

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli.

4.10.4-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $f(x)+ g(x)$ funksiya ham $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

tenglik o'rinli.

4.10.5-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $f(x)g(x)$ funksiya ham $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4.7-eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $\forall n\in N$ uchun $|f(x)|^n$ funksiya ham shu $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

2) Tengsizliklar orqali ifodalanadigan xossalar.

4.10.6-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, u shu oraliqda manfiy bo'lmasa, ($\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq 0$), u holda,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a<b)$$

bo'ladi.

4.2-natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

tengsizlik ham o'rinli .

4.3-natija. (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $f(x)$- $\alpha g(x)$ (α-ixtiyoriy o'zgarmas) funksiya ham $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi va $\int_a^b [f(x)-\alpha g(x)]^2 dx \geq 0$ tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlikning chap tomonidagi ifoda α ga nisbatan kvadrat uchhad bo'lib, u α ning barcha haqiqiy qiymatlarida manfiy emas. Demak, kvadrat uch-hadning diskriminanti musbat emas, ya'ni:

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \le 0,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (4.11)$$

Bu tengsizlik, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataladi.

4.10.7-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa , u holda, $|f(x)|$ funksiya ham shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4.8-eslatma. $|f(x)|$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada integrallanuvchiligidan, $f(x)$ funksiyaning shu kesmada integrallanuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

3) O'rta qiymat haqidagi teoremalar.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. U holda, $m = \inf\{f(x)\}$, $M = \sup\{f(x)\}$ mavjud va $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a;b]$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4.8-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, shunday o'zgarmas μ $(m \le \mu \le M)$ son mavjud bo'lib, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4.4-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda, shunday c $(c \in [a,b])$ nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4.9-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, $g(x)$ funksiya shu oraliqda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda, shunday o'zgarmas μ $(m \le \mu \le M)$ son mavjud bo'lib,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

tenglik o'rinli.

4.5-natija. Agar $f(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda, $[a.b]$ kesmada shunday c $(c \in [a,b])$ nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi .

Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va u shu kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U holda, aniq integralning 4.1-xossasiga asosan, $f(x)$ funksiya istalgan $[a.x] \subset [a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi, ya'ni:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

integral mavjud bo'ladi.

4.10-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, $F(x)$ funksiya shu oraliqda uzluksiz bo'ladi.

4.11-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, $x_0 \in [a,b]$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

tenglik o'rinli.

4.9-eslatma. Agar $a = x_0$ bo'lsa, u xolda $F'(a+0) = f(a)$, agar $b = x_0$ bo'lsa, $F'(b-0) = f(b)$ deb qarash lozim.

4.5-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda, $\forall x \in [a,b]$ lar uchun $F'(x) = f(x)$, ya'ni $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

4.11. Aniq integrallarni hisoblash

4.12-teorema (Nyuton-Leybnis formulasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa va $F(x)$ funksiya $[a.b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.12}$$

Nyuton-Leybnis formulasi o'rinli.

4.13-teorema (o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli). Agar: 1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, 2) $\varphi(t)$ funksiya o‘zining $\varphi'(t)$ hosilasi bilan birgalikda $[\alpha,\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, hamda $\forall t\in[\alpha,\beta]$ uchun $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_a^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) \tag{4.13}$$

formula o‘rinli. Bu formulaga aniq integrallarda *o‘zgaruvchilarni almashtirish* formulasi deyiladi.

4.14-teorema (aniq integralni bo‘laklab integrallash usuli). Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalari $[a,b]$ kesmada uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsa, u holda,

$$\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)du(x) \tag{4.14}$$

formula o‘rinli.

(4.14) formula – aniq integrallarda *bo‘laklab integrallash formulasi* deyiladi.

4.12. Aniq integralning geometriyaga va mexanikaga qo‘llanilishi

4.12.1. *Dekart koordinatalar sistemasida berilgan shaklning yuzini hisoblash.* Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\ge 0$ tengsizlik bajarilsa va D soha yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya bilan, yon tomonlardan $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar, pastdan esa, Ox $(y=0)$ o‘q bilan chegaralangan bo‘lsa, D sohaning yuzi

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Agar $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da uzluksiz funksiya bo‘lib, $\forall x\in[a,b]$ uchun $f_1(x)\le f_2(x)$ tengsizlik bajarilsa va D soha yuqoridan $f_2(x)$, pastdan $f_1(x)$ uzluksiz funksiyalar bilan, yon tomonlardan esa, $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsa, D sohaning yuzi

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \tag{4.15}$$

formula orqali hisoblanadi.

Agar egri chiziqli S trapetsiyada chiziq tenglamasi parametrik, ya’ni:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\} \quad (t_0 \le t \le T)$$

tenglama bilan berilsa, trapetsiyaning yuzi

$$S=\int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)dt \tag{4.16}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

4.12.2. *Qutb koordinatalar sistemasida berilgan shaklning yuzini hisoblash.* Agar D soha qutb koordinatalar sistemasida

$$D=\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ 0 \le r \le r(\varphi) \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lib, $r(\varphi)$ funksiya $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, S figuraning yuzi

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b (r(\varphi))^2\, d\varphi \tag{4.17}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

4.12.3. *Dekart koordinatalar sistemasida berilgan yoy uzunligini aniq integral yordamida hisoblash.* Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\breve{AB}$ egri chiziq o'zining $y=f(x)$ $(a \le x \le b)$ oshkor tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, u holda, uning *yoy uzunligi*

$$l=\breve{AB}=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx \tag{4.18}$$

formula orqali hisoblanadi.

Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[t_0,T]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$ va $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lib, $\breve{AB}$ egri chiziq, $\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\}$ $(t_0 \le t \le T)$ parametrk tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, u holda, $\breve{AB}$ egri chiziqning *yoy uzunligi*

$$l=\breve{AB}=\int_{t_0}^{T} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\, dt \tag{4.19}$$

formula orqali hisoblanadi.

4.12.4. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan yoy uzunligini aniq integral yordamida hisoblash. Agar $\breve{AB}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $r=r(\varphi)$ $(\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $r(\varphi)$

funksiya $[\varphi_1;\varphi_2]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda, egri chiziqning *yoy uzunligi*

$$l=\breve{AB}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi \tag{4.20}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

4.12.5. *Dekart koordinatalar sistemasida berilgan aylanma jismning hajmini aniq integral yordamida hisoblash.* Faraz qilaylik, bizga biror T jism berilgan bo'lib, uning Oy o'qqa parallel bo'lgan kesimlarning yuzi ma'lum bo'lsin. Bu yuza x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi, uni $S=S(x)$ orqali belgilaymiz.

Agar $S=S(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lsa, T jismning V hajmi ushbu

$$V=\int_a^b S(x)dx \tag{4.21}$$

formula bo'yicha topiladi.

D soha yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya bilan, yon tomonlardan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar, pastdan esa, Ox $(y=0)$ o'q bilan chegaralangan bo'lsa, u holda, D egri chiziqli sohani Ox $(y=0)$ o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma jismning hajmi

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx \tag{4.22}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar S egri chiziqli trapetsiya yuqoridan $f_2(x)$, pastdan $f_1(x)$ uzluksiz egri chiziqlar bilan, yon tomonlardan esa, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, uning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma T jismning hajmi

$$V_x=\pi\int_a^b[y_2^2-y_1^2]dx=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx \tag{4.23}$$

formula orqali topiladi.

4.12.6. *Dekart koordinatalar sistemasida berilgan aylanma sirt yuzini aniq integral yordamida hisoblash.* $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz funksiya bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq 0$ tengsizlik bajarilsin. $\breve{AB}$ egri chiziqning o'zini Ox $(y=0)$ o'q atrofida aylantiramiz, natijada, *aylanma sirt* hosil bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda, aylanma sirtning yuzi

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (4.24)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

4.13. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (4.25)$$

integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin, bunda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, deb faraz qilinadi. Biz yuqorida aniq integralni hisoblash usullarini ko'rib o'tdik, lekin ba'zi fizik, mexanik masalalarni yechishda, integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasini elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydigan integrallar uchraydi. Bunday integrallarni taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi. Integrallarni taqribiy hisoblash uchun bir nechta formulalar mavjud bo'lib, biz quyida shularning ba'zilari bilan tanishamiz.

I. **To'g'ri to'rtburchak usuli.** $[a,b]$ oraliqning ixtiyoriy

$$P=\{a=x_0<x_2<...<x_{2n}=b\}$$

bo'linishini qaraymiz. $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ oraliqning o'rtasidagi nuqtani x_{2k-1} deb belgilaymiz. (1-chizma). To'g'ri to'rtburchak usuli (4.25) integralni, mos ravishda, balandliklari $f(x_{2k-1})$, asoslari esa, $x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{b-a}{n}$ ga teng bo'lgan, ushbu

$$\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1})]$$

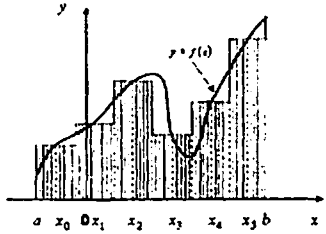
to'rtburchaklar yuzlari yig'indisiga taqribiy almashtirishdan iborat, ya'ni:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1})]\,. \qquad (4.26)$$

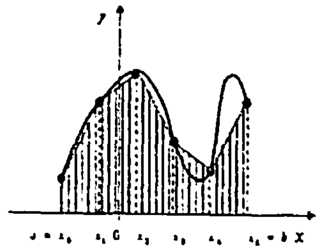
(4.26) formulaga *to'g'ri to'rtburchak formulasi* deyiladi. Bu formulani «qo'shimcha» had yordamida ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+....+f(x_{2n-1})]+R \qquad (4.27)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda. $R-$ qoldiq had.



1-chizma.



2-chizma.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda, shu oraliqda shunday η nuqta topiladiki, (4.27) formuladagi qoldiq had uchun

$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta)$$

tenlik o'rinli bo'ladi

Trapetsiyalar usuli. (4.25) integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin. $[a,b]$ oraliqning ixtiyoriy $P=\{a=x_0<x_2<...<x_n=b\}$ regular bo'linishini olamiz va $y=f(x)$ funksiyaning $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$,....., $y_n=f(x_n)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Trapetsiya usuli (4.25) integralni ushbu

$$\frac{b-a}{2n}\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)]+...+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\}=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right\}$$

yig'indiga, mos ravishda, balandliklari $f(x_{k-1})$ va $f(x_k)$, asoslari $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ ga teng bo'lgan trapetsiyalar yuzlarining yig'indisiga (2-chizma) taqribiy almashtirishdan iborat, ya'ni:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right\}.$$

Bu formulani qoldiq had yordamida

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right\}+R_{TR}$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda R_{TR}– qoldiq had. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda, $[a,b]$ oraliqda shunday η nuqta topiladiki, R_{TP} uchun

$$R_{TP} = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta), \quad a \le \eta \le b$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

III. Parabolalar usuli. (4.25) integralni hisoblash uchun, $[a,b]$ oraliqning ixtiyoriy $P = \{a = x_0 < x_2 < ... < x_{2n} = b\}$ bo'linishini olamiz. $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ oraliqning o'rtasidagi nuqtani x_{2k-1} deb belgilaymiz: $x_{2k-1} = \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}$, $k = \overline{1,n}$. Parabolalar usulida berilgan (4.25) integralni $f(x)$ funksiya grafigining abssissalari x_{2k-2}, x_{2k-1} va x_{2k} bo'lgan nuqtalardan o'tuvchi parabolalar ostida joylashgan trapetsiyalar yuzlari yig'indisi

$$\frac{b-a}{6n}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + ... +$$

$$+[f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]\} = \frac{b-a}{6n}\{f(a) + f(b) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\}$$

ga taqribiy almashtiriladi, ya'ni:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] +$$

$$+ ... + [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] = \frac{b-a}{6n}\{f(a) + f(b) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\}$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + R_{Pa}, \qquad (4.29)$$

Bunda, R_{Pa} - qoldiq had.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz to'rtinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda, $[a,b]$ oraliqda shunday η nuqta topiladiki, (4.29) formulalardagi R_{Pa}- had uchun $R_{Pa} = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta)$, $a \le \eta \le b$, tenglik o'rinli bo'ladi. (4.29) formula – *parabolalar (Simpson) formulasi* deb ataladi.

4.1. O'z-o'zini tekshirish savollari

4.1.1 Boshlangich funksiya tushunchasi. Boshlangich funksiya to'g'risidagi teoremalar ([3],1-q., 177–178-betlar; [5], 2-t., 11–14-betlar; [10], 1-q., 291–292-betlar; [12], 1-q., 248–249-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 4- bo'lim).

4.1.2. Aniqmas integralning ta'rifi va uning xossalari ([3],1-q., 179–180-betlar; [5], 2-t., 11–19-betlar; [10], 1-q., 291–293-betlar; [12], 1-q.,250–251-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 4- bo'lim).

4.1.3. Aniqmas integrallar uchun jadvallar ([3],1-q., 182–183-betlar; [5], 2-t., 11–19-betlar; [10], 1-q., 294–295-betlar; [12], 1-q.,251–253-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 4- bo'lim).

4.1.4. Aniqmas integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash usullari ([3],1-q., 185–189-betlar; [5], 2-t., 23–27-betlar; [10], 1-q., 297–300-betlar; [12], 1-q.,254–255-betlar; [9], 1-t., 9-bo'lim, [30], 8- bo'lim).

4.1.5. Ratsional kasr funksiyalarni sodda kasrlarga ajratish ([3],1-q., 192–199-betlar; [5], 2-t., 36–47-betlar; [10], 1-q., 311–317-betlar; [12], 1-q.,258–264-betlar, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 8- bo'lim).

4.1.6. Sodda kasrlarni integrallash. Ratsional funksiyalarni integrallash ([3],1-q., 190–192-betlar; [5], 2-t., 36–47-betlar; [10], 1-q., 311–317-betlar; [12], 1-q.,264–267-betlar, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 8-bo'lim).

4.1.7. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash ([3],1-q., 200–203-betlar; [5], 2-t., 74–83-betlar; [10], 1-q., 321–327-betlar; [12], 1-q.,277–278-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 8- bo'lim).

4.1.8. Binomial differensiallarni integrallash ([3],1-q., 207–210-betlar; [5], 2-t., 51–54-betlar; [10], 1-q., 327–317-betlar; [10], 1-q., 321–327-betlar; [12], 1-q.,274–276-betlar).

4.1.9. Irratsional ifodalarni integrallash ([3],1-q., 203–207-betlar; [5], 2-t., 50–72-betlar; [10], 1-q., 321–327-betlar; [12], 1-q.,267–276-betlar; [30], 8- bo'lim).

4.1.10. Aniq integral tushunchasi va uning geometrik ma'nosi ([3],1-q., 211–212-betlar; [5], 2-t., 94–106-betlar; [10], 1-q., 300–334-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.11. Aniq integralning xossalari ([3],1-q., 230–238-betlar; [5], 2-t., 108–117-betlar; [10], 1-q., 347–356-betlar; [12], 1-q.,304–312-betlar, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.12. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari ([3],1-q., 227–230-betlar; [5], 2-t., 101–103-betlar; [10], 1-q., 341–346-betlar; [12], 1-q.,300–304-betlar, [1], 1-t., 11- bo'lim, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.13. O'rta qiymat haqidagi teoremalar ([3],1-q., 238–240-betlar; [5],,2-t., 113–119-betlar; [10], 1-q., 347–350-betlar; [12], 1-q.,312–314-betlar, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.14. Nyuton – Leybnis formulasi ([3],1-q., 246–247-betlar; [5], 2-t., 123–125-betlar; [10], 1-q., 359–361-betlar; [12], 1-q.,319–320-betlar, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.15. Aniq integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash usullari ([3],1-q., 247–251-betlar; [5], 2-t., 130–137-betlar; [10], 1-q., 361–363-betlar; [12]. 1-q.,320–323-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.16. Tekis figuralarning yuzini hisoblash ([3],1-q., 261–270-betlar; [5], 2-t., 186–192-betlar; [10], 1-q., 406–416-betlar; [12], 1-q.,353–361-betlar, [9], 1-t., 9- bo'lim, [30], 5- bo'lim).

4.1.17. Yoy uzunligi ta'rifi va uni hisoblash ([3],1-q., 271–282-betlar; [5], 2-t., 169–185-betlar; [10], 1-q., 391–405-betlar; [30], 6-bo'lim).

4.1.18. Aylanma sirtning yuzi va uni hisoblash ([3],1-q., 283–288-betlar; [5], 2-t., 214–222-betlar; [12], 1-q.,361–364-betlar [30], 6- bo'lim).

4.1.19. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari ([3],1-q., 252–260-betlar; [5], 2-t., 153–164-betlar; [10], 1-q., 422–441-betlar; [12], 1-q.,324–328-betlar, [30], 8- bo'lim).

4.1.20. Aniq integrallarning mexanika va fizika masalalarini yechishga tatbiqlari, ([3],1-q., 288–293-betlar; [5], 2-t., 225–239-betlar; [12], 1-q.,365–369-betlar [30], 6- bo'lim).

4.2. Nazariy (muammoli) topshiriqlar

4.2.1. $x=0$ nuqtada $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning qiymati 1 ga teng deb, uning $[0,1]$ da integrallanuvchi ekanligini isbotlang.

4.2.2. Ushbu $\int\limits_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$, $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ integrallarning qaysi biri katta?

4.2.3. Agar $f(t)$ uzluksiz, $\tau(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar esa, differensiallanuvchi bo'lsa, u holda,

$$\frac{d}{dx}\int_{r(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[r(x)]r'(x)$$

formulaning to'g'riligini isbotlang.

4.2.4. $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$ ni hisoblang.

4.2.5. $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2}dt$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping.

4.2.6. $f(x)$ – T davrga ega bo'lgan funksiya bo'lsa, u holda, $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \ \forall a$ ekanligini isbotlang.

4.2.7. Agar $f(x)$– juft funksiya bo'lsa, u holda, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{-a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$ ekanligini isbotlang.

4.2.8. Agar $f(x)$ – toq funksiya bo'lsa, u holda, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ va $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ ekanligini isbotlang.

4.2.9. $\int_{-1}^{+1}\sin^2 x \ln\frac{2+x}{2-x}dx$ integral nimaga teng?

4.2.10. n ning qanday qiymatida $\int\sqrt{1+x^n}dx$ integral elementar funksiya orqali ifoda qilinadi.

4.2.11. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}dx$ integralni hisoblang.

4.2.12. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ integralni hisoblang.

4.2.13. $\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ $(m, n\in N)$ integralni hisoblang.

4.2.14. $J_{n,m}=\int\sin^n x\cdot\cos^m x dx, \quad n,m\in N$ integral uchun $J_{n,m}=\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{n+m}+\frac{n-1}{n+m}J_{n-2,m}$ rekurrent formulaning to'g'riligini isbotlang.

4.2.15. Funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi uchun, uning chegaralanganligi zaruriy shart bo'lib, yetarli emasligiga misol keltiring.

4.2.16. $J_n=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$, $a^2+b^2\neq 0$, $n\in N$ ko‘rinishdagi integral uchun quyidagi

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left(\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x+b\sin x^{n-1}}+(n-2)J_{n-2}\right)\quad (n>1)$$

rekurrent formulani isbotlang.

4.2.17. $J_n=\int\frac{dx}{(a\cos x+c)^n}$, $|a|\neq|c|$, $n\in N$ integral uchun

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2-c^2)}\left(\frac{a\sin x}{(a\cos x+c)^{n-1}}-(2n-3)c\ J_{n-1}+(n-2)J_{n-2}\right)\quad (n>1)$$

rekurrent formulani isbotlang.

4.2.18. $J_{n,m}=\int\sin^n x\cos^m x\,dx$ $m,n\in N$ ko‘rinishidagi integral uchun quyidagi $J_{n,m}=\frac{\sin^{n+1}x\cos^{m-1}x}{n+m}+\frac{m-1}{n+m}J_{n,m-2}$ rekurrent formulani isbotlang.

4.2.19. $J_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(a\neq 0)$ integralni hisoblash uchun rekurrent formulani keltirib chiqaring.

4.2.20. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada absolut integrallanuvchi bo‘lsin, ya’ni $\int_a^b|f(x)|dx$ integral mavjud bo‘lsin. U holda, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladimi?

4.2.21. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda, $\int_a^b f^2(x)dx=0$ tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun, $f(x)$ ning $[a,b]$ kesmaga qarashli hamma uzluksizlik nuqtalarida $f(x)=0$ bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

4.2.22. $f(t)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi va uning aniqmas integrali $F(x)=c+\int_a^x f(t)dt$ bo‘lsin. U holda, $F(x)$ funksiyaning $f(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarida uzluksiz va $F'(x)=f(x)$ ekanligini isbotlang.

4.2.23. $\tau(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada o‘zlarining kvadratlari bilan birga integrallanuvchi bo‘lsin. U holda,

$$\left\{\int_a^b\tau(x)\psi(x)dx\right\}^2\leq\int_a^b\tau^2(x)dx\int_a^b\psi^2(x)dx$$

tengsizlikning to‘g‘riligini isbot qiling.

4.3.Amaliy topshiriqlar

4.3.1- masala. Quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.1.1. $\int(5-x^3)^4dx.$ **4.3.1.2.** $\int x^3(6-x)^2dx.$

4.3.1.3. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx.$ **4.3.1.4.** $\int\left(\frac{2-x}{x}\right)^3dx.$

4.3.1.5. $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx.$ **4.3.1.6.** $\int\frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

4.3.1.7. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2+3}}{\sqrt[5]{x}}dx.$ **4.3.1.8.** $\int\frac{(1-x)^2}{x^2\sqrt[3]{x}}dx.$

4.3.1.9. $\int\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$ **4.3.1.10.** $\int\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt[3]{5x}\right)^2dx}{\sqrt{x}}.$

4.3.1.11. $\int\frac{\sqrt{x^5+x^{-5}+3}}{x^2}dx.$ **4.3.1.12.** $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

4.3.1.13. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$ **4.3.1.14.** $\int\frac{x^2+4}{x^2-1}dx.$

4.3.1.15. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$ **4.3.1.16.** $\int(3^x+5^x)^2dx.$

4.3.1.14. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$ **4.3.1.18.** $\int(2\sin 2x+3\cos 3x)dx$

4.3.1.19. $\int ctg^2x dx.$ **4.3.1.20.** $\int tg^2x dx.$

4.3.1.21. $\int(3-x^3)^3dx.$ **4.3.1.22.** $\int x^3(5-2x)^2dx.$

4.3.1.23. $\int(1+x)(1-2x)(1+3x)dx.$ **4.3.1.24.** $\int\left(\frac{2-3x}{2x}\right)^2dx.$

4.3.1.25. $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)dx.$

4.3.1.26-misol. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechilishi. ([3], 1-q., 177–184-betlar; [9], 1-t., 9- bo‘lim; [30], 8-bo‘lim). Integral ostidagi ifodani shakl almashtirib va

$$\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\ \mu\neq-1,\ \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}arcctgx+C$$

formulalardan foydalanib, aniqmas integralni hisoblaymiz:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2})dx = arctgx - \frac{1}{x} + C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int((1+2*x^2)/((x^2)*(1+x^2)),x)=int((1+2*x^2)/((x^2)*(1+x^2)),x);
```

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{x} + \arctan(x).$$

4.3.2 - masala. O'zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.2.1. $\int x\sqrt{x-5}\,dx.$

4.3.2.2. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

4.3.2.3. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx.$

4.3.2.4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx.$

4.3.2.5. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}.$

4.3.2.6. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx.$

4.3.2.4. $\int \sqrt[3]{1+3\sin x}\cos x dx.$

4.3.2.8. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$

4.3.2.9. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx.$

4.3.2.10. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$

4.3.2.11. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

4.3.2.12. $\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx.$

4.3.2.13. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx.$

4.3.2.14. $\int \frac{xdx}{4+x^4}.$

4.3.2.15. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}.$

4.3.2.16. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

4.3.2.14. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}.$

4.3.2.18. $\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{2/3}}.$

4.3.2.19. $\int \frac{e^xdx}{2+e^x}.$

4.3.2.20. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

4.3.2.21. $\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$

4.3.2.2. $\int \frac{e^xdx}{1+e^x}.$

4.3.2.23. $\int \frac{3}{\sqrt{(3x-5)^3}}dx.$

4.3.2.24. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.$

4.3.2.25. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}.$

4.3.2.26-misol. Quyidagi $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$, $\alpha\neq 0$ aniqmas integralni o'zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib hisoblang:

Yechilishi. ([3], 1-q., 185–187-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim; [30], 8- bo'lim). $x+\sqrt{x^2+\alpha}=t(x)$ deb belgilasak,

$$dt=\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)'dx=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx=\frac{t(x)}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx,\quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{dt(x)}{t(x)}$$

ni hosil qilamiz. Natijada

$$J=\int\frac{dt(x)}{t(x)}=\ln|t(x)|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$$

Shunday qilib,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int(1/sqrt(x^2+a),x)=int(1/sqrt(x^2+a),x);
```

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a})\,.$$

4.3.3 - masala. Bo'laklab integrallash usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.3.1. $\int x\cos 2x dx.$

4.3.3.2. $\int x\ln 3x dx.$

4.3.3.3. $\int xe^{-x}dx.$

4.3.3.4. $\int x3^x dx.$

4.3.3.5. $\int x^n \ln x dx (n\neq -1).$

4.3.3.6. $\int x\, arctgx dx.$

4.3.3.4. $\int \ln x dx.$

4.3.3.8. $\int x^3e^{-x^2}dx.$

4.3.3.9. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx.$

4.3.3.10. $\int \arccos x dx.$

4.3.3.11. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

4.3.3.12. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$

4.3.3.13. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

4.3.3.14. $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

4.3.3.15. $\int x\sin\sqrt{x}dx$

4.3.3.16. $\int e^{ax}\cos bx dx.$

4.3.3.14. $\int e^{ax}\sin bx dx.$

4.3.3.18. $\int e^{2x}\sin^2 x dx.$

4.3.3.19. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx.$

4.3.3.20. $\int \sqrt{2-x^2}dx.$

4.3.3.21. $\int x\sin 2x dx.$

4.3.3.22. $\int x\lg 3x dx.$

4.3.3.23. $\int xe^{-2x}dx$.

4.3.3.24. $\int x5^{2x}dx$.

4.3.3.25. $\int x^2\ln 3x dx$.

4.3.3.26-misol. Quyidagi $\int x^2\ln x dx$ aniqmas integralni, bo'laklab integrallash usulidan foydalanib, hisoblang:

Yechilishi. ([3], 1-q., 187–190-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim; [30], 8-bo'lim).

$$\int x^2\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^2dx, & v=\frac{x^3}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int(x^2*ln(x),x)=int(x^2*ln(x),x);
```

$$\int x^2\ln(x)\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{9}.$$

4.3.4-masala. Aniqmas koeffitsiyentlar usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.4.1. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

4.3.4.2. $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$

4.3.4.3. $\int\frac{15x^2-4x-8}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx$.

4.3.4.4. $\int\frac{x^4}{(2+x)(x^2-1)}dx$.

4.3.4.5. $\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-x}dx$.

4.3.4.6. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$.

4.3.4.4. $\int\frac{xdx}{x^3+1}$.

4.3.4.8. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

4.3.4.9. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

4.3.4.10. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

4.3.4.11. $\int\frac{2x+3}{(x-3)(x-2)}dx$.

4.3.4.12. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

4.3.4.13. $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

4.3.4.14. $\int\frac{dx}{(x+1)(1+x^2)(1+x^3)}$.

4.3.4.15. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

4.3.4.16. $\int\frac{dx}{1+x^6}$.

4.3.4.17. $\int\frac{dx}{x^6-1}$.

4.3.4.18. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

4.3.4.19. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

4.3.4.20. $\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}$.

4.3.4.21. $\int \frac{(x+2)dx}{(x+4)(x+5)(x+7)}$. **4.3.4.22.** $\int \frac{3x+5}{(x+2)(x+3)}dx$

4.3.4.23. $\int \frac{5x^2-3x-8}{(x+3)(x+2)(x-2)}dx$. **4.3.4.24.** $\int \frac{x^3}{(3+x)(x^2-4)}dx$.

4.3.4.25. $\int \frac{x^2-3x+5}{x^3-2x^2-x}dx$.

4.3.4.26-misol. $\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechilishi. ([3], 1-q., 190–191-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim; [30], 8-bo'lim). $\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}$ - to'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi shaklida tasvirlaymiz:

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}, \tag{4.25}$$

so'ngra tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltirib, tenglikning ikkala tomonidagi maxrajni tashlab,

$$\begin{aligned}3x^4+2x^3+3x^2-1 &= A_1(x^2+1)^2+(M_1x+N_1)(x-2)(x^2+1)+\\&+(M_2x+N_2)(x-2)=\\&= A_1x^4+2A_1x^2+A_1+M_1x^4-2M_1x^3+N_1x^3+M_1x^2-\\&-2M_1x+N_1x-2N_1x^2-2N_1+M_2x^2-2M_2x+N_2x-2N_2\end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik o'rinli bo'lishi uchun, tenglikning ikkala tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlar o'zaro teng bo'lishi kerak, ya'ni:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A_1-M_1=3 \\ x^3 & -2M_1+N_1=2 \\ x^2 & 2A_1+M_1-2N_1+M_2=3 \\ x & -2M_1+N_1-2M_2+N_2=0 \\ x^0 & A_1-2N_1-2N_2=-1 \end{array}$$

Shunday qilib, noma'lum koeffitsiyentlarni topish uchun yuqoridagi algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu algebraik tenglamalar sistemasini yechib, noma'lum koeffitsiyentlarni topamiz:

$$A_1=3,\ M_1=0,\ N_1=2,\ N_2=0,\ M_2=1.$$

Topilgan koeffitsiyentlarni (4.25) ga keltirib qo'yib, so'ngra tenglikning ikkala tomonidan integral olamiz.

$$\int\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=3\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=3\ln|x-2|+2arctgx-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int((3*x^4+2*x^3+3*x^2-1)/((x-
2)*((x^2+1)^2)),x)=int((3*x^4+2*x^3+3*x^2-1)/((x-
2)*((x^2+1)^2)),x);
```

$$\int\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{2(x^2+1)}+3\ln(x-2)+2\arctan(x)$$

4.3.5-masala. Quyidagi irratsional ifodalar qatnashgan aniqmas integralni hisoblang:

4.3.5.1. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$ **4.3.5.2.** $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx.$

4.3.5.3. $\int\frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}}dx.$ **4.3.5.4.** $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{20-x}{2+x}}dx.$

4.3.5.5. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$ **4.3.5.6.** $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

4.3.5.7. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$ **4.3.5.8.** $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

4.3.5.9. $\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}.$ **4.3.5.10.** $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

4.3.5.11. $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx.$ **4.3.5.12.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

4.3.5.13. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}.$ **4.3.5.14.** $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}.$

4.3.5.15. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$ **4.3.5.16.** $\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}.$

4.3.5.17. $\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx.$ **4.3.5.18.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}.$

4.3.5.19. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\quad(a>0).$ **4.3.5.20.** $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$

4.3.5.21. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt[4]{x}}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$ 4.3.5.22. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[6]{x^5}}dx.$

4.3.5.23. $\int \frac{(4x-5)^{1/2}}{(4x-5)^{1/3}}dx.$ 4.3.5.24. $\int \frac{3}{(3-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx.$

4.3.5.25. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^2(x+2)^3}}.$

4.3.5.21-misol. $I=\int\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechilishi. ([3], 1-q., 203–207-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim; [30], 4-bo'lim). $t=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ almashtirishni olamiz. Unda,

$$t^2=\frac{x}{x-1},\ x=\frac{t^2}{t^2-1},\ dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$$

ekanligini hisobga olsak, berilgan integralni hisoblash t ga nisbatan ratsional bo'lgan funksiyaning integralini hisoblashga keltiriladi, ya'ni:

$$I=\int\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx=-\int\frac{2t^2dt}{(t^2-1)^2}=-\int\frac{t^2+1+t^2-1}{(t^2-1)^2}dt=$$
$$=\frac{t}{t^2-1}-\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=\sqrt{x(x-1)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}\right|+C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int(sqrt(x/(x-1)),x)=int(sqrt(x/(x-1)),x);
```

$$\int\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,(x-1)\left(2\sqrt{x^2-x}+\ln\left(-\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2-x}\right)\right)}{\sqrt{(x-1)x}}.$$

4.3.6-masala. Eyler almashtirishlaridan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.6.1. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$ 4.3.6.2. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$

4.3.6.3. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$ 4.3.6.7. $\int\frac{xdx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3}.$

4.3.6.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-\sqrt{x^2+2x+4}}}.$ 4.3.6.6. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}.$

4.3.6.7. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

4.3.6.8. $\int \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{\sqrt{1+x^2}}$.

4.3.6.9. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

4.3.6.10. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

4.3.6.11. $\int \frac{dx}{((1+x)\sqrt{x^2-2x+2}}$.

4.3.6.12. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

4.3.6.13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

4.3.6.14. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

4.3.6.15. $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-x-1}}$.

4.3.6.16. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

4.3.6.17. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

4.3.6.18. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

4.3.6.19. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

4.3.6.20. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1+x^2}}$.

4.3.6.21. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+4x+5}}$.

4.3.6.22. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+2}}$.

4.3.6.23. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

4.3.6.24. $\int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{9x-10-x^2}\right)^3}$.

4.3.6.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-\sqrt{x^2+2x+3}}}$.

4.3.6.26-misol. $\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechilishi. Bu integralni hisoblashda $\sqrt{x^2-x+1}=xt+1$ almashtirishni olish mumkin. Unda, $x=\frac{1+2t}{1-t^2}$, $dx=\frac{2(t^2+t+1)}{\left(1-t^2\right)^2}dt$ ekanligini hisobga olsak, berilgan integralni hisoblash t ga nisbatan ratsional bo‘lgan funksiyaning integralini hisoblashga keltiriladi, ya’ni:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx=$$

$$\int \frac{2t}{1-t^2}dt=-\ln\left|1-t^2\right|+C=-\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}\right)^2\right|+C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int((sqrt(x^2-x+1)-1)/(x*sqrt(x^2-x+1)),x)=
int((sqrt(x^2-x+1)-1)/(x*sqrt(x^2-x+1)),x);
```

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = \ln(x)+\operatorname{arctanh}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right).$$

4.3.7- masala. Binomial differensiallarni integrallash usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.7.1. $\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx.$ **4.3.7.2.** $\int x^{-2/3}\left(1+x^{2/3}\right)^{-1}dx.$

4.3.7.3. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$ **4.3.7.4.** $\int x^{1/3}\left(2+x^{2/3}\right)^{1/4}dx.$

4.3.7.5. $\int x^5\left(1+x^2\right)^{2/3}dx.$ **4.3.7.6.** $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-1/2}dx.$

4.3.7.7. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$ **4.3.7.8.** $\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$

4.3.7.9. $\int\frac{dx}{x^3(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{x})}.$ **4.3.7.10.** $\int x^3\left(1+x^2\right)^{1/2}dx.$

4.3.7.11. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$ **4.3.7.12.** $\int\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x^4})dx.$

4.3.7.13. $\int x^{-2/3}\left(1+x^{2/3}\right)^{-1}dx.$ **4.3.7.14.** $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

4.3.7.15. $\int x^{1/3}\left(2+x^{2/3}\right)^{1/4}dx.$ **4.3.7.16.** $\int x^5\left(1+x^2\right)^{2/3}dx.$

4.3.7.17. $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-1/2}dx.$ **4.3.7.18.** $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}dx$

4.3.7.19. $\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$ **4.3.7.20.** $\int x^3\left(1+x^2\right)^{1/2}dx.$

4.3.7.21. $\int\sqrt{x^3+x^2}\,dx.$ **4.3.7.22.** $\int x^{-1/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-1}dx.$

4.3.7.23. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$ **4.3.7.24.** $\int x^{1/3}\left(3+x^{1/3}\right)^{1/4}dx.$

4.3.7.25. $\int x^3\left(1+x^4\right)^{2/3}dx.$

4.3.4.26-misol. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ integralni hisoblang.

Yechilishi. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$, bunda $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $s=3$ $\frac{m+1}{n}=2$. Demak, ikkinchi holdagi almashtirishni, ya'ni $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, almashtirishni olamiz. Unda $x=\left(t^3-1\right)^4$, $dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt$,

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{3}{7}t^4\left(4t^3-7\right)+C=\frac{3}{7}(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^4(4(1+\sqrt[4]{x})-7)+C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
>
Int((1+(x)^1/4)^(1/3)/sqrt(x),x)=int((1+(x)^1/4)^
(1/3)/sqrt(x),x);
```

$$\int\frac{(1+x^{(1/4)})^{(1/3)}}{\sqrt{x}}dx=\frac{12(1+x^{(1/4)})^{(7/3)}}{7}-3(1+x^{(1/4)})^{(4/3)}.$$

4.3.8- masala. Trigonometrik funksiyalarni integrallash usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang:

4.3.8.1. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$. **4.3.8.2.** $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$.

4.3.8.3. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$. **4.4.3.8.4.** $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$.

4.3.8.5. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$. **4.3.8.6.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cos x}}$

4.3.8.7. $\int tg^7 xdx$. **4.3.8.8.** $\int ctg^6 x dx$.

4.3.8.9. $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$. **4.3.8.10.** $\int\frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$.

4.3.8.11. $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$. **4.3.8.12.** $\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

4.3.8.13. $\int\frac{dx}{\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)}$. **4.3.8.14.** $\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

4.3.8.15. $\int\frac{2tgx+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$. **4.3.8.16.** $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

4.3.8.17. $\int\frac{1}{\cos^4 x\sin^2 x}dx$. **4.3.8.18.** $\int ch^2 xdx$.

4.3.8.19. $\int ch^3 xdx$. **4.3.8.20.** $\int sh^2 x ch^2 xdx$.

4.3.8.21. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$. 4.3.8.22. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$.

4.3.8.23. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$. 4.4.3.8.24. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$.

4.3.8.25. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

4.3.8.21-misol. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechilishi. ([3], 1-q., 199–202-betlar; [9], 1-t., 9- bo'lim; [30], 4-bo'lim). Integral ostidagi ifodada $\sin x$ ni $-\sin x$ ga, $\cos x$ ni esa $-\cos x$ ga almashtirganimizda, integral ostidagi ifoda o'z ishorasini o'zgartirmaydi. Shuning uchun, bu integralda $t = tgx$ almashtirishni olish maqsadga muvofiq:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + t + C = tgx - ctgx + C = -2ctg2x + C.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
>
Int(1/((sin(x))^2*(cos(x))^2),x)=int(1/((sin(x))^2
*(cos(x))^2),x);
```

$$\int \frac{1}{\sin(x)^2 \cos(x)^2} dx = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \frac{2\cos(x)}{\sin(x)}.$$

4.3.9- masala. Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib, quyidagi aniq integralni hisoblang:

4.3.9.1. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$. 4.3.9.2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

4.3.9.3. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin x}$. 4.3.9.4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

4.3.9.5. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$. 4.3.9.6. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

4.3.9.7. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$. 4.3.9.8. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

4.3.9.9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$. 4.3.9.10. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

4.3.9.11. $\int_0^1\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx.$ **4.3.9.12.** $\int_2^9\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx.$

4.3.9.13. $\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}.$ **4.3.9.14.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}tg^4x\,dx.$

4.3.9.15. $\int_0^1\frac{dx}{4x^2+4x+5}.$ **4.3.9.16.** $\int_{-2}^{-1}\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx.$

4.3.9.17. $\int_2^3\frac{dx}{x^2-2x-8}.$ **4.3.9.18.** $\int_0^1\frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

4.3.9.19. $\int_3^4\frac{x^2+3}{x-2}dx.$ **4.3.9.20.** $\int_0^1\frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

4.3.9.21. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 3x}{\sin^3 3x}dx.$ **4.3.9.22.** $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

4.3.9.23. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin 2x}.$ **4.3.9.24.** $\int_{-2}^{-1}\frac{xdx}{(4+5x)^3}.$

4.3.9.25. $\int_3^2\frac{dx}{x^2-1}.$

4.3.9.26-misol. $\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ integralni hisoblang.

Yechilishi. ([2], 7- bo'lim; [3], 1-q., 246–247-betlar; [9], 1-t., 9-bo'lim; [30], 8- bo'lim). Integral ostidagi ifodaning shaklini almashtiramiz va

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C$$

formulaga asosan, boshlang'ich funksiyasini topib, so'ngra (4.12) Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib, aniq integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}=\int_1^e\frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x}=\operatorname{arctg}(\ln x)\Big|_1^e=\frac{\pi}{4}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int(1/(x*(1+(ln(x))^2)), x=1..exp(1))=
int(1/(x*(1+(ln(x))^2)), x=1..exp(1));
```

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln(x)^2)}dx = \frac{\pi}{4}.$$

4.3.10-masala. Aniq integrallarda o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash formulalaridan foydalanib, quyidagi aniq integralni hisoblang:

4.3.10.1. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$ **4.3.10.2.** $\int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$

4.3.10.3. $\int_1^2 \frac{\mathrm{arctg}x}{x}dx.$ **4.3.10.4.** $\int_1^2 \ln x dx.$

4.3.10.5. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$ **4.3.10.6.** $\int_0^\pi x\sin x dx.$

4.3.10.7. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$ **4.3.10.8.** $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

4.3.10.9. $\int_0^1 \arccos x dx.$ **4.3.10.10.** $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx.$

4.3.10.11. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx.$ **4.3.10.12.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x dx.$

4.3.10.13. $\int_1^n x^n \ln x dx.$ **4.3.10.14.** $\int_0^\pi e^x\cos^2 x dx.$

4.3.10.15. $\int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\sqrt{x}dx.$ **4.3.10.16.** $\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx dx.$

4.3.10.17. $\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx dx.$ **4.3.10.18.** $\int_1^3 \ln^3 x dx.$

4.3.10.19. $\int_1^e x^2\ln x dx.$ **4.3.10.20.** $\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \sin\sqrt{x}dx.$

4.3.10.21. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx.$ **4.3.10.22.** $\int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$

4.3.10.23. $\int_1^2 x\,\mathrm{arctg}x dx.$ **4.3.10.24.** $3\int_e^3 \ln x dx.$

4.3.10.25. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

4.3.10.26-misol. $\int_1^2 x\ln x dx$ integralni hisoblang.

Yechilishi. ([2], 7- bo'lim; [3], 1-q., 249–251-betlar; [9], 1-t., 9-bo'lim; [30], 8-bo'lim). $\ln x = u,\ xdx = dv$ deb olsak, u holda, $du = \frac{1}{x}dx,\ \frac{x^2}{2} = v$ bo'ladi. So'ngra (4.14) formuladan foydalanib, integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> Int((x*ln(x)), x=1..2)= int((x*ln(x)), x=1..2);
```

$$\int_1^2 x\ln(x)\,dx = -\frac{3}{4} + 2\ln(2).$$

4.3.11-masala. O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib, quyidagi funksiyaning ko'rsatilgan kesmadagi o'rta qiymatini toping:

4.3.11.1. $f(x) = \sin^2 x,\ [0;\ 2\pi]$

4.3.11.2. $f(x) = \frac{1}{1+e^x},\ [0;\ 2]$

4.3.11.3. $f(x) = 2x^2 + 1,\ [0;\ 1]$

4.3.11.4. $f(x) = \frac{1}{x}.\ [1;\ 2]$

4.3.11.5. $f(x) = 3^x - 2x + 3,\ [0;\ 2]$

4.3.11.6. $f(x) = \sqrt{x},\ [0;\ 100]$

4.3.11.7. $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x,\ [0;\ 2\pi]$

4.3.11.8. $f(x) = \sin x\cos(x+3),\ [0;\ 2\pi]$

4.3.11.9. $f(x) = 3x^4 + 1,\ [0;\ 1]$.

4.3.11.10. $f(x) = \cos x\cos(x+0.2),\ [0;\ \pi]$

4.3.11.11. $f(x) = \sqrt[3]{x+1},\ [0;\ 2]$

4.3.11.12. $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ [0;\ 2]$

Tengsizlikni isbotlang:

4.3.11.13. $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \frac{1}{10}.$

4.3.11.14. $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx < \frac{1}{20}.$

4.3.11.15. $0 < \int\limits_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20}dx < \frac{1}{100}$.

4.3.11.16. $1 < \int\limits_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx < 1+\frac{1}{42}$.

4.3.11.17. $0 < \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx < \ln 3$.

4.3.11.18. $\sin 1 < \int\limits_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2}dx < 2\sin 1$.

4.3.11.19. $\frac{1}{8} < \frac{\pi}{6}\int\limits_0^2 \frac{\sin\frac{\pi}{6}(x+1)}{(x+1)(3-x)}dx < \frac{1}{6}$.

4.3.11.20. $\frac{3}{100} < \int\limits_0^1 \frac{x^7}{\left(e^x+e^{-x}1\right)\sqrt{1+x^2}}dx < \frac{1}{20}$.

O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib, quyidagi funksiyaning ko'rsatilgan kesmadagi o'rta qiymatini toping:

4.3.11.21. $f(x)=\cos^2 x,\ [0;\ 2\pi]$.

4.3.11.22. $f(x)=\frac{1}{1+3^x},\ [0;\ 2]$.

4.3.11.23. $f(x)=4x^2+2,\ [0;\ 1]$.

4.3.11.24. $f(x)=\frac{1}{x+2},\ [1;\ 2]$.

4.3.11.25. $f(x)=3^x-5x+4,\ [0;\ 2]$.

4.3.11.26-misol. $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx < \frac{1}{20}$ tengsizlikni isbotlang.

Isboti. Ushbu $\frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^4}},\ x^{19}$ funksiyalar $[0,1]$ da uzluksiz va $\forall x \in [0,1]$ uchun $\frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^4}} < x^{19}$ tengsizlik o'rinli . Demak, aniq integralning xossasiga asosan,

$$\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int\limits_0^1 x^{19}dx < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx < \int\limits_0^1 x^{19}dx = \frac{1}{20}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4.3.12- masala. Aniq integraldan foydalanib, quyidagi berilgan chiziqlar bilan chegaralangan tekis figuraning yuzini toping:

4.3.12.1. $y=2^x,\ y=2x-x^2, x=0,\ x=2$.

4.3.12.2.. $y=\sin x,\quad y=0,\quad 0\le x\le \pi$.

4.3.12.3. $y=\frac{1}{x},\quad y=0,\quad x=a,\quad x=b,\quad a>b>0.$

4.3.12.4. $y=e^{-x},\quad x=0,\quad y=0,\quad x=a.$

4.3.12.5. $y=\frac{x^2}{2},\qquad y=2-\frac{3}{2}x.$

4.3.12.6. $y=2x-x^2,\qquad y=x.$

4.3.12.7. $y=x-\frac{\pi}{2},\quad y=\cos x,\quad x=0.$

4.3.12.8. $ax=y^2,\qquad ay=x^2.$

4.3.12.9. $y=x^2,\qquad x+y=2.$

4.3.12.10. $y=2x-x^2,\qquad x+y=0.$

4.3.12.11. $y=2^x,\quad y=2,\qquad x=0.$

4.3.12.12. $x=a(t-\sin t),\ y=a(l-\cos t)\ \ (0\le t\le 2),\ y=0.$

4.3.12.13. $x=2t-t^2,\qquad y=2t^2-t^3.$

4.3.12.14. $x=a(\cos t+t\cdot\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)\,(0\le t\le 2),\ x=a, y\le 0.$

4.3.12.15. $\tau=a(1+\cos\tau).$

4.3.12.16. $\tau=a\sin 3\tau.$

4.3.12.17. $\tau=3+2\cos\tau.$

4.3.12.18. $\tau=a(1+\cos\tau).$

4.3.12.19. $\tau^2=a^2\cos 2\tau.$

4.3.12.20. $\tau=\frac{P}{1-\cos\tau},\ \tau=\frac{\pi}{4},\ \tau=\frac{\pi}{2}.$

4.3.12.21. $y=3^x,\ y=3x-x^2, x=0,\ x=3.$

4.3.12.22.. $y=\sin 2x,\quad y=0,\quad 0\le x\le\pi.$

4.3.12.23. $y=\frac{1}{x-2},\quad y=0,\quad x=a,\quad x=b,\quad a>b>0.$

4.3.12.24. $y=e^{-2x},\quad x=0,\quad y=0,\quad x=4.$

4.3.12.25. $y=\frac{x^2}{4},\qquad y=4-\frac{3}{4}x.$

4.3.12.26-misol. $y^2=2px$ va $x^2=2py$ parabolalar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechilishi ([2], 7- bo'lim; [3], 1-q., 261–268-betlar; [9], 1-t., 10-bo'lim; [30], 8- bo'lim). Izlanayotgan yuza (4.15) formula orqali topiladi:

$$y=\frac{x^2}{2p},\quad y=\sqrt{2px}\,.$$

Bu parabolalarning kesishish nuqtasi M ning koordinatasi, ya'ni abssissasini topamiz. Buning uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechamiz va $x=2p$ ekanligi aniqlaymiz. U holda,

$$S=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{4}{3}p^2.$$

4.3.13- masala. Tenglamalari Dekart koordinatalar sistemasida, parametrik shaklda, qutb koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi egri chiziqlarning yoy uzunligini hisoblang:

4.3.13.1. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$.

4.3.13.2. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2.$

4.3.13.3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le 7{,}9.$

4.3.13.4. $y=\ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

4.3.13.5. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},\ \ 1/4\le x\le 1.$

4.3.13.6. $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 3.$

4.3.13.7. $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\ \ 0\le t\le\pi.\end{cases}$

4.3.13.8. $\begin{cases}x=3(2\cos t-\cos 2t)\\ y=3(2\sin t-\sin 2t,)\ \ 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

4.3.13.9. $\begin{cases}x=4(\cos t+t\sin t)\\ y=4(\sin t-t\cos t),\ \ 0\le t\le 2.\end{cases}$

4.3.13.10. $\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t),\\ y=e^t(\cos t-\sin t),\ \ 0\le t\le\pi.\end{cases}$

4.3.13.11. $\begin{cases}x=3(t-\sin t),\\ y=3(1-\cos t),\ \ \pi\le t\le 2\pi.\end{cases}$

4.3.13.12. $\begin{cases}x=3(\cos t+t\sin t),\\ y=3(\sin t-t\cos t),\ \ \ 0\le t\le\pi/3\end{cases}$

4.3.13.13. $\begin{cases}x=6\cos^3 t,\\ y=6\sin^3 t,\ \ 0\le t\le\pi/3\end{cases}$

4.3.13.14. $\begin{cases}x=6(\cos t+t\sin t),\\ y=6(\sin t-t\cos t),\ \ 0\le t\le\pi.\end{cases}$

4.3.13.15. $\begin{cases}x=8\cos^3 t,\\ y=8\sin^3 t,\ \ 0\le t\le\pi/6.\end{cases}$

4.3.13.16. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \quad \pi/2 \le t \le 2\pi/3. \end{cases}$

4.3.13.17. $\rho = 3\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

4.3.13.18. $\rho = \sqrt{2\varphi}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

4.3.13.19. $\rho = 2\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

4.3.13.20. $\rho = 5\varphi. \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

4.3.13.21. $y = \lg x, \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

4.3.13.22. $y = \dfrac{x^2}{4}, 1 \le x \le 2$.

4.3.13.23. $y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 7{,}9$.

4.3.13.24. $y = \ln \dfrac{2}{x}. \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

4.3.13.25. $y = 2 + \arcsin \sqrt{x}, \ 1/4 \le x \le 1$.

4.3.13.26-misol. Ushbu $\begin{cases} x = 20(t - \sin t), \\ y = 20(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan egri chiziqning (sikloidaning) yoy uzunligini toping.

Yechilishi. ([2], 7- bo‘lim; [3], 1-q., 271–282-betlar; [9], 1-t., 10- bo‘lim; [30], 6-bo‘lim). Avval $x = 20\ (t - \sin t)$, $y = 20\ (1 - \cos t)$ funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz: $x'(t) = 20(1 - \cos t)$, $y'(t) = 20 \sin t$. Unda,

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 20'^2(1 - \cos t)^2 + 20^2 \sin^2 t = 400(1 - \cos t)$$

bo‘lib, $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 20\sqrt{2(1 - \cos t)}$. (4.19) formulaga ko‘ra izlanayotgan egri chiziqning uzunligi,

$$l = \int_0^{2\pi} 20\sqrt{2(1 - \cos t)}dt$$

bo‘ladi. Bu ifodaaning o‘ng tomonidagi integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^{2\pi} 20\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 20\int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 40\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 80\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -80 \cdot \cos\frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 160.$$

4.3.14- masala. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklni, 1 – 10, 21–25 variantlarda Ox o'q atrofida, 11 – 20 variantlarda esa, Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping:

4.3.14.1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0.$

4.3.14.2.. $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0.$

4.3.14.3. $y=3\sin x,\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le \pi.$

4.3.14.4. $y=5\cos x,\ y=\cos x,\quad x=0,\quad x\ge 0.$

4.3.14.5. $y=\sin^2 x,\quad x=\pi/2,\quad y=0.$

4.3.14.6. $x=\sqrt[3]{y-2},\quad x=1,\quad y=1.$

4.3.14.7. $y=x^{\alpha},\quad y=0,\quad x=1.$

4.3.14.8. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\quad x=0.$

4.3.14.9. $y=2x-x^2,\ y=-x+2.$

4.3.14.10. $y=e^{1-x},\quad y=0,\ x=0,\quad x=1.$

4.3.14.11. $y=x^2,\quad y^2-x=0.$

4.3.14.12. $x^2+(y-2)^2=1.$

4.3.14.13. $y=1-x^2,\ x=0,\quad x=\sqrt{y-2},\quad x=1.$

4.3.14.14. $y=x^2,\quad y=1,\quad x=2.$

4.3.14.15. $y=x^3,\quad y=\sqrt{x}.$

4.3.14.16. $y=\sin(\pi x/2),\quad y=x^2.$

4.3.14.17. $y=\arccos(x/3),\quad y=\arccos x,\quad y=0.$

4.3.14.18. $y=\arcsin(x/5),\ y=\arcsin x,\quad y=\pi/2.$

4.3.14.19. $y=x^2,\ x=2,\ y=0.$

4.3.14.20. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\quad x=1.$

4.3.14.21. $y=-x^2+5x+4,\ y=0.$

4.3.14.22.. $4x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0.$

4.3.14.23. $y=2\sin x,\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le \pi.$

4.3.14.24. $y=3\cos x,\ y=\cos x,\quad x=0,\quad x\ge 0.$

4.3.14.25. $y=\cos^2 x,\quad x=\pi/2,\quad y=0.$

4.3.14.26-misol. Asoslarining radiuslari r va R, balandligi h bo'lgan kesik konusning hajmini toping.

Yechilishi. ([2], 7- bo'lim; [9], 1-t., 10- bo'lim; [30], 6- bo'lim). Masalada berilgan kesik konus yuqoridan $f(x)=r+\frac{R-r}{h}x,\quad (0\le x\le h)$ funksiyaning grafigi, yon tomonlardan $x=0,\quad x=h$ vertikal to'g'ri chiziqlar, pastdan $[0,h]$ kesma bilan chegaralangan $OABC$ trapetsiyani Ox

o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismdan iborat. (4.22) formuladan foydalanib, kesik konusning hajmini topamiz:

$$V=\pi\int_a^h f^2(x)dx,\quad V=\pi\int_0^h\left(r+\frac{R-r}{n}x\right)^2dx=\pi\int_0^h\left[r^2+2r\cdot\frac{R-r}{h}x+\left(\frac{R-r}{h}\right)^2x^2\right]dx=$$

$$=\pi\left[r^2x+2r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{(R-r)^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^h=$$

$$=\pi\left[r^2h+r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot h^2+\left(\frac{R-r}{h}\right)^2\cdot\frac{h^3}{3}\right]=$$

$$=\pi h(r^2+Rr-1^2+\frac{1}{3}(R^2-2Rr+r^2))=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).$$

Demak,

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).$$

5-MUSTAQIL ISH.
KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

Mavzular:

5.1. Evklid tekisligi va fazosi tushunchasi.
5.2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi.
5.3. R^m Evklid fazosida yaqinlashuvchi sonlar ketma-ketligi tushunchasi.
5.4. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti.
5.5. Takroriy limitlar.
5.6. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
5.7. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.
5.8. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi.
5.9. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
5.10. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchilik sharti.
5.11. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali.
5.12. Ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilasi.
5.13. Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradiyent.
5.14. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.
5.15. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi.
5.16. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi.

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA TEOREMALAR

5.1. Evklid tekisligi va fazosi tushunchasi

5.1-ta'rif. Agar m-o'lchovli koordinatalar fazosining ikkita $M'(x_1',x_2',\ldots,x_m')$, $M''(x_1'',x_2'',\ldots,x_m'')$ nuqtalari orasidagi masofa

$$\rho(M',M'')=\sqrt{(x_1''-x_1')^2+(x_2''-x_2')^2+\ldots+(x_m''-x_m')^2}$$

formula bo'yicha topilsa, u holda, m o'lchovli koordinatalar fazosi *m–o'lchovli Evklid fazosi* deyiladi va R^m kabi belgilanadi.

5.2-ta'rif. $M_0\in\{M\}\subset R^m$ *nuqtaning ε– atrofi* deb, markazi M_0 nuqtada radiusi ε ga teng bo'lgan m o'lchovli ochiq $\rho(M,M_0)<\varepsilon$ sharga aytiladi.

5.3-ta'rif. Agar M nuqtaning shunday ε – atrofi mavjud bo'lib, bu atrofning hamma nuqtalari $\{M\}$ to'plamga tegishli bo'lsa, M nuqta $\{M\} \subset R^m$ to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi.

5.4-ta'rif. Agar M^* nuqtaning ixtiyoriy ε atrofi nuqtalari ichida $\{M\}$ to'plamga tegishli ham, $\{M\}$ to'plamga tegishli bo'lmaganlari ham mavjud bo'lsa, M^* nuqta $\{M\} \subset R^m$ to'plamning *chegaraviy nuqtasi* deyiladi.

$\{M\}$ to'plamning barcha chegaraviy nuqtalardan iborat to'plam, $\{M\}$ to'plamning *chegarasi* deyiladi va $\partial\{M\}$ kabi belgilanadi.

5.5-ta'rif. Agar $\{M\} \subset R^m$ to'plamning har bir nuqtasi uning ichki nuqtasi bo'lsa, $\{M\}$ to'plam *ochiq to'plam* deyiladi.

5.6-ta'rif. Agar $\{M\} \subset R^m$ to'plamning chegarasi unga tegishli bo'lsa, $\{M\}$ *yopiq to'plam* deyiladi va u $\{\overline{M}\}$ kabi belgilanadi.

5.7-ta'rif. Agar shunday r son topilib, $\{M\}$ to'plamning barcha nuqtalari shu $\rho(x,0) < r$ sharga tegishli bo'lsa, $\{M\}$ – *chegaralangan to'plam* deyiladi.

5.8-ta'rif. Agar $A \in R^m$ nuqtaning ixtiyoriy ε– atrofida $\{M\}$ to'plamning A dan farqli nuqtasi mavjud bo'lsa, A nuqta $\{M\}$ to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

$L = \{M(x_1, x_2, ..., x_m) : x_1 = \varphi(t),\ x_2 = \varphi_2(t), ..., x_m = \varphi_m(t)\ \}$ to'plamga (bunda, $\varphi_i(t)\left(i = \overline{1,m}\right)$ lar $[\alpha, \beta]$da uzluksiz funksiyalar) R^m fazoda *uzluksiz chiziq* deyiladi. $A(\varphi_1(\alpha), ..., \varphi_m(\alpha))$ va $(\varphi_1(\beta), ..., \varphi_m(\beta))$ nuqtalar L *chiziqning uchlari* deyiladi.

$\Gamma = \{M(x_1, x_2, ..., x_m) : x_1 = x_1^0 + \lambda_1 t,\ x_2 = x_2^0 + \lambda_2 t, ..., x_m = x_m^0 + \lambda_m t; -\infty < t < \infty\}$ (bunda, $x_1^0, ..., x_m^0,\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – sonlar) to'plamga R^m fazoda *to'g'ri chiziq* deyiladi, bu to'g'ri chiziq $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ nuqtadan o'tadi(M_0 nuqta $t = 0$ga mos keladi).

5.9-ta'rif. Agar $\{M\} \subset R^m$ to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasini shu to'plamda butunlay yotadigan uzluksiz chiziq bilan birlashtirish mumkin bo'lsa, $\{M\}$ *bog'lamli to'plam* deyiladi. Ochiq bog'lamlm to'plamni odatda, *soha* ham deb ataladi.

5.2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi

$\{M\} \subset R^m$ to'plam berilgan bo'lsin.

5.10-ta'rif. $\{M\}$ to'plamning har biri $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtasiga biror qonun yoki qoida yordamida biror u son $(u \in R)$ mos qo'yilgan bo'lsa, $\{M\}$ to'plamda *m–o'zgaruvchili funksiya aniqlangan* deb ataladi va u $u = f(M)$ kabi belgilanadi. Bunda $\{M\}$ – funksiyaning aniqlanish sohasi, $\{u\}$ to'plam esa, *qiymatlar to'plami* deyiladi.

5.3. R^m Evklid fazosida yaqinlashuvchi sonlar ketma-ketligi tushunchasi

N natural sonlar to'plami va R^m fazo berilgan bo'lsin. Har bir $n\,(n \in N)$ ga R^m fazoning biror muayyan $M_n = M_n\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_m^{(1)}\right)$ nuqtasi mos qo'yilgan bo'lsin, ya'ni:

1. $M_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_m^{(1)}\right)$,
2. $M_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_m^{(2)}\right)$,

....

n. $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right)$

....

natijada, hosil bo'lgan $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ tartiblangan nuqtalar to'plamiga R^m fazoda *sonlar ketma-ketligi aniqlangan* deyiladi va u qisqacha $\{M_n\}\left(M_n \subset R^m\right)$ kabi belgilanadi.

R^m fazoda

$$M_1, M_2, ..., M_n, ... \tag{5.1}$$

nuqtalar ketma-ketligi va $A = A(a_1, a_2, ..., a_m) \in R^m$ nuqta berilgan bo'lsin.

5.11-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $n_0 \in N$ topilsaki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\rho(M_n, A) < \varepsilon \tag{5.2}$$

tengsizlik bajarilsa, A nuqta $\{M_n\}$ *ketma-ketlikning limiti* deb ataladi va $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$ yoki $n \to \infty$ da $M_n \to A$ kabi belgilanadi.

Agar (5.1) ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deb ataladi. Limit ta'rifidagi shartni qanoatlantiruvchi A mavjud bo'lmasa, $\{M_n\}$ ketma-ketlik *limitga ega emas* deyiladi, ketma-ketlikning o'zi esa, *uzoqlashuvchi* deb ataladi. Ketma-ketlikning limiti ta'rifidagi ε

ixtiyoriy musbat son bo'lib, izlanayotgan n_0 $(n_0 \in N)$ esa, shu ε ga bog'liq ravishda topiladi, shuning uchun, ba'zi hollarda, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ kabi yoziladi.

1^0. Agar $\{M_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagonadir.

Agar $\{M_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan to'plam chegaralangan bo'lsa, $\{M_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan ketma-ketlik* deb ataladi.

5.1-lemma. R^m fazoda $\{M_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan bo'lish uchun, bu ketma-ketlik koordinatalaridan iborat $\{x_1^{(n)}\},\{x_2^{(n)}\},\ldots,\{x_m^{(n)}\},\ldots$ sonlar ketma-ketliklarining har biri chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

2^0. Agar $\{M_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

3^0. Agar $\{M_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti A bo'lsa, u holda, $\{kM_n\}$ $(k \in R)$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti kA ga teng bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} kM_n = k\lim\limits_{n\to\infty} M_n = kA$.

4^0. Agar $\{M_n\}$ va $\{N_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning limitlari, mos ravishda, A va B bo'lsa, u holda, $\{M_n \pm N_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning limiti $A \pm B$ ga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\lim_{n\to\infty}(M_n \pm N_n) = \lim_{n\to\infty} M_n \pm \lim_{n\to\infty} N_n = A \pm B$$

R^m fazoda $\{M_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

5.12-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $n_0 \in N$ topilib, barcha $n > n_0$, $p > n_0$ $(p \in N)$lar uchun $\rho(M_n, M_p) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{M_n\}$ ketma-ketlik *fundamental ketma-ketlik* deb ataladi.

5.1-teorema. R^m fazoda $\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ ketma-ketlikning $A(a_1, a_2, \ldots a_m) \in R^m$ ga intilishi ($M_n \to A$ $(n \to \infty)$) uchun, $n \to \infty$ da bir yo'la $x_1^{(n)} \to a_1, \ldots, x_m^{(n)} \to a_m$ bo'lishi zarur va yetarli.

5.2-teorema. R^m fazoda $M_n = M_n(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$ ketma-ketlikning fundamental bo'lishi uchun, uning koordinatalaridan iborat $\{x_1^{(n)}\},\{x_2^{(n)}\},\ldots,\{x_m^{(n)}\}$ ketma-ketliklardan har birining fundamental ketma-ketlik bo'lishi *zarur va yetarli*.

5.3-teorema(Koshi prinsipi). $\{M_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning fundamental ketma-ketlik bo'lishi zarur va yetarli.

R^m fazoda $M_n = M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right)$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ $(n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\ n_k \in N,\ k = 1,2,..)$ nomerli hadlaridan tashkil topgan, ushbu $M_{n_1}, M_{n_2}, ..., M_{n_k}, ...$ $\left(M_{n_k} \in R^m,\ k = 1,2,...\right)$ ketma-ketlik, berilgan ketma-ketlikning *qismiy ketma-ketligi* deyiladi va u $\{M_{n_k}\}$ kabi belgilanadi.

5.4-teorema. Agar $\{M_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti A $(A \in R^m)$ bo'lsa, u holda, bu ketma-ketlikning har bir $\{M_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning limiti ham A ga teng bo'ladi.

5.1-eslatma. Ketma-ketlik qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'lishidan, berilgan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

5.5-teorema (Bolsano-Veyershtrass). Har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

5.4. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti

$y = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin. A nuqta $\{M\}$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

5.13-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar $\{M\}$ to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va A ga intiluvchi har qanday $\{M_n\}$ $(M_n \neq A,\ n = 1,2,...)$ ketma-ketlik olinganda ham funksiyaning unga mos kelgan $\{f(M_k)\}$ qiymatlar ketma-ketligi hamma vaqt yagona B (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu B songa $f(M)$ funksiyaning A nuqtadagi(yoki $M \to A$ dagi) *limiti* deb ataladi va u $\lim\limits_{M \to A} f(M) = B$ yoki $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = B$ yoki $M \to A$ da

$f(M) \to B$ kabi belgilanadi.

5.14-ta'rif (Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun $\exists\delta>0$ topilsaki, ushbu $0<\rho(M,A)<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $M\in\{M\}$ nuqtalarda $|f(M)-B|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, B son $f(M)$ funksiyaning A nuqtadagi ($M\to A$ dagi) *limiti* deb ataladi.

5.15-ta'rif (Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun, $\exists\delta>0$ mavjud bo'lib, $0<\rho(M,A)<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $M\in\{M\}$ nuqtalarda

$$|f(M)|>\varepsilon \quad (f(M)>\varepsilon; f(M)<-\varepsilon)$$

bo'lsa, $f(M)$ funksiyaning A nuqtadagi ($M\to A$ dagi) limiti $+\infty$ $(+\infty;-\infty)$ deyiladi.

$f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, ∞ esa, bu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

5.16-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar $\{M\}$ to'plamining nuqtalaridan tuzilgan har qanday $\{M_n\}$ ketma-ketlik uchun $M\to\infty$ da unga mos kelgan $\{f(M_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona B songa intilsa, shu B songa $f(M)$ funksiyaning $M\to\infty$ *dagi limiti* deb ataladi va $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)=B$ kabi belgilanadi.

5.17-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\exists E>0$ topilsaki, ushbu $\rho(M,O)>E$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $M\in\{M\}$ nuqtalarda $|f(M)-B|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, B $f(M)$ funksiyaning $M\to\infty$ dagi *limiti* deb ataladi va $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)=B$ yoki $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ x_2\to\infty\\ \cdots\\ x_m\to\infty}} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=B$ kabi belgilanadi.

5.6-teorema. $f(M)$ va $g(M)$ funksiyalar, mos ravishda, A $(A\in R^m)$ nuqtada B va C limitlarga ega bo'lsa, u holda, $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$ va $\frac{f(M)}{g(M)}$ funksiyalar ham A nuqtada ($\frac{f(M)}{g(M)}$ da $C\neq 0$), mos ravishda, $B\pm C$, $B\cdot C$, $\frac{B}{C}$ limitlarga ega bo'ladi.

5.2-eslatma. $f(M)$ va $g(M)$ funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining limitiga ega bo'lishidan, bu funksiyalarning har birining limitiga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

$\alpha(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, A $(A\in R^m)$ nuqta esa, shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

5.18-ta'rif. Agar $M \to A$ da $\alpha(M)$ funksiyaning limiti nol bo'lsa, ya'ni:

$$\lim_{M \to A} \alpha(M) = 0$$

bo'lsa, u holda, $\alpha(M)$ funksiya $M \to A$ da *cheksiz kichik funksiya* deb ataladi.

Cheksiz kichik funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar $M \to A$ da $\alpha(M)$ va $\beta(M)$ funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, u holda, ularning yig'indisi $\alpha(M) + \beta(M)$ ham A nuqtada cheksiz kichik bo'ladi.

2^0. Agar $M \to A$ da $\alpha(M)$ funksiya cheksiz kichik bo'lib, $\beta(M)$ funksiya esa chegaralangan bo'lsa, u holda, $\alpha(M)\beta(M)$ ham, cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

5.19-ta'rif. Agar $\{M\}$ to'plamda berilgan $h(M)$ funksiya uchun $\lim\limits_{M \to A} h(M) = \infty$ bo'lsa, $h(M)$ funksiya $M \to A$ da cheksiz katta funksiya deb ataladi.

3^0. Agar $M \to A$ da $\alpha(M)$ $(\alpha(M \neq 0)$ cheksiz kichik funksiya bo'lsa, u holda, $\dfrac{1}{\alpha(M)}$ funksiya $M \to A$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

4^0. Agar $M \to A$ da $h(M)$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'lsa, $\dfrac{1}{h(M)}$ funksiya $M \to A$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

$u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin.

5.7-teorema (Koshi kriteriysi). $u = f(M)$ funksiyaning chekli limitga ega bo'lishi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, ushbu $0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $M', M'' \in \{M\}$ nuqtalarda $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

5.5. Takroriy limitlar

$u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ nuqta $\{M\}$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Berilgan funksiyaning (qolgan barcha argumentlarini tayinlab) $x_1 \to a_1$ dagi

$$\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

limitini qaraylik, bu limit $x_2, x_3, \ldots, x_m$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi:

$$\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

Endi $\varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)$ funksiyaning (qolgan barcha argumentlarini tayinlab) $x_2 \to a_2$ dagi

$$\lim_{x_1 \to a_1} \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

limitini qaraylik, bu limit $x_3, x_4, \ldots, x_m$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi:

$$\lim_{x_2 \to a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \ldots, x_m).$$

Xuddi shunday, birin-ketin, $x_3 \to a_3, x_4 \to a_4, \ldots, x_m \to a_m$ da limitga o'tib,

$$\lim_{x_m \to a_m} \lim_{x_{m-1} \to a_{m-1}} \ldots \lim_{x_2 \to a_2} \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

limitni hosil qilamiz. Bu limit $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiyaning *takroriy limiti* deb ataladi. $u = f(M)$ funksiya

$$\{M\} = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1 - x_1^0| < d_1, |x_2 - x_2^0 < d_2|\}$$

to'plamda berilgan bo'lsin.

5.8-teorema. Agar: 1) $M(x_1, x_2) \to M_0(x_1^0 \cdot x_2^0)$ da $f(x_1, x_2)$ funksiyaning karrali limiti mavjud:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2) = B;$$

2) Har bir tayinlangan x_1 da $\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$ limit, har bir tayinlangan x_2 da $\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_2)$ limit mavjud bo'lsa, u holda, $\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$ va $\lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$ takroriy limitlar mavjud bo'ladi va ular B ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = B.$$

5.6. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

$u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, $A = A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqta - $\{M\}$ to'plamning limit nuqtasi va $A \in \{M\}$ bo'lsin.

5.20-ta'rif. Agar $M \to A$ da $u = f(M)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(A) \text{ yoki } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

bo'lsa, u holda, $f(M)$ funksiya *A nuqtada uzluksiz* deb ataladi, $A = \lim_{M \to A} M$ bo'lgani uchun, funksiyaning uzluksizlik shartini,

$$\lim_{M \to A} f(M) = f\left(\lim_{M \to A} M\right) \qquad (5.3)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

$\{M\}$ to'plamning funksiya uzluksizligi shartini qanoatlantirmaydigan nuqtalari funksiyaning *uzilish nuqtalari* deyiladi.

5.21-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar $\{M\} \subset R^m$ to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, $A \in \{M\}$ ga intiluvchi har qanday $\{M_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham, unga mos kelgan $\{f(M_n)\}$ ketma-ketlik, hamma vaqt $f(A)$ ga teng bo'lsa, $f(M)$ funksiya *A nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

5.22-ta'rif. (Koshi ta'rifi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, ushbu $\rho(M, A) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $M \in \{M\}$ nuqtalarda

$$|f(M) - f(A)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(M)$ funksiya *A nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

Ushbu $\Delta u = f(M) - f(A)$ ayirmaga $f(M)$ funksiyaning A nuqtadagi *orttirmasi yoki to'liq orttirmasi* deyiladi.

$f(M)$ funksiyaning A nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun,

$$\lim_{M \to A} \Delta u = \lim_{M \to A} \Delta f = \lim_{M \to A} (f(M) - f(A)) = 0 \qquad (5.4)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $f(M)$ funksiya $\{M\}$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda, $f(M)$ funksiya $\{M\}$ *to'plamda uzluksiz* deyiladi.

Agar $\Delta x_k \to 0$ da funksiyaning $\Delta x_k f$ xususiy orttirmasi ham nolga intilsa, ya'ni $\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta x_k f = 0$ bo'lsa, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nuqtada x_k *o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz* deb ataladi.

5.3-eslatma. Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \{M\}$ nuqtada (bir yo'la) uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada har bir o'zgaruvchisi bo'yicha ham uzluksiz bo'ladi, lekin funksiyaning biror nuqtada har bir o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy uzluksiz bo'lishidan, uning shu nuqtada (bir yo'la) uzluksiz bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

5.7. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

$u = f(M)$ va $v = g(M)$ funksiyalar $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin. $A \in R^m$ nuqta esa $\{M\}$ to'plamning limit nuqtasi bo'lib, $A \in \{M\}$.

5.9-teorema. Agar $f(M)$ va $g(M)$ funksiyalar A nuqtada uzluksiz bo'lsa, $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ hamda $\dfrac{f(M)}{g(M)} (g(A) \neq 0)$ funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

5.4-eslatma. Ikkita funksiya yig'indisi, ayirmasi, kupaytmasi va nisbati uzluksizligidan ularning har birining uzluksizligi har doim kelib chiqavermaydi.

5.5-eslatma. Yuqoridagi teorema qo'shiluvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli bo'ladi.

5.10-teorema. Agar $\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ funksiyalarning har biri $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiya esa, $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ nuqtaga mos

$$M_0(x_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)(x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, \ldots, t_k^0), \ldots, x_m^0 = \varphi_n(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0))$$

nuqtada uzluksiz bo'lsa, $u = F(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ murakkab funksiya $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning lokal xossalari. $u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin. Bu to'plamdan $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \{M\}$ nuqtani olib, uning yetarli kichik atrofini qaraymiz.

1^0. Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda, M_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(M)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

2^0. Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(M_0) > 0$ $(f(M) < 0)$ bo'lsa, M_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi M nuqtalarda ham $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$ bo'ladi.

3^0. Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, M_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi ixtiyoriy $M_1 \in \{M\}$, $M_2 \in \{M\}$ nuqtalar uchun $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Uzluksiz bo'lgan funksiyalarning global xossalari.

5.11-teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). $u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ bog'lamli to'plamda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya to'plamning ikkita $A(a_1,a_2,...,a_m)\in\{M\}$, $B(b_1,b_2,...,b_m)\in\{M\}$ nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda, shunday $C(c_1,c_2,...,c_m)\in\{M\}$ nuqta topiladiki, shu nuqtada funksiya nolga aylanadi, ya'ni $f(C)=f(c_1,c_2,...,c_m)=0$.

5.12-teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ bog'lamli to'plamda berilgan va uzluksiz bo'lib, $\{M\}$ to'plamning ikkita $A(a_1,a_2,...,a_m)$, $B(b_1,b_2,...,b_m)$ nuqtasida $f(A)\neq f(B)$ bo'lsa, u holda, $f(A)$ va $f(B)$ lar orasida $C(c_1,c_2,...,c_m)$ olinsa ham $\{M\}$ to'plamda shunday $C(c_1,c_2,...,c_m)$ nuqta topiladiki, $f(C)=f(c_1,c_2,...,c_m)=C$ bo'ladi.

5.13-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$–chegaralangan yopiq to'plamda berilgan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu $\{M\}$ to'plamda chegaralangan bo'ladi.

5.14-teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(M)$ funksiya chegaralangan yopiq $\{M\}\subset R^m$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga yerishadi.

5.8. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi

$f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin.

5.23-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun, shunday $\delta>0$ topilsaki, $\{M\}$ to'plamning $\rho(M',M'')<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall M',M''\in\{M\}$ nuqtalarida

$$|f(M')-f(M'')|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(M)$ funksiya $\{M\}$ to'plamda *tekis uzluksiz* deyiladi.

5.6-eslatma. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifidagi $\delta>0$ son faqat $\varepsilon>0$ songa bog'liq bo'ladi.

5.15-teorema (Kantor teoremasi). Agar $f(M)$ funksiya chegaralangan yopiq to'plamda berilgan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

5.9. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari

$u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin. Bu to'plamdan $M(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtani olamiz va uning x_k argumentiga orttirma beramiz (qolgan argumentlarini o'zgarmas deb hisoblaymiz). Berilgan $M(x_1, x_2, \ldots x_m)$ nuqtada ushbu

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\Delta x_k} \tag{5.5}$$

nisbatni qaraymiz, bunda $M(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in \{M\}$.

5.24-ta'rif. Agar $\Delta x_k \to 0$ da (5.5) nisbatning limiti mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiyaning $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtadagi x_k argumenti bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_k}, \ \frac{\partial f}{\partial x_k}, \ U'_{x_k}, \ f'_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ f'_{x_k}$$

kabi belgilarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}.$$

5.7-eslatma. Berilgan nuqtada funksiyaning hamma xususiy hosilalarining mavjudligidan, uning shu nuqtada uzluksizligi kelib chiqaravermaydi.

5.10. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchiligi sharti

$u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin. Ushbu $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ orttirmaga $u = f(M)$ funksiyaning $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi deyiladi.

5.25-ta'rif. Agar $u = f(M)$ funksiyaning $M(x_1, x_2, \ldots x_m)$ nuqtadagi to'liq orttirmasini

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m, \tag{5.6}$$

(bunda, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ lar $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ larga bog'liq bo'lmagan o'zgarmaslar, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ lar esa $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ larga bog'liq va $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ da $\alpha_1 \to 0, \alpha_2 \to 0, \ldots, \alpha_m \to 0$ $(\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots \Delta x_m = 0)$ bo'lganda $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ deb olinadi) ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(M)$ funksiya $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi. (5.6) ni ushbu

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m + 0(\rho) \tag{5.7}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bunda, $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$. (5.6) va (5.7) shartlar o'zaro ekvivalent shartlardir.

5.16-teorema. Agar $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiyaning hamma argumentlari bo'yicha xususiy hosilalari mavjud va $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = A_1 (i = 1,2,...,m)$ bo'ladi.

5.1-natija. Agar $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda, (5.7) differensiallanuvchanlik shartini

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + 0(\rho) \qquad (5.7')$$

ko'rinishda yozish mumkin.

5.2-natija. Agar $u = f(M)$ funksiya M nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, uning to'liq orttirmasining (5.6) yoki (5.7) shaklida tasvirlanishi yagonadir. Agar $u = f(M)$ funksiya $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

5.17-teorema. Agar $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ nuqtaning biror atrofda hamma argumentlari bo'yicha xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalar M_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda, berilgan funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

5.11. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali

$u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin, bu funksiya $M(x_1, x_2, ..., x_m) \in \{M\}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, $u = f(M)$ funksiyaning Δu orttirmasi uchun (5.6) yoki (5.7 $'$) formula o'rinli bo'ladi:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + ... + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_m\Delta x_m .$$

5.26-ta'rif. $u = f(M)$ funksiya orttirmasi Δu ning $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ larga nisbatan chiziqli bosh qismiga, $u = f(M)$ funksiyaning M nuqtadagi differensiali (to'liq differensiali) deb ataladi va du, df yoki $df(x_1, \ ,x_m)$ kabi belgilanadi: $du = A_1\Delta x_1 + ... + A_m\Delta x_m$.

5.16- teoremani e'tiborga olib, funksiyaning diffensialini

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

5.12. Ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilasi

$u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_1,x_2,\dots,x_m$ o'zgaruvchilarning har biri o'z navbatida $t_1,t_2,\dots,t_k$ o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida $\{N\}\subset R^k$ to'plamda berilgan funksiyalar bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\varphi_1(t_1,t_2,\dots t_k)\\ x_2&=\varphi_2(t_1,t_2,\dots t_k)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_m&=\varphi_m(t_1,t_2,\dots t_k)\end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Bunda, $N(t_1,t_2,\dots,t_m)\in\{N\}$ bo'lganda, unga mos kelgan $M(x_1,x_2,\dots x_m)\in\{M\}$ bo'lsin. Natijada, ushbu

$$u=f(\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_k),\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_k),\dots,\varphi_m(t_1,t_2,\dots,t_k))$$

murakkab funksiyaga ega bo'lamiz.

5.18-teorema. Agar (5.8) fnksiyalarning har biri $N_0(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0)\in\{N\}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $y=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ funksiya esa, unga mos

$M_0(x_1^0,x_2^0,\dots x_k^0)\in\{M\}$ $\left(x_1^0=\varphi_1(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0),\ x_2^0=\varphi_2(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0),\dots,x_m^0=\varphi_m(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0)\right)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda, $f(\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_k),\dots,\varphi_m(t_1,t_2,\dots,t_k))$ murakkab funksiya ham $N_0(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va uning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_k}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

formulalar orqali topiladi.

5.8-eslatma. Xususiy holda, (5.8) dagi funksiyalarning har biri faqat bitta t ga bog'liq bo'lsa, u holda, biz faqat t ga bog'liq bo'lgan $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $x_i=\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,m}$ murakkab funksiyaga ega bo'lamiz. Bu murakkab funksiyaning hosilasi

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{dx_m}{dt}$$

formula bo'yicha topiladi.

5.13. Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradiyent

Ko'p o'zgaruvchili $u=f(M)$ funksiyaning $\left(M(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m,\ u\in R\right)$ xususiy hosilalari ham bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi kabi ekanligini e'tiborga olib, bu $\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_m}$ funksiyalar ham $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning mos ravishda $Ox_1,Ox_2,...,Ox_m$ o'qlar bo'yicha R^m da o'zgarish tezligini ifodalaydi deb qarash mumkin. $\{M\}\subset R^3$ to'plamda ixtiyoriy $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani olib, bu nuqta orqali o'tuvchi, yo'nalishi $\bar{r}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ vektor yo'nalishga mos kelgan $\bar{\ell}$ yo'nalishni qaraylik. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtaga yaqin $\bar{\ell}$ yo'nalishda ixtiyoriy o'zgaruvchi $M(x;y;z)$ nuqtani olamiz $(M\in\{M\})$. M_0M kesma $\{M\}$ to'plamga tegishli, unda,

$$\frac{x-x_0}{\rho(M_0,M)}=\cos\alpha,\quad \frac{y-y_0}{\rho(M_0,M)}=\cos\beta,\quad \frac{z-z_0}{\rho(M_0,M)}=\cos\gamma$$

5.27-ta'rif. Agar $M(x,y,z)$ nuqta $\bar{\ell}$ yo'nalgan to'g'ri chiziq bo'ylab $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtaga intilganda $(M\to M_0)$ ushbu

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho(M_0,M)}=\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho((x_0,y_0,z_0),(x,y,z))}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x,y,z)=f(M)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadagi $\bar{\ell}$ *yo'nalish bo'yicha hosilasi* deb ataladi va u

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \ell}\ \text{yoki}\ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \ell}$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho(M_0,M)}.$$

5.19-teorema. Agar $u=f(x,y,z)$ funksiya ochiq $\{M\}\subset R^3$ to'plamda berilgan bo'lib, u $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\{M\}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda, funksiya shu nuqtada har qanday $\bar{\ell}$ yo'nalish bo'yicha hosilaga ega bo'ladi va bu hosila, ushbu

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \ell}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \ell}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

formula orqali topiladi.

5.9-eslatma. Funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lmasa ham, u shu nuqtada biror yo'nalish bo'yicha va hatto har qanday yo'nalish bo'yicha hosilaga ega bo'lishi ham mumkin.

5.28-ta'rif. Komponentalari (koordinatalari) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ bo'lgan vektorga $u = f(x,y,z)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *nuqtadagi gradiyenti* deb ataladi va u $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ kabi belgilanadi, bunda $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ xususiy hosilalar $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada hisoblangan.

5.14. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

$u = f(M)$ funksiya $\{M\} \subset R^m$ ochiq to'plamda berilgan bo'lib, uning har bir $M(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtasida $f'_{x_1}, f'_{x_2},..., f'_{x_m}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Bu xususiy hosilalar, o'z navbatida, $x_1,x_2,...,x_m$ o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida $\{M\}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1,2,...,m)$ funksiya ham biror $M \in \{M\}$ nuqtada x_k argument bo'yicha xususiy hosilaga ega bo'lishi mumkin. Bu x_k argument bo'yicha xususiy hosila–berilgan $u = f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilasi deb ataladi va u $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$, $f^{(2)}_{x_k x_i}$, $u^{(2)}_{x_k x_i}$ $(i = 1,2,...,m;\ k = 1,2,...,m)$ kabi belgilanadi, bunda $i \neq k$ bo'lsa, u holda, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ xususiy hosilaga *aralash xususiy hosila* deyiladi, $k = i$ bo'lganda $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} = f''_{x_k x_k}$ kabi yozish o'rniga, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k^2}$ kabi yoziladi. Xuddi shunday, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi, va xokazo, n- tartibli xususiy hosilalari ham aniqlanadi. $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $x_{i_1}, x_{i_2},...,x_{i_{n-1}}$ argumentlari bo'yicha $(n-1)$ – tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Bu $(n-1)$ – tartibli xususiy hosilalar ham $M(x_1,x_2,...,x_m) \in \{M\}$ nuqtada x_{i_n} argument bo'yicha xususiy hosilaga ega bo'lsin. Bu hosila – $u = f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning $x_{i_1}, x_{i_2},...,x_{i_n}$ argumentlar bo'yicha M nuqtadagi *n–tartibli xususiy hosilasi* deyiladi. Shunday qilib $x_{i_1}, x_{i_2},...,x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ argumentlar bo'yicha n–tartibli xususiy hosila,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}},\ldots,\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_{n-1}}\ldots\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}\right)$$

kabi yoziladi. Agar $i_1,i_2,\ldots,i_n$ indekslarning hammasi birdaniga bir-biriga teng bo'lmasa, u holda, $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\ldots\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}$ xususiy hosila *n-tartibli aralash xususiy hosila* deyiladi.

5.20-teorema. $u=f(x,y)$ funksiya $\{M\}\subset R^2$ ochiq to'plamda aniqlangan bo'lib, shu to'plamda $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Agar aralash hosilalar $M_0(x_0,y_0)\in\{M\}$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda, shu nuqtada

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

tenglik o'rinli.

5.21-teorema. $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ ochik to'plamda aniqlangan bo'lib, bu to'plamda mumkin bo'lgan hamma $(n-1)$ – tartibgacha xususiy hosilalarga va n–tartibli aralash hosilaga ega bo'lib, bu hosilalar $\{M\}$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda, ixtiyoriy n–tartibli aralash hosila, hosilani topish tartibiga bog'liq bo'lmaydi.

$u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ ochiq to'plamda berilgan bo'lib, $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)\in\{M\}$ bo'lsin. $u=f(M)$ funksiya $\{M\}$ to'plamda $f'_{x_1}, f'_{x_2},\ldots,f'_{x_m}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Agar $f'_{x_1}, f'_{x_2},\ldots,f'_{x_m}$ funksiyalar M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, $u=f(M)$ funksiya M_0 *nuqtada ikki marta differensiallanuvchi* deb ataladi.

Agar $u=f(M)$ funksiya $\{M\}$ to'plamda $(n-1)$ – tartibgacha xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu xususiy hosilalar M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, $u=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada *n marta differensiallanuvchi* deb ataladi.

5.22-teorema. Agar ochiq $\{M\}\subset R^m$ to'plamda $u=f(M)$ funksiyaning barcha n–tartibli xususiy hosilalari mavjud va $M_0\in\{M\}$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $u=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada *n marta differensiallanuvchi* bo'ladi.

$u=f(M)$ funksiya $M\in\{M\}$ nuqtada ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. $u=f(M)$ funksiyaning M nuqtadagi differensiali $df(M)$ ning differensiali, berilgan $u=f(M)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deb ataladi va $d^2f=d(df)$ kabi belgilanadi.

$u=f(M)$ funksiyaning M nuqtadagi $(n-1)$-tartibli differensiali $d^{n-1}u$ ning differensialiga, berilgan $u=f(M)$ funksiyaning n – *tartibli differensiali* deyiladi va $d^n u=d(d^{n-1}u)$ kabi belgilanadi. Simvolik ravishda funksiyaning n–tartibli differensiali

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u$$

kabi yoziladi.

5.15. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi

$u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lsin. $u=f(M)$ funksiyaning $M\in\{M\}$ nuqtadagi k-tartibli differensialini $d^k u\big|_M$ orqali belgilaymiz.

5.23-teorema. $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_3)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$ nuqtaning $(M_0\in\{M\})$ biror $U_\delta(M_0)$ atrofida $n+1$ marta differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, berilgan funksiyaning $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ to'liq orttirmasi M_0 nuqtada quyidagicha tasvirlanadi:

$$\Delta u=\;du\big|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2u\big|_{M_0}+\ldots+\frac{1}{n!}d^n u\big|_{M_0}+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u\big|_N \tag{5.9}$$

bunda, $N-U_\delta(M_0)$ atrofdagi $M(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ nuqtaga bog'liq bo'lgan biror nuqta $d^k u\big|_{M_0}$ va $d^{n+1}u\big|_N$ ifodalarda qatnashuvchi dx_i lar $\Delta x_i=x_i-x_i^0$ ga teng. (5.9) formulaga $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ funksiyaning *Teylor formulasi* deb ataladi.

5.24-teorema. $u=f(M)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$ nuqtaning $(M_0\in\{M\})$ biror $u_\delta(M_0)$ atrofida berilgan va $n-1$ $(n\ge 1)$ marta differensialanuvchi bo'lib, $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$ nuqtada n marta differensialanuvchi bo'lsin. U holda, $u_\delta(M_0)$ atrofidagi ixtiyoriy M nuqtada quyidagi:

$$f(M)=f(M_0)+\frac{1}{1!}\,du\big|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2u\big|_{M_0}+\ldots+\frac{1}{n!}d^n u\big|_{M_0}+o(\rho^n) \tag{5.10}$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda ρ, M va M_0 nuqtalar orasidagi masofa, $o(\rho^n)$ belgi esa, $M\to M_0$ da ρ^n nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya. Bu formulaga qoldiq hadi Peano ko'rinishdagi *Teylor formulasi* deyiladi.

5.16. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumi

$u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in\{M\}$ bo‘lsin.

5.29-ta’rif. Agar M_0 nuqtaning shunday $U_\delta(M_0)\subset\{M\}$ atrofi mavjud bo‘lib, $\forall M\in U_\delta(M_0)$ uchun $f(M)\le f(M_0)$ $(f(M)\ge f(M_0))$ bo‘lsa, $u=f(M)$ funksiya M_0 *nuqtada maksimumga (minimumga)* ega deyiladi, $f(M_0)$ qiymat esa $f(M)$ *funksiyaning maksimum (minimum) qiymati* deyiladi.

Agar $\forall M\in U_\delta(M_0)\setminus\{M_0\}$ uchun $f(M)<f(M_0)$ $(f(M)<f(M_0))$ bo‘lsa, $u=f(M)$funksiya M_0 nuqtada *qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga)* ega deyiladi. Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning *ekstremum qiymati* deb ataladi. Funksiyaning maksimum (minimum) qiymati quyidagicha belgilanadi:

$$f(M_0)=\max_{M\in U_\delta(M_0)}\{f(M)\}\quad \left(f(M_0)=\min_{M\in U_\delta(M_0)}\{f(M)\}\right).$$

$u=f(M)$ funksiya $M_0\in\{M\}\subset R^m$ nuqtada ekstremumga yega bo‘lsin, u holda, uning M_0 nuqtadagi $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ to‘liq orttirmasi quyidagi shartlarning birontasini qanoatlantiradi:

$$\Delta u\le 0\quad , \tag{5.11}$$

$$\Delta u\ge 0 \tag{5.12}$$

(5.11) shart bajarilganda funksiya M_0 nuqtada maksimum qiymatga, (5.12) bajarilganda esa, minimum qiymatga ega bo‘ladi.

5.25-teorema (funksiya ekstremumining zaruriy sharti). $u=f(x_1,x_2,...,x_3)=f(M)$ funksiya $M_0\in\{M\}\subset R^m$ nuqtada ekstremumga erishsa va bu nuqtada barcha $f'_{x_1},f'_{x_2},...,f'_{x_m}$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, u holda:

$$f'_{x_1}(M_0)=0,\ f'_{x_2}(M_0)=0,...,f'_{x_m}(M_0)=0\ . \tag{5.13}$$

5.10-eslatma. Agar $u=f(x_1,x_2,...,x_m)=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada ekstremumga ega va differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda, (5.13) shartdan

$$du(M_0)=0 \tag{5.14}$$

shart kelib chiqadi. Aksincha, agar $du(M_0)=0$ bo‘lsa, u holda, bu nuqtada xamma xususiy hosilalar $\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{M_0}=0$ bo‘ladi

5.11-eslatma. (5.14) shart funksiyaning ekstremumga ega bo'lishi uchun yetarli shart bo'la olmaydi.

5.26-teorema(funksiya ekstremumining yetarli sharti). Agar:
1). $f(M)$ funksiya M_0 nuqtaning biror $U_\delta(M_0)$ atrofida barcha $x_1, x_2, \dots, x_m$ tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

2). M_0 nuqta $f(M)$ funksiyaning statsionar nuqtasi;

3). Koeffitsiyentlari $a_{ik} = f''_{x_i x_k}(M_0)$ $(i,k = 1,2,\dots,m)$ bo'lgan $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u holda, $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada minimumga (maksimumga) erishadi.

4). Agar $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \cdot \xi_i\xi_k$ kvadratik forma noaniq aniqlangan bo'lsa, $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

5). Agar $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \cdot \xi_i\xi_k$ kvadratik forma yarim musbat yoki yarim manfiy aniqlangan bo'lsa, $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada ekstremumga erishishi ham, erishmasligi ham mumkin. Bu hol «shubhali» hol bo'lib, qo'shimcha tekshirish bilan aniqlanadi.

Silvestr alomati. Ushbu

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}\xi_i\xi_k$$

kvadratik formaning musbat aniqlangan bo'lishi uchun,

$$b_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

tengsizliklarning bajarilishi, manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa,

$$b_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^m \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{13} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

tengsizliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Xususiy holda, $u = f(x_1, x_2)$ bo'lgan holni qaraymiz. $f(x_1, x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0, x_2^0)$ nuqtaning biror

$$U_\delta(M_0) = \{M(x_1, x_2) \in R^2 : \rho(M, M_0) < \delta\}(\delta > 0)$$

atrofida birinchi, ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. $M_0(x_1^0, x_2^0)$ nuqta esa, berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin: $f'_{x_1}(M_0)=0$, $f'_{x_2}(M_0)=0$. Odatda,gidek,

$$a_{11}=f''_{x_1^2}(M_0),\quad a_{12}=f''_{x_1x_2}(M_0),\quad a_{22}=f''_{x_2^2}(M_0)$$

deb belgilaymiz. Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1. Agar $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{11}^2>0$ va $a_{11}<0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada maksimumga erishadi.

2. Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ va $a_{11}>0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada minimumga erishadi.

3. Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4. Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligi ham mumkin. Bu «shubhali» holda ekstremum qo'shimcha tekshirishlar yordamida aniqlanadi.

5.1. O'z-o'zini tekshirish savollari

5.1.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi ([3], 2-q., 33–35-betlar; [5], 1-t., 352–354-betlar; [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q., 31–34-betlar, [30], 14- bo'lim).

5.1.2. Evklid tekisligi va fazosi haqida tushuncha ([3], 2-q., 16–23-betlar; [5], 1-t., 340–360-betlar; [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q.,2–12-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.3. R^m fazoda ketma-ketlik va uning limiti ([3], 2-q., 23–30-betlar; [5], 1-t., 340–360-betlar; [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q.,17–25-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.4. R^m fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlik ([3], 2-q., 29–30-betlar; [5], 1-t., 340–360-betlar, [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q.,18–25-betlar).

5.1.5. R^m fazoda ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishining Koshi kriteriysi ([3], 2-q., 30–35-betlar; [5], 1-t., 340–360-betlar; [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q., 25–28-betlar) .

5.1.6. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti ([3], 2-q., 33–35-betlar; [5], 1-t., 340–360-betlar; [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q., 34–36-betlar, [30], 14- bo'lim).

5.1.7. Karrali va takroriy limitlarning tengligi haqidagi teorema ([3], 2-q., 35–45-betlar; [5], 1-t., 340–360-betlar, [10], 1-q., 442–460-betlar; [12], 2-q.,42–44-betlar, [30], 14- bo'lim).

5.1.8. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ([3], 2-q., 46–49-betlar; [5], 1-t., 362–373-betlar; [10], 1-q., 460–469-betlar; [12], 2-q.,46–51-betlar, [30], 14- bo'lim).

5.1.9. Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyaning asosiy xossalari ([3], 2-q., 49–52-betlar; [5], 1-t., 362–373-betlar, [10], 1-q., 460–469-betlar; [12], 2-q.,54–62-betlar).

5.1.10. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi va differensiali ([3], 2-q., 59–72-betlar; [5], 1-t., 375–400-betlar, [12], 2-q.,62–75-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.11. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar ([3], 2-q., 88–93-betlar; [5], 1-t., 375–400-betlar; [12], 2-q.,87–93-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.12. Yo'nalish bo'yicha hosila va skalyar maydon gradiyenti ([3], 2-q., 74–77-betlar; [5], 1-t., 375–400-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.13. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasi ([3], 2-q., 93–95-betlar; [5], 1-t., 402–414-betlar; [12], 2-q.,96–98-betlar).

5.1.14. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremum qiymatlari ([3], 2-q., 99–100-betlar; [5], 1-t., 417–431-betlar; [12], 2-q.,99–100-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.15. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari ([3], 2-q., 100–108-betlar; [5], 1-t., 417–431-betlar; [12], 2-q.,100–110-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.1.16. Oshkormas funksiyaning hosilasi ([3], 2-q., 109–108-betlar; [5], 1-t., 441–463-betlar; [30], 14- bo'lim).

5.2. Nazariy (muammoli) topshiriqlar

5.2.1. $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ funksiyaning $(x,y)\to(0,0)$da limitga ega emasligini isbotlang.

5.2.2. $f(x,y)=\dfrac{2x^2y^2}{x^6+y^4}$ funksiyaning $(x,y)\to(0,0)$da limitga ega emasligini isbotlang.

5.2.3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$ ekanligini isbotlang.

5.2.4. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$ funksiyaning $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko'rsating.

5.2.5. $f(x,y)=\dfrac{4x^2y^2}{x^3+y^2}$ funksiyaning $(x,y)\to(0.0)$da limitga ega emasligini isbotlang.

5.2.6. Ushbu $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ funksiyaning $(x,y)\to(0,0)$dagi limiti mavjud emasligini isbot qiling.

5.2.7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ ekanligini isbot qiling.

5.2.8. $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2>0\right)$, $f(0,0)=0$ funksiya uchun $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{xy}(0,0)$ ekanligini ko'rsating.

5.2.9. Agar $\lambda+\beta-2\nu>0$ bo'lsa, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x|^{\lambda}\cdot|y|^{\beta}}{\left(x^2+y^2\right)^{\nu}}=0$ ekanligini isbotlang.

5.2.10. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

5.2.11. $f(x,y)=e^{-1/x^2+y^2}$ funksiyani $x^2+y^2>0$ va $f(0,0)=0$ shartlarda differensiallanuvchilikka tekshiring.

5.2.12. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right\}=0$ takroriy limitlar mavjud va teng bo'lsa-da, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ karrali limitning mavjud emasligini ko'rsating.

5.2.13. $U=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ (a, b–o'zgarmas sonlar) funksiyaning issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini, ya'ni $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating.

5.2.14. $u=\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, $r\neq 0$ funksiyaning Laplas tenglamasini, ya'ni $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ tenglamani qanoatlantirishni isbotlang.

5.2.15. $u=\frac{c_1e^{-ar}+c_2e^{ar}}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, c_1, c_2- o'zgarmas sonlar, funksiyaning Gelmgols tenglamasini qanoatlantirishini isbotlang.

5.2.16. $u_1=u_1(x,y,z)$, $u_2=u_2(x,y,z)$ funksiyalar Laplas tenglamasini, ya'ni $\Delta u=0$ tenglamani qanoatlantiradi. U holda,

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

funksiya $\Delta(\Delta v)=0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

5.2.17. $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ (a, b o'zgarmas sonlar) funksiyaning Laplas tenglamasini, ya'ni $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating.

5.2.18. u va v ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar, Δ – Laplas operatori, ya'ni $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. U holda, $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v)$, $\left(\Delta(u,v)=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dv}{dz}\right)$ tenglikning to'g'riligini isbotlang.

5.2.19. $z=arctg\frac{x}{y}(x=u+v)$ funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}=\frac{u-\vartheta}{u^2+\vartheta^2}$ munosabatni qanoatlantirishini ko'rsating.

5.2.20. $z=\varphi(x^2+y^2)$, bunda $\varphi(u)$– differensiallanuvchi funksiya, funksiyaning, ushbu $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating.

5.2.21. a ning qanday qiymatida, $v=x^3+axy^2$ funksiya $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ tenglamani qanoatlantiradi?

5.3. Amaliy topshiriqlar

5.3.1-masala. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

5.3.1.1. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. **5.3.1.2.** $z=\ln(y^2-4x+8)$

5.3.1.3. $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

5.3.1.4. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$

5.3.1.5. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

5.3.1.6. $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

5.3.1.7. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

5.3.1.5. $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$

5.3.1.9. $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$

5.3.1.10. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

5.3.1.11. $z=\arcsin\frac{y}{x}$.

5.3.1.12. $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

5.3.1.13. $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

5.3.1.14. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.3.1.15. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

5.3.1.16. $z=\sqrt{x\cdot\sin y}$.

5.3.1.17. $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

5.3.1.15. $z=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

5.3.1.19. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

5.3.1.20. $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

5.3.1.21. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$.

5.3.1.22. $z=\ln(y^2-4x+5)$

5.3.1.23. $z=\frac{1}{16-x^2-y^2}$.

5.3.1.24. $z=\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}$

5.3.1.25. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

5.3.1.26-misol. Quyidagi $z=\frac{\ln xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

Yechilishi. ([3], 2-q., 33–34-betlar; [9], 2-t., 4- bo'lim; [30], 14-bo'lim). Berilgan $z=\frac{\ln xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ funksiyada logarifm va arifmetik ildiz bo'lganligi uchun,

$$xy>0 \text{ yoki } \begin{cases}x>0,\\ y>0,\end{cases} \begin{cases}x<0,\\ y<0,\end{cases} \tag{5.15}$$

birinchi va uchinchi chorakda hamda

$$4-x^2-y^2>0 \text{ yoki } x^2+y^2<4\ , \tag{5.16}$$

markazi $(0,0)$ nuqtada, radusi $R=2$ bo'lgan ochiq doira ichida, ifodalar aniqlangan bo'ladi. (5.15) va (5.16) tengsizlikni bir vaqtda qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(z)=\left\{(x;\,y)\in R^2: 0<x<2,\ 0<y<\sqrt{4-x^2}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{(x;\,y)\in R^2: -2<x<0,\ -\sqrt{4-x^2}<y<0\right\}$$

bo'ladi.

5.3.2-masala. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $\left(a\in R^2\right)$ ekanligini ta'rif yordamida isbotlang.

5.3.2.1. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{13-n^2}{1+3n^2},\ \dfrac{2n-1}{2-3n}\right\}$, $\quad a\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{3}\right)$

5.3.2.2. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2+3},\dfrac{3n^2}{2-n^2}\right\}$, $\quad a(-2,-3)$.

5.3.2.3. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2},\dfrac{4-n^2}{3+2n^2}\right\}$, $\quad a\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$.

5.3.2.4. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\cos n\pi\right\}$, $\quad a(0,0)$.

5.3.2.5. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{3n^2+2}{4n^2-1},\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$, $\quad a\left(\dfrac{3}{4},2\right)$.

5.3.2.6. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{4+2n}{1-3n},\ \dfrac{5n+15}{6-n}\right\}$, $\quad a\left(-\dfrac{2}{3},-5\right)$.

5.3.2.7. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2};\ \dfrac{-5n}{n+1}\right\}$, $\quad a\left(-\dfrac{1}{2},-5\right)$.

5.3.2.5. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{3n-2}{2n-1};\ \dfrac{4n-1}{2n+1}\right\}$, $\quad a\left(\dfrac{3}{2},2\right)$

5.3.2.9. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{\cos n}{n};\ \dfrac{n-1}{n^2+1}\right\}$, $\quad a(0,0)$.

5.3.2.10. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{1}{n^2};\ \dfrac{5}{n}\right\}$, $\quad a(0,0)$.

5.3.2.11. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{2}{n};\dfrac{n}{n+1}\right\}$, $\quad a(0,1)$.

5.3.2.12. $x^{(n)}=\left\{\dfrac{2n}{3n+1};\dfrac{1+n}{1-2n}\right\}$, $\quad a\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$.

R^2 fazoda quyidagi ketma-ketlikning limitini toping:

5.3.2.13. $x^{(n)}=\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+.....+\frac{n-1}{n^2};\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}\right\}$

5.3.2.14. $x^{(n)}=\left\{\frac{(2n+1)+(2n+2)}{(2n+3)};\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n-2}\right\}.$

5.3.2.15. $x^{(n)}=\left\{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n};\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}.$

5.3.2.16. $x^{(n)}=\left\{\frac{1+2...+n}{\sqrt{9n^4+1}};\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}.$

5.3.2.17. $x^{(n)}=\left\{\frac{1+4+7+....+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}};\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}\right\}.$

5.3.2.18. $x^{(n)}=\left\{\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!};\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}\right\}$

5.3.2.19. $x^{(n)}=\left\{\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+...+(2n-1)};\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n3}\right\}$

5.3.2.20. $x^{(n)}=\left\{\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{6n}+......+\frac{1+2^n}{4^n};\ \left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)\right\}$

5.3.2.21. $x^{(n)}=\left\{\frac{13-n^2}{1+2n^2},\frac{2n-1}{2-5n}\right\},\qquad a\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right)$

5.3.2.22. $x^{(n)}=\left\{\frac{1-4n^2}{n^2+3},\frac{5n^2}{2-n^2}\right\},\qquad a(-4,-5).$

5.3.2.23. $x^{(n)}=\left\{\frac{7n^2+1}{3n^2+2},\frac{4-n^2}{3+4n^2}\right\},\qquad a\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{4}\right).$

5.3.2.24. $x^{(n)}=\left\{\frac{1}{2n},\frac{4}{n}\cos n\pi\right\},\qquad a(0.0).$

5.3.2.25. $x^{(n)}=\left\{\frac{7n^2+2}{4n^2-1},\frac{5n^3}{n^3-2}\right\},\qquad a\left(\frac{7}{4},5\right).$

5.3.2.26-misol. Quyidagi

$$x^{(n)}=\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)};\ \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}......\sqrt[2^n]{2}\right\}$$

ketma-ketlikning limitini toping:

Yechilishi. ([3], 2-q., 25–30-betlar; [9], 2-t., 4- bo'lim; [30], 14-bo'lim). R^2 fazoda berilgan ketma-ketlikning koordinatalari quyidagicha bo'ladi: $x_1^{(n)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, $x_2^{(n)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$.

Endi bu ketma-ketliklarning limitlarini topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2.$$

5.1-teremaga asosan, R^2 fazoda berilgan ketma-ketlikning limitini topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)};\ \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\ldots\sqrt[2^n]{2}\right\} = \{1;\ 2\}.$$

5.3.3-masala. Quyidagi funksiyaning karrali limitlarini hisoblang:

5.3.3.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.3.3.2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{-xy+y^2}$.

5.3.3.3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

5.3.3.4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

5.3.3.5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

5.3.3.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$.

5.3.3.7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

5.3.3.5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$.

5.3.3.9. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.3.3.10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(x^4y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)}$.

5.3.3.11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}$.

5.3.3.12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

«*Funksiya limiti mavjud bo'lmasligining ikki yo'l qoidasi*» ni tatbiq qilib, yaqinlashishning (intilishning) har xil yo'llarini qarab chiqib, quyidagi berilgan $f(x,y)$ funksiyaning $(x,y)\to(0,0)$ da limitga ega bo'lmasligini ko'rsating.

5.3.3.13. $f(x,y)=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.3.3.14. $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^4+x^2}$.

5.3.3.15. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x^2-y}$.

5.3.3.16. $f(x,y)=\dfrac{x^4-x^2}{x^4+x^2}$.

5.3.3.17. $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$.

5.3.3.15. $f(x,y)=\dfrac{x-1}{x+y}$.

5.3.3.19. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

5.3.3.20. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y}$.

Quyidagi funksiyaning karrali limitlarini hisoblang:

5.3.3.21. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin 2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.3.3.22. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{3x+5y}{-3xy+2y^2}$.

5.3.3.23. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to2}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y^2}}$.

5.3.3.24. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^{2x^2}$.

5.3.3.25. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$.

5.3.3.26-misol. Ushbu $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ funksiya, (x,y) nuqta $(0,0)$ nuqtaga intilganda, limitga ega emasligini ko‘rsating.

Yechilishi. ([3], 2-q., 35–37-betlar; [9], 2-t., 4- bo‘lim; [30], 14-bo‘lim). Ravshanki, $y=kx^2$, $x\neq0$ chiziq bo‘ylab o‘zgarmas qiymat qabul qilinadi, ya’ni $|f(x,y)|=\left(\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)_{y=kx^2}=\dfrac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$.

Demak,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\lim=\lim_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)]_{y=kx^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Bu limit $y=kx^2$ chiziq bo‘ylab intilish yo‘liga bog’liq ravishda o‘zgaradi. Agar (x,y) nuqta $(0,0)$ nuqtaga $y=x^2$ parabola bo‘ylab intilsa, ya’ni $k=1$ bo‘lsa, limit 1 ga teng bo‘ladi. Agar (x,y) nuqta $(0,0)$ nuqtaga Ox o‘q bo‘ylab intilsa, ya’ni $k=0$ bo‘lsa, limit 0 ga teng bo‘ladi. Bu esa, yuqoridagi ikki yo‘l qoidasiga binoan, $f(x,y)$ funksiya, (x,y) nuqta $(0,0)$ nuqtaga intilganda, limitga ega emasligini anglatadi.

5.3.4-masala. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang.

5.3.4.1. $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; $x_0=\infty,\ y_0=\infty.$

5.3.4.2. $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$; $x_0=y_0=0.$

5.3.4.3. $f(x,y)=\log_x(x+y)$; $x_0=1, y_0=0.$

5.3.4.4. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{2x+3y}$; $x_0=y_0=0.$

5.3.4.5. $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$; $x_0=y_0=0.$

5.3.4.6. $f(x,y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $x_0=y_0=0.$

5.3.4.7. $f(x,y)=\dfrac{\sin 3x-tg2y}{6x+3y}$; $x_0=y_0=0.$

5.3.4.8. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$; $x_0=y_0=\infty.$

5.3.4.9. $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $x_0=\infty,\ y_0=+0.$

5.3.4.10. $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; $x_0=\infty,\ y_0=\infty.$

5.3.4.11. $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}tg\dfrac{xy}{1+xy}$; $x_0=0,\ y_0=\infty.$

5.3.4.12. $f(x,y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)^{x+y}, x+y\neq 0.\\ 1,\ x+y=0;\ x_0=y_0=\infty.\end{cases}$

5.3.4.13. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & x\neq -y,\\ 0, \quad x=-y, & x_0=y_0=0.\end{cases}$

5.3.4.14. $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$; $x_0=y_0=0$

5.3.4.15. $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}+y}{x+y}$; $x_0=y_0=0.$

5.3.4.16. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|-|y|}, & |x|\neq|y|.\\ 0.\ \ |x|=|y|; & x_0=y_0=0.\end{cases}$

5.3.4.17. $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(x+e^{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}};\ x_0=1,\ y_0=0.$

5.3.4.18. $f(x,y)=\dfrac{5-\sqrt{25-xy}}{xy};\ x_0=y_0=0.$

5.3.4.19. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2};\ x_0=y_0=0.$

5.3.4.20. $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y)}{y};\ x_0=1,\ y_0=0.$

5.3.4.21. $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{4x+3y};\ x_0=\infty,\ y_0=\infty.$

5.3.4.22. $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2};\ x_0=y_0=0.$

5.3.4.23. $f(x,y)=\log_x(2x+3y);\ x_0=1,y_0=0.$

5.3.4.24. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{3x+5y};\ x_0=y_0=0.$

5.3.4.25. $f(x,y)=\dfrac{\cos 2x-\cos 2y}{x^2+y^2};\ x_0=y_0=0.$

5.3.4.21-misol. $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2x+3y}$ va $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2x+3y}$ takroriy limitlarni hisoblang.

Yechilishi. ([3], 2-q., 38–39-betlar; [9], 2-t., 4- bo'lim; [30], 14-bo'lim). Har bir tayinlangan y va x uchun, mos ravishda takroriy limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}=\lim_{y\to0}\sin\frac{\pi y}{3y}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}=\lim_{x\to0}\sin\frac{\pi x}{2x}=1.$$

5.3.5-masala. Quyidagi funksiyani berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring:

5.3.5.1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}; & x^4+y^4\neq0,\\ 0, & x^4+y^4=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(1,2).$

5.3.5.2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4\neq0\\ 0, & x^4+y^4=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A\left(10^{-4},10^{-5}\right)$

5.3.5.3. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x+y\neq 0 \\ 0, & x+y=0 \end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(-1,-1)$

5.3.5.4. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 1, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(0,1)$

5.3.5.5. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}, & x^2+y^2\neq 0. \\ 1, & x+y=0 \end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A\left(\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right).$

5.3.5.6. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\cos-\cos y}{x-y}, & x-y\neq 0. \\ 0, & x-y=0 \end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right).$

5.3.5.7. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0;0), \\ 0, & (x,y)=(0;0), \end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(1,0).$

5.3.5.8. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0. \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(1,0)$

5.3.5.9. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ $\quad O(0,0).\ A(1,1).$

$f(x,y)$ funksiyani M to'plamda chegaralanganlikka tekshiring.

5.3.5.10. $f(x,y)=x^2-y^2,\quad M=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\leq 25\}.$

5.3.5.11. $f(x,y)=x^2-y^2,\quad M=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2>25\}.$

5.3.5.12. $f(x,y)=\dfrac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2},\quad M=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\neq 10\}.$

5.3.5.13. $f(x,y)=\dfrac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{xy},\quad M=\{(x,y)\in R^2, xy\neq 0\}.$

5.3.5.14. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{xy},\quad M=\{(x,y/\in R^2,\ xy\neq 0)\}.$

5.3.5.15. $f(x,y)=\dfrac{\ln x-\ln y}{x-y},\quad M\{x,y\in R^2,\ x\neq y\}.$

Quyidagi funksiyaning ko'rsatilgan to'plamda chegaralanganligini isbotlang, uning aniq chegaralarini toping va funksiyaning shu qiymatlarga erishish-erishmasligini aniqlang:

5.3.5.16. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $M=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\neq 0\}$

5.3.5.17. $f(x,y)=\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$, $M=\{(x,y)\in R^2,\ 0<x^2+y^2\leq 9\}$

5.3.5.18. $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, $M=\{(x,y)\in R^2,\ x^4+y^4\neq 0\}$

5.3.5.19. $f(x,y)=xye^{-xy}$, $M=\{(x,y)\in R^2,\ x\geq 0, y\geq 0\}$

5.3.5.20. $f(x,y)=\frac{4(x^2+y^2)+z^2}{x^2+y^2+z^2}$, $M=\{(x,y,z)\in R^3,\ x^2+y^2+z^2\neq 0\}$

Quyidagi funksiyani berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring:

5.3.5.21. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}; & x^4+y^4\neq 0,\\ 0, & x^4+y^4=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(1,2)$

5.3.5.22. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}, & x^4+y^4\neq 0\\ 0, & x^4+y^4=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(10^{-4},10^{-5})$

5.3.5.23. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(-1,-1)$

5.3.5.24. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A(0,1)$

5.3.5.25. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin 2x+\sin 2y}{x+y}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x+y=0\end{cases}$ $\quad O(0,0),\ A\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$

5.3.5.21-misol. Quyidagi $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

funksiyani $O(0,0)$, $A(1,-1)$ nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. ([3], 2-q., 46–52-betlar; [9], 2-t., 4- bo'lim; [30], 14-bo'lim). Funksiyaning $O(0,0)$, $A(1,-1)$ nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy uzluksizligini ko'rsatamiz: $y \neq 0$ va $x \to x_0 \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x_0^4 + y^4}{x_0^2 + y^2} = f(x_0, y),$$

$y = 0$ va $x \to x_0 \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \to x_0} f(x,0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^4 + 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0, 0),$$

$y = 0$ va $x \to 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 = f(0,0).$$

$x \neq 0$ va $y \to y_0 \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x^4 + y_0^4}{x^2 + y_0^2} = f(x, y_0),$$

$x = 0$ va $y \to y_0 \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{y \to y_0} f(0,y) = \lim_{y \to y_0} \frac{0 + y^4}{0 + y^2} = y_0^2 = f(0, y_0),$$

$x = 0$ va $y \to 0$ bo'lsa,

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{0 + y^4}{0 + y^2} = \lim_{y \to 0} y^2 = 0 = f(0,0).$$

Ravshanki, yuqoridagidek, funksiya $A(1,-1)$ nuqtada har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy uzluksiz ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Berilgan funksiyaning $O(0,0)$, $A(1,-1)$ nuqtalarda ikkala o'zgaruvchi bo'yicha ham bir yo'la uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Agar o'zgaruvchilar, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ deyilsa,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\rho \to 0} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \lim_{\rho \to 0} \rho^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{1^4 + (-1)^4}{1^2 + (-1)^2} = 1 = f(1;-1).$$

bo'ladi. Bundan, berilgan funksiyaning $O(0,0)$, $A(1,-1)$ nuqtalarda ikkala o'zgaruvchi bo'yicha ham bir yo'la uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

5.3.6-masala. Quyidagi funksiya berilgan sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladimi?

5.3.6.1 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ funksiya, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ kvadratda.

5.3.6.2 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ funksiya, $1\le x\le 2$, $1\le y\le 2$ kvadratda.

5.3.6.3 $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+2}$ funksiya, $x^2+y^2\le 1$ doirada.

5.3.6.4 $f(x,y)=\dfrac{e^{\sin x}}{e^{\sin y}}$ funksiya, $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{4}$ sohada.

5.3.6.5 $f(x,y)=tg(xy)$ funksiya, $-2\le x\le 2$, $-2\le y\le 2$ kvadratda.

5.3.6.6 $f(x,y)=\sqrt{2x-y}$ funksiya, $x^2+y^2\le 4$ doirada.

Berilgan $f(x,y)$ funksiyaninig $(x,y(\to)(0,0)$ dagi limitlari topilsin (bunda ko'phadlar, eksponenta, logarifmik va trigonometrik funksiyalar uzluksiz, deb olinadi).

5.3.6.7 $f(x,y)=e^{-x-y}$.

5.3.6.8 $f(x,y)=x^2+y^2$

5.3.6.9 $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$

5.3.6.10 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sin y+2}$

5.3.6.11 $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

5.3.6.12 Ushbu

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, (x,y)\ne(0,0), \\ 2, \quad (x,y)=(0;0)\end{cases}$$

funksiya (0,0) nuqtada uzluksiz bo'ladimi?

5.3.6.13 C ning qanday qiymatida

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2+1, & (x;y)\ne(0;0) \\ C, & (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

funksiya (0,0) nuqtada uzluksiz bo'ladi?

5.3.6.14.
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

funksiya (0,0) nuqtada uzluksiz bo'ladimi?

5.3.6.15. $u=\arcsin\dfrac{x}{y}$ funksiya o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladimi?

5.3.6.16 .Ushbu $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ funksiya berilgan. U holda, $f(0,y)$ va $f(x,0)$ funksiyalarning har biri bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ekanligini ko'rsating. $f(x,y)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladimi?

5.3.6.17. a ning qanday qiymatlarida

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ a, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

funksiya $(0,0)$ nuqtada 1) x bo'yicha; 2) y bo'yicha uzluksiz; 3) $y=\alpha\sqrt{x},\alpha\neq 0$ chiziq bo'yicha uzluksiz; 4) uzluksiz bo'ladi.

5.3.6.18. a ning qanday qiymatlarida

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3-xy^2, & x^2+y^2\neq 0\\ a, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

funksiya 1) $x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0$ chiziq bo'ylab uzluksiz; 2) uzluksiz bo'ladi.

5.3.6.19 . a ning qanday qiymatlarda

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{y^2+x^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ a, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

funksiya $(0,0)$ nuqtada 1) $x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0$ chiziq bo'ylab uzluksiz; 2) $y=\alpha x^2$ chiziq bo'ylab uzluksiz; 3) uzluksiz bo'ladi.

5.3.6.20. $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2}{x-y^2}$ funksiya o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladimi?

Quyidagi funksiya berilgan sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladimi?

5.3.6.21 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^3+y^3}$ funksiya, $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$ kvadratda.

5.3.6.22 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^3+y^2}$ funksiya, $1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2$ kvadratda.

5.3.6.23 $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+2x}$ funksiya, $x^2+y^2\le 1$ doirada.

5.3.6.24 $f(x,y)=\dfrac{e^{\sin 2x}}{e^{\sin 2y}}$ funksiya, $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{4}$ sohada.

5.3.6.25 $f(x,y)=tg(x+y)$ funksiya, $-2\le x\le 2,\ -2\le y\le 2$ kvadratda.

5.3.6.26-misol. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}e^{-\frac{1}{|x+y|}}, & x+y\neq 0,\\ a, & x+y=0\end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatlarida R^2 da uzluksiz bo'ladi?

Yechilishi. ([3], 2-q., 35–37-betlar; [30], 14- bo'lim). $\dfrac{1}{x+y}=t$ deb belgilaymiz. $(x,y)\to(0.0)$ da $t\to\infty$, u holda,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{(x+y)e^{\frac{1}{|x+y|}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{|t|}}=0=f(0,0).$$

Agar $a=0=f(0.0)$ bo'lsa, berilgan funksiya uzluksiz bo'ladi.

5.3.7-masala. Xususiy hosilaning ta'rifidan foydalanib, $f(x,y)$ funksiyaning berilgan nuqtadagi xususiy hosilalarini toping.

5.3.7.1. $f(x,y)==\dfrac{x^2}{y+1}$, $f'_x(3,2)=?$ $f'_y(3,2)=?$

5.3.7.2. $f(x,y)=e^{-x}\sin y$, $f'_x(1,2)=?$ $f'_y(1,2)=?$

5.3.7.3 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$ funksiyaning $f'_x(1,2)$, $f'_y(1,2)$ xususiy hosilalarini $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}1$ bo'lganda hisoblang.

5.3.7.4 $z=y\ln(x^2-y^2)$ funksiya $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

5.3.7.5 $z=y^{\frac{y}{x}}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ funksiya $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping.

5.3.7.6. $f(x,y,z)=z\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$.

5.3.7.7. $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5.3.7.8. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

5.3.7.9. $f(x,y,z)=x^{y/z}$.

5.3.7.10. $f(x,y,z)=x^{y^z}$.

5.3.7.11. $f(x,y,z)=\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.3.7.12. $f(x,y,z)=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$.

5.3.7.13. $f(x,y,z)=e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{z}{y}}$.

5.3.7.14. $f(x,y,z)=e^{xyz}\cdot\sin xy$.

5.3.7.15. $f(x,y,z)=(x-y)(x-z)(y-z)$. **5.3.7.16.** $f(x,y,z)=x^{yz}$.

5.3.7.17. $f(x,y,z)=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{yz}$. **5.3.7.18.** $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{xz}{y}$.

5.3.7.19. $f(x,y,z)=e^{(x^2+y^2-z^2)^2}$. **5.3.7.20.** $f(x,y,z)=\dfrac{\cos xz}{y}$.

Xususiy hosilaning ta'rifidan foydalanib, $f(x,y)$ funksiyaning berilgan nuqtadagi xususiy hosilalarini toping.

5.3.7.21. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2+x}$, $f_x'(1,2)=?\ f_y'(1,2)=?$

5.3.7.22. $f(x,y)=e^{-x+y}\sin y$, $f_x'(1,1)=?\ f_y'(1,1)=?$

5.3.7.23 $f(x,y)=e^{-x}\sin xy$ funksiyaning $f_x'(1,2)$, $f_y'(1,2)$ xususiy hosilalarini $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}1$ bo'lganda hisoblang.

5.3.7.24 $z=\ln(x^2+y^2)$ funksiya $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

5.3.7.25 $z=\sin 2\dfrac{y}{x}$ funksiya $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

5.3.7.26-misol. $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xyz)$ funksiyaning $f_x'(x,y,z)$, $f_y'(x,y,z)$ va $f_z'(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping.

Yechilishi. ([3], 2-q., 59–63-betlar; [9], 2-t., 5- bo'lim; [30], 14-bo'lim). Ushbu $(\operatorname{arctg}u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$ formulaga asosan, $f_x'(x,y,z)$, $f_y'(x,y,z)$ va $f_z'(x,y,z)$ xususiy hosilalarni topamiz:

$$f_x'(x,y,z)=(\operatorname{arctg}(xyz))_x'=\frac{yz}{1+(xyz)^2},$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{xz}{1+(xyz)^2},\quad f_z'(x,y,z)=\frac{xy}{1+(xyz)^2}.$$

Maple tizimidan foydalanib, misolning javobini tekshirish:

```
> f:=arctan(x*y*z): Diff(f,x)=simplify(diff(f,x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan(x\,y\,z)=\frac{y\,z}{1+x^2\,y^2\,z^2}.$$

```
> Diff(f,y)=simplify(diff(f,y));
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\arctan(x\,y\,z)=\frac{x\,z}{1+x^2y^2z^2}.$$

```
> Diff(f,z)=simplify(diff(f,z));
```

$$\frac{\partial}{\partial z}\arctan(x\,y\,z)=\frac{x\,y}{1+x^2y^2z^2}.$$

5.3.8-masala. Berilgan funksiyaning ko'rsatilgan tartibdagi xususiy hosilasi va differensialini toping.

5.3.8.1 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}.\ \dfrac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial x^n}.$

5.3.8.2 $f(x,y)=x^m y^n;\dfrac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial y^n}.$

5.3.8.3. $f(x,y)=e^{2x}\sin+e^x\cos\dfrac{y}{2};\dfrac{\partial^{m+m}f}{\partial x^m\partial x^n}.$

5.3.8.4 $f(x,y,z)=e^{xyz}\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}.$

5.3.8.5 $f(x,y)=\sin x\cdot\cos 2y;\ \dfrac{\partial^{10}f}{\partial x^4\partial y^6}.$

5.3.8.6. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$

5.3.8.7 $f(x,y)=(x^2+y)^{10}tgx;\dfrac{\partial^{10}f}{\partial x\partial y^9}.$

5.3.8.8 $f(x,y)=\sin xy.\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}.$

5.3.8.9 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}e^{xy};d^2f.$

5.3.8.10 $f(x,y,z)=(\dfrac{x}{y})^2;d^2f.$

5.3.8.11 $u=f(x+y,z^2);d^2u.$

5.3.8.12 $u=f(xy)\cdot g(x\cdot z);d^2u.$

5.3.8.13 $u=f(\sin x+\cos y);d^2u.$

5.3.8.14 $u=f(xy,x^2+y^2);\ d^2u.$

5.3.8.15 $u=f(2x+3y+tz);d^nu.$

5. 3.5.16 $u=f(2x,3y,2z);d^nu.$

5.3.8.17. $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}},\ df(1,1,1)$ va $d^2f(1,1,1).$

Funksiyaning orttirmasini uning differensialiga almashtirib, quyida berilgan ifodalarni taqribiy hisoblang:

5.3.8.18. $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$. **5.3.8.19** $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

5.3.8.20 $\sin 29^0 \cdot tg 46^0$.

Berilgan funksiyaning ko'rsatilgan tartibdagi xususiy hosilasi va differensialini toping.

5.3.8.21 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^4 \partial y^6}$.

5.3.8.22 $f(x,y) = x^4 y^3$; $\dfrac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3}$.

5.3.8.23. $f(x,y) = e^{2x}\sin + e^x \cos\dfrac{y}{2}$; $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^5 \partial x^3}$.

5.3.8.24 $f(x,y,z) = e^{xyz}$ $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$.

5.3.8.25 $f(x,y) = \sin 3x \cdot \cos 2y$; $\dfrac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3}$.

5.3.8.26-misol. $z = e^{x^2 y^2}$ fuksiyaning $d^2 z$ ikkinchi tartibli to'liq differensialini toping.

Yechilishi. ([3], 2-q., 88–92-betlar; [9], 2-t., 5- bo'lim; [30], 14-bo'lim). Berilgan funksiyadan x va y o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^2 y^2}\right)'_x = e^{x^2 y^2} 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^2 y^2}\right)'_y = e^{x^2 y^2} 2x^2 y.$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2 y^2} \cdot 4x^2 y^4 + e^{x^2 y^2} \cdot 2y^2 = 2y^2 e^{x^2 y^2}(2x^2 y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2 y^2} \cdot 4x^4 y^2 + e^{x^2 y^2} \cdot 2x^2 = 2x^2 e^{x^2 y^2}(2x^2 y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2 y^2} \cdot 4x^3 y^3 + e^{x^2 y^2} \cdot 4xy = 4xy e^{x^2 y^2}(x^2 y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2 y^2} \cdot 4x^3 y^3 + e^{x^2 y^2} \cdot 4xy = 4xy e^{x^2 y^2}(x^2 y^2 + 1).$$

5.3.9.18. $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1.$

5.3.9.19. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$ **5.3.9.20.** $z = (x - y + 1)^2.$

5.3.9.21. $z = (x-1)^2 + (y-1)^2.$ **5.3.9.22.** $u = x^2 + 2xy + y^2.$

5.3.9.23. $z = x^2 + (y+1)^2.$

5.3.9.24. $u = -x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 2y.$

5.3.9.25. $u = x^3 + y^3 - 6xy.$

5.3.9.26-misol. $z = x^3 - y^3 - 3xy$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechilishi. ([3], 2-q., 99–108-betlar; [9]. 2-t., 5- bo'lim; [30], 14-bo'lim). Berilgan funksiyadan x va y o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 3x.$$

So'ngra statsionar nuqtalarni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlari $(0, 0)$ va $(-1,1)$ bo'ladi. Bu nuqtalarda x va y o'zgaruvchilar bo'yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z(-1;1)}{\partial x^2} = -6 < 0,$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z(-1;1)}{\partial y^2} = -6 < 0,$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z(-1,1)}{\partial x \partial y} = -3.$$

Endi ekstremumning yetarli shartidan foydalanib, lokal ekstremum nuqtalarini topamiz. $(0, 0)$ nuqtada

$$\Delta(0;0) = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -3 < 0,$$

demak, bu nuqtada lokal ekstremum yo'q. $(-1,1)$ nuqtada $\frac{\partial^2 z(-1;1)}{\partial x^2} = -6 < 0$ va

$$\Delta(-1;1) = \frac{\partial^2 z(-1;1)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z(-1,1)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(-1,1)}{\partial x \partial y}\right)^2 = -6(-6) - (-3)^2 = 27 > 0.$$

Demak, ekstremumning yetarli shartiga asosan, $(-1,1)$ nuqta funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'ladi. Bu $(-1,1)$ nuqtadagi funksiyaning qiymati $z_{max} = z(-1,1) = 1$.

5.3.10-masala. Berilgan funksiyaning ko'rsatilgan to'plamdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

5.3.10.1. $u = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}$, $\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$

5.3.10.2. $u = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$, $\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

5.3.10.3. $u = x^3 + 3y^2 - 3xy$, $\quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$

5.3.10.4. $u = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$, $\quad x \ge 0, y \ge 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \le 1.$

5.3.10.5. $u = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$, $\quad 0 \le y \le x \le 2.$

5.3.10.6. $u = \cos x \cos y \cdot \cos(x+y)$, $\quad 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi.$

5.3.10.7. $u = (x - y^2)\sqrt[3]{(1-x)^2}$, $\quad y^2 \le x \le 2.$

5.3.10.5. $u = x^3 + y^3 - 9xy + 2x + 27$, $\quad 0 \le x \le 6\ \ 0 \le y \le 6.$

5.3.10.9. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2.$

5.3.10.10. $u = xy + yz + zx$, $\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9.$

5.3.10.11. $u = x + y + z$, $\ x^2 + y^2 \le z \le 1.$

5.3.10.12. $u = 2\sin x + 2\sin y + \sin(x+y)$, $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$

5.3.10.13. $z = x^2 + y^2$, $\quad x^2 + y^2 \le 4.$

5.3.10.14. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\quad x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2.$

5.3.10.15. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3yz)$, $\ x^2 + y^2 \le 4.$

5.3.10.16. $z = x - 2y - 3$, $\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

5.3.10.17. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $\ x^2 + y^2 \le 25.$

5.3.10.15. $z = x^2 - xy + y^2$, $\ |x| + |y| \le 1.$

5.3.10.19. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\ x^2 + y^2 + z^2 \le 100.$

5.3.10.20. $u = (x + y + z)e^{-(x+2y+2z)}$, $\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

5.3.10.21. $u = xy - 2x^2y$, $\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$

5.3.10.22. $u = x^2 + 5y^2 + x + 18y - 4$, $\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

5.3.10.23. $u = x^3 + 3y^2 - 4xy$, $\quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$

5.3.10.24. $u = \frac{xy}{4} - \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{4}$, $\quad x \ge 0, y \ge 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \le 1.$

5.3.10.25. $u = x^3 + y^3 - 3x^2 + 4xy - 3y^2$, $\quad 0 \le y \le x \le 2.$

5.3.10.26-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x = 0,\ y = 0,$

$x+y=-3$ chiziqlar bilan chegaralangan sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechilishi. ([30], 14- bo'lim). Oxy tekislikda $\overline{D}$ sohaga tegishli statsionar nuqtalarni aniqlaymiz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+1=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1=0,\end{aligned}\right\}$$

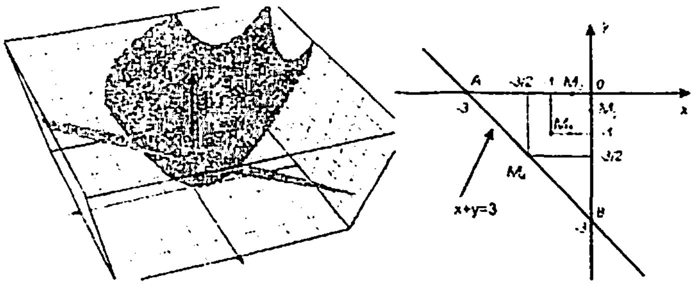
bundan $x=-1$, $y=-1$. $M(-1,-1)$ nuqtani hosil qildik, bu nuqtada $z_1=z(-1,-1)=-1$.

Berilgan funksiyani sohaning chegarasida tekshiramiz. OB to'g'ri chiziqda $x=0$ bo'lib, $z=y^2+y$ tenglamaga ega bo'lamiz va bu tenglama $[-3,0]$ kesmada bir o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish masalasiga keladi. $z'_y=2y+1$ ni topib, uni nolga tenglaymiz: $2y+1=0$, bundan $y=-\frac{1}{2}$; $z''_{yy}=2$ bo'lgani uchun, $M_2\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ - shartli lokal minimum nuqtasiga ega bo'lamiz va unda $z_2=z\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ qiymatni hosil qilamiz. OB kesmaning uchlarida: $z_3=z(0,-3)=6$, $z_4=z(0,0)=0$.

OA to'g'ri chiziqda, $y=0$ bo'lib, $z=x^2+x$ ni hosil qilamiz. $z'_x=2x+1=0$, $x=-\frac{1}{2}$, $z''_{xx}=2$, ya'ni $M_3\left(-\frac{1}{2},0\right)$ lokal minimum nuqtasi bo'lib, unda $z_5=z\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$. A nuqtada: $z_6=z(-3,0)=6$.

AB kesmaning tenglamasi $x+y=-3$ bo'lib, undan $y=-x-3$; $z=3x^2+9x+6$, $z'_x=6x+9$, $x=-\frac{3}{2}$, $M_4\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ statsionar nuqtaga ega bo'ldik: $z_7=z\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$. Funksiyaning AB kesma uchlaridagi qiymatlari yuqorida aniqlangan edi.

Berilgan z funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini solishtirib, funksiya $A(-3;0)$ va $B(0;-3)$ nuqtalarda, eng katta $z_{\text{eng katta}}=6$ va $M_1(-1,-1)$ statsionar nuqtada, eng kichik $z_{\text{eng kichik}}=-1$ qiymatlarga erishishini aniqlaymiz (1-chizma).



1-chizma.

5.3.11-masala. Quyidagi skalar maydonning berilgan nuqtadagi gradiyenti, berilgan yo‘nalishdagi hosilasini toping:

5.3.11.1. $u(x,y)=x^2-2xy+3y-1,\ grad u\,|_{M(x,y)}=?$

5.3.11.2. $u(x,y)=5x^2y-3xy^3+y^4,\ \ grad u\,|_{M(x,y)}=?$

5.3.11.3. $u=x^2+y^2,\ grad u|_{(3;\,2)}=?$

5.3.11.4. $u=\sqrt{4+x^2+y^2},\ grad u|_{(2,1)}?$

5.3.11.5. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\qquad grad u|_{(x_0;y_0)}=?$

5.3.11.6. $u=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ skalyar maydoning $(1,1)$, $(3,4)$ nuqtalardagi gradiyentlari orasidagi burchakni toping.

5.3.11.7. $z_1=\sqrt{x^2+y^2},\quad z_2=x-3y+\sqrt{3xy}$ funksiyalarning $(3,4)$ nuqtadagi gradiyentlari orasidagi burchakni toping.

5.3.11.8. $grad(\varphi\psi)=\varphi\, grad\psi+\psi\, grad\varphi$ tenglikni isbotlang.

5.3.11.9. $z=\varphi(u,v),\ u=\psi(x,y),\ v=\zeta(x,y)$ funksiyalar berilganda $grad\, z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}grad u+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}grad v$ tenglikning to‘g’riligini ko‘rsating.

5.3.11.10. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ funksiyaning $u=2\ln 2-\ln(grad u)^2$ munosabatni qanoatlantirishini ko‘rsating.

5.3.11.11. $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ funksiyaning $M(3;1)$ nuqtadagi shu nuqtadan $N(6;5)$ nuqtaga qarab yo‘nalgan, yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.12. $z=\operatorname{arctg}xy$ funksiyaning $(1,1)$ nuqtadagi, shu nuqtadan birinchi chorak bissektrissasi yo‘nalishi bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.13. $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ funksiyaning (2.1) nuqtadagi shu nuqtadan koordinatalar boshiga qarab yo‘nalgan, yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.14. $z=\ln(e^x+\ln^y)$ funksiyaning koorinatalar boshidagi abssissa o‘qi bilan φ burchak tashkil qilgan nurning yo‘nalishi bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.15. $f(x,y)=x^3-y^3$ funksiyaning (2,-1) nuqtadagi $\bar{n}=(1,-2)$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping

5.3.11.16. $f(x,y)=xe^y$ funksiyaning (3,0) nuqtadagi $\vec{n}=(4,-3)$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.17. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ funksiyaning (2,3,4) nuqtadagi $\vec{n}=(2,-2,1)$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.18. $f(x,y,z)=e^{x+z}\cos y$ funksiyaning (1;0;4) nuqtadagi $\vec{n}=(1;1;1)$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.19. $f(x,y,z)=3x^2y^2+2yz$ funksiyaning (-1,0,4) nuqtadagi $\vec{n}=(-1,3,3)$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

5.3.11.20. $f(x,y,z)=x^2-y^2-3$ egri chiziqqa (2,1) nuqtada o‘tkazilgan normal vektorni toping.

5.3.11.21. $u(x,y)=x^3-2xy+3y^3-1$. $gradu\,|_{M(2,1)}=?$

5.3.11.22. $u(x,y)=5x^4y-3xy^3+y^3$, $gradu\,|_{M(x,y)}=?$

5.3.11.23. $u=x^2+y^2+2xy$, $gradu|_{(1,\,2)}=?$

5.3.11.24. $u=\sqrt{4+x^2+y^2}$, $gradu|_{(2,1)}?$

5.3.11.25. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\quad gradu|_{(1,1)}=?$

5.3.11.26-misol. $u=\operatorname{arctg}xy$ skalar maydonning $y=x^2$ parabolaga tegishli nuqtadagi hosilasini shu parabolalar yo‘nalishi bo‘yicha hisoblang (abssissalar o‘qining o‘sishi yo‘nalishida).

Yechilishi. ([9], 2-t., 5- bo‘lim; [30], 14- bo‘lim). $y=x^2$ parabolaga tegishli $P(1,1)$ nuqtadagi $\vec{l}$ yo‘nalish, unga shu nuqtaga o‘tkazilgan urinmaning yo‘nalishi bilan ustma-ust tushadi.

Parabolaga tegishli $P(1,1)$ nuqtadagi $\vec{l}$ urinma Ox o‘q bilan α burchak tashkil qilsin. Hosilaning geometrik ma'nosiga ko‘ra, quyidagiga ega bo‘lamiz: $y' = 2x$, $tg\alpha = y'\big|_{x=1} = 2$.

Urinmaning yo‘naltiruvchi kosunuslarini topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Berilgan $u = \operatorname{arctg} xy$ skalar maydonning $P(1,1)$ nuqtadagi xususiy hosilalarining qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P = \left.\frac{y}{1+(xy)^2}\right|_P = \frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P = \left.\frac{x}{1+(xy)^2}\right|_P = \frac{1}{2}.$$

Topilgan qiymatlarni,

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\alpha$$

formulaga keltirib qo‘yamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

ILOVALAR (O'QITUVCHILAR UCHUN USLUBIY TAVSIYALAR)

1-ILOVA

MUSTAQIL ISHLARINI BAJARISH HAQIDA MA'LUMOTLAR

1. Talabalarning mustaqil ishni bajarishiga uslubiy tavsiyalar

O'zbekiston Respublikasining 1997-yilda Oliy Majlis tomonidan qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni va Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi mamlakatda uzluksiz ta'lim tizimini tubdan isloh qilishning asosiy yo'nalishlarini belgilab berdi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturida chuqur nazariy va amaliy bilimlar bilan bir qatorda tanlagan sohasi bo'yicha mustaqil faoliyat ko'rsata oladigan, o'z bilimi va malakasini mustaqil ravishda oshirib boradigan, masalaga ijodiy yondashgan holda muammoli vaziyatlarni to'g'ri aniqlab, tahlil qilib, sharoitga tez moslasha oladigan mutaxassislarni tayyorlash asosiy vazifalardan biri sifatida belgilangan.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2009-yil 14-avgustdagi 286-son buyrug'ida oliy ta'lim muassasalarida talabalar mustaqil ishini tashkil etish va nazorat qilishga oid qator vazifalar qo'yildi.

Talabaning mustaqil ishi (TMI)-muayyan o'quv dasturida belgilangan bilim, ko'nikma va malakaning malum bir qismini, talaba tomonidan, fan o'qituvchisi maslahati va tavsiyalari asosida, auditoriya va auditoriyadan tashqarida o'zlashtirilishiga yo'naltirilgan, lekin uning bevosita ishtirokisiz bajariladigan tizimli faoliyatdir (*Talabaning mustaqil ishi* -o'quv rejada muayyan fanni o'zlashtirish uchun belgilangan o'quv soatining ajralmas qismi bo'lib, u uslubiy axborot resurslari bilan ta'minlanadigan, hamda reyting tizimi asosida nazorat qilinadigan tizimli faoliyatdir).

1.1.Talabalar mustaqil ishining funksiyalari, maqsadlari va turlari

Hozirgi vaqtda zamonaviy talabaning, o'z bilimini mustaqil to'ldirib, yangilab borish, zarur materialni mustaqil izlash, ijodiy shaxs bo'lish kabi shaxsiy fazilatlariga talab dolzarb hisoblanadi. O'quv jarayonining o'z-o'zini rivojlantiruvchi shaxsga yo'naltirilganligi ilm oluvchining shaxsiy xususiyatlarini e'tirof etgan holda, unga talim olishning yo'llari va usullarini tanlash huquqi berilishi kabilarni hisobga olib, talim jarayonini tashkil etishni taqazo qiladi. Talim jarayonining yangi maqsadi kelajakka yo'naltirilgan, o'zi egallagan tajribadan foydalanib va muayyan vazifani to'g'ri baholagan holda, oldida turgan muammolar va masalalarni yechishga qodir, barkamol shaxsni tarbiyalash vazifasini yechishdan iborat bo'ladi. Bunday masalalarni, talabalarning o'quv materiali ustida mustaqil ishlashi rolini ko'tarmasdan, o'qituvchining mustaqil ish ko'nikmalarini rivojlantirish uchun mas'ulligini oshirmasdan, talabalarning kasbiy o'sishini rag'batlantirmasdan, ularda ijodiy faollik va tashabbuskorlikni tarbiyalamasdan yechish mumkin emas.

Talabaning mustaqil ishi quyidagi funksiyalarni o'z ichiga oladi:

- rivojlantiruvchi (aqliy mehnat madaniyatini oshirish, faoliyatining ijodiy turlariga jalb etish, talabalarning intellektual qobiliyatini oshirish);
- axborot-talim (talabalarning auditoriya mashg'ulotlaridagi mustaqil ish bilan taminlanmagan o'quv faoliyati samara bermaydi);
- yo'naltiruvchi va manfaatlantiruvchi (talim jarayoniga kasbiy tezlanish beradi);
- tarbiyaviy (mutaxassisning kasbiy fazilatlari shakllantiriladi va rivojlantiiladi);
- tadqiqotchilik (kasbiy-ijodiy fikrlashning yangi saviyasi).

Talabalarning mustaqil ishi asosida quyidagi tamoyillar yotadi:

- mustaqillik;
- rivojlanuvchi-ijodiylik yo'naltirilgan;
- maqsadli rejalashtirilganlik;
- shaxsiy faoliyatli yondoshuv.

Talabalarning mustaqil ishi quyidagi maqsadlarni ko'zda tutgan holda o'tkaziladi:

- talabalarning olingan nazariy bilimlari va amaliy malakalarini tizimlashtirish va kengaytirish;
- nazariy bilimlarni chuqurlashtirish va kengaytirish;
- me'yoriy, huquqiy hujjatlar, ma'lumotnomalar va maxsus adabiyotlardan foydalanish malakalarini shakllantirish;
- talabalarning bilimga chanqoqlik qobiliyatlari va faollik; ijodiy tashabbuskorlik, mustaqillik qobiliyatini rivojlantirish;
- mustaqil fikrlashni, o'zini-o'zi rivojlantirish, takomillashtirish qobiliyatlarini shakllantirish;

• tadqiqotchilik malakalarini rivojlantirish. Yuqorida ko'rsatib o'tilgan maqsadlarga erishish uchun talabalar, mustaqil ish rejasi asosida, quyidagi *vazifalarni bajarishlari shart*:

• tavsiya etilgan adabiyotlarni o'rganish;
• glossariyda berilgan asosiy tushunchalarni o'rganish;
• nazorat savollariga javob berish;
• taklif etilgan masalalar, vaziyatlar, keyslarni yechish;
• kontrol ishlar va kurs ishlarini bajarish.

Talabalarning ishi, asosan, quyidagi elementlarni o'z ichiga oladi:

1.O'quv rejasiga muvofiq barcha o'quv fanlari bo'yicha dasturga kirgan materiallarni o'rganish va o'zlashtirish.

2.Yozma kontrol ishlar va kurs ishlarini bajarish.

3. Kurs ishlari, nazorat turlari bo'yicha tayyorgarlik ko'rish va ularni topshirish.

4.Malakaviy bitiruv ishini yozish va himoya qilish.

Talabalarning mustaqil ishi quyidagi shakllarda namoyon bo'ladi:

• individual mashg'ulotlar (uy mashg'ulotlari) talabaga o'z bilimini kengaytirish va mustahkamlash ishida muhim elementdir;
• maruzalarni konspektlashtirish;
• o'rganilayotgan fan bo'yicha yuzaga chiqqan masalalarni hal etish uchun konsultatsiyalar olish;
• test savollariga javoblar tayyorlash;
• o'qitishning interfaol usullari (davra suhbatlari, konferensiyalar, maqsadli o'yinlar va h.k.) qo'llanib o'tiladigan mashg'ulotlarga tayyorlanish;
• kontrol ishlar, kurs ishlari va malakaviy bitiruv ishlarini tayyorlash;
• ilmiy ma'ruzalar, referatlar, esse tayyorlash;
• fanning bazi bo'limlari bo'yicha ishchi vaziyatlarning (mini keyslarning) tahlili.

Talabaning auditoriyadan tashqaridagi mustaqil ishi mazmuni o'quv fanining ishchi rejasiga muvofiq tavsiya qilinadigan topshiriqlardan kelib chiqib aniqlanadi. Auditoriyadan tashqaridagi mustaqil ish uchun ajratiladigan vaqt talabaning kunlik rejasida jadval bilan belgilanmaydi.

Auditoriyadan tashqaridagi mustaqil ish uchun beriladigan topshiriqlarning turi, ularning mazmuni va harakteri variativ, differensial harakterga ega bo'lib, ular mutaxassislikning, o'rganilayotgan fanning hamda talabaning individual qobiliyatlarini hisobga olgan holda aniqlanadi.

Auditoriyadan tashqaridagi mustaqil ish uchun beriladigan topshiriqlarning turlari uchta guruhga bo'linishi mumkin.

I. ***Bilimlarni egallash uchun :***

- matnni o'qish (darslikdan, manbalardan, qo'shimcha adabiyotlardan);
- matn rejasini tuzish;
- matn tuzilmasini grafik tasvirlash;
- matnni konspektlashtirish;
- matndan ko'chirmalar olish;
- lug'atlar va ma'lumotnomalardan foydalanish;
- normativ hujjatlar bilan tanishish;
- tadqiqotchilik ishi;
- audio va video yozuvlardan foydalanish;
- elektron axborot resurslari va internet resurslaridan foydalanish.

*I I. **Bilimlarni mustahkamlash va tizimlashtirish uchun:***

- ma'ruza konspekti bilan ishlash (matnni qayta ishlash);
- o'quv materiali ustida (darslik, manbalar, qo'shimcha adabiyotlar, audio- video yozuvlar vositasida) qayta ishlash;
- javob rejasi va tezislarini tayyorlash;
- o'quv materialini tartibga solish uchun albomlar, sxemalar, jadvallar, rebuslar, krossvordlar tuzish, meyoriy hujjatlarni o'rganish;
- test topshiriqlarini bajarish;
- nazorat savollariga javob berish;
- matnning annotasiyasini (qisqacha mazmunini) yozish, matnga taqriz yozish, referat yozish;
- seminar konferesiyalarda chiqish qilish uchun malumotlar tayyorlash, referatlar, maruzalar tayyorlash;
- muayyan mavzu bo'yicha glossariy, krossvord, yoki bibliografiya tayyorlash;
- kompyuter dasturlari bilan ishlash;
- nazoratlarni topshirishga tayyorgarlik ko'rish.

III. ***Malakalarni shakllantirish uchun:***

- namunadan foydalanib masalalar va mashqlarni yechish;
- variativ masalalar va mashqlarni yechish;
- chizmalar, sxemalar bajarish;
- hisoblash- grafik ishlarini bajarish;
- vaziyatli ishlab chiqarish (kasbiy) masalalarini yechish;
- ish o'yinlariga tayyorgarlik ko'rish;
- ilmiy va amaliy konferensiyalarda ishtirok etish;
- gazeta chiqarish, teleko'rsatuv tayyorlash, ko'rgazma tashkil etish;
- kasbiy faoliyatning har xil ko'rinishlari va komponentlarini loyihalash va modellashtirish;

• prospektlar, loyihalar, modellashtirish;

• eslatmalar, tavsiyalar, maslahatlar, kodekslar tashkil etish;

• kasbiy malakalarni, audio- video texnika va kompyuterlarning hisoblash dasturlari hamda elektron praktikumdan foydalanib, refleksiv tahlil qilish;

• kurs ishlari va malakaviy bitiruv ishlari.

Mustaqil o‘quv mashg‘ulotlarining to‘g‘ri tashkil etilishi, ularning, ish vaqtining maqsadli rejalashtirilishi talabalarda o‘quv jarayonida bilimlarni o‘rganish, o‘zlashtirish va tizimlashtirish malakalari va ko‘nikmalarini shakllantirish, o‘quv jarayonida yuqori saviyali o‘zlashtirishni taminlash, o‘z mehnat faoliyatida kasbiy saviyani uzluksiz orttirib borish ko‘nikmalari paydo bo‘lishini taminlaydi.

1.2. Talabalar mustaqil ishini rejalashtirish

Oliy ta'lim muassasasida amalga oshiriladigan o‘quv jarayonida mustaqil ishning ikki turi ko‘zda tutiladi: *auditoriyada* bajariladigan mustaqil ishlar va *auditoriyadan tashqarida* bajariladigan mustaqil ishlar.

Auditoriyada bajariladigan mustaqil ish – fan bo‘yicha dars mashg‘ulotlari vaqtida o‘qituvchining bevosita rahbarligida u bergan topshiriqlarni bajarishda talaba tomonidan amalga oshiriladigan faoliyatdan iborat.

Auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ish – talaba tomonidan fan bo‘yicha dars mashg‘ulotlaridan boshqa vaqtda o‘qituvchining bevosita ishtirokisiz, u bergan topshiriqlarni bajarishda amalga oshiriladigan ish turlarini o‘zida mujassam etadigan faoliyatdir.

Ishchi o‘quv rejalarni ishlab chiqish jarayonida quyidagilar aniqlanadi:

• umumiy nazariy ta'lim bo‘yicha auditoriyadan tashqarida bajariladi-gan mustaqil ishga ajratiladigan umumiy vaqt hajmi (umumiy nazariy ta'limga ajratilgan maksimal vaqt hajmi va majburiy o‘quv yuklamasiga, fakultativ fanlar, nazariy ta'lim bo‘yicha konsultatsiyalarga ajratilgan vaqt hajmi orasidagi farq);

• fanlar sikllari bo‘yicha, talabalarning tayyorgarlik saviyasini, siklga kirgan fanlarning murakkabligi va hajmini hisobga olgan holda, talabalarning auditoriyadan tashqarida bajaradigan mustaqil ishiga ajratilgan vaqt hajmi;

• talabalarning o‘quv fanini o‘zlashtirish saviyasiga bog‘liq ravishda, talabalarning tayyorgarligiga qo‘yilgan talablarni hisobga olgan holda, fan bo'yicha auditoriyadan tashqarida bajaradigan mustaqil ishiga ajratilgan vaqt hajmi.

Talabaning fan bo'yicha auditoriyadan tashqarida bajaradigan mustaqil ishiga ajratilgan vaqt hajmini rejalashtirish o'qituvchi tomonidan amalga oshiriladi va kafedrada tasdiqlanadi.

Talabalarning alohida olingan fan bo'yicha auditoriyadan tashqarida bajaradigan mustaqil ishiga ajratilgan soatlar soni, fan bo'yicha belgilangan umumiy soatlar soni va fan bo'yicha majburiy o'quv yuklamasi (auditoriya soatlari) orasidagi farqdan iborat bo'ladi.

O'qituvchi tomonidan o'quv fanining ishchi rejasini ishlab chiqish vaqtida, auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ish mazmunini rejalashtirishda, nazariy o'quv mashg'ulotining mazmuni va hajmi hamda auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ishga ajratiladigan har xil shakllari va usullari belgilanadi. Dasturning mustaqil ish uchun qandaydir miqdordagi soatlar ajratilgan har bir mavzusi bo'yicha bu soatlar bajariladigan ishlar turi bo'yicha taqsimlangan bo'lishi kerak. Bunda:

- mustaqil ishning qaysi turi (tavsiya etilgan adabiyotni o'qish,uni yozma ravishda tahlil etish, masalalar yechish, taklif qilingan savollarga yozma javoblar yozish, kompyuter praktikumlarini, testlarni bajarish, seminarlar, konferensiyalarda chiqishlar qilishga tayyorlanish va h.k.) ko'zda tutilishi;
- nazoratning qanday shakli va qaysi muddatda o'tkazilishi ko'rsatilishi lozim.

Talabalarning auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ishlarini rejalashtirishda quyidagilarga ***asosiy e'tibor*** qaratilishi lozim: ayrim topshiriqlarni bajarish uchun sarf qilinadigan vaqt normalari; rejalashtirilgan qiyinchiliklar talabalarning har haftalik vaqt byudjetiga mosligi; yuklamalarning o'quv yili davomida tekis taqsimlanganligi (topshiriqlarning bajarilishi va nazorat muddatlarini boshqa parallel ravishda o'rganiladigan fanlar bilan muvofiqlashtirish).

1.3.Talabalarning auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ishini tashkil etish

Talaba ma'lum bir fanni o'rganishga kirishishida, shu fanni o'zlashtirish bo'yicha metodik tavsiyalar, fan dasturining talablari bilan diqqat bilan tanishishib chiqishi lozim.

Talabalar mustaqil ishini bajarishga ko'mak beruvchi ***metodik materiallar*** quyidagilardan iborat:

• yo'nalish (mutaxassislik)ning asosiy ta'lim dasturlari to'plami;

• amaliy, seminar va laboratoriya mashg'ulotlari uchun uslubiy ko'rsatmalar;

• fan bo'yicha o'quv-uslubiy majmuaning qismi (uy vazifalarini yechishga doir misollar, ishchi daftarlar va laboratoriya hamda hisoblash-grafik ishlarini rasmiylashtirish, elektron axborot resurslaridan foydalanish namunalari);

• kurs ishlari va malakaviy bitiruv ishlarini bajarish bo'yicha uslubiy tavsiyalar;

• fanning ishchi dasturida tavsiya etilgan asosiy va qo'shimcha adabiyotlar ro'yxati.

Mustaqil ishni tashkil etish jarayoni quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1. Fan bo'yicha mustaqil ish rejasini tuzish.
2. Mustaqil ish topshiriqlarini ishlab chiqish va tarqatish.
3. Topshiriqlarni bajarish bo'yicha konsultatsiyalar tashkil etish (og'zaki instruktaj, yozma yo'riqnoma).
4. Mustaqil ishning bajarilishi va natijasining nazorati.

Mustaqil ish rejasini tuzishda har bir mavzuga ajratilgan soatlar albatta, ko'rsatilishi shart. Bunda soatlar taqsimoti mavzuning murakkabligi, mavzu bo'yicha o'quv materiallarining mavjudligiga bog'liq ravishda amalga oshiriladi.

Auditoriyadan tashqarida bajariladigan mustaqil ish topshiriqlarini berishda talabalarga differensialiashgan yondoshuv tavsiya etiladi.

Talabalar tomonidan mustaqil ishning bajarilishi oldidan o'qituvchi tomonidan ishni bajarish bo'yicha og'zaki *instruktaj* o'tkaziladi. Unda topshiriqning maqsadi, uning mazmuni, bajarilishi muddati, ishning taxminiy hajmi, ishning natijalariga qo'yilgan asosiy talablar, uni baholash mezoni haqida batafsil ma'lumot beriladi. Og'zaki instruktaj o'qituvchi tomonidan *fanga ajratilgan vaqt hajmi* hisobidan o'tkaziladi.

Talabalarning mustaqil ishini ikkita katta guruhga bo'lish mumkin: ***majburiy mustaqil ish*** va ***nazorat qilinadigan mustaqil ish***.

Majburiy mustaqil ish talabaning joriy auditoriya mashg'ulotlariga tayyorgarligini ta'minlaydi. Bu tayyorgarlikning natijalari, talabaning mashg'ulotlardagi faolligi va u tomonidan qilingan ma'ruzalarning, bajarilgan kontrol ishlarning, test topshiriqlarining sifati va boshqa shakldagi joriy nazoratlarda namoyon bo'ladi. Auditoriyadagi ish natijalari bo'yicha talaba tomonidan olingan ballar talabaning fan bo'yicha joriy o'zlashtirishining reyting bahosini shakllantiradi.

Nazorat qilinadigan mustaqil ish talaba bilimining chuqurlashtirilishi va mustahkamlanishiga, fan muammolari bo'yicha analitik ko'nikmalarni rivojlantirishga yo'naltirilgandir. Bunday shakldagi mustaqil ishni yakunlash va uning natijalari nazorati o'qituvchi bilan muloqot soatlarida amalga oshiriladi. Ishning bunday turlari bo'yicha olingan balllar, nazorat qilinadigan mustaqil ish bo'yicha bahoni shakllantiradi va ular fan bo'yicha yakuniy attestasiya jarayonida hisobga olinadi.

Talabalar mustaqil ishini tashkil etish uchun quyidagi *vositalar*dan foydalaniladi: ish daftarlari, topshiriqlar varaqalari, audio-video-yozuvlar, ma'ruzalar matnlari, masalalar to'plamlari, o'quv qo'llanmalar, jadvallar, sxemalar, testlar, kompyuter sinflari, metodik kabinetlar.

1.4. Talaba mustaqil ishining axborot ta'minoti

4.1. Talaba uchun muayyan fan bo'yicha mustaqil ish topshiriqlari tegishli kafedra professori (yoki yetakchi dosenti) tomonidan o'quv mashg'ulotlarini bevosita olib boruvchi o'qituvchi bilan birgalikda tuziladi hamda kafedra mudiri tomonidan tasdiqlanadi. Talabaga berilgan topshiriqda mustaqil ishni bajarish bo'yicha dastlabki ko'rsatma va tavsiyalar qayd etiladi.

4.2. Mustaqil ishni bajarish uchun talabaga axborot manbai sifatida darslik va o'quv qo'llanmalar, uslubiy qo'llanmalar va ommaviy, davriy nashrlar, internet tarmog'idagi tegishli ma'lumotlar, berilgan mavzu bo'yicha avval bajarilgan ishlar banki va boshqalar xizmat qiladi.

4.3. Kafedra mudiri va tegishli fakultet dekani taqdimnomasi asosida universitet rahbariyati (rektor, vakolat berilgan prorektorlar) talabalarga mustaqil ishlarni bajarish uchun zaruriy axborot manbai va vositalarini belgilaydi, talabalarga turli kutubxonalar, muzeylar, tarmoq muassasalari va korxonalaridan mustaqil ish uchun zaruriy malumotlar to'plash yuzasidan so'rovnoma xatlarini rasmiylashtirib beradi.

4.4. Universitet rahbariyati tomonidan (rektor, vakolat berilgan prorektorlar) talabalarga mustaqil ishlarni o'z vaqtida bajarish uchun kompyuter texnikasi va internet tarmog'idan samarali foydalanish uchun shart-sharoitlar yaratib beriladi.

1.5. Talabalarning mustaqil ish bo'yicha faoliyatining turlari, nazorat va himoya shakllari

5.1. Talabalar mustaqil ishlari nazorati usullarning o'ziga xosligiga ko'ra ikki turga ajratiladi:

1). Dars mashg'ulotlarida (auditoriya soatlarida) o'tilgan mavzularni takrorlab qayta ishlash, chuqurlashtirish va mustahkamlash;

2). Mustaqil ravishda yangi mavzularni o'zlashtirish va ijodiy ishlarni bajarish.

Birinchi tur ishlar bo'yicha talabalarning nazariy va amaliy bilimlarni o'zlashtirib borish darajasini, amaliy mashg'ulotlarga (amaliyot, laboratoriya, seminar darslari) tayyorgarlik saviyasini va uy vazifalarining bajarilish sifatini tekshirish, odatda,, nazorat ishlari va kollokvium olish, savol-javob, suhbat, munozara, amaliy topshiriqlarni bajartirib ko'rish va h.k. usullarda, asosan, amaliyot darslari paytida nazorat (joriy nazorat) qilinadi. Joriy nazoratda talabaning dars paytida o'tilgan materiallarni o'zlashtirish va uyga berilgan topshiriqlarni bajarishdagi faolligi, bajarish saviyasi va o'zlashtirish darajasi, shuningdek, davomati e'tiborga olinadi.

Ikkinchi tur ishlar (mustaqil ta'lim olish) fan bo'yicha o'quv dasturida auditoriya darslarida o'tish mo'ljallanmagan yangi mavzu yoki darsda qisqa bilim berilgan mavzular bo'yicha ma'lumot va axborotlarni mustaqil ravishda izlab topish, tahlil qilish, konspektlashtirish (yoki referat tarzida rasmiylashtirish) va o'zlashtirish, ijodiy yondoshishni talab qiladigan nostandart amaliy topshiriqlarni bajarish ko'rinishida amalga oshiriladi. Bu turdagi ishlarni bajarish jarayoni, bajarish va o'zlashtirish sifatining nazorati darsdan tashqari paytlarda, maxsus belgilangan konsultatsiya soatlarida (amaliyot yoki ma'ruza o'qituvchisi) tomonidan amalga oshiriladi.

5.2. Har bir fan bo'yicha talaba mustaqil ta'limiga rahbarlik qilish yuklamasi o'quv rejasining 10-ustunida keltirilgan soatlar hamda talabalar sonidan kelib chiqib, vaqt me'yorlari asosida aniqlanadi va professor-o'qituvchi shaxsiy ish rejasining tashkiliy-uslubiy bo'limida (1540 soat doirasida) qayd etiladi.

Talaba kurs ishini (loyihasi)ni hamda malakaviy bitiruv ishini tayyorlashga ajratilgan soatlar, professor-o'qituvchi shaxsiy ish rejasining o'quv ishlari bo'limida qayd etiladi.

5.3. Talaba mustaqil ishiga rahbarlik qilish kafedrada tuziladigan va fakultet dekani tomonidan tasdiqlanadigan konsultatsiyalar jadvali asosida amalga oshiriladi.

5.4. Talabaning mustaqil ishi bo'yicha konsultatsiya soatlari guruh jurnalida qayd etib boriladi.

5.5. Talabaning mustaqil ishini baholash "Talaba bilimini nazorat qilish va baholashning reyting tizimi haqida Nizom" asosida amalga oshiriladi.

Talabaning o'zlashtirish ko'rsatkichlari an'anaviy guruh reyting oynasida yoki fakultetning maxsus elektron tarmog'ida yoritib boriladi.

5.6. Talaba mustaqil ishini nazorat qilish turlari va uni baholash mezonlari OTMda ishlab chiqilgan Nizom asosida tegishli kafedra tomonidan belgilanadi va fakultet ilmiy kengashida muhokama qilingandan so'ng, OTM bo'yicha muvofiqlashtirilgan varianti OTMning o'quv-uslubiy va ilmiy kengashlarida tasdiqlanadi. Mustaqil ishlarni baholash mezonlari talabalarga o'quv yili (semestri) boshlanishi oldidan metodik materiallar bilan birgalikda tarkatiladi.

5.7. Talabaning mustaqil ravishda bajargan topshiriqlarining yozma bayoni (ma'ruza va referat matnlari, konspektlar, topshiriq daftarlari, kurs ishlari, nazorat ishlari, ijodiy ishlar, taqrizlar va maqolalar va h.k.) kafedraga topshiriladi, qat'iy grafik bo'yicha kafedra komissiyasida himoya qilinadi. Himoya paytida talaba ishning mazmuni va mohiyatini gapirib berishi, savollarga javob berishi, tushuntirib va asoslab bera olishi, topshiriqlarni chuqur o'zlashtirganligini namoyish qilishi, topshiriq bo'yicha bilimlarni haqiqatan ham mustaqil ravishda bajarganligini isbotlay olishi lozim.

Himoyada maruza va amaliyot o'qituvchilari bilan bir qatorda kafedradan yana kamida bir kishi (ekspert) ishtirok etadi. Ekspert himoyagacha bajarilgan topshiriqning yozma bayonini (referat, konspekt, ma'ruza, maqola, amaliy topshiriqlar bajarilgan daftar, ijodiy ish namunalari va h.k.) ko'rib chiqib, qisqacha xulosa (taqriz) beradi va talabaning mustaqil bilim olish bo'yicha faoliyatini baholashda ushbu xulosa e'tiborga olinadi.

5.8. Talabalarning mustaqil ishlari bo'yicha o'zlashtirishi muntazam ravishda talabalar guruhlarida, kafedra yig'ilishlari va fakultet ilmiy kengashlarida muhokama etib boriladi.

5.9. Talabaning mustaqil ishi kafedra arxivida ro'yxatga olinadi va ikki yil mobaynida saqlanadi.

Talabaning kurs ishi (loyihasi)ni hamda malakaviy bitiruv ishi yoki magistrlik dissertatsiyasini ro'yxatga olish va saqlash tartibi tegishli me'yoriy hujjatlar asosida amalga oshiriladi.

5.10. OTMda talabalarning yuqori darajada baholangan mustaqil ishlari ma'naviy va moddiy jihatdan rag'batlantiradi.

5.11.Talaba mustaqil ishini tashkil etish, zaruriy o'quv-uslubiy ishlanmalar, topshiriqlar va nazorat materiallarini tayyorlash, boshqarish hamda nazorat qilishda yaxshi natijalarga erishgan kafedra mudirlarining (dekanat tomonidan) va o'qituvchilarning (tegishli kafedra mudiri tomonidan) ustama haq belgilash uchun aniqlanadigan reytinglariga bir talabaga, mos ravishda, 0,1 va 0,5 ball hisobida ballar qo'shish bilan rag'baglantiriladi.

1.6. Talabalar mustaqil ta'limini baholash mezoni

6.1. Talabalarning mustaqil ishi bo'yicha faoliyati o'zlashtirish ko'rsatkichi (%) bo'yicha quyidagicha sifatlanadi:

86 - 100 foiz – "a'lo";
71 - 85 foiz – "yaxshi";
55 - 70 foiz – "qoniqarli";
40 - 54 foiz – "qoniqarsiz";
40 dan past – "yomon".

Agar bir fan bo'yicha bir nechta topshiriq berilgan bo'lsa, umumiy baho har bir topshiriq uchun o'yilgan baholarning o'rtachasi sifatida aniqlanadi. Talabaning mustaqil ta'lim bo'yicha ko'rsatkichini aniqlash tartibi «Talabalar bilimini baholashning reyting tizimi haqida» Nizomga ko'ra aniqlanadi.

6.2. Ballar butun sonlarda ifodalanadi. Agar sonning kasr qismi 0.5 va undan yuqori bo'lsa, to'ldirib yoziladi (masalan: 73,5= ... = 73,9 = 74), 0,5 dan kichik bo'lsa, tashlab yuboriladi (masalan: 67,1 = ... = 67,4 = 67).

6.3. Muayyan fanga doir mustaqil ish (joriy o'zlashtirish va mustaqil ta'lim) bo'yicha "qoniqarsiz" baho olgan talaba shu fandan yakuniy sinovlarga qo'yilmaydi.

6.4. «A'lo» baho- berilgan barcha topshiriqlarni belgilangan muddatda, to'liq, to'g'ri va sifatli bajargan, ishga qiziqish va mas'uliyat bilan yondoshgan, yetarli darajada nazariy va amaliy bilimlarga ega ekanligini, masalaga ijodiy yondosha olishini ko'rsata olgan talabaga qo'yiladi.

«Yaxshi» baho-topshiriqlarni to'liq va to'g'ri bajargan, lekin ayrim kamchiliklarga yo'l qo'ygan, topshirilgan vazifani asosan mustaqil bajargan, yaxshi nazariy va amaliy bilimlarga ega ekanligini ko'rsatgan, ishga yetarlicha mas'uliyat bilan yondoshgan talabaga qo'yiladi.

"Qoniqarli" baho-topshiriqlarni umuman bajargan, lekin yetarlicha mustaqillik va faollik ko'rsatmagan, qator topshiriqlarni muddatidan kechiktirib bajargan, nazariy va amaliy bilim darajasi o'rtacha ekanligini namoyon etgan talabaga qo'yiladi.

"Qoniqarsiz" baho-topshiriqlarni talab darajasida bajarmagan, ishga yetarli darajada mas'uliyat bilan yondoshmagan, nazariy va amaliy bilimi past saviyada ekanligini ko'rsatgan talabaga qo'yiladi.

"Yomon" baho-topshiriqlarni umuman bajarmagan yoki juda kam qismini bajargan, ishga mas'uliyatsizlik bilan yondoshgan, nazariy va amaliy bilim darajasi me'yordan ancha past bo'lgan talabaga qo'yiladi. "Yomon" ko'rsatkich bergan talabaning o'quv ishlari bo'yicha faoliyatini alohida o'rganish ko'zda tutiladi.

2-ILOVA

Fanning ma'ruzalar bo'yicha mazmuni (ishchi reja)
1-semestr uchun

№	Ma'ruzaning nomi	Soatlar miqdori	Mustaqil ish	Adabiyotlar (raqami va sahifa)
1- bo'lim	**To'plamlar. Haqiqiy sonlar.**	**10**	**6**	
1-ma'ruza	To'plam. To'plamlar ular ustida amallar va ularning xossalari.	2	1	[1], 1-q., 3-bo'lim, [3], 1-q., 5–9-b., [12], 1-q., 6–11-b..
2-ma'ruza	Ratsional sonlar to'plami va uning xossalari. Irratsional sonning ta'rifi.	2	1	[1], 1-q., 3-bo'lim, [3], 1-q., 16–19-b., [12], 1-q., 21–34-b., [10], 1-q., 16–22-b., [5], 1-t.,11–19-b..
3-ma'ruza.	Haqiqiy son tushunchasi. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari.	2	2	[1], 1-q., 4-bo'lim, [3], 1-q., 19–21-b., [12], 1-q., 34–38-b., [10],1-q., 48–52, 57–61-b., [5], 1-t., 19-22-b..
4-ma'ruza.	Haqiqiy sonlar ustida amallar. Sonli to'plamlarning chegaralari	2	1	[1], 1-q., 4-bo'lim, [3], 1-q., 22–31-b., [12], 1-q., 38–54-b., [10]. 1-q., 52–54-b., [5], 1-t., 24–31-b..
5-ma'ruza.	Haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi haqidagi teorema.	2	1	[1], 1-q., 4-bo'lim, [8], 19–24-b., [12], 1-q., 35–38-b. [10], 1-q., 79–82-b., [5], 1-t..24–25-b..
2- bo'lim.	**Sonli ketma-ketliklar**	**12**	**9**	
6-ma'ruza.	O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Sonli ketma-ketlikning limiti.	2	2	[1], 1-q., 5–6-bo'lim, [3], 1-q., 37–43-b., [12], 1-q., 63–72-b., [5], 1-t., 41–47-b., [10], 1-q., 68–69-b..
7-ma'ruza.	Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar	2	1	[1], 1-q., 5–6-bo'lim, [3], 1-q., 44–49-b., [12], 1-q., 72–81-b., [5], 1-t., 68–75-b., [10], 1-q., 75–78-b..

8-ma'ruza.	Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar hamda ular orasidagi bog'lanishlar	2	1	[1], 1-q., 5–6-bo'lim, [3], 1-q., 49–51-b., [12], 1-q., 81–86-b.. [10]. 1-q., 68–75-b., [5].1-t..47–48. 54–56-b..
9-ma'ruza.	Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti haqidagi teorema hamda bu teoremaning tatbiqlari	2	2	[1], 1-q., 5-6-bo'lim, [3]. 1-q., 51–56-b., [12]. 1-q., 86–98-b., [10]. 1-q., 83–92-b., [5]. 1-t., 70–82-b..
10-ma'ruza.	Ichma -- ich joylashgan segmentlar prinsipi. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtras lemmasi.	2	2	[1], 1-q., 5–6-bo'lim, [3], 1-q., 56–58-b., [12], 1-q., 72–86, 98–101-b., [5], 1-t., 82–84, 85–92-b.. [10], 1-q., 92-102-b.,
11-ma'ruza.	Koshi teoremasi. Ketma- ketlikning quyi va yuqori limitlari.	2	1	[1]. 1-q., 5–6-bo'lim, [3], 1-q., 58–62-b., [12], 1-q., 86–98, 101–108b, [5], 1-t., 83–85-b.. [10], 1-q., 102–105-b..
3-,4-bo'limlar.	**Funksiya. Funksiyaning limiti va uzluksizligi**	**20**	**13**	
12-ma'ruza.	Funksiya tushunchasi va uning berilish usullari. Teskari funksiya.	2	1	[1]. 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 63–70-b., [12]. 1-q., 109–126-b., [5]. 1-t., 93–102. 108–151-b., [10]. 1-q., 105–109-b..
13-ma'ruza	Asosiy elementar funksiyalar va ularning xossalari.	2	2	[1], 1-q., 9-bo'lim; [3], 1-q., 70–74-b.; [12]. 1-q., 121–126-b., [5], 1-t., 102–108, 114–115-b., [10], 1-q., 105–109-b..
14-ma'ruza.	Funksiyaning limiti. Limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. Aniqmas ifodalar.	2	2	[1], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 75–87-b., [12], 1-q., 127–142-b., [5], 1-t., 115–117, 128–130-b., [10], 1-q., 109–115-b..
15-ma'ruza.	Monoton funksiyaning limiti. Koshi teoremasi.Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni taqqoslash. Funksiyalarni taqqoslash	2	1	[1], 1-q., 9-bo'lim. [3], 1-q., 88–96-b., [12], 1-q., 141–150 b [5], 1-t., 133–146-b., [10], 1-q., 105–119-b..

16-ma'ruza.	Ajoyib limitlar.	2	1	[1], 1-q., 9-bo'lim. [12], 1-q., 134–136, 162–164-b., [5], 1-t., 122–155-b., [10], 1-q., 158–162-b..
17-ma'ruza.	Funksiyaning uzluksizligi. Funksiya-ning uzluksizligi ta'riflari. Funksiya ning uzilishi va turlari. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar.	2	1	[1], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 97–102-b., [12], 1-q., 151–161, [5], 1-t., 146–154-b..
18-ma'ruza.	Uzluksiz funksiyaning lokal va global xossalari.	2	1	[1], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 103–109-b., [12], 1-q., 164–170-b., [5], 1-t., 168–178-b., [10], 1-q., 167–176-b..
19-ma'ruza.	Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.	2	2	[1], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 102–103-b., [12], 1-q., 158–159, 161–164-b., [5], 1-t., 154–167-b., [10], 1-q., 162–167-b..
20-ma'ruza.	Tekis uzluksizlik tushunchasi va Kantor teoremasi.	2	1	[1], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 110–113-b., [12], 1-q., 170–176-b., [5], 1-t., 178–185-b., [10], 1-q., 176–181-b..
21-ma'ruza.	Funksiyaning uzluksizlik moduli va uning xossalari.	2	1	[1], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 113–115-b., [12], 1-q., 174–176-b., [10], 1-q., 181–184-b..
	5-,6-bo'limlar. Funksiyaning hosilasi va differensiali, differensial hisobning ba'zi tatbiqlari	**20**	**12**	
22-ma'ruza.	Funksiyaning hosilasi. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 120–124-b., [12], 1-q., 182–188, 196–202-b., [5], 1-t., 186–193-b., [10], 1-q., 189–193-b..
23-ma'ruza.	Hosilani hisoblashning sodda qoidalari. Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 124–128-b., [12], 1-q., 190–196-b., [5], 1-t., 199–202-b., [10], 1-q., 202–212-b..

24-ma'ruza.	Teskari funksiyaning hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 128–133-b., [12], 1-q., 190–196-b., [5], 1-t., 196–198, 202–204-b., [10], 1-q., 197–200-b..
25-ma'ruza.	Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.	2	2	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 139–151-b., [12], 1-q., 196–210-b., [5], 1-t., 211–220-b., [10], 1-q., 193–197, 215–220-b..
26-ma'ruza.	Differensial hisobning asosiy teoremalari.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 133–139-b., [12], 1-q., 210–214-b., [5], 1-t., 223–231-b., [10], 1-q., 224–229-b..
27-ma'ruza.	Teylor formulasi.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 151–157-b., [12], 1-q., 214–226-b., [5], 1-t., 246–257-b., [10], 1-q., 248–256-b..
28-ma'ruza.	Hosila yordamida funksiyaning o'zgarishini tekshirish.	2	2	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 158–159-b., [12], 1-q., 227–229-b., [5], 1-t., 268–273-b., [10], 1-q., 262–263-b..
29-ma'ruza.	Funksiyaning ekstremum qiymatlarini hosila yordamida aniqlash.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 160–164-b., [12], 1-q., 230–237-b., [5], 1-t., 276–281-b., [10], 1-q., 263–271-b..
30-ma'ruza.	Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Funksiyani hosila yordamida to'liq tekshirib, uning grafigini yasash.	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 165–170-b., [12], 1-q., 238–246-b., [5], 1-t., 294–306-b., [10], 1-q., 271–279-b..
31-ma'ruza.	Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari	2	1	[1], 1-q., 10-bo'lim, [3], 1-q., 171–176-b., [12], 1-q., 246–256-b., [5], 1-t., 314–324-b., [10], 1-q., 235–245-b..
	Jami	**62**	**40**	

2-semestr uchun

№	Ma'ruzaning nomi	Soatlar miqdori	Mustaqil ish	Adabiyotlar (raqami va sahifa)
7-bo'lim	**Aniqmas integrallar**	**16**	**12**	
1-ma'ruza	Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi. Aniqmas integralning asosiy xossalari.	2	2	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 177–182-b., [12].1-q.. 257–261-b., [5], 2-t., 11–17-b., [10], 1-q., 291–294-b..
2-ma'ruza	Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali. Aniqmas integralda uzgaruvchilarni almashtirish.	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 182–187-b., [12], 1-q., 261–263. [5], 2-t., 17–31-b., [10], 1-q., 294–300-b..
3-ma'ruza.	Aniqmas integralda bo'laklab integrallash.	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q.. 187–190-b., [12], 1-q., 263–265 [5], 2-t., 31–33-b., [10], 1-q., 300–303-b..
4-ma'ruza.	Ratsional funksyani integrallash. Ko'p hadlar va uning ildizlari haqida. Sodda kasrlar. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlarga ajratish.	2	2	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q.. 192–200-b., [12]. 1-q., 266–273,-b., [5], 2-t., 36–47-b., [10], 1-q., 303–318-b..
5-ma'ruza.	Sodda kasrlarni integrallash. Ratsional funksyalarni integrallash. Ratsional funksiyalarni integrallash uchun Ostrogradskiy usuli.	2	2	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3]. 1-q., 190–192-b., [12], 1-q., 273–276, [5], 2-t., 36–47-b., [10], 1-q., 303–321-b..
6-ma'ruza.	Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash.	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim. [3], 1-q., 203–207-b., [12], 1-q., 276–283-b., [5], 2-t., 50–51, 56–59-b.. [10], 1-q., 321-327-b..
7-ma'ruza.	Binominal differensiallarni integralash.	2	2	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 207–210-b., [12], 1-q., 283–285-b., [5], 2-t., 51–54-b., [10], 1-q., 321–327-b..

8-ma'ruza.	Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 200–203-b., [10], 1-q., 321–327-b., [5], 2-t., 74–83-b..
8-bo'lim	**Aniq integral. Aniq integralning ba'zi bir tatbiqlari.**	**16**	**11**	
9-ma'ruza.	Aniq integralning ta'riflari. Darbu yig'indilari.	2	2	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 211–221-b., [12], 1-q., 288–301-b., [5], 2-t., 94–100-b., [10], 1-q., 330–335-b..
10-ma'ruza.	Aniq integralning mavjudligi. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 221–227-b., [12], 1-q., 308–314-b., [5], 2-t., 100–104-b., [10], 1-q., 335–344-b..
11-ma'ruza.	Aniq integralning xossalari.	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 230–241-b., [12], 1-q., 314–322-b., [5], 22-t., 108–115-b., [10], 1-q., 347–357-b..
12-ma'ruza.	Chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar. Uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasining mavjudligi. Nyuton-Leybnis formulasi.	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 241–245-b., [12], 1-q., 324–330-b., [5], 2-t., 115–124b., [10], 1-q., 357–360-b..
13-ma'ruza	Aniq integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bo'laklab integrallash usuli	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 245–252-b., [12], 1-q., 331–334-b., [5], 2-t., 134–141-b., [10], 1-q., 357–363-b..
14-ma'ruza.	Aniq integralning ba'zi bir tatbiqlari. Aniq integral yordamida tekis shaklning yuzini hisoblash. Aniq integral yordamida chiziqning yoyi uzunligini hisoblash	2	2	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 1-q., 261–282-b., [12], 1-q., 352–362-b., [5], 2-t., 169–195-b., [10], 1-q., 391–418-b..
15-ma'ruza.	Aniq integral yordamida aylanma jismning hajmini hisoblash. Aniq integral yordamida aylanma jism sirtining yuzini hisoblash	2	2	[3], 1-q., 283–288-b., [12], 1-q., 371–372-b., [5], 2-t., 202–222-b., [10], 1-q., 418–421-b..

16-ma'ruza.	Aniq integralning mexanika masalalariga tatbig'i. Silliq egri chiziqning statik momenti va og'irlik markazi. Tyekis figuraning statik momentlari va og'irlik markazi. Aniq integralning fizika masalalariga tatbiqlari	2	1	[9], 1-q., 9-bo'lim, [3], 2-q., 288–293-b., [12], 1-q., 374–376, 376–379-b., [5], 2-t., 225–239-b..
8-bo'lim	**Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar**	**28**	**17**	
17-ma'ruza.	R^m fazo va unda metrika tushunchasi. R^m fazoda sonlar ketma-ketlik tushunchasi va uning xossalari.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 16–33-b., [12], 2-q., 4–47-b.. [5], 1-t., 340–352-b., [10], 1-q., 442–445-b..
18-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning karrali va takroriy limiti.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 33–45-b., [12], 2-q., 31–45-b.. [5], 1-t., 352–362-b., [10], 1-q., 449–460-b..
19-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyaning xossalari	2	2	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 46–52-b., [12], 2-q., 46–54-b., [5], 1-t., 362–370-b., [10], 1-q., 460–468-b..
20-ma'ruza.	Tekis uzluksizlik. Kantor teoremasi.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 52–58-b., [12], 2-q., 4–58-b., [5], 1-t., 370–372-b., [10], 1-q., 460–468-b..
21-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari va uning geometrik ma'nosi.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 59–60-b., [12], 2-q., 62–71-b., [5], 1-t., 375–374, 383-386-b., [10], 1-q., 469-473-b..
22-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 60–65-b., [12],2-q., 78–86-b., [5], 1-t., 375–381-b., [10], 1-q., 476–480-b..
23-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyaning differensiallanuvchanligi.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 65–72-b., [12], 2-q., 77–83-b., [5], 1-t., 386–388-b., [10], 1-q., 476–480-b..

24-ma'ruza.	Yo'nalish bo'yicha xosila va gradiyent	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 72–78, 80–88-b., [12], 2-q., 71–75-b., [5], 1-t., 391–396-b., [10], 1-q., 481–485-b..
25-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari va differensiallari	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 88–95-b., [12], 2-q., 87–89, 91–94-b., [5], 1-t.,402–414-b., [10], 1-q., 485–490-b..
26-ma'ruza.	Aralash hosilalar tengligi haqidagi teorema	2	2	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 95–99-b., [12], 2-q., 89–90-b., [5], 1-t., 404–405-b., [10], 1-q., 485–497-b..
27-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 93–95-b., [12], 2-q., 96–99-b., [5], 1-t., 414–417-b., [10], 1-q., 497–504-b..
28-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchi funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari. Ko'p o'zgaruvchi funksiya ekstremumining zaruriy sharti.	2	2	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 99–109-b., [12], 2-q., 99–101-b., [5], 1-t., 417–419-b., [10], 1-q., 504–510-b..
29-ma'ruza.	Ko'p o'zgaruvchi funksiya ekstremumining yetarli sharti. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumi.	2	1	[9], 2-q., 4-bo'lim, [3], 2-q., 102–104-b., [12], 12-q., 101–110-b., [10], 1-q., 504–514b., [5], 1-t., 422–431-b..
30-ma'ruza.	Oshkormas funksiya haqida tushuncha. Oshkormas funksiyaning mavjudligi. Oshkormas funksiyaning hosilasi. Ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar	2	1	[3], 2-q., 109–118-b., [12], 2-q., 111–129-b., [5], 1-t., 447–463-b., [10], 1-q., 609–619-b..
	jami	**60**	**40**	

3-ILOVA

Fanning fmaliy mashg'ulotlar va seminarlar bo'yicha mazmuni

(ishchi reja) 1-semestr uchun

№	Amaliy mashg'ulot mavzusining nomi	Soatlar miqdori	Mustaqil ish	Adabiyotlar (raqami va sahifa)
	1-bo'lim.To'plamlar. Haqiqiy sonlar.	**8**	**4**	
1	To'plam. To'plamlar ustida amallar	2	1	[6]; 1-q.; 5–7-b., [13]; 1-q.; 5–13-b., [20]; 1-q.; 5–13-b., [2]; 2-bo'lim.
2	Matematik induksiya usulidan foydalanib, tasdiqlarni isbotlash.	2	1	[8]; 8-10-b., [13]; 1-q.; 20–36-b., [20]; 1-q.; 31–42-b., [2]; 2-bo'lim.
3	Haqiqiy sonlar. Ratsional sonlar to'plami ustida kesim, cheksiz o'nli davriy kasrlar, cheksiz o'nli davriy bo'lgan kasrlarga doir misollar.	2	1	[6]; 1-q.; 7–12-b., [8];10-11b., [13]; 1-q.; 36–46-b., [20]; 1-q.; 13–22-b., [2]; 2-bo'lim.
4	Sonli to'plamlarning chegaralari	2	1	[6]; 1-q.; 10–12-b., [8];10–12-b., [13]; 1-q.; 50–52-b., [20]; 1-q.; 13–22-b..
	2- bo'lim.Sonlar ketma-ketligi	8	5	
5	Sonlar ketma-ketligi. Sonlar ketma-ketliklarining asosiy xossalari (chegaralangan, chegaralanmagan, cheksiz katta, cheksiz kichik ketma-ketliklar)	2	1	[6]; 1-q.; 12–20-b., [13]; 1-q.; 181–187, 193–196-b., [20]; 1-q.; 105–141-b., [2]; 3-bo'lim.
6	Sonlar ketma-ketligining limiti: a) ta'rif bo'yicha sonlar ketma-ketligining limitini topish; b) limitga ega bo'lgan ketma-ketliklar haqidagi teoremalarga asosan ketma-ketliklarning limitini hisoblash; c) aniqmasliklarni ochish usullari.	2	1	[4];12–18-b., [13]; 1-q.; 181–192-b., [3]; 20–29-b., [20]; 1-q.; 105–152-b., [2]; 3-bo'lim.

7	Monoton va chegaralangan ketma-ketliklarning limiti. e – soni va unga keltirib yechiladigan ketma-ketliklarning limitlari. Koshi kriteriysiga doir misollar.	2	2	[6]; 1-q.; 16–20, 23–29-b., [13]; 1-q.; 201–232-b., [3], 17–26-b., [20]; 1-q.; 105–152-b., [2]; 3-bo'lim.
8	Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass lemmasi. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari.	2	1	[6]; 1-q.; 30–34-b., [8];19–26, [13]; 1-q.; 201–232-b., [20]; 1-q.; 105–152-b., [2]; 3-bo'lim.
	3- bo'lim. Funksiya va uning limiti.	**14**	**7**	
9	Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari.	2	1	[6]; 1-q.; 35–47-b., [8]; 27–34-b., [13]; 1-q.; 188–193-b., [20]; 1-q.; 43–60-b., [2]; 4-bo'lim.
10	Monoton, juft, toq, chegaralangan, chegaralanmagan, teskari va murakkab funksiyalarga doir misollar yechish	2	1	[6]; 1-q.; 35–47-b., [8]; 27–47-b., [13]; 1-q.;116–123-b., [20]; 1-q.; 60–104-b., [2]; 4-bo'lim.
11	Funksiyaning limiti, bir tomonli limitlar. Cheksiz limit, cheksizlikdagi limit.	2	1	[6]; 1-q.; 48–60-b., [8]; 47–53-b., [13]; 1-q.; 232–239,253–255-b., [20]; 1-q.; 153–219b., [2]; 4-bo'lim.
12	Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning limiti. Aniqmasliklarni ochish.	2	1	[6]; 1-q.; 48–60-b., [8];54–72-b., [13]; 1-q.; 232–239, 253–255-b., [20]; 1-q.; 153–219b., [2]; 4-bo'lim.
13	Birinchi ajoyib limitdan foydalanib limitlarni hisoblash.	2	1	[6]; 1-q.; 48–60-b., [8];54–72-b., [13]; 1-q.; 239–242, 255–260-b., [20]; 1-q.; 153–219-b., [2]; 4-bo'lim.
14	Ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib limitlarni hisoblash.	2	1	[6]; 1-q.; 48–60-b., [8];54–72-b., [13]; 1-q.; 239–242,255–260-b., [20]; 1-q.; 153–219-b., [2]; 4-bo'lim.

15	Funktsiyalarni taqqoslash. o va O belgilar hamda ularning xossalari	2	1	[6]; 1-q.; 59–60-b., [8];72–76-b., [13];1-t.; 245–251,262–263-b., [20]; 1-q.; 153–219b., [2]; 4-bo'lim.
	4- bo'lim. Funksiyaning uzluksizligi	**8**	**4**	
16	Funksiyaning uzluksizligi. Funksiya uzluksizligining ta'riflari. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Elementar funksiyalarning uzluksizligi.	2	1	[6]; 1-q.; 60–70-b., [8]; 77–93-b., [13]; 1-q.; 263–289-b., [20]; 1-q.; 219–268-b., [2]; 5-bo'lim.
17	Funksiya uzilish nuqtalarining turlari.	2	1	[6]; 1-q.; 60–70-b., [8]; 77–93-b., [13]; 1-q.; 263–289-b., [20]; 1-q.; 219–268-b., [2]; 5-bo'lim.
18	Funksiyaning uzluksizligidan foydalanib, limitlarni hisoblash.	2	1	[4];1-t;60–70-b., [8];77--93-b., [13]; 1-q.; 263–289-b., [20]; 1-q.; 219–268-b., [2]; 5-bo'lim.
19	Uzluksiz funksiyalarning global xossalari. Funksiyaning tekis uzluksizligi.	2	1	[6]; 1-q.; 71–78-b., [8];77–93-b., [13]; 1-q.; 263–289,312–320-b., [20]; 1-q.; 268–293-b..
	5-, 6-bo'limlar. Funksiyaning hosilasi va differensiali, differensial hisobning ba'zi tatbiqlari	26	20	
20	Funksiyaning hosilasi . Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.	2	2	[6]; 1-q.; 78–98-b., [8]; 97–114-b., [13]; 1-q.; 322–336-b., [20]; 1-q.; 293–343-b., [2]; 6-bo'lim.
21	Hosilani hisoblashda sodda qoidalar. Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali.	2	2	[6]; 1-q.; 78–98-b., [8]; 97–114-b., [13]; 1-q.; 322–336-b., [20]; 1-q.; 293–343-b., [2]; 6-bo'lim.

22	Teskari va murakkab funksiyalarning hosilasi.	2	1	[6]; 1-q.; 78–98-b., [8];114–120-b., [13]; 1-q.; 339–340-b., [20]; 1-q.; 293–343-b., [2]; 6-bo'lim.
23	Funksiyaning differensiali.	2	1	[6]; 1-q.; 98–105-b., [8]; 120–124-b., [13]; 1-q.; 343–346-b., [20]; 1-q.; 293–343-b., [2]; 6-bo'lim.
24	Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.	2	1	[6]; 1-q.; 105–115-b., [8];124–134-b., [13]; 1-q.; 356–369-b., [20]; 1-q.; 343–362-b., [2]; 6-bo'lim.
25	Funksiyaning yuqori tartibli differensiali.	2	2	[6]; 1-q.; 105–115-b., [8]; 124–134-b., [13]; 1-q.; 356–369-b., [20]; 1-q.; 343–362-b., [2]; 6-bo'lim.
26	Differensial hisobning asosiy teoremalari .	2	2	[6]; 1-q.; 115–123-b., [8]; 134–140-b., [13]; 1-q.; 370–375-b., [20]; 1-q.; 362–375-b., [2]; 6-bo'lim.
27	Hosila yordamida funksiyaning o'zgarishini tekshirish. Funksiyaning qavariqligi. botiqligi va egilish nuqtalari.	2	1	[6]; 1-q.; 123–130-b., [8];140–146-b., [13]; 1-q.; 420–442-b., [20]; 1-q.; 437–477-b., [2]; 6-bo'lim.
28	Teylor formulasi.	2	1	[6]; 1-q.; 123–130-b., [8];151–156-b., [13]; 1-q.; 382–420-b., [20]; 1-q.; 389–416-b., [2]; 6-bo'lim.
29	Funksiyaning ekstremum qiymatlarini hosila yordamida aniqlash.	2	2	[6]; 1-q.; 136–141-b., [8];156–161-b., [13]; 1-q.; 420–442-b., [20]; 1-q.; 422–477-b., [2]; 6-bo'lim.
30	Funksiya grafigining asimptotalari.	2	2	[6]; 1-q.; 141–145-b., [8];161–164-b., [13]; 1-q.; 420-b.,

				[20]; 1-q.; 268–281-b., [2]; 6-bo'lim.
31	Funksiyani to'la tekshirish va grafiklarini chizish.	2	2	[6]; 1-q.; 145–149-b., [8];140–147-b., [13]; 1-q.; 443–454-b., [20]; 1-q.; 449–477-b., [2]; 6-bo'lim.
32*	Lopital qoidasidan foydalanib, aniqmasliklarni ochish.	2	1	[6]; 1-q.; 149–156-b., [8]; 147–151-b., [13]; 1-q.; 376–382-b., [20]; 1-q.; 375–388-b., [2]; 6-bo'lim.
		64	40	

* 32-mavzu laboratoriya ishi bo'ladi.

2-semestr uchun

№	Amaliy mashg'ulotning nomi	Soatlar miqdori	Mustaqil ish	Adabiyotlar (raqami va sahifa)
	7- bo'lim. Aniqmas integrallar	**18**	**9**	
1	Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integral. Aniqmas integralning asosiy xossalari. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali	2	1	[2]; 7-bo'lim. [6]; 1-q.; 161–165-b., [8];173–179-b., [13]; 2-q.; 5–8-b., [21]; 2-q.; 4–15-b..
2	Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirib integrallash	2	1	[2]; 7-bo'lim. [6]; 1-q.; 161–165-b., [8];179–186-b., [13]; 2-q.; 9–22-b., [21]; 2-q.; 15–33-b..
3	Aniqmas integralda bo'laklab integrallash.	2	1	[6]; 1-q.; 165–170b.. [8];184–187-b., [13]; 2-q.; 22–32-b., [21]; 2-q.; 15–33-b., [2]; 7-bo'lim.
4	Ratsional funksiyalarni integrallash. Noma'lum koeffitsiyentlar usuli.	2	1	[6]; 1-q.; 170–172-b., [8]; 187–188-b., [13]; 2-q.; 32–41-b., [21]; 2-q.; 33-50-b., [2]; 7-bo'lim.

5	Integralning ratsional qismini ajratishda Ostrogradskiy usuli	2	1	[6]; 1-q.; 172–180-b., [8]; 190-192-b., [13]; 2-q.; 42–45-b., [21]; 2-q.; 33–50-b., [2]; 7-bo'lim.
6	Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash.	2	1	[6]; 1-q.; 180–185-b., [8]; 192–198-b., [13]; 2-q.; 45–56-b., [21]; 2-q.; 50–62-b., [2]; 7-bo'lim.
7	Binomial differensiallarni integrallash	2	1	[6]; 1-q.; 185–191-b., [8]; 198–203-b., [13]; 2-q.; 45–58-b., [21]; 2-q.; 54–76-b., [2]; 7-bo'lim.
8	Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash	2	1	[6]; 1-q.; 192–202-b., [8]; 204–208-b., [13]; 2-q.; 65–73-b., [21]; 2-q.; 62–77-b., [2]; 7-bo'lim.
9	Transtendent funksiyalarning aniqmas integrali.	2	1	[6]; 1-q.; 206–221-b., [8]; 208–210-b., [13]; 2-q.; 78–89-b., [21]; 2-q.; 15–62-b., [2]; 7-bo'lim.
	8-bo'lim. Aniq integral. Aniq integralning tatbiqlari	**22**	**12**	
10	Ta'rifdan foydalanib aniq integralni hisoblash. Darbu yig'indilari. Aniq integral yordamida limitlarni hisoblash	2	2	[6]; 1-q.; 207–219-b., [8]; 213–214-b., [13]; 2-q.; 92–98-b., [21]; 2-q.; 77–95-b., [2]; 7-bo'lim.
11	Aniq integralning mavjudligi. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari. Aniq integralning xossalari	2	1	[6]; 1-q.; 219–222-b., [4]; 213–216-b., [13]; 2-q.; 89–96-b., [21]; 2-q.; 95–113-b., [2]; 7-bo'lim.
12	Nyuton-Leybnis formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli	2	1	[8]; 216–223-b., [13]; 2-q.; 96–104-b., [21]; 2-q.; 113–123-b., [2]; 7-bo'lim.
13	Aniq integralda bo'laklab integrallash usuli	2	1	[6]; 1-q.; 231–241-b., [4]; 230–234-b., [13]; 2-q;104–117-b.,

				[21]; 2-q.;113–23-b., [2]; 7-bo'lim.
14	Aniq integralning tatbiqlari. Aniq integral yordamida tekis shaklning yuzini hisoblash	2	1	[6]; 1-q.; 237–239-b., [4]; 234–239-b., [13]; 2-q;117–128-b., [21]; 2-q.; 123–138-b., [2]; 7-bo'lim.
15	Aniq integral yordamida chiziqning yoyi uzunligini hisoblash	2	1	[6]; 1-q.; 241–247-b., [4]; 239–240-b., [13]; 2-q.; 243–255-b., [21]; 2-q.; 138–143-b., [2]; 7-bo'lim.
16	Aniq integral yordamida aylanma jismning hajmini hisoblash	2	1	[6]; 1-q.; 242–247-b., [4]; 236–238-b., [13]; 2-q.; 228–243-b., [21]; 2-q.; 143–149-b., [2]; 7-bo'lim.
17	Aniq integral yordamida aylanma jism sirtining yuzini hisoblash	2	1	[6]; 1-q.; 247–251-b., [4]; 240–244-b., [13]; 2-q.; 158–172-b., [21]; 2-q.; 149–155-b., [2]; 7-bo'lim.
18	Aniq integralning mexanika masalalariga tatbig'i. Silliq egri chiziqning statik momenti va og'irlik markazlatni hisoblash	2	1	[6]; 2-q.; 7-9-b., [13]; 3-q.; 11–12-b., [21]; 2-q.; 15–33-b., [2]; 7-bo'lim.
19	Tyekis figuraning statik momentlari va og'irlik markazlarni hisoblash	2	1	[6];2-q.; 10–28-b., [8];318–324-b., [13]; 3-q.; 21–25, 30–32-b., [21]; 2-q.; 155–166b., [2]; 7-bo'lim.
20*	Aniq integrallarni taqribiy hisoblash. To'g'ri to'rtburchaklar usuli. Trapetsiyalar usuli. Parabolalar usuli	2	1	[6]; 2-q.; 28–38-b., [8]; 322–324-b., [13]; 3-q.; 32–37-b., [21]; 2-q.;166–181-b., [2]; 7-bo'lim.
	9-bo'lim. Ko'p o'zgaruvchili funksiya	**24**	**17**	
21	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi. R^m fazoda sonlar ketma-ketligi va uning limiti	2	2	[6]; 2-q.; 38–89-b., [8]; 322–324-b., [13]; 3-q.; 38–39-b., [21]; 2-q.; 212–220-b..
22	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning karrali va takroriy limiti.	2	2	[6]; 2-q.; 54–56-b., [4]; 324–327-b..

				[13]; 3-q.; 49–50-b., [21]; 2-q.; 220–231-b..
23	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi	2	2	[6]; 2-q.; 57–58-b., [8]; 324–327-b., [13]; 3-q.; 53–54-b., [21]; 2-q.; 231–246-b..
24	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.	2	1	[6]; 2-q.; 58–59-b., [8]; 324–328-b., [13]; 3-q.; 50–52-b., [21]; 2-q.; 246–271-b..
25	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallari.	2	1	[6]; 2-q.; 59–73-b., [8]; 326–330-b., [13]; 3-q.; 76–87-b., [21]; 2-q.; 231–246-b..
26	Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradiyent	2	1	[8]; 284–285, 427–428-b., [13]; 3-q.; 48, 54–57 b-b., [21]; 2-q.; 258–261, 267–268-b..
27	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari	2	1	[6];2-q.; 59–73-b., [8];326–330-b., [13]; 3-q.; 76–87-b., [21]; 2-q.; 271–284-b..
28	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiallari	2	1	[6]; 2-q.; 73–74-b., [8]; 327–332-b., [13]; 3-q.; 77–79-b., [21]; 2-q.; 271–284b..
29	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi	2	1	[6]; 2-q.; 69–74-b., [8]; 367–370-b., [13]; 3-q.; 89–92-b., [21]; 2-q.; 15–33-b..
30	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari	2	1	[6]; 2-q.; 74–82-b., [8]; 270–278-b., [13]; 3-q.; 96–99-b., [21]; 2-q.; 284–310,-318–319-b..
31	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari	2	2	[6]; 2-q.; 74–82-b., [8]; 270–278-b., [13]; 3-q.; 99–104-b., [21]; 2-q.; 284–310,-318–319-b..
32	Oshkormas funksiyalar. Oshkormas funksiyaning hosilasi	2	2	[6]; 2-q.; 82–91-b., [8]; 338–348-b., [13]; 3-q.; 60–64-b., [21]; 2-q.; 307–319-b..
		64	38	

*20- dars seminar darsi hisoblanadi.

Seminar mashg'ulotlarini tashkil etish bo'yicha tavsiyalar

Seminar mashg'ulotlarida aloxida olingan maxsus mavzularni talabalar mustaqil o'rganib, ma'ruza qilishga tayyorlanish, mavzuni taxlil qilib fikrlash va notiqlik qobilyatini oshirib pedagoglik maxoratini shakllantirishga yo'naltiriladi.

№	Seminar mashg'ulotlar uchun mavzular	Soatlar miqdori	Mustaq il ish	Adabiyotlar (raqami va sahifa)
1	Funksiyalarni solishtirish ("o", "O". - belgilar).	2	1	[6]; 1-q.; 6–7-b., [13]; 1-q.; 5–13-b., [21]; 1-q.; 197–204-b..
2	Trigonometrik va ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash.	2	1	[8];8–10-b., [13]; 1-q.; 20–3-6-b., [21]; 2-q.; 62–77-b..
3	Aniq integralning geometriyaga, fizikaga, mexanikaga tatbiqlari.	2	1	[6]; 1-q.; 11–12-b., [8];10–11-b., [13]; 1-q.; 36–46-b., [21]; 2-q.;181–191-b..

4-ILOVA

Texnologik xarita

1-semestr uchun

Umumiy o'quv soatlarii – 258, shundan: ma'ruza – 62, amal – 62, sem. - 2. mus.ish – 132.

Ishchi o'quv dasturidagi mavzular tartib raqami (qo'shimcha topshiriq mazmuni)	Umumiy soatlar					Baholash turi	Nazorat shakli	Ballar		Bajarilish muddati (hafta)
	Ma'ruza	Amaliy mashg'	seminar	Mustaqil ish	Jami			Max ball	Sar ball	
	1– nazorat. To'plam. To'plam ustida amallar va ularning xossalari. Haqiqiy sonlar. Sonlar ketma-ketligi. Funksiya. Funksiyaning limiti. Funksiyaning uzluksizligi.							41		
1 – 19	42	38	-	82	162	1-JN	7-banddagi 1-4 bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish	21		Dekabr 4-xafta
1-21						1-ON	7-banddagi 1-4 bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish Yozma ish, og'zaki	20		Jadval buyicha
	2-nazorat. Funksiyaning hosilasi va differensiali, tatbiqlari							29		
20 - 31	20	24	2	50	96	2-JN	7-banddagi 5-6 bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish	14		Fevral 4-xafta
22-31						2-ON	7-banddagi 5-6 bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish. Yozma ish, og'zaki	15		Jadval buyicha
Jami: JN va ON								70	39	
1-31						YaN	Yozma ish, og'zaki	30	16	Fevral (jadval bo'yicha)
Jami	62	62	2	132	258			100	55	

2-semestr uchun

Umumiy o'quv soatlari – 254 s., shundan: ma'ruza – 60 s.,amal – 62 s.,sem. -2 s., mus.ish – 130 s.

Ishchi o'quv dasturida-gi mavzular tartib raqami (qo'shim-cha topshiriq mazmuni)	Umumiy soatlar					Baholash turi	Nazorat shakli	Ballar		Bajarilish mud-dati (hafta)
	Ma'ruza	Amaliy mashg'ulot		Mustaqil ish	Jami			Max. ball	Sar. ball	
	1 – nazorat. Aniqmas integral. Aniq integrallar							35		
1 – 20 1-16	32	38	2	76	148	1-JN 1-ON	7-banddagi 7-,8-bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish 7-banddagi 7-,8-bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish Yozma ish, og'zaki	18 17		Aprel 4-xafta Jadval buyicha
	2- nazorat. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar							35		
21-31 17-30	28	24	-	54	106	2-JN 2-ON	7-banddagi 9- bo'limda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish 7-banddagi 9-bo'limlarda ko'zda tutilgan ishlarni bajarish va hisobot berish. Yozma ish, og'zaki	17 18		Iyun 4-xafta Jadval buyicha
Jami JN va ON								70	39	
1-31	60	62	2	130	254	YaN	Yozma ish	30	16	Iyun (jadval bo'yicha)
Jami	60	62	2	130	254			100	55	

5-ILOVA

Amaliyot darslari va uy vazifalari uchun topshiriqlar

1. Amaliyot darslari va uy vazifalari uchun topshiriqlar (I semestrlar)

[6]. Садуллаев А. ва б.
[8]. Демидович Б.П.
[13]. Кудрявцев Л.Д. ва б.
[20]. Gaziyev A., Isroilov I., Yaxshiboyev M. (1-qism)

1-semestr uchun

Dars-lar	Mavzular	Sinf ishlari	Uy ishlari	So-at
	1-bo'lim.To'plamlar. Haqiqiy sonlar.			
1-dars	To'plam. To'plamlar ustida amallar	[13]: 1-q., № 1.4–1.14- toqlari	[13]: 1-q., №1. 1.4 –1.14-juftlari	22
		[6]: 1-q., №1–10 toqlari	[6]: 1-q., №1–10-juftlari	
		[20]: 1-q.,1-b., 1-§ : № 1.1–1.33-toqlari	[20]: 1-q.,1-b., 1-§ : № 1.1–1.33-juftlari	
2-dars	Matematik induksiya usulidan foydalanib, tasdiqlarni isbotlash.	[13]: 1-q., № 2.25–2.40-toqlari.	[13]: 1-q., № 2.25–2.40-juftlari	2
		[8]:№1–10-toqlari.	[8]:№1–10-juftlari	
		[20]: 1-q.,1-b., 1-§ : № 3.6–3.63-toqlari	[20]: 1-q.,1-b., 1-§ : № 3.6–3.63-juftlari	
3-dars.	Haqiqiy sonlar. Ratsional sonlar to'plami ustida kesim, cheksiz o'nli davriy kasrlar, cheksiz o'nli davriy bo'lgan kasrlarga doir misollar.	[6]: 1-q., №27,29.	[6]: 1-q., №28,30	2
		[13]: 1-q., №3.49, 3.51, 3.53-toqlari	[13]: 1-q., № 3.50, 3.52-juftlari	
		[20]: 1-q.,1-b., 2-§ : № 2.1–2.5-toqlari	[20]: 1-q.,1-b., 2-§ : № 2.1–2.5-juftlari	
4-dars.	Sonli to'plamlarning chegaralari	[6]: 1-q., №11–16-toqlari.	[6]: 1-q., №11–16-juftlari	2
		[13]: 1-q., №3.1–3.12-toqlari.	[13]: 1-q., № 3.1–3.12	
		[20]: 1-q.,1-b., 2-§ :	[20]: 1-q., 1-b., 2-§:	

		№ 2.6–2.11- toqlari. [8]: №16–20-toqlari.	№ 2.6–2.11- juftlari. [8]: №:16–20-juftlari.	
	2- bo'lim.Sonlar ketma-ketligi.			
5-dars.	Sonlar ketma-ketligi. Sonlar ketma-ketliklarining asosiy xossalari (chegaralangan, chegaralanmagan, cheksiz katta, cheksiz kichik ketma-ketliklar)	[6]: 1-q.,2-b: №1–25-toqlari. [13]: 1-q., №:7.314–7.315, 7.316, 7.320, 7.321-toqlari. [20]: 1-q.,2-b., 6-§ : № 6.1–6.122- toqlari.	[6]: 1-q.,2-b: №1–25-juftlari. [13]: 1-q., № 7.314–7.315, 7.316, 7.320, 7.321- juftlari. [20]: 1-q.,2-b., 6-§ : № 6.1–6.122- juftlari.	2
6-dars.	Sonlar ketma-ketligining limiti: a) ta'rif bo'yicha sonlar ketma-ketligining limitini topish; b) limitga ega bo'lgan ketma-ketliklar haqidagi teoremalarga asosan ketma-ketliklarning limitini hisoblash; c) aniqmasliklarni ochish usullari.	[6]: 1-q.,2-b: №33–57-toqlari. [8]:№41–45-toqlari. [8]:№46–57-toqlari. [13]: 1-q.. №8.1–8.10-toqlari. [13]: 1-q., №8.18; 8.19-toqlari. [20]: 1-q., 2-b., 6-§: № 6.123–6.205-toqlari.	[6]: 1-q.,2-b., №33–57-juftlari. [8]:№41–45-juftlari. [8]:№46–57-juftlari. [13]: 1-q.. №8.1–8.10-juftlari [13]: 1-q., №8.18. 8.19-juftlari. [20]: 1-q., 2-b.. 6-§: № 6.123–6.205-juftlari	2
7-dars.	Monoton va chegaralangan ketma-ketliklarning limiti, e – soni va unga keltirib yechiladigan ketma-ketliklarning limitlari. Koshi kriteriysiga doir misollar.	[6]: 1-q.,2-b. №58–64-toqlari. [8]:№77–85-toqlari. [13]: 1-q., №8.58, 8.60-toqlari. [13]: 1-q.,№8.69- toqlari. [20]: 1-q., 2-b., 6-§: № 6.205–6.211-toqlari.	[6]: 1-q.,2-b., №58–64-juftlari [8]:№77–85-juftlari [13]: 1-q., №8.58. 8.60-juftlari. [13]: 1-q.,.№8.69-juftlari. [20]: 1-q., 2-b., 6-§: № 6.205–6.211-juftlari	2
8-dars.	Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-	[6]: 1-q.,2-b., №65–81-toqlari. [20]: 1-q., 2-b., 6-§: №	[6]: 1-q., №65-81–juftlari. [20]: 1-q., 2-b., 6-§: №	2

	Veyershtrass lemmasi. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari.	6.212–6.222- toqlari.	6.212–6.222- juftlari.	
		[13]: 1-q., №8.164–8.174-t.	[13]: 1-q., №8.164–8.174-juftlari.	
		[8]:№93–120-t,	[8]: №93–120-juftlari.	
	3- bo'lim. Funksiya va uning limiti			
9-dars.	Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari.	[8]:№151–170-t.	[8]:№151–170-j	2
		[6]: 1-q.,3-b. №1–16- toqlari. [6]: 1-q.,3-b. №1.19–28-toqlari.	[6]: 1-q., №1–16- juftlari; [6]: 1-q.. №19–28-juftlari	
		[20]: 1-q., 2-b., 4-§: № 4.1–4.94- toqlari.	[20]: 1-q., 2-b., 4-§ : № 4.1–4.94- juftlari.	
10-dars.	Monoton, juft, toq, chegaralangan, chegaralanmagan, teskari va murakkab funksiyalarga doir misollar yechish	[6]: 1-q.,3-b., № 49–61-toqlari, 64–74-toqlari, 79–89-toqlari, 97–103-toqlari.	[6]: 1-q.,3-b., № 49–61, 64–74, 79–89, 97–103-juftlari.	2
		[20]: 1-q., 2-b., 5-§: № 5.1–5.195-toqlari.	[20]: 1-q., 2-b., 5-§: № 5.1–5.195- juftlari.	
11-dars.	Funksiyaning limiti, bir tomonli limitlar. Cheksiz limit, cheksizlikdagi limit.	[6]: 1-q.,3-b., 2-§: №132–149-toqlari, 150–155-toqlari.	[6]: 1-q., № 132–149-juftlari. 150–155-juftlari	2
		[20]: 1-q.. 2-b., 7-§: № 7.1–7.52-toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 7-§: №7.1–7.52- juftlari.	
		[8]: №101–410-toqlari.	[8]: № 401–410-juftlari.	
		[13]: 1-q.,№ 9.1; 9.2; 9.4; 9.5; 9.16;9.17; 9.18-toqlari.	[13]: 1-q.,№ 9.1; 9.2; 9.3; 9.4; 9.5; 9.16; 9.17; 9.18-juftlari.	
12-dars.	Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning limiti. Aniqmasliklarni ochish.	[8]:№ 401–433; 435–450-toqlari.	[8]:№ 401–433; 435–450-juftlari.	2
		[6]: 1-q.,3-b.,2-§: № 159–170-toqlari.	[6]: 1-q.,3-b.,2-§: № 159–170 –juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 7-§: №7.52–7.140-toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 7-§: № 7.52–7.140- juftlari.	
		[13]: 1-q., №9.20–9.28-toqlari.	[13]: 1-q., № 9.20–9.28-juftlari	
13-dars	Birinchi ajoyib limitdan	[6]: 1-q.,3-b.,2-§: №171–193-toqlari.	[6]: 1-q., 3-b.,2-§: №171--193-juftlari	2

	foydalanib limitlarni hisoblash.	[8]:№ 471–545-toqlari.	[8]:№ 471–545-juftlari.	
		[13]: 1-q., №9.29–9.37-toqlari.	[13]: 1-q., №9.29–9.37-juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 7-§: №7.141–7.154, 7.170–7.188 -toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 7-§: №7.141–7.154, 7.170–7.188 - juftlari.	
14-dars.	Ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib limitlarni hisoblash.	[6]: 1-q., 3-b., 2-§: № 185–193-toqlari.	[6]: 1-q.,3-b.,2-§: № 185–193-juftlari	2
		[8]:№507–526-toqlari.	[8]: №507–526-juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 7-§ : №7.155–7.169, 7.189–7.224 -toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 7-§ : №7.155–7.169, 7.189–7.224 -juftlari.	
		[13]: 1-q.,№9.36-toqlari.	[13]: 1-q.,№ 9.36-juftlari.	
		[6]: 1-q.,3-b.,2-§ : № 205–210-toqlari.	[6]: 1-q., 3-b.,2-§: №205–210-juftlari.	
		[13]: 1-q., №9.44–9.46-toqlari. 9.52–9.53-toqlari.	[13]: 1-q., №9.50–9.52-juftlari. №9.52–9.53-juftlari.	
15-dars.	Funktsiyalarni taqqoslash. o va O belgilar hamda ularning xossalari	[8]:№646–656 toqlari.	[8]:№646–656 juftlari.	2
		[13]: 1-q., № 9.50–9.57-toqlari.	[13]: 1-q., № 9.50–9.57-juftlari	
		[20]: 1-q., 2-b., 7-§ : №7.232–7.169, 7.189–7.224 -toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 7-§ : №7.155–7.169, 7.189–7.224 -juftlari.	
	4- bo'lim. Funksiyaning uzluksizligi			
16-dars.	Funksiyaning uzluksizligi. Funksiya uzluksizligining ta'riflari. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Elementar funksiyalarning uzluksizligi.	[8]: №666-674, 675–680-toqlari.	[8]: №666-674, 675–680-juftlari.	2
		[6]: 1-q.,1-b.,1-§ :№ 1–11-toqlari.	[6]: 1-q.,1-b.,1-§ . №1–11 juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 8-§ : № 8.1–8.65 -toqlari	[20]: 1-q., 2-b., 8-§ : №8.1–8.65 -juftlari.	
		[13]: 1-q., № 10.3–10.9-toqlari. 10.24–1028-toqlari.	[13]: 1-q., №10.3–10.9-juftlari №10.24–10.28-juftlari.	

17-dars.	Funksiya uzilish nuqtalarining turlari.	[8]:№ 687–700, 729–731-toqlari.	[8]:№687–700; 729–731-juftlari	2
		[6]: 1-q.,2-b.,1-§ :№12–26-toqlari..	[6]: 1-q.,2-b.,1-§ :№12–26-juftlari	
		[6]: 1-q.,2-b.,1-§ : №27–48-toqlari.	[6]: 1-q.,2-b.,1-§. № 27–48-juftlari.	
		[13]: 1-q., № 10.18–10.23-toqlari.	[13]: 1-q., №10.18–10.23-juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 8-§ : №8.1–8.65 –toqlari.	[20]: 1-q., 2-b., 8-§ : №8.1–8.65 -juftlari.	
18-dars.	Funksiyaning uzluksizligidan foydalanib, limitlarni hisoblash.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q.,№ 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), v)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4- juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 8-§: №8.66–8.132 -toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 8-§: №8.66–8.132 -juftlari.	
19-dars.	Uzluksiz funksiyalarning global xossalari. Funksiyaning tekis uzluksizligi.	[6]: 1-q.,2-bo'lim, 1-§: №67–96-toqlari.	[6]: 1-q.,2-b., 1-§: №67–96-juftlari.	2
		[8]:808-a), b), v)-lar.		
		[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 8-§: № 8.133–8.153 -toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 8-§ : № 8.133–8.153 -juftlari.	
		[20]: 1-q., 2-b., 10-§ : № 10.1–10.20 -toqlari;	[20]: 1-q., 2-b., 10-§ : № 10.1–10.20 -juftlari.	
	5-, 6-bo'limlar. Funksiyaning hosilasi va differensiali, differensial hisobning ba'zi tatbiqlari			
20-dars.	Funksiyaning hosilasi . Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.	[6]: 1-q.,V-b., 1-§ : №1–16-toqlari. 13.3–13.37; 14.1–14.313.3–13.37; 14.1–14.3-toqlari.	[6]: 1-q.,V-b., 1-§ :№1–16-juftlari. 13.3–13.37; 14.1–14.3-juftlari.	2
		[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : №11.1–10.171 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : №11.1–10.171 -juftlari.	

21-dars.	Hosilani hisoblashda sodda qoidalar. Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali.	[13]: 1-q., №13.3–13.38, 13.39–13.51-toqlari.	[13]: 1-q., № 13.3–13.38, 13.39–13.51-juftlari	2
		[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : № 11.1–10.171 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : № 11.1–10.171 -juftlari.	
		[8]:№834–844-toqlari.	[8]:№ 834–844-juftlari	
22-dars.	Teskari va murakkab funksiyalarning hosilasi.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), v)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4- juftlari.	
		[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : № 11.1–11.171 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : №11.1–11.171 -juftlari.	
23-dars.	Funksiyaning differensiali.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), v)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q., № 12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-juftlari	
		[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : №11.184–11.193 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 11-§ : №11.1–11.193 -juftlari.	
24-dars.	Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.	[13]: 1-q., №10.147-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), c)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[20]: 1-q., 3-b., 12-§ : №12.1–12.70 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 12-§ : №12.1–12.70 -juftlari.	
25-dars.	Funksiyaning yuqori tartibli differensiali.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), c)-lar.	[8]:U/V: № 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q., № 8.137–8.152-juftlari.	
		[20]: 1-q., 3-b., 12-§ : № 12.71–12.90 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 12-§ : №12.71–12.90 -juftlari.	
26-dars	Differensial hisobning asosiy teoremalari .	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), c)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4- juftlari	

		[20]: 1-q., 3-b., 13-§ : № 13.1–13.26 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 13-§ : №13.1–13.26 -juftlari.	
27-dars.	Hosila yordamida funksiyaning o'zgarishini tekshirish. Funksiyaning qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtalari.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[20]: 1-q., 3-b., 13-§ : № 13.1–13.26 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 13-§ : №13.1–13.26 -juftlari.	
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), c)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q.,12.1–12.2, 12.3–12.4- juftlari.	
28-dars.	Teylor formulasi.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[20]: 1-q., 3-b., 15-§ : №15.1–15.106 -toqlari.	[20]: 1-q., 3-b., 13-§ : №15.1–15.106 -juftlari.	
29-dars.	Funksiyaning ekstremum qiymatlarini hosila yordamida aniqlash.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), v)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4- juftlari	
		[20]: 1-q., 3-b., 16-§ : №16.1–16.58 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 16-§ : №16.1–16.58 -juftlari.	
30-dars.	Funksiya grafigining asimptotalari. Funksiyani to'la tekshirish va grafiklarini chizish.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), v)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q., №12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari	
		[20]: 1-q., 3-b., 16-§ №: 16.58–16.82 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 16-§ : 16.58–16.82 -juftlari.	
		[20]: 1-q., 3-b., 9-§: №9.1–9.24 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 9-§: № 9.1–9.24 -juftlari.	
31-dars.	Lopital qoidasidan foydalanib, aniqmasliklarni ochish.	[13]: 1-q., №10.1487-toqlari.	[13]: 1-q., № 10.147-juftlari	2
		[20]: 1-q., 3-b., 14-§ : №14.1–14.90 -toqlari;	[20]: 1-q., 3-b., 14-§ : №14.1–14.90 -juftlari.	
		[8]:№720–728-toqlari. [8]:808-a), b), v)-lar.	[8]:№ 720–728-juftlari	
		[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4-toqlari.	[13]: 1-q.,№12.1–12.2, 12.3–12.4- juftlari	

2-semestr uchun

Amaliyot darslari va uy vazifalari uchun topshiriqlar

[6]. Садуллаев А. ва б.
[8]. Демидович Б.П.
[13]. Кудрявцев Л.Д. ва б.
[21]. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshiboyev M. (2-qism)

Darslar	Mavzular	Sinf ishlari	Uy ishlari	Soat
	7-bo'lim. Aniqmas integral			18
1-dars	Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integral. Aniqmas integralning asosiy xossalari. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali	[8]:1628–1672- toqlari.	[8]:1628–1672-juftlari.	2
		[13]: 2-q., № 1.2–1.6-toqlari	[13]: 2-q., № 1.2–1.6 –juftlari.	
		[21]: 2-q.,1-§: № 1.1– 108 toqlari	[21]: 2-q..1-§: № 1.1– 108 juftlari	
2-dars	Aniqmas integralda o'zgaruvchlarni almashtirib integrallash.	[6]: 1-q.,VIII-b., 2-§: №1–25 –toqlari.	[6]: 1-q.,VIII-b., 2-§ : № 1–25-juftlari.	2
		[21]: 2-q.,2-§: № 2.1– 2.42 toqlari	[21]: 2-q.,2-§: № 2.1– 2.42 juftlari	
		[8]:1674–1780-toqlari.	[8]: 1674–1780-juftlari.	
		[13]: 2-q. № 1.10–1.16-toqlari	[13]: 2-q. № 1.10–1.16–juftlari.	
3-dars.	Aniqmas integralda bo'laklab integrallash.	[6]: 1-q.,VIII-b., 2-§ : № 26–45 toqlari.	[6]: 1-q.,VIII-b., 2-§ : №26–45-juftlari	2
		[21]: 2-q.,2-§: № 2.42–2.123 toqlari	[21]: 2-q.,2-§: № 2.43– 2.123- juftlari	
		[8]: №1791–1830 –toqlari	[8]: №1791–1830-juftlari	
		[13]: 2-q., № 1.17–1.32 -toqlari	[13]: 2-q., № 1.17–1.32- juftlari	
4-dars.	Ratsional funksiyalarni integrallash. Noma'lum koeffitsiyentlar usuli.	[6]: 1-q.,1-t, VIII-b., 2-§ : №46–60-toqlari.	[6]: 1-q.,VIII-b., 3-§ : №46–60-juftlari.	2
		[8]: 1866–1922-toqlari.	[8]:1866–1922-juftlari	
		[21]: 2-q.,3-§: № 3.1–3.30 toqlari	[21]: 2-q.,3-§: № 3.1– 3.30 juftlari	
		[13]: 2-q., № 2.1–2.9 -toqlari	[13]: 2-q., № 2.1–2.9- juftlari	

5-dars.	Integralning ratsional qismini ajratishda Ostrogradskiy usuli	[13]: 1-q.,2-t: № 2.1–2.11-toqlari.	[13]: 1-q., № 2.1–2.11-juftlari.	2
		[21]: 2-q.,3-§: № 3.31–3.49 toqlari	[21]: 2-q.,3-§: № 3.31– 3.49 juftlari	
		[8]: №1891–1897-toqlari.	[8]: № 1891–1897-juftlari.	
		[13]: 2-q., № 2.10–2.11-toqlari.	[13]: 2-q., № 2.10–2.11-juftlari.	
6-dars.	Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash.	[6]: 1-q., VIII-b., 4-§ : № 61–70; 71–120-toqlari.	[6]: 1-q.,VIII-b., 4-§ : №61–70; 71–120-juftlari.	2
		[8]: №1926–1979-toqlari.	[8]: № 1926–1979- juftlari.	
		[13]: 2-q., № 3.1–3.17-toqlari.	[13]: 2-q., №3.1–3.17-juftlari.	
		[21]: 2-q.,4-§: № 4.1–4.27 toqlari	[21]: 2-q.,4-§: № 4.1– 4.27 juftlari	
7-dars	Binomial differensiallarni integrallash	[6]: 1-q., VIII-b., 4-§ : № 61–70; 71–120-toqlari.	[6]: 1-q.,VIII-b., 4-§ : №61–70; 71–120-juftlari.	2
		[8]: №1981–1989-toqlari.	[8]: № 1981–1989-juftlari.	
		[13]: 2-q., № 3.18–3.19-toqlari.	[13]: 2-q., №3.18–3.19-juftlari.	
		[21]: 2-q.,4-§: № 4.28–4.71 toqlari	[21]: 2-q.,4-§: № 4.28– 4.71 juftlari	
8-dars	Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash	[6]:1-q., VIII-b., 5-§ : № 121–180-toqlari.	[6]: 1-q.,VIII-b., 5-§ : №121–180-toqlari. 1991–2041-juftlari.	2
		[13]: 2-q., № 4.1–4.2-toqlari	[13]:2-q., №4.1–4.2-juftlari.	
		[21]: 2-q.,5-§: № 5.1–5.150 toqlari	[21]: 2-q.,5-§: № 5.1–5.51 juftlari	
		[8]: №1991–2064-toqlari.	[8]: № 1991–2064-juftlari.	
9-dars.	Transtendent funksiyalarning aniqmas integrali.	[8]: № 2066–2120-toqlari	[8]: 2066–2120- juftlari	2
		[13]: 2-q., № 4.35–4.41-toqlari	[13]: 2-q., № 4.35–4.41-juftlari.	
	8-bo'lim.Aniq integral. Aniq integralning tatbiqlari			22
10-dars.	Ta'rifdan foydalanib aniq integralni hisoblash.	[6]: 1-q., 1-§ № 4. a) , d),	[6]: 1-q.,IX-b., 1-§ . №4. v), g).	2
		[8]: 2181–2189-toqlari.	[8]: 2181–2189-juftlari.	

	Darbu yig'indilari. Aniq integral yordamida limitlarni hisoblash	[13]: 2-q., №6.1–6.7-toqlari.	[13]: 2-q., №6.1–6.7- juftlari	
		[21]: 2-q.,6-§: № 6.1–6.41 toqlari	[21]: 2-q.,6-§: № 6.1–6.41 juftlari	
11-dars.	Aniq integralning mavjudligi. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari. Aniq integralning xossalari	[6]: 1-q., IX-b., 2-§ : № 1–15-toqlari	[6]: 1-q.,IX-b., 2-§ : № 1–15-juftlari.	2
		[8]:№-2190–2205-toqlari.	[8]: № 2190-2205-juftlari.	
		[13]: 2-q., № 6.20–6.35; 6.36–6.51-toqlari.	[13]: 2-q., №6.20–6.35; 6.36–6.51-juftlari.	
		[21]: 2-q.,7-§: № 7.1–7.87 toqlari	[21]: 2-q.,7-§: № 7.1–7.87 juftlari	
12-dars.	Nyuton-Leybnis formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli	[6]: 1-q., IX-b., 4-§ : № 16–120-toqlari.	[6]: 1-q.,IX-b., 4-§ : №16–120-juftlar.	2
		[8]:№2206-2214; 2239-2250; 2268-2286-toqlari.	[8]: № 2206-2214; 2239-2250; 2268-2286- juftlari.	
		[13]: 2-q., № 6.35–6.106; 6.127–6.167-toqlari.	[13]: 2-q., №6.35–6.106; 6.127–6.167- juftlari.	
		[21]: 2-q.,8-§: № 8.1–8.87 toqlari	[21]: 2-q.,8-§: № 8.1–8.87 juftlari	
13-dars	Aniq integralda bo'laklab integrallash usuli	[6]: 1-q., IX-b., 4-§ : №1-15; 101–106; 107–120-toqlari.	[6]: 1-q.,IX-b., 4-§ : №1–15; 101–106; 107–120- juftlari.	2
		[8]: №2316–2347-toqlari.	[8]: № 2316–2347-juftlari.	
		[13]: 2-q., № 6.169–6.183-toqlari.	[13]: 2-q., №6.169–6.183-juftlari	
		[21]: 2-q.,8-§: № 8.88–8.111 toqlari	[21]: 2-q.,8-§: № 8.88–8.111 juftlari	
14-dars.	Aniq integralning tatbiqlari. Aniq integral yordamida tekis shaklning yuzini hisoblash	[6]: 1-q., X-b., 2-§ , № 52–90-toqlari.	[6]: 1-q.,X-b., 2-§ , №52–90-juftlari.	2
		[13]: 2-q., №7.1–7.6; 7.21–7.22; 7.29, 7.33–7.35-toqlari.	[13]: 2-q., № 7.1–7.6; 7.21–7.22; 7.29, 7.33–7.35-juftlari	
		[8]:№2397–2407; 2413–2425-toqlari.	[8]: 2397–2407; 2413–2425-toqlari..	
		[21]: 2-q.,9-§: № 9.1–9.77 toqlari	[21]: 2-q.,9-§: № 9.1–9.77 juftlari	
15-dars.	Aniq integral yordamida chiziqning yoyi uzunligini	[6]: 1-q., IX-b., 1-§ : №1–51-toqlari.	[6]: 1-q.,X-b., 1-§ : №1–51-juftlari.	2
		[8]: №2431–2453-toqlari.	[8]: X –b, 1-§ : № 2431–2453-juftlari.	

	hisoblash	[13]: 2-q., № 7.61–7.74; 7.82-toqlari.	[13]: 2-q., № 7.61–7.74; 7.82-juftlari.	
		[21]: 2-q.,10-§: № 10.1–10.39 toqlari	[21]: 2-q.,10-§: № 10.1–10.39 juftlari	
16-dars.	Aniq integral yordamida aylanma jismning hajmini hisoblash	[6]: 1-q., X-b., 2-§ , № 52–90-toqlari.	[6]: 1-q.,X-b., 2-§ , №52–90-juftlari.	2
		[13]: 2-q., №7.1–7.6; 7.21–7.22; 7.29, 7.33–7.35-toqlari.	[13]: 2-q., № 7.1–7.6; 7.21–7.22; 7.29, 7.33–7.35-juftlari	
		[8]:№2397–2407; 2413–2425-toqlari.	[8]: №2397–2407; 2413–2425-toqlari.	
		[21]: 2-q.,11-§: № 11.1–11.50 toqlari	[21]: 2-q.,11-§: № 11.1–11.50 juftlari	
17-dars.	Aniq integral yordamida aylanma jism sirtining yuzini hisoblash	[6]: 1-q., X-b., 3-4§ § : №91–104; 104–105-toqlari.	[6]: 1-q.,X-b., 3-4§ § :№91–104; 104–105-juftlari.	2
		[8]:№2486–2498; 2462–2470; 2472–2485-toqlari.	[8]: №2486–2498; 2462–2470; 2472–2485-juftlari	
		[13]: 2-q., № 8.1–8.4; 8.5–8.7; 8.10–8.11-toqlari	[13]: 2-q., № 8.1–8.4; 8.5–8.7; 8.10–8.11-juftlari.	
		[21]: 2-q.,12-§: № 12.1-12.36 toqlari	[21]: 2-q.,12-§: № 12.1-12.36 juftlari	
18-dars.	Aniq integral-ning mexanika masalalariga tat-big'i. Silliq egri chiziqning statik momenti va og'irlik markaz-latni hisoblash	[8]:№2501–2515-toqlari.	[8]:№2501–2515-juftlari.	2
		[13]: 2-q., № 9.1–9.14; 9.15–9.17-toqlari.	[13]: 2-q., № 9.1–9.14; 9.15–9.17-juftlari.	
		[21]: 2-q.,13-§: № 13.1–13.28 toqlari	[21]: 2-q.,13-§: № 13.1–13.28 juftlari	
19-dars.	Tyekis figuraning statik momentlari va og'irlik markazlarni hisoblash	[8]:№2501–2515-toqlari.	[8]:№2501–2515-juftlari.	2
		[13]: 2-q., № 9.1–9.14; 9.15–9.17-toqlari.	[13]: 2-q., № 9.1–9.14; 9.15–9.17-juftlari.	
		[21]: 2-q.,13-§: № 13.29–13.64 toqlari	[21]: 2-q.,13-§: № 13.29–13.64 juftlari	
20*-dars.	Aniq integrallar-ni taqribiy hi-soblash. To'g'ri to'rtburchaklar usuli. Trapetsi-	[8]: № 2532–2539; 2539–2544-toqlari.	[8]:№2532–2539; 2539–2549-jufotlari	2
		[13]: 2-q., № 10.1: a), b); 10.2–10.8; 10.9–10.11-toqlari.	[13]: 2-q., № 10.1: a), b): 10.2–10.8; 10.9–10.11-juftlari.	

	yalar usuli. Parabolalar usuli	[21]: 2-q.,14-§: № 14.1–14.51 toqlari	[21]: 2-q.,14-§: № 14.1–14.51 juftlari	
	9-bo'lim. Ko'p o'zgaruvchili funksiya			22
21-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi. R^m fazoda sonlar ketma-ketligi va uning limiti	[6]: 2-q., XII-b., 1-§. №1–20-toqlari.	[6]: 2-q.,XII-b., 1-§ 1–20-juftlari.	2
		[8]:№ 3136–3149; 3151–3170-toqlari.	[8]: № 3136–3149; 3151–3170-juftlari	
		[13]: 3-q.,№ 1.1–1.4; 1.8; 2.8-toqlari.	[13]: 3-q., № 1.1–1.4: 1.8;2.8-juftlari.	
		[21]: 2-q.,17-§: № 17.1–17.52 toqlari.	[21]: 2-q.,17-§: № 17.1–17.52 juftlari	
		[21]: 2-q.,18-§: № 18.1-18.21 toqlari	[21]: 2-q.,18-§: № 18.1-18.21 juftlari	
22-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning karrali va takroriy limiti.	[6]: 2-q., XII-b., 2-§ : № 43–62; 63–71; 73–86-toqlari.	[6]: 2-q.,XII-b., 2-§ : № 43–62; 63–71; 73–86-juftlari	2
		[8]: 3181-3184; 3185-3192-toqlari.	[8]: 2-t, XII-b.,2-§ : № 3181-3192-juftlari.	
		[13]: 3-q., №2.37–2.38; 2.40–2.41-toqlari.	[13]: 3-q., №2.37–2.38; 2.40–2.41- juftlari	
		[21]: 2-q.,19-§: № 19.1–19.38 toqlari	[21]: 2-q.,19-§: № 19.1–19.38 juftlari	
23-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi	[6]: 2-q.,XII-b., 3-§ : № 87–101; 106–112-toqlari.	[6]: 2-q.,XII-b.,3-§ : №87–101; 106–112-juftlari.	2
		[13]: 3-q., № 2.51–2.58; 2.62–2.63-toqlari.	[13]: 3-q., №-t:№2.51–2.58;2.62–2.63-juftlari	
		[8]:№ 3194–3204-toqlari.	[8]:№3194–3204-juftlari.	
		[21]: 2-q.,20-§: № 20.1–20.49 toqlari	[21]: 2-q.,20-§: № 20.1–20.49 juftlari	
24-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.	[6]: 2-q., XII-b., 1-§ : № 1–25; 26–30; 31–34-toqlari.	[6]: 1-q.,XIII-b., 1-§ : № 1–25; 26–30; 31–34- juftlari.	2
		[8]:№ 3213–3230-toqlari.	[8]: № 3213–3230-juftlari.	
		[13]: 3-q.,№ 3.1–3.3: 3.13–3.16-toqlari.	[13]: 3-q.,№3.1–3.3; 3.13–3.16-juftlari	
		[21]: 2-q.,21-§: № 21.1–21.20 toqlari	[21]: 2-q.,21-§: № 21.1–21.20 juftlari	
25-dars.	Ko'p o'zgaruvchili	[6]: 2-q., XIII-b., 1g'yuyu: № 36–47; 51–63-toqlari.	[6]: 2-q.,XIII-b., 1-§ : №36–47; 51–63- juftlari.	2

	funksiyaning differensiallari	[13]: 3-q.,№ 3.21–3.22; 3.28–3.30-juftlari.	[13]: 3-q., № 3.21–3.22; 3.28–3.30- toqlari.	
		[21]: 2-q.,21-§: № 21.21–21.89 toqlari	[21]: 2-q.,21-§: № 21.21–21.89 juftlari	
		[8]: №3235–3241; 4401–4410-toqlari.	[8]: №3235–3241; 4401–4410-juftlari.	
26-dars.	Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradiyent	[8]: №3151–3170; 4401–4409-toqlari.	[8]: № 3151–3170; 4401–4409-juftlari.	
		[13]: 3-q., № 3.43–3.48–3.51-toqlari.	[13]: 3-q.№3.43–3.43–3.48–3.51-juftlari.	
		[21]: 2-q.,21-§: № 21.90–21.106 toqlari	[21]: 2-q.,21-§: № 21.90–21.106 juftlari	
27-dars	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari	[6]:2-q., XIII-b., 2-§ : № 72–83; 84–89; 90–95-toqlari.	[6]: 2-q., XIII-b., 2-§ , № 72–84–89; 90–95-juftlari.	2
		[8]: № 3213–3232; 3235–3242; 3256–3266; 3269–3279-toqlari.	[8]: №3213–3232; 3235–3242; 3256–3266; 3269–3279-juftlari.	
		[21]: 2-q.,22-§: № 22.1–22.17 toqlari	[21]: 2-q.,22-§: № 22.1–22.17 juftlari	
28-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiallari	[6]:2-q., XIII-b.. 2-§ : № 72–83; 84–89: 90–95-toqlari.	[6]: 2-q., XIII-b., 2-§ . № 72–95-juftlari.	2
		[8]: № 3213–3232; 3235–3242; 3256–3266: 3269–3279-toqlari.	[8]:№3213–3232; 3235–3242; 3256–3266; 3269–3279-juftlari.	
		[21]: 2-q.,22-§: № 22.18–22.45 toqlari	[21]: 2-q.,22-§: № 22.18–21.45 juftlari	
29-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi	[6]:2-q., XIII-b., 6-§ ,	[6]: 2-q., XIII-b., 6-§ .	2
		[8]:№ 3593–3600-toqlari	[8]: №3593–3600-juftlari.	
		[13]: 3-q., № 4.65–4.79-toqlari.	[13]: 3-q., № 4.65–4.79- juftlari.	
		[21]: 2-q.,22-§: № 22.46–22.64 toqlari	[21]: 2-q.,22-§: № 22.46–22.64 juftlari	
30-dars.	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari	[6]: 2-q., XIII-b., 3-§ : №106–130-toqlari.	[6]: 2-q., XIII-b., 3-§ : № 106–130-juftlari.	2
		[13]: 3-q., № 5.1–5.8; 5.13–5.18-toqlari.	[13]: 3-q., № 5.1–5.8; 5.13–5.18; 5.19–5.25-juftlari.	
		[8]: № 3621–3653; 3654–3668- toqlari	[8]: № 3621–3653; 3654–3668-juftlari.	
		[21]: 2-q.,23-§: № 23.01–23.32- toqlari	[21]: 2-q.,23-§: № 23.01–23.32- juftlari	

31-dars	Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari	[6]: 2-q., XIII-b., 3-§ : №106–130-toqlari.	[6]: 2-q., XIII-b., 3-§ : № 106–130-juftlari.	2
		[13]: 3-q., № 5.1–5.8; 5.13–5.18-toqlari.	[13]: 3-q., № 5.1–5.8; 5.13–5.18; 5.19–5.25-juftlari.	
		[8]: № 3621–3653; 3654–3668- toqlari	[8]: № 3621–3653; 3654–3668-juftlari.	
		[21]:2-q., 23-§: № 23.33–23.67- toqlari	[21]:2-q., 23-§: № 23.33–23.67- juftlari	
32-dars	Oshkormas funksiyalar. Oshkormas funksiyaning hosilasi	[6]:2-q., XIII-b., 4-§ . №131–146-toqlari.	[6]: 2-q., XIII-b., 4-§ . № 131–146-juftlari.	2
		[21]:2-q., 24-§: № 24.01–24.32- toqlari	[21]: 2-q.,24-§: № 24.01–24.32- juftlari	
		[8]: № 3361–3399- toqlari	[8]:№ 3361–3399 juftlari.	
				64

* 20-mavzu laboratoriya ishi bo'ladi.

Oraliq nazoratlar uchun savollar va variantlar namunalari

1-SEMESTR

1-nazorat uchun nazariy savollar

1. To'plam, to'plamlar ustida amallar.
2. Ratsional sonlar to'plamida kesim. Haqiqiy sonning ta'rifi.
3. Haqiqiy sonlar to'plamining to'liqligi (Dedekind teoremasi).
4. Sonli to'plamlarning chegaralari. To'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari (aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga ega bo'lish haqidagi teorema).
5. Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari.
6. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti.
7. Chegaralangan, chegaralanmagan ketma-ketliklar va ularga misollar.
8. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar va ularga misollar.
9. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari.
10. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar.
11. Tenglik va tengsizliklarda limitga o'tish.
12. Aniqmas ifodalar va ularni ochish usullari.
13. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti haqidagi teorema.
14. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaning tatbiqlari (e-soni).
15. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass lemmasi.
16. Ketma-ketlikning yaqinlashish kriteriysi (Koshi teoremasi).
17. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari.
18. Ketma-ketlikning limiti bilan uning qismiy ketma-ketliklari limiti orasidagi munosabatni ifodalovchi teorema.
19. Funksiya va uning berilish usullari.
20. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
21. Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
22. Darajali funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
23. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar va ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
24. Trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalyarning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
25. To'plamning limit nuqtasi.

26. Funksiyaning limitining ta'riflari.
27. Funksiya limitining Geyne ta'rifi va unga misollar.
28. Funksiyaning limitining Koshi ta'rifi va unga misollar.
29. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.
30. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.
31. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar.\
32. Murakkab funksiyaning limiti.
33. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teorema.
34. Funksiya chekli limitga ega bo'lishi haqida Koshi teoremasi.
35. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning ta'riflari va ularga misollar.
36. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.
37. Funksiya uzluksizligining Geyne ta'rifi.
38. Funksiya uzluksizligining Koshi ta'rifi.
39. Funksiyaning chapdan va o'ngdan uzluksizliklari.
40. Funksiyaning uzilishi va uning turlari.
41. Funksiyaning birinchi tur uzilishi va unga misollar.
42. Funksiyaning ikkinchi tur uzilishi va unga misollar.
43. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar.
44. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.
45. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.
46. Limitni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.
47. Uzluksiz funksiyaning lokal xossalari.
48. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning global xossalari. Bolsano-Koshining birinchi teoremasi.
49. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning global xossalari. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.
50. Veyershtrassning birinchi teoremasi.
51. Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.
52. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifi.
53. Kantor teoremasi.
54. Kantor teoremasidan kelib chiqadigan natija.

1-nazorat uchun variantlar namunalari

1-variant

1. Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari.
2. Cheksiz katta ketma-ketliklar va unga misollar.
3. $A=[-1;\ 7]$, $B=(-3;10)$, $C=[0;8]$ berilganda, $A\cap B\cap C$ $A\cup B\cup C$ larni toping.

4.Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ ,\quad x_n=\frac{5n+1}{10n-3},\ a=\frac{1}{2}.$$

2-variant

1. Irratsional sonning ta'rifi. Haqiqiy sonning ta'rifi. Haqiqiy son ustida arifmetik amallar.
2. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari (3^0-4^0-xossalar).
3. $A=\{x\in R:\ x^2-5x+6\le 0\ \}$, $B=\{x\in R;\ 2x^2-5x<0\}$ berilgan bo'lsa, $A\cup B$ $A\cap B$ larni toping.
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ ,\quad x_n=\frac{2n+3}{n+5},\ a=2.$$

3-variant

1. Ratsional sonlar to'plamida kesim tushunchasi.
2. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari (1^0–2^0 -xossalar)
3. $A=\{-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\}$, $B=\{3;\ 4;5;\ 6\}$,
$C=\{-3;-2;-1;\ 0;\ 2;\ 3\}$, $D=\{2;\ 3;\ 4;5;\ 6;7\}$

yekanligi malum bo'lsa, $(A\cap B)\cup(C\cap D)$ ni toping.

4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n=\frac{5n}{n+1},\quad a=-5.$$

4-variant

1. Sonli to'plamlarning chegaralari. Sonli to'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga ega bo'lishi haqidagi teorema.
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar.
3. $A=\{-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\}$, $B=\{3;\ 4;5;\ 6\}$,
$C=\{-3;-2;-1;\ 0;\ 2;\ 3\}$, $D=\{2;\ 3;\ 4;5;\ 6;7\}$ ekanligi ma'lum bo'lsa,
$(A\cap B)\cup(C\cap D)$ ni toping.
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n=\frac{n+1}{1-2n},\quad a=-\frac{1}{2}.$$

5-variant

1. Ratsional sonlar va ular ustida arifmetik amallar.
2. Chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar va ularga misollar.
3. $A=\{-2;-1;0;1;2;3;4;5;\}$, $B=\{3;4;5;6\}$, $C=\{-3;-2;-1;0;2;3\}$, $D=\{2;3;4;5;6;7\}$ yekanligi malum bo'lsa, $(A\cap B)\cup(C\cap D)$ ni toping.
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n = \frac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

6-variant

1. To'plamlarni taqqoslash.
2. Sonlar ketma-ketliklari ustida arifmetik amallar.
3. $A=\{2n-1;\, n\in N\}$, $B=\{4n+1,\, n\in N\}$, $C=\{3n+1,\, n\in N\}$ bo'lsin. U holda, $A\cap B$, $A\cap C$ larni toping.
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ x_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$$

7-variant

1. To'plamlarni taqqoslash.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning ko'paytmasi ham yaqinlashuvchi bo'lishi haqidagi teorema.
3. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad a = 0$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$ limitni hisoblang.

8-variant

1. To'plamlarning ko'paytmasi. To'plamlarning Dekart ko'paytmasining ta'rifi.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi haqidagi teorema.
3. Berilgan: $A=\{6\le x-11\le 13,\ x\in N\}$, $B=\{x+12\le 20,\ x\in N\}$. Toping: $A\cup B=?$, $A\cap B=?$
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$$x_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}, \quad a = -2.$$

9-variant

1. To'plamlarning simmetrik ko'paytmasi.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar yig'indisi, ayirmasining yaqinlashuvchi bo'lishi haqidagi teorema.
3. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n-2)^2}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$ limitni hisoblang.
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n=\frac{n}{n+1},\quad a=1.$$

10-variant

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning asosiv xossalari.
2. To'plamlarning yig'indisi va ayirmasining ta'riflari.
3. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n=\dfrac{2n}{n^3+1}$, $a=0$.
4. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$ limitni hisoblang.

11-variant

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ta'rifi va unga misollar.
2. Ratsional sonlar to'plamida kesim.
3. $A[-3;9]$, $B=[-5,11]$, $C=(0;8)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $A\cap B\cap C$, $A\cup B\cup C$ larni toping.
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n=\frac{3n^2}{2-n^2},\quad a=-3.$$

12-variant

1. Uzluksiz funksiyaning ta'riflari.
2. Funksiya tushunchasi va uning berilish usullari.
3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang.

13- variant

1. Funksiya uzluksizligining Geyne ta'rifi.
2. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi.

3. Ushbu $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$

funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo‘ladi?

4. Ushbu $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ limitni hisoblang.

14- variant

1. Elementar funksiyalar va ularning aniqlanish va o‘zgarish sohalari ($y=x^n$, $y=a^x$).
2. Funksiya uzluksizligining Koshi ta’rifi.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo‘ladi?

15-variant

1. Funksiyaning o‘ngdan va chapdan uzluksizligi.
2. Ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalari.
3. Ushbu $f(x)=\begin{cases} x\,ctg2x, & x\neq 0, |x|<\dfrac{\pi}{2}, \\ a, & x=0 \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo‘ladi?
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^{x^2+3}$ limitni hisoblash.

16-variant

1. Trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalari.
2. Funksiyaning uzilishi va uzilish nuqtalarining turlari.
3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leq 0, \\ a(x-1), & x>0 \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo‘ladi?

17-variant

1. Funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi ta'rifini bering va unga misol keltiring.
2. To'plamning limit nuqtasi va uning xossalari.
3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^3}, x\neq -1,\\ a, \quad x=-1\end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?

18-variant

1. Funksiya limitining ta'riflari.
2. Funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi ta'rifini bering va unga misol keltiring.
3. Ushbu $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ limitni hisoblang.

19-variant

1. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar.
2. Funksiya limitining Geyne ta'rifini bering va unga misol keltiring.
3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{sin\pi x}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^4-1}{x}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?

20-variant

1. Funksiya limitining Koshi ta'rifini bering va unga misol keltiring.
2. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema.
3. Ushbu $f(x)=2x^2+6$ funksiyaning $x_0=7$ nuqtada uzluksizligini tarif bo'yicha isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ -ni toping).
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xsinx}{1-\cos x}$ limitni hisoblang.

21-variant

1. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi haqidagi teorema.
2. Funksiyaning chap va o'ng limitlari.
3. Ushbu $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{tg(\pi(2+x))}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=-2x^2-5$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada uzluksizligini ta'rif bo'yicha isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ ni toping).

22-variant

1. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.
2. Limitni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.
3. Ushbu $f(x)=2x+6$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada uzluksizligini ta'rif bo'yicha isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ ni toping).
4. Ushbu $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin x}$ limitni hisoblang.

23-variant

1. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari.
2. Murakkab funksiyaning limiti.
3. Ushbu $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=2x-1$ funksiyaning $x_0=5$ nuqtada uzluksizligini ta'rif bo'yicha isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ ni toping).

24-variant

1. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teorema.
2. Bolsano-Koshining birinchi teoremasi.
3. Ushbu $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ limitni hisoblang.
4. Ushbu $f(x)=2x^2-4$ funksiyaning $x_0=3$ nuqtada uzluksizligini ta'rif bo'yicha isbotlang ($\delta(\varepsilon)$ ni toping).

25-variant

1. Funksiyaning chekli limitga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi (kriteriysi)
2. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.
3. Ushbu $y=\sqrt{\cos x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
4. Funksiyaning limiti ta'rifidan foydalanib, ushbu $\lim_{x\to 3}x^4=81$ tenglikni isbotlang.

26-variant

1. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning global xossalari Veyershtrassning birinchi teoremasi.
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning ta'riflarini bering va ularga misollar keltiring.
3. Ushbu $y = tg\sqrt{16 - x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
4. Funksiyaning limiti tarifidan foydalanib, ushbu $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

tenglikni isbotlang.

27-variant

1. Cheksiz kichik funksiyalarni solishtirish (taqqoslash).
2. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifini bering.
3. $y = \sqrt{sin(\sqrt{x})}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
4. Funksiyaning limiti ta'rifidan foydalanib, ushbu $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$

   tenglikni hisoblang.

28-variant

1. Funksiya uzluksizligining orttirmalar tilidagi ta'rifini bering. $y = \sin x$ funksiyaning R da uzluksizligini shu ta'rif bo'yicha ko'rsating.
2. Kantor teoremasi (funksiyaning tekis uzluksizligi haqida)
3. $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
4. Funksiyaning limiti ta'rifidan foydalanib, quyidagi tenglikni isbotlang:

   $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$.

2-nazorat uchun nazariy savollar

1. Funksiya hosilasining ta'riflari.
2. Funksiya hosilasining geometrik va mexanik ma'nosi.
3. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi tushunchasi va sharti.
4. Funksiyaning uzluksizligi bilan uning differensiallanuvchanligi orasidagi bog'lanish.
5. Teskari funksiyaning hosilasi.
6. Murakkab funksiyaning hosilasi.
7. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari.
8. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi.
9. Yuqori tartibli hosilaning ta'rifi. $y = \sin x$ funksiyaning n- tartibli $y^{(n)}$ hosilasini ta'rif bo'yicha topish.
10. Yuqori tartibli differensial tushunchasi.

11. Ko‘paytmaning yuqori tartibli hosilasini topishda Leybnis formulasi.
12. Differensial hisobning asosiy teoremalari. Ferma teoremasi.
13. Roll teoremasi va uning geometrik ma’nosi.
14. Roll teoremasi shartlarining muhimligini ko‘rsatish (misollar keltirish).
15. Lagranj teoremasi va uning geometrik ma’nosi. Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan natijalar.
16. Koshi teoremasi.
17. Ko‘phad uchun Teylor formulasi.
18. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi.
19. Teylor formulasi qoldiq hadining Lagranj, Koshi va Peano ko‘rinishlari.
20. $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
21. $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
22. $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
23. Funksiyaning monotonlik sharti.
24. Funksiyaning ekstremum qiymatlari.
25. Ekstremumning zaruriy sharti.
26. Ekstremumning yetarli shartlari.
27. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosiladan foydalanish.
28. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymati.
29. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi.
30. Funksiya botiqligi (qavariqligi)ning zaruriy va yetarli shartlari.
31. Funksiyaning egilish nuqtalari.
32. Egilish nuqtasi bo‘lishining zaruriy sharti.
33. Egilish nuqtasi bo‘lishining yetarli sharti.
34. Funksiya grafigining asimptotalari.
35. Funksiya grafigini yasash.

2- nazorat uchun variantlar namunalari

1-variant

1. Koshi teoremasi (chekli orttirmalar haqidagi)
2. Funksiya grafigining assimptotalari
3. $y = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}, \qquad y' = ?$

4. $y=\frac{e^x}{x}$, $y^{(10)}=?$

2-variant

1. Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqidagi). Teoremadan kelib chiqadigan 1, 2, 3-natijalar.
2. Egilish nuqtasi bo'lishining yetarli shartlari.
3. $y=tgx$ funksiyaning hosilasini ta'rifdan foydalanib, toping.
4. $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=?$

3-variant

1. Funksiyaning egilish nuqtalari. Egilish nuqtasi bo'lishning zaruriy sharti.
2. Lagranj teoremasi (chekli ortirmalar haqidagi) va uning geometrik ma'nosi.
3. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $y'=?$
4. $y=x\cdot\cos 2x$, $d^2y=?$

4-variant

1. Roll teoremasi shartlarining muhimligini ko'rsating (misollar orqali).
2. Funksiyaning botiqligi va qavariqligining zaruriy va yetarli shartlari.
3. $y=\frac{cos3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, $y'=?$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0, n>0)$ limitni Lopital qoidasidan foydalanib, hisoblang.

5-variant

1. Roll teoremasi va uning geometrik ma'nosi.
2. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.
3. $y=\arccos x$ funksiyaning hosilasini ta'rif bo'yicha toping.
4. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $y^{(100)}=?$

6-variant

1. Ferma teoremasi.
2. Funksiyaning ekstremum qiymatini topishda yuqori tartibli hosiladan foydalanish.
3. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$, $y'_x=?$

4. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$, $y'_x=?$

7-variant

1. Ko'paytmaning yuqori tartibli hosilasini topishda Leybnis formulasi.
2. Ekstremumning yetarli shartlari.
3. $y=2^{tg\frac{1}{x}}$, $y'=?$
4. $y=\sqrt{2x-x^2}$ funksiyaning ekstremum qiymatini toping.

8-variant

1. Yuqori tartibli hosilaning ta'rifi. $y=\cos x$, $y^{(n)}=?$, $y=a^x$, $y'=?$ (hosilaning ta'rifiga ko'ra toping).
2. Ekstremumning zaruriy sharti.
3. $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning hosilasini ta'rif bo'yicha hisoblang.
4. $y=x^2\cdot sin2x$, $y^{(50)}=?$

9-variant

1. Funksiyaning ekstremum qiymatlari va ularning geometrik ma'nosi.
2. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi.
3. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{x}$, $y'=?$
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$ limitni Lopital qoidasi yordamida hisoblang.

10-variant

1. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari.
2. Funksiyaning monotonlik sharti.
3. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$, $y'=?$
4. $y=\frac{2x}{1+x^2}$ funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

11-variant

1. $0\cdot\infty, \infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
2. Murakkab funksiyaning hosilasini topish.
3. $y=\sin\left[\cos^2(tg^3x)\right]$, $y'=?$
4. $y=x^3-6^{x^2+9x-4}$ funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

12-variant

1. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi (teoremani isbotlang).
2. Teskari funksiyaning hosilasini topish.

3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$ limitni Lopital qoidasi yordamida hisoblang.

4. $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, $f'(1)=?$

13-variant

1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishda Lopital qoidasi (teoremani isbotlang).

2. Nuqtada funksiyaning differensiallanuvchanligi tushunchasi va sharti (teoremani isbolang).

3. $y=\frac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)}=?$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3tg4x-12tgx}{3sin4x-12sinx}$ limitni Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang.

14-variant

1. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi (formulani keltirib chiqaring).

2. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.

3. $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=?$

4. $y=tg\frac{x}{2}-ctg\frac{x}{2}$, $y'=?$

15-variant

1. Teylor formulasi qoldig'ining Lagranj, Koshi va Peano ko'rinishlari.

2. Hosilaning ta'riflari.

3. $y=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$ $(a\neq 0)$ funksiyaning differensialini toping.

4. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, $y'=?$

2-semestr

1-nazorat uchun nazariy savollar

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integral ta'rifi.
2. Integrallashning sodda qoidalari .
3. Integrallash usullari (o'zgaruvchilarni almashtirish, bo'laklab integrallash).
4. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallash
5. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi shaklida ifodalash.
6. $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ - ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
7. Binominal differensiallarni integrallash ($x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ shakldagi ifodalar).
8. $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx-$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash (Eyler almashtirishlari).
9. $R(\sin x,\cos x)dx-$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash
10. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar (o'tilgan yo'l haqidagi, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish haqidagi masalalar).
11. Aniq integralning ta'rifi.
12. Darbu yig'indilari va ularning xossalari.
13. Aniq integralning boshqacha ta'rifi (Darbu yig'indilari orqali berilgan ta'rifi).
14. Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi.
15. Aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema.
16. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari.
17. Aniq integralning xossalari (tenglik ishorasi orqali ifodalanadigan xossalar).
18. Aniq integralning xossalari (tengsizliklar orqali ifodalanadigan xossalar).
19. O'rta qiymat haqidagi teoremalar
20. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar.
21. Aniq integralni hisoblash usullari (o'zgaruvchilarni almashtirish, bo'laklab integrallash, taqribiy hisoblash usullari).
22. Yoy uzunligi tushunchasi. Yoy uzunligini integral orqali fodalash
23. Yuza tushunchasi va kvadratlanuvchi soha.
24. Yuzani aniq integral orqali ifodalash.
25. Hajm tushunchasi va uning xossalari.
26. Hajmni aniq integral orqali ifodalash.
27. Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

28. O‘zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
29. Egri chiziqning statik momenti va uning og‘irlik markazini topish.
30. Tekis figuraning statik momenti va og‘irlik markazini topish.

1-nazorat uchun variantlar namunalari

1-variant

1.Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integralning ta'rifi.

2. $R(\sin x, \cos x)dx$ – ko'rinishdagi ifodalarni integrallash

3. $\int \frac{dx}{5-4x-x^2}$ integralni hisoblang.

4. $\int 3^x e^{-2x} dx$ integralni hisoblang.

2-variant

1.Integrallashning sodda qoidalari.

2. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash (Eyler almashtirishlari).

3. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}$ integralni hisoblang.

4. $\int x\cos 3x\,dx$ integralni hisoblang.

3-variant

1. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli.

2.To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi shaklida ifodalash.

3. $\int \cos^7 x \cdot \sin^3 dx$ integralni hisoblang.

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}dx$ integralni hisoblang.

4-variant

1. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallash.

2.Binominal differensiallarni integrallash $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$

3. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ integralni hisoblang.

4. $\int x\cos x\,dx$ integralni hisoblang.

5-variant

1. $R\left(x, \sqrt{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.

2. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash usuli.

3. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$ integralni hisoblang.

4. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x}}$ integralni hisoblang.

6-variant

1. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli.
2. $R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishidagi ifodalarni integrallashda $t = tg\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ almashtirishni bajaring.
3. $\int x^2 \ln^2 x dx$ integralni hisoblang.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ integralni hisoblang.

7-variant

1. $R\left(x, \sqrt[r]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \ldots\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
2. Integrallashning sodda qoidalari.
3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ integralni hisoblang.
4. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 4x}$ integralni hisoblang.

8-variant

1. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash usuli.
2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ integralni hisoblashda, $c > 0$ bo'lganda, qanday almashtirish olinadi va uni bajaring.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$ integralni hisoblang.
4. $\int xe^{-x}dx$ integralni hisoblang.

9-variant

1. $R(\sin x, \cos x)dx$, ko'rinishdagi ifodalarni integrallashda, qaysi hollarda $t = tgx$ almashtirish olinadi va bu almashtirishni bajaring.
2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblang.
3. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}dx$ integralni hisoblang.
4. $\int (e^x - \cos x)^2 dx$ integralni hisoblang.

10-variant

1. Aniqmas integralning ta'riflari.

2. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ integralni hisoblashda, agar ax^2+bx+c kvadrat uch had ikkita λ va μ har xil haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, u holda, qanday almashtirish olinadi va uni bajaring.

3. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ integralni hisoblang.

4. $\int x\cdot\sin 3x dx$ integralni hisoblang.

11-variant

1. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ integralni hisoblashda p-kasr son bo'lib, $\frac{m+1}{n}$ butun bo'lganda qanday almashtirish olinadi va uni bajaring.

2. $J_n=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ integralni hisoblash uchun rekurrent formulani chiqaring.

3. $\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$ integralni hisoblang.

4. $\int\cos^5 xdx$ integralni hisoblang.

12-variant

1. $\frac{A}{x+a}$, $\frac{B}{(x+a)^k}$, $\frac{MX+N}{x^2+px+q}$, $\frac{MX+N}{(x^2+px+q)^m}$ ko'rinishdagi kasrlarni integrallash, $(k=2,3,...;m=2,3,...)$, A,B,M,N lar o'zgarmas sonlar.

2. $\int x^m(a+x^n)^p dx$- integralni hisoblashda, p-kasr son bo'lib, $p+\frac{m+1}{n}$ - butun bo'lsa, qanday almashtirish olinadi va uni bajaring.

3. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ integralni hisoblang.

4. $\int x^2e^{-3x}dx$ integralni hisoblang.

13-variant

1. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - to'g'ri kasrda $Q(x)=...(x-a)^k...(x^2+px+q)^m...$ ko'rinishda tasvirlangan bo'lsa, $\frac{P(x)}{Q(x)}$-to'g'ri kasrni noma'lum koeffitsiyentli sodda kasrlar yig'indisi shaklida tasvirlang.

2. $R(\sin x,\cos x)dx$- ko'rinishdagi ifodalarni integrallashda, qaysi holda, $t=\cos x$ almashtirish olinadi va almashtirishni bajaring.

3. $\int x\,arctgx\,dx$ integralni hisoblang.

4. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ integralni hisoblang.

14-variant

1.Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli.

2. $R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallashda, qaysi holda $t=\sin x$ almashtirish olinadi va uni bajaring.

3. $\int \frac{x^2}{1+x}dx$ integralni hisoblang.

4. $\int \cos^2 x dx$ integralni hisoblang.

15-variant

1. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallashda Eyler almashtirishlarini ko'rsating.

2.Boshlang'ich funksiya tushunchasi va aniqmas integralning ta'rifi.

3. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ integralni hisoblang.

4. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$ integralni hisoblang.

16-variant

1. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar (o'tilgan yo'l haqidagi, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish haqidagi masalalar).
2. Tekis figuraning statik momenti va og'irlik markazini topish.
3. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ integralni hisoblang.
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ integralni hisoblang.

17-variant

1. Aniq integralning ta'rifi.
2. Egri chiziqning statik momenti va uning og'irlik markazini topish.
3. $\int_0^3 \frac{xdx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$ integralni hisoblang.
4. $\int_1^e x\ln x dx$ integralni hisoblang.

18-variant

1. Darbu yig'indilari va ularning xossalari.
2. Yoy uzunligi tushunchasi. Yoy uzunligini integral orqali fodalash.

3. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} arctg\sqrt{x}\,dx$ integralni hisoblang.

4. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$ integralni hisoblang.

19-variant

1.Aniq integralning boshqacha ta'rifi (Darbu yig'indilari orqali berilgan ta'rifi).
2. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
3. $y^2=2x$ va $x^2=2y$ parabolalar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.
4. $\int\limits_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ integralni hisoblang.

20-variant

1. Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi.
2. Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
3.Ushbu

$$\begin{cases} x=20(t-\sin t) \\ y=20(1-\cos t) \end{cases} \quad (0\le t\le \pi)$$

tenglamalar sistemasi bilan berilgan egri chiziqning (sikloidaning) uzunligini toping.
4.O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib, $f(x)=\sin^2 x$ funksiyaning $[0;\,2\pi]$ kesmadagi o'rta qiymatini toping.

21-variant

1. Aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema.
2. Hajmni aniq integral orqali ifodalash.
3. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2+4x+3}$ integralni hisoblang.
4. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$ integralni hisoblang.

22-variant

1. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari.
2. Hajm tushunchasi va uning xossalari.
3. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$ integralni hisoblang.

4. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ integralni hisoblang.

23-variant

1. Aniq integralning xossalari (tenglik ishorasi bilan ifodalanadigan xossalar).
2. Yuzani aniq integral orqali ifodalash.
3. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$ integralni hisoblang.
4. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklni Ox o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning xajmini toping: $y = 3\sin x,\quad y = \sin x,\quad 0 \le x \le \pi.$

24-variant

1. Aniq integralning tengsizliklar bilan ifodalanadigan xossalari.
2. Yuza tushunchasi va uning kvadratlanuvchi soha.
3. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ integralni hisoblang.
4. Parametrik shaklda berilgan quyidagi egri chiziklarning yoy uzunligini hisoblang:

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le 2. \end{cases}$$

25-variant

1. O‘rta qiymat haqidagi teoremalar.
2. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi
3. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklni Ox o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning xajmi toping: $y = -x^2 + 5x - 6,\ y = 0.$
4. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$ integralni hisoblang

26-variant

1. Chegaralari o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integrallar.
2. Aniq integralni hisoblash usullari (o‘zgaruvchilarni almashtirish, bo‘laklab integrallash).
3. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi egri chiziqning yoy uzunligini hisoblang: $\rho = 2\varphi,\quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
4. $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$ integralni hisoblang.

27-variant

1.Aniq integralni hisoblash usullari (taqribiy hisoblash usuli).

2.Chegaralari o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integrallar.

3. $\int_1^2 \ln x dx$, integralni hisoblang.

4. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin x}$, integralni hisoblang.

2-nazorat uchun nazariy savollar

1. R^m fazo va undagi o‘lchov tushunchasi.
2. R^m dagi sohalarga misollar.
3. R^m da ketma-ketlik tshunchasi. Ketma-ketligining limiti.
4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya va uning limiti.
5. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
6. Uzluksiz funksiyaning xossalari.
7. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi.
8. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
9. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensiali.
10. Yo‘nalish bo‘yicha hosila va uni hisoblash formulasini keltirib chiqarish.
11. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi.
12. Murakkab funksiyaning hosilasi.
13. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.
14. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiali.
15. O‘rta qiymat haqidagi teorema.
16. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.
17. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari.
18. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatga ega bo‘lishining zaruriy sharti.
19. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatiga ega bo‘lishining yetarli sharti.
20. Oshkormas funksiya tushunchasi.
21. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.
22. Oshkormas funksiyaning hosilasi.
23. Ikki o‘zgaruvchili oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.

2- nazorat uchun variantlar namunalari

1-variant

1. R^m fazo va undagi o'lchov tushunchasi.
2. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.
3. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ limit mavjudmi?
4. Ushbu $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2>0) \\ 0, \qquad x=0, y=0 \end{cases}$ funksiya uchun

$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$ ekanligini isbotlang.

2-variant

1. R^m dagi sohalarga misollar keltiring.
2. Ikki o'zgaruvchili oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.
3. Ushbu $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}_0} \ x^2+y^2\neq 0 \\ 0, \qquad x^2+y^2=0 \end{cases}$ funksiyaning uzluksizligini isbotlang.
4. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ limit mavjudmi?

3-variant

1. R^mda ketma-ketlik tushunchasi. Ketma-ketligining limiti.
2. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.
3. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+x^2}$ limit mavjudmi?
4. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

4-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning limiti.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari
3. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ limit mavjudmi?
4. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$

5-variant

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
2. Oshkormas funksiyaning hosilasi.
3. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

$$z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

4. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a \in R^2)$ ekanligini ta’rif bo‘yicha isbotlang: $x^{(n)} = \left\{\frac{13-n^2}{1+3n^2}, \frac{2n-1}{2-3n}\right\}$, $a\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

6-variant

1. Uzluksiz funksiyaning xossalari.
2. Murakkab funksiyaning hosilasi.
3. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$

.

4. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a \in R^2)$ ekanligini ta’rif bo‘yicha isbotlang: $x^{(n)} = \left\{\frac{1-2n^2}{n^2+3}, \frac{3n^2}{2-n^2}\right\}$, $a(-2;-3)$.

7-variant

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi.
2. Oshkormas funksiya tushunchasi.
3. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a \in R^2)$ ekanligini ta’rif bo‘yicha isbotlang: $x^{(n)} = \left\{\frac{4n^2+1}{3n^2+2}, \frac{4-n^2}{3+2n^2}\right\}$, $a\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.
4. $z = e^{x^2 y^2}$ fuksiyaning d^2z ikkinchi tartibli to‘liq differensialini toping

8-variant

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatiga ega bo‘lishining yetarli sharti.
3. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a \in R^2)$ ekanligini ta’rif bo‘yicha isbotlang: $x^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\cos n\pi\right\}$, $a(0;0)$.
4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

9-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatga ega bo'lishining zaruriy sharti.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang:

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y};\ x_0=\infty,\quad y_0=\infty.$$

4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z)=x^{y/z}$.

10-variant

1. Yo'nalish bo'yicha xosila va uni hisoblash formulasini keltirib chiqarish
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatga ega bo'lishining zaruriy sharti.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang:

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2};\ x_0=y_0=0.$$

4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

11-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang:

$$f(x,y)=\log_x(x+y);\ x_0=1,\ y_0=0.$$

4. Quyidagi funksiyani berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ $\quad O(0;0),\quad A(0;1)$.

12-variant

1. Murakkab funksiyaning hosilasi.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang:

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{2x+3y};\ x_0=y_0=0.$$

4. Quyidagi funksiyani berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(-1;-1)$

13-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali.
2. O'rta qiymat haqidagi teorema.
3. Quyidagi funksiyani berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}; & x^4+y^4\neq 0,\\ 0, & x^4+y^4=0\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(1;2)$
4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

14-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
3. Quyidagi funksiya ekstremumga tekshirilsin: $u=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.
4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z)=z\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$.

15-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
2. Ko'p o'zgaruvchi funksiyaning yuqori tartibli differensiali.
3. Quyidagi funksiyani ekstremumga tekshiring: $z=x^2+(y-1)^2$.
4. Berilgan funksiyaning ko'rsatilgan to'plamdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping: $u=xy-x^2y-\dfrac{xy^2}{2}$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

Yakuniy nazorat uchun nazariy savollar va variantlar namunalari
1-SEMESTP

1. Yakuniy nazorat uchun nazariy savollar

1. To'plam, to'plamlar ustida amallar.
2. Ratsional sonlar to'plamida kesim. Haqiqiy sonning ta'rifi.
3. Haqiqiy sonlar to'plamining to'liqligi (Dedekind teoremasi).
4. Sonli to'plamlarning chegaralari. To'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari (aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga yega bo'lish haqidagi teorema).
5. Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari.
6. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti.
7. Chegaralangan, chegaralanmagan ketma-ketliklar va ularga misollar.
8. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar va ularga misollar keltirish.
9. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari.
10. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar.
11. Tenglik va tengsizliklarda limitga o'tish.
12. Aniqmas ifodalar va ularni ochish usullari.
13. Monoton ketma-ketliklar va ularning limitlari haqidagi teorema.
14. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaning tatbiqlari (e-soni).
15. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass lemmasi.
16. Ketma-ketlikning yaqinlashish kriteriysi (Koshi teoremasi).
17. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari. Ketma-ketlik limiti bilan uning qismiy ketma-ketliklari limiti orasidagi munosabatni ifodalovchi teorema
18. Funksiya tushunchasi va uning berilish usullari.
19. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
20. Yelementar funksiyalar va ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
21. Ko'rsatkichli va darajali funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
22. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar va ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
23. To'plamning limit nuqtasi.
24. Funksiyaning limitining ta'riflari.
25. Funksiya limitining Geyne ta'rifi va unga misollar.

26. Funksiyaning limitining Koshi ta'rifi va unga misollar.
27. Funksiyaning nuqtada o'ng va chap limitlari.
28. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.
29. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar.
30. Murakkab funksiyaning limiti.
31. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teorema.
32. Funksiyaning chekli limitga ega bo'lishi haqida Koshi teoremasi.
33. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning ta'rifi va ularga misollar.
34. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.
35. Funksiya uzluksizligining Geyne ta'rifi.
36. Funksiya uzluksizligining Koshi ta'rifi.
37. Funksiyaning bir tomonli (chap va o'ng) uzluksizliklari.
38. Funksiyaning uzilishi va uzilish nuqtalarining turlari.
39. Funksiyaning birinchi tur uzilishi va unga misollar.
40. Funksiyaning ikkinchi tur uzilishi va unga misollar.
41. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar.
42. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.
43. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.
44. Limitni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.
45. Uzluksiz funksiyaning lokal xossalari.
46. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning global xossalari (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi).
47. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.
48. Veyershtrassning birinchi teoremasi.
49. Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.
50. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifi.
51. Kantor teoremasi.
52. Kantor teoremasidan kelib chiqadigan natija.
53. Funksiya uzluksizligining ta'riflari.
54. Funksiya hosilasining ta'riflari.
55. Funksiya hosilasining geometrik va mexanik ma'nosi.
56. Nuqtada funksiyaning differensiallanuvchiligi tushunchasi va sharti.
57. Funksiyaning uzluksizligi bilan uning differensiallanuvchiligi orasidagi bog'lanish.
58. Teskari funksiyaning hosilasi.
59. Murakkab funksiyaning hosilasi.
60. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari.
61. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi.

62. Yuqori tartibli hosilaning ta'rifi. $y=\sin x$ funksiyaning $y^{(n)}$ hosilasini, ta'rifiga ko'ra topish.
63. Yuqori tartibli differensial tushunchasi.
64. Ko'paytmaning yuqori tartibli hosilasini topishda Leybnis formulasi.
65. Differensial hisobining asosiy teoremalari Ferma teoremasi.
66. Roll teoremasi va uning geometrik ma'nosi.
67. Roll teoremasi shartlarining muhimligini ko'rsatish (misollar keltirish).
68. Lagranj teoremasi va uning geometrik ma'nosi. Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan natijalar.
69. Koshi teoremasi.
70. Ko'p had uchun Teylor formulasi.
71. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi.
72. Teylor formulasi qoldiq hadining Lagranj, Koshi va Peano ko'rinishlari.
73. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
74. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
75. $0\cdot\infty, \infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi. Funksiyaning monotonlik sharti.
76. Funksiyaning ekstremum qiymatlari.
77. Ekstremumning zaruriy sharti.
78. Ekstremumning yetarli shartlari.
79. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish.
80. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymati.
81. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi.
82. Funksiya botiqligi (qavariqligi)ning zaruriy va yetarli shartlari.
83. Funksiyaning egilish nuqtalari.
84. Egilish nuqtasi bo'lishning zaruriy sharti.
85. Egilish nuqtasi bo'lishning yetarli sharti.
86. Funksiya grafigining asimptotalari.
87. Funksiya grafigini yasash.

2. Yakuniy nazorat uchun variantlar namunalari

1-variant

1. To‘plam va to‘plamlar ustida amallar.
2. Funksiya tushunchasi va uning berilish usullari.
3. Funksiya hosilasining ta’riflari.
4. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $y'=?$
5. Ketma-ketlikning limiti ta’rifi bo‘yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$N(\varepsilon)=?\ \lim_{n\to\infty} x_n=a\ ,\ x_n=\frac{5n+1}{10n-3},\ a=\frac{1}{2}.$$

2-variant

1. Ratsional sonlar to‘plamida kesim. Haqiqiy sonning ta’rifi.Haqiqiy sonlar to‘plamining to‘liqligi (Dedekind teoremasi).
2. Funksiyaning aniqlanish va o‘zgarish sohalari.
3. Funksiya hosilasining geometrik va mexanik ma’nosi.
4. $A=\{x\in R;\ x^2-5x+6\le 0\}$, $B=\{x\in R;\ 2x^2-5x<0\}$ U holda,: $A\cup B=?,\ A\cap B=?$.
5. $y=\sqrt{2x-x^2}$ funksiyaning ekstremum qiymatini toping.

3-variant

1. Sonli to‘plamlarning chegaralari. To‘plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari (aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga yega bo‘lish haqidagi teorema).
2. Elementar funksiyalar va ularning aniqlanish va o‘zgarish sohalari.
3. Nuqtada funksiyaning differensiallanuvchiligi tushunchasi va sharti. Funksiyaning uzluksizligi bilan uning differensiallanuvchiligi orasidagi bog‘lanish.
4. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$, $y'_x=?$
5. Ketma-ketlikning limiti ta’rifi bo‘yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a,\ x_n=\frac{5n}{n+1},\quad a=-5.$$

4-variant

1. Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari.
2. To‘plamning limit nuqtasi.Funksiya limitining ta’riflari
3. Teskari funksiyaning hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi.
4. $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=?$
5. $y=x^2-6x+12$ funksiyaning $[-3,8]$ segmentdagi eng kichik qiymatini toping.

5-variant

1. Funksiya limitining Geyne ta'rifi va unga misollar keltiring. Funksiyaning limitining Koshi ta'rifi va unga misol keltiring. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.

2. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar va ularga misollar keltiring.

3. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari.

4. $y = x \cdot \cos 2x, \quad d^2 y = ?$

5. Ketma-ketlikning limiti ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \; x_n = \frac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

6-variant

1.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari.

2.Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar.

3. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3tg4x - 12tgx}{3\sin 4x - 12\sin x}$ limitni Lopital qoidasidan foydalanib, hisoblang.

5.Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,

$$x_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$$

7-variant

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar.
2. Murakkab funksiyaning limiti.
3. Yuqori tartibli hosilaning ta'rifi. $y = \sin x$ funksiyaning $y^{(n)}$ hosilasini ta'rifga ko'ra toping. Yuqori tartibli differensial tushunchasi.
4. $y = \dfrac{e^x}{x}, \qquad y^{(10)} = ?$
5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$ limitni toping.

8-variant

1. Tenglik va tengsizliklarda limitga o'tish.
2. Funksiya chekli limitga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi.
3. Ko'paytmaning yuqori tartibli hosilasini topishda Leybnis formulasi.
4. $y = \arccos x$ funksiyaning hosilasini ta'rif bo'yicha toping.

5. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$$x_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}, \quad a=-2.$$

9-variant

1. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teorema.
2. Aniqmas ifodalar va ularni ochish usullari.
3. Differensial hisobining asosiy teoremalari. Ferma, Roll teoremalari va ularning geometrik ma'nosi. Roll teoremasi shartlarining muhimligini ko'rsating (misollar keltiring).
4. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3+(3n-2)^2}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$ limitni hisoblang.
5. $d\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=?$

10-variant

1. Monoton ketma-ketliklar va ularning limitlari haqidagi teorema.
2. To'plamlarning yig'indisi va ayirmasining ta'riflari.
3. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Funksiya botiqligi (qavariqligi)ning zaruriy va yetarli shartlari.
4. $y=x^2\cdot\sin 2x, \quad y^{(20)}=?$
5. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$ limitni toping.

11-variant

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ta'rifi va unga misollar keltiring.
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni ta'rifi va ularga misollar keltiring. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.
3. Koshi teoremasi.
4. $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3, \quad f'(1)-?$
5. Ketma-ketlik limitining ta'rifi bo'yicha $N(\varepsilon)$ ni toping:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, \quad a=-3.$$

12-variant

1. Funksiya uzluksizligining Geyne ta'rifi. Funksiya uzluksizligining Koshi ta'rifi. Funksiyaning bir tomonli (chap va o'ng) uzluksizliklari.
2. Lagranj teoremasi va uning geometrik ma'nosi. Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan natijalar.

3. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaning tatbiqlari (e - soni).

4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$ - limitni hisoblang.

5. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}-1\right\}$, $n\in N$ to'plamning aniq quyi chegarasini toping.

13- variant

1. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari. Funksiyaning birinchi tur va ikkinchi tur uzilish nuqtalariga doir misollar keltiring.
2. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi.
3. Ko'phad uchun Teylor formulasi. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi. Teylor formulasi qoldiq hadining Lagranj, Koshi va Peano ko'rinishlari.
4. Ketma-ketlikning qismiy limitlarini toping:

$$3, \frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

5. 5.Ushbu $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ limitni hisoblang.

14- variant

1. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass lemmasi.

2.Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar.Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

3. $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+8}{3x^2+10}\right)^{x^2}$ - limitni hisoblang.

5. $y=7^x e^x$ funksiyaning $y^{(20)}$ toping.

15-variant

1.Ketma-ketlikning yaqinlashish kriteriysi (Koshi teoremasi).

2. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.

4.Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)^{x^2+3}$ limitni hisoblash.

5. $y=f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $f'(1)=?$

16-variant

1. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari.
2. Limitni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish. Uzluksiz funksiyaning lokal xossalari.
3. $0\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^c, 1^\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$ limitni hisoblang.
5. Ushbu $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ a(x-1), & x>0\end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?

17-variant

1. Ketma-ketlikning limiti bilan uning qismiy ketma-ketliklari limiti orasidagi munosabatni ifodalovchi teorema.
2. Bolsano-Koshining birinchi teoremasi.
3. Funksiyaning monotonlik sharti.
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$ limitni hisoblang.
5. Ushbu $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ a-x, & x>0\end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?

18-variant

1. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.
2. Funksiyaning ekstremum qiymatlari. Ekstremumning zaruriy sharti.
3. Ratsional sonlar to'plamida kesim. Haqiqiy sonning ta'rifi.Haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi (Dedekind teoremasi).
4. $y=tgx$ funksiyaning hosilasini ta'rifdan foydalanib, toping.
5. Ushbu $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ limitni hisoblang.

19-variant

1. Veyershtrassning birinchi teoremasi.
2. Funksiya limitining Geyne ta'rifini bering va unga misol keltiring.
3. Yekstremumning yetarli shartlari. Funksiya ekstremumining topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish.
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$ limitni hisoblang.

5. Ushbu $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1+x)^4-1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo‘ladi?

20-variant

1. Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.
2. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema.
3. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.
4. Ushbu $f(x)=2x^2+6$ funksiyaning $x_0=7$ nuqtada uzluksizligini isbotlang,($\delta(\varepsilon)$-ni toping).
5. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$ limitni hisoblang.

21-variant

1. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta’rifi.
2. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Funksiya botiqligi (qavariqligi)ning zaruriy va yetarli shartlari.
3. Funksiyaning chap va o‘ng limitlari.
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$ limitni hisoblang.
5. $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, $y'=?$

22-variant

1. Chekli limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari.
2. Limitni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.
3. Funksiyaning egilish nuqtalari. Egilish nuqtasi bo‘lishning zaruriy sharti. Egilish nuqtasi bo‘lishning yetarli sharti.
4. $y=\dfrac{1}{4(1+x^4)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$, $y'=?$
5. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin x}$ limitni hisoblang.

23-variant

1. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari.
2. Murakkab funksiyaning limiti.
3. Funksiya grafigining asimptotalari.
4. Ushbu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ limitni hisoblang.
5. $y=2^{tg\frac{1}{x}}$, $y'=?$

24-variant

1.Monoton funksiyaning limiti haqidagi teorema.
2.Kantor teoremasi. Kantor teoremasidan kelib chiqadigan natija.
3. Funksiya grafigini yasash.
4. $y=3x-x^3$ funksiyaning monoton o'sishi oralig'ini toping.
5.Ushbu $f(x)=2x^2-4$ funksiyaning $x_0=3$ nuqtada uzluksizligini ta'rif yordamida isbotlang.

25-variant

1. Funksiyaning chekli limitga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi (kriteriysi).
2. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.
3. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ta'rifini bering va unga misollar keltiring.
4. Ushbu $y=\sqrt{\cos x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}(a>0,n>0)$ limitni Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang.

26-variant

1. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning global xossalaridan Veyrshtrassning birinchi teoremasi.
2. Ekstremumning yetarli shartlari. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish.
3. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari.
4. $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning hosilasini ta'rif bo'yicha hisoblang.
5. Funksiya limitidan foydalanib, ushbu $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ tenglikni isbotlang.

27-variant

1. Cheksiz kichik funksiyalarni solishtirish (taqqoslash).
2. Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifi.
3. Sonli to'plamlarning chegaralari. To'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari (aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga yega bo'lish haqidagi teorema).
4. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$ funksiyaning maksimum nuktasidagi qiymatini hisoblang.
5. Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib, ushbu $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$ tenglikni hisoblang.

28-variant

1. Nuqtada funksiyaning differensiallanuvchiligi tushunchasi va sharti. Funksiyaning uzluksizligi bilan uning differensiallanuvchiligi orasidagi bog'lanish.
2. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi.
3. Kantor teoremasi (funksiyaning tekis uzluksizligi haqida).
4. Agar $f(x)=3x-2e^{-x}$ bo'lsa, $f'(\ln 2)$ ni hisoblang.
5. Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib, quyidagi tenglikni isbotlang: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$.

29-variant

1.Koshi teoremasi (chekli orttirmalar haqidagi).
2.Funksiya grafigining assimptotalari.
3.Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari.
4.Ushbu $f(x)=\begin{cases} x\,ctg 2x, & x\neq 0, |x|<\frac{\pi}{2}, \\ a & , x=0 \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?
5. $y=\frac{e^x}{x}$, $y^{(8)}=?$

30-variant

1. Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqidagi) va undan kelib chiqadigan 1, 2, 3-natijalar.
2. Ketma-ketlikning yaqinlashish kriteriysi (Koshi teoremasi).
3. Egilish nuqtasi bo'lishning yetarli shartlari.
4. Ushbu $f(x)=\begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1, \\ a, & x=-1 \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi?
5. $d\left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)=?$

2-semestr.
Yakuniy nazorat uchun nazariy savollar va variantlar namunalari

1. Yakuniy nazorat uchun nazariy savollar

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integral ta'rifi.
2. Integrallashning sodda qoidalari.
3. Integrallash usullari (o'zgaruvchilarni almashtirib, bo'laklab integrallash).
4. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallar
5. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi shaklida ifodalash
6. $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ - ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
7. Binominal differensiallarni integrallash $\left(x^m\left(a+bx^n\right)dx\right)$.
8. $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ – ko'rinishdagi ifodalarni integrallash (Eyler almashtirishlari).
9. $R(\sin x,\cos x)dx$ – ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
10. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar (o'tilgan yo'l haqidagi, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish haqidagi masalalar).
11. Aniq integralning ta'rifi.
12. Darbu yig'indilari va ularning xossalari.
13. Aniq integralning boshqacha ta'rifi (Darbu yig'indilari orqali berilgan ta'rifi).
14. Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi.
15. Aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema.
16. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari.
17. Aniq integralning xossalari (tenglik ishorasi bilan ifodalanadigan xossalar).
18. Tengsizliklar orqali ifodalanadigan xossalar.
19. O'rta qiymat haqidagi teoremalar.
20. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar.
21. Aniq integralni hisoblash usullari (o'zgaruvchilarni almashtirish, bo'laklab integrallash, taqribiy hisoblash usullari).
22. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
23. Yuza tushunchasi va kvadratlanuvchi soha.
24. Yuzani aniq integral orqali ifodalash.
25. Hajm tushunchasi va uning xossalari.
26. Hajmni aniq integral orqali ifodalash.

27. Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
28. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uni aniq integral orqali ifodalanishi.
29. Yoy uzunligi tushunchasi. Yoy uzunligini integral orqali ifodalash.
30. Egri chiziqning statik momenti va uning og'irlik markazini topish.
31. Tekis figuraning statik momenti va og'irlik markazini topish.
32. R^m fazo va undagi o'lchov tushunchasi.
33. R^m dagi sohalarga misollar.
34. R^mda ketma-ketlik tushunchasi. Ketma-ketlikning limiti.
35. Ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning limiti.
36. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
37. Uzluksiz funksiyaning xossalari.
38. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi.
39. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
40. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali.
41. Yo'nalish bo'yicha xosila va uni hisoblash formulasini keltirib chiqarish.
42. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi.
43. Murakkab funksiyaning hosilasi.
44. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.
45. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiali.
46. O'rta qiymat haqidagi teorema.
47. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.
48. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari.
49. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatiga ega bo'lishining zaruriy sharti.
50. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatiga ega bo'lishining yetarli sharti.
51. Oshkormas funksiya tushunchasi.
52. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.
53. Oshkormas funksiyaning hosilasi.
54. Ikki o'zgaruvchili oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.

2. Yakuniy nazorat uchun variantlar namunalari

1-variant

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integralning ta'rifi.
2. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar (o'tilgan yo'l haqidagi, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish haqidagi masalalar).
3. Ikki o'zgaruvchili oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema
4. $\int 5^x e^{2x} dx$ ni hisoblang.
5. Quyidagi funksiyaning berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}; & x^4+y^4\neq 0,\\ 0, & x^4+y^4=0\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(1;2)$.

2-variant

1. Integrallashning sodda qoidalari.
2. Oshkormas funksiya tushunchasi. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Oshkormas funksiyaning hosilasi.
3. Tekis figuraning statik momenti va og'irlik markazini topish.
4. $\int \dfrac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+9}$ ni hisoblang.
5. $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx$ ni hisoblang.

3-variant

1. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatiga ega bo'lishining yetarli sharti.
3. Egri chiziqning statik momenti va uning og'irlik markazini topish
4. $\int \cos^4 x \ \sin^3 dx$ ni hisoblang.
5. Quyidagi funksiyani ekstremumga tekshiring $z=x^2+(y+1)^2$.

4-variant

1. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallash.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari.
3. Yoy uzunligi tushunchasi. Yoy uzunligini integral orqali fodalash.
4. $\int \dfrac{dx}{3+4\cos x}$ ni hisoblang.
5. Berilgan funksiyaning ko'rsatilgan to'plamdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping: $u=xy-x^2y-\dfrac{xy^2}{2}$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$.

5-variant

1. $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$ - ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.

2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymatga yega bo'lishining zaruriy sharti.

3. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

4. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ ni hisoblang.

5. Quyidagi funksiyani ekstremumga tekshiring $u = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

6-variant

1. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.
3. Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z) = z \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

5. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ integralni hisoblang.

7-variant

1. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar (o'tilgan yo'l haqidagi, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish haqidagi masalalar).
2. O'rta qiymat haqidagi teorema.
3. $R(\sin x, \cos x)dx$ – ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.

4. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ ni hisoblang.

5. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ limit mavjudmi?

8-variant

1. Aniq integralning ta'rifi.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiali.
3. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ – ko'rinishdagi ifodalarni integrallash (Eyler almashtirishlari).

4. $\int\limits_{8}^{26}\frac{xdx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$ ni hisoblang.

5.Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ limit mavjudmi?

9-variant

1.Darbu yig'indilari va ularning xossalari.

2.Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilasi

3.Binominal differensiallarni integrallash $\left(x^m\left(a+bx^n\right)dx\right)$ shaklida

4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} arctg\sqrt{x}\,dx$ integralni hisoblang.

5. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

10-variant

1.Aniq integralning boshqacha ta'rifi (Darbu yig'indilari orqali berilgan ta'rifi).

2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali.

3. $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ - ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.

4. $y^2=2x$ va $x^2=2y$ parabolalar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

5. $z=e^{x^2y^2}$ fuksiyaning, ikkinchi tartibli, d^2z to'liq differensialini toping

11-variant

1.Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi.

2.Murakkab funksiyaning hosilasi.

3.To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi shaklida ifodalash.

4.Ushbu

$$\begin{cases}x=20(t-\sin t)\\ y=20(1-\cos t)\end{cases}\quad (0\le t\le\pi)$$

tenglamalar sistemasi orqali berilgan egri chiziqning (sikloidaning) uzunligini toping.

5. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f_x'(x,y,z)$, $f_y'(x,y,z)$ va $f_z'(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z)=x^{y^z}$.

12-variant

1. Aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema.

2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi.

3. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallash.

4. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ integralni hisoblang

5. Quyidagi funksiyani berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring: $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x+y\neq 0 \\ 0, & x+y=0 \end{cases}$ $O(0;0)$, $A(-1;-1)$

13-variant

1. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari.
2. Yo'nalish bo'yicha xosila va uni hisoblash formulasini keltirib chiqarish.
3. Integrallash usuli (o'zgaruvchilarni almashtirish usuli).
4. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$ integralni hisoblang.
5. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $z=\frac{1}{9^2-x^2-y^2}$.

14-variant

1. Aniq integralning xossalari (tenglik ishorasi orqali ifodalanadigan xossalar).
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchiligi.
3. Integrallash usuli (bo'laklab integrallash).
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang: $f(x,y)=\log_x(x+y); x_0=1, y_0=0$.
5. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklni Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning xajmini toping: $y=3\sin x,\quad y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$.

15-variant

1. Aniq integralning tengsizliklar orqali ifodalanadigan xossalari.
2. Integrallashning sodda qoidalari .
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
4. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ integralni hisoblang.
5. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a\in R^2)$ ekanligini ta'rif yordamida isbotlang: $x^{(n)}=\left\{\frac{1-2n^2}{n^2+3},\frac{3n^2}{2-n^2}\right\}$, $a(-2;-3)$.

16-variant

1. O'rta qiymat haqidagi teoremalar.
2. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integralning ta'rifi.
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi.
4. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklni Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning xajmini toping: $y=-x^2+5x-6,\ y=0.$
5. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $z=\ln(y^2-5x+16)$.

17-variant

1. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar.
2. $R(\sin x,\cos x)dx-$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
3. R^m fazo va undagi o'lchov tushunchasi.
4. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi egri chizikning yoy uzunligini hisoblang: $\rho=2\varphi,\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang:

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y};\ x_0=\infty,\quad y_0=\infty.$$

18-variant

1.Aniq integralni hisoblash usullari (taqribiy hisoblash usullari).

2. Binominal differensiallarni integrallash ($x^m(a+bx^n)dx$ shakldagi ifodalar).

3.Uzluksiz funksiyaning xossalari.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang.

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2};\ x_0=y_0=0.$$

5. $\int\limits_0^\pi\frac{dx}{1+2\sin x}$ integralni hisoblang.

19-variant

1. Aniq integralning tengsizliklar orqali ifodalanadigan xossalari.
2. Ikki o'zgaruvchili oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.
3. Integrallashning sodda qoidalari.
4. $\int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ integralni hisoblang

5. Ushbu $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2>0)\\ 0, \quad x=0, y=0\end{cases}$ funksiya uchun $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$ ekanligini isbotlang.

20-variant

1. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallash
2. Aniq integralning ta'rifi.
3. Ikki o'zgaruvchili oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema.

4. Ushbu $f(x,y)=\begin{cases}\frac{Sinxy}{\sqrt{x^2+y^2}} \; x^2+y^2\neq 0\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ funksiyaning uzluksizligini isbotlang.

5. $\int x\sin x dx$ ni hisoblang.

21-variant

1. R^mda ketma-ketlik tushunchasi. Ketma-ketlikning limiti
2. Binominal differensiallarni integrallash ($x^m(a+bx^n)dx$ shakldagi ifodalar).
3. Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi.
4. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+x^2}$ limitlar mavjudmi?
5. $\int\limits_2^3\frac{dx}{x^2-2x-8}$ integralni hisoblang.

22-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning limiti
2. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi shaklida ifodalash
3. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari.
3. Ushbu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ limit mavjudmi?
4. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$ integralni hisoblang.

23-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.

2. Integrallashning sodda qoidalari.
3.Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar.

4. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ integralni hisoblang.

5. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a \in R^2)$ ekanligini ta'rif yordamida isbotlang: $x^{(n)} = \left\{ \frac{13-n^2}{1+3n^2}, \frac{2n-1}{2-3n} \right\}$, $a\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$

24-variant

1. Uzluksiz funksiyaning xossalari
2. Integrallash usullari (o'zgaruvchilarni almashtirish, bo'laklab integrallash).
3.Aniq integralning xossalari (tenglik ishorasi bilan ifodalanadigan xossalar)
4.Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $z = \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-3y}$.
5. Parametrik shaklda berilgan quyidagi egri chiziqning yoy uzunligini hisoblang: $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \quad 0 \le t \le 2. \end{cases}$

25-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi
2. $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
3.Aniq integralning boshqacha ta'rifi (Darbu yig'indilari orqali berilgan ta'rifi).
4. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $(a \in R^2)$ ekanligini ta'rif yordamida isbotlang: $x^{(n)} = \left\{ \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, \frac{4-n^2}{3+2n^2} \right\}$, $a\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.
5. $\int\limits_{1}^{e} x \ln x dx$ integralni hisoblang.

26-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
2. $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.
3. Darbu yig'indilari va ularning xossalari.

4. R^2 fazoda quyidagi sonlar ketma-ketligining limiti a $\left(a \in R^2\right)$ ekanligini ta'rif yordamida isbotlang: $x^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\cos n\pi\right\}$. $a(0;0)$.

4.O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib, quyidagi $f(x) = \sin^2 x$ funksiyaning $[0;\ 2\pi]$ kesmadagi o'rta qiymatini toping.

27-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi.
2. Ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarni integrallash.
3. Yoy uzunligi tushunchasi. Yoy uzunligini integral orqali ifodalash.
4. $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$ integralni hisoblang.
5. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping: $f(x,y,z) = x^{y/z}$.

28-variant

1. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash (Eyler almashtirishlari).
2. Aniq integralning tengsizliklar orqali ifodalanadigan xossalari.
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremum qiymati uchun zaruriy sharti.
4. Quyida berilgan $f(x,y,z)$ funksiyaning $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ va $f'_z(x,y,z)$ xususiy hosilalarini toping : $f(x,y,z) = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
5. $\int_1^2 x\ln x dx$ integralni hisoblang.

29-variant

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi.
2. Hajm tushunchasi va uning xossalari.
3. Binominal differensiallarni integrallash ($x^m\left(a+bx^n\right)dx$ shakldagi ifodalar).
4. Quyidagi funksiyaning berilgan nuqtalarda har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy va ikkala o'zgaruvchi bo'yicha birgalikda uzluksizlikka tekshiring: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ $O(0;0)$, $A\ (0;1)$.

5. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ integralni hisoblang.

30-variant

1. Murakkab funksiyaning hosilasi.
2. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
3. Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ va $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ takroriy limitlarni hisoblang.

$$f(x,y) = \frac{\sin(x-2y)}{3x+4y};\ x_0 = y_0 = 0.$$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$ integralni hisoblang.

TESTLAR

1-semestr uchun test savollari

1. Ushbu $A=\{2,4,6,8\}$ va $B=\{1,2,5,8\}$ to'plamlar berilgan bo'lsa, $C=A\Delta B$ ni toping.

A) $C=\{1,4,5,6\}$; B) $C=\{4,6\}$; C) $C=\{1,5\}$; D) $C=\{1,5,6\}$.

2. Haqiqiy sonning absolyut qiymati uchun qaysi xossalari to'g'ri berilgan.

1) $\forall x\in R$ uchun $|x|\geq 0$, $|x|=|-x|$, $x\leq|x|$, $-x\leq|x|$;

2) $a>0$, $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$, $|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a$;

3) $\forall x,y\in R$ uchun

$$|x+y|\leq|x|+|y|, \qquad |x-y|\geq\big||x|-|y|\big|,$$

$$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\;(y\neq 0)$$

munosabatlar o'rinlidir.

A) 1) 2); B) 1) 3); C) 2) 3); D) 1) 2) 3).

3. $\{x:\ x\in R,\ a<x<b\}$ to'plam nima deb ataladi?

A) Interval; B) Segment; C) Yarim segment; D) Nur.

4. To'plamning aniq yuqori chegarasi deb nimaga aytiladi?

A) Yuqori chegaralarning eng kichigi;

B) Quyi va yuqori chegaralar yig'indisining yarmi;

C) Quyi chegaralarning eng kattasi;

D) Yuqori chegaralarning eng kattasi.

5. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang Agar har qanday M son berilganda ham shunday $n_0\in N$ son topilsaki, $n>n_0$ lar uchun quyidagi .... shart bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ deb ataladi?

A) $x_n>M$; B) $x_n=M$; C) $x_n\leq M$; D) $x_n<M$.

6. Ushbu tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi va ayirmasi $\{x_n \pm y_n\}$, yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

2) Cheksiz kichik ketma-ketlik bilan chegaralangan ketma-ketliklarning ko'paytmasi, cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

3) Har qanday cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi.

4) Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning ko'paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

A) 1), 2); B) 1), 2), 3); C) 2), 3), 4); D) 1), 3), 4).

7. Ushbu tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo'ladi.

2) Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi, aks holda ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi.

3) $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n(n\in N)$ uchun $x_n \le y_n$ $(x_n \ge y_n)$ bo'lsa, u holda, $a\le b$ $(a\ge b)$ bo'ladi.

4) Agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma hadlari $[a, b]$ segmentning ichida joylashsa, u holda, uning limiti x ham $[a, b]$ segmentning ichida joylashadi.

A) 1), 2); B) 1), 2), 3); C) 2), 3), 4); D) 1), 2), 3), 4).

8. Nuqtalar o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsin. Agar $\forall n(n\in N)$ uchun $x_n \le z_n \le y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda, $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va ..... bo'ladi.

A) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$; B) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n > a$; C) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge a$; D) $\lim z_n < a$

9. To'g'ri javobni belgilang. Agar $x\to a$ da $f(x)\sim f_1(x)$ va $g(x)\sim g_1(x)$ bo'lib, ushbu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda, ... limit xam mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} ... \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, =; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$, =; C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, <; D) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, >.

10. Qaysi holda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi uzilishi bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish deyiladi.

A) $f(a-0)=f(a-0)\neq f(a)$; B) $f(a-0)>f(a+0)$;

C) $f(a+0)$ va $f(a-0)$ larning bittasi mavjud emas;

D) $f(a+0)\neq f(a-0)$.

11. Nuqtalar o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar: 1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ limit o'rinli bo'lib, a nuqtaning shunday $\dot{U}_\delta(a)$ atrofi mavjud bo'lsinki, barcha $x\in\dot{U}_\delta(a)$ lar uchun $\varphi(x)\neq c$ bo'lsa; 2) c nuqta T to'plamning limit nuqtasi bo'lib, $\lim\limits_{t\to c}f(t)=b$ limit mavjud bo'lsa, u holda, $x\to a$ da $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham limitga ega va .... bo'ladi.

A) $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))=\lim\limits_{t\to c}f(t)$; B) $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))\leq\lim\limits_{t\to c}f(t)$;

C) $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))<\lim\limits_{t\to c}f(t)$; D) $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))>\lim\limits_{t\to c}f(t)$.

12. Nuqtalar o'rniga quyiladigan tg'ri javobni belgilang. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\ldots$

A) $-\alpha$; B) $\dfrac{1}{\alpha}$; C) α; D) $\lg\alpha$.

13. Ushbu tasdiqlardan qaysi biri noto'g'ri keltirilgan.

A) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralanmagan bo'ladi;

B) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga yerishadi;

C) Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda, a nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi;

D) Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a)\neq 0$ bo'lsa, $f(a)$ son bilan a nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ funksiyaning ishorasi bir xil bo'ladi,

14. Nuqtalar o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f'(x)$ va $g'(x)$ chekli hosilalarga ega bo'lsa, u holda, ... funksiya ham hosilaga ega va ... $=f'(x)+g'(x)$ bo'ladi.

A) $f(x)+g(x)$, $[f(x)+g(x)]'$; B) $f(x)+g(x)$, $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$;

C) $f(x)+g(x)$, $[f(x)+g(x)]'$; D) $f(x)\cdot g(x)$, $[f(x)+g(x)]'$.

15. $y=-\frac{1}{7}\sin(7x-5)$ fuksiyaning hosilasini toping.

A) $-\frac{1}{7}\cos(7x-5)$; B) $-7\cos(7x-5)$; C) $\cos(7x-5)$; D) $-\cos(7x-5)$.

16. Quyidagi javoblarning qaysi biri $y=\arcsin x$ funksiyaning differensialidan iborat.

A) $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; B) $dy=-\frac{dx}{1+x^2}$;

C) $dy=\frac{dx}{1+x^2}$; D) $dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $y=x^{\mu}(x>0,\ \mu\in R)$ funksiyaning $y^{(n)}$ - tartibli hosilasi uchun to'g'ri javobni belgilang.

A) $y^{(n)}=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)x^{\mu-n}$; B) $y^{(n)}=\mu(\mu-1)...(\mu-n)x^{\mu-n-1}$;

C) $y^{(n)}=\mu(\mu-1)...(\mu-n)x^{\mu-n+1}$; D) $y^{(n)}=\mu(\mu-1)...(\mu-n-1)x^{\mu-n-1}$.

18. $y=\sin bx\ (b\in R)$ funksiyaning n - tartibli differensiali nimaga teng?

A) $d^ny=b^n\cos\left(bx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^n$; B) $d^ny=b^n\sin^n bx\,d^nx$;

C) $d^ny=b^n\cos bx\,d^nx$; D) $d^ny=b^n\sin\left(bx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^n$.

19. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri uchun Roll teoremasining shartlari bajariladi?

A) $f(x)=x^3$, $-1\le x\le 1$; B) $f(x)=x$, $0\le x\le 1$;

C) $f(x)=x^3$. $-1\le x\le 1$; D) $f(x)=x-[x]$, $0\le x\le 1$.

20. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}-1\right\}$, $n\in N$ to'plamning aniq quyi chegarasini toping.

A) -2; B) -1; C) 3; D) 0.

21. $x_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2+n}$ ketma-ketlikning limitini toping.

A) 0; B) $\frac{3}{2}$; C) -1 ; D) 1.

22. Ushbu $3, \frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ ketma-ketlikning qismiy limitlarini toping.

A) 3, 0; B) 2, 1; C) 2, 5; D) 2, 0.

23. $y = \dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{x-2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $|x| \geq 2$; B) $[-2;\ +\infty)$; C) $(2;\ +\infty)$; D) $[-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

24. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$ ni hisoblang.

A) -1; B) 0; C) 1; D) 6.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ni hisoblang .

A) $\frac{1}{2}$; B) $-\frac{1}{2}$; C) -1; D) 2.

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{6x^2}$ ni hisoblang.

A) $\frac{1}{6}$; B) $-\frac{1}{6}$; C) $-\frac{1}{4}$; D) e.

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x-1}{x}$ nimaga teng?

A) $\log_3 e$; B) $\lg 3$; C) $\ln 3$; D) 1.

28. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri?

A) $x^2 - x = O(x),\ x \to 0$; B) $5x - 2x^2 = O(x^2),\ x \to 0$;

C) $\sin x = O(x^2),\ x \to 0$; D) $5x - 2x^2 = O(x^2),\ x \to 0$.

29. a ning qaysi qiymatlarida $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ funksiya uzluksiz bo'ladi?

A) $a=-4$; B) $a=-2$; C) $a=22$; D) $a=4$.

30. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri ikkinchi tur uzilishga ega?

A) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$; B) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;

C) $f(x)=signx$; D) $f(x)=x^2$, $x \in R$.

31. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri tekis uzluksiz bo'ladi?

A) $f(x)=e^x \sin\frac{1}{x}$, $X=(0,1)$; B) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$;

C) $f(x)=x+\sin x$, $x \in R$; D) $f(x)=x^3$, $x \in R$.

32. $f(x)=arctg(x^3+1)$ funksiya hosilasining $x=0$ nuqtadagi qiymatini toping.

A) 0; B) 1,5; C) 1; D) –3.

33. $y=5^x e^x$ funksiyaning $y^{(20)}$ toping.

A) $(5+e)^x \ln^{20}(5e)$; B) $(5e)^x \ln^{20}(5e)$; C) $5^x \ln^{20} 3e$; D) $\dfrac{(5e)^x}{\ln^{20} 5e}$.

35. $y=3x-x^3$ funksiyaning monoton o'sish oralig'ini toping.

A) $-1 \le x \le 1$; B) $0 \le x \le 1$; C) $1 \le x < +\infty$; D) $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

36. $y=x^2-6x+12$ funksiyaning $[-3, 8]$ segmentdagi eng kichik qiymatini toping.

A) 3; B) 12; C) –3 ; D) 29.

37. $\lim\limits_{x\to +0} x^x$ ni hisoblang.

A) 1; B) ∞; C) 0; D) -1.

38. Nuqtalar o'rniga qo'yiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ funksiya: 1) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a,b) oraliqda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda, shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada ....bo'ladi.

A) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$; B) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(c)$;

C) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(c)$; D) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(c)$.

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$ ni hisoblang.

A) $\frac{4}{3}$; B) $-\frac{4}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $-\frac{3}{4}$.

40. Agar $f(x)=3x-2e^{-x}$ bo'lsa, $f'(\ln 2)$ ni hisoblang.

A) 1; B) 2; C) 5; D) 4.

41. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$ funksiyaning maksimum nuqtasidagi qiymatini hisoblang.

A) 13,5; B) $11\frac{1}{3}$; C) $-7\frac{1}{3}$; D) $-3,5$.

42. $y=\log_5 2x$ funksiyaning hosilasini toping.

A) $\frac{1}{x\ln 2}$; B) $\frac{1}{x\ln 5}$; C) $\frac{2}{x\ln 5}$; D) $\frac{2}{x\ln 2}$.

43. $y=\arccos\frac{3x+4}{5}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) [-3;1/3]; B) (-1;2); C) (0;+∞); D) [0;+∞].

44. Quyidagi funksiyalardan qaysi bir juft ham, toq ham emas?

A) $y=2^{-x}+2^x$; B) $y=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,\ x\neq\pm 1$;

C) $y=2^{3x}-2^{-3x}$; D) $y=2^{-x}+2^x+x$.

45. $y=\frac{x-3}{x^3-9x}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

A) 0; -3; 3; B) 0; -1; 3; C) 1; -3; 3; D) 0; 3; 5.

46. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ 3x^2+7, & x>1\end{cases}$ funksiyaning sakrashini toping.

A) 7; B) 10; C) 6; D) 20.

47. Funksiya $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-8}$ $x=4$ nuqtada aniqlanmagan. Bu funksiya uzluksiz bo'lishi uchun $f(4)$ qiymat nimaga teng bo'lishi kerak?

A) $f(4)=\frac{1}{4}$; B) $f(4)=\frac{1}{3}$; C) $f(4)=0$; D) $f(4)=\frac{1}{5}$

48. Berilgan qaysi funksiyaning $x=3$ nuqtadagi hosilasi mavjud emas?

A) $f(x)=|x-3|$; B) $f(x)=|x+3|$; C) $f(x)=(x+3)^2$;

D) $f(x)=(x+3)^3$.

49. $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ ko'phadni $x_0=-1$ ning darajalari bo'yicha yoying.

A) $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

B) $5-13(x-1)+11(x-1)^2-2(x-1)^3$.

C) $5+3(x+1)+5(x+1)^2-2(x+1)^3$.

D) $5-3(x-1)+11(x-1)^2-2(x-1)^3$.

50. Nuqtalar o'rniga yetishmayotgan (tushirib qoldirilgan) so'zlarni qo'ying. Agar ketma-ketlik ... bo'lsa, u ... bo'ladi.

A) yaqinlashuvchi, chegaralangan; B) chegaralangan, limitga ega;

C) monoton, chegaralangan; D) monoton, chegaralanmagan.

51. Ixtiyoriy ... ketma-ketlikdan ... qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

A) chegaralangan, yaqinlashuvchi; B) yaqinlashuvchi, chegaralanmagan;

C) monoton, yaqinlashuvchi; D) uzoqlashuvchi, yaqinlashuvchi.

52. Agar:

A) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\ \ \ |f(x)-b|<\varepsilon$ bo'lsa;

B) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ |x-a|<\delta\ \ \ |f(x)-b|<\varepsilon$ bo'lsa;

C) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0$ va $\forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\ \ \ |f(x)-b|<\varepsilon$ bo'lsa;

D) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\ \ \ |f(x)-b|<\varepsilon$

va $\forall x \ 0<|x-a|<\delta \quad |f(x)-b|>\varepsilon$ bo'lsa;

f funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti δ ga teng deyiladi.

53. Agar:

A) $\forall \ x_n \to a \ (x_n \neq a)$ uchun $f(x_n) \to b \ (n \to \infty)$ bo'lsa;

B) $\exists \ x_n \to a \ (x_n \neq a) \ f(x_n) \to b \ (n \to \infty)$ bo'lsa;

C) $\forall \ x_n \to a$ uchun $f(x_n) \to b$

D) $\forall \ x_n \to a \ (x_n \neq a)$ uchun $\exists \ (x_{n_k}) \ f(x_{n_k}) \to b \ (k \to \infty)$.bo'lsa,

f funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti δ ga teng deyiladi.

54. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri noto'g'ri?

A) $x \to a$ da $f(x) \pm g(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, u holda, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ham limitga ega bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

B) $f(x)$, $g(x)$ va $h(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar a nuqtaning $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidan olingan x ning qiymatlarida $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega , hamda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ bo'lsa, u holda, $h(x)$ funksiya ham limitga ega va $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ bo'ladi;

C) Agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, u holda, $(f(x) \cdot g(x))$ funksiya ham limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

D) Agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ bo'lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

o'rinli bo'ladi.

55. $f(x)$ funksiya $X = (-\infty, a)$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri noto'g'ri?

A) Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'ladi;

B) Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega, agar $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi;

C) Agar $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada chekli limitga ega ;

D) Agar X to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham unga mos kelgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega.

56. Nuqtalar o'rniga yetishmayotgan (tushirib qoldirilgan) so'zlarni qo'ying. $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan bo'lib, bu oraliqning ichki c nuqtasida o'zining .... qiymatiga erishsin. Agar c nuqtada funksiya ....bo'lsa, u holda, $f'(c)=0$ bo'ladi.

A) eng katta (eng kichik), chekli $f'(x)$ hosilaga ega;

B) eng katta, $f'(x)$ hosilaga ega;

C) eng kichik, $f'(x)$ hosilaga ega;

D) eng katta (eng kichik), chegaralangan.

57. Nuqtalar o'rniga yetishmayotgan (tushirib qoldirilgan) so'zlarni qo'ying. $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan bo'lib: 1) ......; 2) hech bo'lmaganda (a,b) da........; 3) $[a,b]$ ning chetlarida ....qabul qilsa, u holda, kamida bitta shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $f'(c)=0$ bo'ladi.

A) uzluksiz, chekli $f'(x)$ hosilaga ega, o'zaro teng $(f(a)=f(b))$ qiymatlarni; B) chegaralangan, chekli $f'(x)$ hosilaga ega, o'zaro teng $(f(a)=f(b))$ qiymatlarni;

C) chegaralangan, cheksiz $f'(x)$ hosilaga ega, o'zaro teng $(f(a)=f(b))$ qiymatlarni;

D) chegaralangan, cheksiz $f'(x)$ hosilaga ega, o'zaro teng bo'lmagan $(f(a)\neq f(b))$ qiymatlarni;

58. Quyidagi teorema kimning nomi bilan ataladi? Agar $f(x)$ funksiya: 1) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) hech bo'lmaganda (a,b) oraliqda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda, shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

A) Lagranj; B) Koshi; C) Ferma; D) Roll.

59. Nuqtalar o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli uchinchi tartibli hosilaga ega va bu nuqtada .... shartlarni qanoatlantirsa, u holda, $f(x)$ funksiyaning grafigi $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada egilishga ega bo'ladi.

A) $f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0$; B) $f''(x_0)\neq 0,\ f'''(x_0)=0$;

C) $f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)=0$; D) $f''(x_0)=1,\ f'''(x_0)\neq 0$.

60. Nuqtalar o'rniga qo'yiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $x_0\in(a,b)$ nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi mavjud bo'lib, ... tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *lokal maksimumga (lokal minimumga)* ega deyiladi. $f(x_0)$ qiymat esa, $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofdagi *lokal maksimumi (lokal minimumi)* deyiladi.

A) $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$;

B) $\exists x\in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$;

C) $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x)\ge f(x_0)$ $(f(x)\le f(x_0))$;

D) $x\in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x)> f(x_0)$ $(f(x)< f(x_0))$.

61. Nuqtalar o'rniga qo'yiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ funksiya x_0 $(x_0\in(a,b))$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, u shu nuqtada .... bo'lsa, ... bo'ladi.

A) ekstremumga ega , $f'(x_0)=0$; B) ekstremumga ega , $f'(x_0)\neq 0$

C) chegaralangan , $f'(x_0)\neq 0$; D) monoton, $f'(x_0)=0$.

62. Nuqtalar o'rniga qo'yiladigan to'g'ri javobni belgilang. x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni .... bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, ...bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *maksimumga (minimumga)* erishadi.

A. $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$;

B) $f'(x_0)\neq 0$, $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$;

C) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$;

D) $f'(x_0)\neq 0$, $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$.

63. Quiydagi teorema kimning nomi bilan ataladi? Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi, ya'ni $\exists C>0: \forall[a,b]\Rightarrow|f(x)|\le C$.

A) Veyershtrassning birinchi teoremasi;

B) Veyershtrassning ikkinchi teoremasi;

C) Bolsano-Koshining birinchi teoremasi;

D) Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.

64. Nuqtalar o'rniga qo'yiladigan to'g'ri javobni belgilang. $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $\dot{U}_{\delta}(a)$ da $(g(x) \neq 0,\ f(x) \neq 0)$ o'zaro ekvivalent bo'lishi uchun, ... bo'lishi zarur va yetarli.

A) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$; B) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$;

C) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 2$; D) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} > \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

65. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1).O'zgarmas sonning hosilasi nolga teng: $(C)' = 0$ (bunda C - o'zgarmas son).

2). O'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$(Cf(x))' = C^2 \cdot (f(x))'$ (bunda C-o'zgarmas son).

3). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va u $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ formula bo'yicha topiladi.

A) 1); 3); B) 1); 2); 3);

C) 1) ; 2); D) 2); 3).

2-semestr uchun test savollari

1. $\int_{-2}^{0}(|x|+1)dx$ ni xisoblang.

A) 3 B) 2 C) 4 D) -4

2. Quyidagi formulalardan qaysilari to'g'ri yozilgan?

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$ 2) $d\int f(x)dx = f(x)$ 3) $\int dF(x) = F(x)+c$

A) 1), 3) B) 1), 2), 3) C) 2) D) 3)

3. Quyidagi formulalardan qaysilari to'g'ri yozilgan?

1) $\int udv = u\cdot v - \int vdu$ 2) $\int udv = uv + \int vdu$

3) $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + C$ 4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

A) 1), 4) B) 1), 2), 3) C) 2), 3) D) 1), 3), 4)

4. $\int_{0}^{4} e^{\sqrt{2x+1}}dx$ ni hisoblang

A) $2e^3$ B) $2e^3-2e$ C) $3e^3$ D) $4e^3-2e$

5. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Chegaralangan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lishi uchun ∀ε>0 olinganda ham shunday δ>0 topilib, $[a;b]$ oraliqning diametri $\lambda_P < \delta(\varepsilon)$ bo'lgan har qanday P bo'linishga mos kelgan Darbu yig'indilari .... qanoatlantirishi zarur va yetarli.

A) $S_P(f)-s_P(f)<\varepsilon$ B) $S_P(f)-s_P(f)>\varepsilon$

C) $S_P(f)-s_P(f)=\varepsilon$ D) $S_P(f)-s_P(f)\geq\varepsilon$

6. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1)Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

2) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada chegaralangan bo'lib, u shu kesmada chekli sondagi nuqtalarda uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

3) $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada chegaralangan va monoton bo'lsa, funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'lmaydi.

A) 1), 2) B) 1), 2), 3) C) 3) D) 2), 3)

7. $\int \frac{2x+3}{3x+2}dx$ ni hisoblang.

A) $\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right|$ B) $\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right|$

C) $\frac{3}{2}x+\frac{9}{5}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right|$ D) $\frac{3}{2}x-\frac{5}{9}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|$

8. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u ixtiyoriy $[\alpha,\beta]\subset[a;b]$ da ham integrallanuvchi bo'ladi.

2) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi va $a<c<b$ bo'lsa, u holda, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ tenglik o'rinli bo'ladi.

3) Agar $a>b$ bo'lib $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$ bo'ladi.

A) 3) B) 1), 2), 3) C) 1), 2) D) 2), 3)

9. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, u shu oraliqda manfiy bo'lmasa, ($\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq 0$), u holda, $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ $(a<b)$ bo'ladi.

2) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda, ushbu

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

3) Agar $f(x)$ funksiya$[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa , u holda, $|f(x)|$ funksiya ham shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

A) 1) 3) B) 1), 2), 3) C) 1), 2) D) 2), 3)

10. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ funksiya shu oraliqda uzluksiz bo'ladi.

2) Agar $f(x)$ funksiya $[a.b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, $x_0 \in [a;b]$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va $F'(x_0)=f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

3) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u xolda $\forall$ $x \in [a;b]$ lar uchun $F'(x)=f(x)$, ya'ni $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

A) 1) 3) B) 1), 2), 3) C) 1), 2) D) 2), 3)

11. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ funksiya $[a.b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa va $F(x)$ funksiya $[a.b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ushbu .... Nyuton-Leybnis formulasi o'rinli bo'ladi.

A) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ B) $\int_a^b f(x)dx = F(b)+F(a)$

C) $\int_a^b f(x)dx = f(b)-f(a)$ D) $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$

12. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar: 1) $f(x)$ funksiya

$[a;b]$ kesmada uzluksiz, 2) $\varphi(t)$ funksiya o'zining $\varphi'(t)$ hosilasi bilan birgalikda

$[\alpha;\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, hamda $\forall t \in [\alpha;\beta]$ uchun

$a=\varphi(\alpha)\leq\varphi(t)\leq\varphi(\beta)=b$ bo'lsa, ...formula o'rinli bo'ladi.

A) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_a^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$

B) $\int_a^b f(x)dx=-\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=-\int_a^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$

C) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^\beta f^2(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_a^\beta f^2(\varphi(t))d\varphi(t)$

D) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi(t)dt$

13. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $u(x)$ va $v(x)$
funksiyalari $[a;b]$ kesmada uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalar ega bo'lsa, u holda,
............formula o'rinli.

A) $\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)v(x)]_a^b+\int_a^b v(x)du(x)$

B) $\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

C) $\int_a^b u(x)dv(x)=-[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

D) $\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v'(x)du(x)$

14. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ - toq funksiya bo'lsa, u holda, ... o'rinli bo'ladi.

1) $\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$ 2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

3) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{+a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

A) 1), 3) B) 1), 2), 3) C) 1), 2) D) 2), 3)

15. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ - juft funksiya bo'lsa, u holda, ... o'rinli bo'ladi.

1) $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ 2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

3) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{+a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

A) 1), 3) B) 1), 2), 3) C) 1), 2) D) 3)

16. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ - T davrga ega bo'lgan funksiya bo'lsa, u holda, ... o'rinli bo'ladi.

1) $\forall a$ uchun $\int_{-a}^{a+T} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ 2) $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx \ \forall a$

3) $\forall a$ uchun $\int_{a}^{a-T} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

A) 1), 3) B) 1), 2), 3) C) 1), 2) D) 3)

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a \neq 0,\ D = b^2 - 4ac)$ tugri javobni belgilang:

1) $a > 0$ bulsa, logarifmik funksiya 2) $a < 0$ bulsa, arksinus funksiya

3) $D > 0$ bulsa, logarifmik funksiya 4) $D = 0$ bulsa, logarifmik funksiya

5) $a < 0$, $D < 0$ bulsa, arksinus va logarifmik funksiya

A) 1,2,3,4 B) 2,3,4,5 C) 1,3,5 D) 1,2,5

18. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $\left(D=b^2-4ac,\ a\neq 0\right)$ integral uchun qaysi javob to‘g‘ri:

1) $D>0$ bo‘lsa logarifmik funksiya; 2) $D>0$ bo‘lsa ratsional funksiya; 3) $a<0,\ D<0$ bo‘lsa logarifmik funksiya; 4) $D<0,\ a>0$ bo‘lsa, juft funksiyasi; 5) $D<0$ bo‘lsa, aniqmas integral mavjud yemas.

A) 1,2,3,4 B) 2,3,4,5 C) 1,2,3,5 D) 1,2,4

19. $\int \frac{xdx}{(x-2)(x+3)}=?$

A) $\frac{1}{2}\ln\left[|x-2|^2\cdot|x+3|^3\right]$ B) $arctg\frac{x-2}{3}$

C) $\ln|x-2|\cdot|x+3|$ D) $\frac{1}{5}\ln|x-2|\cdot|x+3|$

20. $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ chiziqning $0\le x\le 3$ ga mos qismining uzunligini toping.

A) $\frac{14}{3}$ B) 6 C) $\frac{13}{4}$ D) 7

21. $y=x^2$ va $x+y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

A) 4,5 B) 2 C) 3,5 D) 5

22. $y=\sin x,\ y=0,\ (0\le x\le \pi)$ shaklning Ox o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $2\pi^2$

23. Hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ $(c\neq 0,\ d\neq 0)$.

A) $\frac{a}{c}$ B) 0 C) $\frac{b}{d}$ D) 1

24. Hisoblang: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x-y}{x^3-y^3}=?$

A) $\frac{1}{12}$ B) 1 C) 0 D) 2

25.Hisoblang: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

A) π B) $\frac{\pi}{4}$ C) $-\frac{\pi}{4}$ D) 0

26. Hisoblang: $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

A) 2 B) 0 C) 1 D) -1

27. $y=x^2$ va $x+y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

A) 4,5 B) 2 C) 3,5 D) 5

28. $u=e^{x^2+y^2+z^2}$ bo‘lsa, $du(0,1,2)=?$

A) $e^5(2dy+4dz)$ B) $e^5(2dy+2dz)$

C) $2dy+4xdz$ D) $e^5(dy+4dz)$

29. $u=3x^2-x^3$ funksiyaning yegilish nuqtasini va botiqligi yo‘nalishlarini aniqlang

A) $-\infty<x<1$ da botiqligi yuqoriga; $1<x<+\infty$ da botiqligi pastga. $x=-1$ yegilish nuqtasi

B) $-\infty<x<0$ da botiqligi yuqoriga; $x>0$ – da botiqligi pastga $x=0$ yegilish nuqtasi

C) $-\infty<x<1$ da botiqligi pastga; $x>1$– da botiqligi yuqoriga;, $x=1$ yegilish nuktasi

D) $-\infty<x<0$ da botiqligi pastga; $x>0$– da botiqligi yuqoriga, $x=1$ yegilish nuqtasi

30. Quyidagi tasdiqda tushirib qoldirilgan so‘zlarni toping? f funksiya ochiq M to‘plamda berilgan bo‘lib, shu to‘plamda ... bo‘lsin. Agar aralash hosilalar $(x,y)\in M$ nuqtada ... bo‘lsa, u holda, shu nuqtada $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ bo‘ladi.

A) aralash hosilalarga ega , uzluksiz

B) uzluksiz, uzluksiz yemas

C) chega ralangan, uzluksiz yemas

D) aralash hosilalarga ega , davriy

31. Quyidagi tasdiqda tushirib qoldirilgan so'zlarni toping? Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya ... to'plamda berilgan va ... bo'lsa, f funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

A) chega ralangan yopiq, uzluksiz B) monoton, uzluksiz

C) juft, monoton D) davriy, chega ralangan

32. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda, bu funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ uchun quyidagi formulalardan qaysi biri o'rinli.

A) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ B) $\int_a^b f(x)dx = F'(b)-F'(a)$

C) $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$ D) $\int_a^b f(x)dx = F(c) \quad (a<c<b)$

33. Riman ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini aniqlang? $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda ... bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

1) Uzluksiz.
2) $[a,b]$ segmentdagi ichki s nuqtasida limiti cheksiz.
3) Chegaralangan va monoton
4) Chegaralangan va shu oraliqni chekli sondagi nuqtalarda uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz.

A) 1, 3, 4 B) 1,2,3 C) 2, 3 D) 1,4

34. Aniq integralning quyidagi xossalarini to'ldiring? Agar $f(x)$ $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda, $|f(x)|$ funksiya ham shu oraliqda ... bo'ladi va ... tengsitzlik o'rinli bo'ladi.

A) integrallanuvchi, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

B) integrallanuvchi, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \int_a^b |f(x)|dx$

C) integrallanuvchi, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| > \int_a^b |f(x)|dx$

D) integrallanuvchi, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| > \int_a^b |f^2(x)|dx$

35. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosialalarga ega bo'lsin. U holda, quyidagi formulalarni qaysi biri aniq integralni bo'laklab integrallash formulasini ifodalaydi.

A) $\int_a^b u(x)dv(x)=(u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

B) $\int_a^b u(x)dv(x)=(u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

C) $\int_a^b u(x)dv(x)=(u(x)\cdot v(x))-\int_a^b v(x)du(x)$

D) $\int_a^b u(x)dv(x)=(u'(x)\cdot v'(x))\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

36. Tekislikda $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklni qaraylik. Bunda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz va $\forall x\in[a,b]$ uchun $f_1(x)\ge f_2(x)\ge 0$ bo'lsin. Bunday shaklning yuzi quyidagi formulalardan qaysi biri orqali hisoblanadi.

A) $S=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$ B) $S=\int_a^b[f^2{}_1(x)-f^2{}_2(x)]dx$

C) $S=\int_a^b[f_1'(x)-f_2'(x)]dx$ D) $S=\int_a^b[f_1'(x)-f_2(x)]dx$

37. $\int_{-b}^{+b}(x^2-1)dx$ integralni hisoblang $(b>0)$.

A) $\frac{2b}{3}(b^2-3)$ B) $\frac{2b}{3}(b^3-3)$ C) $\frac{b}{3}(b^2-3)$ D) $2b(b^2-3)$

38. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar S egri chiziqli trapetsiya yuqoridan $f_2(x)$, pastdan $f_1(x)$ uzluksiz egri chiziqlar bilan, yon tomonlardan esa $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, uning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma T jismning hajmi ....formula orqali topiladi.

A) $V_x=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx$ B) $V_x=\pi\int_a^b(f_2(x)-f_1(x))dx$

C) $V_x=\pi\int_a^b[f_2^3(x)-f_1^3(x)]dx$ D) $V_x=\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx$

39. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar D soha qutb koordinatalar sistemasida $D=\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta,\\ 0\le r\le r(\varphi)\end{cases}$ ko'rinishda berilgan bo'lib, $r(\varphi)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ uzluksiz bo'lsa, S figuraning yuzi ....

formula bilan hisoblanadi.

A) $S=\frac{1}{2}\int_a^b (r(\varphi))^2 d\varphi$ B) $S=\frac{1}{2}\int_a^b (r(\varphi))^3 d\varphi$

C) $S=\int_a^b (r(\varphi))^2 d\varphi$ D) $S=\frac{1}{2}\int_a^b r(\varphi)d\varphi$

40. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\breve{AB}$ egri chiziq o'zining $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ oshkor tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, u holda, uning *yoy uzunligi* .... formula bilan hisoblanadi.

A) $l=\breve{AB}=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ B) $l=\breve{AB}=\int_a^b \sqrt{1-(f'(x))^2}\,dx$

C) $l=\breve{AB}=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^3}\,dx$ D) $l=\breve{AB}=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)}\,dx$

41. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda, Ox $(y=0)$ o'qi atrofida aylanma sirtning yuzi ....formula bo'yicha hisoblanadi.

A) $Q_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ B) $Q_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1-f'^2(x)}dx$

C) $Q_x=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^3}\,dx$ D) $Q_x=2\pi\int_a^b \sqrt{1-f'^2(x)}dx$

42. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham, shunday $n_0\in N$ topilib, barcha $n>n_0$, $p>n_0$ $(p\in N)$ lar uchun .... tengsizlik bajarilsa, $\{M_n\}$ ketma-ketlik *fundamental ketma-ketlik* deb ataladi.

A) $\rho(M_n,M_p)<\varepsilon$ B) $\rho(M_n,M_p)\ge\varepsilon$

C) $\rho(M_n,M_p)>\varepsilon$ D) $\rho(M_n,M_p)\le\varepsilon$

43. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $\{M_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti .... bo'ladi.

A) yagona B) chegaralangan

C) yagona, chegaralangan D) ikkita

44. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Agar $M\to A$ da $\alpha(M)$ va $\beta(M)$ funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, u holda, ularning yig'indisi $\alpha(M)+\beta(M)$ ham A nuqtada cheksiz kichik bo'ladi.

2) Agar $M \to A$ da $\alpha(M)$ funksiya cheksiz kichik bo'lib, $\beta(M)$ funksiya esa chegaralangan bo'lsa, u holda, $\alpha(M)\beta(M)$ ham, cheksiz katta funksiya bo'ladi.

3) Agar $M \to A$ da $\alpha(M)$ $(\alpha(M \neq 0)$ cheksiz kichik funksiya bo'lsa, u holda, $\frac{1}{\alpha(M)}$ funksiya $M \to A$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

4) Agar $M \to A$ da $h(M)$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'lsa, $\frac{1}{h(M)}$ funksiya $M \to A$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

A) 1) 3) 4) B) 1) 2) 3) C) 1) 2) 4) D) 2) 3) 4)

45. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $\{M\}$ to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va A ga intiluvchi .... ketma-ketlik olinganda ham funksiyaning unga mos kelgan $\{f(M_k)\}$ qiymatlar ketma-ketligi hamma .... (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu B songa $f(M)$ funksiyaning A nuqtadagi(yoki $M \to A$ dagi) *limiti* deb ataladi

A) har qanday $\{M_n\}$ $(M_n \neq A,\ n = 1,2,...)$, vaqt yagona B

B) shunday $\{M_n\}$ $(M_n \neq A,\ n = 1,2,...)$, vaqt yagona B

C) har qanday $\{M_n\}$ $(M_n \neq A,\ n = 1,2,...)$, vaqt yagona $B \neq 0$

D) shunday $\{M_n\}$ $(M_n \neq A,\ n = 1,2,...)$, vaqt yagona $B \neq 0$

46. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, ushbu .... tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $M \in \{M\}$ nuqtalarda ....tengsizlik bajarilsa, $f(M)$ funksiya A *nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

A) $\rho(M,A) < \delta$, $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$

B) $0 < \rho(M,A) < \delta$, $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$

C) $\rho(M,A) < \delta$, $|f(M) - f(A)| \le \varepsilon$

D) $0 < \rho(M,A) < \delta$, $|f(M) - f(A)| \le \varepsilon$

47. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda, M_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

2). Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(M_0) > 0$ $(f(M) < 0)$ bo'lsa, M_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi M nuqtalarda ham $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$ bo'ladi.

3). Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, M_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi ixtiyoriy $M_1 \in \{M\}$, $M_2 \in \{M\}$ nuqtalar uchun $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

A) 1) 2) 3) B) 1) 3)

C) 1) 2) D) 2) 3)

48. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1). Agar $u=f(M)$ funksiya $\{M\}\subset R^m$–chegaralangan yopiq to'plamda berilgan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu $\{M\}$ to'plamda monoton bo'ladi.

2). Agar $f(M)$ funksiya chegaralangan yopiq $\{M\}\subset R^m$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda o'zining aniq yuqori hamda aniq kuyi chegarasiga yerishadi.

3). Agar $f(M)$ funksiya chegaralangan yopiq to'plamda berilgan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

A) 2) 3) B) 1) 3)

C) 1) 2) D) 1) 2) 3)

49. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari noto'g'ri? $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtaning biror $U_\delta(M_0)=\{M(x_1,x_2)\in R^2:\rho(M,M_0)<\delta\}(\delta>0)$ atrofida birinchi, ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqta esa, berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin: $f'_{x_1}(M_0)=0$, $f'_{x_2}(M_0)=0$. Odatda,gidek,

$$a_{11}=f''_{x_1^2}(M_0),\ a_{12}=f''_{x_1x_2}(M_0),\ a_{22}=f''_{x_2^2}(M_0)$$

deb belgilaymiz. Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1) Agar $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{11}^2>0$ va $a_{11}<0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada minimumga erishadi.

2) Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ va $a_{11}>0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada maksimumga erishadi.

3) Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4) Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ bo'lsa, $f(x_1,x_2)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligi ham mumkin. Bu «shubhali» holda ekstremum qo'shimcha tekshirishlar yordamida aniqlanadi.

A) 1) 2) B) 3) 4) C) 1) 3) 4) D) 1) 2) 3)

50. Nuqta o'rniga quyiladigan to'g'ri javobni belgilang. Agar $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nuqtada ...... bo'lsa, bu funksiyaning .... bo'yicha xususiy hosilalari mavjud va $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ bo'ladi.

A) differensiallanuvchi, hamma argumentlari
B) uzluksiz, hamma argumentlari
C) differensiallanuvchi, ba'zi bir argumentlari
D) uzluksiz, bitta argumenti

Mustaqil (individual) bajariladigan kontrol ishlar

1-semestrda matematik analiz fanidan mustaqil (individual) bajariladigan kontrol ishlar

1-kontrol ish

1-masala. Limitning ta'riflaridan foydalanib, berilgan x_n ketma-ketlikning $n\to\infty$ da A limitga ega ekanligini ko'rsating. $|x_n - A| < \varepsilon$ tengsizlikning qaysi raqamdan boshlab bajarilishini ko'rsating, ya'ni $N(\varepsilon)$ raqamni toping.

№	u_n	A	ε	№	u_n	A	ε
1	$\frac{9n-1}{n+1}$	9	10^{-2}	16	$\frac{3n}{1+n^2}$	0	10^{-1}
2	$\frac{5n^2+1}{3n^2+2}$	$\frac{5}{3}$	10^{-2}	17	$\frac{5n^3}{n^3-2}$	5	10^{-2}
3	$\frac{8-n^3}{1+3n^3}$	$-\frac{1}{3}$	10^{-2}	18	$\frac{4+5n}{1-3n}$	$-\frac{5}{3}$	10^{-2}
4	$\left(\frac{-1}{3}\right)^n$	0	10^{-3}	19	$\frac{7n+15}{6+n}$	7	10^{-2}
5	$1+\frac{(-1)^n}{2n+4}$	1	10^{-2}	20	$\frac{5-n^2}{1+7n^2}$	$-\frac{1}{7}$	10^{-2}
6	$\frac{6n-3}{3n+1}$	2	10^{-3}	21	$\frac{1-8n}{n+3}$	-8	10^{-2}
7	$\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}	22	$\frac{5n^2+4}{2-n^2}$	-5	10^{-2}
8	$\frac{2n+(-1)^n}{n}$	2	10^{-2}	23	$-\frac{5+4n^3}{3+2n^3}$	-2	10^{-2}
9	$\frac{-5n}{n+1}$	-5	10^{-2}	24	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$	0	10^{-3}
10	$\frac{1}{\ln(n+1)}$	0	$\frac{1}{3}$	25	$3-\frac{(-1)^n}{n+5}$	3	10^{-2}
11	$\frac{n+1}{1-3n}$	·	10^{-2}	26	$\frac{9n+7}{2n-3}$	$\frac{9}{2}$	10^{-2}
12	$\frac{2n+1}{3n-5}$	$\frac{2}{3}$	10^{-2}	27	$\frac{2+n^2}{4+2n^2}$	$\frac{1}{2}$	10^{-2}

13	$\frac{1-2n^2}{n^2+3}$	-2	10^{-2}		28	$\frac{-5n+(-1)^n}{2n+3}$	$-\frac{5}{2}$	10^{-2}
14	$\frac{5n^2}{2-n^2}$	-5	10^{-2}		29	$\frac{2}{\ln(5n+4)}$	0	$\frac{1}{4}$
15	$\frac{n}{5n-1}$	$\frac{1}{5}$	10^{-2}		30	$\left(-\frac{3}{5}\right)^n$	0	10^{-3}

2-masala. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ dan foydalanib, limitlarni hisoblang.

1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$	2	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tg^2x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x-2tgx}{\sin 2x-2\sin x}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4tgx-\sin 4x}{tgx-\sin x}$	6	$\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{tg2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x-2\sin x}{x^3}$	8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^x$
9	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{tgx-ctgx}{\pi/4-x}$	10	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(2-\sin x)^{tg^2x}$
11	$\lim\limits_{x\to\pi/4}((\cos x-\sin x)tg2x$	12	$\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{1/x}$
13	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{tgx-ctgx}{\pi/4-x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x-1)^{ctg^2x}$
15	$\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{1-2\sin x}{1-2\cos 2x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^x$
17	$\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{\sin x-\cos 2x}{\pi/6-x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)^{ctgx}$
19	$\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{1-\cos 2x}{\pi-3x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{1/x^3}$
21	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(1-\sin x)tg^2x$	22	$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/\sin x}$
23	$\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{\sqrt{3}-2\sin x}{\pi/3-x}$	24	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-2}\right)^{x^2}$
25	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{1-\sin 2x}{(1-\sqrt{2}\sin x)^2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}(2-tg^2x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$
27	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-tgx)$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2+2x-1}\right)^x$

29	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{1+\sin x}\right)^{2/x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

3-masala. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini ta'rif bo'yicha isbotlang.

1.1. $f(x)=5x^2-1,\ x_0=6.$ **1.2.** $f(x)=3x^2-3,\ x_0=4.$
1.3. $f(x)=-2x^2-5,\ x_0=2.$ **1.4.** $f(x)=-4x^2-7,\ x_0=1.$
1.5. $f(x)=-5x^2-9,\ x_0=3.$ **1.6.** $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=5.$
1.7. $f(x)=2x^2+6,\ x_0=7.$ **1.8.** $f(x)=4x^2+4,\ x_0=9.$
1.9. $f(x)=5x^2+1,\ x_0=7.$ **1.10.** $f(x)=3x^2-2,\ x_0=5.$
1.11. $f(x)=-2x^2-4,\ x_0=3.$ **1.12.** $f(x)-4x^2-6,\ x_0=1.$
1.13. $f(x)=-4x^2-8,\ x_0=2.$ **1.14.** $f(x)=-2x^2+9,\ x_0=4.$
1.15. $f(x)=3x^2+7,\ x_0=6.$ **1.16.** $f(x)=5x^2+5,\ x_0=8.$
1.17. $f(x)=4x^2-2,\ x_0=5.$ **1.18.** $f(x)=2x^2-4,\ x_0=3.$
1.19. $f(x)=-3x^2-6,\ x_0=1.$ **1.20.** $f(x)=-5x^2-8,\ x_0=2.$
1.21. $f(x)=-4x^2+9,\ x_0=4.$ **1.22.** $f(x)=-2x^2+7,\ x_0=6.$
1.23. $f(x)=3x^2+5,\ x_0=8.$ **1.24.** $f(x)=5x^2+3,\ x_0=8.$
1.25. $f(x)=4x^2-1,\ x_0=6.$ **1.26.** $f(x)=2x^2-3,\ x_0+4.$
1.27. $f(x)=-3x^2-5,\ x_0=2.$ **1.28.** $f(x)=-5x^2-7,\ x_0=1.$
1.29. $f(x)=-3x^2-9,\ x_0=3.$ **1.30.** $f(x)=2x^2+8,\ x_0=5.$

4-masala. Murakkab funksiyaning hosilasi: $[f(u(x))]'=f'(u)\cdot u'(x)$ formuladan va elementar funksiyalarning hosilasidan foydalanib, $y'(x)$ hosilani toping.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\ln(\cos(\frac{x-1}{x}))$	16	$\arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2})$
2	$x\sin(\ln x-\frac{\pi}{4})$	17	$arctg(e^x+e^{-x})$
3	$arctg(\ln(\frac{1}{x}))$	18	$\arcsin\sqrt{x-1}$
4	$\frac{x}{\ln^2 x}$	19	$arctg\sqrt{\frac{x-1}{2}}$
5	$\ln(\ln(3-2x^3))$	20	$tg^2\sqrt{3x}$
6	$2^{ctg(1/x)}$	21	$\frac{tg^2 x}{2}+\ln(\cos x)$

7	$\sqrt{e^{\sin^2 x}}$	22	$\ln(\sin x)+\frac{ctg^2 x}{2}-\frac{ctg^4 x}{4}$
8	$\sqrt{\cos^2 x-2\sin^2 x}$	23	$\frac{2}{3}(\ln x-5)\sqrt{1+\ln x}$
9	$\sqrt{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$	24	$\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
10	$\frac{\cos^3 x}{15}(3\cos^2 x-5)$	25	$\ln^3(2x+\sqrt{3})$
11	$\frac{x^2}{\ln x}$	26	$\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$
12	$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	27	$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$
13	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$	28	$\ln(\sin x)+\frac{1}{2}ctg^2 x$
14	$\frac{1}{3}arctg(3tgx)$	29	$\frac{tg^5 x}{5}+\frac{tg^7 x}{7}$
15	$e^{tg^2(3x)}$	30	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$

5-masala. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari, elementar funksiyalarning hosilalari va murakkab funksiyaning hosilasini topish formulalaridan foydalanib, $y'(x)$ hosilani toping.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}$	16	$\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}(x^2-3)$
2	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2)$	17	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}$
3	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1)$	18	$\frac{1}{3}arctg(\frac{5tgx+4}{3})$
4	$arctg\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+x-1}\right)$	19	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2})$	20	$\ln\sqrt[3]{\frac{x+2}{\cos^2 x}}$
6	$\frac{2}{35}(1+x)^{5/2}(5x-2)$	21	$\ln\sqrt{\frac{1+x}{tgx}}$

7	$(1+2x^2)^{5/2}\cdot\frac{5x^2-1}{70}$	22	$arctg^2\frac{1}{\sqrt{2x}}$
8	$\frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}}$	23	$\ln\sqrt[4]{\frac{1+4x}{\sin^3 x}}$
9	$\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$	24	$\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{x}}$
10	$\frac{2}{15}(3x-4)(2+x)^{3/2}$	25	$\ln 5(1+3tgx)$
11	$\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^3}-\ln(1+\sqrt[4]{x^3}))$	26	$\ln\left(\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}\right)$
12	$\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$	27	$\frac{2(10+3x)}{9\sqrt{5+3x}}$
13	$\frac{3x-9}{10}\sqrt[3]{(x+2)^2}$	28	$\frac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{3/4}$
14	$\frac{20x+32}{45}(x-2)\sqrt[4]{x-2}$	29	$2\sqrt{x+1}(\ln(x+1)-2)$
15	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}$	30	$\frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}$

6-masala. Ushbu $(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ formuladan foydalanib, $y'(x)$ - logarifmik hosilani toping.

№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$	11	$(arctgx)^x$	21	$x^{1/x}$
2	$x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$	12	$(\sin 3x)^x$	22	$\sqrt{\cos x}\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}$
3	$\frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}$	13	$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$	23	$(arctgx)^{\ln x}$
4	$x^{\cos x}$	14	$\frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$	24	$(\sin x)^{\ln x}$
5	$(\sin x)^{1/x}$	15	$\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$	25	$(1+x^2)^{\arccos x}$
6	x^{tgx}	16	$(tgx)^{e^x}$	26	$\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}$

7	$(tgx)^{\cos x}$	17	$(\ln\sin 3x)^x$	27	$\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}}$
8	$(\arcsin x)^{x^2}$	18	$(1+x^3)^{x^3}$	28	$(x^2+1)^{\sqrt{x}}$
9	$(1+x^2)^{x^2}$	19	$(\cos x)^{\sin x}$	29	$x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)$
10	$(\cos x)^x$	20	$x^{\sqrt{x}}$	30	$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

7-masala. Parametrik $\{x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\}$ shaklda berilgan funksiyaning $y'(x)$ hosilasini toping.

№	$x(t),\ y(t))$	№	$x(t),\ y(t)$	№	$x(t),\ y(t)$
1	$\begin{cases} x=\dfrac{2\sin t}{1+3\cos t} \\ y=\dfrac{5\cos t}{1+3\cos t} \end{cases}$	11	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t^2+1}{t+2} \end{cases}$	21	$\begin{cases} x=2t-t^3 \\ y=2t^2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x=\ln(+t^2) \\ y=t-arctgt \end{cases}$	12	$\begin{cases} x=\dfrac{6t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$	22	$\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$
3	$\begin{cases} x=e^{-t^2} \\ y=arctg(2t+1) \end{cases}$	13	$\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$	23	$\begin{cases} x=\dfrac{t^3+2}{t^2+1} \\ y=\dfrac{t^3}{t^2+1} \end{cases}$
4	$\begin{cases} x=4tg^2(\dfrac{t}{2}) \\ y=2\sin t+3\cos t \end{cases}$	14	$\begin{cases} x=e^t \\ y=\arcsin t \end{cases}$	24	$\begin{cases} x=t^2e^{-t} \\ y=t^2e^{-t} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1) \\ y=\arccos 2t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x=2(t+\dfrac{1}{t}) \\ y=t+\dfrac{3}{t}+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$
6	$\begin{cases} x=5(\cos t+t\sin t) \\ y=5(\sin t-t\cos t) \end{cases}$	16	$\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t}) \end{cases}$	26	$\begin{cases} x=\ln t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	17	$\begin{cases} x=\dfrac{6t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3(1-t^2)}{1+t} \end{cases}$	27	$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$

8	$\begin{cases} x = \ln tg(\frac{t}{2}) + \cos t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = (\dfrac{t}{t+1})^2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - \ln t^2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$

8-masala. $f(x,y)=0$ - oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyaning $y'(x)$ hosilasini toping.

№	F(x,y)	№	F(x,y)
1	$\ln x + e^{y/x} + 5$	16	$x - \sqrt[3]{y^3 + x} - 4$
2	$x^{2/3} + y^{2/3} - 10$	17	$y^3 - \dfrac{x-y}{x+y} - 6$
3	$y - \sqrt{4x - x^2 + 10y - 4} + 3$	18	$ye^{x-1} - e^y + 9$
4	$e^x - e^y + x - y - 6$	19	$y^2 - x - \ln\dfrac{y}{x} - 4$
5	$x - \sqrt[3]{2x^2y^2 + 5x + y - 5} + 9$	20	$x + y - 3\sqrt[3]{x-y} + 11$
6	$\dfrac{3}{\sqrt{xy}} - \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 8$	21	$y - \sqrt[3]{x + 10y - 6 + \dfrac{4y+5}{x}}$
7	$arctg\dfrac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 2$	22	$x - \sqrt{2y^3 - \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x}} - 3$
8	$e^x - e^y - xy$	23	$x - \sqrt{1 + 2xy + y^2 - 8y^3} + 3$
9	$y - \sqrt{2x - x^2 - 5xy - y}$	24	$\dfrac{x}{y} - \dfrac{\sin x}{\sin y} + 3$
10	$2\cos^2(x+y) + xy - 9$	25	$\sqrt{x+y} - y\sqrt{x-y} - 7$
11	$3arctg\dfrac{y}{x} - \sqrt{x^2 + y^2} + 5$	26	$\ln(x+y) - \dfrac{8}{\sqrt{x+y^2}}$

12	$\ln 5y + \frac{x}{y} + 7$	27	$\sin(y - x^2) - \ln(y^2 - x)$
13	$x - arctg(x + y) + 1$	28	$e^x + e^y - 2^{xy} - 2$
14	$y - \sqrt[3]{\frac{2y-1}{x}} + 12$	29	$x^{y^x} + y^2 \ln x - 4$
15	$e^x \sin y - e^{-y} \cos x$	30	$x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x$

2-kontrol ish

1-masala. Lopital qoidasidan foydalanib, limitni hisoblang.

1	$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{\ln x} - \ln(x+e-1)}{arctg2(x-1)}$	16	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos2x)}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot e^{x-1})}{e^{\sin(1-x)}-1}$	17	$\lim\limits_{x\to0}\frac{5^{tg3x}-1}{2^{\sin(x/2)}-1}$
3	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(\sqrt{1+4x}-2)}{x-2}$	18	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3+x^2)-\ln3}{1-\cos5x}$
4	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\frac{\pi}{4}-x}$	19	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-tg8x}-1}{\ln(1+\sin x)}$
5	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)$	20	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{1-\cos x}$
6	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln(\sqrt[3]{2x+2}-1)}{\ln(\sqrt{x+1}-1)}$	21	$\lim\limits_{x\to1}\frac{tg\pi x}{4^x-4}$
7	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-arctg5x)}{\sin3x}$	22	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x}}{1-2^{tgx}}$
8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tgx}-1-x}{x^2}$	23	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3-2\cos x)}{\sqrt{1+tg^2x}-1}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$	24	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{2^{\arcsin x}-1}$
10	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{1/\cos x}-e^{\cos x}}{\ln\cos x}$	25	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(x/2)}{\ln(1+2x^2)}$
11	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{\ln(\sqrt{9+x}-\sqrt{4+x})}$	26	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sin^2(\pi/2-x)}$
12	$\lim\limits_{x\to2}\frac{2^x-x^2}{2-x}$	27	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{1-ctgx}$

13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$	**28**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-tg^2(x/5))}{\sqrt{1+\sin^2 3x}-1}$
14	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\pi-4x}$	**29**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{3x}-3^{-x}}{e^{tgx}-1}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-tgx}}{\sin 2x}$	**30**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{tg6x}$

2-masala. Lopital qoidasidan foydalanib, limitni hisoblang.

1	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$	**16**	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{3/x}-1}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$	**17**	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-3)}{e^x-e^3}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	**18**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$	**19**	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$	**20**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})\sin x}{x^2}$	**21**	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2-arctgx)}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/tg^2 x}$	**22**	$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{1/x}$	**23**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x+2x^2-e^{2x}}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}$	**24**	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg(\pi x/2)$
10	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3-3\sqrt[3]{x}}\right)$	**25**	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}-x}{x^2}$	**26**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+2^{-x}-2}{x^2}$
12	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$	**27**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}+x-1}{x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$	**28**	$\lim\limits_{x\to 0}(xctgx)^{-1/x^2}$
14	$\lim\limits_{x\to 1}(tg(\pi x/4))^{tg(\pi x/2)}$	**29**	$\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{1/\ln x}$

15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+\sin 3x-3xe^x}{arctgx-\sin x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$

3-masala. $y=f(x)$ funksiyani $x=x_0$ nuqta atrofida $0(x-x_0)^4)$ gacha Teylor formulasiga yoying.

№	$f(x)$	x_0	n	№	$f(x)$	x_0	n
1	$\dfrac{2x+3}{4x-5}$	2	4	16	$\cos^2(2x+6)$	-4	5
2	$(x+2)\ln(3x-7)$	3	4	17	$(x+2)\sqrt{3x+4}$	4	4
3	$\sin^2(2x+1)$	-1	5	18	$(x\ \ -7)e^{4x-2}$	1	5
4	$(x-2)\cos(x-3)$	2	5	19	$\dfrac{3x+2}{x-6}$	5	4
5	$\sqrt[3]{3x+5}$	1	4	20	$(2x-9)\ln(4x+1)$	1	4
6	$(2x\ \ +5)e^{2x-3}$	-2	4	21	$\sin^2(3x-2)$	2	5
7	$\dfrac{3x-4}{x-5}$	2	4	22	$(3x+4)\cos(2x-1)$	3	5
8	$(x^2+x)\ln(2x+1)$	0	5	23	$\sqrt[3]{2x-5}$	16	4
9	$\sin(4x-3)$	1	5	24	$(2x^2+5)e^{3x-2}$	1	5
10	$\cos^2(x+2)$	-1	5	25	$\dfrac{x^2-4}{2x+1}$	-1	4
11	$\sqrt[4]{4x+12}$	1	4	26	$(x^2+7x)\ln(4x+3)$	1	4
12	$(x\ \ +2)e^{x^2+3}$	-1	4	27	$(x+2)\sin(x+2)$	2	5
13	$\dfrac{x^2-4}{2x+1}$	2	4	28	$(2x+1)\cos(3x-5)$	2	5
14	$x\ln\sqrt[3]{5-2x}$	2	4	29	$\sqrt[4]{x+12}$	4	4
15	$(2x-3)\sin(x+3)$	-2	5	30	$(-x+4)e^{x+3}$	-2	5

4-masala. Limitni ikki usul bilan: a) Teylor formulasi yoyilmasidan foydalanib; b) Lopital qoidasidan foydalanib, toping.

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+x^2/2-\sin x}{x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-e^{-x}-3x-1}{x^2}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1-2x^2+e^{-2x}}{x^3}$

3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\ln(1+x)-6x-2x^3}{e^{-x}+x-1}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+3x/2-\sqrt{1+3x}}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-\cos x-x}{x^2}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{-x}-3x/2}{x^2}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin 2x+2\ln(1-x)+x^2}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos x-2x}{x^2}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\ln(1+2x)-1-2x}{x^2}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}+x-1}{1-\cos x}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+\ln(1+2x)-2x}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+2x^2}-e^{-2x}-2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2/2+\sin x+\ln(1-x)}$	25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^3}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-e^{-x}-x}{x^2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^{-2x}+2\sin x-1}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2+x+\ln(1-x)}{2x^3}$	27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1-2x)+e^{2x}-1}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^{x}-1-x-x^2/2}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{e^{2x}-e^{-2x}-4x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1-2x)+2x+2x^2}$	29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\ln(1+x)+x-1}{x^2}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x^2}-e^{x}+x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\sin x-1-x^2/2}{x^3}$

5-masala. Differensial hisobdan foydalanib, $y=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+px+q}$ funksiyaning grafigini chizing.

№	a	b	c	d	p	q	№	a	b	c	d	p	q
1	1	1	0	-1	0	-1	16	2	-1	-1	6	1	-6
2	1	2	0	-2	0	-1	17	-2	-1	-1	-2	-1	-1
3	1	1	0	-4	0	-4	18	3	-3	-3	-6	-1	-2
4	1	1	-3	2	-3	2	19	-3	-4	-4	24	1	-6

5	1	1	-1	-2	-1	-2	**20**	1	1	1	-2	1	-2
6	-1	0	0	0	2	1	**21**	-1	2	2	-4	1	-2
7	1	-2	0	0	-2	1	**22**	-1	-1	-3	-2	3	2
8	-1	0	0	0	2	1	**23**	2	-1	3	-2	-3	2
9	1	-1	0	0	2	1	**24**	2	1	-4	3	-4	3
10	1	3	3	1	-2	1	**25**	-2	-1	2	3	-2	-3
11	-1	2	0	-6	0	-3	**26**	-2	-4	-8	12	2	-3
12	-2	2	0	-6	0	-3	**27**	-2	-3	-12	-9	4	3
13	2	-1	0	2	0	-2	**28**	-2	-2	10	-12	-5	6
14	-3	2	0	-6	0	-3	**29**	3	4	-4	-24	-1	-6
15	3	-2	0	2	0	-1	**30**	1	3	15	18	5	6

6-masala. Differensial hisobdan foydalanib, $y(x)$ funksiyaning grafigini chizing.

№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\sqrt[3]{x^2-1}$	**2**	$x\sqrt[3]{x+3}$	**3**	$\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$	**4**	$x^2\sqrt[3]{x+1}$
5	$\sqrt[3]{(x^2-2)^4}$	**6**	$x\sqrt[5]{x+1}$	**7**	$\sqrt[3]{(x^2-1)^5}$	**8**	$x^2\sqrt[4]{x+2}$
9	$\sqrt[4]{(x^2-9)^3}$	**10**	$x^{1/2}\sqrt{x+1}$	**11**	$\sqrt[4]{(x^2-4)^3}$	**12**	$x^{1/2}\sqrt{(x+1)^3}$
13	$\sqrt[5]{(x^2-3)^4}$	**14**	$x\sqrt{x-1}$	**15**	$\sqrt[5]{(x^2-1)^3}$	**16**	$x^2\sqrt{x-2}$
17	$\sqrt[5]{(x^2-1)^2}$	**18**	$x\sqrt{1-x}$	**19**	$\sqrt[5]{(x^2-1)^3}$	**20**	$\sqrt[4]{x^2-1}$
21	$\sqrt[6]{(x^2-4)^7}$	**22**	$x\sqrt[4]{x^3(x+1)}$	**23**	$\sqrt[6]{(x^2-9)^5}$	**24**	$\sqrt[4]{x(x-2)^2}$
25	$\sqrt[7]{(x^2-4)^6}$	**26**	$(x-1)\sqrt[3]{x^2}$	**27**	$\sqrt[7]{(x^2-9)^8}$	**28**	$\sqrt[3]{x^2-3x}$
29	$\sqrt[9]{(x^2-16)^5}$	**30**	$x(x^2-1)^{-1/3}$				

7 – masala. Differensial hisobdan foydalanib, $y(x)$ funksiyaning grafigini chizing.

1	$y=(2x-3)e^{-2x-2}$	**16**	$y=e^x\cos x$
2	$y=\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$	**17**	$y=\dfrac{e^{2x+2}}{2x+2}$
3	$y=xe^{-x^2}$	**18**	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
4	$y=\sqrt{x^3}\ln x$	**19**	$y=(3-x)e^{x-2}$
5	$y=\dfrac{x}{\ln x}$	**20**	$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

6	$y = xe^{-x}$	21	$y = e^{1/x^2}$
7	$y = e^{1/x} - x$	22	$y = xe^{1/(2-x)}$
8	$y = x^2 - \ln\lvert x\rvert$	23	$y = (2x+5)e^{-2x-4}$
9	$y = e^{1/(x^2-4x+4)}$	24	$y = 2\ln(1 - \frac{4}{x}) - 3$
10	$y = (1+x)e^{1/x}$	25	$y = 4\ln\frac{x}{x+2} + 1$
11	$y = e^{-x}\sin x$	26	$y = x(2 - \ln x)^2$
12	$y = 3\ln\frac{x}{x-3} - 1$	27	$y = x^3 e^{-x}$
13	$y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$	28	$y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$
14	$y = 3 - 3\ln\frac{x}{x+4}$	29	$y = 2\ln\frac{x+3}{x} - 3$
15	$y = xe^{1/(x-1)}$	30	$y = \frac{e^{x-3}}{2x+7}$

8-masala. Ko'rsatilgan ifodalarni taqribiy hisoblang.

№	*1- masala*	*2-masala*	№	*1-masala*	*2-masala*
1	$\sqrt{10}$	$\log_6 37$	16	$\mathrm{ctg}46^0$	$\sqrt[4]{257}$
2	$\log_3 10$	$\mathrm{tg}44^0$	17	$\sqrt{99}$	$5^{2,1}$
3	$\mathrm{tg}46^0$	$\sqrt{37}$	18	$4^{1,8}$	$\mathrm{arcctg}0,9$
4	$\sqrt[3]{28}$	$3^{3,2}$	19	$\mathrm{arcctg}0,1$	$\sqrt[4]{255}$
5	$3^{2,1}$	$\mathrm{arctg}0,9$	20	$\sqrt[3]{63}$	$\sin 27^0$
6	$\mathrm{arctg}0,1$	$\sqrt{35}$	21	$\mathrm{ctg}47^0$	$\log_4 257$
7	$\sqrt[4]{82}$	$\sin 29^0$	22	$\log_5 124$	$\sqrt[4]{626}$
8	$\sin 31^0$	$\log_6 35$	23	$\sqrt[3]{126}$	$5^{1,9}$
9	$\log_3 8$	$\sqrt{50}$	24	$4^{3,1}$	$\sin 26^0$
10	$\sqrt{8}$	$3^{2,8}$	25	$\mathrm{ctg}44^0$	$\sqrt[4]{624}$
11	$3^{1,9}$	$\sin 28^0$	26	$\sqrt[3]{124}$	$5^{2,8}$
12	$\cos 61^0$	$\sqrt{48}$	27	$5^{3,2}$	$\log_4 255$
13	$\sqrt{17}$	$5^{2,9}$	28	$\log_6 217$	$\sqrt[4]{83}$
14	$3^{2,2}$	$\log_3 28$	29	$\sqrt[3]{29}$	$\log_5 626$
15	$\log_4 17$	$\sqrt{63}$	30	$\log_3 82$	$\cos 63^0$

2 –semester matematik analiz fanidan mustaqil (individual) bajariladigan kontrol ishlar

3-kontrol ish

1-masala. Differensial tagiga kiritish yo'li bilan $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	$\frac{1}{\sqrt[9]{(5x-3)^2}}$	11	$\sin(3x-5)$	21	$3^{0.5x+1}$
2	$\cos(0.5x+6)$	12	xe^{x^2+2}	22	$\sin(0,25x+3)$
3	$\frac{\ln^2 x}{x}$	13	$\frac{1}{x\ln^3 x}$	23	xe^{-3x^2}
4	$\frac{x^2}{x^3+6}$	14	$\frac{1}{\sqrt[3]{(2-7x)^5}}$	24	$\frac{x}{6x+1}$
5	$\frac{x}{5x+7}$	15	$\sin(7x-0,25)$	25	$x\cos(2x^2)$
6	$\frac{1}{\sin^2(x/7)}$	16	$\frac{x^2}{1-3x^3}$	26	$\frac{1}{\cos^2(7x)}$
7	$\frac{5x}{7+x^2}$	17	$e^{x/3}-5x$	27	$\frac{x}{9-x^2}$
8	$5\sin(7x-2)$	18	$\frac{1}{\cos^2(12x)}$	28	$\frac{1}{\sqrt[5]{(7x+5)^4}}$
9	$x\cos(2x^2)$	19	$\frac{x}{11+3x^2}$	29	$\frac{1}{\sin^2(5x/2)}$
10	$e^{x/4}-2x$	20	$\frac{x}{2-7x}$	30	$8\cos(9x-4)$

2-masala. Bo'laklab integrallash usuli bilan $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	x^2e^{3x}	11	xe^{-7x}	21	$\sqrt[5]{x}\ln x$

2	$(3x-2)\sin x$	12	$\arcsin(7x)$	22	$arctg(9x)$
3	$x\cos(8x)$	13	$(1-7x)\cos x$	23	xe^{-9x}
4	$\sqrt{x^5}\ln x$	14	x^2e^{5x}	24	$\dfrac{\ln x}{x^3}$
5	$x\ln(1+5x)$	15	$x\cos(7x)$	25	$\arcsin(5x)$
6	$arctg(3x)$	16	$(2x-3)\sin x$	26	x^2e^{7x}
7	$arc\sin(8x)$	17	$\dfrac{\ln x}{x^4}$	27	$(3-7x)\cos x$
8	xe^{-9x}	18	$\sqrt[3]{x}\ln x$	28	$x\ln(4x+3)$
9	$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	19	$arctg(5x)$	29	$(1-3x)\cos x$
10	$(2-5x)\sin x$	20	$x\ln(6x-2)$	30	$x\cos 7x$

3-masala. $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	$\dfrac{1-4x}{x^3-5x^2+6x}$	11	$\dfrac{x^3-5x+6}{x^4-5x^3+6x^2}$	21	$\dfrac{5x+6-3x^2}{x^4+4x^3+3x^2}$
2	$\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+x^2-2x}$	12	$\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$	22	$\dfrac{1}{x^4+4x^2}$
3	$\dfrac{x-1}{x^2(x+1)^2}$	13	$\dfrac{1}{(x^2+1)(x+4)}$	23	$\dfrac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}$
4	$\dfrac{1}{x^3-3x^2}$	14	$\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$	24	$\dfrac{x+2}{x^3-2x^2+x}$
5	$\dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}$	15	$\dfrac{x-8}{x^3-4x^2+4x}$	25	$\dfrac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$
6	$\dfrac{x^3+x^2+4}{x^2+2x-8}$	16	$\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}$	26	$\dfrac{5x-8}{x^3-4x^2+8x}$
7	$\dfrac{1}{x^3+1}$	17	$\dfrac{x}{(x^2-1)(x+1)}$	27	$\dfrac{x^4}{x^4-1}$
8	$\dfrac{x^5}{x^3+1}$	18	$\dfrac{x}{x^3+1}$	28	$\dfrac{x^3+4}{x^3+2x^2+x}$
9	$\dfrac{x^2}{1-x^4}$	19	$\dfrac{x-7}{(x-3)(x^2-4x+5)}$	29	$\dfrac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}$
10	$\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$	20	$\dfrac{1}{(x-2)(x+1)^2}$	30	$\dfrac{4x+5}{(x+1)(x^2+2x+2)}$

4-masala. $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	$\frac{1}{3+2\cos x}$	11	$\sin^4 x\cos^2 x$	21	$\frac{1+tgx}{1-tgx}$
2	$\sin^2 x\cos^3 x$	12	$\frac{1}{3\sin x+4\cos x}$	22	$\frac{\sin 2x}{\cos^7 x}$
3	$\frac{1}{\cos^2 x+9\sin^2 x}$	13	$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{5}$	23	$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$tg^3 3x$	14	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	24	$\sin 2x\sin 5x$
5	$\sin^4 x\cos^3 x$	15	$\sin^2 2x$	25	$\frac{1}{\sin x+tgx}$
6	$\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$	16	$\frac{1}{5+4\cos x}$	26	$x^3\sqrt{1+x^2}$
7	$\frac{1}{1+\sin x+\cos x}$	17	$\frac{\sin^2 3x}{\cos^6 3x}$	27	$\frac{1}{\cos^4 x}$
8	$\sin^4(x/2)$	18	$\sqrt{9-x^2}$	28	$\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}$
9	$\sin 3x\cos 2x$	19	$\cos^4 x$	29	$\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$
10	$x^2\sqrt{9-x^2}$	20	$\frac{1}{2\sin x-\cos x}$	30	$\sin^2 x\cos 3x$

5-masala. $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

1) $\int\frac{dx}{\arcsin^4 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\frac{arctg(2x)dx}{1+4x^2}$; 3) $\int\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}dx}{x^3}$;

4) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$; 5) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; 6) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+3}}$;

7) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}}$; 8) $\int\frac{e^x dx}{3e^x+4}$; 9) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{5e^x+2}}$;

10) $\int\frac{3x^3dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; 11) $\int\frac{(\ln x-3)dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$; 12) $\int\frac{\cos x dx}{2\sin x+5}$;

13) $\int x\cdot\sin(x^2)dx$; 14) $\int\frac{\sqrt{2arctgx+5}}{1+x^2}dx$; 15) $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2\cos x+1}}$;

16) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+5}}$; 17) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{2\ln x+3}}$; 18) $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx+1}}{1+x^2}dx$.

19) $\int \frac{dx}{arccrc^4 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$; 20) $\int \frac{arccrc(2x)dx}{1+4x^2}$; 21) $\int \frac{4^{-\frac{1}{x^2}}dx}{x^3}$;

22) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{2+\ln x}}$; 23) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{x^6+1}}$; 24) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+9}}$;

6-masala. $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

1) $\int (x^3-4x)\ln x dx$; 2) $\int (x^5+x^2)\ln x dx$; 3) $\int (x+1)\cos 2x dx$;

4) $\int (2x-1)\sin 3x dx$; 5) $\int (x-5)e^{2x}dx$; 6) $\int \arcsin 3x dx$;

7) $\int x arctgx dx$; 8) $\int arctg2x dx$; 9) $\int \arccos 2x dx$;

10) $\int (2x-3)e^{-x}dx$; 11) $\int (2x+1)\cos 3x dx$; 12) $\int (3x-1)\sin 2x dx$;

13) $\int (4x-7)e^{x+1}dx$; 14) $\int \arcsin 2x dx$; 15) $\int (x^5+2x)\ln x dx$;

16) $\int (2x+1)arctgx dx$; 17) $\int \arccos 3x dx$; 18) $\int xe^{2x-3}dx$.

19) $\int (x^2-4x)\ln x dx$; 20) $\int (x^3+x^2)\ln x dx$; 21) $\int (x^2-2)\cos 2x dx$;

22) $\int (2x+3)\sin 3x dx$; 23) $\int (x^2-5)e^{2x}dx$; 24) $\int x\arcsin 3x dx$;

7-masala. $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

1) $\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2+4)(x-5)}$; 2) $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2+1)(x-1)}$; 3) $\int \frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}dx$;

4) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$; 5) $\int \frac{(2x^3-3x+1)dx}{x^3+1}$; 6) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

7) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+13}$; 8) $\int \frac{(3x-2)dx}{(x+2)^2(x+1)}$; 9) $\int \frac{(x-5)dx}{(x-4)^2(x-1)}$;

10) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-1)^2(x+5)}$. 11) $\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2+9)(x-5)}$; 12) $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2+1)(x+2)}$;

13) $\int \frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}dx$; 14) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$; 15) $\int \frac{(2x^3-3x+1)dx}{x^3+8}$;

16) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; 17) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+13}$; 18) $\int \frac{(3x-2)dx}{(x+2)^2(x+1)}$;

19) $\int \frac{(x-5)dx}{(x-4)^2(x+1)}$; 20) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-1)^2(x-5)}$. 21) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+4)(x+9)}$;

22) $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2-4)(x-1)}$; 23) $\int \frac{4x+13}{x^2(x^2-4x+3)}dx$; 24) $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-4x}dx$

8-masala. $\int f(x)dx$ integralni hisoblang.

1) $\int \cos^4 2x dx$; 2) $\int \sin^4 2x dx$; 3) $\int \sin^3 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} dx$;

4) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$; 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+1}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin^3 x}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cdot \cos^3 x}}$; 9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+1}$;

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$; 11) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}dx$; 12) $\int \sin^3 x \cdot \sqrt[5]{\cos x} dx$;

13) $\int \cos^3 x \cdot \sqrt[5]{\sin^2 x} dx$; 14) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}dx$; 15) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;

16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2}$; 17) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3}$; 18) $\int \frac{dx}{1-9\cos^2 x}$;

19) $\int \cos^4 3x dx$; 20) $\int \sin^4 3x dx$; 21) $\int \sin 2x \cdot (\cos^2 x-2)dx$.

22) $\int \cos^3 2x dx$; 23) $\int \sin^3 2x dx$; 24) $\int \sin^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} dx$;

4-kontrol ish

1-masala. $\int_a^b f(x)dx$ - integralni hisoblang.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
1	$\frac{1}{1+\sqrt{x}}$	0	4	16	$\sin^2 x\cos^6 x$	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	$x^2\sqrt{4-x^2}$	0	2	17	$\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$	1	e^3
3	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	1	2	18	$\sin^4 x$	0	π
4	$\frac{1}{5+3\sin x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	19	$\sqrt{(1-x^2)^3}$	0	1
5	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	0	$\frac{1}{2}$	20	$\frac{1}{x+x^2}$	1	3
6	$\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$	3	$\frac{\pi}{3}$	21	$\frac{1}{e^x+1}$	0	1
7	$\sqrt{2x-x^2}$	0	2	22	$\sqrt{2-x^2}$	1	$\sqrt{2}$

8	$\frac{x}{\sqrt{1+3x}}$	1	5	23	$\frac{1}{1+\sin x+\cos x}$	0	$\frac{\pi}{2}$
9	$\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	24	$\frac{e^x}{1+e^{2x}}$	0	1
10	$\frac{\sin(1/x)}{x^2}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	25	$\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$	1	4
11	$\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$	0	$\sqrt{3}$	26	$tg^3 x$	0	$\frac{\pi}{4}$
12	$\frac{e^{1/x}}{x^2}$	1	2	27	$\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$	0	2
13	$\frac{1}{8\sin^2 x+1}$	0	$\frac{\pi}{4}$	28	$\frac{1}{\sin x(1+\sin x)}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{\pi}$
14	$\frac{\cos x}{5+4\cos x}$	0	$\frac{2}{\pi}$	29	$\frac{1+x}{\sqrt{x+x}}$	1	4
15	$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$	1	3	30	$\frac{1}{3+2\cos x}$	0	$\frac{\pi}{2}$

2-masala. $\int_a^b f(x)dx$ - integralni hisoblang.

1) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$;

2) $\int_{a/\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$;

3) $\int_{2a/\sqrt{3}}^{2a} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$;

4) $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$;

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x}$;

6) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$;

7) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$;

8) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$;

9) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

10) $\int_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$;

11) $\int_{-2}^0 \frac{(x-3)dx}{x^2+4x+5}$;

12) $\int_2^3 \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+5}$;

13) $\int_{-1}^0 \frac{(x-5)dx}{x^2+2x+2}$;

14) $\int_1^2 \frac{(x+5)dx}{x^2-2x+2}$;

15) $\int\limits_{3}^{4}\frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$;

16) $\int\limits_{-3}^{0}\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$;

17) $\int\limits_{2}^{3}\frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

18) $\int\limits_{4/\sqrt{3}}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

19) $\int\limits_{0}^{4}x^2\sqrt{16-x^2}dx$;

20) $\int\limits_{3/\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$;

21) $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3-masala. Quyidagi ko'rsatilgan chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini hisoblang.

№	Coha chegarasi	№	Coha chegarasi
1	$x=1-3y^2;\quad x=-2y^2$	16	$y=x^5;\ x=y^2$
2	$\begin{cases}x=2\sin^3 t\\ y=2\cos^3 t\end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$	17	$r=5\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$
3	$y=x^2+1;\ y+x=3$	18	$y=\cos x,\ x\ge 0;$ $y=\sin x;\ x=0$
4	$y=2^x;\quad y=2x-x^2;$ $x=0;\ x=2$	19	$y=2^x;\quad y=2;\quad x=0$
5	$r=3(1+\cos\varphi)$	20	$\begin{cases}x=2\cos^2 t\\ y=\sin 2t\end{cases},\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2};$ $y=0$
6	$y=(x-4)^2;\ y=16-x^2$	21	$y=arctgx;\ x=1;\ y=0$
7	$\sqrt{2x}+\sqrt{y}=1;\ x=0;\ y=0$	22	$y=3x^2+1;\ y=3x+7$
8	$r=tg(\varphi/2);\ \varphi=\pi/2$	23	$r=2-\sin\varphi$
9	$y=x^2/2;\ y=3x-x^2/2$	24	$y=\frac{x}{1+\sqrt{x}};\quad y=0;\ x=1$
10	$xy=2;\ y=2x;\ x=2y,\ y\ge 0$	25	$y=x^4,\ x<0;\ y=3x^2-2$
11	$r=\frac{1}{\cos^2\varphi};\quad \varphi=0;\ \varphi=\frac{\pi}{4}$	26	$\begin{cases}x=3(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases},\ 0\le t\le 2\pi$ $y=0$
12	$y=x^2-3x;\ 3x+y=4$	27	$y=\ln 3x;\quad y=\ln(x^2+2)$
13	$y=x^4;\ y=2-x^2$	28	$y=x^2-4;\ y=2x-x^2$

14	$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$	29	$y = x + \sin^4 x;$ $y = x,\ 0 \le x \le \pi$
15	$x + y + 2 = 0;\ y = -x^2$	30	$y = \arcsin x;\ x = 0;\ y = \pi/2$

4-masala. Quyidagi berilgan l egri chiziq yon uzunligini hisoblang.

№	l	№	l
1	$y = \frac{x^2}{2},\ 0 \le x \le 1$	16	$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = 1 - \cos 2t \\ z = 3\cos t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi$
2	$\begin{cases} x = t^3/3 - 1 \\ y = t^2 + 2 \end{cases},\ 0 \le t \le 2$	17	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\quad 1 \le x \le 2$
3	$y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$	18	$r = e^{2\varphi},\ 0 \le \varphi \le 1$
4	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \ln 2$	19	$y = e^x + 1,\quad 0 \le x \le \ln\sqrt{8}$
5	$y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6$	20	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$
6	$r = \sin^5(\varphi/5),\ 0 \le \varphi \le 5\pi$	21	$y = \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2;$
7	$y = x^{3/2},\ 0 \le x \le 2$	22	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi$
8	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi$	23	$y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3$
9	$y = \arccos x + \sqrt{1 - x^2},$ $-1 \le x \le 1$	24	$r = 2(1 - \cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\pi/2$
10	$\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t \\ y = 3\sin t - 4\cos t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi/2$	25	$y = \arcsin(e^{-x}),\ 0 \le x \le \ln 2$
11	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ 0 \le x \le \ln 2$	26	$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - \cos t \end{cases},\ -2 \le t \le 0$
12	$r = 1 + \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2$	27	$y = (4 - x^{2/3})^{3/2},\ 0 \le x \le 8$
13	$y = \ln x,\ 1 \le x \le 2$	28	$r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 1$
14	$\begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = 3t - t^3 \end{cases},\ 0 \le t \le 1$	29	$y = \frac{1}{5}x^{5/4},\quad 0 \le x \le 81$

15	$y=\frac{3}{4}x^{2/3}-\frac{3}{8}x^{4/3},\ 1\le x\le 8$	30	$\begin{cases}x=3t^5-5t^3\\ y=15t^4/2-1\end{cases},\quad 0\le t\le 1$

5-masala. Tenglamasi qutb kordinatalar sistemasida berilgan chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini hisoblang.

1. $r=4\cos 3\varphi, r=2 (r\ge 2).$
2. $r=\cos 2\varphi$
3. $r=\sqrt{3}\cos\varphi\quad r=\sin\varphi, (0\le\varphi\le\pi/2)$
4. $r=4\sin 3\varphi, r=2 (r\ge 2)$
5. $r=2\cos\varphi, r=2\sqrt{3}\ \sin\varphi, (o\le\varphi\le\pi/2)$
6. $r=\sin 3\varphi.$
7. $r=6\sin 3\varphi, r=3(r\ge 3)$
8. $r=\cos 3\varphi$
9. $r=\cos\varphi, r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4), (-\pi/4\le\varphi\le\pi/2).$
10. $r=\sin\varphi, r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4), (0\le\varphi\le 3\pi/4).$
11. $r=6\cos 3\varphi, r=3(r\ge 3).$
12. $r=1/2+\sin\varphi.$
13. $r=\cos\varphi, r=\sin\varphi (0\le\varphi\le\pi/2)$
14. $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4), r=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4), (\pi/4\le\varphi\le 3\pi/4)$
15. $r=\cos\varphi, r=2\cos\varphi.$
16. $r=\sin\varphi, r=2\sin\varphi$
17. $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi.$
18. $r=1/2+\cos\varphi.$
19. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi.$
20. $r=(5/2)\sin\varphi, r=(3/2)\sin\varphi$
21. $r=(3/2)\cos\varphi, r=(5/2)\cos\varphi.$
22. $r=4\cos 4\varphi.$
23. $r=\sin 6\varphi.$
24. $r=2\cos\varphi, r=3\cos\varphi.$
25. $r=\cos\varphi+\sin\varphi.$
26. $r=2\sin 4\varphi.$
27. $r=2\cos 6\varphi.$

28. $r=\cos\varphi-\sin\varphi$.

29. $r=3\sin\varphi, r=5\sin\varphi$.

30. $r=2\sin\varphi, r=4\sin\varphi$.

31. $r=6\sin\varphi, r=4\sin\varphi$.

6-masala. Tenglamasi parametrik shaklida berilgan chiziqlarning yoy uzunligini hisoblang.

1. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t) \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$

2. $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=6\sin^3 t \end{cases} \quad 0\le t\le\pi/3.$

3. $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$

4. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad \pi/2\le t\le\pi.$

5. $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2.$

6. $\begin{cases} x=2.5(t-\sin t), \\ y=2{,}5(1-\cos t) \end{cases} \quad \pi/2\le t\le\pi.$

7. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$

8. $\begin{cases} x=3{,}5(2\cos t-\cos 2t). \\ y=3{,}5(2\sin t-\sin 2t) \end{cases} \quad 0\le t\le\pi/2.$

9. $\begin{cases} x=10\cos t \\ y=10\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le\pi/2.$

10. $\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t), \\ y=6(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$

11. $\begin{cases} x=e(\cos t+\sin t), \\ y=e(\cos t-\sin t) \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$

12. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le\pi/2.$

13. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t) \end{cases} \quad \pi\le t\le 2\pi.$

14. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/6$.

15. $\begin{cases} x = 1/2\cos t - 1/4\cos 2t \\ y = 1/2\sin t - 1/4\sin 2t \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3$.

16. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

17. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

18. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3$.

19. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$.

22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4$.

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi/2$.

25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

26. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

27. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

28. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi$.

29. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$.

30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4$.

31. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

7-masala. Quyidagi sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang.

1. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
2. $\rho = 6(1 + \sin\varphi), -\pi/2 \le \varphi \le 0$.
3. $\rho = 2e^{4\varphi/3}, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
4. $\rho = 7(1 - \sin\varphi), -\pi/6 \le \varphi \le \pi/6$.
5. $\rho = \sqrt{2e^{\varphi}}, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
6. $\rho = 8(1 - \cos\varphi), -2\pi/3 \le \varphi \le 0$.
7. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
8. $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le 3/4$.
9. $\rho = 6e^{12\varphi/5}, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
10. $\rho = 2\varphi$ $, 0 \le \varphi \le 3/2$.
11. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, 0 \le \varphi \le \pi/3$.
12. $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le 5/12$.
13. $\rho = 4e^{4\varphi/3}, 0 \le \varphi \le \pi/3$.
14. $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le 12/5$.
15. $\rho = \sqrt{2e^{\varphi}}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
16. $\rho = 4\varphi, 0 \le \varphi \le 3/4$.
17. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, 0 \le \varphi \le \pi/3$.
18. $\rho = 3\varphi$ $0 \le \varphi \le 3/2$.
19. $\rho = 12e^{12\varphi/5}, 0 \le \varphi \le \pi/3$.
20. $\rho = 5\varphi, 0 \le \varphi \le 12/5$.
21. $\{\rho = 1 - \sin\varphi, -\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6$.
22. $\rho = 2\cos\varphi$ $0 \le \varphi \le \pi/6$.
23. $\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \le \varphi \le -\pi/2$.
24. $\rho = 8\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi/4$.
25. $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le 0$.
26. $\rho = 6\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
27. $\rho = 4(1 - \sin\varphi)$. $0 \le \varphi \le \pi/6$.

28. $\rho = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

29. $\rho = 5(1-\cos\varphi)$ $-\pi/3 \le \varphi \le 0$.

30. $\rho = 8\sin\varphi$ $0 \le \varphi \le \pi/4$.

31. $\rho = 6\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi/3$.

8-masala. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuraning aylanishi natijasida hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang. 1-16 variantlarda aylanish o'qi Ox, 17-31 variantlarda esa, aylanish o'qi Oy.

1. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.
2. $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0$.
3. $y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \le x \le \pi$.
4. $y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \ge 0$.
5. $y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0$.
6. $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1, y = 1$.
7. $y = xe^x, y = 0, x = 1$.
8. $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$.
9. $y = 2x - x^2, y = -x + 2$.
10. $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1$.
11. $y = x^2, y^2 - x = 0$.
12. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.
13. $y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$.
14. $y = x^2, y = 1, x = 2$.
15. $y = x^3, y = \sqrt{x}$.
16. $y = \sin(\pi x/2), y = x^2$.
17. $y = \arccos(x/3), y = \arccos x, y = 0$. 18. $y = \arcsin x(x/5). y = \arcsin x, y = \pi/2$.
19. $y = x^2, x = 2, y = 0$.
20. $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1$.
21. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0, y = 1, x = 0{,}5$.
22. $y = \ln x, x = 2, y = 0$.
23. $y = (x-1)^2, y = 1$.
24. $y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3$ $y = 1$.
25. $y = x^3, y = x^2$.
26. $y = \arccos x/5, y = \arccos x/3, y = 0$.
27. $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = 0$.

28. $y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0$.

29. $y = x^3, y = x$.

30. $y = \arccos x, y = \arcsin x, x = 0$.

Adabiyotlar

1. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. Aksoy A. G., Khamsi M. A. A problem book in real analysis. Springer, 2010.
3. Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov-b. A. Matematik analizdan ma'ruzalar, I, II q. T. "Voris-nashriyot", 2010.
4. Shoimqulov B. A., Tuychiyev T. T., Djumaboyev D. X. Matematik analizdan mustaqil ishlar. T. "O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati", 2008.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1, 2, 3 т. М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.
6. Садуллаев А., Мансуров Х. Т., Худойберганов Г., Ворисов А. К., Гуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1, 2, 3 қ. Т. "Ўқитувчи", 1995, 1995, 2000.
7. Шокирова Х. Р. Каррали ва эгри чизиқли интеграллар. Т. "Ўзбекистон", 1990.
8. Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу. М. «Наука», 1997.
9. Canuto C., Tabacco A. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008.
10. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ, 1, 2 т. М. «Проспект», 2007.
11. Зорич В.А. Математический анализ, 1, 2 т. М. «Наука», 1981.
12. Азларов Т. А., Мансуров Х. Т. Математик анализ, 1, 2 қ. Т. "Ўқитувчи", 1994, 1995.
13. Кудряцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, 1, 2, 3 т. М. «Наука», 2003.
14. Азларов Т.А., Мирзаахмедов М.А., Отақўзиев Д.О., Собиров М.А., Тўлаганов С.Т.- Математикадан қўлланма, II-қ. Т.: «Ўқитувчи», 1990.
15. Алимов Ш.О., Ашуров Р.Р. Математик тахлил, маърузалар матни. Т. 2007.
16. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.:Наука,1985.
17. Бруй И.Н., Гаврилюк А.В и др. Лабораторный практикум по математическому анализу. – Минск.: Вышейша школа, 1991.
18. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.– Задачи упражнения по математическому анализу, М.: Изд. МГУ, 1988.
19. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. 1,2.т. М. "Наука" 1980.

20. Gaziyev A., Isroilov I., Yaxshiboyev M.U.. Matematik analizdan misol va masalalar, 1-qism (o'quv qo'llanma). Turon-iqbol nashriyoti. Toshkent. 2009. 480 bet.
21. Gaziyev A., Isroilov I., Yaxshiboyev M.U.. Matematik analizdan misol va masalalar, 2-qism (o'quv qo'llanma). «Fan va texnologiyalar» nashriyoti. Toshkent. 2012. 384 bet.
22. Кудрявцев Л.Д.Курс математического анализа.Т.1.,Т.2- М.: 1981.
23. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике.- М.: Высш. шк., 1983.
24. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Голович Г.П. – Справочное пособие по математическому анализу, Киев.: «Высшая школа», 1984.
25. Марон И.А.– Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. - М.: «Наука», 1970.
26. Матросов А. Maple-6. Решения задач высшей математики и механики. Петер.Санкт-Петербург, 2000.
27. Никольский С.М.Курс математического анализа.Т.1.,Т.2-М.: «Наука», 1983.
28. Тер- Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа, М. Наука. 1988.
29. Архипов Г.И. Садовничий В.А. Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.- М. 2004.
30. Thomas' CALCULUS. Tenth Edition.-Boston,San Francisco, New York, London,Toronto,Sydney,Tokyo,Singapore,Madrid….2001.
31. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2009 йил 14 августдаги 286-сон буйруғи.
32. А.Навоий номидаги Самарканд давлат университетининг "Талабалар мустақил ишини ташкил этиш" бўйича Низоми.
33. "Талабалар мустақил ишини ташкил этиш" бўйича услубий кўрсатмалар. Тузувчилар: А.Солеев, Ҳ.Қурбонов. Самарқанд, 2012 йил, СамДУ нашриёти, - 63 бет.
34. Ўзбекистон олий таълим тизимида мустақил таълим салоҳиятини ривожлантириш. Услубий қўлланма, Тошкент Вестминстер университети ходимлари томонидан 2005-2006 йилларда амалга оширилган лойиҳа натижалари.Т.,2006. -66 б.
35. Самостоятельная работа студентов. Методические рекомендации.Составители: Г.Г.Силласте, Е.Е.Письменная, Н.М.Белгарокова. Москва, Финансовый университет, 2013. - 35 с.
36. Самостоятельная работа студентов. Методические рекомендации.Составители: А.С.Зенькин,В.М.Кирдяев, Ф.П.Пильгаев, А.П. Лащ- Саранск.: Изд-во Морд.ун-та, 2009. - 35 с.

37. Дыбина О.В., Щетинина В.В. Построение системы организации самостоятельной работы бакалавров в ВУЗЕ // Науч-ное мнение. 2013. № 3. С. 126–131.
38. Higher Education in Russia and Beyond / №1(3) / Spring 2015.
39. Independent work in the Mathematics Department (A guide for mathematics majors). http://blogs.princeton.edu/mathclub/guide/research/
40. Princeton Department of Mathematics guide to independent work. With deadlines for academic year 2014-2015.
41. Student Centered Learning. An Insight Into Theory And Practice. European Students union. Bucharest, 2010,47p.
42. Карпиевич Е.Ф. Самостоятельная работа студентов в современном университете: формы, содержание, управление. Материалы пятой международной научно-практической конференции (Минск, 24-25 марта 2005г.) / Белорусский государственный университет. Центр проблем развития образования. Мн.: Пропилеи, 2005. 360 с.
43. Ефименко С.В. Управление самостоятельной работой студентов технического вуза. ISNN 1812-1853.Российский психологический журнал. 2011 том 8 № 1.
44. Листенгартен В.С. Самостоятельная деятельность студентов: Пособие для преподавателей вузов/ В.С.Листенгартен, С.М.Годник. - Воронеж, 1996.–94 с.

4.2.3 Davriy nashrlar

1. Математика в школе. М.
2. Matematika, fizika va informatika, T.
3. Uzluksiz ta'lim.

4.2.4 Internet resurslari

7. http://www.ziyonet.uz/
8. http://www.allmath.ru/
9. http://www.mcce.ru/
10. http://lib.mexmat.ru/
11. http://www.webmath.ru/
12. http://www.exponenta.ru/
7. http://www.google.uz.
8. http://www.edu.uz.

A. GAZIYEV, I. ISRAILOV, M. U.YAXSHIBOYEV

MATEMATIK ANALIZDAN MUSTAQIL ISHLAR

1 - QISM

(O‘quv qo‘llanma)

Toshkent – «Aloqachi» – 2018

Muharrir: M.Mirkomilov
Tex. muharrir: A.Tog‘ayev
Musavvir: B.Esanov
Musahhiha: N.Hasanova
Kompyuterda sahifalovchi: F.Tog‘ayeva

Nashr.lits. AI№176, 11.06.11.
Bosishga ruxsat etildi:14.09.2018. Bichimi 60x841 /16.
«Timez Uz» garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 27,5. Nashr bosma tabog‘i 27,0.
Adadi 100. Buyurtma № 22.

«Nihol print» Ok da chop etildi.
Toshkent sh., M. Ashrafiy ko‘chasi, 99/101.