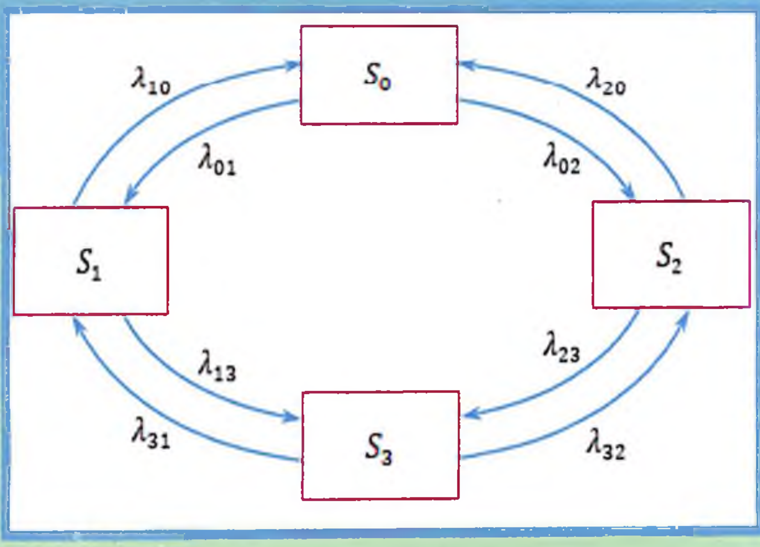
51
Yu 31

I.J. YULDASHEV

OLIY MATEMATIKA

(Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi)



TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI IIV YONG'IN
XAVFSIZLIGI INSTITUTI

I.J. YULDASHEV

OLIY MATEMATIKA

(OMMAVIY XIZMAT KO'RSATISH NAZARIYASI)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan talabalar uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT
TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
398003
AXBOROT-RESURS MARKAZI

TOSHKENT – 2019

UO‘K: 517(075.8)
KBK 22.1ya7
Yu 31

Yu 31 I.J.Yuldashev. Oliy matematika (Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi). Darslik. –T.: «Fan va texnologiya», 2019, 232 bet.

ISBN 978–9943–6153–3–5

Darslik 750000-“Favqulodda vaziyatlarda xavfsizlik” ta’lim sohasi, 5640100-“Hayotiy faoliyat xavfsizligi” ta’lim yo‘nalishi hamda 650 000 – “Harbiy ta’lim” ta’lim sohasining “Yong‘in xavfsizligi” va “Texnosfera xavfsizligi” mutaxassisliklari bo‘yicha tahsil olayotgan talabalar, kursantlar va tinglovchilar uchun mo‘ljallangan. U ikki bobdan iborat bo‘lib, uning birinchi bobi ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalariga bag‘ishlangan. Unda keltirilgan ma’lumotlardan ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasini o‘z ichiga olgan ikkinchi bobni o‘rganishda yordamchi material sifatida foydalanish ko‘zda tutilgan. Birinchi bobda hodisalarning ehtimoli, tasodifiy miqdorlar va ular bilan bog‘liq limit teoremalar, Markov zanjirlari va jarayonlari, statistik baholar, parametrik va noparametrik gipotezalarni tekshirishning muvofiqlik mezoni va boshqa tushunchalar keltirilgan bo‘lib, ular imkon qadar sodda uslubda bayon etilgan.

Darslikning ikkinchi bobi ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasining asosiy tushunchalari, natijalari hamda tadqiqot usullarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Unda ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlarida kechayotgan jarayonlarni matematik modellashtirish va tahlil qilishning asosiy usullari keltirilgan. Darslikda yong‘in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyatini matematik modellashtirish masalasiga alohida e’tibor qaratilgan.

UO‘K: 517(075.8)
KBK 22.1ya7

Taqrizchilar:
Sh.Shoraxmedov – f.m.f.d., professor;
Sh.Atabayev – f.m.f.n., professor.

ISBN 978–9943–6153–3–5

©«Fan va texnologiya» nashriyoti, 2019

SO'Z BOSHI

Amaliyotda juda ko'p tizimlar faoliyatining samaradorligini oshirish uchun muvaffaqiyat bilan «Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi» fanini qo'llash mumkinligi ayon. Bunday tizimlarga misol sifatida aloqa, tez tibbiy yordam, bank, savdo, maishiy xizmatlar – gaz, suv, elektr ta'minoti kabi sohalarining avariyalarni bartaraf etish xizmatlari, bojxona xizmati, havo hujumidan mudofaa tizimlari, huquqni muhofaza qiluvchi organlarning tezkor xizmatlari, xususan, yong'in xavfsizligi xizmatini keltirish mumkin. Bunday sohalar uchun mutaxassislar tayyorlashda imkoniyat darajasida talabalarga «Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi» fanini yoki uning muayyan bo'limlarini o'qitilishi foydadan holi bo'lmaydi.

Ushbu darslik, asosan, 750000 – "Favqulodda vaziyatlarda xavfsizlik" ta'lim sohasi, 5640100 – "Hayotiy faoliyat xavfsizligi" ta'lim yo'nalishi hamda 650 000 – "Harbiy ta'lim" ta'lim sohasining "Yong'in xavfsizligi" va "Texnosfera xavfsizligi" mutaxassisliklari bo'yicha tahsil olayotgan kursant va tinglovchilari uchun mo'ljallangan bo'lib, muallif tomonidan Yong'in xavfsizligi institutida so'nggi bir necha yillar mobaynida kursantlarga «Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi» fani bo'yicha o'qilgan ma'ruzalar asosida yozilgan. Muallifning maqsadi ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi asoslari hamda usullarini imkon darajada sodda, oson tushuniladigan uslubda, murakkab matematik apparatdan foydalanmagan holda bayon qilishdir.

Hozirgi vaqtda rus va chet tillarida ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasiga oid adabiyotlar juda ko'p [7],[9],[10],[14],[15], [17]. Ayniqsa, E.S.Venttselning [7] kitobi o'z ichiga ushbu fanga oid nisbatan batafsilroq ma'lumotlarni o'z ichiga olganligi bilan alohida ajralib turadi. Internet tarmog'ining tegishli manbaalarida ham bu fanga oid ko'plab ma'lumotlar mavjud. Bu adabiyotlar asosan, iqtisodiyot, qishloq xo'jaligi, aloqa va boshqa turli sohalar uchun mutaxassislar tayyorlashga mo'ljallangan bo'lib, tezkor xizmatlar, xususan, yong'in xavfsizligi tizimi uchun mutaxassislar tayyorlashga mo'ljallangan yetarli hajmdagi adabiyot mavjud emas. O‘zbek tilida esa, ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi fanidan darslik yoki o‘quv qo‘llanma mavjud emas.

Ushbu darslikdan, texnik yo‘nalishdagi oliy ta‘lim muassasalarida «Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi» fani yoki uning muayyan bo‘limi bo‘yicha mashg‘ulotlar o‘tkazishda foydalanish mumkin. Buning uchun o‘quvchi(kursantlar)dan maxsus matematik tayyorgarlik talab etilmaydi. Bundan tashqari, darslikdan ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari, xususan, yong‘in xavfsizligini ta‘minlash tizimi, bojxona xizmati, huquqni muhofaza qiluvchi idoralarning navbatchilik xizmatlari faoliyatining samaradorligini oshirish, takomillashtirish, sohasida ilmiy izlanishlar olib borayotgan xodimlar ham foydalanishlari mumkin.

Darslik ikki bobdan iborat bo‘lib, uning birinchi bobi ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning ba’zi muhim tushunchalari va tasdiqlarini o‘z ichiga oladi. Darslikning ikkinchi bobi ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasining asosiy tushunchalari, natijalari hamda tadqiqot usullarini o‘rganishga bag‘ishlangan.

Darslikning birinchi bobi, uning ikkinchi (asosiy) bobni o‘zlashtirish uchun zarur bo‘lgan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika asoslariga oid ma’lumotlarini o‘z ichiga olgan. Bu bobni darslikka kiritishdan maqsad, o‘quvchiga ikkinchi bobni o‘rganishda qulaylik tug‘dirishdir. Bundan tashqari, birinchi bobdan 750000-“Favqulodda vaziyatlarda xavfsizlik” ta’lim sohasi, 5640100-“Xayotiy faoliyat xavfsizligi” ta’lim yo‘nalishi xamda 650 000 – “Harbiy ta’lim” ta’lim sohasining “Yong‘in xavfsizligi” va “Texnosfera xavfsizligi” mutaxassisliklari uchun mo‘ljallangan «Oliy matematika» fani dasturining «Ehtimollar nazariyasi» bo‘limini o‘rganishda ham foydalanish ko‘zda tutilgan.

Darslik mavzulari, imkon darajada, ularni amaliyotga tadbiqiga oid misollar bilan boyitilgan. Misollarning aksariyati yong‘in xavfsizligi xizmati, ayrimlari bojxona xizmati faoliyatini tahliliga bag‘ishlangan. Ular, bir tamondan mavzuni chuqurroq o‘zlashtirishga yordam berishi, ikkinchi tomondan amaliyotda uchraydigan shu kabi masalalarni yechishda yo‘llanma vazifasini o‘tashi nazarda tutilgan.

Darslik mavzularini belgilashda ikkita sondan iborat raqamlashdan foydalanilgan. Birinchi raqam mavzu tegishli bo'lgan bobni, ikkinchisi mavzuning shu bobdagi tartib raqamini anglatadi. Masalan, 1.5-§ raqamli paragraf – birinchi bobning beshinchi paragrafini bildiradi. Formulalar, chizmalar va misollarni belgilashda uchta sondan iborat raqamlashdan foydalanilgan. Birinchi raqam – ushbu formula (chizma, misol) tegishli bo'lgan bobni, ikkinchi raqam – bu bobdagi formula tegishli bo'lgan mavzuning tartib raqamini, uchinchi raqam esa formulaning ushbu paragrfdagi tartib raqamini bildiradi. Masalan, (2.7.3) raqamli formula ikkinchi bob, yettinchi paragrafning uchinchi formulasini anglatadi.

Ushbu darslikni tayyorlashda yong'in xavfsizligi sohasining yuqori malakali mutaxassisi general – mayor A.H.Qo'ldoshyev o'zining ko'plab qimmatli maslahatlari va tavsiyalarini berdi. Buning uchun unga chuqur minnatdorchilik bildiraman. Tajribali mutaxassislaridan polkovnik M.B.Musaxojiyev bilan bo'lgan muloqotlar, darslikdan o'rin olgan yong'in xavfsizligi xizmati faoliyati bilan bog'liq qator misollarni tuzishda katta yordam berdi. Unga ham o'z minnatdorchiligimni bildiraman.

Ushbu darslik kelajakda favqulodda vaziyatlarni oldini olish, ularni bartaraf etish, xususan, yong'in xavfsizligini ta'minlash tizimi faoliyatining samaradorligini oshirishda oz bo'lsada o'z hissasini qo'shadi degan umiddaman.

Muallif

I BOB

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKANING BA'ZI ASOSIY TUSHUNCHALARI

1.1 § Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Tayanch iboralar: *tajriba, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, tasodifiy hodisa, hodisalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, qarama – qarshi hodisalar, birgalikda bo'lmagan hodisalar, hodisalarning to'la guruhi.*

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri *hodisa* tushunchasidir. Bu tushuncha biror tajriba (sinov) o'tkazish bilan uzviy bog'liqdir. Tajribalar odatda, ikki turga ajratiladi. Bular sun'iy sinovlar ya'ni, inson tomonidan o'tkaziladigan tajribalar va tabiiy sinovlar ya'ni, tabiiy jarayonlarni kuzatishdan iboratdir. Sun'iy tajribalarga moddalarning yong'inga bardoshlilik darajasini aniqlash, qutqaruv arqonlarini yuk ko'tarish darajasini aniqlash, o'q otar quroldan nishonga qarata o'q otish, tomonlari raqamlangan kubni tashlash va h.k.lar misol bo'la oladi. Tabiiy tajribalar sifatida biror muddat (oy) mobaynida ro'y bergan yong'inlarni hisobga olish, sutka mobaynida havo haroratini (atmosfera bosimini) kuzatish, ishlab chiqarish maskanidagi texnogen xavflarni kuzatish va h.k.larni qarash mumkin. Bundan buyon, biz, tajriba(sinov)larning bu ikki turini farqlamagan holda bir so'z bilan *tajriba* deb ataymiz.

Tajribaning har qanday natijasi *hodisa* deb ataladi.

Hodisalar uchta guruhga ajratiladi:

a). ***Muqarrar hodisalar*** – tajriba natijasida albatta ro'y beradigan, ya'ni tajribadan avval ro'y berishini aniq aytish mumkin bo'lgan hodisalar. Ular odatda, orqali belgilanadi;

b). ***Mumkin bo'lmagan hodisalar*** – tajriba natijasida albatta ro'y bermaydigan, ya'ni tajribadan avval ro'y bermasligini aniq aytish mumkin bo'lgan hodisalar. Ular odatda, $\varnothing$ orqali belgilanadi;

d). ***Tasodifiy hodisalar*** – tajriba natijasida ro'y berishi yoki ro'y bermasligini tajribadan oldin aniq aytib bo'lmaydigan hodisalar. Ularni odatda, A, B, C,.. yoki X, Y, Z, ... orqali belgilanadi.

Ehtimollar nazariyasining asosiy o'rganish ob'yekti tasodifiy hodisalardir.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa *elementar hodisa* deyiladi.

A va B hodisalar yig'indisi deb, A va B hodisalarning kamida bittasi (ya'ni A, B yoki A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat hodisaga aytiladi va u $A+B$ yoki $A\cup B$ ko'rinishda belgilanadi.

A va B hodisalar ko'paytmasi deb, A va B hodisalar ikkalasi ham (ya'ni A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat hodisaga aytiladi va u $A\cdot B$ yoki $A\cap B$ ko'rinishda belgilanadi.

A hodisadan B hodisaning ayirmasi deb, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermasligidan iborat hodisaga aytiladi va u $A-B$ yoki $A\setminus\hat{A}$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi yoki A hodisa B hodisani ro'y berishiga qulaylik yaratadi deyiladi va $A\subseteq B$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $A\subseteq B$ va $B\subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar teng (teng kuchli) hodisalar deyiladi va $A=B$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $A+B=\Omega$ va $A\cdot B=\varnothing$ bo'lsa A va B hodisalar *qarama – qarshi hodisalar* deyiladi. A hodisaga qarama – qarshi hodisa $\overline{A}$ orqali belgilanadi. Ba'zida, $\overline{A}$ hodisani A uchun *teskari hodisa* deb ham ataladi.

Agar A va B hodisalar bir vaqtda ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisalar, ya'ni $A\cdot B=\varnothing$ bo'lsa, u holda A va B o'zaro *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi. Aks holda ular o'zaro *birgalikda bo'lgan hodisalar* deyiladi.

Agar $A_1, A_2,..., A_n$ tasodifiy hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro birgalikda bo'lmasa, ya'ni ixtiyoriy $1\le i, j\le n$ uchun $A_i\cdot A_j=\varnothing$ tenglik bajarilsa va $A_1+A_2+...+A_n=\Omega$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2,..., A_n$ hodisalar *to'la guruh* tashkil qiladi deyiladi.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

1. $A+B=B+A, \quad A\cdot B=B\cdot A$;
2. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
3. $(A+B)+C=A+(B+C), \quad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;
4. $A+A=A, \quad A\cdot A=A$;
5. $A+\Omega=\Omega, \quad A\cdot\Omega=A \quad A+\varnothing=A, \quad A\cdot\varnothing=\varnothing$;
6. $A+\overline{A}=\Omega, \quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$;
7. $\overline{\varnothing}=\Omega, \quad \overline{\Omega}=\varnothing, \quad \overline{\overline{A}}=A$,
8. $A-B=A\cdot\overline{B}$;
9. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ va $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ - De Morgan ikkilamchilik prinsipi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Tajriba nima?

2. Muqarrar, mumkin bo'lmagan, tasodifiy hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?

3. Hodisalar ustida amallarning ta'rifini keltiring.

4. Qanday hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil qiladi?

5. Hodisalar ustidagi amallar qanday xossalarga ega?

1.2 §. Hodisalar ehtimolining ta'riflari

Tayanch iboralar: *ehtimolning klassik va geometrik ta'riflari, hodisaning nisbiy chastotasi, statistik ta'rif.*

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisalarning ro'y berishi imkoniyatlarini miqdoriy baholash uchun hodisaning ehtimoli tushunchasi kiritiladi [1],[2],[8],[16]. Quyida ehtimolning klassik ta'rifi deb ataluvchi ta'rifni keltirishdan avval «teng imkoniyatli hodisalar» tushunchasiga to'xtalib o'tamiz. Ta'kidlash joizki, hodisalarning teng imkoniyatliligi tushunchasi boshlang'ich tushuncha bo'lib, unga formal tarzda ta'rif berilmaydi va uni odatda, misollar orqali tushuntiriladi[8]. Masalan, tajriba, tomonlari «1», «2», «3», «4», «5» va «6» bilan raqamlangan bir jinsli materialdan tayyorlangan simmetrik kubni tashlashdan iborat bo'lsa, unda $E_k= \{k$ raqamli tomon tushadi$\}$, $k = 1,2,...,6$ hodisalarni teng imkoniyatli deb qarash mumkin.

Hodisalarning teng imkoniyatliligi ularning hech biri ro'y berishda boshqalaridan biron bir obyektiv ustunlikka ega emasligini bildiradi.

Har qanday tasodifiy hodisa A ning ehtimolni $P(A)$ orqali belgilash qabul qilingan.

Ehtimolning klassik ta'rifi. Faraz qilaylik, tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni n ta, ya'ni cheklita bo'lsin. Ushbu tajribada taalluqli bo'lgan A tasodifiy hodisaning ehtimoli deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi (uni keltirib chiqaruvchi) barcha elementar hodisalar soni k ni tajribada ro'y berishi mumkin bo'lgan jami elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

Ya'ni,
$$P(A)=\frac{k}{n}$$

Yuqorida keltirilgan misolda $A = \{3$ dan kichik raqamli tomon tushadi$\}$ bo'lsa, bu hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar E_1 va E_2, ya'ni k=2.

Demak,
$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Eslatib o'tish joizki, tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni cheksizta bo'lganda yoki elementar hodisalar soni cheklita bo'lib, ularni teng imkoniyatli deb aytishga asos bo'lmasa ushbu ta'rifdan foydalanib bo'lmaydi.

Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni cheksizta bo'lgan ba'zi hollarda ehtimolning geometrik ta'rifi deb ataluvchi quyidagi ta'rifdan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, tekislikda (fazoda, to'g'ri chiziqda) biror Ω soha berilgan bo'lib, u biron D sohani o'z ichiga olsin. Tajriba Ω sohaga tavakkaliga X nuqtani tashlashdan iborat bo'lib, nuqtaning Ω sohaning har bir nuqtasiga tushishi teng imkoniyatli bo'lsin. Tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolini hisoblash masalasini qaraymiz. $A=\{X\in D\}-$ X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

Ehtimolning geometrik ta'rifi. $A=\{X\in D\}$ hodisaning ehtimoli deb, D soha yuzasi (hajmi, uzunligi)ni Ω soha yuzasi (hajmi, uzunligi)ga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{\Omega\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

Ehtimolning geometrik ta'rifida ham o'ziga xos kamchiliklar mavjud: har qanday hodisaning ehtimolini hisoblashni X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolini hisoblash masalasiga keltirib bo'lmaydi. Bundan tashqari, nuqtaning Ω sohaning har bir nuqtasiga tushishi teng imkoniyatli bo'lishini har doim ham aniqlab bo'lmaydi.

Amaliyotda, (xususan, yong'in xavfsizligini ta'minlash bilan bog'liq ba'zi masalalarni yechishda) tasodifiy hodisaning ehtimolini yuqorida keltirilgan ta'riflar yordamida hisoblashning imkoni bo'lmagan hollarning aksariyatida ehtimolning statistik ta'rifi deb ataluvchi ta'rifdan foydalaniladi.

Avvalo, o'zaro bog'liqsiz tajribalar tushunchasini kiritamiz. Agar ketma - ket tajribalar o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada ixtiyoriy hodisaning ro'y berish ehtimoli boshqa tajriba natijalariga bog'liq bo'lmasa, bunday tajribalar o'zaro bog'liqsiz tajribalar ketma – ketligi deyiladi.

Faraz qilaylik, A hodisa ma'lum bir tajribaga taaluqli bo'lib, bu tajribani bir xil (shartlar majmui bajarilganda) sharoitda yetarlicha katta sonda o'zaro bog'liqsiz holda takrorlash mumkin bo'lsin. O'tkazilgan n ta bog'liqsiz tajribalarda A hodisa n_A marta ro'y bergan bo'lsin. n_A son A hodisaning chastotasi, $W_n(A)=\frac{n_A}{n}$ nisbat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg'unlik xossasi deb ataluvchi xossa mavjud bo'lib, u tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastota biror songa yaqinlashib borishini anglatadi. Ushbu songa A hodisaning statistik ehtimoli deyiladi. Demak, ehtimolning statistik ta'rifini quyidagicha ifodalash mumkin:

Ehtimolning statistik ta'rifi. A hodisaning ehtimoli deb uning nisbiy chastotasi $W_n(A)=\frac{n_A}{n}$ ni n cheksizga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} W_n(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$$

Shunday qilib, yetarlicha katta n larda $P(A)\approx\frac{n_A}{n}$ munosabatdagi xatolik yetarli darajada kichik bo'ladi va A hodisaning ehtimoli sifatida yuqori darajada aniqlik bilan $\frac{n_A}{n}$ sonini qabul qilish mumkin.

Yuqorida keltirilgan statistik ta'rifning kamchilik tomoni shundan iboratki, amaliyotda ko'p hollarda tajribani yetarlicha katta sonda takrorlash imkoniyati bo'lmaydi. Masalan, tajriba o'tkazish juda katta xarajatlarga yoki salbiy oqibatlarga (ayrim qurollar sinovi) olib keladigan hollarda tajribani ko'p marotaba takrorlash maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda statistik ta'rifdan foydalanib bo'lmaydi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan hodisalar ehtimolining quyidagi xossalarini keltirib chiqarish mumkin:

1. Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga va muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng:

$$P(\varnothing)=0 \qquad P(\Omega)=1$$

2. Ixtiyoriy hodisaning ehtimoli uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$0 \le P(A) \le 1$$

3. Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $P(A) \le P(B)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Ehtimolning klassik ta'rifini keltiring.*
2. *Ehtimolning geometrik ta'rifini keltiring.*
3. *Ehtimolning statistik ta'rifini keltiring.*
4. *Ehtimolning keltirilgan ta'riflari qanday kamchiliklarga ega?*
5. *Hodisaning ehtimoli qanday xossalarga ega?*

1.3 §. Hodisalar yig'indisining ehtimoli haqidagi teoremalar

Ko'p hollarda hodisalarning o'zini emas, balki ular orasida amallar bajarish natijasida hosil bo'lgan hodisaning ehtimolini hisoblash zarurati yuzaga keladi. Bunday hollarda hodisalar orasida amallar natijasida hosil bo'lgan hodisaning ehtimolini hisoblash usullarini bilish muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

Quyida hodisalar yig'indisining ehtimolini hisoblashga oid teoremalarni keltiramiz.

1-Teorema. Agar A va B o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar, ya'ni $A \cdot B = \varnothing$ bo'lsa, u holda bu hodisalar yig'indisining ehtimoli ularning ehtimollari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \ .$$

Isbot: Teoremani hodisa ehtimolining klassik ta'rifi uchun isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, tajriba natijasidagi elementar hodisalar soni m bo'lib, ulardan k tasi A hodisani va l tasi B hodisani ro'y berishiga qulaylik tug'dirsin. U holda, A va B hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun, $k+l$ ta elementar hodisa $A+B$ hodisani ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Demak, klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A)=\frac{k}{m}, \quad P(B)=\frac{l}{m}, \quad P(A+B)=\frac{k+l}{m}$$

Bu yerdan, quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P(A+B)=\frac{k+l}{m}=\frac{k}{m}+\frac{l}{m}=P(A)+P(B)$$

Teorema isbot bo'ldi.

1-Natija. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ixtiyoriy ikkitasi o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar, ya'ni $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$ bo'lsa, u holda

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \qquad (1.3.1)$$

Bu natija teorema isbotida qo'lanilgan usul bilan oson isbotlanadi.

2-Natija. Har qanday A hodisa va uning qarama-qarshisi $\bar{A}$ uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

Haqiqatdan ham, bu formula quyidagi

$$P(\Omega)=P(\bar{A}+A)=P(\bar{A})+P(A)=1$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Endi umumiy hol uchun, ya'ni hodisalarning o'zaro birgalikda bo'lmasligi shartisiz, hodisalar yig'indisining ehtimoli haqidagi teoremani keltiramiz.

2-Teorema. Har qanday A_1 va A_2 (umumn olganda o'zaro birgalikda bo'lgan) tasodifiy hodisalar uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1.3.2)$$

Isbot. Tushunarliki, ixtiyoriy A va B tasodifiy hodisalar uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$A+B=\overline{A}B+A\overline{B}+AB$$

Ushbu tenglikda $\overline{A}B$, $A\overline{B}$ va AB hodisalar o'zaro birgalikda bo'lmaganligi uchun ushbuni hosil qilamiz:

$$P(A+B)=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB) \qquad (1.3.3)$$

Ikkinchi tomondan

$$P(A)=P(A\Omega)=P(A(B+\bar{B}))=P(AB)+P(A\bar{B})$$

$$P(B)=P(B\Omega)=P(B(A+\bar{A}))=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

Ushbu tengliklardan $P(A\bar{B})$ va $P(\bar{A}B)$ ehtimollarlarni topib, ularni (1.3.3) formulaga qo'ysak (1.3.2) tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimoli uchun qanday tenglik o'rinli?

2. Hodisa qarama - qarshisining ehtimoli uchun qanday munosabat o'rinli?

3. Ixtiyoriy hodisalar yig'indisining ehtimoli uchun qanday tenglik o'rinli?

1.4 §. Shartli ehtimol. Ba'zi asosiy formulalar

Tayanch iboralar: *shartli ehtimol, o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar.*

Ushbu paragrafda ehtimollar nazariyasining muhim tushunchalaridan sanalgan *shartli ehtimol* hamda *o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar* tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: Faraz qilaylik, A va B tasodifiy hodisalar bo'lib, $P(B) > 0$ bo'lsin. A hodisaning B hodisa ro'y bergandagi *shartli ehtimoli* deb A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimolini B hodisa ehtimoliga nisbatiga aytiladi va $P(A/B)$ orqali belgilanadi. Shunday qilib,

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.4.1}$$

Odatda, $P(A/B)$ ehtimolni qisqaroq qilib, "A ning B shart ostidagi ehtimoli" deb ham aytiladi.

Ta'kidlash joizki, hodisaning ehtimolini hisoblashga klassik ta'rifni qo'llash mumkin bo'lgan hollarda, (1.4.1) munosabatni teorema sifatida isbotlash mumkin. Buning uchun, A ning B shart ostida ehtimolini bevosita klassik ta'rif yordamida hisoblanadi [1].

Yuqorida keltirilgan (1.4.1) munosabatdan hodisalar ko'paytmasining ehtimoli uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \tag{1.4.2}$$

Ushbu formula yordamida o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif: Agar A hodisaning ehtimoli B hodisa ro'y bergan yoki ro'y bermaganligiga bog'liq bo'lmasa, ya'ni B hodisa ro'y berganligi sharti A hodisa ehtimolini o'zgartirmasa, ya'ni

$$P(A/B) = P(A) \tag{1.4.3}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu hodisalar *o'zaro bog'liq bo'lmagan* (yoki *o'zaro erkli*) hodisalar deyiladi.

Ushbu ta'rifda «o'zaro» so'zini ishlatishiga sabab, agar (1.4.3) o'rinli va $P(A)>0$ bo'lsa, u holda $P(B/A)=P(B)$ tenglik ham o'rinli bo'ladi. Ya'ni, A hodisa ro'y berganligi sharti B hodisa ehtimolini o'zgartirmaydi [8]. Haqiqatdan ham, (1.4.2) va (1.4.3) tengliklardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Shartli ehtimol ta'rifiga ko'ra

$$P(B/A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)$$

Ta'kidlash joizki, yuqorida keltirilgan hodisalarning o'zaro bog'liqsizligining ta'rifida «shart hodisa» ning ehtimoli musbat bo'lishi talab etilmoqda. Bu esa umumiylikdan chetlanishga olib keladi.

Umumiy holda, hodisalarning o'zaro bog'liqsizligining quyidagi ta'rifi qabul qilingan.

Ta'rif: Agar A va B tasodifiy hodisalar uchun

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.4.4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu hodisalar *o'zaro bog'liq bo'lmagan* (*erkli*) hodisalar deyiladi.

Shartli ehtimol tushunchasi yordamida yechish mumkin bo'lgan misol keltiramiz.

1.4.1-misol.

Faraz qilaylik, ma'lum hududdagi yong'inni bartaraf qilish uchun 1-yong'in xavfsizligi qismidan 5 ta va 2-yong'in xavfsizligi qismidan 3 ta yong'in o'chirish avtomobillari jalb qilingan bo'lsin (yong'in o'chirish uchun 2-chaqiriq e'lon qilingan). 1-qismga tegishli avtomobillarning 3 tasi A turdagi (ZIL-130 ATS-40 63A) va 2 tasi B turdagi (ZIL-130 ATS-40 63B) hamda 2-qismga tegishli avtomobillarning 2 tasi A turdagi va 1 tasi B turdagi avtomobillar bo‘lsin. Yong‘in o‘chirish jarayonida tasodifiy ravishda 1 ta avtomobil tanlab olinib, zarurat bo‘lmaganligi sababli, zahiraga o‘tkazildi. Tanlab olingan avtomobil 2-qismga tegishli ekanligi ma’lum bo‘lsa, uning A turdagi avtomobil bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$B=\{$Tanlab olingan avtomobil A turda$\}$;

$C=\{$Tanlab olingan avtomobil 2-qismga tegishli$\}$.

Misol shartiga ko‘ra $P(B/C)$ni topish talab qilinmoqda.

Hodisalar ko‘paytmasining ta’rifiga ko‘ra

BC = $\{$Tanlab olingan avtomobil 2-qismga tegishli va u A turda$\}$.

Ehtimolning klassik ta’rifiga muvofiq

$$P(BC)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \quad P(C)=\frac{3}{8}$$

(1.4.1) formuladan:

$$P(B/C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{1/4}{3/8}=\frac{2}{3}$$

Endi, shartli ehtimolni bevosita ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanib hisoblaymiz.

Ushbu tajribada, C hodisa ro‘y bergan deb faraz qilsak, jami elementar hodisalar (2-qismga tegishli avtomobillar) soni 3 ta bo‘ladi. Ulardan B hodisani ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradiganlari (A turdagi avtomobillar) soni 2 ta. Demak, ehtimolning klassik ta’rifiga ko‘ra

$$P(B/C)=\frac{2}{3}$$

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT
TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
398003
AXBOROT-RESURS MARKAZI

Misol yechildi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Shartli ehtimol nima?

2. Qanday hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar deb ataladi?

3. Ixtiyoriy ikkita hodisaning ko'paytmasi ehtimoli uchun qanday munosabat o'rinli?

4. O'zaro bog'liq bo'lmagan ikkita hodisaning ko'paytmasi ehtimoli uchun qanday munosabat o'rinli?

1.5 §. To'la ehtimol. Bayes formulasi

Faraz qilaylik, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalar (gipotezalar) to'la guruh tashkil qilsin ya'ni, ularning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro birgalikda emas, ixtiyoriy $1 \leq i, j \leq n$ uchun $H_i \cdot H_j = \varnothing$ va $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$ o'rinli bo'lsin.

Teorema. Agar $\forall i$ uchun $P(H_i) > 0$, $1 \leq i \leq n$, bo'lsa, har qanday A tasodifiy hodisa uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n) \tag{1.5.1}$$

Isbot. Tushunarliki, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalar to'la guruh tashkil qilishidan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

$\forall i, j$, $1 \leq i, j \leq n$ da $A \cdot H_i$ va $A \cdot H_j$ hodisalar o'zaro birgalikda emas. Demak, (1.3.1) formulaga muvofiq,

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) \tag{1.5.2}$$

(1.4.2) formuladan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i) \ , 1 \le i \le n.$$

Hosil bo‘lgan tengliklarni (1.5.2) munosabatga qo‘ysak (1.5.1) formula kelib chiqadi.

Teorema isbot bo‘ldi.

Yuqorida keltirilgan (1.5.1) munosabat *to‘la ehtimol formulasi* deb ataladi. Ushbu formuladan, biron A hodisaning bir nechta gipoteza (H_i)lar ostidagi ehtimollari hamda bu gipotezalarning ehtimollari ($P(H_i)$lar) ma’lum bo‘lganda foydalanish maqsadga muvofiq.

Endi, A hodisaning ro‘y berganligi ma’lum bo‘lsa, H_i gipotezalarning ehtimollari qanday o‘zgarishini aniqlash masalasini qaraymiz.

Avvalgi paragrafning (1.4.2) formulasiga muvofiq

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i)$$

Bu yerdan

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)} \qquad (1.5.3)$$

Ushbu tenglikdagi $P(A)$ o‘rniga uning (1.5.1) formuladagi ifodasini qo‘yib $\forall i$, $1 \le i \le n$, uchun quyidagini hosil qilamiz.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + \ldots + P(H_n)P(A / H_n)} \qquad (1.5.4)$$

Ushbu (1.5.4) munosabat ***Bayes formulasi*** deb ataladi.

Quyida to‘la ehtimol hamda Bayes formulalarini yong‘in xavfsizligi xizmati faoliyatiga oid masalani yechishga tadbiqi keltiriladi.

1.5.1-misol.

Yong'in xavfsizligi xizmati inspektori tomonidan muayyan maskannning yong'in xavfsizligi holatini tekshirish lozim bo'lsin. Maskan 2 ta hududdan iborat bo'lib, ularning birinchisida 6 ta bino mavjud va ulardan 2 tasida yong'in xavfsizligi qoidalariga amal qilinmagan hamda ikkinchi hududda 4 ta bino mavjud va ulardan 1 tasida yong'in xavfsizligi qoidalariga amal qilinmagan bo'lsin.

Quyidagi ehtimollarni topish talab qilinsin:

a) Inspektor tomonidan tasodifiy ravishda tanlab olingan binoning yong'in xavfsizligi qoidalari talablariga javob bermasligi ehtimolini;

b) Inspektor tomonidan bitta bino tekshirilib, uning yong'in xavfsizligi qoidalari talablariga javob bermaganligi ma'lum qilindi. Bu binoning birinchi hududiga tegishli bo'lishi ehtimolini.

Yechish.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

A = {Tanlab olingan bino xavfsizligi qoidalari talablariga javob bermaydi};

H_k = {Tanlab olingan bino k–hududga tegishli}. $k=1,2$.

Misol shartiga ko'ra $P(A)$ va $P(H_1/A)$ ehtimollarni topish talab qilinmoqda.

$P(A)$ ehtimolni topish uchun to'la ehtimol formulasidan foydalanamiz. Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(H_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\quad P(H_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\quad P(A/H_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad P(A/H_2)=\frac{1}{4}$$

(1.5.1) formulaga muvofiq

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{10}$$

Bu ifoda va (1.5.3) formuladan foydalanib, $P(H_1/A)$ ehtimolni topamiz:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{3/10}=\frac{2}{3}$$

Bu misolda, ko'rinib turibdiki, A hodisa ro'y berganligi sharti H_1 gipotezaning ehtimolini ortishiga olib keldi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *To'la ehtimol formulasini keltiring.*
2. *Bayes formulasini keltiring.*
3. *Mavzu formulalarini amaliyotga tadbiqiga oid misolning yechilishini tushuntirib bering.*

1.6 §.Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi uchun Bernulli formulasi

Tayanch iboralar: *bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi, Gauss funksiyasi, Laplas funksiyasi.*

Juda ko'p amaliy masalalarni hal qilishda, biron tajribani bir necha bor takrorlashga to'g'ri keladi. Natijada tajribalar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Agar ushbu ketma-ketlikdagi ixtiyoriy tajribaning natijasi (qanday hodisa ro'y berishi) boshqa tajribalar natijasiga bog'liq bo'lmasa, bunday tajaribalar ketma-ketligi *bog'liqsiz (o'zaro bog'liq bo'lmagan) tajribalar ketma-ketligi* deyiladi.

Amaliyotdagi ba'zi masalalarni yechishda, bog'liqsiz tajribalar ketma–ketligida (biron tajriba ketma-ket o'tkazilganda) muayyan bir tasodifiy hodisani aniq bir son, masalan m, marta ro'y berishi ehtimolini topish zarurati tug'iladi.

Faraz qilaylik, n ta bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi o'tkazilayotgan bo'lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A)=p$ bo'lsin. Uning ro'y bermasligi ehtimolini $P(\overline{A})=1-p=q$ orqali belgilaylik.

Bog'liqsiz tajribalar ketma-ket n marta o'tkazilganda A hodisa m marta ro'y berish ehtimolini $P_n(m)$ orqali belgilaylik. Ushbu ehtimolni hisoblash masalasini qaraymiz.

Tushunarliki:

$$P_n(m)=P(\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot ...\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta})+P(\overline{A}\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot ...\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta})+...+$$

$$P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot ...\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{mta}\cdot\overline{A})+P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot ...\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{mta}).$$

Ushbu tenglikda qo'shiluvchilar soni n ta elementdan m tadan kombinatsiyalar soni C_n^m ga teng.

Tajribalar ketma-ketligining bog'liqsiz ekanligidan, har bir qo'shiluvchi (1.4.4) formulaga muvofiq $p^m q^{n-m}$ ga teng. Demak,

$$P_n(m)=\underbrace{p^m q^{n-m}+p^m q^{n-m}+...+p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ ta qôshiluvchi}}=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=0,1,..n$$

Shunday qilib, quyidagi formulaga ega bo'ldik:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=0,1,...n. \tag{1.6.1}$$

Ushbu (1.6.1) formula *Bernulli formulasi* deb ataladi.

Ta'kidlash joizki, $P_n(m)$ ehtimollar uchun $\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bernulli formulasi ifodasidan ko'rinib turibdiki, agar n va m katta sonlar bo'lsa, (1.6.1) formuladan foydalanib, $P_n(m)$ ehtimolni hisoblash qiyinchilik tug'diradi. Shu sababli, $n\to\infty$ da $P_n(m)$ ni hisoblash uchun qulay bo'lgan asimptotik, ya'ni $n\to\infty$ da aniqlik darajasi ortib boradigan taqribiy formulani topish muhim ahamiyatga ega.

Quyida ushbu mazmundagi formulalarni isbotsiz keltiramiz.

Muavr–Laplasning lokal limit teoremasi. Agar n ta bog'liqsiz tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli $0 < p < 1$ bo'lib, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ son biron chekli oraliqda bo'lsa, u holda

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (1.6.2)$$

taqribiy formulada n ortishi bilan xatolik kamayib boradi.

Yuqoridagi (1.6.2) formulada ishtirok etayotgan $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya *Gauss funksiyasi* deyiladi. Ushbu funksiyaning x argumentiga mos qiymatlari jadvali 1–ilovada keltirilgan. Jadvaldan foydalanishda quyidagilarni e'tiborga olish kerak:

1) $\varphi(x)$–juft funksiya, ya'ni $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Demak, uning $[0,\infty)$ oraliqdagi qiymatlarini topish yetarli.

2) $\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari kichik son bo'lganligi uchun, juda ko'p masalalarni yechishda $x \geq 4$ bo'lganda $\varphi(x) = 0$ deb hisoblash mumkin.

Muavr–Laplasning integral limit teoremasi. Agar n yetarlicha katta va A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lsa, A hodisaning n ta tajribada kamida m_1 va ko'pi bilan m_2 marta ro'y berishi ehtimoli $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ uchun quyidagi

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \qquad (1.6.3)$$

taqribiy formulada n ortishi bilan xatolik kamayib boradi.

Bu yerda $\qquad x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad i = 1,2.$

(1.6.3) formuladan foydalanishda hisoblashlarni soddalashtirish uchun quyidagi maxsus funksiya kiritiladi:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du \tag{1.6.4}$$

Bu funksiya *Laplas funksiyasi* deyiladi. Uning x argumentiga mos qiymatlari jadvali 2–ilovada keltirilgan.

Muavr–Laplasning lokal teoremasining shartlaridan ko'rinib turibdiki, A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgaruvchi bo'lib, $n \to \infty$ da nol soniga yaqinlashib borsa, (1.6.2) formuladan foydalanib bo'lmaydi. Chunki $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ son m ning katta qiymatlarida biron chekli oraliqda bo'lmay qoladi va $\varphi(x)$ ning qiymati deyarli nolga teng bo'ladi. Natijada (1.6.2) taqribiy tenglikdagi xatolik yetarlicha kichik bo'lmaydi.

Bunday hollarda Puasson tomonidan isbotlangan quyidagi teoremada keltirilgan formuladan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Puasson teoremasi. Agar A hodisaning ro'y berishi ehtimoli p tajribadan tajribaga cheksiz kamayib borsa, yoki aniqroq $n \to \infty$ da $np \to \lambda > 0$ bo'lsa, u holda quyidagi munosabat o'rinli:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0,1,\dots,n \tag{1.6.5}$$

(1.6.5) formuladan quyidagi *Puasson formulasi* deb ataluvchi formula kelib chiqadi:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \quad a = np, \quad m = 0,1,\dots,n \tag{1.6.7}$$

Ushbu formuladan n yetarlicha katta va p yetarlicha kichik bo'lganda foydalanilganda katta aniqlikka erishiladi. Odatda, Puasson formulasidan $n \geq 50$, $np \leq 10$ bo'lgan hollarda foydalaniladi.

Quyida, Bernulli formulasining tadbiqiga oid misol ko'rib chiqamiz.

1.6.1-misol.

Tajriba–sutka mobaynidagi yong'inlarni xisobga olishdan iborat bo'lsin. Agar sutka mobaynida bitta yong'in ro'y berishi ehtimoli $p = 0{,}2$ bo'lsa, kuzatilgan 5 sutkaning 2 tasida bitta yong'in ro'y berishi ehtimolini toping.

Yechish.

Belgilash kiritamiz: A={sutka mobaynida bitta yong'in ro'y beradi}. Tushunarliki, $n = 5$, $m = 2$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$.

$P_5(2)$ ni topish talab qilinmoqda.

Yuqoridagi (1.6.1) formulaga muvofiq

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048 \approx 0{,}2$$

Demak, topish talab qilinayotgan ehtimol taqriban 0,2 ga teng.

Endi, Bernulli va Bayes formulalarini yong'inlar kelib chiqishi sabablarini aniqlash uchun qo'llashga oid misol ko'rib chiqamiz.

1.6.2-misol.

Yong'in xavfsizligi xizmati xodimlari tomonidan ma'lum bir hududda ro'y bergan yong'in joyini ko'zdan kechirilganda, yong'inning A, B, S sabablardan biri oqibatida yuz berganligi aniqlangan.

Hududda ro'y bergan yong'inlar soni to'g'risidagi statistik ma'lumotlar tahlil qilinganda, yong'inlarning yarmi A sababga ko'ra, $1/6$ qismi B sababga ko'ra va $1/3$ qismi C sababga ko'ra yuz berganligi va A sababdan kelib chiqqan yong'inlarning 10% da, B sababdan 20% da va C sababdan 90% da yong'in keltirgan moddiy zarar, N so'mdan ortiq bo'lmaganligi ma'lum.

Hududda yuz bergan yong'inlarning so'ngi beshtasi tahlil qilinganda, ulardan to'rttasida ko'rilgan moddiy zarar *N* so'mdan ortiq bo'lmaganligi ma'lum bo'ldi.

Ushbu ma'lumotlar asosida *A, B, C* sabablarning qaysi biri natijasida yong'in yuz berganligi haqida xulosa qilish (to'g'ri-rog'i baholash) talab qilinsin.

Yechish.

Demak, ro'y bergan yong'inga *A, B, C* lar sabab bo'lishi ehtimollari mos ravishda $P(A)=1/2$, $P(B)=1/6$, $P(C)=1/3$ deb olish mumkin. (Agar boshqa qo'shimcha ma'lumot bo'lmasa, ro'y bergan yong'inning sababini katta ehtimol bilan *A* deb qabul qilish mumkin edi.) Masala shartiga muvofiq, *A* sababdan kelib chiqqan yong'indan ko'rilgan moddiy zarar *N* so'mdan ortiq bo'lmasligi ehtimoli 0,1 ga, *B* sababdan 0,2 ga va *C* sababdan 0,9 ga teng deb hisoblash mumkin.

D orqali so'ngi beshta yong'indan to'rttasida ko'rilgan moddiy zarar *N* so'mdan ortiq bo'lmasligidan iborat hodisani belgilaymiz.

Mavjud ma'lumotlar asosida Bernulli va Bayes formulalari uchun zarur bo'lgan ehtimollarni hisoblab topamiz. Yong'in *A* sabab bilan kelib chiqqan holda (ya'ni *A*, gipotezasi bajarilsa) *D* hodisaning ro'y berish ehtimoli (1.6.1) Bernulli formulasiga ko'ra

$$P(D/A) = C_5^4(0,1)^4 \cdot 0,9 = 5 \cdot 0,00009 = 0,00045.$$

Xuddi shu kabi *B* va *C* gipotezalar uchun bu ehtimolliklar mos ravishda

$$P(D/B) = C_5^4(0,2)^4 \cdot 0,8 = 5 \cdot 0,00128 = 0,0064$$
$$P(D/C) = C_5^4(0,9)^4 \cdot 0,1 = 5 \cdot 0,06561 = 0,32805.$$

bo'ladi.

Shunday qilib, Bayes formulasiga muvofiq, *D* hodisa ro'y berganligi to'g'risidagi qo'shimcha ma'lumot inobatga olingandagi yuz bergan yong'inning A sababdan kelib chiqqan bo'lishi ehtimoli

$$P(A/D)=\frac{1/2\cdot 0{,}00009}{1/2\cdot 0{,}00009+1/6\cdot 0{,}00128+1/3\cdot 0{,}06561}\approx 0{,}002$$

B sababdan kelib chiqqan bo'lishi ehtimoli

$$P(B/D)=\frac{1/6\cdot 0{,}00128}{1/2\cdot 0{,}00009+1/6\cdot 0{,}00128+1/3\cdot 0{,}06561}\approx 0{,}001$$

va C sababdan kelib chiqqan bo'lishi ehtimoli

$$P(C/D)=\frac{1/3\cdot 0{,}06561}{1/2\cdot 0{,}00009+1/6\cdot 0{,}00128+1/3\cdot 0{,}06561}\approx 0{,}988.$$

ekanligini topamiz.

Bu hisoblash natijalaridan kelib chiqadiki, yuqorida keltirilgan vaziyatlarning o'rtacha 98,8% da yong'in C sababdan kelib chiqar ekan. Demak, qaralayotgan hududda yong'in C sababdan kelib chiqqan deb baholasak aksariyat (o'rtacha 98,8%) hollarda to'g'ri qaror qabul qilgan bo'lamiz.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi ta'rifini keltiring.*
2. *Bernulli formulasini keltiring.*
3. *Muavr–Laplasning lokal teoremasini ayting.*
4. *Muavr–Laplasning integral teoremasini ayting.*
5. *Puasson teoremasini ayting.*

1.7 §. Tasodifiy miqdor. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

Tayanch iboralar: *diskret tasodifiy miqdor, tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar*

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir. Amaliyotning aksariyat masalalari ushbu tushuncha yordamida matematik modellashtiriladi.

Ta'rif: Tajriba natijasida, avvaldan ma'lum bo'lgan qiymatlardan birini qabul qiladigan, lekin tajribadan avval qaysi bir qiymatni qabul qilishi noma'lum bo'lgan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Masalan, tajriba biron quroldan nishonga qarata 10 marotaba ketma-ket o'q uzishdan iborat bo'lsa, nishonga tekkan o'qlar soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Chunki, u 0,1,2,...,10 qiymatlardan birini qabul qilishi tayin, avvaldan ma'lum. Lekin, tajribadan avval uning qaysi bir qiymatni qabul qilishini aniqlab bo'lmaydi.

Odatda, tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining bosh harflari $X,Y,Z,$.yoki grek alifbosining kichik harflari ξ *(ksi)*, η *(eta)*, ...bilan, uning qabul qiladigan qiymatlari esa lotin alifbosining kichik harflari $x_1,x_2,\dots,y_1,y_2,\dots,z_1,z_2,\dots$ bilan belgilanadi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheklita yoki sanoqlita bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor *diskret* tasodifiy miqdor deyiladi.

Amaliyotda, diskret bo'lmagan, ya'ni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari haqiqiy sonlar o'qidagi biror (chekli yoki cheksiz) oraliqdagi *barcha* sonlardan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorlar ko'p uchraydi. Ularni keyingi paragraflarda ko'rib chiqamiz. Ushbu paragrafda faqat diskret tasodifiy miqdorlarni qaraymiz.

Faraz qilaylik, X–diskret tasodifiy miqdor $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n,\dots$ ehtimollar bilan qabul qilsin.

Ushbu jadval

X	x_1	x_2	...	x_n	
P	p_1	p_2	...	p_n	

diskret tasodifiy miqdorning *taqsimot qonuni* (jadvali) deyiladi.

Bundan keyingi matnlarda qulaylik uchun, tasodifiy hodisalarni imkon darajada, faqat matematik simvollar orqali ifodalaymiz. Masalan $A=\{X$ *tasodifiy miqdor* x_i *qiymatni qabul qiladi*$\}$ *hodisani* $\{X=x_i\}$ *orqali ifodalaymiz.*

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini

$$p_i=P\{X=x_i\},\ i=1,2,\dots,n,\dots$$

ko'rinishda yozish ham mumkin.

Ushbu $\{X=x_i\}$, $\{X=x_i\}$,... hodisalar birgalikda emas va ularning yig'indisi muqarrar hodisa bo'lganligi uchun ular to'la guruh tashkil etadi. Demak

$$\sum_i p_i=\sum_i P\{X=x_i\}=1$$

Endi, yana bir muhim tushunchalardan biri *bog'liq bo'lmagan (bog'liqsiz) tasodifiy miqdorlar* tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: X va Y diskret tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagan (bog'liqsiz) tasodifiy miqdorlar deyiladi, agar $A=\{X=x_i\}$ va $B=\{Y=y_i\}$ hodisalari ixtiyoriy $i=1,2,\dots,$ va $j=1,2,\dots$ larda bog'liqsiz bo'lsa, ya'ni

$$P\{(X=X_i)\cdot(Y=y_j)\}=P\{X=X_i\}\cdot P\ \{Y=y_i\}.$$

Umumiy holda tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi tushunchasini quyidagicha kiritish mumkin:

Ta'rif: Ihtiyoriy X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagan (bog'liqsiz)

tasodifiy miqdorlar deyiladi, agar har qanday $A\subset R$ va $B\subset R$ uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa

$$P\{(X\in A)\cdot(Y\in B)\}=P\{\ X\in A\}\cdot P\{Y\in B\}.$$

Keyingi paragraflarda ko'rish mumkinki, tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi xossasi ular bilan bog'liq hisoblashni ancha osonlashtiradi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Diskret tasodifiy miqdor nima?

2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni nima?

3. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar deb qanday tasodifiy miqdorlarga aytiladi?

1.8 §. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Taqsimot zichligi va uning xossalari

***Tayanch iboralar:** uzluksiz tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi, zichlik funksiyasi*

Diskret bo'lmagan tasodifiy miqdorning taqsimoti haqida so'z yuritishdan avval barcha tasodifiy miqdorlar uchun mazmunga ega bo'lgan *taqsimot funksiya* tushunchasiga ta'rif beramiz.

Ta'rif: Ixtiyoriy X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb $\forall x \in R$ son uchun quyidagicha aniqlangan $F(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F(x)=P\{X<x\}.$$

Taqsimot funksiyaning quyidagi xossalarini isbotsiz keltiramiz:

1. $F(x)$ funksiya chegaralangan, aniqrog'i u faqat $[0,1]$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya: agar $x_1<x_2$ bo'lsa, u holda

$$F(x_1) \leq F(x_2) \text{ bo‘ladi.}$$

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4. $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

5. Har qanday haqiqiy sonlar a va b uchun $(a < b)$

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$$

munosabat o‘rinli.

Endi ehtimollar nazariyasining yana bir muhim tushunchalaridan biri bo‘lgan taqsimot zichligi yoki zichlik funksiyasi tushunchasiga to‘xtalamiz.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy x uchun manfiy bo‘lmagan $f(x)$ funksiya mavjud bo‘lib, tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda bunday tasodifiy miqdor ***uzluksiz tasodifiy miqdor*** deyiladi.

Ushbu ifodadagi $f(x)$ funksiya esa tasodifiy miqdorning *zichlik funksiyasi* yoki *taqsimot zichligi* deb ataladi.

Taqsimot zichligining quyidagi xossalarini qiyinchiliksiz isbotlash mumkin:

1. Agar taqsimot zichligi $f(x)$ biron x nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$f(x) = F'(x)$$

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning har qanday haqiqiy son x ni qabul qilish ehtimoli nolga teng:

$$P\{X=x\}=0.$$

3. Ixtiyoriy haqiqiy sonlar a va b uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$$

4. Taqsimot zichligi uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Izoh. Uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar o'qidagi biror chekli yoki cheksiz oraliqdagi *barcha* sonlardan iborat bo'ladi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Uzluksiz tasodifiy miqdor nima?

2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi nima va u qanday xossalarga ega?

3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi nima va u qanday xossalarga ega?

1.9 §. Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

Tayanch iboralar: *Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi, o'rtacha kvadratik chetlanishi.*

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristikalaridan biri uning *matematik kutilmasi* tushunchasidir.

Faraz qilaylik, X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$p_i = P\{X = x_i\}\; i = 1,2,\ldots,n,\ldots \qquad (1.9.1)$$

Ta'rif. Taqsimot qonuni (1.9.1) ko'rinishda bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi MX orqali belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Yuqoridagi qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, matematik kutilma mavjud, aks holda matematik kutilma mavjud emas deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdor matematik kutilmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Ushbu xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < \infty$ bo'lsa, matematik kutilma mavjud, aks holda matematik kutilma mavjud emas deyiladi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning o'rta qiymatini ifodalaydi. Bu tasdiqni masalan, diskret tasodifiy miqdorlar uchun quyidagi tengliklardan keltirib chiqarish mumkin: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ ekanligidan

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = x_{o'rtacha}$$

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (agar mavjud bo'lsa) quyidagi xossalarga ega.

1. Har qanday C o'zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o'ziga teng:

$$MC=C$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$M(CX)=CMX$$

3. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X+Y)=MX+MY$$

4. Bog'liq bo'lmagan X va Y tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari ko'paytmasiga teng:

$$M(X \cdot Y)=MX \cdot MY$$

Tasodifiy miqdorning yana bir muhim sonli xarakteristikalaridan biri uning *dispersiyasi* hisoblanadi.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, $(X-MX)^2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi va DX orqali belgilanadi. Demak,

$$DX=M(X-MX)^2$$

Matematik kutilma ta'rifidan dispersiya uchun quyidagi formulalarni keltirib chiqarish mumkin:

1) agar X diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i;$$

2) agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimot zichligi $f(x)$ funksiya bo'lsa u holda

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx$$

Ba'zi hollarda quyidagi formula dispersiyani hisoblash uchun qulay bo'ladi:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \tag{1.9.2}$$

Bu formulani matematik kutilmaning xossalaridan keltirib chiqarish mumkin. Haqiqatdan ham:

$$DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X\,MX + (MX)^2) =$$
$$MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2) = MX^2 - (MX)^2$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning qiymatlarini matematik kutilmasi atrofida tarqoqligi darajasini ko'rsatadi. U quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$DC = 0$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini dispersiya belgisidan tashqariga kvadratga oshirilgan holda chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 DX$$

3. Bog'liq bo'lmagan X va Y tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ularning dispersiyalari yig'indisiga teng:

$$D(X+Y)=DX+DY$$

Amaliyotda ko'p masalalar tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblash orqali hal qilinadi. Oldindan aytish mumkinki, mazkur darslikning ikkinchi bobida o'rganiladigan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarining ko'p xarakteristikalari tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi orqali ifodalanadi. Ularni hisoblash (baholash) matematik kutilmani hisoblash masalasiga keltiriladi.

Shu bilan birgalikda, ba'zi masalalarni yechishda matematik kutilmani topish orqali ko'zlangan maqsadga erishib bo'lmaydi. Bunday hollarining ayrimlarida tasodifiy miqdorning dispersiyasi zarur natijaga erishish imkonini beradi [12]. Buning tasdiqi sifatida quyidagi misolni keltiramiz.

1.9.1-misol.

Ikkita yong'in xavfsizligi qismi (YoXQ)da uchtadan jangovor bo'linma mavjud bo'lib, ma'lum bir muddat (masalan bir oy, bir chorak) mobaynida, 1–YoXQning birinchi jangovor bo'linmasi 6 marta, ikkinchi jangovor bo'linmasi 7 marta, uchinchi jangovor bo'linmasi 8 marta va 2–YoXQning birinchi va ikkinchi jangovor bo'linmalari 1 martadan, uchinchi jangovor bo'linmasi esa 19 marta yong'in o'chirishga jalb qilingan bo'lsin.

Bu YoXQlarni ulardagi jangovor bo'linmalarning «yong'in o'chirishdagi ishtiroki darajasi» ko'rsatkichi bo'yicha taqqoslash talab qilinsin.

Yechish.

Quyidagicha belgilash kiritamiz: X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda 1–YoXQ va 2–YoXQlarning jangovor bo'linmalarini yong'in o'chirishga ishtiroki soni bo'lsin. U holda masala shartiga muvofiq X va Y tasodifiy miqdorlarning mos ravishda quyidagi taqsimot qonunlari jadvallarini hosil qilamiz:

X	6	7	8
P	1/3	1/3	1/3

Y	1	19
P	2/3	1/3

Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalarini hisoblaymiz:

$$MX = \frac{1}{3}\cdot(6+7+8) = 7, \qquad MY = \frac{2}{3} + \frac{19}{3} = 7$$

Demak, ikkala YoXQ da ham jangovar bo'linmalar *o'rtacha* 7 martadan yong'inlar o'chirishga jalb qilingan. Bu ko'rsatkich bo'yicha taqqoslanganda YoXQlarning jangovor bo'linmalari yong'in o'chirishga bir xil darajada ishtirok etgan deyish mumkin.

Endi, har bir YoXQdagi ichki vaziyatni, ya'ni ularning jangovor bo'linmalarini yong'in o'chirishdagi ishtiroki ko'rsatkichini o'rta qiymatdan chetlanish darajasi orqali taqqoslaylik. Buning uchun, (1.9.2) formuladan foydalanib, X va Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyalarini hisoblaymiz:

$$DX = \frac{1}{3}\cdot(36+49+64) - 7^2 \approx 49{,}7 - 49 = 0{,}7$$

$$DY = \frac{2}{3} + \frac{361}{3} - 7^2 = 121 - 49 = 72$$

Yuqorida hisoblab topilgan sonlardan X va Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari orasida katta farq mavjudligi ko'rinib turibdi. Bu esa qismlarda vaziyat bir xil emasligini, ya'ni ularning jangovar bo'linmalari yong'in o'chirishga bir xil darajada ishtirok etmaganligini bildiradi: 1–YoXQda o'rta qiymat atrofidagi tarqoqlik juda kichik–0,7 teng. Bu ko'rsatkich, qismdagi jangovor bo'linmalar yong'inlar o'chirishga deyarli bir xil darajada ishtirok etganlini bildiradi. 2–YoXQda esa o'rta qiymat atrofidagi tarqoqlik juda katta–72 teng. Bu ko'rsatkich esa, ushbu qismning ayrim jangovor bo'linmalari yong'inlar o'chirishga juda kam, ayrimlari esa juda ko'p jalb qilinganlini bildiradi.

Bu kabi natijalardan YoXQlar faoliyatini takomillashtirish bo'yicha tegishli xulosalar chiqarishda foydalanish mumkin.

Dispersiya ta'rifidan ko'rinib turibdiki, dispersiyaning o'lchov birligi X tasodifiy miqdor o'lchov birligining kvadratiga teng. Masalan, X sm miqdor uchun DX sm^2 bo'ladi. Shuning uchun, ko'pincha X tasodifiy miqdor bilan bir xil o'lchov birligiga ega bo'lgan *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb ataluvchi quyidagi xarakteristikadan foydalaniladi.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* (tarqoqligi) deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}$$

Ko'rinib turibdiki, o'rtacha kvadratik chetlanishning o'lchov birligi X tasodifiy miqdor o'lchov birligi bilan bir xil bo'ladi.

Dispersiyaning xossalaridan o'rtacha kvadratik chetlanishning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$\sigma_C = 0, \ \sigma_{CX} = |C|\sigma_X$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi qanday aniqlanadi?

2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi qanday aniqlanadi?

3. Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi qanday xossalarga ega?

4. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi qanday aniqlanadi?

5. Dispersiya qanday xossalarga ega?

6. Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi qanday xossalarga ega?

1.10 §. Ehtimollar nazariyasidagi ba'zi muhim taqsimotlari

Tayanch iboralar: *binomial, Puasson, geometrik, tekis, ko'rsatkichli va normal taqsimotlar.*

Ushbu paragrafda amaliyot uchun muhim bo'lgan va darslikning keyingi bobida foydalaniladigan ba'zi taqsimot (taqsimot qonun, taqsimot funksiya)larini keltiramiz.

I. Binomial taqsimot

Diskret tasodifiy miqdor X binomial qonun bo'yicha taqsimlangan yoki binomial taqsimotga ega deyiladi, agar u $m=0, 1, 2, \ldots, n$ qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

ehtimol bilan qabul qilsa.
Bu yerda

$$0 < p < 1,\ \ q = 1 - p,\ \ m = 0,1,\ldots,n$$

Binomial taqsimotga ega bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni gadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$X=m$	0	1	2		m		n
$p_m = P\{X=m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		p^n

Nyuton binomi formulasiga asosan

$$\sum_{m=1}^{n} p_m = \sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

Binomial taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi esa quyidagicha bo'ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \, agar \; x \le 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}, \, agar \; 0 < x \le n \\ 1, \, agar \; n < x. \end{cases}$$

Endi bu tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX=\sum_{m=1}^{n} m \cdot P\{X=m\} = \sum_{m=1}^{n} m \cdot C_n^m p^m q^{n-m} = np\sum_{m=1}^{n} m \cdot C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m} =$$

$$= np(p+q)^n = 1$$

$$DX=\sum_{m=0}^{n} m^2 P\{X=m\}-(np)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - (np)^2 =$$

{ $m^2 = m(m-1)+m$ almashtirish bajaramiz}

$$n(n-1)p^2\sum_{m=2}^{n} C_{n-2}^{m-2} p^{m-2} q^{n-m} + np\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m} - (np)^2 =$$

$$n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq$$

Demak, $MX = np$, $\quad DX = npq$

II. Puasson taqsimoti

Agar X tasodifiy miqdor $m = 0,1,2,\dots,n,\dots$ qiymatlarni

$$p_m = P\{X=m\} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, u Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan yoki λ parametrli Puasson taqsimotga ega tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda $\lambda > 0$ taqsimot parametri deyiladi.

Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni gadvali quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$X=m$	0	1	2	...	m	...
$p_m = P\{X=m\}$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}\cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}\cdot e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$	...

e^x funksiyani Teylor qatoriga yoyilmasiga asosan,

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x \le 0\ bo'lsa, \\ \sum\limits_{0\le m<x}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, & agar\ x > 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$DX = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty} m^2\cdot\frac{\lambda^m}{m!} - \lambda^2 = \lambda\sum_{m=0}^{\infty}(m-1+1)\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= \lambda\cdot\left[\lambda\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-2}\cdot e^{-\lambda}}{(m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}\cdot e^{-\lambda}}{(m-1)!}\right] - \lambda^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$$

Demak, $MX = \lambda$, $\quad DX = \lambda$.

III. Geometrik taqsimot

Agar X tasodifiy miqdor $m = 1,2,\ldots,n,\ldots$ qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1}p$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, u geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan yoki geometrik taqsimotga ega tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda $p = 1 - q \in (0,1)$. Bunday tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar\ \ x \le 1\ bo'lsa, \\ \sum\limits_{1 \le m < x} q^{m-1}p, & agar\ \ x > 1\ bo'lsa. \end{cases}$$

Ushbu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p = p\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$

$$= p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} p - \frac{1}{p^2} =$$

$$= pq\sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)q^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p - \frac{1}{p^2} =$$

$$= pq\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right)'' + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'' + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Demak, $MX = \dfrac{1}{p}$, $\quad DX = \dfrac{q}{p^2}$.

IV. Tekis taqsimot

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ agar } x\in[a,b],\\ 0, \text{ agar } x\notin[a,b]\end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan yoki tekis taqsimotga ega tasodifiy miqdor deyiladi.

Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz. Agar $a\le x\le b$ bo'lsa,

$$F(x)=\int_a^x\frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^x=\frac{x-a}{b-a},$$

agar $x<a$ bo'lsa, $F(x)=0$ va $x>b$ bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^b\frac{dt}{b-a}+\int_b^x 0dt=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^b=1$$ bo'ladi.

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<a \text{ bo'lsa},\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{agar } a\le x\le b \text{ bo'lsa,}\\ 1, & \text{agar } b<x \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$ bo'ladi.

MX va DX larni hisoblaymiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{a}x\cdot 0dx+\int_a^b\frac{x}{b-a}dx+\int_b^{+\infty}x\cdot 0dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},$$

$$DX=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\bigg|_a^b=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Demak,

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

bo'ladi.

V. Ko'rsatkichli taqsimot

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, agar & x < 0 bo'lsa, \\ \mu e^{-\mu x}, agar & x \geq 0 bo'lsa. \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan yoki μ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda μ biror musbat son.

μ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \ x < 0 \ bo'lsa, \\ 1 - e^{-\mu x}, & agar \ x \geq 0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(-\int_0^b x d e^{-\lambda x} \right) =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-x \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x} dx \right) = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (MX)^2 = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= [\text{bo'laklab integrallash formulasini ikki marta qo'llaymiz}] =$$

$$=\lambda\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\right)\Bigg|_0^b\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Demak, $MX=\frac{1}{\lambda}$, $DX=\frac{1}{\lambda^2}$ bo'ladi.

VI. Normal taqsimot

Normal taqsimot muhimligi jihati bilan ehtimollar nazariyasida o'ziga xos o'rin tutadi. U amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigan taqsimotlardan biri hisoblanadi.

Uzluksiz tasodifiy miqdor X uning zichlik funksiyasi quyidagicha ko'rinishga ega bo'lsa, u normal qonun bo'yicha taqsimlangan yoki normal taqsimotga ega deyiladi:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},x\in R$$

Bu yerdagi a va $\sigma>0$ normal taqsimot parametrlari deyiladi. Adabiyotlarda ko'pincha bunday taqsimot (a,σ) parametrli normal taqsimot deb ataladi.

Normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar normal taqsimot parametrlari $a=0$ va $\sigma=1$ bo'lsa, u *standart normal taqsimot* deyiladi. Demak, standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Taqsimot funksiyasi esa

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Normal taqsimotga ega tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi quyidagilarga teng bo'ladi:

$$MX=a, \qquad DX=\sigma^2$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Qanday taqsimotlar Binomial va Puasson taqsimotlar deyiladi?
2. Geometrik va tekis taqsimot deb qanday taqsimotlarga aytiladi?
3. Qanday taqsimotlar ko'rsatkichli va normal taqsimotlar deyiladi?.

1.11 §. Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari

Tayanch iboralar: *Chebishyev tengsizligi, ehtimol bo'yicha* va *bir ehtimol bo'yicha yaqinlashish, katta sonlar va kuchaytirilgan katta sonlar qonunlari, markaziy limit teorema.*

Ehtimollar nazariyasining limit teoremalarini shartli ravishda ikki guruhga bo'lish mumkin. Birinchi guruh teoremalar katta sonlar qonunlari (KSQ) deb nomlanadi. Ular o'rtacha qiymatning turg'unligini ifodalaydi: yetarlicha katta sondagi tajribalarda tasodifiy miqdorlarning o'rtacha qiymati tasodifiyligini yo'qotadi. Ikkinchi guruh teoremalar markaziy limit teoremalar (MLT) deb nomlanadi va ular yetarlicha katta sondagi tajribalarda tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti normal taqsimotga intilishi shartini ifodalaydi.

KSQ ni keltirishdan avval yordamchi tengsizliklarni keltiramiz.

1-Teorema (Chebishyev). Agar X tasodifiy miqdor DX dispersiyaga ega bo'lsa, u holda $\forall\varepsilon > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Bu ifoda *Chebishev tengsizligi* deyiladi.

Chebishyev tengsizligini quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

2-Teorema (Markov). Manfiy bo'lmagan, matematik kutilmasi MX chekli bo'lgan X tasodifiy miqdor uchun $\forall\varepsilon > 0$ da

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu munosabat *Markov tengsizligi* deyiladi.

Endi, ehtimollar nazariyasining ba'zi limit teoremalarini keltiramiz.

I. Katta sonlar va kuchaytirilgan katta sonlar qonunlari

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi yaqinlashishining bir necha xil turlari mavjud. Quyida ularidan ikkitasining ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif. Agar $X_1, X_2, ... X_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma–ketligi uchun shunday o'zgarmas A soni mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - A| < \varepsilon\} = 1$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $X_1, X_2, ... X_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi A soniga ***ehtimol bo'yicha*** yaqinlashadi deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar ketma - ketligini A soniga ehtimol bo'yicha yaqinlashishi $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} A$ ko'rinishida belgilanadi.

Ta'rif. Agar $X_1, X_2, ... X_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday o'zgarmas A soni mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_{k\ge n} |X_k - A| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $X_1, X_2, ... X_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi A soniga ***bir ehtimol bo'yicha*** yaqinlashadi deyiladi.

Bir ehtimol bo'yicha yaqinlashishni $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{b.1.}{\longrightarrow}} A$ ko'rinishida belgilaymiz.

Tasodifiy miqdorlar ketma - ketligining biror songa bir ehtimol bo'yicha yaqinlashishidan bu ketma - ketlikning shu songa ehtimol bo'yicha ham yaqinlashishi kelib chiqadi. Ushbu tasdiq quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi: $\forall\varepsilon > 0$ va barcha $n \ge 1$ larda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\left\{\sup_{k\ge n} |X_k - A| < \varepsilon\right\} \subset \{|X_n - A| < \varepsilon\}$$

Bu munosabatdan

$$P\left\{\sup_{k\geq n}|X_k-A|<\varepsilon\right\}\leq P\{|X_n-A|<\varepsilon\}\leq 1$$

tengsizlik kelib chiqadi. Tengsizlikning ikki tomonida $n\to\infty$ da limitga o'tib zarur natijaga ega bo'lamiz.

Izoh: Keltirilgan tasdiqning teskarisi har doim ham o'rinli emas. Ya'ni, tasodifiy miqdorlar ketma - ketligining ehtimol bo'yicha yaqinlashishdan ularning bir ehtimol bo'yicha yaqinlashishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Ushbu kiritilgan yaqinlashish turlaridan foydalanib katta sonlar hamda kuchaytirilgan katta sonlar qonunlari ta'riflarini keltiramiz.

Ta'rif. Agar $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi uchun shunday $A_n > 0$ va $B_n \geq 0$, $n\geq 1$ sonlar ketma - ketligi mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon>0$ son uchun

$$\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-B_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}0 \qquad (1.11.1)$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi *katta sonlar qonuniga bo'ysunadi* deyiladi.

Ta'rif. Agar $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $A_n > 0$ va $B_n \geq 0$, $n\geq 1$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon>0$ son uchun

$$\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-B_n\xrightarrow[n\to\infty]{P.1}0 \qquad (1.11.2)$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, \ldots X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi *kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo'ysunadi* deyiladi.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladigan bir necha teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema [13]. Agar $A_n > 0$, $n \geq 1$ monoton o‘suvchi sonlar ketma - ketligi bo‘lib, $n \to \infty$ da $A_n \to \infty$ bo‘lsa va $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{DX_k}{A_{ê}^2} < \infty \qquad (1.11.3)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda

$$\frac{1}{\mathbf{A_n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k) \xrightarrow[n \to \infty]{P.1} 0$$

bo‘ladi, ya’ni $X_1, X_2, \dots X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi.

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $C > 0$ va $0 \leq \delta < 1$ o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lib, $DX_n \leq Cn^{\delta}$, $n \geq 1$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni

$$\frac{1}{\mathbf{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k) \xrightarrow[n \to \infty]{P.1} 0$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Ushbu natijaning isboti tasodifiy miqdorlar dispersiyalariga qo‘yilgan shartlarda $\grave{A}_n = n$, $n \geq 1$ uchun (1.11.3) shartning bajarilishidan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{DX_k}{\mathbf{\kappa}^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C\kappa^{\delta}}{\mathbf{\kappa}^2} = C \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^{-2+\delta} < \infty$$

Bir xil taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonunining quyida sodda shakli isbotlangan:

Teorema. Agar $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ bir xil taqsimotga ega bo'lgan bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning matematik kutilmasi $\grave{I}X_n = \grave{a}$, $n \geq 1$ chekli son bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo'ysunadi, ya'ni

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P.1} a$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Ushbu teoremadan natija sifatida quyidagi Bernulli teoremasi kelib chiqadi.

Teorema (Bernulli). Agar A hodisaning bitta tajribada ro'y berishi ehtimoli p ga teng bo'lib, n ta bog'liq bo'lmagan tajribada bu hodisa n_A marta ro'y bersa, u holda $\frac{n_A}{n}$ nisbat p soniga bir ehtimol bo'yicha yaqinlashadi, ya'ni

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P.1} p \tag{1.11.4}$$

Biz yuqorida faqat kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga oid teoremalarni keltirdik. Ta'kidlab o'tdikki, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining bir ehtimol bo'yicha yaqinlashishidan uning ehtimol bo'yicha ham yaqinlashishi kelib chiqadi. Shu sababli, yuqorida keltirilgan teoremalarning shartlarida katta sonlar qonuni ham o'rinli bo'ladi.

II. Markaziy limit teoremasi

Markaziy limit teorema tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti bilan normal taqsimot orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Quyida bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $MX_i = a$ va $DX_i = \sigma^2, i = \overline{1,n}$, $0 < \sigma^2 < \infty$ bo'lsa, u holda

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $n \to \infty$ da standart normal taqsimotga intiladi, ya'ni

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1 .Chebishev tengsizligini keltiring.

2. Ehtimol bo'yicha va bir ehtimol bo'yicha yaqinlashish deb qanday yaqinlashishga aytildi?

3. Katta sonlar qonuni va kuchaytirilgan katta sonlar qonuni nimani ifodalaydi?

4. Markaziy limit teoremani keltiring.

1.12 §. Markov zanjirlari

Tayanch iboralar: *holatlar ehtimollari vektori, bitta qadamda o'tish ehtimoli, bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan Markov* *zanjirlari. o'tish ehtimollari matritsasi, n qadamda o'tish matritsasi, limit ehtimollar vektori, statsionar rejim.*

Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma–ketligining bevosita umumlashmalaridan biri Markov zanjirlari hisoblanadi. Bunda, umuman olganda, o'tkazilayotgan tajribaning natijasi undan avvalgi tajriba natijasiga bog'liq deb qaraladi.

Markov zanjirini muayyan bir fizik tizimda vaqt o'tishi mobaynida kechayotgan jarayon sifatida tavsiflash ham mumkin. Bunda, jarayonning kechishi mobaynida tizim holatining o'zgarishi ehtimollari muayyan bir shartlarni qanoatlantiradi deb qaraladi [9], [16].

Faraz qilaylik, S fizik tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari ko'pi bilan sanoqlita $S_1, S_2,..., S_k,...$bo'lib, u o'z holatini vaqtning faqat $t= 0,1,2,...$ onlaridagina o'zgartirishi mumkin bo'lsin. (Ba'zi adabiyotlarda tizim o'z holatini vaqtning $t= t_0, t_1, t_2,...$ onlarida o'zgartirishi mumkin deb qaraladi. Umumiylikka zarar yetkazmasdan $t_k=k$, $k= 0,1,2,...$ deb qarash mumkin.)

Ta'rif. Agar S tizimni $t = m+1$ vaqtda biron S_n holatda bo'lishi ehtimoli, faqat uning $t = m$ vaqtda qaysi holatda bo'lganligiga bog'liq bo'lib, undan avvalgi $t< m$ vaqtlarda qanday holatda bo'lganligiga bog'liq bo'lmasa, tizimda kechayotgan jarayon *markov zanjirini* tashkil qiladi deyiladi.

Tizimning $t =m$ vaqtda S_k holatda bo'lishi ehtimolini $p_k(m)$, $k = 1,2,...$orqali belgilaylik. Ushbu ehtimollardan quyidagi vektorni hosil qilamiz:

$$\vec{p}(m) =(p_1(m), p_2(m),...,p_k(m),...),\ m = 0,1,2,... \qquad (1.12.1)$$

Ushbu (1.12.1) formula bilan berilgan vektor, S tizimning $t = m$ vaqtdagi *holatlar ehtimollari vektori* deb ataladi. Hususan, m=0 vaqtdagi holatlar ehtimollari vektori

$$\vec{p}(0) =(p_1(0), p_2(0),...,p_k(0),...)$$

boshlang'ich holatlar ehtimollari vektori deb ataladi.

Holatlar ehtimollari vektorining komponentalari ushbu munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\sum_{\kappa} p_k(m)=1, \quad 0\leq p_k(m)\leq 1, \quad m=0,1,2,\ldots, k=1,2,\ldots \qquad (1.12.2)$$

Tizim $t = m$ vaqtda S_j holatda bo'lgan bo'lsa, uning $t = m+1$ vaqtda S_k holatga o'tishi ehtimolini $p_{jk}(m)$ orqali belgilaymiz. Ushbu $p_{jk}(m)$, $m = 0,1,2,\ldots$, ehtimollar tizimning S_j holatdan S_k holatga bitta qadamda *o'tish ehtimollari* deyiladi.

Markov zanjirining yuqorida keltirilgan ta'rifini kiritilgan belgilashlar orqali ifodalaymiz:

Ta'rif. Tizimning boshlang'ich holatlar ehtimollar vektori $\vec{p}(0)$ hamda bitta qadamda o'tish ehtimollari $p_{jk}(m)$ berilgan bo'lib, $p_{jk}(m)$ ehtimollar faqat S_j va S_k holatlargagina bog'liq bo'lsa va $t < m$ vaqtlarda tizimning qanday holatda bo'lganligiga bog'liq bo'lmasa, u holda tizimda kechayotgan jarayon *markov zanjirini* tashkil qiladi deyiladi.

Shunday qilib, markov zanjiri berilishi uchun tizimning boshlang'ich holatlar ehtimollar vektori hamda bitta qadamda o'tish ehtimollari berilishi lozim.

Markov janjirlari ikki turga – *bir jinsli* va *bir jinsli bo'lmagan* Markov zanjirlariga ajratiladi.

Ta'rif. Agar Markov zanjirining $p_{jk}(m)$ o'tish ehtimollari m vaqtga bog'liq bo'lmasa ya'ni, barcha m lar uchun o'zgarmas son $p_{jk}(m)= p_{jk}$ bo'lsa, u holda bunday Markov zanjiri *bir jinsli* Markov zanjiri deyiladi.

Bir jinsli Markov zanjirining bitta qadamda o'tish ehtimollari p_{jk} lar orqali quyidagi *o'tish ehtimollari matritsasini* hosil qilamiz:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} & \cdots \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{jk} & \cdots \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{pmatrix} \qquad (1.12.3)$$

O'tish ehtimollari matritsasi kvadrat matritsadir. Bu matritsaning elementlari manfiy emas, hamda (1.12.2) shartga asosan, har bir satrdagi elementlar yig'indisi birga teng. Elementlari bunday shartlarni qanoatlantiruvchi matritsa *stoxastik matritsa* deb ataladi. Istalgan stoxastik matritsa o'tish matritsasi bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Shunday qilib, bir jinsli Markov zanjiri boshlang'ich ehtimollar vektori $\vec{p}(0)$ hamda o'tish ehtimollari matritsasi (1.12.3) bilan to'liq aniqlanadi.

Shartli ehtimol ta'rifidan bir jinsli Markov zanjirining holatlar ehtimoli uchun quyidagi tenglikni keltirib chiqarish mumkin:

$$p_j(m+1) = \sum_{k} p_k(m) p_{kj},\ j=1,2,\ldots$$

Ta'rif. Agar Markov zanjirining o'tish ehtimollari $p_{jk}(m)$ lar m vaqtga bog'liq bo'lsa, u holda bunday Markov zanjiri ***bir jinsli bo'lmagan*** Markov zanjiri deyiladi.

Bir jinsli bo'lmagan Markov zanjirining o'tish ehtimollari matritsalari deb (1.12.3) matritsa ko'rinishidagi, barcha elementlari $p_{jk}(m)$ lardan iborat matritsalarga aytiladi. Bunda har bir m soniga bitta matritsa mos keladi.

Bir jinsli bo'lmagan Markov zanjirining holatlar ehtimoli quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$p_j(m+1) = \sum_{k} p_k(m) p_{kj}(m),\ j=1,2$$

Markov zanjiriga misol keltiramiz.

1.12.1-misol.

Tizim yong'in xavfsizligi qismidan iborat bo'lib, uning holati qism shaxsiy tarkibi (sh.t.)ning holati bilan aniqlansin. Tizimni, umuman olganda, faqat ikkita S_1 va S_2 holatlarning birida bo'ladi deb qarash mumkin: S_1 ={*sh.t. navbatchilik holatida*} va S_2 ={*sh.t. yong'in o'chirish bilan band holatda*}. Amalda, tizim o'z holatini vaqtning $t=0,1,2,\ldots$ on (daqiqa)laridagina o'zgartirishi mumkin deb qarash mumkin. Uning ixtiyoriy vaqtda S_1 holatdan S_2 holatga bitta qadamda o'tish ehtimoli p ga va S_2 holatdan S_1 holatga o'tish ehtimoli q ga teng bo'lsin. Bu yerda p va q o'zgarmas sonlar bo'lib, $0<p<1$ va $0<q<1$.

Bunday tizimda kechayotgan jarayon Markov zanjirini tashkil qiladi deyish mumkin. Uning o'tish ehtimollari matritsasi

$$P=\begin{pmatrix} 1-p, & p \\ q, & 1-q \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Markov zanjirlari nazariyasining dastlabki masalalaridan biri, tizimning S_i holatdan S_k holatga rosa n ta qadamda o'tish ehtimolini topish masalasidir. Ushbu ehtimolni $p_{ik}^{(n)}$ orqali belgilaylik.

Quyida, holatlar soni cheklita, ya'ni N ta bo'lgan bir jinsli Markov zanjirini qaraymiz.

Tushunarliki, $p_{ik}^{(n)}$ ehtimol tizimning boshlang'ich holati S_i bo'lgan shartda, uning n ta qadamdan so'ng S_k holatga o'tishining shartli ehtimolidir.

Demak, $p_{ik}^{(n)}$ ehtimol, hodisalar yig'indisining ehtimoli haqidagi teoremaga asosan, S_i holatdan S_k holatga olib boradigan barcha n ta qadamli yo'llar ehtimollari yig'indisiga teng bo'ladi. Chunonchi

$$p_{ik}^{(1)} = p_{ik},$$

$$p_{ik}^{(2)} = p_{i1}p_{1k} + p_{i2}p_{2k} + \dots + p_{iN}p_{Nk} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}p_{jk}$$

Matematik induksiya usuli bo'yicha ushbu umumiy formulani isbot qilish mumkin.

$$p_{ik}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}p_{jk}^{(n)} \qquad (1.12.4)$$

Matematik induksiya usulidan yana bir marta foydalanib,

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} \qquad (1.12.5)$$

ekanligini keltirib chiqaramiz.

Ushbu (1.12.5) tenglikni quyidagicha talqin etish mumkin: agar tizim birinchi n ta qadamdan so'ng oraliq S_j holatga erishgan bo'lsa, u holda S_j holatdan S_k holatga o'tish ehtimoli tizimning S_j holatga qanday erishilganiga bog'liq emas.

Quyidagi matritsa ham stoxastik matritsa bo'ladi:

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} \; p_{12}^{(n)} \cdots p_{1N}^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{N1}^{(n)} \; p_{N2}^{(n)} \cdots p_{NN}^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (1.12.6)$$

Uni *n qadamda o'tish ehtimollari matritsasi* deyiladi

Yuqorida keltirilgan (1.12.4), (1.12.5) va (1.12.6) tengliklarni matritsa shaklida yozib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P_1 = P,$$
$$P_2 = P \cdot P = P^2,$$

$$P_{n+1} = P \cdot P^n = P^{n+1},$$
$$P_{n+m} = P^m \cdot P^n = P^{n+m}.$$

Shunday qilib, bir jinsli Markov zanjirining n qadamda o'tish matritsasi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$P_n = P^n \tag{1.12.7}$$

Amaliyotning muayyan masalalarini hal qilishda n qadamda o'tish matritsasi P_n ning $n \to \infty$ dagi holatini bilish muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu masalaga oid quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Agar biror natural n_0 sonida P_{n_0} matritsaning barcha elementlari $p_{ij}^{(n_0)}$ lar musbat bo'lsa, u holda shunday p_k, $k=\overline{1,N}$ sonlar mavjudki, ular uchun i indeksga bog'liq bo'lmagan holda ushbu munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = p_k,\ k=\overline{1,N} \tag{1.12.8}$$

Yuqoridagi (1.12.8) munosabat bilan aniqlangan $p_1, p_2, \dots, p_N$ sonlar *holatlarning limit ehtimollari*, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ vektor esa *limit ehtimollar vektori* deb ataladi.

2-Teorema. Yuqoridagi (1.12.8) munosabat bilan aniqlangan p_k limit ehtimollar ushbu tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k = 1 \\ p_k = \sum_{i=1}^{N} p_i p_{ik}, \quad k = \overline{1,N} \end{cases} \tag{1.12.9}$$

S tizimning boshlang'ich holatlar ehtimollari vektori

$$\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots p_N(0))$$

va bir qadamda o'tish matritsasi P berilgan bo'lsa uning ixtiyoriy m vaqtdagi holatlar ehtimollari vektori $\vec{p}(m)$ni topish masalasini qaraymiz. Tushunarliki

$$p_k(1) = p_1(0)p_{1k} + p_2(0)p_{2k} + \ldots + p_N(0)p_{Nk} = \sum_{i=1}^{N} p_i(0)p_{ik}$$

$$p_k(2) = p_1(1)p_{1k} + p_2(1)p_{2k} + \ldots + p_N(1)p_{Nk} = \sum_{i=1}^{N} p_i(1)p_{ik} =$$

$$= (\sum_{i=1}^{N} p_i(0)p_{i1})p_{1k} + (\sum_{i=1}^{N} p_i(0)p_{i2})p_{2k} + \ldots + (\sum_{i=1}^{N} p_i(0)p_{iN})p_{Nk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i(0)p_{ik}^{(2)}$$

Bu yerda $p_{ik}^{(2)}$ tizimning S_i holatdan S_k holatga rosa *2* ta qadamda o'tishi ehtimolidir. Matematik induksiya usulidan foydalanib ixtiyoriy $n=1,2,\ldots$ uchun ushbu umumiy formulani isbot qilish mumkin.

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0)p_{ik}^{(n)}, k = 1,2,\ldots,N. \qquad (1.12.10)$$

Ushbu munosabatlardan kelib chiqib, boshlang'ich holatlar ehtimollari vektori $\vec{p}(0)$ hamda bir qadamda o'tish matritsasi P yordamida tizimning m (m =1,2,...) vaqtdagi holatlar ehtimollari vektori $\vec{p}(m)$ uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\vec{p}(m) = (p_1(m), p_2(m), \ldots, p_N(m)) = \vec{p}(0)P^m \qquad (1.12.11)$$

Markov zanjirlari nazariyasining asosiy masalalaridan biri bu tizimning m vaqtdagi holatlar ehtimollari vektori $\vec{p}(m)$ning $m\to\infty$ dagi koordinatalarini, ya'ni $\lim\limits_{m\to\infty} p_j(m)$ larni topish masalasidir.

Faraz qilaylik, 1-Teorema sharti bajarilgan bo'lsin. U holda (1.12.10) formulani inobatga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{m\to\infty} p_j(m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{N} p_i(0) p_{ij}^{(m)} = p_j \sum_{i=1}^{N} p_i(0) = p_j,\ j = \overline{1,N} \qquad (1.12.12)$$

Demak, 1-Teorema sharti bajarilganda $\vec{p}(m)$ vektor $m\to\infty$ da limit ehtimollar vektori $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ ga yaqinlashar ekan.

Agar (1.12.12) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda yuqoridagi (1.12.8) yoki (1.12.12) munosabatlar bilan aniqlangan p_j, $j=1,N$ limit ehtimollar tizimning boshlang'ich holatiga, ya'ni $\vec{p}(0)$ vektorga bog'liq bo'lmaydi.

Ta'rif. Agar (1.12.8) (yoki (1.12.12)) munosabatlar bilan aniqlangan p_j, $j=1,N$ limit ehtimollar mavjud bo'lsa, qaralayotgan tizim uchun ***statsionar rejim*** mavjud deyiladi.

Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib bir jinsli Markov zanjirining holatlar ehtimollari vektorini topishga oid misollar yechishga namunalar keltiramiz.

1.12.2-misol.

Ikkita holatli Markov zanjirining o'tish ehtimollari matritsasi P va boshlang'ich holatlar ehtimollari vektori $\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0))$ berilgan. Ushbu $\vec{p}(1)$, $\vec{p}(2)$, $\vec{p}(4)$ va $\vec{p}(8)$ vektorlar topish talab qilinadi.

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}; \quad \vec{p}(0) = (0,8;\ 0,2)$$

Yechish.

Tushunarliki $P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0,49 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}$

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,51 & 0,49 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,51 & 0,49 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4659 & 0,5341 \\ 0,4578 & 0,5422 \end{pmatrix}$$

$$P^8 = P^4 \cdot P^4 = \begin{pmatrix} 0{,}4659 & 0{,}5341 \\ 0{,}4578 & 0{,}5422 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4659 & 0{,}5341 \\ 0{,}4578 & 0{,}5422 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4616 & 0{,}5384 \\ 0{,}4615 & 0{,}5385 \end{pmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan (1.12.11) formuladan

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot P = (0{,}8 \quad 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}36 \quad 0{,}64)$$

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(0) \cdot P^2 = (0{,}8 \quad 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}49 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix} = (0{,}492 \quad 0{,}508)$$

$$\vec{p}(4) = \vec{p}(0) \cdot P^4 = (0{,}8 \quad 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4659 & 0{,}5341 \\ 0{,}4578 & 0{,}5422 \end{pmatrix} = (0{,}46428 \quad 0{,}53572)$$

$$\vec{p}(8) = \vec{p}(0) \cdot P^8 = (0{,}8 \quad 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4616 & 0{,}5384 \\ 0{,}4615 & 0{,}5385 \end{pmatrix} = (0{,}46158 \quad 0{,}53842)$$

Misol yechildi.

1.12.3-misol.

Holatlari soni uchta bo'lgan Markov zanjirining o'tish ehtimollari matritsasi P va boshlang'ich holatlar ehtimollari vektori $\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0))$ berilgan. Quyidagilarni toping:

1). Zanjirning ikki qadamda o'tish matritsasini;

2). Bir qadamdan so'ng zanjirning uchinchi holatda bo'lishi ehtimolini;

3). Ikki qadamdan keyingi holatlar ehtimolini.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}(0) = (0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1)$$

Yechish.

1) Zanjirning ikki qadamda o'tish matritsasini (1.12.7) formuladan topamiz:

$$P_2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}2 & 0{,}31 \\ 0{,}42 & 0{,}23 & 0{,}35 \\ 0{,}18 & 0{,}16 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

2) Bir qadamdan so‘ng zanjiming uchinchi holatda bo‘lishi ehtimolini (1.12.10) formulaga muvofiq topamiz:

$$p_3(1) = \sum_{i=1}^{3} p_i(0)\, p_{i3}^{(1)} = 0,7 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72$$

3). Ikki qadamdan keyingi holatlar ehtimolini (1.12.11) formulaga asosan topamiz:

$$p(2) = p(0) \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,49 & 0,2 & 0,31 \\ 0,42 & 0,23 & 0,35 \\ 0,18 & 0,16 & 0,66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,445 & 0,202 & 0,353 \end{pmatrix}$$

Misol yechildi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1.Holatlar ehtimollari vektori deb qanday vektorga aytiladi?

2. Bitta qadamda o‘tish ehtimoli deb nimaga aytiladi?

3. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan Markov zanjirlari nima?

4. Bir qadamda va n qadamda o‘tish ehtimollari matritsalari nima?

5. Limit ehtimollar vektori nima?

6 Qanday holda tizimda kechayotgan jarayon uchun statsionar rejim mavjud deb aytiladi?

1.13 §. Tasodifiy jarayonlar. Markov jarayoni

Tayanch iboralar: *tasodifiy jarayon, Markov jarayoni, o‘tish ehtimollari zichligi, bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan Markov jarayoni*

Tabiatda va insonlar faoliyatida muayyan bir S tizimning holatlarini bir yoki bir necha miqdorlar orqali ifodalash mumkin bo‘lgan hollar juda ko‘p uchraydi. Ko‘pincha, bunday tizimlarning holati vaqtning o‘zgarishiga bog‘liq bo‘lib, ushbu bog‘liqlik xarakterini avvaldan aniqlab bo‘lmaydi. Lekin, ular muayyan statistik qonuniyatlarga bo‘ysunadiki, ular orqali tizimning ma'lum bir holatda bo'lishi yoki tizim holatini ifodalovchi miqdorlarni ma'lum bir qiymatlarni qabul qilishi ehtimolini aniqlash mumkin bo'ladi. Masalan, tashkilotning oladigan foydasi, tovar sotilishi hajmi, yong'in xavfsizligi qismlariga kelib tushadigan chaqiruvlar soni, yong'inlar natijasida ko'riladigan moddiy zarar hajmi va shu kabi kattaliklar vaqt o'tishi mobaynida tasodifiy ravishda o'zgarib boradi. Ushbu kattaliklarni avvaldan aniq bilish mumkin bo'lmasa-da, ularni ma'lum qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini aniq hisoblash yoki baholash mumkin bo'ladi. Bunday masalalarni hal qilishda tasodifiy jarayonlar nazariyasini qo'llanilishi samarali natijalar beradi.

Tasodifiy jarayon bu shunday jarayonki, vaqt o'tishi mobaynida uning qanday kechishini, u kechayotgan tizim qanday holatda bo'lishini, ya'ni tizim holatlarni ifodalovchi miqdor(lar)ning qanday qiymat qabul qilishini avvaldan aniqlab bo'lmaydi.

Tasodifiy jarayon kechayotgan tizim o'z holatini faqat aniq belgilangan vaqtlardagina o'zgartira olsa, bunday tasodifiy jarayon *diskret vaqtli* tasodifiy jarayon deyiladi.

Agar tizim o'z holatini vaqtning ixtiyoriy onida o'zgartirishi mumkin bo'lsa, tizimda kechayotgan bunday tasodifiy jarayon *uzluksiz vaqtli* tasodifiy jarayon deyiladi.

Tasodifiy jarayon kechayotgan tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari soni cheklita yoki sanoqlita bo'lsa, bunday tasodifiy jarayon ***diskret holatli*** tasodifiy jarayon deyiladi.

Agar tasodifiy jarayon kechayotgan tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari soni haqiqiy sonlar o'qining biron chekli yoki cheksiz oralig'idagi barcha qiymatlar sonicha bo'lsa (ikkita qo'shni holatlarni ko'rsatish mumkin bo'lmasa), bunday tasodifiy jarayon ***uzluksiz holatli*** tasodifiy jarayon deyiladi.

Shunday qilib tasodifiy jarayonlarni 4 ta turga ajratish mumkin:

1) Uzluksiz vaqtli, uzluksiz holatli tasodifiy jarayon (masalan, ma'lum bir vaqt oralig'ida kuzatilayotgan havo harorati. U vaqtning ixtiyoriy onida uzluksiz o'zgarib turadi.)

2) Uzluksiz vaqtli, diskret holatli tasodifiy jarayon (masalan, bir sutka mobaynidagi yong'in xavfsizligi qismiga kelib tushadigan chaqiruvlar soni. Bu miqdor vaqtning ixtiyoriy onida o'zgarishi mumkin.)

3) Diskret vaqtli, uzluksiz holatli tasodifiy jarayon (masalan, ma'lum bir hudud (shahar)da yil mobaynidagi yong'inlar o'chirishga sarflangan vaqt miqdori. Ushbu miqdor faqat yong'in sodir bo'lgandagina ularning soniga bog'liq ravishda uzluksiz o'zgaradi.)

4) Diskret vaqtli, diskret holatli tasodifiy jarayon (masalan, shahar jamoat transportidagi yo'lovchilar soni. Ushbu miqdor faqat transport bekatlaridagina o'zgaradi va cheklita qiymat qabul qiladi.)

Tasodifiy jarayonlar sinfida markov zanjirining umumlashmasi bo'lgan markov jarayoni deb ataluvchi shunday jarayonlar borki, ular amaliyotdagi juda ko'p tizimlar faoliyatini matematik modellashtirishda samarali foydalanish mumkinligi bilan alohida ajralib turadilar.

Ta'rif: Biron S tizimda tasodifiy jarayon kechayotgan bo'lib, t_o vaqtning ixtiyoriy aniq bir oni bo'lsin. Agar jarayonning ixtiyoriy $t > t_o$ vaqtdagi ehtimollik xarakteristikalari uning faqat ushbu $t = t_o$ ondagi holatigagina bog'liq bo'lib, undan avvalgi $t < t_o$ vaqtlardagi holatlariga bog'liq bo'lmasa, bunday tasodifiy jarayon *Markov jarayoni* deyiladi. Boshqacha aytganda, Markov jarayoning «o'tmishi» uning «kelajagi»ga *bevosita* ta'sir qilmaydi.

Markov jarayoniga misollar keltiramiz:

1. S tizim – taksi avtomobilining bosib o'tgan yo'lini belgilovchi hisoblagich (schyotchik) bo'lsin. Hisoblagichning t vaqtdagi holati uning ushbu vaqtgacha bosib o'tgan yo'lining kilometrdagi miqdori bilan xarakterlansin. Faraz qilaylik, hisoblagich t_0 vaqtda S_0 kilometrni ko'rsatayotgan bo'lsin. Ixtiyoriy $t > t_0$ vaqtda uning biron bir S_1 kilometrni ko'rsatishi ehtimoli faqat S_0 ga bog'liq bo'lib, t_0 dan avvalgi vaqtlarda uning qanday qiymatlar qabul qilganligiga bog'liq bo'lmaydi.

2. Shaxmat o'yini o'ynalayotgan bo'lib, S tizim – o'yin taxtasi ustidagi shaxmat figuralaridan iborat bo'lsin. Tizimning t vaqtdagi holati ushbu vaqtda shaxmat taxtasida saqlanib qolgan figuralar soni bilan xarakterlansin. Tushunarliki, S=1,2,...,32 qiymatlarni qabul qiladi. Ixtiyoriy $t > t_0$ vaqtda moddiy ustunlik raqiblarning qay birida bo'lishi tizimning t_0 vaqtdagi holatigagina bog'liq bo'lib, undan avvalgi $t < t_0$ vaqtlarda ustunlik raqiblarning qay birida (figuralar soni qancha) bo'lganligiga bog'liq emas.

3. S tizim – yong'in xavsizligi qismi bo'lsin. Qismning t vaqtdagi holati qismga [0, t] vaqt oralig'ida unga kelib tushgan yong'in o'chirishga chaqiruvlar soni bilan xarakterlansin. Agar t_0 vaqtgacha qismga S_0 ta chaqiruv kelib tushgan bo'lsa, ixtiyoriy $t > t_0$ uchun [0, t] vaqt oralig'ida qismga kelib tushgan chaqiruvlar soni biron S_1 ta bo'lishi ehtimoli qismga t_0 vaqtgacha kelib tushgan chaqiruvlar sonigagina bog'liq bo'lib, undan avvalgi vaqtlargacha, ya'ni ixtiyoriy $t < t_0$ uchun [0, t] vaqt oralig'ida qismga qancha chaqiruv kelib tushganligiga bog'liq emas.

Amaliyotda, o'z holatini avvaldan belgilangan vaqtlarda emas balki, vaqtning ixtiyoriy onida o'zgartirishi mumkin bo'lgan tizimlar ko'p uchraydi. Masalan, biron moslama yoki apparatning ixtiyoriy tarkibiy elementi vaqtning ixtiyoriy onida nosoz holga kelishi mumkin. Uning soz holga keltirish (yoki almashtirish) ham vaqtning ixtiyoriy onida yakunlanishi mumkin. Bunday tizimlar o'z holatini vaqtning tasodifiy onida o'zgartirishlari mumkin. Odatda, bunday jarayonlarni uzluksiz vaqtli, diskret holatli Markov jarayoni yordamida matematik modellashtirish orqali samarali natijalarga erishish mumkin bo'ladi.

Quyida uzluksiz vaqtli, diskret holatli Markov jarayoniga oid ayrim asosiy tushunchalarni keltiramiz.

Faraz qilaylik, S tizimda uzluksiz vaqtli, diskret holatli Markov kechayotgan bo'lib, tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari soni cheklita - $S_0, S_1, S_2,...,S_N$ bo'lsin. Tizimning t vaqtda S_i holatda bo'lishi ehtimolini $p_i(t)$, $i = 0,1,2,...,N$ orqali belgilaylik. Bu ehtimollarni holatlar ehtimollari deb ataymiz.

Tushunarliki ixtiyoriy t uchun holatlar ehtimollari quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(t) = 1 \qquad (1.13.1)$$

Chunki, t vaqtda S tizimning $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_N$ holatlarda bo'lishidan iborat hodisalar ixtiyoriy t da to'la guruh tashkil qiladi (o'zaro birgalikda emas, yig'indisi muqarrar hodisa).

Holatlar ehtimollari — $p_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,N$ larni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun jarayonning diskret vaqtli Markov jarayoni uchun kiritilgan o'tish ehtimollari $p_{jk}(m)$ larga o'xshash xarakteristikalarni bilish zarurati tug'iladi. Uzluksiz vaqtli, diskret holatli Markov jarayoni uchun ixtiyoriy t da $p_{jk}(t)=0$ bo'lganligi uchun ushbu ehtiimol foydasiz xarakteristikaga aylanadi. Shu sababli, uzluksiz vaqtli, diskret holatli Markov jarayoni uchun o'tish ehtimollari $p_{jk}(m)$ lar o'rniga *o'tish ehtimollari zichligi* tushunchasi kiritiladi. U quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \qquad (1.13.2)$$

bu yerda, $P_{ij}(t, t + \Delta t)$ – tizim t vaqtdagi S_i holatda bo'lib, undan keyingi Δt vaqt mobaynida S_j holatga o'tishi ehtimolidir.

Yuqorida keltirilgan (1.13.2) munosabat bilan aniqlangan $\lambda_{ij}(t)$ miqdor (funksiya) t vaqtda tizimni S_i holatdan S_j holatga *o'tish ehtimoli zichligi* deyiladi.

Tushunarliki, (1.13.2) munosabatdan

$$P_{ij}(t, t + \Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \Delta t \qquad (1.13.3)$$

taqribiy tenglik kelib chiqadi va unda $\Delta t \to 0$ da xatolik kamayib boradi.

Agar barcha o'tish ehtimoli zichliklari $\lambda_{ij}(t)$ lar o'zining argumenti t ga nisbatan o'zgarmas (t vaqtga bog'liq emas) bo'lsa, ya'ni Δt uzunlikdagi elementar oraliqning boshlang'ich nuqtasi t ahamiyatga ega bo'lmasa, u holda bunday jarayoni *bir jinsli* Markov jarayoni deb ataladi. Agar $\lambda_{ij}(t)$ lar t vaqtning funksiyasi bo'lsa, u holda bunday jarayonni *bir jinsli bo'lmagan* Markov jarayoni deb ataladi.

Ba'zi hollarda bir jinsli Markov jarayonini quyidagi o'tish ehtimollari zichliklari matirtsasi Λ orqali tavsiflash qulay bo'ladi.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix} \tag{1.13.4}$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Tasodifiy jarayonlarning qanday turlari mavjud?

2. Markov jarayoni va Markov zanjirini qiyoslang.

3. O'tish ehtimoli zichligi deb nimaga aytiladi va u nima uchun kiritiladi?

4. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan Markov jarayonlarning farqini tushuntiring?

1.14 §. Holatlar ehtimollari uchun Kolmogorovning differensial va algebraik tenglamalar sistemasi

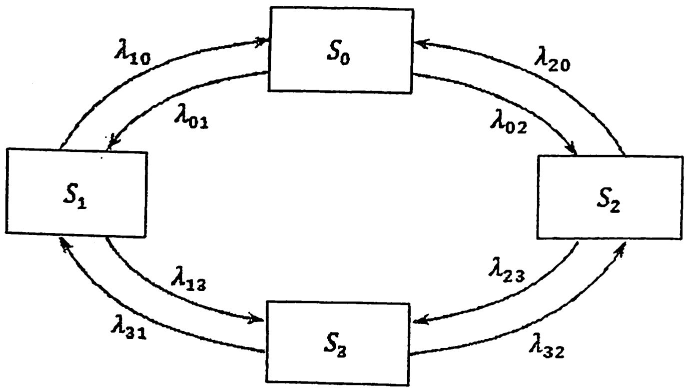
Tayanch iboralar: *belgi qo'yilgan holatlar grafi, Kolmogorovning differensial va algebraik tenglamalar sistemasi.*

Avvalgi paragrafda kiritilgan holatlar ehtimollari $p_i(t)$, $i \geq 0$ larni aniqlash masalasini ko'rib chiqamiz. Ushbu masalani quyidagi hususiy hol uchun yechamiz.

S tizim 2 ta uskuna (moslama)dan iborat bo'lib, ular muntazam ravishda ishlaydilar. Ularning har biri tasodifiy vaqtda ishdan chiqishi mumkin. Biron uskuna ishdan chiqqan zahoti uni ta'mirlash boshlanadi va ta'mirlash tasodifiy vaqt davom etadi. Ta'mirlash tugagan zahoti uskuna yana ishga tushadi.

Tushunarliki, bunday tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari 4 ta bo'ladi: S_0 – ikkala uskuna soz holatda, S_1–birinchi uskuna ta'mirlanmoqda, ikkinchisi soz holatda, S_2–ikkinchi uskuna ta'mirlanmoqda, birinchisi soz holatda, S_3–ikkala uskuna nosoz holatda va ular ta'mirlanmoqda. Tizimning t vaqtda S_i holatdan S_j holatga o'tish ehtimoli zichliklari $\lambda_{ij}(t)$ $(i,j = 0,1,2,3)$ lar aniqlangan bo'lsin. Ularni qulaylik uchun argumentsiz λ_{ij} orqali belgilaymiz. Tizimning S_0 holatdan S_1 holatga o'tishi birinchi uskunaning «ishdan chiqishi» natijasida, S_1 holatdan S_0 holatga o'tishi esa birinchi uskunani «ta'mirlash tugashi» natijasida ro'y beradi va h.k.

Bu kabi masalalarni yechishda tizim *holatlaining belgi qo'yilagan grafi* deb ataladigan quyidagi 1.14.1- chizmadan foydalanish qulay bo'ladi.



1.14.1-chizma

Holatlar grafidagi S_0 holatdan S_1 holatga yo'naltirilgan strelka birinchi tarmoqning ishdan chiqishi onidagi o'tishni, S_1 holatdan S_0 holatga yo'naltirilgan strelka birinchi tarmoqning ta'mirlash tugagan ondagi o'tishni bildiradi.

Holatlar grafida S_0 va S_3 holatlar hamda S_1 holatlar S_2 holatlar o'rtasida o'tish strelkalari mavjud emas. Bu quyidagicha izohlanadi: tizimning ikkala uskunasini bir onda ishdan chiqishi (S_0 dan S_3 ga o'tish), tizim ikkala uskunasining ta'mirlanishi bir onda tugashi (S_3 dan S_0 ga o'tish), bir uskunaning ta'mirlanishi tugagan onda ikkinchi uskunaning ishdan chiqishi (S_1 dan S_2 ga o'tish va aksincha S_2 dan S_1 ga o'tish)dan iborat hodisalar ehtimollari nolga teng bo'lgan hodisalar sifatida e'tiborga olinmagan.

Dastavval $p_0(t)$ ni topamiz. Buning uchun tizimning ixtiyoriy t vaqtdagi holatini qaraymiz. Δt elementar (kichik) vaqt oralig'ini tanlab, $t + \Delta t$ vaqtda tizimni S_0 holatda bo'lishi ehtimoli $p_0(t+\Delta t)$ ni topamiz. Tizimning $t + \Delta t$ vaqtda S_0 holatga kelishiga bir necha usullar bilan erishish mumkin:

1. S tizim t vaqtda $p_0(t)$ ehtimollik bilan S_0 holatda bo'lgan va Δt vaqt o'tishi mobaynida undan chiqmagan. Bu hodisani A orqali belgilaylik. Uning ehtimolini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$E_i(t)$ ={tizim t vaqtda S_i holatda bo'ladi}. U holda A hodisani quyidagicha ifodalash mumkin: $A = E_0(t)\overline{E_1(t+\Delta t)}\ \overline{E_2(t+\Delta t)}$ (bu yerda $\overline{E_i(t+\Delta t)}$ orqali $E_i(t+\Delta t)$ hodisaning qarama – qarshisi belgilangan.). $E_1(t+\Delta t)$ va $E_2(t+\Delta t)$ hodisalarning o'zaro birgalikda emasligini inobatga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$p(A) = p(E_0(t))p((\overline{E_1(t+\Delta t)}\ \overline{E_2(t+\Delta t)} / E_0(t)) =$$
$$= p_0(t)p((\overline{E_1(t+\Delta t) + E_2(t+\Delta t)} / E_0(t)) =$$
$$= p_0(t)(1 - p((E_1(t+\Delta t) + E_2(t+\Delta t)) / E_0(t)) =$$
$$= p_0(t)(1 - (p((E_1(t+\Delta t) / E_0(t)) + p(E_2(t+\Delta t)) / E_0(t))$$

Tizim t vaqtda S_i holatda bo'lib, undan keyingi Δt vaqt mobaynida S_j holatga o'tishi ehtimolini $P_{ij}(t, t+\Delta t)$ orqali belgilagan edik ((1.13.2) formula). Bu belgilashdan foydalanib A hodisani ehtimolini quyidagicha ifodalaymiz:

$$p(\mathrm{A}) = p_0(t)(1-(P_{01}(t,t+\Delta t)+P_{02}(t,t+\Delta t)))$$

2. Endi, S tizim t vaqtda $p_1(t)$ ehtimol bilan S_1 (yoki $p_2(t)$ ehtimol bilan S_2) holatda bo'lgan va Δt vaqt ichida S_0 holatga o'tgan bo'lsin. Bu hodisalarni mos ravishda B va C orqali belgilaylik. Demak, kiritilgan belgilashga muvofiq

$$\mathrm{B} = E_1(\mathrm{t})E_0(t+\Delta t), \quad \mathrm{C} = E_2(\mathrm{t})E_0(t+\Delta t)$$

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagilarga teng bo'ladi:

$$p(\mathrm{B}) = p(E_1(\mathrm{t}))p(E_0(t+\Delta t)/E_1(\mathrm{t})) = p_1(t)P_{10}(t,t+\Delta t)$$
$$p(C) = p(E_2(t))p(E_0(t+\Delta t)/E_2(t)) = p_2(t)P_{20}(t,t+\Delta t)$$

O'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimoli haqidagi teoremadan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p_0(t+\Delta t) = p(A+B+C) = p(B)+p(C)+p(A) = p_1(t)P_{10}(t,t+\Delta t)+$$
$$+p_2(t)P_{20}(t,t+\Delta t)+p_0(t)(1-(P_{01}(t,t+\Delta t)+P_{02}(t,t+\Delta t)))$$

Bu ifodani soddalashtirib, tenglikni ikki tomonini Δt ga bo'lamiz va quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = \frac{P_{10}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}p_1(t)+p_2(t)\frac{P_{20}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}p_2(t)-$$
$$-\frac{P_{01}(t,t+\Delta t)+P_{02}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}p_0(t)$$

Hosil bo'lgan ifodaning har ikki tomonida $\Delta \mathrm{t} \to 0$ da limitga o'tib tenglamaning o'ng tomonida $\partial_0{}'(t)$ hosilaga, chap tomonida esa (1.13.2) formulaga muvofiq tegishli o'tish ehtimollari zichliklarini hosil qilamiz:

$$p_o'(t) = \lambda_{10}(t)p_1(t) + \lambda_{20}(t)p_2(t) - (\lambda_{01}(t) + \lambda_{02}(t))p_0(t)$$

Hosil bo'lgan tenglamani va bu kabi tenglamalarni bundan keyingi matnlarda qulaylik uchun t argumentsiz yozamiz. Demak,

$$p_o' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0$$

Shunday qilib, noma'lum funksiyaning o'zi va hosilasi qatnashgan birinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'ldik.

Xuddi shunday yo'l bilan S tizimning boshqa holatlari uchun ham tegishli tenglamalarni keltirib chiqaramiz va quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} p_o' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 \end{cases} \quad (1.14.1)$$

Ushbu (1.14.1) tenglamalar sistemasi, holatlar ehtimollari uchun *Kolmogorovning differensial tenglamalar sistemasi* deb ataladi.

Keltirib chiqarilgan (1.14.1) sistemaga diqqat bilan qarab, Kolmogorovning differensial tenglamalar sistemasini tuzishning quyidagi qoidasini keltirib chiqarish mumkin.

Qoida: differensial tenglamalar sistemasidagi j-tenglamaning chap tomonida S_j $(j = 0,1,2,3)$ – holat ehtimolining hosilasi yoziladi. Tenglamaning o'ng tomonida, S_j holatga kirish ehtimollari zichliklari λ_{ij} larni tizim ushbu holatga o'tishdan avvalgi holat S_i ning ehtimoliga ko'paytirilib, natijalar qo'shilganidan, S_j holatning ehtimolini S_j holatdan chiqish ehtimollari zichliklari λ_{ji} larning yig'indisiga ko'paytmasini ayrilgani yoziladi.

Ta'kidlash joizki, (1.14.1) sistemada tenglamalar sonini bittaga kamaytirish mumkin. Buning uchun, (1.13.1) formuladan kelib chiqadigan masalan, $p_3(t)=1-(p_0(t)+p_1(t)+p_2(t))$ tenglikdan foydalanish mumkin. Lekin, keyingi matnlarda bizga Kolmogorov differensial tenglamalar sistemasining (1.14.1) ko'rinishidan foydalanish qulay bo'ladi.

Differensial tenglamalarni yechishda odatda, boshlang'ich shartlar berilishi talab qilinadi. Boshlang'ich shartlar tizimning boshlang'ich $t=0$ vaqtda qaysi holatda bo'lganligiga bog'liq bo'ladi. Bizning hususiy holimizda, (1.14.1) tenglamalar sistemasini $p_0(0)=1$, $p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$ boshlang'ich shartlar ostida yechish, ya'ni boshlang'ich vaqtda tizim «ikkala tarmoq ham soz» holatda bo'ladi deb faraz qilish tabiiydir.

Kolmogorov tenglamalar sistemasi barcha holatlar ehtimollarini *vaqtning funksiyasi* sifatida topish imkonini beradi. Holatlar ehtimollari $p_i(t)$ larni statsionar rejimdagi, ya'ni $t\to\infty$ dagi qiymatlarini (limit ehtimollarni) topish juda ko'p hollarda alohida qiziqish uyg'otadi.

Jarayonlar nazariyasida quyidagi tasdiq isbotlangan: *agar tizimning holatlar soni cheklita bo'lsa va ularning har biridan boshqa ixtiyoriy holatga cheklita qadam bilan o'tish mumkin bo'lsa, u holda holatlarning limit (yakuniy) ehtimollari mavjud bo'ladi va ular tizimning boshlang'ich holatiga bog'liq bo'lmaydi.*

S_i holatlarning limit ehtimollarining aniq ma'nosi mavjud: u tizimning *ushbu holatda bo'lishining o'rtacha nisbiy vaqtini* ko'rsatadi. Masalan, agar S_0 holatning limit ehtimoli $p_0=0,25$ bo'lsa, u holda bu tizim jami vaqtning *o'rtacha* to'rtdan bir qismida S_0 holatda bo'lishini bildiradi.

Limit ehtimollar o'zgarmas son bo'lganligi uchun ularning hosilasi nolga teng. Bu qiymatlarni Kolmogorov tenglamasiga qo'yib, statsionar rejim uchun, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Holatlar grafi 1.14.1-chizmada ifodalangan S tizim uchun bunday tenglamalar sistemasi quyidagicha ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 \end{cases} \qquad (1.14.2)$$

Ushbu (1.14.2) tenglamalar sistemasi, holatlar ehtimollari uchun *Kolmogorovning algebraik tenglamalar sistemasi* deb ataladi.

Quyidagi qoidadan foydalanib, (1.14.2) sistemani belgi qo'yilgan holatlar grafidan bevosita keltirib chiqarish mumkin.

Qoida: *tenglamalar sistemasidagi j-tenglamaning chap tomonida S_j holatning limit ehtimoli p_j ni, tizimning S_j holatdan chiqish ehtimollari zichliklari λ_{ji} larning yig'indisiga ko'paytmasi, o'ng tomonida esa S_j holatga o'tish ehtimollari zichliklari λ_{ij} ni tizim S_j holatga o'tishdan avvalgi mos holati S_i ning ehtimoliga ko'paytirib, natijalar qo'shilgani yoziladi.*

To'rtta noma'lum p_0, p_1, p_2, p_3 dan iborat (1.14.2) tenglamalar sistemasini osongina aniq yechimini topish mumkinday ko'rinadi. Lekin, bu sistema bir jinsli, ya'ni ozod hadlari yo'q, shuning uchun uni ixtiyoriy o'zgarmas (son) ko'paytuvchi aniqligida yechish mumkin. Lekin, normallashtiruvchi shart $\sum_{i=0}^{3} p_i = 1$ dan foydalanib sistemani aniq yechimini topish mumkin. Bunda, avval eslatganimizdek, (1.14.2) sistemadagi tenglamalardan ixtiyoriy birini tashlab yuborish va o'rniga normallashtiruvchi shartdan foydalanish mumkin.

Limit ehtimollarni hisoblashga oid misol keltiramiz.

1.14.1-misol.

Holatlar grafi 1.14.1-chizma bilan berilgan S tizimning limit ehtimollarini quyidagi shartlar bilan topilsin:

$$\lambda_{01} = 1,\ \lambda_{02} = 2,\ \lambda_{10} = 2,\ \lambda_{13} = 2,\ \lambda_{20} = 3,\ \lambda_{23} = 1,\ \lambda_{31} = 3,\ \lambda_{32} = 2,$$

Yechish.

Berilgan shartlarda (1.14.2) sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2 \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3 \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \qquad (1.14.3)$$

(Bu yerda (1.14.2) sistemaning bitta «ortiqcha» tenglamasi o'rniga (1.13.1) normallashtiruvchi shart yozildi). Yuqoridagi (1.14.3) sistemani yechib quyidagilarni hosil qilamiz: $p_0 = 0{,}4$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}27$, $p_3 = 0{,}13$. Ya'ni statsionar rejimda S tizim o'rtacha 40% vaqt S_0 holatda (ikkala tarmoq soz), 20% – vaqt S_1 holatda (birinchi tarmoq ta'mirlanmoqda, ikkinchisi soz), 27% – vaqt S_2 holatda (ikkinchi tarmoq ta'mirlanmoqda, birinchisi soz) va 13% – vaqt S_3 holatda (ikkala tarmoq ta'mirlanmoqda) bo'ladi.

1.14.2-misol.

Yuqoridagi 1.14.1-misol shartlarida:

1. S tizimning statsionar rejimda ishlashidan keladigan o'rtacha sof daromadni hisoblash talab qilinsin.

Bunda, birinchi va ikkinchi tarmoqlar soz holatda bo'lganda birlik vaqt (1 min yoki 1 soat,...) ichida mos ravishda 10 so'm va 6 so'm foyda keltirishi va ularni ta'mirlashga mos ravishda 4 so'm va 2 so'm sarflanishi (zarar keltirishi) ma'lum bo'lsin.

2. Agar har bir tarmoqni ta'mirlash uchun sarflanadigan o'rtacha vaqtni 2 marta kamaytirish, har bir tarmoqning birlik vaqt ichidagi o'rtacha «ta'mirlashlar soni»ni 2 marta oshishiga (bu shart juda ko'p tizimlar uchun bajariladi) hamda ularni ta'mirlashga (birlik vaqt ichida) sarflanadigan pulni 2 marta oshishiga olib kelsa, bu imkoniyatning iqtisodiy samaradorligini hisoblash talab qilinsin.

Yechish.

1. Misol shartidan kelib chiqadiki, 1–tarmoq vaqtning o‘rtacha p_0+p_2=0,4+0,27=0,67 qismida va 2-tarmoq esa p_0+p_1=0,4+0,2=0,6 qismida soz holatda bo‘ladi. Shu bilan birgalikda 1–tarmoq vaqtning o‘rtacha p_1+p_3=0,2+0,13=0,33 qismida va 2–tarmoq esa p_2+p_3=0,27+0,13=0,4 qismida ta’mirlashda bo‘ladi.

Shuning uchun, birlik vaqt ichida tizimni ishlatishdan keladigan o‘rtacha sof foyda D, ya’ni olingan foyda va sarf o‘rtasida farq quyidagiga teng:

D= 0,67·10 + 0,6· 6 – 0,33· 4 – 0,4· 2 = 8,18 so‘mni tashkil qiladi.

2. Har bir tarmoqni ta’mirlashga sarflanadigan o‘rtacha vaqtning 2 marta kamaytirilishi, o‘rtacha «ta’mirlashlar soni»ni 2 marta oshishiga olib kelganligi uchun $\lambda_{10}=4,\ \lambda_{20}=6,\ \lambda_{31}=6,\ \lambda_{32}=4$ bo‘ladi. S tizimning statsionar rejimini ifodalovchi (1.14.2) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi normallashtiruvchi shart bilan birgalikda quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2 \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3 \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimi $p_0 =0,6$, $p_1=0,15$, $p_2 =0,2$, $p_3=0,05$. bo‘ladi. Shunday qilib, $p_0+ p_2=0,8$, $p_0+ p_1=0,75$, $p_1+p_3= 0,2$, $p_2+p_3=0,25$ ekanligi va birinchi va ikkinchi tarmoqlarni ta’mirlashga sarflanadigan pul endi mos ravishda 8 va 4 so‘m ekanlini inobatga olib, birlik vaqt ichidagi sof foyda D_1ni hisoblaymiz:

D_1= 0,8·10 + 0,75·6 – 0,2· 8 – 0,25· 4 = 9,9 so‘m.

D_1 miqdorning D dan (taxminan 21%) ortiqligini inobatga olsak, tarmoqlarni ta'mirlashni tezlatish iqtisodiy jihatdan maqsadga muvofiqligi ayon bo'ladi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Belgi qo'yilgan holatlar grafi nima va u qanday qulayliklar tug'diradi?

2. Kolmogorovning differensial tenglamalar sistemasi nimani ifodalaydi?

3. Kolmogorovning algebraik tenglamalar sistemasini tuzish qoidasini ayting.

1.15 §. Matematik statistika elementlari

Tayanch iboralar: *bosh to'plam, tanlanma, statistika, tanlanma o'rta qiymat, tanlanma dispersiya.*

Ma'lumki, ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalar bilan bog'liq jarayonlarning matemetik modellarini o'rganadi. Unda tasodifiy jarayonlarga mos matematik modellar yordamida bizni qiziqtirayotgan u yoki bu hodisalarning ro'y berishi ehtimoli topiladi.

Matematik statistika tasodifiy hodisalar yoki jarayonlarni kuzatish yoki tajribalar o'tkazish natijasida olingan ma'lumotlar asosida shu hodisalar yoki jarayonlar haqida xulosalar chiqaradigan matematik fandir. U ehtimollar nazariyasiga tayangan holda, uning usullari va nazariy xulosalari asosida o'rganilayotgan obyekt haqida xulosalar chiqaradi [2].

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy jarayonlar modeli ma'lum deb hisoblangan holda shu jarayonlar haqida ma'lum xulosalar qilinsa, matematik statistikada esa aksincha, qandaydir tasodifiy hodisalarning sonlardan iborat statistik ma'lumotlariga asoslangan holda tegishli ehtimollik modeli tanlanadi.

Amaliyotning turli sohalarida jarayonlarni o'rganish uchun ehtimollik modellarni qurish va ulardan samarali foydalanish mumkin. Jumladan, yong'in xavfsizligi qismlarida kechadigan jarayonlar uchun qurilgan bunday modellardan qismlarning xizmat faoliyatini tahlil qilish, ma'lum bir hudud uchun zarur bo'lgan yong'in xavfsizligi qismlari sonini aniqlash, qismlar faoliyatini muayyan bir ko'rsatkich bo'yicha baholash va qator shu kabi masalalarni yechishda to'laqonli foydalanish mumkin. Bunday masalalarni yechishda matematik statistikaning taqsimot funksiyaning noma'lum parametrni statistik baholash, noma'lum taqsimot funksiyaning ko'rinishi haqidagi statistik gipotezalarni tekshirish kabi nazariy natijalaridan foydalanish zarurati yuzaga keladi. Quyida, bu natijalarni keltirishdan avval, ularni o'zlashtirish uchun zarur bo'lgan ma'lumotlarni keltiramiz.

Aytaylik, biron to'plamni tashkil qiluvchi bir xil turdagi elementlarni son bilan ifodalanadigan ma'lum bir hususiyati (masalan, o'lchami, og'irligi, narxi va h.k.) bo'yicha o'rganilayotgan bo'lsin. O'rganilayotgan barcha elementlar *bosh to'plamni* tashkil qiladi deyiladi. Bosh to'plamning elementlari kam sonda bo'lsa, ularni o'rganib chiqish, odatda, muammo tug'dirmaydi. Lekin, ko'p hollarda, bosh to'plamning elementlari soni juda ko'p (ba'zan cheksiz) bo'lib, ularning barchasini uzluksiz o'lchash amalda mumkin bo'lmaydi. Ba'zi hollarda bu umuman mumkin bo'lmasa, ayrim hollarda juda katta xarajatlarga yoki mantiqsizlikka (sinov natijasida element yaroqsiz holga keladi) yoki salbiy oqibatlarga (masalan, katta vayrongarchilik keltiradigan qurollarni sinovi) olib keladi. Bunday hollarda bosh to'plamdan tasodifiy ravishda chekli sondagi element ajratib olinadi va ularning xususiyatlari o'rganiladi. Ushbu tanlab olingan chekli sondagi elementlar *tanlanma* deb ataladi. Tanlanmalar usuli deganda, tanlanma elementlarning o'rganilayotgan hususiyatlarini statistik tahlil qilib, ular asosida bosh to'plam elementlarining hususiyatlari haqida xulosalar chiqarish tushuniladi.

Agar tanlanma bosh to'plamning deyarli barcha hususiyatlarini o'zida saqlasa, bunday tanlanma *reprezentativ (vakolatli)* tanlanma deb ataladi. Tanlanmaning reprezentativ bo'lishi o'ta muhimdir. Aks holda tanlanma bo'yicha chiqarilgan xulosani bosh to'plamga tadbiq etilishi noto'g'ri xulosaga olib kelishi mumkin.

Matematik statistikada har qanday mulohaza va xulosalar statistik ma'lumotlarga yoki boshqacha qilib aytganda tajriba natijalariga tayanadi. Odatda, tajriba natijalarini taqsimoti $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning $X_1, X_2, ..., X_n$ kuzatilmalaridan iborat deb qaraladi. Demak kuzatilmalar, kuzatuv (tajriba) o'tkazilgunga qadar bog'liqsiz va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Kuzatilmalardan tuzilgan $\vec{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ vektor hajmi n ga teng bo'lgan *tanlanma* deyiladi. Bu vektorning biron – bir aniq qiymati

$$\vec{x}= (x_1, x_2,..., x_n) \tag{1.15.1}$$

$\vec{X}$ ning *amalga oshgan (kuzatilgan) qiymatli* deyiladi.

Har qanday tajriba natijalari (1.15.1) ko'rinishidagi sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Ta'rif. Tanlanma $\vec{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ ning har qanday funksiyasi $T(X_1, X_2,..., X_n)$ *statistika* deb ataladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, statistika faqat kuzatilmalarga bog'liq bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lib, u tajriba natijasida to'liq aniqlanadi.

Kuzatuv (tajriba) natijasida $\vec{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ tanlanma (1.15.1) qiymatlarni qabul qilgan bo'lsa, u holda $T(x_1, x_2,..., x_n)$ son *statistikaning kuzatilgan qiymati* deb ataladi.

Shunday qilib, o'rganilayotgan bosh to'plam elementlarining son bilan ifodalanadigan hususiyati X tasodifiy miqdorning qiymatidan iborat bo'ladi.

Bosh to'plam elementlarida aniqlangan X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini va sonli xarakteristikalarini (masalan, matematik kutilma, dispersiya va hokazo) mos ravishda nazariy taqsimot va nazariy sonli xarakteristikalar deyiladi. Kuzatishlar asosida aniqlangan taqsimot funksiya va unga mos sonli xarakteristikalar empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi va tanlanma sonli xarakteristikalar deyiladi.

Ko'p amaliy masalalarni yechishda tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini bilish shart bo'lmay, balki uning ayrim sonli xarakteristikalarini bilish yetarli bo'ladi. Tasodifiy miqdorning asosiy sonli xarakteristikalari bu uning matematik kutilmasi va dispersiyasidir. Matematik kutilmaning statistik o'xshashi *empirik o'rta qiymat* yoki *tanlanma o'rta qiymat* deb ataluvchi statistika (1.15.1) amaliy qiymat yordamida quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1.15.2)$$

Agar (1.15.1) amaliy qiymat ichida bir xillari mavjud bo'lib, x_i qiymat n_i $i=1,2,\ldots,k$ marta takrorlansa, u holda (1.15.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\kappa} n_i x_i \qquad (1.15.3)$$

Empirik dispersiya yoki *tanlanma dispersiya* deb ataluvchi statistikalar esa (1.15.1) amaliy qiymat yordamida quyidagicha aniqlanadi:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \qquad (1.15.4)$$

Tajribalar soni n cheksiz ortib borishi bilan tanlanma xarakteristikalar nazariy sonli xarakteristikalarga yaqinlashib borishi isbotlangan.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Bosh to'plam nima?

2. Tanlanma nima va uning reprezentativligi nimani anglatadi?

3. Statistika nima va uning kuzatilgan qiymati deb nimaga aytildi?

4.Tanlanma o'rta qiymat va tanlanma dispersiya qanday aniqlanadi?

1.16 §. Statistik baholar va ularning xossalari

Tayanch iboralar: *statistik baho, siljimagan baho, optimal baho, asosli baho.*

Faraz qilaylik, kuzatilayotgan tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasi bitta noma'lum parametr θ ga bog'liq, ya'ni $F(x,\theta)$ bo'lsin. Tanlanma yordamida noma'lum parametr θ ni imkon darajada aniqroq baholash masalasini qaraymiz. Θ orqali θ ning barcha qiymatlari to'plamini belgilaylik.

Ta'rif. Agar $T_n = T(X_1,\ldots,X_n)$ statistika uchun barcha n larda $T_n \in \Theta$ o'rinli bo'lsa, u holda T_n statistika noma'lum parametr θ uchun *statistik baho* deb ataladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, bitta parametr uchun bir necha statistik baholarni keltirilishi mumkin. Shuning uchun, statistik baholar ichidan ma'lum ma'noda «yaxshi» sini tanlab olish zarurati paydo bo'ladi. Quyida statistik baholarning ega bo'lishi maqsadga muvofiq bo'lgan xossalarini keltiramiz.

I.Siljimagan baho

Ta'rif. Agar $T_n = T(X_1,\ldots,X_n)$ statistik bahoning matematik kutilmasi noma'lum parametrga teng, ya'ni

$$MT_n = MT(X_1,\dots,X_n) = \theta \qquad (1.16.1)$$

bo'lsa, bunday statistik baho *siljimagan baho* deyiladi.

Agar $T_n = T(X_1,\dots,X_n)$ statistik baho uchun $b = MT(X_1,\dots,X_n) - \theta \neq 0$ bo'lsa, u *siljigan baho* deyiladi va b soni siljish kattaligi deyiladi.

Faraz qilaylik, θ noma'lum parametr X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va $X=(X_1, X_2,\dots, X_n)$ tanlanma X ning kuzatilmalari bo'lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz.

$$T(X_1,\dots,X_n) = a_1X_1 + \dots + a_nX_n. \qquad (1.16.2)$$

Bu yerda $a_1,\dots,a_n$ lar $a_1 + \dots + a_n = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi o'zgarmas sonlar. $MX = \theta$ demak, $MX_1 = \dots MX_n = \theta$. Matematik kutilmani hisoblash qoidasiga muvofiq

$$MT(X_1,\dots,X_n) = M(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = a_1\theta + \dots + a_n\theta = (a_1 + \dots + a_n)\theta = \theta \qquad (1.16.3)$$

Bu tenglikdan (1.16.2) statistika noma'lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Xususan, $a_1 = 1, a_2 = \dots = a_n = 0$ bo'lsa (1.16.2) dan

$T(X_1,\dots,X_n) = X_1$ statistikaga, agarda $a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa

$T(X_1, X_2,\dots,X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ statistikaga ega bo'lamiz.

Yuqorida keltirilgan (1.16.3) munosabat $a_1 + \dots + a_n = 1$ tenglik bajariladigan ixtiyoriy $a_1,\dots,a_n$ lar uchun to'g'ri bo'lganligidan X_1 va $\overline{X}$ statistikalar noma'lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Demak, bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin ekan. Bu xulosadan tabiiyki, siljimagan baholarni taqqoslash zaruriyati kelib chiqadi.

II. Optimal baho

Noma'lum parametr θ uchun siljimagan baholar to'plamini U bilan belgilaylik. Oldingi boblardan ma'lumki, tasodifiy miqdorning dispersiyasi shu tasodifiy miqdorning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanchalik zich yoki tarqoq joylashganligining mezoni edi. Shuning uchun, siljimagan baholarni ularning dispersiyasiga ko'ra taqqoslash tabiiy.

Faraz qilaylik, $T_1(X_1, X_2,..., X_n) \in U$ va $T_2(X_1, X_2,..., X_n) \in U$ lar noma'lum θ parametr uchun siljimagan baholar bo'lsin. Agarda $DT_1(X_1, X_2,..., X_n) < DT_2(X_1, X_2,..., X_n)$

munosabat bajarilsa, $T_1(X_1, X_2,..., X_n)$ baho $T_2(X_1, X_2,..., X_n)$ bahodan *aniqroq baho* deyiladi.

Demak, bitta parametr uchun bir necha siljimagan baholar mavjud bo'lsa, uning statistik bahosi sifatida aniqroq bahoni qabul qilish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Yuqorida biz noma'lum matematik kutilma θ uchun ikkita siljimagan X_1 va $\overline{X}$-lardan iborat bo'lgan baholarni ko'rdik. Endi ularni taqqoslaylik.

Dispersiyani hisoblash qoidasiga asosan:

$$D\overline{X} = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n}DX = \frac{1}{n}DX_1 \qquad (1.16.4)$$

Demak, yuqorida keltirilgan taqqoslash qoidasiga muvofiq, ko'rinib turibdiki, $n \geq 2$ da $\overline{X}$ baho X_1 bahoga nisbatan aniqroq bo'ladi.

Ta'rif. Agar shunday $T^*(X_1, X_2,..., X_n) \in U$ statistika mavjud bo'lib, har qanday $T(X_1, X_2,..., X_n) \in U$ statistika uchun

$$DT^*(X_1, X_2,..., X_n) \leq DT(X_1, X_2,..., X_n)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $T^{*}(X_1,\ldots,X_n)$ – statistik baho *optimal baho* deyiladi.

Ko'rsatish mumkinki, $\overline{X}$ statistika noma'lum matematik kutilma θ uchun barcha siljimagan chiziqli baholar ichida eng aniq, ya'ni optimal baho bo'ladi.

III. Asosli baho

Ta'rif. Agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|T(X_1, X_2,\ldots, X_n) - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (1.16.5)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ statistika noma'lum θ parametr uchun *asosli baho* deyiladi.

Demak, asosli baho $T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ tajribalar soni ortib borganida noma'lum θ parametrga ehtimol bo'yicha yaqinlashar ekan. Odatda har qanday statistik bahoning asosli bo'lishi talab etiladi. Matematik ststistikada asosli bo'lmagan baholar o'rganilmaydi.

Tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ noma'lum matematik kutilma $MX = \theta$ ga asosli baho ekanligini 1.11- §. da keltirilgan kuchaytirilgan katta sonlar qonunidan kelib chiqadi.

Siljimagan baho $T_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ ning noma'lum parametr θ uchun asosli baho bo'lishi shartini quyidagi teoremada (isbotsiz) keltiramiz.

Teorema. Agar $T_n = T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ statistika θ parametr uchun siljimagan baho bo'lib, $n\to\infty$ da $DT_n \to 0$ bo'lsa, bu statistika asosli baho bo'ladi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Statistik baho deb nimaga aytiladi?*
2. *Qanday baho siljimagan baho deyiladi?*

3. Optimal baho deb nimaga aytiladi?
4. Asosli baho nima?

1.17 §. Statistik gipotezalarni tekshirish

Tayanch iboralar: *Statistik gipoteza, nolinchi va raqobatlashuvchi gipoteza, oddiy va murakkab gipoteza, statistik mezon, kritik soha, gipotezani qabul qilinish sohasi, birinchi va ikkinchi tur xatolik.*

Statistik gipoteza deb, noma'lum taqsimotning ko'rinishi haqidagi yoki ma'lum taqsimotning noma'lum parametrlari qiymatlari haqidagi har qanday farazga aytiladi. Masalan, «Bosh to'plam elementlarining X sonli xususiyati Puasson taqsimotiga ega» degan faraz statistik gipotezadir.

Nolinchi (asosiy) gipoteza deb ilgari surilgan H_0 gipotezaga, *raqobatlashuvchi* yoki *alternativ gipoteza* deb esa nolinchi gipotezaga qarama – qarshi (zid) bo'lgan har qanday H_1 gipotezaga aytiladi. Faqat bitta taxminni o'z ichiga olgan gipotezaga *oddiy gipoteza*, ikki va undan ortiq sondagi oddiy gipotezalarni o'z ichiga olgan gipotezaga *murakkab gipoteza* deyiladi.

Statistik mezon (kriteriy) deb nolinchi (asosiy) gipotezani qabul qilish yoki qabul qilinmaslik haqida xulosa qilishga asos bo'ladigan qoidaga aytiladi. Odatda statistik gipotezalarni tekshirish – statistik ma'lumotlar asosida asosiy gipotezani tasdiqlash yoki uni rad etishdan iborat bo'ladi.

Statistik mezonlarni tuzish qoidasini quyidagicha bayon etish mumkin. Statistik mezonni tuzish empirik ma'lumotarni asosiy H_0 gipoteza bo'yicha tavsiflovchi statistika $T = T(X_1, X_2,..., X_n)$ ni tanlashdan boshlanadi. Bunday tanlashda ikki xossa bajarilishi talab etiladi:

a) statistika manfiy qiymatlar qabul qilmaydi;

b) asosiy gipoteza to'g'ri bo'lganda statistikaning taqsimoti aniq ma'lum bo'lishi yoki uni yetarlicha katta aniqlikda ma'lum bir taqsimot (masalan, xi-kvadrat, normal va h.k.) bilan almashtirish mumkin bo'lishi kerak.

Faraz qilaylik, bunday stastistika tanlangan bo'lib, $S = \{t: t = T(x_1,...,x_n)\}$ – tanlangan statistikaning qiymatlari to'plami bo'lsin. Oldindan $0< \alpha <1$–sonini tayinlaymiz. S sohani shunday kesishmaydigan $S_{1\alpha}$ va $S\backslash S_{1\alpha}$ sohalarga ajratamizki, bunda asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lganda $\{T(x_1,...,x_n)\in S_{1\alpha}\}$ tasodifiy hodisaning ro'y berish ehtimoli α dan oshmasin, ya'ni:

$$P\{ T(X_1, X_2,..., X_n) \in S_{1\alpha}/H_0\} \le \alpha$$

Asosiy gipoteza H_0 tekshirish qoidasi quyidagicha bo'ladi: X tasodifiy miqdorning biror kuzatilgan qiymatlari $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ sonlarda $T = T(x) = T(x_1, x_2,..., x_n)$ miqdor $S_{1\alpha}$ sohaga tegishli, ya'ni $T(x)\in S_{1\alpha}$ bo'lsa, u holda asosiy gipoteza H_0 rad etiladi. Aks holda, ya'ni $T(x)\in S\backslash S_{1\alpha}$ bo'lsa, asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilinadi, chunki statistik ma'lumotlar asosida qilingan xulosalar asosiy gipotezani rad etmaydi. Shuni ta'kidlash lozimki, $T(x)\in S\backslash S_{1\alpha}$ bo'lishi asosiy gipoteza H_0 ni albatta to'g'ri bo'lishini tasdiqlamaydi, balki bu holat statistik ma'lumotlar va nazariy gipotezaning yetarli darajada muvofiqligini ko'rsatadi xolos. Yuqorida keltirilgan $T=T(X_1, X_2,..., X_n)$ funksiya statistik mezon statistikasi, $S_{1\alpha}$ - soha statistik mezonning *kritik sohasi*, $S\backslash S_{1\alpha}$–soha statistik mezonning *gipotezani qabul qilinish sohasi*, α soni esa mezonning aniqlik darajasi deyiladi. Odatda, α ning qiymatlari sifatida 0.1; 0.05; 0.01 sonlar qaraladi.

Yuqorida keltirilgan qoidadan shunday xulosaga kelish mumkin: mezonning kritik sohasi $T = T(X_1, X_2,..., X_n)$ statistikaning shunday qiymatlarini o'z ichiga oladiki, asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lganda, $T = T(X_1, X_2,..., X_n)$ ning ushbu qiymatlarni qabul qilish ehtimoli kichik bo'ladi.

Odatda, $T = T(x_1, x_2,..., x_n)$ statistikaning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami biror intervalni tashkil qiladi. Shu sababli kritik soha ham gipotezani qabul qilinish sohasi ham intervalardan iborat bo'ladi. Ularni nuqtalar ajratib turadi. Bu nuqtalar *kritik nuqtalar* deyiladi.

Kritik sohalar quyidagicha bo'lishi mumkin.

a) o'ng tomonlama kritik soha:

$$Z > Z_{kp}$$

b) chap tomonlama kritik soha:

$$Z < Z_{kp}$$

d) ikki tomonlama kritik soha:

$$|Z| > Z_{kp}$$

Bu yerda Z_{kp} kritik nuqtalar.

Statistik ma'lumotlar asosida aniq va qat'iy bir yechimga kelish qiyin, shuning uchun har qanday yechimda ma'lum xatolikka yo'l qo'yish mumkin. Matematik statistikada statistik gipotezalarni tekshirishda ikki xil xatolikka yo'l qo'yishi mumkin:

a) aslida to'g'ri bo'lgan asosiy gipoteza H_0 ni rad etiladi, ya'ni H_0 to'g'ri bo'lganida $T(X_1, X_2, ..., X_n) \in S_{1\alpha}$ hodisa ro'y beradi. Bunday xatolik ***birinchi turdagi xatolik*** deyiladi. Demak, shartga asosan birinchi turdagi xatolik α dan oshmaydi.

b) aslida noto'g'ri bo'lgan asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilinadi, ya'ni H_0 noto'g'ri bo'lganida $T(X_1, X_2, ..., X_n) \in S \setminus S_{1\alpha}$ bo'ladi. Bunday xatolik ***ikkinchi turdagi xatolik*** deyiladi.

Statistik mezonlarga qo'yiladigan asosiy talablardan biri bu ikki turdagi xatoliklarni imkon darajada kichik bo'lishini ta'minlashidir.

Kriteriyning quvvati deb alternativ (raqobatlashuvchi) gipoteza o'rinli bo'lishi shartida $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ statistikaning kritik sohaga tushish ehtimoliga aytiladi. Kriteriyning quvvati qancha katta bo'lsa, ikkinchi tur xatoga yo'l qo'yish ehtimoli shuncha kichik bo'ladi.

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi noma'lum $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ tanlanmasining kuzatilgan qiymatlari $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ berilgan bo'lib, uning asosida taqsimot funksiya $F(x)$ ni aniqlash kerak bo'lsin, ya'ni asosiy gipoteza $H_0{:}F(x)=F_0(x)$. tekshirish talab etilsin. Bu yerda $F_0(x)$ biron aniq taqsimot funksiya.

Muvofiqlik mezoni deb noma'lum taqsimot funksiyaning umumiy ko'rinishi haqidagi H_0 gipotezani qabul qilish yoki rad etishga imkon beradigan mezonga aytiladi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Statistik gipoteza deb nimaga aytiladi?

2. Nolinchi va raqobatlashuvchi gipoteza deb qanday gipotezaga aytiladi?

3. Oddiy va murakkab gipotezalar qanday gipotezaplar?

4. Statistik mezon nima?

5. Kritik soha va gipotezani qabul qilinish sohasi deb qanday sohalarga aytiladi?

6. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar nimani baholaydi?

1.18 §. K. Pirsonning *xi*–kvadrat muvofiqlik mezoni

Tayanch iboralar: *K. Pirsonning noparametrik va paremetrik gipotezalar uchun muvofiqlik mezonini.*

Nisbatan universal va foydalanish uchun qulay bo'lgan muvofiqlik mezonlaridan biri *Pirsonning muvofiqlik mezonidir* [3],[11],[18]. Quyida ushbu mezon bo'yicha gipotezalarni tekshirish qoidasini ko'rib chiqamiz.

Pirsonning muvofiqlik mezoni *xi–kvadrat taqsimot* tushunchasi bilan uzviy bog'liq bo'lganligi sababli, avvalambor, ushbu taqsimot to'g'risida qisqacha ma'lumot keltiramiz.

O'zaro bog'liq bo'lmagan, standart normal taqsimotga ega bo'lgan k ta X_i,i = 1,2,...,k tasodifiy miqdorlar kvadratlarining yig'indisi

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

tasodifiy miqdorning taqsimoti erkinlik darajasi k teng bo'lgan *xi*–kvadrat taqsimot deyiladi. Bunday taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$f_k(x)=\begin{cases}0, & agar, x\le 0, bo'lsa,\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}e^{\frac{x}{2}}\cdot x^{\frac{k}{2}-1}, & agar\ x>0, bo'lsa\end{cases}$$

bu yerda $G(x)=\int\limits_0^{\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$ – gamma funksiya deb ataladi.

K. Pirsonning *xi*–kvadrat muvofiqlik mezoni bo'yicha *noparametrik* va *parametrik* gipotezalarni tekshirish usuli mavjud bo'lib, ular bir –biridan bir muncha farq qiladi.

Dastavval, K. Pirsonning noparametrik gipotezalar uchun *xi*–kvadrat muvofiqlik mezonini ko'rib chiqamiz [3],[18].

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi noma'lum $F(x)$ bo'lgan kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning qiymatlari to'plami –Δ bo'lsin. Uni k ta kesishmaydigan $\Delta_1, \Delta_2, ... \Delta_k$ oraliqlarga ajratamiz:

$$\Delta=\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i \qquad \Delta_i\bigcap\Delta_j=\emptyset,\ i\neq j,\ i,j=1,2,...,k$$

Takrorlanishlar vektori deb ataladigan $\vec{m}=(m_1,...,m_k)$ vektorni kiritamiz.

Bu vektorning *i*–koordinatasi kuzatilmalardan m_i tasi Δ_i oraliqqa tushganligini anglatadi. Ko'rinib turibdiki, takrorlanishlar vektori m tanlanma $(X_1, X_2, ..., X_n)$ orqali bir qiymatli aniqlanadi va $m_1+m_2+...+m_k=n$ o'rinli bo'ladi.

Asosiy gipoteza H_0: $F(x)=F_0(x)$ to'g'ri ekanligi sharti ostida X tasodifiy miqdorning Δ_i oraliqqa tushishi ehtimolini P_{i0} bilan belgilaylik:

$$P_{i0}=P\{X\in\Delta_i/H_0\},\ i=1,2,...,\kappa.$$

Quyidagi statistikani kiritamiz:

$$Z_n^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_k-nP_{i0}))^2}{nP_{i0}}=n\sum_{i=1}^{k}\frac{(\frac{m_k}{n}-P_{i0})^2}{P_{i0}} \tag{1.18.1}$$

va H_0: $F(x)=F_0(x)$ asosiy gipotezani to'g'riligini tekshiramiz.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan nisbiy chastota m_i/n bir ehtimol bilan nazariy ehtimol P_{i0} ga intiladi. Demak, agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, u holda Z_n^2 statistikaning qiymati yetarli darajada kichik bo'lishi kerak. Demak, Pirsonning xi–kvadrat mezoni Z_n^2 statistikaning katta qiymatlarida asosiy gipoteza H_0 ni rad etadi, ya'ni mezonning kritik sohasi $S_{1\alpha}=\{t:t>t_\alpha\}$ ko'rinishda bo'ladi. Asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lganida Z_n^2 statistikaning aniq taqsimotini hisoblash ancha murakkab, bu esa o'z navbatida mezonning kritik chegarasi t_α ni topishda qiyinchilik tug'diradi. Ammo, n yetarli katta bo'lsa H_0 gipoteza to'g'ri bo'lganida Z_n^2 statistikaning taqsimotini limit taqsimot bilan almashtirish mumkin. Bu tasdiq quyida keltirilgan Pirson teoremasidan kelib chiqadi.

Teorema (Pirson). Agar $0<P_{i0}<1$, $i=1,2,...,ê$. bo'lsa, u holda,

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{Z_n^2<t/H_0\right\}=P\left\{\chi_{k-1}^2<t\right\},$$

bu yerda χ_{k-1}^2 erkinlik darajasi *k-1* bo'lgan xi–kvadrat taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor. Ushbu teoremadan quyidagi

$$P\{Z_n^2>t/H_0\}\approx P\{\chi_{k-1}^2>t\} \tag{1.18.2}$$

taqribiy tenglikda $n\to\infty$ da xatolik kamayib borishi kelib chiqadi. Demak, bu natijadan n ning katta qiymatlarida foydalanish mumkin. Bunda kritik chegara t_α ushbu $P\{\chi_{k-1}^2>t_\alpha\}=\alpha$,

$0 < \alpha < 1$ tenglamadan topiladi. Buning uchun xi–kvadrat taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan foydalaniladi (2- Ilova).

Demak, tanlanmaning kuzatilgan qiymatida Z_n^2 statistikaning qiymati hisoblanadi, agar u qiymat gipotezani qabul qilish sohasiga tushsa, ya'ni $Z_n^2 < t_\alpha$ bo'lsa, *H₀* gipoteza qabul qilinadi va X tasodifiy miqdor F_0 taqsimot funksiyaga ega deb hisoblanadi, agar $Z_n^2 > t_\alpha$ bo'lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi.

Endi, K. Pirsonning *parametrik gipotezalar* uchun xi–kvadrat muvofiqlik mezonini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, $H_0 : F(x) = F_0(x, \theta)$ murakkab gipotezani tekshirish lozim bo'lsin. Bu yerda $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$ noma'lum r o'lchovli vektor (ya'ni, nomalum parametrlar soni r ta). U holda $P_{i0}(\theta) = P\{X \in \Delta_i / H_0\}$ ehtimol va

$$Z_n^2(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_k - nP_{i0}(\theta))^2}{nP_{i0}(\theta)} \qquad (1.18.3)$$

statistika nomalum $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$ parametrga bog'liq bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\tilde{\theta}$ – nomalum parametr θ ning $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tanlanma orqali topilgan bahosi bo'lib, u $Z_n^2(\theta)$ statistikaga minimum qiymat bersin. Quyidagi munosabat o'rinli bo'lishi ($P_{i0}(\theta)$ ehtimolga qo'yilgan ma'lum bir shartlarda) P.Fisher tomonidan 1924-yilda isbotlagan:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ Z_n^2(\tilde{\theta}) < t / H_0 \right\} = P\left\{ \chi_{k-1-r}^2 < t \right\} \qquad (1.18.4)$$

bu yerda χ_{k-1-r}^2 erkinlik darajasi *k-1-r* bo'lgan xi – kvadrat taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor.

Ushbu tasdiqdan kelib chiqadiki, n ning katta qiymatlarida ushbu

$$P\left\{Z_n^2(\tilde{\theta}) < t / H_0\right\} \approx P\left\{\chi^2_{\kappa-1-r} < t\right\} \qquad (1.18.5)$$

taqribiy tenglikdan foydalanish mumkin va t_α kritik chegarani

$$P\left\{\chi^2_{k-1-r} > t_\alpha\right\} = \alpha \ , \ 0 < \alpha < 1 \qquad (1.18.6)$$

tenglamadan topish mumkin. Kritik chegara aniqlangandan so'ng H_0 gipotezani tekshirish avvalgi holdagi kabi amalga oshiriladi.

Ta'kidlash joizki, P.Fisher tomonidan isbotlagan (1.18.4) munosabat o'rinli bo'lishi uchun bajarilishi lozim bo'lgan barcha shartlarni (1.15.2) formula bilan aniqlangan tanlanma o'rta qiymat $\bar{x}$ hamda (1.15.4) bilan aniqlangan tanlanma dispersiya S^2 to'liq qanoatlantiradi. Shuning uchun, noma'lum parametrning bahosi sifatida ushbu statistikalar qo'llanilganda (1.18.5) munosabatdan foydalanish mumkin bo'ladi.

Ta'kidlash joizki, odatda, xi–kvadrat mezonining kritik chegarasi t_α χ^2 taqsimotning ozodlik darajasi $k \leq 30$ bo'lganda 2-ilovada keltirilgan kritik nuqtalar jadvalidan topiladi. Agar χ^2 taqsimotning ozodlik darajasi $k > 30$ bo'lsa, u holda χ^2 taqsimot normal taqsimot bilan almashtiriladi. Bunday almashtirishdagi xatolik χ^2 taqsimotning ozodlik darajasi ortishi bilan kamayib boradi.

Statistik gipotezani Pirsonning muvofiqlik mezoni yordamida tekshirishga oid misol keltiramiz.

1.18.1-misol.

Quyidagi jadvalda avtomobil ta'mirlash ustaxonasining 8 soatlik ish vaqti mobaynida ustaxonaga ish vaqtining har bir soatida kirib kelgan mijozlar sonini 10 kunlik kuzatuvi natijasi keltirilgan.

Ish vaqti soati Ish kuni	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	2	3	4	3	5	2
2	3	2	3	2	7	2	3	3
3	1	3	4	3	4	6	4	2
4	4	4	4	5	9	3	4	4
5	2	1	3	7	3	6	2	3
6	3	2	3	4	5	5	3	2
7	4	3	4	3	8	3	4	3
8	1	2	2	4	3	4	2	4
9	3	4	6	3	4	2	4	2
10	2	2	3	5	6	4	2	5

Jadvalda keltirilgan n=80 ta kuzatuv natajalari asosida 1 soat mobaynida ustaxonaga kirib kelgan mijozlar sonidan iborat ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni Puasson taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlilik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik mezoni yordamida aniqlash talab qilinsin.

Yechish.

Masalani yechish uchun Pirsonning parametrik gipotezalar uchun *xi*–kvadrat muvofiqlik mezonidan foydalanamiz. Yuqoridagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar tahlili asosida quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1

bu yerda k–mijozlar soni, m_k–ish vaqtining ustaxonada k ta mijoz bo'lgan 1 soatlik qismlari soni.

Yuqorida keltirilgan (1.18.3) formuladan foydalanish uchun zarur bo'lgan qiymatlarni hisoblab topamiz.

Ma'lumki, λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdor uchun $M\xi = \lambda$ o'rinli. Shuning uchun λ parametrga baho sifatida (1.15.2) formula bilan aniqlangan optimal baho $\overline{\delta}$ dan foydalanamiz:

$$\lambda \approx \overline{x} = \frac{1}{80}\sum_{\kappa=1}^{9}\phi_\kappa \kappa = \frac{1}{80}(3+2\cdot 19+3\cdot 23+4\cdot 21+5\cdot 6+6\cdot 4+7\cdot 2+8+9) \approx 3,49$$

Nazariy chastotalarni quyidagi formuladan topamiz:

$$nP_{\kappa 0}(\lambda) = L_k = n\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}e^{-\lambda} = 80\frac{3,49^\kappa}{\kappa!}e^{-3,49} \quad \kappa = 1,2,\dots,9$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_k	8,52	14,9	17,3	15,1	10,5	6,11	3,05	1,33	0,52

Yuqoridagi (1.18.3) formuladan Pirson mezonining kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$Z_9^2(\lambda) = \sum_{i=1}^{9}\frac{(m_k - L_k)^2}{L_k} = 12,43$$

Masala shartida berilgan $\alpha = 0,05$ - mezonning aniqlik darajasi va erkinlik darajasi k-1-r=9-1-1=7 (parametrlar soni r=1) bo'lgan xi–kvadrat taqsimotning kritik nuqtalari jadvali (2-ilova)dan kritik chegarani topamiz: $t_\alpha = \chi^2(0,05;7) = 14,1$.

Shunday qilib, 12,43< 14,1 ekanligidan $Z_9^2(\lambda) < t_\alpha$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. Demak, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni 0,05 aniqlilik darajasi bilan Puasson taqsimotga muvofiq ekanligi haqida xulosa qilish mumkin.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Noparametrik gipotezalar uchun K. Pirsonning muvofiqlik mezonini keltiring.

2. Parametrik gipotezalar K. Pirsonning muvofiqlik mezoni bilan qanday tekshiriladi?

II BOB

OMMAVIY XIZMAT KO'RSATISH NAZARIYASI

2.1 §. Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi fanining qisqacha tarixi

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi (OXKN) fani ehtimollar nazariyasining bo'limi sifatida unchalik uzoq bo'lmagan tarixga ega. OXKN ning birinchi muhim tadqiqot predmeti 20–asrning boshlarida telefon tizimlari bo'lgan. Ma'lumki, bunday tizimlarning holati, tizimga tasodifiy vaqtda kelib turadigan abonentlar chaqiruvlari oqimi hamda tizimga kelib tushgan har bir abonent chaqiruvining telefon tarmog'ini tasodifiy vaqt mobaynida band qilib turishi bilan tavsiflanadi. Bunday holatda, quyidagicha masala yuzaga keladi: tegishli hisob-kitoblar orqali telefon kommutatorining shunday hajmini aniqlash kerakki, bunda kommutatorning band bo'lishi ehtimoli avvaldan berilgan miqdordan katta bo'lmasin.

Daniyalik olim, Kopengagen telefon tarmog'i xodimi bo'lgan Agner Krarup Erlang (1873-1929) ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi fanining asoschisi hisoblanadi. U xizmat ko'rsatish tizimiga kelib tushayotgan chaqiruvlar oqimini yuklama deb hisoblash g'oyasini birinchi bo'lib ilgari surgan va telefon tarmoqlari yuklamasini hisoblash bo'yicha o'zining dastlabki tadqiqotlari natijalarini 1909-1920-yillarda e'lon qilgan.

A.K.Erlang o'zining tadqiqotlari natijasida ko'pgina prinsipial natijalarga erishgan bo'lib, ulardan hozirgi kunda ham aloqa tizimlarida samarali foydalanib kelinmoqda. Uning nomi bilan atalgan "*k*–tartibli Erlang oqimi" zamonaviy aloqa tizimlarida muhim oqimlardan biri sanaladi.

Keyinchalik ma'lum bo'ldiki, telefon tizimlari uchun ishlab chiqilgan matematik modellar boshqa juda ko'p sohalardagi jarayonlarni o'rganish uchun ham yaroqli ekan.

OXKNning birinchi o'rganish ob'yekti telefon tizimlar bo'lganligi sababli unga dastlabki vaqtlarda kiritilgan — chaqiruv, kanal, kanal yuklamasi va shu kabi terminlar hozirgi vaqtda ham saqlanib qolgan.

XX asrning 30–yillari o'rtalarida V.Feller tomonidan "tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni (ba'zi adabiyotlarda «ko'payish va halok bo'lish jarayoni» deb ham ataladi) deb nomlangan jarayonning matematik modeli ishlab chiqildi. Bu model atroflicha o'rganilgandan so'ng OXKN jiddiy o'rganish obyekti sifatida matematiklar e'tiborini o'ziga tortdi.

XX asrning 40-yillariga kelib telefon yuklamasining o'zgarishini matematik usullar yordamida jiddiy tadqiq qilgan va teletrafika nazariyasi hamda ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi sohasida salmoqli natijalarga erishgan shaxs shved muhandisi va olimi Konrad Palma (1907–1951) hisoblanadi. OXKN da uning nomi bilan ataluvchi chaqiruvlar oqimi mavjud bo'lib, K. Palmaning bu oqim bilan bog'liq tadqiqot natijalari bugungi kunda ham o'z dolzarbligini yo'qotmagan.

Yetuk rus matematigi Aleksandr Yakovlovich Xinchin (1884–1959) OXKNni rivojlantirishda, uning umumiy teoremalarini ishlab chiqishda katta hissa qo'shgan, ayni vaqtda, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi terminini kiritgan olim hisoblanadi. Chet el adabiyotlarida ushbu fan ko'pincha navbatlar nazariyasi (the theory of queues) deb ataladi.

Ushbu nazariyaning rivojlanishiga rus olimlaridan A.N. Kolmogorov, B.V. Gnedenko, E.S. Vensellar ham katta hissa qo'shganlar.

Rossiyalik matematik olim N.N.Brushlinskiy OXKNni yong'in xavfsizligini ta'minlash tizimi masalalariga tadbiqi bilan shug'ullanib, salmoqli natijalarga erishgan va amaliyot uchun ilmiy asoslangan qator tavsiyalar ishlab chiqqan [4],[5],[6]. U ma'lum bir hudud (shahar, viloyat va h.k.) uchun zarur bo'lgan yong'in xavfsizligi qismlari soni, yong'in xavfsizligi bo'lim (bo'linma) larining shtat birliklari sonini hamda ularning moddiy–texnik ta'minotini asoslash, yong'in xavfsizligi qismlarining joylashuvi bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqish, tezkor bo'linmalarning yong'in o'chirish bilan band bo'lish vaqtlari taqsimoti, yong'in o'chirishga chaqiruvlar oqimi intensivligini muvofiqlik alomatlari orqali tekshirish va h.k. kabi masalalarni oʻrgangan va koʻpgina hududlar uchun tegishli tavsiyalar taqdim etgan.

2.2 §. Fanning predmeti, maqsadi va vazifalari

Tayanch iboralar: *ommaviy xizmat koʻrsatish tizimi, xizmat koʻrsatish kanali, kiruvchi va chiquvchi chaqiruvlar oqimi, ommaviy xizmat koʻrsatish tizimi elementlari, parametrlari va samaradorligi koʻrsatkichlari.*

Bir xil tipdagi masalalarni yechishda (xizmatlarni bajarishda) koʻp marotaba foydalanish uchun ishlatiladigan tizimlarni, ommaviy xizmat koʻrsatish tizimi (OXKT) deb atash qabul qilingan.

Bunday tizimlarga valyuta almashtiruv punktlari, avtomobil ta'mirlash, yonilgʻi quyish shahobchalari, chipta sotish kassalari, telefon stantsiyalari, ma'lumotlar byurosi va h.k. kabi tizimlar yaqqol misol boʻla oladi. Shu jumladan, avariya xizmatlari – elektr yoki gaz ta'minoti boʻlimlarining avariya xizmatlari, tez yordam xizmati yoki maxsus tezkor xizmatlar – harbiy soha – havo hujumiga qarshi mudofaa xizmati, ichki ishlar organlarining tezkor xizmatlari (navbatchilik qismlari), va nihoyat, yongʻin xavfsizligi xizmati ham OXKTga misol boʻladi.

Shunday qilib, OXKT bir xil tipdagi chaqiruvlarga xizmat koʻrsatish bilan shugʻullanadi. Chaqiruvlarga xizmat koʻrsatish deganda kelib tushgan chaqiruv talabini qondirish jarayoni tushuniladi. Xizmat koʻrsatish oʻz tabiatiga koʻra turli xarakterda boʻlishi mumkin. Ba'zi hollarda xizmat koʻrsatish bitta odam tomonidan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, haridorlarga bitta sotuvchi tomonidan xizmat koʻrsatilishi, be'morlarni bitta shifokor tomonidan qabul qilinishi va h.k. Ba'zi hollarda esa xizmat koʻrsatish texnik qurilmalar tomonidan amalga oshirishi mumkin. Masalan, ichimlik suvi sotuvchi avtomat qurilmalar, plastik kartochkadagi pul mablagʻini naqd pulga aylantiruvchi qurimalar va h.k..

Chaqiruvlarga xizmat koʻrsatish vositalarining jamlanmasi *xizmat koʻrsatish kanali* deb ataladi.

Aloqa simlari, ta'mirlash ustaxonasi xodimlari, elektromonterlar, ishchilar, chipta sotuvchi kassalar, savdo shahobchalarining sotuvchilari, avariya yoki tez yordam xizmatlari brigadalari, yong'in o'chirish ekipajlari va h.k. lar kanallarga misol bo'ladi.

Kanallar soniga qarab OXKT *bir kanalli va ko'p kanalli* tizimlarga ajratiladi. Masalan, bitta yonilg'i quyish tarmog'idan iborat AYoQSh, bitta telefon apparati bo'lgan chaqiruv qabul qilish punkti, bitta yong'in o'chirish bo'linmasidan iborat alohida yong'in xavfsizligi qismlari yoki maskanlardagi yong'in xavfsizligi postlari – bir kanalli, bir necha darchali chipta sotish kassalari, ikki va undan ortiq brigadasi bo'lgan tez yordam xizmati maskani, muayyan shahardagi yong'in o'chirish garnizoni – ko'p kanali tizimga misol bo'la oladi.

Vaqtning tasodifiy onlarida OXKTga kelib tushadigani bir jinsli chaqiruvlarning ketma - ketligiga *kiruvchi chaqiruvlar oqimi* deyiladi. OXKTni tark etuvchi chaqiruvlar ketma – ketligi esa *chiquvchi chaqiruvlar oqimi* deb ataladi. Chiquvchi chaqiruvlar oqimini asosan, OXKT tomonidan xizmat ko'rsatilgan chaqiruvlar tashkil etadi. Lekin, OXKTga kelib tushgan barcha chaqiruvlar faqat ularga xizmat ko'rsatilgandan keyingina tizimni tark etadi deb bo'lmaydi. Ayrim chaqiruvlar tizimni xizmat ko'rsatilmasdan tark etishlari ham mumkin. Masalan, do'konda haridorga kerakli mahsulot bo'lmasa yoki kerakli mahsulot bo'lsada uni harid qilish uchun navbatda odamlar ko'p bo'lib, haridorning kutishga vaqti bo'lmasa, haridor do'konni harid qilmasdan tark etadi. Demak, chiquvchi chaqiruvlar oqimida xizmat ko'rsatilmasdan OXKTni tark etgan chaqiruvlar ham bo'lishi mumkin.

Xizmat ko'rsatilishi uchun chaqiruvlar OXKTga, odatda, avvaldan noma'lum bo'lgan tasodifiy vaqtlarda kelib tushadi. Kelib tushgan chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish ham, umuman olganda, avvaldan noma'lum bo'lgan tasodifiy vaqt davom etadi. Chaqiruvlar kelib tushishi vaqtining hamda chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish vaqtining tasodifiy bo'lishi, odatda, OXKTning notekis ishlashiga olib keladi. Ya'ni, uning faoliyati bir maromda bo'lmaydi: qandaydir vaqt oralig'ida OXKTda juda ko'p miqdorda chaqiruvlar to'planib qoladi (ular navbatga turadilar yoki

OXKTning xizmat ko'rsatishini kutmay ketib qoladilar), boshqa bir vaqt oralig'ida OXKTda chaqiruvlar sonining kamligi yoki umuman yo'qligi tufayli OXKT to'la quvvat bilan ishlamaydi yoki «ishsiz» turadi. Aynan ana shu ikkita tasodifiylikning mavjudligi OXKN fani paydo bo'lishiga sabab bo'ldi.

Har qanday OXKT, chaqiruvlar oqimining harakteri, xizmat ko'rsatish kanallari soni va ularning samaradorligi, xizmat ko'rsatishni tashkil qilish tartibi kabi o'zining parametrlariga ega bo'ladi. Ushbu parametrlardan kelib chiqib OXKT ma'lum bir faoliyat ko'rsatish samaradorligi («o'tkazuvchanlik» qobiliyati) ko'rsatkichiga ega bo'ladi. Bu ko'rsatkichlar OXKTning chaqiruvlar oqimiga xizmat ko'rsatish sifatini belgilaydi.

Demak, OXKT faoliyatining sifati deganda chaqiruvlarga ko'rsatilgan xizmatning sifati emas, balki, OXKTning chaqiruvlarga xizmat ko'rsata olish qobiliyati darajasi, tizimning xizmat ko'rsatish bilan qay darajada to'liq bandligi, kanallar bo'sh qolmayotganligi, navbat paydo bo'lmayotganligi yoki navbatning juda kichikligi va h.k. tushuniladi.

OXKT faoliyatining sifatini oshirish uchun kelib tushayotgan chaqiruvlarni kanallar bo'yicha qanday taqsimlash ma'qulligi, kanallarni soni qancha bo'lishi maqsadga muvofiqligi va shu kabi masalalarni yechish zarurati paydo bo'ladi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi fanining o'rganish *predmeti* bu OXKTdir.

OXKN fanining maqsadi – OXKT yuqori samaradorlik bilan faoliyat olib borishi uchun tizim tarkibiy tuzilmasini ratsional shakllantirish, uning ish faoliyatini ratsional tashkil qilish va chaqiruvlar oqimini boshqarish bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqishdir.

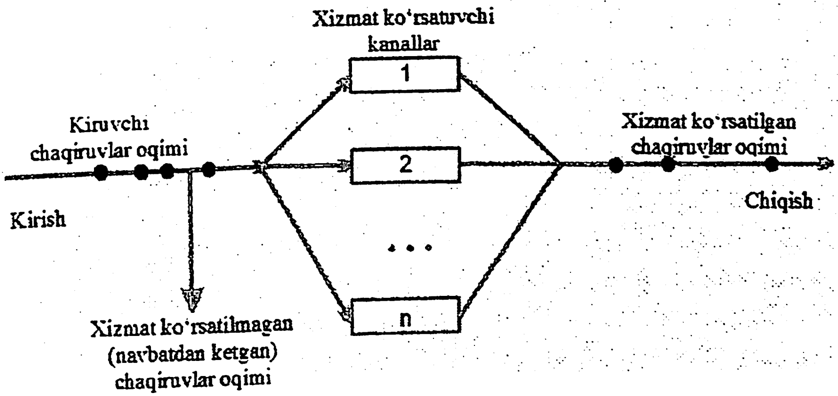
Ushbu maqsadga erishish uchun OXKNda quyidagicha *vazifa* qo'yiladi: OXKTning mavjud ishlash shart – sharoitlarini (kanallar soni, ularning xizmat ko'rsatish qobiliyati darajasi, chaqiruvlar oqimining xarakteri va h.k.) OXKTning chaqiruvlar talabini qondira olish qobiliyatini ifodalovchi samaradorlik ko'rsatkichlari bilan bog'lovchi matematik model qurish, uni o'rganish va natijalarni tahlil qilish.

Hal qilinishi lozim bo'lgan masalaning mohiyatidan kelib chiqib, OXKT ning samaradorligi ko'rsatkichlari sifatida quyidagilarni qarash mumkin:

"birlik vaqt oralig'ida xizmat ko'rsatiladigan chaqiruvlarning o'rtacha soni", "navbatda turgan o'rtacha chaqiruvlar soni", "xizmat ko'rsatishni kutishning o'rtacha vaqti", "kutmaydigan chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli", "navbatda turgan chaqiruvlar sonining berilgan sondan ortib ketishi ehtimoli", "kanallarning ishsiz turishi ehtimoli" va h.k.

Fanni o'qitishdan maqsad – o'quvchilarga OXKT faoliyatini matematik modellashtirish, muhandislik masalalari, hususan, yong'in xavfsizligini ta'minlash tizimlariga oid masalalarini yechishga OXKNni tadbiq qilish usullarini o'rgatishdan iboratdir.

OXKT sxematik tarzda 2.2.1 – chizmada tasvirlangan.



2.2.1-chizma

Shunday qilib, har qanday OXKT quyidagi asosiy *elementlarni* o'z ichiga oladi:

1) Kiruvchi chaqiruvlar oqimi;

2) Xizmat ko'rsatuvchi kanallar; Ular OXKT faoliyatining basosini tashkil qiluvchi barcha xizmatlarni mustaqil ravishda bajaradilar. Bu bilan OXKT ning «birlik vaqt ichida xizmat ko'rsatilgan chaqiruvlar soni»dan iborat «o'tkazuvchanlik qobiliyati»ni oshira oladilar.

3) Navbat; OXKTga chaqiruvlar kelib tushgan zahoti ularga xizmat ko'rsatishni boshlash imkoni bo'lmaganda tizimda navbat paydo bo'ladi yoki chaqiruvlar tizimni xizmat ko'rsatilmasdan tark etadilar. Bunday hollarda navbat uzunligi, navbatni tashkil qilish tartibi, kutish vaqti kabi xarakteristikalar muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

1) OXKTdan chiquvchi chaqiruvlarning oqimi; Ushbu oqimni tashkil qiluvchi chaqiruvlar xizmat ko'rsatilgan yoki xizmat ko'rsatilmagan bo'lishi mumkin.

Kiruvchi chaqiruvlar oqimining hamda chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish vaqtining tasodifiy xarakterdaligi sababli ularni tavsiflashda ehtimollar nazariyasinining fundamental tushunchalaridan biri – tasodifiy miqdorning *taqsimot qonuni* tushunchasi qo'llaniladi. Shunday qilib, OXKN OXKT ga chaqiruv kelib tushish vaqtining taqsimoti va chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish vaqtining taqsimoti kabi tushunchalaridan foydalanadi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimida kechayotgan jarayonlarni tahlil qilish uchun tizim parametrlarini bilish muhim ahamiyatga ega. OXKTning asosiy *parametrlari* sifatida quyidagilarni qarash mumkin:

2) OXKTning kanallari soni;

3) Kiruvchi chaqiruvlar oqimining parametrlari, harakteri – oqim turi va uning intensivligi;

4) Kanallarning xizmat ko'rsatish intensivligi;

5) Navbat joriy qilingan OXKTlarida:

5.1. Navbatni tashkil qilish shartlari. (navbatni cheklanmaganligi yoki navbat cheklangan bo'lsa unda «o'rin»lar soni – navbatning maksimal «uzunligi»);

5.2. Kutish va xizmat ko'rsatish tartibi (qoidasi). Imtiyozli chaqiruvlarning mavjudligi, imtiyoz turlari va h.k.

Quyida, ushbu parametrlardan kelib chiqib, OXKT faoliyatining samaradorlik xarakteristikalarini ifodalaymiz.

OXKT faoliyatining *samaradorlik xarakteristikalari* sifatida quyida uchta asosiy guruh ko'rsatkichlarni keltirish mumkin:

1. OXKT dan foydalanish samaradorligi ko'rsatkichlari:

1.1. Absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati – birlik vaqt ichida OXKT xizmat ko'rsatadigan chaqiruvlarning o'rtacha soni;

1.2. Nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati – tizim tomonidan birlik vaqt ichida xizmat ko'rsatiladigan chaqiruvlar o'rtacha sonini shu vaqt ichida tizimga kelib tushgan chaqiruvlarning o'rtacha soniga nisbati. Bu esa o'z navbatida OXKTga kelib tushgan chaqiruvga xizmat ko'rsatilishi ehtimoliga teng;

1.3. OXKT band bo'lishi vaqtining o'rtacha davomiyligi;

1.4. OXKTdan foydalanilish koeffitsiyenti – vaqtning OXKT xizmat ko'rsatish bilan band bo'ladigan qismining o'rtachasi, va h.k.

2. OXKT ning chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish sifati ko'rsatkichlari:

2.1. Chaqiruvning navbatda turishi (kutishi)ning o'rtacha vaqti;

2.2. Chaqiruvning OXKTda bo'lishining o'rtacha vaqti;

2.3. Xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli, ya'ni OXKTga kelib tushgan chaqiruvning unga xizmat ko'rsatilmasdan tark etishi ehtimoli;

2.4. Chaqiruv OXKTga kelib tushgan zahoti unga xizmat ko'rsatilishi ehtimoli;

2.5. Chaqiruvning navbat turish (kutish) vaqtining taqsimot qonuni ;

2.6. Chaqiruvning OXKTda bo'lishi vaqtining taqsimot qonuni;

2.7. Navbatda turgan chaqiruvlarning o'rtacha soni;

2.8. Band kanallarning o'rtacha soni (ko'p kanalli tizim uchun);

2.9. Navbatdagi band "joy" larning o'rtacha soni;

2.10. Xizmat ko'rsatish kanalining band yoki bo'sh bo'lishining o'rtacha vaqti va boshqalar.

3. "OXKT – mijoz" juftligi faoliyatining samaradorligi ko'rsatkichlari:

Bu yerda "mijoz" deganda barcha chaqiruvlarning jamlanmasi yoki ularning manbai tushuniladi. Bunday ko'rsatkichga misol sifatida "OXKTning birlik vaqt ichida keltiradaigan o'rtacha daromadi", "OXKT faoliyatsizligi (ta'mirlanishi) natijasida birlik vaqt ichida keltiradigan o'rtacha zarar" va h.k.larni keltirish mumkin.

OXKTga chaqiruvlar kelib tushishi vaqtining hamda chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish vaqti davomiyligining tasodifiy bo'lishi OXKTda tasodifiy jarayon kechishiga olib keladi.

Bu jarayonni ratsional tashkil etish yuzasidan tavsiyalar ishlab chiqish uchun tizimda kechayotgan tasodifiy jarayonning matematik modelini qurish, uni o'rganish va tahlil qilish kerak bo'ladi. Bu esa, yuqorida ta'kidlanganidek, OXKNning asosiy vazifasi hisoblanadi.

OXKTda kechadigan jarayonlar tasodifiy xarakterga ega bo'lganligi uchun OXKN tasodifiy jarayonlar nazariyasiga asoslanadi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *OXKT va uning xizmat ko'rsatish kanaliga ta'rif bering.*
2. *OXKN fanining predmeti, maqsadi va vazifalari nimalardan iborat?*
3. *Kiruvchi va chiquvchi chaqiruvlar oqimi deb qanday oqimlarga aytiladi?*
4. *OXKT qanday elementlarni o'z ichiga oladi?*
5. *OXKTning asosiy parametrlari nimalardan iborat?*
6. *OXKTning qanday samaradorlik ko'rsatkichlari mavjud?*

2.3 §. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarining tasnifi

Tayanch iboralar: *bir va ko'p kanalli OXKT, rad qilish joriy etilgan OXKT, rad qilmaydigan OXKT, aralash tipdagi OXKT, ochiq va yopiq turdagi OXKT, bir bosqichli va ko'p bosqichli OXKT.*

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi bir qator alomatlari bo'yicha tur (yoki sinf)larga bo'linadi.

OXKT kanallar bo'yicha bir kanalli (agar xizmat qilish bitta kanalga ega bo'lsa) va *n* (ko'p) kanalli (kanallar soni $n \geq 2$ bo'lsa) tizimlarga ajratiladi.

OXKT xizmat ko'rsatish tartibi bo'yicha uchta sinfga ajratiladi:

1.Rad qilish joriy etilgan – navbat (kutish) joriy etilmagan OXKT

Bunday tizimning barcha kanallari chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish bilan band bo'lgan vaqtda unga yangi chaqiruv kelib tushsa, bu chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etadi. Chaqiruv tizimni xizmat ko'rstilmasdan tark etadi. Masalan, telefon stansiyasiga barcha kanallar band bo'lgan vaqtda chaqiruv kelib tushsa, bu chaqiruv rad etiladi va tizimning keyingi xizmat ko'rsatish jarayoni xuddi bu chaqiruv umuman bo'lmagandek davom etadi.

Rad qilish joriy etilgan OXKTlar uchun muhim harakteristikalardan biri chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli hisoblanadi.

2.Rad qilmaydigan – navbat (kutish) joriy etilgan OXKT

Bunday tizimning barcha kanallari chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish bilan band bo'lgan vaqtda tizimga yangi chaqiruvlar kelib tushsa, tizim ularga xizmat ko'rsatishni rad etmaydi. Kelib tushgan yangi chaqiruvlar navbatda turadilar. Kanallardan biri bo'shagan zahoti navbatda turgan chaqiruvlardan biri darhol xizmat ko'rsatish uchun qabul qilinadi. Masalan, avtomobil yoqilg'isini quyish shahobchalari, chipta sotish kassalari, savdo do'konlari, qon topshirish laboratoriyalari, valyuta almashtiruv punktlari navbatda turish, kutish joriy etilgan – rad qilish joriy etilmagan OXKT misol bo'ladi.

Rad qilish joriy etilmagan OXKTlar uchun xizmat ko'rsatilishini kutishning o'rtacha vaqti, navbatning o'rtacha uzunligi, navbat uzunligining taqsimoti muhim harakteristikalar hisoblanadi.

3. Rad qilmaydigan – shu bilan birgalikda, navbatning uzunligi yoki kutish vaqti chegaralangan aralash tipdagi OXKT

Bunday tizimning barcha kanallari chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish bilan band bo'lgan vaqtda tizimga yangi chaqiruvlar kelib tushsa, ularga xizmat ko'rsatishni rad etmaydi. Shu bilan birgalikda, navbat uzunligi yoki kutish vaqtiga cheklov qo'yiladi. Ushbu ko'rsatkichlar o'rnatilgan cheklovdan ortgandan keyin, tizimga kelib tushgan yangi chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish rad etila boshlaydi. Ba'zi hollarda navbat uzunligiga yoki kutish vaqtiga cheklov tizim tomonidan emas, balki vaziyat taqozosidan kelib chiqib, "haridor" (chaqiruv) tomonidan qo'yilishi ham mumkin. Masalan, bunday vaziyatlar sifati tez "buziladigan" mahsulotlarni omborga topshirish bilan bolg'liq tizimlarda yuzaga keladi.

Telefon stansiyalari, ko'pchilik avariya – qutqaruv hamda tezkor xizmatlar, *rad qilish joriy etilgan OXKT* ga misol bo'la oladi.

Yong'in xavfsizligini ta'minlash sohasidagi OXKTlarga alohida to'xtaladigan bo'lsak, muayyan xududdagi yong'in xavfsizligi garnizoni, bir necha jangovar bo'linmalari mavjud bo'lgan harbiylashtirilgan yoki kasbiylashtirilgan yong'in xavfsizligi qismlari rad qilish joriy etilgan ko'p kanalli OXKTga, maskanlarni muhofaza qiluvchi alohida yong'in xavfsizligi posti, bitta jangovar bo'linmadan iborat yong'in xavfsizligi qismlari rad qilish joriy etilgan bir kanalli OXKTga misol bo'ladi. Bunday tasniflash bir qarashda notabiiy ko'rinsada (amalda, yong'in xavfsizligi qismlari yong'in o'chirishga bo'lgan chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishni rad etmaydilar!) yuqorida keltirilgan sinflar ta'rifiga ko'ra aynan shundaydir. Chunki, muayyan qismning barcha jangovar bo'linmalari yong'in o'chirish bilan band bo'lgan vaqtda qism hududidan yangi chaqiruv kelib tushsa, bu chaqiruv dispetcherlik xizmati tomonidan navbatga qo'yilmaydi. Shu bilan birgalikda, chaqiruv bilan band bo'lgan jangovar bo'linmalar o'chirayotgan yong'inni qoldirib, yangi yong'inni bartaraf etish uchun yo'lga chiqmaydilar. (Bunday vaziyatlarda, avvaldan belgilangan reja asosida yangi chaqiruvga xizmat ko'rsatishga boshqa yong'in xavfsizligi qismi jalb qilinadi.) Aynan shu holat qaralyotgan qismning yangi chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etishini (ilojsiz holda albatta) anglatadi.

Davlat yong'in xavfsizligi xizmatining texnik xizmat ko'rsatuvchi qismlari, yong'in o'chirish avtomobillarini diagnostika qilish postlari va yong'in o'chirish yenglarini ta'mirlash postlari (bazalari) rad qilish joriy etilmagan – navbatda turish, kutish joriy etilgan bir (ayrim hollarda ko'p) kanalli OXKT ga misol bo'ladi.

Davlat yong'in nazorati inspeksiyasini aralash tipdagi OXKT (shartli ravishda) sifatida qarash mumkin.

OXKTlar chaqiruvlar oqimining chegaralanishi bo'yicha ochiq va yopiq tizimlarga bo'linadilar.

Agar chaqiruvlar oqimi cheklangan bo'lib, OXKTni tark etgan chaqiruv yana unga qaytib kelishi mumkin bo'lsa, bunday OXKT yopiq tizim, aks holda ochiq tizim deb ataladi.

Yopiq OXKT ga sexdagi stanoklarni ishga tushiruvchi brigada (naladchiklar) misol bo'ladi. Bunda stanoklar – chaqiruv manbai bo'lib ularning soni cheklita, brigada a'zolari esa xizmat ko'rsatuvchi kanallar vazifasini o'taydi.

Ochiq OXKT da chaqituvlar oqimining xarakteristikalari OXKT ning o'zi qanday holatda ekanligiga, ya'ni qancha kanal bandligiga bog'liq emas. Yopiq OXKT da esa bu ko'rsatkichga bog'liq bo'ladi.

OXKT xizmat ko'rsatish bosqichlari bo'yicha bir bosqichli va ko'p bosqichli tizimlarga bo'linadi. Agar OXKT kanallari bir jinsli bo'lib, faqat bir xil xizmatni bajarsa, bunday OXKTlari bir bosqichli deb ataladi. Agar OXKT kanallari ketma – ket joylashib, ular bir jinsli bo'lmasa, ya'ni har – hil turdagi xizmatni bajarsa, bunday OXKTlari ko'p bosqichli deb ataladi. Ko'p bosqichli OXKTga misol sifatida avtomobillarga texnik xizmat qilish tizimini olish mumkin.

Ba'zi xollarda yong'in xavfsizligi xizmati boshqa maxsus xizmatlar bilan bilan birgalikda ko'p bosqichli OXKTni tashkil qilishi mumkin. Masalan, elektr stansiyalarida yoki yuqori kuchlanishli elektr manbai bo'lgan yirik maskanlarda yong'in o'chirish ikki bosqichda (shartli ravishda) tashkil qilinadi: yong'in haqida xabar olingandan so'ng, avval (birinchi bosqichda) tegishli elektr ta'minoti xizmati tomonidan yong'in o'chirilishi lozim bo'lgan hududni elektr ta'minotidan ajratiladi va ular tomonidan yong'in o'chirishga ruxsat (dopusk) beriladi. Undan keyingina (ikkinchi bosqichda) yong'in xavfsizligi xizmati tomonidan yong'inni bartaraf etish ishlari boshlanadi.

OXKTni tasniflash uchun kelib tushgan chaqiruvlarni tanlash hamda ularni band bo'lmagan kanallarga taqsimlash tartibini aniqlovchi *xizmat ko'rsatish tartibi (qoidasi)* muhim ahamiyatga egadir.

Chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish tartibi quyidagicha tashkil etilishi mumkin: "birinchi keldi – birinchi xizmat ko'rsatildi", "eng keyin keldi – birinchi xizmat ko'rsatildi" (bunday tartib, masalan, uzoq vaqt o'z sifatini yo'qotmaydigan mahsulotlar saqlanadigan ombordan mahsulot olishda qo'llanilishi mumkin, chunki ko'p hollarda eng keyin kelib tushgan mahsulotni ombordan olish eng qulay bo'ladi) yoki xizmat ko'rsatishda imtiyoz beriladi (bunda birinchi navbatda eng muhim chaqiruvga xizmat ko'rsatiladi). Imtiyozlar ***absolyut*** va ***nisbiy*** imtiyozlarga ajaratiladi. Absolyut imtiyoz – bunday imtiyozli chaqiruv oddiy chaqiruvni xizmat ko'satishdan "siqib" chiqaradi. Masalan, remont brigadasi avariya sodir bo'lganda rejadagi xizmat ko'rsatishni to'xtatib, dastavval avariyaga xizmat ko'rsatadi. Nisbiy imtiyoz – bunda imtiyozli chaqiruv xizmat ko'satilayotgan oddiy chaqiruvni xizmat ko'satishdan "siqib" chiqarmaydi, lekin undan keyingi birinchi navbatni, ya'ni navbatdagi "eng yaxshi" joyni egallaydi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Bir va ko'p kanalli OXKTga misollar keltiring.*
2. *Qanday tizim rad qilish joriy etilgan OXKT deb aytiladi?*
3. *Qanday tizim rad qilmaydigan OXKT deb aytiladi?*
4. *Qanday tizim aralash tipdpgi OXKT deb aytiladi?*
5. *Qanday tizimlar ochiq yoki yopiq turdagi OXKT deb aytiladi?*
6. *OXKT ning xizmat ko'rsatish tartibi tushunchasini izohlang.*

2.4 §. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimida kechadigan tasodifiy jarayonlar

Tayanch iboralar: *OXKTning qaytuvchanlik va ortga qaytmaslik xususiyatlari*

2.2 - §. da, OXKTlarda kechadigan jarayonlar tasodifiy jarayon bo'lishini, shuning uchun OXKN fani tasodifiy jarayonlar nazariyasiga asoslanishini ta'kidlagan edik. Ushbu mulohazaga quyida batafsilroq to'xtalamiz.

Odatda, OXKTlarda tasodifiy jarayon quyidagicha kechadi: tizim, vaqtning tasodifiy onlarida bir holatdan boshqa holatga o'tadi. Bunday o'zgarish tizimga chaqiruv kelib tushganda yoki tizim chaqiruvga xizmat ko'rsatishni tugatganda, ya'ni tizimning band kanallar soni yoki navbatda turgan chaqiruvlar soni o'zgarganda yuz beradi. Amaliyotda uchraydigan aksariyat OXKT larning holatlari soni cheklita yoki sanoqlita bo'ladi. Bu esa ko'p OXKTlar holatlari soni chekli yoki sanoqlita bo'lgan diskret tipdagi fizik tizimni tashkil qilishini anglatadi. Shunday qilib, aksariyat OXKTlarda *uzluksiz vaqtli, diskret holatli tasodifiy jarayonlar kechadi* deb qarash mumkin.

OXKTlar bir holatdan boshqa holatga o'tishning *qaytuvchanlik* yoki *ortga qaytmaslik* xususiyatlari bilan farqlanadilar.

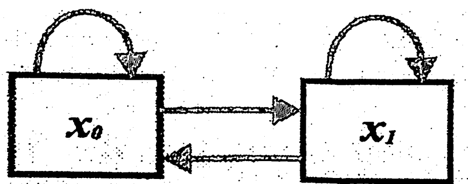
Quyida bunday xususiyatlarga ega bo'lgan OXKTlarga misollar keltiramiz.

2.4.1-misol.

Bir kanalli OXKT (masalan bitta telefon tarmog'idan iborat tizim) ni qaraymiz. Kelib tushgan chaqiruv, kanal band bo'lsa, kutmay tizimni tark etadi (rad etiladi). Bunday OXKT – uzluksiz vaqtli, holatlari soni 2 ta bo'lgan diskret turdagi tizimni tashkil qiladi. Uning holatlarini quyidagicha ifodalash mumkin:

x_0 – kanal bo'sh, x_1 – kanal band.

Tizimda bir holatdan ikkinchi holatga o'tish *qaytuvchanlik* xususiyatiga egadir: tizim x_0 holatdan x_1 holatga o'tishi va yana x_1 holatdan x_0 holatga o'tishi (band kanal bo'shashi) mumkin. Bunday tizimning holatlar grafi quyidagicha bo'ladi:

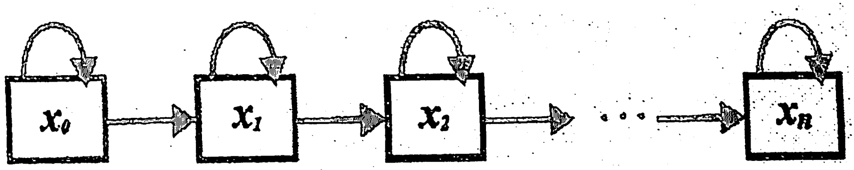


2.4.1 -chizma

2.4.2-misol.

Tizim n ta samolyotdan iborat bo'lib, ular havo hujumidan mudofaa (HHM) tizimi mavjud bo'lgan maskanga xujum qiladilar. Uchib kelgan samolyotlarni dushman sezib qolishi va HHM tizimining ishga tushish vaqtlari avvaldan noma'lum. Tizimning holatlari urib tushirilgan samolyotlar soniga muvofiq o'zgaradi. Faraz qilaylik x_k – k ta samolyot urib tushirilgan holatni ifodalasin, bu yerda $k = 1,2,\dots, n$.

Quyidagi chizmada tizimning holatlar grafi keltirilgan.



2.4.2-chizma

To'g'ri strelkalar bilan tizimning bir holatdan ikkinchi holatga mumkin bo'lgan o'tishlari belgilangan. Tushunarliki, tizim x_k holatda bo'lsa vaqt o'tishi mobaynida u ushbu holatning o'zida qolishi yoki qo'shni holat x_{k+1} gagina o'tishi mumkin. Bu tizim uchun o'tishning *ortga qaytmasligi* xarakterlidir (urib tushirilgan samolyotlar tiklanmaydilar). Shu sababli x_n holatdan boshqa bironta holatga o'tish mumkin emas.

Yuqorida keltirilgan holatlar grafi tizimning bir holatdan faqat qo'shni holatgagina o'tishini ko'rsatadi. Bir holatdan qo'shni holatni tashlab "sakrab" o'tishi, amalda mumkin bo'lmagan hodisa sifatida, ko'rsatilmagan. Haqiqatdan ham, tizim bir holatni tashlab, "sakrab" o'tishi uchun qat'iy bir vaqtda 2 ta va undan ortiq samolyot urib tushirilishi kerak. Bunday hodisaning ehtimoli nolga teng.

Uzluksiz vaqtli diskret holatli tizimda kechayotgan tasodifiy jarayonlarni izohlash uchun, birinchi navbatda tizimning bir holatdan boshqa holatga o'tishiga olib keluvchi sabablarni taxlil qilish zarur. OXKT uchun unda kechayotgan jarayonni belgilovchi asosiy faktor bu chaqiruvlar oqimidir. Shuning uchun ixtiyoriy OXKTni matematik modellashtirish, chaqiruvlar oqimini matematik terminlarda ifodalashdan boshlanadi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Aksariyat OXKTlarda qanday tasodifiy jarayon kechadi deb qarash mumkin?

2. OXKTning qaytuvchanlik va ortga qaytmaslik xususiyatlarini izohlang.

2.5 §. Hodisalar oqimi

Tayanch iboralar: *hodisalar oqimi, statsionar, ordinar va oqibatsiz (keyingi ta'siri yo'q) oqimlar, Puasson oqimi, sodda oqim, oqim intensivligi, nuqtaviy intensivlik.*

Avvalgi 2.2 §. da, vaqtning tasodifiy onlarida OXKT ga kelib tushadigani bir jinsli chaqiruvlar ketma – ketligi kiruvchi chaqiruvlar oqimi, OXKT ni tark etuvchi chaqiruvlar ketma – ketligi esa chiquvchi chaqiruvlar oqimi deb atalishini aytib o'tgan edik. OXKT faoliyatini ratsional tashkillashtirish uchun birinchi navbatda ushbu oqimlarini o'rganish zarur bo'ladi.

OXKTga chaqiruv kelib tushishini (yoki tizimni tark etishini) tasodifiy hodisa sifatida qarash mumkin. OXKT ga tasodifiy vaqtlarda ketma-ket chaqiruvlarni kelib tushishini, vaqtning tasodifiy onlarida ro'y beradigan hodisalar ketma – ketligi yoki hodisalar oqimi sifatida qarash mumkin. Shunday qilib, *hodisalar oqimi* deganda vaqtning tasodifiy onlarida biri ikkinchisidan keyin ketma-ket keluvchi bir jinsli kiruvchi (chiquvchi) chaqiruvlarni tizimga kelib tushishi(tizimni tark etishi)dan iborat hodisalar ketma – ketligi tushuniladi.

Agar hodisalar ketma – ket tarzda, biri ikkinchisidan keyin bir xil vaqtda kelsa, bunday oqim hodisalarning *regulyar* oqimi deb ataladi Masalan, ishlab chiqarish sexlarining o'zgarmas tezlik bilan harakatlanyotgan lentasidagi maxsulotlar oqimini tegishli OXKTga etib borishi hodisalarning regulyar oqimini tashkil qiladi. Bunday regulyar oqimlarga xizmat ko'rsatadigan OXKT faoliyatini rejalashtirishda muammolar yuzaga kelmaydi. Shuning uchun ular OXKN da o'rganilmaydi.

Hodisalar oqimining turlari ko'p bo'lib, ular bir-biridan muayyan xossalari bilan farqlanadilar. Masalan, ketma-ket keladigan hodisalar orasidagi vaqt intervallaridan iborat tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari turi, shakli, ularning bog'liqsizligi yoki o'zaro bog'liqligi kabilarni bunday xossalarga misol sifatida keltirish mumkin.

Hodisalar oqimlari ichida quyidagi xossalarga ega bo'lgan oqimlar eng ko'p o'rganilgan.

Ta'rif. Agar hodisalar oqimi uchun $(t, t+\tau]$ vaqt oralig'ida muayyan sondagi hodisalar ro'y berishi ehtimoli faqat ushbu interval uzunligi τ $(\tau > 0)$ gagina bog'liq bo'lib, t vaqtga bog'liq bo'lmasa, ya'ni qaralayotgan intervalni vaqt o'qining qaerida joylashganligiga bog'liq bo'lmasa, bunday oqim ***statsionar*** hodisalar oqimi deb ataladi.

Amaliyotda uzoq muddat mobaynida statsionarlik xossasiga ega bo'ladigan oqimlar kam uchraydi. Lekin, juda ko'p oqimlarni cheklangan vaqt oralig'ida statsionar oqim deb qarash mumkin. Misol uchun shahar ko'chalarida sutka davomidagi avtomobillar oqimi statsionar hisoblanmaydi, ammo sutkaning tig'iz (avtomobillar ko'paygan payt) vaqt oralig'idagi (masalan, 8^{00} dan 9^{00} gacha) oqimni statsionar deb hisoblash mumkin. Bu oraliqqa tegishli uzunligi τ (misol uchun 5 minut) bo'lgan ikkita vaqt oralig'ida o'tadigan avtomobillar soni bir – biridan farq qilsada, ammo ularning o'rtacha soni o'zgarmas bo'ladi va oraliqlar tig'iz vaqtning qay bir qismi (5 minuti)da ekanligiga bog'liq bo'lmaydi.

Ta'rif. Elementar (yetarlicha kichik) vaqt oralig'i $\Delta\tau$ da 2 ta va undan ortiq hodisalarning ro'y berishi ehtimoli $\Delta\tau$ ga ***nisbatan*** cheksiz kichik miqdor bo'lib, shu vaqt oralig'ida 1 ta hodisaning ro'y berishi ehtimoli $\Delta\tau$ – ***tartibli*** cheksiz kichik miqdor bo'lsa, bunday hodisalar oqimi – ***ordinar*** hodisalar oqimi deyiladi.

Hodisalar oqimining ordinarligi hodisalarning guruh – guruh bo'lib emas, balki yakka holda ro'y berishini anglatadi. Masalan, poezd bekatiga kirib keladigan poezdlar oqimi ordinar hodisalar oqimi bo'ladi, kirib keladigan vagonlar oqimi esa ordinar hodisalar oqimi bo'lmaydi.

Oqimning ordinarlik xossasi matematik formulalar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

Faraz qilaylik, $P_k(\tau,\Delta\tau)$ – biron (τ, $\tau+\Delta\tau$] vaqt oralig'ida k ta hodisa ro'y berishi ehtimoli bo'lsin. U holda har qanday $\Delta\tau$ vaqt oralig'i uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\tau,\Delta\tau)=1 \qquad (2.5.1)$$

Hodisalar oqimining ordinarligi (τ, $\tau+\Delta\tau$] vaqt oralig'ida 1 ta hodisa ro'y berishi ehtimoli $\Delta\tau$ – *tartibli* cheksiz kichik miqdor, ya'ni $\Delta\tau\to 0$ da

$$P_1(\tau,\Delta\tau)=\lambda(\tau)\Delta\tau+o(\Delta\tau) \qquad (2.5.2)$$

ekanligini ($\lambda(\tau)$ sonning ma'nosi keyinroq oydinlashtiriladi), (τ, $\tau+\Delta\tau$] vaqt oralig'ida 1 tadan ortiq hodisalarning ro'y berishi ehtimoli $P_{>1}(\tau,\Delta\tau)$ esa $\Delta\tau$ ga *nisbatan* cheksiz kichik miqdor, ya'ni $\Delta\tau\to 0$ da

$$P_{>1}(\tau,\Delta\tau)=\sum_{k=2}^{\infty} P_k(\tau,\Delta\tau)=o(\Delta\tau) \qquad (2.5.3)$$

ekanligini bildiradi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy ikkita kesishmaydigan τ_1 va τ_2 vaqt oraliqlari uchun ularning biri (keyingisi)dagi hodisalarning ro'y berishlari soni, ikkinchisi (avvalgisi)da ro'y bergan hodisalar soniga bog'liq bo'lmasa, bunday oqim hodisalarning *oqibatsiz (yoki keyingi ta'siri yo'q)* oqimi deb ataladi.

Hodisalar oqimining oqibatsizligi quyidagini anglatadi: vaqtning (t, $t+\tau$] oralig'ida ixtiyoriy k ta chaqiruv kelib tushishining $A_{<t}$ shart ostidagi ehtimoli, ushbu hodisaning shartsiz ehtimoliga teng. Bu yerda $A_{<t}$ tizimga t vaqtgacha kelib tushgan chaqiruvlar soniga qo'yilgan har qanday shart.

Misol uchun, metroga kiradigan yo'lovchilar oqimi oqibatsiz oqimdir. Savdo do'konidan chiqib ketayotgan haridorlar oqimi esa oqibatsiz oqim bo'lmaydi. Chunki ikkita haridorga ketma – ket xizmat ko'rsatish orasidagi vaqt, alohida bitta haridorga xizmat ko'rsatishga sarflanadigan minimal vaqtdan kichik bo'lganda, haridorga xizmat ko'rsatish undan keyingi haridorga xizmat ko'rsatishga ta'sir qiladi.

Agar hodisalar oqimi bir vaqtda ordinarlik va oqibatsizlik xossasiga ega bo'lsa, bunday oqim *Puasson oqimi* deb ataladi. Puasson oqimi statsionar va nostatsionar Puasson oqimlariga ajratiladi.

Statsionar Puasson oqimi hodisalarning *sodda oqimi* deb ataladi. Sodda oqim deyilishiga sabab, bunday hodisalar oqimini matematik ifodalanishi soddaligidir.

Regulyar oqim sodda oqim bo'lmaydi, chunki u oqibatsizlik xossasiga ega emas. Bunday oqimlarda hodisalarning sodir bo'lish vaqti aniq belgilanadi.

Quyida, OXKNning eng muhim tushunchalaridan bo'lgan *oqim intensivliklari* tushunchalarini kiritamiz.

Dastavval hodisalarning nostatsionar oqimini qaraymiz.

Faraz qilaylik, $\xi(t,\tau)$ – tasodifiy miqdor $(t,\ t+\tau]$ vaqt intervaldagi hodisalar soni bo'lsin. U uzluksiz vaqtli, diskret holatli tasodifiy jarayonni ifodalaydi. $\varphi(t,\tau)$ orqali $\xi(t,\tau)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini belgilaymiz: $\varphi(t,\tau) = M\xi(t,\tau)$. Shunday qilib, $\varphi(t,\tau)$ miqdor $(t,\ t+\tau]$ vaqt intervalidagi hodisalarning *o'rtacha* sonini bildiradi.

Ta'rif: Hodisalar oqimining vaqtning $(t,\ t+\tau]$ intervalidagi o'rtacha intensivligi deb, ushbu intervalning birlik vaqti ichidagi hodisalarning o'rtacha soniga aytiladi.

Hodisalar oqimining $(t,\ t+\tau]$ vaqt intervalidagi o'rtacha intensivligini $\tilde{\lambda}(t)$ orqali belgilaylik. Yuqoridagi belgilashlar yordamida $\tilde{\lambda}(t)$ miqdorni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{M\xi(t,\tau)}{\tau} = \frac{\varphi(t,\tau)}{\tau} \qquad (2.5.4)$$

Ta'kidlash joizki, umuman olganda, oqimning (2.5.4) formula bilan aniqlangan o'rtacha intensivligi $\tilde{\lambda}(t)$ vaqt intervali uzunligi τ ga ham bog'liq. Amaliy masalalarni yechishda, odatda, τ avvaldan tayinlangan o'zgarmas son bo'lganligi uchun yuqorida keltirilgan ta'rifda ushbu bog'liqlikni ifoda etmadik. Lekin, aynan shu bog'liqlikning mavjudligi τ miqdorni tanlash hisobiga ba'zi nostatsionar oqimlarni τ vaqt oralig'ida statsionar oqim sifatida qarash imkonini berishini avval ta'kidlagan edik.

Ta'rif: Hodisalar oqimining t vaqtdagi *nuqtaviy* intensivligi (zichligi) deb, vaqtning $(t,\ t+\tau]$ intervaldagi hodisalarning o'rtacha sonini interval uzunligiga nisbatini, interval uzunligi nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

Nuqtaviy intensivlikni $\lambda(t)$ orqali belgilasak, yuqoridagi ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\lambda(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{M\xi(\mathbf{t},\tau)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(0,\mathbf{t}+\tau)-\varphi(0,\mathbf{t})}{\tau} \qquad (2.5.5)$$

Ushbu (2.5.4) va (2.5.5) formulalardan hodisalar oqimining $(t,\ t+\tau]$ intervaldagi o'rtacha ointensivligi va t vaqtdagi nuqtaviy intensivligi o'rtasida quyidagicha bog'liqlik mavjudligi kelib chiqadi:

$$\lambda(t) = \lim_{\tau\to 0}\tilde{\lambda}(t) \qquad (2.5.6)$$

Nostatsionar hodisalar oqimi uchun vaqtning $(t,\ t+\tau]$ intervaldagi hodisalarning *o'rtacha soni* oqimning nuqtaviy intensivligi $\lambda(t)$ orqli quyidagicha ifodalanadi:

$$M\xi(\mathbf{t},\tau) = \int_t^{t+\tau}\lambda(u)du = \tilde{\lambda}(t)\cdot\tau \qquad (2.5.7)$$

Statsionar hodisalar oqimi uchun (ta'rifiga ko'ra) oqimning t vaqtdagi nuqtaviy intensivligi $\lambda(t)$ o'zgarmas son bo'lib, u t vaqtga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni $\lambda(t)\equiv\lambda(u)\equiv\lambda$ o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi (2.5.7) formuladan

$$\widetilde{\lambda}(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau}\lambda(u)du = \frac{\lambda}{\tau}\int_{t}^{t+\tau}du \equiv \lambda \equiv \lambda(t).$$

Demak, statsionar hodisalar oqimi uchun oqimning o'rtacha intensivligi uning nuqtaviy intensivligi bilan ustma – ust tushadi va u o'zgarmas son bo'ladi. Shuning uchun, kelgusida statsionar hodisalar oqimi qaralayotganda ularni farqlamaymiz va bir so'z bilan *oqim intensivligi* deb ataymiz.

Odatda, oqim intensivligining o'lchov birligi sifatida quyidagilar qaraladi:

$$\frac{odam}{daqiqa};\ \frac{so'm}{soat};\ \frac{chipta}{soat};\ \frac{hujjat}{kun};\ \frac{yong'in}{yil};\ \frac{kg}{soat}\quad \text{va h.k.}$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Hodisalar oqimi nima?

2. Qanda oqimlar statsionar, ordinar va oqibatsiz oqimlar deb ataladi?

3. Puasson va sodda oqimlarni izohlang.

4. Oqim intensivliklari tushunchalarini izohlang.

2.6 §. Hodisalarning Puasson oqimi va Markov jarayonlari

Faraz qilaylik, S tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_N$ bo'lib, u o'z holatini muayyan tasodifiy hodisalar (masalan, yong'in o'chirishga chaqiruvlar, yong'in o'chirishni yakunlanishi va h.k) ta'sirida o'zgartirsin. Bunday hollarda tizimni bir holatdan boshqa holatga o'tishi ana shu *hodisalar oqimi* ta'sirida ro'y beradi deb hisoblash mumkin.

Faraz qilaylik, S tizim t vaqtda S_i holatda bo'lib, undan S_j holatga intensivligi λ_{ij} bo'lgan oqim ta'sirida o'tsin, ya'ni oqimning dastlabki hodisasi ro'y berishi bilan tizim o'z holatini S_i dan S_j ga "sakrab" o'zgartirsin. Agar, S tizimni holatdan holatga o'tkazuvchi hodisalar oqimi Puasson oqimi (statsionar yoki nostatsionar) bo'lsa, u holda tizimda kechayotgan jarayon Markov jarayoni bo'ladi. Chunki hodisalarning Puasson oqimi, uning ta'rifiga muvofiq, oqibatsizlik xossasiga ega. Shuning uchun, S tizimning ixtiyoriy t vaqtdagi holati ma'lum bo'lsa, undan keyingi vaqtlarda tizim holatini o'zgarishi t vaqtdan keyin Puasson oqimida dastlabki hodisaning ro'y berishi bilan yuz beradi. Bunday hodisaning ro'y berishi ehtimoli esa tizimning t vaqtdan avvalgi holatiga bog'liq emas.

Avvalgi bobda uzluksiz vaqtli, diskret holatli Markov jarayoni uchun (1.13.2) munosabat bilan aniqlanadigan o'tish ehtimollari zichligi tushunchasi kiritilgan edi. Quyida oqim intensivligi va Markov jarayonining o'tish ehtimollari zichligi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi teoremani keltiramiz

Teorema. Agar, S tizimni holatdan holatga o'tkazuvchi hodisalar oqimi Puasson oqimi (statsionar yoki nostatsionar) bo'lsa, u holda tizimni S_i holatdan S_j holatga o'tkazuvchi oqimning nuqtaviy intensivligi diskret holatli Markov jarayonining o'tish ehtimollari zichligiga teng bo'ladi.

Isbot. Ushbu teoremani isbotlash uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$\xi_{ij}(t,\Delta t)$ – vaqtning $(t, t+\Delta t]$ oralig'idagi hodisalar soni, ya'ni S tizimni S_i holatdan S_j holatga o'tishlari soni, $P_{ij}^{\kappa}(t,\Delta t)$ – $(t, t+\tau]$ vaqt oralig'ida k ta hodisa ro'y berishi (S_i holatdan S_j holatga k marta o'tishi) ehtimoli, $P_{ij}^{>1}(t,\Delta t)$ – $(t, t+\tau]$ vaqt oralig'ida 1 tadan ortiq hodisalarning ro'y berishi (S_i holatdan S_j holatga 1 tadan ortiq marta o'tishi) ehtimoli bo'lsin. U holda, hodisalar oqimining ordinarlik xossasi – (2.5.3) munosabatni inobatga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$M\xi_{ij}(t,\Delta t)=\sum_{k=0}^{\infty}\kappa P_{ij}^{\kappa}(t,\Delta t)=0\cdot P_{ij}^{0}(t,\Delta t)+1\cdot P_{ij}^{1}(t,\Delta t)+\sum_{k=2}^{\infty}\kappa\cdot o(\Delta t)=$$
$$=P_{ij}^{1}(t,\Delta t)+o(\Delta t).$$

Eslatib o'tamizki, 1.13- §. da (1.13.2) munosabat bilan $P_{ij}(t,t+\Delta t)$ ehtimol (diskret holatli uzluksiz vaqtli Markov jarayonida tizimning t vaqtda S_i holatda bo'lib, undan keyingi Δt vaqt mobaynida S_j holatga o'tishi ehtimoli)ni kiritgan edik. Tushunarliki,

$$P_{ij}^{1}(t,\Delta t) = P_{ij}(t,t+\Delta t) \tag{2.6.1}$$

S tizimni S_i holatdan S_j holatga o'tkazuvchi hodisalar oqimining t vaqtdagi nuqtaviy intensivligini $\overline{\lambda}_{ij}(t)$ orqali belgilaylik. Uning ta'rifi ((2.5.5) formula) va (2.6.1) tenglikka muvofiq

$$\overline{\lambda}_{ij}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\grave{I}\ \xi_{ij}(t,\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}^{1}(t,\Delta t)+o(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(t,t+\Delta t)}{\Delta \tau} = \lambda_{ij}(t)$$

bu yerda, $\lambda_{ij}(t)$ – diskret holatli uzluksiz vaqtli Markov jarayonining (1.13.2) tenglik bilan aniqlangan o'tish ehtimollari zichligi.

Teorema isbotlandi.

Xuddi shu yo'l bilan isbotlash mumkinki, *hodisalarning Puasson oqimi uchun ordinarlik sharti ifodalangan (2.5.2) munosabatdagi $\lambda(\tau)$ miqdor oqimning τ vaqtdagi nuqtaviy intensivligiga teng bo'ladi.*

Hodisalarning Puasson oqimi 1.10 – §. da keltirilgan Puasson taqsimoti bilan uzviy bog'liqdir. Aniqroq qilib aytganda, *ixtiyoriy τ uzunlikdagi vaqt intervalida k ta hodisaning ro'y berishi ehtimoli Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.* Ya'ni, ixtiyoriy $\tau > 0$ uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$P_{k}(t,\tau)=\frac{\alpha^{k}}{k!}e^{-\alpha},\ k=0,1,2,\ldots, \tag{2.6.2}$$

bu yerda, $P_k(t,\tau)$ (2.5 – §. ga qarang) $(t, t+\tau]$ vaqt oralig‘ida k ta hodisa ro‘y berishi ehtimoli, $\alpha = \int_t^{t+\tau} \lambda(u)du$, $\lambda(u)$ – hodisalar oqimning u vaqtdagi nuqtaviy intensivligi.

Hodisalarning sodda oqimi uchun (2.6.2) tenglikni isbotlaymiz.

Statsionar hodisalar oqimi uchun nuqtaviy intensivlik o‘zgarmas son, ya’ni $\lambda(u) \equiv \lambda$ bo‘lganligi uchun $\alpha = \lambda\tau$ hamda (2.5.2) tenglikda $\lambda(\tau) = \lambda$ o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari, sodda oqimning statsionarlik xossasidan kelib chiqib $t=0$ deb, hisoblash mumkin. Bunday holda, tushunarliki, $P_k(t,\tau)$ ehtimol ham t vaqtga bog‘liq bo‘lmaydi. Shuning uchun, $P_k(t,\tau)=P_k(\tau)$ belgilash kiritamiz. Shunday qilib, hodisalarning sodda oqimi uchun quyidagi formulani isbotlaymiz:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \qquad (2.6.3)$$

Vaqtning ikkita $(0, \tau]$ va $(\tau, \tau + \Delta\tau]$ qo‘shni oraliqlarini qaraymiz. Faraz qilaylik, $(0, \tau]$ vaqt oralig‘idagi hodisalar soni k_1 ta va $(\tau, \tau+\Delta\tau]$ vaqt oralig‘idagi hodisalar soni esa k_2 ta bo‘lsin. Vaqtning $(0, \tau+\Delta\tau]$ orlig‘ida rosa k ta hodisa ro‘y berishi, faqat va faqat $k_1+ k_2= k$ bo‘lgandagina amalga oshadi. Ya’ni, buning uchun quyidagi $k+1$ ta o‘zaro birgalikda bo‘lmagan hodisalardan biri ro‘y berishi zarur va etarli:

$$A_1=\{ k_1= k, k_2=0\}, A_2=\{k_1= k-1, k_2=1\},\ldots, A_{k+1}=\{k_1=0, k_2= k\}$$

Hodisalar oqimining oqibatsizlik xossasiga muvofiq ushbu hodisalarni tashkil qiluvchi hodisalar jiftligi o‘zaro bog‘liq bo‘lmaydi. Shuning uchun to‘la ehtimol formulasiga muvofiq quyidagini hosil qilamiz:

$$P_\kappa(\tau+\Delta\tau)=P_\kappa(\tau)P_0(\Delta\tau)+P_{\kappa-1}(\tau)P_1(\Delta\tau)+...+P_0(\tau)P_\kappa(\Delta\tau) \qquad (2.6.4)$$

Faraz qilaylik, $\Delta\tau$ yetarlicha kichik vaqt oralig'i bo'lsin. Hodisalar oqimining statsionarlik va ordinarlik xossalari((2.5.2) va (2.5.3) shartlar)ni inobatga olib, ixtiyoriy $\Delta\tau$ uchun o'rinli bo'lgan (2.5.1) formuladan quyidagini hosil qilamiz:

$$P_0(\Delta\tau)=1-\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa(\Delta\tau)=1-\lambda\Delta\tau+o(\Delta\tau) \qquad (2.6.5)..$$

(2.5.3) shartdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{i=2}^{\kappa}P_{\kappa-i}(\tau)P_i(\Delta\tau)\leq\sum_{i=2}^{\infty}P_i(\Delta\tau)=P_{>1}(\tau,\Delta\tau)=o(\Delta\tau)$$

Shunday qilib, (2.6.4) tenglikning o'ng tomonidagi oxirgi $k-1$ ta xadning yig'indisi $\Delta\tau$ ga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Shuning uchun, (2.5.2) munosabatni inobatga olgan holda (2.6.4) tenglikni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_\kappa(\tau+\Delta\tau)=P_\kappa(\tau)(1-\lambda\Delta\tau)+P_{\kappa-1}(\tau)\lambda\Delta\tau+o(\Delta\tau)$$

Bu yerdan,

$$\frac{P_\kappa(\tau+\Delta\tau)-P_\kappa(\tau)}{\Delta\tau}=\lambda\left[P_{\kappa-1}(\tau)-P_\kappa(\tau)\right]+\frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

Ushbu tenglikning ikki tomonida $\Delta\tau\to0$ da limitga o'tib, quyidagi chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz (albatta, $Đ_e(\tau)$ funksiyani differensiallanuvchi ekanligi sharti ostida)

$$P_\kappa'(\tau)=\lambda\left[P_{\kappa-1}(\tau)-P_\kappa(\tau)\right] \qquad (2.6.6)$$

Shunday qilib, $P_k(\tau)$ $(k=1,2,...)$ ehtimollar uchun cheksizta chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini hosil qildik. U rekurrent tenglamalar sistemasini tashkil qiladi, ya'ni har bir $P_k(\tau)$ ehtimol $P_{k-1}(\tau)$ orqali topiladi.

Demak, $P_0(\tau)$ ehtimol ma'lum bo'lsa, rekurrent munosabatdan qolgan ehtimollarni topish mumkin bo'ladi.

Bog'liq bo'lmagan hodisalar ko'paytmasi haqidagi teoremaga muvofiq

$$P_0(\tau+\Delta\tau)=P_0(\tau)P_0(\Delta\tau).$$

Yuqorida keltirilgan (2.6.5) munosabatni inobatga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$P_0(\tau+\Delta\tau)=P_0(\tau)(1-\lambda\Delta\tau+o(\Delta\tau))$$

Ushbu tenglikdan, tegishli shakl almashtirishlardan so'ng, $\Delta\tau\to 0$ da limitga o'tib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$Đ_0'(\tau)=-\lambda Đ_0(\tau)$$

Xuddi shunday tartibda davom etib, $P_k(\tau)$ ehtimollarni topish uchun quyidagi differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} P'_0(\tau)=-\lambda P_0(\tau) \\ P'_1(\tau)=\lambda\left[P_o(\tau)-P_1(\tau)\right] \\ P'_2(\tau)=\lambda\left[P_1(\tau)-P_2(\tau)\right] \\ \ldots \\ P'_\kappa(\tau)=\lambda\left[P_{\kappa-1}(\tau)-P_\kappa(\tau)\right] \\ \ldots \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Ushbu (2.6.7) sistemani, (2.5.1) va (2.6.5) munosabatlardan kelib chiqadigan $Đ_0(0)=1, Đ_ę(0)=0$ *(k≥1)* boshlang'ich shartlar bilan yechamiz.

(2.6.7) sistemaning birinchi tenglamasini yuqoridagi boshlang'ich shartlar ostida integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\ln P_0(\tau) = -\lambda\tau + C,$$

bu yerdan, $P_0(0)=1$ boshlang'ich shartni inobatga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} \tag{2.6.8}$$

Topilgan $P_0(\tau)$ ni (2.6.7) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib, $P_1(\tau)$ ga nisbatan quyidagi birinchi tartibli chiziqli tenglamani hosil qilamiz:

$$P'_1(\tau) + \lambda P_1(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$$

Tenglamani yechib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_1(\tau) = e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau + C)\ ,$$

bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmac con.

Hosil bo'lgan tenglamani $P_1(0)=0$ boshlang'ich shart bilan yechib, quyidagini hosil qilamiz.

$$P_1(\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$$

Xuddi shu tarzda davom etib, (2.6.7) sistemaning uchinchi tenglamasidan quyidagini hosil qilamiz:

$$P_2(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} e^{-\lambda\tau}$$

Matematik induktsiya usulidan foydalanib, ixtiyoriy natural son k uchun (2.6.7) sistemaning k – tenglamasidan quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$P_\kappa(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda\tau} \quad k=0,1,2,\ldots \tag{2.6.9}$$

Hosil bo'lgan ehtimollar $\lambda\tau$ prametrli Puasson taqsimotini tashkil qiladi.

Shunday qilib, hodisalarning sodda oqimi uchun $P_k(\tau)$ ehtimollar Puasson taqsimotiga ega bo'lishini isbotladik.

Ta'kidlash joizki, ayrim masalalarni yechishda, $P_k(\tau)$ ehtimollarni hisoblash uchun, (2.6.8) va (2.6.9) formulalardan kelib chiqadigan quyidagi rekurrent formula qulayroq bo'ladi:

$$P_k(\tau) = \frac{\lambda\tau}{k} P_{k-1}(\tau),\ k=1,2,\ldots \qquad (2.6.10).$$

Bunda, $P_0(\tau)$ ehtimolni (2.6.8) munosabatdan, $P_k(\tau)$, $k=1,2,\ldots$ ehtimollarni esa (2.6.10) munosabatdan topish nazarda tutiladi.

Endi, Puasson taqsimotining λ parametri hodisalarning Puasson oqimida qanday ma'no anglatishini aniqlaymiz.

Vaqtning $(t, t+\tau]$ intervalida ro'y beradigan hodisalar soni – $\xi(t,\tau)$ tasodifiy miqdorni hodisalarning sodda oqimi uchun (uning statsionarligini inobatga olgan holda) $\xi(\tau)$ orqali belgilaylik. Uning matematik kutilmasini topamiz:

$$M(\xi(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda\tau e^{-\lambda\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}e^{\lambda\tau} = \lambda\tau \qquad (2.6.11)$$

bu yerda

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!} == e^{\lambda\tau}$$

ekanligi inobatga olindi.

Yuqoridagi (2.6.11) munosabatdan kelib chiqadiki, τ uzunlikdagi vaqt intervalida ro'y beradigan hodisalarning o'rtacha soni $\lambda\tau$ ga teng ekan. Demak,

$$\lambda = \frac{M(\xi(\tau))}{\tau}$$

Ya'ni, Puasson taqsimotining λ parametri, birlik vaqt ichida ro'y beradigan hodisalarning o'rtacha sonini anglatadi. Bu esa, yuqorida keltirib o'tilgan ta'rifga muvofiq,statsionar Puasson oqimining intensivligiga teng.

Eslatib o'tamizki, $\lambda\tau$ параметрли Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning matematik kutilmasiga teng:

$$D\xi(\tau) = M\xi(\tau) = \lambda\tau$$

Hodisalarning sodda oqimi bir qator o'ziga xos muhim xususiyatlarga ega. Birinchidan, bir necha sodda oqimlarning superpozitsiyasi(o'zaro qo'shilishi) natijasida yana sodda oqim hosil bo'ladi. Bunda, hosil bo'lgan oqimning intensivligi uni tashkil qiluvchi oqimlar intensivliklari yig'indisiga teng bo'ladi,

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Ikkinchidan, intensivliklari bir biridan katta farq qilmaydigan ko'p sonli oqibatsizlik xossasiga ega bo'lmagan, lekin statsionar-lik va ordinarlik xossalariga ega bo'lgan oqimlarning super-pozitsiyasi (o'zaro "qo'shilishi") natijasida hosil bo'lgan oqimni ma'lum bir aniqlikda sodda oqim deb hisoblash mumkin. Qo'shi-luvchi oqimlar soni qancha ko'p bo'lsa, ularning qo'shilishidan hosil bo'lgan oqim sodda oqimga shuncha yaqin bo'ladi.

Puasson oqimi yong'in xavfsizligi xizmati faoliyatini matematik modellashtirish masalalarida ham muhim ahamiyatga ega. Rossiyalik matematik olim N.N.Brushlinskiy tomonidan yong'in xavfsizligi garnizon(qism)lariga kelib tushuvchi chaqir-uvlar oqimi (masalan, yong'in o'chirish yoki avariyani bartaraf etishga chaqiruvlar oqimi, asosiy yoki maxsus yong'in o'chirish avtomobillarning yong'in xavfsizligi qismidan chaqiruvlarga chiqishi oqimi) sodda oqimga yaqin oqim bo'lishi, ya'ni ma'lum bir vaqt intervalidagi chaqiruvlar sonidan iborat tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega bo'lisi to'g'risidagi gipoteza ilgari surilgan. Ushbu gipoteza statistik ma'lumotlar asosida ayrim hududlar uchun tekshirilgan va (ma'lum bir aniqlik darajasi bilan) o'rinli bo'lishi isbotlangan[5]. (Bu masala hozircha Respublikamizda yetarli darajada o'rganilmagan).

Kelgusida, biron $\tau > 0$ uzunlikdagi vaqt intervalidagi chaqiruvlar sonidan iborat diskret tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega bo'ladigan hodisalar oqimini *Puasson taqsimotli* hodisalar oqimi deb ataymiz.

Demak, hodisalar oqimining Puasson taqsimotli oqim ekanligi haqidagi gipotezani tekshirish, "τ uzunlikdagi vaqt intervali (masalan, bir sutka)dagi chaqiruvlar sonidan iborat diskret tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega bo'ladi" degan gipotezani tekshirishga keltiriladi.

Takidlash joizki, aksariyat OXKT lar, xususan, yong'in xavfsizligi tizimlari faoliyatini o'rganishda, Puasson taqsimotli hodisalar oqimini sodda oqim sifatida qarab, OXKN ning nazariy natijalarini tadbiq qilinishi orqali muayyan natijalarga erishish mumkin. Odatta, bunday yondashuv orqali olingan natijalarda katta xatolikka yo'l qo'yilmaydi. Shu sababli, kelgusida aksariyat masalalarni yechishda ushbu yondashuvdan foydalanamiz.

Quyida, o'quvchi (kursantlar, yong'in xavfsizligi sohasida ilmiy tadqiqot ishlari olib borayotgan mutaxassislar, yong'in xavfsizligi tizimining samaradorlik ko'rsatkichlarini oshirish bilan shug'illanadigan muxandis – texnik xodimlar)ga qulay bo'lishi uchun, chaqiruvlar oqimining Puasson taqsimotli oqim ekanligi haqidagi gipotezani K. Pirsonning xi–kvadrat muvofiqlik mezoni yordamida tekshirish algoritmini keltiramiz.

Faraz qilaylik, biron hudud (shahar, viloyat va h.k.) da T muddat (masalan, bir yil – 365 sutka) mobaynida M marta yong'in o'chirishga chiqish bo'lganligi haqida statistik ma'lumotlar mavjud bo'lsin. Ushbu ma'lumotlar asosida, asosiy gipoteza – $N(\tau)$ ={ τ uzunlikdagi vaqt intervali (soat, sutka, oy) dagi chaqiruvlar sonidan iborat tasodifiy miqdor λ (noma'lum) parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'ladi} gipotezani tekshirish talab qilinsin.

Bu masalani matematik modellashtirish uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz: faraz qilaylik $N = T/\tau$ butun son bo'lsin (aks holda, T ni o'zgartirish hisobiga uni butun son qilib olamiz). Belgilash kiritamiz:

$$\Delta = (0, T], \quad \Delta_i = ((i-1)\tau, i\tau], \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

ya'ni Δ uzunlikdagi muddatni uzunligi τ bo'lgan N ta kesishmaydigan $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N$ oraliqlarga ajratdik. Tushunarliki, $\Delta = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i$. Faraz qilaylik, X_i tasodifiy miqdor Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ vaqt oralig'idagi yong'in o'chirishga chiqishlar soni bo'lsin.

Ushbu belgilashlar yordamida yuqorida keltirilgan masalani quyidagicha ifodalaymiz:

Hajmi N ga teng bo'lgan $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ tanlanmaning amalga oshgan qiymati $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ vektor yordamida

$$H(\tau) = \left\{ P(X_1 = k) = P_\kappa(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda\tau} \right\}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

gipotezani tekshirish talab qilinadi. Bu yerda $x_1 + x_2 + \ldots + x_N = M$ va λ – noma'lum parametr.

Ushbu masalani K. Pirsonning xi–kvadrat muvofiqlik mezoni orqali quyidagi tartibda yechish mumkin:

1. Puasson taqsimotining noma'lum parametri (oqim intensivligi)ning bahosi sifatida $\lambda = M/T$ miqdorni qabul qilamiz.

2. Faraz qilaylik, L shunday butun sonki, chaqiruvlar soni L tadan ortiq bo'lgan Δ_i intervallar soni ko'p bo'lmasin.

Chaqiruvlar sonining empirik chastotalarilarni ya'ni, chaqiruvlar soni k ta bo'lgan Δ_i intervallar sonini m_κ orqali belgilaylik $k = 0,1,2,\dots,L+1$. Bu yerda $m_{L+1} = m_{>L}$ – chaqiruvlar soni L tadan ko‘p bo‘lgan intervallar soni.

Tushunarliki, $m_0+m_1+\dots+m_{L+1}=N$.

Amaliyotda L soni, masala mohiyatidan kelib chiqqan holda, $m_{>L}$ soni boshqa m_k $(k = 0,1,2,\dots,L)$ qiymatlardan katta farq qilmaydigan qilib, har bir xudud uchun alohida tanlanadi.

3.Chaqiruvlar sonining nisbiy chastotasi, ya’ni τ uzunlikdagi vaqt intervalida chaqiruvlar soni k ta bo‘lishining empirik ehtimollar – $W_k(\tau)$ larni quyidagi tenliklardan topamiz:

$$W_k(\tau)=m_k/N \quad (k=0,1,2,\dots,L) \text{ va } W_{L+1}(\tau)=W_{>L}(\tau)=m_{>L}/N.$$

Tushunarliki, $W_0+W_1+\dots+W_{L+1}=1$

4. Vaqtning τ uzunlikdagi intervalida chaqiruvlar soni k ta bo‘lishining nazariy ehtimolini quyidagi tengliklar yordamida topamiz ((2.6.8) va (2.6.10). formulalar):

$$P_0(\tau)=e^{-\lambda\tau}, \quad P_\kappa(\tau)=\frac{\lambda\tau}{\kappa}P_{\kappa-1}(\tau), \ k=1,2,\dots,L,$$

$$P_{L+1}=P_{>L}=1-(P_1(\tau)+P_2(\tau)+\dots,P_L(\tau)),$$

bu yerda $P_{L+1}=P_{>L}$ – vaqtning τ uzunlikdagi intervalida chaqitruvlar soni L tadan ko‘p bo‘lishining nazariy ehtimoli.

5. Birinchi bobda keltirilgan (1.18.6.) tenglikdan foydalanib, berilgan α uchun xi-kvadrat taqsimotning kritik nuqtalari jadvali(3-Ilova)dan kritik chegara t_α topamiz. Jadvaldan foydalanishda xi–kvadrat taqsimotning erkinlik darajasi k-1-r=L ekanligini (qaralayotgan holda $k=L+2$ va noma’lum parametlar soni $r=1$) inobatga olamiz.

6. Ko‘rilayotgan masala uchun K. Pirsonning xi–kvadrat muvofiqlik mezoni statistikasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$Z_N^2(\lambda)=\sum_{i=0}^{L+1}\frac{(m_i-NP_i(\tau))^2}{NP_i(\tau)}=N\sum_{i=1}^{L+1}\frac{(W_i-P_i(\tau))^2}{P_i(\tau)} \qquad (2.6.12)$$

Ushbu statistikaning qiymatini yuqorida keltirilgan sonlar yordamida hisoblaymiz va uni t_α son bilan solishtiramiz. Agar $Z_N^2(\lambda) < t_\alpha$ bo'lsa $N(\tau)$ gipoteza qabul qilinadi, aks holda u rad etiladi.

Ushbu algoritm yordamida yong'in xavfsizligi qismiga kelib tushayotgan chaqiruvlar oqimini Puasson taqsimotli oqim ekanligi haqidagi gipotezani tekshirishga oid misol ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, bir yil (T = 365 sutka) mobaynida muayyan bir K shaharda jami M= 2358 ta jangovar chiqishlar ro'yxatga olingan bo'lib, yong'in xavfsizligi bo'linmalarini τ =1 sutka mobaynidagi yong'inlarni bartaraf etishga (jangovar) chiqishlari soni haqida bir yillik statistik ma'lumotlar quyidagi jadval shaklida berilgan bo'lsin:

k	0	1	2	3	4	5	6
m_k	1	7	18	26	42	53	54

k	7	8	9	10	11	11 tadan ortiq
m_k	52	38	23	17	13	21

Bu yerda k – yong'in xavfsizligi bo'linmalarini yong'inga chiqishlar soni, m_k – k marta yong'inga chiqilgan sutkalar soni. Yong'in xavfsizligi qismlariga kelib tushadigan chaqiruvlar oqimi bilan yong'inlarni bartaraf etishga chiqishlar oqimi bir xil ekanligini inobatga olib, uning sutka mobaynidagi chaqiruvlar sonidan iborat tasodifiy miqdor λ (noma'lum) parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lishi haqidagi gipotezani α = 0.05 aniqlik darajasi bilan tekshiramiz.

Demak, ko'rib chiqilayotgan xol uchun T=N=365, L=11. Chaqiruvlar oqimi intensivligining bahosi sifatida λ = 2358/365 = 6,46 (chiqish/sutka) miqdori olamiz.

Yuqorida keltirilgan formulalar yordamida m_k, $W_k(\tau)$, $P_k(\tau)$ miqdorlarning qiymatlarini hisoblab, quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

k	m_k	W_k	P_k	$W_k - P_k$	$(W_k - P_k)^2/P_k$
0	1	0,002740	0,001565	0,001175	0,000882
1	7	0,019178	0,010109	0,009070	0,008137
2	18	0,049315	0,032651	0,016664	0,008505
3	26	0,071233	0,070308	0,000925	0,000012
4	42	0,115068	0,113547	0,001521	0,000020
5	53	0,145205	0,146703	-0,001498	0,000015
6	54	0,147945	0,157950	-0,010005	0,000634
7	52	0,142466	0,145765	-0,003300	0,000075
8	38	0,104110	0,117706	-0,013596	0,001570
9	23	0,063014	0,084486	-0,021473	0,005457
10	17	0,046575	0,054578	-0,008003	0,001173
11	13	0,035616	0,032052	0,003564	0,000396
11 dan ortiq	21	0,057534	0,032579	0,024955	0,019115
JAMI	365	1	1		0,045993

Yuqorida keltirilgan (2.6.12) formuladan foydalanib $Z_N^2(\lambda)$ statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$Z_N^2(\lambda) = 365 \cdot 0{,}045993 = 16{,}79$$

Kritik chegara $t_{0,05}$ ni xi–kvadrat taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan foydalanib, erkinlik darajasi $L=11$ bo‘lgan hol uchun topamiz: $t_{0,05} = 19{,}7$.

Demak, $Z_n^2(\lambda) = 16{,}79 < 19{,}7 = t_{0,05}$.

Ushbu tengsizlikdan, qaralayotgan tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega bo‘lishi haqidagi gipotezani α = 0.05 aniqlik darajasi bilan qabul qilish mumkin ekanligi kelib chiqadi.

1. *Qanday holda OXKTda kechayotgan jarayon Markov jarayoni bo'ladi?*
2. *Qanday holda hodisalar oqimining intensivligi diskret holatli Markov jarayonining o'tish ehtimollari zichligiga teng bo'ladi.*
3. *τ uzunlikdagi vaqt intervalida k ta hodisaning ro'y berishi ehtimoli qanday ko'rinishga ega bo'ladi?*
4. *$P_k(\tau)$ ehtimollar uchun rekurrent formulani keltiring.*
5. *Puasson taqsimotining λ parametri hodisalarning Puasson oqimida qanday ma'noni anglatadi?*
6. *Chaqiruvlar oqimining Puasson taqsimotli oqim ekanligi haqidagi gipotezani K. Pirsonning xi–kvadrat muvofiqlik mezoni yordamida tekshirish algoritmini keltiring.*

2.7 §. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlaridagi jarayonlarining vaqt bilan ifodalangan tavsiflari

Tayanch iboralar: *qo'shni hodisalar orasidagi vaqt, chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqti, bo'linmalarining yong'in joyiga etib borish vaqti, yong'in o'chirish davomiyligi.*

OHKT lardagi jarayonlarni tavsiflashda uning vaqt bilan ifodalangan harakteristikalari muhim ahamiyatga egadir. OHKT ning vaqtga bog'liq asosiy xarakteristikalari sifatida "chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqti", "xizmat ko'rsatishni kutish vaqti", "chaqiruvning OXKTda bo'lishi vaqti", "ketma – ket keladigan chaqiruvlar orasidagi vaqt" va boshqalarni keltirish mumkin.

Albatta, OXKTda kechadigan jarayon tasodifiy bo'lganda ushbu harakteristikalar ehtimollar nazariyasi va matematik statistika metodlari yordamida tavsiflanadi.

Avvalambor, *ketma - ket hodisalar (qo'shni hodisalar) orasida vaqt T* ning taqsimotini keltirib chiqamiz. O'z tabiatiga ko'ra, *T* vaqt uzluksiz tasodifiy miqdordir.

Hodisalarning sodda oqimi uchun T ning taqsimot funksiyasi $P(T<\tau)$ ni qarama - qarshi hodisaning ehtimoli yoradamida topamiz. T vaqt uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lganligi uchun

$$P(T \geq \tau) = P(T > \tau)$$

Demak,

$$P(T < \tau) = 1 - P(T \geq \tau) = 1 - P(T > \tau) \qquad (2.7.1)$$

Tushunarliki, $P(T > \tau)$ ehtimol τ uzunlikdagi vaqt intervalida bironta ham hodisa ro'y bermasligining ehtimoli $P_0(\tau)$ ga teng, ya'ni

$$P(T > \tau) = P_0(\tau)$$

(2.6.8) tenglikni inobatga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Shunday qilib,

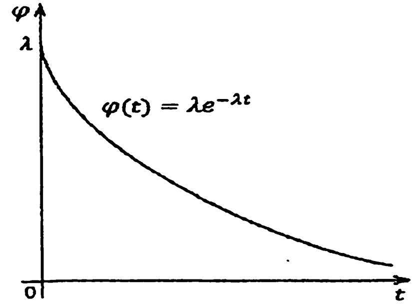
$$P(T \geq \tau) = P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} \qquad (2.7.2)$$

Demak, T tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va taqsimot zichligi mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t \geq 0 \qquad (2.7.3)$$

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t \geq 0 \qquad (2.7.4)$$

Avvalgi bob (1.10- §.)dan ma'lumki, taqsimot zichligi (2.7.4) ifoda bilan berilgan taqsimot ko'rsatkichli taqsimot deyiladi. Uning grafigi quyidagicha bo'ladi:



2.7.1 – chizma

Demak, hodisalarning sodda oqimida ikkita qo'shni hodisalar orasidagi vaqt T ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'ladi. Avvalgi bob (1.10- §.) dan ma'lumki, ko'rsatkichli taqsimotga ega tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (ketma-ket hodisalar orasida vaqt intervallarining o'rtacha uzunligi) va o'rta kvadratik chetlanishi o'zaro teng va ular oqim intensivligi λ ning teskarisiga teng bo'ladi:

$$M(T) = a = \frac{1}{\lambda}, \quad D(T) = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

OXKT ning yana bir muhim xarakteristikalaridan biri – *chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqtidir*. Uni uzluksiz tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz va $\tau_{xiz.}$ orqali belgilaymiz. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(\tau) = P(\tau_{xiz.} < \tau)$ statistik ma'lumotlar asosida aniqlanadi. Amaliyotda, ko'proq, ushbu taqsimotni ham ko'rsatkichli taqsimot, ya'ni

$$F(\tau) = P\{\tau_{xiz.} < \tau\} = 1 - e^{-\mu\tau}, \ \tau \geq 0 \qquad (2.7.5)$$

ekanligi haqidagi statistik gipoteza ilgari suriladi. Bu yerda μ – o'zgarmas son (taqsimot parametri).

Ma'lumki, $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi (2.7.5) formula bilan berilsa, uning sonli xarakteristikalari –

matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rta kvadratik chetlanishi quyidagilarga teng bo'ladi:

$$M\tau_{xiz.} = \frac{1}{\mu}, \quad D\tau_{xiz.} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \sigma(\tau_{xiz.}) = \sqrt{D\tau_{xiz.}} = \frac{1}{\mu} \qquad (2.7.6)$$

Ya'ni, ushbu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va o'rta kvadratik chetlanishi μ parametrning teskarisiga teng. Agar, chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqtini $\tau_{o'r}$ orqali belgilasik, matematik kutilma ta'rifidan

$\tau_{o'r} = M\tau_{xiz.}$ va (2.7.6) munosabatdan $\tau_{o'r} = \frac{1}{\mu}$ yoki $\mu = \frac{1}{\tau_{o'r}}$ bo'ladi.

Demak, $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi (2.7.5) formula bilan berilsa, undagi taqsimot parametri – μ tizimning xizmat ko'rsatish intensivligini, ya'ni birlik vaqt ichida xizmat ko'rsatiladigan o'rtacha chaqiruvlar sonini anglatar ekan.

Ma'lumki, $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi (2.7.5) formula bilan berilsa, uning taqsimot zichligi $f(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$ ko'rinishda bo'ladi. Demak, $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdorning $[\tau_1, \tau_2)$ intervalda bo'lishi ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$F(\tau) = P(\tau_1 \le \tau_{xiz.} < \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau)d\tau = F(\tau_1) - F(\tau_2) = e^{-\mu\tau_1} - e^{-\mu\tau_2} \qquad (2.7.7)$$

Ko'p OXKT lar uchun $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lishi to'g'risidagi gipotezaning kuzatuvlar natijalariga muvofiq kelishi tasdiqlangan. $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdorning ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lishi OXKT faoliyatining nazariy taxlilini anchagina osonlashtiradi.

Yong'in o'chirish jarayonlarini o'rganish va taxlil qilishda birinchi navbatda uning vaqt bilan ifodalangan quyidagi harakteristikalari o'rganiladi:

Yong‘in xavfsizligi bo‘linmalarining chaqiruvga xizmat ko‘rsatish vaqti. Bu ko‘rsatkich jangovar bo‘linmalar sonini aniqlash va asoslash uchun zarur bo‘ladi.

Yong‘in xavfsizligi bo‘linmalarining yong‘in joyiga yetib borish vaqti. Bu ko‘rsatkich yong‘in xavfsizligi xizmati faoliyatining tezkorlik darajasini baholovchi asosiy harakteristika hisoblanadi.

Yong‘in o‘chirish davomiyligi (bo‘linmalarning yong‘in o‘chirish bilan band bo‘lishi vaqti). Yong‘in o‘chirish vositalari (suv, ko‘pik hosil qiluvchi, kukunlar va h.k.) zaxirasi miqdorini aniqlash va asoslash uchun zarur bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari statistik ma’lumotlar asosida aniqlanadi. To‘plangan ma’lumotlar xarakteridan kelib chiqib ular haqida statistik gipoteza ilgari suriladi va u muvofiqlik mezonlari yordamida tekshiriladi.

Quyida, OXKT ning chaqiruvga xizmat ko‘rsatish vaqtining taqsimoti haqidagi gipotezani tekshirishga oid misollar ko‘rib chiqamiz.

2.7.1-misol.

Do‘konda haridorlarga xizmat ko‘rsatish vaqtining davomiyligi to‘g‘risidagi quyidagi ma’lumotlar asosida xizmat ko‘rsatish vaqtining ko‘rsatkichli taqsimotga ega ekanligi haqidagi gipotezani α =0.05 aniqlik darajasida tekshirish talab qilinsin.

Interval	Xizmat ko‘rsatilgan vaqt intervali (daqiqa)	Xizmat ko‘rsatilgan chaqiruvlar soni m_i (empirik chastota)
1	0 – 5	25
2	5 – 10	20
3	10 – 15	19
4	15 – 20	11
5	20 – 25	9
6	25 – 30	6

7	30 – 35	3
8	35 – 40	1
JAMI		94

Yechish.

Masalani Pirsonning muvofiqlik mezoni yordamida yechamiz.

1. Har bir (t_{i-1}, t_i) intervalning o'rtasi $\bar{t}_i$ larni quyidagi formuladan topamiz:

$$\bar{t}_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \; i=1,2,\dots,8$$

Interval №	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{t}_i$	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
m_i (empirik chastota)	25	20	19	11	9	6	3	1

2. Yuqoridagi jadvalga muvofiq chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqtini $\tau_{o'r}$ va tizimning xizmat ko'rsatish intensivligi μ larni (statistik baholarini) aniqlaymiz.

$$\tau_{o'r} = \frac{\sum_{i=1}^{8} \bar{t}_i m_i}{\sum_{i=1}^{8} m_i} = \frac{1145}{94} = 12,18$$

$$\mu = \frac{1}{\tau_{o'r}} = \frac{1}{12,18} = 0,082 \; xar./\min. = 4,9 \; xar./coat$$

3. Nazariy chastotalar $m_i^t = nP_{i0}$ larni quyidagi formuladan topamiz:

$$m_i^t = nP_{i0} = n\left(e^{-\mu t_{i-1}} - e^{-\mu t_i}\right) = 94\left(e^{-4,9 t_{i-1}} - e^{-4,9 t_i}\right)$$

Interval №	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i^I	31,51	20,95	13,93	9,257	6,154	4,091	2,719	1,808

1. Avvalgi bobdagi (1.18.1) formuladan Pirson mezonining kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$Z_8^2(\mu)=\sum_{i=1}^{8}\frac{(m_i-m_i^I)^2}{m_i^I}=6{,}16$$

Mezonning berilgan aniqlik darajasi $\alpha = 0.05$ ni inobatga olgan holda erkinlik darajasi *n-1-r=6 (n=8,* parametrlar soni *r=1)* bo'lgan xi – kvadrat taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan (3-Ilova) kritik chegarani topamiz:

$$t_\alpha=\chi^2(0{,}05;6)\ \ =12{,}6.$$

2. Shunday qilib, 6,16<12,6 ekanligidan $Z_8^2(\mu)<t_\alpha$ tengsizlik kelib chiqadi. Demak, haridorlarga xizmat ko'rsatish vaqtidan iborat qaralayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini 0.05 aniqlilik darajasi bilan ko'rsatkichli taqsimotga ega deb hisoblash mumkin.

2.7.2-misol.

N. shaharga oid, quyidagi jadvalda keltirilgan statistik ma'lumotlar asosida undagi yong'in xavfsizligi xizmati qismlarining chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqti τ_{xiz}. tasodifiy miqdorning ko'rsatkichli taqsimotga ega ekanligi haqidagi gipotezani α =0.05 aniqlik darajasi bilan tekshirish talab qilinsin:

Interval №	Xizmat ko'rsatilgan vaqt intervali *(soat)*	Xizmat ko'rsatilgan chaqiruvlar *soni* m_i
1	0 – 0,5	1150
2	0,5 – 1	420

3	1 – 1,5	160
4	1,5 – 2	60
5	2 – 2,5	22
6	2,5 – 3	6
7	3 – 3,5	4
8	3,5 – 4	2
9	4 – 8	1
JAMI		1825

Yechish.

Masalani Pirsonning muvofiqlik mezoni yordamida yechamiz.

1. Har bir (t_{i-1}, t_i) intervalning o'rtasi $\bar{t}_i$ larni topamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

Interval №	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{t}_i$	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	6
m_i (empirik chastota)	1150	420	160	60	22	6	4	2	1

2. Yuqoridagi jadvalga muvofiq chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqtini $\tau_{o'r.}$ va tizimning xizmat ko'rsatish intensivligi μ larni (statistik baholarini) aniqlaymiz.

$$\tau_{o'r.} = \frac{\sum_{i=1}^{9} \bar{t}_i m_i}{\sum_{i=1}^{9} m_i} = \frac{1000}{1825} = 0,548 \quad coat$$

$$\mu = \frac{1}{\tau_{o'r.}} = \frac{1}{0,548} = 1,83 \ chaq./\tilde{n}\hat{\imath}\grave{a}t$$

3. Nazariy chastotalar $m_i^{t} = nP_{i0}$ ni topamiz:

$$m_i^i = nP_{i0} = 1825\left(e^{-1,83t_{i-1}} - e^{-1,83t_i}\right)$$

Interval №	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i^i	1094,1	438,2	175,5	70,3	28,2	11,3	4,5	1,8	1,2

4. Pirson mezonining kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$Z_9^2(\mu) = \sum_{i=1}^{9} \frac{(m_i - m_i^i)^2}{m_i^I} = 10,42$$

5. Mezonning berilgan aniqlik darajasi $\alpha = 0,05$ dan foydalanib erkinlik darajasi *n-1-r=7* (*n=9*, parametrlar soni *r=1*) bo'lgan xi–kvadrat taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan (3-Ilova) kritik chegarani topamiz: $t_\alpha = \chi^2(0,05;7) = 14,1$.

6. Shunday qilib, 10,42<14,1 ekanligidan $Z_9^2(\mu) < t_\alpha$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. Demak, yong'inlarni bartaraf etishga sarflangan vaqt τ_{xiz}. tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini 0,05 aniqlilik darajasi bilan ko'rsatkichli taqsimotga ega deb hisoblash mumkin.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Hodisalarning sodda oqimida qo'shni hodisalar orasidagi vaqt qanday taqsimotga ega bo'ladi?

2. Amaliyotda chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqtining taqsimoti haqida qanday gipoteza ilgari suriladi?

3. Yong'in o'chirish jarayonlarini o'rganish va taxlil qilishda uning vaqt bilan ifodalangan yana qanday xarakteristikalari o'rganiladi?

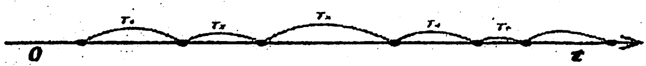
2.8 §. Palma oqimi. Erlangning k – taribli oqimi.

Tayanch iboralar: *Palma oqimi, Erlang oqimlari, Erlang taqsimoti*

Hodisalar oqimining amaliyotda ko'p uchraydigan turlaridan biri Palma oqimi hisoblanadi.

Ta'rif. Agar hodisalarning ordinar oqimida ketma - ket hodisalar orasidagi vaqtlar $T_1, T_2, \dots T_n, \dots$ bir xil taqsimlangan bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdoralar bo'lsa, bunday hodisalar oqimi *Palma oqimi* deb ataladi.

Hodisalarni $0t$ vaqt o'qida nuqtalar orqali belgilasak, Palma oqimini sxematik tarzda quyidagicha ifodalash mumkin (2.8.1–chizma):



2.8.1 –chizma

Hodisalarning sodda oqimi Palma oqimining xususiy holi hisoblanadi. Unda ketma-ket hodisalar orasidagi $T_1, T_2, \dots T_n, \dots$ vaqtlar bir xil parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Ularning bog'liqsizligi oqimning oqibatsizlik xossasidan kelib chiqadi. Ushbu xossaga muvofiq ixtiyoriy ikkita qo'shni hodisalar orasidagi vaqt boshqa hodisalar orasidagi vaqtlarga bog'liq bo'lmaydi.

Palma oqimiga misollar keltiramiz.

Faraz qilaylik, biron texnik qurilmaning elementi nosoz holga kelgunga qadar uzluksiz ravishda ishlatiladi. U nosoz holga kelishi bilan darhol yangisi(nusxasi) bilan almashtiriladi. Element tasodifiy vaqt ishlaydi. Agar texnik qurilmaning ushbu elementi nusxalari bir biriga bog'liq bo'lmagan holda nosoz holga kelsa (ishdan chiqsa), u holda elementlarning ishdan chiqishidan iborat hodisalar oqimi Palma oqimini tashkil qiladi.

Palma oqimiga keyingi misol sifatida avtomobillar kolonnasining harakatini keltirish mumkin. Faraz qilaylik, avtomobillar bir xil tezlik bilan harakatlanib, har biri o'zidan oldingisi bilan avvaldan belgilab qo'yilgan masofani saqlashga harakat qilsin. Lekin, tabiiyki, har xil tasodifiy faktorlar ta'siri natijasida avtomobillar bu masofani aniq saqlay olmaydilar, ya'ni vaqt o'tishi bilan qandaydir chetlanishlar yuzaga kelib turadi. Bunday kolonna avtomobillarining belgilangan marrani kesib o'tish vaqtlari T_1, T_2,... o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'ladi va avtomobillarining marrani kesib o'tishidan iborat hodisalar oqimi Palma oqimini tashkil qiladi.

Ta'kidlash joizki, yuqorida keltirilgan misolda, kolonnadagi avtomobillar o'zidan oldingisi bilan emas, balki kolonna boshidagi avtomobil bilan bir xil masofani saqlashga harakat qilsalar, ularning marrani kesib o'tishidan iborat hodisalar oqimi Palma oqimi bo'lmaydi.

Palma oqimining o'ziga xos jixatlaridan biri shundan iboratki, ko'p xollarda OXKT dan *chiquvchi hodisalar oqimi* Palma oqimini tashkil qiladi.

Palma oqimining ushbu xossasini ifodalovchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz

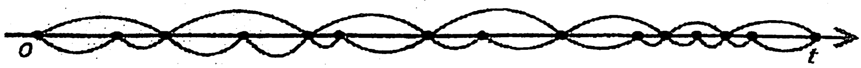
Teorema (Palma teoremasi). Agar rad qilish joriy qilingan OXKTga kiruvchi chaqiruvlar oqimi Palma oqimi bo'lib, chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqtidan iborat tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lsa, u holda rad qilingan (xizmat ko'rsatilmagan) chaqiruvlar oqimi ham Palma oqimini tashkil qiladi.

Bu tasdiqning muhimligi shundan iboratki, amaliyotda ko'p xollarda rad qilingan chaqiruvlar boshqa OXKT ga yuboriladilar va ular bu OXKT uchun kiruvchi oqimni tashkil qiladi. Demak, keyingi OXKT uchun oqim turi avvaldan ma'lum bo'ladi.

Shu o'rinda ta'kidlash joizki, agar OXKTga kiruvchi chaqiruvlar oqimi sodda oqim bo'lsa, rad qilingan (xizmat ko'rsatilmagan) chaqiruvlar oqimi sodda oqim bo'lmaydi, balki Palma oqimini tashkil qiladi.

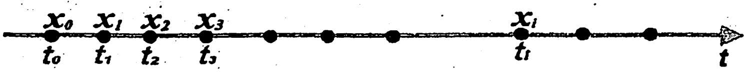
Amaliyot uchun muhim bo'lgan hodisalar oqimi turlaridan biri *Erlang oqimlari* hisoblanadi. U sodda oqimni "siyraklashtirish" natijasida hosil qilinadi.

Hodisalarning sodda oqimni $0t$ vaqt o'qida nuqtalar orqali ifodalaymiz. Ushbu nuqtalardan har ikkinchisini qoldirib, boshqalarini "tashlab yuboramiz". Natijada hosil bo'lgan oqim 2 – tartibli Erlang oqimi deb ataladi (2.8.2 – chizma).



2.8.2 – chizma

Hodisalar oqimidagi $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ vaqtlarda ro'y bergan hodisalar ketma – ketligini sonlar o'qida $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ orqali belgilaylik (2.8.3 - chizma).

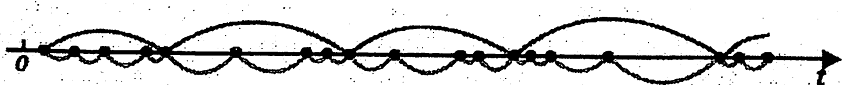


2.8.3 - chizma

U holda, 2 – tartibli Erlang oqimi $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ "nuqtalar"dan, ya'ni x_{2i}, $i=0,1,2,\ldots$ hodisalardan iborat bo'ladi.

Umumiy holda, hodisalarning sodda oqimida har k – hodisani qoldirib, boshqalarini "tashlab yuborish"natijasida hosil qilingan, ya'ni x_{ik}, $i=0,1,2,\ldots$ hodisalardan iborat oqim, k – tartibli Erlang oqimi deb ataladi.

Masalan, quyidagi 2.8.4 - chizmada 4 – tartibli Erlang oqimi ifodalangan.



2.8.4 - chizma

Tushunarliki, sodda oqim Erlang oqimining xususiy xoli bo'lib, u 1 – tartibli Erlang oqimini tashkil qiladi.

Oqim ta'rifidan ko'rinib turibdiki, k – tartibli Erlang oqimida qo'shni hodisalar orasidagi T vaqt k ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisidan iborat bo'ladi: $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$. Bu yerda T_i tasodifiy miqdorlar Erlang oqimidagi qo'shni hodisalar orasidan tashlab yuborilgan hodisalar orasidagi vaqtlarni ifodalaydi.

Dastlabki oqim sodda bo'lganligi uchun, har bir T_i, $i=1,2,\dots,k$ tasodifiy miqdor ko'satkichli taqsimotga ega bo'ladi. Murakkab bo'lmagan hisob-kitoblar orqali ko'rsatish mumkinki, $T= T_1+ T_2 +,\dots, +T_k$ tasodifiy miqdorning taqsmot zichligi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(\tau)=\frac{\mu(\mu\tau)^{\hat{e}-1}}{(\hat{e}-1)!}e^{-\mu\tau}\quad, k=1,2,\dots \tag{2.8.1}$$

Taqsimot zichligi (2.8.1) formula ko'rinishida bo'lgan taqsimot qonuni k –tartibli Erlang taqsimoti deb ataladi. Undagi μ va k sonlar Erlang taqsimoti parametrlari deb ataladi.

Ko'rinib turibdiki, 1 – tartibli Erlang taqsimoti ko'rsatkichli taqsimot bilan ustma – ust tushadi. 2 – tartibli Erlang taqsimotining taqsimot zichligi va taqsimot funksiyasi mos ravishda quyidagi ko'rinishlarda bo'ladilar:

$$f(\tau)=\mu^2\tau e^{-\mu\tau},\quad F(\tau)=1-(1+\mu\tau)e^{-\mu\tau}$$

Bo'laklab integrallash orqali ko'rsatish mumkinki, k – tartibli Erlang taqsimotiga ega bo'lgan $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdorning sonli harakteristikalari – matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rta kvadratik chetlanishi quydagiga teng bo'ladi:

$$M\tau_{xiz.}=\frac{\kappa}{\mu},\quad D\tau_{xiz.}=\frac{\kappa}{\mu^2},\quad \sigma(\tau_{xiz.})=\sqrt{D\tau_{xiz.}}=\frac{\sqrt{\kappa}}{\mu}$$

Avvalgi paragrafda, juda ko'p OXKTlar uchun $\tau_{xiz.}$ tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lishi to'g'risidagi gipoteza kuzatuvlar natijalariga muvofiq kelishi aytib o'tilgan edi. Bunday gipoteza kuzatuvlar natijalariga muvofiq kelmagan hollarda, odatda, OXKT ning $\tau_{xiz.}$ va boshqa vaqtga bog'liq harakteristikalarning taqsimot qonunlari k –tartibli Erlang taqsimotiga ega bo'lishi to'g'risidagi gipoteza ilgari suriladi. Bunda k soni, o'rnagilayotgan tasodifiy miqdorning kuzatuv natijalari - statistik ma'lumotlar asosida tanlanadi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Qanday hodisalar oqimi Palma oqimi deb ataladi? Palma teoremasini keltiring.

2. Qanday hodisalar oqimi k – tartibli Erlang oqimi deb ataladi?

3. Qanday taqsimot qonuni k –tartibli Erlang taqsimoti deb ataladi va u bilan Erlang oqimi orasida qanday bog'liqlik mavjud?

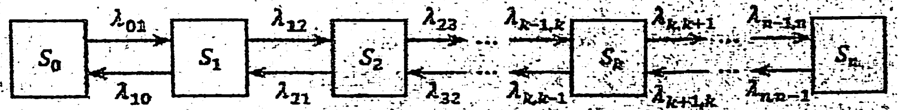
4. Qanday hollarda OXKT ning vaqt bilan ifodalangan xarakteristikasining taqsimot qonuni k –tartibli Erlang taqsimotiga ega bo'lishi to'g'risidagi gipoteza ilgari suriladi?

2.9 §. "Tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni

Tayanch iboralar: *"tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni.*

Bundan buyon, darslikning keyingi paragraflarida ko'rib chiqiladigan barcha chaqiruvlar oqimini sodda oqim deb faraz qilamiz. Agar boshqa turdagi oqimlar qaraladigan bo'lsa buni alohida ta'kidlaymiz.

Bir jinsli uzluksiz vaqtli diskret holatli Markov jarayonlari orasida tasodifiy jarayonlarning shunday sinfi mavjudki, ulardan demografiya, biologiya, tibbiyot (epidemiologiya), iqtisodiyot, tijorat va boshqa juda ko'p sohalardagi masalalarni yechishda matematik model sifatida samarali foydalaniladi. Bu *"tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni* deb ataluvchi jarayondir. Uning holatlar grafi quyidagi 2.9.1- chizmada keltirilgan.



2.9.1 - chizma

Holatlar grafidan ko'rinib turibdiki, tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari $S_0, S_1, S_2,...,S_n$ bo'lib, tizim ixtiyoriy S_k holatdan faqat qo'shni S_{k-1} yoki S_{k+1} holatlarga o'tish mumkin. Ushbu shart "tug'ilish va halok bo'lish" jarayonining asosiy o'ziga xos jihatidir.

Yuqorida keltirilgan holatlar grafi ma'lum biologik talqinni o'zida aks ettiradi: S_k holat biron turning populyatsiyasi soni k ga teng bo'lgan holatga mos keladi. Tizimining S_k holatdan S_{k+1} holatga o'tishi populyatsiya a'zolaridan biri tug'ilganda, S_k holatdan S_{k-1} holatga o'tishi esa populyatsiya a'zolaridan biri halok bo'lganda ro'y beradi. Agar ma'lum bir populatsiya (masalan, quyonlar)ning joriy vaqtdagi soni k ga teng (tizim S_k holatda) bo'lsa $\lambda_{k\ k+1}$ miqdor ushbu popultsiyaning yangi vakili paydo bo'lishi (tug'ilishi) intensivligini, $\lambda_{k\ k-1}$ esa uning bir vakilini halok bo'lishi (yoki sotilishi) intensivligini aks ettiradi. Xususiy holda, populyatsiya soni chegaralanmagan (Markov zajirining holatlar soni cheksizta, lekin sanoqlita) bo'lishi ham mumkin.

"Tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni sxemasining xususiy xollari darslikning keyingi paragraflari mavzularini tavsiflashda keng qo'llaniladi. Bundan tashqari, amaliyotdagi juda ko'p masalalarni ushbu jarayon yordamida matematik modellashtirish mumkin.

Shu sababli, bu jarayonning umumiy sxemasi uchun Kolmogorovning algebraik tenglamalar sistemasining yechimini topish va undan qaralayotgan xususiy hollarda foydalanish (Kolmogorovning tenglamalar sistemasini qayta yechmasdan) maqsadga muvofiq.

Shunday qilib, OXKT itensivliklari $\lambda_{k\,k+1}$ yoki $\lambda_{k\,k-1}$ ga teng bo'lgan oqim ta'sirida o'z holatini o'zgartiradi degan faraz bilan tizimning statsionar rejimdagi holatlar ehtimollarini topamiz.

Buning uchun 2.9.1-chizmada keltirilgan holatlar grafi bo'yicha limit ehtimollar uchun algebraik tenglamalar sistemasini tuzamiz va uni yechamiz. (limit ehtimollarning mavjudligi tizimning holatlari soni cheklitaligi va ularning har biridan chekli qadam bilan boshqa ixtiyoriy holatga o'tish mumkinligidan kelib chiqadi).

Bunday tenglamalarni tuzishning 1.14-§. da keltirilgan qoidasiga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz:

S_0 holat uchun

$$\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$$

S_1 holat uchun

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$$

Bu ifodalardan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2$$

Qolgan holatlarning limit ehtimollari uchun ham xuddi shunday tenglamalarni tuzib, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \lambda_{01}\,p_0 = \lambda_{10}\,p_1 \\ \lambda_{12}\,p_1 = \lambda_{21}\,p_2 \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots \\ \lambda_{k-1\,k}\,p_{k-1} = \lambda_{k\,k-1}\,p_k \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots \\ \lambda_{n-1\,n}\,p_{n-1} = \lambda_{n\,n-1}\,p_n \end{cases} \qquad (2.9.1)$$

Bu tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$p_1=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0,\ p_2=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}p_1=\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0,$$

Shunday ketma - ketlikda davom etib, ixtiyoriy k=1,2,...,n uchun quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$p_k=\frac{\lambda_{k-1k}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{kk-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0 \tag{2.9.2}$$

Ushbu (2.9.2) formuladan ko'rish mumkinki p_0 ehtimol oldidagi ko'paytuvchining suratida S_k (k = 1,2,...,n) holatgacha bo'lgan chapdan o'ngga yo'naltirilgan strelkalar ustidagi intensivliklar ko'paytmasi, maxrajida S_k (k = 1,2,...,n) holatgacha bo'lgan o'ngdan chapga yo'naltirilgan strelkalar ustidagi intensivliklar ko'paytmasi yozilgan.

p_1, p_2,...,p_n limit ehtimollarning (2.9.2) formuladagi ifodasini normallashtiruvchi shart

$$p_0+p_1+\ldots+p_n=1 \tag{2.9.3}$$

ga qo'yib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$p_0=\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{nn-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1} \tag{2.9.4}$$

Ba'zi masalalarni yechishda (2.9.2) formuladan kelib chiqadigan quyidagi rekurrent munosabatdan foydalanish qulay bo'ladi:

$$p_k=\frac{\lambda_{k-1k}}{\lambda_{kk-1}}\cdot p_{\kappa-1},\kappa=1,2,\ldots,n. \tag{2.9.5}$$

Shunday qilib, "tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni sxemasining umumiy xoli uchun holatlarning limit ehtimollarini topishning (2.9.2) va (2.9.4) formulalariga ega bo'ldik. Ulardan keyingi paragraflarda foydalanamiz.

Endi, yuqorida keltirilgan formulalardan foydalaniib yechiladigan misollardan namunalar keltiramiz.

2.9.1-misol.

"Tug'ilish va halok bo'lish" jarayonida tizimning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlari uchta - S_0, S_1, S_2 bo'lib, o'tish intensivliklari quyidagicha berilgan: $\lambda_{01} = 1$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{21} = 3$. Holatlarning limit ehtimollarini topish talab qilinsin.

Yechish.

Yuqoridagi (2.9.4) formuladan quyidagini topamiz:

$$p_0 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4}\right)^{-1} = 0{,}706$$

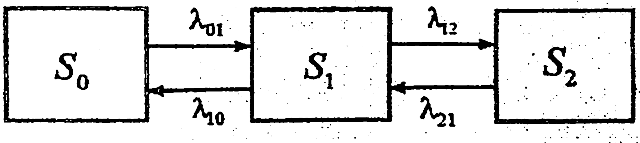
Bu qiymatni (2.9.2) formulaga qo'yamiz:

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot 0{,}706 = 0{,}176 \qquad p_2 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} \cdot 0{,}706 = 0{,}118.$$

Demak, statsionar rejimda vaqtning o'rtacha 70,6% qismida tizim S_0 holatda, o'rtacha 17,6% qismida S_1 holatda va o'rtacha 11,8% qismida S_2 holatda bo'ladi.

2.9.2-misol.

Avtomobil yoqilg'isi quyish shahobchasi ikkita tarmoqdan iborat bo'lib, undagi jarayonning belgi qo'yilgan holatlar grafi quyidagi 2.9.2 –chizmada berilgan:



2.9.2 - chizma

Limit ehtimollar p_0, p_1, p_2 larni quyidagi shartlar bilan topish talab qilinadi: λ_{01} = 1 avt/min; λ_{12}= 0,8 avt/min; $\lambda_{10} = \lambda_{21}$ = 0,6 avt/min.

Yechish.

Kolmogorovning algebraik tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} p_0 = 0{,}6\, p_1 \\ 0{,}8\, p_1 = 0{,}6\, p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini yechib limit ehtimollarning qiymatlarini topamiz: p_0 = 0,204; p_1= 0,341; p_2=0,455. Demak, statsionar rejimda vaqtning o‘rtacha 20,4% qismida avtomobil yoqilg‘isi quyish shahobchasida bironta ham avtomobil bo‘lmaydi (tizim S_0 holatda), o‘rtacha 34,1% qismida shahobchada bitta avtomobil bo‘ladi (tizim S_1 holatda) va o‘rtacha 45,5% qismida ikkita avtomobil bo‘ladi (tizim S_2 holatda), ya’ni shahobchaning ikkala tarmog‘i ham band bo‘ladi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. “Tug‘ilish va halok bo‘lish” jarayoni deb qanday jarayonga aytiladi?

2. “Tug‘ilish va halok bo‘lish” jarayoni holatlarning limit ehtimollari uchun formulalar keltiring.

2.10 §. Rad qilish joriy etilgan tizimlar. Bir kanalli rad etish joriy qilingan OXKT.

Tayanch iboralar: *OXKT ning absolyut va nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati, rad etish ehtimoli, band kanallarning o'rtacha soni.*

Avval ta'kidlaganimizdek, rad qilish joriy etilgan OXKT deb uning barcha kanallari chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish bilan band bo'lgan vaqtda tizimga yangi chaqiruv kelib tushsa, unga xizmat ko'rsatish rad etiladi. Bu chaqiruv tizimni xizmat ko'rstilmasdan tark etadi. Tizimning keyingi xizmat ko'rsatish jarayoni xuddi bu chaqiruv umuman bo'lmagandek davom etadi.

2.2 – §. da OXKT ning samaradorligi ko'rsatkichlari to'g'risida ba'zi ma'lumotlarni keltirgan edik. Endi ularga batafsilroq to'xtalamiz.

Rad qilish joriy qilingan OXKT ning samaradorligi ko'rsatkichlari sifatida quyidagilarni qaraymiz:

1) A – tizimning *absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati.* Bu miqdor birlik vaqt ichida tizim xizmat ko'rsatadigan chaqiruvlarning o'rtacha soniga teng.

Ushbu miqdor tizim samaradorligini o'ta muhim harakteristikalaridan biri hisoblanadi.

2) Q – tizimning *nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati*. Bu miqdor tizimga kelib tushgan chaqiruvlarning tizim tomonidan xizmat ko'rsatiladigan o'rtacha qismiga teng. Boshqacha aytganda, nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati deb birlik vaqt ichida tizim xizmat ko'rsatadigan chaqiruvlarning o'rtacha sonini tizimga birlik vaqt ichida kelib tushadigan chaqiruvlarning o'rtacha soniga nisbatiga, ya'ni A/λ ga aytiladi. (bu yerda λ – kiruvchi oqim intensivligi). Bu esa o'z navbatida OXKT ga kelib tushgan chaqiruvga xizmat ko'rsatilishi ehtimoliga teng bo'ladi.

3) $P_{rad.}$ – tizimning *rad etish ehtimoli.* Bu miqdor tizimga kelib tushgan chaqiruvning xizmat ko'rsatilmasdan OXKT ni tark etishi ehtimoliga teng.

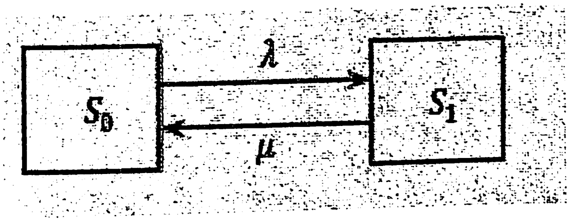
4) $\bar{k}$ – tizim *band kanallarining o'rtacha soni* (ko'p kanalli tizim uchun).

Ushbu samaradorlik ko'rsatkichlari uchun formulalar keltirib chiqarishda bir kanalli va ko'p kanalli OXKTlarni alohida ko'rib chiqamiz.

Quyidagicha masalani qaraymiz: bir kanalli rad qilish joriy qilingan OXKT qaralayotgan bo'lib, unga kiruvchi oqim intensivligi λ va kanalning xizmat ko'rsatish intensivligi μ bo'lsin.

Tizim holatlarining limit ehtimollarini hamda uning samaradorlik ko'rsatkichlarini topish masalasini qaraymiz.

Bunday S tizim (OXKT) ikkita holatda bo'lishi mumkin: S_0 – kanal bo'sh, S_1 – kanal band. Tizimning belgi qo'yilgan holatlar grafi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



2.10.1-chizma

Avval belgilangani kabi, $p_k(t)$, $k = 0,1$, tizimning t vaqtda S_k holatda bo'lishi ehtimoli bo'lsin. Birinchi bobning 1.14 – §. da bayon qilingan qoidaga muvofiq Kolmogorovning differensial tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t) \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \end{cases} \qquad (2.10.1)$$

Tenglamalar sistemasining birinchi va uchinchi tenglamalaridan $p_0(t)$ ehtimol uchun quyidagi birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)p_0(t)+\mu$$

Bu tenglamani tabiiy boshlang'ich shart $p_0(0)=1$, $p_1(0)=0$ (tizim $t=0$ vaqtda bo'sh, ya'ni S_0 holatda bo'ladi) bilan yechamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (2.10.2)$$

Ushbu munosabat va (2.10.1) sistemaning uchinchi tenglamasidan kanalning t vaqtda band bo'lishi ehtimoli $p_1(t)$ ni topamiz:

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (2.10.3)$$

Hosil bo'lgan formulalardan ko'rinib turibdiki, $p_0(t)$ ehtimol $t \to \infty$ da kamayib boradi va $p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ soniga yaqinlashadi, $p_1(t)$ ehtimol esa $t \to \infty$ da 0 sonidan boshlab ortib boradi va $p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ songa yaqinlashadi.

Shunday qilib, statsionar rejimda, ya'ni $t \to \infty$ da tizimning bo'sh va band bo'lishining limit ehtimollari uchun mos ravishda quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad (2.10.4)$$

Ta'kidlash joizki, $p_0(t)$ ehtimol OXKT ning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyatiga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, $p_0(t)$ –

tizimning t vaqtda bo'sh bo'lishi ehtimoliga teng. Agar tizimga t vaqtda chaqiruv kelib tushsa, u bu vaqtda bo'sh bo'lsa chaqiruvga xizmat ko'rsatadi. Demak, $p_0(t)$ – tizimning t vaqtda chaqiruvga xizmat ko'rsatishi ehtimoliga teng. Birlik vaqt ichida tizimga o'rtacha λ ta chaqiruv kelib tushadi va ulardan o'rtacha $\lambda p_0(t)$ tasiga xizmat ko'rsatiladi. Demak, jami kelib tushgan chaqiruvlarning xizmat ko'rsatiladigan qismi quyidagiga teng bo'ladi:

$$Q = \frac{\lambda p_0(t)}{\lambda} = p_0(t)$$

Bu yerdan, statsionar rejimda ($t \to \infty$) OXKT ning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati uchun quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$Q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \qquad (2.10.5)$$

Demak, $t \to \infty$ da tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \qquad (2.10.6)$$

Statsionar rejimda tizimga kelib tushgan chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etilishi ehtimoli

$$P_{\text{рад}} = 1 - p_0 = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \qquad (2.10.7)$$

va xizmat ko'rsatilmagan chaqiruvlarning o'rtacha umumiy soni N

$$N = \lambda p_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu}$$

ga teng bo'ladi.

p_0 va p_1 limit ehtimollarni kanalning o'rtacha bo'sh turishi vaqti – $\tau_{bo'sh}$ hamda bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti – $\tau_{o'r.}$ orqali ifodalash mumkin. Ma'lumki, $\mu = 1/\tau_{o'r.}$ va $\lambda = 1/\tau_{bo'sh}$. Bu ifodalarni (2.10.4) formulaga qo'yib quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$p_0 = \frac{\tau_{\text{bo`sh}}}{\tau_{o'r} + \tau_{\text{bo`sh}}}, \qquad p_1 = \frac{\tau_{o'r}}{\tau_{o'r} + \tau_{\text{bo`sh}}}.$$

Bu formulalar tizimning S_0 holatda (kanal bo'sh) va S_1 holatda (kanal band) bo'lishining o'rtacha nisbiy vaqtini ifodalaydi. Ya'ni, mos ravishda tizimning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati Q ni hamda rad etish ehtimoli $P_{rad.}$ ni aniqlaydi.

Bir kanalli rad qilish joriy qilingan OXKTning samaradorlik ko'rsatkichlarini hisoblashga oid misollar ko'rib chiqamiz.

2.10.1-misol.

Ma'lumotlar byurosiga telefon orqali chaqiruvlar (ma'lumot so'rovi) $\lambda = 90$ chaqiruv/soat intensivlik bilan kelib tushadi. Suhbatning o'rtacha davomiyligi

$\tau_{o'r.} = 2$ minutga teng. Agar OXKT (byuro)da bitta telefon apparati (raqami) ishlatilayotgan bo'lsa, tizimning samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinadi.

Yechish.

$\lambda = 90$ (1\soat), $\tau_{o'r.} = 2$ min. Xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi

$\mu = 1\backslash\tau_{o'r.} = 1\backslash 2 = 0{,}5$ (1\min) $= 30$ (1\soat). Yuqoridagi (2.10.5) formulaga muvofiq, OXKTning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$Q = \frac{30}{90+30} = 0{,}25,$$

ya'ni kelib tushgan chaqiruvning faqat o'rtacha 25% ga xizmat ko'rsatiladi (telefon orqali zarur ma'lumotlar beriladi). Mos ravishda xizmat ko'rsatishni rad etilishi ehtimoli (2.10.7) formulaga muvofiq

$$P_{rad.} = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0{,}75 .$$

OXKTning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati (2.10.6) formulaga muvofiq,

$$A = 90 \cdot 0{,}25 = 22{,}5.$$

Ya'ni, bir soatda o'rtacha 22,5 ta mijozga xizmat ko'rsatiladi. Demak, OXKT bitta aloqa raqami bilan ishlaganda 90 ta chaqiruvdan o'rtacha 67,5 tasini rad etadi. Bu esa, OXKT chaqiruvlar oqimi talablarini yetarli darajada qondira olmayotganini bildiradi.

Endi, yuqorida keltirilgan formulalarini yong'in xavfsizligi xizmati faoliyatining tahliliga qo'llashga oid misol ko'rib chiqamiz.

2.10.2-misol.

Faraz qilaylik, K_1 yong'in xavfsizligi qismiga bir yil mobaynida jami 142 marta chaqiruvlar kelib tushgan bo'lib, bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatish uchun o'rtacha $\tau_{o'r.}$ = 1,2 soat vaqt sarflagan bo'lsin. Qismga kiruvchi chaqiruvlar oqimi sodda (Puasson taqsimotli)oqim degan faraz bilan berilgan statistik ma'lumotlar asosida yong'in xavfsizligi qismining samaradorlik ko'rsatkichlarini baholash talab qilinsin.

Yechish.

Kiruvchi oqim intensivligi sifatida λ = 142/365$\cdot\approx$ 0,39 (chaqiruv/sutka) yoki λ =142/365$\cdot$24 $\approx$ 0,016 (chaqiruv/soat) miqdorni qabul qilamiz. Masala shartiga muvofiq $\mu = 1/\tau_{o'r.}$ = 1/1,2 =0,83 (chaqiruv/soat).

Yuqorida keltirilgan (2.10.5) formulaga muvofiq, yong'in xavfsizligi qismining nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$Q = p_0 = P(S_0) = 0{,}83/(0{,}016{+}0{,}83) = 0{,}981 \text{ bo‘ladi}$$

hamda (2.10.7) formulaga muvofiq, $p_1 = P(S_1) = P_{rad.} = 0{,}016/(0{,}016{+}0{,}83) = 0{,}019$. Demak, K_1 yong‘in xavfsizligi qismi bir yil mobaynida o‘rtacha 98,1% vaqt navbatchilik holatida, 1,9 % vaqt yong‘in o‘chirish bilan band holatda bo‘ladi.

Chaqiruvlarga xizmat ko‘rsatishni rad qilish ehtimoli $P_{rad}=0{,}019$ ekanligidan o‘rtacha $\frac{1000}{19} \approx 53$ ta Chaqiruvdan biriga K_1 yong‘in xavfsizligi qismi tomonidan xizmat ko‘rsatish rad etiladi.

Demak, kiruvchi oqim intensivligi $\lambda \approx 0{,}39$ (chaqiruv/sutka) ekanligini inobatga olsak o‘rtacha $N = \frac{53}{0{,}39} \approx 136$ kun (4,5 oy)da bir marta xizmat ko‘rsatish rad etiladi.

Muayyan hudud (masalan, shahar yoki viloyat)dagi yong‘in xavfsizligi qismlarini yuqorida keltirilgan samaradorlik ko‘rsatkichlari bo‘yicha taqqoslash natijalaridan ular faoliyatining samaradorligini oshirish yuzasidan tashkiliy chora – tadbirlar belgilashda foydalanish mumkin.

Masalan, faraz qilaylik K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 yong‘in xavfsizligi qismlarining yil mobaynidagi yong‘inlarni bartaraf etishga chiqishlari soni va bitta yong‘inni o‘chirishga sarflagan o‘rtacha vaqtlari quyidagi jadvalning ikkinchi va uchinchi ustunlarida berilgan bo‘lib, K_1 – K_6 qismlar faoliyatini taqqoslash talab qilinsin.

Dastavval chaqiruvlar oqimini Puasson taqsimotli oqim ekanligi haqidagi gipotezani tekshiramiz. Faraz qilaylik, ushbu gipoteza o‘rinli bo‘lsin. Berilgan ma’lumotlar asosida tizimning yuqorida keltirilgan ko‘rsatkichlarni hisoblab chiqib, quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

YoXQ	Yong'inlar soni	$\tau_{o'r.}$	λ	μ	P_0	P_1	Qism navbatchilik holatida bo'lishi ning o'rtacha vaqti (%)	Qism yong'. o'chir. bilan band bo'lishining o'rta. vaqti (%)	O'rtacha nechta chaqiruvdan biri rad etiladi	O'rtacha necha oyda bir marta xizmat ko'rs. rad etiladi
K_1	142	1,2	0,0162	0,8333	0,981	0,019	98,1	1,9	53	4,5
K_2	152	1,3	0,0174	0,7692	0,978	0,022	97,8	2,2	45	3,6
K_3	142	2,4	0,0162	0,4167	0,963	0,037	96,3	3,7	27	2,3
K_4	124	1,2	0,0142	0,8333	0,983	0,017	98,3	1,7	60	5,8
K_5	135	1,5	0,0154	0,6667	0,977	0,023	97,7	2,3	44	3,9
K_6	136	1,2	0,0155	0,8333	0,982	0,018	98,2	1,8	55	4,8

Olingan natijalardan xulosa qilish mumkinki, qaralayotgan yong'in xavfsizligi qismlari orasida yil mobaynida K_3 qism eng ko'p, K_4 qism esa eng kam vaqt yong'in o'chirish bilan band bo'ladi. Xizmat ko'rsatishni rad etish masalasini qaraydigan bo'lsak, K_3 qism eng ko'p-o'rtacha har 2,3 oy (69 kun)da, K_4 qism esa eng kam – o'rtacha har 5,9 oy (176 kun) da bir marta xizmat ko'rsatishni rad etadi.

Ushbu natijalardan yong'in xavfsizligi qismlarining shtat birliklari sonini optimallashtirish, qismlarning yong'inga chiqish hududlarini qayta belgilash kabi masalalarini hal qilishda foydalanish mumkin.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. OXKT ning absolyut va nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati nima?

2. OXKT ning rad etish ehtimoli va band kanallarning o'rtacha soni qanday aniqlanadi?

3. Tizimning bo'sh bo'lishi ehtimoli bilan nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati orasidagi bog'liqlikni tushuntiring.

4. Tizimning bo'sh va band bo'lishi ehtimollari kanalning o'rtacha bo'sh turishi vaqti hamda bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti orqali qanday ifodalanadi?

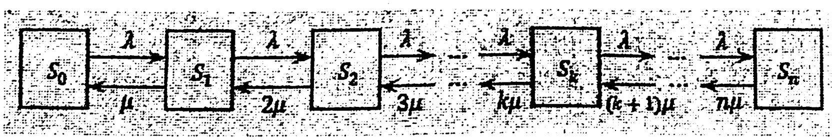
2.11 §. Ko'p kanalli rad etish joriy qilingan OXKT

***Tayanch iboralar:** Erlangning klassik masalasi, chaqiruvlar oqimining keltirilgan intensivligi, Erlang formulasi.*

Erlangning klassik masalasini ko'rib chiqamiz. Rad etish joriy qilingan OXKT n ta kanaldan iborat bo'lib unga kelib tushadigan chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga va har bir kanalning xizmat ko'rsatish intensivligi μ ga teng bo'lsin. Tizim holatlarining limit ehtimollarini va samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinsin.

S tizim (OXKT) ushbu S_0, S_1, S_2,... S_k,...,S_n holatlarning birida bo'ladi. Bunda S_k - tizimda k ta chaqiruv bo'lgan, ya'ni k ta kanal band bo'lgan holat.

OXKT ning holatlar grafi "tug'ilish va halok bo'lish" jarayoniga mos bo'lib, u quyidagi 2.11.1. – chizmada keltirilgan:



2.11.1–chizma

Chaqiruvlar oqimi ketma – ket ravishda tizimni ixtiyoriy holatdan unga qo'shni o'ngdagi holatga λ intensivlik bilan o'tkazadi.Tizimni ixtiyoriy holatdan chapdagi qo'shni holatga o'tkazuvchi xizmat ko'rsatish intensivligi esa holatga bog'liq ravishda o'zgarib boradi. Darhaqiqat, agar OXKT S_2 holatda (ikkita kanal band) bo'lsa, u chapdagi S_1 holatga (bitta kanal band), yoki birinchi yoki ikkinchi kanal xizmat ko'rsatishni tamomlagandan so'ng o'tishi mumkin, ya'ni, xizmat ko'rsatishning yig'indi intensivligi 2μ ga teng bo'ladi. Xuddi shunday, tizimni S_3 (uchta kanal band), holatdan S_2 holatga (ikkita kanal band) uchta kanaldan ixtiyoriy bittasi xizmat ko'rsatishni tamomlagandan so'ng o'tishi mumkin, ya'ni xizmat ko'rsatishning yig'indi intensivligi 3μ teng bo'ladi, va h.k.

"Tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni sxemasining (2.9.4) formulasiga muvofiq S_0 holatning limit ehtimolini topamiz:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1} \qquad (2.11.1)$$

bu yerda, tenglikning o'ng tomonidagi $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda^2}{2!\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ hadlar $p_1, \ldots, p_n$ limit ehtimollarning (2.9.2) ifodalaridagi p_0 ehtimol oldidagi koeffitsientlardir.

E'tibor berish joizki, (2.11.1) formulada λ va μ intensivliklar alohida emas, balki faqat $\frac{\lambda}{\mu}$ ko'rinishidagi nisbat shaklida qatnashadilar.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (2.11.2)$$

Ushbu ρ miqdorni *chaqiruvlar oqimining keltirilgan intensivligi* yoki *kanal yuklamasining intensivligi* deyiladi. U bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti mobaynida tizimga kelib tushadigan o'rtacha chaqiruvlar sonini ifodalaydi. Shunday qilib, (2.11.1) va (2.11.2) ifodalardan quyidagini hosil qilamiz:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \qquad (2.11.3)$$

Ta'kidlash joizki, $p_1,..., p_n$ limit ehtimollarni chaqiruvlar oqimining keltirilgan intensivligi ρ orqali ifodasi, (2.9.2) formulaga muvofiq, quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, ..., p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (2.11.4)$$

Ushbu (2.11.3) va (2.11.4) formulalar ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi fanining asoschisi sharafiga *Erlang formulasi* deb nomlanadi.

OXKNning ayrim masalalarni yechishda (2.11.4) Erlang formulasidan kelib chiqadigan quyidagi rekurrent munosabatdan foydalanish qulay bo'ladi:

$$p_k = \frac{\rho}{\kappa} p_{\kappa-1}, \kappa = 1, 2, ..., n. \qquad (2.11.5)$$

Qaralayotgan n kanalli OXKT holatlarning p_k limit ehtimollarini tizimning S_k holatda bo'lishining o'rtacha nisbiy vaqti sifatida talqin qilish mumkin, ya'ni

$$p_k = \frac{T_k}{T}, k = 0, 1, ..., n \qquad (2.11.6)$$

bu yerda T_k miqdor tizimning T vaqt mobaynidagi faoliyatida S_k holatda bo'lishi vaqtlarining yig'indisi.

Ushbu talqin qurilgan (2.11.3) va (2.11.4) matematik model (formula)ni OXKTning real ish faoliyatiga adekvat(to'g'ri baholayotgan)ligini tekshirish imkonini beradi.

Bunday tekshirish T_k miqdorning (2.11.4) formula orqali topilgan nazariy qiymatlarini va (2.11.6) formula yordamida (statistik usul bilan) topilgan empirik qiymatlariga solishtirish orqali amalga oshiriladi. T_k miqdorning nazariy va empirik qiymatlarini mosligini tekshirish, masalan, Pirsonning muvofiqlik mezoni orqali amalga oshirilishi mumkin.

Tushunarliki, n kanalli rad etish joriy qilingan OXKT ning chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etishi ehtimoli - P_{rad} bu tizimning barcha kanallari band (S_n holatda) bo'lishining limit ehtimoliga teng, ya'ni

$$P_{rad.} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \tag{2.11.7}$$

Nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati chaqiruvga xizmat ko'rsatilishi ehtimoliga teng bo'lganligi uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$Q = 1 - P_{rad.} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \tag{2.11.8}$$

Tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati esa ta'rifga ko'ra quyidagiga teng bo'ladi:

$$A = \lambda Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right) \tag{2.11.9}$$

Band kanallarning o'rtacha soni $\bar{k}$ bu band kanallar sonidan iborat tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} (k \cdot p_k)$$

bu yerda p_k, $k=1,2,\dots,n$ holatlarning yuqorida keltirilgan (2.11.3) va (2.11.4) formulalar bilan aniqlanadigan limit ehtimollardir.

Biroq, band kanallarning o'rtacha soni $\bar{k}$ ni boshqacha, qisqaroq usulda ham topish mumkin. Tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati A bu tizim tomonidan birlik vaqt ichida xizmat ko'rsatiladigan chaqiruvlar o'rtacha sonidir. Har bir band kanal birlik vaqt ichida o'rtacha μ ta chaqiruvga xizmat ko'rsatadi, demak tizim birlik vaqt ichida o'rtacha $\bar{k}\mu$ ta chaqiruvga xizmat ko'rsatadi. Shunday qilib

$$A = \bar{k} \cdot \mu$$

Bu tenglikdan band kanallarning o'rtacha soni $\bar{k}$ uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \tag{2.11.10}$$

(2.11.9) va (2.11.2) formulalarni inobatga olsak:

$$\bar{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right) \tag{2.11.11}$$

Endi, yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib yechiladigan misollarni ko'rib chiqamiz.

2.11.1–misol.

Avvalgi paragrafning 2.10.1–misoli shartlarida ma'lumotlar byurosida bo'lishi lozim bo'lgan telefon apparat(raqam)larining optimal sonini aniqlash talab qilinsin. Optimallik sharti sifatida tizimga kelib tushgan chaqiruvlarning o'rtacha 100 tasidan 90 tasiga xizmat ko'rsatilishi qabul qilingan.

Yechish.

(2.11.2) formulaga muvofiq kanal yuklamasining intensivligi

$$\rho = \frac{90}{30} = 3$$

ya'ni telefon orqali so'zlashishlarning o'rtacha vaqti (davomiyligi) $\tau_{o'r.} = 2$ minut mobaynida tizimga o'rtacha 3 ta chaqiruv kelib tushadi.

Kanallar (telefon raqamlari) sonini ketma – ket orttirib boramiz: $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Natijada, n kanalli OXKT uchun mos xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini (2.11.8) va (2.11.9) formulalar yordamida hisoblab, quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

Xizmat ko'rsatish xarakteristikalari	Kanallar (telefon raqamlari)soni					
	1	2	3	4	5	6
Nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,90	0,95
Absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati A	22,5	42,4	58,8	71,5	80,1	85,3

Shunday qilib, optimallik sharti $Q \geq 0{,}9$ ga ko'ra, ma'lumotlar byurosida 5 ta telefon apparati o'rnatilishi zarur. Bu holda $Q = 0{,}9$ bo'ladi va 1 soatda o'rtacha 80 ta chaqiruvga xizmat ko'rsatiladi $A = 80{,}1$.

Ma'lumotlar byurosida 5 ta telefon apparati o'rnatilganda o'rtacha band telefon apparatlari soni (2.11.10) formulaga muvofiq

$$\bar{k} = \frac{80{,}1}{30} = 2{,}67 \quad \text{bo'ladi.}$$

2.11.2-misol.

3 ta kompyuterli markazga tashkilotlardan chaqiruvlar kelib tushadi. Agar 3 ta kompyuter band bo'lgan vaqtda yangi chaqiruv kelib tushsa, unga xizmat ko'rsatish rad etiladi. 1 ta chaqiruvga o'rtacha 3 soat vaqt sarflanadi. Chaqiruvlar oqimining intensivligi 0,25 (1/soat). Tizim holatlarining limit ehtimollarini hamda markaz ishining samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinadi.

Yechish.

Berilgan shartlarga muvofiq $n = 3$, $\lambda = 0{,}25$ (1/soat),

$\tau_{o'r} = 3$(soat). Xizmat ko'rsatish oqimining intensivligi $\mu = 1/\tau_{o'r} = 1/3 = 0{,}33$.

Kompyuterlar yuklamasi intensivligi (24) formulaga muvofiq

$$\rho = \frac{0{,}25}{0.33} = 0.75 \quad \text{bo'ladi.}$$

Tizim holatlarining limit ehtimollarini topamiz:
(2.11.3) formulaga muvofiq:

$$p_0 = \left(1 + 0,75 + \frac{0,75^2}{2!} + \frac{0,75^3}{3!}\right)^{-1} \approx 0,476$$

(2.11.4) formulaga muvofiq:

$$p_1 = 0,75 \cdot 0,476 = 0,357; \quad p_2 = (0,75^2 \cdot 0,476)/2! = 0,134;$$
$$p_3 = (0,75^3 \cdot 0,476)/3! = 0,033;$$

Ya'ni, statsionar rejimda markazda o'rtacha 47,6% vaqt bironta ham chaqiruv bo'lmaydi, 35,7% vaqt - bitta chaqiruv (1 ta kompyuter band), 13,4% vaqt - ikkita chaqiruv va 3,3% vaqt - uchta chaqiruv bo'ladi.

Shunday qilib, tizimning rad etish ehtimoli (3 ta kompyuter band bo'lgan holat) $P_{rad} = p_3 = 0,033$.

Yuqoridagi (2.11.8) formulaga muvofiq markazning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati $Q = 1 - 0,033 = 0,967$, ya'ni, markaz o'rtacha har 100 ta chaqiruvdan 96,7 tasiga xizmat ko'rsatadi.

(2.11.9) formulaga muvofiq markazning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati

$A = 0.25 \cdot 0,976 = 0,242$ ya'ni, tizim bir soatda o'rtacha 0,242 ta chaqiruvga xizmat ko'rsatadi.

(2.11.10) formulaga muvofiq o'rtacha band kompyuterlar soni

$$\bar{k} = \frac{0,242}{0,33} = 0,725$$

Markaz ishining samaradorlik ko'rsatkichlarini baholashda chaqiruvga xizmat ko'rsatishdan olinadigan foyda bilan kompyuter ishlamay turishidan ko'riladigan zararni solishtirish va optimal variantni qabul qilish maqsadga muvofiq.

Quyida ko'p kanalli rad etish joriy qilingan OXKT uchun keltirib chiqarilgan formulalarni maxsus yong'in o'chirish avtomobillariga ega bo'lgan yong'in xavfsizligi qismi faoliyatini taxlil qilishga tadbiqini ko'rib chiqamiz.

2.11.3 -misol.

Faraz qilaylik, yong'in xavfsizligi qismi (OXKT) da $n = 3$ ta yong'in o'chirish avtonarvoni (AN) mavjud bo'lib, ularga bo'lgan chaqiruvlar oqimi intensivligi $\lambda = 0,1$ chaqiruv/soat va bitta AN ning chaqiruvga xizmat ko'rsatishining o'rtacha vaqti $\tau_{o'r} = 0,9$ soat bo'lsin. Har bir chaqiruvga faqat bitta AN xizmat ko'rsatsin. ANlarga bo'lgan chaqiruvlar oqimi sodda (Puasson taqsimotli) oqim va tizimning xizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi vaqti ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lsin. (Oxirgi shartning aksariyat hollarda bajarilishini, o'tkazilgan tadqiqot natijalari tasdiqlaydi [5]).

Ushbu shartlarda OXKT faoliyatining samaradorligini baxolash talab qilinsin.

Yechish.

Ma'lumki, $\mu = \dfrac{1}{\tau_{o'r}}$. Yuqorida keltirilgan (2.11.2) formulaga muvofiq, AN ni chaqiruvlar oqimining keltirilgan intensivligi

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \tau_{o'r.} = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09 .$$

Tizim holatlarining limit ehtimollarini (2.11.3) va (2.11.5) formulalar yordamida hisoblaymiz:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6}\right)^{-1} = \left(1 + 0,09 + \frac{0,09^2}{2} + \frac{0,09^3}{6}\right)^{-1} = 0,9139$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = 0,09 \cdot 0,9139 = 0,0823$$

$$p_2 = \frac{\rho}{2} p_1 = \frac{0,09}{2} \cdot 0,0823 = 0,0037$$

$$p_3 = \frac{\rho}{3} p_2 = \frac{0,09}{3} \cdot 0,0037 = 0,0001$$

Ushbu limit ehtimollar hamda (2.11.6) formula yordamida T=1 yil = 8760 soat mobaynida, bir vaqtning o'zida m ta (m=0,1,2,3) AN xizmat ko'rsatish bilan band bo'lishining umumiy (yig'indi) vaqtini hisoblaymiz:

$$T_0 = p_0 T = 0,9139 \cdot 8760 = 8005,8 \text{ soat};$$
$$T_1 = p_1 T = 0,0823 \cdot 8760 = 720,9 \text{ soat};$$
$$T_2 = p_2 T = 0,0037 \cdot 8760 = 32,4 \text{ soat};$$
$$T_3 = p_3 T = 0,0001 \cdot 8760 = 0,9 \text{ soat};$$

Shunday qilib, bir yil mobaynida tizim o'rtacha 8005,8 soat – jami vaqtning 91,39% da bo'sh bo'ladi, o'rtacha 720,9 soat – jami vaqtning 8,23% da bitta AN, o'rtacha 32,4 soat – jami vaqtning 0,37% da ikkita AN va o'rtacha 0,9 soat – jami vaqtning 0,01% da uchta AN xizmat ko'rsatish bilan band bo'ladi

Chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli (2.11.7) formulaga muvofiq $P_{rad.} = p_3 = 0,0001$ bo'ladi.

Demak, tizim o'rtacha, chaqiruvlarining har 10000 tasidan bittasiga xizmat ko'rsatish rad etadi. Chaqiruvlar intensivligi $\lambda = 0,1$ chaqiruv/soat = 876 chaqiruv/yil ekanligini inobatga olsak, tizimga $\frac{10000}{876} \approx 11,4$ yilda o'rtacha 10000 ta AN chaqiruvi kelib tushadi. Demak, tizim o'rtacha har 11,4 yilda bir marta chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etadi.

OXKT ning (2.11.8), (2.11.9) va (2.11.11) formulalar orqali ifodalangan samaradorlik ko'rsatkichlarini hisoblaymiz.

1. Tizimning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati:

$$Q = 1 - p_3 = 0,9999.$$

Demak, OXKT kelib tushgan chaqiruvlarning deyarli barchasi (o'rtacha 99,99%) ga xizmat ko'satadi.

2. Tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati:

$$A = \lambda Q = 0{,}09999 \approx 0{,}1 \text{ chaqiruv/soat.}$$

Ya'ni, tizim o'rtacha 10 soatda bitta chaqiruvga (deyarli barchasiga) xizmat ko'rsatadi.

3. Band AN larning o'rtacha soni $\bar{k} = \rho \cdot (1 - p_3) =$ 0,09·0,9999=0,09 va bo'sh AN larning o'rtacha soni $K_{bo'sh} = n - \bar{k} =$ $3 - 0{,}09 = 2{,}91$ ga teng. bo'ladi.

Shu o'rinda, ta'kidlash lozimki, agar yuqoridagi shartlarda OXKT da ikkita

(n =2) AN qoldirilsa, tizimning xizmat ko'rsatishni rad etishi ehtimoli keskin ortadi va yuqorida bajarilgan hisoblashlarga muvofiq

$$P_{rad.} = P_2 = 0{,}0037 \quad \text{bo'ladi.}$$

Bundan kelib chiqadiki, tizim o'rtacha har $\frac{10000}{37} \approx 270$ ta chaqiruvning biriga xizmat ko'rsatishni rad etadi va bu hol o'rtacha $\frac{270}{876} \approx 0{,}3$ yil (yoki 3,7 oy yoki 112 kun) da bir marta ro'y beradi.

Bu ko'rsatkich, ushbu OXKT o'ziga biriktirilgan xududning yong'in xavfsizligini to'laqonli ta'minlash uchun yetarli darajada AN bilan ta'minlangan deb aytishga asos bo'la olmaydi.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Erlangning klassik masalasini ayting.

2. Chaqiruvlar oqimining keltirilgan intensivligi qanday aniqlanadi?

3. Erlang formulasini keltiring.

4. Ko'p kanalli rad etish joriy qilingan OXKT samaradorlik ko'rsatkichlarining formulalarini keltiring.

2.12 §. Yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyatini matematik modellashtirish

Tayanch iboralar: *Yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyati, bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linmaning chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi ehtimoli, tezkor bo'linmalar soni xizmat ko'rsatish uchun yetarli bo'lmaydigan vaziyat yuzaga kelishi ehtimoli*

Yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyati deganda yong'in o'chirish bo'linmalari tomonidan yong'in xavfsizligi xizmatining markaziy dispetcherlik xizmati (MDX) ga kelib tushgan chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish jarayoni ya'ni, yong'inlarni o'chirish, avariyalarni bartaraf etish va h.k. tushuniladi [5].

Ma'lumki, MDX ga chaqiruvlar vaqtning tasodifiy onlarida kelib tushadi. Har bir chaqiruvga xizmat ko'rsatadigan yong'in o'chirish bo'linmalari sonini avvaldan aniqlash mumkin emas. Ushbu son yong'in yoki avariya masshtabiga bog'liq bo'ladi, ya'ni u diskret tasodifiy miqdordir. Bundan tashqari, har bir chaqiruvga xizmat ko'rsatish vaqti ham tasodifiy miqdor (uzluksiz) bo'ladi.

Yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyatini matematik modellashtirish masalasi, u yoki bu sondagi yong'in xavfsizligi xizmati tezkor bo'linmalarining bir vaqtda chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi ehtimolini topish masalasiga keltiriladi. Quyida, muayyan shartlar bilan bu ehtimolni hisoblash formulasini keltiramiz.

Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

1) kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga teng bo'lgan sodda oqim;

2) bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatadigan tezkor bo'linmalar sonidan iborat tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ma'lum, ya'ni a_i– bitta chaqiruvga hizmat ko'rsatish uchun i ta tezkor bo'linma zarur bo'lishining ehtimoli barcha i =1,2,.. da aniqlangan

(tushunarliki, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$);

3) tezkor bo'linmalarning chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish vaqtidan iborat tasodifiy miqdor $\mu = \dfrac{1}{\tau_{o'r.}}$ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega, bu yerda $\tau_{o'r.}$ bo'linmalarning bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatish bilan band bo'lishining o'rtacha vaqti.

Yuqorida keltirilgan shartlar bajarilganda, bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linmaning chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi ehtimoli P_k uchun quyidagi formula (model) isbotlangan [4]:

$$P_{\kappa} = \frac{\lambda \tau_{o'r.}}{\kappa} \sum_{i=0}^{\kappa-1} (\kappa - i) a_{\kappa-i} P_i \qquad k = 1,2,... \qquad (2.12.1)$$

bu yerda $P_0 = e^{-\lambda \tau_{o'r.}}$.

Keltirilgan (2.12.1) formula yordamida, $\sum_{k=1}^{\infty} P_{\kappa} = 1$ shartni inobatga olib, qaralayotgan hududdagi mavjud tezkor bo'linmalar soni R chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish uchun yetarli bo'lmay qoladigan, ya'ni yong'inlarni bartaraf etish uchun bir vaqtning o'zida R tadan ko'p jangovar bo'linma zarur bo'ladigan vaziyat yuzaga kelishi ehtimoli $- P_{>R}$ ni topish mumkin.

$$P_{>R} = 1 - \sum_{j=0}^{R} P_j \qquad (2.12.3)$$

Qaralayotgan hududni yong'in xavfsizligini to'laqonli ta'minlash uchun zarur bo'lgan tezkor bo'linmalar soni R ni aniqlash va asoslash uchun $P_{>R}$ ehtimoldan mezon sifatida foydalanish mumkin.

Chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linma band bo'lishi ehtimoli P_k ni bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linmaning chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi nisbiy vaqtlari sifatida talqin qilish mumkin:

$$P_K = \frac{T_K}{T} \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (2.12.4)$$

bu yerda T – qaralayotgan hududda yong'in xavfsizligi xizmatining faoliyati kuzatilgan vaqt, T_k – kuzatilgan T vaqt ichida bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linma chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lgan vaqtlarining yig'indisi.

(2.12.1) modelning real voqelikka *muvofiq(adekvat)ligini* tekshirish T_k ning hisoblash natijasida topilgan (nazariy) qiymatlari bilan empirik qiymatlarini solishtirish orqali amalga oshirilishi mumkin.

Ba'zi shaharlardagi yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyatini o'rganish uchun (2.12.1) matematik modeldan samarali foydalanilgan.[4].

Quyidagi misolda muayyan yong'in xavfsizligi qismining tezkor faoliyatini modellashtirish natijalari keltirilgan[5].

2.12.1 – misol.

Muayyan shahar bo'yicha to'plangan statistik ma'lumotlar asosida quyidagi miqdorlar hisoblab topilgan:

Yong'in xavfsizligi qismlariga kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ=0,264 chaqiruv/soat, chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti $\tau_{o'r.}$=0,614 soat; a_i – bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatish uchun i ta bo'linma jalb qilinganligining nisbiy chastotasi (empirik ehtimoli):

a_1=0,4226; a_2=0,4727; a_3=0,0411; a_4=0,0307; a_5=0,0143;
a_6=0,0125; a_7=0,0022; a_8=0,0004; a_9=0,0000; a_{10}=0,0035.

Ushbu sonlardan foydalanilgan holda (2.12.1) formuladan bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linmaning chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi ehtimoli P_k (k= 0,1,2,...) hisoblangan.

Hisoblash natijasida topilgan (nazariy) ehtimol P_K^{nazar} va (2.12.4) formula yordamida topilgan empirik ehtimol $P_K^{empirik}$ (bir vaqtning o'zida k ta tezkor bo'linmaning chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi nisbiy vaqtlari) quyidagi jadvalda berilgan. Ta'kidlash joizki, $P_j^{empirik}$ empirik ehtimol garnizon yong'in xavfsizligi bo'linmalarining yong'inga chiqishni qayd etish jurnalidagi bir yillik aniq statistik ma'lumotlar asosida topilgan.

Jadvalda keltirilgan hisoblashlar natijasi qurilgan matematik modelning garnizon yong'in xavfsizligi xizmati faoliyatining real jarayoniga muvofiq kelishini ko'rsatmoqda.

j	0	1	2	3	4	>4
P_j^{nazar}	0,8502	0,0583	0,0672	0,0102	$7{,}28\cdot10^{-3}$	$6{,}81\cdot10^{-3}$
$P_j^{empirik}$	0,8434	0,0584	0,0684	0,0137	$9{,}97\cdot10^{-3}$	$6{,}13\cdot10^{-3}$

Shunday qilib, qaralayotgan hududda bir vaqtning o'zida 4 tadan ortiq yong'in xavfsizligi tezkor bo'linmalari zarur bo'ladigan vaziyat yuzaga kelishi nazariy ehtimoli $P_{>4}= 6{,}81\cdot10^{-3} =0{,}0068$ ga teng. Demak, bir yil (T=365 sutka) mobaynida o'rtacha $T_{>4}=T\cdot P_{>4}=$ $365\cdot0{,}0068=2{,}48$ sutka mobaynida bunday vaziyat yuzaga keladi deb hisoblash mumkin.

Yuqorida keltirilgan matematik modeldan nafaqat yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyatini taxlil qilishda, balki boshqa yo'nalishdagi tezkor xizmatlar faoliyatini taxlil qilishda ham samarali foydalanish mumkin. Xususan, ichki ishlar boshqarma (bo'lim)larini rad etish joriy etilmagan ko'p kanalli OXKT sifatida qarash mumkin (bunday tizimlar keyingi paragraflarda ko'rib chiqiladi). Navbatchilik qismiga kelib tushayotgan chaqiruvlar oqimi intensivligi va chaqiruvlarga xizmat ko'rsatish intensivliklarining empirik qiymatlarini tegishli jurnallarda ro'yxatga olingan ma'lumotlar asosida topish va yuqorida keltirilgan modeldan foydalangan holda tezkor bo'linmalarining optimal sonini aniqlash bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqish mumkin.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyati deganda nima tushuniladi?

2. Yong'in xavfsizligi xizmatining tezkor faoliyati qanday matematik modellashtiriladi?

3. Bir vaqtning o'zida k-ta tezkor bo'linmaning chaqiruvlarga hizmat ko'rsatish bilan band bo'lishi ehtimoli uchun formulani hamda bu ehtimolning vaqt orqali talqinini keltiring?

4. Muayyan hududning yong'in xavfsizligini to'laqonli ta'minlash uchun zarur bo'lgan tezkor bo'linmalar sonini aniqlash uchun mezon sifatida foydalanish mumkin bo'lgan formulani keltiring.

2.13 §. Navbat (kutish) joriy etilgan tizimlar. Bir kanalli navbat uzunligi cheklangan OXKT

Tayanch iboralar: *tizimdagi o'rtacha chaqiruvlar soni, chaqiruvning tizim ichida bo'lishining o'rtacha vaqti, navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni, chaqiruvning navbatda bo'lishining o'rtacha vaqti, kanalning band bo'lishi ehtimoli, Littl formulalari.*

Ushbu paragrafda navbat uzunligi cheklangan aralash tipdagi OXKTlarni ko'rib chiqamiz.

Navbat joriy qilinmagan OXKTlarning bizga ma'lum samaradorlik ko'rsatkichlari – tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati A, nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati Q, xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli $P_{rad.}$ va o'rtacha band kanallar soni $\bar{k}$ dan tashqari navbat joriy qilingan OXKTlarda yana quyidagi samaradorlik ko'rsatkichlari o'rganiladi:

1) $L_{tiz.}$ – tizimdagi o'rtacha chaqiruvlar soni;

2) $T_{tiz.}$ – chaqiruvning tizim ichida bo'lishining o'rtacha vaqti;

3) $L_{nav.}$ – navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni (navbat uzunligi);

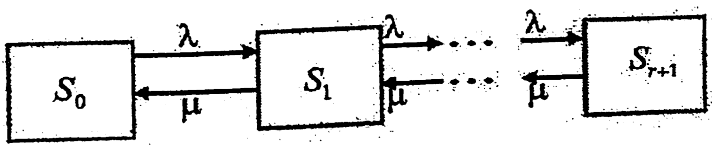
4) $T_{nav.}$ – chaqiruvning navbatda bo‘lishi(kutishi)ning o‘rtacha vaqti;

5) $Ð_{band}$ – kanalning band bo‘lishi ehtimoli.

Bir kanalli navbat joriy qilingan va navbat uzunligi r sonidan oshmaygan OXKT qaralayotgan bo‘lib, unga kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga va kanalning xizmat ko‘rsatish intensivligi μ ga teng bo‘lsin. Holatlarning limit ehtimollarini va OXKT ning samaradorlik ko‘rsatkichlarini topish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Yuqoridagi shartlar bilan faoliyat olib boruvchi OXKT, tushunarliki, kelib tushgan chaqiruvlar soniga bog‘liq ravishda $S_0, S_1, S_2,...,S_{r+1}$ holatlarning birida bo‘ladi. Bunda: S_0 – kanal bo‘sh; S_1 – kanal band (chaqiruvga xizmat ko‘rsatmoqda), navbat yo‘q; S_2 – kanal band, 1 ta chaqiruv navbatda turibdi,..., S_{r+1} – kanal band, r ta chaqiruv navbatda turibdi.

Bunday OXKT ning holatlar grafi quyidagicha bo‘ladi:



2.13.1. –chizma

Bu jarayon – kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga va xizmat ko‘rsatish intesivligi μ ga teng bo‘lgan, holatlar soni cheklita bo‘lgan “tug‘ilish va halok bo‘lish” jarayonidir.

Limit ehtimollarining topish uchun (2.9.2) va (2.9.4) formulalardan foydalanamiz. Kanal yuklamasining intensivligi uchun kiritilgan $\rho = \lambda/\mu$ belgilashni inobatga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$p_1 = \rho \cdot p_0,\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = \rho \cdot p_1, \dots, p_{r+1} = \rho^{r+1} \cdot p_0 = \rho \cdot p_r \quad (2.13.1)$$

$$p_0 = \left(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{r+1}\right)^{-1} \tag{2.13.2}$$

Ko'rinib turibdiki, (2.13.2) formulaning qavs ichidagi ifodasi, maxraji ρ teng bo'lgan geometrik progressiyaning dastlabki $r+2$ ta hadlarining yig'indisidan iborat. U $\rho \neq 1$ da quyidagi ko'rinishga keladi:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}} \tag{2.13.3}$$

Yuqoridagi (2.13.1) formulaning ifodalariga (2.13.3) formuladagi p_0 ning qiymatini qo'yib, qolgan holatlarning limit ehtimollarini ρ orqali ifodasini topamiz:

$$p_1 = \frac{\rho\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{r+2}}, \ldots, p_k = \frac{\rho^k\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{r+2}}, \ldots, p_{r+1} = \frac{\rho^{r+1}\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{r+2}} \tag{2.13.4}$$

Yuqoridagi (2.13.3) va (2.13.4) formulalarni $\rho \neq 1$ shart bilan keltirib chiqardik. Endi ρ =1 (ya'ni, $\lambda=\mu$) bo'lgan holni qaraymiz. Tushunarliki, bu holda (2.13.2) dan p_0 uchun quyidagi tenglikni ((2.13.3) o'rniga) hosil qilamiz:

$$p_0 = \frac{1}{r+2}, \tag{2.13.5}$$

Bu ifodani (2.13.1) formulaga qo'yib, qolgan limit ehtimollarni topamiz:

$$p_m = \frac{1}{r+2}, \; m=1,2,\ldots,r+1 \tag{2.13.6}$$

Ko'rinib turibdiki, bunday holda tizimning ixtiyoriy holatda bo'lishi teng imkoniyatli ekan. Agar r =*0* deb faraz qilsak, qaralayotgan tizim avval ko'rib chiqilgan, bir kanalli rad etish joriy qilingan OXKT bo'ladi va $r=0$, $\rho=1$ da p_0 limit ehtimolning (2.13.5) va (2.10.4) formulalar bilan berilgan ifodalari bir xil ko'rinishga keladi:

$$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{1}{r+2}=\frac{1}{2}$$

Tizimning xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli $P_{rad.}$ ni topamiz. Tushunarliki, tizim S_{r+1} holatda bo'lganda kelib tushgan chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etadi. Demak,

$$P_{rad.}=p_{r+1}=\frac{\rho^{r+1}\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{r+2}}. \qquad (2.13.7)$$

U holda tizimning nisbiy va absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyatlari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$Q=1-P_{rad.}=1-\frac{\rho^{r+1}\cdot(1-\rho)}{1-\rho^{r+2}}=\frac{1-\rho^{r+1}}{1-\rho^{r+2}}. \qquad (2.13.7)$$

$$A=\lambda\cdot Q=\frac{\lambda(1-\rho^{r+1})}{1-\rho^{r+2}}. \qquad (2.13.8)$$

Tizimdagi o'rtacha chaqiruvlar soni – $L_{tiz.}$ ni matematik kutilma formulasi yordamida topamiz. Faraz qilaylik, ξ– tasodifiy miqdor tizimdagi chaqiruvlar soni bo'lsin. U holda uning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

ξ	0	1	2	...	$r+1$
P	p_0	p_1	p_2	...	p_{r+1}

Ta'rifga ko'ra $L_{tiz.}=M\xi$ Ushbu tenglik va (2.13.4) formulani inobatga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$L_{tiz.} = \mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{r+1} kp_k = \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{r+2}} \sum_{k=1}^{r+1} k\rho^{\kappa-1} \tag{2.13.9}$$

(yig'inda 1 dan boshlanadi, chunki nolinchi had $0 \cdot p_0 = 0$).

Hosil bo'lgan (2.13.9) formuladagi yig'indini $\rho \neq 1$ shart bilan hisoblaymiz:

$$\sum_{k=1}^{r+1} k\rho^{\kappa-1} = \left(\sum_{k=1}^{r+1} \rho^{\kappa}\right)' = \left(\frac{\rho - \rho^{r+2}}{1-\rho}\right)' = \frac{(1-\rho)(1-(r+2)\rho^{r+1}) + \rho - \rho^{r+2}}{(1-\rho)^2}$$

Ushbu ifodani (2.13.9) tenglikka qo'yib, soddalashtirishlardan so'ng quyidagiga ega bo'lamiz:

$$L_{tiz.} = \frac{\rho(1-(r+2)\rho^{r+1} + (r+1)\rho^{r+2})}{(1-\rho)(1-\rho^{r+2})} \tag{2.13.10}$$

Navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni – $L_{nav.}$ ni topamiz. Tushunarliki,

$$L_{nav.} = L_{tiz.} - L_{xiz.}. \tag{2.13.11}$$

bu yerda $L_{xiz.}$ –xizmat ko'rsatilayotgan chaqiruvlarning o'rtacha soni.

Xizmat ko'rsatilayotgan chaqiruvlarning o'rtacha soni xizmat ko'rsatilayotgan chaqiruvlar sonidan iborat tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga teng. Bu tasodifiy miqdor 0 qiymatni (kanal bo'sh) yoki 1 qiymatni (kanal band) qabul qiladi. Demak,

$$L_{xiz.} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0)$$

ya'ni o'rtacha xizmat ko'rsatilayotgan chaqiruvlar soni kanalning band bo'lishi ehtimoli – P_{band} ga teng. Demak:

$$L_{xiz.} = P_{band} = 1 - p_0 \tag{2.13.12}$$

Ushbu ifodadan (2.13.3) munosabatni inobatga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$L_{xiz.} = P_{band} = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}} = \frac{\rho(1-\rho^{r+1})}{1-\rho^{r+2}} \qquad (2.13.13)$$

Endi, (2.13.10) va (2.13.13) formulalarni (2.13.11) tenglikka qo'yib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$L_{nav.} = \frac{\rho(1-(r+2)\rho^{r+1}+(r+1)\rho^{r+2})}{(1-\rho)(1-\rho^{r+2})} - \frac{\rho(1-\rho^{r+1})}{1-\rho^{r+2}} =$$

$$= \frac{\rho^2(1-\rho^r(r+1-r\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{r+2})} \qquad (2.13.14)$$

Yuqoridagi (2.13.14) formulani matematik kutilma orqali ham keltirib chiqarish mumkin. Faraz qilaylik, η – tasodifiy miqdor navbatdagi chaqiruvlar soni bo'lsin. U holda uning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

η	0	1	2	...	r
P	p_0+p_1	p_2	p_3	...	p_{r+1}

Ta'rifga ko'ra $L_{nav.} = M\eta$ Demak, (2.13.4) formulani inobatga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$L_{nav.} = \mathbf{M}\eta = \sum_{k=1}^{r} kp_{k+1} = \frac{(1-\rho)\rho^2}{1-\rho^{r+2}} \sum_{k=1}^{r} k\rho^{k-1} \qquad (2.13.15)$$

Ushbu tenglikdagi yig'indini (2.13.10) formulani keltirib chiqarishdagi usul bilan hisoblab, soddalashtirishlardan so'ng, (2.12.14) formula kelib chiqadi.

Eslatib o'tamizki, yuqorida keltirilgan formulalar $\rho \neq 1$ shart bajarilganda o'rinli bo'ladi.

Endi $\rho = 1$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Bu holda (2.13.5) va (2.13.6) formulalarga muvofiq, yuqoridagi (2.13.15) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$L_{nav.} = M\eta = \sum_{k=1}^{r} kp_{k+1} = \frac{1}{r+2}\sum_{k=1}^{r} k = \frac{r(r+1)}{2(r+2)} \qquad (2.13.16)$$

Yuqoridagi (2.13.14) va (2.13.16) formulalardan ko'rinib turibdiki, $r \to \infty$ quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\text{agar } \rho < 1 \text{ bo'lsa, } L_{nav.} \sim \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

$$\text{agar } \rho = 1 \text{ bo'lsa, } L_{nav.} \sim \frac{r}{2};$$

$$\text{agar } \rho > 1 \text{ bo'lsa, } L_{nav.} \sim r.$$

(Bu yerda $a_r \sim в_r$ munosabat, $r \to \infty$ da $\frac{a_r}{в_r} \to 1$ ekanligini bildiradi).

Ushbu munosabatlar $\rho \geq 1$ bo'lganda $r \to \infty$ da o'rtacha navbat uzunligi cheksiz ortib ketishini ko'rsatadi.

Endi, chaqiruvning navbatda bo'lishi(kutishi)ning o'rtacha vaqti $-T_{nav.}$ ni topamiz. Buning uchun yana matematik kutilma formulasidan foydalanamiz. OXKTning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlarini ko'rib chiqamiz. Agar chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_0 holatda bo'lsa, ya'ni kanal bo'sh bo'lsa, u holda chaqiruv xizmat ko'rsatilishini kutmaydi, unga darxol xizmat ko'rsatiladi. (Matematik kutilmaning p_0 – hadi oldidagi ko'paytuvchi nolga teng bo'ladi va uni inobatga olmaslik mumkin). Agar chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_1 holatda bo'lsa, ya'ni kanal band bo'lib, navbatda chaqiruv bo'lmasa, u holda chaqiruv o'rtacha $1/\mu$ vaqt (bitta chaqiruvga xizmat ko'rsatilishining o'rtacha vaqti) mobaynida navbatda turadi. Agar chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_2 holatda bo'lsa, ya'ni tizimdagi kanal band bo'lib, navbatda bitta chaqiruv bo'lsa, u holda chaqiruv o'rtacha $2/\mu$ vaqt mobaynida navbatda turadi. Chunki, o'zidan oldingi har bir chaqiruvga xizmat ko'rsatilishini o'rtacha $1/\mu$ vaqt kutadi. Xuddi shunday, chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_r holatda bo'lsa, ya'ni tizimdagi kanal band va navbatda faqat bitta joy bo'sh bo'lsa, u holda chaqiruv o'rtacha r/μ vaqt navbatda turadi. Chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_{r+1} holatda bo'lsa, ya'ni tizimdagi kanal va navbatdagi barcha joylar band bo'lsa, u holda chaqiruv xizmat ko'rsatilishini kutmasdan tizimni tark etadi. Bu holda $T_{nav.}=0$ bo'ladi.

Demak, $T_{nav.}$ ni matematik kutilma orqali ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$T_{nav.}=\frac{1}{\mu}p_1+\frac{2}{\mu}p_2+\ldots+\frac{k}{\mu}p_k\ldots+\frac{r}{\mu}p_r$$

Bu tenglikka p_k, $k=1,2,\ \ldots,\ r$ ehtimollarning (2.13.1) formuladagi ifodalarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T_{nav.}=\frac{p_0\rho}{\mu}\cdot(1+2\rho+\ldots+k\rho^{k-1}+\ldots+r\rho^{r-1})$$

Ushbu tenglikdan, (2.13.10) formulani keltirib chiqarishdagi usulni qo'llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$T_{nav.}=\frac{p_0\rho}{\mu}\cdot\frac{1-\rho^r(r+1-r\rho)}{(1-\rho)^2}$$

Bu tenglikdagi p_0 ehtimol o'rniga uning (2.13.3) tenglikdagi ifodasini qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$T_{nav.}=\frac{\rho(1-\rho^r(r+1-r\rho))}{\mu(1-\rho^{r+2})(1-\rho)} \qquad (2.13.17)$$

Hosil qilingan tenglikni (2.13.14) orqali berilgan $L_{nav.}$ ning ifodasi bilan solishtirib, ushbu tenglikka ega bo‘lamiz:

$$T_{nav.} = \frac{L_{nav.}}{\mu\rho} = \frac{L_{nav.}}{\lambda}$$

Endi, chaqiruvning tizim ichida bo‘lishining o‘rtacha vaqti $-T_{tiz.}$ ni hisoblaymiz. Buning uchun quyidagi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$\xi_{tiz.}$ – chaqiruvning tizim ichida bo‘lishi vaqti;

$\xi_{nav.}$ – chaqiruvning navbatda bo‘lishi vaqti;;

$\xi_{xiz.}$ – chaqiruvga xizmat ko‘rsatilishi vaqti;

$\psi = \xi_{xiz.}$, agar chaqiruvga xizmat ko‘rsatilayotgan bo‘lsa va $\psi = 0$, agar chaqiruvga xizmat ko‘rsatilmayotgan bo‘lsa (rad etilsa).

Tushunarliki, $\xi_{tiz.} = \xi_{nav.} + \psi$.

$$T_{tiz.} = M\xi_{tiz.} = M\xi_{nav.} + M\psi. = T_{nav.} + M\psi, \qquad (2.13.18)$$

$$M\xi_{xiz.} = 1/\mu,$$

So‘nggi tenglikni va (2.13.7) formulani inobatga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$M\psi = 0 \cdot P_{rad.} + M\xi_{xiz.} \cdot (1 - P_{rad.}) = \frac{Q}{\mu} = \frac{1-\rho^{r+1}}{\mu(1-\rho^{r+2})} \qquad (2.13.19)$$

(2.13.17) va (2.13.19) tengliklarni (2.13.18) formulaga qo‘yib, (2.13.10) formulani inobatga olgan holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$T_{tiz.} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[\frac{\rho(1-\rho^r(r+1-r\rho))}{(1-\rho^{r+2})(1-\rho)} + \frac{1-\rho^{r+1}}{(1-\rho^{r+2})} \right] =$$

$$= \frac{\rho(1-(r+2)\rho^{r+1} + (r+1)\rho^{r+2})}{\lambda(1-\rho)(1-\rho^{r+2})} = \frac{L_{tiz.}}{\lambda}$$

Shunday qilib, ushbu munosabatlar isbot etildi: *chaqiruvning tizim ichida (navbatda) bo'lishining o'rtacha vaqti tizimdagi (navbatdagi) o'rtacha chaqiruvlar sonini oqim intensivligiga nisbatiga teng, ya'ni,*

$$T_{tiz.} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{tiz.} \qquad (2.13.20)$$

$$T_{nav.} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{nav.} \qquad (2.13.21)$$

Ushbu (2.13.20) va (2.13.21) formulalar *Littl formulalari* deb ataladi.

Izoh. Umuman olganda ushbu tasdiq isbot etilgan: *har qanday haraktyerdagi chaqiruvlar oqimi uchun xizmat ko'rsatish vaqti ixtiyoriy taqsimotga ega bo'lganda, xizmat ko'rsatish tartibi (qoidasi) qanday bo'lishidan qat'iy nazar Littl formulalari o'rinli bo'ladi.*

Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib yechiladigan misol ko'rib chiqamiz.

2.13.1-misol.

Avtomobil yoqilg'isi quyish shaxobchasi(AYoQSh) bitta yoqilg'i quyish tarmog'i (kolonkasi)dan iborat bo'lib, uning navbatda turish maydonchasiga ko'pi bilan uchta avtomobil joylashadi (r =3). Navbatda 3 ta avtomobil bo'lgan paytda AYoQSh ga kelgan avtomobillarga xizmat ko'rsatish rad etiladi. AYoQSh ga kiruvchi avtomobillar oqimi intensivligi λ = 1 (avt./minut) va yoqilg'i quyish jarayoni o'rtacha $\tau_{o'r.}$ =1,25 minut davom etsa, bu OXKTning samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinadi.

Yechish.

Tizimning xizmat ko'rsatish intensivligi μ va kanal yuklamasining intensivligi ρ ni topamiz:

$$\mu = 1/\tau_{o'r.} = 1/1{,}25 = 0{,}8; \ \rho = \lambda/\mu = 1/0{,}8 = 1{,}25.$$

(2.13.3) va (2.13.1) formulalardan

$$p_0 = \frac{1-1,25}{1-3,05} \approx 0,122$$

$$p_1 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,152$$

$$p_2 = 1,25 \cdot 0,152 = 0,19$$

$$p_3 = 1,25 \cdot 0,19 \approx 0,238$$

$$p_4 = 1,25 \cdot 0,238 \approx 0,297$$

Xizmat ko'rsatishni rad etilishi ehtimoli

$$P_{rad.} = p_4 \approx 0,297.$$

OXKT ning nisbiy va absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyatlari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$Q = 1 - P_{rad.} = 1 - 0,297 = 0,703$$

$$A = \lambda \cdot Q = 0,703.$$

Navbatdagi avtomobillarning o'rtacha sonini (2.13.14) formuladan topamiz:

$$L_{nav.} = \frac{1,25^2(1-1,25^3(4-3,75))}{(1-1,25)(1-1,25^5)} \approx 1,59$$

Demak, navbatda turgan avtomobillarning o'rtacha soni 1,59 ta.

Xizmat ko'rsatilayotgan avtomobillarning o'rtacha sonini (2.13.13) formuladan topamiz:

$$L_{xiz.} = \frac{1,25-1,25^5}{1-1,25^5} \approx 0,88$$

AYoQSh xududidagi (xizmat ko'rsatilayotgan va navbatda turgan) avtomobillarning o'rtacha soni:

$$L_{tiz.} \approx 0{,}88 + 1{,}59 = 2{,}47$$

Avtomobillarning navbatda turishining o'rtacha vaqti (2.13.21) formulaga muvofiq

$$T_{nav.} = \frac{1{,}59}{1} = 1{,}59\,(\text{min.})$$

Avtomobillarning yoqilg'i quyishga sarflaydigan (AYOQSH xududa bo'lishining) o'rtacha vaqti (2.13.20) formulaga muvofiq

$$T_{tiz} = \frac{2{,}47}{1} = 2{,}47\,(\text{min.})$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Navbat uzunligi cheklangan aralash tipdagi OXKTlarda avval keltirilganlardan tashqari yana qanday samaradorlik ko'rsatkichlari o'rganiladi?

2. Aralash tipdagi OXKTlar uchun holatlarning limit ehtimollari uchun formulalarini keltiring.

3. Navbat uzunligi cheklangan aralash tipdagi OXKTlar samaradorlik ko'rsatkichlari uchun formulalarini keltiring.

4. Littl formulalarining mazmunini ayting.

2.14 §. Bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT

Tayanch iboralar: *navbat uzunligi berilgan sondan ortiq bo'lishi ehtimoli*

Ushbu paragrafda bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan tizimlarni ko'rib chiqamiz. Amaliyotda bir kanalli navbat cheklanmagan OXKT ko'p uchraydi (bitta butkali telefon – avtomat, chipta sotadigan kassa, bemorlarni qabul qilayotgan vrach, chegara bojxona posti va h.k.).

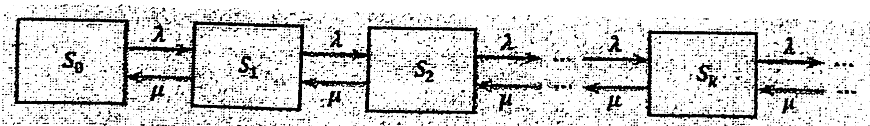
Bir kanalli navbat joriy qilingan va navbatga hech qanday cheklov qo'yilmagan (na navbat uzunligiga, na kutish vaqtiga) OXKT ga kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga, xizmat ko'rsatish intensivligi μ ga teng bo'lsin. Holatlarning limit ehtimollarini va OXKT ning samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinsin.

Eslatib o'tamizki, navbat joriy qilinib, navbat uzunligiga yoki kutish vaqtiga cheklov qo'yilmagan OXKT lar uchun xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli P_{rad} tushunchasi kiritilmaydi (ma'noga ega emas).

Avvaldan aytish mumkinki, ushbu paragrafda qo'rilayotgan tizimlarning samaradorlik ko'rsatkichlari formulalarini avvalgi paragrafning mos formulalaridan $r \to \infty$ keltirib chiqaramiz.

Tushunarliki, yuqorida keltirilgan shartlar bilan faoliyat olib boradigan tizim chaqiruvlar soniga bog'liq ravishda $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k \ldots$ holatlarning birida bo'ladi: S_0 – kanal bo'sh; S_1 – kanal band (chaqiruvga xizmat ko'rsatmoqda), navbat yo'q; S_2 – kanal band, 1 ta chaqiruv navbatda turibdi, S_k – kanal band, $k-1$ ta chaqiruv navbatda turibdi va h.k. Boshqacha aytganda, bunday OXKT avvalgi paragrafda ko'rib chiqilgan bir kanalli navbat uzunligi r ga teng bo'lgan OXKT ning $r \to \infty$ dagi holidir.

OXKTning holatlar grafi quyidagi chizmada keltirilgan:



2.14.1-chizma

Bu kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga va xizmat ko'rsatish intesivligi μ ga teng bo'lgan, ammo holatlar soni cheksiz(sanoqli)ta bo'lgan "tug'ilish va halok bo'lish" jarayonidir.

Limit ehtimollarining formulalarini yozishdan avval ularning mavjudligiga ishonch hosil qilish zarur. Chunki, $t \to \infty$ da tizim uchun statsionar rejim(holatlarning limit ehtimollari) mavjud bo'lmasligi mumkin. Bunday holda $t \to \infty$ da navbat cheklanmagan holda ortib ketadi.

Avvalo kanal yuklamasining intensivligi $\rho = \lambda/\mu = 1$ bo'lgan holni qaraymiz. Faraz qilaylik N ixtiyoriy natural son va $r > N+1$ bo'lsin. Tizimning $S_{N+2}, S_{N+3},...,S_{r+1}$ holatlarning birida (navbat uzunligi N dan ortiq) bo'lishi ehtimoli $P^{(N)}$ ni $r \to \infty$ dagi limitini topamiz. (2.13.6) formuladan

$$\lim_{r\to\infty} P^{(N)} = \lim_{r\to\infty}(p_{N+2} + p_{N+3} + ... + p_{r+1}) = \lim_{r\to\infty}\frac{r-N}{r+2} = 1$$

Demak, $\rho = 1$ bo'lgan holda $t \to \infty$ da navbat uzunligi ixtiyoriy natural son N dan katta bo'ladi, ya'ni u cheklanmagan holda ortib ketadi.

Endi, faraz qilaylik, $\rho > 1$ bo'lsin. (2.13.4) formuladan

$$\lim_{r\to\infty} P^{(N)} = \lim_{r\to\infty}(p_{N+2} + p_{N+3} + ... + p_{r+1}) = \lim_{r\to\infty}\frac{\rho^{r+2} - \rho^{N+2}}{\rho^{r+2} - 1} = 1$$

Demak, $\rho > 1$ bo'lgan holda ham $t \to \infty$ da navbat uzunligi cheklanmagan holda ortib ketadi. Ushbu tasdiqni $r \to \infty$ da bevosita (2.13.14) formuladan ham keltirib chiqarish mumkin. (Navbatdagi chaqiruvlarning o'rtacha soni cheksiz ortib ketadi.)

Ushbu tasdiq isbotlandi: *Agar $\rho \geq 1$, ya'ni kiruvchi chaqiruvlarning, o'rtacha soni xizmat ko'rsatiladigangan chaqiruvlarning o'rtacha sonidan kichik bo'lmasa (birlik vaqt ichida), tizim uchun statsionar rejim (holatlarning .limit ehtimollar) mavjud bo'lmaydi, $t \to \infty$ da navbat uzunligi cheklanmagan holda ortib ketadi.*

Endi, $\rho < 1$ holni ko'rib chiqamiz.

p_0 limit ehtimolni topish uchun (2.13.3) formulada $r \to \infty$ da limitga o'tamiz va quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$p_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}} = 1-\rho \qquad (2.14.1)$$

Xuddi shunday (2.13.4) formuladan qolgan limit ehtimollarni topamiz:

$$p_k = \lim_{r\to\infty} \frac{\rho^k \cdot (1-\rho)}{1-\rho^{r+2}} = \rho^k \cdot (1-\rho)\ ,\ k = 1,2,\ldots \qquad (2.14.2)$$

yoki

$$p_k = \rho \cdot p_{k-1},\ k = 1,2,\ldots. \qquad (2.14.3)$$

Ko'rinib turibdiki, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ limit ehtimollar maxraji ρ ga teng bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya ($\rho < 1$) tashkil qiladi. Demak, p_0 ularning eng kattasi bo'ladi. Bu hol, agar OXKT chaqiruvlarga xizmat ko'rsatishga ulgirayotgan bo'lsa, tizimning bo'sh (S_0 holatda) bo'lishi ehtimoli boshqa barcha holatlarda bo'lishi ehtimollaridan katta (ular ichida eng kattasi) ekanligini bildiradi.

Tizimdagi o'rtacha chaqiruvlar soni – $L_{tiz.}$ ni topish uchun (2.13.10) formulada $r \to \infty$ limitga o'tamiz:

$$L_{tiz.} = \lim_{r\to\infty} \frac{\rho(1-(r+2)\rho^{r+1} + (r+1)\rho^{r+2})}{(1-\rho)(1-\rho^{r+2})} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (2.14.4)$$

Xuddi shunday, navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni – $L_{nav.}$ ni (2.13.14) formula yordamida topamiz:

$$L_{nav.} = \lim_{r\to\infty} \frac{\rho^2(1-\rho^r(r+1-r\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{r+2})} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (2.14.5)$$

Xizmat ko'rsatilayotgan chaqiruvlarning o'rtacha soni $L_{xiz.}$ ni topish uchun (2.13.12) va (2.14.1) formulalardan foydalanamiz:

$$L_{xiz.} = P_{band} = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

Demak,

$$L_{xiz.} = P_{band} = \rho \qquad (2.14.6)$$

Chaqiruvning tizim yoki navbat ichida bo'lishining o'rtacha vaqtlarini (2.14.4) va (2.14.5) munosabatlarni inobatga olgan holda, (2.13.20) va (2.13.21) (Littl) formulalari orqali topamiz:

$$T_{tiz.} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \qquad (2.14.7)$$

$$T_{nav.} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}, \qquad (2.14.8)$$

Yuqorida keltirilgan formulalar yordamida yechiladigan misollardan namunalar ko'rib chiqamiz.

2.14.1- misol.

Faraz qilaylik, shahar(tuman markazi)dagi yong'in o'chirish qismida bitta (n=1) nasos-yengli yong'in o'chirish avtomobili (NEYOO'A) mavjud bo'lib, u bir yil (T = 8760 soat) mobaynida 109 marta yong'in o'chirishga jalb qilingan va yong'in o'chirishga o'rtacha $\tau_{o'r.} = 1{,}2$ soat vaqt sarflangan bo'lsin.

Chaqiruvlar oqimi sodda oqim, xizmat ko'rsatish vaqti esa ko'rsatkichli taqsimotga ega ekanligi ma'lum bo'lsa ushbu tizim faoliyatini taxlil qilish talab qilinsin.

Yechish.

Ushbu yong'in o'chirish qismini bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT sifatida qaraymiz. Chaqiruvlar oqimi intensivligi λ va xizmat ko'rsatish intensivligi μ larning bahosini topamiz:

λ=109/8760=0,0125 (chaqiruv/soat), μ=1/1,2=0,833 (chaqiruv/soat).

U holda

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0,0125}{0,833}=0,015$$

Yuqorida keltirilgan (2.14.1) va (2.14.3) formulalarga muvofiq holatlarning limit ehtimollarini hisoblaymiz:

$$p_0=1-\rho=1-0,015=0,9850$$
$$p_1=\rho(1-\rho)=0,015\cdot 0,985=0,01477$$
$$p_2=\rho^2(1-\rho)=0,015^2\cdot 0,985=2,22\cdot 10^{-4}\approx 0,0002$$
$$p_3=\rho^3(1-\rho)=0,015^3\cdot 0,985=3,32\cdot 10^{-6}\approx 0$$

Ushbu limit ehtimollar hamda (2.11.6) formula yordamida T=1 yil = 8760 soat mobaynida, bir vaqtning o'zida yong'in xavfsizligi qismiga m ta (m=0,1,2,3) chaqiruv kelib tushishining yig'indi vaqtini va uning T= 8760 soatga nisbatan foizini hisoblaymiz:

$$T_0=p_0\cdot T=0,985\cdot 8760=8628,6\text{c.}\approx 98,5\%\text{c.}$$
$$T_1=p_1\cdot T=129,4\text{c.}\approx 1,47\%\text{c.}$$
$$T_2=p_2\cdot T=1,95\text{c.}\approx 0,02\%\text{c.}$$
$$T_3=p_3\cdot T=0,03\text{c.}\approx 0\%\text{c.}$$

Ko'rinib turibdiki, P_n va $\grave{O}_n$ miqdorlar $n\geq 3$ da juda kichik. Shuning uchun ularni amalda inobatga olmasa ham bo'ladi.

Navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni (navbatning o'rtacha uzunligi) $-L_{nav.}$ va chaqiruvning navbatda bo'lishining o'rtacha vaqti $-T_{nav.}$ larni (2.14.5) va (2.13.21) formulalar orqali hisoblaymiz:

$$L_{nav.} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}015^2}{1-0{,}015} = 0{,}00023$$

$$T_{nav.} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{nav.} = \frac{0{,}00023}{0{,}0125} = 0{,}018 \;\; \text{ñ.}$$

Ushbu miqdorlar ham, tushunarliki, inobatga olmasa bo‘ladigan darajada kichik miqdorlardir.

Qaralayotgan misolda chaqiruvlar oqimining keltirilgan intensivligi $\rho = 0{,}015$ juda kichik miqdor ekanligi NEYOO‘A ga bo‘lgan chaqiruvlar oqimida navbat yuzaga kelishining ehtimolining juda kichik bo‘lishiga olib keldi. Ya’ni, tizimning S_k, $k \geq 3$ holatlarda bo‘lishi ehtimoli $p_{\geq 3} = 1 - p_0 - p_1 = 0{,}00023$ juda kichikligi, uni bir kanalli rad qilish joriy etilgan OXKT sifatida qarash mumkin ekanligini ko‘rsatadi. Haqiqatdan ham, S_0 va S_1 holatlarning navbat joriy etilmagan OXKT lar uchun (2.10.4) formula yordamida hisoblangan ehtimollari, ushbu misolda (navbat joriy etilgan OXKT uchun hisoblangan) keltirilgan ehtimollarga deyarli teng bo‘ladi:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{1+\rho} = 0{,}9852\,; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\rho}{1+\rho} = 0{,}01478$$

Ta’kidlash joizki, keltirilgan intensivlik ρ miqdorning ortib borishi bilan NEYOO‘A faoliyat jarayonini rad etish joriy etilgan va joriy etilmagan OXKT sifatida modellashtirish orqali olingan natijalarda jiddiy tafovutlar yuzaga keladi.

Quyida, bir kanalli navbat cheklanmagan OXKT uchun keltirilgan formulalarni chegara bojxona postlari faoliyatining ba’zi samardorlik ko‘rsatkichlarini baholashga tadbiq etishga oid misol ko‘rib chiqamiz.

Chegara bojxona posti faoliyatini matematik modellashtirishda, uni bir kanalli navbat uchunligi cheklanmagan OXKT sifatida qarash maqsadga muvofiqligi bojxona postining ishlash tartibidan kelib chiqadi.

2.14.2-misol.

Faraz qilaylik, bojxona postiga kiruvchi odamlar oqimini intensivligi λ ga teng bo‘lgan sodda oqim va chegaradan o‘tayotgan odamlarning bojxona ko‘rigidan o‘tishga sarflaydigan o‘rtacha vaqti $\tau_{o‘r.}$ ga teng bo‘lsin. (Ushbu miqdorlarni tajribalar natijasida yuqori aniqlik bilan topish mumkin.). Chegara bojxona posti ishining yuqorida keltirilgan samaradorlik ko‘rsatkichlarini hamda bojxona nazorati zonasida navbatda turgan odamlar soni n nafardan ortiq bo‘lmasligi ehtimolini aniqlash masalasini ko‘rib chiqamiz.

Ushbu masalani, soddalik uchun aniq raqamlar misolida yechamiz. Faraz qilaylik, λ =12 (odam/soat) =0,2 (odam/minut) ga, $\tau_{o‘r.}$ = 4 minut = 1/15 soat va n=2 teng bo‘lsin.

Yechish.

Hisoblaymiz: $\mu = 1/\tau_{o‘r.} = 15$ (odam/soat) = 0,25 (odam/minut),

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = 0{,}8 \text{ , ya'ni } \rho = 0{,}8 < 1.$$

Demak, chegara bojxona postidan o‘tadigan odamlar navbatining uzunligi cheksiz ortib ketmaydi va holatlarning limit ehtimollari mavjud. Ularni hisoblaymiz:

Chegara bojxona postida odamlarning bo‘lmasligi(post bo‘sh bo‘lishi) ehtimoli (2.14.1) formulaga muvofiq

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Uning band bo‘lishi ehtimoli (hamda xizmat ko‘rsatilayotgan chaqiruvlarning o‘rtacha soni) (2.14.6) formulaga muvofiq

$$L_{xiz.} = P_{band} = 0{,}8$$

Bojxona nazorati zonasida 1,2,3 nafar odam (postdan o‘tishni kutayotgan odamlar soni 0,1,2 nafar bo‘lishi) ehtimollari (2. 14.2) formulalarga muvofiq

$$p_1 = 0{,}8\cdot(1-0{,}8)=0{,}16; \quad p_2 = 0{,}8^2\cdot(1-0{,}8)=0{,}128; \quad p_3 = 0{,}8^3\cdot(1-0{,}8)=0{,}1024$$

Yuqoridagi ehtimollardan ushbu hulosalarni qilish mumkin: o‘rganilayotgan chegara bojxona posti xizmat vaqtining o‘rtacha 20 % qismida bo‘sh (ishsiz) turadi va 80 % qismida band bo‘ladi. Bojxona nazorati zonasida xizmat vaqtining o‘rtacha 16 % qismida 1 nafar, 12,8 % qismida 2 nafar va 10,2 % qismida 3 nafar odam bo‘ladi.

Bojxona nazorati zonasida navbatda turgan odamlar soni 2 tadan ortiq bo‘lmasligi ehtimoli

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}5904$$

ga teng.

Chegara bojxona postida navbatdagi odamlarning o‘rtacha soni, (2.14.5) formulaga muvofiq

$$L_{nav.} = \frac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2 \quad \text{(odam).}$$

Postda navbatda turishning o‘rtacha vaqti (2.14.8) formulaga

muvofiq $T_{nav.} = \dfrac{0{,}8^2}{0{,}2(1-0{,}8)} = 16$ minut.

Bojxona nazorati zonasi hududidagi (navbatda turgan va xizmat ko‘rsatilayotgan) odamlarning o‘rtacha soni (2.14.4) formulaga muvofiq

$$L_{tiz.} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4 \quad \text{(yoki (2.13.11) formuladan}$$

$$L_{tiz.} = L_{nav.} + L_{xiz.} = 3{,}2 + 0{,}8 = 4\text{) nafar.}$$

Bir nafar odamning chegara bojxona postidan o‘tish uchun sarflaydigan o‘rtacha vaqti (2.13.21) formulaga muvofiq

$$T_{tiz.} = \frac{4}{0{,}2} = 20\,\text{min.}$$

(Bu natijani (2.14.7) formuladan ham keltirib chiqarish mumkin.)

Yuqorida keltirilgan ko‘rsatkichlardan chegara bojxona postlari faoliyatini tahlil qilish, bir necha bojxona postlari faoliyatini taqqoslash, postlar sonini optimallashtirish (qo‘shimcha tashkil qilish yoki qisqartirish), postlar faoliyatini odilona baholash (rahbarlar tomonidan) va shu kabi boshqa masalalarni hal etishda foydalanish mumkin.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Qanday holda bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan tizim uchun statsionar rejim mavjud bo‘ladi va qanday holda mavjud bo‘lmaydi?*
2. *Bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan tizim holatlarining limit ehtimollari uchun formulalarni keltiring.*
3. *Bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT samaradorlik ko‘rsatkichlari uchun formulalarini keltiring.*

2.15 §. Ko‘p kanalli navbat uzunligi cheklangan OXKT

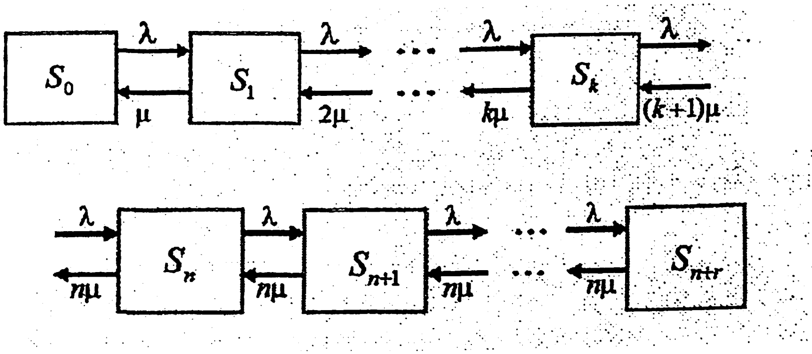
Tayanch iboralar: *ko‘p kanalli navbat uzunligi cheklangan OXKT*

Ushbu paragrafda n – kanalli navbat uzunligi r soni bilan cheklangan OXKT larni qaraymiz. Demak, tizimning barcha n – kanali band bo‘lsa va navbatda r tadan kam chaqiruv bo‘lsa OXKT ga kelib tushgan chaqiruvlar navbatga turadilar. Navbatdagi chaqiruvlar soni r ta bo‘lsa, tizimga kelib tushgan chaqiruv uni xizmat ko‘rsatilmasdan tark etadi.

Faraz qilaylik, bunday tizimga kiruvchi chaqiruvlar oqimi intensivligi λ ga va har bir kanalning xizmat ko‘rsatish intesivligi μ ga teng bo‘lsin. Holatlarning limit ehtimollarini va OXKT ning samaradorlik ko‘rsatkichlarini topish talab qilinsin.

Ushbu shartlar bilan faoliyat olib boruvchi OXKT, undagi chaqiruvlar soniga muvofiq $S_0, S_1, S_2, ..., S_n ... S_{n+r}$ holatlarning birida bo'ladi. Bu yerda S_0 – tizimda chaqiruvlar yo'q (barcha kanallar bo'sh); S_1 – bitta kanal band, qolganlari bo'sh; S_2 – ikkita kanal band, qolganlari bo'sh; ..., S_k – k ta kanal band, boshqalari bo'sh;..., S_n – barcha n kanal band, navbat yo'q; S_{n+1} – barcha n kanal band, navbatda bitta chaqiruv bor; S_{n+r} – barcha n kanal band, navbatda r ta chaqiruv bor.

Bunday OXKT ning holatlar grafi quyidagicha bo'ladi:



2.15.1-chizma

Holatlar grafining avvalgi OXKT graflaridan quyidagi farqi mavjud. Xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi (tizim holatini o'ngdan chapga o'tkazuvchi) o'zgarmas bo'lib qolmaydi, balki, OXKTda chaqiruvlar soni 0 tadan n tagacha ortib borishi bilan intensivlik μ dan $n\mu$ gacha ortib boradi, chunki xizmat ko'rsatuvchi kanallar soni ortib boradi. OXKTda chaqiruvlar soni n tadan ortiq bo'lgan holda xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi o'zgarmasdan $n\mu$ bo'lib qoladi (xizmat ko'rsatuvchi kanallar soni o'zgarmaydi).

"Tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni uchun keltirilgan (2.9.4) formuladan foydalanib n – kanalli navbati cheklangan OXKT ning S_0 holatining limit ehtimoli uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$p_0=\left(1+\frac{\rho^1}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!n}+\frac{\rho^{n+2}}{n!n^2}+\ldots+\frac{\rho^{n+r}}{n!n^r}\right)^{-1},$$

Faraz qilaylik, $\frac{\rho}{n}\neq 1$ bo'lsin. Tushunarliki, qavs ichidagi yig'indining so'nggi r ta qo'shiluvchisi maxraji $\frac{\rho}{n}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya tashkil qiladi. Ular yig'indisi uchun tegishli formulani qo'llab quyidagini hosil qilamiz:

$$p_0=\left(1+\frac{\rho^1}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{\rho/n-(\rho/n)^{r+1}}{1-\rho/n}\right)^{-1} \quad (2.15.1)$$

(2.9.2) formuladan foydalanib qolgan holatlarining limit ehtimollari uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$p_1=\frac{\rho^1}{1!}\cdot p_0,\ldots,p_k=\frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0,\ldots,p_n=\frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0,\ldots,p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\cdot p_0 \quad (2.15.2)$$

Tizimning xizmat ko'rsatish samaradorligi harakteristikalarni topamiz. Tizimdagi ish tartibiga muvofiq, agar unda barcha n ta kanal band bo'lib, navbatda yana r ta chaqiruv bor bo'lsa, tizimga kelib tushgan chaqiruv rad etiladi.

Demak, chaqiruvni rad etilishi ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{rad.}=p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\cdot p_0. \quad (2.15.3)$$

U holda tizimning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$Q=1-P_{rad.}=1-\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\cdot p_0. \quad (2.15.4)$$

va absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0) \qquad (2.15.5)$$

bo'ladi.

Chaqiruvning navbat ichida bo'lishi, ya'ni OXKT $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots S_{n+r}$ holatlarning birida bo'lishi ehtimoli

$$P_{nav.} = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots + p_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 (1 + \frac{\rho^1}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots + \frac{\rho^{r-1}}{n^{r-1}}) =$$

$$= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot \frac{1-(\rho/n)^r}{1-\rho/n} = \frac{\rho^{n+1} \cdot (1-(\rho/n)^r)}{n!(n-\rho)} \cdot p_0 \qquad (2.15.6)$$

O'rtacha band kanallar soni $\bar{k}$ ni topamiz. Rad etish joriy qilingan OXKT uchun bu ko'rsatkich tizimdagi o'rtacha chaqiruvlar soniga teng edi. Navbat joriy qilingan OXKT lar uchun bunday munosabat o'rinli bo'lmaydi. Tizimdagi chaqiruvlar soni o'rtacha band kanallar soni $\bar{k}$ dan navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soniga farq qiladi.

Ma'lumki, har bir band kanal birlik vaqt ichida o'rtacha μ ta chaqiruvga xizmat ko'rsatadi, butun OXKT esa birlik vaqt ichida A ta chaqiruvga xizmat ko'rsatadi. Demak, (2.11.10) va (2.15.5) formulalarga muvfiq,

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}(1 - \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0) = \rho(1 - \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0) \qquad (2.15.7)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni (navbat uzunligi) $L_{nav.}$ ni topish uchun $\eta = \frac{\rho}{n}$ belgilash kiritamiz va matematik kutilma formulasidan foydalanamiz:

$$L_{nav.} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \ldots + r \cdot p_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 (1 + 2 \cdot \frac{\rho}{n} + \ldots + r \cdot \frac{\rho^{r-1}}{n^{r-1}}) =$$

$$=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!}(1+2\eta+3\eta^2...+r\eta^{r-1})=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!}(\eta+\eta^2+\eta^3...+\eta^r)' \quad (2.15.8)$$

So'nggi qavs ichidagi (hosila belgisi ostidagi) ifoda, birinchi hadi va maxraji η ga teng bo'lgan gemetrik progressiyasining dastlabki r ta hadlarining yig'indisidir. Uni tegishli formuladan foydalanib hisoblab, so'ngra hosila amalini bajaramiz va quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$L_{nav.}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!}\cdot\frac{1-(r+1)\eta^r+r\eta^{r+1}}{(1-\eta)^2} \quad (2.15.9)$$

O'rtacha band kanallar soni $\bar{k}$ va navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni $L_{nav.}$ ni qo'shib, $L_{tiz.}$ uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$L_{tiz.}=L_{nav.}+\bar{k}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!}\cdot\frac{1-(r+1)\eta^r+r\eta^{r+1}}{(1-\eta)^2}+\rho(1-\frac{\eta^r\rho^n}{n!}\cdot p_0) \quad (2.15.10)$$

Endi, chaqiruvning navbatda bo'lishi (xizmat ko'rsatilishini kutish)ning o'rtacha vaqti – $T_{nav.}$ ni topamiz. Buning uchun yana matematik kutima formulasidan foydalanamiz. OXKTning bo'lishi mumkin bo'lgan holatlarini ko'rib chiqamiz. Agar chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim $S_0, S_1, S_2,.... S_{n-1}$ holatlarning birida bo'lsa, ya'ni tizimda kamida bitta kanal bo'sh bo'lsa, u holda chaqiruv xizmat ko'rsatilishini kutmaydi, unga darhol xizmat ko'rsatiladi. (Matematik kutilmaning $p_0, p_1,..., p_{n-1}$ – hadlari oldidagi ko'paytuvchilar nolga teng bo'ladi va ularni inobatga olmaslik mumkin). Agar chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_n holatda bo'lsa, ya'ni tizimda barcha kanallar band bo'lib, navbatda chaqiruv bo'lmasa, u holda chaqiruv o'rtacha $\frac{1}{n\mu}\cdot$ vaqt navbatda turadi. Chunki, n ta kanaldan birining bo'shashi oqimining intensivligi $n\mu$ ga teng. Agar chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_{n+1} holatda bo'lsa, ya'ni tizimda barcha kanallar band bo'lib, navbatda bitta chaqiruv bo'lsa, u holda chaqiruv o'rtacha $\frac{2}{n\mu}$ vaqt navbatda turadi.Chunki, u o'zidan oldingi ikkita chaqiruvga xizmat ko'rsatilishini kutadi va har bir chaqiruvni kutishga o'rtacha $\frac{1}{n\mu}$ vaqt sarflaydi. Xuddi shunday, chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_{n+r-1} holatda bo'lsa, ya'ni tizimda barcha kanallar band va navbatda faqat bitta joy bo'sh bo'lsa, u holda chaqiruv o'rtacha $\frac{r}{n\mu}$ vaqt navbatda turadi. Chaqiruv kelib tushgan vaqtda tizim S_{n+r} holatda bo'lsa, u holda chaqiruv xizmat ko'rsatilishini kutmasdan tizimni tark etadi. Demak, chaqiruvning navbatda bo'lishining o'racha vaqti $T_{nav.}$ quyidagiga teng:

$$T_{nav.} = \frac{1}{n\mu} p_n + \frac{2}{n\mu} p_{n+1} + \dots + \frac{r}{n\mu} p_{n+r-1} =$$

$$= \frac{1}{n\mu} \cdot \left(\frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 + \dots + \frac{r\rho^{n+r-1}}{n^{r-1} \cdot n!} \cdot p_0\right) =$$

$$= \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \mu} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{n} + \dots + r \cdot \frac{\rho^{r-1}}{n^{r-1}}\right)$$

Ko'rinib turibdiki, ushbu ifoda navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni $L_{nav.}$ uchun topilgan (2.15.8) formulaning ikkinchi (belgilash kiritilgunga qadar) hadidan faqat $\frac{1}{\rho\mu} = \frac{1}{\lambda}$ ko'paytuvchiga farq qiladi. Demak,

$$T_{nav.} = \frac{L_{nav.}}{\lambda} \qquad (2.15.11)$$

Bu ifodaga, $L_{nav.}$ uchun topilgan (2.15.9) ifodani qo'yib, quyidagini xosil qilamiz:

$$T_{nav.} = \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \mu} \cdot \frac{1-(r+1)\eta^r + r\eta^{r+1}}{(1-\eta)^2} \qquad (2.15.12)$$

Bir kanalli navbat uzunligi cheklangan OXKT uchun (2.13.19) formulani keltirib chiqarishdagi muloxazalardan foydalanib, chaqiruvning tizim ichida bo'lishining o'rtacha vaqti – $T_{tiz.}$, uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$T_{tiz.} = T_{nav.} + T_{xiz.} = T_{nav.} + \frac{Q}{\mu}. \qquad (2.15.13)$$

(2.15.12) va (2.15.4) formulalarni inobatga olib, quyidagini xosil qilamiz:

$$T_{tiz.} = \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \mu} \cdot \frac{1-(r+1)\eta^r + r\eta^{r+1}}{(1-\eta)^2} + \frac{1}{\mu} \cdot (1 - \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-(r+1)\eta^r + r\eta^{r+1}}{(1-\eta)^2} + \rho \cdot (1 - \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0) \right]$$

Ushbu tenglikdan (2.15.10) formulani inobatga olgan holda quyidagini hosil qilamiz.

$$T_{tiz.} = \frac{L_{tiz.}}{\lambda} \qquad (2.15.14)$$

Endi, yuqorida keltirib chiqarilgan formulaming tadbiqiga oid misol ko'rib chiqamiz.

2.15.1-misol.

Tez tibbiy yordam xizmati ko'rsatish tizimi ikkita tez yordam avtomobili ekipajidan iborat (n=2). O'rnatilgan tartibga muvofiq, tizimda uchtagacha bo'lgan chaqiruvlar navbatga qo'yiladi (r =3). Navbatda 3 ta chaqiruv bo'lgan vaqtda tizimga kelib tushgan chaqiruv boshqa tez yordam xizmati tizimiga o'tkaziladi (ushbu tizim chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etadi). Tizimga kelib tushayotgan chaqiruvlar oqimi sodda oqim bo'lib, uning intensivligi $\lambda = 2$ (chaq./soat) va bemorga tibbiy yordam ko'satish jarayoni o'rtacha $\tau_{o'r.} = 2$ soat davom etsin.

Ushbu OXKTning quyidagi samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinadi:

1) $P_{rad.}$– tizimning rad etishi (chaqiruvni boshqa tizimga o'tkazish) ehtimoli;

2) Q – nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati;

3) A – absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati;

4) $\bar{k}$ – band kanallarning o'rtacha soni.

Yechish.

Tizimning xizmat ko'rsatish intensivligi μ va kanal yuklamasining intensivligi ρ ni topamiz:

$\mu = 1/\tau_{o'r} = 1/2 = 0{,}5$ (chaq./soat), $\rho = \lambda/\mu = 2/0{,}5 = 4$ (chaq.)

Yuqoridagi (2.15.1) formuladan

$$p_0 = \frac{1}{1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^2}{2}\cdot\frac{2-2^4}{1-2}} = \frac{1}{125} = 0{,}008$$

Demak, tizim jami vaqtning o'tacha 0,8% qismida, ya'ni sutka mobaynida o'rtacha 0,19 soat (11,4 minut) bo'sh bo'ladi.

Xizmat ko'rsatishni rad etish ehtimoli (2.15.3) formulaga muvofiq

$$P_{rad.} = p_5 = \frac{4^5}{2^3\cdot 2}p_0 = 64p_0 = 0{,}512 \approx 0{,}5$$

Demak, tizim o'rtacha, chaqiruvlarining har 2 tasidan bittasiga xizmat ko'rsatish rad etadi. Chaqiruvlar intensivligi $\lambda =$ 2 chaqiruv/soat ekanligini inobatga olsak, tizim o'rtacha har soatda bir marta chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etadi.

OXKT ning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$Q = 1 - P_{rad.} = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$$

va uning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$A = \lambda \cdot Q = 0{,}976 \quad \text{(chaqiruv/soat)}$$

Navbatdagi chaqiruvlarning o'rtacha sonini (2.15.9) formuladan topamiz:

$$L_{nav.} = \frac{4^3(1-4\cdot 2^3+3\cdot 2^4)}{2\cdot 2\cdot 125\cdot(1-2)^2} \approx 2{,}18$$

Demak, navbatda turgan chaqiruvlarning o'rtacha soni 2,18 ta.

Xizmat ko'rsatilayotgan bemorlarning o'rtacha soni

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}976}{0{,}5} = 1{,}952$$

Demak, ikkala guruh ham deyarli doimo band bo'ladi.

Tizimdagi (xizmat ko'rsatilayotgan va navbatda turgan) chaqiruvlarning o'rtacha soni:

$$L_{tiz.} \approx 1{,}95 + 2{,}18 = 4{,}14$$

Chaqiruvlarning navbatda turishi(xizmat ko'rsatishni kutish)ning o'rtacha vaqti (2.15.11) formulaga muvofiq

$$T_{nav.} = \frac{2{,}18}{2} = 1{,}09 \text{ soat.}$$

Tizimga chaqiruv kelib tushgandan boshlab to bemorga xizmat ko'satish tuguncha sarflanadigan o'rtacha vaqt (2.15.14) formulaga muvofiq

$$T_{tiz.} = \frac{4,14}{2} = 2,07 \text{ soat.}$$

Topilgan samaradorlik ko'rsatkichlaridan ko'rinib turibdiki, ushbu tez tibbiy yordam ko'rsatish tizimi faoliyati samaradorligi qoniqarli darajada emas. Uning faoliyati samaradorligini oshirish bo'yicha qo'shimcha chora-tadbirlar belgilash zarurati mavgud.

Mavzuga oid nazorat savollar

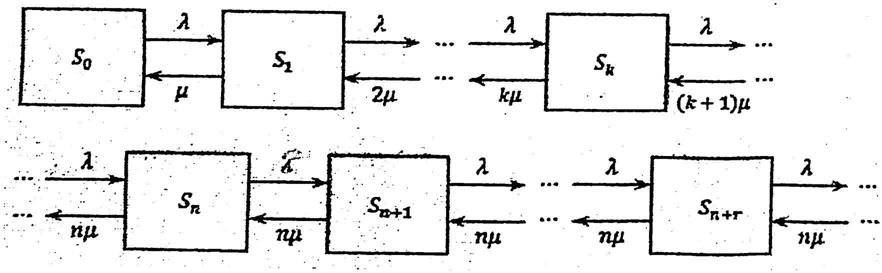
1. *Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklangan OXKT holatlar grafining o'ziga xos jixatlari nimalardan iborat?*
2. *Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklangan tizim holatlarining limit ehtimollari uchun formulalarni keltiring.*
3. *Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklangan OXKTlar samaradorlik ko'rsatkichlari uchun formulalarini keltiring.*

2.16 §. Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT

Quyidagi masalani qaraymiz. n–kanalli navbat chegaralanmagan OXKT qaralayotgan bo'lib, unga kiruvchi chaqiruvlar oqimining intensivligi λ ga va har bir kanalning xizmat ko'rsatish intensivligi μ ga teng bo'lsin. Holatlarning limit ehtimollarini va OXKT ning samaradorlik ko'rsatkichlarini topish masalasini ko'rib chiqamiz.

Ushbu shartlar bilan faoliyat olib boruvchi OXKT, undagi chaqiruvlar soniga muvofiq raqamlangan $S_0, S_1, S_2,...,S_n .. S_{n+r}...$ holatlarning birida bo'ladi: S_0 – tizimda chaqiruvlar yo'q (barcha kanallar bo'sh); S_1 – bitta kanal band, boshqalari bo'sh; S_2 – ikkita kanal band, boshqalari bo'sh; ..., S_k – k ta kanal band, boshqalari bo'sh;..., S_n – barcha n kanal band, navbat yo'q; S_{n+1} – barcha n kanal band, navbatda bitta chaqiruv bor;... S_{n+r} – barcha n kanal band, navbatda r ta chaqiruv bor va h.k.

Qaralayotgan OXKT ning holatlar grafi quyidagicha bo'ladi:



2.16.1-chizma

Bunday OXKT larda ham (navbat uzunligi cheklangan kabi) xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi (tizim holatini o'ngdan chapga o'tkazuvchi) o'garmas bo'lib qolmaydi. U chaqiruvlar soni *0* tadan *n* tagacha ortib borishi bilan xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi μ dan $n\mu$ gacha ortib boradi va chaqiruvlar soni n tadan ortiq bo'lgan holda intensivlik o'zgarmas – $n\mu$ ga teng bo'ladi.

Bir kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT uchun isbotlangandagi kabi ko'rsatish mumkinki, $\frac{\rho}{n} < 1$ da limit ehtimollar mavjud bo'ladi va $\frac{\rho}{n} \geq 1$ bo'lsa, navbat cheksiz ortib ketadi.

Ushbu paragraf formulalarni keltirib chiqarishda $\frac{\rho}{n} < 1$ shart o'rinli deb faraz qilamiz:

Avvalgi paragrafning (2.15.1) formulasida $r \to \infty$ limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1} \qquad (2.16.1)$$

Qolgan limit ehtimollar shaklan o'zgarishsiz qoladi:

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0 \qquad (2.16.2)$$

Qaralayotgan OXKT chaqiruvga xizmat ko'rsatishni rad etmaydi. Shu sababli

$$P_{rad} = 0, \qquad Q=1, \qquad A=\lambda$$

Chaqiruvning navbat ichida bo'lishi ehtimolini topish uchun (2.15.6) formulada $r\to\infty$ limitga o'tamiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_{nav.} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot p_0 \qquad (2.16.3)$$

Avvalgi 2.15– §. dagi tegishli formulalarda $r\to\infty$ limitga o'tib, quyidagilarni hosil qilamiz:

O'rtacha band kanallar soni

$$\bar{k} = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (2.16.4)$$

Navbatdagi o'rtacha chaqiruvlar soni

$$L_{nav.} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{-2} \qquad (2.16.5)$$

Tizimdagi o'rtacha chaqiruvlar soni

$$L_{tiz.} = L_{nav.} + \rho \qquad (2.16.6)$$

Chaqiruvning navbatda bo'lishining o'rtacha vaqti hamda chaqiruv tizim ichida bo'lishining o'rtacha vaqti, avvalgidek (2.13.20) va (2.13.21) – Littl formulalaridan topiladi.

Shunday qilib, ushbu muhim xulosaga ega bo'ldik: *Navbat uzunligi cheklanmagan bir(ko'p) kanalli OXKT lar uchun $\rho < 1$ ($\frac{\rho}{n} < 1$)da tizimga kelgan ixtiyoriy chaqiruvga xizmat ko'rsatiladi, ya'ni, rad etilishi ehtimoli $P_{rad} = 0$, nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati $Q = 1$, absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati esa chaqiruvlar oqimining intensivligiga teng, ya'ni $A = \lambda$ o'rinli bo'ladi.*

Yuqorida keltirilgan formulalar yordamida echiladigan misollardan namunalar keltiramiz.

2.16.1-misol.

Universamdagi hisob-kitob qilish tizimiga keladigan haridorlar oqimining intensivligi $\lambda = 81$ (haridor/soat) ga va bitta haridorga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti $\tau_{o'r} = 2$ min. ga teng. Quyidagilarni aniqlash talab qilinadi:

a). Navbat cheksiz ortib ketmasligi uchun zarur bo'lgan kontroler–kassirlarning minimal soni n_{min} ni, va $n = n_{min}$ qiymatdagi tegishli xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini;

b). kanallarni saqlab turishdan va haridorlarning navbatda turib qolishidan hosil bo'ladigan nisbiy sarf miqdori $C_{nis} = 3T_{nav} + \frac{n}{\lambda}$ formula bilan berilgan bo'lsa, C_{nis} minimal bo'ladigan kontroler – kassirlarning optimal soni n_{opt} ni.

Xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini $n = n_{min}$ va $n = n_{opt}$ bo'lganda taqqoslash natijasini.

d). Navbatdagi haridorlar soni uchtadan ko'p bo'lmasligi ehtimolini.

Yechish.

a). Shartga ko'ra $\lambda = 81(1/coam) = \frac{81}{60} = 1{,}35(1/\text{мин.})$,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7$ Ma'lumki, navbat $\rho = \frac{\rho}{n} < 1$da, ya'ni, $n > \rho = 2{,}7$ da cheksiz ortib ketmaydi. Demak, navbat cheksiz ortib ketmasligi uchun zarur bo'lgan kontroler - kassirlarning minimal soni $n_{min} = 3$.

OXKT (hisob – kitob qilish tizimi)ning xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini $n = 3$ da topamiz.

(2.16.1) formulaga muvofiq hisob – kitob qilish kassalarida haridorlar bo'lmasligi ehtimoli

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} + \frac{2,7^4}{3!(3-2,7)}\right)^{-1} = 0,025 \text{ ga teng.}$$

Ya'ni, o'rtacha 2,5 % vaqt kontroler – kassirlar bo'sh turadilar.

(2.16.3) formulaga muvofiq hisob – kitob qilish kassasida navbat bo'lishi ehtimoli

$$P_{nav.} = \frac{2,7^4}{3!(3-2,7)} \cdot 0,025 = 0,735.$$

(2.16.5) formulaga muvofiq navbatdagi o'rtacha haridorlar soni

$$L_{nav.} = \frac{2,7^4}{3 \cdot 3!} \cdot \left(1 - \frac{2,7}{3}\right)^{-2} \cdot 0,025 = 7,35$$

Navbatda turishning o'rtacha vaqti Littl formulasiga muvofiq

$$T_{nav.} = \frac{7,35}{1,35} = 5,44 \text{ (min).}$$

Hisob - kitob qilish tizimidagi o'rtacha haridorlar soni (2.16.6) formulaga muvofiq

$$L_{tiz.} = 7,35 + 2,7 = 10,05$$

Haridorlarning hisob - kitob qilish tizimida bo'lishlarining o'rtacha vaqti Littl formulasiga muvofiq

$$T_{tiz.} = \frac{10,05}{1,35} \approx 7,44\,(\text{min.})$$

Haridorlarga xizmat ko'rsatish bilan band bo'layotgan kontroler-kassirlarning o'rtacha soni (2.16.4) formulaga muvofiq

$$\overline{k} = 2,7$$

Haridorlarga xizmat ko'rsatish bilan band kontroler – kassirlarning bittasining nisbiy koeffitsiyenti (ulushi)

$$\overline{k}_{nis.} = \frac{\rho}{n} = \frac{2,7}{3} = 0,9$$

Hisob - kitob qilish tizimining absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati $A = \lambda = 1,35$ (1/min.) = 81 (1/soat), ya'ni soatiga o'rtacha 81 ta haridor.

Xizmat ko'rsatish xarakteristikalarining taxlili 3 nafar kontroler - kassir bilan xizmat ko'rstilganda hisob – kitob qilish tizimiga salmoqli yuklama tushayotganligidan dalolat bermoqda.

b). Nisbiy sarf miqdori $n = 3$ da

$$C_{nis.} = 3T_{nav.} + \frac{n}{\lambda} = 3 \cdot 5,44 + \frac{3}{1,35} = 18,44$$

Nisbiy sarf miqdorini n ning boshqa qiymatlarida hisoblaymiz va quyidagi jpdvalni hosil qilamiz:

Xizmat ko'rsatish xarakteris tikalari	**Kontroler-kassirlar soni**				
	3	**4**	**5**	**6**	**7**
Kontroler-kassirlar-ning bo'sh turishlari ehtimoli p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Navbatda turishning	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01

o'rtacha vaqti $T_{nav.}$					
Nisbiy sarf miqdori $C_{nis.}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Ushbu jadvaldan ko'rib turibdiki, $n = 5$ bo'lganda harajatlar minimal bo'ladi. Demak, $n_{opt} = 5$.

OXKT (hisob - kitob qilish tizimi)ning xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini $n = n_{opt} = 5$ da hisoblaymiz va quyidagilarni hosil qilamiz:

$P_{nav.} = 0{,}091$; $L_{nav.} = 0{,}198$; $T_{nav.} = 0{,}146$;

$L_{tiz.} = 2{,}9$; $T_{tiz.} = 2{,}15$; $\bar{k} = 2{,}7$;

$\bar{k}_{nis.} = 0{,}54$

Ko'rinib turibdiki, $n = 5$ da $n = 3$ ga nisbatan navbat paydo bo'lishi ehtimoli $P_{nav.}$, navbat uzunligi $L_{nav.}$ va navbatda turishning o'rtacha vaqti $T_{nav.}$ salmoqli tarzda kamayadi, demak, bundan kelib chiqadiki, o'rtacha haridorlar soni $L_{tiz.}$ va hisob – kitob qilish tizimida bo'lishlarining o'rtacha vaqti $T_{tiz.}$ hamda xizmat ko'rsatish bilan band kontroler-kassirlarning bittasining nisbiy koeffitsiyenti (ulushi) $\bar{k}_{nis.}$ ham kamayadi. Lekin haridorlarga xizmat ko'rsatayotgan kontroler-kassirlarning o'rtacha soni $\bar{k}$ va tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati A, tabiiyki o'zgarmaydi.

d). Navbatda haridorlar soni uchtadan ko'p bo'lmasligi ehtimolini quyidagicha topamiz:

$$P\{r \le 3\} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3} = 1 - P_{nav} + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3}$$

Har bir qo'shiluvchini (2.16.3) va (2.16.2) formulalardan $n = 5$ da topamiz:

$$P\{r\le 3\}=1-\frac{2{,}7^6}{5!(5-2{,}3)}\cdot 0{,}065+\frac{2{,}7^6}{5!\cdot 5}\cdot 0{,}065+\frac{2{,}7^7}{5!\cdot 5^2}\cdot 0{,}065+\frac{2{,}7^8}{5!\cdot 5^3}\cdot 0{,}065=0{,}986$$

(eslatib o'tamizki, n = 3 nafar kontroler – kassir bo'lganda ushbu ehtimol salmoqli tarzda kam: $P\{r\le 3\}=0{,}464$)

Quyidagi misol, OXKT ishini tashkil qilish tartibi – uni bir necha kanalli bitta tizim yoki bir kanalli bir necha tizim sifatida qarash, tizimning samaradarlik ko'rsatkichlariga jiddiy ta'sir etishini yaqqol namoyon etadi.

2.16.2-misol.

Tizim poezdga chiptalar sotadigan ikkita kassadan iborat bo'lib, unda A va B punktlarga chiptalar sotiladi. Chipta harid qilish uchun kassalarga keladigan mijozlar oqimlari sodda oqim bo'lib, ularning intensivliklari ikkala punkt uchun bir xil $\lambda_A = \lambda_B$ = 0,45 (mijoz/min), bitta mijozga xizmat ko'rsatish uchun kassir o'rtacha $\tau_{o'r.}$ = 2 minut vaqt sarflaydi.

Ikkita variant qaraladi: birinchi variant – chiptalar har bir kassada ikkala A va B punktlarga sotiladi, ikkinchi variant kassalar maxsuslashtirilib, bittasi faqat A punktga, ikkinchisi faqat B punktga chipta sotadi.

Quyidagilar talab qilinadi:

a.) xizmat ko'rsatishning asosiy xarakteristikalari bo'yicha chipta sotishning ikkita variantini solishtirish;

b.) mijozlar chipta olishga ikkinchi variant bo'yicha birinchi variantdan ko'ra o'rtacha kam vaqt sarflashlari uchun, bitta yo'lovchiga xizmat ko'ratishning o'rtacha vaqti $\tau_{o'r.}$ ni qanday o'zgartirish kerakligini aniqlash.

Yechish.

a). Birinchi variant bo'yicha. Chaqiruvlar kelib tushishi intensivligi $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$ = 0,45+ 0,45 = 0,9 va xizmat ko'rsatish intensivligi μ = 1/2= 0,5; $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=1{,}8$ bo'lgan ikki kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT ga ega bo'lamiz. $\frac{\rho}{n}=\frac{1{,}8}{2}=0{,}9<1$

bo'lganligi uchun navbat cheksiz ortib ketmaydi va limit ehtimollar mavjud bo'ladi.

Chipta sotish kassalarining bo'sh turishi ehtimoli (2.16.1) formulaga muvofiq

$$p_0 = \left(1 + \frac{1{,}8}{1!} + \frac{1{,}8^2}{2!} + \frac{1{,}8^3}{2!(2-1{,}8)}\right)^{-1} \approx 0{,}0526$$

Navbatdagi mijozlarning o'rtacha soni (2.16.5) formulaga muvofiq

$$L_{nav.1} = \frac{1{,}8^3}{2 \cdot 2!} \cdot \left(1 - \frac{1{,}8}{2}\right)^{-2} \cdot 0{,}0526 = 7{,}67$$

Chipta sotish tizimidagi (chipta sotib olayotgan va navbatda turgan) mijozlarning o'rtacha soni (2.16.6) formulaga muvofiq

$$L_{tiz.1} = 7{,}67 + 1{,}8 = 9{,}47$$

Navbatda bo'lishning (xizmat ko'rsatilishini kutishning) o'rtacha vaqti va chipta olishga sarflanadigan o'rtacha vaqt Littl formulalariga muvofiq:

$$T_{nav.1} = \frac{7{,}67}{0{,}9} \approx 8{,}52 \text{ (min.) va } T_{tiz.1} = \frac{9{,}47}{0{,}9} \approx 10{,}52 \text{ (min.)}$$

Ikkinchi variant bo'yicha. Chaqiruvlar kelib tushishi intensivligi $\lambda = 0{,}45$ bo'lgan ikkita bir kanalli OXKT larga ega bo'lamiz. Avvalgidek, $\mu = 0{,}5$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}9 < 1$ limit ehtimollar mavjud. Avvalgi, 2.14- §. da bir kanalli tizim uchun topilgan (2.14.4), (2.14.5) va Littl formulalariga muvofiq quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$L_{tiz.2} = \frac{0{,}9}{1-0{,}9} = 9, \qquad L_{nav.2.} = \frac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1;$$

$$T_{nav.2} = \frac{8,1}{0,45} = 18; \qquad T_{tiz.2} = \frac{9}{0,45} = 20$$

Demak, ikkinchi variant bo'yicha navbat uzunligi ham va undagi o'rtacha kutish vaqti ham, unga mos ravishda chipta harid qilish uchun sarflanadigan o'rtacha vaqt ham ortdi. Bunday farqlanish quyidagicha tushuntiriladi: birinchi variantda (ikki kanalli bitta OXKT) har bir kassirning o'rtacha bo'sh turish vaqti kamroq: agar A punktga ketadigan yo'lovchi bo'lmasa, kassir B punktga ketadigan yo'lovchiga xizmat ko'rsatadi (chipta sotadi) va aksincha. Ikkinchi variantda bunday o'zaro almashinuv imkoniyati yo'q.

Shuni qayd etish lozimki, ikkinchi variantda chipta olishga sarflanadigan o'rtacha vaqt deyarli 2 martaga oshdi. Bunday keskin oshib ketishning sababi OXKT o'z imkoniyat darajasining yuqori chegarasida ishlayotganligidadir (ρ = 0,9). Agar xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti $\tau_{o'r.}$ ni oz bo'lsada oshirilsa, ya'ni μ oz bo'lsada kamaytirilsa, $\rho > 1$ bo'ladi va navbat cheksiz ortib keta boshlaydi.

b). Yuqorida keltirildiki, chipta sotishning birinchi variantida bitta mijozga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti $\tau_{o'r.}$=2 minut bo'lganida chipta olishga sarflanadigan o'rtacha vaqt (birinchi variantda) $T_{tiz.1}$ =10,52 (min.)ni tashkil qiladi. Masalaning b.) shartga ko'ra $T_{tiz.2} < T_{tiz.1}$ tengsizlik bajariladigan $\tau_{o'r.}$ ni topish kerak.

(2.14.7) formulani inobatga olsak,

$$\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} < T_{tiz.1}$$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda\tau_{o'r.}$, ekanligidan $\dfrac{\tau_{o'r.}}{1-\lambda\tau_{o'r.}} < T_{tiz.1}$ ni hosil qilamiz.

Bu yerdan

$$\tau_{o'r.} < \frac{T_{tiz.1}}{1+\lambda T_{tiz.1}} \text{ yoki } \tau_{o'r.} < \frac{10,52}{1+0,45\cdot 10,52} \approx 1,84 \text{ (min.)}$$

Shunday qilib, bitta mijozga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti 2-1,84 = 0,16 minut (yoki 8%) dan ortiq kamaytirilsa, mijozlar chipta olishga ikkinchi variant bo'yicha birinchi variantdan ko'ra o'rtacha kam vaqt sarflaydilar.

Quyidagi misolda ko'p kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKTlar uchun yuqorida keltirib chiqarilgan formulalarni tashqi iqtisodiy faoliyat (TIF) bojxona postlari faoliyatini baholashga tadbiqini ko'rib chiqamiz.

2.16.3-misol.

Tashqi iqtisodiy faoliyat(TIF) bojxona postiga kiruvchi tovar ortilgan yuk transportlari oqimi sodda oqim bo'lib, uning intensivligi λ=1 (transport/sutka)ga va bitta yuk transportini bojxona rasmiylashtiruviga sarflanadigan o'rtacha vaqt τ= 2 sutkaga, demak, $\mu=1/\tau$=0,5 (transport/sutka) bo'lsin.

TIF bojxona posti faoliyatining yuqorida keltirilgan samaradorlik ko'rsatkichlarini hamda navbat cheksiz ortib ketmasligi uchun zarur bo'lgan bojxona rasmiylashtiruvi inspektorlari guruhining minimal soni n_{min} ni, va $n=n_{min}$ dagi tegishli xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini aniqlash talab qilinsin.

Yechish.

Shartga ko'ra λ=1 (transport/sutka), $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=2$.

Demak, navbat $\dfrac{\rho}{n}<1$ da, ya'ni, $n>\rho=2$ da cheksiz ortib ketmaydi. Shunday qilib, navbat cheksiz ortib ketmasligi uchun zarur bo'lgan bojxona rasmiylashtiruvi inspektorlari guruhining minimal soni $n_{\min}=3$ ga teng.

TIF bojxona postining xizmat ko'rsatish xarakteristikalarini n= 3 da topamiz.

TIF bojxona postida yuk avtomobili(rasmiylashtirilayotgan tovar)ning bo'lmasligi ehtimoli (2.16.1) formulaga muvofiq

$$p_0=\left(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{3!(3-2)}\right)^{-1}=\frac{1}{9}=0{,}111$$

ga teng.

Demak, xizmat vaqtining o'rtacha 11,1% qismida TIF bojxona postida bojxona rasmiylashtriuvida tovar bo'lmaydi (kanallar bo'sh turadi).

TIF bojxona postida navbat bo'lishi ehtimoli (2.16.3) formulaga muvofiq quyidagiga teng:

$$P_{nav.} = \frac{2^4}{3!\cdot(3-2)}\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{27} = 0,296$$

Demak, jami xizmat vaqtning o'rtacha 29,6% qismida TIF bojxona postida yuk transportlari navbatda turadlar.

TIF bojxona postida navbatda turadigan yuk transportlarining o'rtacha soni (2.16.5) formulaga muvofiq

$$L_{nav.} = \frac{2^4}{3\cdot 3!\cdot(1-2/3)^2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0,889 \approx 0,9$$

ga teng.

Yuk transportlarining navbatda turishining o'rtacha vaqti Littl formulasiga muvofiq

$$T_{nav.} = \frac{0,9}{1} = 0,9 \quad \text{(sutka).}$$

TIF bojxona posti hududidagi jami yuk transportlarining o'rtacha soni (2.16.6) formulaga asosan

$$L_{tiz.} = 0,9 + 2 = 2,9$$

Yuk transportlarining terminalda bo'lishlarining o'rtacha vaqti Littl formulasiga muvofiq

$$T_{tiz.} = \frac{2,9}{1} = 2,9 \quad \text{(sutka).}$$

(2.16.4) formulaga binoan TIF bojxona postida bojxona rasmiylashtiruvi bilan doim band bo'ladigan bojxona rasmiylashtiruvi inspektorlarning o'rtacha soni $\bar{k} = \rho = 2$ ga teng.

Qaralayotgan TIF bojxona postining yuqorida topilgan xizmat ko'rsatish xarakteristikalarining taxlili shuni ko'rsatmoqdaki, 3 ta guruh bilan xizmat ko'rstilganda TIF bojxona postiga salmoqli yuklama tushadi. Undagi bojxona rasmiylashtiruvi inspektorlari sonini oshrish masalasini ko'rib chiqish maqsadga muvofiq.

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklanmagan OXKT holatlar grafining qanday o'ziga xos jihaitlapri mavjud?*
2. *Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklanmagan tizim holatlarining limit ehtimollari uchun formulalarni keltiring.*
3. *Ko'p kanalli navbat uzunligi cheklanmagan tizimlar samaradorlik ko'rsatkichlari uchun formulalarini keltiring.*

2.17 §. Kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKT

Tayanch iboralar: *Kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKT*

Amaliyotda "sabrsiz" chaqiruvlar bilan ishlaydigan OXKTlar ko'p uchraydi. Bunday chaqiruvlar kutish vaqti ma'lum bir sondan ortib ketsa, xizmat ko'rsatilishini kutmay navbatdan ketib qoladilar. Masalan, keltirilgan maxsulotni omborga qabul qilishni ma'lum bir muddatga kechiktirilishi mahsulot sifatini yo'qotilishiga olib kelishi mumkin hollarda yuqoridagi holat yuzaga keladi. Aksariyat tezkor xizmatlar tizimlarini ham (shartli ravishda) kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKT sifatida qarash mumkin. Chunki tizimga kelib tushgan ma'lumot yuzasidan qaror qabul qilishni kechiktirilishi olingan ma'lumotning o'z qimmatini yo'qotishiga olib kelishi mumkin.

Bunday tizimlarning eng sodda matematik modellarida chaqiruv navbatda *tasodifiy vaqt* mobaynida turadi deb faraz qilinadi.

Kanallar soni n ta bo'lgan navbat uzunligi cheklanmagan OXKT ni qaraymiz. Faraz qilaylik, chaqiruvning navbatda bo'lishi (kutish) vaqti $\xi_{nav.}$ tasodifiy miqdor va bu tasodifiy miqdorning o'rta qiymati $\varphi_{o'r.} = M\xi_{nav}$ bo'lsin. U holda, tushunarliki, navbatda turgan har bir chaqiruv intensivligi $\nu = 1/\varphi_{o'r.}$ bo'lgan «navbatdan ketish oqimi» ta'sirida bo'ladi.

Kanallar soni n ta bo'lgan navbat uzunligi cheklanmagan OXKT uchun isbotlangani kabi quyidagi formulalarni keltirib chiqarish mumkin[7]:

$$p_\kappa = \frac{\rho^\kappa}{n!} \cdot p_0, \; \kappa = 1,2,\ldots,n.$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\lambda^r}{(n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu)\cdots(n\mu + r\nu)} \cdot p_0, \quad r = 1,2,\ldots$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\lambda}{n\mu+\nu} + + \frac{\lambda^2}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)} + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \frac{\lambda^r}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)\ldots(n\mu+r\nu)} + \ldots\right]\right)^{-1}$$

Ushbu formulalarni soddaroq ko'rinishga keltirish uchun $\beta = \frac{\nu}{\mu}$ belgilash kiritamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^r}{(n + \beta)(n + 2\beta)\cdots(n + r\beta)} \cdot p_0, \quad r = 1,2,\ldots$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n+\beta} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \ldots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)} + \ldots\right]\right)^{-1} \quad (2.17.1)$$

Kutish vaqti cheklangan «sabrsiz» chaqiruvlar bilan ishlaydigan OXKTlarning, avval ko'rib chiqilgan «sabrli» chaqiruvlar bilan ishlaydigan OXKTlarga nisbatan o'ziga xos jihatlariga to'xtalib o'tamiz.

Agar navbat uzunligi cheklanmagan bo'lsa, "sabrli" chaqiruvlar bilan ishlaydigan n kanalli OXKTlarda $t \to \infty$ da $\rho < n$ bo'lganda limit ehtimollar (statsionar rejim) mavjud bo'lib, $\rho \geq n$ bo'lganda navbat cheklanmagan holda ortib ketishi ko'rsatilgan edi. "Sabrsiz" chaqiruvlar bilan ishlaydigan n kanalli OXKTlarda esa ρ ning *har qanday qiymatida* $t \to \infty$ da limit ehtimollar mavjud bo'ladi. Bu tasdiq, (2.17.1) formuladagi ifodada qatnashayotgan qator ρ va β ning har qanday musbat qiymatida yaqinlashishidan kelib chiqadi.

Kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKTning samaradorlik ko'rsatkichlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lishi isbotlangan[7]:

Tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati: $A = \lambda - \nu \cdot L_{nav.}$.

Tizimning nisbiy o'tkazuvchanlik qobiliyati: $Q = \dfrac{A}{\lambda} = 1 - \dfrac{\nu}{\lambda} \cdot L_{nav.}$

Band kanallarning o'rtacha soni: $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda - \nu \cdot L_{nav.}}{\mu} = \rho - \beta \cdot L_{nav.}$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. *Kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKT ning qanday o'ziga xos jihaitlari mavjud?*
2. *Kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKT holatlarining limit ehtimollari uchun formulalarni keltiring.*
3. *Kutish vaqti cheklangan ko'p kanalli OXKTni ning samaradorlik ko'rsatkichlari uchun formulalarini keltiring.*

2.18 §. Yopiq turdagi tizimlar. Bir kanalli yopiq turdagi OXKT

Tayanch iboralar: *Yopiq turdagi OXKT, birlik vaqt ichida keltiriladigan o'rtacha zarar.*

Shu vaqtgacha biz ko'rib chiqqan OXKT larda chaqiruvlar tizimga «tashqari»dan kelib tushar edi va kiruvchi oqim intensivligi tizimning holatiga bog'liq bo'lmas edi. Ushbu paragrafda kiruvchi oqim intensivligi tizimning holatiga (nechta kanal bandligiga) bog'liq bo'ladigan OXKTlar ko'rib chiqamiz. Bunday OXKTlar *yopiq turdagi ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari* deb atalishi avval aytib o'tilgan edi.

Amaliyotda yopiq xizmat ko'rsatish tizimlar ko'p uchraydi. Misol sifatida biron tashkilotdan uning ta'mirlash bazasiga kiradigan avtomobillar oqimini qarash mumkin. Tushunarliki, ta'mirlanishga kirgan avtomobillar soni qancha ko'p bo'lsa, soz holatdagi avtomobillar soni shuncha kam bo'ladi. Bundan kelib chiqib, ta'mirlash bazasiga keladigan avtomobillar oqimi intensivligi shuncha kam bo'ladi.

Yopiq turdagi tizimlar uchun ushbu holat xarakterlidir: chaqiruv manbaalari cheklita sonda bo'ladi va biron manbaadan kelib tushgan chaqiruv bajarilmaguncha bu manbadan boshqa chaqiruv kelib tushmaydi (manba «blokirovka» qilinadi). Bunday tizimlarda OXKT holatlarining soni cheklita bo'lganda har qanday kirish va xizmat ko'rsatish intesivligida holatlarning limit ehtimollari mavjud bo'ladi.

Umuman olganda, har qanday OXKT faqat cheklita sondagi chaqiruvlar manbaalari bilan ish ko'radi. Lekin, ko'p hollarda chaqiruv manbaalari soni shunchalik katta bo'ladiki, tizim holatini chaqiruvlar oqimiga ta'sirini inobatga olmasa ham bo'ladi. Masalan, katta shaharlardagi telefon aloqasi stansiyasi (ATS)ga kiruvchi chaqiruvlar cheklita sondagi abonentlardan kelib tushadi. Lekin, abonentlar soni shunchalik ko'pki, amalda kelib tushadaigan chaqiruvlar oqimini stansiyaning holatiga (uning qancha kanali bandligiga) bog'liq emas deb qarash mumkin.

Soddalik uchun bir kanalli yopiq turdagi OXKT ni quyidagi xususiy holda ko'rib chiqamiz. Tizim bitta ishchi (kanal)dan iborat bo'lib, u n ta stanokdan iborat sexga stanoklarni sozlash, ta'mirlash bo'yicha xizmat ko'rsatadi. Har bir stanok tasodifiy vaqtda nosoz holatga kelishi mumkin. Bunda holda stanokni ishchi tomonidan ta'mirlash zarurati yuzaga keladi. Stanoklarning ishdan chiqishi oqimining intesivligi λ ga teng bo'lsin. Nosoz holga kelgan stanok ishni to'xtatadi. Agar bu vaqtda ishchi bo'sh bo'lsa, u darxol stanokni ta'mirlashni boshlaydi. Nosoz stanoklarni ta'mirlash intensivligi μ ga teng bo'lsin. U holda ta'mirlash uchun o'rtacha $\tau_{o'r.}=1/\mu$ vaqt sarflanadi.

Agar, stanok ishdan chiqqan vaqtda ishchi band bo'lsa, u holda stanok navbatga turadi va ishchining bo'shashini kutadi.

Ushbu tizim holatlarining limit ehtimollarini va quyidagi harakteristikalarini topish talab qilinadi:

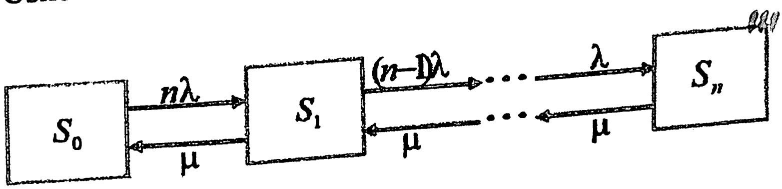
– ishchining band bo'lmasligi ehtimolini;

– navbat paydo bo'lishi ehtimolini;

– nosoz stanoklarning o'rtacha sonini va h.k.

Shunday qilib, biz, o'ziga xos OXKTni ko'rib chiqamiz. Tizim, undagi ta'mirlashga muhtoj stanoklar (kelib tushgan chaqiruvlar) soniga bog'liq ravishda $S_0, S_1, S_2,...,S_n$ holatlarning birida bo'ladi. Bunda: S_0 – barcha stanoklar soz holatda (ishchi bo'sh); S_1 – bitta stanok nosoz holatda, ishchi uni ta'mirlash bilan shug'illanmoqda, navbat yo'q; S_2 – ikkita stanok nosoz holatda, ishchi birini ta'mirlamoqda, ikkinchisi navbatda turibdi, S_n – barcha n ta stanok nosoz holatda, ishchi ulardan bittasini ta'mirlamoqda, n – 1 ta stanok navbatda turibdi.

Ushbu tizimning holatlar grafi quyidagicha bo'ladi:



2.18.1 – chizma

Tizimni S_o holatdan S_1 holatga barcha ishlab turgan stanoklarning ishdan chiqish oqimi o‘tkazadi. Demak, uning intensivligi $n\lambda$ ga teng. Tizimni S_1 holatdan S_2 holatga esa ishlab turgan $n-1$ ta stanoklarning “ishdan chiqish oqimi” o‘tkazadi. Uning intensivligi $(n\text{-}1)\lambda$ ga teng va x.k. Tizimni S_k holatdan S_{k-1} holatga (chap tomonga) o‘tkazuvchi oqim intensivligi esa barcha k= 1,2,..., n lar uchun bir xil bo‘lib, u ishlayotgan bitta ishchining xizmat ko‘rsatish intensivligi μ ga teng.

Bu jarayon – holatlar soni cheklita bo‘lgan “tug‘ilish va halok bo‘lish” jarayonidir.

Kanal yuklamasining intensivligi avvalgidek $\rho=\lambda/\mu$ bo‘lsin. Limit ehtimollarining topish uchun (2.9.2), (2.9.4) formulalardan foydalanamiz va quyidagilarni hosil qilamiz:

$$p_1 = n\rho p_0,\ \ p_2 = n(n-1)\rho^2 p_0, \dots, p_n = n(n-1)\dots 1\cdot\rho^n p_0$$

$$p_0 = (1 + n\rho + n(n-1)\rho^2 + \dots + n(n-1)\dots 1\cdot\rho^n)^{-1} \quad (2.18.1)$$

Tushunarliki, ishchining band bo‘lishi ehtimoli quyidagiga teng bo‘ladi:

$$P_{band} = 1 - p_0$$

Tizimning absolyut o‘tkazuvchanlik qobiliyatini topamiz. Agar ishchi band bo‘lsa, birlik vaqt ichida o‘rtacha μ ta stanokni ta’mirlaydi.

Demak, tizimning absolyut o‘tkazuvchanlik qobiliyati quyidagiga teng:

$$A = (1 - p_0)\mu$$

Har bir chaqiruvga ertami kechmi xizmat ko‘rsatiladi. Shuning uchun tizimning nisbiy o‘tkazuvchanlik qobiliyati Q=1 bo‘ladi.

Ishchining bo‘sh bo‘lishi (band bo‘lmasligi) ehtimoli

$$P_{\text{bo'sh}} = 1 - P_{band} = p_0$$

Ta'mirlash tizimidagi nosoz stanoklarning o'rtacha soni, ya'ni ta'mirlash jarayoniga tegishli bo'lgan stanoklarning o'rtacha soni $L_{tiz.}$ ni topamiz. Har bir soz stanok λ intensivlik bilan "nosoz stanoklar oqimi"ni hosil qiladi. O'rtacha $n-L_{tiz}$ ta stanok ishlamoqda. Ulardan xosil bo'ladigan nosozliklar intensivligi o'rtacha $(n-L_{tiz.})\lambda$ ga teng bo'ladi. Bu barcha nosozliklar ishchi tomonidan bartaraf etiladi. Demak, $(n-L_{tiz.})\lambda=(1-p_0)\mu$.

$$L_{tiz.}=n-\frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) \text{ yoki}$$

$$L_{tiz.}=n-\frac{1-p_0}{\rho} \qquad (2.18.2)$$

Ta'mirlanish uchun navbatda turgan stanoklarning o'rtacha soni $L_{nav.}$ ni topamiz. Tushunarliki,

$$L_{tiz.}=L_{xiz.}+L_{nav.}. \qquad (2.18.3)$$

Bu yerda $L_{õèç.}$ ishchi tomonidan ta'mirlanayotgan stanoklarning o'rtacha soni. Ta'mirlanayotgan stanoklarning soni birga teng, agar ishchi ta'mirlash bilan band bo'lsa, nolga teng, agar ishchi bo'sh bo'lsa. Demak, uning o'rtacha qiymati

$$L_{xiz.}=1-p_0$$

ga teng.

Ushbu tenglik va (2.18.2) formulani inobatga olib, (2.18.3) formuladan, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$L_{nav.}=n-\frac{1-p_0}{\rho}-(1-p_0)=n-(1-p_0)(1+\frac{1}{\rho}) \qquad (2.18.4)$$

Qaralayotgan OXKTning yana bir samaradorlik ko'rsatkichi sifatida «*tizimdagi stanoklar guruxining unumdorligi*»ni kiritish mumkin. Bitta stanokning birlik vaqt ichidagi unumdorligi α va nosoz stanoklarning o‘rtacha soni L_{tiz} bo‘lsa, stanoklar guruxining nosozliklari birlik vaqt ichida keltiradigan o‘rtacha “yo‘qotish” L quyidagiga teng bo‘ladi:

$$L = L_{tiz.} \cdot \alpha = (n - \frac{1-p_0}{\rho}) \cdot \alpha$$

2.18.1-misol. Tuman yong‘in xavfsizligi qismida yong‘in o‘chirish avtomobillariga(YoO‘A) texnik xizmat ko‘rsatuvchi bitta guruh bor bo‘lib, u tumandagi uchta YoO‘A texnik xizmat ko‘rsatadi. Har bir YoO‘A bir oyda o‘rtacha ikki marta ishdan chiqadi. Bitta YoO‘Ani ta’mirlashga o‘rtacha $\tau_{o'r.}$=1 sutka vaqt sarflanadi.

Ushbu OXKTning yuqorida keltirilgan samaradorlik ko‘rsatkichlarini topish talab qilinadi.

Yechish.

Misol shartlaridan $n = 3$, $\lambda = 2$(avtom./oy), $\mu = 1/\tau_{o'r.} =$ 1(avtom./sutka) .= 30(avtom./oy), $\rho = \lambda/\mu = 1/15$.

(2.18.1) formuladan guruxning bo‘sh bo‘lishi ehtimoli

$$p_0 = (1 + 3 \cdot 1/15 + 3 \cdot 2 \cdot 1/15^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1/15^3)^{-1} \approx 0{,}814$$

Demak, gurux vaqtning o‘rtacha 81,4% da bo‘sh bo‘ladi.
Guruxning band bo‘lishi ehtimoli

$$P_{band} = 1 - p_0 = 0{,}186$$

Tizimning absolyut o‘tkazuvchanlik qobiliyati

$$A = 0{,}186 \cdot 30 = 5{,}58 \text{(avtom./oy)}$$

Tizimdagi nosoz avtomobillarning o‘rtacha sonini (2.18.2) formuladan topamiz:

$$L_{tiz.} = 3 - \frac{0{,}186}{1/15} = 0{,}21$$

2.18.2- misol.

Uchta stanokdan iborat sexga bitta ta'mirlovchi ishchi xizmat ko'rsatadi. Har bir stanok bir soatda o'rtacha ikki marta ishdan chiqadi. Uni ta'mirlashga o'rtacha $\tau_{o'r.}$=10 minut vaqt sarflanadi.

Ushbu OXKTning yuqorida keltirilgan samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinsin.

Yechish.

Misol shartlaridan

$$n = 3,\ \lambda = 2,\ \mu = 1/\tau_{o'r.} = 6,\ \rho = \lambda/\mu = 1/3.$$

(2.19.1) formuladan ishchining bo'sh bo'lishi ehtimoli

$$p_0 = (1 + 3 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2 \cdot 1/3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1/3^3)^{-1} \approx 0{,}346\ .$$

Demak, ishchi jami vaqtning o'rtacha 34,6% da bo'sh bo'ladi.

Ishchining band bo'lishi ehtimoli

$$P_{band} = 1 - p_0 = 0{,}654$$

Tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati

$$A = 0{,}654 \cdot 6 = 3{,}924.$$

Tizimdagi nosoz stanoklarning o'rtacha sonini (2.18.2) formuladan topamiz:

$$L_{tiz.} = 3 - \frac{0{,}654}{1/3} = 1{,}04$$

Nosozliklar natijasidagi stanoklar guruhining o'rtacha nisbiy yo'qotishi

$$\frac{L_{tiz.}}{3}=0{,}347$$

Demak, stanoklar guruhi nosozliklar natijasida o'rtacha 34,7% unumdorligini yo'qotar ekan.

Navbatdagi stanoklarning o'rtacha soni (2.18.4) formulaga muvofiq

$$L_{nav.}=3-0{,}654\cdot 4=3-2{,}6=0{,}4$$

Bitta stanokning birlik vaqt ichidagi unumdorligi α bo'lsa, stanoklar guruhi tomonidan nosozliklar natijasida birlik vaqt ichida keltiriladigan o'rtacha zarar quyidagiga teng bo'ladi:

$$L=(3-3\cdot 0{,}654)\cdot\alpha\approx 1{,}04\cdot\alpha$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Yopiq turdagi tizimlar uchun qanday xarakterli holat mavjud?

2. Bir kanalli yopiq turdagi tizim holatlarining limit ehtimollari uchun formulalarni keltiring.

3. Bir kanalli yopiq turdagi tizimlarda qanday xarakteristikalarini topish talab qilinadi?

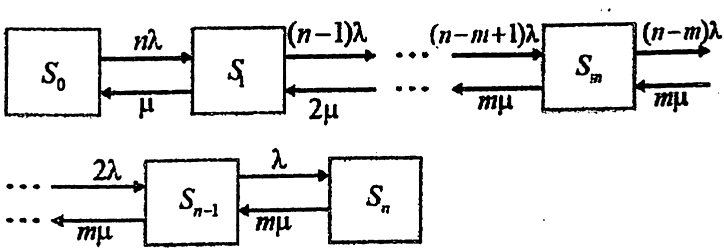
2.19 §. Ko'p kanalli yopiq turdagi OXKT

Tayanch iboralar: *Ko'p kanalli yopiq turdagi OXKT*

Ushbu paragrafda umumiyroq xol bo'lgan *m* kanalli yopiq turdagi OXKT larni qaraymiz. *m* ta ishchidan iborat brigada *n* ta stanokdan iborat sexga stanoklarni ta'mirlash bo'yicha xizmat ko'rsatadi. Bu yerda *m*< *n*. Har bir ishchini aloxida mustaqil kanal deb qaraymiz, ya'ni nosoz stanokni ta'mirlash bilan faqat bitta ishchi shug'illanadi.

Tizimning barcha bo'lishi mumkin bo'lgan holatlarini belgilab chiqamiz: S_0 – barcha stanoklar soz holatda (barcha ishchilar bo'sh); S_1 — bitta stanok nosoz holatda, bitta ishchi band; S_2 – ikkita stanok nosoz holatda, ikkita ishchi band,..., S_m – m ta stanok nosoz holatda, barcha ishchilar band holatda, S_{m+1} – $m+1$ ta stanok nosoz holatda, ulardan m tasi ta'mirlanmoqda, 1 ta stanok navbatda turibdi,..., S_n – barcha n ta stanok nosoz holatda, ulardan m tasi ta'mirlanmoqda, $n-m$ tasi navbatda turibdi.

Ushbu tizimning holatlar grafi quyidagicha bo'ladi:



2.19.1 – chizma

Tushunarliki, bunday OXKT da chaqiruvlar soni 0 tadan n tagacha ortib borishi bilan stanoklarning ishdan chiqish oqimi intensivligi $n\lambda$ dan λ gacha kamayib boradi.

Chaqiruvlar soni 0 tadan m tagacha ortib borishi bilan xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi esa μ dan $m\mu$ gacha ortib boradi va chaqiruvlar soni m tadan ortiq bo'lganda xizmat ko'rsatish oqimi intensivligi o'zgarmasdan $m\mu$ bo'lib qoladi.

Avvalgidek $\rho = \lambda/\mu$ belgilash kiritib, "tug'ilish va halok bo'lish" jarayoni sxemasining (2.9.2) va (2.9.4) formulalariga muvofiq holatlarning limit ehtimollarini topamiz [7]:

$$p_1 = \frac{n}{1!}\rho \cdot p_0 \qquad\qquad p_2 = \frac{n(n-1)}{2!}\rho^2 \cdot p_0$$

$$p_m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}\rho^m \cdot p_0$$

$$p_{m+1}=\frac{n(n-1)...(n-m)}{m!m}\rho^{m+1}\cdot p_0$$

$$p_{m+2}=\frac{n(n-1)...(n-m-1)}{m!m^2}\rho^{m+2}\cdot p_0$$

$$p_n=\frac{n!}{m!m^{n-m}}\rho^n\cdot p_0$$

$$p_0=\left[1+\frac{n}{1!}\rho+\frac{n(n-1)}{2!}\rho^2+...+\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}\rho^m+...\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)...(n-m)}{m!m}\rho^{m+1}+...+\frac{n!}{m!m^{n-m}}\rho^n\right]^{-1} \qquad (2.19.1)$$

Bu ehtimollar orqali band ishchilarning o‘rtacha sonini topamiz:

$$\bar{k}=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+...+(m-1)\cdot p_{m-1}+m\cdot(p_m+p_{m+1}+...+p_n)=$$

$$=1\cdot p_1+2\cdot p_2+...+(m-1)\cdot p_{m-1}+m\cdot(1-p_0-p_1-...-p_{m-1}) \qquad (2.19.2)$$

O‘z navbatida, tizimning absolyut o‘tkazuvchanlik qobiliyatini, ya’ni birlik vaqt ichida brigada tomonidan xizmat ko‘rsatiladigan stanoklarning o‘rtacha sonini $\bar{k}$ orqali ifodalash mumkin:

$$A=\bar{k}\cdot\mu \qquad (2.19.3)$$

Tizimdagi nosoz stanoklarning o‘rtacha soni, ya’ni ta’mirlash jarayoniga tegishli bo‘lgan stanoklarning o‘rtacha soni $L_{tiz.}$ ni topamiz.

$$L_{tiz.}=n-\frac{A}{\lambda}=n-\frac{\bar{k}\cdot\mu}{\lambda}=n-\frac{\bar{k}}{\rho} \qquad (2.19.4)$$

2.19.1-misol.

Oltita stanokdan iborat sexga ikkita ta’mirlovchi ishchi xizmat ko‘rsatadi. Har bir stanok o‘rtacha har yarim soatda ishdan chiqadi. Uni ta’mirlashga o‘rtacha $\tau_{o‘r.}$=10 minut vaqt sarflanadi. Ushbu OXKTning quyidagi samaradorlik ko'rsatkichlarini topish talab qilinadi:

- band ishchilarning o'rtacha soni;
- tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati;
- nosoz stanoklarning o'rtacha soni.

Yechish.

Misol shartlaridan $n = 6$, $m = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = 1/\tau_{o'r.} = 6$, $\rho = \lambda/\mu = 1/3$.

(2.18.1) formulaga muvofiq

$$p_0 = \left[1 + \frac{6}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot2}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot2^2}\cdot\frac{1}{3^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot2^3}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot2^4}\cdot\frac{1}{3^6}\right]^{-1} = \frac{1}{6{,}549} \approx 0{,}153$$

$$p_1 = \frac{6}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0{,}153 \approx 0{,}306$$

Ushbu ehtimollar yordamida band ishchilarning o'rtacha sonini (2.19.2) formuladan topamiz:

$$\bar{k} = 1\cdot p_1 + 2\cdot(1 - p_0 - p_1) = 1\cdot 0{,}153 + 2\cdot 0{,}541 \approx 1{,}235$$

(2.19.3) formuladan tizimning absolyut o'tkazuvchanlik qobiliyati topamiz:

$$A = 1{,}235\cdot 6 = 7{,}41$$

Tizimdagi nosoz stanoklarning o'rtacha sonini (2.19.4) formuladan topamiz:

$$L_{tiz.} = 6 - \frac{7{,}41}{2} = 2{,}295$$

Mavzuga oid nazorat savollar

1. Ko'p kanalli yopiq turdagi tizimlarning qanday qanday o'ziga xos jihatlari bor?

2. Ko'p kanalli yopiq turdagi OXKT holatlarining limit ehtimollari uchun formulalarni keltiring.

3. Ko'p kanalli yopiq turdagi OXKT ning samaradorlik ko'rsatkichlari uchun formulalarini keltiring.

1–ilova

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ funksiyaning qiymatlari jadvali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3327	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2–ilova

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ funksiyaning qiymatlari jadvali

	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0,0000	**0,45**	0,1736	**0,90**	0,3159	**1,35**	0,4115
0,01	0,0040	**0,46**	0,1772	**0,91**	0,3186	**1,36**	0,4131
0,02	0,0080	**0,47**	0,1808	**0,92**	0,3212	**1,37**	0,4147
0,03	0,0120	**0,48**	0,1844	**0,93**	0,3238	**1,38**	0,4162
0,04	0,0160	**0,49**	0,1879	**0,94**	0,3264	**1,39**	0,4177
0,05	0,0199	**0,50**	0,1915	**0,95**	0,3289	**1,40**	0,4192
0,06	0,0239	**0,51**	0,1950	**0,96**	0,3315	**1,41**	0,4207
0,07	0,0279	**0,52**	0,1985	**0,97**	0,3340	**1,42**	0,4222
0,08	0,0319	**0,53**	0,2019	**0,98**	0,3365	**1,43**	0,4236
0,09	0,0359	**0,54**	0,2054	**0,99**	0,3389	**1,44**	0,4251
0,10	0,0398	**0,55**	0,2088	**1,00**	0,3413	**1,45**	0,4265
0,11	0,0438	**0,56**	0,2123	**1,01**	0,3438	**1,46**	0,4279
0,12	0,0478	**0,57**	0,2157	**1,02**	0,3465	**1,47**	0,4292
0,13	0,0517	**0,58**	0,2190	**1,03**	0,3485	**1,48**	0,4306
0,14	0,0557	**0,59**	0,2224	**1,04**	0,3508	**1,49**	0,4319
0,15	0,0596	**0,60**	0,2257	**1,05**	0,3531	**1,50**	0,4332
0,16	0,0636	**0,61**	0,2291	**1,06**	0,3554	**1,51**	0,4345
0,17	0,0675	**0,62**	0,2324	**1,07**	0,3577	**1,52**	0,4357
0,18	0,0714	**0,63**	0,2357	**1,08**	0,3599	**1,53**	0,4370
0,19	0,0753	**0,64**	0,2389	**1,09**	0,3621	**1,54**	0,4382
0,20	0,0793	**0,65**	0,2422	**1,10**	0,3643	**1,55**	0,4394
0,21	0,0832	**0,66**	0,2454	**1,11**	0,3665	**1,56**	0,4406
0,22	0,0871	**0,67**	0,2486	**1,12**	0,3686	**1,57**	0,4418
0,23	0,0910	**0,68**	0,2517	**1,13**	0,3708	**1,58**	0,4429
0,24	0,0948	**0,69**	0,2549	**1,14**	0,3729	**1,59**	0,4441
0,25	0,0987	**0,70**	0,2580	**1,15**	0,3749	**1,60**	0,4452
0,26	0,1026	**0,71**	0,2611	**1,16**	0,3770	**1,61**	0,4463

0,27	0,1064	**0,72**	0,2642	**1,17**	0,3790	**1,62**	0,4474
0,28	0,1103	**0,73**	0,2673	**1,18**	0,3810	**1,63**	0,4484
0,29	0,1141	**0,74**	0,2703	**1,19**	0,3830	**1,64**	0,4495
0,30	0,1179	**0,75**	0,2734	**1,20**	0,3849	**1,65**	0,4505
0,31	0,1217	**0,76**	0,2764	**1,21**	0,3869	**1,66**	0,4515
0,32	0,1255	**0,77**	0,2794	**1,22**	0,3883	**1,67**	0,4525
0,33	0,1293	**0,78**	0,2823	**1,23**	0,3907	**1,68**	0,4535
0,34	0,1331	**0,79**	0,2852	**1,24**	0,3925	**1,69**	0,4545
0,35	0,1368	**0,80**	0,2881	**1,25**	0,3944	**1,70**	0,4554
0,36	0,1406	**0,81**	0,2910	**1,26**	0,3962	**1,71**	0,4564
0,37	0,1443	**0,82**	0,2939	**1,27**	0,3980	**1,72**	0,4573
0,38	0,1480	**0,83**	0,2967	**1,28**	0,3997	**1,73**	0,4582
0,39	0,1517	**0,84**	0,2995	**1,29**	0,4015	**1,74**	0,4591
0,40	0,1554	**0,85**	0,3023	**1,30**	0,4032	**1,75**	0,4599
0,41	0,1591	**0,86**	0,3051	**1,31**	0,4049	**1,76**	0,4608
0,42	0,1628	**0,87**	0,3078	**1,32**	0,4066	**1,77**	0,4616
0,43	0,1664	**0,88**	0,3106	**1,33**	0,4082	**1,78**	0,4625
0,44	0,1700	**0,89**	0,3133	**1,34**	0,4099	**1,79**	0,4633
1,80	0,4641	**2,02**	0,4783	**2,44**	0,4927	**2,86**	0,4979
1,81	0,4649	**2,04**	0,4793	**2,46**	0,4931	**2,88**	0,4980
1,82	0,4656	**2,06**	0,4803	**2,48**	0,4934	**2,90**	0,4981
1,83	0,4664	**2,08**	0,4812	**2,50**	0,4938	**2,92**	0,4982
1,84	0,4671	**2,10**	0,4821	**2,52**	0,4941	**2,94**	0,4984
1,85	0,4678	**2,12**	0,4830	**2,54**	0,4945	**2,96**	0,4985
1,86	0,4686	**2,14**	0,4838	**2,56**	0,4948	**2,98**	0,4986
1,87	0,4693	**2,16**	0,4846	**2,58**	0,4951	**3,00**	0,49865
1,88	0,4699	**2,18**	0,4854	**2,60**	0,4953	**3,20**	0,49931
1,89	0,4706	**2,20**	0,4861	**2,62**	0,4956	**3,40**	0,49966
1,90	0,4713	**2,22**	0,4868	**2,64**	0,4959	**3,60**	0,499841
1,91	0,4719	**2,24**	0,4875	**2,66**	0,4961	**3,80**	0,499928
1,92	0,4726	**2,26**	0,4881	**2,68**	0,4963	**4,00**	0,499968
1,93	0,4732	**2,28**	0,4887	**2,70**	0,4965	**4,50**	0,499997
1,94	0,4738	**2,30**	0,4893	**2,72**	0,4967	**5,00**	0,499997
1,95	0,4744	**2,32**	0,4898	**2,74**	0,4969		
1,96	0,4750	**2,34**	0,4904	**2,76**	0,4971		
1,97	0,4756	**2,36**	0,4909	**2,78**	0,4973		
1,98	0,4761	**2,38**	0,4913	**2,80**	0,4974		
1,99	0,4767	**2,40**	0,4918	**2,82**	0,4976		
2,00	0,4772	**2,42**	0,4922	**2,84**	0,4977		

3–ilova.

χ^2 (xi-kvadrat) taqsimotning kritik nuqtalari jadvali

Ozodlik darajalar i soni *k*	*α* qiymatdorlik darajasi					
	0.01	**0.025**	**0.05**	**0.95**	**0.975**	**0.99**
1	6.635	5.024	3.841	0.0039	0.001	0.0002
2	9.210	7.378	5.991	0.1026	0.0506	0.0201
3	11.345	9.348	7.815	0.3519	0.2158	0.1148
4	13.277	11.143	9.488	0.7107	0.4844	0.2971
5	15.086	12.832	11.070	1.145	0.831	0.554
6	16.812	14.449	12.592	1.635	1.237	0.872
7	18.475	16.013	14.067	2.167	1.690	1.239
8	20.090	17.535	15.507	2.733	2.180	1.647
9	21.666	19.023	16.919	3.325	2.700	2.088
10	23.209	20.483	18.307	3.940	3.247	2.558
11	24.725	21.920	19.675	4.575	3.816	3.053
12	26.217	23.337	21.026	5.226	4.404	3.571
13	27.688	24.736	22.362	5.892	5.009	4.107
14	29.141	26.119	23.685	6.571	5.629	4.660
15	30.578	27.488	24.996	7.261	6.262	5.229
16	32.000	28.845	26.296	7.962	6.908	5.812
17	33.409	30.191	27.587	8.672	7.564	6.408
18	34.805	31.526	28.869	9.390	8.231	7.015
19	36.191	32.852	30.144	10.117	8.907	7.633
20	37.566	34.170	31.410	10.851	9.591	8.260
21	38.932	35.479	32.671	11.591	10.283	8.897
22	40.289	36.781	33.924	12.338	10.982	9.542
23	41.638	38.076	35.172	13.091	11.689	10.196
24	42.980	39.364	36.415	13.848	12.401	10.856
25	44.314	40.646	37.652	14.611	13.120	11.524
26	45.642	41.923	38.885	15.379	13.844	12.198
27	46.963	43.195	40.113	16.151	14.573	12.878
28	48.278	44.461	41.337	16.928	15.308	13.565
29	49.588	45.722	42.557	17.708	16.047	14.256
30	50.892	46.979	43.773	18.493	16.791	14.953

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdalimov B.A. Oliy matematika.T.: "O'qituvchi",1994. -398 s.

2. Abdushukurov A.A., Zuparov T.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: "Tafakkur bo'stoni", 2015, -415 b.

3. Abdushukurov A.A. Xi-kvadrat kriteriysi: nazariyasi va tatbiqi, O'zMU, 2006., -84 b.

4. Брушлинский Н.Н., Кафидов В.В.,Козлачков В.И. и др. Системный анализ и проблемы пожарной безопасности народного хозяства. – М.: Стройиздат, 1988, 413 с.

5. Брушлинский Н.Н., Пранов Б.М. Соболев Н.Н., Шевляков А.Н., Лукинский В.М. Методы прикладной математики в пожарно-технических задачах, Н.Н., – М., ВИПТШ, 1983, -135 с.

6. Брушлинский Н.Н., Соколов С.В. Математические методы и модели управления в государственной противопожарной службе. М.,АГПС МЧС России:2011,-173 с.

7. Вентцель Е.С. Исследования операций, М., "Сов. Радио" 1972.-552 с.

8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. ,-М.: Наука. 1988.-448 с.

9. Кофман А., Крюон. Р.Массовое обслуживание теория и приложения. М.1965. -302 с.

10. Кошуняева Н.В., Патронова Н.Н. Теория массового обслуживания - Архангельск; САФУ, 2013 - 107 с.

11. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск. НГТУ. 2011, -888 с.

12. Нагаев А.В. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Т.: «Уқитувчи»,1987. -208 с.

13. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных .–М.: Наука, 1987.,-320 с.

14. Радченко Т.А., Дылевский А.В. Теория массового обслуживания, Воронеж, 2004, -58 с.

15. Смагин Б.И. Основы теории массового обслуживания, Мичуринск, 2007. -32 с.

16. Соатов Ё.У. Олий математика. 2-том.Тошкент, «Ўқитувчи»,1994. 416 с.

17. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – 2-е изд., – М.: Финансы и статистика, 2005. - 616 с:

18. Юдовин М.Э. Оценки параметров и критерий согласия хи-квадрат. Санкт-Петербург ; ВШТЭ СПбГУПТД. 2016.-30 с.

MUNDARIJA

I.J. YULDASHEV

OLIY MATEMATIKA

(OMMAVIY XIZMAT KO‘RSATISH NAZARIYASI)

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2019

Muharrir: Sh.Kusherbayeva
Tex. muharrir: A.Moydinov
Musavvir: A.Shushunov
Musahhih: Sh.Mirqosimova
Kompyuterda sahifalovchi: N.Rahmatullayeva

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 71-245-57-63, 71-245-61-61.
Nashr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi 28.12.2019.
Bichimi 60x84 1/16. «Timez Uz» garniturasi. Ofset bosma usulida bosild
Shartli bosma tabog‘i 14,0. Nashriyot bosma tabog‘i 14,5.
Tiraji 200. Buyurtma № 292.

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko‘chasi, 171-uy.

Tuzatishlar

№	Tuzatilishli lozim bo'lgan matn	Darslikda berilgan taxrir	O'qilishi lozim bo'lgan taxrir
1	88-bet quyidan 2-xat boshi	$G(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$	$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$
2	89-bet (1.18.1) формула	$Z_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_k - nP_{i0}))^2}{nP_{i0}}$ $= n\sum_{i=1}^{k} \frac{(\frac{m_k}{n} - P_{i0})^2}{P_{i0}}$	$Z_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - nP_{i0}))^2}{nP_{i0}}$ $= n\sum_{i=1}^{k} \frac{(\frac{m_i}{n} - P_{i0})^2}{P_{i0}}$
3	90-bet quyidan 1- xat boshi	foydalaniladi (2- **Ilova**).	foydalaniladi (3- **Ilova**).
4	90-bet (1.18.3) формула	$Z_n^2(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_k - nP_{i0}(\theta))^2}{nP_{i0}(\theta)}$	$Z_n^2(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - nP_{i0}(\theta))^2}{nP_{i0}(\theta)}$
5	91-bet yuqoridan 3- xat boshi	$k \le 30$ bo'lganda **2-ilovada**	$k \le 30$ bo'lganda **3-ilovada**
6	93-bet	$\lambda \approx \bar{x} = \frac{1}{80}\sum_{\kappa=1}^{9} \phi_\kappa \kappa =$	$\lambda \approx \bar{x} = \frac{1}{80}\sum_{\kappa=1}^{9} k \cdot m_\kappa =$
7	93-bet yuqoridan 7- xat boshi	jadvali (**2-ilova**)dan	jadvali (**3-ilova**)dan