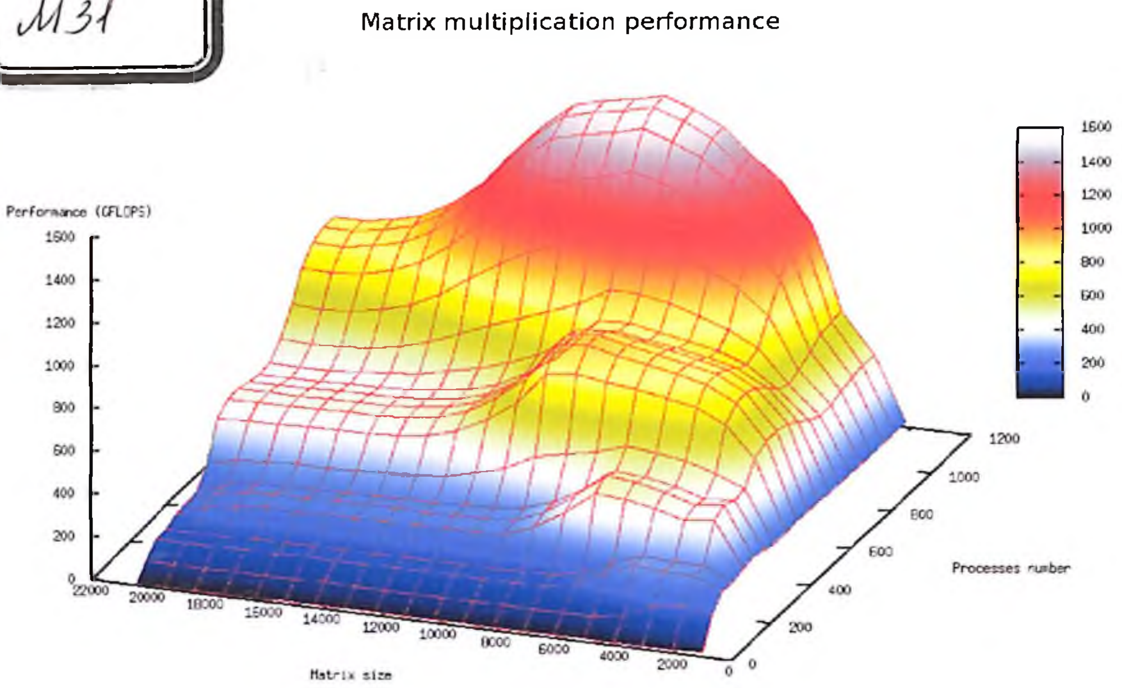
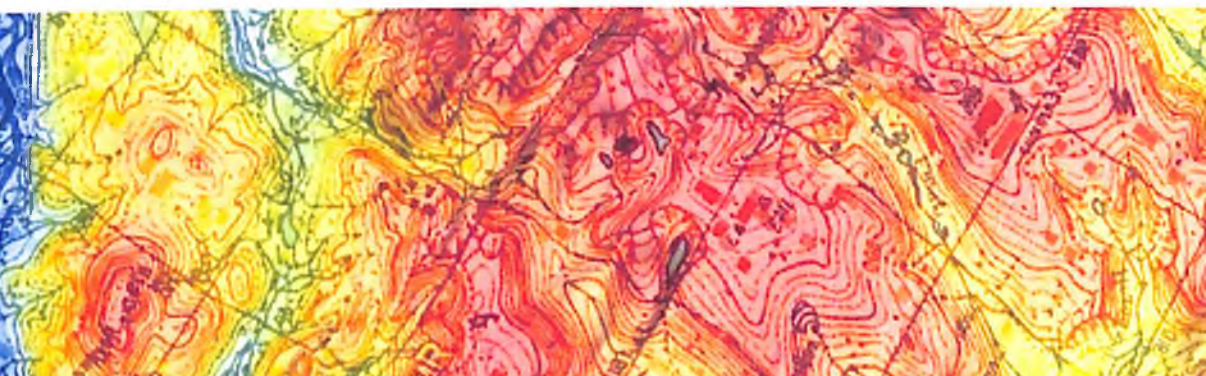


SH.A.NAZIROV, D.T.MUXAMEDIEVA
F.M.NURALIEV, A.NE'MATOV.

MATEMATIK MODELLASHTIRISH ASOSLARI



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MUXAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

SH.A.NAZIROV, D.T.MUXAMEDIEVA
F.M.NURALIEV, A.NE’MATOV.

MATEMATIK MODELLASHTIRISH ASOSLARI

(Monografiya)

TOSHKENT – 2020

UO'K: 519.876.5(075.8)
KBK: 22.2в631.0я73-1)
N 88
SH.A.Nazirov, D.T.Muxamedieva, F.M.Nuraliev, A.Ne'matov. Matematik modellashtirish asoslari. (Monografiya). –T.: «Aloqachi», 2020. – 364 b.

ISBN 978–9943–5899–1–9

Ilmiy nashr (monografiya) matematik modellashtirish metodologiyasiga bag'ishlangan bo'lib, unda matematik modellashtirish tamoyillari, bosqichlari, matematik modellashtirishning intellektual yadrosi, hamda obyektlar, jarayonlar va hodisalarning matematik modellarini qurish usullari yoritilgan.

Monografiya texnik yo'nalishdagi oliy o'quv yurtlari yuqori bosqich talabalari, professor-o'qituvchilar, doktorantlar, ilmiy tadqiqotchilar va matematik modellashtirish usullarini mustaqil o'rganuvchilar uchun mo'ljallangan.

UO'K: 519.876.5(075.8)
KBK: 22.2в631.0я73-1)

Taqrizchilar:
Aripov M.M. – f.-m.f.d., professor;
Ravshanov N. –t.f.d, professor.

ISBN 978–9943–5899–1–9

K I R I SH

Hozirda inson faoliyatining deyarli barcha sohalarida kompyuter keng qo‘llanilmoqda. Kompyuterdan yangi texnologik jarayonlarni o‘rganishda va iqtisodiy masalalarni rejalashtirish, har xil darajadagi ishlab chiqarishni boshqarish uchun optimal variantlarni izlab topishda keng foydalanilmoqda. Ayniqsa, murakkab obyektlar bo‘lmish radiotexnika, aviasozlik, platina, ko‘priklar va boshqa shunga o‘xshash inshootlar hisob-kitobini kompyuterdan foydalanmasdan amalga oshirib bo‘lmaydi.

O‘ta tezkor va keng hajmdagi xotiraga ega zamonaviy kompyuterlar fizika, kimyo, mexanika, texnika, iqtisod va boshqa ko‘plab soha muammolarini tadqiq qilish va hal etishda matematik usullarni qo‘llash uchun keng yo‘l ochib bermoqda.

Kompyuterdan foydalanishning muhim yo‘nalishlaridan biri – bu obyekt, hodisa yoki jarayonlarni modellashtirishdir. Inson bevosita kuzata olmaydigan fizik, kimyoviy, biologik va boshqa jarayonlar kompyuterda modellashtirilishi mumkin. Modellashtirish kompyuterda masalani yechishning muhim tarkibiy qismi hisoblanadi. Shu sababli zamonaviy muhandis nafaqat hisoblash matematikasining sonli va taqribiy usullarini, balki obyekt va jarayonlarning matematik modellarini tuzishni, kompyuterli matematik tizimlardan foydalanish hamda hisoblash tajribalarini o‘tkazishni bilishi lozim.

Shu bois, hozirgi faoliyatni matematik modellashtirishsiz tasavvur etib bo‘lmaydi. Ushbu metodologiyaning mohiyati berilgan obyektni uning in’ikosi bo‘lmish matematik model bilan almashtirishdan iborat. Real borliqdagi barcha obyektlar, jarayonlar va hodisalarning matematik modellarini qurib so‘ng kompyuter yordamida ushbu modellarni o‘rnatish va hisoblash tajribasi orqali qaralayotgan jarayon, obyekt va hodisalar xususiyatlarini tadqiq qilish o‘ta muhim masalalardan biri hisoblanadi. Chunki ba’zi obyektlar ustida natural tajriba o‘tkazish bir tomondan o‘ta qimmat tursa, ikkinchi tomondan yetarlicha xavflidir. Bularga misol qilib, termoyadro qurolining tajribasi, har xil ekologik tajribalar, biologik qurollarni misol qilib ko‘rsatish mumkin. Bu tajribalar to‘g‘risida fikr yuritishning o‘zi dahshatli.

Shuning uchun ham matematik modellashtirish eng arzon va eng xavfsiz hisoblanadi.

Ta’kidlash joizki, o‘ta tezkor va katta xotiraga ega keng imkoniyatli zamonaviy kompyuterlar, ular uchun yaratilayotgan tizimli, instrumental, amaliy dasturlar, zamonaviy dasturlash tillari va ularning kompilyatorlari, dasturlash texnologiyalari, umuman olganda barcha axborot texnologiyalaridan foydalanishdan maqsad matematik modellashtirishni amalga oshirishdir.

Demak, inson faoliyati uchun o‘ta muhim murakkab tizimlarni matematik modellashtirishdan maqsad esa o‘z navbatida tegishli qaror qabul qilish (inson tomonidan) va bashorat (prognoz) qilish.

Odatda, amaliy matematika masalalarini kompyuter yordamida yechish quyidagi texnologik zanjir asosida olib boriladi: tadqiqot obyekti – fizik model – matematik model – algoritm – dastur – hisoblash tajribalari – natijalarni tajriba va boshqa ma’lumotlar bilan solishtirish.

Bu yerda matematik texnologiya (zanjirning hisoblash qismi) esa matematik model – algoritm – dastur – hisoblash tajribalari kabi aniqlanadi. Bu zanjirning intellektual yadrosi, ya’ni matematik modellashtirishning intellektual yadrosi quyidagi uchlikni o‘z ichiga oladi: model – algoritm – dastur.

Albatta, biz bu yerda model deganda matematik modelni tushunamiz. Vaholanki, modelning turi ancha ko‘p, bu tushunchalar monografiyaning tegishli bo‘limlarida keltirilgan.

Hozirgi kunda davlat tilida “matematik modellashtirish” fanidan o‘quv qo‘llanma mavjud emas. Shuning uchun ham mualliflar jamoasi tomonidan texnik yo‘nalishdagi oliy ta’lim muassasalari talabalari uchun “Matematik modellashtirish” fani bo‘yicha ilmiy nashr (monografiya) ko‘rinishidagi o‘quv qo‘llanma tayyorlandi.

Ta’kidlash lozimki, odatda o‘quv qo‘llanma tayyorlashda mavjud monografiya, darsliklarga va mualliflar malakasi hamda tajribasiga asoslaniladi. Shuning uchun mazkur qo‘llanmada A.A.Samarskiyning matematik modellashtirish bo‘yicha monografiyalaridan va V.Q.Qobulovning algoritmlashga oid monografiyalari hamda mualliflarning ilmiy ishlaridan foydalanildi.

Monografiya kirish va 7 ta bobdan iborat.

1-bob ilmiy tadqiqot ishlarida matematik modellashtirish va algoritmik uslubiyatlar ma’nosi qo‘llanishini yoritishga bag‘ishlangan. Mazkur ikki uslubiyat solishtirilgan va ularning o‘xshashligi, umumiy tamoyillari ochib berilgan.

2-bobda obyekt, jarayon, hodisalar sifatida qaralgan tizimlar to‘g‘risidagi asosiy tushunchalar va ularning xususiyatlari yoritilgan.

Matematik va kompyuterli modellashtirish 3-bobda yoritilgan bo‘lib, bu yerda matematik modellar va ularning sinflari, matematik modellashtirish, matematik modellarni qurish shakli va tamoyillari, hisoblash tajribalarini o‘tkazish yo‘llari keltirilgan.

4-bobda eng sodda matematik modellar va modellashtirishning asosiy tushunchalari keltirilgan. Bu yerda tabiatning fundamental qonunlaridan, variatsion tamoyillaridan olingan modellar va modellar ierarxiyasiga misollar hamda matematik modellarning universalligi keltirilgan.

5- va 6-bobda 4-bobdagi natijalar umumlashtirilib tabiatning fundamental qonunlari (modda massasi, energiya va zarralarning saqlanish qonunlari) va variatsion tamoyillar (Lagranj, Gamilton va Ostrogrodkiy – Gamilton tamoyillari) ma’nosi ochib berilgan va ular yordamida chiqarilgan modellar keltirilgan.

7-bobda ayrim murakkab tizimlar ya’ni magnit, elastik, plastinkali, elektron sxemalar ayrim sinf jarayonlarining matematik modellari hamda neyronoravshan modellashtirish usullari yoritilgan.

Monografiyadan o‘quv qo‘llanma shaklida foydalanish maqsadida har bir bobda nazorat savollari va xarakterli masalalar keltirilgan.

Monografiyani yozishda mualliflarning bir necha yillardan buyon mazkur fandan Toshkent axborot texnologiyalari universiteti talabalari uchun o‘qigan ma’ruzalari hamda olib borilgan laboratoriya va amaliy mashg‘ulotlar bo‘yicha tajribalarga va ushbu sohada olib borgan ilmiy-tadqiqot ishlari natijalariga asoslanildi.

Ilmiy nashr (monografiya) to‘g‘risidagi fikr va mulohazalarni bajonidil qabul qilamiz.

1. ILMIY - TADQIQOT ISHLARINI AVTOMATLASHTIRISHDA MATEMATIK TEXNOLOGIYALAR

1.1. Matematik modellashtirish va hisoblash tajribalari

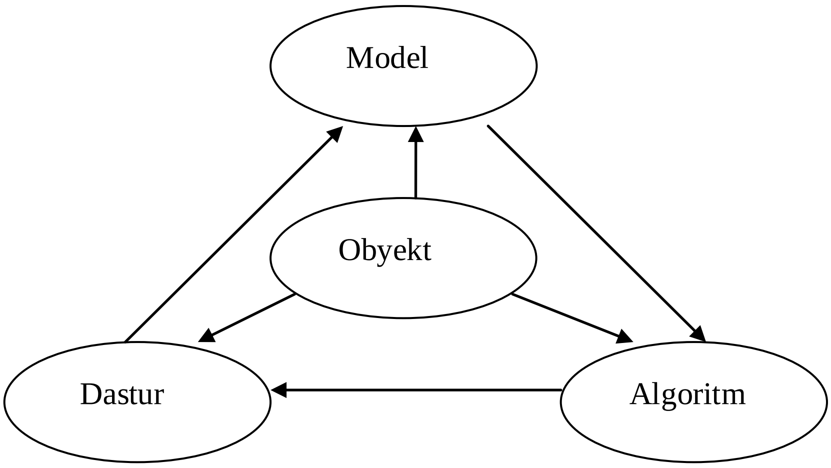
Hozirgi paytda ilmiy - tadqiqotlarning yangi uslubiyati - matematik modellashtirish va hisoblash tajribasiga asos solinmoqda. Bu uslubiyatning mazmuni shundan iboratki, unda joriy obyekt oʻzining matematik modeliga almashtiriladi, hamda matematik modellar zamonaviy hisoblash vositalari yordamida oʻrganiladi. Matematik modellashtirish uslubiyati tez sur'atlar bilan rivojlanib, katta texnik tizimlarni ishlab chiqish va ularni boshqarishdan boshlab, murakkab iqtisodiy va ijtimoiy jarayonlarni tahlil qiluvchi sohalarni ham qamrab olmoqda.

Matematik usullardan keng foydalanish nazariy tadqiqotlarning umumiy darajasini oshirishga va ularni tajribaviy tadqiqotlar bilan chambarchas aloqada olib borishga imkon beradi. Matematik modellashtirishga nazariya hamda tajribaning koʻplab yutuqlarini oʻzida mujassamlashtirgan anglash, qurish, loyihalashtirishning yangi usuli sifatida qarash mumkin. Obyektning oʻzi bilan emas, uning modeli bilan ishlash uning mavjud holatlardagi hatti-harakatini tez va sarf-xarajatlarsiz oʻrganishga imkon beradi. Ayni paytda obyektlarning modellari ustida oʻtkazilgan hisoblash (kompyuter, imitatsiyaviy) tajribalari zamonaviy hisoblash usullarining quvvati va informatikaning texnik vositalariga tayanib, obyektlarni nazariy yondashuvga qaraganda toʻlaroq va chuqurroq oʻrganiladi.

Texnik, ekologik, iqtisodiy jihatdan hamda zamonaviy fan tomonidan oʻrganiladigan boshqa tizimlar oddiy nazariy usullar orqali (zaruriy toʻliqlik hamda aniqlikda) oʻrganila olmaydi. Ular ustida olib boriladigan toʻgʻridan-toʻgʻri tadqiqot uzoq muddatli, qimmat, koʻpincha xavfli boʻladi. Hisoblash tajribasi tadqiqotni tezroq va arzonroq oʻtkazishga imkon beradi. Matematik modellashtirish ilmiy-texnik taraqqiyotning muhim asoslaridan biridir. Rivojlangan mamlakatlarda bu uslubdan foydalanmasdan birorta yirik masshtabli texnologik, ekologik yoki iqtisodiy loyihani ishlab chiqib boʻlmaydi.

Matematik modellashtirish asoslari aniq fanlarning paydo boʻlishining boshlanishidayoq qoʻllanilgan boʻlib, ‹‹algoritm›› soʻzi oʻrta asrlik olim Al-Xorazmiy nomi bilan bogʻliq. Matematik modellashtirish uslubiyatining paydo boʻlishi va takomillashuvi XX asrning 40-yillari oxiri hamda 50-yillarning boshiga to‘g‘ri kelib, bunga ikkita omil sabab bo‘lgan. Kompyuterlarning paydo bo‘lishi birinchi, lekin asosiy bo‘lmagan omil bo‘lib xizmat qildi. Chunki ularning paydo bo‘lishi tadqiqotchilarni hajman katta bo‘lgan hisoblash ishidan ozod etdi. Ikkinchi, muhimroq omil Sobiq Ittifoq va AQSh ning raketa-yadroviy qobiqni yaratish bo‘yicha milliy dasturlarni bajarish bo‘yicha ijtimoiy buyurtmasi bo‘ldi. Bunday murakkab ilmiy-texnik muammolarni hisoblash vositalaridan foydalanmasdan turib, an’anaviy usullarda hal etib bo‘lmasdi. Yadroviy portlashlar, raketa va sun’iy yo‘ldoshlarning uchirilishi, avvalo, kompyuterlarda loyihalashtirildi, so‘ngra esa amaliyotga tatbiq etildi.

Matematik modellashtirishning asosini ***«model-algoritm-dastur»*** (1.1-rasm) uchligi tashkil etadi. O‘rganiladigan jarayonlarning matematik modellari murakkab bo‘lib o‘z ichiga chiziqli bo‘lmagan funksional-differensial tenglamalar tizimini qamrab oladi. Matematik model yadrosini xususiy hosilali tenglamalar tashkil etadi. [1-4]



1.1-rasm. Matematik modellashtirishning intellektual yadrosi

Hisoblash tajribasining birinchi bosqichida obyektning muhim xususiyatlari - uning tarkibiy xususiyatlariga xos bo‘lgan qonunlar matematik ko‘rinishda aks etadi. Matematik model (uning asosiy qismlari) obyekt to‘g‘risida joriy ma’lumotlarni bilish uchun amaliy matematikaning an’anaviy analitik vositalari yordamida o‘rganiladi.

Ikkinchi bosqich modelni kompyuterda ishlab chiqish uchun hisoblash algoritmini tanlash (yoki ishlab chiqish) bilan bog‘liq. Qidirilayotgan kattaliklarni mavjud hisoblash texnikasida berilgan aniqlikda olish lozim. Hisoblash algoritmlari modelning, bevosita obyektning asosiy xususiyatlarini cheklamasligi, yechilayotgan masalalarning va hisoblash vositalarining xususiyatlariga moslashishi kerak. Matematik modellar asosi matematik fizikaning xususiy hosilali tenglamalarining chegaraviy masalalarini yechishning sonli usullaridan tashkil topgan hisoblash matematikasi yordamida o‘rganiladi.

Uchinchi bosqichda model va algoritmni kompyuterda ishlatish uchun dasturiy vosita yaratiladi. Dasturiy mahsulot matematik modellashtirishning matematik modellar qatoridan foydalanish, hisoblashning ko‘p variantliligi bilan bog‘liq muhim xususiyatini nazarda tutishi kerak. Buning natijasida obyektga mo‘ljallangan dasturlash asosida ishlab chiqariladigan amaliy dasturlarning majmui va paketlaridan keng foydalaniladi.

Matematik modellashtirish omili hisoblash tajribasining hamma asosiy qatlamlarini chuqur tahlil etishni ta’minlab beradi. «Model-algoritm-dastur» uchligiga tayanib, tadqiqotchi qo‘liga mukammal moslashuvchan va arzon vositani oladi va u avvaliga nazoratdan o‘tkaziladi. Bundan keyin o‘rganilayotgan obyektning zaruriy sifatli hamda sonli xususiyatlari, tavsiflarini olish uchun matematik modellar keng qamrovda tahlil etiladi.

Hisoblash tajribasi o‘z tabiatiga ko‘ra sohalararo xarakterga ega. Zamonaviy ilmiy-texnik ishlab chiqarishda matematik modellashtirishning sintez ahamiyatini haddan tashqari ortiqcha baholab bo‘lmaydi. Umumiy tadqiqotlarda amaliy sohada, amaliy va hisoblash matematikasi, amaliy va tizimli dasturiy ta’minot bo‘yicha mutaxassislar ishtirok etadi. Hisoblash tajribasi - chiziqli bo‘lmagan matematik modellarni sifatli tahlil etishdan boshlab, to zamonaviy dasturlash tillarigacha bo‘lgan turli xil usul va yondashuvlarga tayanib o‘tkaziladi. Modellashtirish u yoki bu ko‘rinishda ijodiy faoliyatlarining deyarli barchasida ishtirok etadi. Matematik modellashtirish aniq bilimlar doirasini hamda ratsional usullarning ilovalar maydonini kengaytiradi. U asosiy tushunchalar va farazlarni aniq shakllantirish, qo‘llanilayotgan modellarning adekvatligini aposterial tahlil etishga, hisoblash algoritmlarining aniqligini nazorat qilishga, hisob ma’lumotlarini sifatli qayta ishlash va tahlil qilishga asoslanadi.

Zamonaviy bosqichda hayotiy ta’minlanganlik muammosini hal etish matematik modellashtirish va hisoblash tajribasidan keng foydalanishga asoslanadi. Hisoblash vositalari (kompyuterlar va sonli usullar) odatda tabiiy fandagi tadqiqotlarda, avvalo fizika hamda mexanikada yaxshi tasvirlangan. Kimyo va biologiyani, tuproq haqidagi fanlarni, ijtimoiy fanlarni faol matematikalashtirish jarayoni olib boriladi. Muhandislik va texnologiyada matematik modellashtirishni qo‘llashning sezilarli yutuqlariga erishildi. Matematik modellarning kompyuter vositasida o‘rganilishi uchiriladigan apparatlarning aerodinamik trubalardagi sinovini, poligonlardagi yadroviy hamda termoyadroviy qurilmalarni portlatish o‘rnini sezilarli darajada bosdi.

Zamonaviy axborot texnologiyalari tibbiyotda ham qo‘llaniladi. Analiz ma’lumotlarini yig‘ish va tahlil etish kasalliklarga o‘z vaqtida tashxis qo‘yish imkoniyatini beradi. Masalan, kompyuterli tomograf katta massivdagi ma’lumotlarni qayta ishlashning matematik usullaridan foydalanish bo‘yicha sifatli tibbiyot vositasini olishga asos bo‘ladi.

Bu yerda aniq bir xususiyatga bog‘liq bo‘lmagan, turli xil fan sohalari uchun umumiy bo‘lgan matematik modellarni qurish va tahlil qilishga qaratilgan asosiy yondashuvlar bayon etilgan. Insonlarni o‘rab turgan olam yagona. Xususan, bu matematik modellarning mukammalligida, turli xil hodisa va obyektlarni ta’riflash uchun qo‘llaniladigan matematik qurilmalarning bir xilligida namoyon bo‘ladi.

Ilmiy-tadqiqotlardagi nazariy va amaliy usulli hisoblash tajribasining umumiy xususiyatlari ko‘rsatib o‘tilgan. Quyida hisoblash tajribasining har xil turlariga qisqacha ta’rif keltirilgan. Hisoblash tajribasi matematik modellarni o‘rganish uchun kompyuterlar va sonli usullardan foydalanish natijasida paydo bo‘lgan. Unga matematik modellashtirishning eng yuqori pog‘onasi sifatida qaraladi.

Matematik modellashtirish. Mazmuni matematik tushunchalarni tabiiy va ijtimoiy fanlarda, texnikada qo‘llashdan iborat bo‘lgan ilmiy bilimlarni matematikalashtirish zamonaviy davr udumi hisoblanadi. Ko‘pincha u yoki bu fanning rivojlanish darajasi ham matematik usullarni qo‘llash darajasi bo‘yicha xarakterlanadi. «Har qanday bilimda matematika qancha bo‘lsa, shuncha fan bor» degan mashhur hikmatli ta’rif bu fikrni ifodalab beradi.

Bilimlarni matematikalashtirish. Fan rivojlanishining empirik bosqichida kuzatilayotgan hodisalar ta’riflanadi, tajribalar o‘tkaziladi, tajriba ma’lumotlari yig‘iladi va guruhlashtiriladi. Nazariy bosqich uchun uning yadrosini tashkil etuvchi asosiy qonunlarni, yangi abstraktsiyalar va ideallashtirish tushunchalarini kiritish xos xususiyatdir. Bunda o‘rganilayotgan obyekt to‘g‘risida umumiy tasavvur hosil qilinadi, tajriba ma’lumotlarining umumiy majmuiga ta’rif beriladi.

Nazariyaning evristik ahamiyati obyekt, hodisa yoki jarayon to‘g‘risidagi yangi, oldin ma’lum bo‘lmagan tavsiflarni aytib bera olishida namoyon bo‘ladi. Fanning rivojlanish tarixi neptun, pozitronning kashf etilishiga doir yorqin misollarga ega. Matematik g‘oyalar va usullar nafaqat matematik bezaklar vazifasini, balki sonli hamda sifatli tahlilning muhim vositalari bo‘lib xizmat qiladi.

Turli fanlar har xil matematikalashtirish darajasiga ega. Sifatli matematik modellar ustuvor ahamiyatga ega bo‘lgan fanlar uchun yuqori bo‘lmagan matematikalashtirish darajasi xarakterli. Qanday matematik modellar ishlatilishiga ko‘ra matematikalashtirish darajasini tavsiflash mumkin. Masalan, mexanikada matematikani qo‘llash xususiy hosilali differensial tenglamalar tizimidan foydalanishga asoslanadi. Jumladan, bunday matematik modellar alohida bitta holatda emas, mexanikaning qayishqoqlik nazariyasi, gidroaerodinamika kabi hamma bo‘limlarda qo‘llaniladi. Matematikalashtirish darajasi fizikada ham yuqori, lekin uning turli xil bo‘limlarida hozircha har xil darajada ishlatiladi.

Hozirgi paytda kimyoda ham matematikalashtirish darajasi ortib bormoqda. Masalan, kimyoviy kinetika sodda differensial tenglamalarga, kimyoviy gidrodinamika xususiy hosilali tenglamalarga asoslanadi. Biologiyada ham matematikalashtirish darajasi ortmoqda. Buning isboti tariqasida XX asr boshlarida bajarilgan ***«yirtqich-o‘lja***» tizimini matematik modellashtirish bo‘yicha Volterning klassik ishiga e’tiborni qaratish yetarli.

Biz iqtisod, tarix va boshqa ijtimoiy fanlarga ham matematik g‘oyalarning tez sur’atlar bilan kirib kelishiga guvoh bo‘lmoqdamiz. Mexanika va fizikani matematikalashtirishda to‘plangan tajriba hamda matematikaning rivojlanish darajasi tufayli qo‘llangan fanlarni matematikalashtirish jarayoni juda tez sodir bo‘lmoqda. Kimyo va biologiyada matematikani qo‘llash ko‘proq ilgari ishlab chiqilgan matematik apparatga asoslanadi. Shuning uchun ushbu fanlarning matematikalashtirish jadalligi kimyo, biologiya fanlarining rivojlanish darajasiga bog‘liq.

Tajribaviy va nazariy tadqiqotlarni rivojlantirmasdan turib matematik usullarning o‘zigagina tayanib bo‘lmaydi. Matematik usullarni samarali qo‘llash uchun, avvalo, o‘rganilayotgan jarayon yoki hodisani chuqur anglash, amaliy sohadagi mutaxassis va matematik bo‘lish talab etiladi.

Tabiatning umumiyligi turli xil fizik, kimyoviy, biologik jarayonlarni ta’riflash uchun bir xil matematik modellarni qo‘llashda namoyon bo‘ladi. Matematik modellar sonining cheklilik xususiyati ularning abstraktliligini ko‘rsatadi. Bitta matematik ifoda (tushuncha) har xil jarayon, tavsiflarni ta’riflashi mumkin. Masalan, Laplas tenglamasi gidrodinamikadagi siqilmaydigan suyuqlik harakatini, zaryadlanmagan jismlar tashqarisidagi elektrostatik maydonni, statsionar issiqlik maydonini, qayishqoqlik nazariyasida membrananing egilishini ta’riflaydi. A.Puankrening qayd etishicha, «Matematika – har xil narsalarga bir xil nom qo‘yish san’atidir». Xususan, bu aniq bir hodisa yoki jarayonni o‘rganishda boshqa bir hodisa yoki jarayonni o‘rganish paytida olingan natijalarni qo‘llashga imkon beradi. Matematik modellarning bunday umumiyligida matematika usullarining birlashgan ahamiyati namoyon bo‘ladi.

Matematik modellardan foydalanish. Ilmiy bilimlarni matematikalashtirishda hodisaning aniq tabiatidan chetlashish, ideallashtirish va uning matematik shaklini ajratib ko‘rsatish bosqichi mavjud, (matematik model quriladi). Aynan matematik modelning abstraktligi uning aniq hodisa yoki jarayonga nisbatan qo‘llanilishida ma’lum bir qiyinchiliklar tug‘diradi. Hozirda, to‘plangan tajriba tufayli turli fanlardagi ideallashtirish, chetlashish jarayoni nisbatan tinchroq va tezroq o‘tadi.

Matematikalashtirishning ikkinchi bosqichi matematik modellarni abstrakt obyektlar sifatida o‘rganishdir. Ushbu maqsadda matematikaning yaratilgan va maxsus qurilgan vositalari qo‘llaniladi. Hozirgi paytda matematik modellarni o‘rganish uchun hisoblash vositalari - kompyuterlar va sonli usullar katta imkon yaratib beradi.

Matematikani amaliy tadqiqotlarda qo‘llashda uchinchi bosqich interpretatsiya-matematik chetlashishlarga aniq bir amaliy mazmun kiritish bilan tavsiflanadi. Amaliy matematik modellashtirish bo‘yicha mutaxassis amaliy sohadagi mutaxassislar bilan yuzma-yuz ishlash paytida matematik chetlashishlar ortida har doim aniq bir amaliy mazmunni ko‘radi.

Matematik modellar sof matematik an’analari bo‘yicha o‘rganilishi mumkin. Bunday holatda matematik modellar amaliy mazmun bilan hech qanday aloqasiz, matematikada qabul qilingan qat’iylik darajasi bo‘yicha o‘rganiladi. Bu esa ularga mukammallik va zaruriy umumiylikni ta’minlaydi. Bu yerda yirik matematiklar - D.Gilbert, A.M.Lyapunov va boshqalarning fikriga yondashish o‘rinli. Mazkur nuqtai nazar quyidagiga olib keladi.

-amaliy muammoni matematik jihatdan sharhlab bo‘lgach sof matematika darajasida ko‘rib chiqish kerak. Matematik modellarni bevosita o‘rganish matematikaning rivojlanishiga eng katta turtki hisoblanadi.

-matematik modellashtirishning evristik ahamiyati shunda namoyon bo‘ladiki, unda natural tajriba o‘rniga matematik tajriba o‘tkaziladi. O‘rganilayotgan obyektga u yoki bu ta’sirni o‘rganish o‘rniga matematik model parametrik jihatdan o‘rganiladi. Yechimning u yoki bu parametrga bog‘liqligi aniqlanadi. Bunday tajriba naturallikni to‘ldirib, hodisa yoki jarayonni chuqurroq o‘rganishga imkoniyat beradi.

Elektron hisoblash mashinalarining paydo bo‘lishi, hisoblash matematikasining tez sur’atlar bilan rivojlanishi, hisoblash texnikasining turmushimizda keng qo‘llanilishi matematik modellashtirish imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytirdi.

Matematikaning yangi imkoniyatlari. Kompyuterlar va hisoblash vositalari ilgarilari o‘rganish imkoniyati bo‘lmagan masalalarni ma’lum bir aniqlikda va deyarli kam vaqt ichida yechishga, yirik ilmiy-texnik loyihalarni ishlab chiqishga imkon berdi.

Kosmik kemalarni uchirishda va boshqarishda, foydali qazilmalarni seysmik tekshirish natijasida to‘plangan ma’lumotlarni qayta ishlashda kompyuterlardan foydalanish, samolyotning haqiqiy konfiguratsiyasi aerodinamikasini sonli modellashtirish bunga misol bo‘la oladi. Sof matematikada isbotlovchi hisoblashlarni bajarish, to‘rtta bo‘yoqqa doir mashhur muammoda ham kompyuterlar o‘zining o‘rnini topdi.

Amaliy muammolarni nazariy o‘rgangan holda hisoblash vositalaridan keng foydalanishga asoslangan yangi ilmiy sohalar, yo‘nalishlar tez sur’atlar bilan rivojlanmoqda. Bu borada, avvalo, hisoblash fizikasini, hisoblash gidrodinamikasini, hisoblash geometriyasini, hisoblash algebrasini, hisoblash issiqlik fizikasini qayd etib o‘tamiz.

Matematik modellarni o‘rganish deganda, avvalo, matematik modellarni sifatli o‘rganish hamda aniq yoki taqribiy yechimni olish nazarda tutiladi. Kompyuter nafaqat taqribiy yechimlarni sonli usullarda olishga, balki matematik modellarni sifatli o‘rganishga imkon beradi.

Matematik modellarni o‘rganishning analitik usullari. Sifatli tadqiqot masalani o‘lchamli tahlil etishdan boshlanadi. Masalani o‘lchovsiz ko‘rinishga keltirish uning aniqlovchi o‘zgaruvchilari sonini qisqartirishga imkon beradi. Kichik yoki katta o‘lchovsiz parametrlarni ajratish bir qator holatlarda joriy matematik modellarni sezilarli darajada soddalashtirishga, uni yechishning sonli usullarini ishlab chiqarishda masalaning xususiyatlarini hisobga olish imkonini yaratadi.

Matematik modelning o‘zi ancha murakkab, chiziqli bo‘lmasligi mumkin. Buning natijasida uni amaliy matematikaning an’anaviy usullari yordamida sifatli o‘rganib bo‘lmaydi. Aynan shuning uchun ko‘p hollarda anchagina sodda, lekin joriy matematik modelga nisbatan mazmunliroq masalada sifatli tadqiqot o‘tkaziladi. Bunday hollarda asosiy modelning soddalashtirilgan masalalari (model uchun model) to‘g‘risida so‘z yuritish lozim.

Matematik modellarni sifatli o‘rganishda korrektlilik muammolariga katta e’tibor qaratiladi. Avvalo, yechimning mavjudlilik masalasi ko‘riladi. Unga mos bo‘lgan qat’iy natijalar (mavjudlilik teoremasi) matematik modelning korrektliligiga kafolat beradi. Bundan tashqari, mavjudlilik teoremalarining konstruktivlik isbotlari qo‘yilgan masalani taqribiy yechish usullariga asos qilib olinishi mumkin.

Amaliy matematik modellashtirishda kiruvchi ma’lumotlarning nisbatan kichik chetlanishlarida yechimning turg‘unlik masalasi muhim ahamiyat kasb etadi. Turg‘unmaslik (kichik chetlanishlarda yechimning cheksiz ortib ketishi) teskari masalalar uchun xarakterli bo‘lib, taqribiy yechimni olishda hisobga olinishi kerak.

Yechimning ko‘pligi, yagona emasligi chiziqli bo‘lmagan matematik modellar uchun xos bo‘lishi mumkin. Matematik modellarni sifatli o‘rganishda tarmoqlanish nuqtalari, yechimlarning bifurkatsiyasi, zaruriy yechimning ajratib ko‘rsatilish masalalari o‘rganiladi.

Matematik modellarning har xil turlari uchun sifatli o‘rganish usullari bir xil to‘liqlikda ishlab chiqilmagan. Sifatli usullar eng katta natijalarni keltirgan modellar ichida sodda differensial tenglamalarni qayd etib o‘tamiz. Xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida sifatli usullar qo‘llaniladi, lekin unchalik katta darajada emas. Misol sifatida xususiy hosilali tenglamalarga asoslangan matematik modellarni sifatli o‘rganishga imkon beruvchi ikkinchi tartibli parabolik hamda elleptik tenglamalarning maksimum tamoyilini qayd etib o‘tish mumkin.

Aniq yoki taqribiy yechim analitik hamda sonli usullar bilan topiladi. Bunga aloqador ravishda analitik usullarning klassik misollari orasida o‘zgaruvchilarni bo‘lish, matematik fizikaning chiziqli masalalarini integral almashtirish usullarini ajratib ko‘rsatamiz.

Chiziqli bo‘lmagan matematik modellar uchun chiziqlashtirish usullari, chetlanish usullarining har xil variantlari muhim ahamiyat kasb etadi. Chetlashishlar nazariyasi ajratilgan kichik parametr bo‘yicha asimptotik yoyishlarga asoslanadi. Bu usullarga, ularning cheklanganligiga qaramay, singulyar chetlashish masalalarini ko‘rib chiqishga alohida e’tibor qaratiladi.

Chiziqli bo‘lmagan yechimning sifatli xatti - harakati ma’lum bir xususiy yechimlar bilan almashtirilishi mumkin. Chiziqli bo‘lmagan masalalarning xususiy yechimlarini qidirish avtomodelli o‘zgaruvchilardan foydalanishga, matematik model zamirida yotgan tenglamalarni guruhli tahlil etish natijalariga asoslanadi.

Murakkab, ko‘p parametrli modellar kompyuterda sonli usullar bilan o‘rganilishi mumkin. Analitik yechimdan farqli o‘laroq (u yechimning masalaning u yoki bu shartiga parametrli bog‘liqligini ko‘rsatadi), sonli usulda u yoki bu parametr o‘zgargan paytda masalani ko‘p marta yechishga to‘g‘ri keladi. Lekin sonli yechim analitik yechimi bo‘lmagan masalalar uchun ham olinishi mumkin.

Kompyuterlardan foydalanish. Endilikda matematik modellashtirishda kompyuterlarni qo‘llashning asosiy tafsilotiga o‘tamiz. Biz masalaning taqribiy yechimini olishda hisoblash vositalaridan foydalanishga e’tibor qaratamiz. Matematik modellarni sifatli o‘rganish bosqichida, modelli masalalarning analitik yechimini topishda kompyuterlardan foydalanish imkoniyatlarini ham qayd etib o‘tish mumkin. Avtomodelli o‘zgaruvchini ajratishda xususiy hosilali tenglamalarga oid joriy masala, misol uchun sodda differensial tenglamaga keltiriladi, o‘lcham pasaytiriladi. Tenglamaning umumiy yechimi zamonaviy matematik paketlarda tasvirlangan kompyuterdagi analitik hisoblash tizimlaridan foydalanish asosida topiladi.

Matematik modellashtirishda kompyuterlarni qo‘llash bo‘yicha kamida ikkita bosqich, ikkita darajani ajratib ko‘rsatish mumkin. Birinchisi, nisbatan sodda matematik modellarni o‘rganish bilan tavsiflanadi. Kompyuterlarni qo‘llashning ushbu bosqichida hisoblash vositalari amaliy matematikaning boshqa usullari bilan bir qatorda ishlatiladi.

Matematik modellashtirishda kompyuterlarni qo‘llashning ajratib ko‘rsatilgan bosqichi «***buyurtmachi (nazariyotchi) – bajaruvchi (amaliy matematika)***» shartli zanjiri bilan izohlanadi. Buyurtmachi masalani qo‘yadi, natijalarni tahlil qiladi, bajaruvchi esa kompyuterlarni qo‘llagan holda masalaning yechimini ta’minlaydi. Bu holatda ma’lum bir sondagi kiruvchi ma’lumotli aniq bir masalani anchagina tor yechish to‘g‘risida so‘z yuritiladi.

Amaliy matematik modellashtirishda kompyuterlarni qo‘llashning ushbu bosqichi uchun R.Xemmingning «Hisoblash maqsadi son emas, anglashdir» shiori xarakterlidir. U ko‘proq sifatli tahlilni qadrlaydigan buyurtmachi-nazariyotchining ishlash an’analarini aks ettiradi. Ilmiy tadqiqotlar va ishlab chiqarishning zamonaviy bosqichi uchun anglashning o‘zi kamlik qiladi. Tajriba haqiqiy tarkibga chiqishi uchun aniq sonli bog‘liqliklar va tavsiflar talab etiladi.

Kompyuterlarni qo‘llashning ikkinchi bosqichi murakkab chiziqli bo‘lmagan modellarni o‘rganish bilan xarakterlanadi. Bunday sharoitlarda hisoblash vositalari asosiy, mutloq ustivor bo‘lib qoladi. Amaliy matematik modellashtirishning an’anaviy usullari yordamchi, xizmat ko‘rsatuvchi rolni bajaradi (juda ham soddalashgan ko‘rinishdagi model masalalar, hisoblash algoritmlarini sinovdan o‘tkazish kabi masalani sifatli o‘rganish).

Murakkab matematik masalalarni sonli usullar hamda kompyuter yordamida o‘rganish imkoniyati ilmiy tadqiqotlar metodologiyasini yangi nuqtai nazardan o‘rganishga imkon beradi. Tezkor kompyuterlar yuqori samarali hisoblash algoritmlari, zamonaviy dasturiy ta’minot hozirgi vaqtda nazariy hamda amaliy tadqiqotlarni o‘z ichiga olgan hisoblash tajribasining umumiy texnologiyasi doirasida ilmiy tadqiqotlarni tashkil etish imkonini beradi.

Tajribaviy ma’lumotlarni qayta ishlash. Amaliyotchi o‘zining tadqiqoti bo‘yicha umumiy sxemasida o‘rganilayotgan obyektga ta’sir o‘tkazadi, ushbu ta’sir natijalari to‘g‘risida ma’lumot oladi va uni qayta ishlaydi. Bu ma’lumotlar o‘lchovning tasodifiy xatoliklari bilan cheklangan. Shu bois tajribaviy ma’lumotlarni birinchi marta qayta ishlashda asosiy matematik apparat ehtimollar nazariyasi hamda matematik statistikaga asoslanadi. Tajribaviy tadqiqotlar tajriba paytida olingan ma’lumotlarni saqlashga va qayta ishlashga imkon beruvchi o‘lchov-hisoblash komplekslari yordamida o‘tkaziladi.

Har bir amaliy tadqiqotda sinov ma’lumotlari statistik jihatdan qayta ishlanadi. Alohida omillarning ta’sirini sonli baholash tajribaviy ma’lumotlarni u yoki bu aniqlikda interpolyatsiyalaydigan emperik bog‘liklarni qurishda bilinadi. Bunday holda mazmunli matematik modellar umuman bo‘lmagan approksimatsiyali matematik modellardan foydalanish to‘g‘risida gapirish mumkin. U yoki bu masalani yechish uchun o‘tkaziladigan tajribalar soni va sharti tajribani rejalashtirish bosqichida tanlanadi. Bu yerda muqobil tajriba matematik nazariyasi, tajribani rejalashtirish nazariyasining natijalari jalb qilinadi

Uskunaning matematik modeli. Tajribaviy tadqiqotlarning zamonaviy rivojlanish bosqichi mukammal uskunalarning keng qamrovda qo‘llanilishi bilan izohlanadi. Uskunalarning o‘zi o‘rganilayotgan hodisa yoki jarayonga chetlanishlar kiritadi. Bunday xatoliklardan qutulish uchun uskunaning matematik modeli quriladi.

Tajribalarni o‘tkazish paytida ikkita mutlaqo turli holatni nazarda tutish kerak. Ulardan birinchisi o‘rganilayotgan hodisa yoki obyekt uchun nazariy ta’rif, matematik model yo‘q bo‘lib, keyinchalik matematik ta’rif berish maqsadida tajribaviy materialni to‘plash masalasining qo‘yilishi bilan bog‘liq. Bu holda matematik usullar ma’lumotlarni saqlash va qayta ishlash, xususan emperik bog‘liqliklarni o‘rnatish uchun qo‘llaniladi.

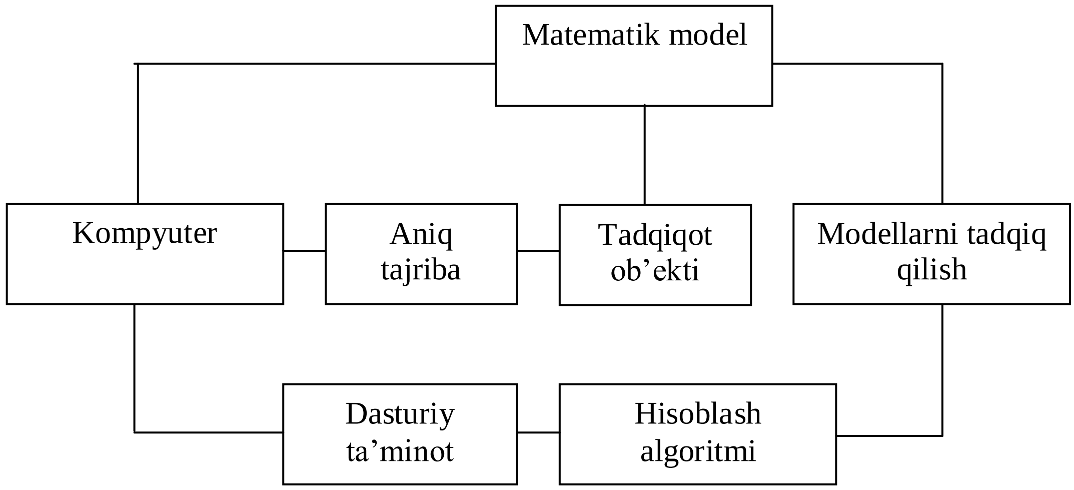
Approksimatsiyali matematik modellarni qurishda emperik formulalarning parametrlarini aniqlash, formulaning o‘zini moslashtirish holati tabiiydir. Tajribaviy ma’lumotlar to‘plamidan approksimatsiyali modellarning parametrlarini shunday tanlash kerak-ki, natijada tajribaviy ma’lumotlar katta aniqlikda ta’riflanishi mumkin bo‘lsin. Bunda biz minimallashtirish masalalarini taqribiy yechish zaruriyatiga duch kelamiz.

Tajribalarning ikkinchi sinfi o‘rganilayotgan obyektning nazariy ta’rifi berilgan sharoitda o‘tkaziladi. Matematik model tarkibining aniq va modelning parametrlarini aniqlash masalasi qo‘yiladi. Naturali tajribaning o‘zi obyektning u yoki bu xususiyatini aniqlashga, obyektning matematik modeliga aniqlik kiritishga qaratilgan.

Bunday tadqiqotlarning tajribaviy ma’lumotlarini qayta ishlashda ko‘pincha teskari masalalar bilan ish tutishga to‘g‘ri keladi. Bunday masalalar klassik nuqtai nazardan to‘liq bo‘lmasligi, shuning uchun sonli tadqiqotni o‘tkazish uchun qiyin bo‘lishi mumkin. Tajribaviy tadqiqotlarning ma’lumotlarini qayta ishlash va interpolyatsiyalash bosqichida matematik modellarning turli xil sinflarini o‘zida mujassamlashtirgan hisoblash vositalari keng qamrovda qo‘llanilmoqda.

Hisoblash tajribasi. Nazariy va tajribaviy tadqiqotlarning avtonomik darajasi yuqori hisoblanadi. Fundamental modellar aniq, tekshirilgan sharoitda nazariy hamda tajribaviy tadqiqotlarning mustahkam koordinatsiyalashuvi va aloqasiga oid masalasi qo‘yilishi mumkin.

Gap ilmiy tadqiqotlarning birlashtiruvchi yangi texnologiyasi bo‘lgan matematik modellashtirish hamda hisoblash tajribasi to‘g‘risida boradi (1.2. rasm).



1.2-rasm. Hisoblash tajribasining umumiy sxemasi

Hisoblash tajribasining asosiy bosqichlari. Avvalo, hisoblash tajribasining umumiy sxemasini bayon etamiz, so‘ngra uning asosiy bosqichlariga qisqacha ta’rif keltirib o‘tamiz. Hisoblash tajribasini tor ma’noda, o‘rganilayotgan obyektning matematik modellarini hisoblash vositalari yordamida yaratish va o‘rganish deb tushunib, unga asos qilib «***model-algoritm-dastur***» uchligini ajratib ko‘rsatish mumkin.

Hisoblash tajribasining keng metodologik mazmuni sifatida ilmiy tadqiqotlarning yangi texnologiyasi tushuniladi.

O‘rganilayotgan obyekt uchun, avvalo, matematik model quriladi. U ma’lum fundamental modellarga asoslanadi. Hisoblash tajribasi o‘z mazmuniga ko‘ra bir-biriga yaqin modellar guruhi o‘rganilishini nazarda tutadi. Avvalo, o‘rganilayotgan jarayonlar ta’rifi, tajribaviy ma’lumotlarga yaqinlik nuqtai nazariga ko‘ra anchagina mazmunli, hamda to‘liq, lekin sodda model quriladi.

Hisoblash tajribasining keyingi sikllarida modelga aniqlik kiritiladi, yangi omillar hisobga olinadi va h.k. Shuning uchun biz har doim haqiqatni u yoki bu aniqlikda ta’riflovchi matematik modellarning tartiblangan majmui to‘g‘risida gapirishimiz mumkin. Nisbatan sodda model doirasida ham tajriba bilan hamohanglikni saqlash kerak. Aynan shu, oxir oqibatda, hisoblash tajribasining maqsadi bo‘ladi.

Matematik model amaliy matematikaning an’anaviy usullarida qurib bo‘lganidan so‘ng matematik model oraliq tadqiqotdan o‘tkaziladi. Hisoblash tajribasining mohiyati kompyuterda matematik modellarni sonli usullarda o‘rganishdan iborat. Bu yerda faqatgina matematik modelni oraliq sinovdan o‘tkazish to‘g‘risida gap boradi. Bu bosqichda mavjud aniqlikda, matematikada qabul qilingan qat’iylik darajasida tor matematik mazmunli to‘liq masalaning korrektliligi hal etiladi.

Matematik modelni oraliq sinovdan o‘tkazishning asosiy mazmuni nisbatan sodda (model), masalan, ularni ajratib har tomonlama o‘rganishdan iborat. Chunki to‘la matematik model juda ham murakkab. Hisoblash tajribasi siklidagi model matematik masalalari ikki maqsadda quriladi: birinchidan, masalani to‘la sifatli o‘rganish, ikkinchidan, masalani to‘la taqribiy yechishning hisoblash algoritmlarini tekshirish, sinovdan o‘tkazish uchun quriladi.

Modelli (soddalashtirilgan) masalalarni sifatli o‘rganishda yechimning barqarorlik masalalari o‘rganiladi. Chiziqli bo‘lmagan masalalarning aniq xususiy yechimlari, asimptotik yechimlari ham katta ahamiyatga ega. Shunday qilib bu yerda muammoni nazariy jihatdan o‘rganishning oddiy matematik arsenali qo‘llaniladi.

Hisoblash tajribasining keyingi bosqichida diskret masalasi hamda ushbu diskret masalani yechishning sonli usuli quriladi. Matematik model o‘z ichiga xususiy hosilali tenglamalarni (matematik modelning yadrosi), differensial hamda algebraik tenglamalar tizimini oladi. Hisoblash algoritmlarini qurish hamda o‘rganish hisoblash matematikasining ustivorligidir.

Amaliy matematik modellashtirishda ilmiy tadqiqotlarning ikkita tendentsiyasi kuzatiladi. Sof matematika an’analari doirasida ayrim tadqiqotchilar diskret modellarni hamda ularni o‘rganishning sonli usullarini, ularning amaliy matematik modellashtirishini, amaliy muammoni kompyuterda hal etish bilan bog‘liq bo‘lmagan vaziyatda o‘rganadi. Diskret masala yechimining mavjudligiga qat’iy isbotlar keltiriladi, taxminiy yechim xatoligining nazariy baholanishi olinadi, iteratsion jarayonning yaqinlashishi tekshiriladi. Bu avvalo, asosiy masalani yechish usullarini, tadqiqotchining hisoblash arsenalini ishlab chiqishda o‘rinlidir.

Hisoblash matematikasidagi amaliy yo‘nalish vakillari «amaliy yaqinlashish», «haqiqiy to‘rlar» kabi noqat’iy tushunchalar xos bo‘lgan nisbatan boshqacha qat’iylik bosqichida (fizik) ishlaydi. Amaliy matematik modellashtirishda to‘la qat’iylikka bo‘lgan shartsiz talab hech qanday yaxshilikka olib kelmaydi.

Hisoblash tajribasi unga adekvat bo‘lgan dasturiy ta’minotni yaratish paytida hisobga olish kerak bo‘lgan ikkita xususiyat bilan izohlanadi. Bu belgilangan matematik model doirasida hisoblashlarning ko‘p variantliligi va ko‘p modelliligi bilan izohlanadi. Mazkur vaziyatda kompyuterdagi bitta dastur bilan cheklanib qola olmaymiz, boshqa masalalarni yechish uchun uni osonlikcha almashtirish imkoniga ega bo‘lish lozim.

Hisoblash tajribasining dasturiy ta’minoti amaliy dasturlarning majmui hamda paketlaridan foydalanishga asoslanadi. Dasturlar majmui bitta sohadan olingan matematik tabiatiga ko‘ra yaqin bo‘lgan masalalarni yechishga mo‘ljallangan. U o‘z ichiga ishchi dasturlar birlashtirilgan dasturiy modullar (katta yoki kichik darajada mustaqil) kutubxonasini oladi. Amaliy dasturlar majmuida dasturlar modullardan qo‘lda yig‘iladi.

Amaliy dasturlar paketlarida yig‘ish uchun kompyuterning tizimli vositalari qo‘llaniladi. Bu ushbu jarayonni sezilarli darajada avtomatlashtirishga imkon beradi. Hisoblash tajribasi doirasida masalalarni yechish texnologiyasi sifatida qaraladigan amaliy dasturlar paketlari to‘plangan dasturiy mahsulotdan samarali foydalanishga, dasturchilarning mehnat samaradorligini ko‘tarishga imkon beradi.

Hisoblash tajribasining asosiy xususiyatlari ob’yektga mo‘ljallangan dasturlashda hamda zamonaviy dasturlash tillarida eng ko‘p hisobga olinadi.

So‘ngra hisoblash tajribasining siklida masalaning u yoki bu parametrlari o‘zgarganda kompyuterlarda bir qator hisoblashlar o‘tkaziladi. Olingan ma’lumotlar amaliy sohadagi mutaxassislar ishtirokida tahlil etiladi hamda interpretatsiyalanadi. Natijalar mavjud nazariy tasavvurlar hamda tajribaviy ma’lumotlarni hisobga olgan holda qayta ishlanadi. Bu ishlar klassik tajribaning asl an’analari doirasida o‘tkaziladi. Tajribaviy ma’lumotlar jadval, grafik, displey, kinofilmlardan olingan fotosuratlar ko‘rinishida taqdim etiladi.

Lekin shuni har doim nazarda tutish kerakki, hisoblash tajribasida olingan natijalarni detallashtirish, qayta ishlanadigan ma’lumotning hajmi bevosita kattaroq. Hisoblash tajribasida ma’lumotni saqlash va qayta ishlash muammolari tobora katta ahamiyat kasb etmoqda.

Natijalarni tahlil etish bosqichida matematik model, uning hisoblash ishlari yaxshi tanlangan yoki yo‘qligi ravshan bo‘ladi. Zarur bo‘lsa model hamda sonli usullarga aniqlik kiritiladi va hisoblash tajribasining butun sikli takrorlanadi, ya’ni haqiqatni anglashning qayta bosqichi o‘tkaziladi.

Ilmiy tadqiqotlar yangi texnologiyasining asosiy xususiyatlari. Hisoblash tajribasini tavsiflar ekanmiz, ushbu texnologiyani boshqa ob’yektlarni o‘rganishga osonlik bilan ko‘chirishga imkon beruvchi mukammalligini qayd etish juda ham muhim. Ushbu vaziyat umuman olganda matematik modellashtirish uchun xos xususiyat. Chunki ko‘pgina hodisa va jarayonlar bir xil matematik modellarga ega.

Hisoblash tajribasining qayd etilgan ko‘p maqsadli yo‘nalishi hamda metodologik mukammalligi matematik modellashtirishning to‘plangan tajribasi, hisoblash algoritmlari banki va dasturiy ta’minot asosida yangi masalalarni tez hamda samarali yechishga imkon beradi.

Hisoblash tajribasining ikkinchi xususiyati uning sohalararo xarakteridir. Biz amaliy matematik umumiy maqsadga tezroq erishish maqsadida nazariyotchi hamda tajribachini birlashtirgani to‘g‘risida gapirib, bu vaziyatni har doim qayd etib turamiz. Hisoblash tajribasiga aqliy mehnatning umumiy shakli ko‘rinishida qaralishi mumkin. Uning umumiy qismida nazariyotchi ham, tajribachi ham, amaliy matematik va dasturchi ham ishlaydi.

Hisoblash tajribasining amaliy tajribaga nisbatan quyidagi farqli xislatlarini hamda ustuvorliklarini qayd etish mumkin.

Birinchidan, hisoblash tajribasi naturali tajribani amalga oshirish imkon bo‘lmagan paytda ham o‘tkazilishi mumkin. Bunday holat keng ko‘lamdagi ekologik tajribalarda kuzatiladi. Masalan, atom qurolini ishlatganda global iqlimiy o‘zgarishlarni modellashtirishni qayd etaylik. Yoki termoyadroviy parametrlarda jarayonlarni o‘rganish (atom bombasini portlatish)dan boshqa ularga erishish yo‘li yo‘q.

Ikkinchidan, hisoblash tajribasidan foydalanishda ishlab chiqarish narxi pasayadi hamda vaqt tejaladi. Buning sababi - bajariladigan hisoblashlarning ko‘p variantliligi, u yoki bu haqiqiy sharoitlarning tasvirlanishi uchun ishlab chiqarilgan zamonaviy matematik modellarning soddaligidir.

Tassavur etish uchun kompyuterlardagi hisoblashlar ko‘p marta foydalanishga mo‘ljallangan ***«Shuttle»*** kosmik kemasini yaratish paytida aerodinamik trubalarda o‘tkaziladigan tajribalarning o‘rnini bosganini qayd etib o‘tish mumkin. Yangi mahsulotlar hamda texnologiyalarni yaratish og‘ir, qimmat va uzoq vaqt mobaynida etkaziladigan qurilmalar bilan bog‘liq. Hisoblash bosqichlari aynan shu bosqichda vaqt hamda pulni tejash imkonini beradi.

Tajribaviy tadqiqotlar ma’lumotlari matematik modellarni mukamallashtirish, masalaning taqribiy yechimi aniqligini nazorat qilish uchun qo‘llaniladi. Bunday tadqiqot an’analarida biz matematik modelga ta’sir o‘tkazamiz hamda natijalarni qayta ishlaymiz. Ayrim hollardagina shaxsiy «uskunamiz» aniqligini etalon bilan solishtirib tekshiramiz. Nazariy tadqiqot an'anasiga ko'ra, obyekt bilan emas, uning matematik modeli bilan ish tutamiz. Ushbu umumiy xislatlarni hisoblash interpretatsiyasining foydasiga qo'shimcha argumentlar, keng ma'noda esa ilmiy tadqiqotlarning integratsiyalashuvchi texnologiyalari deb qabul qilamiz.

Hisoblash tajribasini ilmiy tadqiqotlarning yangi texnologiyasi, ustuvorlikda esa ilmiy tadqiqotlar rivojining mantiqi, tendentsiyasi sifatida qabul qilish kerak. Hozirgi paytda u ko'pincha tor ma'noda, «buyurtmachi- amaliy matematik» zanjiri bo'yicha amalga oshiriladi. Ilmiy tadqiqotlarning umumiy texnologiyasida tajribaviy hamda nazariy tadqiqotlarning tor bog'lanishi hozirgi vaqtning yorqin tendentsiyasidir. Ushbu metodologiyaning asosiy tuguni matematik modellashtirish hamda hisoblash eksperimenti sanaladi.

Fan va texnologiyada hisoblash tajribasi. Matematik modellashtirish qo'llaniladigan asosiy sohalarining qisqacha tavsiflariga to'xtalib o'taylik. Hisoblash tajribasi turlarining qo'llanilishi hamda ularda qo'llaniladigan matematik modellarning turiga qarab sinflarga ajralishiga asosiy e'tiborni qaratamiz. Qayd etilgan o'zaro bog'langan guruhlanish tadqiqotchini matematik modelni o'rganuvchi adekvat matematik modelni yaratishga yo'naltiradi. Bunday metodologik muammo ko'pincha integratsion jarayonlarni amaliy matematikaning o'zida ushlab qoladi. Bu borada matematik modellashtirishning murakkabligi haqida gapirmasa ham bo'ladi.

Hisoblash tajribasining qo'llanilish sohalari. Matematik modellashtirish odatda nazariy tadqiqotlarning darajasi (boshqa so'z bilan aytganda matematikalashtirish darajasi) eng yuqori bo'lgan fundamental fanlar: mexanika va fizikaning yadrolarida rivojlanadi. Bunday fanlarda zamonaviy matematik modellar, shu jumladan sonlilarning qo'llanilishi nisbatan tinch kechadi. Mexanika uchun singib ketgan matematik modellar harakterli bo'lib, asosiy masalalar banki mavjud. Shuning uchun bu o'rin asosiy e'tibor hisoblash algoritmlarini yaratishga, anchayin egiluvchan dasturiy ta'minotga qaratiladi. Biologiya hamda kimyoda matematik modellashtirish bo'yicha ish fronti hisoblash tajribasining ***«model-algoritm-dastur»*** uchligining birinchi qismida olib boriladi. Har xil darajada, har xil bosqichda bo'lsa ham matematik usullarni fundamental fanlarda qo'llash masalasi hal etiladi.

Muhandis va texnologning matematik arsenali unchalik mukammal emas. Texnikada hozirgi vaqtgacha ilmiy bilimlarni o'rtacha qo'llash yo'li an'anaviy hisoblanadi. Birinchi galda yangi g'oyalar fundamental fanlarning yutug‘i sanaladi. Faqatgina shundan keyin u yoki bu amaliy sohada o‘zgartiriladi, oxirida esa aniq bir texnik loyiha va ishlab chiqarishga joriy etish uchun ruxsat oladi. Bu avvalo, nazariy tadqiqotlarga zamonaviy matematik usullarni qo‘llash, matematik modellashtirish va hisoblash tajribasiga taalluqli. G‘oyani aniq ilmiy-texnik yechimga, yangi texnologiyaga aylantirish yuli juda ham uzoq va ko‘p xarajatli.

Zamonaviy sharoitlarda matematik usullarning fan va texnikada bevosita qo‘llanilishini ta’minlash zarur. Texnologik jarayonlarni matematik modellashtirish katta foydadan, texnologiya o‘zining yangi sifatli bosqichga o‘tishidan darak beradi. Matematik modellashtirish hamda hisoblash tajribasini qo‘llash samarasi ko‘proq texnika va sanoatda hamda texnologiyada kuzatiladi.

Ilmiy-texnik taraqqiyotni aniqlovchi sohalar, eng avvalo mikroelektronika alohida e’tiborga loyiq. Bunday hollarda sonli modellashtirish o‘zining texnik asosini – kompyuterlarning ortishini ta’minlaydi.

Hisoblash tajribasini qo‘llashning yana bir bosqichini qayd etib o‘taylik. Hozirgi paytda dunyo jamiyati yirik masshtabli loyihalarning ekologik oqibatlari, ishlaydigan qurilmalar va loyihalanadigan obyektlarning funksional xavfsizligini ta’minlash borasida asosli ravishda bosh qotirmoqda. Hisoblash tajribasi adekvat modellarga asoslanib faraz qilinadigan hamda tasavvurga sig‘maydigan sharoitlarda ekologik xavfli obyektning modelini sinovdan o‘tkazishga, xavfsiz ish sharoitini ta’minlash buyicha amaliy tavsiyalarni berish, hatto bunday ishning kafolatini berish imkonini yaratadi.

Hisoblash tajribasining har xil turlari. Yangi jarayon yoki hodisani o‘rganish paytidagi sodda yondashuv u yoki bu matematik modelni qurish, masalaning u yoki bu parametrlari o‘zgarganda hisoblashlarni o‘tkazish bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunda biz «qidiruv hisoblash tajribasi»ga ega bo‘lamiz. Agar matematik modelning asosini xususiy hosilali tenglamalar tashkil etsa, hisoblash tajribasining siklida matematik fizikaning to‘g‘ri masalasi o‘rganiladi hamda echiladi.

Qidiruv hisoblash tajribalarini o‘tkazish natijasida kuzatilayotgan hodisalariga ta’rif beriladi, obyektning haqiqiy sharoitlarda erishib bo‘lmaydigan holatlardagi hatti - harakati bashorat qilinadi. Hisoblash tajribasining bunday turi fundamental fanlarda nazariy tadqiqotlarni o‘tkazish uchun xos xususiyat.

Boshqa tomondan, texnologik jarayonlarni matematik modellashtirishda ***«muqobil hisoblash tajribasi»*** tanlanishi mumkin. Uning uchun xarajatlarni kamaytirish, tarkibni soddalashtirish bo‘yicha muqobillashtirish masalasini yechish xarakterlidir. Bayon etilgan matematik model uchun muqobil boshqaruv va muqobillashtirish masalasi qo‘yiladi.

Matematik fizika tenglamalari uchun, masalan, chegaraviy shartlari mos funksionalni (sifat funksionali) minimallashtiruvchi qilib tanlanadigan chegaraviy muqobil boshqaruv masalalar xarakterlidir. Bunda boshqaruv parametrlarini tanlash maqsadida ko‘p variantli hisoblashlar amalga oshiriladi. Natijada u yoki bu ma’noda muqobil yechimga ega bo‘linadi.

Natural tajribalar ma’lumotlarini qayta ishlashda ***«tashxis hisoblash tajribasi»*** qo‘llaniladi. Qo‘shimcha chegaraviy o‘lchovlarga ko‘ra hodisa yoki jarayonning ichki aloqalari to‘g‘risida xulosa chiqariladi. O‘rganilayotgan jarayonning matematik model tarkibi aniq bo‘lgan sharoitda modelni aniqlashtirish masalasi qo‘yiladi. Masalan, tenglamalarning koeffisientlari topiladi. Tashhisli hisoblash tajribasiga odatda matematik fizikaning teskari masalasi mos qo‘yiladi.

O‘rganilayotgan jarayon yoki hodisaning matematik modeli bo‘lmagan vaziyatga duch kelib qolish holatlari ham kuzatiladi. Bunday holat natural tajriba ma’lumotlarini qayta ishlash uchun xos xususiyat. U holda qayta ishlash «qora quti» rejimida olib boriladi va biz approksimatsiyali modellar bilan ish ko‘riladi. Matematik modellar bo‘lmaganida, kompterlardan keng foydalanish asosida imitatsion modellashtirish amalga oshiriladi.

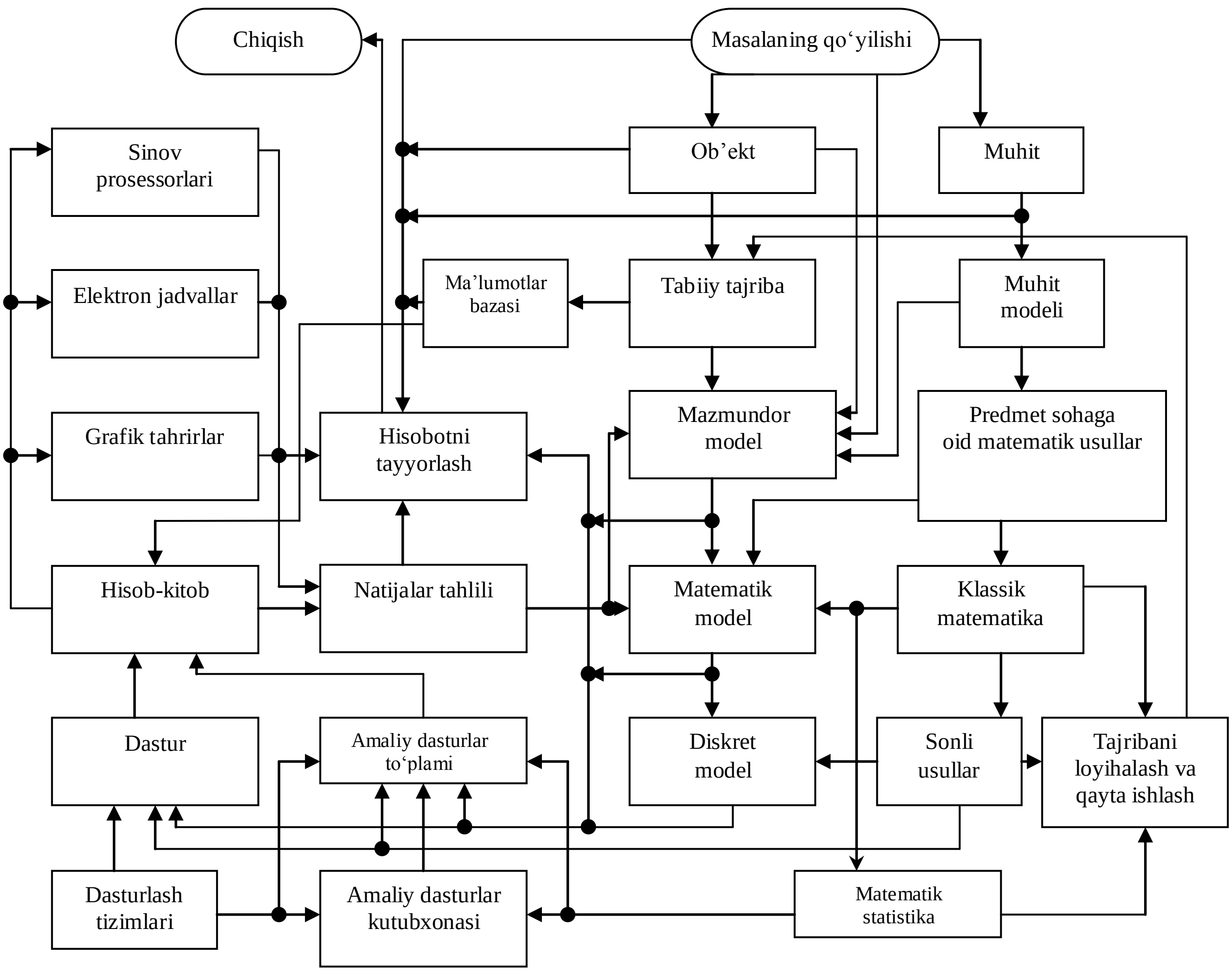
Biz amaliy matematikada yuzaga keladigan holatga umumiy tavsif berishga harakat qildik. Uning zamonaviy bosqichi matematik modelni hisoblash vositalari (kompyuterlar va matematikaning o‘ziga xos apparati-sonli usullar) dan keng foydalanish bilan izohlanadi.

Murakkab matematik modellarni o‘rganish imkoni amaliy - ilmiy tadqiqotlarni tashkil etish, ilmiy tadqiqotlarning yangi metodologiyasi-hisoblash tajribasi doirasida amaliy hamda nazariy tadqiqotlarning uzviy aloqasiga yangicha yondashish yo‘lini ochib berdi. U amaliy matematikaning standart analitik usullarida o‘rganila olmaydigan murakkab amaliy matematik modellardan foydalanish bilan bog‘liq bo‘lgan ilmiy tadqiqotlarning yangi sifatli bosqichiga asoslangan.

Hisoblash tajribasining mazmuni ***«model-algoritm-dastur»*** uchligida to‘la aks etadi. O‘rganilayotgan obyekt uchun kompyuterda sonli usullar bilan o‘rganiladigan matematik model (modellar majmui) quriladi. Matematik modellarni joriy tekshirish uchun amaliy matematikaning an’anaviy usullari qo‘llaniladi. Hisoblash natijalari tahlil etiladi, tajribaviy tadqiqotlar ma’lumotlari bilan tekshiriladi, matematik modellarga aniqlik kiritiladi va h.k.

Hisoblash tajribasining metodologiyasi hayot bizning oldimizga qo‘ygan ilmiy-texnik muammolarni hal etish paytida yuzaga keldi. Jamiyatning axborotlashuv intellektual yadrosi bo‘lgan matematik modellashtirish g‘oyalarini faol qo‘llash tabiiy fanlar hamda ijtimoiy sohalardagi ilmiy tadqiqotlar darajasini oshirishga imkon beradi.

Umuman olganda, matematik modellashtirish murakkab jarayon bo‘lib, mazkur texnologiya bo‘yicha hisoblash tajribasini o‘tkazish 1.3-rasmda keltirilgan.



1.3-rasm. Matematik hisoblash tajribalarini tashkil qilish

1.2. Ilmiy - tadqiqot ishlarini avtomatlashtirishda algoritmik usul

Jarayonlar, hodisalar va obyektlarning tabiatan turli masalalarini kompyuter yordamida yechishning barcha bosqichlarini avtomatlashtirish, ya’ni ilmiy-tadqiqot ishlari va muhandislik hisob-kitoblarini kompyuterli avtomatlashtirish masalasining nazariy asoslari o‘tgan asrning 70-yillarida O‘zRFA akademigi V.Q.Qobulov tomonidan ishlab chiqilgan. Bu nazariya o‘sha vaqtda kibernetikada algoritmik usul deb atalgan. Mazkur nazariyaning intellektual yadrosi quyidagi texnik zanjir bilan aniqlanadi: tajriba – qonunlar – masalalar – model – algoritm – dasturiy ta’minot – hisoblash tajribasi.

Quyida ushbu nazariyani qisqacha bayon etamiz.

Informatika (originalda kibernetika) kelajagini bashoratlab bo‘ladimi? Matematika va astronomiya kabi fanlar ko‘p asrlik tarixga ega va ular ko‘p asrlik g‘oyalar zahirasi asosida to‘plangan. Mavjud zahirani hisobga olgan holda, ekstrapolyatsiya, tajribaviy baholash yo‘li va boshqa misollar orqali bunday fanlarning rivojlanish darajasini bashoratlash mumkin. Informatika fani ham kibernetika kabi o‘ta yosh (atigi 50 yosh). Ulardan deyarli yarmi munozaralar bilan o‘tdi va munozara hozirgi kunda ham davom etmoqda.

Fanimizning nazariy asoslari hamda amaliyotga chiqish yo‘llari to‘g‘risida munozara olib borilmoqda va uning texnik asosi to‘g‘risida fikrlar yuritilmoqda. Ma’lumki, har qanday fan insoniyatning taraqqiy etishi uchun zarur bo‘lgandagina rivojlanadi. Faqatgina mualliflarning o‘zlari uchun kerak bo‘lgan fanning kelajagi yo‘q.

Dunyoning ko‘pgina olimlari sa’y-harakatlari tufayli informatika va kibernetika fanining fundamental asoslari yaratildi. Katta tizimlar, algoritmlar, avtomatlar nazariyasi, matematik mantiq, diskret matematika, matematik dasturlash, axborotlashtirish nazariyasi, obrazlarni aniqlash – informatika va kibernetikaning asosini tashkil etuvchi fanlarning to‘liq bo‘lmagan majmuidir. Bu yerda respublikamiz va sobiq ittifoq olimlarining o‘rni katta.

Informatika va boshqa fanlarning aralashuvi natijasida ko‘pgina aralash fanlar, jumladan, iqtisodiy, texnik, biologik, tibbiy, lingvistik informatika va kibernetikalar shakllandi. Bunday fanlar soni yil sayin ko‘payib bormoqda.

Informatika va kibernetika fanlarining rivojlanishiga zamin yaratgan voqea, bu zamonaviy elektron hisoblash mashinalari (kompyuterlar) va ularning texnik asosi yaratilishi bo‘ldi. Hozir kuchli hisoblash vositalari zamonaviy kompyuterlar mavjud. Kompyuterlar perefiriyali qurilmalar, ma’lumotni kirituvchi va chiqaruvchi zamonaviy vositalar, ya’ni ofis jihozlar bilan to‘ldirilmoqda.

Informatika va kibernetikaning fundamental va amaliy asoslarini ishlab chiqish, uning texnik asosini rivojlantirish avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlari (ABT) ni yaratish masalasini o‘rtaga qo‘ydi. Turli xil «qo‘shimcha»li ABT lari jurnal, ro‘znoma hamda korxona va fan sohalarini ABT lash, texnologik jarayonlarning ABTsi, ilmiy - tadqiqotlarning avtomatlashtirilgan tizimi (ITAT), loyihaviy-konstruktiv ishlarni avtomatlashtirish (LKIA) kabi jiddiy monografik tadqiqotlarning asosiy mavzuiga aylandi. HABT va RABT (hududiy va respublikaviy tizimlar) yurtimizning iqtisodiyotini loyihalashtirish va boshqarishni takomillashtirish bo‘yicha olib borilayotgan ishlarning organik qismi bo‘lib qoldi.

ABT ning yaratilish tarixi uzoq. Kompyuterda alohida bir masalani yechish qachonlardir ulkan yutuq hisoblanib, ABT ning qo‘llanilishi to‘g‘risida tezroq hisobot berishga shoshilardik. Hozirda ABT ixtirochilari va iste’molchilari katta tajriba to‘plagan.

Bularning hammasi, shuningdek, informatika va kibernetikaning ichki ehtiyojlari yangi masalalarni oldinga suradi, yangi g‘oyalarni talab etadi. Hozirda informatika va kibernetika fanlari oldida turgan ulkan o‘zgarishlar to‘g‘risida batafsil so‘z yuritish mumkin.

Ushbu muammolar mazmunini bayon etish uchun kibernetika fanining asosiga qisqacha sayohat qilish lozim.

Kibernetika - hayvonot olami va mashinani boshqarish hamda o‘zaro aloqa to‘g‘risidagi fandir. Bu ta’rif Norbert Viner tomonidan keltirilgan.

Qisqacha aytganda kibernetika - boshqaruv to‘g‘risidagi fan. Jumladan, bunda murakkab tarkibga ega bo‘lgan hamda ma’lum bir qonun tufayli vaqt va fazoda cheklangan katta tizimlar boshqariladi. Bu qonunlar obyektning turiga qarab har xil fanlar tomonidan o‘rganiladi.

Har qanday katta tizim boshqa bir katta tizimning qismidir. Tizim ichida tashqi muhit bilan energiya va modda almashinuvi, hozirgi til bilan aytganda axborot almashinuvi sodir bo‘ladi.

Tizimning funksiyasi hamda tarkibi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarganligi (tizim eskiradi yoki yangilanadi) va tashqi aloqalar doimiy bo‘lmaganligi tufayli boshqarish muammosi yuzaga keladi. Buning uchun obyektni funksionallashtirish jarayonlari to‘g‘risidagi axborotni teskari tartibda yig‘ish hamda boshqaruv signallarini ishlab chiqish uchun boshqa «boshqaruv tizimiga» uzatish kerak. Jumladan, axborot deganda modda va energiya xususiyatlarini obyektiv aks ettirish tushuniladi.

Endilikda yuqorida ta'riflangan kibernetik zanjirga e'tibor qarataylik. Butun zanjir insonning tashqi olamdan axborotni qabul qilish masalalaridan boshlanadi.

Insoniyat hozirda materiya harakatini fazo va vaqtning juda ham kichik kvantida o'rganmoqda. Biz ko'zga ko'rinmaydigan, ushlash «xavfi» bor elektr kattaliklari: volt, amper, va h.k larni taxminan olamiz.

Oxir-oqibat axborotni yig'ish va qayta ishlash inson va jamiyatga amaliy masalalarni yechish uchun kerak bo'ladi. Shuning uchun old qatorga qabul qilish qonunlari, so'ngra ma'lumotni saqlash, kun sayin o'sib boruvchi ma'lumotlar oqimining inson tomonidan «o'zlashtirilishi» ni oshirish masalasi qo'yiladi.

Kibernetika insoniyatni axborot yuklanishidan qutqaradi, shuningdek axborot etishmasligini ham bartaraf etishi mumkin. Kibernetik usullar va vositalardan foydalanish asosidagina axborotning kelish jadalligi bilan uning o'zlashtirilish jadalligi o'rtasida qat'iy munosabat o'rnatish mumkin.

Endilikda kibernetik zanjirning asosiy bo'limi boshqaruv tizimiga qaytaylik, u hozirda amaliy nuqtai nazardan «inson-kompyuter» ko'rinishida tasvirlanadi. Bunday tizimning asosiy vazifasi - axborotni qabul qilish, saqlash, uni qayta ishlash va natijalarni inson uchun qulay bo'lgan ko'rinishda chiqarishdan iborat. Jumladan, axborotni qayta ishlash jarayonida tizimlarni o'rganish va boshqarish masalalari echiladi. Bu boshqaruv tizimlari va boshqaruv zanjirlarini funksionallashtirish qonunlari asosida amalga oshiriladi. Shuning uchun har qanday boshqaruv tizimi (qurilmasi) axborotni saqlash uchun xotiraga (ichki va tashqi), tarkibga ega bo'lishi va uning uchun boshqaruv funsiyasi, ya'ni aniq masalalarni yechish algoritmi berilgan bo'lishi kerak.

Mubolag'asiz shuni qayd etish mumkinki, zamonaviy kibernetikada asosiy e'tibor katta tizimlarni funksionallashtirish qonunlari, boshqaruv strategiyasini aniqlash va boshqaruv tizimlarini (boshqaruv qurilmalari) aniqlashga qaratilgan. Bu jarayonlarning hammasini zamonaviy kompyuterlarni qo'llagan holda avtomatlashtirish "Algoritmlash" g'oyasiga olib keladi.

Chunki, bunday ulkan masalani bitta belgilangan algoritm yordamida echib bo'lmaydi. Bunda algoritmlar tizimi, aniqrog'i insonning aqliy mehnati eng ko'p avtomatlashtiriladigan kibernetikadagi “algoritmlash” deb nomlanuvchi yondashuvga birlashtirilgan algoritmlar to‘plami kerak bo‘ladi.

Ijodiy mehnatni avtomatlashtirish masalasi elektron-hisoblash mashinalari yaratilganidan so‘ng qo‘yildi. Hozirda esa «mashinali inson» tizimlarni yaratish kibernetik masalasiga aylanib bormoqda. Gap inson aqliy mehnatining shakllanayotgan qismini ajratish, uni mantiqiy hamda analitik bog‘lanishlar ko‘rinishida tasvirlash va bunday bog‘lanishlarni tahlil qilishning algoritmlarini tuzish, keyinchalik esa ularni kompyuterda qo‘llash haqida bormoqda.

Bundan ko‘rinib turibdiki, fikrlaydigan insonni «fikrlaydigan» mashina bilan almashtirib bo‘lmaydi. Chunki zamonaviy elektron hisoblash mashinalari inson tomonidan yaratilmoqda. Lekin insonning ijod faoliyati chegaralari juda ham keng. Shuning uchun aqliy mehnatni avtomatlashtirish masalasini lokal algoritmlar yordamida hal etib bo‘lmaydi. Shu bois, butun algoritmik tizim kerak bo‘ladi.

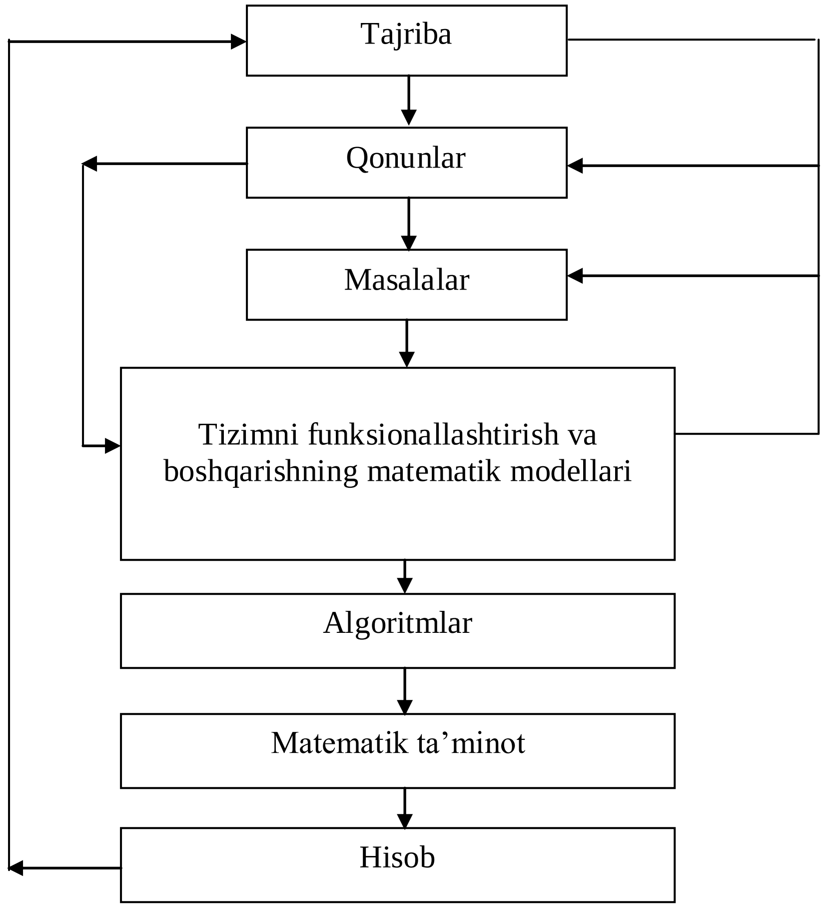
Shunday qilib, insonning ijodiy mehnatini algoritmlash doirasida shakllangan ijodiy masalalarni kompyuterda hal etishning avtomatlashtirilgan tizimlari ishlab chiqiladi.

Boshqaruv algoritmlarini qurishning turli xil obyektlarini o‘rganish jarayoni 1.4 -rasmda ko‘rsatilgan ettita ketma-ket bosqichlarga ajralishi mumkin. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, bu yerda teskari aloqali kibernetik zanjir nazarda tutilmoqda.

Algoritmlashda tajriba keng falsafiy ma’noda tushuniladi. Bu erga monografiyalarda, maqolalar va boshqa manbalarda qayd etilgan, asrlar davomida to‘plangan inson tajribasi hamda laboratoriya va amaliy tajribalar kiradi. Shunday qilib, «tajriba» bosqichida axborot-qidiruv tizimi (axborot banklari) ni yaratish, to‘plash vositalarini ishlab chiqish va amaliyotda qo‘llash bilan bog‘liq tajribalarni keng avtomatlashtirish, tajribaviy ma’lumotlarni qayta ishlash nazarda tutiladi [5, 9].

Inson tajribasi fanning ko‘pgina sohalarida o‘rganiladigan turli xil tizimlarning tabiat va jamiyatdagi funksionallashtirish qonunlarini shaklllantirishga imkon beradi, jumladan, tabiatda evolyutsiya qonunlari, mexanikada aralash muhitlar qonuni, saqlanish qonunlari va h.k.

Algoritmlashda ma’lum qonunlar belgilab olinadi, hamda kompyuter xotirasiga kiritiladi. Yangi qonunlar avtomatlashtirilgan tajribaning natijalari bo‘yicha shakllanadi. Shu yo‘sinda algoritmik usulning qonunlar banki tashkil topadi.



1.4-rasm. Algoritmlashning intellektual yadrosi

Ilmiy hamda muhandislik amaliyotida ko‘plab masalalar yechiladi. Ular amaliyot zaruriyatidan va fanga taalluqli bo‘lgan muammolardan kelib chiqqan holda paydo bo‘ladi. Tajriba asosida masalaning asosiy parametri aniqlangan bo‘lsa, ya’ni masala qo‘yilgan bo‘lsa, u holda omillar banki va asosiy qonunlar banki ma’lumotlariga ko‘ra qo‘yilgan masalani ta’riflovchi matematik bog‘lanishlarni (mantiqiy va tahliliy) kompyuterda chiqarish mumkin. Algebraik, differensial, integral va boshqa turdagi tenglamalar bilan ta’riflanuvchi bunday bog‘lanishlar o‘rganilayotgan jarayonning matematik modeli sanaladi. Shunday qilib $M = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ modellar to‘plami aniqlanadi.

Matematik modellarni chiqarishning avtomatlashuvi «matematik modellar» bosqichida amalga oshiriladi.

Hisoblash matematikasida tenglamalar sinfini taqribiy yechish uchun $A = \{A_1, ..., A_m\}$ algoritmlar to‘plami ishlab chiqilgan. Kompyuterda masalalarni yechishda oldindan algoritmlarning tenglamani yechishga loyiqligini tekshirib ko‘rish kerak. Uning loyiqligi algoritmning yaqinlashish va turg‘unligi isboti bilan bog‘liq. Bunda biror bir modelga algoritmlar qism to‘plami mos qo‘yiladi. Yagona algoritmni tanlash uchun algoritmning muqobillik shartini qo‘yish va bu shartni tekshirish lozim. Bu yerda ta’riflangan muammolar doirasi «algoritmlar» bosqichida yechiladi.

Algoritm tanlagandan so‘ng taqribiy tizimga o‘tish va uni sonli yechish mumkin. Bu masala mantiqiy va arifmetik amallar yordamida hal etiladi va «ta’minot» bosqichini namoyon etadi. Bundan tashqari mazkur bosqichda dasturlash tili tanlanadi va hamma zaruriy dasturlar tuziladi.

Nihoyat, yettinchi bosqich «hisob» inson-mashina ma’nosida tushuniladi va hisob bilan tajriba orasida bog‘lanishni o‘rnatish nazarda tutiladi. Algoritmlash bosqichlari qisqacha shundan iborat.

Yuqoridagi algoritmlash bosqichlari amaliy jihatdan oltita asosiy va ikkita qo‘shimcha, jami sakkizta algoritmik banklar orqali amalga oshiriladi. Asosiy algoritmik banklarga quyidagi banklar kiradi: ma’lumotlar banki (B_1); qonunlar (aksiomalar) banki (B_2); omillar banki (B_3); modellar banki (B_4); algoritmlar banki (B_5). Qo‘shimcha banklarga esa B_0 – masalaning qo‘yilishi (B_0) va operasion bank (B_7)lar kiradi. Ularning o‘zaro aloqasi 1.5-rasmda tasvirlangan.

Har bir asosiy algoritmik bank ikki qismdan – axborot va operatsiyaviy qismdan iborat.

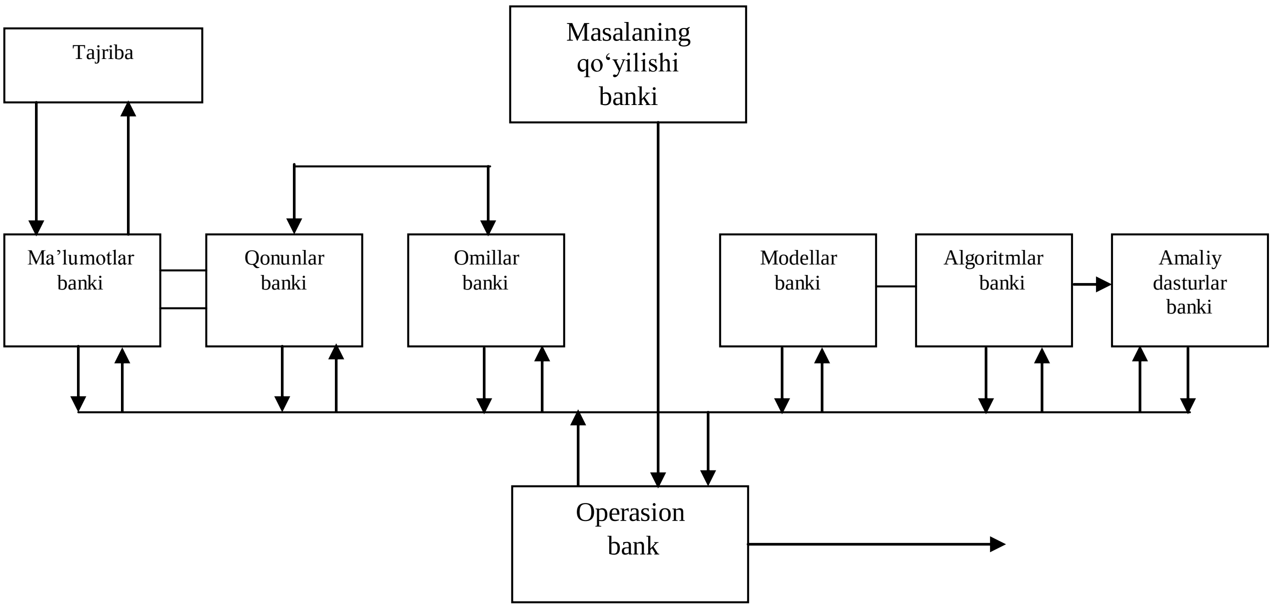
Banklarning axborot qismida bilimlarni biron-bir tasvirlash usuli bo‘yicha to‘ldirilgan (semantik tarmoq, freymlar, produktsion qoida va h.k.) bilimlar, ya’ni ob’yektlar to‘g‘risidagi ma’noli bilimlar yoziladi. Ularning operatsiyaviy qismi esa axborot qismidagi bilimlarni qayta ishlovchi dasturiy vositalar majmuasidan tashkil topadi. Demak, ushbu ikki qism ob’yektga yo‘naltirilgan dasturlash tillaridagi inkapsulyatsiyaga to‘g‘ri keladi va uning umumlashgan ko‘rinishini ifoda etadi.

Bu yerda ma’lumotlarning mavhum tiplari hosil qilinadi.

Ushbu ajoyib xossa orqali real borliq va ular orasidagi bog‘lanishlarni mujassam qilib, ob’yektlar paradigmalarini hisobga olib ham tasvirlash mumkin.

Endi algoritmik banklarning ishlash tartibi to‘g‘risida to‘xtalib o‘tamiz. Masala B_0 da qo‘yiladi. Masalaning berilishi uchun avvalambor (umumiy holda) muammoga mo‘ljallangan maxsus yoki so‘rovlar bo‘yicha til yaratilgan bo‘lishi maqsadga muvofiq. Ushbu ma’lumot operasion bankka chaqiriladi. Operasion bank o‘z navbatida omillar bankini ishga tushiradi. Bu bank omillar (belgilar makoni) bo‘yicha ma’lumotlarni kerakli joyga joylashtiradi yoki ularni modifikatsiya [5, 9] qiladi. Shuni ta'kidlab o'tamizki, konstantalar, formulali konstantalar kabi ma'lumotlar B_1 bankka jo'natiladi.

Masalaning belgisi (omili) bo'yicha, ya'ni qanday masala qo'yilishiga qarab turli xil ish amalga oshiriladi. Agar qonunlar kerak bo'lsa, unda B_2 kerakli qonun ko'chirib olinadi, yoki qonunlarning B_2 axborot qismiga yozish kerak bo'lsa, bu ish amalga oshiriladi. Shuning uchun ham B_3 tarkibi bo'yicha ko'zlanayotgan kerakli ishlar bajariladi. Shuni ta'kidlab o'tamizki, B_{2a} , B_3 algoritmik banklar orqali qaralayotgan jarayonning matematik modeli chiqariladi.



1.5-rasm. Algoritmik banklarning o'zaro ishlash tartibi

B_4 da matematik model tekshiriladi, operator tipi va xossasi o'rganiladi. Umuman olganda mazkur bankni to'la amalga oshirish matematikaning matematik tahlil, funksional tahlil, matematik mantiq, diskret matematika, ehtimollar nazariyasi kabi fundamental fanlarni kompyuterda formallashtirilishi talab etiladi.

So'ng aniqlangan operator tipi va uning xossalari bilan B_5 ga jo'natiladi. Mazkur bankda optimal algoritm tanlanadi, tenglamalar quriladi, ya'ni fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha modeldan diskret tenglamalarga o'tiladi. Bu ishlarning barchasi avtomatik bajarilishi ko'zda tutilganligi tufayli, uni amalga oshirish hisoblash matematikani kompyuterda formallashtirishni talab etadi.

Hisob-kitob ishlarini olib borish uchun yechiladigan tenglamaga B_1 dan kerakli o'zgarmaslar qiymatlari qo'yiladi va B_6 da amaliy dasturiy vositalar B_7 ga chaqirib hisoblash tajribalari amalga oshiriladi.

Ko‘rinib turibdiki, matematik modellashtirish va algoritmlash uslubiyatlarini tahlil qilsak, albatta keyingi uslubiyat matematik modellashtirishga nisbatan uslubiy va intellektlashtirish nuqtai nazaridan ancha yuqori hisoblanadi. Algoritmlashda ijodiy jarayonlarning barchasi ma’lum bir algoritmlar to‘plamiga ko‘ra inson aralashuvisiz amalga oshirilishini ko‘zda tutadi. Albatta, bu yerda muammolar ham nazariy jihatdan, ham amaliy nuqtai nazardan yetarli.

Buning uchun teoremalarni kompyuterda isbotlashni amalga oshirish lozim. Hozirgi kunda agar masalani mulohazalar mantiqi, predikatlar mantiqi tilida yozish imkoni bo‘lsa, teoremalarni isbotlashni avtomatlashtirish mumkin. Yoki boshqacha yo‘l tutish ham mumkin.

Buning uchun ta’riflar, aksiomalar va tayanch ma’lum teoremalar orqali boshqa (hatto yangi) teoremalarni isbotlash lozim. Buni produksion qoida “agar... bo‘lsa”, “u holda...bunday” asosida yuqorida sanab o‘tilgan matematikaning bo‘limlarini formallashtirish kerak. Bundan kelib chiqadiki, matematikaning metalingvistik nazariyasini yaratish, ya’ni mashina, matematik teoremalarni tushunmoq lozim. Masalan, “fazo”, “element”, “yaqinlashadi”, “chegaralarga”, “o‘sadi”, “kamayadi”, “qavariq”, “botiq”, “to‘plam”, “simmetrik”, “musbat aniqlangan”, “norma”, “uzluksiz”, “operator” va h.k. juda ko‘p tushunchalarni idrok etish talab etiladi. Bu muammolar o‘ylaymizki, XXI asr informatika fanining eng muhim muammolaridan biri hisoblanadi.

Algoritmik yondashuvning kibernetikadagi ahamiyatiga haddan tashqari baho berish qiyin. Chunki avvalo, u kibernetikaning o‘ziga abstrakt boshqaruv tizimlarini avtomatlashtirilgan tahlil qilish va sintezlash usullarini ishlab chiqish maqsadida kerak. Ta’rifiga ko‘ra abstrakt boshqaruv tizimlarida vaqt o‘tishi bilan boshqaruv tarkibi, xotirasi va funksiyasi o‘zgaradi. Bunday murakkab tizimlarni o‘rganish uchun nazariy kibernetika usullarining jami zahirasini jalb etish lozim. Shuning uchun bunday tizimlarda algoritmik tizimlarni qo‘llash kibernetika va uning amaliy yo‘nalishlari rivojiga hissa qo‘shadi.

Algoritmik usullar elektron hisoblash mashinalari, nerv to‘qimalari, har xil xususiyatli molekulalar kabi real boshqaruv tizimlarining tarkibi va funsiyasi o‘rganilishini tezlashtiradi. Bu o‘rinda inson tomonidan axborotning qabul qilinishi va tashkil etish muammolari hal etiladi.

Lekin, fikrimizcha, algoritmlashning eng muhim natijasi turli ABT larni loyihalashtirishning avtomatlashuvi yo‘nalishida olinadi. Agar ob’yektlar to‘g‘risidagi ma’lumotlar bankini ratsional qurish («tajriba» bosqichini eslang), qonunlar banki, omillar banki va dasturlar paketi bankini qurish, hisob uchun muqobil algoritmlarni avtomatlashtirilgan tarzda tanlash bilan bog‘liq eng murakkab masalani yechishga erishilgan bo‘lganda edi, industrial asos sifatida avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlarini yaratish jarayoninini olish mumkin edi.

Algoritmlash bilan O‘zbekistonda 1960 yildan buyon shug‘ullanilmoqda. Avvaliga bu ish elastiklilik va plastiklilik nazariyalari uchun algoritmik tizimni qurish masalalariga qaratilgan. Hozirda tutash muhit mexanikasi sohasidagi ishlar bu borada ko‘p ishlar qilindi. Masalaning yakuniy yechimi tutash muhitning mexanikasida olib borilayotgan ilmiy tadqiqotlarning avtomatlashuviga turtki berdi.

Texnologik jarayonlarni boshqarishga oid ko‘pgina masalalar mexanika masalalarining yechimiga olib keladi. Bunga kimyoviy texnologiyalar, metallarni qayta ishlash jarayonlari misol bo‘la oladi. Shuning uchun bu yerda tutash muhit mexanikasidagi algoritmlashdan ABT ni texnologik jarayonlar asosida loyihalashtirishni avtomatlashtirish yo‘liga o‘tish ko‘zda tutilgan.

Jumladan, bu yerda algoritmlash bosqichlariga aniqlik kiritiladi, loyihalashtirishning qat’iy sxemasi yaratiladi (1.6-rasm).

«Tajriba» bosqichida quriladigan axborotlar banki detal, operatsiya va agregatlar parametrlarini o‘z ichiga oladi. Hozirda bu me’yoriy baza sanaladi.

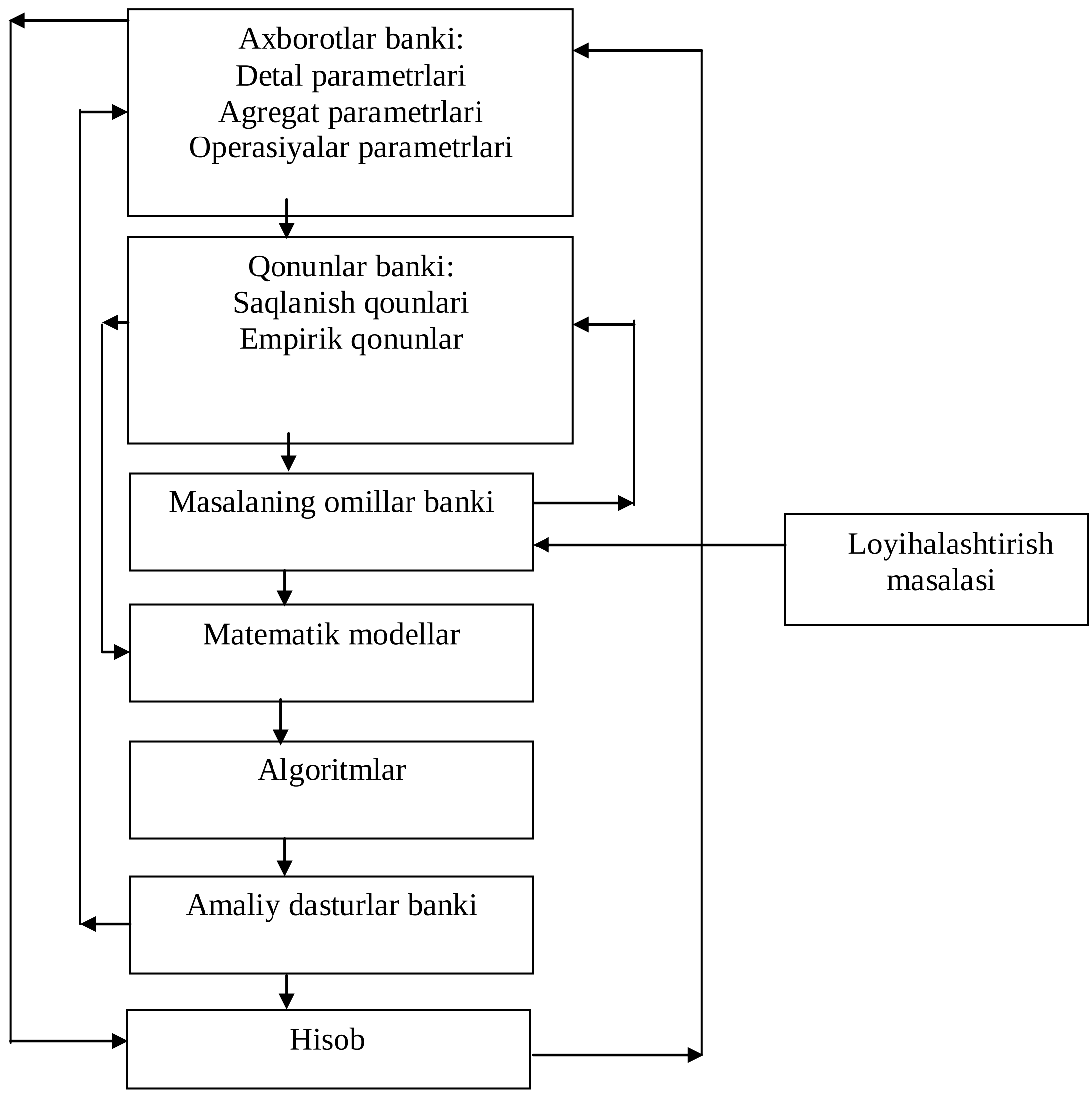
Qonunlar banki o‘z ichiga aralash muhitlarning hamma qonunlarini qamrab oladi. Lekin amaliyotda tajribani faqatgina nazariy munosabatlar bilangina ta’riflab bo‘lmaydigan holatlar yuzaga keladi. Bunday vaziyatda tajribalar o‘tkaziladi va empirik bog‘lanishlar quriladi. Shuning uchun qonunlar bankiga bu bog‘lanishlar ham qo‘shiladi.

Matematik ta’minot jarayonida asosiy qonunlardan matematik modellarga o‘tganda analitik va mantiqiy almashtirishlar uchun dasturlar, hamda amaliy dasturlar paketlari yaratiladi.

Berilgan aniq holatda loyihalashtirishning quyidagi jarayonlar sxemasi nazarda tutiladi. ABT loyihalashtiruvchisi masalani mazmuni jihatdan yoki belgilar orqali (sintatik yondashuv) shakllantiradi. Masalaning parametrlari kompyuterga kiritiladi va omillar bankida qidiruv boshlanadi. So‘ngra qonunlar bankiga o‘tiladi, masalaning omillariga qarab uning matematik modeli (hozircha belgilar orqali) quriladi. Algoritmlar blokida yechish usuli avtomatik tarzda aniqlanadi va usulning taqribiy tenglamalari chiqariladi. Shundan keyingina, aniq sonlar qo‘yilib (ma’lumotlar bankida saqlanadigan) hisob olib boriladi.

Tajriba shuni ko‘rsatadiki, ABT ni avtomatik loyihalashtirishga o‘tganda ma’lumotlar banki va omillar bankini qurish, qonunlar bankini to‘ldirish hamda amaliy dasturlarning ratsional paketini tanlash masalasi old navbatga chiqadi.

Biz texnologik jarayonlar to‘g‘risida gapirdik. Hozirgi paytda ekonomik tizimlar uchun ham qonunlar va omillar banki qurilgan.



1.6-rasm. Loyihalash sxemasi

Bir so‘z bilan aytganda, algoritmlash yig‘ish, ma’lumotni uzatish va qayta ishlashning texnik vositalarini yaratish bilan bir qatorda zamonaviy informatikaning ustuvor yo‘nalishlaridan biridir.

Bu maqsadga erishishning asosiy vositalaridan biri texnologik jarayonlar va tashkiliy- iqtisodiy tizimlarini boshqarishning avtomatik boshqaruv tizimlarini yaratish bo‘yicha olib borilayotgan ishlarni kengaytirishdir. Gap integral tizimlarni yaratish haqida boradi, chunki ularda boshqaruv muammolari kompleks tarzda yechiladi. Umid qilamizki, ABT ni loyihalashtirishga algoritmik usullarni qo‘llash boshqaruv tizimlarning amaliyotga kiritilish muddatlarini qisqartiradi, ularni loyihalashtirishga ketadigan sarf-harajatlarni kamaytirish hamda ularning samaradorligini oshirishga imkon beradi.

Nazorat savollari

1.Matematik modellashtirish va hisoblash tajribalarining ahamiyatini tushuntirib bering.

2. Matematik modellashtirishning intellektual yadrosi**.**

3. Bilimlarni matematikalashtirishning ahamiyati va matematik modellardan foydalanish yo‘llari.

4. Modellashtirishda nazariy matematikaning o‘rni.

5. Modellashirishda kompyuterdan foydalanish.

6. Hisoblash tajribasi, uning turlari va uning bosqichlari.

7. Hisoblash tajribasi qo‘llaniladigan sohalar.

8. Kompyuterli modellashtirish.

9. Ijodiy jarayonlar uchun algoritmlash dasturi va uning mohiyati.

10. Algoritmik banklar.

11. Ilmiy tadqiqotlar va muhandislik ishlarida algoritmlash.

12. Matematik modellashtirish va algoritmlash nazariyalari orasidagi
o‘xshashliklar va asosiy farqlar.

2. TIZIM HAQIDA ASOSIY TUSHUNCHALAR

Odatda jarayon, hodisa va obyektlarning matematik modellari quriladi. Ma’lumki, jarayon, hodisa va ob’yektlar murakkab tizimlar sifatida qaraladi. Shuning uchun ham ushbu bo‘limda tizimlar to‘g‘risida qisqacha tushunchalarni keltiramiz.

2.1. Asosiy tushunchalar va ta’riflar

Tizimlar nazariyasini bayon etishda, masalan, informatsion hisoblash, boshqarish, umumiy xizmat ko‘rsatishda tizimlar umumiy nazariyasi bilan bog‘liq tushunchalar qo‘llaniladi [10-14]. Bu tushunchalar hamma vaqt ham umumiylik kuchida bir xil talqin qilinmaydi.

Tizim tushunchasi birinchi marta umumiy tizimlar nazariyasi doirasida asoschilaridan biri L.fon Bertalanfy [10] tomonidan ifoda etilgan. Keyinchalik mashhur olimlar V.M.Mixalevich [11], Yu.A.Shreyder va boshqa chet el olimlari – Lange [12], Takaxara, Mako, Mesarovich [13] lar tomonidan tizimlarni uslubiy tomondan tadqiq qilishning uslublari ishlab chiqildi.

Zamonaviy tizimlar nazariyasida “maqsadli yo‘naltirilgan” tizimlar alohida o‘rin tutadi. Ijtimoiy-iqtisodiy korxonalar (ilmiy tekshirish instituti, sanoat birlashmalari va boshqa); texnik tizimlar (telefon a’loqa tizimi, elektron hisoblash mashinalari tizimi, zavod-avtomat, korxonalarni avtomatik boshqarish tizimlari va boshqa); biologik tizimlar (qon aylanish tizimi, inson yoki hayvonlarni harakatlantiruvchi apparatlar) shular jumlasidan. Shuni ta’kidlash kerak-ki, maqsadli yo‘naltirilgan tizimlar tushunchasi sub’ektiv mazmunga ega va u tadqiqotchilar bilimi darajasi hamda tajribasiga bog‘liq.

Tizimlar nazariyasining zamonaviy holati uchun kontseptual va uslubiy asoslar nazariyasi alohida ahamiyat kasb etadi. Bunda eng avvalo ob’yektlarning turli xilligini tushunish lozim. Hozirda tizimga bo‘lgan barcha talablarni qanoatlantiruvchi yagona ta’rif mavjud emas.

Tizim tushunchasining sub’ektiv mazmuni quyidagidan iborat. Tadqiqotchi aniq bir ob’yektni yoki ob’yektlar guruhini o‘rganishga kirishishida tashqi muhitdan shunday element yoki hodisani ajratadiki, u bir tomondan tadqiqot qilish maqsadiga, ikkinchi tomondan tahlil yoki loyihalashda osonlik va tabiiylikka javob beradi.

Qoida bo‘yicha tizim fazoviy yoki funksional yopiqlikka ega. Bu shuni bildiradiki, yo tizim komponentalari, yo uning funksiyalarining fazoviy chegaralarini keltirish mumkin, ya’ni bir tomonda tizim, ikkinchi tomonda tashqi muhit bo‘ladi.

Tizim deganda, tadqiqotchi tashqi muhitdan yo fazoviy yo funksional belgisi bo‘yicha ajratgan o‘zaro bog‘liq ob’yektlar to‘plamini tushunish mumkin. Bu ikki imkoniyat o‘z- o‘zini yo‘qotuvchi emas.

Bir necha misollarni keltiramiz: 1) Quyosh tizimi; 2) tirik organizm; 3) hisoblash markazi; 4) sanoat korxonalari; 5) elektrik sxemalar; 6) chiziqli tenglamalar tizimi; 7) sanoat tarmog‘i; 8) ijtimoiy ta’minot tizimi; 9) kompyuter operasion tizimi; 10) texnologik jarayonlarni boshqarishning avtomatlashtirilgan tizimi; 11) xalq xo‘jaligini rejalashtirish tizimi; 12) yurak-qon tomiri tizimi.

1-6 gacha bo‘lgan tizimlar fazoviy belgilar bo‘yicha tashkil qilingan abstrakt va materiallardan tashkil qilingan. 7-12 gacha bo‘lgan tizimlar esa funksional belgilar bo‘yicha qo‘yilgan. Ko‘rinib turibdiki, aytib o‘tilgan ayrim tizimlar ikki yoqlama tavsifni ta’minlaydi.

Ko‘p hollarda, agar tizim fazoviy belgilarda berilsa, tadqiqotchi bir vaqtning o‘zida tizimni tuzilmalashtirishni amalga oshiradi. Tuzilmalashtirish deganda tizimda ikki tipdagi ob’yekt (elementlar va aloqalar to‘plami) bo‘lishi va bu to‘plamlar o‘rtasida o‘zaro bog‘lanishlar o‘rnatilishi tushuniladi. Quyosh tizimining asosiy elementlari Quyosh va sayyoralar bo‘lib, ularning aloqasi o‘zaro gravitatsion ta’sirdan iborat. Sanoat korxonalarida elementlar alohida sexlar bo‘lib, ular orasidagi aloqa – material va axborotlar oqimidir. Chiziqli tenglamalar tizimida elementlar – alohida tenglamalar bo‘lib, aloqa esa har bir tenglamadagi qatnashuvchi o‘zgaruvchilardir.

Bunday tizimlarni bir doirada tuzilmalashtirish har xil amalga oshirilishi mumkin. Korxonaning struktura birligi tsex va bo‘lim yoki ish joyi. Mos ravishda ular almashadi va shu bilan birga aloqa turlari ham. Bundan tashqari ular bir holatda aloqa, ikkinchida esa element ko‘rinishi hisoblanadi. Masalan, elektr zanjir elementi – kondensatorlar, registorlar, induktiv – element bo‘lib, ayni paytda kiritish va chiqarish sxema bo‘limlari orasida aloqa sifatida ham qatnashishi mumkin.

Tizimga quyidagicha ta’rif berish mumkin: <u>Tizim – bu yagona maqsadga erishish uchun birlashtirilgan o‘zaro bog‘liq elementlar to‘plamidir.</u> Maqsad deganda tizim uchun belgilangan vazifalarni aniqlovchi natijalar to‘plami tushuniladi. Maqsad mavjudligi va tizimda elementlar bog‘lanishining majburligi, ya’ni butunlik tushunchasining paydo bo‘lishi tizimning eng zarur xossalaridan sanaladi. Element tizimga qarashli bo‘lgani uchun u tizimni tashkil etuvchi boshqa elementlar bilan ham bog‘langan. Tizimdan elementning yoki bir necha elementlarning olib tashlanishi uning maqsadidan tashqari albatta, yo‘nalish bo‘yicha xossasini ham o‘zgartiradi.

Hozirgi vaqtda murakkab tizimlarning yetarlicha umumiy ta’rifi mavjud emas. Shu sabab, tadqiq qilinayotgan ob’yekt tipidan bog‘liq ravishda, u yoki bu murakkab tizim tushunchalari ishlatiladi. Bu tushunchalar bitta ob’yekt uchun o‘rinli bo‘lib, boshqasi uchun ham hamma vaqt ham o‘rinli bo‘lishi kutilmaydi.

Murakkab tizimlarga xususiyatlar sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

- katta miqdordagi nimtizimlar, kenjatizimlar va elementlarning bir - biri bilan o‘zaro bog‘liqligi;
- tizim bajaradigan funksiyalarining murakkabligi va maqsadga erishishga qaratilganligi;
- tizim ko‘p o‘lchamliligi va kenjatizimlar orasidagi katta miqdordagi aloqalarning mavjudlik sharti qo‘yilishi;
- murakkab tizim tuzilmasining turli xilligi, uning kenjatizimlari tuzilmasining har xilligi, turli tuzilmalarga birlashtirilgan kenjatizimlarning yagona tizimga birlashtirilganligi;
- ayrim hollarda ierarxik tuzilmaga, bundan tashqari tarmoqli axborot tarmog‘iga va intensiv axborot oqimiga ega boshqaruv mavjudligi;
- har-xil fizik mohiyatli xarakterga ega turli xildagi fizik tabiatli kenjatizimlar;
- tadqiq qilish uchun shartli ravishda zamonaviy dekompozitsion matematik usullarni, makromodellashtirishlarni, imitatsion modellashtirishlarni qo‘llash kerak bo‘lgan katta o‘lchovli va murakkab modelli tizimlar;
- tizimning alohida elementlari xossalarini to‘liq o‘rganishda, tizim xossalari haqida yetarlicha ma’lumot olish imkoniyati mavjud emas.

Shunday qilib, murakkab tizimlar o‘zaro aloqada va ta’sirga ega bo‘lgan elementlar va turli kenjatizimlar majmui bo‘lib, bu kenjatizimlar tizimning murakkab funksiyalarini bajarishni ta’minlaydi va murakkab matematik modelni tavsiflaydi. Tizim agarda kam sonli elementlardan tashkil topgan bo‘lib, uning modeli oddiy bo‘lsa, oddiy tizim.

Elementlar va kenjatizimlar. Tizim elementlari tizimlarning formal tavsifini, ya’ni matematik modelini qurishda ob’yekt sifatida qatnashadi. Element – bu bo‘linmaydigan kichik ob’yektdir.

Tizim elementi uchun asosiy xos narsa - bu uning boshqa elementlar bilan o‘zaro ta’siri yoki butun tizim xossasiga ta’sir qilishidir.

Kenjatizimlar o‘zida elementlar to‘plamini tasvirlaydi. Tizimning har qanday elementlar to‘plamini formal holda kenjatizimning u bilan aloqasi deb qarash mumkin. Murakkab tizimlarning kenjatizimlarga bo‘linishi tizim dekompozitsiyasi deyiladi. Bu jarayon hozirgi vaqtda formallashmagan va u evristik xarakterga ega. Kenjatizimlarga to‘g‘ri bo‘linish tizimni tahlil qilishni osonlashtiradi va qisqartiradi.

Masalan, tizim n=20 elementga ega va uning elementlari n(n-1)=380 sondagi bog‘lanishda, deylik. Tizimni 4 - 5 ta elementga (n_1=5) ega kenjatizimlarga bo‘lamiz (agar mumkin bo‘lsa). U holda bitta kenjatizim elementlari orasidagi aloqa $n_1(n_1-1)=5\cdot4=20$ teng bo‘ladi. 4 ta kenjatizimniki esa $20\cdot4=80$ teng bo‘ladi. Kenjatizimlar bir-biri bilan $4\cdot3=12$ sonli aloqaga ega. Shunday qilib qaralayotgan tizimda jami 80+12=92 aloqa ko‘rilishi mumkin ekan. Shu sabab uni tadqiq qilish ancha qisqaradi.

Tizim funksiyasi va uning tuzilmasi. Real tizim uning funsiyalari va tuzilmasini aniqlash yo‘li bilan tavsiflanadi.

Tizim funksiyasi – bu tizim maqsadida (belgilangan) yozilgan natijalarni olishning qoida va usullari demakdir. Tizim funksiyasini aniqlashda uning holati qanday tushunchalar tizimini qo‘llash bilan tavsiflanadi: o‘zgaruvchilar, vektorlar, to‘plamlar orasidagi bog‘lanishlar. Funksiya qo‘yilgan maqsadga erishish uchun tizimning nima qilishi kerakliligini aniqlab beradi. Tizim funksiyasini tavsiflash uchun ma’lumotlar, algoritmlar, tasodifiy jarayonlar va to‘plamlar nazariyasi qo‘llaniladi.

Ishlab turish – funksiyalarni amalga oshirish demak, ya’ni tizimda belgilab qo‘yilgan natijalarni olishdir.

Real murakkab tizimlar katta miqdordagi tasodifiy omillar ta’sirida ishlab turadi. Bu tasodifiy omillar ichki va tashqi bo‘lib ular, masalan, tebranishlar, shovqinlar haroratining o‘zgarishi, radiatsiya bo‘lishi mumkin [8].

Tizim tuzilmasi – bu fiksirlangan elementlar to‘plami va ular orasidagi aloqalardir. Tizimlarning umumiy nazariyasida tuzilma ma’nosida faqat elementlar orasidagi aloqalar to‘plami emas, faqat tizim konfiguratsiyasini tasvirlovchi manzara va o‘zaro aloqador elementlar to‘plami ham kiradi. Ayrim tizim strukturalari grafa shaklida tasvirlanadi. Bunda tizim elementi sifatida grafaning tugun uchlari, aloqa sifatida esa – grafa yoylari tasvirlanadi.

2.2. Murakkab tizimlar tavsifi

Murakkab tizim samaradorligi, ya’ni funksiyani bajarish samaradorligi quyidagi tushunchalar bilan baholanadi: samaradorlik, samaradorlik ko‘rsatkichlari, samaradorlik mezoni, optimal tizim.

Samaradorlik – bu tizim uchun belgilangan mos darajadir. Ikki tizimdan qaysi birining ko‘proq samaradorligi, qaysi biri belgilangan funksiyasini aniq bajarishi bilan belgilanadi. Tizim samaradorligini baholash – uni tahlil qilishning yagona masalasidir.

Samaradorlik ko‘rsatkichlari (sifat) – bu tizimning sonli ifodalardagi birdan bir o‘lcham xossasi sanaladi. Masalan, tizimning kattalik o‘lchami, qiymati, ishonchliligi, unumdorligi uning samaradorlik ko‘rsatkichi bo‘lishi mumkin.

Samaradorlik mezoni – bu butun tizimning samaradorlik o‘lchamidir. Samaradorlik mezoni sonli ifodalanadi va tizimning barcha xossalarini umumlashtirib integral baholaydi, effektivlik darajasini o‘lchaydi.

Optimal tizim – bu real tizim variantlarini qurishda samaradorlik mezonining to‘g‘ri (teskari) maksimal (minimal) qiymati mos keluvchi tizimi.

Murakkab tizim samaradorlik ko‘rsatkichi deganda uning sonli xarakteristikasi tushuniladi. Bunda tizimning unga mos masalani bajarish darajasi baholanadi. Tizimning ishlab turish masalasi to‘liq tugallanganligini va maqsadi tavsifini faqat samaradorlik ko‘rsatgichi belgilaydi. Samaradorlik ko‘rsatkichi tizimning ishlab turish jarayonida aniqlanishi kerak.

Aytaylik, tizim aniq shart - sharoitlarga asoslanib har xil ishlasin. Murakkab tizimning ishlash jarayonini alohida jarayonlar to‘plami shaklida yoki tizim holatini vektor ko‘rinishda tasvirlaymiz:

$$\vec{Z}(t) = \{z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)\}, \qquad (2.1)$$

bu yerda $z_i(t)$ – i-chi sharoitda tizimning ishlash jarayoni. Barcha holatlar to‘plami tizim parametrlari bilan aniqlanadi. Bu to‘plamdagi har qanday $Z_i(t)$ tashkil qiluvchini $R=\{r_1, r_2,\ldots,r_n\}$ haqiqiy sonlar to‘plamidagi biror bir r_i soni bilan taqqoslash mumkin. Bunda R tizimning $z_i(t)$ ($i=\overline{1,n}$) holatdagi samaradorlik ko‘rsatkichlar qiymatlari. U holda tizim holati to‘plamini (r_{min}, r_{max}) intervaldagi haqiqiy sonlar to‘plamida aks ettirish mumkin va R uning har xil sharoitda ishlash sifatini ifodalovchi samaradorlik ko‘rsatkichi bo‘ladi.

Oddiy tizimlarning ayrim samaradorlik ko‘rsatkichlari, masalan, bir maromda ishlashni rad etish (ma’lum oraliq vaqt ichida rad etilish ehtimoli), murakkab tizimlar uchun yaroqsizdir. Ularni tadqiq qilishda uning biror bir elementi ishlamay qolishi hisobga olinishi lozim. Bunday vaziyatda tizimning ishchi holatdan chiqishi emas, balki uning faqat ishlash sifatining pasayishi tushuniladi.

Misol. Parallel birlashtirilgan elementlardan iborat tizimni ko‘rib chiqaylik. Bunday tizim uning barcha elementlari ishlashi rad etilganda ishdan chiqadi. Parallel birlashtirilgan, bir xil bo‘lmagan elementlardan iborat tizimning to‘xtamay ishlash ehtimoli R_{par} bilan quyidagicha aniqlanadi:

$$R_{nap} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i), \tag{2.2}$$

bu yerda n – elemenlar soni; R_i – i –chi elementning to‘xtamay ishlash ehtimolligi.

Agar elementlarning ishlamay qolishi qiymati eksponentsional qonuniyat bilan berilgan bo‘lsa, u holda i –chi elementning to‘xtamay ishlash ehtimolligi:

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \tag{2.3}$$

bu yerda λ_I - elementning ishlamay qolish izchilligi.

(2.3) munosabatni (2.2) formulaga qo‘yib, quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$R_{nap}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}). \tag{2.4}$$

Tizimning o‘rtacha uzluksiz ishlash vaqtini T_0 (ishlamay qolishini) topamiz. Tenglama (2.4) ni [0, ∞] intervalda integrallab quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$T_0 = \int_0^\infty R_{nap}(t)dt = \int_0^\infty \left[1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t})\right]dt = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + ... + \frac{1}{\lambda_n}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} + ...\right) + \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4} + ...\right) + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}. \tag{2.5}$$

Bir xil elementlar uchun bu ifoda quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$T_0 = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}, \tag{2.6}$$

bu yerda $\lambda = \lambda_i = const.$

(2.6) formuladan kelib chiqadiki, tizimning o‘rtacha uzluksiz ishlashi uning elementlarining doimiy rad etilish intensivligi teskari kattalik bo‘lib, u elementlar sonining oshishi bilan ortib boradi.

2.3. Murakkab tizimlarni tadqiq qilishning asosiy masalalari

Murakkab tizimlarni tadqiq qilishning asosiy masalalari quyidagilar:

- Sintez masalasi. Bunda tizim strukturasi va berilgan xossalari bo‘yicha uni aniqlovchi parametrlar topiladi.
- Tahlil masalasi. Bunda tizimning ma’lum strukturasi va ma’lum parametrlari asosida uning holati o‘rganiladi. Ya’ni tizim xossalari va uning tavsifi tadqiq qilinadi. Bu masala sintez va tahlil masalasi yechimi natijalarini qo‘llagan holda amalga oshiriladi.

Sintez masalasi. Tizimlar umumiy nazariyasiga asosan, sintez – bu belgilangan natijalarni olish uchun kerakli va yetarli bo‘lgan funksiyalar va strukturalarni yaratish jarayonidir. Ishlab chiqiladigan tizim funksiyasini aniqlash hozirgina ma’lum bo‘lgan va u nima qilishi kerak bo‘lgan qandaydir abstrakt tizimni belgilaydi. Shu sabab funksiyani sintez qilish bosqichi abstrakt sintez, strukturani aniqlash bosqichi esa berilgan funsiyani amalga oshirish bilan bog‘liq bo‘lib – strukturali sintez deyiladi.

Sintez masalasi qo‘yilishini misol tariqasida axborot hisoblash tizimida qaraylik. Bunday tizimlar nazariyasida asosiy masala – uni optimal sintez qilish bo‘lib, natijada belgilangan funksiyani bajarish uchun tizimni qurishning eng yaxshi usulini tanlash amalga oshiriladi. Sintez masalasida loyihalashtirilayotgan tizim vazifasi haqidagi boshlang‘ich ma’lumotlar quyidagilar bo‘ladi:

Tizim funksiyasi. Odatda bunda amaliy masalalar ro‘yxati taqdim etiladi;

Tizim xarakteristikasiga cheklanishlar ro‘yxati. Misol uchun masalani yechish vaqti, jihozlar qiymati, tizimning unumdorligi.

Samaradorlik mezoni, tizimning to‘laligicha sifatiga baho qo‘yish usuli.

Bulardan kelib chiqqan holda tizim strukturasini (qurilmalar tarkibi va ular orasidagi aloqalar) va hisoblash jarayonini boshqarish strategiyasini aniqlash kerak bo‘ladi.

Loyihalashtirilayotgan axborot-hisoblash tizimining sifati tizim jihozlariga, jumladan apparat bo‘limiga ketgan xarajatdan, vaqt bo‘yicha esa amaliy masalalarni yechishga bog‘liq.

Tahlil masalasi. Tahlil – bu tizimga xos xossalarni aniqlash (tadqiq qilish) jarayonidir. Tipik tahlil masalasi quyidagicha qo‘yiladi. Aytaylik, tizim tarkibiga kiruvchi elementlarning xarakteristikasi va funksiyasi ma’lum, uning tuzilmasi aniqlangan. Tizimning o‘ziga xos xarakteristika yoki funksiyalarini aniqlash lozim.

Murakkab tizimlar nazariyasining asosiy masalasi – turli sinfdagi amaliy masalalar xossalarini, jarayonlarni boshqarish struktura va strategiyalarini, elementlar va ular to‘plami xarakteristikasini sonli va sifatli baholash maqsadida tizimni tahlil qilishdir.

Tizim xossasini xarakterlovchi ko‘rsatkichlar quyidagi ikki usuldan biri yordamida aniqlanishi mumkin: tabiiy tajriba natijalarini qayta ishlash yo‘li bilan; tizimning ishlash jarayonini fizik yoki matematik modellashtirish natijalari yordamida.

Tabiiy sharoitda ob’yektni amaliy jihatdan o‘rganish faqat quyidagi shartlarning bajarilishida maqsadga muvofiq:

- tizim kerakli maqsadga erishish uchun tajriba rejimida ishlashining mumkinligi;
- barcha kerakli ma’lumotlarni hech qanday mablag‘siz datchik va ma’lumotlarni yig‘ish qurilmalariga qayd qilib qo‘yishi mumkinligi;
- olingan ma’lumotlarni to‘plash va statistik qayta ishlash real masshtab vaqt ichida tajribaga qo‘yilgan muddatni qanoatlantirishi;
- tizimning ishlash rejimining o‘zgartirilishi uning ishdan chiqishiga olib kelmasligi.

Modomiki, mazkur keltirilgan shartlar ko‘pchilik amaliyot paytlarda bajarilmaydi. Shuning uchun hozirgi vaqtda murakkab tizimlarni tahlil qilishda eng samarali vosita ularni matematik modellashtirish bo‘lib qolmoqda. Tahlil masalasi uchta bosqichni o‘z ichiga oladi:

Birinchi bosqichda tahlil qilinadigan obyektga xos kelib chiqadigan aloqalar aniqlanishi kerak va jarayonlarda bo‘ladigan mohiyatini ochib beruvchi ob’yektning konseptul modelini qurish lozim. Konseptul modelini qurishda obyekt parametrlari va xarakteristikalari orasidagi mavjud bog‘lanishlar o‘rnatiladi. Bu parametrlar modelga kiritilgan bo‘lishi kerak.

Ikkinchi bosqichda qabul qilingan konseptual model bazasida parametrlar va xarakteristikalar orasidagi munosabatlar sonini ochib beradigan matematik model quriladi. Masalan, funksional bog‘lanish formasi $Y = \Phi(X)$, bu yerda Y – xarakteristikalar to‘plami, X – parametrlar to‘plami. Ular konseptual modelda hisobga olingan. Bu bog‘lanishlarni tadqiq qilish ob’yekt xossalarini chiqarishda va o‘rganishda muhim rol o‘ynaydi.

Uchinchi bosqichda tahlil qilinayotgan obyekt uchun olingan matematik modelning ishonchliligi tekshiriladi. Ishonchlilikni tekshirish modeldan va tajribadan olingan ma’lumotlarni, shuningdek tahlil usullari yordamida olingan ma’lumotlarning o‘zaro bog‘lanishlarini solishtirish yo‘li bilan amalga oshiriladi. Tahlil natijasi murakkab tizimda bo‘ladigan jarayonlar va tizimga xos qonuniyatlar modellarini olishdan iborat.

Shunday qilib, murakkab tizimlarni tadqiq qilish butun tizimni tashkil qilish uslublari, jarayonlarni boshqarishning har xil strategiyalarini, algoritm xossalarini tahlil qilishdan boshlanadi. Bunda jarayonlar modellari quriladi va tadqiq qilinadi.

2.4. Loyihalash jarayonining umumiy tasnifi

Har xil turdagi murakkab texnik tizimlarni ishlab chiqishning eng zarur shartlaridan biri hisoblash mashinalarini qo‘llash orqali ularning loyihalash usullarini keng tatbiq qilish va rivojlantirishdir.

Avtomatik dasturlash deganda, fizik jarayonlarga bog‘liq bo‘lmagan obyekt modellarini qo‘llab murakkab tizimlarni ishlab chiqishda hisoblash mashinalarini qo‘llash tushuniladi.

Har qanday loyihalash jarayoni o‘z strategiyasi va texnologiyasiga ega. Loyihalash strategiyasi – bu qo‘yilgan masalani yechish uchun loyihachi tomonidan ketma-ketlikdagi operatsiyalarni aniqlash va izlab topishdir. Strategiya loyihalashda ishlatiladigan algoritmlar va usullarni qarab chiqadi.

Loyihalash strategiyasi turlari chiziqli, siklik, tarmoqlanuvchi, adaptiv yoki boshqa shaklda bo‘lishi mumkin. Chiziqli strategiyada loyihalash operatsiyalari ketma-ket bajariladi. Siklik strategiyada oldingi galda olingan natijaga bog‘liq ravishda loyihalash operatsiyalarini takrorlash imkoniyati qarab chiqiladi. Tarmoqli strategiyada oldingi loyihalash operatsiyasi natijasiga bog‘liq ravishda paralel operatsiyalarni bajarish uchun yangi bajaruvchilarni qo‘shadi. Adaptiv strategiyada har bir keyingi harakatni tanlash oldingi operatsiyalarda olingan natijadan bog‘liq bo‘ladi.

Loyihalash texnologiyasi – bu berilgan ob’yektni loyihalashni amalga oshiruvchi oldindan sinab ko‘rilgan harakatlar yoki operatsiyalar ketma-ketligidir.

Loyihalash jarayonida loyihalash tili qo‘llaniladi, u natijalarni lingvistik va grafik tasvirlash vositasi bo‘lib xizmat qiladi.

Texnik obyektlarni loyihalash masalasining yechimlari evristik va tizimliga bo‘linadi. Evristik yechim - inson ijodi natijasidan olingan bo‘lib, u hech qanday oldingi tajribalar mantiqidan kelib chiqqan emas. Tizimli yechim – usullarni qo‘llash natijasida olingan bo‘lib, inson qiziqishining ijod mahsulidir.

Loyihalash jarayoni boshlang‘ich eskizli va texnik bosqich bo‘limlaridan iborat. Boshlang‘ich bosqich ob’yekt tuzilmasini va uni ishlatishdagi material-energetik vositalarni tanlash, ob’yekt va uni tashkil etuvchi bo‘g‘inlar xarakterini aniqlash bilan boshlanadi. Loyihalashning eskiz bosqichida obyekt sxemasi tuzilmasi aniqlashtiriladi, hamda ishlatiladigan texnik vositalar xarakteristikasi va ularni optimallashtirish masalasi tahlil qilinadi.

Loyihalashning texnik bosqichida konstruktorlik va texnik hujjatlar ishlab chiqiladi. Bu hujjatlar tajriba o‘tkazishni ishlab chiqishda obyektning bir guruhini tayyorlashda kerak bo‘ladi. Konstruktorlik hujjatlari esa loyihalashtirilayotgan tizimni tayyorlash va uni o‘rnatishda qo‘llaniladi. Texnik hujjatlar tizim ishlashining texnik tavsifini o‘z ichiga olgan bo‘lib, uni ishlatish, tekshirish, testlash va boshqa vazifalarda kerak bo‘ladi.

Murakkab tizimlarni loyihalash uchun yuqori darajada loyihalash metodologiyasi, diskret matematika, yechimlar nazariyasi, axborot nazariyasi lozim.

Nazorat savollari

1. Tizim, tizim elementi, kenjatizimlar ta’riflarini keltiring
2. Murakkab tizimga ta’rif bering.
3. Tizim funksiyasi va tuzilmasiga ta’rif bering.
4. Tasodifiy omillar nima?
5. Murakkab tizimlarni tashkil etish va boshqarish deganda nima tushuniladi
6. Murakkab tizimning asosiy tavsiflariga ta’rif bering.
7. Samaradorlik ko‘rsatkichi, samaradorlik mezonlarini tushuntirib bering?
8. Murakkab tizimlar qanday samaradorlik ko‘rsatkichlar bilan xarakterlanadi?
9. Murakkab tizimning asosiy masalalari va vazifalarini sharhlang
10. Tizim strukturasi qanaqa shakllarda tasvirlanishini aytib bering
11. Optimal tizimga ta’rif bering.
12. Murakkab tizimni loyihalashtirishda qanday masalalar yechilishini ta’riflang
13. Murakkab tizimda sintez masalasining qo‘yilishi.
14. Murakkab tizimlarni tahlil qilish asosiy bosqichlarini tushuntirib bering

3. MATEMATIK VA KOMPYUTERLI MODELLASHTIRISH

3.1. Matematik modellar va ularning sinflari

"Model" lotincha modulus so‘zidan olingan bo‘lib, biror ob’yekt yoki ob’yektlar tizimining obrazi yoki namunasi sanaladi. Modellashtirish – bu, biror A ob’yektni boshqa B ob’yekt bilan almashtirishdir. Bu yerda A ob’yekti original yoki modellashtirish ob’yekti, uni almashtiruvchi B esa model deyiladi. Boshqacha aytganda, model – bu original ob’yektning unga almashtirilgan shunday obyektidirki, u original ob’yektning ayrim xossalarini o‘rganishni ta’minlab beradi. Masalan, yerning modeli –globus, osmon va undagi yulduzlar modeli – sayyoralar ekrani, pasportdagi suratni shu pasport egasining modeli deb qarash mumkin.

Modellashtirishdan maqsad, tashqi muhit va o‘zaro aloqada bo‘lgan ob’yektlar haqidagi ma’lumotlarni olish, ishlatish, tasvirlash va qayta ishlashdir. Bu o‘rinda model esa ob’yekt holati xossalari va qonuniyatlarini o‘rganish uchun vosita sifatida ishtirok etadi.

Modellashtirish inson faoliyatining turli sohalarida keng ishlatiladi. Asosan olingan ma’lumotlar bo‘yicha samarador yechimlar qabul qilish jarayonida, loyihalash va boshqarish sohalarida modellashtirish ko‘p qo‘llaniladi.

Model har doim ma’lum bir maqsadda quriladi, masalan, uning qaysi bir xossasi ob’yektiv jarayonga ta’sir etishi muhim rol o‘ynaydi yoki qaysilari muhim rol o‘ynamaydi.

Modellashtirish nazariyasi ob’yekt moduli asosida original ob’yekt xossalarini o‘rganadigan usullarni tekshiruvchi ilmiy yo‘nalishning bir bo‘limi hisoblanadi. Modellashtirish nazariyasi asosida o‘xshashlik nazariyasi yotadi.

Barcha modellarni ikki sinfga ajratish mumkin:

1. Moddiy,
2. Ideal.

O‘z navbatida moddiy modellarni quyidagilarga ajratish mumkin:

1. Tabiiy,
2. Fizik,
3. Matematik.

Ideal modellarni quyidagilarga ajratish mumkin:

1. Ko‘rgazmali,
2. Belgili,
3. Matematik.

Moddiy tabiiy model – bu real ob'yekt, jarayon va tizimlar bo'lib, ular ustida turli ilmiy, texnik va ishlab chiqarish tajribalari o'tkaziladi.

Moddiy fizik model– bu, maketlar, mulyajlar, original fizik xossa nusxasi (masalan, kinematik, dinamik, gidravlik, issiqlik, elektrik, yorug'lik modellari).

Moddiy matematik model – bu analogik, strukturali, geometrik, grafik, raqamli va kibernetik modellardir.

Ideal aniq model – bu sxemalar, kartalar, chizmalar, grafiklar, graflar, analog, strukturali va geometrik modellardir.

Ideal belgili modellar - bu simvollar, alfavit, dasturlash tili, tartiblangan yozuv, topologik yozuv, tarmoqli tasvirlashlardir.

Ideal matematik modellar – bu tahliliy, funksional, imitatsion, kombinatsiyalashgan modellardir.

3.2. Matematik modellashtirish. Matematik modellarni qurishning shakl va tamoyillari

Matematik modellashtirish barcha modellar ichida eng universal modellashtirish sifatida fizik modelni tuzmasdan turib, ob'yekt holati to'g'risidagi ma'lumotlarni olish imkonini beradi va u eng samarali va qimmatlidir. *Matematik modellashtirish* - real ob'yektni, jarayonni yoki tizimni matematik modelga almashtirish yo'li bilan o'rganuvchi, hamda kompyuter yordamida tajriba tadqiqotlarini o'tkazish uchun mo'ljallangan eng qulay vositadir

Matematik model - real ob'yekt, jarayon yoki tizimning matematik terminlarda ifodalangan va uning mavjud belgilarini ifodalovchi, unga taqriban yaqin bo'lgan nusxasidir. Modelning taqribiylik xarakteri turli ko'rinishda namoyon bo'lishi mumkin. Masalan, tajriba o'tkazish mobaynida foydalanadigan asboblarning aniqligi olinayotgan natijaning aniqligiga ta'sir etadi. *Matematik model* mantiqiy matematik konstruksiyalar yordamida sanoqli formada ob'yekt, jarayon yoki tizimning asosiy xossalarini ifodalaydi va, bundan tashqari, uning parametrlarini, ichki va tashqi aloqalarini ham tasvirlaydi.

Umuman olganda, real ob'yekt, jarayon yoki tizimni funksional tizim ko'rinishida tasvirlaydi. Masalan:

$$F_i\,(X,Y,Z,t)=0.$$

Bu yerda:

X - vektor bo'lib kiritiladigan o'zgaruvchilardir,

$X=[x_1,x_2,x_3, \dots , x_N]^t$,

Y - vektor bo'lib chiqariladigan o'zgaruvchilardir,

$$Y=[y_1,y_2,y_3, \dots , y_N]^t,$$

Z - vektor bo‘lib tashqi aloqani bildiradi,
$Z=[z_1,z_2,z_3, \ldots , z_N]^t$,
t – vaqt koordinatasi.

Matematik model qurishda tadqiqot o‘tkazishdan oldin oxirgi olingan natijaga uncha ta’sir qilmaydigan faktorlarni aniqlash va qarashdan o‘chirish masalasi kelib chiqadi. Matematik modelga real modeldagiga qaraganda ancha kam sondagi faktorlar kiritiladi. Tajriba ma’lumotlari asosida oxirgi natijada ifodalanadigan kattaliklar bilan matematik modelga kiritilgan faktorlar orasidagi bog‘lanish (aloqa) haqida gipotezalar aniqlanadi. Bunday bog‘lanish ko‘proq xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Masalan, qattiq jismlar, suyuqlik va gaz mexanikasi masalalarida, filtratsiya nazariyasida, issiqlik tarqalish, elektrostatik va elektrodinamik maydonlar nazariyasida buni ko‘rish mumkin.

Matematik modelni tasvirlash forma va tamoyillari ko‘p faktorlarga bog‘liq bo‘ladi.

Matematik modelni qurish tamoyili quyidagilarga bo‘linadi:
1. Analitik;
2. Imitatsion.

Analitik modelda real obyekt, jarayon yoki tizim funksiya qilish jarayoni aniq funksional bog‘lanishlar ko‘rinishida yoziladi.

Analitik model matematik muammoga bog‘liq ravishda quyidagi turlarga bo‘linadi:
1. Tenglama (algebraik, transtsendent, differensial, integral),
2. Approksimatsiya masalalari (interpolyatsiya, ekstrapolyatsiya, sonli integrallash va differensiallash),
3. Optimizatsiya masalalari,
4. Stoxastik muammolar.

Ob’yektni modellashtirishda uning murakkabligi ko‘p hollarda analitik modelni qurishda qiyin muammolarni keltirib chiqaradi. Bunday hollarda tadqiqotchi imitatsion modellashtirishni ishlatishga majbur bo‘ladi.

Funksiya qaralayotgan ob’yekt, jarayon yoki tizim imitatsion modellashtirishda algoritmlar to‘plami ko‘rinishida tasvirlanadi. Algoritmlar real elementar hodisani imititatsiya (taqlid) qiladi. Imitatsion modellashtirish boshlang‘ich ma’lumotlar asosida ma’lum bir vaqt oralig‘ida jarayon yoki tizim holati haqida ma’lumotni olish imkonini beradi. Lekin ob’yekt, jarayon yoki tizim holati haqida bashorat qilish qiyin. Aytish mumkinki, imitatsion model – bu matematik modellar asosida real ob'yekt, jarayon yoki tizim holatini kompyuterda hisoblash tajribalarini o'tkazish yo'li bilan imitatsiya qilishdir.

Real ob'yekt, jarayon yoki tizim xarakterini o'rganish bilan bog'liq ravishda matematik model quyidagicha bo'lishi mumkin:
1. Determinlashgan,
2. Stoxastik.

Determinlashgan modelda turli tasodifiy ta'sirlar yo'q, model elementlari (o'zgaruvchilar, matematik bog'lanishlar) yetarlicha aniq qo'yilgan va tizim holatini aniq ifodalash mumkin deb faraz qilinadi. Determinlashgan model ko'proq algebraik tenglamalar, integral tenglamalar va matritsalar algebrasi ko'rinishida ifodalanadi.

Stoxastik model o'rganilayotgan obyekt va tizimda tasodifiy xaraktyerdagi jarayonlarni hisobga oladi va ularda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullaridan foydalanadi.

Kiritiladigan ma'lumotlar turiga qarab modellar quyidagilarga bo'linadi:
1. Uzluksiz;
2. Diskret.

Agar ma'lumotlar va parametrlar uzluksiz bo'lib, matematik aloqalar (bog'lanishlar) turg'un bo'lsa, u holda matematik model *uzluksiz* bo'ladi. Aksincha, agar ma'lumotlar va parametrlar diskret bo'lib, matematik aloqalar (bog'lanishlar) turg'un bo'lmasa, u holda matematik model *diskret* bo'ladi.

Vaqtni hisobga olgan holda model holati bo'yicha modellar quyidagilarga bo'linadi:
1. Statistik,
2. Dinamik.

Statistik modellar ma'lum bir vaqt ichida ob'yekt, jarayon yoki tizim holatini ifodalaydi. Dinamik modellar ob'yekt, jarayon yoki tizim holatini vaqt bo'yicha aks ettiradi.

Matematik model va real ob'yekt, jarayon yoki tizim matematik modeli orasidagi mos daraja bo'yicha quyidagilarga bo'linadi:
1. *Izomorf* (forma bo'yicha bir xillik),
2. *Gomomorf* (forma bo'yicha har xillik).

Agar u bilan real ob'yekt, jarayon yoki tizim orasida elementlari bo'yicha to'liq moslik bo'lsa *model izomorf deyiladi*. Agar model va ob'yektning juda ahamiyatli mos qismlari orasida moslik mavjud bo'lsa *gomomorf deyiladi*.

Amaliy masalalarni yechishda kompyuterni qo‘llash uchun oldin amaliy masalani formal matematik tilga o‘tkazish lozim, ya’ni real ob’yekt, jarayon yoki tizim uchun matematik model tuzilgan bo‘lishi kerak. Matematik model sonli formada mantiqiy-matematik konstruksiya yordamida ob’yekt, jarayon yoki tizimning asosiy xossalarini, uning parametrlarini, ichki va tashqi aloqalarini tasvirlaydi.

Matematik model qurish uchun quyidagilar kerak:

1. Real ob’yekt yoki jarayonni chuqur tahlil qilish kerak;
2. Mavjud eng asosiy xossa va xususiyatlarni ajratish kerak;
3. O‘zgaruvchilarni aniqlash kerak, ya’ni ob’yekt xossalariga hamda uning asosiy xususiyatlariga ta’sir qiluvchi parametrlar va ularning qiymatlari aniqlanishi kerak:
4. Ob’yekt, jarayon yoki tizimning asosiy xossalari o‘zgaruvchilar qiymatlariga bog‘liqligi mantiqiy-matematik munosabat (aloqa) yordamida aniqlanishi kerak (tenglama, tenglik, tengsizlik, mantiqiy-matematik konstruksiya);
5. Ob’yekt, jarayon yoki tizim ichki bog‘lanishlarini cheklanishlar, tenglama, tenglik, tengsizlik va mantiqiy-matematik konstruksiyalar yordamida ajratish zarur;
6. Tashqi aloqalarni aniqlash va ularni cheklanishlar, tenglama, tenglik, tengsizlik va mantiqiy-matematik konstruksiyalar yordamida tavsiflash zarur.

Matematik modellashtirish, ob’yekt, jarayon yoki tizimni tadqiqot qilishdan va uning matematik tavsifini tuzishdan tashqari yana quyidagilarni ham o‘z ichiga oladi:

1. Ob’yekt, jarayon yoki tizim holatini modellashtiruvchi algoritm tuzish;
2. Hisoblash va tabiiy tajribalar o‘tkazish yordamida model, ob’yekt, jarayon yoki tizimning mosligini tekshirish;
3. Modelni to‘g‘rilash;
4. Modelni ishlatish.

O‘rganilayotgan ob’yekt, jarayon yoki tizimni matematik ifodalash quyidagilarga bog‘liq:

1. Tabiatdagi barcha real jarayon yoki tizimlar fizika, kimyo, mexanika, termodinamika, gidrodinamika, elektrotexnika, elastiklik va elastiklik nazariyasi qonunlariga asoslangan holda tuziladi.
2. Real jarayon yoki tizimni talab qilingan ishonchli va aniqlikda o‘rganish va tadqiqot qilish.

Matematik modelni tanlash bosqichida quyidagilar aniqlanadi: ob’yekt, jarayon yoki tizim chiziqli va chiziqsiz, dinamik yoki statik, statsionar yoki nostatsionar. Bulardan tashqari, o‘rganilayotgan ob’yekt yoki jarayonning diterminallash darajasi ham aniqlanadi.

Matematik model hech vaqt qaralayotgan ob’yekt, jarayon yoki tizimni aynan bir xil ifodalamaydi. U soddalashtirishga asoslangan holda ob’yektni taqribiy ifodalaydi. Shu sababli natija, tahlil qilish natijasida olingan model taqribiy xarakterga olib keladi. Uning aniqligi ob’yekt va modelning moslik darajasi bilan baholanadi.

Matematik modelni qurish qaralayotgan obyekt, jarayon yoki tizimning oddiy va ancha qo‘pol bo‘lgan matematik modelini qurish va tahlil qilish bilan boshlanadi. Keyinchalik, kerak bo‘lgan holda, model aniqlashtiriladi.

Matematik modellashda berilgan fizik jarayonlarning matematik ifodalari modellashtiriladi. Matematik model tashqi dunyoning matematik belgilar bilan ifodalangan qandaydir hodisalari sinfining taqribiy tavsifidir. Matematik model tashqi dunyoni bilish, shuningdek, oldindan aytib berish va boshqarishning kuchli uslubi hisoblanadi.

Quyidagi sxemada matematik model tuzish bosqichlari keltirilgan(3.1. rasm).

Hodisa va jarayonlarni matematik model yordamida o‘rganish quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi.

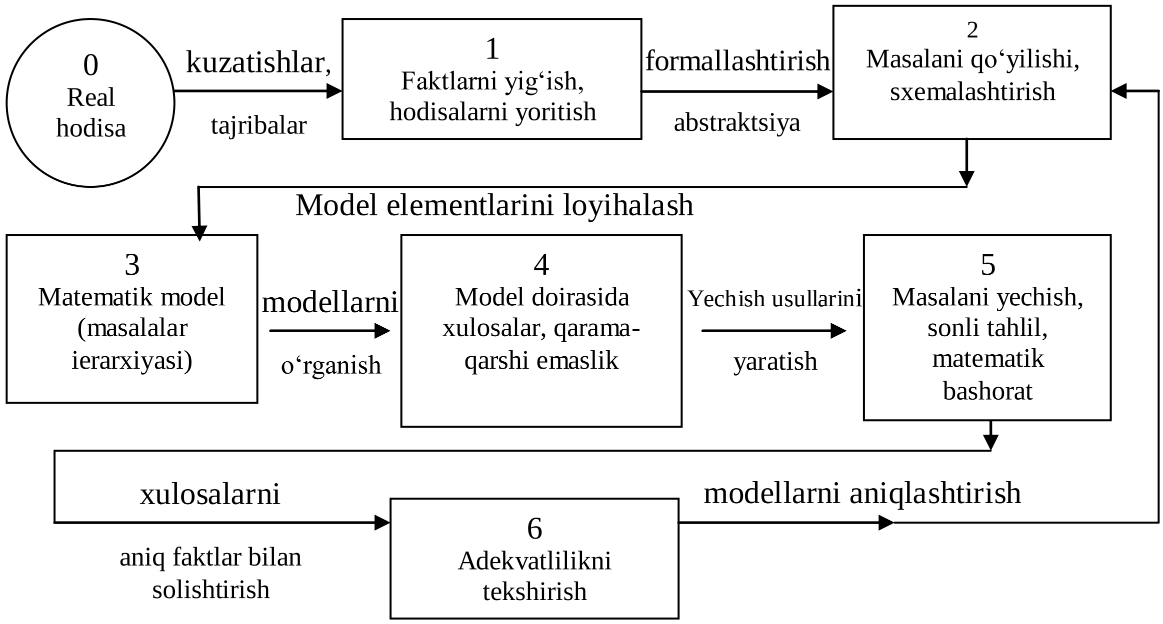
Birinchi – modelning asosiy obyektlarining bog‘lovchi qonuniyatlarini ifodalash.

Ikkinchi – modeldagi matematik masalalarni tekshirish.

Uchinchi – modelning qabul qilingan amaliyot mezonlarini qanoatlantirishini aniqlash. Boshqacha aytganda, modeldan olingan nazariy natijalar bilan olingan obyektning kuzatish natijalari mos kelishi masalasini aniqlash.

To‘rtinchi – o‘rganilayotgan hodisa haqidagi ma’lumotlarni jamlash orqali modelning navbatdagi tahlilini o‘tkazish va uni rivojlantirish, aniqlashtirish.

Shunday qilib, modellashtirishning asosiy mazmunini obyektni dastlabki o‘rganish asosiy modelni tajriba orqali va (yoki) nazariy tahlil qilish, natijalarni obyekt haqidagi ma’lumotlar bilan taqqoslash, modelni uzatish (takomillashtirish) va shu kabilar tashkil etadi. Demak, matematik model tuzish uchun, dastlab masala rasmiylashtiriladi. Masala mazmuniga mos holda zarur belgilar kiritiladi. So‘ngra kattaliklar oralig‘idagi formula yoki algoritm ko‘rinishida yozilgan funksional bog‘lanishlar hosil qilinadi.



3.1. rasm. Matematik model tuzish bosqichlari

Yuqorida aytib o‘tilganlarni aniq misollarda ko‘rib chiqaylik.

Masala. O‘ylagan sonni topish. Talabalardan ixtiyoriy sonni o‘ylash va u bilan quyidagi amallarni bajarish talab etiladi:

1.O‘ylagan sonni beshga ko‘paytirilsin.

2.Ko‘paytmaga bugungi sanaga mos son (yoki ixtiyoriy boshqa son) qo‘shilsin.

3.Hosil bo‘lgan yig‘indi ikkilantirilsin.

4.Natijaga joriy yil soni qo‘shilsin .

Ravshanki, talaba o‘ylagan son matematik fokusga mos model yordamida aniqlanadi.

Masalani rasmiylashtiramiz: x –o‘quvchi o‘ylagan son; y – hisoblash natijasi; N –sana; M –joriy yil.

Demak, olib boruvchining ko‘rsatmalari:

$$Y=(x\cdot 5+N)\cdot 2+M$$

formula orqali ifodalanadi. Ushbu formula masalaning matematik modeli bo‘lib xizmat qiladi va x o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli tenglamani ifodalaydi.

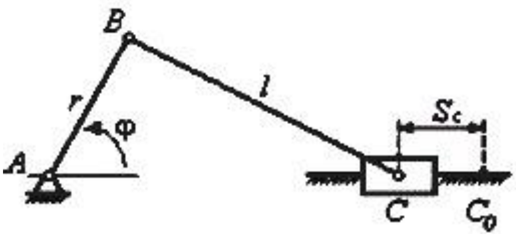
Tenglamani yechamiz:

$$x=(y-(M+2\cdot N))/10.$$

Ushbu formula o‘ylagan sonni topish algoritmini ko‘rsatadi.

Yana bir oddiy misolni qaraymiz. Oddiy yozuv stoli yuzasi maydonini aniqlash kerak bo‘lsin. Odatda buning uchun eni va uzunligi o‘lchanib, keyin olingan sonlar ko‘paytiriladi. Bunday oddiy protsedura aslida quyidagicha belgilanadi: real obyekt (stol yuzasi) abstrakt matematik model - to‘rtburchak bilan almashtiriladi. To‘rtburchak yuzasi izlanayotgan stolning taqribiy yuzasi deb qabul qilinadi.

Yana bir misolni qaraymiz. Deylik, Krivoship-shotunli mexanizm harakatini tadqiqot qilish zarur (3.2 rasm).



3.2-rasm. Krivoship-shotunli mexanizm harakatini kinematik sxemasi

Bu mexanizmni kinematik tahlil qilish uchun, oldin uning kinematik modelini qurish kerak. Buning uchun:

1. Mexanizmni uning kinematik sxemasi bilan almashtiramiz, bu yerda barcha bo‘g‘inlar qattiq bog‘langan;

2. Bu sxemadan foydalanib, biz mexanizmning harakat tenglamasini chiqaramiz;

3. Tenglamani differensiallab tezlik va tezlanish tenglamalarini olamiz, ular birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni tasvirlaydi.

Bu tenglamalarni yozamiz:

$$\begin{cases} S_C = \gamma(1-\cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi) \\ V_C = (\frac{\partial\varphi}{\partial t})\gamma(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) \\ A_C = (\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})\gamma(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi) \end{cases}$$

Bu yerda: $\lambda = r/l$

$S_0 - S$ ning chetki o‘ng holati;

$r - AB$ krivoship radiusi;

$l - BC\,l$ – BC shatun uzunligi;

$\varphi - s$ krivoshipning burilish burchagi;

Olingan transtsendent tenglama krivoship-shatun mexanizmi harakatining quyidagi sodda farazlarga asoslangan matematik modelini ifodalaydi.

1. Mexanizm yetarlicha murakkab forma va og‘irlikka ega bo‘lishi mumkin, bu esa o‘z navbatida mexanizm harakatiga albatta ta’sir qiladi;

2. Matematik modelni qurishda qaraladigan mexanizm harakatida mexanizmga kiruvchi egiluvchanliklar hisobga olinmaydi, u absolyut qattiq jism deb qaraladi. Aslida egiluvchanlik va tebranuchanlik ham o‘z navbatida mexanizm harakatiga albatta ta’sir qiladi;

3. Matematik modelda tizimni tayyorlashdagi xatoliklar hisobga olinmagan va boshqa.

Shunday qilib, matematik modelni tuzishda qaralayotgan obyekt, jarayon yoki tizimning o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘proq hisobga olish kerak, chunki bu yechiladigan masala aniqligiga bo‘lgan talablardan kelib chiqadi. Odatda murakkab matematik model ham masalani yechishning murakkabligiga olib keladi.

3.3. Kompyuterda modellashtirish va hisoblash tajribalari

Hozirgi kunda kompyuterda modellashtirish texnologiyasi mavjud bo‘lib, uning maqsadi atrofimizni o‘rab turgan tabiat, unda ro‘y beradigan hodisa, voqealarni va jamiyatdagi o‘zgarishlarni anglash, tushunib yetish jarayonini zamonaviy usullar vositasida tezlashtirishdir.

Kompyuterdan foydalanishning muhim yo‘nalishlaridan biri – bu obyekt, hodisa yoki jarayonlarni kompyuter yordamida modellashtirishdir. Inson bevosita kuzata olmaydigan fizik, kimyoviy, biologik va boshqa jarayonlarni kompyuterda modellashtirishi mumkin. Modellashtirish kompyuterda masalani yechishning bir tarkibiy qismi bo‘lib hisoblanadi. Kompyuterda modellashtirish texnologiyasini o‘zlashtirish kompyuter tizimlarini (vositachi qurilma sifatida) yaxshi bilishni va unda modellash texnologiyalarini ishlata olishni talab qiladi.

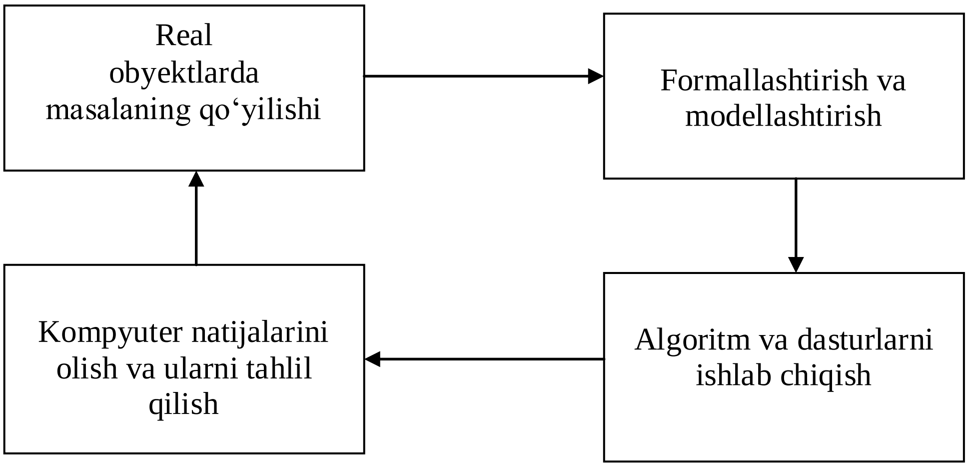
Kompyuterda modellashtirish ilmiy izlanishlarning yangi usullaridan biri bo‘lib quyidagilarga asoslanadi:

1. O‘rganilayotgan obyektni tasvirlash uchun uning matematik modelini qurish;
2. Juda katta tezlikka ega bo‘lgan va inson bilan muloqot qila oladigan yangi hisoblash mashinalaridan foydalanish.

Kompyuterda modellashtirishning asl mohiyati quyidagicha: Kompyuter yordamida matematik modelga asoslanib, bir qator hisoblash tajribalari o‘tkaziladi, ya’ni obyekt yoki jarayon xossalari o‘rganiladi, uning optimal parametrlari va ishlash rejimi topiladi, model aniqlashtiriladi.

Kompyuterda modellashtirish texnologiyasining umumiy ko‘rinishi quyidagi rasmda keltirilgan.

Kompyuterda dasturlash tillaridan foydalanish matematik modellashtirish usulida jiddiy burilish yasadi. XX asr oxirida yaratilgan yuqori quvvatli Pentium prosessorli kompyuterlarda o‘rganilayotgan jarayonlar modellarining turli xil ko‘rinishlarini (grafik, diagramma, animatsiya, multiplikatsiya va h.k.) kompyuter ekranida hosil qilishi mumkin. Ekrandagi modelni (masalan, rasm qoralamasi) turli darajada (tekislik, fazo bo‘yicha) harakatga keltirish imkoniyatlari mavjud.



3.3-rasm. Kompyuterli modellashtirish texnologiyasining umumiy ko‘rinishi

Ekranda hosil qilingan modelni kompyuter xotirasida fayl ko‘rinishida saqlash va undan bir necha marta foydalanish mumkin.

Umuman olganda, kompyuterli modellashtirish metodologiyasida quyidagi yo‘nalishlarga bo‘linadi:

1. Geometrik yo‘nalishdagi tajribalarni tashkillashtirish koordinatalar tekisligida amalga oshiriladi. Kompyuter geometrik obyektlarning xossalarini o‘rganish va matematik farazlarni tekshirishda modellarni qurish va ularni tadqiq etish vositasi sifatida ishlatiladi.

2. Ikkinchi yo‘nalish turli harakatlarni modellashtirish bilan bog‘liq. Kompyuter modellari orqali turli harakatli masalalarni yechish mumkin. Bu ro‘y beradigan jarayonlarniing mohiyatini chuqurroq va kengroq anglash, olingan natijalarni haqiqiy baholash va kompyuterda modellashtirish imkoniyatlari haqidagi tasavvurlarning kengayishiga olib keladi.

3. Uchinchi yo'nalish – kompyuter ekranida funksiya grafiklarini modellashtirish – kasbiy kompyuter tizimlarida keng qo'llaniladi. Masalan, Logo dasturi funksiya grafiklari, tenglama va tenglamalar tizimini yechish va ularning natijalarini olish imkoniyatlarini beradi. Eng muhimi, kompyuterda modellashtirish texnologiyasidan foydalanish huquqiy voqelikni anglash, bilish jarayonini amalga oshirishda yangi bosqich rolini o'ynaydi.

Kompyuterda hisoblash tajribalarini o'tkazish juda qimmatli tabiiy sharoitdagi tajribalarni almashtirishga imkon beradi. U ortiqcha xarajatlarsiz va qisqa vaqtda loyihalashtirilayotgan obyekt yoki jarayonni ko'p variantli tadqiq qilishga imkon beradi. Bu esa murakkab tizimlarni ishlab chiqishda va uni ishlab chiqarishga tatbiq etishda yetarlicha vaqtni qisqartiradi.

Kompyuterda modellashtirish va hisoblash tajribalari ilmiy tadqiqotlarni o'rganishning yangi usullaridan bo'lib, matematik modellar qurishda ishlatiladigan matematik apparatlarni rivojlantirishni talab etadi hamda matematik usullarni ishlatgan holda matematik modellarni aniqlashtirishga yordam beradi. Zamonaviy yirik ilmiy-texnik va ijtimoiy iqtisodiy muammolarni hisoblash tajribalarini o'tkazish yordamida hal qilish kelajakda muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, atom elektr stansiyalari uchun reaktorlarni loyihalash, gidroelektr stansiya va platinalarni loyihalashtirish, iqtisodiy sohada region yoki bir davlat balans rejalarini tuzish va boshqalar.

Ayrim jarayonlar, masalan, muayyan tabiiy sharoitdagi tajribalarni o'tkazish inson hayoti va sog'ligi uchun juda xavfli bo'lsa, bunday joylarda yagona imkoniyat kompyuter hisoblash tajribalaridan foydalaniladi. Masalan, termoyaderli sintez o'tkazish, kosmik fazoni o'rganish, kimyoviy jarayonlarni o'rganish va loyihalash va boshqalar.

Matematik model va real obyekt, jarayon yoki tizimning mosligini tekshirish uchun kompyuterda olingan tadqiqot natijalari tabiiy sharoitdagi tajriba natijalari bilan solishtiriladi. Tekshirish natijalari matematik modelni qayta ko'rib chiqish (yangilash) yoki tuzilgan matematik modelni berilgan obyekt, jarayon yoki tizimni loyihalashtirish uchun qo'llash mumkinligi haqidagi masala ko'rib chiqiladi.

Yana, shuni ham aytish mumkinki, kompyuterda modellashtirish va hisoblash tajribalarini o'tkazish matematik masalalarni yechish bilan obyektlarda tadqiqotlarni olib borishga ham imkon yaratadi. Bu bilan yaxshi ishlab chiqilgan matematik apparat yordamida yuqori darajali hisoblash texnikasini birgalikda o‘rganish uchun imkoniyatlardan foydalanish yo‘llari ochiladi.

Real obyekt, jarayon yoki tizim holatini tadqiq qilish yoki loyihalash masalasida matematik model chiziqsiz bo‘lishi ham mumkin. Shu bois real obyekt, jarayon yoki tizim holatini tadqiq qilish yoki loyihalash masalasida ko‘p hollarda DNA tipidagi matematik modellar ishlatiladi (D-diterminallashgan, N-uzluksiz, A-analitik).

Nazorat savollari

1.Model nima?
2.Modellashtirish deganda nima tushuniladi?
3.Modellashtirishdan maqsad nima?
4.Modellarni qanday sinflarga ajratish mumkin?
5.Modellarga tariff bering.
6. Matematik modellashtirish nima?
7.Matematik modelni qurish tamoyillari nimalarga bo‘linadi?
8.Analitik model nima?
9.Imitatsion model nima?
10.Matematik model qurish uchun nimalar kerak?
11.O‘rganilayotgan obyekt, jarayon yoki tizimni matematik ifodalash nimalarga bog‘liq?
12.Matematik modelni tanlash bosqichida nimalar aniqlanadi?
13.Matematik model tuzishning asosiy bosqichlarini tushuntiring.

4. ENG SODDA MATEMATIK MODELLAR VA MATEMATIK MODELLASHTIRISHNING ASOSIY TUSHUNCHALARI

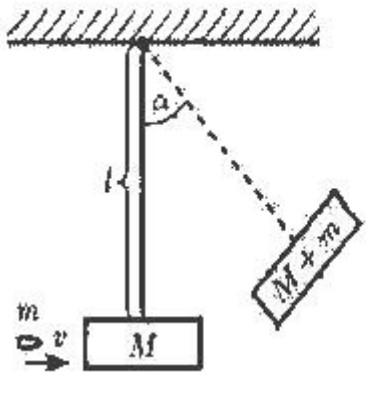
Mazkur bo‘lim mashhur olim, Rossiya Federatsiyasi fanlar akademiyasining akademigi A.A.Samarskiy va A.P.Mixaylovlarning matematik modellashtirish (matematicheskoe modelirovanie) monografiyasi asosida yozildi.

4.1. Elementar matematik modellar

Tabiatning fundamental qonunlari, variatsion tamoyillar, o‘xshashliklar, ierarxik zanjirlarni qo‘llashga asoslangan eng sodda matematik modellarni qurishning yondashuvlarini ko‘rib chiqaylik. Soddalikka qaramay, jalb etilayotgan material modellarning mosligi, ularning «ta’minlanganligi», nochiziqligi, sonli amallashtirish va bir qator boshqa materiallarni muhokama qilishga imkon beradi.

1.Tabiatning fundamental qonunlari. Modellarni qurishning keng tarqalgan usuli tabiatning fundamental qonunlarini aniq bir vaziyatda qo‘llashdan iborat. Bu qonunlar hamma tomondan tan olingan, tajriba asosida ko‘p marotaba tasdiqlangan, ilmiy-texnik yutuqlarning asosi bo‘lib xizmat qiladi. Shu bois ularning asoslanganligi shubha tug‘dirmaydi, bu esa izlanuvchiga kuchli ruhiy quvvat bag‘ishlaydi. Birinchi qatorda ma’lum bir vaziyatda qanday qonun (qonunlar) qo‘llash kerak degan savol tug‘iladi.

a) Energiyaning saqlanishi. Bu qonun qariyib 200 yildan beri ma’lum bo‘lib, tabiatning buyuk qonunlari orasida faxriy o‘rinni egallaydi. Unga asoslanib, o‘qning tezligini tezkor usulda aniqlamoqchi bo‘lgan ballistika bo‘yicha ekspert oldida laboratoriyasi bo‘lmasa ham, mayatnikka o‘xshash nisbatan oson qurilma- yengil va erkin aylanuvchi sterjenga osilgan yukdan foydalanishi mumkin. (4.1-rasm). Yukda tiqilib qolgan o‘q «o‘q-yuk» tizimiga o‘zining kinetik energiyasi haqida ma’lumot beradi, bu tizim esa o‘z navbatida sterjen vertikaliga nisbatan eng ko‘p darajada og‘ganda to‘laligicha potentsial energiyaga o‘tadi. Bu



4.1-rasm.

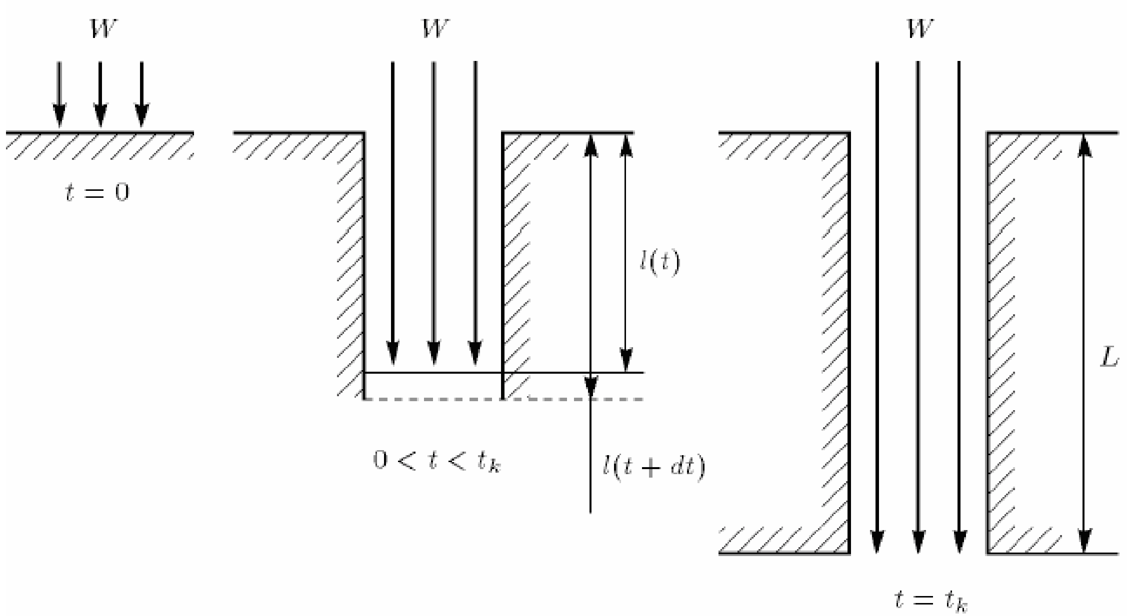
transformatsiyalar quyidagi tengliklar zanjiri ko‘rinishida yoziladi:

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha).$$

Bu yerda $mv^2/2$ – v tezlikka ega bo‘lgan m massa yo‘lining kinetik energiyasi, M – yukning massasi, V – «o‘q-yuk» sitemasining to‘qnashishdan keyingi tezligi, g-erkin tushish tezlanishi, l-sterjen uzunligi, α - eng kata og‘ish burchagi. Qidirilayotgan tezlik quyidagi formula bilan topiladi:

$$v = \sqrt{\frac{1(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}. \qquad (4.1)$$

Agar energiyaning o‘q hamda yukni qizdirishga, havoning qarshiligini engishga sarf bo‘lishini hisobga olmasak, tezlikning qiymati aniqroq bo‘ladi. Bir qarashda bu to‘g‘ri mulohaza, lekin aslini olganda unday emas. O‘q bilan mayatnikning «yopishishi» paytida sodir bo‘ladigan jarayonlar faqatgina mexanik emas. Shuning uchun v kattalikni hisoblashda qo‘llanilgan mexanik energiyaning saqlanish qonuni unchalik to‘g‘ri emas: tizimning mexanik emas, to‘la energiyasi saqlanadi. Mexanik energiya o‘z yo‘lidagi tezlikni baholashda quyi chegarani yaratadi (bunday sodda masalani to‘g‘ri yechish uchun impulsning saqlanish qonunini ham xisobga olish kerak 1-misolga qarang).



4.2-rasm. Metallni lazer bilan o‘yishning boshlang‘ich, oraliq va yakuniy bosqichlari.

Shunga o‘xshash mulohazadan muhandis nurlanishi material yuzasiga perpendikulyar yo‘nalgan W quvvatli lazer bilan L qalinlikdagi metall qatlamini o‘yishning t_k vaqtini baholashda foydalanishi mumkin (2). Agar lazerning energiyasi LS_ρ (S-nurlanayotgan yuza, LS – ustun hajmi, ρ – modda zichligi) to‘laligicha ustunni o‘yish uchun sarf bo‘lsa, u holda energiyaning saqlanish qonuni quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$E_0 = Wt_k = hLS\rho, \qquad (4.2)$$

Bu o‘rinda *h* – birlik massaning bug‘lanishi uchun kerak bo‘ladigan energiya. h kattalik tarkibiy qismdan iborat: $h = (T_{пл} - T)h_1 + h_2 + h_3,$ formulaning mazmuni quyidagicha: materialni avvalo erish harorati T_{pl} gacha olib kelib, so‘ngra suyultirib, bug‘ga aylantirish (T – boshlang‘ich harorat, h_1 – solishtirma issiqlik sig‘imi, h_2 va h_3 – mos ravishda solishtirma erish va bug‘lanish issiqligi) kerak.

O‘yma chuqurligining l(t) vaqt o‘tishi bilan o‘zgarishi energiyaning *t* dan *t+dt* gacha bo‘lgan vaqt oralig‘idagi balansidan $[l(t+dt) - l(t)]S\rho = dl\ S\rho$ topiladi.

Bu vaqt ichida bug‘langan massaga W dt ga teng bo‘lgan $dl\,hS\rho$ energiya sarf bo‘ladi $dl\,hS\rho = W\,dt$, bu energiya haqidagi ma’lumot esa lazer orqali moddaga yetkaziladi.

Bu yerdan quyidagi differensial tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hS\rho}.$$

Uni integrallash natijasida (o‘ymaning boshlang‘ich chuqurligi nolga tengligini hisobga olgan holda):

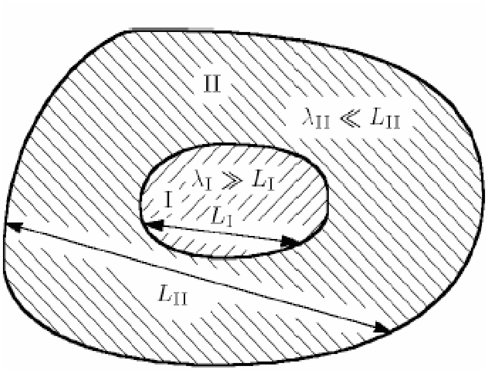
$$l(t) = \frac{W}{hS\rho}t = \frac{E(t)}{hS\rho} \qquad (4.3)$$

formula hosil qilinadi, bu o‘rinda E(t) – lazer tomonidan t vaqtgacha ajralgan butun energiya. Demak, o‘ymaning chuqurligi sarf bo‘lgan energiyaning qiymatiga proportsional (jumladan, $l(t_k) = L$ dagi t_k ning qiymati (4.2) formula bo‘yicha hisoblangan qiymat bilan ustma-ust tushadi).

Hayotda esa o‘yish jarayoni ko‘rib chiqilgan sxemadan ancha murakkabroq energiya moddani qizdirishga, noto‘g‘ri shaklga ega bo‘lgan o‘ymadan bug‘larni olib tashlashga sarf bo‘ladi. Shuning uchun, taklif etilgan matematik ta’rifning to‘g‘riligiga bo‘lgan ishonch o‘q bilan bog‘liq holdagidan kamroqdir. Obyekt bilan modelning mos kelishi - matematik modellashtirishning markaziy masalasi bo‘lganligi uchun, unga keyinchalik ko‘p marta murojaat etamiz.

b) Materiyaning saqlanishi. Maktab o‘quvchisi ikkita quvurdan oquvchi hamda kiruvchi suv bilan basseynni to‘ldirish haqidagi masalani yechayotganida aynan shu mulohazadan foydalanadi. Albatta, bu qonunning qo‘llanilish doirasi ancha keng.

Masalan, bizda «oddiy» material (qo‘rg‘oshin) ning qalin qatlami bilan o‘ralgan kam miqdorda radioaktiv modda (uran) berilgan bo‘lsin - bunday vaziyat bo‘linadigan materiallarni saqlashda, yoki energetika ishlarida (4.3-rasm) ko‘p uchraydi. «Kam miqdor» degan ibora ostida soddalashtirilgan hol, aniq qilib aytganda, yemirilishning hamma mahsulotlari atomlar bilan to‘qnashmay, I sohani hech qanday qiyinchiliklarsiz tark etadi degan mazmun yashirilgan. Boshqa so‘z bilan aytganda, yemirilishdagi moddalarning erkin yugurish uzunligi λ_1 birinchi moddada materialning xususiy o‘lchamlari L_1 dan ham kattaroq, ya’ni $\lambda_1 >> L_1$. «Qalin qatlam» iborasi xafvsizlik maqsadida ajraluvchi mahsulotlar II sohada butunlay yutilib ketilishini anglatadi. Bu esa $\lambda_{II} << L_{II}$ teskari shart bajarilganida amalga oshadi, bu yerda λ_{II} -ikkinchi moddadagi yemirilish mahsulotlarining erkin yugurish yo‘li, L_{II} – uning xususiy o‘lchami.



4.3-rasm

Shunday qilib, bir sohadan uchib chiquvchi hamma narsa, II sohada yutiladi va ikkala moddaning umumiy massasi vaqt o‘tishi bilan ham o‘zgarmaydi. Bu esa berilgan vaziyat uchun qo‘llanilgan materiyaning saqlanish qonunidir. Agar boshlang‘ich vaqt momenti t=0 da $M_I(0)$ va $M_{II}(0)$ moddalarning massalari teng bo‘lsa, vaqtning ixtiyoriy momentida quyidagi balans o‘rinli:

$$M_I(0)+ M_{II}(0)= M_I(t)+ M_{II}(t). \qquad (4.4)$$

Bitta tenglamaning o‘zi ikkita massa $M_I(t)$ va $M_{II}(t)$ larning joriy qiymatlarini aniqlash uchun yetarli emas. Matematik mulohazani tugallash uchun emirilish bilan bog‘liq qo‘shimcha ta’rifni kiritish kerak. Unga ko‘ra, yemirilish tezligi (birlik vaqtda yemirilgan atomlar soni) radioaktiv moddadagi atomlarning umumiy soniga proportsionaldir. Kichik vaqt dt ichida t va t+dt momentlar orasida jami:

$$N_I(t+dt) - N_I(t) = -\alpha N_I(t+\xi dt), \;\; \alpha > 0, \;\; 0 < \xi < 1,$$

atomlar yemiriladi. Bu yerda moddaning saqlanish qonuni ikkinchi marotaba qo‘llanilgan bo‘lib, u butun jarayonga emas, faqatgina dt vaqt oralig‘iga tegishli. Atomlarning balansini ta’riflovchi tenglamaning o‘ng tomonida minus ishorasi (modda kamayib ketmoqda) turibdi, $N_I(t+\xi dt)$

qiymat esa ko‘rib chiqilayotgan vaqt ichidagi atomlar sonining o‘rta qiymatiga mos keladi. Uni differensial ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dN_I(t)}{dt} = -\alpha N_I(t).$$

$M_I(t)=\mu_1 N_I(t)$ ligini hisobga olsak (bu yerda μ_1 – I moddaning atom massasi) quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\frac{dM_I(t)}{dt} = -\alpha M_I(t). \qquad (4.5)$$

Erkli radioaktivlikka ega bo‘lgan ixtiyoriy atom atrofdagi moddaning holatiga bog‘liq bo‘lmagan yemirilish ehtimoliga ega. Shu bois eng radioaktiv modda qanchalik ko‘p (kam) bo‘lsa, birlik vaqt ichida yemirilish mahsuloti shuncha ko‘p (kam) ajraladi. Proportsionallik koeffisienti $\alpha > 0$ (yemirilish doimiysi) aniq bir modda orqali aniqlanadi. (4.4), (4.5)tenglamalar $\lambda_I >> L_I, \lambda_{II} << L_{II}$ shartlar hamda α, $M_I(t)$, $M_{II}(t)$ kattaliklar bilan birgalikda ko‘rib chiqilayotgan obyektning matematik modelini tashkil etadi. (4.5) integrallab, shuni guvohi bo‘lamizki, bo‘linayotgan materialning massasi eksponent qonun bo‘yicha kamayadi:

$$M_I(t) = M_I(0)e^{-\alpha t},$$

$t \to \infty$ da I sohadagi modda butunlay yo‘q bo‘lib ketadi.

Umumiy massa (4.4) ga ko‘ra o‘zgarmas bo‘lib qolishi tufayli, II sohadagi modda miqdori ortadi:

$$M_{II}(t) = M_{II}(0) + M_I(0) - M_I(0)e^{-\alpha t} = M_{II}(0) + M_I(0)(1 - e^{-\alpha t}),$$

va $t \to \infty$ da yemirilish mahsulotlari I sohadan butunlay II sohaga o‘tib ketadi.

v) Impulsning saqlanishi. Shamolsiz havoda ko‘l yuzida qo‘zg‘almay turgan qayiq uning bir uchidan ikkinchi uchiga o‘tganda oldinga siljiydi. Impulsning saqlanish qonuni bo‘yicha tashqi kuchlar ta’sir qilmaganida tizimning to‘la impulsi saqlanadi.

Reaktiv harakat prinsipi ko‘plab ajoyib texnik qurilmalar, masalan, yer orbitasiga sun’iy yo‘ldosh tezligini 8 km/s gacha rivojlantirib, chiqaruvchi raketalar zamiriga asoslangan. Raketa harakatining eng sodda matematik modeli havoning qarshiligini, gravitatsiya va boshqa kuchlarni hisobga olmagan holda impulsning saqlanish qonunidan kelib chiqadi.

Raketa yoqilg‘isining yonuvchi mahsulotlari chiqarish qurilmasidan *u* (zamonaviy yoqilg‘ilar uchun *u* qiymati 3-5 km/s ga teng) tezlikda chiqib ketadi. Vaqtning qisqa oralig‘i *dt* da *t* va *t* + *dt* ichida yoqilg‘ining bir qismi yonib bo‘ldi va raketaning massasi *dm* ga o‘zgardi. Shuningdek, raketa impulsi ham o‘zgaradi, lekin «raketa plyus yonish mahsulotlari» tizimining umumiy impulsi o‘zgarmaydi, ya’ni:

$$m(t)\,v(t) = m(t + dt)v(t + dt) - dm\,[v(t + \xi\,dt) - u],$$

bu yerda u(t) – raketa tezligi, $v(t + \xi\,dt)$ - u ($0<\xi < 1$) – raketadan *dt* vaqt oralig‘ida chiqib ketuvchi gazlarning o‘rtacha tezligi (ikkala tezlik ham yerga nisbatan olinadi). Bu tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi had - raketaning $t + dt$ momentidagi tezligi, ikkinchisi - oquvchi gaz tomonidan *dt* vaqt ichida uzatilgan impulsdir.

$m(t+dt)=m(t)+(dm/dt)dt + O(dt^2)$ ni hisobga olib, impulsning saqlanish qonunini differensial tenglama ko‘rinishida yozib olish mumkin:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u,$$

Bu yerda– (*dm/dt*) raketa dvigatellarining og‘irlik kuchini quyidagi ko‘rinishga keltirib:

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt},$$

uni osonlikcha integrallash mumkin:

$$v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{m(t)}}\right).$$

Bu o‘rinda v_0, m_0 – raketaning t=0 momentdagi tezligi va massasi. Yonilg‘i butunlay yonib ketganda erishiladigan eng ko‘p tezlik quyidagiga teng:

$$v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right). \qquad (4.6)$$

Bu yerda *tr* – foydali massa (yo‘ldoshning massasi), t. – tarkibiy massa (raketa qurilmalari-yonilg‘i baklari, dvigatellar, boshqaruv tizimlarining shaxsiy massasi).

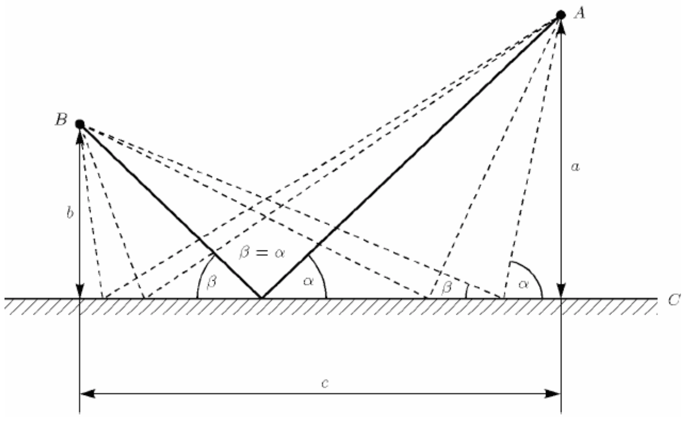
TSiolkovskiyning sodda formulasi (4.6) kosmik uchishlarga mo‘ljallangan raketaning tuzilishi haqida fundamental xulosalar chiqarishga imkon beradi. $m_p = 0$ da raketaning tarkibiy va boshlang‘ich massalari orasidagi munosabatni xarakterlovchi kattalik - $\lambda\frac{m_s}{m_0 - m_p}$ ni kiritamiz. U holda deyarli real qiymatlar $\lambda = 0{,}1$, $\mathrm{u} = 3$ km/s uchun $m_p = 0$ dagi $v = u\ln(1/\lambda) = 7$ km/s.

munosabatni hosil qilamiz. Bundan kelib chiqadiki, eng ideal holatda (foydali massa nolga teng, gravitatsiya hamda xavoning qarshiligi yo‘q va x.k) ham ko‘rib chiqilayotgan turdagi raketa birinchi kosmik tezlikka erisha olmaydi. Bu yerdan kelib chiqadiki, uchish paytida ko‘p qadamli raketadan foydalanish kerak - bu xulosaga kosmonavtikaning asoschilari kelgan.

Berilgan misol o‘z navbatida «eng yaxshi ta’sir» prinsipini tasvirlaydi, u esa o‘z navbatida murakkab obyektlarni (agar eng yaxshi sharoitlarga qo‘yilgan obyekt zaruriy tavsiflarga erisha olmasa, obyektga bo‘lgan yondashuvning o‘zini o‘zgartirish yoki unga bo‘lgan talablarni yumshatish kerak; agar talablar me’yorida bo‘lsa, keyingi qadamlar obyektga qo‘shimcha omillarning tasirini o‘rganish bilan bog‘liq bo‘ladi.

2. Variatsion tamoyillar. Modellarni qurishning yana bir yondashuvi o‘zining kengligi va mukamalligi jihatidan fundamental qonunlarga teng bo‘lib, *variatsion qonunlarni* qo‘llashga asoslanadi. Ular ko‘rib chiqilayotgan obyekt (tizim, hodisa) haqida umumiy tasavvurga ega bo‘lib, mazmunan shunday deydi: uning barcha xatti-harakatlari (evolyutsiya, harakat) ichidan ma’lum bir shartni qanoatlantiruvchilargina tanlanadi. Odatda bu shartga ko‘ra obyekt bilan bog‘liq ma’lum bir kattalik uning bitta holatdan ikkinchisiga o‘tishida ekstremal qiymatga erishadi.

Faraz qilaylik, doimiy v tezlik bilan harakatlanuvchi avtomobil *A* nuqtadan *V* ga o‘tishi hamda ma’lum bir S to‘g‘ri chiziqqa urinishi kerak (4.4-rasm). Avtomobil haydovchisi juda shoshmoqda, shu bois u traektoriyalar to‘plami ichidan eng kam vaqt sarf bo‘luvchi yo‘lni tanlaydi.



4.4-rasm. A nuqtadan V nuqtaga S kesmani urinib o‘tgan holda o‘tishning turli xil traektoriyalari. Qalin chiziq bilan vaqt sarfining tezkor yo‘li ajratib ko‘rsatilgan

Sarf bo‘lgan vaqtni α kattalik - to‘g‘ri chiziq bilan A nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan kesma orasidagi burchakning funksiyasi ko‘rinishida tasvirlaymiz:

$$t=(\alpha)=\frac{\alpha}{v\sin\alpha}+\frac{\alpha}{v\sin\beta(\alpha)}.$$

Bu yerda *a* va *b* – A va V nuqtalardan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarlar uzunligi, β(α) – to‘g‘ri chiziq bilan urinish nuqtasidan V nuqtagacha bo‘lgan kesma orasidagi burchak.

Ekstremallikning α argument bo‘yicha t(α) sharti quyidagini anglatadi:

$$\left.\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{ext}}=0$$

yoki

$$\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha}=0. \qquad (4.7)$$

A ning ixtiyoriy qiymatlari uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$c=\frac{a}{tg\alpha}+\frac{b}{tg\beta(\alpha)},$$

bu yerda s – A va V nuqtalarning to‘g‘ri chiziqdagi proeksiyalari orasidagi masofa. Uni differensiallab quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz

$$\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha}=0. \qquad (4.8)$$

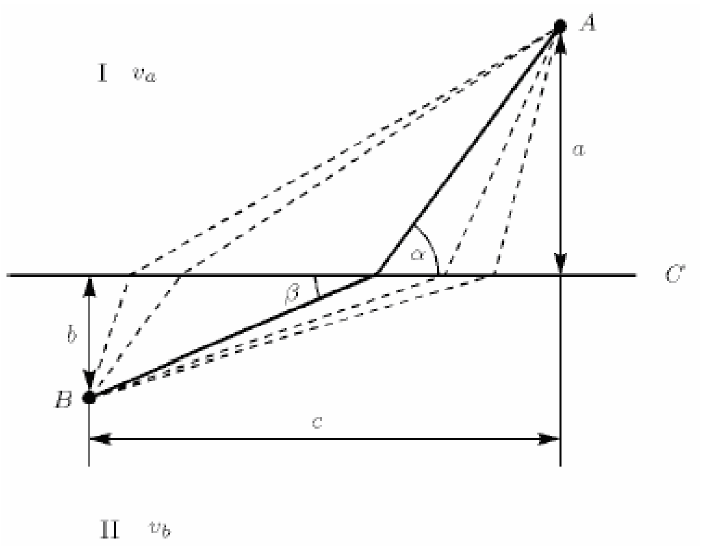
U minimallikning sharti bilan birgalikda quyidagini anglatadi:

$$\cos\alpha=\cos\beta(\alpha),$$

ya’ni α va β burchaklar tengdir (5-misolga qarang).

So‘ngra α_{min}, t_{min} qiymatlarning o‘zini ham berilgan a, b, c kattaliklardan topib olish mumkin. Lekin hozir biz uchun boshqa narsa ahamiyatliroq – vaqtning eng kam harajatlar sharti «tushish burchagi qaytish burchagiga teng» degan qoida asosida mos traektoriyani tanlashga olib keladi. Lekin bunday qonunga qaytaruvchi yuzaga tushgan yorug‘lik nuri ham bo‘ysunadi. Balki umumiy holda yorug‘lik nuri signalning bitta nuqtadan ikkinchisiga tezkor yetishini ta’minlovchi traektoriya bo‘yicha harakatlanar? Ha, Fermaning mashhur variatsion tamoyiliga ko‘ra, aynan shunday bo‘ladi, unga tayanib geometrik optikaning hamma qonunlarini hosil qilish mumkin.

Buni yorug‘lik nurining ikkita muhit chegarasida sinish misolida ko‘rib chiqaylik (4.5-rasm). A nuqtadan chiquvchi yorug‘lik birinchi muhitda v_a tezlik bilan harkatlanib, sinadi, ajralish chizig‘idan o‘tib,



4.5-rasm. A nuqtadan V nuqtaga o‘tuvchi hamda S to‘g‘ri chiziq-ikkita muhit chegarasida sinuvchi yorug‘lik nurlarining mavjud traektoriyalari

qalin chiziq bilan sinish qonuniga bo‘ysunuvchi traektoriya ajratib ko‘rsatilgan:

$$\cos\alpha / \cos\beta = v_a / v_b$$

og‘adi va ikkinchi muhitda v_b tezlik bilan harakatlanib, V nuqtaga tushadi. Agar α - yorug‘likning tushish burchagi, β(α) esa – uning sinish burchagi bo‘lsa, uning A dan V ga o‘tish vaqti quyidagiga teng:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v_a \sin\alpha} + \frac{b}{v_b \sin\beta(\alpha)}.$$

Minimallik sharti $t(\alpha)$

$$\frac{a\cos\alpha}{v_a \sin\alpha} + \frac{b\sin\alpha}{v_b \sin\beta(\alpha)} . \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 .$$

Oxirgi formuladan $d\beta / d\alpha$ hosilani olib tashlab, quyidagi tenglikka:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{v_\alpha}{v_b}, \qquad (4.9)$$

ya’ni mashhur yorug‘lik sinish qonuniga kelamiz.

Ma’lum bir hodisalarga nisbatan qo‘llaniluvchi variatsion tamoyillar mos matematik modellarni qurishga imkon beradi. Ularning universalligi yana shunda namoyon bo‘ladiki, ularni qo‘llash paytida jarayonning aniq tabiatidan biroz chekinish mumkin. Shu yo‘sinda, avtomobil haydovchisi «minimal vaqt» tamoyili bo‘yicha harakat qilib, qumli joyda (bitta tezlik) joylashgan A nuqtadan o‘tloqda yotgan (boshqa tezlik) V nuqtaga o‘tishi uchun A va V ni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq bo‘yicha emas, qum bilan o‘tloqni ajratuvchi siniq traektoriya bo‘ylab yurishi kerak.

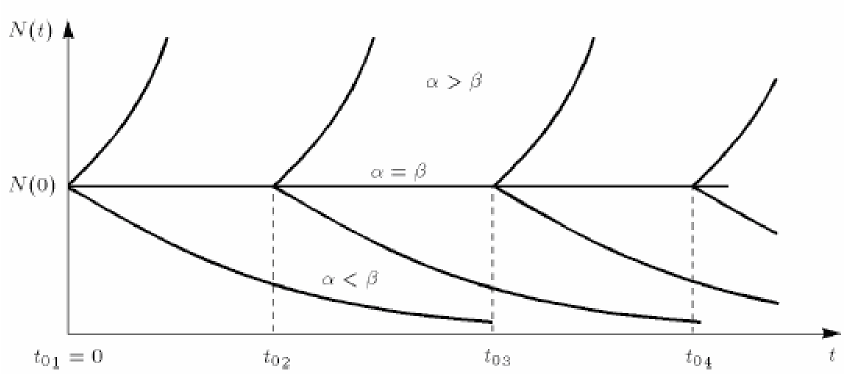
3. Modellarni qurishda o‘xshashliklardan foydalanish. Ko‘pgina hollarda biron bir obyektning modelini qurishda uning bo‘ysungan fundamental qonuni yoki variatsion tamoyili haqida aniq gapirib bo‘lmaydi, ushbu nuqtai nazar bo‘yicha qaraydigan bo‘lsak, matematik ta’rifga ega bo‘lgan bunday qonunlarning o‘zi yo‘q. Bunday obyektlarga bo‘lgan eng samarali yondashuvlardan biri oldin o‘rganilgan hodisalar bilan bog‘liq o‘xshashliklardan foydalanishdir. Radioaktiv yemirilish bilan populyatsiya dinamikasi, xususan sayyoramizdagi aholi sonining o‘zgarishi orasida qanday bog‘liqlik mavjud? Lekin eng sodda pog‘onada bunday o‘xshashlik ko‘zga tashlanadi, bu hodisani populyatsiyaning *Maltus* modeli ifoda etadi. Uning asosiga sodda tasdiq kiritilgan - aholining t vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi v uning joriy aholisini *N(t)* tug‘ilish $\alpha(t) \geq 0$ va o‘lish $\beta(t) \geq 0$ koeffisientlar ayirmasiga ko‘paytirilganga teng. Natijada quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \qquad (4.10)$$

u esa radioaktiv yemirilish tenglamasiga juda o‘xshaydi, $\alpha < \beta$ da esa mutlaqo ustma-ust tushadi (agar α va β lar doimiy bo‘lsa). Bu ajablanarli hol emas, chunki ushbu formulalarni chiqarish paytida bir xil mulohazalardan foydalaniladi. (4.10) tenglamani integrallash natijasida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}[\alpha(t) - \beta(t)]dt\right),$$

bu yerda $N(0)=N(t=t_0)$ – boshlang‘ich aholi soni.



4.6-rasm. Maltus modeliga ko‘ra vaqt o‘tishi bilan aholi sonining o‘zgarishi

4.6-rasmda α *va* β doimiylar ishtirok etgan N(t) funksiyaning grafiklari keltirilgan (bir-biriga o‘xshash egri chiziqlarga jarayonning turli xil boshlanish vaqtlari to‘g‘ri keladi). $\alpha=\beta$ da aholi soni o‘zgarmaydi, ya’ni bu holda tenglamaning yechimi N(t)=N(0) teng kuchli kattalik bo‘ladi. Tug‘ilish va o‘lish orasidagi muvozanat turg‘un emas, chunki $\alpha=\beta$ tenglik sal bo‘lsa-da buzilishi natijasida N(t) funsiya N(0) muvozanat qiymatdan anchagina chetlashib ketadi. $\alpha \ll \beta$ da aholi soni kamayadi va $t\to\infty$ da nolga qarab intiladi, $\alpha > \beta$ da esa ma’lum bir eksponentsial qonun bo‘yicha o‘sadi va $t\to\infty$ dagina cheksizlikka aylanadi. Oxirgi holat Maltusni yer aholisining ortib ketishi haqidagi nazariyaga olib keladi.

Berilgan misolda ham, yuqorida ko‘rib chiqilgan hollarda ham modelni qurish bilan bog‘liq ko‘pgina cheklanishlar mavjud. Albatta, aholi sonining o‘zgarishi kabi murakkab jarayon oddiy qonuniyatlar orqali ifodalana olmaydi. Ideal holatda ham taklif etilgan model aqalli resurslarning cheklanganligi tufayli haqiqatga to‘laqonli javob bermaydi.
Qilingan eslatma juda murakkab hodisalarning matematik modellarini qurishda o‘xshashliklarning ahamiyatini hech ham susaytirmaydi. O‘xshashliklarni qo‘llash modellarning muhim xususiyatlariga - ularning mukammalligiga, har xil tabiatli obyektlarga qo‘llash xususiyatiga tayanadi. Shunday qilib, «kattalikning o‘zgarish tezligi kattalikning o‘ziga proportsional» degan faraz bir-biridan ancha uzoq bo‘lgan fan sohalarida qo‘llaniladi.

4. Modellarni olishda ierarxik yondashuv. Faqatgina ayrim hollarda sodda modellar uchun hamma omillarni hisobga olib, matematik modelni oldindan qurish qulay bo‘ladi. Shuning uchun «soddadan-murakkabga» tamoyilini amalga oshiruvchi yondashuv tabiiydir, bunda uncha qiyin bo‘lmagan modelni sinchkovlik bilan o‘rgangandan so‘ng keyingi qadam qo‘yiladi. Bunda anchayin to‘liq modellarning zanjiri hosil bo‘ladi, ularning har biri oldingilarning umumlashmasidir.

Bunday zanjirni ko‘p qismli raketaning modeli uchun quraylik. 1 bo‘limni oxirida qayd etilganidek, real bir qismli raketa birinchi kosmik tezlikka erisha olmaydi. Buning sababi - yoqilg‘ining nozarur tarkibiy massani haydashga sarf bo‘lishidir. Demak, raketaning harakati paytida davriy ravishda ballastdan qutilib turish kerak. Amaliyotdagi mazmun quyidagicha: raketa bir nechta qismdan tashkil topgan bo‘lib, foydalanganlik darajasiga qarab tashlab yuboriladi.

m_i – i-qismning umumiy massasi, λm_1 - mos tarkibiy massa (bunda yonilg‘ining massasi $(1-\lambda)m_i$) ga teng, m_r – foydali yuklanish massasi. λ kattalik va gazlarning oqish tezligi *i* hamma qatlamlar uchun bir xil. Aniqlik uchun qatlamlar sonini *n*=3 deb olaylik. Bunday raketaning boshlang‘ich massasi quyidagiga teng:

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Shunday momentni hisobga olaylikki, bunda birinchi bosqichning butun yonilg‘isi sarf bo‘linib, massa quyidagiga teng bo‘lsin:

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3.$$

Boshlang‘ich modelning (4.6) formulasi bo‘yicha raketaning tezligi quyidagiga teng:

$$v_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

v_1 tezlikli harakatdan so‘ng λm_1 tarkibiy massa tashlab yuboriladi va ikkinchi bosqich yoqiladi. Bunday momentda raketaning massasi quyidagiga teng:

$$m_p + m_2 + m_3.$$

Bu momentdan boshlab, ikkinchi bosqichdagi yoqilg‘ining to‘la yonib ketishi momentigacha oldin qurilgan modeldan foydalanishga hech nima xalaqit bermaydi.Umumiy impulsning saqlanish to‘g‘risidagi hamma mulohazalar o‘z kuchida qoladi (bunda raketaning boshlang‘ich tezligi v_1 borligini hisobga olish kerak). U holda (4.6) formulaga ko‘ra ikkinchi qism yonib ketgandan keyin raketa quyidagi tezlikka erishadi:

$$v_2 = v_1 + u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right).$$

Xuddi shunday mulohazalar raketaning uchinchi qatlami uchun qo‘llanilgan. Uning dvigatellari o‘chganida raketaning tezligi quyidagiga teng:

$$v_3 = v_2 + u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right).$$

Bu zanjirni ixtiyoriy sonli qismlar uchun qo‘yib, mos formulalarni hosil qilish mumkin. n=3 holda esa umumiy formulaning ko‘rinishi quyidagicha:

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)\right\},$$

yoki quyidagi kattaliklarni kiritib :

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3},\ \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3},\ \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p},$$

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1-1)}\right)\left(\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2-1)}\right)\left(\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3-1)}\right)\right\}.$$

ga ega bo‘lamiz. Berilgan ifoda α_1, α_2, α_3 kattaliklarga nisbatan ham simmetrik, u maksimumga simmetrik holat, ya’ni $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ da erishishini ko‘rsatish qiyin emas, Jumladan i=3 da:

$$\alpha\frac{1-\lambda}{P-\lambda},\ P = \exp\left(\frac{v_3}{3u}\right).$$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\alpha$ tenglikni m_0/m_p ga nisbatan tekshirish qiyin emas.

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^3.$$

Ko‘p qismli raketa uchun quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n,\ P = \exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right), \qquad (4.11)$$

bu yerda n – qismlar soni.

(4.11) formulani tahlil qilaylik. v_n = 10,5 km/s, λ = 0,1 deb olaylik. U holda p = 2, 3,4 uchun t_0 = 149 t_r, t_0 = *77* m_r, m_0 = 65 m_p ga ega bo‘lamiz. Bu degani, ikki qismli raketa ma’lum miqdordagi foydali massani orbitaga chiqarishga layoqatli (lekin bir tonnali foydali yuk uchun 149 tonnalik raketaga ega bo‘lish kerak). Uchinchi qismga o‘tish raketa massasini deyarli ikki baravar kamaytiradi (lekin, uning konstruksiyasini murakkablashtiradi), to‘rt qismli raketa esa uch qismliga nisbatan sezilarli yutuq bermaydi.

Ushbu zanjirni qurish bunday muhim xulosalarga osonlik bilan olib keladi. Matematik modellarning zanjiri «qiyinidan osoniga» degan tamoyil bo‘yicha quriladi. Bunda «yuqoridan pastga» yo‘li amalga oshiriladi - umumiy va murakkab modeldan o‘ziga xos soddalashtiruvchi farazlardan ancha sodda modellar ketma-ketligi hosil qilinadi.

5. Matematik modellarning nochiziqligi haqida. Yuqorida ko‘rib chiqilgan modellarning soddaligi ko‘p jihatdan *chiziqlilik* bilan bog‘liq. Matematik jihatdan bunday muhim tushunchaning ma’nosi *superpozitsiya tamoyili*ning to‘g‘riligidadir, ya’ni yechimlarning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi (masalan, ularning yig‘indisi) ham masalaning yechimi bo‘ladi. Superpozitsiya tamoyilidan foydalangan holda, biron bir xususiy holda yechimni topib, umumlashgan holat to‘g‘risida ham fikr yuritish mumkin. Shuning uchun, umumiy holatning sifatli xususiyatlari haqida xususiylariga qarab fikr yuritish mumkin - ikkita yechim orasida faqatgina miqdoriy farq mavjud. Masalan, raketa yoqilg‘isi oqish tezligini ikki baravar ortishi raketa tezligining ham ikki baravar ortishiga, yorug‘lik nurining qaytaruvchi yuzaga tushish burchagining kamayishi qaytish burchagining kamayishiga olib keladi. Boshqa aytganda, chiziqli modellar holatida obyektning biron bir sharoitlari o‘zgarishiga bildiradigan fikri ularning o‘zgarish qiymatiga proportsional.

Matematik modellarni superpozitsiya tamoyiliga bo‘ysunmaydigan *nochiziqli hodisalarda* obyektning bir qismi hatti-harakatlarini bilish butun obyekt haqida ma’lumot bermaydi. Bunda yorug‘lik nurining ikkita muhit chegarasiga tushish burchagi sinish burchagining ma’lum bir chegaragacha kamayishga olib keladi. Agar tushish burchagi kritik nuqtadan kamayib ketsa ((4.9) formulaga qarang), sifat o‘zgaradi, yorug‘lik ikkinchi muhitning zichligi birinchisidan kamroq bo‘lsa, unga o‘tmay qoladi. Shunday qilib, yorug‘lik nurining sinishi - noziqli jarayonga misoldir.

Ko‘pgina real jarayonlar va ularga to‘g‘ri keluvchi matematik modellar nochiziqli. Chiziqli modellar esa faqatgina xususiy hol bo‘lib, haqikatga taqriban yaqinlashgan bo‘ladi. Masalan, populyatsion modellar resurslarning cheklanganligini hisobga olganda nochiziqli bo‘lib qoladi. Ularni chiqarishda quyidagi holatlar hisobga olinadi:

1) atrof muhit ta’minlab berishi mumkin bo‘lgan aholining N_p «muvozanat» soni mavjud;

2) aholi sonining o‘zgarish tezligi sonni muvozanat qiymatdan chetlanish kattaligiga ko‘paytmasiga proportsional (Maltus modelidan farqli o‘laroq), ya’ni:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N,\ \alpha > 0. \tag{4.12}$$

Bu tenglamadagi (1-N/N_p) had aholining «to‘yinish» mexanizmini ta’minlaydi, $-N < N_p (N < N_p)$ da o‘sish tezligi musbat (manfiy) bo‘lib, $N \to N_p$ da nolga intiladi.

4.12 - tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{dN}{N_p - N} + \frac{dN}{N} = \alpha\, dt\,.$$

So‘ngra uni integrallab quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$-\ln(N_p - N) + \ln N = \alpha t + C.$$

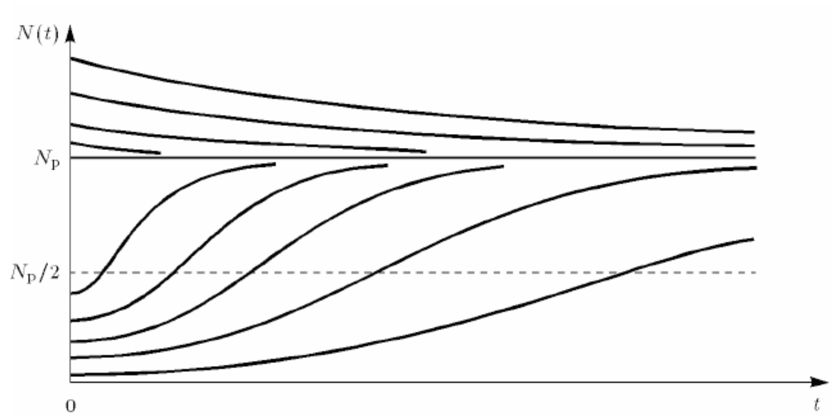
Integrallash doimiysi $N(t=0) = N(0)$ shartidan topiladi, ya’ni $C = \ln((N_p - N(0))^{-1} N(0))$. Natijada:

$$N = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t},$$

yoki yakuniy holatda:

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}.$$

N(t) funsiyaning xatti-harakati mantiqiy egri chiziq bilan tushuntiriladi (4.7-rasm). Ixtiyoriy N(0) da aholi soni N_p muvozanat qiymatga intiladi, jumladan qanchalik sekin intilsa, shunchalik N(t) kattalik N(0) ga yaqin bo‘ladi. Bunda muvozanat (4.10) modelga qaraganda turg‘unroq.



4.7-rasm. N(0) boshlang‘ich aholi sonining turli qiymatlariga mos keluvchi mantiqiy egri chiziqlar

Mantiqiy model populyatsiya dinamikasini Maltus modeliga qaraganda haqqoniyroq aks ettiradi, lekin u zarurat tufayli nochiziqli. Demak, ancha murakkabroq bo‘lib qoladi. Shuni qayd etish joizki, to‘yinish mexanizmi to‘g‘risidagi farazlar turli fan sohalaridagi modellarni qurishda qo‘llaniladi.

6. Joriy xulosalar. Modellarni qurish jarayonini shartli ravishda quyidagi bosqichlarga ajratish mumkin.

1. Modelni qurish obyektni yoki hodisani so‘z bilan tushuntirishdan boshlanadi. Obyekt tabiati va uni o‘rganish maqsadlari to‘g‘risidagi umumiy ma’lumotlardan tashqari, bu bosqichda ayrim farazlar ham saqlanishi mumkin (vaznsiz s, - moddaning qalin katlami, yorug‘lik nurlarining to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tarqalishi). Berilgan bosqichni modelning ta’rifi deb atasa bo‘ladi.

2. Keyingi bosqich - obyektni ideallashtirishni to‘xtatish. Uning hatti-harakatlariga to‘g‘ri kelmaydigan hamma omillar va samaralar tashlab yuboriladi. Masalan, materiya balansini tuzishda (1 bo‘lim))

uning reaktiv yemirilish sodir bo‘lishida asosiy o‘rin tutadigan omillari - kichkinaligi, massalar defekti hisobga olinmagan. Imkon qadar ideallashtiruvchi farazlar matematik shaklda yozib olinadi ($\lambda_I >> L_I$)).

3. Birinchi ikkita bosqich bajarilgandan so‘ng obyekt bo‘ysunuvchi qonunni tanlashga yoki ifodalashga o‘tilib, ular ham matematik ko‘rinishda yoziladi (masalan, geometriya masalasidan kelib chiquvchi yorug‘lik nurlarining hamma traektoriyalari uchun kattalikning o‘zgarmasligi). Shuni yodda tutish kerakki, sodda obyektlar uchun mos qonunni tanlash trivial masala emas (1-mashq).

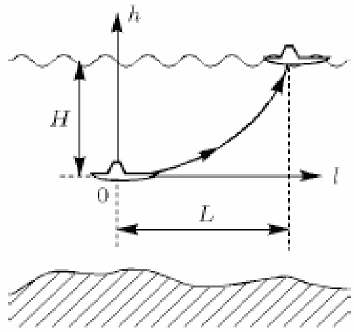
4. Model ta’rifini uning «ta’minoti» yakunlaydi. Masalan, bunda obyektning boshlang‘ich holatlari (*t*=0 da raketa tezligi va uning massasi) yoki uning boshqa tavsiflari (l,g kattaliklar) to‘g‘risida ma’lumot berish kerak, chunki ularni bilmasdan turib, obyektning hatti-xarakatini oldindan baholab bo‘lmaydi. Va nihoyat, modelni o‘rganish maqsadi sharhlanadi (yorug‘likning sinish qonunini topish, populyatsiyaning o‘zgarish qonuniyatini tushunish, yo‘ldoshning fazoga chiqaruvchi raketani qurishga bo‘lgan talabni aniqlash).

5. Qurilgan model tadqiqotchiga ma’lum hamma usullarda, shu jumladan turli xil yondashuvlarni o‘zaro solishtirish (4, 7-misollar) bilan ham o‘rganiladi. 4.1 da qayd etilgan ko‘pgina sodda hollardagi modellar faqatgina nazariy tahlilga bo‘ysunmaydi, shuning uchun bunda hisoblash usullaridan keng foydalanish kerak. Bunday hol nochiziqli obyektlarni o‘rganishda juda muhim, chunki sifatli hatti-harakat oldindan ma’lum emas.

6. Modelni o‘rganish natijasida nafaqat qo‘yilgan maqsadga erishiladi, balki hamma mavjud usullar bilan uning adekvatligi-obyektning ta’riflangan faraz bilan to‘g‘ri kelishiga erishish zarur. Noadekvat model haqiqatdan anchayin farq qiluvchi natijani berishi mumkin ((4.1) formula bilan 1-misolni solishtiring), shuning uchun uni tashlab yuborish yoki zamonaviylashtirish zarur.

4.2.Tabiatning fundamental qonunlaridan olinadigan modellarga misollar

4.1 dagi 1-misolga nisbatan, murakkabroq obyektlar uchun Arximed, Nyuton, Kulon qonunlaridan kelib chiquvchi modellarni ko‘rib chiqamiz. Ko‘rib chiqilayotgan obyektlarning ayrim xususiyatlarini muhokama qilaylik.



4.8-rasm

1. Suv osti kemasining sizib chiqish traektoriyasi. T=0 vaqt momentida suv sathiga nisbatan H chuqurlikda bo‘lgan suv osti kemasi doimiy v gorizontal tezlik bilan harakatlanib (4.8-rasm) yuzaga chiqish to‘g‘risidagi buyruqni qabul qiladi. Agar suv osti kemasi sisternasining o‘rtacha zichligi ρ_1, suvning zichligi ρ_0 kamroq bo‘lishi uchun suvdan bo‘shatilib, havoga to‘lishi uchun ketadigan vaqt uncha ko‘p bo‘lmaganligi uchun, t=0 da suv osti kemasiga kemaning og‘irligidan katta bo‘lgan itaruvchi kuch ta’sir qiladi, deb hisoblash mumkin. Arximed qonuniga ko‘ra, itaruvchi kuch $F=gV\rho_0$ ga teng. Bu yerda g – erkin tushish tezlanishi, V- kemaning hajmi. Suv osti kemasiga vertikal yo‘nalishda ta’sir etuvchi umumiy kuch F va jism og‘irligi $R=gV\rho_1$ orasidagi ayirmaga teng. Uning tezlanishi esa Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra quyidagicha:

$$\rho_1 V \frac{d^2h}{dt^2} = F - P = gV(\rho_0 - \rho_0).$$

Suv osti kemasining gorizontal holatini tavsiflovchi l - koordinata jismning doimiy tezlikda harakatlanish qonuniga muvofiq ravishda o‘zgaradi:

$$\frac{dl}{dt} = v.$$

Bu tenglamalarni yechib, quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$h(t) = y\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1}t^2, \quad l(\mathrm{t}) = vt. \qquad (4.13)$$

Kema suv yuzasiga $t=t_k$ momentda sizib chiqadi:

$$h(t_k) = g\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1}t_k^2 = H, \ \mathrm{t_k} = \left(\frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)}\right)^{1/2}.$$

Jumladan, suv osti kemasi gorizontal yo‘nalishda quyidagi masofani bosib o‘tadi :

$$L = vt_k = \left(\frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)}\right)^{1/2}.$$

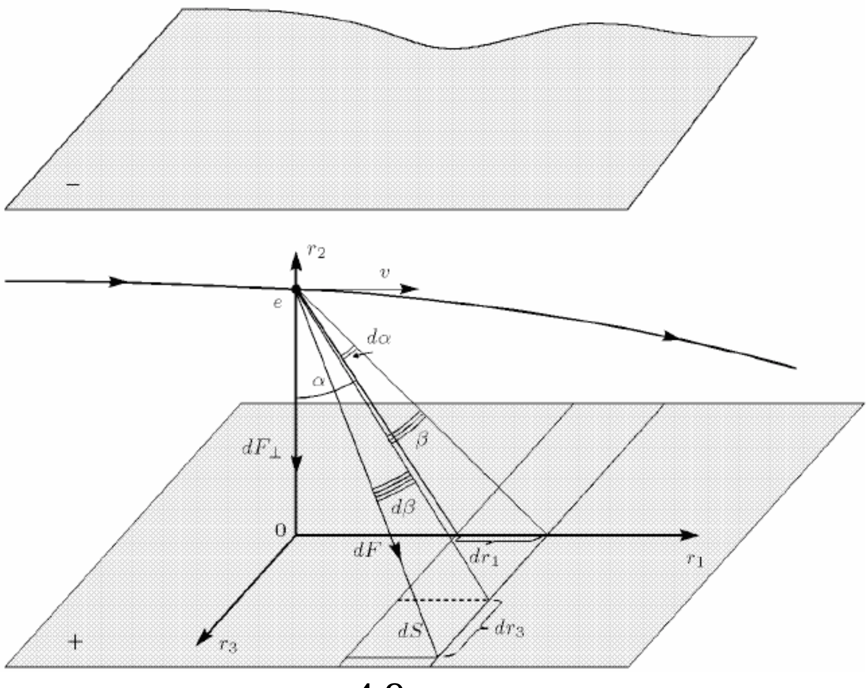
(4.13) tenglamadan vaqtni olib tashlab, suv osti kemasining harakat traektoriyasi koordinatalarini topamiz (*l*, *h*):

$$h = g\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1 v^2}l^2,$$

bunda uchi *l=0, h=0* nuqtada yotgan parabola hosil bo‘ladi (4.13) ni chiqarishda kemaning vertikal tezligi, hamda *l va h* kattaliklar t=0 paytda nolga teng deb olingan). Shuningdek, F va P dan boshqa hech qanday vertikal kuchlar suv osti kemasiga ta’sir etmaydi, deb olingan. Bu faraz sizib chiqishning kichik tezliklaridagina o‘rinli, chunki faqat bu holda kemaning harakatiga suvning ko‘rsatadigan qarshiligini hisobga olmasa bo‘ladi (1-misolga karang).

Itarib chiqaruvchi kuchni va bevosita Nyuton qonunini aniqlovchi Arximed qonunini qo‘llab, suv osti kemasining traektoriyasini osonlik bilan topdik. Demak, yo‘nalishlarning birida doimiy tezlikka, ikkinchisida esa doimiy kuch ta’sirida tekislikda harakatlanuvchi har qanday jism parabolik traektoriyaga ega (4.13) tenglama parabolaning parametrik yozuvini beradi). Bunday harakatlarga H balandlikdan v gorizontal tezlik bilan otilgan toshning uchishi yoki yassi kondensatorning elektr maydonidagi elektron harakati misol bo‘la oladi. Lekin oxirgi holda traektoriyani fundamental qonunlardan bevosita olib bo‘lmaydi, buning uchun sinchkov protseduradan foydalanish kerak. Bu masalani kengroq ko‘rib chiqaylik.

2. Zaryadlangan zarraning elektron-nurli trubkada og‘ishi. Elektron-nurli trubkadagi kondensatorning qatlamlari cheksiz tekislikni tashkil etadi, deb faraz qilaylik (4.9-rasm).



4.9-rasm.

Bu faraz qatlamlar orasidagi masofa ularning o‘lchamidan ancha kichik bo‘lsa, elektron esa ularning uchlaridan ancha uzoq masofada harakatlansagina o‘rinli bo‘ladi. Elektron quyi qatlamga tortilib, yuqorisidan itariladi. Ikkita turli ishorali zaryadlar orasidagi tortilish kuchi F Kulon qonuni orqali aniqlanadi:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

bu yerda $q_1$va q_2 – zaryadlar kattaligi, r – ular orasidagi masofa. Qiyin tomoni shundaki, misolda qatlam yuzasida cheksiz ko‘p zaryad joylashgan bo‘lib, ularning har biri elektronga nisbatan ma’lum bir masofada bo‘ladi. Shuning uchun har bir zaryad hosil qiluvchi kuchni aniqlash, hamma elementar kuchlarni yig‘ish va qatlamlarning elektronga ko‘rsatadigan natijaviy ta’sirini topish kerak.

Quyi qatlamning butun tekisligini r_1, r_2, r_3; $-\infty < r_1, r_2, r_3 < \infty$; $r_2 \equiv 0$ koordinatalari bilan xarakterlanuvchi elementar «tekisliklarga» ajratib yuboramiz (4.9-rasm).

Elementar $ds=dr_1dr_3$ yuzada yotuvchi $dq=q_0ds$ zaryadga tortilish kuchini hisoblaymiz, bu yerda q_0 – qatlamdagi zaryadning sirtiy zichligi. Agar zaryad zaryadlangan tekislikdan r_2 masofada yotsa, u holda:

$$dr_1 = r_2(tg(\alpha + d\alpha) - tg\alpha) = r_2 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

(bu yerda $d\alpha$ kattalikning kichikligi hisobga olinadi). dr_3 kattalikni aniqlash uchun quyidagilarga egamiz:

$$\frac{r_3 + dr_3}{r_1 + dr_1} = \frac{tg(\beta + d\beta)}{\sin(\alpha + d\alpha)}, \qquad \frac{r_3}{r_2} = \frac{tg\beta}{tg\alpha}.$$

Oxirgi ikkita formuladan quyidagi ifoda topiladi:

$$dr_3 = (r_1 + dr_1)tg(\beta + d\beta) - r_1 tg\beta = \frac{r_1 d\beta /(\cos^2\beta) + dr_1 tg\beta}{\sin\alpha}.$$

Bu yerda ham $d\beta$ kattalikning kichikligi hisobga olingan. dr_1 ni dr_3 ga ko‘paytiramiz, yuqori tartibli hadni tashlab yuborib $ds= dr_2dr_1\, d\alpha\, d\beta/(\cos^2\alpha \cos^2\beta \sin\alpha)$ ga ega bo‘lamiz. Elektron bilan $q_e\, ds$ zaryadning maydonchadagigi tortilish kuchi quyidagiga teng:

$$dF = \frac{q_e q_0 T_2 T_1 d\alpha\, d\beta}{T^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta \sin\alpha},$$

bu yerda $\bar{r}$ – elektrondan maydonchagacha bo‘lgan «o‘rtacha» masofa, $d\alpha,\ d\beta$ kattaliklarning kichikligi hisobiga u quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$dF = q_e q_0 \frac{r_1}{r_2}\frac{d\alpha\, d\beta}{\sin\alpha} = \frac{q_e q_0}{\cos\alpha} d\alpha\, d\beta.$$

Vertikal tashkil etuvchisi uchun esa:

$$dF_\perp = dF\cos\beta\cos\alpha = q_e q_0 \cos\beta\, d\alpha\, d\beta.$$

$F_\perp$ ga nisbatan ifodani β bo‘yicha $\beta=0$ dan $\beta=\pi/2$ oraliqqacha integrallab, elektronning kvadrat ichida joylashgan elementar «chiziqqa» tortilish kuchini topamiz $r_1 > 0, r_3 > 0$:

$$dF_\alpha^+ = q_e q_0 d\alpha\,.$$

dF^+_α ni α bo‘yicha $\alpha=0$ dan $\alpha=\pi/2$ gacha, ya’ni $r_1 > 0$, $r_3 > 0$

kvadratlarning hamma chiziqlarini yig‘ib, ushbu kvadratda joylashgan zaryadlar hosil qiluvchi tortilish kuchini hisoblaymiz :

$$dF^{+} = \frac{\pi}{2} q_e q_0.$$

Quyi qatlam tekisligining to‘rtala kvadratlarining ta’siri hisobga olinib, yuqori qatlam uchun ham xuddi shunday mulohazalarni qo‘llaymiz. Elektronning kondensatordagi barcha zaryadlarga nisbatan natijaviy tortilish kuchini olamiz:

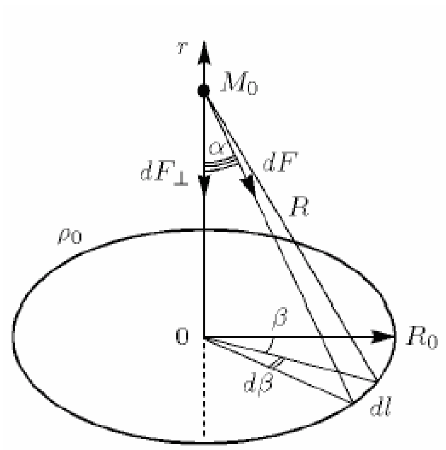
$$F = 4\pi q_e q_0. \qquad (4.14)$$

F kuchi r_2 o‘q bo‘ylab quyi qatlamga yo‘nalgan F ning r_1, r_3 o‘qlari bo‘yicha tashkil etuvchisi simmetriya hisobiga nolga teng. Bunga ishonch hosil qilish uchun $r_2 < 0$, $r_3 <0$ kvadratda joylashgan va *ds* maydonchaga simmetrik zaryad ta’sirini ko‘rib chiqish kerak.

F kuch r_2 ga bog‘liq bo‘lmaganligi, gorizontal o‘q bo‘yicha zaryad doimiy v tezlik bilan harakatlangani uchun oldingi bo‘lim vaziyatiga kelib qolamiz. Nyutonning ikkinchi qonunini qo‘llab elektronning parabolik traektoriyadagi harakatini ta’riflovchi formulalarni hosil qilish oson. Lekin suv osti kemasidan farqli o‘laroq, elektron harakatining modelini olish uchun fundamental Kulon qonunini qo‘llab bo‘lmaydi. Avvalo, fundamental qonunga tayanib, zaryadlarning ta’sir aktlarini ta’riflash, so‘ngra bu aktlarni to‘plab, natijaviy kuchni olish kerak.

Bunday vaziyat ketma-ket modellarni qurishda ko‘p uchraydi, chunki ko‘plab fundamental qonunlar joriy obyektning elementar qismlari orasidagi munosabatni o‘rnatadi. Bu nafaqat elektr kuchlari, balki tortilish kuchlari uchun ham o‘rinli.

3. Saturn halqalarining tebranishi. Radiusi R_0 va zichligi ρ_0 ga teng bo‘lgan moddiy halqaning tortilish kuchlari maydonida M_0 nuqtaviy massaning harakat modelini quramiz. Halqa cheksiz yupqa deb olinadi, harakat esa halqa o‘qi bo‘ylab amalga oshadi. (4.10-rasm). Berilgan sxema Saturn halqalarining tebranish jarayonini ham ifodalashi mumkin:



4.10-rasm

$$F = \gamma \frac{m_0 m_1}{r^2}.$$

Bu yerda F – m_0 va m_1 massaga ega bo‘lgan ikkita jismning tortilish kuchi, r –ular orasidagi masofa, γ -

tortilish doimiysi, Saturn halqalari harakatining yakuniy modelini bera olmaydi, chunki m_0, m_1 massalar nuqtaviy bo‘lishi kerak.

Shuning uchun avvalo, nuqtaviy M_0 massa bilan dl halqaning kichik elementi tarkibida bo‘lgan dm massa orasidagi tortilish kuchini hisoblaymiz:

$$dF = \gamma \frac{M_0 dm}{R^2}.$$

Bu yerda R, r – mos ravishda M_0 massadan halqa va halqa markazigacha bo‘lgan masofa. Demak, $0 \le \alpha \le \pi/2$ da ($\pi/2 \le \alpha \le 2\pi$ da ham xuddi shunday):

$$\frac{R_0}{R} = \sin\alpha = \frac{R_0}{\sqrt{r^2 + R_0^3}}, \quad \frac{r}{R} = -\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_0^3}}.$$

dF kuchning r o‘qdagi proeksiyasini topaylik (aynan shu proektsiya bizni qiziqtiruvchi harakatni beradi):

$$dF_\perp = dF\cos\alpha = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin\alpha \cos^2\alpha \, d\beta.$$

Halqaning hamma elementlari tomonidan hosil qilingan kuchlarni yig‘ib, ya’ni $dF_\perp$ dan β bo‘yicha β = 0 dan β =2π, integral olib natijaviy kuchni topamiz:

$$F = -2\pi\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin\alpha \cos^2\alpha = -\gamma M_0 M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{2/2}}, \tag{4.15}$$

bu yerda $M_1=2\pi R_0\rho_0$ - halqaning butun massasi. Oldingi bo‘limdagi kabi natijaviy kuchning gorizontal proektsiyasi halqaning M_0 massaga nisbatan simmetrik joylashgani uchun nolga teng.

Tortilish kuchi (4.15) nuqtaviy massalar uchun mo‘ljallangan qonundagi ifodadan farq qiladi, lekin $r>>R_0$ dagina, halqani nuqtaviy zaryad deb olish mumkin bo‘lgan holatda ifodalar teng bo‘ladi.

Agarda $r<<R_0$ bo‘lsa, u holda

$$F = -\gamma \frac{M_0 M_1}{R_0^3} r$$

va tortilish kuchi nuqtaviy massalar bilan bog‘liq holdan farqli o‘laroq, obyektlar orasidagi masofaning kamayishi bilan kamayib boradi (yana bir chegaraviy o‘tish 3-misolda ko‘rib chiqilgan).

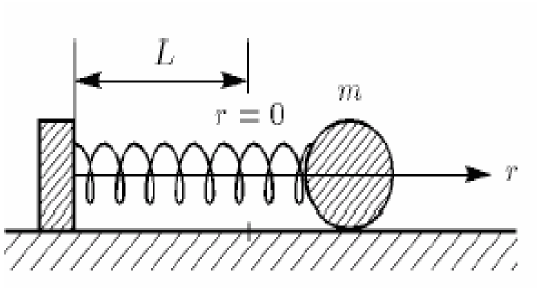
M_0 massaga Nyutonning ikkinchi qonunini qo‘llab, uning r o‘q bo‘ylab harakat tenglamasini olamiz:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{2/2}}.$$

U esa 1 va 2 bo‘limdan farqli ravishda nochiziqli, lekin $r << R_0$ da chiziqliga aylanadi:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma \frac{M_1}{R_0^3} r.$$

4. Prujinaga biriktirilgan sharchaning harakati. 1-3 bo‘limlardagi modellarni olishda obyektga ta’sir etuvchi kuchning kattaligi, kelib chiqishini aniqlovchi fundamental qonunlar muhim rol o‘ynagan. Nyuton qonuni esa yordamchi qo‘llanma sifatida matematik modelni qurishning yakuniy bosqichida qo‘llanilgan. Albatta, bunday ajratish shartli. Chunki gap dinamika masalalari haqida borganda boshqa sxemadan ham foydalanish mumkin. Avvalo, Nyuton qonuni yordamida jism tezlanishining proektsiyai bilan unga ta’sir etuvchi kuchlarning proektsiyasini bog‘lab, so‘ngra u yoki bu mulohazalardan foydalangan holda bu kuchlarni koordinatalar funksiyasi ko‘rinishida hisoblash mumkin. Bunday yondashuvni uchi mahkamlangan prujinaga biriktirilgan sharchaning (11-rasm) harakat modelida sinab ko‘raylik.



4.11-rasm

r –gorizontal tekislikda yotuvchi sharchaning prujina o‘qi bo‘ylab koordinatasi va sharchaning harakat yo‘nalishi uning o‘qi bilan mos tushadi. U holda dinamikaning ikkinchi qonuniga ko‘ra:

$$F = ma = m\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Bu yerda *t* – sharcha massasi, *a* – uning tezlanishi. Tekislikni ideal darajada silliq deb olaylik (ya’ni harakat ishqalanishsiz sodir bo‘ladi). Shuningdek xavoning qarshiligi nazarda tutilmaydi, lekin sharchaning og‘irligi tekislik reaksiyasi bilan muvozanatdaligini hisobga olamiz. Sharchaga *t* o‘q bo‘ylab ta’sir etuvchi yagona kuch prujinaning elastiklik kuchidir. Uni aniqlashda Guk qonunini qo‘llaymiz, unga ko‘ra prujinani uzaytirish (siqish) uchun kuch qo‘yilishi lozim:

$$F=-kr,$$

bu yerda $k > 0$ koeffisient prujinaning elastiklik xususiyatlarini, r – esa uning neytral, yuklanmagan $r = 0$ holatga nisbatan uzayish yoki siqilish kattaligini anglatadi. Sharcha harakatining tenglamasi quyidagi ko‘rinish qabul qiladi (elementar ostsillyator tenglamasi):

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr, \quad t > 0. \tag{4.16}$$

U sharchaning garmonik tebranishlarini xarakterlab, umumiy yechimga ega:

$$r = A\sin wt + B\cos wt. \tag{4.17}$$

Bu yerda $w = \sqrt{k/m}$ – «prujina-sharcha» tizimining xususiy chastotasi. A va V qiymatlar obyektning boshlang‘ich holatidan, ya’ni $r(t=0)=r_0$ va $v(t=0)=v_0$ ($v(t)$ – sharchaning tezligi) kattaliklar orqali oson topiladi. ($r_0=v_o=0$ da $r(t)\equiv 0$). Shuni qayd etish joizki, (4.15) tenglama (4.16) bilan mutlaqo mos tushadi, shuning uchun 3 bo‘limda tebranish haqida gap borgan, lekin «Saturn-halqa» tizimga nisbatan.

Berilgan paragrafdagi modellarning qurilish yondashuvlari tabiatning boshqa fundamental qonunlariga zid bo‘lishi kerak emas. Zid bo‘lmaslikni tekshirish modellarning to‘g‘riligini isbotlab beradi. (4.16) tenglamani chiqarish uchun Nyuton qonunidan emas, energiyaning saqlanish qonunlaridan foydalanish zarur. Prujinaning o‘rnatilish nuqtasi qo‘zg‘almas bo‘lgani uchun, devor «prujina-sharcha» tizimi ustidan ish bajarmaydi (va aksincha) va uning to‘la mexanik energiyasi - E doimiy bo‘lib qoladi. Uni hisoblaymiz (prujina vaznsiz deb olinadi). Kinetik energiya sharchaning harakati orqali topiladi:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(dr/dt)^2}{2}.$$

Tizimning potensial energiyasi prujina «tarkibida» bo‘lib, uni prujinani r kattalikka uzaytirish uchun bajariladigan ishni hisoblash orqali topish mumkin:

$$E_П = -\int_0^r F dr' = \int_0^r kr' dr' = k\frac{r^2}{2}.$$

Vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydigan $E = E_k + E_P$ (energiya integrali) qiymat uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$E = \frac{m(dr/dt)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}.$$

$dE/dt \equiv 0$ bo‘lgani uchun, energiya integralini t bo‘yicha differensiallab quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + k\frac{dr}{dt}r = \frac{dr}{dt}\left(m\frac{d^2r}{dt^2} + kr\right) = 0.$$

Bu bilan biz uning olinishini tekshiramiz. Shunga o‘xshash protsedurani 1-3 bo‘limlar uchun ham olish mumkin.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagilarni xulosa qilish mumkin:

1. Eng sodda hollarda ham modellarni qurish uchun bitta emas, bir nechta fundamental qonunlar zarur bo‘lib qolishi mumkin.
2. Butun deb olingan obyektlarga fundamental qonunlarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llab bo‘lmaydigan holatlar ham bo‘ladi (2, 3 bo‘limlar). Bunday hollarda obyekt qismlari orasidagi ta’sir aktlarini yig‘ish zarur.

4.3. Variatsion tamoyillar va matematik modellar

Mexanik tizim uchun Gamilton variatsion tamoyillarining sodda ta’rifini keltiramiz. Uning asosida og‘irlik kuchlari maydonidagi sharchaning prujina va mayatnikdagi harakat tenglamasini keltirib chiqaramiz. Modellarni fundamental qonunlar va variatsion tamoyil bo‘yicha olish natijalarini solishtiramiz.

1. Gamilton tamoyilining umumiy sxemasi. Bizga mexanik tizim berilgan bo‘lsin, lekin biz uning formal va qat’iy ta’rifini bermay turamiz. Bunday tizimning barcha elementlari va ular orasidagi munosabat mexanika qonunlari bo‘yicha topiladi (eng sodda misollardan biri - 4.2 da ko‘rib chiqilgan «sharcha-prujina»tizimidir). *Umumlashgan koordinatalar Q(t)* tushunchasini kiritamiz, ular mexanik tizimning fazodagi vaziyatini to‘laligicha aniqlab beradi. *Q(t)* kattalik dekart koordinatasi (masalan, «sharcha-prujina» tizimidagi *r* koordinata, radius-vektor, burchak koordinatasi, moddiy nuqtalarning koordinatalar to‘plami va hokazo bo‘lishi mumkin. *dQ/dt k*attalikni tabiiy ravishda mexanik tizimning t vaqt momentidagi *umumlashgan tezligi* deb ataladi. *Q(t)* va *dQ/dt* kattaliklar mexanik tizimning barcha vaqt momentidagi holatini aniqlaydi.

Mexanik tizimni aniqlash uchun *Lagranj funsiyasi* kiritiladi, (5 bobga qarang). Sodda hollarda Lagranj funksiyasi tushunarli ma’noga ega bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda yozib olinadi:

$$L(Q, dQ/dt) = E_k - E_п. \qquad (4.18)$$

Bu yerda E_k, E_p – mos ravishda tizimning kinetik va potensial energiyalari. Berilgan paragrafning maqsadlari uchun E_k, E_p larga alohida ta’rif berish shart emas, chunki ko‘riladigan misollarda ular yaqqol usullar bilan hisoblanadi.

Amal deb nomlanuvchi $S[Q]$ kattalikni kiritamiz:

$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \qquad (4.19)$$

(4.19) integral , *Q(t)* umumlashgan koordinataning funksionali, ya’ni $[t_1, t_2]$ oraliqda berilgan Q(t) funsiya uchun ma’lum bir S soni (amal) mos qo‘yiladi.

Mexanik tizim uchun Gamilton tamoyili quyidagicha: agar tizim mexanika qonunlari bo‘yicha harakatlansa, u holda $Q(t)$ - $S[Q]$ ning statsionar funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0. \qquad (4.20)$$

Eng kichik amal (4.20) tamoyilidagi $\varphi(t)$ – funsiya *tl, t2* momentda nolga aylanuvchi va $Q(t)+\varepsilon\varphi(t)$ shartni qanoatlantiruvchi – berilgan tizimning ixtiyoriy koordinatasi (qolgan hollarda $\varphi(t)$ erkin).

(4.20) tamoyilning mazmuni shundaki, tizimning faraz qilingan (mavjud) traektoriyalar (harakatlar) to‘plami ichidan t_1, t_2 momentlar ichida shunday harakat tanlanadiki, u harakatning funksionalini minimumga olib keladi (aynan shu yerdan tamoyilning nomi kelib chiqadi). $\varepsilon\varphi(t)$ funksiya *Q(t) variatsiyasidir*.

Shunday qilib, Gamilton tamoyilining mexanik modellarni qurishda qo‘llanilish sxemasi quyidagicha: umumlashgan koordinatalar $Q(t)$ va umumlashgan tezliklar dQ/dt topiladi, Lagranj funksiyasi quriladi, $L(Q,\ dQ/dt$ va amal funksionali $S[Q]$ topiladi, uning $Q(t)$ koordinatalaridagi $\varepsilon\varphi(t)$ variatsiyasi qidirilayotgan modelni beradi.

2. «Shar-prujina» tizimi modelini olishning uchinchi usuli. Prujina bilan biriktirilgan sharning harakat modelini qurishda Gamilton tamoyilidan foydalanamiz (4.2 bo‘lim). Tizimning umumlashgan koordinatasi sifatida sharning oddiy eyler koordinatasini tanlash tabiiy bo‘lardi. $dr/dt = v(t)$ – umumlashgan tezlik sharning oddiy tezligi. $L=E_k-E_p$ ga teng bo‘lgan Lagranj funksiyasi 4.2 bo‘limdagi (4.13) da topilgan kinetik va potensial energiyalarning qiymatlari orqali yoziladi:

$$L = \frac{m(dr/dt)^2}{2} - k\frac{r^2}{2}.$$

Amalning qiymati uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz

$$S[r] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(r, \frac{dr}{dt}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{k}{2}r^2\right]dt.$$

Endilikda 4.1 bo‘limdagi sxemadagi kabi, $\varepsilon\varphi(t)$ variatsiyalar ustida zaruriy amallarni bajarib, $r(t)$ koordinatalarni topamiz:

$$S[r+\varepsilon\varphi] = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d(r+\varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2}(r+\varepsilon\varphi)^2\right]dt.$$

Oxirgi formulani E bo‘yicha differensiallash kerak (bunda $r, \varphi, \mathrm{dr/dt}, \mathrm{d}\varphi\mathrm{/dt}$ funksiyalar ε ga bog‘liq emasligini hisobga olish kerak):

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[r+\varepsilon\varphi] = \frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} - k\{r^2 + 2\varepsilon r\varphi + \varepsilon^2\varphi^2\}\right]dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} - k\{r\varphi + \varepsilon\varphi^2\}\right]dt,$$

unga E=0 ni qo‘yib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}S[r+\varepsilon\varphi]\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi\right]dt = 0.$$

Bu ifodaning (Gamilton tamoyiliga ko‘ra nolga teng bo‘lgan - (4.20) ga qarang) o‘ng qismi, uning birinchi hadini qismlab integrallash, hamda t_1, t_2 da $\varphi=0$ ligini hisobga olish natijasida quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

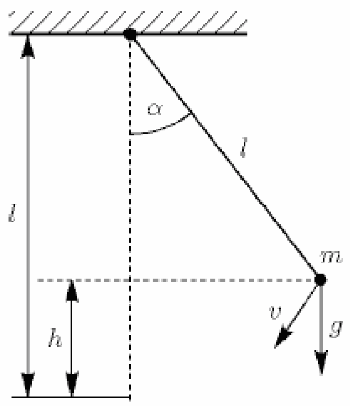
$$\frac{d}{d\varepsilon}S[r+\varepsilon\varphi]\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_{t_1}^{t_2}\varphi\left[m\frac{d^2r}{dt^2}+kr\right]dt = 0.$$

Eng kichik amal ta’rifida ustunlikka ega bo‘lgan φ(t) tajribaviy funksiya ixtiyoriy bo‘lgani uchun, integral ostidagi kvadrat qavsga olingan ifoda $t_1 < t < t_2$ da nolga teng bo‘lishi shart:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr,$$

ya’ni tizim harakati 4.2 da Nyuton (birinchi usul) va energiyaning saqlanish (ikkinchi usul) qonunidan olingan tenglama bilan ifodalanishi kerak. Uchala yondashuv ham ekvivalentdir (chunki ular orasida 5-bobda kengroq o‘rganiladigan chuqur aloqa mavjud).

3. Mayatnikning og‘irlik kuchlari maydonida tebranishi. Gamilton tamoyilining qiyinroq masalalarda qo‘llanilishini ko‘rib chiqaylik**.** Qo‘zg‘almas tayanchda mayatnik osilgan - ipning uzunligi l, unga osilgan massaning og‘irligi *m*, (4.12-rasm). Sharnir ideal darajada silliq deb olingan, chunki unda energiya ishqalanishga sarf bo‘lmaydi. Sharnirning qo‘zg‘almasligi, energiyaning «sterjen-yuk» tizimga etib kelmasligini, bunday sharnir biron-bir ish bajara olmasligini anglatadi. Sterjen vaznsiz va uning potensial va kinetik energiyalari nolga teng, yuk esa sterjen o‘qi bo‘ylab harakat qila olmaydi. Yukning o‘lchami sterjen uzunligiga nisbatan kichkina (material nuqta), erkin tushish tezlanishi g doimiy, havoning qarshiligi hisobga olinmaydi, tebranishlar vertikal tekislik bo‘yicha amalga oshiriladi (aynan shuning uchun bo‘lsa kerak, yukning boshlang‘ich tezligi shu tekislikda yotishi kerak).



4.12-rasm

Bunday sodda mulohazalardan so‘ng, mayatnikning vaziyati yagona koordinata bilan aniqlanishi ma’lum bo‘ladi, bu koordinata sifatida sterjenning vertikalga nisbatan og‘ish burchagi $a(t)$ ni olamiz. Bu holdagi umumiy tezlik - $d\alpha/dt$ burchak tezlikdir.

Tizimning kinetik energiyasi quyidagi formula bilan

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

potensial energiya esa quyidagi formula bilan ifodalanadi

$$E_п = mgh = -mg(l\cos\alpha - l),$$

bu yerda h – mayatnikning vertikaldagi eng quyi vaziyatdan og‘ishi. Keyingi hisoblashlarda mgl va E_p kattaliklarni tashlab yuboramiz, chunki potentsial energiya o‘zgarmasdir.

Endilikda Lagranj funksiyasini (4.18) va

$$L\left(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}\right) = ml\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right],$$

$$S[\alpha] = ml\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right]dt.$$

amalni hisoblash qiyin bo‘lmaydi. $\alpha + \varepsilon\varphi(t)$ variatsiyadagi amallarni topamiz:

$$S[\alpha + \varepsilon\varphi] = ml\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos(\alpha + \varepsilon\varphi\}\right]dt =$$

$$= ml\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + g\cos\{\alpha + \varepsilon\varphi\}\right]dt.$$

Uni ε bo‘yicha differensiallab, ε=0 deb faraz qilib, quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha + \varepsilon\varphi]\right|_{\varepsilon=0} = ml\int_{t_1}^{t_2}\left[l\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - \varphi g\sin\alpha\right]dt = 0.$$

4.1 bo‘limdagi kabi, qavsdagi ifodaning birinchi hadini qismlar bo‘yicha integrallab, t_1, t_2 da φ(t)=0 deb olib quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$ml\int_{t_1}^{t_2}\varphi\left[l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\sin\alpha\right]dt = 0,$$

u esa o‘zining erkinligi tufayli hamma < t < t_2 da o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha\,. \tag{4.21}$$

Shuni qayd etish joizki, mayatnikning (4.21) tebranish tenglamasi 4.2 bo‘limdagi (4.17) tenglamadan farqli o‘laroq chiziqli emas. Buning sababi murakkab geometriyaga ega bo‘lgan «sterjen-yuk» tizimiga bog‘liq. Chunki: yukning tezlanishi Guk qonunidagi kabi koordinataga proportsional emas, u muvozanat vaziyatdan cheklanishning murakkab funksiyasidir. Agar cheklanishlar kichik bo‘lsa, u holda sin α ≈ α va kichik tebranishlar modeli chiziqlidir:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha.$$

Ular 4.2 bo‘limdagi (4.18) formulaga o‘xshash formulalar bilan ta’riflanadi. Bu yerda ($\omega = \sqrt{g/l}$ – kichik tebranishlarning xususiy chastotasi, A, V kattaliklar esa $\alpha(t=0)$, $\frac{d\alpha}{dt}(t=0)$ lardan topiladi.

4. Xulosa. Mexanik tizimlar modelini qurishga qaratilgan Gamilton tamoyilini qo‘llagan misollar 1 bo‘limda ta’riflangan amallar dasturini chizadi. Universallik, aniq bir tizimning detallariga bog‘liq bo‘lmagan ketma-ket kelgan qat’iy ta’riflangan protseduralar variatsion tamoyillarning ajoyib xususiyatidir. Yuqorida keltirilgan sodda hollarda modellar boshqa usullar bilan nisbatan osonroq hosil qilinishi mumkin. Lekin murakkab obyektlar uchun variatsion tamoyillar modellarni qurishning yagona usuli bo‘lib qoladi. Masalan, ko‘pgina texnik qurilmalarning mexanik qismlari o‘zaro turli usullar bilan bog‘langan har xil elementlardan tashkil topadi. Ularning matematik modellari asosan variatsion tamoyillar yordamida olinadigan ko‘p sonli tenglamalarni o‘z ichiga oladi. Bu yondashuv boshqa tabiatga mansub tizimlar (fizik, kimyoviy, biologik) uchun ham muvafaqqiyatli qo‘llaniladi, ularning evolyutsiyasi (xatti-harakati) to‘g‘risida o‘xshash xulosalar chiqariladi.

Gamilton tamoyili va boshqa yondashuvlar bir xil model hosil qilishi tabiiydir, chunki ular bitta joriy obyektni ta’riflaydi. Albatta, bunday o‘xshashliklar obyekt haqidagi joriy mulohazalar to‘g‘ri bo‘lgandagina kafolatlanadi. Agar uning ideallashuvi bir xilga keltirilsa, u holda modellarni olishning har xil usullari ayniyatli qiymatlarni berishi zarur. Masalan, «shar-prujina» tizimida sharga tashqi tomondan ta’sir qiluvchi qo‘shimcha kuch F_1 hosil bo‘ldi, deylik. U holda Nyutonning ikkinchi qonuniga binoan sharning harakat tenglamasini olish qiyin emas:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_1,$$

((4.17) ni 4.2 bo‘lim bilan solishtiring). Bunday tizimga Gamilton tamoyilini qo‘llashda bu kuchning mavjudligini hisobga olish kerak. Umumlashgan koordinata, umumlashgan tezlik, kinetik energiya E_k ta’riflari o‘zgarmas bo‘lib qoladi. Bunda potensial energiya (4.2 bo‘lim bilan solishtiring) shu kuchning tizim ustida bajargan ishiga teng bo‘lgan kattalikka ortadi:

$$E_n = k\frac{r^2}{2} + \int_0^r F_1 dr = k\frac{r^2}{2} + F_1 r.$$

4.2 bo‘limdagiga o‘xshash amallarni L va Q ning o‘zgargan qiymatlarini hisobga olgan holda bajarib, Gamilton prinsipi yuqorida yozilagan F_1 tashqi kuch ishtirok etgan tenglamani beradi.

4.4. Modellar ierarxiyasiga misol

Prujina bilan biriktirilgan sharning harakati uchun «quyidan-yuqoriga» tamoyili bo‘yicha modellarning ierarxik zanjirini quramiz. Ketma-ket ravishda yangi murakkablashtiruvchi omillarni kiritamiz va ularga matematik ta’rif beramiz.

1. Berilgan tashqi kuchning ta’sir variantlari. Sharga uning vaqti va holatiga bogliq bo‘lgan F(r, t) tashqi kuch ta’sir etsin. U tortilish maydoni tomonidan hosil qilinishi mumkin (1-bo‘limga qarang), elektr va magnit xususiyatlarga ega bo‘lishi mumkin. Nyutonning ikkinchi qonunidan tebranishga xos bo‘lgan:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr \tag{4.22}$$

tenglamaning o‘ng qismida qo‘shimcha had paydo bo‘ladi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t). \tag{4.23}$$

(4.23) tenglamaning eng sodda varianti F(r',)=F_0 ko‘rinishga ega. $\bar{r} = r - F_0/k$ almashtirish qilib, $\bar{r}$ uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r}.$$

Ya’ni doimiy kuch tebranish jarayonida sharga ta’sir etuvchi kuch nolga teng bo‘lgan neytral nuqtaning koordinatasi F_0/k kattalikka surilishini hisobga olmaganda hech qanday ta’sir ko‘rsatmaydi.

Harakatning murakkabroq tasviri vaqtga bog‘liq bo‘lgan F(t) kuch tomonidan hosil bo‘ladi. Aniqlik uchun davriy tashqi kuchni ko‘rib chiqaylik, $F(t)=F_0$ sin $\omega_1 t$:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(t) = -kr + F_0\sin\omega_1 t. \tag{4.24}$$

(4.24) chiziqli tenglamaning yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (4.24) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechim yig‘indisidir va uni quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$r_1(t) = C\sin\omega_1 t. \tag{4.25}$$

Bu ifodani (4.25) ga qo‘yib:

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega_1^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}$$

ni topamiz, bu yerda $\omega = \sqrt{k/m}$ – tashqi kuch bo‘lmaganida prujinaning tebranish chastotasi yoki tizimning xususiy chastotasi. Natijada (4.24) umumiy yechimi sifatida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$r(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}\sin\omega_1 t.$$

Shunda, $F(t)= - ma(t)$ tashqi kuch tizimda qo‘shimcha tebranishlarni tug‘dirish bilan bir qatorda, rezonansning tug‘ilishi- $\omega_1 \to \omega$ da tebranish amplitudalarining cheksizlikka qarab ortib ketishiga olib keladi.

2. Ulanish nuqtasining harakati, aylanuvchi sterjendagi prujina. Tizimdagi rezonans inertsional tabiatli kuchlarning ta’siri hisobiga tug‘ilishi mumkin. Prujinaning ulanish nuqtasi $r_0(t)=f(t)$ qonun bo‘yicha harakatlansin. U holda bu nuqta bilan bog‘liq koordinatalar tizimida sharga prujinaning tarangligidan tashqari $m\alpha(t)$ ga teng bo‘lgan inertsiya kuchi ta’sir qiladi, bunda $\alpha(t)$ – koordinatalar tizimining harakati tufayli hosil bo‘lgan tezlanish, $\alpha(t)=d^2f/dt^2$. Bu koordinatalar tizimida sharning harakati quyidagi tenglama bilan ta’riflanadi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(t),$$

bu yerda $F(t)=-m\alpha(t)=-td^2f/dt^2$ – vaqtning berilgan funksiyasidir. Oldingi holdagi kabi, ulanish nuqtasining davriy harakatida tizimda rezonans tug‘iladi.

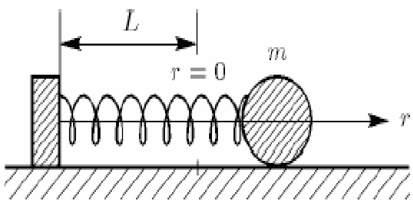
Murakkabroq geometriyada tizimning inertsiya kuchlari nafaqat t vaqtga, balki t koordinataga ham bog‘liq bo‘ladi. Agar prujina $\omega(t)$ burchak tezlik bilan harakatlanuvchi sterjen ustiga qo‘yilgan bo‘lsa, u holda inertsiyaning markazdan qochma kuchi $F=mv^2(t)/R=R=m\omega^2(t)R=m\omega^2R$ ga teng, bu yerda $v(t)=\omega(t)R$, $R=R_0$+r, R_0 – prujinaning yuk osilmagandagi uzunligi, r –sharning neytral holatdan chetlanishi, $r>-R_0$. Sharning harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinish qabul qiladi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t). \tag{4.26}$$

Bu yerda $F(r,t) = m\omega^2(t)(R_0 + r),$ yoki

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -(k - m\omega^2(t))r + m\omega^2(t)R_0.$$

Jumladan, $r \ll R_0$ da umumiy yechimi bahaybatligi hisobiga yozilmagan (4.26), chiziqli tenglama (4.24) ko‘rinishdagi tenglamaga o‘tadi $F(t) = -m\omega^2(t)R_0.$



4.13-rasm

Lekin berilgan holda rezonans bo‘lmaydi, chunki tashqi kuch har doim bir tomonga yo‘nalgan bo‘lib, tizimni tebratishga loyiq.

Shuni qayd etish joizki, joriy holatga

nisbatan murakkablashtirilgan geometriya obyektning murakkab xatti-harakatini anglatavermaydi. Masalan, bikrligi k_1 va k_2 larga teng bo‘lgan prujinalarga mahkamlangan sharni ko‘rib chiqaylik (4.13-rasm). Koordinatalar boshini sharchaga, ikkala prujina tomonidan ta’sir etuvchi kuchlar bir-birini muvozanatlovchi nuqtaga qo‘yamiz (shar mustahkamlanish nuqtalaridan biriga tegib turishi kerak emas, 2-misolga qarang). Guk qonuniga ko‘ra shar r ga og‘ganda unga chap prujina tomonidan - $k_1 r$ kuch, o‘ng tomondan esa - $k_2 r$ (ikkala kuch bir tomonga yo‘nalgan, chunki birinchi prujinani uzaytirganda, ikkinchi prujina aksincha siqiladi) ta’sir etadi. Natijada, bitta prujinaga o‘xshash holga kelinadi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k_1 r - k_2 r = -kr.$$

Lekin bunda bikrlik ortadi, $k=k_1+k_2$,u ikkala prujina bikrlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi .

3. Ishqalanish kuchlarini hisobga olish. Ko‘rib chiqilayotgan tizimda ishqalanish kuchlari ikkita sabab tufayli paydo bo‘ladi. Ulardan birinchisi shar sathi va u harakatlanuvchi tekislikning ideal emasligi. Bu holda ishqalanish kuchi $F=k_1P$ ga teng, bu yerda k_1 – ishqalanish koeffisienti, $R=mg$ – shar og‘irligi. U har doim shar harakatiga qarama-qarshi yo‘nalgan, uning ishorasi shar tezligining ishorasiga qarama-qarshi $v = dr/dt,$ ya’ni $F = -k_1 mg\, sign(dr/dt)$.Sharning harakati quyidagi tenglamaga bo‘ysunadi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - k_1 mg\ sign\frac{dr}{dt}. \tag{4.27}$$

U tashqi jihatdan $F(r,t) = F_0$ (4.23) tenglamaga o‘xshab ketadi. Lekin kuchning ishorasi o‘zgarib turgani tufayli u tebranishlarning standart tenglamasiga keltirilmaydi. Bundan kelib chiqadiki, (4.22) va (4.27) tenglamalar mutlaqo har xil jarayonlarni ta’riflaydi. Jumladan sharning tebranish amplitudasi vaqt o‘tishi bilan kamayadi. Bunga (4.27) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozish orqali osonlikcha ishonch hosil qilsa bo‘ladi:

$$m\frac{dv}{dt} + kr = -k_1 mg\ sign\ v.$$

Bu ifodaning ikkala tomonini $v/2$ ga ko‘paytiramiz:

$$m\frac{v}{2}\frac{dv}{dt} + kr\frac{v}{2} = -k_1 mg\, sign\, v\frac{v}{2},$$

$v=dr/dt$ ni hisobga olsak,

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} + \frac{k}{2}\frac{dr^2}{dt} = -\frac{1}{2}k_1 mg\, sign\, v \cdot v.$$

Oxirgi tenglama quyidagi tenglamaga ekvivalent:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}+k\frac{r^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}k_1 mg\, sign\, v\cdot v. \qquad (4.28)$$

(4.28) tenglamaning chap qismida hosila belgisi ostida tizimning kinetik va potensial energiyalari yig‘indisi E(t)= $E_k(t)+E_p(t)$ turganligi (4.28) o‘ng tomoni $v\neq 0$ da manfiy bo‘lganligi uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dE(t)}{dt}<0,\ \ v\neq 0\left(\frac{dE(t)}{dt}=0,\ v=0\right),$$

ya’ni $E(t)$ to‘la energiya vaqt o‘tishi bilan kamayib boradi. Sharcha maksimal amplituda $r_m(t)$ tomonidan harakatlanganida uning tezligi (va kinetik energiyasi E_k) nolga teng bo‘lganligi uchun, bu momentlarda Ep $E_п = kr_m^2(t)/2 = E(t)$, va $E(t)$ ning kamayishi hisobiga $[r_m(t)]-$ amplituda ham vaqtning kamayuvchi funksiyasidir.

Shar harakatlanuvchi muhitning (havo, suv va h.k) qarshiligi tufayli paydo bo‘lgan boshqa tabiatga mansub ishqalanish kuchi ta’sirining natijasini sinchkovlik bilan o‘rganib chiqaylik. Bunda ishqalanish kuchi doimiy emas, u harakat tezligiga bog‘liqdir. Bu bog‘lanish Stoksning mashhur formulasi bilan ta’riflanadi:

$$F=-\mu v=-\mu\frac{dr}{dt}.$$

Bu yerda $\mu>0$ sharning o‘lchamlariga, muhit zichligiga bog‘liq. Quyushqoq muhitdagi harakat tenglamasining ko‘rinishi quyidagicha:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-kr+F(v)=-kr-\mu\frac{dr}{dt}. \qquad (4.29)$$

Birinchi tartibli hosilali haddan oldindan qutilib, (4.29) chiziqli tenglamaning umumiy yechimini olamiz. (4.29) ga $r(t)=\bar r(t)e^{\alpha t}$ almashtirishni qo‘yish $\bar r(t)$ yangi funksiyaning tenglamasini beradi:

$$m\left(e^{\alpha t}\frac{d^2\bar r}{dt^2}+\alpha e^{\alpha t}\frac{d\bar r}{dt}+\alpha e^{\alpha t}\frac{d\bar r}{dt^2}+\alpha^2e^{\alpha t}\bar r\right)=-k\bar r e^{\alpha t}-\mu e^{\alpha t}\frac{d\bar r}{dt}-\mu\alpha e^{\alpha t}\bar r.$$

Undagi $e^{\alpha t}$ ko‘paytuvchini qisqartirib, $\alpha=-\mu/(2m)$ deb olib quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$m\frac{d^2\bar r}{dt^2}=-\left(k-\frac{\mu^2}{4m}\right)\bar r=-k_1\bar r. \qquad (4.30)$$

(4.22) tenglamadan farqli o‘laroq (4.30) ning o‘ng tomonidagi birinchi ko‘paytuvchi tizimdagi k, μ, m o‘zgaruvchilarga qarab ishorasini o‘zgartirishi mumkin, $r(t)=e^{\alpha t}\bar r(t)$ munosabat uni standart vaziyatga qaraganda boshqacha yo‘l tutilishiga olib keladi.

Kichik qovushqoqlikda, ya’ni $k-\mu^2/(4m)=k_1>0$ da $\bar r(t)$ va $r(t)$ orasidagi bog‘lanishning (4.27) 4.2 bo‘lim bo‘yicha ko‘rinishi quyidagicha:

$$r = \bar{r}e^{\alpha t} = e^{-t\mu/(2m)}(A\sin\omega t + B\cos\omega t),$$

bu yerda $\omega = (k_1/m)^{1/2}$, A, V o‘zgarmaslar esa r_0, v_0 lar bo‘yicha topiladi. Tizimda vaqt o‘tishi bilan so‘nadigan ω chastotali tebranishlar sodir bo‘ladi (3-misolga qarang).

Agar k_1=0 bo‘lsa, u holda $d\bar{r}/dt$ kattalik doimiy, yoki $\bar{r}(t) = ct + c_1$. $r(t)$ uchun boshlang‘ich ma’lumotlarni hisobga olgan holda quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$r(t) = e^{-t\mu/(2m)}(ct + c_1) = e^{-t\mu/(2m)}\left(\left(v_0 + \frac{\mu r_0}{2m}\right)t + r_0\right).$$

Berilgan holda tebranishlar bo‘lmaydi, chunki qovushqoqlikning tebranish kuchlari bunga xalaqit beradi. Tizim faqatgina bir marotaba r=0 nuqtadan o‘tishi mumkin, buning uchun $v_0<-\mu r_0/(2m)$, $r_0>0$ yoki $v_0 >\mu r_0/(2m)$, $r_0<0$ shartlarning bajarilishi zarur va yetarli, ya’ni sharning boshlang‘ich tezligi katta bo‘ladi va r=0 nuqtaga yonalgan bo‘ladi. Bunda, sharning tezligi $v(t)=dr/dt$ o‘z ishorasini faqatgina bir marotaba o‘zgartira oladi.

Va nihoyat, qovushqoqlik katta bo‘lganda ishqalanish kuchining ta’siri shunchalik kattaki, ixtiyoriy r_0, v_0 larda shar r=0 nuqtadan hech qachon o‘tmaydi va faqatgina $t\to\infty$ da unga yaqinlashadi, shuning uchun u muhitda «tiqilib qoladi». Haqiqatdan ham k_1<0 (4.30) tenglamaning yechimi (4-misolga qarang) doimiy ishoralidir (teskarisi haqida faraz tenglama orasidagi ziddiyatga olib keladi). Demak $r(t)$ kattalik ham ishorasini o‘zgartirmaydi. $\bar{r}(t)$ funksiyaning $t\to\infty$ dagi xatti-harakatini (4.30) tenglamaning birinchi integral xususiyatlaridan tushunish mumkin

$$m\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = -k_1\bar{r}^2 + const.$$

Bunga (4.30) tenglamaning ikkala tomonini $d\bar{r}/dt$ ga ko‘paytirib, bir marotaba t bo‘yicha integrallash natijasida erishish mumkin. $t\to\infty$ *da* $\bar{r}(t)\to\infty$ yoki $\bar{r}(t)\to C_1$ bo‘ladi degan faraz oxirgi tenglikka ziddir. Oxirgi variant $\bar{r}(t)\to 0,\ \mathrm{t}\to\infty,$ shunday qilib, $r(t)\to 0,\ t\to\infty.$.

Shunda, tizimning qovushqoq muhitdagi harakati ideal holatga nisbatan kam qamrovligi bilan ajralib turadi, jumladan hamma hollarda u so‘nadi.

4. «Shar-prujina» tizimidagi nochiziqli modellarning ikki turi. Stoks formulasi, qo‘pol qilib aytganda, o‘rnatilgan harakatlar uchun, ya’ni tashqi kuch qovushqoqlik kuchi bilan muvozanatda bo‘lganidagina o‘rinli. Qovushqoq muhitning qarshilik kuchi kichik tezlikda Stoks formulasi bo‘yicha hisoblanganidan kamroq, kattasida esa katta bo‘ladigan hollar ham mavjud; masalan $F(v) = -\mu v|v|^{\alpha}$, bu yerda μ > 0, α > -1. U holda qidirilayotgan $r(t)$ kattalik quyidagi formuladan topiladi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(v) = -kr - \mu v|v|^{\alpha}. \qquad (4.31)$$

(4.31) tenglama oldin ko‘rib chiqilgan modellardan farqli o‘laroq nochiziqli, shuning uchun uning yechimini yozib olish mumkin emas, (Tizimni nochiqli holda ham o‘rganib, (4.27) tenglamaga qo‘llanilgan usuldan foydalanish mumkin). Shuning uchun tizimning ikkita chegaraviy holati- v=0 va r=0 dagi hatti-harakatini taqriban tahlil qilish bilan cheklanamiz. Ikkita holatga bir vaqtning o‘zida erishib bo‘lmaydi, chunki bu tizim tinch turibdi degani.

Agar $v(t_0)$=0 bo‘lsa (bu yerda t_0 – moment r_0 maksimal amplitudagi erishish momentlaridan biridir), (4.31) tenglamaning o‘ng qismidagi ikkinchi hadni birinchiga nisbatan hisobga olmasa bo‘ladi va uning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr_0.$$

Ko‘rib chiqilayotgan vaqt momenti Δt t_0 momentiga yaqin bo‘lganligi uchun, Δr chetlashish ham r_0 ga nisbatan hisobga olmas darajadadir, shuning uchun uni hisobga olmasa ham bo‘ladi. $v(t_0) = 0$ ligini hisobga olib mazkur ifodaga ega bo‘lamiz:

$$\Delta r - r = r_0 = -\frac{1}{2}\frac{k}{m}r_0(t - t_0)^2.$$

Ya’ni shar doimiy tezlanish bilan harakatlanadi (birinchi yaqinlashishda), chunki unga m=T_0 nuqta atrofida doimiy bo‘lgan prujinaning taranglik kuchigina ta’sir etadi, ishqalanish kuchi esa nolga teng.

$r(t_0) = 0$ da (t_0 – tizim koordinata boshidan o‘tadigan momentlardan biri, agar albatta r=0 ga bir marotaba bo‘lsa ham erishilsa) o‘ng tomondagi birinchi had ikkinchisiga nisbatan kichik:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\mu v_0|v_0|^{\alpha}.$$

Bu yerda $v_0 = v(t_0)$ qiymatdan Δv chekinish hisobga olinmaydi. $r(t_0)$=0 bo‘lganligi uchun oxirgi tenglamadan quyidagi formula kelib chiqadi:

$$\Delta r = r = \frac{\mu v_0|v_0|^{\alpha}}{2m}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0).$$

Demak, oxirgi holatda ham tizim prujinaning taranglik kuchi nolga tengligi tufayli faqatgina ishqalanish kuchi bilan aniqlanuvchi (o‘ng yaqinlashishda) doimiy tezlanishga ega. Berilgan xulosa tizimning hamma holatlari uchun o‘rinli, lekin sharning $v \neq 0, r \neq 0$ dagi tezlanishi ikkala kuchning umumiy ta’siri orqali aniqlanadi. kr_0=- $kr_0 = -\mu v_0 |v_0|^{\alpha}$ bo‘ladigan nuqta bundan mustasnodir, chunki (4.22) tenglamaning o‘ng qismi nolga aylanadi va tizim tezlanishidagi birinchi had t=t_0 vaqtda nolga teng. $T(t)$ ni t=t_0 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$r(t) = r(t_0) + \frac{dr}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 r}{dt^2}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^3 r}{dt^3}(t_0)(t - t_0)^3 + ...,$$

bu yerda nuqta bilan kichkinalikning yuqori tartibli hadlari belgilangan dt_2 (t=t_0)=0 ni hisobga olib quyidagini topamiz:

$$\Delta r = r(t) - r_0 = \frac{dr}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{6}\frac{d^3 r}{dt^3}(t_0)(t - t_0)^3 + ...,$$

ya’ni t=t nuqta atrofidagi tizimning bosh hadidagi tezlanish o‘zgarmas emas, vaqtga bog‘liq bo‘lgan chiziqli funksiya (5-misolga qarang).

Nochiziqlilikning yana bir turi prujinaning mexanik xususiyatlari o‘zgarishi bilan bog‘liq. Guk qonuni aslida prujinaning neytral holatga nisbatan kichik chetlashishlari (deformatsiyasi) uchungina o‘rinli. Sezilarli deformatsiyada prujina tayyorlangan materialiga va deformatsiya kattaligiga qarab o‘zini «yumshoq» tutishi mumkin. Bu holda taranglik kuchi Guk qonuniga nisbatan kichikroq bo‘ladi («qattiq» prujinada-teskarisi bo‘ladi). Bunday holatda prujina bikrligi koordinata funksiyasiga aylanadi, ya’ni k=$k(r)$, va harakat tenglamasi quyidagicha ko‘rinish qabul qiladi:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r\,. \qquad (4.32)$$

Bu yerda, $k(r)$>0. Masalan, agar $k(r)$=k_0/(l+$|r|$) bo‘lsa, u holda prujina yumshoq. Lekin (4.32) tenglama (4.31) kabi chiziqli emas, lekin ular orasida kamida ikkita farq mavjud. (4.31) tenglamadan farqli o‘laroq (4.32) uchun kvadraturadan ikki marotaba foydalanish orqali noaniq yechim olsa bo‘ladi. Bundan tashqari (4.32) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$m\frac{dr}{dt}\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dr}{dt}k(r)r = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}\int_0^r k(r')r'dr' = -\frac{d}{dt}\left(\int_0^r k(r')r'dr'\right),$$

Va bu ifodaning chap qismi $mv\,dv/dt = mdv^2/dt$ ga tengligini hisobga olib, uni t bo‘yicha integrallash natijasida quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$E_k + E_п = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \int_0^r k(r')r'dr' = const > 0. \quad (4.33)$$

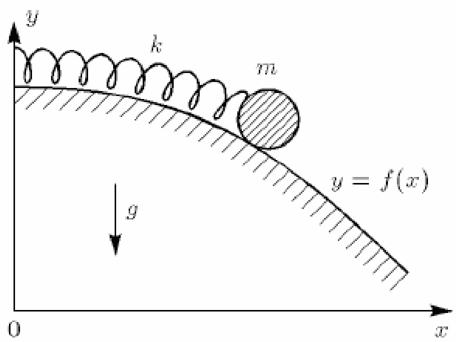
Bu (4.32) model bilan xarakterlanuvchi harakatning konservativligini yoki tizim to‘la energiyasining doimiyligini anglatadi. (4.33) ning birinchi integrali mavjudligi chiziqli tizim holati bilan bog‘liq umumiy omilni - o‘rganilayotgan harakatning tebranuvchilik xususiyatini o‘rnatishga imkon beradi. Haqiqatdan ham (4.33) formuladan ixtiyoriy $t > 0$ da $v(t)=dr/dt$ va $r(t)$ funksiyalarning cheklanganligi kelib chiqadi. Yechim $t \to\infty$ da chegaraga ega emas, chunki $v(t \to \infty) \to v_\infty \neq 0$ o da bu $r(t)$ funksiyaning $t\to\infty$ da cheklanganligiga shubha tug‘dirtirardi, $v(t \to \infty) \to v_\infty = 0$ *da esa* $r(t \to \infty) \to r_\infty \neq 0-$ bo‘lishi mumkin emas, u holda (4.32) tenglamadan $v(t)$ kattalikning $t \to\infty$ da cheklanmaganligi kelib chiqadi ($v_\infty = r_\infty = 0$ *hol esa* (4.33) ga zid). Shu bilan shar tebranadi. U r=0 nuqtadan cheksiz marotaba o‘tadi. Aks holda $r(t)$ d^2r/dt^2 singari doimiy ishorali bo‘lib qolardi. (4.32 va $v \to \infty, t \to \infty$ ga qarang).

5. Xulosa. Bu paragrafda keltirilgan qurilmalar «shar-prujina» tizimining ierarxik zanjirini tashkil qiladi. Ayrim hollarda murakkablashtirishlar tizim hatti-harakatiga hech qanday o‘zgartirish kiritmaydi (doimiy tashqi kuch, ikkita prujinadagi shar), boshqa hollarda uning xususiyatlari mos ravishda o‘zgaradi. «Osonidan qiyiniga» yo‘li real modellarni bosqichma-bosqich o‘rganishga va ularning xususiyatlarini solishtirishga imkon beradi.

Modelni qurish va o‘rganishning boshqa yo‘li ham bor - «umumiydan xususiysiga». Berilgan paragrafdagi natijalarga ko‘ra «sharcha-prujina» tizimining harakat tenglamasi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k(r,t)r + F\left(r,t,\frac{dr}{dt}\right), \quad k > 0,$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda k va F o‘z argumentlarining turli xil funksiyalaridir. Bunday umumiy modelga tayanib, mos aniqliklar kiritish, soddaroq modellarni olish va o‘rganish mumkin. Masalan, k ning r va t ga bog‘liq bo‘lishi (4.26) tenglamadan keyin turuvchi (4.32) tenglamaga javob beradi. F ning r, t – tashqi kuch yoki inertsiya kuchining mavjud bo‘lishiga bog‘liqligi ((4.23), (4.24), (4.26)), dr/dt ning – muhit qarshiligiga bog‘liq



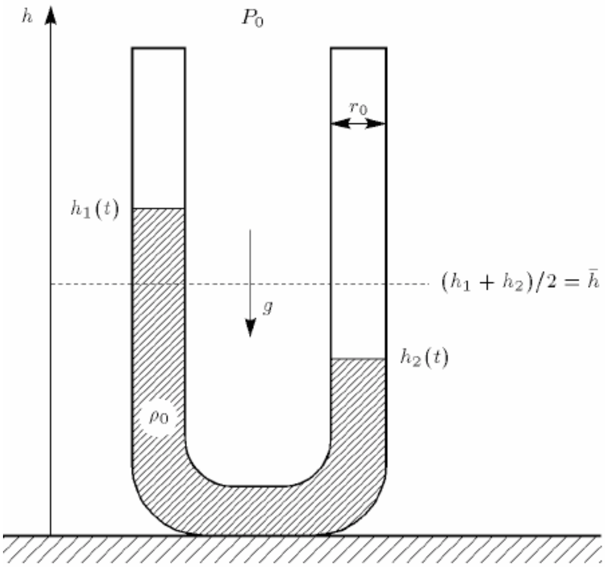
4.14-rasm

bo‘lishidir ((4.27), (4.29), (4.31) tenglamalar). Berilgan yondashuv obyektning ayrim umumiy xususiyatlarini olishga imkon berganligi, ularni ayrim hollarda to‘ldirib turganligi uchun keng qo‘llaniladi.

4.5. Matematik modelning universalligi

Tebranish jarayonini turli tabiatga mansub obyektlarda ko‘rib chiqaylik. Obyektlarning xususiyatlari har xil bo‘lishiga qaramay, ularga bir xil matematik modellar to‘g‘ri kelishini isbotlang.

1) U-simon idishdagi suyuqlik. Suyuqlik r_0 radiusli bukilgan trubka ko‘rinishidagi U-simon idishning ma’lum bir qismini egallaydi (4.15 rasm). Suyuqlikning massasi M_0, uning zichligi ρ_0. Idish devorlari ideal darajada silliq, sirt tarangligi hisobga olinmaydi, atmosfera bosimi va erkin tushish tezlanishi g doimiy.



4.15-rasm

Muvozanat vaziyatda suyuqlik tinch turibdi, uning idish devorlaridagi balandligi bir xil. Agar uni muvozanatdan chiqarsak, u holda xarakterli energiyaning saqlanish qonuni bo‘yicha aniqlangan harakat boshlanadi.

Potensial energiyani muvozanat vaziyatda (bunda h_1=h_2) 4.15 rasmda tasvirlangan holatga o‘tkazish uchun bajarish kerak bo‘lgan ish orqali aniqlaymiz. U quyidagiga teng:

$$E_{\text{п}} = -\int_{h}^{h_1} P\,dh_2 = -\int_{h}^{h_2} \rho_0 s_0 (h_1 - h) g\,dh, \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

bu yerda R – o‘ng tomonda h_2 balandlikdan ortuvchi suyuqlik balandligi. Atmosfera bosimining ishi nolga teng, chunki idishning ikki tomoni uchun mos o‘zgaruvchilar har xil tomonga yo‘nalgan.

$h_1(t)$ va $h_2(t)$ noma’lumlar $h_1(t)+h_2(t)$=const > 0 munosabat bilan bog‘langan bo‘lib, ustunning to‘la uzunligini doimiy kesim bilan bog‘laydi. Oxirgi tenglikni E_p uchun mo‘ljallangan ifodaga qo‘yib, integrallashdan so‘ng quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$E_{п} = -\rho_0 s_0 g\left(-h_2^2(t) + Ch_2(t) + C_1\right).$$

Kinetik energiyani hisoblashda trubka kesimining o‘zgarmasligini hamda suyuqlikning siqilmasligini hisobga oling. Bu, suyuqlik ustuni butunligicha harakatlanadi va uning tezligi $v(t)$ hamma kesimlarda bir xil, degani. $v(t)$ sifatida $dh_2(t)/dt$ kattalikni olamiz, *u holda*

$$E_k = \frac{1}{2} M_0 \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2.$$

Energiyaning saqlanish qonunidan esa quyidagi ko‘rinish kelib chiqadi:

$$E(t) = E_k(t) + E_{п}(t) = \frac{M_0}{2}\left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \rho_0 s_0 g(-h_2^2 + Ch_2 + C_1).$$

$dE/dt=0$ bo‘lgani uchun berilgan ifodani differensiallab

$$M_0 \frac{d^2h^2}{dt^2} = \rho_0 s_0 g(-2h_2 + C).$$

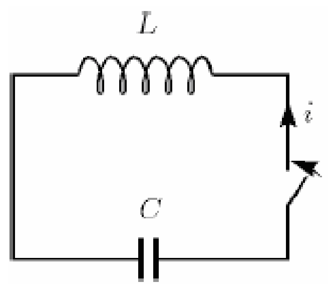
ga ega bo‘lamiz, bu esa $h_1(t)$ kattalik uchun:

$$M_0 \frac{d^2h}{dt^2} = -\rho_0 s_0 gh = -\pi\rho_0 r_0^2 gh.$$

tenglamani beradi, bu yerda $h=(h_2-h_1)/2$ – suyuqlik balandligining muvozanat vaziyatidan chetlanishi. U (4.22) 4.4 bo‘limdagi «shar-prujina» tizimi formulasi bilan ustma-ust tushadi (berilgan holda shar o‘rniga suyuqlik balandligi, prujina rolini esa tortilish kuchi o‘ynaydi).

Obyektni ideallashtirishdan ketma-ket ravishda bosh tortish uning to‘laroq modelini beradi. Masalan, suyuqlik harakatiga qarama-qarshi yo‘nalgan sirt taranglik kuchi $\sigma_0 2\pi r_0$ ni hisobga olish (σ_0 – sirt taranglik koeffisienti) h kattalikning 4.4 bo‘limdagi (4.28) tenglamasiga olib keladi (1-misolga ham qarang).

2. Tebranuvchi elektr kontur. Bu qurilma tarkibiga simlar bilan ulangan kontur va induktiv g‘altak kiradi. t=0 momentda zanjir tutashadi, kondensator qatlamlaridagi zaryad zanjir bo‘ylab tarqaladi (4.16-rasm).



4.16-rasm

Simlarning qarshiligi nolga teng, kondensator sig‘imi C, g‘altak induktivligini L deb olamiz. Vaqt bo‘yicha o‘zgaradigan *q(t)* kattalik, bu yerda *q(t)* – kondensator qatlamlaridagi zaryadlar uchun tenglamalarni hosil qilib olish zarur. $i(t)$ tok va $v(t)$ kuchlanish vaqtga bog'liq funksiyalardir.

S kattalikning fizik ma'nosiga ko'ra $v(t)=q(t)$ S ga teng (sig'im deganda potensiallar farqini bir birlikka oshirish uchun kondensator qatlamlariga joylashtirish kerak bo'lgan zaryad miqdoriga teng).

Zanjirning elektr qarshiligi bo'lmaganligi tufayli zanjirda kuchlanish chuvi yo'q, kondensatorda mavjud bo'lgan potensiallar farqi $v(t)$ bevosita g'altakka uzatiladi. O'zgaruvchi tok holatida g'altakda $\varepsilon = -Ldi/dt.$ ga teng bo'lgan uzinduksiya - EYuK hosil bo'ladi. Zanjir uchun Om qonunining qarshilik bo'lmagandagi ko'rinishi quyidagicha:

$$v(t)=-\varepsilon(t).$$

Ta'rifga ko'ra i=-dq/dt (kondensatorda zaryad kamayishi bilan zanjirda tok ortadi va aksincha), oxirgi munosabatga ko'ra quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} = -Cq\,.$$

Tebranish jarayonini ta'riflovchi kattalik $q(t)$ (demak $i(t)$, $v(t)$ kattaliklar ham) 4.4 bo'limdagi (4.22) sodda elektr konturidagi kabidir. «Sig'im-induktivlik» tizimida tebranishlar «shar-prujina» tizimidagi kabi amalga oshadi (qo'shimcha jarayonlarni hisobga olganda ham xuddi shunday murakkablashadi - 2 misolga qarang).

3. Ikkita biologik populyatsiyaning o'zaro ta'siridagi kichik tebranishlar. Bitta muhitda $N(t)$ va $M(t)$ sonli biologik populyatsiyalar istiqomat qilsin, jumladan birinchisi o'simlikxo'r, ikkinchisi esa birinchi populyatsiya vakillarini yeydi.

$N(t)$ o'zgarish tezligi 4.1 bo'limdagi (4.10) formulaning o'ng qismidagi tug'ilish hisobiga ortish tezligini ifodalagan birinchi hadi (to'yinish effekti hisobga olinmaydi (4.12) bilan 4.1 bo'limni solishtiring) va ikkinchi populyatsiyaning qo'shniligi tufayli kamayish tezligi:

$$\frac{DN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N. \tag{4.34}$$

bilan aniqlanadi, bu yerda $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0,$ $\beta_1 MN$ had esa majburiy kamayishni (populyatsiyaning tabiiy o'limni hisobga olmaymiz) ifodalaydi.

Ikkinchi populyatsiyaning soni birinchi populyatsiyaning soni ortishi bilan ortaveradi, uning kamayganligida esa $M(t)$ songa proportsinal tarzda kamayadi (shuning uchun tug'ilish va to'yinish samarasi hisobga olinmaydi):

$$\frac{DM}{dt} = (-\alpha_2 - \beta_2 N)M. \qquad (4.35)$$

Bu yerda $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$.

$dN/dt = dM/dt = 0$ bo‘lganda $M_0 = \alpha_1/\beta_1$ va $N_0 = \alpha_2/\beta_2$ tizim muvozanatda bo‘ladi. Tizimning muvozanat qiymatlaridan kichik chekinishlarini ko‘rib chiqaylik, ya’ni yechimni $N = N_0 + n, M = M_0 + m, n << N_0,\ m << M_0$ ko‘rinishda tasvirlaymiz. *N* va *M ni* (4.34), (4.35), tenglamalarga qo‘yib, kichiklikning yuqori darajali hadlarni tashlab yuborib quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\frac{Dn}{dt} = \beta_1 N_0 m, \qquad (4.36)$$

$$\frac{Dm}{dt} = \beta_2 M_0 n. \qquad (4.37)$$

(4.36) ni *t* bo‘yicha differensiallab, hosil bo‘lgan tenglamaga (4.37) dan topiladigan *dm/dt funksiyani qo‘yib* quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$L\frac{d^2 n}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2 n,$$

bu tenglama shaklan 4.4 bo‘limdagi (4.22) tenglamaga o‘xshaydi. Demak, tizimda tug‘ilish va o‘lishning α_1 va α_2 koeffisientlarigagina bog‘liq bo‘lgan aholining $\omega = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ chastotali tebranishlari sodir bo‘ladi.

m(*t*) kattalik ham xuddi shunday tenglamaga bo‘ysunadi, jumladan, agar *n*(*t*) chetlanish *t*=0 momentda nolga teng bo‘lsa, u holda *m*(*t*=0) maksimal amplitudaga ega va aksincha (2-bo‘limdagi tebranishlarning (4.6) tenglamasiga qarang). Bunday holda, ya’ni *n*(*t*) va *m*(*t*) *sonlar* zid munosabtda bo‘lganda, $t_i = iT/4,\ i = 1,2,...,$ (*T* – tebranish davri) davrda bitta populyatsiya sonining boshqasiga nisbatan kech qolishini namoyon qiladi (3-misolga qarang).

4. Oylik va bandlik o‘zgarishining sodda modeli. Ish beruvchilar bilan yollanma ishchilar o‘zaro ta’sirda bo‘lgan mehnat bozori *p*(*t*) oylik va *N*(*t*) bandlar soni bilan xarakterlanadi. Unda muvozanat ya’ni $r_0>0$ oylikka $N_0>0$ ta odam ishlashga rozi bo‘lsin, deylik. Agar biron-bir sabab tufayli muvozanat buzilsa (masalan, yosh tufayli ishchilarning bir qismi nafaqaga ketsa yoki tadbirkorlarda ma’lum bir qiyinchiliklar tug‘ilsa), u holda *p*(*t*) va *N*(*t*) funksiyalar p_0, N_0 dan chetlanadi.

Ish beruvchilar oylikni ish bilan band aholi sonining muvozanat vaziyatdan chetlanishiga qarab o‘zgartiradi, deb faraz qilaylik. U holda:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N - N_0),\ \alpha_1 > 0.$$

Ishchilar soni p_0 qiymatga nisbatan oylikning o‘sishi yoki kamayishiga proportsional tarzda ortadi yoki kamayadi, ya’ni:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2 (p - p_0),\ \alpha_2 > 0.$$

Birinchi tenglamani t bo‘yicha differensiallab va undan ikkinchi tenglama yordamida *N* kattalikni yo‘qotib, tebranishlarning standart modeliga kelamiz:

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2(p - p_0).$$

Bu, muvozanatga nisbatan ishlab topilgan pul (*N*(t) kattalik uchun ham huddi shundaydir). Mazkur tenglamaning birinchi integralidan:

$$\alpha_2(N - N_0)^2 + \alpha_2(p - p_0)^2 = const > 0,$$

ko‘rinib turibdiki, ayrim $t=t_i$, i=1,2,... momentlarda $r=p_0$ *bo‘lganda* (ya’ni oylik muvozanat qiymatga teng holatda), $N>N_0$ bo‘ladi. Ya’ni bandlar soni muvozanatdagidan ko‘proq, $N=N_0$ da esa $r>p_0$, ya’ni oylik muvozanatdagidan ortiq. Bu holda ish haqqining *pN* ga teng bo‘lgan fondi agar t_i momentga kelib $r>R_0$ yoki $N>N_0$ (va aksincha) shart bajarilsa, p_0N_0 muvozanat qiymatdan ortiq (yoki kam). Lekin tebranish davrida *pN* kattalik p_0N_0 ga teng (4-misol).

5. Xulosa. Qaralayotgan bo‘limda ko‘rilgan modellar ayrim hollarda mashhur qonunlarga (4.1, 4.2 bo‘limlar), boshqa hollarda esa kuzatilgan omillarga yoki o‘xshashliklarga (4.3 bo‘lim), yoki obyektning harakati to‘g‘risidagi aniq tassavvurlarga (4.4 bo‘lim) asoslanadi. Ko‘rib chiqilgan hodisalarning mazmuni va ularga javob beruvchi modellarni olishga qaratilgan yondashuvlar mutlaqo har xil bo‘lgani uchun qurilgan modellar bir-biriga yaqin bo‘ldi. Bu matematik modellarning turli tabiatli obyektlarni o‘rganishda keng qo‘llaniladigan muhim xususiyati *universalligidir*.

Misollar va nazorat savollari

1. 4.1-bo‘limning birinchi masalasida, a) *V* kattalikni («o‘q-yuk tizimining to‘qnashishdan keyingi tezligi) topish uchun energiyaning saqlanish qonunidan emas, impulsning saqlanish qonunidan foydalaning. O‘qning *v* tezligi uchun hosil qilingan formula (4.1) formuladagi qiymatga nisbatan $((M+m)/m)^{1/2}$ marta kamroq qiymat beradi.

2. Materialni o‘yuvchi lazerning quvvati vaqtga bog‘liq bo‘lsin, ya’ni W=W(t) . (4.3) formula qanday o‘zgaradi? O‘ymaning chuqurligi sarf bo‘lgan energiyaga proportsional degan mulohaza o‘z kuchini saqlab qoladimi?

3. Radioaktiv moddaning oxirgi elementi qachon yemirilishini toping (4.1 bo‘lim)). Nimaga (4.5) modelda modda faqatgina $t\to\infty$ da to‘la yemiriladi?

4. 4.1, v) (yonilg‘ining to‘la yonish momentida m_s=0) da tarkibiy massaning kerakmas qismi uzluksiz tashlab yuboriladigan «ideal», bir qatlamli raketa ko‘rib chiqilmoqda, deb faraz qilaylik). Impulsning saqlanish qonunidan foydalanib, bunday raketaning maksimal tezligi $v = (1-\lambda)\, u \ln(m_0 / m_p)$ formula bo‘yicha topilishini ko‘rsating. Uni (4.6) formula bilan solishtiring. Nima uchun ideal raketa ixtiyoriy tezlikka erisha oladi?

5. (4.8) shartni qo‘llagan holda *t(Q)* kattalik uchun (4.7) shart minimallik sharti ekanligini tekshiring. 4.5 rasmdan qaysi tezlik - v_a yoki v_b kattaligini aniqlang? (4.9) formuladan foydalanib qanday Q burchaklarda nur a muhitdan b muhitga o‘tmaydi, ya’ni bir qator texnik qurilmalarda ishlatiluvchi «to‘la ichki qaytish» effekti qachon sodir bo‘ladi?

6. Katta t larda Maltus modelidagi $r(t)=\alpha(t)-\beta(t)>0$ kattalik $t\to\infty$ da aholi soni cheklangan bo‘lib qolishi uchun qanday qiymat qabul qilishi kerak?

7. Ko‘p qismli raketa uchun mo‘ljallangan (4.11) formuladagi $n\to\infty$ chegaraga o‘ting va uning chegaraviy tezligi 4-mashqdagi ideal raketa uchun mo‘ljallangan formuladan topilishiga ishonch hosil qiling. Nimaga natijalar mos tushadi?

8. (4.12) mantiqiy qurilmada muvozanat vaziyatdan kichik chekinishlarni, ya’ni $N(t)=N_p+\delta N(t)$ yechimni ko‘rib chiqing. Bu yerda $|\delta N(t)| << N_p$. $\delta N(t)$ kattalik uchun birinchi yaqinlashishda Maltus modeliga (4.10) o‘xshash chiziqli modelning o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qiling.

9. Nyutonning ikkinchi qonuni bo‘yicha qurilgan (4.21) modelning to‘g‘riligini tekshiring.

10. 4.2 bo‘limdagi (4.21) ning natijalaridan va Gamilton tamoyilidan foydalanib mayatnikning zaryadlangan gorizontal tekislik hosil qiluvchi elektr maydonda tebranish modelini quring. Yukning zaryadi q ga, zaryadning tekislikdagi sirt zichligi – q_0 (og‘irlik kuchi hisobga olinmasin). Ta’sir etuvchi kuchlarning tabiati har xil bo‘lishiga qaramay (4.21) ga o‘xshash model hosil bo‘ladi?

11. Sharning prujina taranglik kuchi va og‘irlik kuchi ta’sirida ideal sathga ega bo‘lgan prujinadagi harakat tenglamasini oling. Sath tenglamasi: $y = f(x),\ y' \le 0$ (4.14-rasm).

12. k_1, k_2, m, r_0, v_0 kattaliklarni shunday tanlangki, 4.13-rasmda shar mahkamlanish nuqtalari bilan umuman to‘qnashmasin.

13. (4.27) tenglamani tahlil qilishda qo‘llanilgan usuldan foydalanib, (4.29) tenglamadagi holatda harakat so‘nuvchi bo‘lishini isbotlang.

14. $k_1 < 0$ dagi (4.30) tenglamaning yechimini giperbolik funksiya orqali ifodalang va (4.29) tenglamaning yechimi $t \to \infty$ da nolga intilishini isbotlang.

15. r(t) funksiyaning t=t_0 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyib $d^3r/dt^3(t_0)$ kattalikni hisoblang, bunda (4.31) tenglamaning o‘ng qismi nolga teng.

16. U-simon idish to‘g‘risidagi masalada chap qismning o‘zgaruvchan kesimi bo‘lsin, ya’ni r=r_0. Nyutonning ikkinchi qonunini qo‘llab va suyuqlik tezligining gorizontal tashkil etuvchisini hisobga olmasdan, h balandlik uchun (4.32) ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘lishini ko‘rsating.

2. LC-KOHTUP ga R qarshilikni kiritib hamda Om qonunini qo‘llab, *LCR-kontur* dagi tebranish modeli 4.4 bo‘limdagi (4.29) tenglamaga o‘xshash bo‘lishini isbotlang.

17. (4.34), (4.35) nochiziqli tizimni ikkinchi tartibli tenglamaga olib keling va uning ((4.36), (4.37) chiziqli o‘xshashi kabi) birinchi integrali borligini ko‘rsating.

18. Tebranish tenglamasini umumiy holda yechish uchun 4.2 bo‘limdagi (4.6) formuladan foydalanib, ish haqqi fondining o‘rtacha qiymati rN (4.4 bo‘lim) tebranish davrida muvozantiga teng bo‘lishini ko‘rsating.

19. Bir xil modellar orqali tabiati turlicha bo‘lgan, har xil fundamental qonunlarga bo‘ysunuvchi R_l, R_3 chekli o‘lchamga ega bo‘lgan kondensator qatlamlariga tortilish kuchini toping. $R_l \to \infty$, $R_3 \to \infty$ da olingan ifoda (4.14) formulaga o‘tishini isbotlang.

20. 3 bo‘limdagi masalada halqa qalinligi *d*ni kiriting, F kuchni toping, olingan ifoda $d \to 0$ da (4.15) formula bilan mos tushishiga ishonch hosil qiling.

21. Prujinaning neytral vaziyat r=0 nuqtasi bilan devor orasidagi masofa L ga teng (4.11-rasm). (4.6) formuladan foydalanib, "0, *Vo*, pr" kattaliklarga sharcha devorga urilmasligi uchun qo‘yilgan talablarni toping (aks holda (4.17) model noto‘g‘ri, chunki sharcha devor bilan urilganda, sharchaga tenglamada hisobga olinmagan kuch ta’sir qiladi (4.17)).

Nazorat savollari

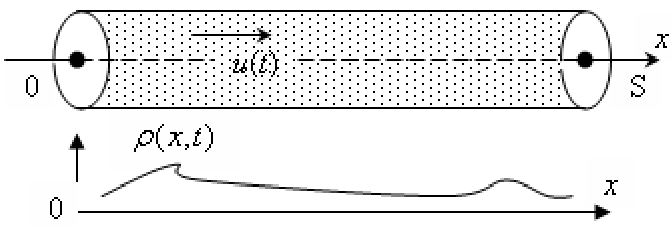
1. Elementar matematik modellarga misollar keltiring.
2. Tabiatning fundamental qonunlarini misollar bilan izohlang.
3. Modellarni qurishda o‘xshashlikdan foydalanish deganda nimani tushunasiz?
4. Modellarni qurishning variatsion tamoyillariga izoh bering.
5. Modellarni olishda ierarxik yondashuv.
6. Matematik modellarning nochiziqligi haqida tushuncha bering.
7. Gamilton tamoyilining umumiy sxemasi.
8. Modellar ierarxiyasiga misol keltiring.
9. Matematik modellarning universalligi.

5. TABIATNING FUNDAMENTAL QONUNLARIDAN MODELLARNI HOSIL QILISH

5.1. Modda massasining saqlanishi

Modda massasining muvozanatini hamda ayrim qo‘shimcha mulohazalar asosida o‘zaro ta’sirga ega bo‘lmagan zarralar oqimi va g‘ovakli muhitda qatlamli suvlarning harakat modelini quramiz. Olingan modellarning bir qator xususiyatlarini ta’riflab o‘tamiz va ularning umumiy tomonlarini belgilaymiz.

1. **Trubada zarralarning oqimi.** Ko‘ndalang kesim yuzi S ga teng bo‘lgan silindrik trubada (5.1-rasm) moddaning zarralari (chang, elektronlar) harakatlanmoqdalar. Ularning x o‘qi bo‘yicha harakatlanish tezligi u(t)>0 umuman olganda vaqtga bogliq holda o‘zgaradi. Masalan, zaryadlangan zarralar elektrik maydoni ta’sirida tezlashishi yoki sekinlashishi mumkin. Ko‘rib chiqilayotgan harakatning eng sodda modelini qurish uchun quyidagi farazlarni kiritamiz.



5.1 rasm

a) zarralar o‘zaro ta’sirlashmaydi (to‘qnashmaydi, tortilmaydi va h.k.). Buning uchun zarralarning zichligi juda ham kichkina bo‘lishi kerak (bunday holatda zaryadlangan zarralar nafaqat to‘qnashmaydi, balki orasidagi katta masofasi tufayli bir-biriga ta’sir ko‘rsatmaydi);

b) x o‘qi bilan bir xil ko‘ndalang kesimda joylashgan bir xil zarralarning boshlang‘ich tezligi bir xil va x o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan;

v) zarralarning boshlang‘ich zichligi ham faqat x koordinataga bog‘liq;

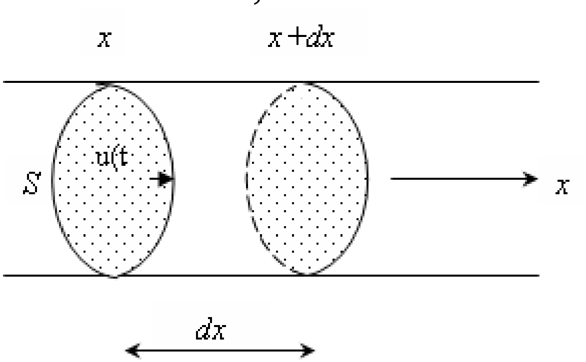
g) zarralarga ta’sir etuvchi tashqi kuchlar x o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan.

Endi yuqoridagi farazlarga tushuntirish beramiz:

a) faraz zarralarning tezligi faqatgina tashqi kuchlar ta’sirida o‘zgarishi mumkinligini anglatadi, b), v), g) farazlar ko‘chirish jarayonining bir o‘lchovligini, ya’ni zarralar oqimining qidirilayotgan zichligi faqatgina x koordinataga va $t \geq 0$ vaqtga bog‘liq bo‘lishini ta’minlaydi.

Shunday qilib berilgan boshlang‘ich zichlik $r(x,t = 0) = r_0(x)$ bo‘yicha ixtiyoriy x lar uchun xar qanday vaqt momentidagi zarra zichligi *r(x,t)* topilishi shart.

Massaning saqlanish qonunidan foydalangan holda *dt* vaqt ichida trubaning x dan x+ *dx* gacha bo‘lgan kichik elementida moddaning muvozanatini hisoblaymiz (5.2-rasm). Chapda elementar hajm tarkibiga modda miqdori bilan massa kiradi, u esa o‘z navbatida quyidagiga teng



5.2-rasm

bu yerda *Si(t1) dt* —*dt* vaqt oralig‘ida kirgan modda hajmi. Xuddi shu vaqt ichida elementning o‘ng kesimidan $-Su(tdt\rho(x+dx,t+\bar{\xi}dt),\ \ \bar{\xi}\neq\xi,\ \ 0\le\bar{\xi}\le 1$, ga teng massa chiqadi, ya’ni massaning umumiy o‘zgarishi $dm = Su(t)(\rho(x,t+\xi dt)-\rho(x+dx,t+\bar{\xi}dt))dt$ ga teng.

dt oraliqning kichikligi hisobiga *i(t)* tezlikka doimiy deb qaraladi. $\rho(x,t+\xi dt)$ va $\rho(x+dx,t+\bar{\xi}dt$ kattaliklar - x va x + *dx* kesimlardagi zichlikning vaqt bo‘yicha o‘rtacha qiymatlari.

Belgilangan S*dx* hajmdagi o‘zgarishlarni hisoblashning boshqa usuli *r(x,t)*kattalikning ta’rifidan kelib chiqadi*:*

$$dm = Sdx(\rho(x+\eta dx,t+dt)-\rho(x+\bar{\eta}dx,t)),\quad 0<\eta,\bar{\eta}<1,$$

bu yerda $\rho(x+\eta dx,t+dt)$ va $\rho(x+\bar{\eta}dx,t)$— *t* va *t + dt* momentlardagi zichlikning fazo bo‘yicha o‘rtacha qiymati.

dm uchun olingan ikkala ifodani tenglashtirib, *dx va dt* ni nolga intiltirish natijasida *r(x,t)* uchun massaning saqlanish qonuniga javob beruvchi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}u(t)=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0. \qquad (5.1)$$

Uning boshlang‘ich sharti:

$$r(x, 0) = r_0\{x),\qquad -\infty<x<\infty. \qquad (5.2)$$

ri kattalik *(modda oqimi*, yoki *massa oqimi)* trubaning birlik ko‘ndalang kesim yuzasidan birlik vaqt ichida o‘tuvchi modda miqdoriga teng. (5.1) dan ko‘rinib turibdiki, modda zichligining vaqt o‘tishi bilan o‘zgarish tezligi har qanday kesimda modda oqimining x koordinata bo‘ylab o‘zgarish (tezligi)ga qarab aniqlanadi. Shunga o‘xshash xususiyatga saqlanish qonunlariga bo‘ysunuvchi hamda umuman boshqa jarayonlarga ta’rif beruvchi ko‘plab modellar ega bo‘ladi. *i(t)* = u_0 doimiy tezlik holida xususiy hosilali sodda chiziqli tenglamaga kelamiz:

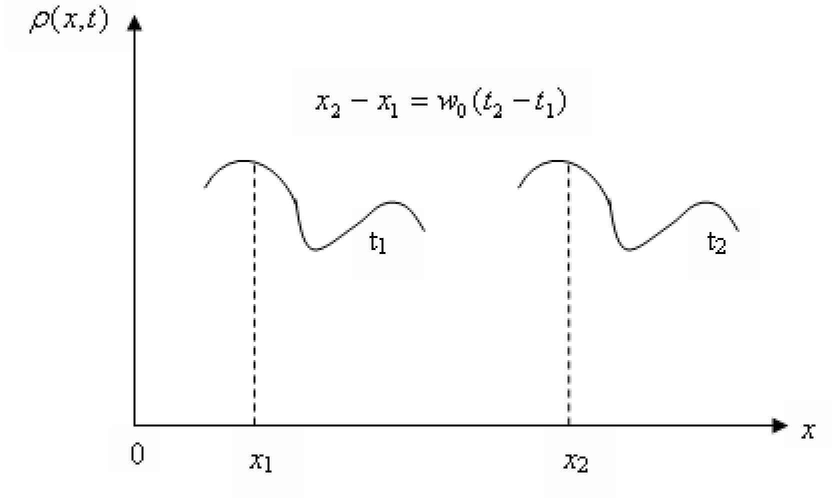
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \tag{5.3}$$

Uning umumiy yechimini (5.3) tenglamaning tavsifi – qidirilayotgan funksiyaning qiymatlari vaqt bo‘yicha doimiy, ya’ni $r(x = i_0 0t + S, t) = r_c$ yoki ekvivalent yozuvda $r(x,t) = r(x + i_0(t-t_0), t_0)$, $t-t_0 \geq o$, x = $i_0 t + S$ chiziqlarga teng ekanligini hisobga olgan holda topish qiyin emas.

Agar t_0=0 deb olsak, u holda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$\rho(x,t) = \rho(\xi) = \rho(x + u_0 t).$$

(5.4) integral (5.3) tenglamaning umumiy yechimi sanaladi. (5.4) formuladan va (5.2) boshlang‘ich ma’lumotlardan foydalangan holda qidirilayotgan funksiyani topish juda oson, jumladan u alohida x,t o‘zgaruvchilarga emas, ularning kombinatsiyasi $\xi = x + i_0 t$ ga bog‘liq (yuguruvchi to‘lqin).

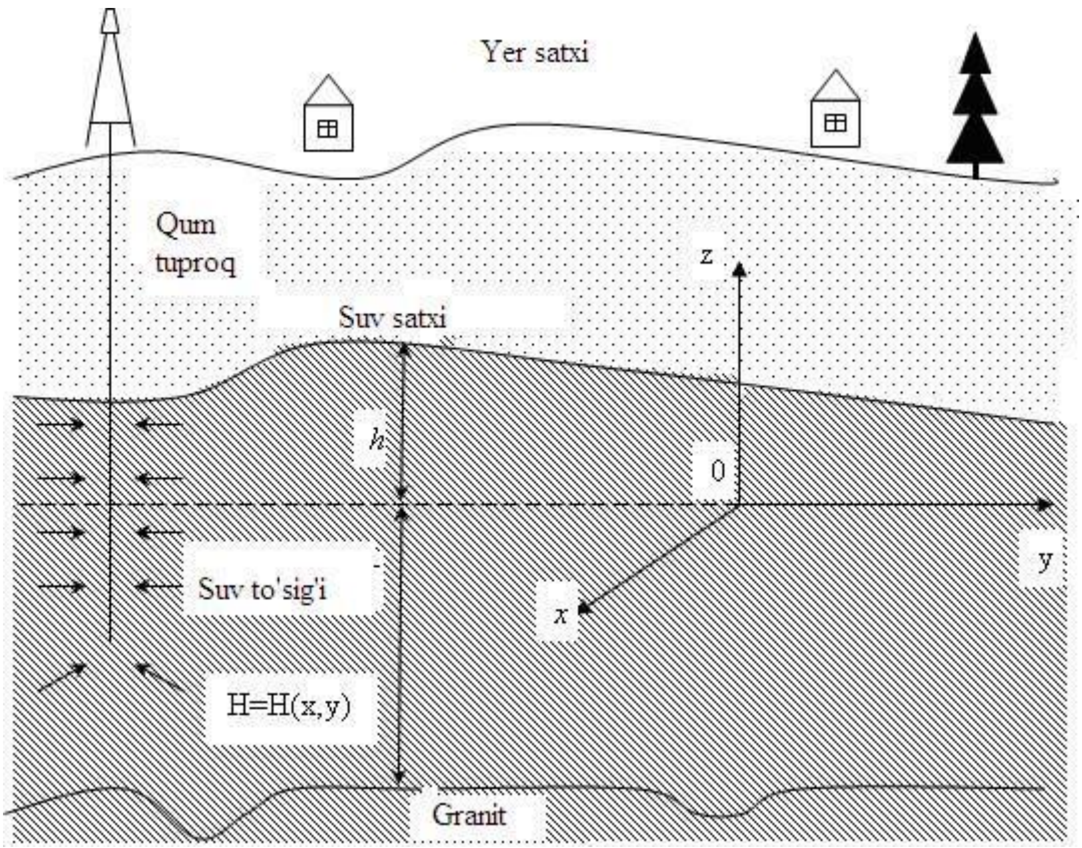


5.3 rasm

Zichlikning fazoviy hususiyati doimiy tezlikda oqim bo‘ylab hech qanday o‘zgarishlarsiz ko‘chadi ((5.3) *ko‘chish tenglamasi* deb ham ataladi). (5.3)tenglamani yechishning bunday xususiyati zarralarning tezligi vaqtga bog‘liq bo‘lgan holda birmuncha zamonaviylashtiriladi - zarraning zichligi turli vaqt oralig‘ida har xil masofaga ko‘chadi (1-

misolga qarang). Agarda biror-bir sababga ko‘ra oqim tezligi zichlikka bog‘liq bo‘lib qolsa, ya’ni *(i = i(r)):* u holda (5.1) tenglama nochiziqli ko‘rinishga o‘tadi. Uning yechimi esa sifat jihatidan umuman boshqa mazmunga ega bo‘lib qolishi mumkin.

2. Qatlamdagi suvlar oqimining gravitatsion rejimiga oid asosiy mulohazalar. G‘ovakli muhit quyida o‘zidan suv o‘tkazmaydigan qatlam (granit), yuqoridan er sirti bilan chegaralangan, suv o‘tkazmaydigan material qatlamini tashkil etadi (qum, loy) (5.4-rasm). Agarda artezian quduqlarning jadal faoliyati, yoki o‘ta ko‘p yog‘ingarchiliklar tufayli qatlamning ma’lum bir qismida suvning darajasi o‘zgarsa, og‘irlik kuchi sababli uning erkin sirtini tekislovchi suv harakati boshlanadi.



5.4-rasm

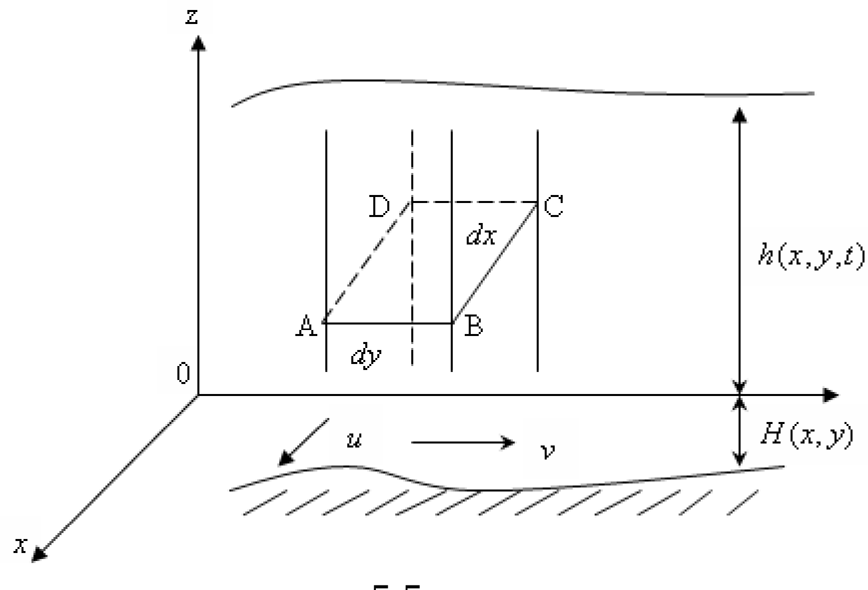
Ushbu jarayonni ta’riflash uchun, avvalo, bir qator farazlarni kiritaylik:
1) suvga doimiy *r* zichlikka ega, siqilmaydigan suyuqlik deb qaraladi;
2) qatlamning qalinligi uning kengligi va uzunligidan ancha kichik;
3) qamrovchi sath uzilish va sinishlarga ega emas, uni aniqlovchi *N(x,u)* funksiya — argumentlariga nisbatan anchagina silliq;
4) suvning erkin sathi *h = h(x, u, t) x,y* koordinatalarning o‘zgarishi bilan asta o‘zgaradi;

5) quduqdagi suvlar hech qayerdan er sathiga chiqib qolmaydi, jumladan suyuqlikning erkin sathida suyuqlikning bosimi doimiydir;
6) quduq bir jinsli, ya’ni uning fizik xususiyatlari x, *u*, *z* argumentlarga bog‘liq emas.

Birinchi farazimiz tabiiy, chunki ko‘rilayotgan jarayonda suvning zichligi o‘rnini bosuvchi bosimlarga erishib bo‘lmaydi. Qolgan farazlar soddalashtiruvchilardir. Masalan, ikkinchi faraz (ingichka qatlam) suyuqlikning oqimi ikki o‘lchovli, uning hamma xossalari *z* koordinataga bog‘liq emasligini bildiradi, oxirgi ikkita faraz quduqning hamma nuqtalari uchun bir bo‘lgan modelni qurishga imkon beradi. Shu bilan bir qatorda 1) - 6) farazlar jarayonning mazmunidan chiqib ketmaydi, chunki ular hayotning ko‘pgina jabhalarida o‘z ta’sirini o‘tkazadi.

3. Quduq elementidagi massa muvozanati. Qatlamda vertikal *AVSD* prizma bilan quduqning erkin sathi kesishishi natijasida hosil bo‘ladigan elementar hajmni ajratib ko‘rsatamiz. Prizmaning *dx va du* o‘lchamlari kichik, *N* va *h* funksiyalar silliq bo‘lgani uchun (5.3),5.4) farazlar), hosil bo‘lgan jismni parallelepiped shaklda deb olish mumkin. Suyuqlikning x, *u* o‘qlari bo‘ylab tezligini aniqlovchi $v = v(x, y, t)$ va *i* = *i(x, u, t)* noma’lumlarni kiritamiz (5.5-rasm).

dt vaqt ichida parallelepipeddan o‘tuvchi hamda undan chiquvchi suyuqlik miqdorini hisoblaymiz.



5.5-rasm

DC qirra orqali quduq elementiga undan o‘tgan suyuqlikning hajmini *r* zichlika ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan kattalikka teng suv massasi, ya'ni *ri (N + h) dudt*, kattalik, AV qirra orqali esa quyidagi suv massasi chiqadi

$$\rho u(H+h)dydt+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]dx\right\}dydt\,.$$

Ushbu ifodada oldingisidan farqli, *x tekislikdan x + dx* tekislikka o'tish paytida ρu *(N + h)* funksiyaning orttirmasini ta'riflovchi had qo'shiladi.

ri (N + h), kattalikning o'zi esa 1 bo'limdagi kabi massa (modda) oqimi ma'nosiga ega.

Shunda, suyuqlikning x o'qi bo'ylab harakatlanishi natijasida quduqning *ix* elementida

$$-\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]dxddt$$

massa to'planadi. Shunga o'xshash mulohazalarni *AD* va *VS* qirralar uchun olib borib, suv massasining o'q bo'ylab harakatlanishi hisobiga o'zgarishini olamiz:

$$-\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]dxdydt\,.$$

z o'qi bo'ylab, quduq elementiga suyuqlik oqib kirmasligi va undan chiqmasligi tufayli (quyida - qatlam, erkin sathda esa modda oqimi yo'q), qatlam elementida suv massasining umumiy o'zgarishi

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]\right\}dxdydt \text{ ga teng.} \qquad (5.5)$$

Parallelelepipeddagi suyuqlikning umumiy miqdori uning hajmini *r* zichlikka hamda g'ovaklilik koeffisienti m < 1 ga ko'paytirishga teng(chunki hajmning ma'lum qismi quduq bilan egallangan):

mr *(N + h) dxdy.*

Elementdagi suv massasining dt vaqt ichida o'zgarishi quyidagiga teng:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho m(H+h)]dxdy\right\}dt\,.$$

dN/dt = 0, *dr/dt* = 0 ni hisobga olgan holda, oxirgi ifodadan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t}dxdydt\,, \qquad (5.6)$$

hamda (5.5) ni (5.6) ga tenglashtirish natijasida ko'rilayotgan jarayonda massaning saqlanish qonunini ifodalovchi *uzluksizlik tenglama*ga kelamiz:

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]-\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)\,. \qquad (5.7)$$

(5.7) tenglamada ko‘rilayotgan kattalikning (berilgan holda massaning) vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi ushbu kattalik oqimining devergentsiyasi - saqlanish qonunidan hosil qilinadigan ko‘plab modellarga xarakterli bo‘lgan xususiyati bo‘yicha aniqlanadi ((5.1) tenglama bilan solishtiring).

dr/dx = 0, *dr/du* = 0 ekanligini hisobga olgan holda, (5.7) tenglama nisbatan soddaroq ko‘rinishda yozib olinadi:

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[u[(H+h)] - \frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]\,. \qquad (5.8)$$

4. Massaning saqlanish qonunining birlashuvi. (5.8) tenglamada uchta noma’lum kattalik— *h, i, v* bor. Modelni birlashtirish uchun jarayonning xarakteriga bog‘liq qo‘shimcha mulohazalarni jalb etish zarur. Ularni yarim empirik *Darsi qonuni* beradi:

$$u = -\mu\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v = -\mu\frac{\partial p}{\partial y}\,. \qquad (5.9)$$

Bu yerda *r(x, u, t)* — suyuqlikdagi bosim, μ > 0 —quduqning xususiyatlari bilan aniqlanuvchi koeffisient. Darsi qonuniga ko‘ra, suyuqlik oqimining tezlik komponentlari bosim qatlamining mos qismlariga proportsional. Shuni qayd etish joizki, qatlam o‘zining fizik ma’nosiga ko‘ra kuchdir (birlik hajmga nisbatan). Ayni shu vaqtda Nyutonning ikkinchi qonuni bo‘yicha jismga ta’sir etuvchi kuch Darsi qonunidagidek tezlikka emas, tezlanishga proportsional. Ammo berilgan ziddiyat to‘qima, chunki qatlamdan o‘tish paytida suyuqlik erkin oqim holatidan farqli o‘laroq, o‘zining zarralari qarshiligini yengadi.

(5.9) formulalarda yangi no‘malum kattalik - suyuqlik bosimi qo‘llaniladi. Uning kiritilgan kattaliklar bilan aloqasini suvning oqimi sekin va deyarli gorizontal deb olingan holatda topish qiyin emas. U holda dinamik bosim hisobga olinmasa, uni suyuqlik ustuni tomonidan tashkil etiluvchi bosim kabi sof gidrostatik qonun orqali hisoblab topish mumkin: $p(x,y,z,t) = \rho g(h(x,y,t) - z) + const$, bu yerda const — suyuqlik sathidagi bosim (masalan atmosfera), *g* — erkin tushish tezlanishi. Oxirgi formulani (5.9) ga qo‘yib,

$$u = -\mu\rho g\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad v = -\mu\rho g\frac{\partial h}{\partial y} \qquad (5.10)$$

larga, (5.1) tenglamani uzluksizlik tenglamasida (5.8) qo‘llab, qatlamli suvlarning harakat tenglamasiga

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + k\frac{\partial}{\partial y}\left[H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right], \qquad (5.11)$$

ya'ni bitta no'malum funksiya *h(x,u,t)* ni o'z ichiga oluvchi *Bussineska tenglamasiga* kelamiz.

5. ***Bussineska tenglamasining ayrim hossalari to'g'risida.*** (5.11) tenglama nostasionar (qidirilayotgan h funsiya t ga bog'liq), ikki o'lchovli *(h* x va u ga bog'liq), parabolik turga taalluqli. U bir jinsli emas, chunki *N* funsiya x, *u* ga bog'liq, hamda chiziqli emas. Chunki uning o'ng qismida $(hh_x)_x$ va $(hh_y)_y$ ko'rinishdagi tenglamalar bor. (5.1) tenglamaga nisbatan Bussineska tenglamasi anchayin murakkab matematik obyekt. Nochiziqlilik hisobiga uning umumiy yechimi tahliliy tarzda topila olmaydi, lekin (5.11) tenglama uchun sonli usullarni ishlab chiqishda test vazifasini o'tuvchi tarkibiy xususiy yechimlar (2 misolga qarang) ni olish qiyin emas.

Qatlamli suvlarning harakatlanishiga oid tugallangan modelni qurish uchun (5.11) tenglamaning kiruvchi ma'lumotlarini bilish kerak. Quyi qatlam *N(x, u), k* koeffisient va qatlam chegaralarida boshlang'ich vaqt momentida *h* funksiyani berib qo'yuvchi chetki shartlar (balki qatlamning ajratilgan sohalarida, masalan artezian quvurda) parabolik turdagi tenglamalarga oid chetki shartlarning chuqurroq ifodasi 5.2 bo'limda keltirilgan. Bu yerda faqat (5.11) masala uchun chetki shartlarni ifodalashning eng sodda varianti *h(x, u, t)* funksiyaning *t*= 0 vaqt momentidagi boshlang'ich shartini:

$$h(x,u,t = 0) = h_0\ (x,u), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < u < \infty$$

berib qo'yish kerak ekanligini aytib o'tamiz:

Masalaning bunday tarzda qo'yilishi $-\infty < x < \infty$, $-\infty < u < \infty$ sohada yechiladigan (5.11) *tenglama uchun Koshi masalasi*ga to'g'ri keladi. Koshi masalasida $h_0$quduq suvlarning ma'lum taqsimlanishiga ko'ra barcha *t*> 0 lar uchun *h* funksiya topiladi.

Cheksiz o'lchamli qatlamni ko'rib chiqish masalasi albatta ideallashgan. Lekin, oqim qatlamning kichik markaziy sohasida qaralayotgan bo'lsa, qatlam chegaralarining ta'sirini hisobga olmasa ham bo'ladi, bunda Koshi masalasining yechimi real jarayonni ta'riflaydi.

Ayrim chegaraviy shartlar Bussineska tenglamasini chiqarishda model tarkibiga shunchaki qo'shib qo'yildi. Qatlamning o'tkazmasligi to'g'risidagi faraz muvozanat tenglamasini olishda foydalaniladi, 5) farazsiz (ya'ni suyuqlik g'ovakli muhitda bo'lganda) Darsi qonunidan butun sohada foydalanib bo'lmasdi. Albatta, bu va boshqa farazlarning bajarilishi modelni qurish orqali ushbu obyektni o'rganish paytida nazorat qilinishi kerak.

Qo‘shimcha farazlarni kiritganda umumiy model soddalashadi. Agar biron bir sabablarga ko‘ra yechim *t* vaqtga bog‘liq bo‘lmay qolsa (statsionar jarayon), u holda elliptik tenglamaga kelamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]=0. \qquad (5.12)$$

Uni yechish uchun funksiyaning boshlang‘ich momentdagi qiymatini bilish shart emas. Eng sodda holda (5.12) *Laplas tenglamasiga* aylanadi (3-misolga qarang). Agar ostki sath gorizontal *(N(x,u)* = N_0 = sonst) bo‘lsa, Bussineskaning tenglamasi bir jinsli bo‘lib qoladi:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right).$$

Qidirilayotgan yechim faqatgina bitta fazoviy o‘zgaruvchi, masalan x koordinatalariga bog‘liq bo‘lgan oqimning bir jinsli ekanligi to‘g‘risidagi qo‘shimcha faraz holatida quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right). \qquad (5.13)$$

Uning nomi ham *chiziqli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik turidagi bir o‘lchovli tenglama* (5.2 bo‘limga qarang) yoki izotermik filtratsiyaning bir o‘lchovli tenglamasidir. Bir o‘lchovliga qatlamning ko‘ndalang kesimi bo‘ylab kattaliklarning o‘zgarishini hisobga olmasa ham bo‘ladigan darajada, bitta yo‘nalish bo‘ylab cho‘zilgan qatlamdagi oqimlar kiradi (agarda ularni ko‘ndalang yo‘nalishlarda chegaralovchi sathdan suyuqlik oqmasa). Va nihoyat, quduq suvlar oqimining eng sodda modeli $h << H_0$ shartlardagina, ya’ni suyuqlik darajasining qatlam qalinligiga nisbatan kichik o‘zgarishlari uchungina *issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi (*yoki moddaning diffuziya tenglamasi) bilan beriladi:

$$\frac{dh}{dt}=kH_0\frac{d^2h}{dx^2}. \qquad (5.14)$$

Oxirgi uchta tenglama parabolik turga mansub. Jumladan (5.14) chiziqli va uning umumiy yechimini olishning mashhur usullari mavjud. Albatta, sanab o‘tilganlardan tashqari, joriy modelning boshqa soddalashuvlari ham bor, masalan (5.13) ikki o‘lchovli tenglama.

Bussineska tenglamasidan 5.2 bo‘limda bayon etilgan mulohazalarning ayrimlari xato bo‘lgan anchagina murakkab modellarni olish qiyin emas.

Xususan, ko‘pgina quduq bir jinsli emas, ya’ni m = *t(x,u),* μ = μ *(x,u),* yog‘ingarchiliklar tufayli qatlamga yetkaziladigan suyuqlikni hisobga olish shart. U holda Bussineskaning umumlashgan tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{m(x,y)}{\rho g}\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu x,y)(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right] + q(x,y,t),$$

bu yerda μ *(x,u,t)* t vaqt momentidagi x, *u* nuqtalardagi yog‘ingarchilik quvvatini xarakterlaydi (4 misolga qarang).

Shunday qilib, massaning fundamental saqlanish qonunini qo‘llash ko‘rilayotgan jarayonlarning turli hil modellarini olishga imkon berdi. Modellar orasidagi farq olingan tenglamalarning turi (giperbolik, parabolik, elliptik) hamda ularning fazoviy-vaqt tavsiflari (standart, nostandart,statsionar, bir o‘lchovli, ko‘p o‘lchovli), nochiziqliklarning bor yoki yo‘qligiga hamda chetki masalalarning qo‘yilishiga karab aniqlanadi. Shunday qilib, obyektning aniq xususiyatlari va qo‘shimcha farazlarga ko‘ra, bitta fundamental qonunga asoslanib, mutlaqo har xil matematik modellarni olish mumkin. Boshqa tomondan qaraganda, keyinchalik ko‘p marotaba o‘z tasdig‘ini topadigan ta’rifimizga ko‘ra, bitta modelning o‘zi universalligi hisobiga umuman har xil tabiatli obyektlarga javob berishi mumkin.

5.2. Energiyaning saqlanishi

Energiyaning saqlanish qonuni ayrim qo‘shimcha farazlar bilan birgalikda issiqlikning aralash muhitda tarqalish modellarini qurishda qo‘llaniladi. Issiqlik uzatilishini boshqarish maqsadida aniq chetki masalalarni shakllantiramiz. Olingan modellarning ayrim fizik va matematik xususiyatlarini ko‘rib chiqamiz.

1. Issiqlik uzatilishi jarayonlari to‘g‘risida boshlang‘ich ma’lumotlar. Issiqlik energiyasi yoki issiqlik - bu modda atomlari yoki molekulalarining xaotik harakati energiyasi. Materialning turli xil qismlari orasida issiqlik almashinishi *issiqlik uzatilishi,* issiqlik uzatilishining yaqqol hususiyatiga ega bo‘lgan materiallarning o‘zi esa – *issiqlik o‘tkazgichlar* deyiladi.

Ularga issiqlik energiyasi erkin elektronlar tomonidan o‘tkaziladigan metallar, ayrim gazlar va h.k lar kiradi. Issiqlikni uzatish jarayonlari *lokal termodinamik muvozanat (LTM)* deb nomlanuvchi sharoitlarda ko‘riladi. Gazlar uchun LTM tushunchasi $\lambda << L$ da, ya’ni modda zarralarining erkin yugurish uzunligi ko‘rilayotgan obyektning o‘lchamidan ancha kichik bo‘lgandagina (aralash muhit) kiritiladi. LTM shuningdek, jarayonlar τ dan (zarralarning to‘qnashuvi orasidagi vaqt katta bo‘lgan vaqt ichida), hamda λ dan katta bo‘lgan o‘lchamlarda o‘rganilishini nazarda tutadi. U holda o‘lchamlari λ kattalikdan katta bo‘lgan (lekin L kattalikdan ancha kichik) modda sohalarida muvozanat o‘rnatiladi va ular uchun zichlik, zarralarning issiqlik harakati tezligi va h.k lar uchun o‘rtacha qiymatlarni chiqarish mumkin. Bu lokal kattaliklar (muhitning har xil nuqtalarida turli hil) bayon etilgan farazlarga ko‘ra zarralarning tekis Maksvell taqsimotidan topiladi (5.3 bo‘limga qarang). Ularga zarralarning o‘rtacha kinetik energiyasini aniqlovchi *T harorat* kiradi*:*

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

bu yerda m — zarraning massasi, *v* — xaotik harakatning o‘rtacha tezligi, *k* — Boltsman doimiysi (boltsman gazi holatida).

Zarralarning xaotik harakatiga aloqador bo‘lgan modda energiyasi (ichki energiya) haroratning *solishtirma issiqlik sig‘imi s(r,T),* aniqrog‘i:

$$c(\rho,T) = \frac{\partial\varepsilon(\rho,T)}{\partial T}, \quad c(\rho,T) > 0,$$

yordamida topiladi. Bu yerda *r = tp* — modda zichligi (n —birlik hajmdagi zarralar soni), *ε(r,T) — birlik massaning ichki energiyasi.* Boshqacha aytganda, issiqlik sig‘imi haroratni 1 darajaga orttirish uchun moddaning birlik massasiga berilishi kerak bo‘ladigan energiyadir.

Issiqlik sig‘imining ta’rifi *ideal gaz* (zarralari faqatgina bevosita to‘qnashuvda o‘zaro ta’sirlashadigan, hamda billiard sharlari singari kinetik energiyani yo‘qotmaydigan gaz) holida juda oson bo‘ladi. Agar ideal gazning ma’lum hajmida N ta zarra bo‘lsa, u holda ularning to‘la ichki energiyasi

$$E = N\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}M\frac{k}{m}T$$

ga teng. Bu yerda *M* = N_m — zarralarning umumiy massasi, birlik massaga nisbatan energiya yoki solishtirma ichki energiya:

$$\varepsilon = \frac{E}{M} = \frac{3}{2}\frac{k}{m}T$$

formula bilan beriladi. Demak ideal gazning issiqlik sig‘imi $3k/(2m)$ ga teng bo‘lib *r, T* larga bog‘liq emas.

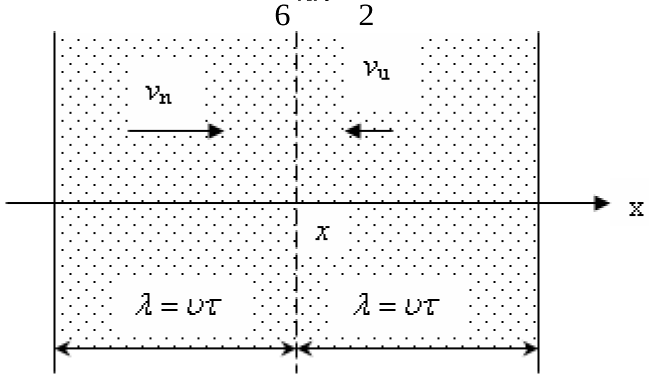
Umumiy holda ichki energiya va harorat orasidagi bog‘lanish ancha murakkab. Masalan, harakatlanayotgan zarralarning kinetik energiyasidan tashqari, ichki energiya tarkibida zarralar ta’sirining ular orasidagi o‘rtacha r masofaga bog‘liq bo‘lgan potensial energiya ham bor. O‘z navbatida $r \approx (n)^{-1/s} = (\rho/m)^{-1/3}$, bu yerda n - birlik hajmdagi zarralar soni, ya’ni ε *r* zichlikka bog‘liq. Shuning uchun issiqlik uzatish nazariyasida ε (yoki xuddi shunday s) *r* VA *T* bog‘liq funksiyalardir.

Ularning aniq ko‘rinishi ko‘rilayotgan muhitning xususiyatlariga qarab belgilanadi.

2. Fure qonunini molekulyar-kinetik farazlardan keltirib chiqarish. Issiqlik uzatilishining matematik modelini olish uchun 1 bo‘limda ta’riflangan tushunchalardan tashqari, issiqlik oqimi degan muhim tushunchani kiritish zarur. Berilgan nuqtadagi i*ssiqlik oqim* (yoki issiqlik energiyasi) deb moddaning berilgan nuqtasiga joylashtirilgan birlik sathdan birlik vaqt ichida o‘tadigan issiqlik miqdoriga aytiladi. Issiqlik oqimi - vektor kattalik ekanligi aniq (chunki u birlik sathning fazodagi joylashuviga bog‘liq).

Muhitda x, *u*, *z* koordinatali nuqtani ajratib olib, issiqlik oqimi W ning mos o‘qlardagi proektsiyasini topamiz (W_x, W_y, W_z kattaliklar). Birlik kattalikdagi maydonchani X o‘qiga perpendikulyar holatda joylashtiramiz. X o‘qi bo‘ylab harakatlanayotgan zarralar uni o‘ngdan chapga va chapdan o‘ngga bir xil ehtimolliklarda kesib o‘tadi. Lekin, zarralarning harorati (bevosita kinetik energiyasi ham) maydonchaning o‘ng va chap tomonlarida har xil bo‘lsa, u holda birlik vaqt ichida uning o‘ng va chap tomonlardan har xil energiya o‘tadi. Ushbu energiyalarning ayirmasi X o‘qi bo‘ylab issiqlik oqimini shakllantiradi. 5.6 rasmda maydonchaga nisbatan chap va o‘ng qismdan $\lambda = vt$ masofa uzoqda joylashgan sohalarni ajratib ko‘rsatamiz. O‘ng qismda joylashgan zarralardan taxminan 1/6 qismi chapga haraktlanadi, zero hamma 6 ta yo‘nalish (yuqoriga-pastga, oldinga-orqaga, o‘ngga-chapga) ning ehtimoli teng. τ vaqt ichida bu qism kerakli aniqlikda maydonchani kesib,

$$\frac{1}{6} n\lambda \frac{mv_n^2}{2}$$



5.6-rasm

ga teng energiyani olib o‘tadi, bu yerda ν_{p} — zarraning o‘ng qismdagi tezligi (*p*, λ kattaliklar birinchi yaqinlashishda maydonchaning ikkita tomonida ham teng). Shunga o‘xshash, chap sohadagi zarralar:

$$\frac{1}{6}n\lambda\frac{mv_\pi^2}{2}$$

energiyani olib o‘tadi. Bu yerda ν_l — maydonchaga nisbatan chapda joylashgan zarralarning tezligi. Birlik vaqtga nisbatan ushbu energiyalarning ayirmasi quyidagi kattalikka teng $W_x = \frac{1}{6}nv\left(\frac{mv_\pi^2}{2} - \frac{mv_n^2}{2}\right) = \frac{mnv}{6}(\varepsilon_\pi - \varepsilon_n)$,

bu yerda ε_l, ε_p — moddaning maydonchaga nisbatan o‘ng va chap tomondagi ichki energiyasi, *V* sifatida esa v_l va v_p larning o‘rtacha tezligi olinadi. Birinchi yaqinlashishda ε_l, ε_p kattaliklarni ε (X nuqtadagi energiyani, ya’ni maydonchada) orqali quyidagi tarzda ifodalash mumkin:

$$\varepsilon_n = \varepsilon + \lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon + \lambda c\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon - \lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon - \lambda c\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Bu formulalarni $W_{x\,x}$ *ga* tegishli formulaga qo‘yib, quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$W_x = -\chi\frac{\partial T}{\partial x}\ . \qquad (5.16)$$

Bu yerda $\chi = \rho c\lambda v/3$.

Xuddi shu mulohazalarni $W_y, W_z\,g$ lar uchun olib borib quyidagi ifodalarga kelamiz:

$$W_y = -\chi\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad W_z = -\chi\frac{\partial T}{\partial z}. \qquad (5.17)$$

(5.16)va (5.17) larning umumlashmasi *Fure qonunini* beradi.

$$W = -\chi gradT\,. \qquad (5.18)$$

X kattalik *issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisienti* deyiladi.

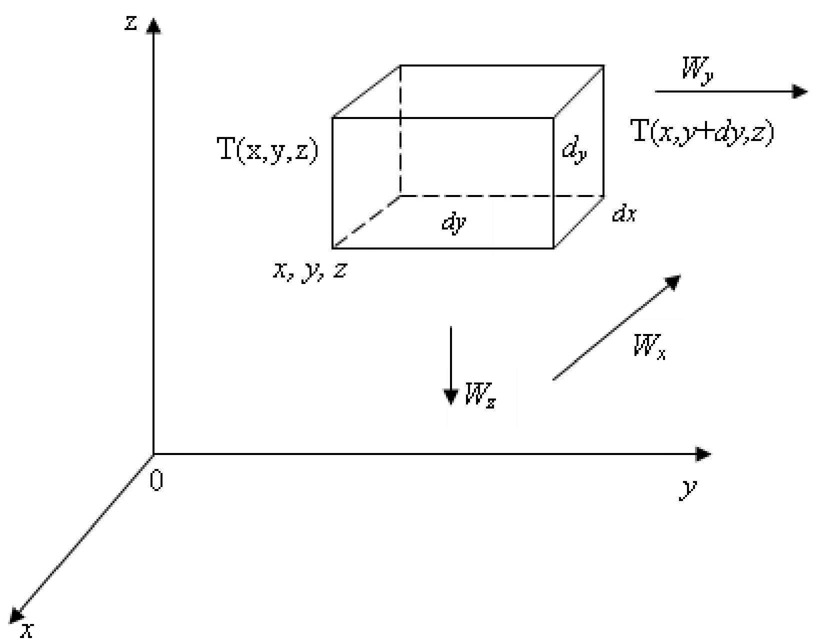
Issiqlik o‘tkazuvchanlikning koeffisienti umumiy holda moddaning zichligi va haroratiga bog‘liq:

$$\chi = \frac{\rho c\lambda v}{3} \geq 0\,. \qquad (5.19)$$

Nafaqat issiqlik sig‘imi s, balki erkin yugurish yo‘li λ ham *r, T* ga bog‘liq bo‘lgan funksiya bo‘lishi mumkin. Masalan, oddiy sharoitdagi gazda issiqlik molekulalar yordamida ko‘chiriladi (molekulyar issiqlik o‘tkazuvchanlik). λ kattalik uchun bunday holda quyidagi munosabat o‘rinli:

λ ~ *1/r, v* ~ $\sqrt{T}$ bo‘lgani uchun, (5.19) dan $\chi_{mt} \sim \sqrt{T}$ ga ega bo‘lamiz (issiqlik sig‘imi doimiy deb qaraladi). Plazmada (unda issiqlik tashuvchilar elektronlardir) elektronning yugurishi *r, T* ga shunday bog‘langanki, bunda λ ~ T^2r^{-1}, hamda χ_e kattalik uchun $\chi_e \sim T_{5/2}$ (s — doimiy) munosabat o‘rinli. Shunday qilib, Fure qonunining mazmuni quyidagicha: issiqlik oqimi harorat gradientiga proportsional. Issiqlik energiyasi bevosita harorat bilan bog‘liq. Shu bois ma’lum ma’noda harorat «oqimi»ni o‘zining gradientiga bog‘liq deb olsa bo‘ladi. Xuddi shunday xususiyatga mazmunan yaqin bo‘lgan modda diffuziyasi jarayoniga (Fik qonuni) ega. 5.1 bo‘limdagi Darsi qonuni (5.10) ga, quduq suvlarning harakati o‘zining tabiatiga ko‘ra issiqlik diffuziyasi jarayonidan prinsipial tarzda farq qilsa ham (Darsi qonuni Fur’e va Fik qonunlari singari oson nazariy asosga ega bo‘lmasa ham) unga shunga o‘xshash interpretatsiya berish mumkin .

3. Issiqlik muvozanat tenglamasi. Issiqlik uzatilishi jarayonini matematik ta’riflash uchun energiyaning saqlanish qonunini qo‘llaymiz. Moddaning ichki energiyasi issiqlik o‘tkazuvchanlik mexanizmi tufayli o‘zgaradi deb qabul qilamiz. Ya’ni boshqa turdagi energiyalarni hisobga olmaymiz (masalan, kimyoviy reaksiyalar yoki bosim kuchi bajargan ishi tufayli ichki energiyaning o‘zgarishini hisobga olmaymiz).



5.7-rasm

Issiqlik o‘tkazuvchi muhitda *dx,du,dz* tomonli elementar kub ajratib olamiz (5.7-rasm) va kichik vaqt oralig‘i *dt* da undagi issiqlik energiyasi o‘zgarishini hisoblaymiz. Qayd etilgan farazlarga ko‘ra, bu o‘zgarishlar kubning har xil tomonlariga kiruvchi va chiquvchi issiqlik oqimi o‘rtasidagi farqlar tufayligina kelib chiqishi mumkin. X o‘qi bo‘ylab oqimlar hajmdagi ichki energiyaning quyidagi kattalikka ortishi yoki kamayishiga olib keladi:

$$[W_x(x,y,z,t) - W_x(x+dx,y,z,t)]dydzdt,$$

bu yerda *dxdu* — X o‘qiga perpendikulyar qirraning yuzasi. Bu formulada W_x vaqt bo‘yicha funksiya bo‘lib, *dt* vaqt oralig‘ida uncha o‘zgarmaydi, shuning uchun uning t momentdagi qiymatini olish mumkin. Ichki energiyaning *u, z* o‘qlari bo‘ylab o‘zgarishlari ham xuddi shunday usulda aniqlanadi*:*

$$[W_y(x,y,z,t) - W_y(x,y+dy,z,t)]dxdzdt,$$

$$[W_z(x,y,z,t) - W_z(x,y,z+dz,t)]dxdydt.$$

Energiyaning umumiy o‘zgarishi $\Delta E = E(t+dt) - E(t)$

$$\Delta E = -divWdxdydzdt$$

ga teng.

Boshqa tomondan qaraganda, ΔE kattalikni hajm haroratining o‘zgarishini issiqlik sig‘imi orqali quyidagi formula bo‘yicha ifodalash mumkin:

$$\Delta E = (T(t+dt) - T(t))c(\rho,t)\rho dxdydz.$$

Unda hajmning kichikligi tufayli harorat va zichlikning o‘rtacha qiymatlari olinadi.

Oxirgi ikkita ifodani bir-biriga tenglashtirib va *dt* ni nolga intiltirib, *issiqlikning tarqalishini ta’riflovchi umumiy tenglamaga kelamiz* $C\frac{\partial T}{\partial t} = div(\chi gradT)$. (5.20)

Uning kengaytirilgan ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\chi\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\chi\frac{\partial T}{\partial z}), \quad (5.21)$$

bu yerda *S = rs.*

(5.21) tenglama— nostatsionar, uch o‘lchovli (T funksiya *t* vaqtga va uchta x, *u, z* fazoviy o‘zgaruvchilarga bog‘liq*)* parabolik turdagi tenglama. U bir jinsli emas, chunki issiqlik sig‘imi, issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisienti va zichlik, umuman olganda moddaning turli nuqtalarida har xil bo‘lishi mumkin. Ammo chiziqli emas, chunki ularning funksiyalari T haroratga (ya’ni qidirilayotgan yechimga) bog‘liq bo‘lib qolishi mumkin.

Jarayon xarakteri to‘g‘risidagi qo‘shimcha farazlarda (5.21) tenglama soddaroq ko‘rinishga kelishi mumkin. Agar jarayon statsionar bo‘lsa, ya’ni harorat vaqtga bog‘liq bo‘lmasa (5.21) tenglama *elliptik turdagi* tenglamaga aylanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\chi\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\chi\frac{\partial T}{\partial z}). \quad (5.22)$$

Agarda s, χ funksiya haroratga bog‘liq bo‘lmasa, (5.21) bir jinsli muhtda *(* χ, s, *r* lar x, *u, z* ga bog‘liq emas*)* quyidagi ko‘rinishni qabul qiladi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \Delta T \,, \tag{5.23}$$

bu yerda *k* = χ*/s harorat o‘tkazuvchanlik koeffisienti.* (5.23) tenglama uchun umumiy yechimni yozib olish qiyin emas.

Bir o‘lchovli holda (harorat faqatgina t va x ga bog‘liq) (5.21) dan quyidagi ko‘rinishni hosil qilamiz:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\chi \frac{\partial T}{\partial x}) \,. \tag{5.24}$$

(5.24) tenglama chiziqli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchilik turiga keltiriladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x} \right) \,. \tag{5.25}$$

ds/dx = 0, *d*χ*,/dx* = 0 deb oldik (5.1 bo‘limdagi (5.13) bilan solishtiring). Va nihoyat, agar χ, = χ_0, s = s_0 bo‘lsa, bu yerda χ_0,, s_0 — doimiy. U holda (5.16) dan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, ya’ni parabolik turdagi eng sodda tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,. \tag{5.26}$$

Bussineska tenglamasi holatidagidek, (5.21) tenglamadan yuqorida ko‘rib chiqilgan issiqlik uzatishga nisbatan murakkabroq mexanizmlarga to‘g‘ri keluvchi turli xil umumlashtirishlarni olish mumkin. Energiya ajratuvchi noizotrop muhit (ya’ni issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisientlari har xil yo‘nalishlarda turli xil bo‘lganda) uchun (5.21) ning o‘rniga quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(x, y, z, t, T) \,. \tag{5.27}$$

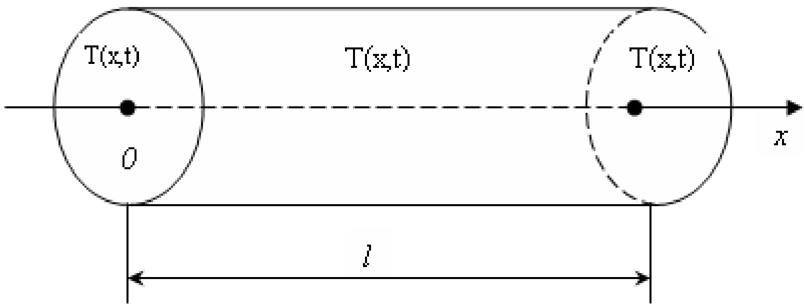
Bu yerda χ_x, χ_y, χ_z— Fur’e qonunidagi x, *u*, *z* o‘qlar bo‘yicha koeffisientlar, f— esa energiyaning ajralish (yoki yutilish) quvvati. Noizotroplik, masalan elektron o‘tkazuvchanlik holida, maydonning kuch chiziqlari bo‘ylab issiqlik tashuvchilarning harakatini og‘irlashtiruvchi magnit maydon tufayli keltirib chiqarilishi, energiyaning ajralishi esa modda ichida sodir bo‘ladigan kimyoviy reaksiyalar yoki elektr tokining oqimiga bog‘liq bo‘lishi mumkin.

Berilgan bo‘limda olingan hamma tenglamalar energiya saqlanishining fundamental qonuni va Fure qonuni yordamida keltirib chiqarildi (Bussineskaning 5.1 bo‘limdagi xulosasi bilan solishtiring).

Berilgan s, χ, *r* funksiyalar va chetki shartlar bilan birgalikda issiqlik uzatilishining berk matematik modellarini aks ettiradi.

4. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun tipik chetki shartlarning qo‘yilishi. Soddalik uchun issiqlik o‘tkazuvchanlikning bir o‘lchovli jarayonlarini ko‘ramiz. Ular biron-bir torts orqali isitiluvchi uzun va ingichka metall sterjenda o‘rinlidir (5.8-rasm), lekin bunda sterjen izotrop, harorat har qanday ko‘ndalang kesimda *u, z* (xuddi shu xususiyat strejen tortslarida ham saqlanishi kerak) larga bog‘liq emas. Yon sathdagi issiqlik yo‘qolishini hisobga olmaslik shartlari bajarilishi kerak. U holda harorat faqatgina x va *t* ga bog‘liq bo‘ladi va uning sterjen bo‘ylab turli vaqt momentidagi joylashuvi quyidagi tenglama bilan ta’riflanadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}) \; . \tag{5.28}$$



5.8-rasm

U 0 < x < *l*, *t* > 0 da o‘rinli. *T(x,t)* funksiyani aniqlash, ya’ni yechish uchun sterjenning boshlang‘ich haroratini berib qo‘yish:

$$T(x,t)=T_0(x), \qquad 0\le x\le t\,, \tag{5.29}$$

hamda sterjen uchlaridagi haroratni har qanday vaqtda bilib turish yetarli:

$$T(0,t)=T_1(t), \quad T(l,t)=T_2(t), \quad t>0 \; . \tag{5.30}$$

(5.28)—(5.29) masalalar (5.28) parabolik tenglamaning x $\in$ E *[0,l]* kesmadagi *birinchi chetki masalasi* deyiladi. (5.30) fizik shart sterjen uchlarida tashqi issiqlik manbalari yordamida vaqtga bog‘liq bo‘lgan ma’lum bir harorat saqlananishini bildiradi.

Agarda sterjenda (5.30) ning o‘rniga issiqlik oqimi vaqt funksiyasi ko‘rinishida berilsa, ya’ni:

$$-k(T(0,t))\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=W_1(t), \quad k(T(l,t))\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l}=W_2(t), \quad t>0\,, \tag{5.31}$$

bunday masala*[0,l] kesmadagi ikkinchi chetki masala* deyiladi. Bunday holatdan sterjen tortslari ma’lum quvvatli lazer nuri bilan isitilganda foydalaniladi.

Tortsdagi anchagina murakkab (chiziqli bo‘lmagan) shartlar varianti isitilgan, shuning uchun energiya tarqatadigan, hech qanday jismlar bilan ta’sirlashmaydigan sterjenni ifodalaydi. Birlik vaqt ichida sterjen o‘zining uchlari (tortslarida) $\sigma T^4(0,t)$ va $\sigma T^4(l,t)$ energiya yo‘qotsa, (5.29) yoki (5.31) ning o‘rniga quyidagi shartlar kelib chiqadi.

$$\sigma T^4(0,t) = k(T(0,t))\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \quad \sigma T^4(l,t) = -k(T(l,t))\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l}, \quad t>0, \tag{5.32}$$

bu yerda $\sigma > 0$.

Boshqa fizik holatlarga mos keluvchi chetki shartlarning boshqa ko‘rinishlari ham bor. (5.30)-(5.32) shartlarning turli xil kombinatsiyalari mavjud, masalan, chap uchda harorat, o‘ng uchda esa issiqlik oqimi ma’lum.

Issiqlik uzatilishi tenglamalariga oid chetki masalalar qo‘yilishining har xilligi boshlang‘ich (5.28)-(5.30) masalalarning turli g‘oyaviylikda bo‘lishiga ham bog‘liq. Qisqa vaqt ichida uzun sterjen uchlaridan biri atrofida issiqlikning tarqalishini tahlil qilish paytida boshqa uchning ta’sirini hisobga olmasa bo‘ladi. (5.30) ning o‘rniga shartlarning birini berib qo‘yish (aniqlik uchun chap uchdagi)

$$T(0,t) = T_1(t), \quad t>0 \tag{5.33}$$

va tenglamani x> 0 oraliqda yechish yetarlidir ((5.28), (5.29), (5.33) — *qism fazodagi birinchi chetki masala)*.

Bussineska tenglamasi (5.1 bo‘limga qarang) misolida muhokama qilingan Koshi masalasi butun $-\infty < x < \infty$ oraliqda ko‘riladi. (5.28) tenglama uchun (5.29) dagi haroratning boshlang‘ich taqsimoti beriladi. Bunday yondashuv sterjenning o‘rta qismi qaralib, ikki uchining ta’sirini hisobga olmaganda o‘rinli bo‘ladi.

Issiqlik o‘tkazuvchanlikning ko‘p o‘lchamli tenglamalari uchun bir o‘lchovli holga nisbatan chetki shartlarning qo‘yilishi o‘zgarmaydi. Soha uchlarida harorat yoki issiqlik oqimi, yoki murakkab kombinatsiyalar hamda (t = 0 momentida) haroratning boshlang‘ich taqsimoti berib qo‘yiladi. (5.22) statsionar tenglama holida faqatgina chetki shartlar beriladi. 5.1 bo‘limdagi quduq suvlarning harakat tenglamasi uchun chetki shartlar ushbu bo‘limda ta’riflanganiga o‘xshash bo‘ladi (jumladan, Busenneska tenglamasidagi harorat va issiqlik oqimlarining vazifasini quduq suvlarning darajasi hamda massa oqimi o‘taydi).

Issiqlik uzatilishi modellarining xususiyatlari to‘g‘risida. Yuqorida aytib o‘tilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarining eng soddasi (5.26) tenglama uchun [0,l] oraliqdagi statsionar jarayon to‘g‘risidagi masaladir:

$$k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad T(0) = T_1, \quad T(l) = T_2.$$

Uning yechimi - X koordinataning chiziqli funksiyasidir:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_2, \quad 0 < x < l\,. \tag{5.34}$$

(5.34) ning yechimi yaqqol fizik ma’noga ega. Haqiqatdan ham, statsionar jarayonda sterjenning ixtiyoriy ko‘ndalang kesimiga kiruvchi hamda undan chiquvchi issiqlik oqimlari o‘zaro teng (aks holda kesimdagi harorat o‘zgarar edi). Shuning uchun oqim har qanday x nuqtada doimiy bo‘lishi, Fure qonunidagi $x = x_0 =$ sonstga ko‘ra, haroratning chiziqli «profilida» o‘rinli.

Shu bilan bir qatorda, Fure qonunining qo‘llanilishi parabolik turdagi tenglamalarga xos, ammo, fizik ma’noga ega bo‘lmagan effektning paydo bo‘lishiga zamin yaratadi. Uni (5.26) tenglama uchun $-\infty < x < \infty$ fazoda echiladigan *oniy nuqtaviy issiqlik manbai* deb nomlanuvchi masalani ko‘rib chiqish orqali tushuntirib o‘tamiz. $t = 0$ vaqt momentida x = 0 tekislikda ma’lum Q_0 issiqlik miqdori ajralishida haroratning taqsimotini toping. Boshlang‘ich harorat nolga teng deb olinadi: $T(x,0) = T_0(x)=0$, $-\infty < x < \infty$. Bunday qo‘yilish - mos shartlar (masalan, sovuq sterjen markazidan qisqa vaqt davomida ta’sir etuvchi va metallning kichik qismini egallovchi elektr tokining quvvatli ko‘ndalang impuls uzatiladi) bajarilganda o‘rinli bo‘ladi. Bunday masalaning yechimi quyidagi formula bilan beriladi:

$$T(x,t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi k_0 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k_0 t}\right), \quad t > 0\,. \tag{5.35}$$

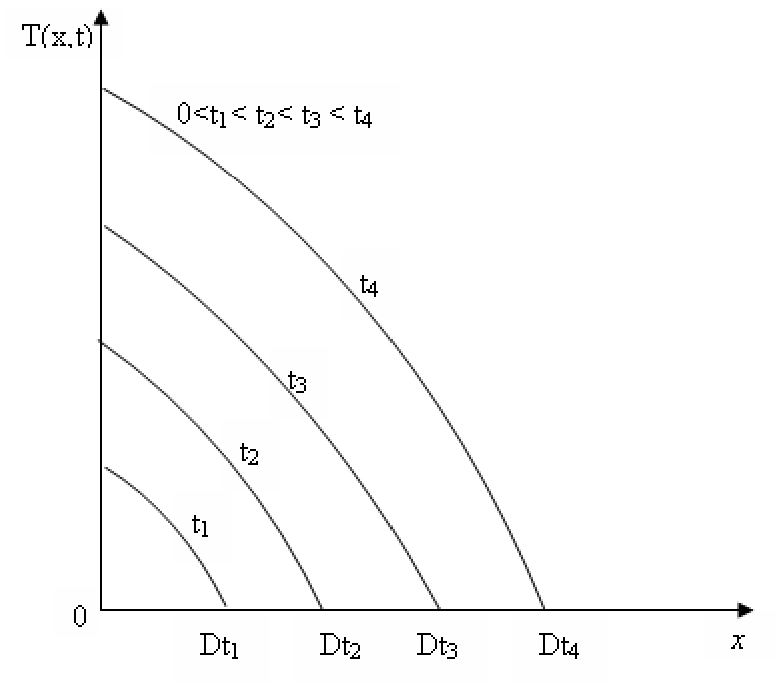
U (5.26) ga bevosita qo‘yish orqali tekshiriladi (5.35) simmetrik funksiya). Ma’lum tengsizlik,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

hisobiga quyidagi xususiyatga ega

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx = Q_0, \quad t > 0\,.$$

Shuning uchun energiyaning saqlanish qonuni bajariladi. Shu paytning o‘zida (5.35) ga ko‘ra fazoning har qanday nuqtasidagi harorat ixtiyoriy $I > 0$ momentda noldan farqli. Shu bilan birga (5.26) model hamda issiqlik uzatishning qolgan barcha modellari shovqinning cheksiz tezlikda tarqalish jarayonini ta’riflaydi (harorat t = 0 da barcha X lar uchun nolga teng edi).



5.9-rasm

(5.16) chiziqsiz issiqlik o‘tkazuvchanlik turidagi tenglamalar bunday kamchilikdan holi (faqatgina ayrim hollarda, xususan 5.1 bo‘limdagi (5.13) tenglama ham). $k(T) = k_0 T^{\sigma}$, $\sigma > 0$ li (5.25) model uchun x > 0 qism fazoda issiqlikning tarqalish jarayonini ko‘rib chiqamiz, bunda uchlardagi harorat $T(0,t) = T_1(t)$ *dir*. Muhitning boshlang‘ich harorati nolga teng deb olinadi: T(x,0) = T_0 (x) = 0, $x \geq 0$. Ushbu masalaning chetki qonunga javob beruvchi xususiy yechimi

$$T_1(t) = \left(\frac{\sigma D^2}{k_0} t \right)^{1/\sigma}, \quad t > 0,$$

chegaradan jism ichiga cheksiz emas, chekli D > 0 tezlikda tarqaluvchi yuguruvchi to‘lqin ko‘rinishida. (5.9-rasm):

$$T(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sigma D}{k_0} \right)^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}, & x \leq Dt, \\ 0, & x > Dt, \end{cases} \qquad t>0 \qquad (5.36)$$

Ammo bu xususiyat issiqlik sovuq muhitga tarqalganida o‘rinli bo‘lib, jismning harorati noldan farqli bo‘lganda o‘z ahamiyatini yo‘qotadi .

Issiqlik energiyasining tarqalish fronti doirasida Fure qonuni (Bussineska tenglamasi holida Darsi qonunining ham) ning qo‘llanila olmasligi bilan bog‘liq kamchilik parabolik tenglamalarning keng miqyosda qo‘llanilishiga to‘sqinlik qilmaydi ((5.17) dan ko‘rinib turibdiki, modda tarkibidagi energiya ulushi katta x larda to‘la energiya (Q_0) ga nisbatan mutlaqo kichik). Ular matematik modellarning universalligiga yaxshi dalildir, chunki ular tabiati har xil bo‘lgan turli xil jarayonlarga ta’rif beradi.

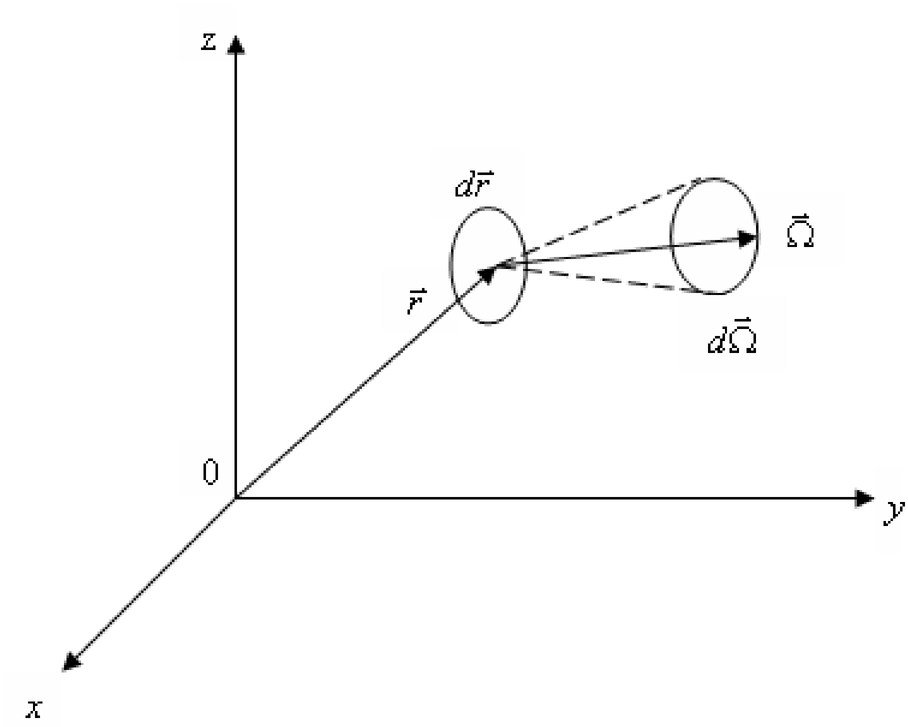
5.3. Zarralar sonining saqlanishi

Yorug‘lik kvantlari yordamida muhitda tarqaladigan issiqlik nurlanishi nazariyasining ayrim tushunchalarini keltirib o‘tamiz. Kvantlar sonining saqlanish qonunini fotonlarning taqsimlanish funksiyasi bo‘ysunadigan kinetik tenglamani hosil qilish uchun qo‘llaymiz. Nurlanadigan issiqlik almashinuvchi moddaning ayrim xususiyatlarini muhokama qilamiz.

1. Issiqlik nurlanishi nazariyaning asosiy tushunchalari. Anchagina yuqori haroratgacha isitilgan moddada energiyaning yorug‘lik kvantlari (fotonlar) yordamida ko‘chirilish jarayonlari katta rol o‘ynaydi. Muhitda tarqalib, sochilib hamda moddaning atom va molekulalarida yutilib, hamda ulardan otilib fotonlar muhitning har xil qismlari orasidagi nurli issiqlik almashinuvini ta’minlaydi. Aynan shu mexanizm tufayli yonuvchi tosh atrofdagi havoni isitadi**.**

Nurlanishdan so‘ng, to‘ldiruvchi fazoga o‘zaro yorug‘lik tezligi bilan bog‘langan ν tebranish chastotali va λ to‘lqin uzunlikli ($\lambda = c/\nu$) elektromagnit nurlanish sifatida qarash mumkin. Agar nurlanish maydoniga s tezlik bilan harakatlanuvchi ko‘p sonli zarralar majmui sifatida qaralsa, u holda *hv (h* — Plank doimiysi) kvant energiyasi tushunchasini kiritish shart. x, *u, z* koordinatalar va *t* vaqt bilan xarakterlanuvchi haroratlar maydonidan farqli o‘laroq, nurlanishni ta’riflash uchun uning ν chastotasi (umuman olganda, har xil kvantlar uchun turli xil bo‘lgan) va kvantlarning fazoning ixtiyoriy nuqtasidagi ixtiyoriy *t* vaqt momentidagi harakat yo‘nalishini bilish kerak.

Moddadagi ulkan sonli fotonlardan har birining traektoriyasini kuzatish juda qiyin. Shuning uchun nurlanish nazariyasida *zarralarni taqsimlash funksiyasi* ni kiritishga asoslangan statistik ehtimolli yondashuv qo‘llaniladi. Bu muhim tushuncha ko‘p sonli zarralar majmuini yoki turli sohalardagi obyektlarni o‘rganishda muvaffaqiyat bilan qo‘llanilmoqda.



5.10-rasm

Fotonlarning taqsimlanish qonuni F $f = f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ kvantlar chastotasi, $\vec{r}$ radius vektor (ya'ni x, *u*, *z* koordinatalar*)*,zarralarning harakatlanish yo'nalishi $\vec{\Omega}$ va *t* vaqt momentiga bog'liq. Uning mazmuni quyidagicha. Ma'lum bir *t* vaqt momentidagi $\vec{r}$ nuqta oldidagi d$\vec{r}$ hajmdagi elementni ko'rib chiqamiz (5.10-rasm). U holda

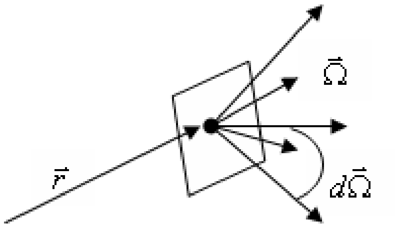
$$f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)d\nu d\vec{r} d\vec{\Omega}. \tag{5.37}$$

Kattalik ta'rifga ko'ra d$\vec{r}$ hajmni egallagan va $\vec{\Omega}$ dan $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$ gacha bo'lgan oraliqda harakat yo'nalishiga ega bo'lgan, $(\nu, \nu + d\nu)$ spektral oraliqda joylashgan kvantlar soni. d$\vec{r}$ hajm o'lchami λ to'lqin uzunligidan ancha katta, shuning uchun to'lqin effektlari sezilmaydi.

Taqsimlanish funksiyasi (5.37) nurli issiqlik almashinuvi nazariyasining ushbu jarayonini ta'riflovchi qolgan barcha tavsiflar keltirib chiqariladigan hamda hisoblanadigan boshlang'ich tushunchalardan biridir. Quyidagi formula bilan hisoblanadigan I_ν kattalik

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = h\nu c f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) \tag{5.38}$$

nurlanishning spektral intensivligi deyiladi. U $\vec{r}$ nuqtada joylashtirilgan hamda uchish yo'nalishlariga perpendikulyar ($\vec{\Omega}$ dan$\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$ gacha burchaklar oralig'ida yotuvchi) birlik maydonchadan fotonlar orqali ko'chiriladigan ν dan $\nu + d\nu$ gacha bo'lgan spektral oraliqdagi nur energiyaisidir. (5.11-rasm).



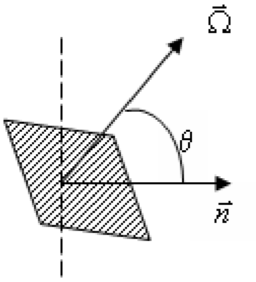
5.11-rasm

Haqiqatdan ham, kvant energiyasi $h\nu$ *ga,* ν dan $\nu+d\nu$ gacha bo'lgan chastotali, hamda $\vec{\Omega}$ dan $\vec{\Omega}+d\vec{\Omega}$ gacha bo'lgan uchish yo'nalishidagi kvantlarning umumiy soni *birlik hajmda* $fd\nu d\vec{\Omega}$ ga teng bo'lsa, ular tomonidan 1 s ichida uchish yo'nalishiga perpendikulyar tarzda joylashgan 1 sm^2 li maydonchadan o'tkaziladigan energiya $h\nu cfd\nu d\vec{\Omega}$ ga teng, bu esa (5.38) ta'rifga to'g'ri keladi. Nurlanishning *spektral zichligi*:

$$U_\nu(\vec{r},t) = h\nu\int_{4\pi} fd\vec{\Omega} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu d\vec{\Omega}, \qquad (5.39)$$

t vaqt momentida birlik chastotalar oralig'idagi $\vec{r}$ nuqtada 1 sm^3 hajmda mavjud kvantlarning nurli energiyasi soni.

Yana bir muhim tushuncha *nurlanishning spektral oqimi* $\vec{S}_\nu$. Birlik maydonning $\vec{n}$ me'yoriy yonalishida kesib o'tuvchi fotonlar, undan $h\nu c\int_{2\pi} f\cos\theta d\vec{\Omega}$ ga teng energiyani (5.12-rasm) olib o'tadi (ν dan $\nu+d\nu$ gacha bo'lgan oraliqda).



5.12 rasm

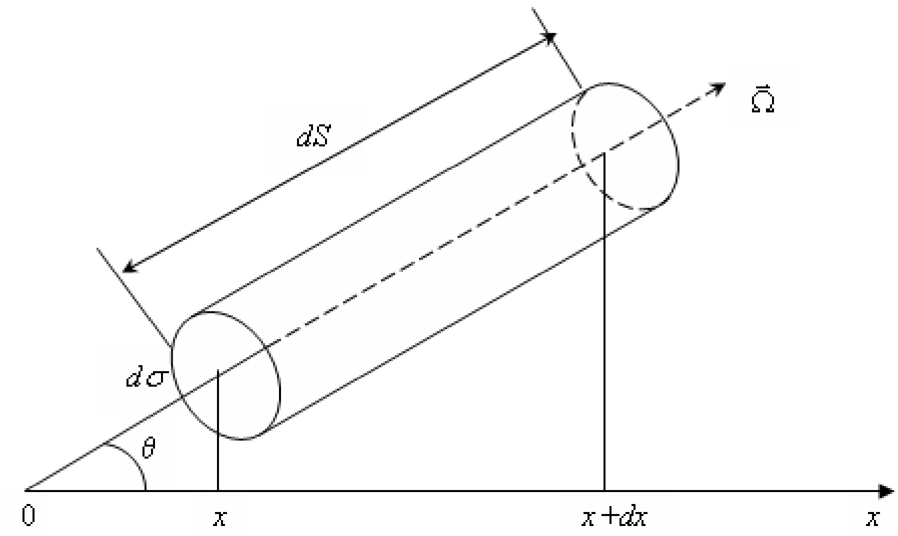
Maydon orqali o'ngdan chapga qarab tarqaluvchi energiya ham shunga o'xshash tarzda hisoblanadi, lekin integrallash chap yarim sfera bo'yicha olib boriladi. Ularning ayirmasi aynan $\vec{S}_\nu$ kattalikni beradi:

$$S_\nu(\vec{r},t,\vec{n}) = h\nu c\int_{4\pi} f\cos\theta d\vec{\Omega}. \qquad (5.40)$$

Bu yerda θ — kvantlar yo'nalishi bilan normal orasidagi burchak. S_ν — $\vec{S}_\nu$ vektorning $\vec{n}$ normalga nisbatan proeksiyasi. Vektorning o'zi esa $\vec{S}_\nu = \int_{4\pi} I_\nu\vec{\Omega}d\vec{\Omega}$ izotropli ($\vec{\Omega}$ yo'nalishiga bog'liq bo'lmagan) nurlanishda spektral zichlik (5.39) ga ko‘ra, $U_\nu = 4\pi h\nu f$ ga teng (5.41) esa ko‘rinib turibdiki, S_ν oqim fazoning har qanday nuqtasida nolga teng. To‘la intensivlik, zichlik va nurlanish oqimini spektral tavsiflardan ν chastotani butun spektr bo‘ylab integrallashdan hosil qilib olish mumkin.

2. Fotonlar sonining muhitdagi muvozanat tenglamasi. Muhitda nurlanishning ko‘chishini ta’riflovchi tenglamani zarralar sonining saqlanish qonuni hamda quyidagi mulohazalardan foydalangan holda keltirib chiqaramiz:

1) kvantlarning tarqalish jarayoni bir o‘lchovli, ya’ni $f = f(\nu, x, \vec{\Omega}, t)$);
2) yorug‘lik kvantlarining atom yoki molekulalardagi sochilishini (ya’ni yo‘nalishning o‘zgarishini) hisobga olmasa bo‘ladi;
3) modda molekulalari va atomlari tomonidan yorug‘likning yutilish va chiqarish xarakteri ma’lum;
4) fotonlar o‘z ixtiyori bilan yo‘q bo‘lmaydi va paydo ham bo‘lmaydi.



5.13-rasm

O‘qi $\vec{\Omega}$ yo‘nalishda bo‘lgan, $ds = dx/\cos\theta$ uzunlik va $d\sigma$ asosli silindrda zarralarning muvozanatini ko‘rib chiqamiz. Bu yerda θ — x o‘qi bilan $\vec{\Omega}$ vektor orasidagi burchak (5.13 rasm). $\vec{\Omega}$ yo‘nalishda birlik fazoviy burchak ichida tarqaladigan chastotalarning birlik oralig‘idagi chastotaning nurlanishi bilan qiziqamiz. (5.37) ga ko‘ra ((5.38) ta’rifga ham qarang) dt vaqt ichida silindrning chap asosiga $cf(\nu, x, \vec{\Omega}, t) d\sigma dt$ ga teng zarralar soni kiradi. Shu vaqtning o‘zida uning o‘ng asosidan

$$(cf(\nu, x, \vec{\Omega}, t) + cdf) d\sigma dt$$

zarralar soni chiqadi, bu yerda *df* bitta asosdan ikkinchi asosga o‘tish paytida f funksiyaning orttirmasidir. $f = f(\nu, \vec{\Omega}, x, t)$ bo‘lgani uchun, bu kattalikni quyidagi ko‘rinishda tasvirlash mumkin:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial d}{\partial s}ds, \qquad ds = \frac{dx}{\cos\theta} \quad . \tag{5.41}$$

Bu yerda birinchi qo‘shiluvchi uning *dt* oraliqdagi vaqt bo‘yicha orttirmasini, ikkinchisi esa - uning x koordinata bo‘yicha orttirmasini belgilaydi.

Fotonlarning tezligi s ga va *dt = ds/s* ga tengligini hisobga olib,

$$df = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\right)ds$$

ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, silindrdagi fotonlar soni *dt* vaqt ichida

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial s}\right)dsd\sigma dt = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + c\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\right)dsd\sigma dt \tag{5.42}$$

kattalikka o‘zgardi. Shuni qayd etish joizki, silindrning yon tomonidan $\vec{\Omega}$ sochilmaydigan fotonlar uchib o‘tmaydi.

Shunday qilib, kvantlar sonining silindr hajmidagi o‘zgarishi ularning yutilishi yoki silindr ichidagi modda atomlari va molekulalarining chiqarilishi yoki yutilishi tufayligina kelib chiqishi mumkin. Ushbu kattalikni hisoblash uchun modda tomonidan yutilgan kvantlar soni ixtiyoriy vaqt oralig‘ida yutilgan zarralar soniga teng bo‘ladgian *muvozanatli nurlanish* tushunchasi kiritiladi. f_p ning muvozanatli taqsimlanish funksiyasi *(Plank qonuni)* quyidagicha:

$$f_p = \frac{2\nu^2}{c^3}\exp\left(1 - \frac{h\nu}{kT}\right), \tag{5.43}$$

Bu yerda *T* — modda harorati (muhit lokal termodinamik muvozanat sharoitida bo‘lib, undagi har bir nuqtada harorat, ichki energiya va h.k tavsiflarni kiritish mumkin deb olinadi. Nurlanish va modda o‘rtasida muvozanat bo‘lmasa, fotonlarning yutilish (chiqarilish) intensivligi f_p va f larning ayirmasi, quyidagi kattallikka teng:

$$\chi_\nu' c(f - f_p).$$

Bu yerda $\chi_\nu' = \chi_\nu(1 - \exp(h\nu / kT))$, χ_ν esa— muhit holati va uning xususiyatlari bilan aniqlanuvchi yutilish koeffisienti. Kvantlarning *dt* vaqt ichida silindr hajmidagi o‘zgarishi quyidagiga teng:

$$\chi_\nu'(f - f_p)d\sigma dsdt. \tag{5.44}$$

(5.42) va (5.44) larni tenglashtirib, taqsimlanish funksiyasi uchun nurlanishning muhitdagi ko‘chishini ta’riflovchi *kinetik tenglamaga* ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+c\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}=\chi_{\nu}^{'}(f_p-f)\,. \qquad (5.45)$$

Bu yerda f_p (5.43) formula bilan beriladi. (5.45) tenglama f_p, $x_{\nu}^{'}$ funksiyalar va chetki shartlar bilan birgalikda yuqorida qilingan farazlarga ko‘ra nurli energiya tarqalishining berk modelini tashkil etadi.

3. Nurlanish ko‘chishi tenglamasining ayrim xususiyatlari Zarralarning saqlanish qonuniga asoslanib olingan nostatsionar, bir o‘lchovli, giperbolik tenglama (5.45) energiyaning saqlanish qonuni bilan ham asoslab berilishi mumkin. Haqiqatdan ham silindrda bir xil ν chastotali. Bu bir xil $h\nu$ energiyali zarralarning muvozanati ko‘rib chiqildi degani. Buni hisobga olib, (5.45) ni nurlanishning spektral intensivligiga oid tenglama ko‘rinishida yozib olish mumkin:

$$I_{\nu}=h\nu cf\,:\ \frac{1}{c}\frac{\partial I_{\nu}}{\partial t}+\cos\theta\frac{\partial I_{\nu}}{\partial x}=\chi_{\nu}(I_{\nu p}-I_{\nu})\ . \qquad (5.46)$$

U (5.45) ga ekvivalent, lekin nisbatan bevosita fizik ma’noga ega.

(5.45) ni $\vec{\Omega}$ fazoviy burchak bo‘yicha (ya’ni kvantlar uchishining hamma yo‘nalishlari bo‘ylab) integrallashda nurlanish zichligi (5.39) bilan uning oqimi (5.40) ni bog‘lovchi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial U_{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial S_{\nu}}{\partial x}=c\chi_{\nu}(U_{\nu p}-U_{\nu})\,. \qquad (5.47)$$

Bu tenglamani 5.1 bo‘limdagi (5.7) quduq suvlarning harakatlanish nazariyasi va 5.2 bo‘limdagi (5.20) issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasining tenglamasiga o‘xshash nurlanish nazariyasinining saqlanish qonunini ifodalovchi chastotali nurlanishning uzluksizlik tenglamasi, deb baholash mumkin. Bunday o‘xshatish o‘ch o‘lchovli holda, (5.46) va (5.47) lar quyidagi ko‘rinish qabul qilganda o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_{\nu}}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla I_{\nu}=\chi_{\nu}(I_{\nu p}-I_{\nu})\ , \qquad (5.48)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_{\nu}}{\partial t}+div\vec{S}_{\nu}=c\chi_{\nu}(U_{\nu p}-U_{\nu})\ . \qquad (5.49)$$

(5.45)-(5.49) tenglamalar chiziqli bo‘lsa ham, nurli issiqlik almashinuvining modellari 5.1, 5.2 bo‘limlarda ko‘rib chiqilgan chiziqli bo‘lmagan modellardan osonroq deb bo‘lmaydi. Chunki (5.45)-(5.49) larni yechish jarayonida har doim $\vec{\Omega}$ yo‘nalishda tarqaluvchi nurlanishning faqatgina spektral (ya’ni ν chastota uchungina) tavsiflarini olish mumkin . To‘la tasvir ν, $\vec{\Omega}$ lar uchun barcha kerakli qiymatlarni (yoki ulardan olingan integrallarni) topish kerak, bu esa anchagina murakkab masala. Shuningdek, nisbatan qiyinroq holatlarda (fotonlar tarqalib ketganida) (5.45)-(5.49) modellarning o‘zi murakkablashadi.

Nurlanish ko‘chishining eng sodda modeli kvantlarning ajralishi va yutilishini hisobga olmaganda va hamma zarralar bir xil yo‘nalishda tarqaluvchi holatni ko‘rib chiqish yetarli bo‘lganda (5.37) kelib chiqadi. U holda ixtiyoriy ν qiymatlar uchun $\cos\theta = 1$ deb olib, 5.1 bo‘limdagi (5.3) o‘zaro ta’sirlashmaydigan moddiy nuqtalarning tenglamasiga mutlaqo o‘xshash quyidagi tenglamaga ega bo‘lish mumkin. $\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial x} = 0$.

Agar nurlanish intensivligi vaqtga bog‘liq bo‘lsa, u holda (5.46) bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaga aylanadi:

$$\cos\theta \cdot \frac{dI_\nu}{dx} + \chi_\nu I_\nu = \chi_\nu I_{\nu p}. \tag{5.50}$$

Uning umumiy yechimi:

$$I_\nu(x) = \int_{x_0}^{x} \chi_\nu I_{\nu p} e^{-\chi(x')} dx' + I_{\nu 0} e^{-\chi(x_0)} . \tag{5.51}$$

Bu yerda $\chi(x') = \int_{x_0}^{x} \chi_\nu dx''$, $\chi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \chi_\nu dx''$ (soddalashtirish uchun (5.51) da $\cos\theta = 1$ deb olindi), $I_{\nu 0}$—integrallash doimiysi.

(5.51) yechimning fizik ma’nosiga uzoq to‘xtalmasdan, birinchi had x_0 dan x gacha bo‘lgan oraliqda moddada paydo bo‘lgan nurlanish tufayligina kelib chiqqanini tushuntirib o‘tamiz. Ikkinchi qo‘shiluvchi moddaga x_0 chegarada kiruvchi tashqi manbalarning nurlanishidir (shuningdek, u muhit bo‘yicha tarqalish hisobiga sustlashgan).

Agar $I_{\nu p}$ va χ_ν — x koordinataning ma’lum funksiyalari (buning uchun zarralarning traektoriyasi bo‘ylab moddaning zichligi va harorati ma’lum bo‘lishi kerak) bo‘lsa, (5.50) tenglama kvadraturaga keltiriladi.

Fazoviy bir jinsli maydonda nurlanishga teskari bo‘lgan hol uchun (5.46) dan quyidagini keltirib chiqaramiz :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \chi_\nu (I_{\nu p} - I_\nu) . \tag{5.52}$$

(5.52) tenglama bilan ta’riflanuvchi jarayon doimiy zichlikda cheksiz boshlang‘ich sovuq muhitda (ya’ni t = 0 ja nurlanish bo‘lmaydi) modda vaqt o‘tishi bilan saqlanadigan ma’lum bir T haroratgacha isitilishini tasvirlaydi. Qirralarda nurlanish yo‘qolmaganligi tufayli, fazofiy gradientlar T nolga teng va χ_ν, $I_{\nu p}$ lar x, *u, z* ga bog‘liq emas. Isish natijasida paydo bo‘lgan nurlanish ham nol gradientga ega (ya’ni

$I_v = I_v(t)$) hamda modda bilan energiya almashganda vaqt o‘tishi bilan eksponentsial qonunga ko‘ra, muvozanat qiymatga intiladi.

5.4. Bir nechta fundamental qonunlarni birgalikda qo‘llash

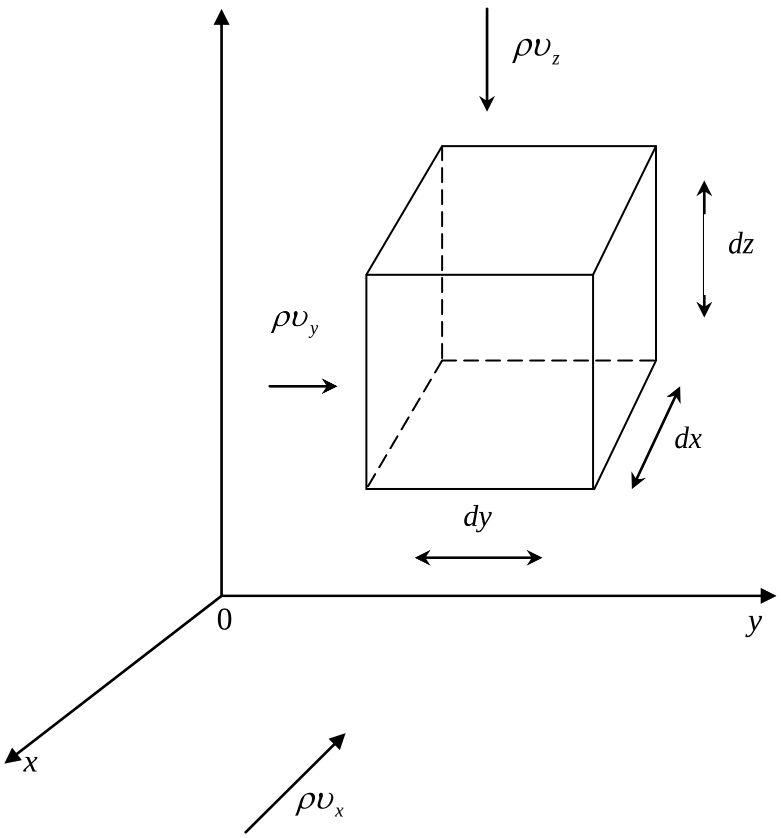
Massa, impuls, energiyaning saqlanish qonunlarini siqiladigan gaz oqimini ta’riflovchi matematik modelni qurish uchun qo‘llaymiz. Olingan modelning 5.1-5.3 bo‘limlarda ko‘rib chiqilgan modellardan farqini, hamda undan kelib chiquvchi gazodinamik harakat xossalarini ko‘rib chiqamiz.

1. Gaz dinamikasining boshlang‘ich tushunchalari. Suyuqlik va qattiq jismlarning zichligi o‘n va ming, hatto undan yuqori atmosfera bosimida sezilarli darajada o‘zgarishi mumkin. Gazsimon muhitlar osonroq siqiladi. Atmosfera bosimi ta’sirida turgan gazning zichligi bosimning bir atmosferaga tushib ketishi natijasida boshlang‘ich zichlik bilan solishtiriladigan kattalikka ortadi yoki kamayadi.

Tashqi kuchlar yoki moddaning bosim kuchi ta’sirida siqiladigan muhitlarning harakatini o‘rganuvchi gaz dinamikasida $\lambda << L$ shart bajarilgan deb qaraladi. Bu yerda λ — erkin yugurish yo‘li, L — ko‘rilayotgan oqim sohasining xarakterli o‘lchamlari (aralash muhit). LTR ga oid gipoteza ham bajariladi deb olingan (5.2 bo‘limdagi 1-punktga qarang). LTR sharoitida siqiladigan muhitga λ dan katta, lekin L dan ancha kichik o‘lchamli suyuq zarralar majmui sifatida qarash mumkin. Muhitning belgilangan massasi bilan bog‘langan har bir zarra uchun uni xarakterlovchi kattaliklar - ρ zichlik, bosim *r*, harorat T, ichki energiya ε va hamda uning bir butun sifatida mikroskopik harakatlanish tezligi $\vec{v}$ kiritiladi. Bu kattaliklarning hammasi umumiy holda uchta fazoviy o‘zgaruvchi x, *u, z* va *t* vaqtga bog‘liq.

Kelgusida muhitda issiqlik uzatish, qovushqoqli ishqalanish, energiya manbai va iste’molchilari, masalan nurlanish, bundan tashqari tashqi hajmli kuchlar hamda moddaning massa manbai yo‘q, deb faraz qilamiz.

2. Siqiluvchi gaz uchun uzluksizlik tenglamasi. 5.1 bo‘limdagi (5.7) uzluksizlik, 5.2 bo‘limdagi (5.20) quduq suvlarning oqimi hamda issiqlik uzatilishini tenglamalarini keltirib chiqarishda qo‘llanilgan mulohazalardan foydalanamiz. Fazoning harakatlanuvchi gaz bilan egallangan ma’lum bir qismida *dx, du, dz* tomonli kubni ko‘rib chiqamiz va undagi *dt* vaqt ichidagi massa balansini ko‘rib chiqamiz (5.14-rasm). Bu yerda v_x, v_y, v_z — tezlikning mos o‘qlar bo‘yicha komponentalaridir.



5.14-rasm

X o‘qi bo‘ylab, koordinatali qirradan kubga *dt* vaqt ichida quyidagiga teng gaz massasi keladi $\rho v_x dydzdt$,

chunki ρv_x *x* o‘qi bo‘ylab massa oqimidir. Shu vaqtning o‘zida

tomondan $[\rho v_x + d(\rho v_x)]dydzdt$ massa oqib chiqadi,

bu yerda $d(\rho v_x)$ bilan massa oqimining *x* koordinatadan *x* + *dx* koordinataga o‘tish paytidagi orttirmasi belgilangan. Oxirgi ikkita ifodani yig‘ib, hamda

$$d(\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx$$

ekanligini hisobga olib, kubdagi massa o‘zgarishi kattaligini gazning X o‘qi bo‘ylab harakatlanishi hisobiga kubdagi massaning *dt* vaqt ichida o‘zgarish qiymatini keltirib chiqaramiz:

$$dm_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dxdydzdt. \qquad (5.53)$$

Xuddu shu usulda massaning *u*, *z* o‘qlari bo‘yicha harakatlanishi hisobiga o‘zgarishini aniqlaymiz:

$$dm_y = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dxdydzdt, \qquad (5.54)$$

$$dm_z = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dxdydzdt.$$

Kubning belgilangan hajmida undagi gaz massasining o‘zgarishi shuningdek, zichligining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi bilan ham ifodalanadi:

$$dm = \frac{\partial p}{\partial t} dtdxdydz \ . \qquad (5.55)$$

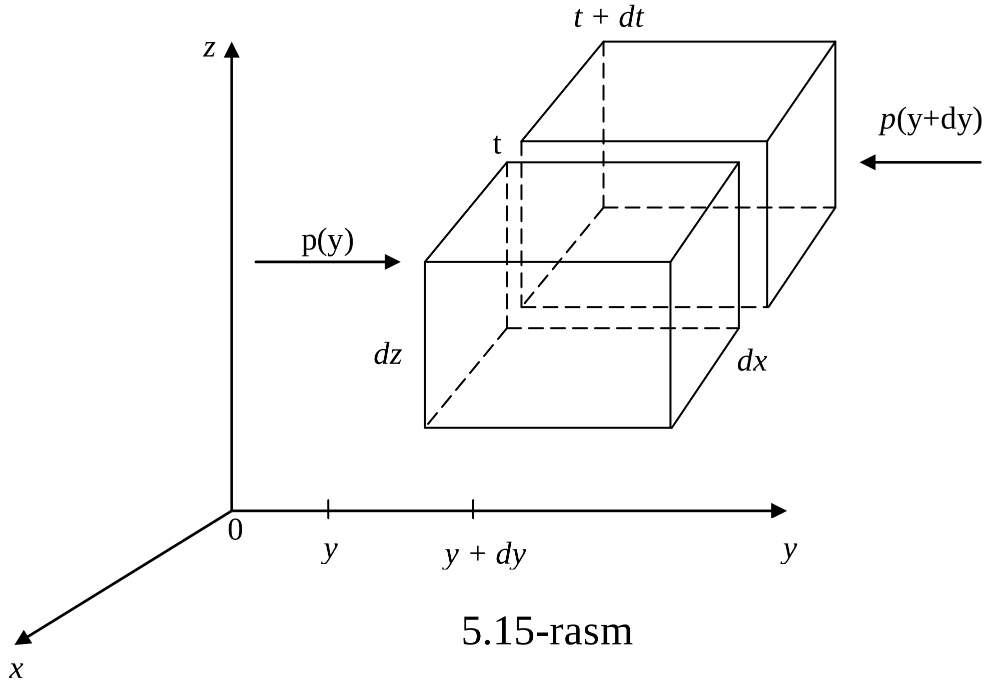
dm_x, dm_y, dm_z larni yig‘ib va natijani dm ga tenglashtirib (5.53)-(5.55) lardan uzluksizlikning qidirilayotgan tenglamasini olamiz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0 \ . \qquad (5.56)$$

Bu formulaga asosan massaning saqlanish qonuni siqiladigan gazga nisbatan o‘rinlidir. O‘zining shakli va ma’nosiga ko‘ra (kattalikning o‘zgarish tezligi ushbu kattalik oqimining divergentsiyasi bilan aniqlanadi) u 5.1 bo‘limdagi (5.7)ga, 5.2 bo‘limdagi (5.20) va 5.3 bo‘limdagi (5.47)larga mutlaqo o‘xshash.

Ammo quduqli suvlarning oqimi bilan o‘xshashlik shu joyda tugaydi. Gazning erkin harakatlanishida uning dinamikasi quduq zarralarining qarshiligiga duch kelgan suyuqliklarning harakatidan farqli o‘laroq, faqatgina gaz o‘zining bosim kuchlari bilan aniqlanadi.

3. Gaz harakatining tenglamasi. Ularni olish uchun ma’lum *t* momentda dx, *dy*, *dz* qirrali kub shakliga ega bo‘lgan elementar suyuq zarraga Nyutonning ikkinchi qonunini qo‘llaymiz (5.15 rasm). Suyuq zarra - fazoda harakatlanuvchi hamda shaklini o‘zgartiruvchi, har xil *t* vaqt momentlarida gazning bir xil atomlari va molekulalariga ega bo‘lgan hajm. Bunda uning *dt* massasi doimiydir. Xulosani soddalashtirish maqsadida, qisqa *dt* vaqt ichida kub o‘zining shaklini o‘zgartirmaydi hamda barcha yo‘nalishlar bo‘ylab o‘z o‘lchamlaridan kichik masofaga ko‘chadi, deb olamiz.



5.15-rasm

Avvalo, kubga, masalan *u* o‘qi yo‘nalishida ta’sir etuvchi kuchni aniqlaymiz. U qirralarning chap va o‘ng qismdagi ayirmasi ularning yuzalariga ko‘paytmasiga teng (faraz bo‘yicha boshqa kuchlar yo‘q):

$$F_y = [\rho(x,y,z,t) - \rho(x,y+dy,z,t)]dxdz\,.$$

F_y kuch suyuq zarraning *u* yo‘nalishdagi tezlanishi d*t* = *rdxdudg* massasiga ko‘paytmasidir:

$$F_y = \frac{dv_y}{dt}\rho dxdydz\,. \qquad (5.57)$$

F_y ga oid birinchi ifodada bosimlar ayirmasini bosimning u bo‘yicha hosilasi bilan almashtirib, hamda uni (5.57) ga tenglab, gazning *u* o‘qi bo‘ylab harkatini tasvirlovchi tenglamaga kelamiz:

$$\rho\frac{\partial v_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}\,. \qquad (5.58)$$

Harakatning x, *g* o‘qlari bo‘yicha tenglamalarini ham xuddi shunday usulda olamiz:

$$\rho\frac{\partial v_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,, \qquad (5.59)$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}\,. \qquad (5.60)$$

Ular (5.58) kabi yaqqol fizik ma’noga ega. (5.58)-(5.60) tenglamalar vektor shaklda qo‘yidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -grad p\,. \qquad (5.61)$$

(5.58)-(5.61) larda df/*dt* orqali gazning o‘zgarmas massasini xarakterlovchi biron-bir kattalikning vaqt bo‘yicha to‘la (substatsional, ya’ni gazning belgilangan zarralariga bog‘liq) hosilasi belgilangan.

df/*dt* ni x va *t* bo‘yicha $df/dt = \partial f/\partial t + (\vec{v}grad)f$ qonunga asoslangan holda xususiy hosilalarga yoyib, *Eyler harakati tenglamalariga* kelamiz:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}grad)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}grad p\,. \qquad (5.62)$$

Ularning koordinataviy holdagi ko‘rinishi quyidagicha:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \qquad (5.63)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,, \qquad (5.64)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,. \qquad (5.65)$$

Quduq suvlarning oqimidan farqli o‘laroq, (5.58)—(5.65) gaz harakati tenglamalaridagi gradientli bosimlar uning tezlik komponentlarini emas, tezlanish komponentlarini aniqlaydi (Darsi qonuni bilan solishtiring (5.1 bo‘limdagi (5.9)).

(5.56), (5.63)—(5.65) tenglamalarda beshta ma’lum kattalik mavjud— ρ, r, v_x, v_y, v_z. Ularni tutashtirish uchun energiyaning saqlanish qonunidan foydalanish tabiiyroq.

4. Energiyaning tenglamasi. Uni hosil qilish uchun 3-bo‘lim dagi soddalashgan sxemadan foydalanamiz, belgilangan d*t* massaning dt qisqa vaqt oralig‘idagi ichki energiya o‘zgarishini ko‘zdan kechiramiz. Qilingan farazlarga ko‘ra, moddada issiqlik o‘tkazuvchanlik, qovushqoqlik hamda energiya manbalari yo‘qligi uchun, o‘zgarish faqatgina kub qirralarida uning siqilish yoki kengayishi paytida bosim kuchlarining bajargan ishi tufayligina kelib chiqadi.

Hajm qirralarining x o‘qi bo‘ylab harakatlanishi bilan bog‘liq bosim ishi:

$$dA_x = p(v_x(x) - v_x(x+dx))dtdydx$$

ga teng, bu yerda qavs ichidagi qo‘shiluvchilarni ikkinchi tartibli kichik hadlarni tashlab yuborish hisobiga $d\, v_{x\,x}/dx$ hosila orqali yozish hamda

$$dA_x = -p\frac{\partial v_x}{\partial x}dxdydzdt$$

ifodaga ega bo‘lishi mumkin. Bu yerda *r* —elementar hajmdagi o‘rtacha bosim. Shunga o‘xshab

$$dA_y = -p\frac{\partial v_y}{\partial y}dxdydzdt\,,$$

$$dA_z = -p\frac{\partial v_z}{\partial z}dxdydzdt\,.$$

Gaz ustida dt vaqt ichida bajarilgan ish:

$$dA = dA_x + dA_y + dA_z = -p\,div\vec{v}dxdydzdt\,.$$

U hajmning ichki energiyasi o‘zgarishiga, ya’ni:

$$dA = \rho d\varepsilon dxdydz$$

ga bog‘liq, bu yerda ε — solishtirma ichki energiya. d*A* ga oid ikkala ifodani tenglashtirib, dt ni nolga intiltirib:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\,div\vec{v} = 0 \qquad (5.66)$$

ga ega bo‘lamiz, bu yerda $d\varepsilon/dt$ — ichki energiyaning vaqt bo‘yicha to‘la (substantsional) hosilasi.

Shuni qayd etish joizki, uzluksizlik va harakat tenglamalari yordamida (5.66) (5.56) kabi *divergent ko‘rinishga* keltiriladi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}\right) = -div\left[\rho\vec{v}\left(\varepsilon + \frac{v^2 2}{}\right) + p\vec{v}\right]. \qquad (5.67)$$

(5.67) ning chap qismida fazoning berilgan nuqtasida to‘la gaz energiyasi (ichki va tashqi) hosilasi turibdi.

Moddaning termodinamik xususiyatlari ma’lum deb olingani uchun, ε — kiritilgan *r* va ρ larning ma’lum funksiyasi va (5.66) yoki (5.67) gazodinamik kattaliklarni aniqlash uchun yetarlicha aloqani bermaydi.

5. Gaz dinamikasining Lagranj koordinatalaridagi tenglamasi. Olingan modellarda gazning oqimi kattaliklarning x, *u*, *z* dekart koordinatalarga va t vaqtga bog‘lanishi bilan beriladi. Ta’rifning bu usuli (*Eyler yondashuvi)* muhit harakatini qo‘zg‘almas chetki kuzatuvchining nuqtai nazaridan bayon etib, aerodinamik trubalardagi uchuvchi apparatlar modelining gaz bilan qamrab olinishini o‘rganishda qulaydir. *Lagranj yondashuvida* koordinata fazoning ma’lum bir nuqtasi bilan emas, moddaning belgilangan zarrasi - (suyuq zarrasi) bilan bog‘lanadi. Lagranj koordinatalari zarrada sodir bo‘ladigan ichki jarayonlar, masalan, tezligi zarraning fazodagi vaziyati bilan emas, harorat va zichligi bilan aniqlanuvchi kimyoviy reaksiyalarni tahlil qilishda qulaydir. Lagranj yondashuvi boshqa sabablarga ko‘ra ham qulay: u 5.3, 5.4 bo‘limlarda harakat va energiyaning tenglamalarini soddaroq ko‘rinishga keltirish uchun ishlatilgan (kub shaklidagi suyuq zarra qaralgan edi).

Lagranj koordinatalaridagi gazodinamik tenglamalarning eng sodda ko‘rinishi bir o‘lchovli holdadir. Haqiqatan ham, x o‘qi yo‘nalishida chap qirrasi qo‘zg‘aluvchan hamda moddaning belgilangan zarralari bilan bog‘liq birlik kesimli ustunni olib, Lagranj koordinatasini quyidagi qonundan keltirib chiqarish mumkin:

$$m(x) = \int_{x_0}^{x} \rho(x,t)dx, \qquad dm = \rho dx, \tag{5.68}$$

bu yerda $x_0(t)$ —ustunning chap uchidagi zarralar koordinatasi, *x(t)* — joriy koordinata ($x_0(t)$; koordinatali zarra sifatida gazni chegaralovchi qattiq devor oldidagi zarrani, yoki bo‘shliq chegarasidagi zarrani olish mumkin. m(x) — x_0, *x* nuqtalar orasidagi ustun massasi.

(5.68) bog‘lanish Lagranj o‘zgaruvchisini kiritishning tabiiy va oson usulini beradi (uning nomi *massali koordinatadir)*. Endilikda hamma gazodinamik kattaliklar x, t ga emas, m, t larga bog‘liq deb bayon etiladi. Ular uchun bir o‘lchovli tenglamalardagi harakatning Eyler shaklidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{5.69}$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=-\frac{p}{\rho}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(5.69) ning chap tomonida turgan ifodalar belgilangan m massali koordinataga tegishli bo‘lgan vaqt o‘tishi bilan o‘zgaruvchi kattaliklarni ta’riflovchi substatsional hosilalardir. U holda (5.68) dan foydalangan holda (5.69) dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}=\frac{\partial v}{\partial m}, \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial m}, \tag{5.71}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial v}{\partial m}. \tag{5.72}$$

Bu yerda *d/dt* — mos kattaliklardan vaqt bo‘yicha olingan substatsional hosila (5.71) harakat va (5.72) energiya tenglamasining fizik bayoni Eyler koordinatalari kabi (5.73) uzluksizlik tenglamasidan farqli. Oxirgisi yaqqol xususiyatdir. Belgilangan suyuq zarra hajmi (bu zichlik degani ham) vaqt o‘tishi bilan uchlaridagi tezliklarning har xilligi hisobiga o‘zgaradi.

(5.71) yordamida energiya tenglamasini divergent ko‘rinishda yozib olish mumkin:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial m}(\rho v), \tag{5.73}$$

bu yerda chapda zarraning to‘la energiyasiga nisbatan vaqt bo‘yicha hosila turibdi.

Agar Lagranj tenglamalarining yechimi, xususan solishtirma hajm $V(m,t)=1/\rho(m,t)$ topilgan bo‘lsa, gazodinamik funsiyalarning Eyler koordinatasiga nisbatan bog‘lanishi kvadraturadan topiladi (5.68) ga qarang):

$$dx=V(m,t)dm, \qquad x(m,t)=\int_0^m V(m,t)dm+x_0(t).$$

Xuddi shunday mulohazalar yordamida gazodinamik kattaliklar faqatgina bitta fazoviy koordinata r (r – o‘qdan yoki simmetriya markazidan bo‘lgan masofa) va t vaqtga bog‘liq bo‘ladigan silindrik va sferik simmetriya holi uchun Lagranj tenglamalarini olish qiyin emas. Ular sodda va jozibador ko‘rinishga egadir, ikki va uch o‘lchovli holatlar uchun bunday deb bo‘lmaydi.

Yozuvning turli shakliga qaramay, gaz dinamikasining Eyler va Lagranj tenglamalari tabiiy ravishda, shunga o‘xshash xususiyatga ega bo‘lib, xususiy hosilali nochiziqli giperbolik tenglamalardir (nostatsionar va umumiy holda ko‘p o‘lchovli). Ularga asoslanib qo‘shimcha fizik jarayonlarni o‘z ichiga olgan siqiluvchi muhitlarning murakkabroq modellari hosil bo‘ladi. Shunday qilib, energiyani ko‘chirish jarayonida ishtirok etadigan issiqlikni o‘tkazuvchi gazlar uchun (5.70) uzluksizlik va (5.71) harakat tenglamalari o‘z kuchini saqlaydi, energiya tenglamasi esa:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial m} - \frac{\partial W}{\partial m} \qquad (5.74)$$

ko‘rinishiga kiradi, bu yerda $W = -\chi\rho\partial T / \partial m$ —isiqlik oqimi, $\chi = \chi(\rho, T)$ — issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisienti. Suyuq zarraning ichki energiyasi nafaqat bosim kuchlarining bajargan ishi hisobiga, balki issiqlik uzatishning mavjudligi hisobiga ham o‘zgaradi. Gaz dinamikasining (5.70)-(5.72) larga nisbatan osonroq modellari qo‘shimcha farazlar hisobiga hosil bo‘ladi.

6. Gaz dinamikasining tenglamalari uchun chetki shartlar.(5.70)-(5.72) tenglamalar bilan ta’riflangan bir o‘lchovli gaz oqimi uchun ularning qo‘yilishi mosdir. O‘ngdan ham, chapdan ham o‘tkazmas qattiq devorlar- porshenlar bilan chegaralangan truba ichidagi gazning harakatini ko‘rib chiqaylik. (5.16 rasm). Chap devordagi zarralarga, m = 0 koordinatani beramiz; u holda o‘ng devordagi zarralarning koordinatasi m= *M* bo‘lib, bu yerda *M* — birlik kesimli ustundagi porshenlar orasidagi to‘la massa. Ichki zarralarning koordinatalari 0 <m < *M*. (5.72)—(5.74) tenglama 0 < m < *M* sohada va t > 0 da qaraladi.

Barcha 0<m<M va t>0 lardagi oqimni aniqlash uchun quyidagilar berilishi shart:

1) boshlang‘ich shartlar, ya’ni gazning t = 0 momentdagi holati,

$$v(m,0) = v_0(m), \quad p(m,0) = p_0(m), \quad \rho(m,0) = \rho_0(m), \qquad (5.75)$$

(5.75) da *r yoki* ρ o‘rniga muhit tenglamasidan foydalanib,
boshlang‘ich haroratni qo‘yish kerak $T(m,0) = T_0(m)$;

2) chetki shartlar, ya’ni m = 0, m = *M* chegaralarda gazodinamik kattaliklarning vaqtga bog‘liqligi, masalan, bosimning o‘zgarish qonuni

$$p(0,t) = p_1(t), \quad v(M,t) = v_2(t), \quad t > 0, \qquad (5.76)$$

yoki porshenlarning o‘zgarish qonuni (ya’ni Eyler koordinatasidagi traektoriya, chunki *dx/dt =v*)

$$v(0,t) = v_1(t), \quad p(M,t) = p_2(t), \quad t > 0 \ . \qquad (5.77)$$

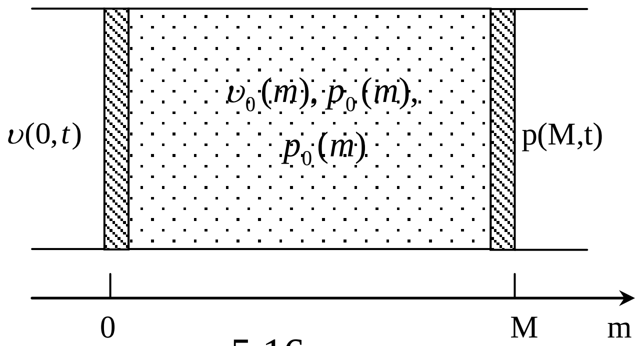
(5.75) va (5.76) (yoki (5.77) ni) chetki shartlarni bilish *porshen to‘g‘risidagi masalaning* to‘la yechimini beradi.

Chetki shartlar sifatida chap uchda doimiy $p_1(t)$ bosim, oʻngda esa $v_2(t)$ tezlik saqlanadigan (5.76) va (5.77) ning turli xil kombinatsiyalari ham oʻrinlidir.

Agar porshenlardan birining doirasidagina oqim bilan qiziqib, ikkinchi porshenning ta’sirini hisobga olmasak, (5.76) dan (yoki (5.77) dan) faqatgina bitta shartni, masalan, m = 0 da (5.76) ni va barcha m > 0 larda (5.76) shartni (gaz chap tomonda porshen bilan chegaralangan qism fazoni egallaydi) berib qoʻyish yetarli boʻladi.

Va, nihoyat (5.76) va (5.77) chetki shartlar markazdagi gazning harakatiga uchlarning ta’sirini hisobga olmaganda (jarayonni kichik vaqt oraligʻida kuzatib) umuman berilmaydi. U holda (5.70)-(5.72) tenglamalarga oid joriy masaladan Koshi masalasi - cheksiz fazoda berilgan gazodinamik kattaliklarning boshlangʻich taqsimotining vaqt oʻtishi bilan takomillashuvi masalasi kelib chiqadi. Bunda boshlangʻich (5.76) ma’lumotlar barcha —∞ <m < ∞ lar uchun aniqlangan, tenglamalar esa — ∞ < < m < ∞, t > 0 oraliqda yechiladi.

Chetki shartlarning muhim sinfi - vakuum chegarasidagi shartdir. Yuqori bosimga ega boʻlgan qattiq siqilgan gaz nisbatan razryadlangan muhitga:



5.16- rasm

kichik bosimda oʻta boshlaydi. Bu jarayonni ideallashtirib, gaz oʻtayotgan fazodagi bosim hamda zichlikni nolga teng deb olish, ya’ni masalaning aniq quyilishiga qarab $p_1(t)=0$, t > 0, yoki $p_2(t)=0$, t > 0 (yoki $p_1(t)=p_2(t)=0$, t > 0) shartni berish mumkin.

7. Gaz dinamikasi modellarining ayrim xususiyatlari. Bu xususiyatlarni tushuntirish uchun (5.70)-(5.72) tenglamalarni ikkita vaziyatdan foydalangan holda oldindan soddalashtirib olamiz. Ulardan birinchisi - muhitda issiqlik oʻtkazuvchanlik, qovushqoqlik, nurlanish, tashqi manbalar va energiya iste’molchilari hisobiga energiya yoʻqolmasligidir (farazga koʻra). Termodinamik nuqtai nazardan, bu jarayon adiabatik sanaladi va belgilangan suyuq zarraning S entropiyasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi. U holda energiya (5.72) tenglamasini ekvivalent shaklda yozib olish mumkin:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{5.78}$$

Bunga termodinamikaning ikkinchi qonunini suyuq zarraga formal tarzda qo‘llash orqali ham ishonch hosil qilish mumkin:

$$TdS = d\varepsilon + pdV. \tag{5.79}$$

Ikkinchi hol - ideal gaz holatida entropiyaning bosim va zichlik orqali osonlikcha ifodalanishi:

$$S = Cdv \ln p\rho^{-\gamma} + S_0, \tag{5.80}$$

bu yerda γ > 1 — doimiy bosimda *(* C_p *)* va doimiy hajmda (C_v) solishtirma issiqlik sig‘imining nisbati, S_0 —konstanta.

(5.78) dan (5.80) hisobga olgan holda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial (p\rho^{-\gamma})}{\partial t} = 0.$$

U esa qo‘yidagi ifodaga ekvivalent sanaladi:

$$p\rho^{-\gamma} = \varphi(m). \tag{5.81}$$

Uning ma’nosi gaz ixtiyoriy zarrasining entropiya vaqtidan mustaqilligidir. *R(t)* funksiya t = 0 vaqt momentida berilgan p_0*(t)*, ρ_0*(t)* funksiyalar bilan aniqlanadigan entropiyaning gaz massasi bo‘ylab taqsimotini ta’riflaydi.

(5.81) integralni (5.82) differensial tenglamaning o‘rniga qo‘llab, (5.70) va (5.71) ning zichlikka nisbatani ikkinchi tartibli differensial tenglamaga keltiramiz :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial m}\left(a_0 \rho^{\gamma+1} \frac{\partial p}{\partial m}\right), \tag{5.82}$$

bu yerda $a_0 = \gamma\varphi_0$ a doimiy *(* φ_0 — massali koordinataga bog‘liq bo‘lmagan entropiya).

(5.82), ya’ni gaz dinamikasi tenglamasining giperbolligi tavsiflarini hisoblamasdan turib, uning chiziqli o‘xshashligini olish natijasida o‘rnatish oson. Buning uchun gazodinamik kattaliklarning doimiy $\rho(m,t) = \rho_0$yechim doirasidagi kichik xatoliklarini ko‘rib chiqamiz.

Xatolik bo‘lgan yechimlarni $\rho(m,t) = \rho_0 + \rho$ ko‘rinishda tasvirlab va ularni hosila singari kichik deb olib, (5.82) dan *r* tenglamasini keltirib chiqaramiz:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial m^2}. \tag{5.83}$$

(5.83) chiziqli tenglama giperbolik turdagi sim tebranishi tenglamasiga mutlaqo oʻxshash. U kichik tovush shovqinlarining gazda tovush tezligi $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ bilan (*akkustika tenglamasi)* tarqalishini ifodalaydi. Chiziqlilik hisobiga uning uchun umumiy yechimni topish oson.

(5.70), (5.71), (5.81) tenglamalarning yana bir soddalashuvi oqim sodda toʻlqin xususiyatiga ega, yaʼni ixtiyoriy gazodinamik kattaliklar tanlangan biron bir kattalikning, masalan, zichlikning funksiyalaridir degan farazda hosil boʻladi. (5.70), (5.71), (5.81) lardan va v =*v*(r) ekanligini hisobga olgan holda quyidagi koʻrinishlarga ega boʻlamiz:

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial t} = v_p \frac{\partial p}{\partial m}, \qquad v_p \frac{\partial p}{\partial t} = -a_0 \rho^{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial m}.$$

Bu yerda v_p — tezlikning zichlik boʻyicha hosilasi. Oxirgi tenglamalardan v_p ni olib tashlab *Xopf* tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sqrt{a_0}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\partial p}{\partial m} = 0. \tag{5.84}$$

(5.84) birinchi tartibli tenglama, lekin uning tarkibiga tipik gazodinamik nochiziqlilik kiradi. Shuning uchun u siqiladigan gaz oqimiga xos nochiziqli samaralar oʻrganilishiga yaxshi model boʻladi. Ulardan eng yorqini - toʻlqinlarda paydo boʻladigan boshlangʻich vaqt momentida hamma funksiyalar silliq boʻlishiga qaramay, gazodinamik kattaliklar cheksiz gradientining siqilishi - «gradientli halokat» dir.

Ushbu tushunchani quyidagi sodda mulohazalar asosida tushuntirib oʻtamiz. Xopfa tenglamasi xarakterli koʻrinishda yozib olinishi mumkin:

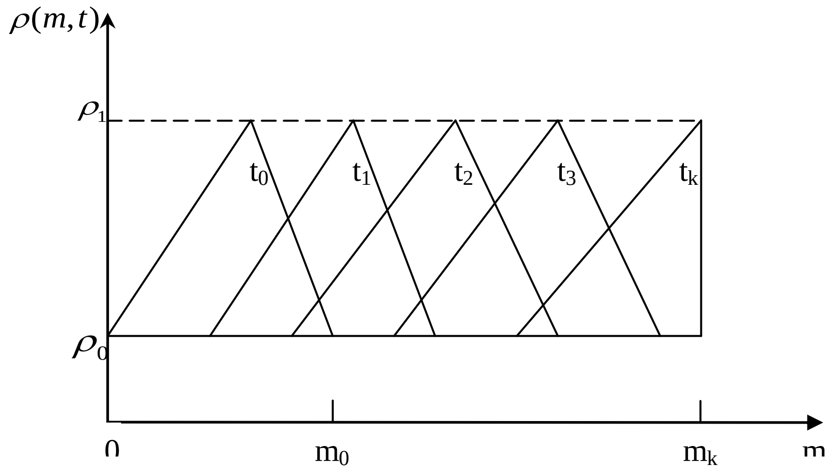
$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0. \tag{5.85}$$

Bu yerda indeks vaqt boʻyicha toʻla hosila xarakteristika - yechim (zichlik) ning qiymati hamma momentlarda doimiy boʻladigan m, t koordinatali chiziq boʻylab olinadi, degan maʼnoni bildiradi. (5.85) ni quyidagi koʻrinishda yoyib olamiz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{dm_\theta(t)}{dt}\frac{\partial p}{\partial m} = 0, \tag{5.86}$$

bu yerda $m_\theta(t)$ — har xil vaqt momentida xarakteristika uchun m koordinataning qiymati (5.84) hamda (5.86) ni solishtirib xarakteristika tenglamasiga ega boʻlamiz: $m_\theta(t) = \sqrt{a_0}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}} t + m_\theta(0)$.

Bu ifodadan koʻrinib turibdiki, katta zichlikli hollarda qiymatlar kichik hajmli zichlik holatiga nisbatan gaz massasi boʻylab katta tezlikda tarqaladi va maʼlum bir vaqt momentida oxirgisini «quvib yetadi». Javob bir yechimlilik boʻlmaydi, uning gradientlari «yuvilib ketish» nuqtasida har xil zichlikli holatlar cheksiz ortib ketadi. Bu jarayon sxematik tarzda 5.17 rasmda tasvirlangan bo‘lib, unda to‘la uchburchak shaklidagi boshlang‘ich profilning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi ko‘rsatilgan. Uchburchak tomoni ma’lum bir vaqtdan so‘ng, uning oldingi fronti joylashgan nuqta koordinatasiga o‘tadi.



5.17- rasm

«Gradientli halokat», - bu chiziqli bo‘lmagan samara (batafsil ko‘rish uchun 5.5 bo‘limga qarang). U (5.83) chiziqli tenglamada ham, doimiy yechim doirasida kichik xatoliklarni ko‘rib chiqish paytida (5.84) dan kelib chiqadigan ko‘chirishning chiziqli tenglamasi 5.1 bo‘limdagi (5.3) da paydo bo‘lmaydi. Bunday effekt mavjudligi gaz dinamikasining uzilishli yechimlarini ko‘rib chiqishga olib keladi (shuni qayd etish joizki, uzilish suyuq zarradan o‘tganda entropiyasini o‘zgartiradi). Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglamalarning parabolik (5.1, 5.2 bo‘limlardagi modellar)dan farqi aynan shunda

Nazorat savollari

1. Modda massasining saqlanishi qonuni asosida quriladigan modellarga misollar keltiring.
2. Busseneska tenglamasining ayrim xossalarini tushuntirib bering.
3. Energiyaning saqlanish qonuni asosida quriladigan modellarga misollar keltiring.
4. Fure qonunini molekulyar-kinetik farazlardan keltirib chiqaring.
5. Zarralar sonining saqlanishi qonuni asosida quriladigan modellarga misollar keltiring.
6. Bir necha fundamental qonunlarni birgalikda qo‘llashga misollar keltiring.

6. VARIATSION TAMOYILLAR ASOSIDA QURILADIGAN MODELLAR

6.1. Mexanikada harakat tenglamalari, variatsion tamoyillar va saqlanish qonunlari

Mazkur bobda Nyuton va Lagranjning dinamik tenglamalari, Gamiltonning variatsion tamoyili hamda mexanik tizimlar uchun saqlanish qonunlari va nisbiylik nazariyasi xossalari o‘rtasidagi munosabatni ifodalovchi klassik mexanikaning boshlang‘ich ma’lumotlarini keltiramiz.

1. **Nyuton shaklidagi mexanik tizimlarning harakat tenglamalari.** Birorta kuchning harakatini sinashga oid N-ta moddiy nuqtadan iborat tizimlar dinamikasi quyidagi tenglamalar orqali ifodalanadi:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i, \qquad i = 1,\dots,N, \tag{6.1}$$

bu yerda m_i - moddiy nuqtalar og‘irligi, $t > 0$- vaqt, $\vec{r}_i$ - tenglamaning radius vektori, $\vec{F}_i$- barcha ta’sir etuvchi kuchlar. $\vec{r}$- orqali barcha nuqtalar tizimidan iborat koordinatalar to‘plami belgilangan. $\vec{F}_i$ - oldindan berilgan bo‘lib, vaqtga, koordinatalar fazasiga hamda tezlikka bog‘liq qiymatdir (bu yerda nafaqat i- nuqta, balki barcha ko‘rilayotgan nuqtalar ajratilgan). (6.1) tenglamalar tizimi moddiy nuqtalar majmuasiga qo‘llanilgan (ta’sir etuvchi) Nyutonning ikkinchi qonunining matematik ifodasidir. Tenglamalar tizimi yozilish shakliga ko‘ra, ma’lumki, ikkinchi tartibli *3 N* ta tenglamalardan iborat.

Agar boshlang‘ich $x_i(0),\ y_i(0),\ z_i(0),\ i = \overline{1,N}$ nuqtalar koordinatalari va ularning boshlang‘ich $t = 0$ vaqtdagi $dx_i/dt,\ dy_i/dt,\ dz_i/dt$ tezliklari ma’lum bo‘lsa, u holda (6.1) tizim ixtiyoriy $t > 0$ vaqtda barcha nuqtalar koordinatalari va tezliklarini topish imkoniyatini beradi, ya’ni klassik mexanikaning asosiy masalasini yechadi.

Dinamik tenglamalar tizimi inertsiya va Galiley sanoq tizimlari uchun o‘rinlidir. Bu yerda moddiy nuqta erkin harakatlanadi, ya’ni nuqta biror-bir ta’siri sinalmaydi, tekis va to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanadi. Boshqacha aytganda, bu koordinatalar tizimi uchun Nyutonning birinchi qonuni o‘rinlidir.

Misol sifatida to‘g‘ri va gorizontal tekis temir yo‘lda doimiy tezlikda harakatlanayotgan poezdni keltirish mumkin. Bunda vagonning ichki silliq maydonidagi sharcha (soqqa) poezdga nisbatan tekis va to‘g‘ri chiziqli harakat qiladi (poezd sekinlashganda va tezlashganda, burilishda, ko‘tarilish va tushish yo‘llarida inersial sanoq tizimi xossalari bo‘ladi). Albatta, inersial sanoq tizimi ko‘pgina muhim mexanik hodisalar uchun o‘rinli bo‘lgan ideal tushunchadir. Inersial sanoq tizimi Erning harakatlanishida, shuningdek, poezdning Yerda harakatlanishiga hech qanday ta’sir ko‘rsatmaydi (ballistik raketaning uchishida esa aniq tavsiflanmasligi mumkin).

Biror inersial tizimga nisbatan sekinlashayotgan yoki doimiy tezlikda to‘g‘ri chiziqli harakatlanayotgan ixtiyoriy sanoq tizimi ham inersial sanoq tizimi bo‘ladi. Dastlabki x, y, z, t tizimlardan hosil bo‘lgan bunday tizimlar to‘plami, quyidagi koordinata va vaqtlarning o‘zgartirishi (almashtirish):

$$\begin{aligned}
&x^* = x + a, \quad y^* = y + b, \quad z^* = z + c, \quad t^* = t, \\
&x^* = x, \quad y^* = y, \quad z^* = z, \quad t^* = t + a, \\
&x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z^* = z, \quad t^* = t, \\
&x^* = x - v_x t, \quad y^* = y - v_y t, \quad z^* = z - v_z t, \quad t^* = t,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

shuningdek, bunday o‘zgartirishlarning ixtiyoriy kombinatsiyalari orqali aniqlanadi. Bu yerda a, b, c, v_x, v_y, v_z - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar, α - koordinata o‘qlaridan biriga nisbatan sanoq tizimining burilish burchagi.

Galileyning nisbiylik (nazariyasi) tamoyilidan kelib chiqqan klassik mexanikasi barcha (6.2) inersial tizimlar ixtiyoriy inersial tizimlar bilan bir xildir. Bu tamoyil xususan fazo va vaqtning bir jinsliligini (6.2) dagi birinchi va ikkinchi almashtirishlar) va ajratilgan yo‘nalishlardan mustasno fazoning izotropligini (uchinchi almashtirish) aks ettiradi. Inersial tizim (6.2) dagi so‘ngi almashtirish Galiliey almashtirishlari deb ataladi.

Ma’lumki, agar biror sababga ko‘ra inersial sanoq tizimidagi harakatni kuzatishga to‘g‘ri kelsa, u holda (6.1) ko‘rinishdagi Nyutonning ikkinchi qonuni bajarilmaydi. Agar shar (soqqa) ni markazdan uning chetiga nisbatan aylanayotgan disk (gardish) ning silliq gorizontal (eni bo‘yicha) maydoniga haraktlantirilsa, u holda shar to‘g‘ri chiziq bo‘ylab emas, aksiga egri chiziqli trayektoriya bo‘ylab harakatlanadi.

Murakkab bo‘lmagan modifikatsiyalarga (shakl o‘zgarish) nisbatan inersial bo‘lmagan (6.1) tenglamalar tizimi va mexanikaning boshqa qonunlari o‘rinli bo‘ladi. Xulosa qilib aytganda, kuchlar tizimiga ta’sir etuvchi “mavhum” tashqi inertsiya kuchini oshirib borilsa, uning qiymati tanlab olingan inersial tizimga nisbatan inersial bo‘lmagan sanoq tizimining harakatiga qarab aniqlanadi. Odatda dastlabki sanoq tizimi mexanikada inersial deb hisoblanadi, uni inersial bo'lmagan qismi maxsus usulda keltiriladi.

Mexanikaning o'zgarmaslik qonunlarining (6.2) almashtirishga bo'lgan munosabati turli ko'rinishlarda ifodalanishi mumkin. Agar yangi sanoq tizimiga o'tilsa, tenglama uchun mos qonunlar:

1) tuzilishlari o'zgarmaydi,

2) tenglamalarda shakllanuvchi koordinata, tezlik va tezlanishga bog'liq bo'lgan funksiyaning ko'rinishi o'zgarmaydi (ya'ni kuch, energiya, harakatlar miqdori va boshqa mexanik miqdorlar), u holda tenglamalar berilgan almashtirishga nisbatan invariantdir. Misol sifatida quyidagi tenglamani ko'rish mumkin:

$$m_1\frac{d^2r_1}{dt^2}=-k(l+r_1-r_2),$$
$$m_2\frac{d^2r_2}{dt^2}=-k(r_2-r_1-l), \qquad (6.3)$$

ushbu tenglama ixtiyoriy (6.2) almashtirishda o'zgarmaydi. Saturn halqalarining tebranishini ifodalovchi:

$$M_2\frac{d^2r}{dt^2}=\gamma M_1M_2\frac{r}{(r^2+R_0^2)^{3/2}}$$

tenglama $t^*=t+a$ vaqt siljishida invariant bo'ladi, biroq $r^*=r+a$ koordinata siljishida o'z shaklini o'zgartiradi, ya'ni tenglamaning o'ng tarafi dastlabki tenglamaga qaraganda koordinata funksiyasi ko'rinishida yoziladi. Mexanika tenglamasining (6.2)almashtirishdagi: 1) yo'qotish xossasi va 2) saqlash xossasi ko'rinishida yozilishi kovariant deb ataladi. (6.1) tenglamaning koordinata bo'yicha ifodalanishidan uning (6.2)almashtirishga nisbatan bevosita kovariantligi kelib chiqadi (dastlabki sanoq tizimining murakkabroq almashtirishlarda, masalan, tsilindrik va sferik koordinatalarga o'tishida, harakat tenglamasining kovariantliligi Nyuton shaklida ma'nosini yo'qotadi).

2. Lagranj shaklidagi harakat tenglamalari.

Lagranj tenglamalari - sanoq tizimining almashtirishning kengroq sinfiga nisbatan kovariant bo'lgan, Nyuton ikkinchi qonunining qulay ko'rinishidir (kovariantlik – (6.2)– almashtirishdagi inersial tizimlar tushuniladi). Bu tenglamalar bir vaqtning o'zida harakatda bo'lgan moddiy nuqtalardan tashkil topgan eng oddiy mexanik tizim masalasida qanday ko'rinishga ega ekanligini ko'rib chiqamiz. Dastlabki koordinatalarning inersial tizimida tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F\left(r,\frac{dr}{dt},t\right). \qquad (6.4)$$

Bizga $r(t) = r(q(t),t)$ - koordinatalar almashtirishi berilgan bo‘lsin, bu yerda $q(t)$ moddiy nuqtaning yangi koordinatasi. Uning tezligi uchun $r(q)$ va $q(t)$ funksiyalarga bog‘liq quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz, ya’ni:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial r}{\partial t}. \qquad (6.5)$$

Bu yerda $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ - nuqtaning yangi koordinatadagi tezligi (bu umumiy hollarda mavjud bo‘lmagan kinematik tezlik bo‘lib, o‘z vaqtida o‘zgarib turuvchi q nuqta koordinatasining xarakteristikasidir).

Haqiqiy tezlik yangi sanoq tizimida, oldingi tezlikdan farqli o‘laroq, (6.5) ga ko‘ra q- koordinata va $\dot{q}$ - tezlikning funksiyasi bo‘ladi, ya’ni $v = v(q,\dot{q},t)$.

Endi (6.5) – ifodani yangi koordinatada, oldindan ekvivalent ko‘rinishida tasvirlab, w- nuqta tezlanishini hisoblaymiz:

$$w = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\partial r/\partial q}\frac{dv}{dt}\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{1}{\partial r/\partial q}\left[\frac{d}{dt}\left(v\frac{\partial r}{\partial q}\right) - v\frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial q}\right].$$

(6.5)ni $\dot{q}$ - tezlik bo‘yicha differensiallab quyidagi ifodani topamiz:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{\partial v}{\partial \dot{q}},$$

(ya’ni kvadrat qavs ichidagi ifodaning birinchi hadini almashtirish uchun). Ikkinchi hadi uchun (6.5) tenglamaga ko‘ra quyidagi zanjirli tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial r(q(t),t)}{\partial q} = \frac{\partial^2 r}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 r}{\partial q \partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial r}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial r}{\partial t}\right] = \frac{\partial v}{\partial q}.$$

Oxirgi ikkita tenglamadan foydalanib, so‘nggi ifodaga kelamiz:

$$w(q,\dot{q},t) = \frac{1}{\partial r/\partial q}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q}\right].$$

So‘nggi natijani (6.4) ifodaga qo‘yib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (mv^2/2)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (mv^2/2)}{\partial q} = F(q,\dot{q},t)\frac{\partial r}{\partial q}. \qquad (6.6)$$

Bu yerda $F(q,\dot{q},t)$ - qiymat (6.4) tenglamaning o‘ng tarafida turgan kuch, ammo bu yerda yangi koordinatada yozilgan ifoda $q,\dot{q},t$ - argumentlarga bog‘liq, umumiy hollarda, esa $r,\dot{r},t$ - argumentlar funksiyasidir. (6.6) – tenglama Lagranj shaklidagi eng oddiy harakat tenglamasi bo‘lib, uning chap tarafidagi differensiallash belgilari nuqtaning kinetik energiyasi hisoblanadi, o‘ng tarafida esa ta’sir etuvchi kuch bilan oldingi va yangi koordinatalar o‘rtasidagi munosabatni ifodalovchi $\frac{\partial r}{\partial q}$ - qiymat ko‘paytmasi turadi.

Uch o‘lchovli nuqta harakatida x, y, z koordinatalar o‘rniga uchta q_1, q_2, q_3 yangi koordinatalarni kiritish zarur. Bunday hollarda (6.6) tenglama uchun bajarilgan fikrlar takrorlanib, v, w, F - sifatida navbatdagi v_x, v_y, v_z; w_x, w_y, w_z; F_x, F_y, F_z - mos proektsiya (aks), tezlik, tezlanish va kuchlar olinadi. Quyidagi - $q_1, \dot{q}_1, t; \; q_2, \dot{q}_2, t; \; q_3, \dot{q}_3, t$ argumentlar funksiyasini ko‘rib chiqamiz va olingan ifodalarni $mdv_x / dt = F_x, \;\; mdv_y / dt = F_y, \;\; mdv_z / dt = F_z$ - koordinatalar bo‘yicha yozilgan Nyuton (6.6) tenglamasiga o‘xshash uchta tenglamaga ega bo‘lamiz. Masalan, ulardan birining ko‘rinishi quyidagicha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial_x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial_y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial_z}{\partial q_1}. \qquad (6.7)$$

Bu yerda $T = m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2$ - nuqtaning kinetik energiyasi. Mazkur misollardan ma’lumki, umumiy N ta xarakteri uchun (prosedura) bajarish tartiblari quyidagicha: har bir nuqta $x_i(t), \; y_i(t), \; z_i(t), \;\; i = \overline{1, N}$ uchtadan koordinatalar orqali aniqlanadi (6.6), (6.7) - tenglamalar uchun bajarilgan usullar qo‘llaniladi, faqat tenglama noixcham bo‘lgani uchun keltirilmaydi. Yangi koordinatalarga o‘tish ixtiyoriy ravishda:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, ..., q_n; t), \\ y_i &= y_i(q_1, ..., q_n; t), \\ z_i &= z_i(q_1, ..., q_n; t) \end{aligned} \qquad (6.8)$$

almashtirishlar orqali beriladi. Bu yerda $i = \overline{1, N}, \;\; n = 3N, \;\; q_j, 1 \le j \le 3N$ - qiymat umumlashgan koordinatalar, deb ataladi. Ularning umumiy soni, oldingi sanoq tizimida albatta, $3N$ ga teng. Umumlashgan q_j koordinatalarga o‘tishda, ixtiyoriy oldingi (eski) koordinata umuman olganda, barcha yangi koordinatalarga bog‘liq (masalan x, y, z-dekart koordinatasidan ρ, φ, ψ - sferik koordinataga o‘tish) bo‘ladi. Shuning uchun (6.8) ifodaning o‘ng taraflari barcha q_j - qiymatlarga bog‘liqligi ko‘rib chiqilgan. Yangi q_j “koordinatalar o‘qi” dagi barcha $\vec{v}_i, \vec{w}_i, \vec{F}_i, \; i = \overline{1, N}$ vektorlar hisoblab chiqilgandan keyin (6.1) tenglamaning qo‘yilishi va j - qiymatni fikrlab i - indeks bo‘yicha yig‘ib chiqib quyidagi Lagranjning umumiy tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j. \qquad j = 1, ..., n. \qquad (6.9)$$

Bu yerda $N=1$ uchun T kinetik energiya tizimi q_j- koordinatalarda ifodalangan:

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i \vec{v}_i\cdot\vec{v}_i}{2}, \qquad i=1,...,N,$$

$$\Phi_j=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i(q,\dot{q},t)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad (6.10)$$

qiymatni q_j koordinatadagi $\vec{F}_i$ kuch “proektsiyasi” ning umumlashgan kuchlari deb tushunish mumkin ($\left|\partial\vec{r}_i/\partial q_j\right|$- funksiya Lame koeffisientlari ($\vec{A}\cdot\vec{B}$ - orqali $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarni skalyar ko‘paytmasi belgilangan). 6.9 tenglamaning ko‘rsatilgan izohida, Nyutonning ikkinchi qonunini q_j o‘qdagi proektsiyasi (aksi) ni tasvirlaydi.

Barcha kuchlar potensial bo‘lganda, ular sezilarli darajada soddalashadi, ya’ni shunday $\Pi(x_1,...,x_N;\ y_1,...,y_N;\ z_1,...,z_N;t)$ funksiya topiladiki, unda quyidagi ko‘rinish hosil bo‘ladi:

$$F_{ix}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_i},\quad F_{iy}=-\frac{\partial\Pi}{\partial y_i},\quad F_{iz}=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_i},\qquad i=1,...,N\ .$$

Bu ifodalarni (6.10) – qiymatga olib qo‘ysak, u holda shunday qiymatga ega bo‘lamiz:

$$\Phi_j=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right).$$

Oxirgi tenglikdagi Π funksiyaning eski argumentlarini yangi argumentga almashtirsak, tenglamaning o‘ng tarafi q_j argumentning “potensial”i deb ataladigan biror $v(q,t)$ funksiyaning xususiy holatini ifodalaydi, ya’ni:

$$\Phi_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Boshqacha aytganda, agar boshlang‘ich kuchlar potensial bo‘lsa, u holda umumlashgan kuch ham potensial bo‘lib (6.9), tenglama quyidagi ko‘rinishni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \qquad j=1,...,n, \qquad (6.11)$$

$$L=T-V \qquad (6.12)$$

hosil qiladi.

Olingan (6.11), (6.12) tenglamalarda shuni hisobga olish kerakki, $v(q,t)$ funksiya $\dot{q}_j$ ga bog‘liq emas, shuning uchun $\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}$ bo‘ladi. (6.11) – Lagranj tenglamasidagi L- qiymat yangi koordinatalarda ifodalangan kinetik va potensial energiyalar tizimining ayirmasini bildiradi. Bunday qiymatni Lagranj funksiyasi, lagranjian yoki tizimning kinetik potensiali deb ataladi.

Nyuton tenglamasidan hosil qilingan (6.9), (6.11) tenglamalar dastlabki sanoq tizimining ixtiyoriy (6.8) almashtirishga nisbatan kelib chiqishiga qarab kovariant bo‘ladi, unga (kiradigan) tegishli funksiyalar aniq mexanik ma’noga ega. Ularni aniq bir tizimga tatbiq etish uchun quyidagi amallarni bajarish zarur:

– $q_1, q_2, ..., q_n$ - erkin koordinatalarni tanlab olish kerak;
– yangi koordinatani funksiyasi bo‘lgan (6.10) umumlashgan kuchni topish kerak (agar kuch potensial bo‘lsa, u holda topish shart emas);
– yangi koordinatalarda T - kinetik va Π - potensial energiyalarni ifodalab, (6.12) – lagranjianni topish kerak (potensial kuchlar bo‘lgan holda).

Topilgan ifodani (6.9) va (6.11) tenglamalarga olib borib qo‘yish kerak.

Bunday standart (prosedura) amalda Lagranj rasmiyligi (Lagranj formalizmi) deb ataladi. Uni amalga oshirib bo‘lgach, tizim $q_1, q_2, ..., q_n$ koordinatalar uchun $3N$ ikkinchi tartibli differensial tenglama hosil bo‘ladi, har doim ikkinchi tartibli hosilasi

$$\ddot{q}_j = G_j(q, \dot{q}, t), \quad j = 1, 2, ..., n \qquad (6.13)$$

$\ddot{q}_j$ ga nisbatan yechimga ega.

Agar boshlang‘ich $q_j(0), \dot{q}_j(0), \quad j = \overline{1, n}$ qiymatlar ma’lum bo‘lsa, u holda (6.13) tenglama ixtiyoriy $t > 0$ vaqtda tizim harakatini ifodalab beradi, ya’ni mexanikaning asosiy masalasini yechish imkonini beradi. Lagranj usulining afzallik tomoni ko‘pgina murakkab mexanik qurilmalar (masalan, robotlashtirilgan texnik tizimlar) harakatini, ixtiyoriy sanoq tizimlarini oddiy matematik usullarda ifodalashda o‘xshashliligidadir (kovariant). Shuni aytish kerakki (6.1) tenglama, (6.8) almashtirishga nisbatan kovariant, ya’ni o‘xshash ifodalangan. Biroq ular yuqori tartibda hosilalarga nisbatan o‘rinli emas va oddiy mexanik ma’noga ega bo‘lmagan, ko‘proq yangi koordinatalarning funksiyalarini ((6.9) tenglama bilan taqqoslaganda) o‘z ichiga oladi. Yana uning bir rasmiy ko‘rinishdagi afzallik tomoni - mexanik bog‘lanish tizimlarini o‘rganishda qo‘l keladi (barcha yuqoridagi mulohazalarni soddalashtirish uchun keng tizimlar qaralgan). Bog‘lanishlar (munosabatlar) bevosita o‘ziga aloqador bo‘lmagan, mavjud ma’lumotlar ob’ektlarini, aniq chegeralangan nuqtalar tizimining harakatlariga ustma-ust qo‘yadi. Misol sifatida, qattiq sirtda harakati chegaralangan sharcha (soqqa)ni yoki ikki nuqtali og‘irlikni bog‘lovchi, juda engil qattiq sterjenni va shu kabilarni olish mumkin.

Bog‘lanishlar (6.1) Nyuton tenglamasining yechimini qanoatlantiruvchi $f_k(\vec{r}_i,\vec{r},t)=0,\ \ 0\le k\le K\le 3N$ - ko‘rinishdagi K - munosabatlar to‘plamidan iborat. Bunday hollarda (6.1) Nyuton tenglamasining o‘ng tarafidagi $\vec{F}_i$ - qiymat o‘rniga $\vec{F}_i+\vec{R}_i$ - qiymatni qo‘yib (bog‘lanishning xarakteri haqida ba’zi bir taxminlarda) ko‘rinishi o‘zgartiriladi. $\vec{R}_i$ - kuch bog‘lanish reaksiyasi (aks ta’siri) ning ba’zi mulohazalaridan hisoblab chiqiladi. Shuning uchun erkin tizimga nisbatan, erkin bo‘lmagan tizimni Nyuton usuli yordamida ifodalashda sezilarli darajada qiyinlashishi mumkin.

Lagranj usulida esa, bog‘lanish reaksiyasi $f_k(\vec{r}_i,\vec{r},t)$ - funksiyaning juda keng sinfi uchun avtomatik ravishda hisobga olinadi, natijada (6.10) kuch $\vec{R}_i$ - qiymatni o‘z ichiga olmaydi (Lagranj tenglamasini erkin tizimlarda olinish tartibi to‘la o‘xshash). Ko‘pincha Lagranj tenglamasining soni $l=3N-K$ - erkinlik darajasining miqdoriga teng, balki bog‘lanishsiz tizimlar uchun kamroq ahamiyatga ega bo‘lishi mumkin. Yangi erkin q_j - koordinatalar soni ham tabiiy $3N-K$ ga teng.

Demak, Lagranj tenglamasi Nyuton tenglamasidan kelib chiqadi va aksincha (2-mashq). Shunday ekan, lagranjga yondashish xuddi Nyutonga yondashishdir, balki bu mexanik asoslardagi taxmindir.

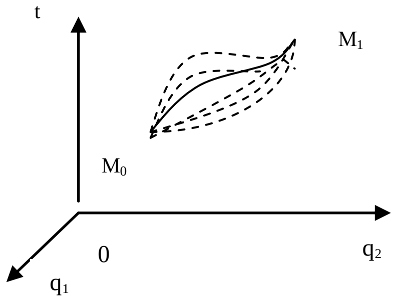
3. **Gamiltonning variatsion tamoyili**. Mexanikaning asosiy negizi sifatida berilgan t- vaqtda mexanik parametrlarni bog‘lovchi nafaqat (6.1), (6.9) yoki (6.11) differensial tenglamalar (ko‘riladi), balki ixtiyoriy t_0 dan t_1 gacha vaqt oralig‘ida mexanik tizim harakatini tasvirlovchi ba’zi bir umumiy xossalar ko‘riladi. Quyidagi qiymatni tahlil qilib, bunga amin bo‘lamiz, ya’ni:

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt \qquad (6.14)$$

qiymat $[t_0,t_1]$ kesmadagi Gamilton bo‘yicha ta’sir deb ataladi. Ma’lumki, (6.14) qiymat $t_0\le t\le t_1$ vaqt bo‘yicha harakatlanayotgan tizimga bog‘liq funksionaldan iborat.

$(n+1)$- o‘lchovli q,t- fazoda ikkita $M_0(q(t_0),t_0)$ va $M_1(q(t_1),t_1)$ nuqtalarni olamiz va ularni, tizim holatini $[t_0,t_1]$ vaqtlarda fiksirlab qo‘yamiz ($\dot{q}$ tezlik t_0,t_1- vaqtlarda fiksirlanmaydi). Tizim ixtiyoriy mumkin bo‘lgan trayektoriya bo‘ylab, umuman aytganda q,t

fazo bo‘yicha harakatlanib M_0 nuqtadan M_1 nuqtaga tushib qolishi mumkin, ya’ni trayektoriya bo‘ylab mavjud bog‘lanishlar o‘tkazamiz (quyidagi tasvirda q_1, q_2, t fazo uchun keltirilgan).



Faraz qilaylik, M_0 dan M_1 gacha trayektoriyalar orasida yaxlit yo‘l mavjud bo‘lsin. Unda $q_j(t), \quad j=\overline{1,n}$ funksiya ixtiyoriy vaqtda (6.11) Lagranj tenglamasiga bo‘ysunsin. Qolgan yo‘llar chet yo‘llar (siniq chiziqlar), deb ataladi.

Gamilton tamoyili quyidagicha ifodalanadi:
Q- Gamilton ta’siri yaxlit yo‘lda chet yo‘llarga nisbatan ekstremal bo‘ladi.

Quyidagi barcha mumkin bo‘lgan yo‘lning bir parametrli funksiyalar oilasini ifodalaymiz:
$q_j = q_j(t,\alpha), \quad t_0 \le t \le t_1, \quad |\alpha| \le \beta < \infty, \quad j = 1,...,n$, bu yerda $\alpha = 0$ yaxlit yo‘lni bildirsa, $\alpha \ne 0$ qiymat esa chet yo‘lni bildiradi. Unda (6.14) ta’sir, ko‘rinib turibdiki, α - parametrning funksiyasi bo‘ladi, ya’ni:

$$Q(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L\left[q_j(t,\alpha), \dot{q}_j(t,\alpha), t\right] dt .$$

Q - variatsiya α - parametrni variatsiyalash natijasida quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\delta Q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt, \qquad (6.15)$$

ya’ni yig‘indi variatsiyalangan koordinatalar $\delta q_j(t,\alpha)$ va $\delta \dot{q}_j(t,\alpha)$ tezlikka teng.

(6.15) ifodaning ikkinchi hadini bo‘laklab integrallab quyidagicha

$$\delta Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta(\dot{q}_j) \Bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt$$

ifodaga ega bo‘lamiz yoki α bo‘yicha o‘rin almashtirish operatsiyasini va t- bo‘yicha differensiallashni

$$\delta(\dot{q}_j)=\delta\left[\frac{d\dot{q}_j(t,\alpha)}{dt}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}q_j(t,\alpha)\delta\alpha=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}q_j(t,\alpha)\delta\alpha\right]=\frac{d}{dt}\delta q_j$$

qo‘llab quyidagi ifodaga kelamiz:

$$\delta Q=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j dt\,. \qquad (6.16)$$

$\delta q_j(\alpha)$ - variatsiyaning qurilishiga ko‘ra t_0,t_1 vaqtda nolga, ya’ni (6.16) ning o‘ng tarafi birinchi hadi nolga teng. Yaxlit yo‘l uchun (6.11) Lagranj tenglamasi o‘rinli, shuning uchun ikkinchi hadi ham nolga teng bo‘ladi.

Natijada yaxlit yo‘lda (to‘g‘ri yo‘l) $\delta Q=0$. Bu Gamilton tamoyilining matematik ifodasidan iborat. U eng kichik ta’sir tamoyili deb ham ataladi.

Umumiyroq bo‘lgan mexanik tizimlar uchun ((6.11) tenglamaga bo‘ysunmaydigan) yaqin tasdiqlari Gamilton – Ostrogradskiy tamoyillari deb ataladi.

Shuni eslatib o‘tish kerakki, variatsion masala:

$$\delta Q=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt=0$$

uchun (6.11) tenglamaning variatsion hisobiga Eylerning differensial tenglamasi to‘g‘ri (yaxlit) yo‘lga – ekstremal, uni qanoatlantiruvchi $Q(\alpha=0)$- songa Q- funksionalning (statsionar) barqaror qiymati deb ataladi.

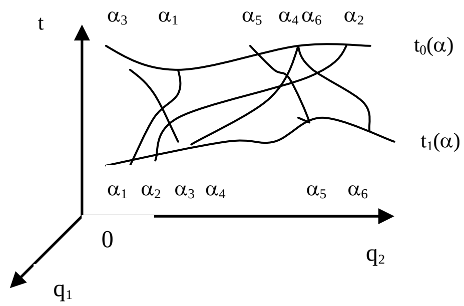
Gamilton teskari tamoyilining tasdig‘iga ishonish mumkin: agar biror yo‘l uchun $\delta Q=0$ xossa bajarilsa, u holda yo‘l to‘g‘ri (3-mashq) bo‘ladi. Shuning uchun yuqorida qaralgan barcha uchta yondashuv teng huquqli va mexanik tizimning asosiy matematik tasnifi bo‘lishi mumkin.

4. Saqlanish qonunlari va vaqt fazosining xossasi.

Integrallangan mexanik harakteristikalarning tahlili Gamilton tamoyili va uning har xil umumlashmasini ifodalay olmaydi. U mexanik tizimlarning boshqa fundamental (asosiy) xossalarini o‘rnatish imkonini beradi. Potensial maydonda, nuqtalar tizimiga ta’sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar harakatining potensial holatlari uchun, bu xossalardan birortasini keltiramiz. Buning uchun $(n+1)$ - o‘lchovli $q_1,q_2,...,q_n,t$ fazoda yaxlit va chet (siniq) yo‘llar majmuasiga nisbatan Q variatsion ta’sirni yanada umumlashgan holda hisoblashga to‘g‘ri keladi. Buni bir parametrik funksiyalar oilasida ko‘rib chiqamiz:

$$q_1=q_1(t,\alpha),...,q_n=q_n(t,\alpha)\,, \qquad (6.17)$$

bu yerda α - (6.1 rasm) egri chiziqni bir qiymatli ifodalovchi parametr, xususan q,t - fazodagi egri chiziqning quyi va yuqoridagi chetki qismlari. Quyidagi (6.17) – egri chiziqlar dastasiga birorta chegara qo‘yilmaydi, shuning uchun egri chiziqlar har xil $t_0(\alpha)$ va $t_1(\alpha)$ - vaqtlarda “boshlanishi” va “tugashi”, shuningdek boshlang‘ich va oxirgi daqiqalarda o‘zaro kesishishi mumkin va h.k.



6.1 rasm

$$\delta Q = \delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(q,\dot{q},t)dt$$

variatsion ta’sir (6.17) – egri chiziqlar dastasida joylashgan. Bu yerda ham (6.16) tenglikni hosil qilish uchun qo‘llanilgan usullar to‘la o‘xshash, faqat mos hisob-kitoblar ancha murakkabroq, shuningdek ergi chiziqlar oilasining q,t - fazodagi boshlang‘ich va oxirgi holatlari α - parametrga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun so‘nggi olingan natijani keltiramiz: δQ - variatsion ta’sir (6.17) bir parametrli dasta bo‘lgan holdagi umumiy formulasi quyidagicha:

$$\delta Q = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \delta q_j - H\delta t \right) \Bigg|_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} - \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt \,. \qquad (6.18)$$

Bu yerda p_j va H funksiyalar ma’nosi quyida izohlab beriladi.

Ma’lumki, egri chiziqli dastalarning boshlang‘ich va oxirgi nuqtalari ustma-ust tushsa, u holda $\delta q_j = \delta t = 0$ bo‘ladi va (6.18) – variatsion ta’sirdan (6.16) – variatsion ta’sir yoki Gamilton tamoyili kelib chiqadi.

p_j va H funksiyalar mos ravishda umumlashgan va gamiltonian tizimlari deb ataladi. p_j - qiymat $\dot{q}_j$ - tezlik bo‘yicha lagranjlanning xususiy hosilasi sifatida keltiriladi, ya’ni

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(q,\dot{q},t), \qquad j = \overline{1,n} \qquad (6.19)$$

va oddiy xollarda nuqta harakatlari dekart koordinatalardagi standart potensial maydonda (Π - funksiya vaqtga bog‘liq emas) x,y,z o‘qlardagi harakat miqdorining aksi (proektsiya) bilan ustma-ust tushadi. Bu yerda (6.19) lagranjianning umumiy hal qilinmagan xossalari hal qilinishi mumkin, ya'ni: $q, \dot{q}, t$ - Lagranj o'zgaruvchilaridan q, p, t gamilton o'zgaruvchilariga o'tkazadigan o'zaro bir qiymatli o'tish mavjud. H – funksiya quyidagi tenglik yordamida aniqlanadi:

$$H(q, p, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L, \tag{6.20}$$

bu yerda L - lagranjian va umumlashgan tezlik q, p, t o'zgaruvchilar lokal ifodalangan. Gamiltonian potensial harakatni o'rganishda rol o'ynaydi, xususan (6.11) Lagranj tenglamasidan Gamilton ko'rinishidagi harakat tenglamasi (kanonik tenglama) olinadi:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = \overline{1,n} \tag{6.21}$$

va aksincha (4-mashq). H – funksiya aniq quyidagi mexanik ma'noga ega: agar (6.8) dastlabki tizim statsionar bo'lsa (t-bog'liq emas), u holda gamiltonian ixtiyoriy vaqtda to'la energiya tizimiga teng hisoblanadi:

$$H = T + \Pi = E$$

Bunday yondashuvdan keyin mexanikada fazoning xossalari va vaqtlari bilan birga saqlanish qonunlari aloqasini o'rnatamiz. Bir parametrlik q,t - sanoq tizimining almashishini qaraymiz:

$$q_j^* = \varphi_j(q,t,\alpha), \quad j = \overline{1,n}, \quad t^* = \psi(q,t,\alpha). \tag{6.22}$$

$\alpha = 0$ da u o'zaro teng va buning uchun teskari almashtirish mavjud.

Masalan, (6.22) almashtirishga nisbatan invariant bo'lgan, mexanik tizimda berilgan, potensial maydonda harakatlanuvchi lagranjian berilgan bo'lsin. Ya'ni, yangi $L^*(q^*, \dot{q}^*, t^*)$ - lagranjian α - parametrga bog'liq bo'lmagan va $q^*, \dot{q}^*, t^*$ - o'zgaruvchilar funksiyasi o'sha ko'rinishga ega va dastlabki lagranjian q, q^*, t - o'zgaruvchilarning funksiyasidir. U holda shunday p,q,t - o'zgaruvchilar funksiyasi:

$$\phi(q, p, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - H \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \tag{6.23}$$

topiladiki, aniq vaqt mobaynida to'g'ri (yaxlit) yo'lda o'z qiymatini o'zgartirmaydi (birinchi integral harakat). (6.23) tenglamadagi p_j, H - funksiyalar mos ravishda p,q,t - o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan (6.19) ning umumlashgan funksiyasi va (6.20) gamiltoniani.

Ta'riflangan (ifodalangan) tasdiq (Nyoter teoremasi)ning isbotlash sxemasi shunday ko'rinishga ega. q,t - fazoda $q(t)$ egri chiziq tanlab olinadi, unga ko'ra $\delta Q = 0$, ya'ni $[t_0, t_1]$ kesmadagi biror yaxlit yo'lni qisman ifodalaydi. (6.22) – sanoq tizimiga mos holda, bu egri chiziq

q^*, t^* - fazoda $q^*(t^*, \alpha)$ - egri chiziqlar oilasini hosil qiladi. Lagranjianning invariantligidan α- parametrning barcha qiymatlarida harakatlar variatsiyasi nolga teng yoki (6.18) – formulaga ko‘ra q^*, t^* - fazoga qo‘llanilib quyidagini hosil qilamiz:

$$\delta Q = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^* \delta q_j^* - H^* \delta t^* \right) \Bigg|_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)} - \int\limits_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt^*} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^*} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j^*} \right) \delta q_j^* dt = 0 \,. \qquad (6.24)$$

Agar (6.24) da $\alpha = 0$ deb faraz qilsak, ya’ni aynan teng almashtirish olinsa, u holda integral ostidagi ifoda nolga teng bo‘lib, q, t - koordinatalarda $q(t)$ egri chiziq to‘g‘ri (yaxlit) yo‘l va $L = L^*$ uchun (6.11) Lagranj tenglamasini qanoatlantiradi. Demak quyidagi ifoda bajarilishi lozim:

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{n} (p_j^* \delta q_j^* - H^* \delta t^*) \right) \Bigg|_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)} \right]_{\alpha=0} = 0 \,.$$

Bu yerda (6.22) – almashtirish xossalariga ko‘ra δq_j^* va δt^* - qiymatlarni oson hisoblash mumkin va α - parametr nolga intilganda (6.23) ifodani hosil qilamiz. Yo‘l qanchalik to‘g‘ri (yaxlit) va t_0, t_1 - nuqtalar ixtiyoriy tanlab olinsa, u holda teorema ixtiyoriy to‘g‘ri yo‘l tizimi (barcha aniq harakatlar) uchun shuncha o‘rinlidir.

Nyoter teoremasidan xulosa qilib aytish mumkinki, tizimlar uchun to‘la mexanik energiyaning saqlanish qonuni, lagranjian (shuningdek gamiltonian) aniq vaqtga bog‘liq emas yoki konservativ tizimlar uchun xaqiqatdan (6.22) – formula sifatida quyidagi $q_j^* = q_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad t^* = t + \alpha$, vaqt siljishini olsak, lagranjianni invariantligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin va (6.23) dan $-\phi = H = T + \Pi = const$ ni hosil qilamiz.

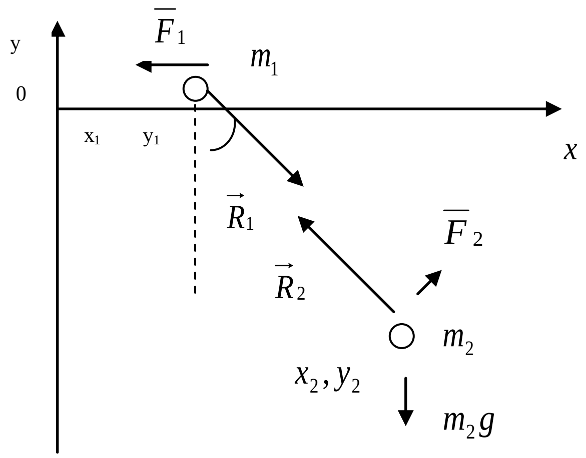
Yopiq tizimlar uchun (tashqi kuch harakati kuzatilmaydi) harakat miqdorining saqlanish qonuni va mexanikaning boshqa qonunlari shunga o‘xshash quriladi. (5-mashq). Nafaqat bitta to‘g‘ri yo‘lda, balki ajratilgan to‘g‘ri yo‘llar to‘plamida ko‘rilgan harakat mexanik tizimning umumiyroq birinchi integrallari – integrallangan invariantlar bo‘ladi. Bulardan birortasi asosiy mexanikada Gamilton tamoyiliga tushishi mumkin. Harakat tenglamalari, saqlanish qonunlari, variatsion tamoyillar va simmetriklik xossalari o‘rtasidagi chuqur aloqa ekvivalent tarzda mexanik tizimlarning matematik modelini qurish uchun har xil usul (yondashish)lardan foydalanish imkonini beradi. Ma’lumki, ob’ektlarning invariant xossalari ko‘pgina hodisalarning modelini nafaqat qurish uchun, balki tahlil qilish uchun ham samarali qo‘llaniladi.

6.2. Ba'zi mexanik tizimlar modellari

Lagranj tenglamasi va Gamilton tamoyilini, har-xil turdagi mayatnik harakatini, simning kichik tebranishini, shuningdek konturdagi elektr tokini tebranishini, elektromaxanik o'xshashlikni nima uchun foydalayotganimizni oydinlashtirish uchun qo'llaymiz. O'rganilayotgan jarayonlarning ba'zi bir xossalarini muhokama qilamiz.

1. Erkin vazndagi mayatnik. Tizim uzunligi l ga teng bo'lgan, vaznsiz qattiq sterjenning bog'langan m_1 va m_2 og'irlikdagi ikki nuqtasidan iborat (6.2-rasm). Harakat og'irlik kuchi va yassi maydonda yuz beradi, ya'ni harakat x, y, t - sanoq tizimida qaraladi. m_1 - og'irlikdagi nuqta mahkamlanmagan, balki x o'qi bo'ylab siljitilgan.

Dastlabki sanoq tizimida yassi harakatlanayotgan ikkita nuqtani ifodalash uchun, 6.1 bo'limda to'rtta $x_1(t),\ y_1(t),\ x_2(t),\ y_2(t)$ vaqt funksiyalarini, ya'ni dekart koordinatadagi birinchi va ikkinchi nuqtalarni topish kerak. Biroq, o'rganilayotgan tizim ikkita mexanik bog'lamni qanchalik o'z ichiga olmasin, erkin bo'la olmaydi. (6.1 bo'limga qarang).



6.2-rasm.

Ulardan biri $y_1 \equiv 0$ tenglamani ifodalaydi (vazn vertikal siljimaydi), ikkinchi tenglama $(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 = l^2$ dan iborat (nuqtalar orasidagi masofa ixtiyoriy t vaqtda sterjenning uzunligiga teng). Shuning uchun Lagranj tenglamasiga o'tishda ikkita yangi erkin koordinatalarni tanlab olish yetadi. Umumlashgan koordinatalar sifatida $q_1(t) = x_1(t)$ va $q_2(t) = \alpha(t)$ qiymatlarni olamiz, bunda α tik va sterjen o'qlari orasidagi burchak. Bunday tanlash quyidagi ko'rinishdagi 6.1 bo'limdagi (6.8) almashtirish bilan (ustma-ust) mos tushadi:

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_1 + l\sin q_2, \quad y_2 = -l\cos q_2$$

Avval q_1, q_2 koordinatalarda $T = T_1 + T_2$ tizimning kinetik energiyasini ifodalaymiz. Vazn uchun quyidagi ifodani:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2},$$

mayatnik uchun $T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2)$ni olamiz. Quyidagi $v_{2x} = \dot{x}_1 + l\dot{\alpha}\cos\alpha,\ v_{2y} = l\dot{\alpha}\sin\alpha$ tenglamalar orqali T_2 qiymatni x_1, α funksiyasi sifatida ifodalaymiz:

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2}{2}(2l\dot{\alpha}\dot{x}_1 \cos\alpha + l^2\dot{\alpha}^2),$$

bu yerda, v_{2x}, v_{2y} tenglamalardan birini x- o‘qi bo‘ylab harakatlanayotgan m_2 - og‘irlik tushuniladi.

Endi m_1, m_2 nuqtalarga ta’sir etuvchi kuchni ko‘rib chiqamiz. Og‘irlik kuchi va $\vec{R}_1$ sterjenning aks ta’siri R_{1y} tik aksi vaznga yondashtirilgan, tayanch aks ta’siri muvozanati keltirilgan, shuning uchun ham teng ta’sir etuvchi kuch nolga teng. F_{1x} - kuch R_{1x} - sterjen aks ta’sirining tik aksini ifodalaydi. Lagranj usulini qo‘llashda $\vec{R}_1$ va $\vec{R}_2$ kuchlarga zarurat tug‘ilmaydi. Shuning uchun barcha e’tiborni $\vec{F}_2$ mayatnikka ta’sir etuvchi og‘irlik kuchiga qaratish kerak. Uning aksi uchun quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$F_{2x} = 0, \quad F_{2y} = -m_2 g = -m_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_2},$$

bu yerda $\Pi(y_2) = m_2 g y_2$ - mayatnikning potensial energiyasi quyidagi $q_1, q_2,\ \Pi(y_2)$ - koordinatalarda:

$$V(q_2) = -m_2 \lg\cos\alpha$$

tenglikni ifodalaymiz.

Shunday qilib, o‘rganilayotgan harakat potensial bo‘lsa, u holda 6.1 bo‘limdagi (6.11) Lagranj tenglamasidan foydalanamiz. Bu yerda $j = 1{,}2,\ i = 1{,}2$ va $L = T - V = T_1 + T_2 - V$, yoki yoyilgan ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2}(l\dot{\alpha}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\alpha}\cos\alpha) + m_2 \lg\cos\alpha. \qquad (6.25)$$

(6.25)ifodani $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$ bo‘yicha differensiallab (eslatib o‘tamiz $q_1 = x_1,\ q_2 = \alpha$ teng),

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\alpha}\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l\sin\alpha(\dot{x}_1\dot{\alpha} + g), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l(l\dot{\alpha} + \dot{x}_1\cos\alpha)$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifodalarni Lagranj tenglamasiga olib boriladi, t- bo‘yicha differensiallanadi va x_1, α- nisbatan ikkita tenglamaga keltiramiz:

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \cos\alpha \cdot \ddot{\alpha} = m_2 l \sin\alpha \cdot \dot{\alpha}^2, \\ &\cos\alpha\, \ddot{x}_1 + l\ddot{\alpha} = -g \sin\alpha, \end{aligned} \qquad (6.26)$$

bu o‘rganilayotgan tizimning modelini ifodalaydi. Lagranjning umumiy xossalariga mos keluvchi (6.26) tenglama $\ddot{x}_1, \ddot{\alpha}$ ga nisbatan yechiladigan va boshlang‘ich umumlashgan koordinatalarning ma’lum qiymatlarida hamda umumlashgan tezliklarda koordinatalarni va ixtiyoriy vaqtda nuqtalarning tezligini topish imkonini beradi.

To‘rtinchi tartibli (6.26), chiziqli bo‘lmagan tizimni ikkinchi tartibli tenglamaga oson keltirish mumkin. Masalan (6.26) dan $\ddot{x}_1$ qiymatni chiqarib tashlab, quyidagi ko‘rinishni hosil qilamiz:

$$l(m_1 + m_2 \sin^2\alpha)\ddot{\alpha} = -\sin\alpha\left[m_2 l \cos\alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (m_1 + m_2)g\right]. \qquad (6.27)$$

Bu ikkita bir parametrli almashtirishlar oilasiga nisbatan invariant bo‘lgan (6.25) Lagranjian natijasidir. Bulardan birinchisi $x_1^* = x_1 + \beta$- ifodani beradi (x_1- koordinata surilganda L- o‘zgarmaydi). Ikkinchisi esa $\alpha^* = \alpha + msign\beta 2\pi$ bo‘lib, bu yerda $m = 1,2,...,\beta$- almashtirish parametri (koordinatalar tizimi 2π burchakga karrali buralganda L- o‘zgarmaydi). Nyoter teoremasiga ko‘ra, koordinata tizimi (6.27) formula orqali aniqlanadigan ikkita birinchi integralga ega. Shuning uchun uning tartibi ikkita birlikka pasayishi mumkin. Yana bir integral tizim ma’lumki: (6.25) lagranjian aniq vaqtga bog‘liq emas (konservativlik) va uning to‘liq energiyasi $H = T + V$ saqlanadi. Bu xossa (6.26) tizimning tartibini yana bir birlikka pasaytirish imkonini beradi va (6.27) tenglama esa birinchi tartibli tenglamaga pasayadi (1-mashq).

Berilgan masala, mexanik tizimlarning harakatlariga nisbatan, lagranj va Nyuton usullari orasidagi farqni yaxshi tasvirlab beradi. Vazn va mayatnik uchun Nyuton tenglamasining koordinatali shakli quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 = R_1(x_2 - x_1)/l, \\ &m_2\ddot{x}_2 = R_1(x_2 - x_1)/l, \\ &m_2\ddot{y}_2 = -R_2 y_2 / l - m_2 g, \end{aligned} \qquad (6.28)$$

Bu yerda, $R_1 = R_2 = R - m_1$ va m_2 - og‘irlikka tatbiq etilgan sterjen aks ta’siri vektorining moduli (6.2-rasm), ma’lumki $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$. Aks ta’sir tarang tortilgan sterjenda hosil bo‘lib, g‘oyaning qo‘yilishiga ko‘ra, absolyut qattiq sanaladi va uning deformatsiyasi inobatga olinmaydi.

Uchta (6.28) tenglama to‘rtta - x_1, x_2, y_2, R noma’lum qiymatlardan iborat. (6.28) tizimni aralashtirmasdan $(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = l^2$ tenglamadan foydalanib, birorta ikkinchi tartibli chiziqli bo‘lmagan tenglamaga kelishimiz mumkin (2-mashq). Biroq murakkabroq tizimlarda bu ixchamlab bo‘lmaydigan tartibli dalilni amalga oshirib bo‘lmaydi. Lagranj tenglamasini tuzishda bu talab qilinmaydi (lagranj formalizmini ishlab chiqishda boshlang‘ich sababalar xizmat qiladi).

Bundan tashqari lagranjianning invariant xossasi harakatning birinchi integrali mavjudligini aniq ifodalab, tadqiqotni soddalashtiradi. (6.27) tenglamadan hosil bo‘lgan birinchi tartibli tenglamani $\alpha,\ d\alpha/dt$ funksiyalar tengligida (fazoviy tekislik) nisbatan o‘rganish va boshlang‘ich ma’lumotlarga bog‘liq bo‘lgan harakatning barcha xarakteristikalarini aniqlash qiyin emas. $\alpha << 1$ bo‘lganda tizimning kichik tebranishi bilan cheklanamiz. (6.27) tenglamadan yuqoriroq tartibdagi kichik hadlarni olib tashlab, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{gm_1 + m_2}{m_1}\alpha .$$

Bu tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

$$\alpha(t) = A\sin wt + B\cos wt ,$$

bu yerda, A va V o‘zgarmas sonlar boshlang‘ich ma’lumot yordamida aniqlanadi, tebranish chastotasi esa quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} .$$

Buni qattiq mahkamlangan mayatnik $w_0 = \sqrt{g/l}$ bilan taqqoslaydigan bo‘lsak, m_1, m_2- qiymatga qarab chastota kattalashib boradi, m_2/m_1- munosabat qancha katta bo‘lsa, chastota shuncha katta bo‘ladi, bu mahkamlangan nuqtaning erkin harakatiga bog‘liq.

Bundan yana bir farqni izohlab, quyidagi xulosaga kelamiz. Mayatnikning boshlang‘ich $t = 0$ vaqtdagi og‘ishi $\alpha(0) > 0$ dan iborat va uning vazn tezligi nolga teng bo‘lsin, ya’ni tizimning energiyasi mayatnikning potensial energiyasida jamlangan. Quyi nuqtasiga o‘tishda u tubdan kinetik energiyaga almashadi. Bunday holda mayatnikning tezligi $V_{2x} = \dot{x}_1 + l\alpha$ ga teng. Uni hisoblashda berilgan $\alpha(t) = \alpha(0)\cos wt$ va $\ddot{x}_1 = -l\ddot{\alpha} - g\alpha$ hollarni hisobga olamiz (oxirgi tenglik (6.26) tizimdan kelib chiqadi). Shunday qilib:

$$\dot{x}_1 = -l\dot{\alpha} - \int_0^t g\alpha(t)dt$$

yoki

$$v_{2x} = -g\int_0^t \alpha(0)\cos wt\,dt.$$

Bizni qiziqtiradigan $t = \pi/(2w)$ vaqtda, u quyidagidan iborat:

$$v_{2x}(\alpha = 0) = -g\alpha(0)\int_0^{\pi/(2w)} \cos wt\,dt = -\frac{g\alpha(0)}{w}.$$

Bu qiymat qattiq vazn ostidagi mayatnikning maksimal tezligidan w/w_0 - marta kichik, g'amlangan boshlang'ich energiya qisman vaznning kinetik energiyasiga o'tadi.

Agar $m_1 - \infty$ intilsa, u holda tabiiyki, tizimning (chekli) so'nggi tebranishi qattiq mahkamlangan mayatnik harakati bilan ustma-ust tushadi.

2. Potensial bo'lmagan tebranish. Endi mayatnik va vaznning ishqalanish kuchlari ta'sirini hisobga olamiz, ularni tezlikka proportsional deb hisoblaymiz va quyidagini ifodalaymiz:

$$\vec{F}_1 = -\mu_1\vec{v}_1, \quad \vec{F}_2 = -\mu_2\vec{v}_2, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0.$$

Agar ishqalanish kuchi tezlikka bog'liq bo'lsa, u holda harakat potensial bo'lib, bunday hollarda 6.1 bo'limdagi (6.9) Lagranj tenglamasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Quyidagi $q_1 = x_1, q_2 = \alpha$ ni tanlab olib, umumiy 6.1 bo'limdagi (6.10) formula yordamida

$$\Phi_1 = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial q_1} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} + F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial q_1},$$

$$\Phi_2 = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial q_2} + F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial q_2} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} + F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial q_2}$$

hosil qilamiz. Bu yerda F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y} - m_1, m_2 (6.2-rasm) og'irliklarga qo'llanilgan teng ta'sir etuvchi komponentalar. Quyidagi $F_{1y} = 0$ va $\frac{\partial x_1}{\partial q_1} = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 1,\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} = \frac{\partial x_1}{\partial q_2} = 0$, tengliklarni e'tiborga olib, yuqoridagi Φ_1 va Φ_2 ifodalarni soddalashtiramiz:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= F_{1x} + F_{2x}, \\ \Phi_2 &= F_{2x} l\cos q_2 + F_{2y} l\sin q_2. \end{aligned} \tag{6.29}$$

$q_1 = x_1, q_2 = \alpha$ - koordinatalarda ta'sir etuvchi kuchlarning komponentalarini ifodalaymiz:

$$\psi_{1x} = F_{1x} + R_{1x} = -\mu_1 v_{1x} + R_{1x} = -\mu_1\dot{x}_1 + R\sin\alpha,$$

$$\psi_{2x} = F_{2x} + R_{2x} = -\mu_2 v_{2x} + R_{2x} = -\mu_2(\dot{x}_1 + l\dot{\alpha}\cos\alpha) - R\sin\alpha,$$

$$\psi_{2y} = F_{2y} + R_{2y} - mg = -\mu_2 v_{2y} + R_{2y} - m_2 g = -\mu_2 l\dot{\alpha}\sin\alpha + R\cos\alpha - m_2 g,$$

bu yerda R - sterjenlarning aks ta'sir kuchi. Yuqoridagi ifodalarni (6.5) ga qo'yib

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1 = -(\mu_1 + \mu_2)\dot{x}_1 - \mu_2 l\dot{\alpha}\cos\alpha, \\
&\Phi_2 = \mu_2 l\dot{x}_1\cos\alpha - \mu_2 l^2\dot{\alpha} - m_2 gl\sin\alpha
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

hosil qilamiz.

Lagranj formalizmining umumiy xossalariga mos ravishda bog‘lanishning aks ta’siri. (6.30) dan ma’lumki Φ_1, Φ_2 ning so‘nggi ifodasiga kirmaydi. T- tizimning kinetik energiyasi 6.1 p. da quyidagicha topilgan:

$$
T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2}(l\dot{\alpha}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\alpha}\cos\alpha).
$$

$dT/dq_{1,2}$, $dT/d\dot{q}_{1,2}$ xossalarni hisoblab t- bo‘yicha differensiallasak, Lagranj tenglamasiga kelamiz:

$$
\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\cos\alpha\cdot\ddot{\alpha} = m_2 l\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2 + \Phi_1, \\
&m_2 l\cos\alpha\cdot\ddot{x}_1 + m_2 l^2\ddot{\alpha} = \Phi_2.
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

Ushbu bu (6.31) tenglama yuqori tartibli hosilalarga nisbatan yechiladigan va undan $x_1(0), \dot{x}_1(0), \alpha(0), \dot{\alpha}(0)$- boshlang‘ich qiymatlarda va ixtiyoriy vaqtda m_1 va m_2 og‘irlik holati va tezligi aniqlanadi. Biroq uning (6.26) tizimdan farqi, o‘rganilayotgan harakatda uchta birinchi integrallar mavjud emas, (Nyoter teoremasi potensial harakat uchun o‘rinli), uning tartibi bitta birlikka pasaytirilgan bo‘lishi mumkin (3-mashq). Yana bir farqi quyidagi ko‘rinishda, ya’ni:

$$
E(0) = E(t) + A(t) \tag{6.32}
$$

balansli energetik munosabatda xulosa qilinadi. Bu yerda $E(0)$- tizimning to‘la boshlang‘ich energiyasi, $E(t) = T(t) + V(t)$- mavjud (hozirgi) to‘la energiya, $A(t)$- t- vaqtdagi ishlab chiqilgan ishqalanish kuchining ishi. (6.32) – munosabatning mexanik ma’nosi quyidagicha: tizimning yo‘qotilgan (sarflangan) energiyasi, unda bajarilgan potensial bo‘lmagan ishqalanish kuchiga teng.

(6.32) tenglikni oddiylik uchun $\mu_2 = 0$ bo‘lganda hosil qilamiz (ishqalanish faqat vaznga nisbatan sinaladi). (6.30) ifodalardan quyidagini hosil qilamiz:

$$
\Phi_1 = -\mu_1\dot{x}_1, \quad \Phi_2 = -m_2\,\mathrm{lg}\sin\alpha.
$$

Bu ifodalarni (6.31) ga qo‘yib, birinchi tenglamani $\dot{x}_1$ ga, ikkinchi tenglamani $\dot{\alpha}$ ga ko‘paytiramiz va ikkala tenglamani qo‘shib quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_1((m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}) + \ddot{\alpha}(m_2 l\dot{x}_1\cos\alpha + m_2 l^2\dot{\alpha}) = \\
&m_2 l\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}_1 - m_2\,\mathrm{lg}\sin\alpha\cdot\dot{\alpha} - \mu_1\dot{x}_1^2.
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Bu tenglik vaqt bo‘yicha differensiallangan (6.32) tenglik bilan ustma-ust tushadi, t- vaqtdagi undagi to‘la energiya:

$$E(t)=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m_2 l}{2}(l\dot{\alpha}^2+2\dot{x}_1\dot{\alpha}\cos\alpha)-m_2\lg\cos\alpha,$$

shakllanish kuchining ishi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$A(t)=-\int_0^t F_1 dx_1=\int_0^t \mu_1 v_1 dx_1=\int_0^t \mu_1\frac{dx_1}{dt}dx_1=\int_0^t \mu_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 dt.$$

Shunday qilib (6.33) tenglik

$$\frac{d}{dt}(E(t)+A(t))=\frac{d}{dt}\left(E(t)+\int_0^t \mu_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 dt\right)=0$$

tenglikka yoki (6.32) tenglikka ekvivalent bo‘ladi. Shunday qilib:

$$\frac{dE(t)}{dt}=-\mu_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\leq 0$$

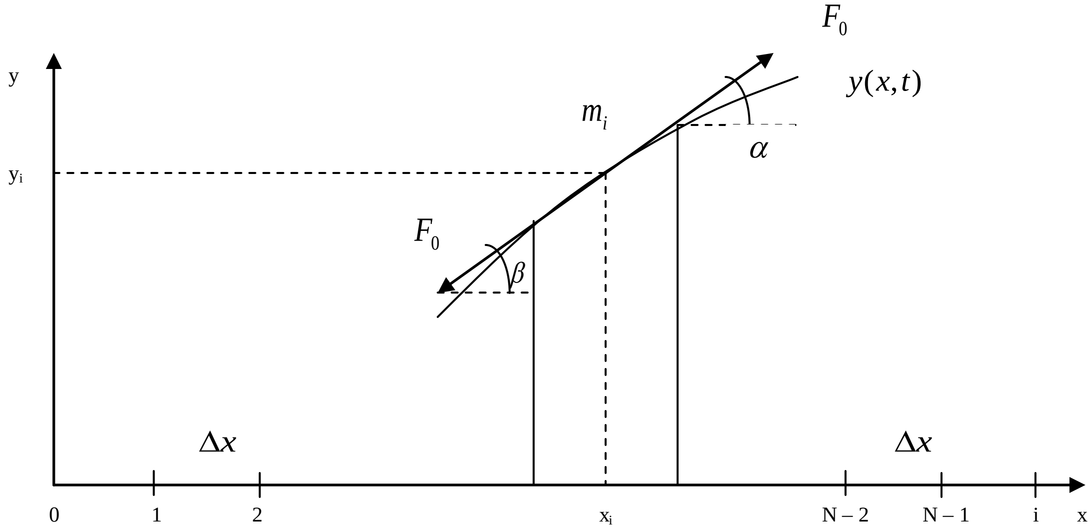
bo‘lsa, u holda uni konservativ tizim bilan taqqoslashda, to‘la energiya bunday hollarda doimiy bo‘lmaydi, aksincha vaqti-vaqti bilan kamayib boradi. Qattiq mahkamlangan mayatnik kichik tebranishda (6.31) formuladan harakat tenglamasiga (prujinadagi yopishqoq sharning ekvivalent va oddiy umumiy yechimga ega bo‘lgan tenglamani hosil qilamiz:

$$\ddot{\alpha}=-\frac{\mu_2}{m_2}\dot{\alpha}-\frac{g}{l}\alpha$$

3. Torning kichik tebranishi. Gamilton tamoyilining moddiy nuqtalar tizimiga qo‘llanilishi chegaralanmaydi. Qat’iy aytganda, u nuqtali massalar majmuasiga ega bo‘lmagan ob’yektlarga ajraladi. Misol sifatida tarang ip yoki tor - tutash muhitni olsa bo‘ladi, biroq bir-biri bilan tutashgan moddiy nuqtalar to‘plami misolida ham ko‘rish mumkin. Torning yo‘g‘onligi l- uzunlikdan kichik va u ρ_0- doimiy chiziqli zichlikka ega deb hisoblaymiz. F_0- kuch yordamida cho‘zilgan torning holati qo‘zg‘almas muvozanatda va to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Uni muvozanati og‘ishida, ya’ni zarba natijasida tor egilib uning uchastkasi harakatlana boshlaydi (6.3-rasm). Tebranish tekis va kichik hisoblanib, uning (amplituda) tebranish kengligi tor uzunligidan bir necha marta kichik. Bu taxmin torning ko‘ndalang harakati qaralganda, uning tezligi va uzunasiga siljishini inobatga olmaydi.

Torning og‘irliklari teng bo‘lgan $m_i=\rho_0 l/N=\rho_0\Delta x,\quad i=\overline{1,N}$ ko‘rinishdagi N ta moddiy nuqtaning majmuasi ko‘rinishda tasvirlaymiz. Kuchli bo‘lmagan va muvozanat holatdagi, m_i - og‘irliklarni o‘z ichiga oluvchi har bir tor uchastkasi Δx- ga teng, torning tebranishi uning og‘ishida o‘zgaruvchan va kichik hisoblanadi. Shuning uchun “moddiy nuqtaning ixtiyoriy vaqtdagi i - holati $x_i(t)$

(uzunasiga koordinata markazidan i - kesma) va $y_i(t)$ (muvozanat holatdagi kesma markazidan ko‘ndalang og‘ish) qiymatlari orqali ifodalanadi:



6.3-rasm.

Shunday qilib, kiritilgan umumlashgan koordinata (dekart koordinata bo‘lgan holda) qaralayotgan tizimning to‘la tekis (yassi) harakatini ifodalaydi. Kichik og‘ishga ko‘ra, $dx_i(t)/dt = v_{ix} = 0$ ko‘rinishda belgilaymiz, ya’ni x_i - koordinata t - vaqtga bog‘liq emas.

Torni tashkil etuvchi “moddiy nuqta” o‘zaro bog‘liq va $N \to \infty, \ \Delta x \to 0$ intilganda x, y tekisligida ixtiyoriy vaqt uchun biror egri chiziqni tashkil etadi:

$$y = y(x,t). \tag{6.34}$$

Yuqorida ko‘rilgan mexanik bog‘lanishlarga nisbatan bu bog‘lanish har doim berib, (6.34) “bog‘lam” noma’lum va $y(x,t)$ funksiya ta’rifida yotadi. Agar bog‘lanish topilganda, u holda $y_i = y(x_i, t)$ koordinatalar ma’lum bo‘lib, x_i - koordinatalar vaqt oralig‘ida qanchalik o‘zgarmasin, tizimning harakati to‘la ma’lum bo‘lar edi.

i - og‘irlikning kinetik energiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{iy}^2 = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2.$$

Bu ifodani hosil qilish uchun, quyidagi $\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t}$ tenglikdan foydalanilgan, shuning uchun $\frac{dx_i}{dt} = 0$ o‘rinli. Tizimning to‘la kinetik energiyasi quyidagi ifodaga teng:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\rho_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_i^2\Delta x\,. \qquad (6.35)$$

Endi i- og‘irlikka ta’sir etuvchi kuchni hisoblaymiz. Kichik tebranishlar haqidagi faraz (taxmin) ga ko‘ra $\psi_{ix}=0$. ψ_{iy} - tik komponent (i- kesmaning chap va o‘ng uchlarini) torning tortish kuchlari tik komponentalari yig‘indisiga teng. Uning muvozanat holatidan og‘ishi cho‘zilishi kam holat hisoblanadi, shuning uchun torning tortish (taranglash) kuchi o‘zgarmas va F_0 ga teng deb hisoblash mumkin. Unda torning o‘ng va chap uchlariga tabiq etilgan tik kuchlar mos ravishda quyidagilardan iborat:

$$\psi_-=-F_0\sin\alpha=-F_0\frac{\partial y}{\partial x}\left(x_i+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\psi_+=F_0\sin\beta=F_0\frac{\partial y}{\partial x}\left(x_i-\frac{\Delta x}{2}\right).$$

(6.3-rasmga e’tibor bersangiz, tortish kuchi, torga nisbatan urinmaga qarab yo‘naltirilgan). Natijada quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\psi_{iy}=\psi_++\psi_-=F_0\left[y_x(x-\Delta x/2)-y_x(x+\Delta x/2)\right].$$

Yoki Δx-kesmaning kichikligini hisobga olgan holda quyidagidan iborat:

$$\psi_{iy}=-F_0(y_{xx})_i\Delta x\,.$$

Buni e’tiborga olib (6.35) dan $\partial y=y_x\cdot\partial x$ni hosil qilib, oxirgi ifodani boshqacha ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$\psi_{iy}=-F_0\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial x}y_x\right)_i=-F_0\Delta x\left(y_x\frac{\partial}{\partial y}y_x\right)_i=-\frac{1}{2}F_0\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial y}y_x^2\right)_i.$$

Ma’lumki, barcha $\psi_{iy},\ \ i=\overline{1,N}$ kuchlar potensial bo‘lib, bu yerda i - og‘irlikning potensial energiyasi quyidagi ifodani beradi:

$$V_i=\frac{1}{2}F_0(y_x^2)_i\Delta x\,.$$

Torning to‘liq potensial energiyasi esa quyidagi ifodadan iborat:

$$V=\frac{1}{2}F_0\sum_{i=1}^{N}(y_x^2)_i\Delta x\,. \qquad (6.36)$$

Tizimning harakati qanchalik potensial bo‘lmasin, unga 6.1 bo‘limdagi dagi Gamilton tamoyilini tatbiq etamiz. (6.35) va (6.36) dan lagranjianni hosil qilamiz:

$$L(y,\dot y,t)=T-V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-F_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]_i\cdot\Delta x,\qquad \dot y=\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Gamilton bo‘yicha ta’sir quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$Q(y,\dot{y},t)=\int_{t_0}^{t_1} Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-F_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]_i \Delta xdt. \qquad (6.37)$$

Bu yerda t_0, t_1 ixtiyoriy vaqt oraliqlari bo‘lib, bu vaqtlarda tizim $y_i(t_0), y_i(t_1)$ koordinatalarga ega bo‘ladi. $y_i(t_0)$- holatdan $y_i(t_1)$- holatga ko‘p yo‘llar orqali o‘tish mumkin. Gamilton tamoyilining afzallik tomoni yagona to‘g‘ri yo‘lni belgilab beradi, buning uchun harakat ta’siri $\delta Q=0$ teng. (6.37) – ifoda yordamida i- nuqtalardan iborat δy_i- koordinata va $\delta \dot{y}_i$ - tezliklarni qo‘shib berib δQ- variatsiyani hisoblaymiz:

$$\delta Q=\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N}\left[2\rho_0\frac{\partial y}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)-F_0\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\cdot\delta y\right]_i \Delta xdt\,. \qquad (6.38)$$

Bu yerda, tenglikning o‘ng tarafidagi birinchi hadi $\dot{y}_i$ - tezlikni variatsiyalashda, ikkinchi hadi esa y_i - koordinatsiyalarni variatsiyalash natijasida yuz beradi. Birinchi hadni almashtirish uchun $\delta y(t_0)=\delta y(t_1)=0$ni e’tiborga olgan holda, variatsiyalashning o‘rniga qo‘yish amali va t- bo‘yicha differensiallashdan foydalanib integrallaymiz va quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N}\left[2\rho_0\frac{\partial y}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_i \Delta xdt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N}\rho_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_i\delta y_i\Delta xdt\,.$$

Ikkinchi hadini esa $\partial y=y_x\partial x$ ni hisobga olgan holda qayta yozamiz:

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N}F_0\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2_i\right]\delta y_i=-\int_{t_0}^{t_1}F_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i\delta y_i\Delta xdt\,.$$

Bu ifodalarni (6.38) ga qo‘yib ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N}\left(\rho_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-F_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i\delta y_i\Delta xdt\,.$$

Endi, moddiy nuqtaning diskret tizimiga o‘tamiz. Bu yerda dastlab tor tutash muhitga almashtirilgan edi. Buning uchun oxirgi olingan tenglikda $N\to\infty$ intiltirib, Δx ni dx bilan o‘zgartirib va i- indeksni tashlab yuborib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\int_{0}^{l}\left(\rho_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-F_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\delta ydxdt\,.$$

To‘g‘ri yo‘lda $\delta Q=0$ faqat barcha x va t da oxirgi tenglikning integral ostidagi ifodasi nolga teng bo‘lsa, ya’ni:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a_0^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad a_0^2=\frac{F_0}{\rho_0},\quad 0<x<l,\quad t>0\,. \qquad (6.39)$$

Natijada, torning kichik tebranishlarida, uning og‘ishi (6.39) tenglamaga bo‘ysunadi, bundan mos keluvchi chegaraviy parametrlarda $y = y(x,t)$ funksiya aniqlanadi.

Gamilton tamoyilini ko‘rilayotgan vaziyatga qo‘llagan holda (6.34) -tenglamani hosil qilishga tatbiq etish mumkin. Lagranjianning xossalariga ko‘ra, torning to‘la energiyasi $H = T + V$ asta sekin saqlanadi (harakatni konservativligini (eskilik) bevosita (6.39) dan qurish qiyin emas; 4-mashq).

Torning kichik tebranish tenglamasi ($w = 2\pi a_0 / \lambda$ - λ- uzun to‘lqinli tabranish chastotasi) – ikkinchi tartibli, xususiy hosilali, giperbolik chiziqli tenglama. Superpozitsiya tamoyili matematik fizika tenglamalar nazariyasining mos usullarini qo‘llagan holda, tenglamaning umumiy yechimini topish imkonini beradi.

Bir qiymatli aniqlangan yechim uchun $y(x,0) = y_0(x),\ 0 < x < l$ - boshlang‘ich og‘ish, $\dot{y}(x,0) = \dot{y}_0(x),\ 0 < x < l$ - tezlik va $y(0,t) = y_1(t),\ t > 0$ funksiyaning chegaraviy qiymatlari berilganda, (6.39) - tenglama uchun asosiy chegaraviy masala [0,1] kesmadagi birinchi chegaraviy masala sanaladi. Asosiy masala har xil ko‘rinishdagi masalalarga yo‘l qo‘yadi, ulardan eng soddasi $-\infty < x < \infty$ holatda yechimga ega bo‘lgan Koshi masalasidir.

Bunday ideallashtirish, agar torning markaziy qismida davom etmaydigan vaqt oralig‘ida harakatni o‘rganish holatida o‘zini oqlaydi va chegaralar ta’sirini inobatga olmasa ham bo‘ladi. Koshi masalasini yechish uchun, boshlang‘ich tezlik va torning koordinatasini, ya’ni $-\infty < x < \infty$ da $y_0(x),\ \ \dot{y}_0(x)$ funksiyalarni bilish etarli.

Quyidagi $\partial y / \partial t = c \partial y / \partial x,\ c = const$ (oddiy to‘lqin) xossani qanoatlantiruvchi harakatning xususiy ko‘rinishi uchun 6.1 bo‘limdagi (6.39) tenglama birinchi tartibli giperbolik tenglamaga yoki olib o‘tish tenglamasi (5-mashq) o‘tadi.

Ta’kidlash kerakki, odatda (6.39) tenglama, Nyutonning ikkinchi qonunini va Guk qonunini torning elementar uchastkasiga (sohasi) bevosita qo‘llash natijasida hosil bo‘ladi. Bu qonunlarga ko‘ra kichik tebranish, tor birjinsligi va hokazolar bir xil bo‘ladi.

Shuning uchun torning harakatiga oid matematik modeli, bu ikki holda ham bir xil.

4. Elektromexanik o‘xshashlik. Gamilton tamoyili nafaqat tutash muhit harakatlari jarayonlarida, balki mexanik bo‘lmagan ob’yektlarda ham ommalashgan.

C_0- yoqilg‘ili kondensator va L_0- induktiv g‘altakdan tashkil topgan tebranuvchi kontur (6.5 bo‘limda) ni ko‘rib chiqamiz. Boshlang‘ich vaqtda zanjir ochiq bo‘lib, zaryad kondensator qurilmasiga yig‘iladi. Zanjir ulanganda kondensator zaryadlanib tok beradi.

Elektromagnit o‘xshashlik quyidagidan iborat. Umumlashgan koordinata kondensator qurilmasidagi – ($q = q(t)$ vaqtning noma’lum funksiyasi) zaryadga javob beradi. Elektr tokning $\dot{q}(t) = dq(t)/dt = i(t)$ qiymati umumlashgan tezlik rolini o‘ynaydi. Kinetik energiya (harakat energiyasi) va potensial energiya (kondensator energiyasi) larning o‘xshashligini to‘g‘ri aniqlash uchun quyidagicha mulohaza qilamiz.

Zaryad o‘tkazgichi (tok energiyasi) bo‘ylab harakatlanuvchi energiya uning yo‘naltirilgan harakat tezligi V- ning kvadratiga proportsional. Boshqa tarafdan birlik vaqt (tok) da o‘tkazgichning ko‘ndalang kesimi S- bo‘yicha o‘tuvchi zaryad $i = q_0 n S_V$ ga teng, bu yerda q_0, n- elementar zaryad va tok uzatuvchilarning konsentratsiya hajmining qiymatlari. Natijada zarralar harakatining energiyasi $T \sim \text{v}^2 \sim \text{i}^2$ bo‘ladi, ya’ni $\dot{q}(t) = i(t)$ tokning kvadratiga proportsional. Proportsionallik koeffisienti (og‘irlikka o‘xshash) L_0 ga teng olinadi, ya’ni:

$$T = T(\dot{q}) = \frac{1}{2} L_0 \dot{q}^2 .$$

Konturning potensial energiyasi kondensatorda joylashgan.

Kulon qonuniga ko‘ra, bunga qarshilik ko‘rsatuvchi q_1, q_2- zaryadlar funksiyasi $q_1 q_2$ ko‘paytmaga (agar $q_1 = q_2 = q$ bo‘lsa, u holda kuch q^2 ga proportsional) proportsional bo‘ladi. Demak, V tizimning potensial energiyasi umumlashgan koordinatalarning kvadratiga proportsional: $V = V(q) = \frac{1}{2C_0} q^2$,

bu yerda $1/C_0$ - Guk qonunidagi elastik kuch koeffisientiga o‘xshash (soqqa-purjina tizim) yoki $\sqrt{g/l}$- mayatnikning tebranish holatidagi qiymati. Endi shuni e’tiborga olish kerakki, konturdagi ta’sir etuvchi kuch elektrostatikadan kelib chiqqan. Kulon qonuniga ko‘ra, bu kuchlar $\dot{q}$- ga bog‘liq bo‘lmagan q- umumlashgan koordinatalar orqali aniqlanadi. Bu yerda kuchlar va qaralayotgan tizim ham potensial hisoblanadi. Shuning uchun unda $L = T - V$- lagranjian mavjud bo‘lib, unga Gamiltonning o‘xshashlik tamoyilini tatbiq etamiz: boshlang‘ich yo‘l uchun “harakat” ning variatsion tizimi nolga teng (bu yerda t_0, t_1- ixtiyoriy olingan vaqtlar): $Q = \int_{t_0}^{t_1} L dt$.

Funksiya $q(t,0) = q^0(t), \quad t_0 < t < t_1$ - oraliqda tizimning to‘g‘ri yo‘li uchun javobgar bo‘lsin. $q(t,\alpha)$, $\alpha \neq 0$ koordinata variatsiyasi $\delta q = q(t,\alpha) - q^0(t)$ ga teng, bu yerda $q(t,\alpha)$ - bir xil koordinata $q(t_0,\alpha),\ q(t_1,\alpha)$ ga ega bo‘lgan barcha mumkin bo‘lgan trayektoriyalar.

Ta’sirni variatsiyalash uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$\delta Q = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(L_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{C_0} q \right) dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [L(q) - L(q^0)] dt .$$

Agar $q = q^0 + \delta q$ olsak, u holda integral ostidagi ifodani quyidagi ko‘rinishda tasvirlaymiz:

$$L(q) - L(q^0) = L_0[(\dot{q}^0)^2 + 2\dot{q}^0 \delta\dot{q} + \delta\dot{q}^2] - \frac{1}{C_0}[(q^0)^2 + 2q^0\delta q + \delta q^2] - L_0(\dot{q}^0)^2 + \frac{1}{C_0}(q^0)^2 .$$

Ifodadan ikkinchi tartibli kichik hadini olib tashlab quyidagini hosil qilamiz:

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_0 \dot{q}^0 \delta\dot{q} - \frac{1}{C_0} q^0 \delta q \right) dt .$$

$L_0 q^0 \delta\dot{q}$ - hadni (bu yerda $\delta\dot{q} = d(\delta q)/dt,\ \delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$) bo‘laklab integrallab, δQ uchun so‘nggi ifodani olamiz:

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_0 \ddot{q}^0 + \frac{1}{C_0} q^0 \right) \delta q dt = 0 .$$

Bundan $q(t)$ zaryad uchun (q^0-ni yuqori indeksi olib tashlangan) quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$L_0 \ddot{q} = -\frac{1}{C_0} q .$$

Bu tenglama boshqacha usul bilan topilgan elektr konturidagi tebranishni ifodalaydi. Ma’lumki, $H = T + V$ - to‘la energiyaning tebranishi vaqt bo‘yicha siljishga nisbatan saqlanadi va lagranjianning invariantligi bilan moslashadi.

Ko‘rilgan o‘xshashlik elektr zanjirining murakkabroq konfiguratsiyalari uchun ham tatbiq etilgan bo‘lib, bunga asosan jarayonlarga o‘tib boruvchi matematik model quriladi. Yuqorida keltirilgan masalalar keng qo‘llaniladigan Gamilton va boshqa variatsion tamoyillarning yagona bo‘lmagan uzoq tasviri (ifodasi)dir. Ular nafaqat mexanik yoki fizik, balki kimyo, biologiya va boshqa hodisalarning matematik modelini qurish uchun ko‘p foydalaniladi.

Misollar va nazorat savollari

1. Vaznsiz k- qattiq prujinaga (l - uzunlikdagi yuklanmagan prujina, $r_1(t) \le r_2(t)$) bog‘langan m_1, m_2 og‘irlikdagi soqqalar harakatini

ifodalovchi (6.3)tenglamani ko‘rsating. Bir inersial tizimdan boshqa tizimga o‘tishdagi tenglamani invariantligini tekshiring.

2. Quyidagi (6.8) – almashtirish sifatida dastlabki sanoq tizimining ayniy almashtirishlarini olib, (6.9) tenglamadan (6.1) tenglamaning koordinata bo‘yicha yozuvi kelib chiqishiga ishonch hosil qiling.
3. Quyidagi (6.16) tenglikdan foydalangan holda, yo‘l uchun (yo‘l yoqalab $\delta Q = 0$ teng) (6.11) Lagranj tenglamasi o‘rinli ekanligini tekshiring.
4. Dekart x, y, z koordinatalar tizimidagi statsionar potensial maydonda harakatlanayotgan bir moddiy nuqta misolida (6.11) Lagranj va (6.21) Gamilton tenglamalari o‘rtasida o‘zaro ekvivalentlikni o‘rnating.
5. Quyidagi (6.22) almashtirish sifatida dekart koordinatalarning $x_i^* = x_i + \alpha,\ y^* = y_i,\ z^* = z_i\ (i = \overline{1,N}),\ t^* = t$ almashtirishlarni olib (6.23) ning $\phi = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i = const$ ko‘rinishda ifodalanishiga ishonch hosil qiling, ya’ni bunday tizim uchun harakat miqdorining saqlanish qonuni x o‘qiga teskari ekanligiga ishonch hosil qiling.

Nazorat savollari

1. Nyuton shaklidagi mexanik tizimlarning harakat tenglamalariga izoh bering.
2. Lagranj shaklidagi harakat tenglamalari qaysi qonunning qulay ko‘rinishidir?
3. Gamiltonning variatsion tamoyiliga misollar keltiring.
4. Saqlanish qonunlari va vaqt fazosining xossasini tushuntirib bering.

7. AYRIM MURAKKAB TIZIMLARNING MATEMATIK MODELLARI

7.1. Magnit-elastik plastinkaning matematik modeli

Mazkur ob’yektni matematik modelini chiqarishda Gamilton-Ostrogradskiy tamoyilidan foydalanamiz. Mexanikaning eng umumiy variatsion tamoyillardan biri - bu material nuqtalar dinamikasida Gamilton-Ostrogradskiy tamoyili bo‘lib, u Gamilton tomonidan 1833-1835 yillarda shakllantirilgan, uning matematik asoslari esa rus olimi V.M.Ostrogradskiy tomonidan 1848 yil yakunlangan. Gamilton-Ostrogradskiy tamoyili bo‘yicha matematik modellar – qidirilayotgan funksiyalarni aniqlovchi differensial tenglamalar tizimi va boshlang‘ich chegaraviy shartlar chiqariladi.

Gamilton-Ostrogradskiy tamoyili qo‘llanishining umumiy sxemasini misolda ko‘rsatib o‘tamiz. Buning uchun yupqa plastinkalarning berilgan magnit maydonda harakati tenglamasini (boshlang‘ich va chegaraviy shartlar hisobga olgan holda) chiqarishni ko‘ramiz va bu yerda yuqorida keltirilgan Gamilton-Ostrogradskiy tamoyilini qo‘llaymiz. Gamilton-Ostrogradskiy tamoyili quyidagi ko‘rinishda yoziladi [5]:

$$\delta\int_t (K - \Pi + A)dt = 0 \; . \qquad (7.1)$$

Bu yerda K, P – kinetik va potensial energiya, A – tashqi hajmiy va sirt kuchlarining ishi, ularning variatsiyalari mos ravishda quyidagicha aniqlanadi [5,55]:

$$\int_t \delta K dt = \int_t\int_v \rho\left(\frac{dU_1}{dt}\delta\frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt}\delta\frac{dU_2}{dt} + \frac{dU_3}{dt}\delta\frac{dU_3}{dt}\right)dVdt \, ,$$

$$\int_t \delta\Pi dt = \int_t\int_v (б_{11}\delta\varepsilon_{11} + б_{12}\delta\varepsilon_{12} + б_{22}\delta\varepsilon_{22})dVdt.$$

Elektr-magnit kuchlarni hisobga olgan holda ishning variatsiyasi quyidagicha aniqlanadi [5,55]:

$$\int_t \delta A dt = \int_t\int_v \left[(X + \rho K_x)\delta U_1 + (Y + \rho K_y)\delta U_2 + (Z + \rho K_z)\delta U_3\right]dVdt +$$
$$+\int_t\int_y\int_x \left[(q_x + T_{zx})\delta U_1 + (q_y + T_{zy})\delta U_2 + (q_z + T_{zz})\delta U_3\right]dxdydt +$$
$$+\int_t\int_y\int_z \left[(P_x + T_{xx})\delta U_1 + (P_y + T_{xy})\delta U_2 + (P_z + T_{xz})\delta U_3\right]dzdydt +$$

$$+\int_t\int_x\int_z \left[(F_x + T_{yx})\delta U_1 + (F_y + T_{yy})\delta U_2 + (F_z + T_{yz})\delta U_3\right] dz dx dt,$$

bu yerda $X, Y, Z, \rho K_x, \rho K_y, \rho K_z$ – hajmiy kuchlarning tashkil etuvchilari; $q_x = q_x^+ + q_x^-$, $q_y = q_y^+ + q_y^-$, $q_z = q_z^+ + q_z^-$, $T_{zx} = T_{zx}^+ + T_{zx}^-$, $T_{zy} = T_{zy}^+ + T_{zy}^-$, $T_{zz} = T_{zz}^+ + T_{zz}^-$ – sirt kuchlarning tashkil etuvchilari; P_x, P_y, P_z, T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, F_x, F_y, F_z, T_{yx}, T_{yy}, T_{yz} – kontur kuchlarning tashkil etuvchilari; r – jism materialining zichligi.

Bu yerda yupqa plastinkalar elastiklik nazariyasining asosiy tenglamalari Gamilton-Ostrogradskiy variatsion tamoyili (7.1) asosida chiqariladi. Konkret modellarni chiqarishda Koshi geometrik munosabatlari va Guk qonuni teskari ko‘rinishdagi fizik munosabatlar, hamda ko‘chishning o‘zgarish qonuni qo‘llaniladi. Modellarni ishlab chiqishda to‘g‘ri chiziqli koordinatalar tizimi qo‘llaniladi.

Plastinkalarning harakat tenglamalarini chiqarishda harakatning o‘zgarish qonuni sifatida Kirxgof-Lyav gipotezasi qo‘llaniladi [5]:

$$U_1 = U - Z\frac{dW}{dx},\ U_2 = V - Z\frac{dW}{dy},\ U_3 = W(x, y, t). \tag{7.2}$$

Bu yerda U, V – ko‘chish, W - egilish.

Koshi geometrik munosabatlari (7.2) asosida quyidagi ko‘rinishga ega [5]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{dU}{dx} - Z\frac{d^2W}{dx^2},\ \varepsilon_{22} = \frac{dV}{dy} - Z\frac{d^2W}{dy^2} \tag{7.3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy} + \nu\frac{dV}{dx} - 2Z\frac{d^2W}{dxdy}\right) \quad .$$

Kirxgofa-Lyav gipotezasiga ko‘ra Guk qonunini quyidagi ko‘rinishda olamiz [5]:

$$\begin{aligned} б_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{dU}{dx} + \nu\frac{dV}{dy} - Z\left(\frac{d^2W}{dx^2} + \nu\frac{d^2W}{dy^2}\right)\right), \\ б_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{dV}{dy} + \nu\frac{dU}{dx} - Z\left(\frac{d^2W}{dy^2} + \nu\frac{d^2W}{dx^2}\right)\right), \\ б_{12} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{dU}{dy} + \nu\frac{dV}{dx} - 2Z\frac{d^2W}{dxdy}\right), \end{aligned} \tag{7.4}$$

bu yerda ν –Puasson koeffisienti, E – elastiklik moduli.

Bulardan foydalangan holda kinetik, potensial energiya va tashqi kuchlarning variatsiyalari ifodalarini Gamilton-Ostrogradskiy variatsion tamoyiliga (7.1) qo‘yamiz. Kinetik energiya variyatsiyasi yig‘indilari uchun bo‘laklab integrallashni bajaramiz. Potensial energiya variyatsiyasi uchun esa Ostrogradskiy-Gauss teoremasini qo‘llaymiz.

Yuqorida keltirilgan amallarni bajargandan so‘ng o‘xshash hadlarni (integrallarni) ixchamlaymiz va variatsion tenglamani olamiz. Olingan variatsion tenglama ixtiyoriy *v* hajm uchun o‘rinli. Shuning uchun, *v* sohaning ixtiyoriyligiga ko‘ra, plastinkaning harakat tenglamalarini va tabiiy chegaraviy (boshlang‘ich) shartlarni olamiz.
harakat tenglamalari:

$$-\rho h\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{dN_{11}}{dx}+\frac{dN_{12}}{dy}+N_x+R_x+q_x+T_{zx}=0,$$

$$-\rho h\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{dN_{12}}{dx}+\frac{dN_{22}}{dy}+N_y+R_y+q_y+T_{zy}=0, \qquad (7.5)$$

$$-\rho h\frac{d^2W}{dt^2}+\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dx^2dy^2}+\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dy^2dt^2}+\frac{d^2M_{11}}{dx^2}+\frac{d^2M_{12}}{dxdy}+\frac{d^2M_{22}}{dy^2}+Q_z+R_z-\frac{d}{dx}(M_x+M_{Rx})-$$

$$-\frac{d}{dy}(M_y+M_{Ry})+q_z+T_{zz}+\frac{d}{dx}(M^+_{qx}+M^-_{qx}+M^+_{Tzx}+M^-_{Tzx})+\frac{d}{dy}(M^+_{qy}+M^-_{qy}+M^+_{Tzy}+M^-_{Tzy})=0.$$

Tabiiy chegaraviy shartlar:

$$(-N_{11}+N_{Px}+N_{Txx})\delta U\Big|_x=0,(-N_{12}+N_{Py}+N_{Txy})\delta V\Big|_x=0,$$

$$(-\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{dxdt}-\frac{dM_{11}}{dx}-\frac{dM_{12}}{dy}+Q_{Pz}+Q_{Txz}-M^-_{qx}-M^-_{qx}-M^+_{Tzx}-M^-_{Tzx})\delta W\Big|_x=0,$$

$$(M_{11}-M_{Px}-M_{Txx})\delta\frac{dW}{dx}\Big|_x=0,\quad(-M_{12}-M_{Py}-M_{Txy})\delta\frac{dW}{dy}\Big|_x=0, \qquad (7.6)$$

$$(-M_{12}-M_{Py}-M_{Txy})\delta\frac{dW}{dy}\Big|_x=0,\quad(-N_{12}+N_{Fx}-N_{Tyx})\delta U\Big|_y=0,\quad(-N_{22}+N_{Fy}+N_{Tyy})\delta V\Big|_y=0,$$

$$(-\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{dydx}-\frac{dM_{12}}{dx}-\frac{dM_{22}}{dy}+Q_{Fz}+Q_{Tyz}-M^+_{qy}-M^-_{qy}-M^+_{Tzy}-M^-_{Tzy})\delta W\Big|_y=0,$$

$$(M_{12}-M_{Fx}-M_{Tyx})\delta\frac{dW}{dx}\Big|_y=0,\qquad(M_{22}-M_{Fy}-M_{Tyy})\delta\frac{dW}{dy}\Big|_y=0,$$

bu yerda:

$$N_{11}=\int_z\delta_{11}dz,\qquad M_{11}=\int_z\delta_{11}dz,\quad N_{12}=\int_z\delta_{12}dz,$$

$$M_{12}=\int_z\delta_{12}dz,\quad N_{22}=\int_z\delta_{22}dz,\quad M_{22}=\int_z\delta_{22}dz,$$

$$N_x=\int_z Xdz,\quad M_x=\int_z zXdz,\quad N_y=\int_z Ydz,$$

$$M_y=\int_z zYdz,\ Q_z=\int_z Zdz,\ R_x=\int_z\rho K_xdz,$$

$$M_{Rx}=\int_z z\rho K_xdz,\quad R_y=\int_z\rho K_ydz,\quad M_{Ry}=\int_z z\rho K_ydz,\quad R_z=\int_z\rho K_zdz,$$

$$M^+_{qx}=q^+_x(\frac{h}{2}),\quad M^-_{qx}=q^-_x(-\frac{h}{2}),\ M^+_{qy}=q^+_y(\frac{h}{2}),\quad M^-_{qy}=q^-_y(-\frac{h}{2}),$$

$$M^+_{Tzx}=T^+_{zx}(\frac{h}{2}),\ M^-_{Tzx}=T^-_{zx}(-\frac{h}{2}),\ M^+_{Tzy}=T^+_{zy}(\frac{h}{2}),\quad M^-_{Tzy}=T^-_{zy}(-\frac{h}{2}),$$

$$N_{Px}=\int_z P_x dz,\quad M_{Px}=\int_z zP_x dz,\quad N_{Py}=\int_z P_y dz,\quad M_{Py}=\int_z P_y dz,\quad Q_{Pz}=\int_z P_z dz,$$

$$N_{Txx}=\int_z T_{xx} dz,\quad M_{Txx}=\int_z zT_{xx} dz,\quad N_{Txy}=\int_z T_{xy} dz,\quad M_{Txy}=\int_z zT_{xy} dz,\quad Q_{Txz}=\int_z T_{xz} dz,$$

$$N_{Fx}=\int_z F_x dz,\quad M_{Fx}=\int_z zF_x dz,\quad N_{Fy}=\int_z F_y dz,\quad M_{Fy}=\int_z zF_y dz,\quad Q_{Fz}=\int_z F_z dz,\quad N_{Tyx}=\int_z T_{yx} dz,$$

$$M_{Tyx}=\int_z zT_{yx} dz,\quad N_{Tyy}=\int_z T_{yy} dz,\quad M_{Tyy}=\int_z zT_{yy} dz,\quad Q_{Tyz}=\int_z T_{yz} dz.$$

Shunday qilib Kirxgof-Lyav gipotezasidan foydalangan holda Gamilton-Ostrogradskiy variatsion tamoyili asosida olingan (7.5) – harakat tenglamasi va (7.6) – plastinkaga qo‘yiladigan chegaraviy shartlar (boshlang‘ich shartlarni hisobga olgan holda) uning matematik modelini tashkil qiladi.

Yupqa -elastik plastinkalar tenglamalarini chiqarish. Bu yerda magnit-elastik plastinkani aniqlovchi tenglamalarini olishni ko‘rib chiqamiz. Elektr-magnit maydonni hisobga olgan holda magnit-elastik plastinkaga ta’sir etuvchi to‘la hajmiy, sirt va kontur kuchlarini shakllantiramiz.

Kuchlanishi bilan berilgan tashqi magnit maydonda joylashgan chekli eletr o‘tkazuvchanligi materialidan yasalgan yupqa h qalinligidagi izotrop elastik plastinkani ko‘rib chiqamiz.

Bu yerda tashqi toklar va zaryadlar yo‘q, deb qabul qilamiz. Koordinatalar (x,y) plastinkaning o‘rta sirt tekisligi bilan usma-ust tushadi.

Ushbu holatda umumiy hajmiy kuchlarga qo‘shiluvchi elektr-magnit hajmiy kuchlar [56] dan kelib chiqqan holda quyidagi ko‘rinishda olinadi:

$$\rho \mathrm{K}=\frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}(\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{UxH})))\mathrm{xH},$$

(7.7)

bu yerda $U(u,v,w)$ – ko‘chish vektori ; $H(H_x,H_y,H_z)$ – magnit maydonning kuchlanish vektori.

Tenglamaga kiruvchi hajmiy kuchlar, elektr-magnit hajmiy kuchlarni va momentlarni hisobga olgan holda, quyidagicha bo‘ladi:

$$\mathrm{R_x}=\int_z \rho \mathrm{K_x dx}=\frac{\mathrm{h}}{4\pi}\left[(H_y^2+H_z^2)\frac{d^2U}{dx^2}+H_y^2\frac{d^2U}{dy^2}-H_xH_y\frac{d^2V}{dx^2}+H_z^2\frac{d^2V}{dxdy}-H_xH_y\frac{d^2V}{dy^2}-\right.$$

$$\left.-H_xH_z\frac{d^2W}{dx^2}-H_yH_z\frac{d^2W}{dxdy}+H_xH_z\frac{d^2W}{dy^2}\right],$$

$$R_y = \int_z \rho K_y dx = \frac{h}{4\pi}\left[-H_x H_y \frac{d^2U}{dx^2} + H_x^2 \frac{d^2U}{dxdy} - H_x H_y \frac{d^2U}{dy^2} + H_x^2 \frac{d^2V}{dx^2} + (H_x^2 + H_z^2)\frac{d^2V}{dy^2} + \right.$$

$$\left. + H_y H_z \frac{d^2W}{dx^2} - 2H_x H_z \frac{d^2W}{dxdy} - H_y H_z \frac{d^2W}{dy^2}\right],$$

$$R_z = \int_z \rho K_z dx = \frac{h}{4\pi}\left[-H_x H_z \frac{d^2U}{dx^2} + H_y H_z \frac{d^2U}{dxdy} - H_x H_z \frac{d^2V}{dxdy} - H_y H_z \frac{d^2V}{dy^2} + (H_y^2 - H_x^2)\frac{d^2W}{dx^2} + \right.$$

$$\left. + 4H_x H_y \frac{d^2W}{dxdy} - (H_y^2 - H_x^2)\frac{d^2W}{dy^2} + H_x H_z \frac{d^2W}{dy^2}\right], \qquad (7.8)$$

$$M_{Rx} = \int_z z\rho K_x dx = \frac{1}{4\pi}\frac{h^3}{12}\left[-H_z^2 \frac{d^3U}{dxdy^2} - H_z^2 \frac{d^3W}{dx^3} - H_y^2 \frac{d^3W}{dxdy^2} + \right.$$

$$\left. - H_x H_y \frac{d^3W}{dx^2dy} - H_y^2 \frac{d^3W}{dx^3} + H_x H_y \frac{d^3W}{dy^3}\right],$$

$$M_{Ry} = \int_z z\rho K_y dx = \frac{1}{4\pi}\frac{h^3}{12}\left[H_x H_y \frac{d^3W}{dxdy^2} - H_x^2 \frac{d^3W}{dy^3} + H_x H_y \frac{d^3W}{dx^3} - \right.$$

$$\left. - H_x^2 \frac{d^3W}{dx^2dy} - H_z^2 \frac{d^3W}{dy^3} - H_z^2 \frac{d^3W}{dx^3dy}\right];$$

bu yerda h –plastina qalinligi.

Sirt va kontur (chegaraviy) kuchlarga Maksvell elektrodinamik kuchlanishlar tenzorlari qo‘shiladi [56]:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[H_i h_k + h_i H_k\right] - \frac{б_{ik}}{4\pi}\vec{h}\vec{H},$$

$$T_{ik}^e = \frac{1}{4\mu\pi}\left[H_i^e h_k^e + h_i^e H_k^e\right] - \frac{б_{ik}}{4\pi}\vec{h}^e \vec{H}^e. \qquad (7.9)$$

bu yerda, $б_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k. \end{cases}$

Plastina sirtida:

$$T_{zx} = T_{zx}^+ + T_{zx}^- = T_{31}^+ + T_{31}^{e+} + T_{31}^- + T_{31}^{e-},$$
$$T_{zy} = T_{zy}^+ + T_{zy}^- = T_{32}^+ + T_{32}^{e+} + T_{32}^- + T_{32}^{e-}, \qquad (7.10)$$
$$T_{zz} = T_{zz}^+ + T_{zz}^- = T_{33}^+ + T_{33}^{e+} + T_{33}^- + T_{33}^{e-}.$$

Plastina konturlarida

a) x o‘qi normal bo‘lganda:

$$T_{xx} = T_{11} + T^e_{11},$$
$$T_{xy} = T_{12} + T^e_{12}, \qquad (7.11)$$
$$T_{xz} = T_{13} + T^e_{13},$$

b) y o‘qi normal bo‘lganda:

$$T_{yx} = T_{21} + T^e_{21},$$

$$T_{yy}= T_{22}+ T^{e}_{22}, \qquad (7.12)$$
$$T_{yz}= T_{23}+ T^{e}_{23}.$$

Kuchlanish tenzori (7.9) komponentalari bo‘yicha olingan natijalarni (7.10)-(7.12) ifodalariga qo‘ygan holda, elektromagnit sirt va kontur (chegaraviy) kuchlari uchun quyidagi ko‘rinishni olamiz:

$$T_{zx}=\frac{1}{4\pi}\left[H_1h_3+h_1H_3\right]^{+}+\frac{1}{4\pi}\left[H_1h_3+h_1H_3\right]^{-}+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_1^eh_3^e+h_1^eH_3^e\right]^{+}+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_1^eh_3^e+h_1^eH_3^e\right]^{-},$$
$$T_{zy}=\frac{1}{4\pi}\left[H_2h_3+h_2H_3\right]^{+}+\frac{1}{4\pi}\left[H_2h_3+h_2H_3\right]^{-}+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_2^eh_3^e+h_2^eH_3^e\right]^{+}+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_2^eh_3^e+h_2^eH_3^e\right]^{-},$$
$$(7.13)$$
$$T_{zz}=\frac{1}{4\pi}\left[h_3H_3-(H_1h_1+h_2H_2)\right]^{+}+\frac{1}{4\pi}\left[h_3H_3-(H_1h_1+h_2H_2)\right]^{-}+\frac{1}{4\mu\pi}\left[h_3^eH_3^e-H_1^eh_1^e-H_2^eh_2^e\right]^{+}+$$
$$+\frac{1}{4\mu\pi}\left[h_3^eH_3^e-H_1^eh_1^e-H_2^eh_2^e\right]^{-},$$

$$T_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left[h_1H_1-(H_2h_2+H_3h_3)\right]+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_1^eh_1^e-H_2^eh_2^e-H_3^eh_3^e\right],$$
$$T_{xy}=\frac{1}{4\pi}\left[H_1h_2+h_1H_2\right]+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_1^eh_2^e+H_1^eh_2^e\right], \qquad (7.14)$$
$$T_{xz}=\frac{1}{4\pi}\left[H_1h_3+h_1H_3\right]+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_1^eh_3^e+H_1^eh_3^e\right],$$
$$T_{yx}=\frac{1}{4\pi}\left[H_1h_2+h_1H_2\right]+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_1^eh_2^e+H_1^eh_2^e\right],$$
$$T_{yy}=\frac{1}{4\pi}\left[h_2H_2-(H_1h_1+H_3h_3)\right]+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_2^eh_2^e-H_1^eh_1^e-H_3^eh_3^e\right], \qquad (7.15)$$
$$T_{yz}=\frac{1}{4\pi}\left[H_2h_3+h_2H_3\right]+\frac{1}{4\mu\pi}\left[H_2^eh_3^e+H_3^eh_2^e\right].$$

Olingan elektr-magnit kuchlarni (7.8), (7.13)-(7.15) ifodalaridan foydalangan holda (7.5) tenglamalardan magnit-elastik plastinalar uchun uchta xususiy hosilali differensial tenglamadan iborat tizim ko‘rinishda qidirilayotgan *U*, *V*, *W* – ko‘chish funksiyalariga nisbatan harakat tenglamasini hosil qilamiz. Ularni to‘ldirish uchun chegaraviy va boshlang‘ich shartlar kerak.

Olingan munosabatlar mos boshlang‘ich shartlarni va chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda qidirilayotgan ko‘chish funksiyalariga nisbatan to‘la tenglamalar tizimi – matematik modelni tashkil qiladi.

Magnit-elastik plastinalarning matematik modellari

Olingan elektr-magnit kuchlarni (7.8), (7.13)-(7.15) ifodalarining (7.5) tenglamalariga qo‘ygan holda qidirilayotgan *U*, *V*, *W* – ko‘chish funksiyalariga nisbatan to‘la tenglamalar tizimini ko‘rib chiqamiz [70-75].

$$\rho h\frac{d^2U}{dt^2}-\left(\frac{Eh}{1-\nu^2}-\frac{h}{4\pi}(H_y^2+H_z^2)\right)\frac{d^2U}{dx^2}-\left(\frac{Eh}{2(1+\nu)}-\frac{h}{4\pi}H_y^2\right)\frac{d^2U}{dy^2}-\frac{h}{4\pi}H_xH_y\frac{d^2V}{dx^2}-$$

$$-\left(\frac{Eh\nu}{1-\nu^2}+\frac{Eh}{2(1+\nu)}-\frac{h}{4\pi}H_y^2\right)\frac{d^2V}{dxdy}-\frac{h}{4\pi}H_xH_y\frac{d^2V}{dy^2}-\frac{h}{4\pi}H_xH_z\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{h}{4\pi}H_yH_z\frac{d^2W}{dxdy}-$$

$$-\frac{h}{4\pi}H_xH_z\frac{d^2W}{dy^2}=Q_1,$$

$$\rho h\frac{d^2V}{dt^2}-\frac{h}{4\pi}H_xH_y\frac{d^2U}{dx^2}-\left(\frac{Eh\nu}{1-\nu^2}+\frac{Eh}{2(1+\nu)}-\frac{h}{4\pi}H_x^2\right)\frac{d^2U}{dxdy}-\frac{h}{4\pi}H_xH_y\frac{d^2U}{dy^2}-$$

$$-\left(\frac{Eh}{2(1+\nu)}-\frac{h}{4\pi}H_x^2\right)\frac{d^2V}{dx^2}-\left(\frac{Eh}{1-\nu^2}-\frac{h}{4\pi}(H_x^2+H_z^2)\right)\frac{d^2V}{dy^2}-\frac{h}{4\pi}H_yH_z\frac{d^2W}{dx^2}-$$

$$-\frac{h}{4\pi}2H_xH_z\frac{d^2W}{dxdy}-\frac{h}{4\pi}H_yH_z\frac{d^2W}{dy^2}=Q_2,$$

$$\rho h\frac{d^2W}{dt^2}-\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dx^2dt^2}-\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dy^2dt^2}-\frac{h}{4\pi}H_xH_z\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{h}{4\pi}H_yH_z\frac{d^2U}{dxdy}-$$

$$-\frac{h}{4\pi}H_xH_z\frac{d^2V}{dxdy}-\frac{h}{4\pi}H_yH_z\frac{d^2V}{dy^2}+$$

$$+\left(D+\frac{I}{4\pi}(H_y^2+H_z^2)\right)\frac{d^4W}{dx^4}+\frac{I}{4\pi}2H_xH_y\frac{d^4W}{dx^3dy}+$$

$$\left(2D+\frac{I}{4\pi}(H_x^2+H_y^2+H_z^2)\right)\frac{d^4W}{dx^2dy^2}-\frac{I}{4\pi}2H_xH_y\frac{d^4W}{dxdy^3}+$$

$$+\left(D+\frac{I}{4\pi}(H_x^2+H_z^2)\right)\frac{d^4W}{dy^4}+\frac{h}{4\pi}(H_y^2-H_x^2)\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{h}{4\pi}4H_xH_y\frac{d^2W}{dxdy}-$$

$$-\frac{h}{4\pi}(H_y^2-H_x^2)\frac{d^2W}{dy^2}=Q_3.$$

Bu yerda $D=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - plastinaning egilish qattiqligi (bikirligi); $I=\frac{h^3}{12}$; Q_i *(i=1,2,3)* – plastinaga Maksvell tenzorini hisobga olgan holda ta’sir etuvchi to‘la kuchlanishi.

Yuqorida keltirilgan tenglamalar plastina qirralarining qotirilishiga ko‘ra mos chegaraviy shartlarda yechiladi. Umumiy ko‘rinishda chegaraviy shartlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$(-N_{11}+N_{Px}+N_{Txx})\delta U\big|_x=0,\qquad (-N_{12}+N_{Py}+N_{Txy})\delta V\big|_x=0,$$

$$\left(-\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{dxdt}-\frac{dM_{11}}{dx}-\frac{dM_{12}}{dy}+Q_{Pz}+Q_{Txz}-M_{qx}^+-M_{qx}^--M_{Tzx}^+-M_{Tzx}^-\right)\delta W\big|_x=0,$$

$$(M_{11}-M_{Px}-M_{Txx})\delta\frac{dW}{dx}\big|_x=0,\qquad (-M_{11}-M_{Py}-M_{Txy})\delta\frac{dW}{dy}\big|_x=0,$$

$$(-N_{12}+N_{Fx}+N_{Tyx})\delta U\big|_y=0,\qquad (-N_{22}+N_{Fy}+N_{Tyy})\delta V\big|_y=0,$$

$$\left(-\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{dydt}-\frac{dM_{12}}{dx}-\frac{dM_{22}}{dy}+Q_{Fz}+Q_{Tyz}-M_{qy}^+-M_{qy}^--M_{Tzy}^+-M_{Tzy}^-\right)\delta W\big|_y=0,$$

$$(M_{12}-M_{Fx}-M_{Tyx})\delta\frac{dW}{dx}\Big|_y=0,\qquad (M_{22}-M_{Fy}-M_{Tyy})\delta\frac{dW}{dy}\Big|_y=0.$$

Shunday qilib olingan xususiy hosilali differensial tenglamalar chegaraviy va muvofiq boshlang‘ich shartlar bilan birgalikda plastinkadagi ko‘chishlarni to‘la ifodalaydi.

Aytish joizki, olingan tenglamalar va chegaraviy shartlar magnit maydonning ayrim xususiy hollarida va plastinkaning qirralarining qotirilishiga ko‘ra juda soddalashtirilishi mumkin. Bu konkret masalalarni yechishni yetarlicha osonlashtiradi. Ularning ayrim holatlarini ko‘rib o‘tamiz.

Xususiy holda, agar plastinka o‘rta sirtining ko‘ndalang ko‘chishlari mavjud emas deb qarasak, ya’ni *U=V=0* differensial tenglamalar tizimi *W(t,x,y)* – egilishga nisbatan bitta xususiy hosilali differensial tenglama yechimiga keladi va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\rho h\frac{d^2W}{dt^2}-\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dx^2dt^2}-\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dy^2dt^2}-\left(D+\frac{I}{4\pi}(H_y^2+H_z^2)\right)\frac{d^4W}{dx^4}-\frac{I}{4\pi}2H_xH_y\frac{d^4W}{dx^3dy}+$$
$$+\left(2D+\frac{I}{4\pi}(H_x^2+H_y^2+2H_z^2)\right)\frac{d^4W}{dx^2dy^2}-\frac{I}{4\pi}2H_xH_y\frac{d^4W}{dxdy^3}+\left(D+\frac{I}{4\pi}(H_x^2+2H_z^2)\right)\frac{d^4W}{dy^4}+$$
$$+\frac{h}{4\pi}\left(H_y^2-H_x^2\right)\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{h}{4\pi}4H_xH_y\frac{d^2W}{dxdy}-\frac{h}{4\pi}\left(H_y^2-H_x^2\right)\frac{d^2W}{dy^2}=Q_3.$$

Agarda masalaning buralish enertsiyasini hisobga olmagan holda qaralsa, u holda tenglamadagi $\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dx^2dt^2}$ va $\rho\frac{h^3}{12}\frac{d^4W}{dy^2dt^2}$ hadlar, hamda chegaraviy shartlarga kiruvchi $\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{dxdt}$ va $\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{dydt}$ hadlari tashlab yuboriladi. Va masala yechilish jarayonida ular hisobga olinmaydi.

Agar magnit maydonning yo‘nalishi plastinka tekisligiga perpendikulyar, ya’ni $H=(0,\ 0,\ H_z)$ bo‘lsa, unda tenglama yanada ixchamlashadi va quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\rho h\frac{d^2W}{dt^2}+\left(D+\frac{I}{4\pi}H_z^2\right)\frac{d^4W}{dx^4}+2(D+\frac{I}{4\pi}H_z^2)\frac{d^4W}{dx^2dy^2}+\left(D+\frac{I}{4\pi}H_z^2\right)\frac{d^4W}{dy^4}=Q_3.$$

Endi keng uchraydigan chegaraviy shartlarni ko‘ramiz. Ular umumiy chegaraviy shartlardan olinadi.

Bu yerda fazoviy *X* va *U* o‘zgaruvchilardan (koordinatalardan) *n* va τ ga(*n* – tashqi normal, τ – urinma) o‘tamiz.

1. Plastina qirrasi bo‘yicha qattiq mahkamlangan, chegaraviy shart quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$U\big|_{\Gamma}=0,\quad V\big|_{\Gamma}=0,\quad W\big|_{\Gamma}=0,\quad \frac{dW}{dn}\big|_{\Gamma}=0,$$

bu yerda - *G* plastina sohasining chegarasi.

2. Plastina qirrasi bo‘yicha sharnir mahkamlangan bo‘lib, chegaraviy shart quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\mathrm{u}=0,\ \mathrm{v}=0,\ \mathrm{w}=0,\ \ \mathrm{M_n}=-D\left(\frac{d^2W}{dn^2}+\nu\frac{d^2W}{d\tau^2}\right)=0\,.$$

3. Plastina qirrasi bo‘yicha erkin tayanadi, chegaraviy shart quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\mathrm{W}=0\ \ ,\mathrm{M_n}=0,\sigma_n=0,\sigma_t=0$$

Boshlang‘ich shartlar esa *U, V, W* nisbatan umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$U\big|_{t_0}=U_0,\qquad \dot{U}\big|_{t_0}=\dot{U}_0,$$
$$V\big|_{t_0}=V_0,\qquad \dot{V}\big|_{t_0}=\dot{V}_0,$$
$$W\big|_{t_0}=W_0,\qquad \dot{W}\big|_{t_0}=\dot{W}_0,$$

bu yerda:

$$\dot{U}=\frac{dU}{dt},\quad \dot{V}=\frac{dV}{dt},\quad \dot{W}=\frac{dW}{dt};$$

mos ravishda bunda - u_0, v_0, w_0, u_0, v_0, w_0 – beriladigan ko‘chishlar va tezliklari vaqtining t_0 boshlang‘ich holati.

7.2. Elektron sxemalar sinf hodisalarining matematik modellari

7.2.1. Elementlarni modellashtirishning asosiy masalalari va bosqichlari

Murakkab tizimlarni avtomatik loyihalashtirishning muhim bosqichi - elementlarda sodir bo‘luvchi jarayonlarni fizik qonunlarga bo‘ysungan holda matematik ta’riflash va tahlil etish. Umumiy holda elementlar turli xil fizik tabiatda bo‘lsa ham, ularning modellari universallik xususiyatiga ega, ya’ni o‘xshashliklar tamoyiliga bo‘ysunadi.

Bu tamoyilga ko‘ra, bitta tabiatga mansub elementlarni tahlil etish uchun qo‘llaniladigan model va matematik apparat, usullar boshqa fizik tabiatga mansub elementlarni modellashtirish masalalarida ham qo‘llanilishi mumkin.

Shuning uchun chiziqli bo‘lmagan elementlarni matematik modellashtirishning asosiy masalalari va usullarini murakkab tizimlarning aniq sinfi, masalan, elektr zanjiri qonunlariga bo‘ysunuvchi keng tarqalgan elektr tizimlarda ko‘rib chiqish maqsadga muvofiq.

Bunday tizimlarda elektr signallari axborotning fizik tashuvchilari rolini o‘ynaydi, elektr zanjirlari esa signallarni ma’lum darajada o‘zgartirib beradi.

Zanjirning matematik modeli nuqta va uning holatini tavsiflovchi kuchlanishlar, kirish va chiqishdagi signallar orasidagi bog‘liklarni ifodalovchi algebraik hamda differensial tenglamalar majmuasini ifodalaydi. Odatda bunday model zanjirning ishlash rejimi va tadqiqot masalasini qo‘yilishini hisobga olgan holda zanjirning tuzilishini hamda qismiy tarkibini deyarli aniq akslantiruvchi, ideal tarkiblarning ulanganligini namoyon qiluvchi *zanjirning tuzilish modeli* yoki oddiy tuzilma asosida tuzilgan standart algoritmlar yordamida shakllanadi. Jumladan, bu yerda sxemaning ideal komponentlari berilgan o‘zgaruvchili va tavsifli sodda matematik ta’rifga ega deb olinadi.

Signallarning modeli bo‘lib analitik, grafik yoki jadval ko‘rinishida berilgan mustaqil o‘zgaruvchili vaqt funksiyalari xizmat qiladi.

Zanjirning matematik modeli kiruvchi hamda chiquvchi signallar orasidagi munosabatni aniqlash, chiquvchi tavsiflarning sxema parametrlarini o‘zgarishiga sezgirligini va nomuvozanat omillarni (harorat, shovqin, radiatsiya) baholash, turg‘un ishning sharoitlarini aniqlash, muqobillashtirish masalalarini yechish maqsadida tahlil qilinadi.

Elektr tizimlari elementlarining matematik modellarini shakllantirish va tahlil qilish algoritmlarining amaliy yechimi faqatgina hisoblash texnikasi qo‘llanilgandagina olinishi mumkin (judayam oson holatlar bundan mustasno). Chiziqli bo‘lmagan sxemalar iteratsion jarayonlarning yaqinlashish sohasida chiziqlashtiriladi, uzluksiz signallar esa berilgan vaqt oralig‘ida diskretlashtiriladi. Natijada chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalarni yechish jarayoni ularga mos chiziqli algebraik tenglamalar tizimini ko‘p marotaba yechishga olib kelinadi. Shunday qilib, chiziqli bo‘lmagan elementning modeli chiziqli modellar to‘plami ko‘rinishida tasvirlanadi (vaqtning har bir diskret momenti uchun olib borilgan iteratsiyada).

Elementlarni matematik modellashtirish kompyutyerda quyidagi asosiy masalalarni yechishga imkon beruvchi o‘zaro bog‘langan dasturlar majmuasi yordamida amalga oshiriladi:

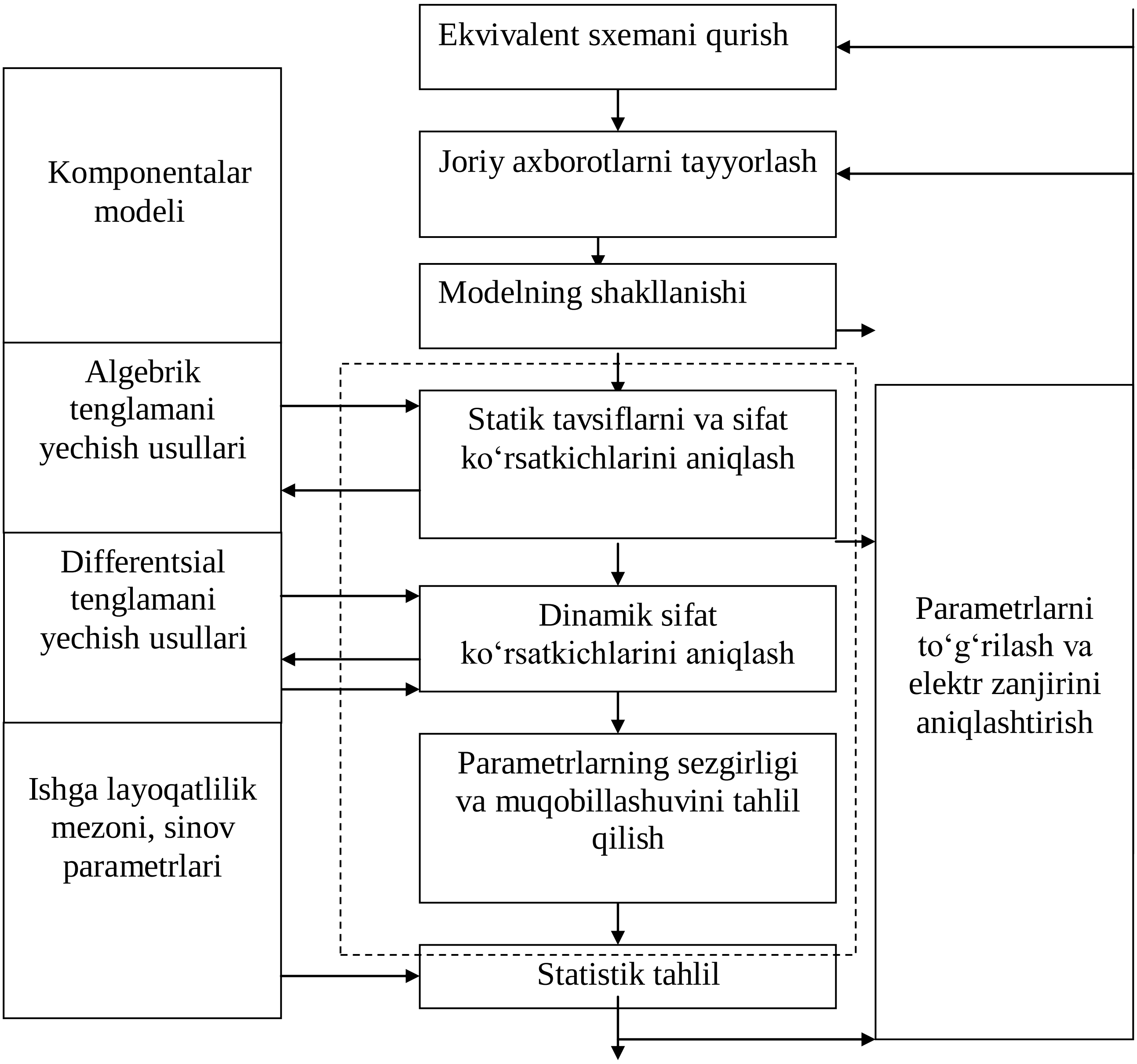
– element sxemasining matematik modelini kompyutyerda avtomatik shakllantirish;

– elementdagi jarayonlarni ta’riflovchi chiziqli bo‘lmagan algebraik hamda differensial tenglamalarni yechish;

– chiziqli bo‘lmagan elementlarni statik va dinamik rejimlarda funksiyalashtirishni tahlil qilish;

– chiquvchi tavsiflarning element parametrlari o‘zgarishiga, parametrlarning muqobillashishiga sezgirligini tahlil qilish va uning qiymatlar sohasini baholash;

– tayyorlanishning texnologik jarayonlari parametrlarining tarqoqligini hisobga olgan holda funksional jihatdan layoqatli chiqarish foizlarini hisobotlarini, chiqarishning berilgan foiziga ko‘ra sinov parametrlarining muqobillashuvini o‘zida mujassamlashtirgan mikroelektronika elementlarni (integral sxemalarni) statik o‘rganish. U ishlash muddatini hamda jihoz narxini aniqlashda kerak bo‘ladi.



7.1-rasm

Elementlarni matematik modellashtirish bosqichlarining o‘tish ketma-ketligini 7.1 - rasmda keltirilgan tarkibiy sxema ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Ixtiyoriy elementni modellashtirish jarayonida unga ekvivalent bo‘lgan sxemani qurish, chiziqli bo‘lmagan komponentalar (tranzistor, diot, varikap)ning modellaridan foydalanib ekvivalent sxemaning matematik modelini shakllantirish, elementning komponentalari parametrlari variatsiyalarida modelni o‘rganish (7.1 rasm) lozim.Elektr zanjirining ekvivalent sxemasini tuzishda uning har bir chiziqli bo‘lmagan komponentasi ekvivalent sxemasi bilan almashtirishadi. Misol tariqasida elektr kalit sxemasini ko‘rib chiqamiz (7.2,a-rasm). Chiziqli bo‘lmagan faol komponentadagi iteratsion jarayonlarni o‘ziga xos sig‘imga ega bo‘lgan qo‘shimcha tashqi kondensatorlarni komponentaga ulash orqali modellashtirish mumkin. U holda kalitning ekvivalent sxemalaridan biri 7.2 b-rasmda tasvirlangan ko‘rinishni qabul qiladi.

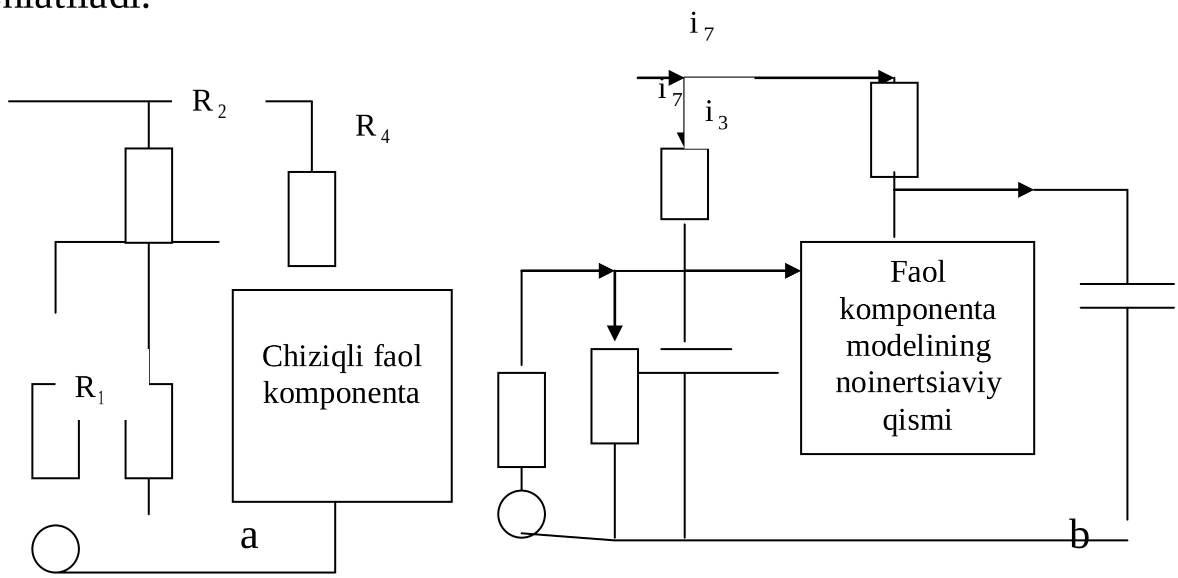
Xotirasida sxemaning har bir komponentasi uchun tuzilgan matematik modellarni o‘z ichiga oluvchi kutubxona bo‘lsa ham ekvivalent sxemani qurish masalasi kompyuterga butunlay yuklatila olmaydi. Buning sababi shundaki, tamoyilli sxema va matematik modellar haqiqiy zanjirdagi hamma bog‘lanishlarni aks ettirmaydi. Xususan integral sxemalarni ta’riflash paytida tagqatlam bilan bog‘liq bo‘lgan parazit sig‘imlar va galvanik bog‘lanishlar, elektr tabiatga mansub bulmagan aloqalar (masalan, isiqlik bog‘lanishlarda o‘z-o‘zidan qizish natijasida bir-biriga yaqin bo‘lgan komponentalar) hisobga olinmasligi mumkin. Parazit bog‘lanishlar hamda bundan kelib chiqadigan natijalarni avtomatik hisobga olish usullari hali yaratilmaganligi sababli bunday bog‘lanishli va oqibatli elektr zanjirning ekvivalent sxemasini qurish masalasini ishlab chiqaruvchining o‘zigina yechishi mumkin.

Elementning ekvivalent sxemasi matematik modellarining shakllanishi o‘tish jarayonlarini hisoblovchi chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalar tizimi va sxemaning statistik tavsiflarini aniqlashga imkon beruvchi algebraik yoki transtsendent tenglamalarni olish bilan bog‘liq. Inson tomonidan ushbu bosqichda qo‘yilgan xatolik sxemaning kelgusidagi hisob xatoliklarini belgilab beradi. Buni bartaraf etish maqsadida kompyuterni shunday darajada takomillashtirish kerakki, undagi xatolik ehtimoli minimal darajasiga yetsin.

Ekvivalent sxemani tuzish jarayoni kompyutyerda amalga oshiriladi. Unga ko‘ra hamma ishlar inson ishtirokisiz, vaqt bo‘yicha qat'iy chegaralangan tartibda avtomatik tarzda bajariluvchi elementar mantiqiy hamda arifmetik operatsiyalar ketma-ketligi yordamida olib boriladi. Kompyutyerda to‘g‘ri tuzilgan dasturdagi tenglamalarda uchraydigan xatoliklar asosan qo‘lda hisoblanadi.

Elementlar modellarini tahlil etish determinantlashtirilgan yoki statistik bo‘lishi mumkin. Masalan, raqamli sxemalarni determinantli tahlil qilish o‘z ichiga statik hamda dinamik chiquvchi tavsiflarni hamda kuchlanishlarning U_0, U_1 mantiqiy holatdagi, 0 va 1 mantiqiy holatdagi I_0, I_1toklar, iste'mol qilinuvchi P_0 *ва* P_1 quvvatlar, $\Delta U_0, \Delta U_1$ kuchlanish tushuvlari, chiquvchi signallarning vaqt bo‘yicha oldingi $T_{\varepsilon 1}$ hamda keyingi $T_{\varepsilon 2}$ kechikishlari, chiquvchi signallarning frontlarini, ularning faoliyatlarini, sxemalarning maksimal ish chastotasini, chiquvchi tavsiflarning komponentalarning parametrlari o‘zgarishiga, ularning kuchlanish iste'mol qilishiga sezgirligini; parametrlarning muqobillashuvini hamda elementlar tavsiflarini o‘z ichiga oladi.

Hisoblash natijalari elementlarni loyihalashtirishda sxemalarning komponentli parametrlarning nominal qiymatlarini tanlash uchun ishlatiladi.



7.2 rasm

Integral sxemalar (IS)ning o‘zgaruvchilari hisobdagilardan texnologik jarayonning nobarqarorligi hisobiga chetlanishini hisobga olgan holda matematik modellashtirish o‘z ichiga elementlarni statistik o‘rganishni olishi kerak. Uning vazifasi texnologik jarayonlar to‘g‘risidagi axborotni statistik jihatdan qayta ishlash, funksional layoqatli IS larni chiqarish, statistik muqobillashtirish foizini hisoblashdan iborat. Statistik tahlil loyihalashtiriladigan sxemalarning sifatini sezilarli darajada oshirishga imkon beradi.

7.2.2. Kompyuter yordamida ekvivalent sxemasining tenglamasini tuzish

Matematik model sxemasi turi sxemaning ixtiyoriy vaqt momentidagi holatini xarakterlovchi hamda modelning koordinata bazisini tashkil qiluvchi o‘zgaruvchilar (toklar hamda kuchlanishlar) majmuasi orqali aniqlanadi. Model komponentalarning xususiyatlarini va ularning sxemada birlashish xarakterini aniqlovchi joriy munosabatlarini o‘zgartirish yo‘li bilan quriladi. Komponentalarning xususiyati nuqtalar hamda ularning qutbdagi kuchlanishlari orasidagi bog‘lanishlar (*komponentli tenglamalar)* bilan ta’riflanadi. Komponentalarning birlashish xarakteri bog‘lanish tenglamalari, bu vazifani o‘tuvchi Kirxgoff tenglamalari (topologik tenglamalar) bilan aniqlanadi. Elektr zanjirining ekvivalent sxemasi uchun tuzilgan tenglamalar Kirxgoffning ikki qonuniga asoslanadi. Birinchi qonunga ko‘ra, elektr zanjirining ixtiyoriy tuguniga kiruvchi toklarning yig‘indisi shu tugundan chiquvchi toklarning yig‘indisiga teng, ya’ni tugundagi toklarning algebrik yig‘indisi i_k (ishorani hisobga olgan holda) nolga teng:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0. \qquad (7.16)$$

Kirxgoffning ikkinchi qonuniga ko‘ra, elektr zanjirining ixtiyoriy berk konturi bo‘ylab kuchlanish tushuvlari yig‘indisi, ushbu konturda ishlovchi manbalarning kuchlanishlar yig‘indisiga teng, ya’ni kontur uchlaridagi kuchlanishlarning algebrik yig‘indisi u_j 0ga teng:

$$\sum_{j=1}^{m} u_j = 0. \qquad (7.17)$$

Shuni eslatib qo‘yish joizki, kontur deb zanjirdagi ixtiyoriy berk yo‘l tushuniladi. Shoxcha - ikki qutbli elementni ifodalovchi kesma, tugun – ikki yoki undan ortiq shoxchalarning kesishish nuqtasi.

Kirxgoff qonunlari universal xarakterga ega bo‘lib, ham chiziqli, ham chiziqli bo‘lmagan zanjirlarning statik va dinamik rejimlarini tahlil qilish uchun qo‘llaniladi.

1 misol. Elektr kalit ekvivalent sxemasining matematik modelini tugunli potensiallar usulida ko‘rib chiqamiz (7.2,b-rasm). Sxemadagi 1 va 2 - nuqtalardagi potensiallarni tugunli, yerdagi shinaning potensialini

esa nolga teng deb olib, Kirxgofning birinchi qonuniga ko‘ra quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$
\begin{aligned}
& i_1 - i_2 - i_4 - i_{кир} = 0; \\
& i_5 - i_{чик} - i_6 = 0, \\
& \left.
\begin{aligned}
& \frac{E_8 - U_1}{R_1} - \frac{U_1}{R_3} + \frac{E_7 - U_1}{R_2} - C_5 \frac{dU_1}{dt} - f(U_1, U_2) = 0; \\
& \frac{E_1 - U_2}{R_4} - f_2(U_1, U_2) - C_6 \frac{dU_2}{dt} = 0.
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\qquad (7.18)
$$

Bu yerda $f(U_1, U_2) = i_{кир},\ f_2(U_1, U_2) = i_{чик}$ -mos ravishda chiziqli bo‘lmagan komponentning kiruvchi va chiquvchi tavsiflari.

(7.18) tenglamalarni tuzishda 1 va 2 - tugunlarga mos keluvchi tarmoqlarni aniqlash uchun qo‘llaniladigan zanjirdagi komponentalarning ulanish to‘g‘risidagi axborotlardan foydalanilgan. Sxemadagi bog‘lanishlar to‘g‘risidagi bunday turdagi axborotni *topologik* deb ataymiz. Bundan tashqari, tarmoq nuqtasiga tegishli formulani to‘g‘ri yozib olish uchun har bir tarmoqdagi komponenta turini ta’riflovchi axborotdan foydalanilgan. (7.18) - tenglamani yechish uchun chiziqli komponentalar nominali hamda chiziqli bo‘lmagan faol komponentalarning tavsiflari to‘g‘risidagi axborot ham zarur bo‘ladi. Bunday tavsifli hamda sonli axborotni *algebraik* deb ataymiz.

(7.18) - ko‘rinishdagi tenglamani kompyuter yordamida avtomatik tuzish uchun ekvivalent sxema to‘g‘risida foydalanuvchiga ma’lum bo‘lgan jami axborotni dasturga kiritish kerak. Buning uchun ekvivalent sxemadagi tugunlar va tarmoqlar raqamlanib chiqiladi va sxemaning har komponentasiga ta’rif beriladi. Sxema o‘z ichiga topologik (yoqilish oralig‘idagi komponenta nomeri, tugun nomerlari) va algebraik (komponenta turi va chiziqli kondensatorlar, induktivliklar hamda tok manbai va kuchlanishlarning nominallari) qismlarni oladi.

2-misol. 7.2,b-rasmda ko‘rsatilgan sxemadagi axborotlarning taqdim etilish usulini ko‘rib chiqaylik. Komponentlarning indekslari shunday qo‘yilishi kerakki, ular sxema tarmoqlarining ketma-ket kelgan nomerlariga mos kelishi kerak. Odatda, avvalo, bir turdagi komponentalar nomerlab chiqiladi, so‘ngra ikkinchi, uchinchi va h.k turlarga o‘tiladi. Sxema tugunlarini ham nomerlab chiqamiz, bunda hisob olib borilayotgan bazis tugunga nol raqami beriladi. Natijada 7.1 - jadvalga ega bo‘lamiz.

7.1. jadval

Elektron kalitning ta’riflanish natijalari

Topologik axborot			**Algebraik axborot**	
Tarmoq raqami	**Boshlang‘ich tugun raqami**	**Yakuniy tugun raqami**	**Komponenta turi**	**Nominal qiymat**
1	4	1	R	10^3 Om
2	3	1	R	$2\cdot10^3$ Om
3	1	0	R	$5\cdot10^3$ Om
4	3	2	R	$6\cdot10^2$ Om
5	1	0	C	10^{-10} F
6	2	0	C	$5\cdot10^{-11}$ F
7	0	3	E=E_7	10 V
8	0	4	$U_{чик} = E_8$	Murakkab kiruvchi signal

Chiziqli bo‘lmagan komponentalarni ta’riflash va hisoblash uchun dasturiy usuldan foydalaniladi. Joriy ma’lumotlar jadvalida har bir chiziqli bo‘lmagan komponenta to‘g‘risidagi axborotni quyidagi tartibda joylashtirib chiqamiz. Avvalo, N komponentalar ichki (tarkibiy va elektr) hamda tashqi (kuchlanish nuqtalari) parametrlarining umumiy soni (N) ni yozib olamiz. So‘ngra ichki parametrlarning sonli qiymatlarini keltiramiz, keyin tashqi parametrlarga ular tegishli bo‘lgan komponentalar nomerini berib, sanab chiqamiz. Parametrlarning kelish tartibini o‘rnatamiz va berilgan chiziqli bo‘lmagan komponentani hisoblashning qism dasturini N raqami bilan belgilaymiz. Masalan, 7.2, b-rasmda chiziqli bo‘lmagan faol komponenta kirishdagi U_3 va birlashgan nuqtadagi U_C kuchlanishlar (ular esa 5 va 6 komponentdagi kuchlanishlarga teng, ya’ni $U_3 = U_{C^5} = U_1$, $U_C = U_{C^6} = U_2$) bilan boshqariladigan MDP-tranzistor bo‘lsa [42], uni quyidagicha ta’riflash mumkin:

$$K_T = 10\frac{МкА}{В^2}; \qquad U = 4,5В; \qquad g = 0,1\frac{МкА}{В^2}; \; a = 0,005; \qquad l_0 = 0;\; 5;\; 6.$$

Bu yerda K_T-tranzistor volt-amper tavsifining keskin burilishi, U_T-ostonadagi kuchlanish, g_0-solishtirma o‘tkazuvchanlik, l_0-oqimdagi tok, a-empirik o‘zgaruvchi, 7-o‘zgaruvchilarning umumiy soni hamda birlashgan nuqta tokini hisoblovchi qism to‘plamning raqami.

Komponentning chiziqli bo‘lmagan tavsiflari bilan bog‘liq hamma hisoblar matematik modelini hisobga olgan holda qism to‘plamning ichida olib boriladi.

Ekvivalent sxemaning topologik va algebraik axborotlarini o‘zida saqlagan jadvallarni kompyuterga kiritiladi. Bundan tashqari, kompyuter xotirasiga chiziqli bo‘lmagan komponentalar va kiruvchi signallarning matematik modeli kutubxonasini tashkil qiluvchi qism dasturlari majmuasi kiritiladi.

Elektron sxemalarni matematik modellashtirishning ixtiyoriy dasturi yordamida hisoblashning ishonchliligi va samaradorligi, birinchi navbatda chiziqli bo‘lmagan sxemalar komponentalarining adekvatligi, mashinali tahlil paytida murojaat etishning aniqligi va qulayligi bilan ta’minlanadi. Komponentlarning modellarini ishlab chiqish va o‘rganish yarim o‘tkazuvchili tarkibda sodir bo‘ladigan fizik jarayonlarni tushunish, ularni ta’riflash zamonaviy matematik apparatdan to‘g‘ri foydalana olishni talab qiladi. [3] ishlarda chiziqli bo‘lmagan elektron sxemalardagi asosiy komponentlar: variakaplar, boshqariladigan induktivliklar, bioqutbli hamda MDP-tranzistorlar, yarim o‘tkazgichli diodlar matematik modellarning turli xil zamonaviy ko‘rinishlari taqdim etilgan. MDP-tranzistorlarining statik modellariga misollar 1 - ilovada keltirilgan.

Tenglamalarni tuzishning matritsa usullari. EHM da tenglamalarni avtomatik tuzish algoritmlarini olish usullari sxemaning komponentlarini matritsali ko‘rinishda tasvirlash hamda zanjirning topologik qonunlariga asoslanadi [3]. Elektron sxemalarga oid matematik modellarni shakllantirishning asosiy usullari quyidagicha: Kirxgoff, konturdagi toklar, tugundagi potensiallar, o‘zgaruvchan holatlar tenglamalarining usullaridir [3]. Bu usullar o‘zgaruvchi sifatida olingan fizik kattaliklarning tarkibi hamda sxema modellarining shakliga qarab farqlanadi.

Elektr zanjirdagi o‘zgaruvchilar hamda komponentlarga belgilash kiritamiz (7.2 jadval).

Kirxoff tenglamasi usulidan foydalanganda sxemaning modeli quyidagi tenglamalar bilan ta’riflanadi:

$$\overrightarrow{\vec{i}_{\Sigma}} = 0; \quad Z'\vec{i} = \overrightarrow{E'} \tag{7.19}$$

$$\overrightarrow{u_{\Sigma}} = 0; \quad \overrightarrow{Y'\vec{u}} = \overrightarrow{I'} \tag{7.20}$$

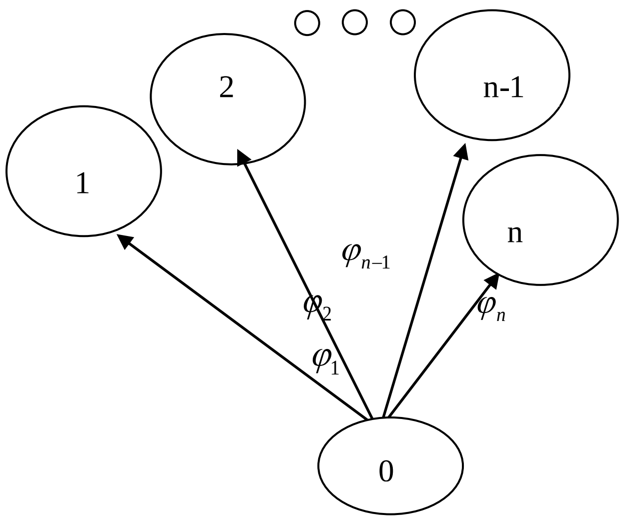
7.2. jadval

Elektr zanjiridagi o‘zgaruvchilar hamda komponentalarning belgilanishi

Modellarning tavsiflari	**Tavsiflarning belgilanishi**		
	Tarmoq	**Kontur**	**Tugun**
Tok	i	i	-
Kuchlanish (potensial)	u	-	φ,l
Qarshilik	z	Z	-
O‘tkazuvchanlik	y	-	Y
Tok manbai	I	-	I’
Kuchlanish manbai	E	E’	-

Bu yerda $\vec{i}\Sigma, \vec{l}, \vec{u}\Sigma, \vec{E'}$-tugundagi toklarning va tok manbalarining hamda konturdagi kuchlanish va kuchlanish manbalarining vektor-ustunlari; Z’,Y’-qatordagi elementlarning yig‘indisi kontur (tugun)ning shaxsiy qarshiligi (o‘tkazuvchanligi) ga teng bo‘lgan matritsalar.Elektron sxemalarni tahlil qilishning eng sodda modeli shartli potensiallar usuli bo‘yicha quriladigan tugunli tenglamalar tizimidir. Bu modelning koordinataviy bazisini $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ tugunli potensiallar, ya’ni bazis sifatida olingan ma’lum bir tugunga nisbatan sxema tugunlarining potensiallari tashkil qiladi (7.3-rasm).

Odatda bazisli tugun 0 bilan, qolgan tugunlar esa 1 dan n gacha bo‘lgan raqamlar orqali belgilanadi.



7.3-rasm

Sxemaning tugunli tenglamalarini quyidagi amallarni ketma-ket bajarish orqali hosil qilish mumkin:

1. Bazislidan tashqari, qolgan barcha har bir tugunlar uchun toklar orasidagi bog‘lanishni o‘rnatuvchi tenglamalarni Kirxgofning birinchi qonuni (toklarning algebraik yig‘indisi nolga tengligi)ga tayanib tuzamiz. Jumladan, bu yerda tugundan chiquvchi toklarni manfiy, kiruvchilarni esa musbat deb olamiz. Berilgan tugunning tenglamasiga ushbu tugun bilan bog‘liq uchta tok, hamda vaqtning ma’lum funksiyalari yoki doimiy kattaliklar bo‘lgan manbaning oldindan berilgan toklari kiradi.

2. Komponentlar toklarini tugundagi potensiallar orqali ifodalaymiz va ularni tugunlar uchun mo‘ljallangan tenglamaga qo‘yamiz. Bu ishni komponentli tenglamalar (toklar kuchlanishining funksiyalari) ko‘rinishda ifodalangandagina amalga oshirish mumkin. Ikkita tugun juftligi orasidagi kuchlanish mos tugun potensiallarining ayirmasiga teng bo‘lganligi uchun, komponentlarning nuqtalarini ham tugunli potensiallar bilan ifodalash mumkin.

$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ tugun potensiallar oldidagi koeffisientlarni guruhlab, manbaning tugunlardagi tokni tenglamaning o‘ng qismiga o‘tkazamiz. Natijada quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{aligned} Y_{11}\varphi_1 + Y_{12}\varphi_2 + ... + Y_{1n}\varphi_n = I_1^{'}; \\ Y_{21}\varphi_1 + Y_{22}\varphi_2 + ... + Y_{2n}\varphi_n = I_2^{'}; \\ Y_{n1}\varphi_1 + Y_{n2}\varphi_2 + ... + Y_{nn}\varphi_n = I_n^{'}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

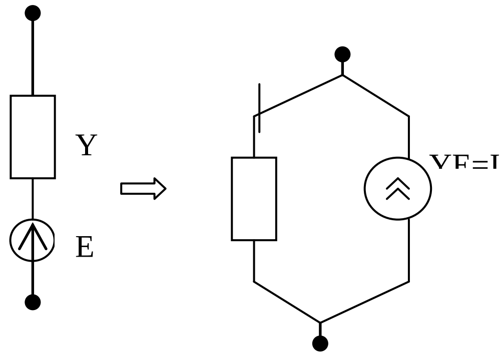
Bu tizimda $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ noma’lumlar, koeffisientlar vazifasini esa berilgan tugun bilan bog‘liq bo‘lgan komponentlarning yig‘indisiga teng bo‘lgan shaxsiy o‘tkazuvchanliklar $Y_{kk}\ (k = \overline{1,n})$ va tugunlar orasidagi $Y_{ks}\ (k,s = \overline{1,n};\ k \neq s)$ o‘zaro o‘tkazuvchanliklar o‘taydi. Erkin hadlar esa $I_k^{'}\ (k = \overline{1,n})$ toklarning tugundagi qiymatlari sanaladi (tokning real manbalari hamda chiziqli bo‘lmagan komponentlarning toklari).

(7.21) tugun tenglamalar tizimini matritsa ko‘rinishida tasvirlaymiz:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & ... & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & ... & Y_{2n} \\ ..... & ..... & .... & ... \\ Y_{n1} & Y_{n2} & ... & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ ... \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{'} \\ I_2^{'} \\ ... \\ I_n^{'} \end{bmatrix} \qquad (7.22)$$

yoki $Y\vec{\varphi} = \overline{I}'$

Bu yerda $\vec{\varphi}$-tugunli potensiallarning n-o‘lchovli vektori, Y-n-tartibli o‘tkazuvchanlikning kvadrat matritsasi va $\vec{I}'$-toklarning n-o‘lchovli vektori. (7.22) tenglamalar tizimini yechish natijasida $\vec{\varphi}$ vektorni topish mumkin. So‘ngra, zaruratga qarab, sxemaning tugunlar orasidagi kuchlanishi mos tugun potensiallari ayirmasi ko‘rinishida topiladi.



7.4 rasm

Shunday qilib, tugun tenglamalari komponentli tenglamalar bilan hamohanglikda sxemaning ixtiyoriy qismidagi toklar va kuchlanishlarni(yoki ular orasidagi munosabatni) topishga imkon beradi. Shuni qayd etish joizki, tugunli potensiallar usuli sxemadagi kuchlanishlar manbaini tok manbalariga keltirib olishni talab etadi (7.4-rasm).

Tugunli potensiallar usulini aniq bir misolda ko‘rib chiqaylik.

3-misol. Ta’riflangan prosedurani qo‘llagan holda (7.20) - sxema uchun tenglamalar tizimni tuzing.

1. Tenglamalar tizimi Kirxgoffning birinchi qonuniga ko‘ra quyidagi ko‘rinishda yozib olinadi:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 - 1\ \textit{tugun uchun}; \\ i_3 - i_4 + i_5 = 0 - 2\ \textit{tugun uchun}. \end{cases} \tag{7.23}$$

2. (7.23) tenglamaga Om qonunini qo‘llagan holda tugunli potensiallardan, ular orasidagi kuchlanishga o‘tib, quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{E - u_1}{R_1} - \dfrac{u_1}{R_2} - \dfrac{u_1 - u_2}{R_3} = 0, \\ \dfrac{u_1 - u_3}{R_3} - \dfrac{u_2}{R_4} + I = 0. \end{cases} \tag{7.24}$$

3. (7.24) ifodani standart ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) u_1 - \dfrac{1}{R_3} u_2 = \dfrac{E}{R_1} \\ -\dfrac{1}{R_3} u_1 + \left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right) U_2 = I \end{cases} \tag{7.25}$$

4. (7.25) tenglamani matritsali ko‘rinishda yozib olaylik:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix},$$

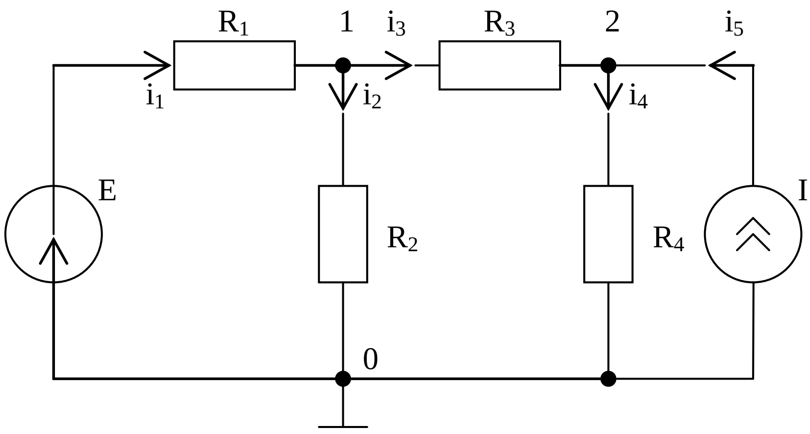
bu yerda:

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3};$$

$$Y_{12} = -\frac{1}{R_3};$$

$$Y_{21} = -\frac{1}{R_3}; \quad Y_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4};$$

$$I_1' = \frac{E}{R_1}; \quad I_2' = I.$$



7.5-rasm

Konturli toklar usulida sxemadagi ixtiyoriy yo‘nalishda oquvchi j_k toklarning k ta mustaqil konturi ajraladi. Bu nuqtalar mustaqil o‘zgaruvchilar sifatida olinadi. Ularni aniqlash maqsadida har bir kontur uchun Kirxgoffning ikkinchi qonuniga ko‘ra tenglamalar tuziladi. Natijada quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo‘lamiz:

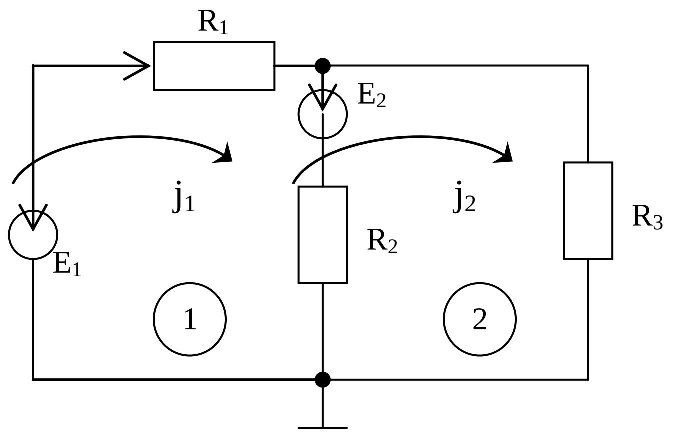
$$\left.\begin{aligned} z_{11} j_1 + ... + z_{1k} j_k &= E_1'; \\ z_{k1} j_1 + ... + z_{kk} j_k &= E_k' \end{aligned}\right\}$$

Bu matritsa ko‘rinishida tasvirlanadi:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & ... & z_{1k} \\ ... & ... & ... \\ z_{k1} & ... & z_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ ... \\ j_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1' \\ ... \\ E_k' \end{bmatrix}, \quad \textit{яъни} \quad Z\vec{j} = \vec{E}'. \tag{7.26}$$

Bu yerda, Z-kxk - o‘lchovli kontur qarshiliklar matritsasi, undagi z_{ii}- diagonal elementlar konturning qarshiliklari, diagonal bo‘lmagan z_{is} $(i \neq s)$lari esa s-konturga nisbatan tok i-konturdagi qarshiligi, $\vec{j}$ - konturli toklarning k-o‘lchovli vektori, $\vec{E'}$ - kuchlanish manbailarining k-o‘lchovli vektori. Konturli toklar usulida sxemadagi tok manbaini kuchlanish manbalariga o‘zgartirishni talab etadi. Sodda misolni ko‘rib chiqaylik.

4.4 misol. Berilgan sxema (7.6-rasm) tenglamasini konturli tok usulida (4.11) matritsali ko‘rinishda yozib olish natijasida quyidagiga ega bo‘lamiz:



$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1-E_2 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Bu yerda

$r_{11}=R_1+R_2,\quad r_{12}=-R_2,$

$r_{21}=-R_2,\quad r_{22}=R_2+R_3,$

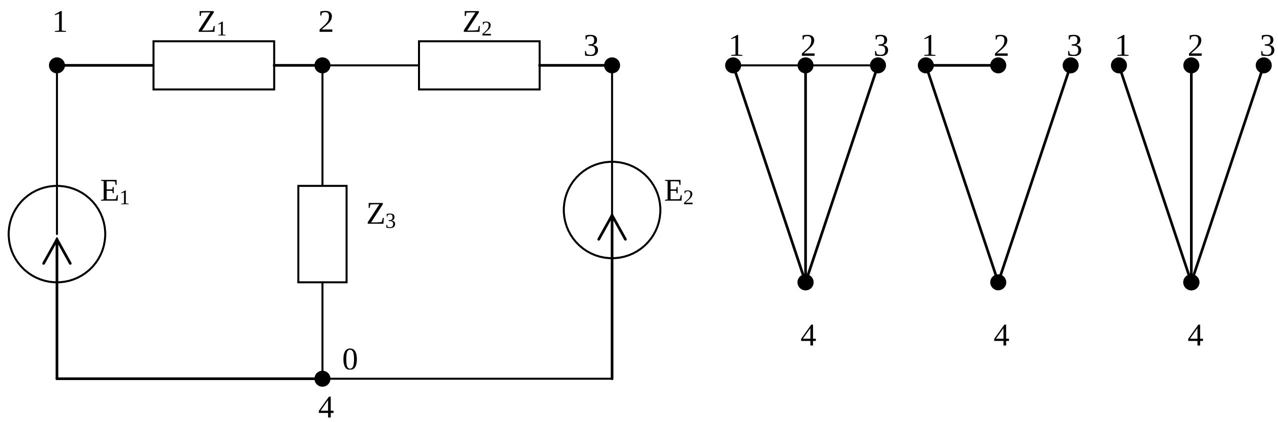
$E_1^{'}=E_1-E_2,\quad E_2^{'}=E_2$

7.6 rasm

Zanjirlarni tahlil qilishning nisbatan yangi va umid bag‘ishlovchi usuli- [31,43,44,46] ishlarda batafsil ta’riflangan o‘zgaruvchan holatlar usulidir. Usulning asosiy mazmuni elektr zanjirining ekvivalent sxemasini topish uchun i va φ o‘zgaruvchilarni bir vaqtda qo‘llashdan iborat.

7.2.3. Ekvivalent sxemalarning algebraviy-topologik ta’rifi

Sxemani topologik ta’riflash vazifasi elektron sxema to‘g‘risidagi grafik axborotni, ya’ni undagi komponentlarning birlashish haqidagi ma’lumotni keyinchalik tenglama tuzishda qo‘llash mumkin bo‘lgan algebraviy tilga o‘girishdir. Topologik ta’riflash asosida grafa yotadi. Bu *tarmoqlar* deb nomlanuvchi ixtiyoriy uzunlik va shakldagi kesmalar bilan *uchlar* deb nomlanuvchi tarmoqlarning kesishish nuqtalari majmuidir.



7.7-rasm

а *б*

Grafaga tegishli bo‘lgan tarmoqlarning ixtiyoriy majmui *qism grafasi* deb ataladi. Umumiy uchga ega bo‘lmagan qism grafalar *bog‘lanmagan grafani* hosil qiladi. Grafaga biriktirilgan asosiy topologik axborot sxema elementlari orasidagi bog‘lanishni grafik ko‘rinishda ifodalaydi.

Sxemaning (7.7, a-rasm) grafani qurish uchun uning har bir ikki qutbli komponentini o‘ziga xos belgi - tarmoq (7.7-b rasm) bilan almashtirish kerak. Grafalar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri *grafa daraxtidir*.

Grafa daraxti deb, hamma tugunlarni o‘z ichiga olgan, lekin bitta ham konturga ega bo‘lmagan tarmoqlar majmui tushuniladi. Bitta grafada bir nechta daraxt bo‘lishi mumkin (7.7,v,g-rasmlar). Daraxtga kirmagan tarmoqlar majmui *daraxt qo‘shimchasi* deyiladi. Bu tarmoqlarni *xordlar*, daraxtga kirgan grafa tarmoqlarini esa *qirralar* deb ataymiz. Adabiyotda xordlar bog‘lanishlar, zvenolar, bosh tarmoqlar deb ham ataladi.

Sxemadagi bog‘lanishlarning grafik tasviri algebraviy tilga topologik matritsalar yordamida o‘giriladi.

Ihtiyoriy topologik matritsani qurishda, avvalo, grafaning tuguni hamda tarmoqlarini raqamlab chiqish, so‘ngra grafaning musbat yo‘nalishini ihtiyoriy ravishda tanlab olish mumkin. Topologik matritsalarni ko‘rib chiqishni birinchi marta Kirxoff tomonidan taklif etilgan tarkibiy matritsadan boshlaymiz. Qatorlari grafaning har xil tugunlariga, ustunlari esa grafa tarmoqlariga to‘g‘ri keluvchi matritsani tuzamiz. Matritsaning i-qatori qanday tarmoqlar i-tugun bilan bog‘langanligini, j- ustun grafning j-tarmog‘i qanday tugunlar bilan ulanganini ko‘rsatadi. Bu matritsaning har bir a_{ij}-elementi j-tarmoq i-tugunga mos kelganida +1, j-tarmoq i-tugundan uzoqlashsa -1; j-tarmoq i-tugun bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa 0 qiymat qabul qiladi. Masalan 7.7, a-rasmdagi sxemaga to‘g‘ri keluvchi grafa (8-rasm) uchun *tarkibiy matritsa yoki birlashmalar (intsidient) matritsasi* deb ataluvchi quyidagi matritsaga ega bo‘lamiz:

$$K=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

U grafada saqlanuvchi bog‘lanishlar to‘g‘risidagi axborotni algebraik ko‘rinishda yozib olishga imkon beradi.

Kompyuterga tugun hamda ularni birlashtiruvchi tarmoqlar raqamini o‘z ichiga olgan sxema kiritilganligi bois, sxemaning tarkibiy matritsasini avtomatik shakllantiruvchi dastur tuzish mumkin. Bu matritsaning har bir ustunida ikkita nol element, 1’ va -1 joylashadi. Chunki har bir tarmoq bitta tugundan chiqib, boshqasiga kiradi. Shu sabab har bir ustun elementlarining yig‘indisi, bundan esa matritsaning hamma elementlari yig‘indisi nolga teng. Demak, ixtiyoriy qatordagi elementlar yig‘indisi, teskari ishora bilan olingan barcha qatorlardagi elementlar yig‘indisiga teng. Bu degani, bitta qator ortiqcha axborotga ega bo‘lganligi uchun tashlab yuborilishi mumkin. Tashlab yuborilgan qator sxemaning qolgan tugunlaridagi potensiallar sanalishini boshlaydigan tayanch tugunga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun, odatda bazis tugunga tegishli bo‘lgan qator, masalan, K matritsaning 4-qatori o‘chiriladi. Insidentlarning qisqartirilgan matritsasi *tugunlar matritsasi* deb ataladi. Grafa uchun (7.8-rasmga qarang) uning ko‘rinishi quyidagicha:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

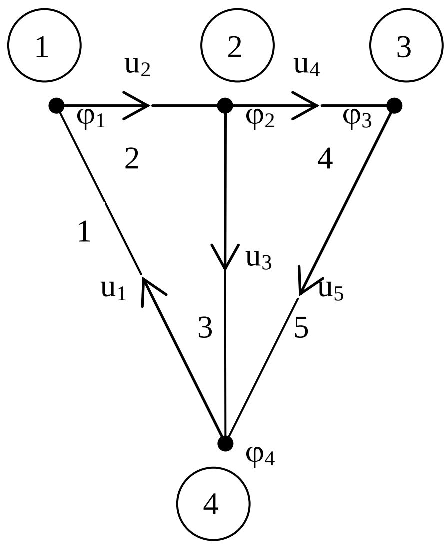
Tugunlar matritsasidan uning elementlariga ma’lum bir fizik ma’no berib, Kirxgof tenglamasi bo‘yicha tuzilgan tenglamalarni yozib olishda foydalanish mumkin. Masalan, n-ustundagi har birlik elementni i_n tokning n-tarmoqdagi qiymati deb olish mumkin. U holda A matritsaning k-qatordagi toklar yig‘indisi k-tugundagi toklarning algebraik yig‘indisiga, demak Kirxgofning birinchi qonuniga ko‘ra, nolga teng. Buni matematik ko‘rinishda yozib olish uchun, hamma tarmoqdagi $i_1, i_2, ..., i_n$ toklar majmuasini

$$\dot{i} = [i_1, ..., i_n]^t$$

vektor-ustun orqali ifodalaymiz.

U holda Kirxgofning birinchi qonunini matritsali ko‘paytma ko‘rinishida tasvirlaymiz:

$$A\dot{i} = \vec{0}. \qquad (7.27)$$



7.8-rasm

Grafa uchun (7.8-rasmga qarang) (7.27) - tenglamani toklar uchun algebraik tengliklar tizimiga keltirib olish mumkin:

$$i_1 - i_2 = 0, \qquad i_2 - i_3 - i_4 = 0, \qquad i_4 - i_5 = 0.$$

Tarmoqlardagi kuchlanishlar va tugunlarning potensiallari orasida bog‘lanish o‘rnatamiz. Sxemaning hamma tarmoqlari qisqichlaridagi kuchlanishlar majmuini $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]^t$ vektor-ustun, barcha tugunlarning potensiallar majmuini $\vec{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^t$ vektor-ustun bilan belgilab, tarmoqlarning kuchlanishini quyidagi formula bo‘yicha topish mumkin:

$$\vec{u} = A^t \vec{\varphi}. \tag{7.28}$$

Ko‘rib chiqilayotgan misol uchun quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$u_1 = \varphi_1; \quad u_2 = \varphi_1 + \varphi_2; \quad u_3 = -\varphi_2; \quad u_4 = -\varphi_2 + \varphi_3; \quad u_5 = -\varphi_3. \tag{7.29}$$

(7.28) tenglamada A matritsani transponerlash $\vec{\varphi}$ vektor-ustunning mos elementlariga ko‘paytirilgan elementlarni ustun bo‘yicha yig‘ish uchun zarur. (7.29) dagi φ_n ning ishoralari 7.8- rasmda tarmoqlarning strelkasi bilan belgilangan potensiallarning ortish yo‘nalishiga to‘g‘ri keladi. Amaliy misolni ko‘rib chiqaylik.

5-misol. MDP-tranzistordagi elektron kalitning (7.9,a-rasm) ekvivalent sxemasi uchun matritsa tuzamiz hamda tenglamalarni Kirxgoff qonunlariga ko‘ra yozib olamiz.

1. Sxema grafasini tuzamiz (7.9,b-rasm).
2. Sxema tugunlarining matritsasini tuzamiz:

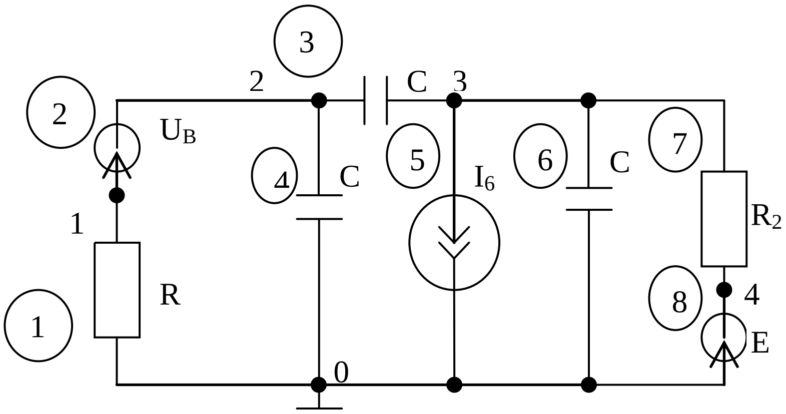
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Kirxofning $A \cdot \vec{i} = \vec{0}$ matritsali ko‘rinishdagi birinchi qonunidan foydalangan holda tarmoq toklari uchun quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo‘lamiz:

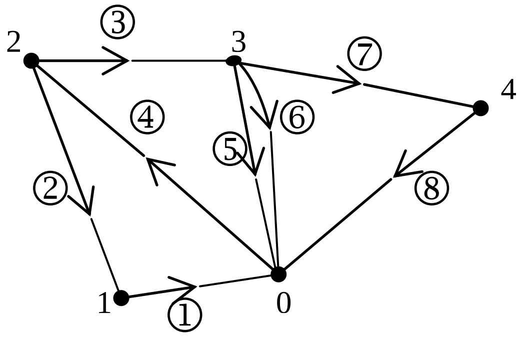
$$A \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_8 \end{bmatrix} = \vec{0}, \qquad yoki \qquad \left. \begin{array}{c} -i_1 + i_2 = 0; \\ -i_2 - i_3 + i_4 = 0; \\ i_3 - i_5 - i_6 - i_7 = 0; \\ i_7 - i_8 = 0. \end{array} \right\}$$

4. $\vec{u} = A^t \vec{\varphi}$ formulasidan foydalanib, tugunlar orasidagi kuchlanishlar uchun quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo‘lamiz:

$$A^t \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{bmatrix}, \qquad yoki \qquad \left.\begin{array}{c} -\varphi_1 = u_1; \\ \varphi_1 - \varphi_2 = u_2; \\ -\varphi_2 + \varphi_3 = u_3 \\ \varphi_2 = u_4; \\ -\varphi_3 = u_5 = u_6; \\ \varphi_3 + \varphi_4 = u_7 \\ -\varphi_4 = u_8 \end{array}\right\}$$



a



b

7.9-rasm

Zanjirlarning algebraik-topologik tenglamalari. Yuqorida zanjirlardagi algebraik va topologik munosabatlar alohida-alohida ko‘rib chiqilgan**.** Kompyutyerda tenglamalarni tuzishning yakuniy bosqichida sxemaning algebraik va topologik ta’riflari birlashtiriladi. Sxemaning modelini tugunli potensiallar usulini qo‘llagan holda, ya’ni $Y\vec{\varphi} = \vec{I}$ ko‘rinishda tuzamiz. Bu usulda umumlashgan y - tarmoqlar uchun

$\dot{i}+\vec{I}=y\left(\vec{E}+\vec{u}\right)$ ko‘rinishdagi Om qonuni qo‘llaniladi. Oxirgi ifodaning ikkala tomonini A matritsaga ko‘paytirib, (7.27), (7.28) formulalarni hisobga olgan holda, zaruriy o‘zgartirishlar kiritib quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$A\dot{i}+A\vec{I}=Ay(\vec{E}+\vec{u}). \tag{7.30}$$

$A\dot{i}=\vec{0}$ bo‘lgani uchun, (4.15) formula quyidagi ko‘rinishga kelib qoladi:

$$\begin{gathered} Ay\vec{u}=A\left(\vec{I}-y\vec{E}\right), \\ yoki \\ (AyA^{t})\vec{\varphi}=A\left(\vec{I}-y\vec{E}\right), \end{gathered} \tag{7.31}$$

Bu yerda $\vec{\varphi}$-tugunli potensiallar vektori.

(7.31) va (7.22) formulalarni solishtirish natijasida quyidagi xulosalarga kelamiz, $AyA^{'}$ uch o‘lchovli matritsa Y tugunli o‘tkazuvchanliklar matritsasi, $A\left(\vec{I}-y\vec{E}\right)$ ifoda esa $\vec{I}$ tokning ekvivalent manbalari vektoridir. Uning har bir tashkil etuvchisi tugunga ulangan tok manbalarining algebraik yig‘indisi sanaladi, jumladan, ushbu tugun tarmoqlarining $\vec{E}$ kuchlanish manbalari $y\vec{E}$ tok manbaiga keltirilgan. $\vec{\varphi}$ tugun potensiallardan tarmoqning passiv $\vec{u}'$ kuchlanishlar va $\vec{i}'$ toklarga $\vec{u}'=A^{t}\vec{\varphi}-\vec{E},\ \vec{i}'=y\vec{u}'$ formulalar yordamida o‘tish mumkin.

Mashhur monografiyalarda [5] zanjirlarning algebraik-topologik tenglamalari sinchkovlik bilan ko‘rib chiqilgan, algebraik-topologik tenglamalarni kompyuter yordamida tuzish algoritmlari keltirilgan.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, ekvivalent sxemani ta’riflovchi tenglamalarning koeffisientlar matritsasida nol elementlar juda ko‘p. Dasturni tuzish paytida nol elementlarning joylashish qonuniyatlarini qo‘llash natijasida kompyutyerdagi xotira hajmini qisqartirish hamda bir vaqtning o‘zida hisoblashlar vaqtini kamaytirish mumkin. Vaqtni qisqartiruvchi maxsus proseduralar [3] da talabga hisoblashlar sonini kamaytirish (nol elementlar ustida arifmetik amallar bajarilmaydi), uzun operatsiyalarni qisqaroqlari bilan almashtirish orqali erishiladi. Kompyutyerda elementlarni modellashtirishga ketadigan vaqtni qisqartirish uchun topologik matritsalar xossalaridan foydalaniladi: nol elementlarning soni ancha ko‘p, hamma nol elementlar +1 yoki -1 ga teng. Murakkab sxemaning matritsasi odatda blok ko‘rinishida bo‘ladi. Bu ko‘paytirish va qo‘shishning uzundan-uzun amallarini solishtirish, qo‘shish va ayirish amallari bilan almashtirishga, hisoblashlar sonini qisqartirishga imkon beradi.

7.2.4. Ba’zi bir elektron sxemalarning matematik modellari

Quyida ba’zi bir elektron sxemalarni formal matematik modellari keltirilgan. Bu modellarni keltirishdan maqsad elektron sxemalarning matematik modellari qanday ko‘rinishda bo‘lishini o‘quvchiga yetkazishdan iborat. Mazkur modellarni keltirib chiqarishni o‘quvchi maxsus adabiyotlardan, xususan [5] manbadan o‘qib, o‘rganib olishi mumkin.

Elektron sxemalar elementlari chiziqsiz statik rejimining formal modeli

Bu holda elektron zanjirlarning matematik modellari umuman olganda quyidagi ko‘rinishdagi chiziqsiz algebraik tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ &f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ &.............................. \\ &f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

(7.32)da $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ va $\vec{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ vektorlarni kiritib uni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\vec{f}(\vec{X}) = 0. \qquad (7.33)$$

(7.32) (yoki (7.33)) tenglamani yechish usullari qo‘llanmaning keyingi mos bo‘limlarida berilgan.

Elektron sxemalar o‘tish jarayonlarining matematik modeli

Bu nuqtaga joylashgan parametrlar bilan bog‘liq elektron sxemalar dinamik rejimining matematik modeli quyidagi ko‘rinishdagi 1-tartibli oddiy differensial tenglama va unga qo‘yilgan Koshi masalasi bilan aniqlanadi:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x\Big|_{t=t_0} = x(t_0). \qquad (7.34)$$

Bu yerda t - erkin o‘zgaruvchi (vaqt); $x = x(t)$ - erkin bo‘lmagan o‘zgaruvchi, ya’ni topilishi kerak bo‘lgan funksiya va u tok va kuchlanishni ifodalaydi; $f(x,t)$ - berilgan funksiya.

Elektron sxemalar elementlari sezgirligining matematik modeli

Sezgirlik S_i^j ning funksiyasi deganda, α_i parametr bo‘yicha F_j funksiyadan olingan hosila va $F_j(t, \alpha_i^0)$ nominal yechim bo‘yicha hisoblanish tushuniladi, ya’ni:

$$S_i^j = \frac{\partial F_j}{\partial \alpha_i}, \quad \alpha_i = \alpha_i^0.$$

Bu jarayonning formal matematik modeli chiziqli oddiy differensial tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasi bo‘yicha aniqlanadi, ya’ni:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dF_j}{dt}=X_j(F_j,\alpha_i,t), & i=\overline{1,n};\\ F_j(\alpha_i^0,t)\Big|_{t=t_0}=F_{j^0}, & j=\overline{1,m}.\end{array}\right\} \quad (7.35)$$

(7.35) da F_j - o‘zgaruvchi holat va sxema parametrlari yoki sxemani chiqishining (sxema tugunidagi kuchlanish) tasniflari; α_i - sxemaning parametrlari, $\alpha_i\in[a_i,b_i]$; α_i^0-parametrlarning nominal qiymatlari.

Chiziqsiz integral sxemalarning matematik modellari

Chiziqsiz integral sxemalarning keng sinfi quyidagi ko‘rinishdagi 1-tartibli chiziqsiz oddiy differensial tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}(\vec{u})du_1/dt+a_{12}(\vec{u})du_2dt+...+a_{1n}(\vec{u})du_n/dt=b_1(\vec{u});\\ a_{12}(\vec{u})du_1/dt+a_{22}(\vec{u})du_2/dt+...+a_{2n}(\vec{u})du_n/dt=b_2(\vec{u});\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\ a_{n1}(\vec{u})du_1/dt+a_{n2}(\vec{u})du_2/dt+...+a_{nn}(\vec{u})du_n/dt=b_n(\vec{u}),\end{array}\right\} \quad (7.36)$$

bu yerda $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$ sxema tugunlaridagi kuchlanish vektori; $a_{ik}(i,k=\overline{1,n})$- uning parametrlari; $b_i(\vec{u}),\ i=\overline{1,n}$ - tokning ekvivalent manbalari. (7.36) tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasi qo‘yiladi:

$$A(\vec{u})d\vec{u}/dt=\vec{b}(\vec{u}),\quad \vec{u}(0)=\vec{u}_0. \quad (7.37)$$

(7.37) da $A(\vec{u})=\begin{pmatrix} a_{11}(\vec{u})\dots\dots\dots a_{1n}(\vec{u})\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}(\vec{u})\dots\dots\dots a_{nn}(\vec{u})\end{pmatrix},\quad \vec{b}(\vec{u})=\begin{pmatrix} b_1(\vec{u})\\ b_2(\vec{u})\\ \dots\dots\\ b_n(\vec{u})\end{pmatrix},\quad \vec{u}=(u_1,u_2,...,u_n)^T.$

Taqsimlangan parametrli integral tuzilmalarning matematik modellari

Raqamli axborot tizimlari ishining chastota diapazoni va ularning integratsiya darajasining oshishi natijasida mikrosxemalarning aktiv va passiv komponentalari o‘lchovlari ancha kamaydi. Shu bois oxirgi yillarda taqsimlangan parametrli axborot tizimlarini modellash dolzarb muammo bo‘lib qoldi va ularning to‘plangan parametrli komponentalari modellaridan foydalanish cheklanib bormoqda.

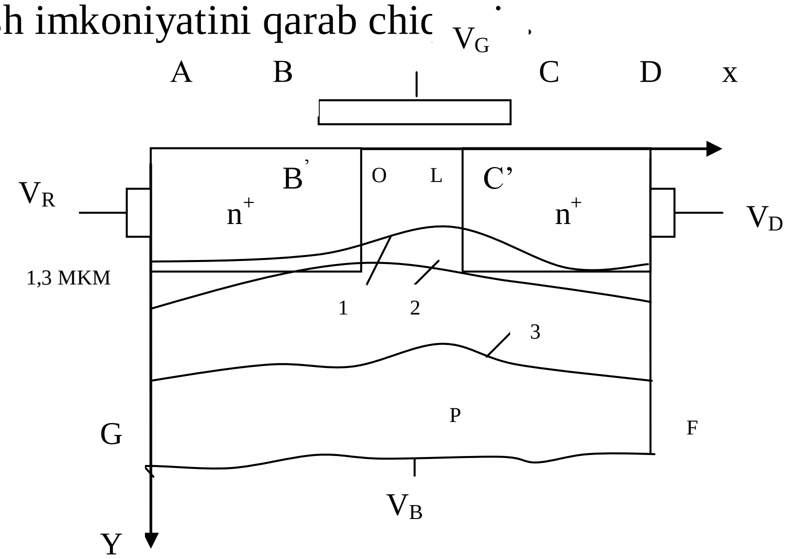
Taqsimlangan parametrli yarim o‘tkazgichli integral tizimlarni modellash masalasini MDP-tuzilmasi misolida ko‘rib chiqamiz [3]. MDP-tuzilmalar ham bipolyar tranzistorlar kabi zamonaviy integral sxemalarning asosiy komponentalari hisoblanadi.

Shu bilan birga muhandislik amaliyotining ko‘rsatishicha, bunday tuzilmalar radioelektronikaning (funksional elektronika) mustaqil elementlari (qurilmalari) ham bo‘lishi mumkin. Ya’ni ish asosida alohida elementlar funksiyalarining integratsiyasi yotuvchi radioelektron tizimlarning elementlari bo‘lishi mumkin [3]. Oddiy funksional qurilmalarga rezoelektrik rezonatorlar, Xoll datchiklari, manfiy differensial qarshilikka ega bo‘lgan uskunalar – negatronlar, zaryadlangan aloqali uskunalar, Ganna diodlari misol bo‘ladi.

Taqsimlangan MDP-tuzilmalarini modellash yetarlicha murakkab bo‘lgan xususiy hosilali nochiziq differensial tenglamalar tizimini yechish zaruriyati bilan bog‘liq. Bunday tizimlarning analitik yechimlarini faqat mustasnolik holatida topish mumkin. Asosan ikki o‘lchovli MDP-tuzilmalarni tadqiq qilish uchun har xil sonli usullar qo‘llaniladi.

Differensial tenglamalarning to‘r sohasini va chekli-ayirmali approksimatsiyasini qurishning bir qancha yo‘llari mavjud.

Ikki o‘lchovli MDP – tuzilmasini tavsiflovchi chekli-ayirmali tenglamalarni yechish uchun blokli yuqori relaksatsiya usulidan foydalanishga asoslangan Nyuton va quvish usullarining kombinatsiyasi qo‘llash imkoniyatini qarab chic



7.10 – rasm.

Rasmda MDP – tuzilmasi grafik modelining [0,4] kanal bo‘ylab kesishi tasvirlangan.

Model to‘g‘ri burchakli p chegaralarga, n^+ o‘tishlarga, p taglikka, kuchli legirlangan n^+ donor sohalariga ega. MDP – tuzilmaning grafik tasvirida ekvipotensial chiziqlari ko‘rsatilgan:

$$l - u = -0{,}02B; \quad 2 - u = -0{,}25B; \quad 3 - u = -3B.$$

bu yerda o‘tish keskin hisoblanadi, ya’ni n^+- va p - sohalaridagi aralashmalar konsentratsiyalari berilgan doimiy kattaliklar, deb hisoblanadi. Kataklardagi kuchlanish: V_D-oqib tushish; V_R-oqim boshi;

V_B- taglik. Kanaldagi $\vec{j}=(j_x, j_y)$ tokining zichlik vektori faqat x-komponenta yordamida aniqlanadi.

Kanaldagi asosiy elektron tashuvchilar - dreyf va diffuziyalarni hisobga olganda tokning zichlik komponentalari uchun tenglama quyidagi ko‘rinishga ega:

$$j_x = \frac{\mu q n}{\beta}\frac{du}{dx} - \frac{\mu q}{\beta}\frac{dn}{dx}, \qquad j_y = 0,$$

bu yerda μ- elektronlar qo‘zg‘aluvchanligi (doimiy kattalik); q - elektron zaryad; $\beta = q/kT$ - koeffisient (harorat potensialiga teskari kattalik); $u = u(x,y)$- elektrostatik potensial; $n = n_i e^{u-u_F-u_n}$- elektronlar kontsentratsiyasi; u_F- yarim o‘tkazgichning Ferm darajasi; $u_n = u_n(x)$-elektronlarning Ferm kvazidarajasi.

Tokni hisoblash uchun asosiy munosabatlar uzluksizlikning quyidagi statsionar integral tenglamalari hisoblanadi:

$$\int_V div\,\vec{j}d\upsilon = l = const\,. \tag{7.38}$$

$u(x,y)$ potensiali yarim o‘tkazgichda Puasson tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\beta q}{\varepsilon_s}(N(x,y) - n + p), \tag{7.39}$$

bu yerda ε_s- kremniyning dielektrik singuvchanligi; $N(x,y)$ - aralashmaning kontsentratsiyasi; $p = n_i e^{u_p+u_F-u}$- teshikchalar kontsentratsiyasi; u_p- teshikchalarning Ferm kvazidarajasi (doimiy kattalik). (7.38), (7.39) tenglamalar tizimi tok va potensialning yarim o‘tkazgichda taqsimlanishini to‘liq tavsiflaydi.

Qaralayotgan holat uchun (7.38) formulani konkretlashtiramiz. Kanaldagi tok ixtiyoriy ko‘ndalang kesmalarida doimiy kattalik bo‘ladi. Unda tok zichligini elementar yuza va perpendikulyar yo‘nalish bo‘yicha integrallab quyidagi ifodani olamiz:

$$I_D = z\frac{qn_i}{\beta}\cdot\frac{du_n}{dx}\int_0^{x_\mu} \mu e^{u-u_F-u_n}dy, \tag{7.40}$$

bu yerda z- kanal qalinligi; x_μ- kanal kengligi. (7.40) formuladan o‘zgaruvchilarni 0 dan L gacha kanal uzunligi bo‘yicha integrallab, kanaldagi to‘liq tok kattaligini olamiz:

$$I_D = B\frac{u_n(L) - u_n(0)}{\int_0^L p^{-1}(x)dx},$$

bu yerda:

$$B = \frac{rqn_i}{\beta}; \qquad p(x) = \int_0^{x_\mu} \mu e^{u-u_E-u_n} dy.$$

(7.40) ifodasini x nuqtagacha kanal uzunligi bo‘yicha integrallab elektronlarning Ferm kvazidarajasining hisoblovchi formulasini olamiz:

$$u_n(x) = u_n(0) + (u_n(L) - u_n(0)) \cdot \frac{\int_0^x p^{-1}(x)dx}{\int_0^L p^{-1}(x)dx}.$$

$u_n(x)$ va $u(x,y)$ funksiyalar uchun chegaraviy masofalarni aniqlaymiz. Kanalning chegaraviy nuqtalarida Ferm elektronlarining kvazidarajasi uchun birinchi chegaraviy shart berilgan:

$$u_n(0) = \beta V_R, \ U_n(L) = \beta K_D. \tag{7.41}$$

$u(x,y)$ funksiyasi uchun faqat yarim o‘tkazgich sohasidagina chegaraviy shart beramiz. $BB'CC'$ oksidlanish sohasida potensialning taqsimlanishini chiziqli deb hisoblaymiz. Misol uchun $u_s = u(x,0)$- $B'C'$ oksidlanuvchi yarim o‘tkazgich bo‘limi chegarasidagi $u(x,y)$ potensial qiymati bo‘lsin. Elektrik indutsiya $\varepsilon_{ox}L_y = \varepsilon_{ox}\frac{\partial u}{\partial y}$ning normal tashkil etuvchi vektorni quyidagi ifoda yordamida approksimatsiyalaymiz:

$$\varepsilon_{ox}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{sio} = \varepsilon_s \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{si},$$

potensial uchun uchinchi chegaraviy shartni olamiz:

$$\varepsilon_s \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \varepsilon_{ox}\frac{\beta V_G - u(x,0)}{t_{ox}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \chi_{-1}u\big|_{y=0} + g_{2;}$$

$$\chi_{-1} = \frac{\varepsilon_{ox}}{\varepsilon_s t_{ox}} \qquad g_2 = \frac{\varepsilon_{ox}\beta V_G}{\varepsilon_s t_{ox}}$$

Havo bilan AB' va $C'D$ chegaralariga $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0} = 0$ ni qo‘yamiz. GF tagligi tarafida $u(x, x_B) = \beta V_\beta$ potensialini beramiz. AG va DF sohalarining vertikal chegaralarida $u(x,y)$ potensialini qiymati bir o‘lchovli p keskin modeli - n^+- o‘tish orqali hisoblanadi va u birinchi chegaraviy masala bo‘ladi.

7.3. Iqtisodiy matematik modellar

Mazkur bobda iqtisodiyotda qo‘llaniladigan ba’zi bir sodda modellar keltirilgan. Materiallarni yozishda [34-51] adabiyotlardan foydalanildi.

7.3.1. Iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari

Har xil iqtisodiy – matematik modellarni yaratish, ularni oʻrganish, tahlil qilish va xulosalar chiqarish, modelni ifodalovchi real iqtisodiy borliq ustida izlanishlar olib borish, tajribalar oʻtkazish, tahlil va xulosa chiqarish koʻp hollarda juda qimmatga tushsa, ayrim hollarda mumkin ham boʻlmay qoladi. Hayot tajribasi shuni koʻrsatadiki, iqtisodiyotda, avvaldan uning modeli ustida tahlil va xulosalar chiqarmasdan, toʻgʻridan-toʻgʻri iqtisodiyotning oʻzida shunday tajribalar oʻtkazish yutqizish va salbiy holatlarga olib kelishi mumkin.

Iqtisodiy obyektlarning matematik modellari - uni tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy bogʻlanishlar, grafik, graf va hokazolar yordamida tasvirlashdir. Bu tasvir tarkibiga oʻrganilayotgan narsaning tashkil etuvchi elementlari orasidagi bogʻlanishlar, modelda shu elementlarga mos keluvchi elementlar orasidagi bogʻlanishlar ham kirishi lozim boʻladi. Bu degan soʻz, model qaralayotgan iqtisodiy obyektning shartli bir tasviri ekanligini bidiradi. Modelni oʻrganish, obyekt toʻgʻrisida yangi maʼlumotlarni olish va turli holatlarda ularga mos keluvchi eng yaxshi (optimal) yechimlar topishga imkon beradi.

Turli iqtisodiy voqealiklarni oʻrganish uchun, iqtisodchilar, soddalashtirilgan, formallashtirilgan iqtisodiy modellardan foydalanadilar. Iqtisodiy modellarga misol sifatida talab tanlovi modeli, firma modeli, Leontev modeli, iqtisodiy oʻsish modeli, tovar moliya bozorlaridagi muvozanat holatining modeli va boshqalarni keltirish mumkin. Model tuzishda modellashtirilayotgan obyektdagi jarayonlarni belgilovchi muhim omillar olinib, muhim boʻlmaganlari model tarkibiga kiritilmaydi.

Iqtisodiy modellar, qaralayotgan iqtisodiy obyekt faoliyatidagi muhim oʻrin tutadigan tarkibiy qismlarni aniqlashga va ular asosida shu obyektning kelajakdagi faoliyatidagi oʻzgarishlarning, ayrim parametrlarning oʻzgarishiga bogʻliq ravishda bashorat qilish imkonini ham beradi. Modelda paremetrlar orasidagi bogʻliqliklar miqdoriy jihatdan baholash mumkin boʻlgani uchun, bashoratni yetarlicha aniqlikda va ishonch darajasida bajarish mumkin boʻladi.

Har bir iqtisodiy obyekt uchun, kelgusidagi ahvolni bashorat qilish, mana shu obyekt uchun avvalo, eng yaxshi natijalarga erishish, har xil salbiy holatlarni chetlab oʻtishga xizmat qilishi kerak boʻladi. Xususan, davlat miqyosidagi iqtisodiy siyosat ham ana shunday bashoratlar asosida olib boriladi.

Har qanday iqtisodiy model ma’lum ma’noda ideallashtirilgan, shuning uchun ham ular to‘liq bo‘la olmaydi. Bu modellarni qurishda modellashtirilayotgan iqtisodiy obyekt faoliyatida o‘rin egallagan omillardan, mohiyatan eng muhimlari ajratilib qolganlari esa e’tiborga olinmaydi.

Iqtisodda foydalaniladigan matematik model elementlarini turlariga qarab quyidagi sinflarga ajratish mumkin:

- Chiziqli dasturlash. Bunda bog‘lanishlar chiziqli, izlanayotgan o‘zgaruvchilar uzluksiz va boshlang‘ich ma’lumotlar aniq qiymatlarda bo‘ladi.
- Chiziqsiz dasturlash. Bunda bog‘lanishlar chiziqsiz, izlanayotgan o‘zgaruvchilar uzluksiz yoki butun sonli bo‘lib, boshlang‘ich ma’lumotlar ham aniq qiymatlarda bo‘ladi.
- Butun sonli dasturlash. Bunda bog‘lanishlar chiziqli, izlanayotgan o‘zgaruvchilar butun sonli va boshlang‘ich ma’lumotlar aniq qiymatlar bo‘ladi.
- Dinamik dasturlash. Bunda bog‘lanishlar chiziqli yoki chiziqsiz bo‘lib, ko‘proq vaqtga bog‘liq masalalar qaraladi va hokazo.

Noaniq omillarni hisobga olgan holda matematik modellarni determinallashgan, stoxastik va noaniq elementli modellarga ajratish mumkin.

Stoxastik modellarda noaniq omillar tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ular uchun taqsimot funksiyasi va turli statistik xarakteristikalar (matematik kutilma, dispersiya, o‘rtacha kvadratik chetlashish va h.k) ma’lum. Stoxastik modellar ichidan quyidagilarni ajratib ko‘rsatish mumkin:

Stoxastik dasturlash modellari. Bunda yoki maqsad funksiyasi yoki chegaraviy shartlarda tasodifiy miqdorlar qatnashadi.

Tasodifiy jarayonlar nazariyasi modellari. Vaqtning har soniyasi holatlari tasodifiy miqdorlardan iborat bo‘ladigan jarayonlar o‘rganiladi.

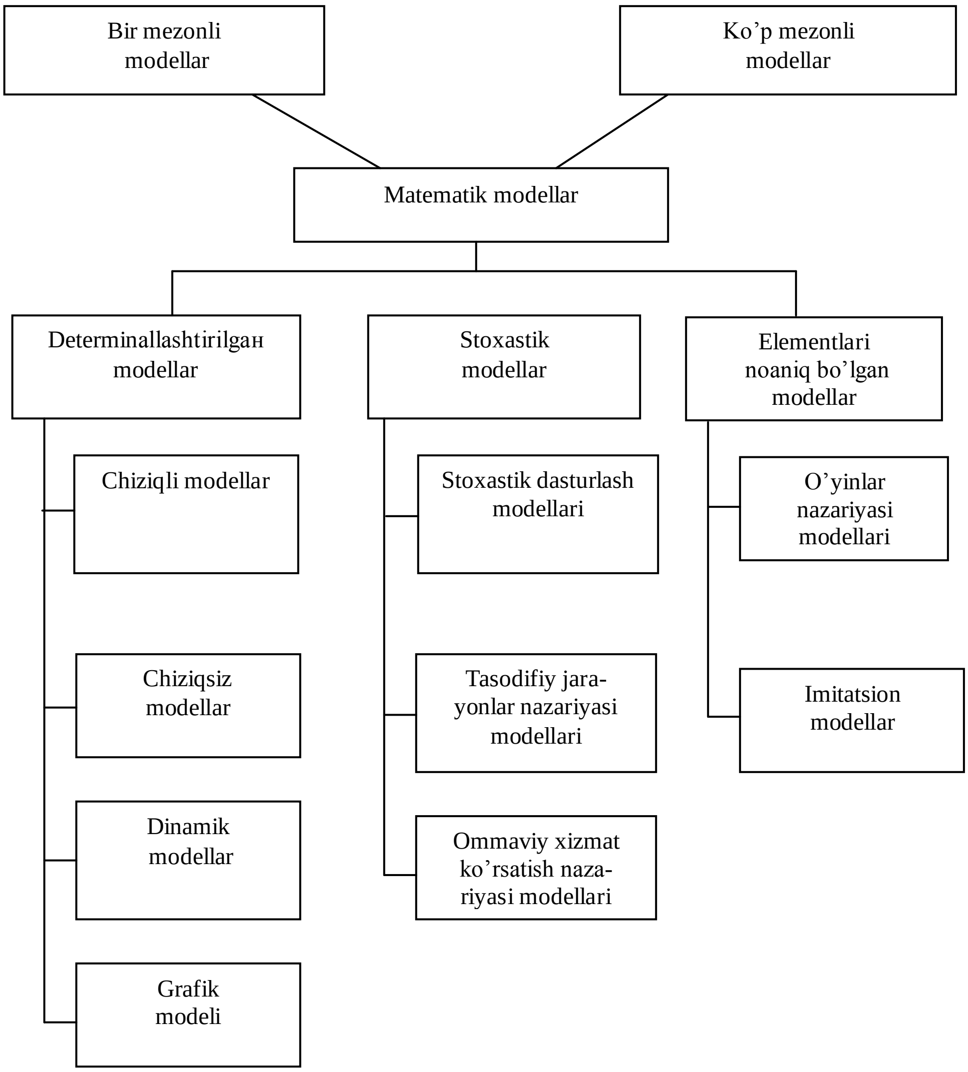
Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi modellari. Bunda xizmat ko‘rsatish talablarini aniqlashning ko‘pkanalli tizimlari o‘rganiladi. Shuningdek, stoxastik modellarga foydalilik nazariyasi, qidiruv va qaror qabul qilish modellarini kiritish mumkin.

Statistik ma’lumotlarni yig‘ish imkoniyati bo‘lmaganligi va omillar qiymatlari aniqlanmaganligi uchun omillarga bog‘liq bo‘lgan holatlarni modellashtirishda *noaniq elementli modellar* qo‘llaniladi.

O‘yinlar nazariyasi modelida masala har xil maqsadli va bir necha o‘yinchilar qatnashuvchi o‘yin ko‘rinishida ifodalanadi.

Imitatsion model - matematik model asosida kompyutyerda hisoblash tajribalarini o‘tkazib real obyekt, jarayon yoki tizim holatini taqlid (imitatsiya) qilishdir. Imitatsion model yordamida obyekt, jarayon yoki tizimga tasodifiy ta’sir reaksiyasini hisoblash imkoniyati mavjud.

Determinallashgan modellarda noaniq omillar hisobga olinmaydi. Bu modellar uncha murakkab bo‘lmaganligi sababli ko‘pgina amaliy masalalar, shu jumladan iqtisodiy masalalar shu modellarda ifodalanadi. Cheklanishlar va maqsad funksiyasi ko‘rinishiga qarab determinallashgan modellar chiziqli, chiziqsiz, dinamik va grafiklarga bo‘linadi.



7.11-rasm

Chiziqli modellarda cheklanishlar va maqsad funksiyasi boshqaruvchi o‘zgaruvchilar bo‘yicha chiziqli bo‘ladi. Matematik modellashtirishda chiziqli modellarni qurish va ularni hisoblash yaxshi rivojlangan.

Chiziqsiz model – bu shunday modelki, unda boshqarish o‘zgaruvchilari bo‘yicha maqsad funksiyasi yoki cheklanishlar chiziqsiz bo‘ladi. Chiziqsiz modellar uchun yagona hisoblash usuli mavjud emas. Bunda usullar chiziqsiz funksiyalar ko‘rinishi va bog‘lanishiga qarab farqlanadi.

Dinamik modellarning chiziqli va chiziqsiz statistik modellardan farqi shundaki, modelda vaqt omili hisobga olinadi. Dinamik modellarda optimallik mezoni eng umumiy ko‘rinishda bo‘lib, uning uchun aniq ma’lum xossalar bajariladi. Dinamik modellarni hisoblash jarayoni juda murakkab, unda har bir aniq masala uchun maxsus yechish algoritmlarini ishlab chiqish zarur bo‘ladi.

Grafik modellar masalalarni grafik tuzilma ko‘rinishida tasvirlash uchun qo‘llaniladi.

7.3.2. Iqtisodda chiziqli dasturlash

Chiziqli dasturlash matematik dasturlashning asosiy qismlaridan biri bo‘lib, ko‘p o‘zgaruvchi funksiyalarning ekstremumlarini topishni o‘rganadi va iqtisodiy-matematik modellarni tekshirishda matematik apparat hisoblanadi.

Matematik model qo‘yidagicha talqin qilanadi: Tenglamalar yoki tengsizliklar tizimini qanoatlantiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday manfiy bo‘lmagan qiymatlarini topish talab qilinadiki, bunda o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo‘lgan miqdor (maqsad funksiyasi) eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo‘lsin.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \\ &x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}), \\ &Z=\sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min). \end{aligned} \tag{7.42}$$

(7.42) - formulaning birinchisi iqtisodiy ma’noda izlananayotgan miqdorlarga qo‘yiladigan cheklanishlarni ifodalaydi. Ular resurslar miqdori, ma’lum talablarni qondirish zarurati, texnologiya sharoiti va boshqa iqtisodiy hamda texnikaviy omillardan kelib chiqadi. Ikkinchi shart - o‘zgaruvchilarning, yani izlanayotgan miqdorlarning manfiy bo‘lmaslik sharti hisoblanadi. Uchinchisi, maqsad funksiyasi deyilib, izlanayotgan miqdorning biror bog‘lanishini ifodalaydi (ishlab chiqarish mahsulotlarini sotishdan keladigan foyda, ma’lum miqdordagi ishni bajarishga sarf bo‘lgan xarajat va h.k.).

Noma’lumlarning son qiymatlari to‘plami masalaning rejasi deyiladi.

Cheklanishlar tizimini qanoatlantiruvchi har qanday reja (yechim) mumkin bo‘lgan reja (yechim) deyiladi.

Maqsad funksiyasiga maksimal (yoki minimal) qiymat beruvchi mumkin bo‘lgan reja (yechim) masalaning optimal rejasi (yechimi) deyiladi.

Maqsad funksiyasining cheklanishlarini qanoatlantiradigan maksimum yoki minimumini topishning (7.42) - masalasi ko‘rinishi standart chiziqli dasturlash masalasi deyiladi.

Tengsizliklar tizimi ko‘rinishida berilgan cheklanish shartlarini qo‘shimcha o‘zgaruvchilar, ya’ni x_{n+i} kiritib tenglamalar tizimini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \ , \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \max(\min).$$

U holda bu, kanonik ko‘rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasi deyiladi.

Chiziqli modelga keltiriladigan quyidagi iqtisodiy masalani ko‘rib chiqaylik.

Misol. Korxona uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi, uni buyurtmachilarga yetkazadi va bozorga sotuvga chiqaradi.

Bozordagi talab sharti birinchi turdagi mahsulot sonini 2000, ikkinchinikini 3000, uchinchinikini 5000 tadan ortishiga yo‘l qo‘ya olmaydi.

Mahsulotni ishlab chiqarishda 4 turdagi resurs qo‘llaniladi. Bitta mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf bo‘ladigan resurs miqdori hamda har bir turdagi mahsulotni sotishdan olinadigan foyda 7.3-jadvalda keltirilgan.

Buyurtmachilarni ta’minlash uchun, mahsulot miqdori oshib ketmasligi uchun, maksimal foydani olish uchun ishlab chiqarish jarayonini qay tarzda tashkillashtirish kerak?

7.3. jadval

Resurs turi	**Mahsulot turi**			**Jami resurslar**
	1	2	3	
1 **2** **3** **4**	500 1000 150 100	300 200 300 200	1000 100 200 400	25 000000 3 0000000 2 0000000 4 0000000
Foyda	20	40	50	

Matematik modelni qurish.

Matematik modelni qurish bosqichlarini ketma-ket bajaramiz.

1) Maqsad-maksimal foyda olish.
2) O‘zgaruvchilar bo‘lib masalaning shartida keltirilgan hamma sonli ma’lumotlar xizmat qiladi.
3) Bosh o‘zgaruvchilar:

x_1-birinchi turdagi mahsulotlar soni;

x_2 - ikkinchi turdagi mahsulotlar soni;

x_3- uchinchi turdagi mahsulotlar soni;

4) Cheklanishlar: buyurtmachilar ta’minlansin, resurslar zahirasi doirasidan chiqib ketilmasin, bozor mahsulotga to‘lib ketmasin.

Ushbu cheklanishlarni hisobga olgan holda, masalaning mavjud yechimlar sohasini yozib olaylik:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000 \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 20000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{cases}$$

Tizimdagi birinchi uchta tengsizlik buyurtmachilar talabiga to‘g‘ri keladi. 4 dan 6 gacha bo‘lgan tengsizliklar bozordagi talabni ifodalaydi. Oxirgi to‘rtta tengsizlik resurs bo‘yicha cheklanishlarni ko‘rsatadi.

5) Masalaning maqsad funksiyasi yoki samaradorlik mezonining ko‘rinishi quyidagicha:

$$P = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \max .$$

Formulada foyda R harfi bilan belgilangan. Uni maksimallashtirish kerak. x_1, x_2, x_3 bilan belgilangan har bir qo‘shiluvchi berilgan turdagi mahsulotni ishlab chiqarishdan olingan foydani anglatadi.

Cheklanishlar hamda maqsad funksiyasi bosh o‘zgaruvchilar bo‘yicha chiziqli, bundan kelib chiqadiki berilgan model chiziqlidir.

7.3.2.1. Ishlab chiqarishni rejalashtirishning matematik modeli

Har xil turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarishda turli xil resurslar qo‘llaniladi. Har bir resursning umumiy zahirasi, har bir turdagi bitta mahsulotni tayyorlash uchun sarf bo‘ladigan har bir turdagi resurs miqdori, har bir turdagi mahsulotni sotishdan olinadigan foyda berilgan. Mahsulotni ishlab chiqishning shunday rejasini tuzish kerakki, u mahsulotni sotishda maksimal foyda bersin.

Matematik modelni qurish.

Matematik modelni yuqorida bayon etilgan bosqichlar bo‘yicha quramiz.

1) Maqsad - foydani maksimallashtirish.
2) Masala umumiy holda yechiladi, shuning o‘zgaruvchilarni aniqlash uchun shartli belgilash kiritamiz:

n-har xil turdagi mahsulotlar soni;

m-har xil turdagi resurslar soni;

b_1-i turdagi resurs zahirasi, $i = \overline{1,m}$

a_{ij}-j-turdagi bitta mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan i-turdagi resurslar miqdori. $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

P_j-j-turdagi bitta mahsulotni sotishdan olingan foyda.

3) x_j, $j = \overline{1,n}$ bosh o‘zgaruvchilar-j-turdagi mahsulotlar soni.

4) Masalaning cheklanishlari - bu resurslar bo‘yicha cheklanishlar hamda bosh o‘zgaruvchilarning nomanfiylik sharti.

Shu yo‘sinda matematik modelni qurish mumkin:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Bu, masalaning chiziqli matematik modelidir. Uni hisoblash natijasida ishlab chiqarishning muqobil rejasi, ya’ni foyda maksimal bo‘ladigan hamda resurslar zahirasidan oshib ketmaydigan har bir turdagi mahsulotlar soni aniqlanadi.

7.3.2.2. Materialni bichishning matematik modeli

Bichish uchun bir necha turdagi material ma’lum bir miqdorda kelib tushadi. Bu materialdan har xil mahsulot tayyorlash kerak. Material har xil usulda bichilishi mumkin. Har bir tur o‘zining tannarxiga ega va har bir turga mansub mahsulotning ma’lum miqdorini olishga imkon beradi. Shunday bichish usulini topingki, uning jami tannarxi minimal bo‘lsin.

Matematik modelni qurish.

1) Maqsad - bichish tannarxini minimallashtirish;

2) O‘zgaruvchilar:

n - bichishga kelib tushgan har xil turdagi material soni;

d_j - j-turdagi material miqdori, $j=\overline{1,n}$

m - tayyorlash kerak bo‘lgan turli xil mahsulotlar soni;

b_i - -turdagi mahsulot soni, $i=\overline{1,m}$;

l - bichishning turli xil usullari soni;

a_{ijk} - bichishning k-usulida j-turdagi birlik materialdan olish mumkin bo‘lgan i-turdagi mahsulotlar soni, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;

s $_{jk}$ -j-turdagi materialni k-usulda bichish tannarxi, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;

3) Bosh o‘zgaruvchilar x_{jk} - k-usulda bichilgan j-turdagi material miqdori, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;

4) Mavjud yechimlar sohasi joriy materialning miqdori, chiqarish bo‘yicha cheklanishlar hamda bosh o‘zgaruvchilarning nomanfiylik sharti asosida aniqlanadi.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{1l}=d_1; \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{2l}=d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{nl}=d_n; \\ a_{111}x_{11}+a_{112}x_{12}+\ldots+a_{1n1}x_{1n}=b_1; \\ a_{211}x_{11}+a_{22}x_{12}+\ldots+a_{2nl}x_{nl}=b_2; \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m11}x_{11}+a_{m12}x_{12}+\ldots+a_{mnl}x_{nl}=b_m; \qquad x_{jk}\ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,n}. \end{cases}$$

5) Muqobillik mezoni quyidagi funksiya bilan beriladi:

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{jk}x_{j_k}\to\min .$$

Modelni hisoblagandan so‘ng har xil usulda bichilgan har bir turdagi material miqdori aniqlanadi.

Tannarxni minimallashtirish mezoni o‘rniga, masalada chiqindilarni minimallashtirish mezoni olinishi mumkin. Bu holatda - shartda har bir turdagi materialni ixtiyoriy usulda bichishda olinadigan chiqindilar miqdori berilishi lozim.

7.3.2.3. Transport masalasining matematik modeli

Yuklarni jo‘natish punktlaridan qabul qilish punktlariga tashib berishning optimal rejasini topish masalasiga transport masalasi deyiladi va u quyidagicha ta’riflanadi:

Aytaylik, $A_1, A_2, .., A_m$ punktlarida ularga mos $a_1, a_2, ..., a_m$ miqdordagi bir jinsli yuklar joylashgan bo‘lsin. Bu $A_1, A_2, .., A_m$ ga jo‘natish punktlari deymiz. Bu yuklarni n-ta $V_1, V_2, ..., V_n$ punktlari qabul qilishi kerak va ularning talablari mos ravishda $b_1, b_2, ..., b_n$ bo‘lsin. Har bir x_{ij} -birlikdagi yukni i-chi jo‘natish punktidan j-chi qabul qilish punktiga olib borish narxi (xarajati) - c_{ij} malum deylik. Bu yuklarni tashish rejasini shunday tuzishimiz kerakki, talabgor punktlar maksimal qoniqish olsin va hamma yuklarni olib borish uchun ketgan harajatlar yig‘indisi minimal bo‘lsin.

Transport masalasini shartli ravishda jadval ko‘rinishda beramiz. Jadvalda quyidagilar ko‘rsatiladi: qabul qilish punktlari, jo‘natish punktlari, yuk zahiralari, yukka bo‘lgan ehtiyoj va har bir i-chi jo‘natish punktidan j-chi qabul qilish punktiga yuboriladigan yuk birliklarining narxi (yani tarif matritsasi) beriladi.

Bu yerda $C=\{c_{ij}\}$ matritsasi ta’rif matritsasi yoki transport harajatlari deyiladi. $X=\{x_{ij}\}$ matritsa esa - transport masalasining rejasi deyiladi. Bu yerda x_{ij} - i-chi punktdan j-chi punktga etkaziladigan yuklar hajmi (soni).

Tashish rejasi bilan bog‘liq ketgan xarajatlarning umumiy yig‘indisi quyidagi maqsad funksiyasi orqali ifodalanadi:

$$Z= c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+ . . . +c_{1n}x_{1n}+ c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+ . . . +c_{2n}x_{2n}+ . . . c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+ . . . +c_{mn}x_{mn}.$$

Bu yerda x_{ij} - o‘zgaruvchilar yuk zahirasi, yukka bo‘lgan ehtiyoj va manfiy bo‘lmaslik shartlarini (chegaralanishlarni) bajargan bo‘lishi kerak.

7.4.jadval

Jo‘natish punktlari	**Qabul qilish punktlari**				**Yuk zahiralari**
	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	. . . .	$\mathbf{B_n}$	
$\mathbf{A_1}$	s_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
$\mathbf{A_2}$	s_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .
$\mathbf{A_m}$	s_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . . .	c_{mn} x_{mn}	a_n
Yukka bo‘lgan ehtiyoj	b_1	b_2	. . . .	b_n	$\Sigma a_i=\Sigma b_j$

Yuqoridagilarni hisobga olgan holda transport masalasining matematik modelini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j=\overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (j=\overline{1,n}),$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Transport masalasining matematik jihatdan qo‘yilishi quyidagicha talqin qilinadi: Chegaraviy tizimlar, manfiy bo‘lmaslik sharti va maqsad funksiyasi berilgan, deylik. Talab qilinadiki tizimning yechimlar to‘plamidan shunday manfiy bo‘lmagan yechimlarini (rejasini) topish kerakki, bunda maqsad funksiyasi minimal qiymatga erishsin.

Transport masalasi ikki turga bo‘linadi, ochiq va yopiq turdagi. Agar yuk zapaslari yig‘indisi talab qilingan yuklar yig‘indisiga teng bo‘lsa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

masala yopiq turdagi masala bo‘ladi

Agar yuk zahiralari yig‘indisi talab qilingan yuklar yig‘indisiga teng bo‘lmasa, ya’ni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ ,$$

u ochiq turdagi masala sanaladi.

7.3.3. Iqtisodiyotda chiziqsiz dasturlash

Umumiy holda chiziqsiz dasturlash masalasi matematik modeli quyidagicha ta’riflanadi:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \\ \text{..........................} \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \\ \text{..........................} \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min(\max),$$

bu yerda x_j – boshqarish parametrlari yoki chiziqsiz dasturlash masalasi yechimi, $j=1,2,...,n$; b_i – fiksirlangan parametrlar, $i=1,2,...,m$; f, g_i – n ta o‘zgaruvchiga bog‘liq berilgan funksiyalar, $i=1,2,...,m$.

Agar f va g_i chiziqli bo‘lsa, u holda masala chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi. Shunday x_j – boshqarish parametrlari qiymatini topish kerakki, matematik modelda keltirilgan cheklanishlar tizimi qanoatlantirilsin va maqsad funksiyasi maksimum yoki minimum qiymatga erishsin.

Chiziqsiz dasturlash quyidagi bo‘limlardan iborat:

- qavariq dasturlash;
- kvadratik dasturlash;
- butun sonli dasturlash;
- stoxastik dasturlash;
- dinamik dasturlash.

Qavariq dasturlash masalasi – bu shunday masalaki, berilgan yopiq qavariq to‘plamda qavariq funksiya minimumi (yoki maksimumi) aniqlanadi. Bu masala chiziqsiz dasturlash masalalari ichida ko‘proq o‘rganilgan.

Kvadratik dasturlash masalasi to‘liq o‘rganilib chiqilgan. Unda maqsad funksiyasi – kvadratli, cheklanishlar esa chiziqli bo‘ladi.

Stoxastik dasturlash masalasida maqsad funksiyasi yoki cheklanishlardagi funksiyalar ehtimollar nazariyasi qonuniyatlariga bo‘ysunuvchi tasodifiy miqdorlarni o‘z ichiga oldi.

Dinamik dasturlash masalasida cheklanishlar vaqt bo‘yicha parametrlarni o‘z ichiga olib, differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Dinamik dasturlash masalasi yechimlarini topish ko‘p bosqichli.

Butun sonli dasturlash masalasida noma’lum parametrlar faqat butun qiymatlarni qabul qiladi.

Chiziqsiz dasturlash masalasi. Mazkur masalaning chiziqli dasturlash masalasidan farqli tomoni shundaki, uning uchun aniq bir yagona yechish usuli mavjud emas. Maqsad funksiyasi va chegaralanishlar ko‘rinishiga qarab bir necha maxsus yechish usullari ishlab chiqilgan. Lagranj ko‘paytuvchisi usuli, kvadratli va qavariq dasturlash, gradient usullar, qator taqribiy usullar va grafik usullar shular jumlasidan.

7.3.3.1. Kasr-chiziqli dasturlash masalasining matematik modeli

Bu masalada maqsad funksiyasi kasr-chiziqli, mavjud U to‘plam esa chiziqli cheklanishlar (tenglik va tengsizliklar) hamda o‘zgaruvchilarning nomanfiylik sharti bilan topiladi:

$$f(x)=\frac{<c,x>+c_0}{<d,x>+d_0}=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}\to \min, \qquad (7.43)$$

$$<a^i,x>=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1,2,...,p, \qquad (7.44)$$

$$<a^i,x>\geq b_i,\ i=p+1,...,m, \qquad (7.45)$$

$$x_j\geq 0, \quad j=1,2,....,n. \qquad (7.46)$$

Bu yerda s, $d - E_n$ dagi qo‘zg‘almas vektorlar.

(7.43)-(7.46) masalaning chiziqli dasturlash masalasiga qay usulda olib kelinishini ko‘rib chiqaylik.

(7.43)- (7.46) masalaning mavjud U to‘plamida funksiyaning maxraji nolga aylanmaydi, demak ishorasini saqlaydi. Agar u manfiy bo‘lsa, u holda (7.43) kasrning sur’at va maxrajini minus birga ko‘paytirib, hamma $x\in U$ lar uchun $<d,x>+d_0>0$ shart bajariladi, deb olamiz.

$y_0=1/(<d,x>+d_0)$ deylik, bundan ko‘rinib turibdiki, $x\in U$ da $y_0>0$. Yangi o‘zgaruvchilar kiritamiz: $y_j=y_0x_j,\quad j=1,2,...,n$. Bu o‘zgaruvchilarda (7.43)-(7.46) masalaning ko‘rinishi quyidagi ifodaga kiradi:

$$\tilde{f}(y)=\sum_{j=0}^{n} c_j y_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = 1,..., p, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \geq 0, \quad i = p+1,..., m,$$

$$\sum_{j=0}^{n} d_j y_j = 1, \ y_j \geq 0, \quad j = 1,2,....,n,$$

ya'ni E_{n+1} fazodagi umumiy holda yozilgan chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi.

Simpleks usulda uning yechimini - $y^* = (y_0^*,..., y_n^*)$ va $x_j^* = y_j^* / y_0^*,\ j = 1,...,n,\ f^* = \min_{x \in U} \tilde{f}^*$ tengliklar yordamida (7.43)- (7.46) kasr-chiziqli dasturlashdagi boshlang'ich masalasining yechimini topamiz..

Agar $y_0^* = 0$ bo'lsa, u holda (7.43)- (7.46) masalaning mavjud yechimlar soni cheklanmagan va unda $f(x)$ funksiyaning minimumiga erishilmaydi.

7.3.3.2. Kvadratli dasturlash masalalalarining matematik modeli

Bu yerda qavariq kvadratli funksiyani chiziqli cheklanishlar-tengsizliklar bilan berilgan mavjud U to'plamda minimallashtirish kerak, ya'ni:

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > + c \to \min, \tag{7.47}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \leq \beta_i, \quad i = 1,..., m, \tag{7.48}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,....,n. \tag{7.49}$$

Bu yerda $A = (a_{ij})$ - $n \times n$ o'lchovli simmetrik musbat matritsa; $b \in E_n$ - fiksirlangan usul; *s* – berilgan son.

(7.47) dagi funksiya qavariq, (7.48)-(7.49) cheklanishlar chiziqli bo'lgani uchun (7.47)-(7.49) masala qavariq dasturlash masalasi bo'ladi ((7.48) cheklanishlarni $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \leq 0$ ko'rinishda, (7.49) – cheklanishlarni esa $\bar{g}_j(x) = -x_j \leq 0$ ko'rinishda yozib olish mumkin).

Bu masalaning Lagranj funksiyasini tuzamiz. Buning uchun (7.48) dagi cheklanishlar uchun $\lambda_i, \quad i = 1,..., m$, (7.49) dagi cheklanishlar uchun $\mu_j, \quad j = 1,..., n$ Lagranj ko'phadlarni kiritamiz:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum \alpha_{ij} x_j - \beta_i \right) + \sum_{j+1}^{n} \mu_j (-x_j).$$

(7.47)-(7.49) masala uchun Kun-Takker shartini qo'llaymiz

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = 0, \quad j = 1,..., n,$$

$$\lambda_i g_i = \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \right) = 0, \quad i = 1,\dots,m, \tag{7.50}$$

$$\mu_j \bar{g}_j = -\mu_j x_j = 0, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

U o‘z ichiga masalaning (7.48)-(7.49) cheklanishlarini ham oladi:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \leq 0, \quad i = 1,\dots,m, \tag{7.51}$$

$$\bar{g}_j(x) = -x_j \leq 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Qo‘shimcha $x_{n+i} \geq 0$ o‘zgaruvchilarni kiritgan holda, (7.51) tengsizliklardan $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j + x_{n+i} = 0$ tengliklarga o‘tamiz. U holda (7.50) munosabatlar $\lambda_i x_{n+i} = 0$ ko‘rinishda yozib olinadi.

Shunday qilib, (7.50)-(7.51) Runge-Kuttaning kvadratli dasturlash masalalari uchun mo‘ljallangan shartlarini quyidagi ko‘rinishda ham yozib olish mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = -b_j, \quad j = 1,\dots,n, \tag{7.52}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + x_{n+i} = \beta_i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{7.53}$$

$$x_k \geq 0, \quad k = 1,\dots,n+m, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n, \tag{7.54}$$

$$\lambda_i x_{n+i} = 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \mu_j x_j = 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{7.55}$$

Kun-Takker teoremasiga ko‘ra bu tizimning $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ yechimi f(x) funksiyaning *U* to‘plamdagi qidirilayotgan minimum nuqtasi bo‘ladi.

Shuni qayd etish joizki, (7.52)-(7.55) tenglamaning *n+m* ta *2(n+m)* x_k, λ_i, μ_j nomanfiy noma’lumli (7.52) va (7.53) ta tenglamasi bor, ulardan (7.55) shartga ko‘ra kamida $n+m$ tasi nolga teng.

Mazkur tizimning mavjud bazis yechimi sun’iy bazis usulida olinishi mumkin. Bu usulni amalga oshirish paytida (7.55) shartni hisobga olish, ya’ni bazis o‘zgaruvchilarga bir paytning o‘zida bir xil i nomerli λ_i va x_{n+i} hamda μ_j, x_j o‘zgaruvchilarni kiritish kerak emas.

7.3.4. Reklama kompaniyasini tashkillashtirish

Faraz qilaylik, firma yangi tovari yoki xizmatini reklama qilishni rejalashtirmoqda. Ish boshlanishida yangilikdan iste’molchilarning ozgina qismi xabardorligi sababli reklamaga sarf etiladigan harajatlar reklama kompaniyasi oladigan foydaga nisbatan ko‘proq bo‘lishi mumkin. Keyinchalik, vaqt o‘tishi bilan iste’molchilar sonini oshishi tufayli sezilarli foydaga umid qilish mumkin. Shunday vaqt momenti keladiki, bu vaqtda firma yangi tovari yoki xizmati turi bilan iste'molchilar bozori to'yingan bo'ladi va endi tovarni yoki xizmatni reklama qilish ma'noga ega bo'lmay qoladi. Keyinchalik mavzuni bayon qilishda tovar yoki xizmat turi iboralari o'rniga qulaylik uchun faqat tovar so'zidan foydalanamiz [24, 44, 55].

Reklama kompaniyasining matematik modelini tuzishda quyidagi belgilashlardan foydalaniladi: t- reklama kompaniyasi boshlanganidan kuzatuvgacha bo'lgan vaqt; $N(t)$ - firma tovaridan xabardor mijoz yoki iste'molchilarning t vaqtdagi soni; N_0 - firma tovariga pul to'lashi mumkin bo'lgan xaridorlarning umumiy soni. Matematik modelni qurish quyidagi asosiy farazlarga asoslanadi. Tovar haqida xabardor bo'lgan va ularni sotib olishga qurbi yetgan iste'molchilar sonining vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi dN/dt tovar haqida xabari bo'lmagan xaridorlar soni $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$ ga proportsional. Bu yerda $\alpha_1(t) > 0$ - reklama kompaniyasi ishini jadalligi (ushbu vaqt momentida reklamaga sarf etilgan harajatlar)ni anglatadi. Shuningdek, tovar haqida xabardor bo'lgan xaridorlar tovar haqida xabardor bo'lmagan xaridorlarga u yoki bu tarzda tovar haqida axborot tarqatib, firmani qo'shimcha reklama agenti sifatida ishtirok etadi deb faraz qilinadi. Ularning ulushi $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ miqdorga teng bo'lib, agentlar soni oshishi bilan bu miqdor ham oshib boradi. $\alpha_2(t) > 0$ miqdor xaridorlar o'rtasidagi o'zaro muomala (axborot almashish) darajasini xarakterlaydi (bu miqdorni qiymati, masalan, so'rovnoma o'tkazish yo'li bilan ham aniqlanishi mumkin).

Yuqoridagi farazlarga asosan reklama kompaniyasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \qquad (7.56)$$

Agar $\alpha_1(t) >> \alpha_2(t)N(t)$ bo'lsa, (7.56) modeldan Maltus tipidagi modelga ega bo'lish mumkin, aksincha tengsizlikda populyatsiyaning quyidagi modelini hosil qilish mumkin:

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \qquad d\tau = \alpha_2(t)dt .$$

Ushbu modelni va populyatsiya modelini to'zishda qandaydir miqdorning vaqt bo'yicha o'sish tezligi ushbu miqdorning joriy vaqtdagi $N(t)$ qiymatini muvozanat holati (populyatsiyada)dagidan yoki xaridorlarning maksimal qiymatidan joriy vaqtdagi $N(t)$ qiymatini ayirmasiga - $N_0 - N(t)$ ko‘paytmasiga proportsional degan farazga tayanilgan edi. Shu sababli ularni anologiyasidan foydalanish mumkin. Agar $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)N(t)$ miqdor vaqtning qandaydir momentida nolga tenglashsa yoki manfiy qiymatga ega bo‘lsa (buning uchun $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ koeffitsientlarning birortasi yoki ikkalasi ham manfiy ishoraga ega bo‘lishi lozim) ushbu jarayonlar o‘rtasidagi analogiya tugaydi. Shunga o‘xshash negativ holatlar turli reklama kompaniyalarida tez-tez uchrab turadi. Bunday hollarda reklamani xarakterini o‘zgartirish yoki bo‘lmasa reklamadan butunlay voz kechish lozim bo‘ladi. Tovarni ommaviyligini oshirish tadbiri $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ miqdorlarni qiymatlariga bog‘liq holda to‘g‘ridan-to‘g‘ri ($\alpha_1(t)$ parametr) yoki ikkilamchi tarzda ($\alpha_2(t)$ parametr) reklama natijasini yaxshilashga yo‘naltirilishi mumkin.

(7.56) matematik model chekli vaqt momentlarida nolga aylanadigan yechimlarga ega emas. Populyatsiya sonini vaqt bo‘yicha o‘zgarishidan ma’lumki, $t \to -\infty$ da $N(t) \to 0$. Reklama kompaniyasiga nisbatan bu narsa shuni anglatadiki, reklama boshlanishidan oldinroq xaridorlarning bir qismi yangi tovardan xabardor bo‘lishgan.

Agar $N << N_0$, $\alpha_2(t)N << \alpha_1(t)$ deb hisoblab, (7.56) matematik modelni $N(t=0) = N(0) = 0$ ($t=0$ - reklamani boshlanish vaqti) nuqta atrofida qaraydigan bo‘lsak, (7.56) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$ va u $t=0$ dagi boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt \tag{7.57}$$

yechimga ega. Endi, bitta tovardan tushadigan foydani p orqali belgilaymiz. Soddalik uchun har bir xaridor faqatgina bitta tovar sotib olsin deb hisoblaymiz. Ma’lumki, $\alpha_1(t)$ koeffitsient ma’nosi bo‘yicha reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soniga teng (masalan, bir turdagi afishalarni yelimlash). s orqali elementar reklama harakatining narxini belgilaymiz. U jami foyda quyidagiga teng bo‘ladi:

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt, \tag{7.58}$$

sarf qilingan harajatlar esa

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt\,.$$

Ko‘rinib turibdiki, $pN_0 > s$ bo‘lgandagina foyda harajatlarga nisbatan yuqori bo‘ladi. Juda samarali bo‘lmagan yoki qimmat reklamadan firma birinchi qadamidayok kamomadga uchraydi. Ammo, bu holat reklamani to‘xtatish uchun asos bo‘la olmaydi. Haqiqatdan ham (7.58) ifoda va $pN_0 > s$ shart faqatgina $N(t)$ ning kichiq qiymatlarida hamda P va S vaqt bo‘yicha bir xil qonuniyat asosida o‘sib borsagina o‘rinli bo‘ladi. $N(t)$ ning o‘sishi bilan (7.56) formulada tashlab yuborilgan hadlar sezilarli qiymatlarga ega bo‘ladi, xususan ikkilamchi reklamaning ta’siri kuchayadi. Shuning uchun $N(t)$ funksiya (7.58) formuladagiga nisbatan vaqt bo‘yicha tez o‘suvchi funksiya bo‘lib qolishi mumkin. $N(t)$ miqdorning o‘zgarishidagi bu chiziqsiz effekt harajatlarning o‘zgarmas tempda o‘sishida reklama kompaniyasining boshlang‘ich bosqichidagi moliyaviy muvaffaqiyatsizligini kompensatsiya qilish imkonini beradi.

Ushbu tasdiqni (7.56) tenglamaning xususiy holi, ya’ni $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ koeffitsientlar o‘zgarmas bo‘lganda izohlaymiz. Quyidagi $\overline{N} = \alpha_1 / \alpha_2 + N$ belgilash orqali (7.56) tenglama

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right), \qquad \overline{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0 \tag{7.59}$$

ko‘rinishga keladi. Ushbu tenglamani yechimi quyidagidan iborat:

$$\overline{N}(t) = \left[1 + \left(\overline{N}_0\, \alpha_2/\alpha_1 - 1\right)\cdot \exp\left(-\alpha_2 t \overline{N}_0\right)\right]^{-1}$$

Bunda $\overline{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2$, shunday qilib, $N(0) = 0$, ya’ni boshlang‘ich shart bajarilmoqda. (7.59) dan ko‘rinib turibdiki, $\overline{N}(t)$ funksiyaning hosilasi, xususan $N(t)$ funksiya $t > 0$ bo‘lganda boshlang‘ich qiymatlaridan katta bo‘lishi mumkin ($\overline{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ yoki $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$ shartlarda). $\overline{N} = \overline{N}_0 / 2$, $N = \left(\alpha_1/\alpha_2 + N_0\right)/ 2$ qiymatlarda $\overline{N}(t)$ funksiyaning hosilasi maksimumga erishadi:

$$\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2 \frac{\overline{N}_0^{\,2}}{4} = \alpha_2 \frac{\left(\alpha_1/\alpha_2 + N_0\right)^2}{4}\,.$$

Bu vaqtga kelib vaqt birligi ichida olinadigan joriy foyda quyidagiga teng:

$$P_m = p\frac{dN}{dt} = p\alpha_2 \frac{\left(\alpha_1/\alpha_2 + N_0\right)^2}{4}\,.$$

P_m joriy foydadan boshlang‘ich joriy foyda $P_0 = p(dN/dt)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ ni ayirib, quyidagiga ega bo‘lish mumkin:

$$P_m - P_0 = p\frac{\left(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0\right)^2}{4}.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, boshlang‘ich joriy foyda va maksimal joriy foydaning farqi yetarli darajada sezilarli bo‘lishi mumkin.

(7.59) tenglamadan yana shuni ta’kidlash mumkinki, qandaydir vaqtdan boshlab reklamani davom ettirish foydasiz bo‘lib qoladi. Haqiqatdan ham, $\overline{N}(t)$ ning N_0 ga yaqin qiymatlarida (7.59) tenglamani

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 N_0\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right) \qquad (7.60)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaning yechimi $t \to \infty$ da sekin eksponentsial qonun bo‘yicha $\overline{N}_0$ chekli qiymatga ($N(t)$ funksiya esa N_0 ga) intiladi. Vaqt birligi ichida uncha ko‘p bo‘lmagan sondagi yangi xaridorlar paydo bo‘ladi va tovarni sotishdan tushayotgan foyda ixtiyoriy shartlarda ham davom etayotgan harajatlarni qoplamay qoladi.

7.3.5.Korxonalar o‘zaro qarzlarini bartaraf etishi

Ixtiyoriy iqtisodiy tizim bir-biri bilan tovar va xizmatlar almashinuvchi o‘n minglab korxona (firma, korporatsiya va boshqalar) larni o‘z ichiga oladi. Hattoki, nisbatan uncha ko‘p bo‘lmagan bevosita hamkorlarga ega bo‘lgan kichik bir korxona ikkilamchi tarzda (ikkilamchi hamkorlari aloqalari orqali) katta miqdordagi korxonalar bilan bog‘langan. Ushbu korxonaning iqtisodiy o‘sishi hamkorlarning iqtisodiy holatiga to‘g‘ridan-to‘g‘ri bog‘liq. Aynan bu tasdiq yuzlab va minglab hamkorlar bilan aloqa qiluvchi katta korporatsiya va korxonalar uchun juda o‘rinli [24, 44, 55].

Iqtisodiy sistemani barcha zvenolarining bir-biriga o‘zaro bog‘liqligi sotilgan tovarlar yoki ko‘rsatilgan xizmatlar uchun to‘lovlarni amalga oshirishda korxonalar o‘rtasida bo‘ladigan hisob-kitobda yaqqol ko‘rinadi. Haqiqatdan ham, korxona sotilgan tovari uchun mijozlardan olinadigan to‘lovni korxonani faoliyatini samarali yuritish maqsadida boshqa firmalardan yangi mahsulotlar va mashinalar sotib olishga, oylik maoshi to‘lashga (ya’ni, ishchi kuchi sotib olishga), reklamaga va boshqa harakatlarga sarflaydi. Shu sababli ushbu korxona hamkorlarining kattagina qismi qo‘shimcha tarzda iqtisodiy aylanma (oborot)ga jalb etiladi. Uz navbatida korxonadan tovar sotib olgan mijoz ushbu tovardan qayta sotish yoki o‘zini mahsulotini ishlab chiqarish va boshqa maqsadlarlar uchun foydalanib, iqtisodiy faoliyatda ishtirok etuvchi agentlar sonini oshiradi.

Agar tovarlar o‘z vaqtida mijozlarga yetkazib berilsa va o‘z navbatida mijozlar ushbu tovarlarga to‘lovlarni vaqtida amalga oshirsalar moliyaviy tomondan iqtisodiy sistemaga hech narsa xavf solmaydi. Shu sababli korxonalar o‘z faoliyatlarini davom ettirish uchun bank hisob raqamlaridagi moliyaviy resurslarini kattagina qismini foydalanishlariga boz ustiga asosiy fondlarini (yer, ko‘chmas mulk, qurilma, texnologiya) sotishlariga hech narsa to‘sqinlik qila olmaydi. Amalda tovarni yetkazib berish va uni to‘lovi (yoki barcha tovarlar uchun yoxud bundan keyin etkazib beriladigan tovarlar uchun oldindan to‘lovlar) o‘rtasida doimo vaqt bo‘yicha kechiqish mavjud. Bu kechiqishning minimal qiymati sof texnik sabablar bilan aniqlanadi, chunki tovarni transportirovka va rasfasovka qilish, bankdan pul kuchirish uchun doimo vaqt talab qilinadi.

Ammo, shunday holatlar ham mavjudki, qandaydir iqtisodiy, moliyaviy, ichki va tashqi siyosat, ijtimoiy va boshqa sabablarga ko‘ra to‘lovlarni (tovarlarni etkazib berishni) kechikish vaqtini moliyaviy oborot vaqti bilan taqqoslash mumkin bo‘lib qoladi. Amalga oshirilmagan to‘lovlar yoki yetkazib berilmagan tovarlarning hajmi esa korxonaning erkin oborotdagi vositalari bilan taqqoslash mumkin bo‘lgan darajadagi miqdorga ega bo‘ladi. Bu holda butun iqtisodiy sistemani jiddiy krizisga olib keluvchi *to‘lay olmaslik (krizis neplatejey) krizisi* kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, yetkazib berilgan tovarga pul olmagan (yoki tovarga pul to‘lagan, lekin uni olmagan) korxona tovarni sotganlar (birinchi sotuvchilar) ga tovar uchun to‘lashi lozim bo‘lgan to‘lovni amalga oshira olmaydi (chunki korxonaning qarzlari hajmi erkin oborotdagi vositalari bilan taqqoslash mumkin bo‘lgan darajada, ulardan foydalanish vaziyatni yaxshi tomonga o‘zgartira olmaydi). O‘z navbatida tovarni yetkazib beruvchilar o‘z mijozlari bilan, bu mijozlar esa o‘zlarini mijozlari bilan va x.k. hisob-kitob qila olmaydilar. Natijada butun iqtisodiy sistemada *(neplatejey) to‘lay olmaslikning uzun zanjiri paydo paydo bo‘ladi. Bu zanjir* N ta zvenodan iborat bo‘lib, ularning umumiy soni $N!$ (N - korxonalarning umumiy soni) ga yetishi mumkin. Zanjirdagi qarzlar miqdorlarining absolyut qiymatlari yigindisi korxonaning nafaqat erkin oborotdagi vositalaridan oshib ketadi, balki ularning asosiy fondlari narxlari bilan solishtirish mumkin bo‘lgan darajaga etadi (ixtiyoriy korxona bir vaqtning o‘zida o‘z hamkorlarining qarzdori va kreditori bo‘lishi mumkin, shu sababli bu yerda gap aynan qarzlar miqdorlarining absolyut qiymatlari yigindisi haqida ketmoqda). Bu holatda sistema boshi berk ko‘chaga kirib qoladi – korxona ishlab chiqarishni to‘xtatishi kerak yoki jami qarzlar miqdorini oshirib, bir-biridan qarz olib, faoliyatini davom ettirishi mumkin.

Umuman olganda situatsiyadan chiqish uchun quyidagicha yondoshish mumkin: qandaydir vakolatli muassasa (masalan, markaziy bank) barcha korxonalarga qarzlari miqdorida bir vaqtning o‘zida kredit berish. U holda bu korxonalar bir-biri bilan hisob-kitob qilib, kreditlarni qaytarishadi. Ammo, bunday kredit siyosati salbiy oqibatlarga olib keluvchi kuchli infilyatsiyani paydo bo‘lishiga turtki bo‘lishi mumkin (tovarlarni ishlab chiqarish ko‘paytirilmadi, oborotdagi pul esa birdaniga ko‘payib ketadi).

Ixtiyoriy to‘lay olmaslik krizisida hisob-kitoblar protsedurasini o‘zining nomukamalligi bilan bog‘liq bo‘lgan sof «texnik» komponentalar doimo hal qiluvchi rolni bajaradi. Keyinchalik iqtisodiy, siyosiy va boshqa sabablar bilan paydo bo‘lmagan krizislarni, ya’ni aynan hisob-kitoblar protsedurasining nomukamalligi bilan bog‘liq bo‘lgan krizislarni o‘rganamiz.

Masalaning mohiyatini avval uchta korxonadan tashkil topgan sistema uchun sonli misolda tushuntiramiz. Ushbu korxonalardan har biri shartli bitta moliyaviy birlikka teng bo‘lgan erkin oborot vositasiga va 10 birlikka teng asosiy fondlarga ega. Birinchi korxona ikkinchisiga 100 birlik, ikkinchisi uchinchisiga 100 birlik va uchinchisi birinchisiga 100 birlik qarz bo‘lsin. Korxonalarning qarzlari absolyut yigindilari 600 birlikka teng bo‘lib, ularning asosiy fondlari (30 birlik) ga nisbatan ancha katta, erkin oborot vositalari (3 birlik) ga nisbatan solishtirmasa ham bo‘ladi. Shu bilan bir vaqtda ushbu sistemaning moliyaviy axvoli juda yaxshi, chunki korxonalar har birining alohida jami qarzlari (ya’ni, korxona berishi lozim bo‘lgan va olishi lozim bo‘lgan vositalar) yigindisi nolga teng. Bu holatda o‘zaro hisob-kitob qilish protsedurasi bir vaqtning o‘zida barcha qarzlarni bekor qilishdan iborat: hech kim hech kimdan qarz emas va qarz g‘avg‘osidan xolis holda hamkorlar o‘z ishini davom ettirishi e’lon qilinadi. Bu holda markazlashgan kreditga hojat qolmaydi.

Katta moliyaviy majburiyatlar zimmasida bo‘lgan ko‘p sondagi korxonalar uchun bu yondoshishni amalga oshirib bo‘lmaydi. Buning uchun masalani formallashtirish va chuqur tahlil qilish lozim bo‘ladi.

Iqtisodiy tizim o‘zaro bir-biriga qarz berishi va bir-biridan qarz olishi mumkin bo‘lgan N ta moliyaviy baquvvat korxonalardan iborat bo‘lsin. x_{nm} $(n \geq 1,\ m \leq N)$ orqali n-chi korxonaning m-chi korxonadagi qarzini (agar $x_{nm} < 0$ bo‘lsa birinchi korxona ikkinchisidan qarzdor bo‘ladi va $x_{nm} > 0$ bo‘lsa aksincha bo‘ladi) belgilaymiz. Bu belgilashga asosan

$$x_{nm} = -x_{mn}, \qquad x_{nn} = 0$$

ekanligi ko‘rinib turibdi. Demak, jami qarzlar to‘plamini diagonali nollardan iborat (chunki, $x_{nn} = 0$, ya’ni korxona o‘zidan qarzdor bo‘la olmaydi) $N \times N$ razmerli kososimmetrik matritsa ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Barcha o‘zaro qarzlar yigindisini individual qarzlar orqali quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin:

$$X = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} |x_{nm}|. \tag{7.61}$$

Agar (7.61) formula bilan aniqlanadigan miqdorni korxonalarning barcha erkin vositalari yigindisi X_0 bilan taqqoslash mumkin bo‘lsa, u holda bu miqdor tizim moliyaviy holatining miqdoriy xarakteristikasi sifatida xizmat qilishi mumkin, ya’ni

$$X > X_0 = \sum_{n=1}^{N} x_n . \tag{7.62}$$

(7.62) tengsizlik bilan ifodalanadigan holat krizisni anglatadi, bu yerda $x_n \geq 0$ bilan n-chi korxonaning individual erkin vositasi belgilangan.

Har bir korxonaning kredit va qarzlari (saldo) balansi korxonalarning yana bitta muhim bo‘lgan xarakteristikasidir, u quyidagicha aniqlanadi:

$$S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm} . \tag{7.63}$$

(7.63) ga asosan quyidagi hollardan biri bo‘lishi mumkin: $S_n > 0$, $S_n < 0$ va $S_n = 0$. $S_n > 0$ da korxona $S_n < 0$ balansga ega bo‘lgan qarzdor korxonalar uchun qarz beruvchi – kreditor vazifasini o‘taydi. $S_n = 0$ korxonani kreditor ham debitor ham emasligini, ya’ni korxona hech kimdan hech qanaqa qarzi yo‘qligini anglatadi. $|S_n| < x_n$ bo‘lgan hol korxonaning individual moliyaviy holati normal holatda ekanligini, korxonani qarzlari (yoki uning boshqa korxonalarga bergan kreditlari)ning real yigindisi uning erkin vositalaridan kichik ekanligidan dalolat beradi.

Xuddi shunga o‘xshash, iqtisodiy tizimning absolyut saldolari yigindisi

$$S = \sum_{n=1}^{N} |S_n| \qquad (7.64)$$

bu sistemaning moliyaviy ahvolini anglatuvchi makroko‘rsatkich sifatida xizmat qiladi. Agar $S < X_0$ bo‘lsa, ushbu iqtisodiy tizimda erkin vositalar qarzlar hajmidan katta bo‘lib, bu sistema normal faoliyat yuritishi mumkin (yuqorida keltirilgan misoldagi uchta korxonadan iborat sistema kabi).

X va S miqdorlar o‘rtasida doimo ma’lum munosabat mavjud. Ixtiyoriy qarzlar matritsasi uchun

$$X \geq S, \qquad (7.65)$$

o‘rinli, ya’ni qarzlar yigindisi hech qachon saldolari yigindisidan kichik bo‘lishi mumkin emas.

O‘zaro qarzlarni bartaraf qilish masalasi x_{nm} larni matritsasini bilgan holda $X' < X$ shartni qanoatlantiruvchi «yangi» x'_{nm} qarzlar matritsasini topishdan iborat. (7.65) tengsizlikdan ko‘rinib turibdiki, $X' = S$ bu masalaning ideal yechimidir. U holda normal moliyaviy holat ($S \leq X_0$) dagi sistema uchun $X' = S \leq X_0$ munosabat bajariladi va o‘zaro qarzlar o‘zilgandan keyin bu sistema normal faoliyatini yuritishi mumkin.

O‘zaro qarzlarni o‘zish (bartaraf etish) protsedurasining matematik modelini qurishda quyidagi ketma-ket xarakatlardan foydalaniladi. Birinchi navbatda ma’lum bir bosqichda individual qarzlar to‘plamini va korxonalar o‘rtasidagi aloqalarni chuqur tahlil qilishdan voz kechish lozim.

Yuqorida keltirilgan misolda uchta korxonaga qo‘llanilgan qarzlarni to‘lay olmaslik zanjirini kuzatish protsedurasini N ta korxona uchun nafaqat bajarish qiyin, balki bu protsedura kamchiliklardan holi emas. Har bir M ta korxona birinchisi ikkinchisiga, ikkinchisi uchinchisiga va hokazo M-chisi birinchisiga bir xil miqdordagi qarzdor bo‘lgan zanjirni qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, bu yopiq zanjir va har bir korxona qarzlaridan qutilishlari mumkin, ya’ni korxonalarning qarzlari bekor qilinadi. Agar M-chi korxona birinchisiga qarzdor bo‘lmasa, hosil bo‘lgan zanjir ochiq bo‘lib, endi yuqoridagi usulni bu zanjirga qo‘llab bo‘lmaydi. Bu holda qarzdorlikdan qutilishning yo‘li ikkinchi, uchinchi va hokazo $(M-1)$ chi korxonalarning qarzlari bekor qilinib, birinchi korxona oʻz qarzini M-chi korxonaga toʻlashni birinchi korxona zimmasiga yuklashdan iborat. Qarzni bir korxonadan ikkinchi korxonaga yoʻnaltirish mohxiyati va mazmuni boʻyicha veksel bilan muomala qilishga mos keladi. Bu holda qarz bergan xoʻjayin oʻzgarib, natijada qarzdor korxona (birinchi) da yangi kreditor (M-chi korxona) paydo boʻladi.

Qarzdorlikning yopiq zanjiri da $x_{nm}=-x_{mn}$ ekanligini hisobga olsak, quyidagini hosil qilish mumkin:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}x_{nm}=0. \qquad (7.66)$$

Bu tenglikdan $S_n=\sum_{m=1}^{N}x_{nm}$ ekanligini nazarda tutib, har bir korxonaning kreditlari va qarzlari (saldo) balansi uchun quyidagiga ega boʻlish mumkin:

$$\sum_{n=1}^{N}S_n=0 \quad . \qquad (7.67)$$

(7.66) munosabatdan koʻrinib turibdiki, korxonaning musbat saldolari yigʻindisi uning manfiy saldolari yigʻindisiga teng. Koʻrib chiqilgan oʻzaro qarzlardan qutilish tizimi «simmetrik konservativlik» (7.67) xususiyatiga ega, shuningdek bu tizim uchun «saqlanish qonunlari» (massaning, energiyaning va boshqalarning saqlanish qonunlari) (7.66) oʻrinli boʻladi.

(7.67) munosabatga asoslanib, oʻzaro qarzlardan ideal qutilishning matematik modelini qurishda quyidagi shartlardan foydalanish mumkin:

1) barcha x_{nm} qarzlar ma’lum va bu qarzlarni korxonalar tan olishadi;

2) oʻzaro qarzlarni oʻzishda korxonalarni S_n saldosi oʻzgarmasdan qoladi: $S'_n=S_n$, ya’ni bu holda korxonalarning individual moliyaviy holati oʻzgarmaydi:

3) x_{nm} qarzlarnibg bir qismi bekor qilinadi, bir qismi boshqa korxonalarga yoʻnaltirilishi mumkin, ya’ni korxona yangi debitorlarga va kreditorlarga ega boʻlishi hamda eski qarzlarining bir qismidan qutilishi mumkin.

Oʻzaro qarzlardan qutilish protsedurasining mohiyati x_{nm} qarzlarning oʻrniga korxonalarni S_n saldosini oʻrganishdan iborat. $S_n<0$ boʻlgan korxonalar qarzdor, saldosi $S_n>0$ korxonalar kreditor deb e’lon qilinadi. Keyin esa saldosi $S_n<0$ boʻlgan korxonalarning qarzlari kreditorlar o‘rtasida qanaqadir yo‘llar bilan taqsimlanadi, ya’ni «yangi» x'_{nm} qarzlar tizimi topiladi. Bunda (7.66) saqlanish qonuni va 2) shart hamda $X' = S$ tenglik bajariladi. Shu sababli o‘zaro qarzlardan qutilish masalasining bu yechimi *optimal yechim deb ataladi*.

Yuqorida keltirilgan optimal yechim juda ko‘plab variantda bo‘lishi mumkin. Chunki kreditorlar o‘rtasida qarzlarni har xil yo‘llar bilan taqsimlash mumkin. Bunga ikkita sodda misol keltiramiz. Birinchisida yangi qarzlar eskilari orqali quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$x'_{nm} = \frac{S_n|S_m| - S_m|S_n|}{S}. \tag{7.68}$$

(7.68) formulaga asosan qarzi $S_n\,(S_n < 0)$ bo‘lgan ixtiyoriy korxonaning qarzi kreditor-korxonalar o‘rtasida ularning saldolari $(S_m > 0)$ ga proportsional ravishda taqsimlanadi. Musbat saldosi katta bo‘lgan korxonalar zimmasiga har bir qarzdor korxonalar qarzlarining kattagina qismi yuklanadi. Bu qarzlarning umumiy miqdori S_m ga teng bo‘ladi.

Agar $S_n < 0,\; S_m < 0$ yoki $S_n > 0,\; S_m > 0$ bo‘lsa (7.68) formulaga asosan yangi qarzlar $x'_{nm} = 0$(ya’ni, korxonalar o‘zaro qarzlaridan qutulganlaridan so‘ng qarzdorlar qarzdorlarga, kreditorlar kreditorlarga qarz emas). Bu shuni anglatadiki, korxonalar o‘zaro qarzlaridan qutulganlaridan so‘ng xosil bo‘lgan moliyaviy aloqalar soni har bir korxona boshqa korxona uchun debitor yoki qarzdor bo‘lgan, ya’ni qarzlar matritsasi nol bo‘lmagan (bosh diagonal elementlaridan boshqa) elementlardan iborat holdagi moliyaviy aloqalar sonidan ancha kam.

7.3.6.Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli

Bozor iqtisodiyoti jarayonida ixtiyoriy ishtirok etuvchi o‘zining individual manfaatdorligi bo‘yicha harakat qiladi (ya’ni foyda olish, mehnat sharoitini yaxshilash, iqtisodiy xavfni kamaytirish, vositalarni tejash va boshqalar). Har bir subyekt iqtisodiy nochor ahvolda, ya’ni ishlab chiqarishga, narxlarga, oylik maoshiga va boshqa makroko‘rsatkichlarga bevosita ta’sir qila olmaydigan darajada bo‘lsa, bunday tizimning eng sodda varianti – raqobatdan iqtisod qilishdir. *Shu bilan birgalikda iqtisodiy tizimda mavjud oldi-sotdi munosabatlari ish beruvchilar va yollanma ishchilar, moliyachilar hamda sarmoya kirituvchilar va boshqalarning muvofiqlashgan harakati* iqtisodiy agentlarning harakati natijasida bo‘lishi mumkin. Agar bunday jamoaviy o‘zaro harakat natijasida tizimda tovar va xizmatlarni umumiy ishlab chiqarish ularga bo‘lgan umumiy ehtiyojlarga muvofiqlashsa, *u holda iqtisodiyotning bunday holati muvozanatli, bu holdagi turgun narxlar tur’gun bozor narxlari deyiladi.* Talab va taklif o‘rtasidagi balans aynan shu turgun bozor narxlarida o‘rinli bo‘lib, xususan, talabni to‘lanish qodirligini (platejesposobnost sprosa) anglatadi.

Iqtisodiy fanlarning muhim masalalaridan biri – iqtisodiyotni muvozanat shartlarini, shu jumladan, *turg‘un bozor narxlarini* aniqlashdan iborat. Iqtisodiy muvozanatning eng sodda matematik modellari quyidagi farazlarga asoslanib, quriladi:

1) yirik ishlab chiqaruvchi korporatsiya (ya’ni, monopoliya) larni shuningdek, butun sistema uchun o‘zlarining shartlarini himoya (diktovka) qiladigan ishchilar birlashmasining mavjud emasligi anglatuvchi mukammal bozor raqobati;

2) sistema ishlab chiqarish imkoniyatining o‘zgarmasligi: asbob-uskunalar, ishlab chiqarish inshootlari va texnologiyalari vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi;

3) vaqt o‘tishi bilan hamkorlar iqtisodiy manfaatdorligini o‘zgarmasligi: tadbirkorlarni o‘z foydalarini, ishchilar o‘z oylik maoshlarini oshirishga intilmasliklari hamda investorlarni qimmatli qogozlardan va boshqalardan tushayotgan foizlarni qanoatlantirishi.

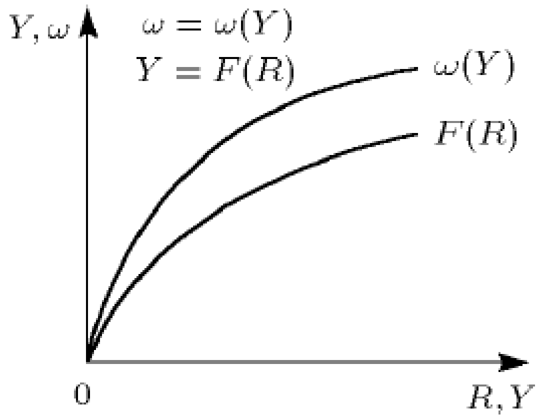
Yuqorida ko‘rsatilgan farazlarga javob beruvchi modellar ideal bozor iqtisodiyotining vaqt bo‘yicha «qotib qolgan» (sovub qolgan) hollarini ifodalaydi. Ammo, bu modellar bozor «xaos»idan shakllanuvchi iqtisodiy muvozanatni mavjudlik imkoniyati haqidagi savolga javob beradi va bundan tashqari iqtisodiy sistemaning asosiy makroko‘rsatkichlarini o‘zaro bog‘laydi.

Ushbu modellardan bittasi – Keyns modelidir. Ushbu modelda ishga yo‘llovchilar va yo‘llanuvchilar, iste’molchilar va jamg‘aruvchilar, ishlab chiqaruvchilar va ishchi kuchi bozorida harakat qiluvchi investorlar, mahsulotlar va pul, ya’ni bu tovar (mehnat, mahsulot, pul) larni o‘zaro taqsimlovchilar va almashuvchilar agentlar sifatida qaraladi.

Milliy daromad Y sistemaning birinchi makroko‘rsatkichi bo‘lib, vaqt birligi ichida ishlab chiqariladigan yagona mahsulotdir. Ushbu mahsulot iqtisodiyotning ishlab chiqarish sektorida ishlab chiqariladi, uning miqdori F funksiya orqali ifodalanadi. F funksiya resurs (vosita) larni miqdori va sifatiga, asosiy fondlar tarkibiga va band bo‘lgan ishchilar soni R (ikkinchi makroko‘rsatkich) bilan bog‘liq. 2) farazga asosan iqtisodiy muvozanat holatida ishlab chiqarish funksiyasi R va Y faqatgina bandlik orqali aniqlanadi, ya'ni

$$Y = F(R). \qquad (7.69)$$

$F'(R) > 0,\ R > 0$ nisbatan quyidagilar o'rinli deb hisoblaniladi: $F(0) = 0$, $F'(R) > 0,\ R > 0$ va $F''(R) < 0,\ R > 0$ da (7.12-rasm). $F(R)$ funksiyasi to'yinganlik xususiyatiga ega: R oshishi bilan tovar ishlab chiqarish sekinlashadi. Bunday yondoshish amalda o'zini oqlaydi: ishlab chiqarishda band bo'lganlar soni haddan tashqari oshib ketsa, ularga mos keluvchi ish frontini topish ancha mushkullashadi.



7.12-rasm

Shuningdek, ishchilar soni me'yoriga nisbatan ko'pchilikni tashkil etsa, ular bir-biriga halaqit bera boshlaydi va individual foydali ish koeffitsienti tushib ketadi. (7.61) munosabat mehnat bozori R va Y mahsulotlar o'rtasidagi o'zaro aloqani ifodalaydi. Qo'shimcha munosabatlar esa klassik siyosiy iqtisodning asosiy postulatlaridan bittasi orqali aniqlanadi:

4) ishchining s mehnat haqi ish o'rnini bitta birlikka kamaytirilganda yukotilgan mahsulotni narxiga teng.

Shuni ta'kidlash lozimki, 4) posto'latda ish o'rnini bittaga kamaytirishdan hosil bo'ladigan zararlar (resurslarga, asbob-uskunalarga va boshqalarga sarflanadigan harajatlar) hisobga olinmagan. Shunday qilib, 4) postulatdan quyidagiga ega bo'lish mumkin:

$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s$, bu yerda $\Delta Y^{(1)}$ - ish o'rnini bitta birlikka kamaytirilganda yo'qotilgan mahsulotlar sonini, p - yo'qotilgan mahsulot narxi. Agar ish bilan bandlik ΔR miqdorga o'zgarsa, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin: $\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R$, bu yerda $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \cdot \Delta R$ ishchilar soni ΔR miqdorga o'zgarganda yo'qotiladigan yoki qo'shimcha paydo bo'ladigan narx (aniqlashtirish kerak, mahsulotlar soni bo'lishi kerak). ΔR va ΔY miqdorlarni R va Y

miqdorlarga taqqoslaganda kichiq deb hisoblab, oxirgi tenglikni differentsial ko‘rinishda yozish mumkin: $\frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{s}{p}$.

(7.69) tenglikni e’tiborga olsak, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \tag{7.70}$$

$F(R)$ funksiya berilgan (bunga asosan ($F'(R)$ ni ham aniqlash mumkin) ligini hisobga olsak, s va p makrokursatkichlarning ma’lum qiymatlarida (7.70) dan bandlik darajasi R ni va (1) dan mahsulotlar miqdori Y ni aniqlash mumkin. Bu yerda aniqlangan bandlik darajasi iqtisodiy sistemada mavjud narxlar va boshqa xarakteristikalarga mos keluvchi ushbu kundagi oylik maoshlariga rozi bo‘lib ishlayotgan ishlovchilar sonini ifodalashini ta’kidlash joiz. Bandlik darajasi muvozanatini ta’minlovchi, mavjud sharoitlarda ishlashni xohlovchilarni hamma vaqtlarda ham topish mumkin, ya’ni quyidagicha faraz qilinadi:

5) (7.69) va (7.70) tenglamalarda to‘rtta miqdor qatnashmoqda. Ishchining s mehnat haqiga nisbatan quyidagilar faraz qilinadi:

6) modelda ishchining s mehnat haqi berilgan deb hisoblanadi.

s miqdor ish beruvchilar va yollanuvchilar o‘rtasidagi kompromiss natijasida aniqlanadi (real ish xaqi narxlar darajasiga ham bog‘liq).

Yopiq matematik model qurish uchun mahsulot bozorlari va moliyaviy bozorlarni ham o‘rganish lozim bo‘ladi. Ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi ehtiyojni qondirishga va ma’lum bir qismi jamg‘arilib boriladi:

$$Y = S + \omega,$$

bu yerda ω - iste’mol qilinadigan (iqtisodiyotga kaytmaydigan) qismi, S esa iqtisodiy sistemaga qaytuvchi, jamgarib boriladigan (yoki fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar) qismini ifodalaydi. S va ω miqdorlar o‘rtasidagi munosabat quyidagi mulohazalardan aniqlanadi. ω miqdorga nisbatan quyidagilar faraz qilinadi:

7) ishlab chiqarilgan mahsulotning iste’mol qilinadigan qismi ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y ning o‘ziga bog‘liq, ya’ni $\omega = \omega(Y)$. Bu yerda $\omega(Y)$ funksiyasi $F(R)$ funksiyasiga o‘xshab to‘yinganlik xususiyatiga ega: ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori qancha katta bo‘lsa, iste’mol qilishga sarflanadigan qo‘shimcha ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori ΔY ning ulushi shuncha kichik bo‘ladi va katta qismi jamgarilib boriladi. $d\omega/dY = c(Y)$ miqdor *iste’mol qilishga*

moyillik deyiladi. $0 < c < 1$, aks holda kichik miqdorda ishlab chiqarilgan mahsulotlarda ishlab chiqarilgan miqdoriga nisbatan ko‘proq iste’mol talab qilinar edi. $d = 1 - c$ miqdor jamg‘arish (yigish) ga moyillikni anglatadi.

$$S = Y - \omega(Y) \tag{7.71}$$

fondni tashkil qiluvchi mahsulot kelgusida foyda olish maqsadida investitsiya sifatida investorlar tomonidan iqtisodiyotga kiritiladi. Matematik modelda kiritilayotgan investitsiya kelgusida iste’mol uchun tashlab qo‘yilgan mahsulotga ekvivalent deb hisoblaniladi va shu sababli sistemaning yana bitta moliyaviy makroko‘rsatkichi – bank foizining normasi r bilan aniqlanadi. Haqiqatdan ham A razmyerda investiya qilib, bir yildan keyin $D = A \cdot r$ daromad olib, ushbu vositalarni bankka r foizga qo‘yishga solishtiriladigan bo‘lsa, investor hech narsa yutqazmaydi (bu misolda yutmaydi ham). Ikkala holda ham keyingi yilda katta miqdordagi iste’mollik imkoniyati sababli bugungi iste’mol keyinga qoldirilmoqda. Investitsiyaga talab $A(r)$ funksiya bilan beriladi. Agar $0 < r < r_1$ bo‘lsa $A'(r) < 0$ va $r \geq r_1$ bo‘lsa $A'(r) = 0$ bo‘ladi – investitsiyaning katta foizli normasida investitsiyaga talab bo‘lmaydi.

Muvozanat sharoitida fondni tashkil qiluvchi mahsulotga bo‘lgan talab $S(Y)$ investitsiyaga bo‘lgan talab $A(r)$ bilan balanslashadi:

$$S(Y) = A(r).$$

Agar (7.70) ni e’tiborga olsak,

$$Y - \omega(Y) = A(r). \tag{7.72}$$

Modelni yopiq ko‘rinishda ifodalash uchun moliyaviy bozor o‘rgabiladi. Iqtisodiy agentlar uchun pul fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar sotib olishga, iste’mol uchun, shuningdek, jamg‘arishning bir vositasi sifatida kerak. Faraz qilinadiki, pulni davlat chiqaradi va ularning miqdori (*taklif*) Z iqtisodiy sistemaning *berilgan boshqariluvchi parametri deyiladi.* Pulga bo‘lgan talabga nisbatan quyidagicha faraz qilinadi:

8) pulga bo‘lgan talab operatsion va chayqovchilik talablari yig‘indisidan iborat.

Operatsion talab Y tovarni sotib olish uchun (ham fondni tashkil qiluvchi sifatida hamda iste’mol uchun) qo‘lda bo‘lishi lozim bo‘lgan pul miqdori bilan aniqlanadi. Agar mahsulot narxi p ga teng, muomala vaqti τ ga teng bo‘lsa, u holda operatsion talab τpY miqdorga teng.

Chayqovchilik talabi foiz normasi miqdori r bilan bog‘liq. Agar foiz normalari yuqori bo‘lsa, katta pulga ega bo‘lgan puldorlar yaxshi daromaddan umid qilib, pullarining anchagina qismini bankda saqlaydilar. Bunda ular bankga nisbatan banknotlarni yuqori darajada likvidatsiya qilish (bu pullarni mahsulotlarga almashtirish) imkoniyatini qurbon qiladilar. Kichkina foiz stavkasida chayqovchilik talabi oshadi: puldorlar o‘z qo‘llarida ko‘proq miqdordagi pullarni ushlab turishni xohlaydilar. Shuning uchun chayqovchilik talabi $I(r)$ funksiya orqali beriladi. $r > r_2$ bo‘lganda $I'(r) < 0$ bo‘ladi, $r \to r_2$ da $I(r)$ funksiya juda tez o‘sadi ($r \to r_2$ da $\lim I(r) = \infty$; pul egalari bank majburiyatlariga ega bo‘la olmaydilar). $r_2 < r_1$ deb hisoblash tabiiy, aks holda yoki investitsiya nolga teng va iqtisodiy muvozanat haqida gapirishga hojat qolmaydi yoxud $I(r)$ funksiya aniqlanmagan va uni o‘rganish ma’no kasb etmaydi.

Moliyaviy bozor muvozanat holatida bo‘lganida pullarning balansi («saqlanish qonuni») iqtisodiy tizimda quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$Z = \tau\, pY + I(r). \tag{7.73}$$

(7.69)-(7.73) tenglamalarni birlashtirib, 1)-8) farazlar asosida hosil qilingan bozor muvozanatining matematik modeliga ega bo‘lish mumkin:

$$Y = F(R), \quad F'(R) = \frac{s}{p}, \quad Y - \omega(Y) = A(r) \quad Z = \tau\, pY + I(r) \tag{7.74}$$

matematik modelda sistemaning parametri s (oylik maosh stavkasi) va τ texnik parametrlar beriladi. F, F', ω, A, I funksiyalar har bir o‘z argumentlarining ma’lum funksiyalari bo‘lib, ular yuqorida bayon etilgan xossalarga ega. Ushbu berilganlarga asosan modeldan turtta noma’lum miqdorlar: Y (ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori), R (bandlik), p (mahsulot narxi) va r (daromad normasi) aniqlanadi.

(7.74) dan p, r, Y miqdorlarni yo‘qotib, (7.74) tenglamani R ga nisbatan quyida keltirilgan bitta tenglama ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$$\frac{\tau\, sF(R)}{F'(R)} + Z = I\left(A^{-1}\left[F(R) - \omega(F(R))\right]\right), \tag{7.75}$$

bu yerda A^{-1} funksiya A funksiyaga teskari funksiyadir. (7.75) dan R ni qiymatini aniqlab, (7.74) tenglamalardan boshqa noma’lum miqdorlarni ham aniqlash mumkin.

(7.75) tenglamani chap va ung tomonlariga kiruvchi funksiyalarni grafiklari tahliliga asoslanib, bu tenglama yagona yechimga ega ekanligini ko‘rsatamiz.

$F(R)-\omega(F(R))$ funksiya $R=0$ da nolga teng bo‘lib, R ning monoton o‘suvchi funksiyasidir. Uning monotonligi $d\omega(F(R))/d(F(R))=c<1$ shartdan, bu funksiya R ni o‘sishi bilan o‘suvchi ekanligi $dF(R)/dR>0$ shartdan esa kelib chiqadi. Shuningdek, bu funksiya A^{-1} monoton funksiyaning argumentidir. A funksiyaning xossasidan A^{-1} funksiyaning R argumentga sifat jihatdan qaysi ko‘rinishda bog‘liqligini ko‘rish mumkin. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, $R>R_1$ (R_1 R ning qandaydir qiymati bo‘lib, $0<R_1<\infty$) shart bajarilsa, $A^{-1}\equiv 0$. O‘z navbatida A^{-1} funksiya tenglamada I funksiyaning argumenti sifatida ishtirok etayapti.

Endi (7.75) tenglamaning chap tomonini ko‘rib chiqamiz. $-\tau sF(R)/F'(R)$ funksiya $R=0$ da nolga teng ($F'(R)\neq 0$ deb faraz qilinadi). uning R bo‘yicha birinchi tartibli hosilasi funksiyaning $F'(R)>0$, $F''(R)<0$ xossalariga asosan manfiy, ya’ni bu funksiya monoton kamayuvchidir.

(7.74) matematik model muvozanat holatiga yaqin bo‘lgan turli holatlarni qiyosiy tahlili uchun ham ishlatilishi mumkin (qanday qilib sistema muvozanat holatiga keladi yoki muvozanat holatidan chiqadi degan savollarga javob bermasdan).

7.3.7. Iqtisodiy o‘sishning makromodeli

O‘suvchi iqtisodda vaqt o‘tishi bilan ishlovchilar soni ko‘payib boradi. Eng oddiy holda ish bilan ta’minlanganlarning o‘sish sur’ati ishlayotganlar soni bilan proportsional

$$\frac{dR}{dt}=\alpha R(t)\ . \tag{7.76}$$

Shuning uchun $R(t) = R_0e^{\alpha t}$ vaqtning ma’lum bir funksiyasi, $R_0 = R(0)$ - boshlang‘ich vaqtdagi ishlovchilar soni, α - ma’lum miqdor.

Ishchilar mehnati tufayli $y(t)$ milliy daromad keltirsak. Bu daromad qisman ehtiyojlarni qondirishga va jamg‘arishga ketadi, ya’ni

$$y(t) = W + A. \tag{7.77}$$

Bu yerda W – ehtiyojlarni qondirishga sarf bo‘ladigan. A – jamg‘arilgan daromadning qismlaridir.

Jamg‘arilgan A qism esa o‘z navbatida qatordan chiqib qolgan sanoat quvvatini tiklash va yangi quvvatlar yaratish uchun sarf etilib, yana iqtisodga qaytadi. $M(t)$ – quvvat deyilganda mahsulotni mumkin qadar maksimal ishlab chiqarish tushiniladi.

Mahsulotni real ishlab chiqarish ishlovchilar soniga bog‘liq bo‘ladi.

$$y(t) = M(t)\, f(x(t)). \qquad (7.78)$$

(7.78) da - $x(t) = R(t) / M(t)$– bir birlik quvvatda ishlovchilar soni.

f(x) funksiya to‘g‘risida quyidagiga faraz qilinadi:

$f(0) = 0,\ f'(x) > 0$, ya’ni ishlovchilar soni oshishi bilan ishlab chiqarilayotgan mahsulot ham oshib boradi va $f'''(x)<0$ iqtisodni mahsulot bilan to‘lganligini (ta’minlanganligini) bildiradi.

f(x) funksiya $x[0;X_M]$da aniqlangan, $X_M = R_M / M$, $R_M(t) - M(t)$ quvvatni ta’minlovchi xo‘jalikdagi ishchilar soni. Agar hamma ish joylari ishchilar bilan ta’minlangan bo‘lsa, u holda mahsulotni ishlab chiqarish miqdori *Y(t)* ta’rifga ko‘ra $Y(t)=M(t)$, ya’ni $f(X_M)=1$ bo‘ladi.

Ishlab chiqarishdan topilgan daromadni ehtiyojni qondirishga va jamg‘arishga ajratishning optimal usullarini aniqlash iqtisodiyot nazariyasining asosiy vazifalaridan biridir. Optimallikni kriteriyasi sifatida jon boshiga (1 ishchiga) sarf bo‘ladigan ehtiyojni $C(t)=W(t) / R(t)$ ni qabo‘l qilish mumkin.

Vaqt birligi ichida jamg‘arilgan *A(t)* daromad yangi quvvatlarni yaratishga sarf bo‘ladi:

$$A(t) = a\, I(t). \qquad (7.79)$$

Bu yerda a > 0 yangi quvvat birligini yaratish uchun zarur bo‘ladigan fondni tashkil etuvchi berilgan o‘zgarmas miqdor. *I(t)* – yangi quvvat birligi soni.

Mavjud quvvatni ishdan chiqish tezligi quvvatning o‘ziga proportsional ya’ni $\beta M(t)$ deb hisoblanadi, u holda quvvat quyidagiga o‘zgaradi:

$$\frac{dM}{dt} = I(t) - \beta M(t)\ , \qquad (7.80)$$

$\beta > 0$ - ishdan chiqish koeffitsienti.

(7.77), (7.78) va (7.80) tenglamalarda 4 ta noma’lum *y(t), W(t), M(t), I(t)*lar qatnashayapti. Modelni to‘ldirish uchun yangi quvvat miqdori mavjud quvvat miqdoriga proportsional $I(t) = \gamma M(t)$ deb faraz qilamiz. γ - *b*erilgan o‘zgarmas miqdor bo‘lib, $\gamma > \beta$.

U holda (7.80) quyidagi yechimga ega bo‘ladi:

$$M(t) = M_0 e^{(\gamma-\beta)t} \qquad (7.81)$$

va shu orqali boshqa miqdorlar ham aniqlanadi.

Oddiy

$$\gamma - \beta = \alpha \qquad (7.82)$$

holni qaraymiz. Bu esa quvvat *R(t)* va *y(t)*lar bilan bir xil surat bilan o‘sar ekan, chunki $f(x(t)) = f(x = \frac{R_0}{M_0} = const)$.

Jon boshiga sarf bo‘ladigan ehtiyojni quyidagiga ifodalash mumkin:

$$C(t)=\frac{W(t)}{R(t)}=\frac{y(t)-A(t)}{R(t)}.$$

(7.78–7.79) va (7.81–7.82) larni hisobga olsak

$$C(t)=c=\frac{f(t)-\alpha(\alpha+\beta)}{x}=const.$$

Uning maksimumi quyidagi shartdan topiladi:

$$\frac{dC}{dX}=\frac{d}{dX}\left(\frac{f(x)-\alpha(\alpha+\beta)}{x}\right)=0.$$

Ya’ni quyidagi tenglamadan:

$$X_m f'(X_m)-f(X_m)+\alpha(\alpha+\beta)=0 \qquad (7.83)$$

$0 < X_m \le X_m$ va $X_m = R_0 / M_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimni aniqlash mumkin.

Jon boshiga sarf bo‘ladigan maksimum ehtiyoj C_m ni ta’minlaydigan jamg‘arish normasi quyidagicha:

$$n_m=\frac{A_m}{y_m}$$

va u $y_m = M_m f(X_m)$, $A_m = \alpha\gamma M_m$ va (7.78), (7.81) – lardan aniqlanadi:

$$n_m=1-X_m\frac{f'(X_m)}{f(X_m)}. \qquad (7.84)$$

Bu norma iqtisod o‘sishini oltin qoidasining normasi (Solou) deyiladi.

Agar (7.82) shart bajarilmasa, iqtisod o‘sishi rejimi murakkab protsessdan iborat bo‘ladi.

7.4. Ekologik- matematik modellar

Hozirgi davrda ekologik jarayonlarni o‘rganish o‘ta muhim masalalardan biri hisoblanadi. Shuning uchun ham ushbu bo‘limda ekologiyaning ba’zi bir matematik modellari keltirilgan. Mazkur bo‘limni tayyorlashda [11] adabiyotlardan foydalanilgan.

7.4.1. Saqlanish qonunlariga asoslangan modellarning matematik apparati

O‘rganilayotgan obyektning matematik modelini qurishda, uni xarakterlovchi hamma bog‘lanishlardan eng moslari ajratiladi. Bunday bog‘lanishlar odatda tabiatshunoslikning fundamental qonunlarini ifodalovchi tenglamalar ko‘rinishida yozib olinadi. Obyektlarning o‘zi tabiati va vazifasiga ko‘ra mutlaqo har xil fizik yoki biologik hodisalar, texnologik jarayonlar, mexanizm va konsruktsiyalar bo‘lishi mumkin.

Saqlanish qonuni - mulohazalar sxemasi, aniq matematik apparat emas. Agar mulohazalar ketma-ketligini:

$$\frac{d\Phi}{dt} = F \qquad (7.85)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin bo'lsa, u holda saqlanish qonuni bayon etilgan deyish mumkin. Bu yerda t-vaqt, $\Phi = \sum_k \varphi^k, \varphi^2 = \varphi^k(\varphi_1^k, ..., \varphi_s^k),\ \varphi_s^k = \varphi_s^k(t, x_i)$ - tizimning k-element sonli tavsifi (masalan massa, energiya va h.k), t - vaqtni xarakterlovchi mustaqil o'zgaruvchi, $x_i\,(i = 1,2,...,n\ \text{ёки}\ i = \overline{1,n})$ - tizim elementining yagonalik alomati bo'lib, foydalanuvchi tomonidan kiritilishi shart. F ning o'zgarish sababi ta'sir deyiladi. Saqlanish qonunlarining uchta bosqichini ajratib ko'rsatish mumkin.

I – bir jinsli tizimlar darajasi. $F(\varphi^k)$ - berilgan funksiya bo'lsin, u holda (7.85) sodda differensial tenglamalarning to'la tizimini tashkil etadi:

$$\frac{d\Phi}{dt} = F^+ - F^-. \qquad (7.86)$$

Bu yerda $F^+ = F^+(\varphi^k)$ - φ^k miqdoriy o'sishga turtki beruvchi ta'sir, $F^-(\varphi^k)$ - φ^k ning kamayishiga turtki beruvchi ta'sir.

Uzluksiz bir jinsli bo'lmagan tizimlarning II – bosqichi. Tizim elementlarining soni shunchalik ko'p deb olinadiki, yagonalik alomati, tizim elementlarining xususiyatlari, ta'sirlar mavjud oraliqdagi hamma qiymatlarni qabul qiladi. Qidirilayotgan φ_α funksiyalar esa uzluksiz hamda silliqlilik shartlariga javob beradi. Mazkur holatda qidirilayotgan tavsif quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:

$$\Phi = \int_\omega \varphi\, d\,\omega, \qquad (7.87)$$

bu yerda $\omega(t)$- x_i o'zgaruvchilar fazosining ixtiyoriy ravishda tanlangan hajmi (barcha t larda bir xil x_i omillardan tashkil topadi), φ- F kattalikning taqsimlanish zichligi. Uzluksiz bir jinsli bo'lmagan tizimlar uchun (7.87) hisobiga saqlanish qonuni:

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \varphi\, d\,\omega = F \qquad (7.88)$$

ko'rinishda yozib olinadi. F ning ta'sirlari ikkita bosqichga ajratiladi $(F = G + \Sigma)$:

1) Tizimning har bir elementiga ta'sir, $G = \int_\omega g\, d\,\omega,$ bu yerda g - ta'sir zichligi.

2) Tizim hajmining chegarasidan uzatiladigan ta'sir, $S, \sum = \int_s \sigma_n dS,$ bunda σ_n - sirtiy ta'sirlarning taqsimlanish zichligi.

Saqlanish qonuni universal deb olinadi: agar uni ω hajmga qo‘llash mumkin bo‘lsa, u holda u hajmning ixtiyoriy qismi uchun ham qo‘llaniladi.

Uzluksiz muhit uchun saqlanish qonuni:

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \varphi \, d\omega = \int_\omega g \, d\omega + \int_s \sigma_i \alpha_i dS \tag{7.89}$$

ko‘rinishda yozib olinadi. Bu yerda α_i - $\bar{n}$ normal kosinusining *S sirtga nisba*tan *yo'nalishi*, $\sigma_n = \sigma_i \alpha_i$.

Agar uzluksiz bir jinsli bo‘lmagan tizimlar uchun ayrim og‘zaki mulohazalar yoki mulohazalar ketma-ketligining natijasi (7.89) ko‘rinishda yozib olinsa, saqlanish qonuni bayon etilgan, deb hisoblanadi.

Agar funksiyalar silliqlikning zaruriy shartlariga javob bersa, saqlanish qonuni tenglamasining integral ko‘rinishi (7.89) dan xususiy hosilali tenglamani olish mumkin:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi V_i}{\partial x_i} = g + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}. \tag{7.90}$$

Og‘zaki bayondan φ, σ, g o‘zgaruvchilar topiladi. Ularning qiymatini (7.90) ga qo‘yib aniq saqlanish qonunlari uchun xususiy hosilalarga doir tenglama hosil qilamiz.

$\frac{dx_i}{dt} = V_i$ kelishuv hodisa, jarayon o‘rganilayotgan sohaning tor doiradagi mutaxassislar tomonidan aniqlashtiriladi.

Diskret statistik tizimlarning III – darajasi. Tizim o‘zining yagonalik alomatiga ega bo‘lgan diskret elementlardan tashkil topgan, x_i - har bir elementning yagonalik alomati. Butun tizim sifat jihatdan har xil bo‘lgan *N* ta qism tizimdan tashkil topgan bo‘lsin, $\alpha = \overline{1, N}$ qism tizimga tegishlilikni xarakterlaydi, alohida qilib quyidagi ko‘rinishda yozib olinadi:

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = F_\alpha^+ - F_\alpha^-, \quad \alpha = \overline{1, N}, \tag{7.91}$$

bu yerda $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(t, x_i, y_j), \quad x_i (i = \overline{1, m})$ - o‘zaro ta'sirlarda ishtirok etuvchi yagonalik alomatlari, $y_j = x_{j+m}(j = \overline{1, n-m})$ - o‘zaro ta'sirlarda ishtirok etmaydigan omillar.

$\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_j}{dt}$ hosilalar butun tizim emas, uning alohida elementlari bilan bog‘langan:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_k, y_l), \quad i,k = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,n-m}; \tag{7.92}$$

$$\frac{dy_j}{dt} = f_{j+m}(x_k, y_l), \quad l, j = \overline{1,n-m}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{7.93}$$

$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(t, x_i, y_j)$ bo‘lgani uchun:

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t} + f_i(x_k, y_l)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i} + f_{j+m}(x_k, y_l)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_j}, \quad \alpha = \overline{1,N}. \tag{7.94}$$

Shunday qilib, saqlanish qonunlarining uchinchi bosqichi quyidagi tarzda xarakterlanadi:

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} + f_i(x_k, y_l)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i} + f_{j+m}(x_k, y_l)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_j} = F_\alpha^+ - F_\alpha^-. \tag{7.95}$$

Ilovalarda uzluksiz harakatlar sinfiga nisbatan kengroq harakatlar sinfini o‘rganishga zarurat tug‘iladi. Agarda harakatning aniqlanish sohasida ertaksifat o‘zgarish ehtimoli bo‘lgan giper tekislik bo‘lsa, bu harakat *qattiq uzilishli harakat*, deyiladi. Funksiyalar uzilishining kattaliklari ixtiyoriy bo‘la olmaydi, shuning uchun ular kuchli uzilish tenglamalari deb nomlanuvchi ma’lum bir munosabatlarni qanoatlantirishi kerak. Berilgan munosabatlar saqlanish qonunlaridan kelib chiqadi.

7.4.2. Ekologiyada matematik modellarga misollar

7.4.2.1. Bir jinsli populyatsiyaning sodda modellari

Hech bir tirik organizm alohida holatda mavjud bo‘la olmaydi. Ularning hammasi populyatsiya deb nomlanuvchi guruhlarni tashkil etadi. Populyatsiya ichida juda ham murakkab o‘zaro ta’sirlar mavjud, lekin boshqa populyatsiyalar va atrof - muhit bilan o‘zaro munosabatda u butun tuzilma sifatida ishtirok etadi. Ekologiyada ko‘riladigan tirik mavjudotlar tashkillanishining eng quyi darajasi populyatsiyadir.

Populyatsiya (o‘lchov) ning asosiy tavsifi - umumiy son (birlik fazoga nisbatan) yoki zichlik. Odatda u mavjudot soni yoki ularning biomassasi orqali ifodalanadi. Tabiatda populyatsiya o‘lchamining quyi va yuqori chegaralari mavjud. Umumiy sonning dinamikasi tug‘ilish va o‘lish jarayonlari bilan aniqlanadi. Agar populyatsiya fazoda tekis taqsimlangan, populyatsiyaning xamma mavjudotlari bir xil, populyatsiyaning soni yoki zichligi $N(t)$ - uzluksiz differensiallanadigan funksiya deb olinsa, aholi sonining o‘zgarish dinamikasi $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = (B - D)N \tag{7.96}$$

tenglama bilan ta’riflanishi mumkin. Bu yerda *B* va *D* – mos ravishda tug‘ilish va o‘lish, ular umumiy holda *N* va *t* ga bog‘liq bo‘lishi mumkin. $B-D=\varepsilon=const$ da cheksiz muhitda populyatsiya sonining eksponentsial o‘sish tenglamasi (Maltus qonuni)ga kelamiz.

Lekin barqaror ekotizimlarning qismlari bo‘lgan populyatsiyalarda odatda ε va N o‘rtasidagi statistik nuqtai nazardan ishonchli manfiy korrelyatsiya aniqlanadi (bu kattaliklar o‘rtasida musbat korrelyatsiya o‘rnatilgan yagona, inson pupulyatsiyasi). ε va N o‘rtasidagi regression bog‘lanishning eng sodda shakli chiziqlidir. Shuning uchun $\varepsilon=\alpha-\gamma N;\ \alpha,\gamma>0$ deb faraz qilgan holda, populyatsiya dinamikasining tenglamasini populyatsiya nazariyasida keng tanilgan mantiqiy tenglama ko‘rinishida yozib olish mumkin:

$$\frac{dN}{dt}=N(\alpha-\gamma N), \tag{7.97}$$

Uning yechimi quyidagi ko‘rinishda:

$$N(t)=\frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha+\gamma N_0(e^{\alpha t}-1)}. \tag{7.98}$$

$\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, ya’ni populyatsiya soni cheksizlikka qarab ortib ketmasdan, yuqoridan chegaralangan.

Orttirma koeffisientning umumiy aholiga bog‘lanishlari xilma-xilligini ikkita sinfga ajratish mumkin. Birinchida ε N orttirishi bilan monoton kamayadi, ikkinchi holatda monotonlikning buzilishi xarakterlidir. Bunday holda sonning ayrim qiymatlarida orttirma koeffisienti N ortishi bilan o‘sish boshlanadi. Sonning keyingi ortishlarida resursning umumiy etishmovchiligi ta’sir qilib, ε ning ortishi kamayish bilan almashadi. Bog‘lanishlarning bu turi *Olli egri chizig‘i* deyiladi. Bunday holatda bir nechta barqaror statsionar holatlar mavjud. Bunday holda populyatsiya o‘zining o‘lchamini oshirishga imkon beruvchi atrof - muhitga moslashishning yangi shakli yaratilishi sifatida talqin etilishi mumkin.

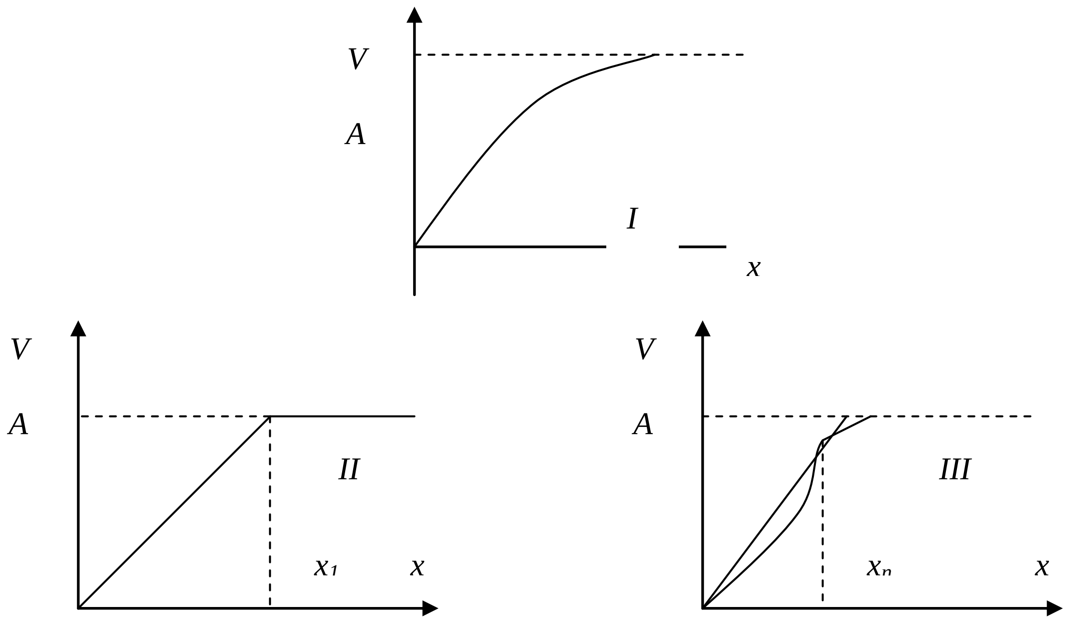
Son tebranishlari paydo bo‘lishining boshqa mexanizmlari ham bor (populyatsiyaning yosh tarkibini o‘rganish, tarkibiy xatoliklarning mavjudligi). Ko‘rsatilgan modellarning umumlashmasi bilan maxsus adabiyotda tanishish mumkin.

7.4.2.2. Yirtqich-o‘lja modeli (Volterr modeli)

$x(t)$ i $y(t)$ -mos ravishda o‘lja va yirtqichlar soni. O‘ljalar sonining ortishini chegaralovchi yagona omil - ularga yirtqichlar tomonidan bosim berilishidir. Yirtqichlarning ko‘payishi esa ov qilingan mahsulot (o‘lja) soni bilan chegaralanadi. U holda yirtqichlar bo‘lmaganida o‘ljalar soni eksponentsial tarzda α tezlik bilan ortishi, yirtqichlar soni esa o‘ljalar bo‘lmaganida - m nisbiy tezlik bilan kamayishi kerak. α va m - o‘ljalarning tabiiy ortishi va yirtqichlarning tabiiy o‘lish koeffisientlari. $V = V(x)$ - bitta yirtqich tomonidan birlik vaqt ichida iste’mol qilingan o‘ljalar soni (yoki biomassasi), jumladan shu biomassa yordamida olingan energiyaning qismi (K) hazm qilishga, qolgani esa asosiy almashinuvni ushlab turishga sarf bo‘ladi. U holda yirtqich-o‘lja tizimini quyidagi ko‘rinishda yozib olish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(kV(x) - m); \end{aligned} \tag{7.99}$$

$V(x)$ odatda yirtqichning trofik funksiyasi deb ataladi, aniqrog‘i odatda uni tajriba orqali aniqlanadi. Hozirgi paytda



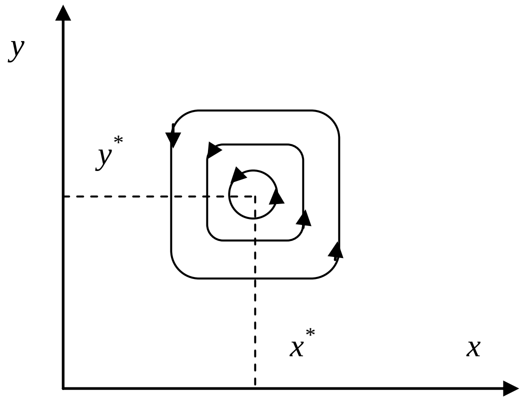
7.13-rasm. Yirtqich trofik funksiyalarining xarakterli turlari

bu funksiya yuqorida tasvirlangan (7.13-rasm) turlardan biriga taalluqli deb olinadi:

I – yirtqich baliqlarning ayrim turlariga va umurtqasizlarga xarakterli;

II – yirtqich - filtratorlarga (masalan, ko‘pgina kichik baliqlarga);

III – murakkab hatti-harakatni namoyon qiluvchi umurtqali organizmlar uchun. Agar o‘ljalar himoya strategiyasini ishlab chiqara olsa, buni xarakterlovchi funksiya ham shu ko‘rinishda bo‘ladi. X ning kichik qiymatlarida, hamma o‘ljalar har doim och yuradigan, eb to‘ymas yirtqichning (tabiatdagi tabiiy hol) qarmog‘iga tushishi tayin. Bunday holda $V(x)$ trofik funksiyani o‘ljalar sonining chiziqli funksiyasi, deb hisoblash mumkin (ya’ni $V=\beta x$). Bundan tashqari, $k=const$ deb faraz qilamiz.



7.14-rasm. Yirtqich-o‘lja tizimi tenglamalari yechimining afzal trayektoriyalari

U holda:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\alpha x-\beta xy,\\ \frac{dy}{dt}&=k\beta xy-my.\end{aligned}\tag{7.100}$$

(7.100) tizim– Volter yirtqich- o‘ljasining klassik modeli, unga ko‘ra berilgan tizim quyidagi integralga ega:

$$\left(\frac{e^X}{X}\right)^m\left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha=C\tag{7.101}$$

($\frac{dy}{dx}=\frac{y(k\beta x-m)}{x(\alpha-\beta y)}$ tenglamaga ko‘ra, unda o‘zgaruvchilar ajraladi). Bu yerda $X=\frac{x}{y^*},\ Y=\frac{y}{y^*},\ x^*=\frac{m}{k\beta},\ y^*=\frac{\alpha}{\beta}$. Agar x_0, y_0 -mos ravishda o‘lja va yirtqichlar sonining boshlang‘ich qiymatlari bo‘lsa, u holda:

$$C=\left(\frac{e^{x_0/x^*}}{x_0/x^*}\right)^m\cdot\left(\frac{e^{y_0/y^*}}{y_0/y^*}\right)^\alpha>0.$$

(7.101) tenglama esa tizimning davriy yechimlari fazali trayektoriyalariga to‘g‘ri keladigan (7.100) ichma-ich joylashgan berk egri chiziqlar oilasini ta’riflaydi (7.14- rasm). Tebranishlar aplitudasi S ning ortishi bilan x va y ham ortadi. $C=e^{(m+\alpha)}$ minimal qiymatda bu egri chiziqlar (x^*, y^*) koordinatali nuqtaga tiziladi. $\{x=x^*,\ y=y^*\}$ (7.100) ning statsionar yechimi ekanligi aniq $\left(\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dy}=0\right)$. Agar ma’lum vaqt momentida $t=t_0,\ x=x^*,\ y=y^*$ bo‘lib qolsa, u holda vaqtning keyingi momentlarida ham bu tengliklar saqlanadi. Bundan tashqari $x=y=0$

trivial yechim ham statsionar bo‘ladi. (7.100) ning boshqa statsionar yechimi yo‘q.

Volter modeli haqiqatda kuzatilgan ko‘pgina hodisalarni tushuntirib bersa-da, uning katta kamchiligi bor. Ya’ni fazali koordinatalar kichik bo‘lsa ham xatolikka uchrasa tizim bitta tsikldan boshqasiga o‘tadi.

7.4.2.3. Yirtqich-o‘ljaning umumiy modeli (Kolmogorov modeli)

Nisbatan umumiy model Kolmogorovning ishida tasvirlangan. Agar yirtqichlarning populyatsiyasida ichki raqobat bo‘lmasa, Volter modelining umumlashmasi quyidagi ko‘rinishdagi model bo‘ladi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y. \end{aligned} \tag{7.102}$$

Volterning modelidan farqli o‘laroq, Kolmogorov modelida α, V funksiyalar va yirtqichlarning tabiiy orttirmasi koeffisienti K larga nisbatan hech qanday maxsus farazlar qilinmaydi. Bu funksiyalarning ongli biologik tasnifini amalga oshirish uchun ularning *X* ga bog‘liqlik tavsifiga oid ayrim sifatli farazlarni bayon etamiz.

1. $\alpha_x^{'} < 0;\ \alpha(0) > 0 > \alpha(\infty)$. Ushbu cheklanishlarning tavsifi quyidagicha: yirtqichlar bo‘lmaganida o‘ljalarning tabiiy ortish koeffisienti, sonlarining ortishi bilan musbat qiymatdan manfiysiga o‘tgan holda kamayadi. Boshqacha aytganda, o‘ljalar populyatsiyasida cheklangan resursga bo‘lgan ichki kurash mavjud. Shuning uchun yirtqichlar bo‘lmaganida ham o‘ljalar soni cheksizlikka qarab ortmaydi, $\alpha(\bar{x}) = 0$ tenglamaga ko‘ra aniqlanuvchi darajada to‘xtaydi.

2. $K_x^{'} > 0;\ K(0) < 0 < K(\infty)$. Bu, o‘ljalarning soni ortishi bilan yirtqichlarning tabiiy ortish koeffisienti manfiydan (ovqat yetmaganida) musbat qiymatga o‘tish orqali ortishini anglatadi.

3. $x > 0$ da $, V(x) > 0 \quad V(0) = 0$. (2.102) tizimning uchta statsionar nuqtasi mavjud: (0,0); $(\bar{x},0)$, bu yerda $\bar{x}$ $\alpha(\bar{x}) = 0$ dan topiladi, hamda

$$\alpha(x^*)x^* - V(x^*)y^* = 0, \qquad k(x^*) = 0 \tag{7.103}$$

tenglamadan topiladigan (x^*, y^*) . (7.103) ni chiziqlashtirib, trayektoriyaning statsionar nuqtalar atrofidagi hatti-harakatini o‘rganamiz. $p = x - x^0,\ g = y - y^0\ bo'l\sin,\ bu\ \ yerda\ \ x^0, y^0$ ushbu nuqtalarning koordinatalari.

★ $(0,0)$ nuqtada quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(0)p, \qquad \frac{dg}{dt} = k(0)g\,. \tag{7.104}$$

Xarakterli tenglama ildizlari $\lambda_1 = \alpha(0)$ i $\lambda_2 = k(0)$ haqiqatdan ham turli ishorali, shuning uchun bu nuqta - egar nuqtadir. $(\bar{x},0)$ nuqtada chiziqlashtirilgan tenglamalar ko‘rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{dp}{dt} = \lambda_x^{'}(0)\bar{x}p - V(\bar{x})g, \qquad \frac{dg}{dt} = k(\bar{x})g\,. \tag{7.105}$$

Xarakterli tenglamaning ildizlari $\lambda_1 = \alpha_x^{'}(\bar{x})\bar{x}$, $\lambda_2 = k(\bar{x})$. $\alpha_x^{'} < 0$ bo‘lgani uchun, $\lambda_1 < 0$. Agar $K(\bar{x}) > 0$,ya’ni $\bar{x} > x^*$ bo‘lsa, u holda $\lambda_2 > 0$ va bu nuqta-egridir.

$\bar{x} < x^*$ va $K(\bar{x}) < 0$ da $(\bar{x},0)$ - nuqta barqaror tugun.

★ (x^*, y^*) nuqtada ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dp}{dt} = -\sigma\, p - V(x^*)g, \qquad \frac{dg}{dt} = \left(K_x^{'}(x^*)y^*\right)p. \tag{7.106}$$

B yerda $\sigma = V_x^{'}(x^*)y^* - \alpha^{'}(x^*)x^* - \alpha(x^*)$. Mazkurning xarakterli tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + V(x^*)K_x^{'}(x^*)y^* = 0\,. \tag{7.107}$$

Ildizlarning ko‘paytmasi $V(x^*)K_x^{'}(x^*)y^*$ musbat bo‘lgani uchun, (x^*, y^*) nuqta yoki fokus ($\sigma^2 < 4VK_x^{'}y^*$ da), yoki tugun ($\sigma^2 > 4VK_x^{'}y^*$ da) bo‘ladi. Barqarorlik σ ishorasiga qarab aniqlanadi ($\sigma > 0$ - da barqarorlik, $\sigma < 0$ - nobarqarorlik). Ko‘rib chiqilgan hollardan shunday xulosa qilish mumkinki, turlararo va tur ichidagi munosabatlar hatti-harakatining sodda va tabiiy farazlaridan yirtqich-o‘lja tizimining murakkab tuzilishi kelib chiqadi. Shunisi qiziqki, bu tizimda chekli tsikl tabiiy mavjud bo‘ladi.

Ko‘rib chiqilgan modelda quyidagi kelishuvga kelindi: $\alpha_x^{'} < 0,\ \bar{x} < \infty\ \partial a\ \alpha(\bar{x}) = 0$. Bu, o‘ljalar populyatsiyasida yirtqichlar bo‘lmaganida ham, ularning sonini boshqaradigan mexanizm mavjud degani. Lekin turlarning birlashmasiga kiruvchi sonni nazorat qilishning asosiy mexanizmi yirtqich va o‘lja o‘rtasidagi trafik o‘zaro munosabatlardir.

Yirtqich- o‘ljaning klassik modeli boshqa murakkab modellarda umumlashtiriladi.

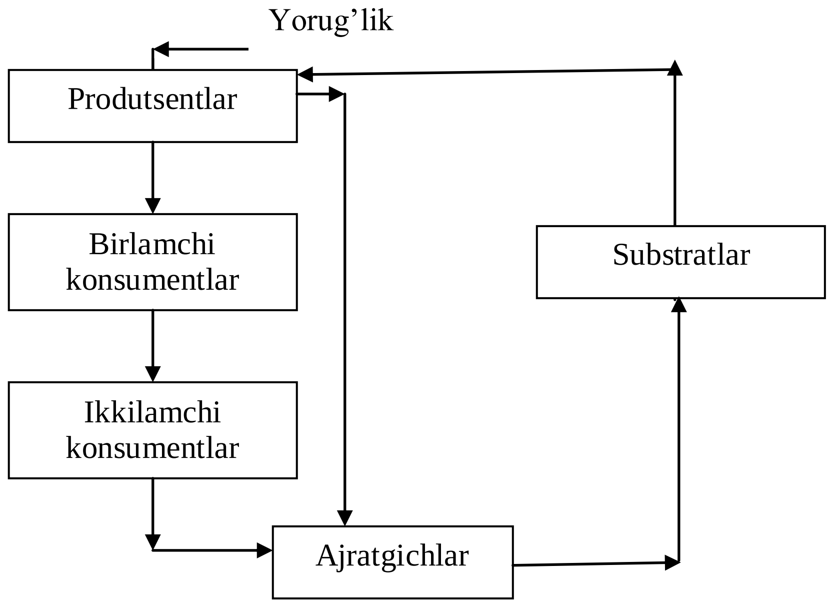
7.4.2.4. Ekologiyaning muvozanat tenglamalari va Volter modellari

Ko‘p turli birlashmalar tarkibidagi trofik (ozuqaviy) pog‘onalar – to‘g‘ridan-to‘g‘ri ozuqaviy aloqalari bo‘lmagan turlarning guruhlari sanaladi. Pog‘onalar bir nechta bo‘lishi mumkin. Bitta pog‘onaga tegishli turlar hayotiy resurslarga kurash raqobatida, yoki resurslardan foydalanish bo‘yicha guruhlar holatida bo‘ladi. yer usti birlashmalarining asosiy trofik pog‘onalari – bu, odatda produtsentlar (yorug‘lik energiyasi va substrat moddasini ta’minlaydigan o‘simliklar), boshlang‘ich konsumentlar (o‘simlikxo‘rlar) va ikkilamchi konsumentlar (o‘simlikxo‘rlar bilan oziqlanadigan yirtqichlar). Ayrim hollarda uzunroq zanjir tuzilishi ham mumkin.

7.15 - rasmda yer osti ekotizimlarning asosiy qismlari o‘rtasida massa va energiya oqimlarining sxemasi keltirilgan.

Trofik aloqa tashkilotning faqatgina vertikal tarkibini aks ettirib, gorizontal tarkibi haqida so‘z yuritmaydi, jumladan bir trofik pog‘onaning turlari o‘zaro har xil munosabatlarda bo‘lishi mumkin.

n ta turli tashkilotlarning dinamikasini vaqt bo‘yicha nazariy tahlil etish turlardagi sonni approksimatsiyalaydigan $N_i(t)$ larga nisbatan tuzilgan ma’lum bir tenglamalar tizimiga tayanadi.



7.15-rasm. yer osti ekotizimlarning asosiy qismlari o‘rtasidagi massa va energiya oqimlari sxemasi

Biologik ma’noga ega bo‘lgan tizim yechimlari n-o‘lchovli Evklid fazosining musbat ortiga tegishli:

$$p^n = \{N : N_1 \geq 0,\ N_2 \geq 0, \ldots, N_n \geq 0\}.$$

Tashkilotning barqarorligi maxsus, «teng og‘irlikdagi» tizim yechimlarining maxsus xususiyatlari sifatida talqin etiladi.

Oddiy differensial tenglamalar sinfida tashkilot modeli quyidagi ko‘rinishdagi tizimdir:

$$\frac{dN_i}{dt} = F_i(N_1, N_2, \ldots, N_n, t),$$

bu yerda $F_1, \ldots, F_n$ funksiyalar ko‘rinishi o‘zaro munosabatlar va ularning miqdoriy ko‘rsatkichlari tarkibi bilan aniqlanadi. Agar ko‘rsatilgan tenglamalarda turlarning tabiiy ortishi yoki kamayishi t ga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli, o‘zaro limitlash va turlarning o‘zaro ta’siri kvadrat hadlari bilan ta’riflansa, u holda n ta turdagi tashkiliy dinamikaning Volter modellari hosil bo‘ladi:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} N_j \right), \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{7.108}$$

Bu yerda ε_i - boshqa turlar bo‘lmaganida, i-turning tabiiy ortish yoki o‘lish tezligi, γ_{ij} $(i \neq j)$ j-turning i-turga ta’sirining mos ravishda xarakteri va jadalligini aks etadi, γ_{ij} - i-tur uchun ichki turli o‘zaro ta’sir ko‘rsatkichi. Tashkilot aloqalarini aks etuvchi $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ matritsa tashkilot matritsasi deb nomlanadi.

Ekologiyaning matematik modellari ekotizimlarning barqarorlik, muvozanat shartlarini o‘rganish uchun zarur. Ma’lumki, faqatgina barqaror tizimlargina uzoq vaqt mavjud bo‘ladi. Boshqa tomondan, barqarorlik chegaralari ekotizimga bo‘lgan shunday maksimal yuklanishlarni aniqlaydiki, ularni orttirib yuborish «ekologik halokatga» olib keladi. Barqarorlik muammosi bilan tabiiy populyatsiyalar va tashkilotlarni ekspluatatsiya qilish, muhitning ifloslanish chegaralarini baholash, u yoki bu tabiiy xo‘jalik tadbirlarni amalga oshirish oqibatlarini bashoratlash masalalari bog‘liq.

Yuqorida deterministik modellarga oid misol qarab chiqiladi, ammo modellarning boshqa turi - bashoratlanadigan qiymatlar ehtimollarning taqsimlanishiga bog‘liq bo‘lmagan stoxastik modellari ko‘rilmadi.

7.4.3. Sanoat korxonalari muqobil joylashuvini matematik modellashtirish

7.4.3.1. Muammoning umumiy tavsifi

Sanoatning intensiv rivojlanishi va bu bilan bog‘liq ravishda atrof-muhitni ifloslantiradigan sanoat chiqindilarining ortishi ko‘pgina hududlarning ekologik muvozanati uchun sezilarlidir. Sanoat chiqindilari natijasida lokal ifloslanishlar darajasi ko‘pgina davlatlardagi mavjud statsionar me’yorlardan allaqachon ortib ketgan. Iqtisod rivojlanishining zamonaviy jadalligi industrial obyekt va komlekslarni qurishni talab etadi. Mehnat resurslariga bog‘liq ravishda bunday obyektlar aholi zich joylashgan hududlarda yoki ular atrofida quriladi. Bunday vaziyatda inson uchun zararli bo‘lgan hamda xududning ekologik tizimlarini buzadigan obyektlarni joylashtirish bo‘yicha cheklanishlar qo‘yiladi. Korxonalarni muqobil joylashtirish (ekologik jihatdan ahamiyatli bo‘lgan hududlar uchun ifloslanishning sanitar normalariga rioya etgan holda) ko‘p qirrali hamda algoritmik jihatdan juda qiyin masala. Atmosfera va ustki qatlamning sust va faol aralashmalar bilan ifloslanishini baholash zarur. Aralashma yer sathiga tushguncha hech qanday o‘zgarishlarga uchramasa, sust hisoblanadi. Agarda aralashma atmosfera bo‘ylab tarqalishi paytida suv bug‘i va boshqa atmosfera tarkiblari bilan kimyoviy reaksiyaga kirishsa yoki bir kimyoviy holatdan boshqasiga o‘tsa, faol hisoblanadi.

Sanoat chiqindilarining fazoda tarqalishi ularning havoning turbulent oqimlari tufayli havo massalari va diffuziya orqali adekvat ko‘chirilishi hisobiga amalga oshadi. Zavod trubasidan chiqayotgan tutun olovini kuzatish paytida, birinchidan, tutun olovining havo oqimi ketidan tortilishini, ikkinchidan esa manbadan uzoqlashib borishi natijasida sekin-asta shishishini (bu kichik masshtabli turbulentlik natijasi) kuzatish mumkin. Natijada olov, havo massalarining harakati yo‘nalishi bo‘ylab kengayadigan cho‘zinchoq konus shakliga kiradi. Keng masshtabli turbulent oqimlar ta’sirida kattalashib, olov manbadan uzoqlashib ketgan o‘ramali qismlarga ajralib ketadi.

Agar havoga chiqariladigan aralashmalar yirik zarralardan tashkil topsa, atmosferada tarqalish natijasida ular og‘irlik kuchi ta’sirida doimiy tezlik bilan Stoks qonuni bo‘yicha tushadi. Tabiiyki, barcha aralashmalar oxir - oqibat jumladan, og‘irlari gravitatsion maydon ta’sirida, yengillari esa diffuziya hodisasi natijasida yer sathiga tushadi. Atrof-muhit uchun okislar kabi gazsimon turdagi aralashmalar ko‘proq xavf tug‘dirgani uchun, yengil brikishlarni ko‘rib chiqamiz.

Ifloslanishlarning tarqalish nazariyasida manbadan chiquvchi aralashmalarni o‘zi bilan olib ketuvchi havo massalari ko‘p bora yo‘nalishi va tezligini o‘zgartiradigan uzoq vaqt davri (bir yilga yaqin) tezlik va shamol yo‘nalishining fluktuatsiyalari muhim ahamiyatga ega. Bunday ko‘p yillik o‘zgarishlar odatda vektor kattaligi havo massalarining berilgan yo‘nalishda tarqalishi bilan bog‘liq takrorlanuvchi hodisalar soniga proportsional bo‘ladigan maxsus diagramma orqali ta’riflanadi. Bu degani, shamollar diagrammasida vektorlar qanchalik uzun bo‘lsa, havo massalarining berilgan yo‘nalishdagi harakati shunchalik ko‘p bo‘ladi. Ya’ni, shamollar diagrammasi maksimumi mavjud hududdagi hukmron shamollarga mos keladi. Bu ma’lumot yangi industrial obyektlarni loyihalashtirishda asos qilib olinadi. Lekin o'zining chegaraviy ifloslanish darajasiga ega bo'lgan ekologik ahamiyatli hududlar (aholi punktlari, dam olish qismlari, qishloq xo'jaligi, o'rmon hududlari) orasida korxonalar joylashuvini loyihalashtirishda yetarli bo'lmaydi. Yangi korxonani qurishni loyihalashtirganda tozalik me'yorlari bo'yicha cheklanishlar mavjud korxonalardan chiqadigan ifloslanishga qarab belgilanadi.

Mazkur bobda akademik G.I.Marchuk tomonidan ishlab chiqilgan barcha ekologik ahmiyatga ega bo'lgan hududlar uchun ifloslanishning tozalik me'yorlariga rioya qilgan holda sanoat tashkilotlarini joylashtirish mumkin bo'lgan hududlarni ifodalovchi matematik modellar keltiriladi. Berilgan masala substantsiyalarni ko'chirish va diffuziyaning biriktirilgan tenglamalari yordamida hal etiladi. Mazkur masalalarni yechish masalaning asosiy funksionaliga nisbatan ta'sir yoki sezuvchanlik funksiyalaridan iborat. Yil davomida ekologik hududga yoqqan aralashmalarning to'la soni yoki yoqqan va o'lchangan aralashmalarning tozalik xavfi funksional bo'lishi mumkin.

7.4.3.2. Chiqindilarni atmosferaga ko'chirish va diffuziyasining asosiy tenglamalari

7.4.3.2.1. Ko'chirish tenglamalari

Atmosferada zararli substantsiyalarning (chiqindilarning) ko'chirilishi mayda masshtabli fluktatsiyalarni hisobga olgan holda havoning shamol oqimlari orqali amalga oshiriladi. Aytaylik, $\varphi(x,y,z,t)$ – havo oqimi bilan birga atmosferada ko'chuvchi aerozol substantsiyasining izchilligi. Masalaning yechimini S yuzali G silindrik sohada qidiramiz. Silindr yon sirti Σ, pastki asosi Σ_0 ($z=0$ da), yuqori asosi Σ_H ($z=H$ da) va x,y,z – dekart koordinatalari, z o'qi vertikal yuqoriga yo'nalgan. u,v,w – havo zarrachalarining tezligi vektorini tashkil etuvchilari. Bu holatda jadvalligini saqlagan holda substantsiyalarning havo zarrachalari trayektoriyasi bo'ylab ko'chirish tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad bu\ yerda \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (7.109)$$

Atmosferaning quyi qismi uchun massani saqlash qonuni bajariladigan uzilmaslik tenglamalari orqali aniqlanadi:

$$div\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (7.110)$$

(7.110) tenglamani hisobga olgan holda (7.110) - tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\bar{u}\cdot\varphi)=0. \qquad (7.111)$$

(7.111) chiqarishda quyidagi tenglik qo‘llanildi:

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}=div(\bar{u}\cdot\varphi)-\varphi div\bar{u}. \qquad (7.112)$$

Tezlikning vertikal komponentasi quyidagi shartga rioya qiladi:

$$z=0,\ z=H \text{ da } w=0 \quad . \qquad (7.113)$$

(7.111) tenglama uchun boshlang‘ich shartlarni:

$$t=0 \text{ da } \quad \varphi=\varphi_0 \qquad (7.114)$$

va G sohasining S chegarasida shartlarni berish kerak.

$$u_n<0 \text{ bo‘lganda } S \text{ da } \varphi=\varphi_s, \qquad (7.115)$$

bu yerda φ_0 va φ_s – ma’lum funksiyalar; u_n – S tekisligiga tashqi normal vektori u proeksiyasi. (7.115) munosabatlari havo massalari tadqiqot qilinuvchi substansiyalar bilan birga G sohasida kiruvchi S yechimni beradi.

(7.111), (7.112)-(7.113) masalarning aniq yechimi u, v, w funksiyalarning fazoda va vaqtda qiymatlari aniqlanganda mavjud.

(7.111) tenglama umumlashtirilishi mumkin. Shunday qilib, agarda substansiyalarning bir qismi tashqi muhit bilan reaksiyaga kirishsa va parchalansa, jarayonni substansiyalarning yutilishi kabi interpretatsiyalash mumkin. Bu holda (7.111) tenglama quyidagi ko‘rinishga o‘tadi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\bar{u}\varphi)+\sigma\varphi=0, \qquad (7.116)$$

bu yerda $\sigma>0$ – vaqtga teskari proportsional kattalik. Agarda (7.116) da $u=v=w=0$ deb olinsa ushbu kattalikning mazmuni tushunarli bo‘ladi. Bu holda (7.116) tenglama $\varphi=\varphi_0 e^{-\sigma t}$ yechimga ega. Bundan ko‘rinadiki, σ kattaligi substantsiya intensivligi boshlang‘ich intensivlik φ_0 ga nisbatan e marta kamayish vaqt intervaliga teskari bo‘ladi.

Agar yechimni aniqlanish sohasida $f(x,y,z,t)$ funksiyasi bilan aniqlanuvchi qaralayotgan ifloslanuvchi substansiya φ manbasi mavjud bo‘lsa, (7.116) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\bar{u}\varphi)+\sigma\varphi=f. \qquad (7.117)$$

Etarlicha silliq funksiyalar uchun (7.117), (7.113)-(7.117) masalasi yagona yechimga ega.

Substansiyalarning statsionar tarqalish jarayonini ko‘ramiz. Agar u, v, w koeffitsienlari va f,φ_s vaqtga bog‘liq bo‘lmasa, u holda statsionar (7.117), (7.113)-(7.117) ga mos keluvchi masala quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$div(\overline{u}\varphi)+\sigma\varphi = f\,, \tag{7.118}$$

$u_n < 0$ bo‘lganda Σ da $\varphi = \varphi_s$. (7.119)

Masala (7.118), (7.119) vaqt buyicha o‘zgarmas kiruvchi parametrli substantsiyalarni ko‘chirish xususiy jarayonni yoritadi. Ammo ushbu xususiy yechimlar, masalaning har xil statsionar kiruvchi $\bar{u}, f, \varphi_s$ ma’lumotlarga mos holda, amaliyotda amalda mavjud ko‘p murakkab fizik holatlarda qo‘llanishi mumkin. Faraz qilamizki, vaqtning har xil davrida atmosferada mazkur regionlarda havo massalarining u yoki bu harakatlari vujudga keladi va shu davrda ularni statsionar deb hisoblasa bo‘ladi. Har bir shunday davrda havo massalarining harakatidan so‘ng qayta qurilish boshlanib, yangi statsionar holat vujudga keladi. Sirkulyatsiyaning qayta qurilishi mazkur tipdagi harakat vaqtiga nisbatan qisqaligini hisobga olgan holda harakat tiplarining almashishi tezkor bo‘ladi. Aytaylik, ushbu tiplar soni *n* ta. Bu holda, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tenglamalar tizimiga kelamiz

$$div(\overline{u_i}\varphi_i)+\sigma\varphi_i = f\,. \tag{7.120}$$

Shartlar: $u_{in} < 0, \quad i=\overline{1,n}$ bo‘lganda da

$$\varphi_i = \varphi_{is}\,. \tag{7.121}$$

Bu yerda φ_{is} - φ_i funksiyasining *S* chegaradagi qiymati, u_{in} – chegaradagi tashqi normal *i* – tipdagi shamol tezligi. (7.120), (7.121) masalasi har bir $t_i<t<t_{i+1}$ (uzunligi Δt_i) intervaldagi vaqtga mos keladi. Agar barcha (7.120), (7.121) masalalar yechilsa, $T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i$ davrdagi aralashmalarning o‘rtacha taqsimlanish masalasi chiziqli kombinatsiya ko‘rinishida qidiriladi:

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\Delta t_i\,. \tag{7.122}$$

(7.120)-(7.122) masalasini statistik model, deb nomlasa bo‘ladi.

Statsionar ko‘rinishdagi (7.118), (7.119) va (7.120)-(7.122) masalalar ma’lum *T* vaqt davridagi substantsiyalarni tarqalish o‘rta masalasini yechilishiga juda yaqin maxsus ko‘rinishda qo‘yilgan nostatsionar masalalar asosida qurish mumkin:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\overline{u}\varphi)+\sigma\varphi = f\,, \tag{7.123}$$

$u_n < 0$ bo‘lganda Σ da $\varphi = \varphi_s$

$$\varphi(\overline{\gamma},T) = \varphi(\overline{\gamma},0), \qquad \overline{\gamma} = (x,y,z)\in G\,. \tag{7.124}$$

$\bar{u}, \varphi_s$ funksiyalari t ga bog‘liq emas. Bu masalala yetarlicha silliq funksiyalar uchun yagona yechimga ega emas. (7.123) ni *[0,T]* chegarasida integrallagan holda, quyidagi ko‘rinishni olamiz:

$$div(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = f, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi dt. \tag{7.125}$$

Bundan kelib (7.118), (7.119) masalasining yechimi yagonaligi asosida T davrda (7.123), (7.124) masalasining o‘rta yechimi (7.118) va (7.119) masala yechimi bilan mos keladi.

7.4.3.2.2. Diffuzion yaqinlashish

Yuqorida ko‘rilgan ifloslanish manbaidan aralashmalarning atmosferaga tarqalish modeli jarayonni ma’lum darajada ideallashtirilgan holda ifodalaydi. Faraz qilamizki, havo massalarining atmosferaga harakati mavjud emas, ya’ni *u=v= w=0*. U holda substantsiyalarni ko‘chirish nostatsionar masalasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sigma\varphi = f, \\ &\varphi = \varphi_0 \quad npu\ t = 0. \end{aligned} \tag{7.126}$$

Agar f t ga bog‘liq bo‘lmasa, u holda yechim quyidagicha bo‘ladi:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t} + \frac{f}{\sigma}\left(1 - e^{-\sigma t}\right). \tag{7.127}$$

jumladan, $t\to\infty$ da u mos statsionar masala yechilishiga keladi $\sigma\varphi=f$, $\varphi=f/\sigma$. Ushbu oddiy model f manbasidan substantsiyalar ko‘chishining asosiy xususiyatlarini bermaydi. Ma’lumki, aralashma atmosferada yoyilib ketib, manbadan keng atrofda aerozollarning murakkab tarqalishini tashkil qiladi. Bu hatto shamol bo‘lmagan holatda atmosferani turbulent muhitligini bildirib, unda mayda masshtabli fluktatsiyalarning o‘z-o‘zidan hosil bo‘lishini ifodalaydi. Aynan shu fluktatsiyalar yordamida chiqindilarning atmosferaga yemirilib ketishi (nuralishi) ta’minlanadi.

Fluktatsion effektlarning ko‘p holatlari matematik tariflanishi yarim emperistik munosabatlarga asoslanadi. Atmosfera jarayonlari uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\left(\bar{u}\cdot\bar{v}\right) + \sigma\bar{\varphi} = D\bar{\varphi}, \tag{7.128}$$

$$D\bar{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}. \tag{7.129}$$

Bu yerda $\mu\geq 0$, $\varphi\geq 0$ – mos diffuziya gorizontal va vertikal koeffisientlari, ular eksperimental tarzda topiladi. Koeffisientlar ustidagi chiziqchalar mos parametrning yetarlicha katta vaqt intervaldagi o‘rtacha qiymatini bildiradi.

O‘rta vektor tezligi bog‘lanish tenglamasiga rioya qiladi:

$$div\bar{u} = 0. \qquad (7.130)$$

Masalaning to‘liq qo‘yilishi uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlar zarur.

Boshlang‘ich shartlar:

$$\varphi = \varphi_0 \quad npu\ t = 0. \qquad (7.131)$$

Chegaraviy shartlarda masala yagona yechimga ega bo‘lishi kerak. Bundan buyon o‘zgaruvchilar ustidagi chiziqchalarni olib tashlaymiz va ularning o‘rta parametrlari bilan ish yuritamiz.

Agar *f* substantsiyalarning ifloslanish manbai nazarda tutilsa, (7.117) o‘rniga quyidagi tenglama ko‘riladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div(u\cdot\varphi) + \sigma\varphi = D\varphi + f. \qquad (7.132)$$

(7.132) - tenglama uchun chegaraviy shartlar quyidagicha:

$$\begin{aligned}
&\varphi = \varphi_S && \Sigma\ \partial a\ u_n < 0,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 && \Sigma\ \partial a\ u_n \ge 0,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha\varphi && \Sigma_0\ \partial a,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 && \Sigma_H\ \partial a,\\
&w = 0 && z = 0, z = H,
\end{aligned} \qquad (7.133)$$

(bu yerda α≥0 – aralashmalarning to‘shama sirt bilan o‘zaro ta’sirini xarakterlovchi biror bir funksiya).

Hisob - kitoblarda ko‘pincha chegaraviy shartlarning quyidagi ko‘rinishi qo‘llaniladi:

$$\begin{aligned}
&\varphi = \varphi_S && \Sigma\ \partial a,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha\varphi && \Sigma_0\ \partial a,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha\varphi && \Sigma_H\ \partial a,\\
&w = 0 && z = 0, z = H.
\end{aligned} \qquad (7.134)$$

Ko‘rsatilgan ko‘rinishlar diffuzion yaqinlashishda yagona yechimga ega. Yagona yechimni ta’minlovchi boshqa ko‘rinishlar ham mavjud.

Izoh. Mazkur «statsionar» masalaning taqribiy yechimi quyidagi ko‘rinishdagi xususiy masalalar yechimining o‘rtasini aniqlash orqali amalga oshiriladi (xuddi ko‘chirish tenglamalari kabi):

$$div(\bar{u}_i\cdot\varphi_i) + \sigma\varphi_i = D\varphi_i + f\ .$$

T davri uchun substansiyalar taqsimoti quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \Delta t_i ,$$

bu yerda $T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$, Δt_i - mazkur tipdagi havo massalari harakat rejimining turg‘unlik vaqti.

7.4.3.2.3. Oddiy diffuziyaviy tenglama

Ko‘chirish va substantsiyalar diffuziyasi jarayonini oddiy bir o‘lchovli masalalar misolida ko‘ramiz. Sof diffuzion masalani ko‘rib chiqaylik:

$$\sigma\varphi = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + Q\delta(x - x_0), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{7.135}$$

bu yerda Q – aerozolning atmosferaga sochilish manbai quvvati, $\delta(x)$ – delta-funksiya. Faraz qilamizki, yechim aniqlanish sohasida cheklangan. (7.135) masalani delta-funksiyasiz ekvivalent ko‘rinishga olib kelish qulay. Buning uchun (7.135) tenglamasini $x{=}x_0$ nuqta atrofida integrallaymiz:

$$\sigma\int_{x_0-\varepsilon/2}^{x_0+\varepsilon/2}\varphi dx = \mu\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x_0+\varepsilon/2} - \mu\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x_0-\varepsilon/2} + Q.$$

$\varepsilon\to 0$ shartida limitga o‘tamiz va quyidagi munosabatni olamiz:

$$\mu\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x_0^+} - \mu\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x_0^-} + Q = 0. \tag{7.136}$$

Endi ikkita sohani ko‘ramiz: $-\infty<x\le x_0$, $x_0\le x<\infty$, yechimlarni esa mos ravishda φ^- va φ^+ deb belgilaymiz, ya’ni quyidagi ikkita masalani ko‘ramiz:

$$a)\ \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \sigma\varphi^+ = 0, \quad \varphi^+ = 0, \quad x\to\infty, \tag{7.137}$$

$$б)\ \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \sigma\varphi^- = 0, \quad \varphi^- = 0, \quad x\to-\infty. \tag{7.138}$$

(7.137), (7.138) masalalarning yechimi bog‘lanishi quyidagi shart orqali amalga oshiriladi:

$$\begin{aligned} &\mu\frac{\partial\varphi^+}{\partial x} - \mu\frac{\partial\varphi^-}{\partial x} + Q = 0 \quad && x = x_0, \\ &\varphi^+ = \varphi^- && x = x_0, \end{aligned} \tag{7.139}$$

(faraz qilamizki, masalaning yechimi sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz).

(7.137) va (7.138) masalasining yechimi quyidagilar bo‘ladi:

$$\begin{aligned} &a)\ \varphi^+ = C_+ \exp\left\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x - x_0)\right\}, \\ &б)\ \varphi^- = C_- \exp\left\{-\sqrt{\sigma/\mu}(x_0 - x)\right\}. \end{aligned} \tag{7.140}$$

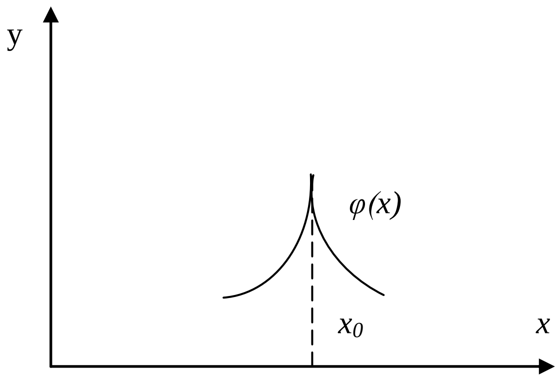
(7.140) ni (7.139) ga qo‘ygan holda, chiziqli tenglamani yechib C^{+} va C^{-} ga nisbatan quyidagi ifodani olamiz:

$$C_{+} = C_{-} = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}}.$$

Shunday qilib, (7.135) ning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}} \begin{cases} \exp\left\{-\sqrt{\sigma/\mu}\left(x - x_0\right)\right\} & da \quad x \ge x_0, \\ \exp\left\{-\sqrt{\sigma/\mu}\left(x_0 - x\right)\right\} & da \quad x \le x_0. \end{cases} \qquad (7.141)$$

Funksiyaning grafigi 7.16 rasmda keltirilgan.



7.16 rasm. Oddiy diffuziya tenglamasining yechimi

Undan ko‘rinib turibdiki, diffuzion jarayon natijasida yechim x_0 dan ikkita yo‘nalishga eksponentsial va simmetrik kamayadi.

Havo massalari oqimining tezligi noldan farqli qiziqarli holatni ko‘rib chiqaylik. Faraz qilamizki, u doimiy va musbat. U holda quyidagi tenglamani olamiz:

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sigma\varphi = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + Q\delta\left(x - x_0\right), \qquad (7.142)$$

$-\infty < x < \infty$ tekisligida. Xuddi shu tarzda (7.142) tenglamasini cheksizlikda nollik shartlari bilan ikkita masalaga olib kelamiz:

$$a)\ \mu\frac{\partial^2\varphi^{+}}{\partial x^2} - u\frac{\partial\varphi^{+}}{\partial t} + \sigma\varphi^{+} = 0, \quad \varphi^{+} = 0 \quad da\ x \to \infty, \qquad (7.143)$$

$$б)\ \mu\frac{\partial^2\varphi^{-}}{\partial x^2} - u\frac{\partial\varphi^{-}}{\partial t} + \sigma\varphi^{-} = 0, \quad \varphi^{-} = 0 \quad da\ x \to -\infty, \qquad (7.144)$$

(7.143) va (7.144) masalalarining yechimlari (7.139) munosabatlari orqali bog‘lanadi.

(7.143) va (7.144) masalalarning yechimlari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$a)\ \varphi^{+} = C_{+}\exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{u^2}{4\mu^2}}-\frac{u}{2\mu}\right)(x-x_0)\right\}, \quad x \ge x_0,$$

$$б)\ \varphi^{-} = C_{-}\exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{u^2}{4\mu^2}}+\frac{u}{2\mu}\right)(x_0-x)\right\}, \quad x \le x_0.$$

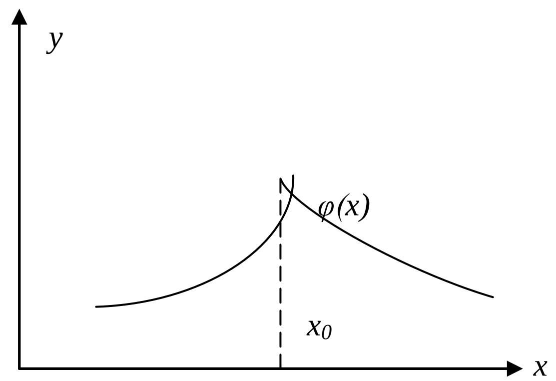
Bu munosabatlarni (7.139) ifodaga qo‘yamiz:

$$C_{+} = C_{-} = \frac{Q}{\sqrt{4\delta\mu+u^2}}.$$

Natijada masalaning quyidagi yechimini olamiz

$$\varphi(x) = \frac{Q}{\sqrt{4\delta\mu+u^2}}\begin{cases} \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{u^2}{4\mu^2}}-\frac{u}{2\mu}\right)(x-x_0)\right\}, & x \ge x_0, \\ \exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{u^2}{4\mu^2}}+\frac{u}{2\mu}\right)(x_0-x)\right\}, & x \le x_0. \end{cases}$$

(7.135)



7.17 rasm Substanitsiyalarning ko‘chirish va diffuziya bir o‘lchovli masalasi yechimi.

φ(x) funksiyaning yechimi 7.17 rasmda keltirilgan. Ko‘rinib turibdiki $u>0$ shartida eksponentaning ($x=x_0$ nisbatan) chap tomoni $x=x_0$ yopishgan, o‘ng tomoni esa – teskari, yoyilgan. Bu substantsiya shamol bilan diffuziya ta’sirini beradi.

Shunga o‘xshash murakkabroq holatni ko‘rish mumkin. Masalan, uzoq vaqt shamol bir tomonga yo‘nalib, keyin yo‘nalishini teskari tomonga o‘zgartiradi.

7.4.3.2.4. Og‘ir aerozollarning ko‘chishi va diffuziyasi

Atrof-muhitning lokal ifloslanish masalalarini o‘rganishda og‘ir aerozollar alohida o‘rin tutadi. Atmosferaga tarqalgan holda aerozol diffuziyalanib, og‘irlik ta’sirida yerga tushadi. Tushish tezligi Stoks masalasi orqali aniqlanadi va doimiy o‘zgaruvchi bo‘lib pastga yo‘naladi. Shu sababli zarrachalarning og‘irlik kuchi ta’siridagi vertikal tezligining absolyut qiymatini w_g orqali belgilasak, aerozollarning ko‘chirish tenglamasida yangi $w_g \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ hadi paydo bo‘ladi va (7.131), (7.132) – ko‘chirish va diffuziya masalasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial u\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v\varphi}{\partial y}+\frac{\partial (w-w_g)\varphi}{\partial z}+\sigma\varphi=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\Delta\varphi+f,\\ \varphi=\varphi_0 \quad t=0, \varphi=0 \quad \Sigma\ \partial a,\\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}=\alpha\varphi \quad \Sigma_0\ \partial a, \quad \varphi=0 \quad \Sigma_H\ \partial a.\end{gathered} \tag{7.146}$$

z=0 tekisligida *0≤t≤T* vaqt intervali ichida $\Sigma_i \subset \Sigma_0$ yuzasiga tushgan aerozol miqdorini aniqlaymiz. Buning uchun (7.146) ning birinchi tenglamasini *z* bo‘yicha *0≤z≤H* oraliqda integrallaymiz. … va *u* va *v* lar *z* ga bog‘liq emas deb, quyidagini olamiz:

$$\frac{\partial \bar\varphi}{\partial t}+\frac{\partial u\bar\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v\bar\varphi}{\partial y}+\sigma\bar\varphi=\mu\Delta\bar\varphi-(w_g+\nu\alpha)\varphi_g+F, \tag{7.147}$$

bu yerda $w_g=\varphi|_{z=0}$. (7.147) ni chiqarishda quyidagi shartlar qo‘llanilgan:

$$w=0,\ z=0,\ z=H\ bo'\lg anda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=\alpha\varphi\ z=0\ bo'\lg anda.$$

Jumladan quyidagi shartlar ham:

$$\begin{gathered}\varphi\to 0 \quad z\to H\ bo'\lg anda,\\ \varphi\to 0 \quad z\to H\ bo'\lg anda.\end{gathered}$$

(7.147) tenglamadan kelib chiqadiki, vaqtning har bir birligida *(x,y)* nuqtasi ustida atmosferadagi aerozol $(w_g+\nu\alpha)\varphi_g$ o‘lchamiga kamayadi. Bu yerda $w_g\varphi_g$ - og‘irlik kuchi ta’siridagi aerozol qismi, $\nu\alpha\varphi_g$ esa yer sirti chegaraga yaqinidagi turbulent almashuv ta’siridagi aerozol qismi. Agar $w_g<\nu\alpha$ bo‘lsa, $\Sigma_i \le \Sigma_0$ sirtiga tushgan miqdorni aniqlash masalasini yechishda (7.146) tenglamasida w_g miqdorli aerozol bilan cheklanish mumkin. Agar w_g miqdori $\nu\alpha$ bilan taqqoslansa yoki undan ko‘p bo‘lsa (7.132), (7.143) o‘rniga (7.146) masalasini ko‘rish mumkin.

Masalaning asosiy funksionallarini ko‘ramiz. Ular o‘rnida odatda berilgan *G* sohada aerozollar to‘liq miqdori:

$$J_i=\frac{1}{T}\int_0^T dt\int_{G_i}\varphi dG, \tag{7.148}$$

yoki *G* silindrik sohaning Σ_i yuzali yerga tushgan aerozollar to‘liq miqdori:

$$J_i=a\int_0^T dt\int_{\Sigma_i}\varphi_g d\Sigma. \tag{7.149}$$

a konstantasi aerozolni tushish gravitatsion va diffuzion mexanizmlari. Yuqorida keltirilganlarni hisobga olgan holda ehtimolli funksionallar kengaytirilishi mumkin:

$$a = w_g + v\alpha\,. \tag{7.150}$$

7.4.3.3. Ko'chirish va diffuziya tutashgan tenglamalar

Ifloslanishning sanitar me'yorlarini hisobga olgan holda ko'chirish va diffuziya tutashgan tenglamalar kiritilgan asosda ishlab chiqarish korxonalarini ehtimolli joylashtirish sohalarini aniqlash uchun yangi usul ishlab chiqilgan. Lagranj ayniyati asosida ko'chirish va diffuziya tenglamalariga mos keluvchi tutashgan tenglamalarni olish texnikasini ko'ramiz. Quyidagi masalani qarab chiqaylik:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi + A\varphi = f, \quad \varphi = \varphi_0 \quad t = 0, \tag{7.151}$$

bo'lganda

bu yerda A – mos silliqlik va qo'shimcha (masalan, chegaraviy) shartlarga hamda masalaning xossasiga qarab chiqib-keluvchi boshqa talablarga rioya qiluvchi $\varphi \in \Phi$ funksiyalar to'plamida berilgan Gilbert fazosidagi chiziqli operator.

Faraz qilamizki, *F* Gilbert fazosida ixtiyoriy *g* va *h* ikkita funksiyalari uchun *F* quyidagi ko'rinishda aniqlangan:

$$(g,h) = \int_0^T dt \int_G ghdG\,. \tag{7.152}$$

Bu yerda *[0, T]* – *t* o'zgaruvchining aniqlanish sohasi, *G* – esa fazoviy o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi. Aniqlik uchun masalani davriy deb hisoblaymiz ($\varphi(\bar{r},T)=\varphi(\bar{r},0)$). (7.151) - tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$L\varphi = f, \tag{7.153}$$

bu yerda $L = \frac{\partial}{\partial t} + A$. Chiziqli operator *L* ga Lagranj ayniyati asosida mos tutashgan *L** operatorini qo'yamiz:

$$(g, Lh) = (h, L^* g). \tag{7.154}$$

Bu yerda *L* operatori va *g* va *h* funksiyalari haqiqiy. $h=g$, $g=\varphi^*$ sifatida quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^*\varphi^*). \tag{7.155}$$

Faraz qilamizki:

$$L^*\varphi^* = p\,. \tag{7.156}$$

Bu yerda *p* – hozircha noaniq funksiya. Bu holda (7.155) munosabatlari (7.153) asosida quyidagi ko'rinishga keladi:

$$(\varphi^*, f) = (\varphi, p). \tag{7.157}$$

Agar p – biror bir o‘zgarishlar tavsifi bo‘lsa, asosiy funksional quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$J = (\varphi, p). \tag{7.158}$$

(7.157) tenglamadan ikki taraflama formula kelib chiqadi:

$$J = (\varphi^{*}, f). \tag{7.159}$$

Mazkur usulni aniq masalaga qo‘llaymiz:

$$\begin{gathered} L = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\bar{u}\varphi + \sigma\varphi = \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\Delta\varphi + f, \quad \varphi = 0 \ \Sigma \ da, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}\varphi = \alpha\varphi \ \Sigma_0 \text{ da}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ \Sigma_H \text{ da}, \quad \varphi(\bar{\gamma}, T) = \varphi(\bar{\gamma}, 0). \end{gathered} \tag{7.160}$$

Faraz qilamizki, u, v, w tezlik komponentalari quyidagi shartlarga rioya qiladi:

$$div\bar{u} = 0, \ w = 0 \quad z = 0, z = H \ bo\text{'lg}anda. \tag{7.161}$$

F – kvadratlari bilan barcha o‘zgaruvchilarga nisbatan hosilaga ega. Ya’ni x, y, z ga nisbatan umumlashtirilgan ikkinchi tartibli hosilalarga ega va (7.160) shartlariga rioya qiluvchi funksiyalar fazosini ko‘ramiz. Skalyar ko‘paytmasini qarab chiqamiz:

$$(g, h) = \int_0^T dt \int_G ghdG.$$

(7.160) tenglama Gilbert fazosi F funksiyalarida quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \tag{7.162}$$

bu yerda:

$$A = div(\bar{u}\cdot) + \sigma - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} - \mu\Delta.$$

Lagranj ayniyatidan foydalangan holda (7.154) chap tomonini quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} (g, Lh) &= \int_0^T dt \int_G g\left(\frac{\partial h}{\partial t} + div(\bar{u}h) + \sigma h - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial h}{\partial z} - \mu\Delta h\right) dG = \\ &= \int_G g_T h_T dG - \int_G g_0 h_0 dG + \int_0^T dt \int_\Sigma u_n ghd\Sigma + \sigma \int_0^T dt \int_G u_n ghdG - \\ &- \int_0^T dt \int_{\Sigma n} vg \frac{\partial h}{\partial z} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} vg \frac{\partial h}{\partial z} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma n} vh \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} vh \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma - \\ &- \int_0^T dt \int_G h \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial g}{\partial z} dG - \mu \int_0^T dt \int_\Sigma g \frac{\partial h}{\partial n} \partial\Sigma + \mu \int_0^T dt \int_\Sigma h \frac{\partial g}{\partial n} \partial\Sigma - \int_0^T dt \mu h \Delta g dG - \\ &- \int_0^T dt \int_G g \frac{\partial g}{\partial t} dG - \int_0^T dt \int_G h div(\bar{u} \cdot g) dG. \end{aligned} \tag{7.163}$$

(7.163) ayniyati quyidagi ifodaga o‘tadi:

$$(g,Lh)=\int_0^T dt\int_G h\left(-\frac{\partial g}{\partial t}-div(\bar{u}g)+\sigma g-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial g}{\partial z}-\mu\Delta g\right)dG. \qquad (7.164)$$

Qavsda turgan operatorni quyidagicha belgilaymiz:

$$L^{*}=-\frac{\partial}{\partial t}-div(\bar{u}\cdot)+\sigma-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial}{\partial z}-\mu\Delta. \qquad (7.165)$$

Bu holda (7.164) ning chap tomoni quyidagi *(h, L*g)* skalyar ko‘rinishda bo‘ladi. Natijada (7.164) ayniyatiga va *F* fazosida tutashgan operator (7.165) ga kelamiz.

Tutashgan masalani formal ko‘rinishda quyidagicha aniqlaymiz:

$$L^{*}\varphi^{*}=p,$$

yoki yoyilgan ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$-\frac{\partial\varphi^{*}}{\partial t}-div(\bar{u}\varphi^{*})+\sigma\varphi^{*}-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi^{*}}{\partial z}-\mu\Delta\varphi^{*}=p,$$
$$\varphi^{*}=0 \quad на\ \Sigma, \qquad (7.166)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\alpha\varphi\ на\ \Sigma_0,\quad \varphi(\bar{\gamma},T)=\varphi(\bar{\gamma},0).$$

Bu holda biror bir tanlangan *r* da u yoki bu *J* funksionalga kelamiz. Haqiqatdan ham, agar *h=φ, g=φ** deb tanlasak, u holda (7.157)ni hisobga olgan holda (7.158), (7.159) funksionallarga kelamiz.

Shunday qilib, agar obyekt sifatida *φ* yechimi emas deb biror bir funksionallar qaralsa, har biri uchun xos tutashgan masalaga shakllanadi. Birinchi qarashda eng tabiiy yo‘l asosiy masalani yechishdan iborat bo‘ladi va u yordamida (7.158) formulasi orqali ixtiyoriy funksionalni hisoblash mumkin. Ayrim holatlarda bu yondashish haqiqatdan ham eng ma’qul. Ammo, binolarni loyihalashda, aerozollarni uloqtirish bilan bog‘liq, yoki muhitning parametrlarini o‘zgarishini hisobga oluvchi funksionalni sezuvchanligini baholashda va boshqa xuddi shu kabi savollarga javob beruvchi tutashgan tenglamalar apparati almashtirib bo‘lmaydigan tahlillash apparati bo‘ladi.

Misol sifatida quyidagi masalani ko‘ramiz. Faraz qilamizki, $G=(-\infty,\infty)$ sohasida ifloslantiruvchi chiqindining tarqalish jarayoni quyidagi tenglama bilan aniqlansin:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\delta\varphi-\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=Q\cdot\delta(x-x_0)\,. \qquad (7.167)$$

Shartlari

$$\varphi=0 \qquad t=0\,. \qquad (7.168)$$

Shunday $\omega\subset G$ soha topilishi kerakki, Q nuqtasidagi $x_0\in\omega$ quvvatli ifloslanish manbasini joylashtirganda funksional

$$J=\varphi(\xi,t) \qquad (7.169)$$

biror bir berilgan *C* konstantadan oshmasligi kerak ($t=\tau_1$ vaqtidagi $x=\xi_1$ nuqtasidagi ifloslanuvchi qo‘shilmaning miqdori). Bu masalaning yechimi kamida ikkita usul bilan topiladi.

Birinchisi, (7.167) masalani $x_0 \in G$ ning har xil qiymatida bir necha karra yechishdan iborat bo‘lib, (7.169) funksionalning qiymatini topib va u asosida qidirilayotgan ω sohani ajratish. Ammo bu yo‘l (7.167), (7.168) ko‘rinishdagi ko‘plab masalalarni yechishni talab qiladi va o‘z-o‘zidan ma’lumki, amalga oshirish uchun noqulay.

Boshqa yo‘l, tutashgan tenglamani yechimidan foydalanib (7.169) funksionalni ikki taraflamaliligiga asoslanadi. Mazkur masala uchun bunday ko‘rinish quyidagicha

$$J = Q\int_0^T \varphi^*(x_0,t)dt. \tag{7.170}$$

Bu yerda φ* - quyidagi tenglamaning yechimi

$$-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t} + \sigma\varphi^* - \mu\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x-\xi_1)\cdot\delta(t-\tau_1) \tag{7.171}$$

boshlang‘ich shartlarda

$$\varphi^* = 0\,,\ t = T. \tag{7.172}$$

Shunday qilib, ifloslanish manbasini joylashtirish mumkin bo‘lgan $\varpi \subset G$ sohasini aniqlash uchun (7.170) ikki taraflamalik (7.169) funksionalni topish asosida tutashgan (7.167) masalasini fakat bir marta yechish talab qilinadi.

(7.171), (7.172) ga rioya qiluvchi φ* funksiyasini topamiz. Bu maqsadda quyidagi yangi o‘zgaruvchini kiritamiz:

$$t_1 = T - t,\ \ t_1 \in [0,T]. \tag{7.173}$$

Bunda (7.171), (7.172) masalasi quyidagi masalaga o‘tadi:

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial t_1} + \sigma\varphi^* - \mu\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x-\xi_1)\delta(T-t_1-\tau_1). \tag{7.174}$$

Aytish joizki, (7.173) masalasining operatori formal tarzda (7.167) masalasining operatori bilan ustma-ust tushadi. (7.173) masalasining yechimi quyidagi formula bilan beriladi:

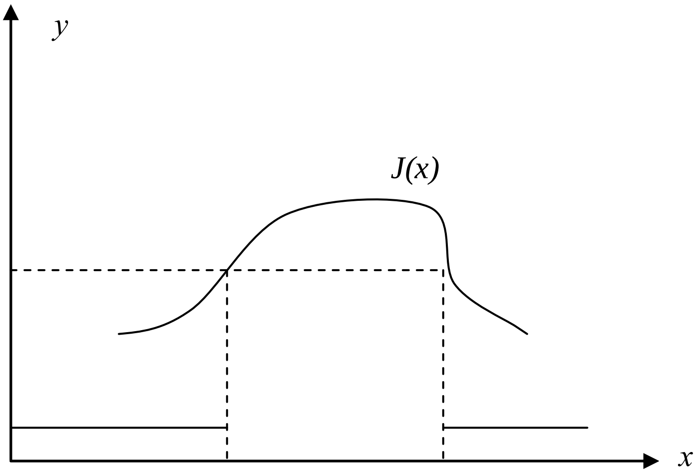
$$\varphi^*(x,t_1) = \int_0^{t_1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(x-\xi,t_1-\tau)\delta(\xi-\xi_1)\delta(T-\tau-t_1)d\xi d\tau. \tag{7.175}$$

Bu yerda $\tilde{\varphi}(x,t)$ - (7.174) masalasi operatorining fundamental yechimi.

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\mu\pi t}}\exp\left\{-\left(\delta t + \frac{x^2}{4\mu t}\right)\right\}.$$

Bunda θ - Xevisayda funksiyasi bo‘lib:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$



7.18 rasm. Ifloslanish manbasini joylashtirish uchun ehtimolli soha. (abstsissa o‘qidagi ikkilik chiziq).

Eski o‘zgaruvchilarga qaytgan holda quyidagilarni topamiz

$$\varphi^*(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\mu\pi(\tau_1 - t)}} \exp\left\{ -\left[\delta(\tau_1 - t) + \dfrac{(x-\xi)^2}{4\mu(\tau_1 - t)} \right] \right\}, & t \in [0, \tau_1), \\ 0 & , \ t \in [\tau, T]. \end{cases} \qquad (7.176)$$

(7.175) formulasiga ko‘ra (7.170) ikki taraflamalik (7.139) funksional uchun quyidagi ko‘rinishni olamiz

$$J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \int_0^{\tau_1} \frac{1}{\sqrt{\tau_1 - t}} \exp\left\{ -\left[\delta(\tau_1 - t) + \frac{(x_0\xi_1)^2}{4\mu(\tau_1 - t)} \right] \right\} dt \qquad (7.177)$$

yoki

$$\begin{aligned} J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\tau_1 - t_j}} \times \\ \times \exp\left\{ -\left[\delta(\tau_1 - t_j) + \frac{(x_0 - \xi_1)^2}{4\mu(\tau_1 - t_j)} \right] \right\} \Delta t + O(\Delta t), \end{aligned} \qquad (7.178)$$

bu yerda $t_j = j\Delta t, \quad \Delta t = \tau_1 / k.$

(7.177) funksionalni $J(x_0)$ dagi $x_0 \in G$ funksiyasi sifatida quramiz va grafigini quramiz. Ifloslanish manbasini joylashtirish uchun ehtimolli soha *ω f(x)<G* tengsizgidan aniqlanadi.

Ko‘rilgan masalaning grafik yechimining ko‘rinishi 7.18 rasmda keltirilgan. Unda ω sohasi abstsissa o‘qida ikkilik chiziq bilan ajratilgan. Ifloslanuvchi qo‘shilmaning tarqalishi har bir konkret $x_0 \in \varpi$ uchun (7.167), (7.139) masalalarining yechish orqali topiladi, yuqoridagilarni hisobga olgan holda, va quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\varphi(x,t)=\frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{t-t_j}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\left[\delta(t-t_j)+\frac{(x-x_0)^2}{4\mu(t-t_j)}\right]\right\}\Delta t+O(\Delta t). \tag{7.179}$$

Biz nostatsionar masalasi holini koʻrdik. Agar asosiy masala statsionar boʻlsa, bu holda tutashgan masala ham statsionar boʻladi.

7.5. Raqobatning ayrim modellari

7.5.1. Ikki davlat orasidagi qurollanish poygasi modeli

Vaqt oʻtishi bilan har bir davlatdagi qurollar miqdori uchta faktorga bogʻliq holda oʻzgaradi deb faraz qilindi [1,28]:

1) raqib davlatdagi qurollar miqdori,
2) mavjud qurollarning eskirishi,
3) raqiblar oʻrtasidagi oʻzaro ishonchsizlik darajasi.

Qurollanishning oʻsishi va kamayishi koʻrsatilgan faktorlarga proportsional boʻladi, ya’ni

$$\begin{cases}\dfrac{dM_1}{dt}=\alpha_1(t)M_2-\beta_1(t)M_1+\gamma_1(t)\\ \dfrac{dM_2}{dt}=\alpha_2(t)M_1-\beta_2(t)M_2+\gamma_2(t)\end{cases} \tag{7.180}$$

(7.180) da quyidagi belgilashlar qoʻllanilgan: $M_1, M_2>0$ qurollar miqdorlari, $\alpha_1(t)>0, \alpha_2(t)>0$ – qurollarni eskirish tezligini xarakterlovchi koeffitsientlar, $\gamma_1\geq 0, \gamma_2\geq 0$ funksiyalar qurol miqdoriga bogʻliq emas deb hisoblaniladi, va boshqa sabablar bilan aniqlanib, raqiblar oʻrtasidagi ishonchsizlik darajasini ifodalaydi.

Bu model qurollanish poygasi dinamikasiga ta’sir etuvchi koʻpgina muhim faktlarni hisobga olmasada, lekin bir qator kerakli ma’lumotlarni tahlil qilish imkonini beradi. Agar α_i, β_i $(i = 1,2)$ funksiyalar vaqtga bogʻliq boʻlmasa, (7.180) model quyidagi koʻrinishga keladi.

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt}&=\alpha_1M_2-\beta_1M_1+\gamma_1\\ \frac{dM_2}{dt}&=\alpha_2M_1-\beta_2M_2+\gamma_2\end{aligned} \tag{7.181}$$

(7.181) tenglama $\frac{dM_1}{dt}=0, \frac{dM_2}{dt}=0$ muvozanat holatlariga ega.

M_1^0, M_2^0 – muvozanat qiymatlari quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$\begin{cases}\alpha_1M_2-\beta_1M_1+\gamma_1=0\\ \alpha_2M_1-\beta_2M_2+\gamma_2=0\end{cases}$$

$$M_1^0 = \frac{\alpha_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}, M_2^0 = \frac{\alpha_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad (7.182)$$

(7.182) dan ko‘rinib turibdiki, $M_1^0>0$, $M_2^0>0$ larda muvozanat holat mavjud bo‘lishi uchun

$$\beta_1\beta_2>\alpha_1\alpha_2 \quad (7.183)$$

shart bajarilishi kerak.

Agar α_1, β_1, $\beta_2$lar o‘zgarmas bo‘lsa, α_2 esa o‘ssa, bu shuni bildiradiki, birinchi davlat qurollanish sohasiga qarashlarini, strategiyasini o‘zgartirmaydi, ikkinchi davlat esa qurollar eskirishi bilan qurollanishga zo‘r beradi. U holda α_2 yetarlicha katta qiymatga erishsa, muvozanat holati buziladi va (7.183) tengsizlik bajarilmaydi. Agar γ_1 va γ_2 nolga teng bo‘lsa, muvozanat holati ikkala davlatda ham qurollar yo‘qligiga mos keladi. $M_1(t)$ va $M_2(t)$ funksiyalar t o‘sishi bilan (7.183) shart bajarilgan vaqtlarda muvozanat qiymatlariga intiladi.

Shunday qilib, muvozanat turg‘un, ya’ni muvozanat holatidagi og‘ishlar vaqt o‘tishi bilan kichik miqdorlarga aylanib boradi.

7.5.2. Ikki armiyaning jangovor harakati modeli

Ushbu jangovor harakatda nafaqat muntazam armiya, balki partizanlik birlashmalari ham ishtirok etadi. Ushbu modelni hosil qilish uchun quyidagi farazlarni qabul qilamiz [1]:

1. Har bir armiyadagi tarkibning o‘zgarish tezligi jangovor harakatlarga bog‘liq emas. (Kasallik sababli, yaradorlik, dezertirlik)
2. Bevosita jangovor harakatlar natijasida (raqib armiyaning taktikasining yuqoriligidan harbiy texnikasining mukamalligi, askarlarning ruhiy holatining pastli) gi yo‘qolishlar
3. Madad kuchlarining kirib kelish tezligi. Vaqtni funksiyasi sifatida bo‘ladi.

Ushbu farazlarga asosan, 2 armiyaning jangovor harakati modeli quyidagi differensial tenglamalar sistemasidan iborat:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} == -\alpha_1(t)N_1(t) - \beta_1 N_2(t) + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dN_2}{dt} == -\alpha_2(t)N_2(t) - \beta_2 N_1(t) + \gamma_2(t) \end{cases} \qquad N_1(t) >= 0,\ N_2(t) >= 0\ qo'shinlar\ soni \quad (7.184)$$

Alfa$_1$(t), alfa$_2$(t)>=0- jangovor harakatga bog‘liq bo‘lmagan yo‘qotish tezligi, Betta$_1$(t), betta$_2$(t)>=0- jangovor harakatga bog‘liq bo‘lgan yo‘qotishlar tezligi, Gamma$_1$(t), gamma$_2$(t)>=0- madad kuchlari, N$_1$(t), N$_2$(t)- qo‘shinlar soni

$$\begin{cases}\dfrac{dN_1}{dt} == -\alpha_1(t)N_1(t) - \beta_1 N_2(t) + \gamma_2(t)\\ \dfrac{dN_2}{dt} == -\alpha_2(t)N_2(t) - \beta_2 N_1(t) + \gamma_2(t)\end{cases} \qquad (7.185)$$

(7.184), (7.185) modellar Manchester modeli. Quyidagi farazlarni qabul qilamiz: 1) gamma$_1$(t)=gamma$_2$(t)=0. U holda (7.184) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases}\dfrac{dN_1}{dt} == -\alpha_1(t)N_1(t) - \beta_2 N_2(t)\\ \dfrac{dN_2}{dt} == -\alpha_2(t)N_2(t) - \beta_1 N_1(t)\end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad 2)\begin{cases}\dfrac{dN_1}{dt} == -\beta_2 N_2(t)\\ \dfrac{dN_2}{dt} == -\beta_1 N_1(t)\end{cases} \quad 3)\ \beta_1 = const \beta_2 = const$$

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{\beta_2(t)}{\beta_1(t)}\frac{N_2(t)}{N_1(t)} \qquad \beta_1 N_1^2(t) - \beta_2 N_2^2(t) = \beta_1 N_1^2(0) - \beta_2 N_2^2(0) = c$$

$bu\ yerda \quad 1) c > 0\ \ bo'lsa,\ bundan \beta_1 N_1^2(0) > \beta_2 N_2^2(0) \qquad 1 - armiya kuchli$

$2)\ c = 0.\ Kuchlar teng \qquad 3)\ c < 0\ \ \beta_1 N_1^2(0) < \beta_2 N_2^2(0) \qquad 2 - armiya kuchli$

Vaqt o‘tishi bilan tarkiblar soni qanday o‘zgaradi degan savolga javob bersih uchun quyidagi mulohazadan foydalanamiz:

$$1)\ \frac{dN_1}{dt}\ ni\ aniqlaymiz:\ N_1(t) = -\frac{1}{\beta_1}\frac{dN_2}{dt} \qquad \frac{1}{\beta_1}\frac{d^2N_2}{dt^2} = -\beta_2 N_2(t) \Rightarrow \frac{d^2N_2}{dt^2} = \beta_1\beta_2 N_2(t)$$

$$Huddi\ shundek:\ \frac{d^2N_1}{dt^2} = \beta_1\beta_2 N_1(t)\ \ natijani\ ham\ olishimiz\ mumkin.$$

$$N_2(t) = N_1(0)ch\sqrt{\beta_1\beta_2}t - \sqrt{(\beta_2/\beta_1)}N_1(0)sh\sqrt{\beta_1\beta_2}t$$

Huddi shunday N_2(t) ni topishimiz mumkin. Endi (7.185) modelni qaraymiz, bunda armiyaga qarshi partizanlar kurashmoqda.

$$\beta_1 N_1(t)\frac{dN_1}{dt} = -\beta_1\beta_2 N_1(t)N_2(t) \qquad \beta_2\frac{dN_2}{dt} = -\beta_1\beta_2 N_1(t)N_2(t) \qquad \frac{\beta_1}{2}\frac{dN_1^2}{dt} = \beta_2\frac{dN_2}{dt}$$

$$\beta_1 N_1^2(t) - \beta_1 N_1^2(0) = 2\big(\beta_2 N_2(t) - \beta_2 N_2(0)\big) \qquad \beta_1 N_1^2(t) - 2\beta_2 N_2(t) = \beta_1 N_1^2(0) - 2\beta_2 N_2(0) = C_1$$

7.6. Ba’zi elektrofizika hodisalarining matematik modellari

Elektrofizikaga elektromaginit maydonning toklar zichligi va zaryadlar tarqalishi masalalari kiradi. Elektirofizika fan va texnikaning ko‘plab tatbiqiy masalalarini qamrab olgan. Bular jumlasiga yuqori voltli konstruktsiyalar, elektr mashinalar, elektronikaning yuqori voltli chastotali (YuVCh) asboblari, har xil turdagi yuqori yarim o‘tkazish asboblari (metall-dieletirik yarim o‘tkazgichlar, tranzistorlar va h.k.) va ko‘plab plazmali masalalar kiradi. Umuman olganda, mazkur masalalar Maksvell tenglamalarini yechishga olib keladi. Biz elektrofizikaning fizik tushunchalariga chuqur to‘xtalmasdan, ma’lum hodisalarning matematik modellarini keltiramiz.

7.6.1.Magnitostatika masalalarininig matematik jihatdan qo‘yilishi

Bu holda, yani statsionar hol uchun Maksvell tenglamalari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\text{rot H} = \frac{4\pi}{c} j, \qquad (7.186)$$

$$\text{Div B} = 0, \qquad (7.187)$$

bu yerda B, H, j – mos ravishda magnit induksiyasi , magnit maydonining kuchlanganligi va hajmiy tok zichligi.

Tajriba malumotlarini qayta ishlash qoidasi bo‘yicha material muhit xossasiga ko‘ra V va N vektorlar orasida funksional bog‘lanish mavjud.

Agar gisterizis va anizotropiyani hisobga olmasak, mazkur bog‘lanishni taqribiy ravishda:

$$\text{V} = \mu_0 \mu \text{H} \qquad (7.188)$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Bu yerda μ- vakkumning magnit o‘tkazuvchanligi, $\mu = \mu(x, y, z, |\mathbf{B}|^2$ - nisbiy magnit o‘tkazuvchanligi. Tok manbai cheksiz uzoqlikda bo‘lganida magnit maydoni nolga teng. Amaliy masalalarda uch turdagi muhit qaraladi: havo $(\mu = 1, j = 0)$, tokli nomagnit materiyaning o‘tkazuvchanligi $(\mu = 1, j \neq 0)$, toksiz ferromagnit o‘tkazuvchanligi $(\mu \neq 1, j = 0)$. Turli muhitlar sirti chegaralarida magnit induksiya, normal vektor tashkil etuvchilar va kuchlanishlarining urinmasini tashkil etuvchilari uzluksizlik sharti qo‘yiladi:

$$n(B_+ - B_-) = 0, \ \ [n \times H]_+ = [n \times H]_- = 4\pi\, j_n / c, \qquad (7.189)$$

bu yerda n- sirtga o‘tkazilgan normal, “+” va “ - ” belgilari har xil tomonlarga tegishliligi ko‘rsatiladi, j_n – tokning sirtli zichligi.

(7.187) ga asosan quyidagi vektor potensial A ni qaraymiz:

$$\text{V} = \text{rot A}. \qquad (7.190)$$

Keyin esa tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\text{rot v rot A} = \frac{4\pi}{c} j, \qquad (7.191)$$

bu yerda v = $(\mu_0\mu)^{-1}$ – magnit qarshiligi deyiladi. Ikki o‘lchovli holda (tekis masala – ploskaya zadacha), ya’ni koordinatalar z ga bog‘liq bo‘lmagan, tok zichligi va vektorli potensial faqat bittadan nolga teng bo‘lmagan komponentaga ega bo‘ladi, yani $j_z = j,\ A_z = A,$ qaralayotgan hol uchun Dekart koordinatalar tizimida (7.191) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial A}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial A}{\partial y})=\frac{4\pi}{c}j, \qquad (7.192)$$

bu yerda $B_x=\frac{\partial A}{\partial x}, B_y=\partial A/\partial y.$ Amaliy masalalarning eng muhimlaridan birining o‘qi simmetrik (ossimmetrik) bo‘lgan maydondir. Bu maydon tenglamasi

$$\frac{\partial}{\partial r}(v(\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{A}{r}))+\frac{\partial}{\partial z}v\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}j \qquad (7.193)$$

bilan aniqlanadi va azimutli koordinatalar orasidagi bog‘lanishlarni ifodalaydi: $A_\theta=A, j_\theta=j\,(A_r=A_z=j_r=j_z=0, B_z=\partial A/\partial r+A/r,\ B_r=-\partial A/\partial z)$..

(7.192) va (7.193) tenglamalar ikki o‘lchovli hol uchun tekislikda va simmetriklik o‘qida A= 0, yani A| $_g$ =0 shartda echiladi.

Bunday masalalar faqat ferromagnit uchun echiladi, ferromagnit chegarada esa Neyman masalasi qo‘yiladi:

$$\frac{\partial A}{\partial n}\Big|_r=f(x,y) \qquad (7.194)$$

Yana bir masala . Har bir ferromagnit muhitda $\mu=const$ ligidir. Bu holda bo‘linish chegarasiga qo‘yida ko‘rsatilgan qo‘shmalik sharti qo‘yiladi:

$$A\big|_+=A\big|_-,\big[n\times(v\,rot\,A)\big]\big|_+=\big[n\times(v\,rot\,A)\big]\big|_-. \qquad (7.195)$$

Yuqorida keltirilgan masalalar elektrostatikaning ichki masalalari deyiladi (yoki chiziqli yaqinlashishda magnit statik masalalari deyiladi). Endi keltirilgan masalalarni matematik modellarni umumlashgan holdagi ifodasi keyingi bo‘limda keltirilgan.

7.6.2. Magnitostatikaning umumiylashgan formal modellari

Masala quyidagicha qo‘yiladi. Qaralayotgan masala G chegaralangan sohada Puasson tenglamasini qanoantlantiruchi $u(x,y,t)$ funksiyasi topilishiga keladi:

$$\Delta u=\frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

Quyida bazi bir holatlarni ko‘rib chiqamiz:

1) $\beta=1$da masala uch o‘lchovli bo‘ladi (bunda $\alpha=0$);

2) $\beta=0$, ikki o‘lchovli masala;

a) $\alpha=0$, tekis masala (ploskaya zadacha),

b) $\alpha=1$, o‘qi simmetrik masala;

3) $\beta=0$ va $\alpha=-1$ (7.194) tenglama tsilindrik koordinatalari tizimida o‘qqa simmetrik magnit oqimining tarqalishini ifoda etadi.

G sohaning chegarasi $\Gamma = \overset{4}{\underset{i4}{U}} \Gamma_i$ deb belgilansa, u holda 1-, 2-, 3-, 4- tur chegaraviy shartlar quyidagicha bo‘ladi:

$$u\big|_{\Gamma 1} = g_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma_1, \tag{7.196}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = g_2(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma_2, \tag{7.197}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma(x, y, z)u\right]\bigg|_{\Gamma_3} = g_3(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma_3, \tag{7.198}$$

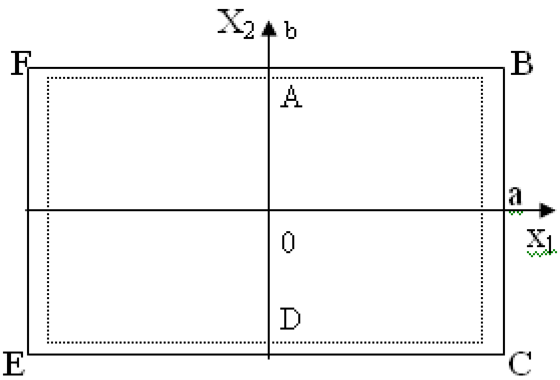
$$u\bigg|_{\Gamma_4 +} = u\bigg|_{\Gamma_4 -}, \qquad \varepsilon^+ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_4 +} = \varepsilon^- \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_4 -}. \tag{7.199}$$

Endi bu masalaga misollar keltiramiz. 1- tur shart masalasi elektrodlarda potensiallar qiymatlari o‘zgarmas holda berilishini ifodalaydi. G_2 chegarasida chiziqlar yoki simmetriyali tekislikda $g_2 = 0$ limiti hamda 3- tur shartida yechish G ni bo‘lagida ma’lum xarakterining berilishi bildiriladi. Aytib o‘tilgan chegaralarni hisobga olmasak, yuqorida keltirilgan (7.194)- (7.198) masalalar tabiiy chegaraviy masalalar deyiladi.

Yuqorida keltirilgan chegaraviy masalalar to‘r, variatsion, chekli elementlar va shu kabi usullar bilan echilishi mumkin.

7.6.3. Elektrostatikaning uzilishli chegaraviy masalasi

Faraz qilaylik, G_1 = AVSD, G_2 = AFED chegarali ikkita o‘tkazgich
D = [-a, a] x [-b,b] to‘rtburchakli soha bilan aniqlashgan bo‘lsin (7.18-rasm).



7.19 rasm. Ikkita to‘g‘ri to‘rtburchakli o‘tkazgich

AVSD o‘tkazgichda esa potintsial berilgan bo‘lsin. D sohada u(x,y) funksiyani topish masalasi qo‘yiladi.

Mazkur masala Laplas tenglamasining Derixle masalasini yechishga olib keladi, yani:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u,$$

$$u = \begin{cases} u_0, & x \in \partial\Gamma_1; \\ -u_0, & x \in \partial\Gamma_2. \end{cases}$$

Bu yerda X va U koordinata o‘zgaruvchanligi.

Bu masalaning aniq yechimi:

$$u = u_0 (x_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\ n\pi x_2 \sin\ n\pi x_1}{n\ ch\ n\pi}).$$

Nazorat savollari

1.Magnit-elastik plastinkaning matematik modelini tushuntiring.
2. Elektron sxemalar sinf hodisalarining matematik modellariga misol keltiring.
3.Ekvivalent sxemalarning algebraviy-topologik ta’rifi.
4. Iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari.
5.Ekologik- matematik modellarga misollar keltiring.
6. Saqlanish qonunlariga asoslangan modellarning matematik apparati.
7 Chiqindilarni atmosferaga ko‘chirish va diffuziyasining asosiy tenglamalarini keltiring.
8. Elektrofizikaning ba’zi hodisalarining matematik modellariga misollar keltiring.

7.7. Neyronoravshan modellashtirish

Neyron tarmoqlar va noravshan mantiq - mutlaqo farqli matematik tuzilmalar, ya’ni kibernetikaning ko‘plab intellektual masalalari: bashoratlash, tashhis qo‘yish, tasvirlarni aniqlashtirishlardagi murakkab (chiziqli bo‘lmagan) funksional bog‘lanishlarning universal approksimatorlaridir.

Neyron to‘rlarning asosiy ustuvorligi o‘rgatilishga moyilligidir. U maxsus ishlab chiqilgan algoritmlar yordamida amalga oshiriladi. Ular ichida eng mashhuri «xatoni teskari tartibda tarqatish» qonunidir (back-propagation) [79]. Neyron to‘rni o‘rganish uchun funksional bog‘lanish tarkibi to‘g‘risida hech qanday aprior axborotga ega bo‘lish talab etilmaydi. Buning uchun faqatgina «kirish-chiqish» tajribaviy juftligi ko‘rinishdagi o‘rgatuvchi namuna kerak. Buning evaziga esa o‘rgatilgan neyron to‘r o‘lchangan yoyli grafa tarkibiy tahlilga bo‘ysunmaydi.

Noravshan mantiqning yutug‘i ob’yektning tarkibi to‘g‘risidagi bilimlarga oid lingvistik mulohazalar: agar «kirishlar» bo‘lsa, u holda «chiqish» dan foydalanish imkoni demak. Lekin, noravshan mantiq apparati o‘rgatish mexanizmlariga ega emas. Shuning uchun noravshan mantiqiy chiqarishning natijalari «kichkina», «katta», «sovuq», «issiq» va h.k noravshan atamalari bilan izohlanadigan tegishli funksiyalar ko‘rinishiga juda bog‘liq.

Noravshan mantiqning neyron to‘rlar bilan birlashuvi yangi sifatni beradi. Bunday birlashish natijasida hosil bo‘ladigan neyronoravshan to‘r muhim insoniy (intellektual) xususiyatlarga ega - *lingvististiklik*, ya’ni bilimlarni tabiiy tilda qo‘llash.

7.7.1. Lingvistik approksimator

Quyidagi ko‘rinishdagi ob’yekt qarab chiqiladi.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{7.200}$$

Unda <(x_i)kirishlar-(y) chiqishlar> ni 7.5 jadvalda ko‘rsatilgan tajribaviy bilimlar matritsasi ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Bu matritsaga bilimlarning noravshan bazasi to‘g‘ri keladi :

AGAR $[(x_1 = a_1^{j1}) BA (x_2 = a_2^{j1}) BA ... BA (x_n = a_n^{j1})]$ (w_{j1} og‘irlik):

: YoKI $[(x_1 = a_1^{jk_j}) BA (x_2 = a_2^{jk_j}) BA ... BA (x_n = a_n^{jk_j})]$ (w_{jk_j} og‘irlik),

U HOLDA $y \in d_j = [y_{j-1}, y_j]$, $j = \overline{1, m}$. (7.201)

Bu yerda a_i^{jp} - $p = \overline{1, k_j}$ qatordagi x_i o‘zgaruvchilarni baholovchi lingvistik atama;

k_j - kiruvchi y o‘zgaruvchining $d_j, j = \overline{1, m}$ sinfiga to‘g‘ri keluvchi kon’yunktsiya qatorlari soni;

w_{jp} - tajribachining $p = k_j$ raqamli mulohazalarga bo‘lgan ishonch darajasini xarakterlovchi [0,1] oralig‘idagi son.

$d_j, j = \overline{1, m}$ sinflar kiruvchi o‘zgaruvchi m ni $[\underline{y}, \overline{y}]$ oraliqda kvantorlashtirish orqali shakllanadi:

$$[\underline{y},\bar{y}]=\underbrace{[\underline{y},y_1)}_{d_1}\cup\underbrace{[y_1,y_2)}_{d_2}\cup...\cup\underbrace{[y_{j-1},y_j)}_{d_j}\cup...\cup\underbrace{[y_{m-1},\bar{y}]}_{d_m}. \qquad (7.202)$$

7.5-jadval

Bilimlarning tajribaviy matritsasi

№	AGAR <kirishlar>				U HOLDA <chiqish>	Hamma qoidalar
	x_1	x_2	:	x_n		
11 12 : $1k_1$	a_1^{11} a_1^{12} : $a_1^{1k_1}$	a_2^{11} a_2^{12} : $a_2^{1k_1}$	: : : :	a_n^{11} a_n^{12} : $a_n^{1k_1}$	d_1	w_{11} w_{12} : w_{1k_1}
:	:	:	:	:	:	:
$m1$ $m2$: mk_m	a_1^{1m1} a_1^{1m2} : $a_1^{mk_m}$	a_2^{1m1} a_2^{1m2} : $a_2^{mk_m}$	: : : :	a_n^{1m1} a_n^{1m2} : $a_n^{mk_m}$	d_m	w_{m1} w_{m2} : w_{mk_m}

Noravshan bilimlar bazasi (7.201) ga (7.200) ob'yektning quyidagi approksimatsiyasi to‘g‘ri keladi:

$$y=(y\mu^{d_1}(y)+y_1\mu^{d_2}(y)+...+y_{m-1}\mu^{d_m}(y))/\sum_{j=1}^{m}\mu^{d_j}(y), \qquad (7.203)$$

$$\mu^{d_j}(y)=\max_{p=\overline{1,k_j}}\{w_{jp}\min_{i=\overline{1,n}}[\mu^{jp}(x_i)]\}, \qquad (7.204)$$

$$\mu^{jp}(x_i)=\exp(-\frac{c_i^{jp}}{2}(x_i-b_i^{jp})^2)\ . \qquad (7.205)$$

Bu yerda $\mu^{d_j}(y)$ - y chiqishning d_j sinfga tegishlilik funksiyasi;

$\mu^{jp}(x_i)$ - x_i o‘zgaruvchining a_i^{jp} atamaga tegishlilik funksiyasi;

b_i^{jp} , c_i^{jp} - tegishlilik funksiyasini to‘g‘rilash parametrlari.

7.7.2. Neyrolingvistik approksimator

Bu bo‘limda (7.200) ob’yekt to‘g‘risidagi lingvistik ma’lumotni (7.201) ifodaga izomorf bo‘lgan maxsus *neyronoravshan to‘r* ko‘rinishida tasvirlash usuli beriladi. Bunday to‘rning tarkibi 7.20 - rasmda berilgan bo‘lib, to‘rlarning tarkibi 7.6 - jadvalda ko‘rsatilgan.

7.20-rasmdan ko‘rinib turganidek, neyronoravshan to‘r 5 ta qatlamga ega:

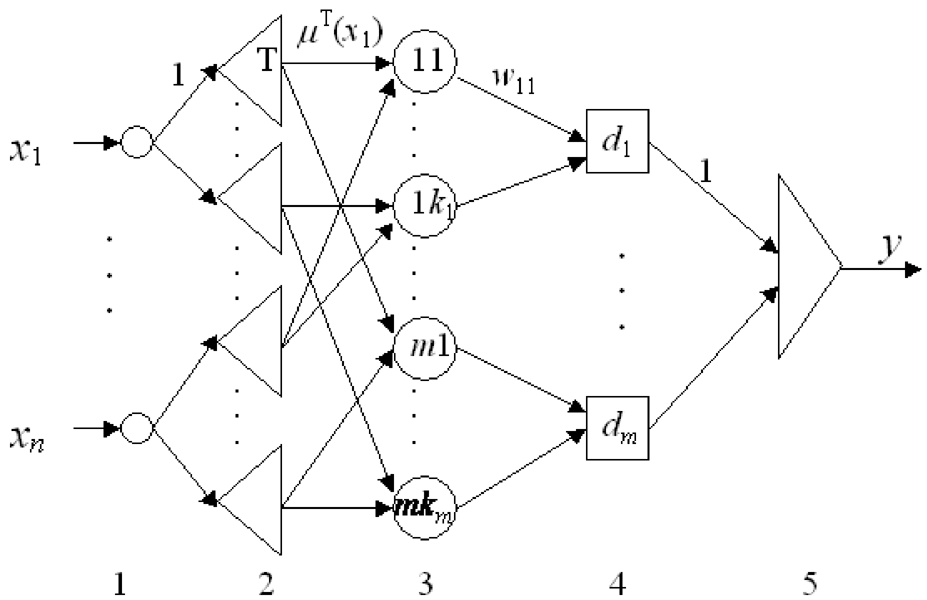
1-qatlam – aniqlashtirish ob’ektining kirishlari;

2-qatlam – (7.201) omborlar bazasida qo‘llaniladigan noravshan atamalar;

3-qatlam – (7.201) noravshan ma’lumotlar bazasining kon’yunktsiya qatorlari;

4-qatlam - $d_j,\ j=\overline{1,m}$ sinflarga birlashtiriladigan qoidalar;

5-qatlam – defazzifikatsiya operatsiyasi (7.201), ya’ni noravshan mantiqiy xulosa chiqarish natijalarini ravshan songa aylantirish.



7.20-rasm Neyronoravshan to‘rning tarkibi

Neyronoravshan to‘rlardagi tugunlar soni:

1-qatlam – aniqlashtirish ob’ektlarining kirish sonlari bo‘yicha;

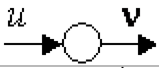
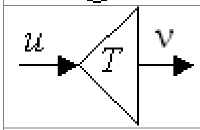
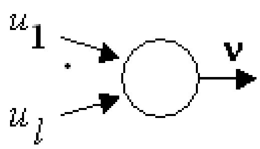
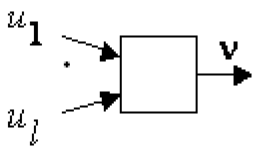
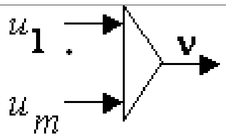
2-qatlam – bilimlar bazasidagi noravshan atamalar soni bo‘yicha (7.201);

3-qatlam – bilimlar bazasida kon’yunktsiya qatorlari soni bo‘yicha;

4-qatlam - chiquvchi o‘zgaruvchi ajraladigan sinflarning soni bo‘yicha.

7.6-jadval

Neyro-noravshan to‘rning elementlari

Tugunlar	Nomi	Funksiya
	Kirish	$v = u$
	Noravshan atama	$v = \mu^T(u)$
	Noravshan qoida	$v = \prod_{i=1}^{l} u_i$
	Qonunlar sinfi	$v = \sum_{i=1}^{l} u_i$
	Defazzifikatsiya	$v = \sum_{j=1}^{m} u_j \bar{d}_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} u_j$

Grafaning yoylari quyidagicha o‘lchanadi:

1-2 - qatlamlar orasidagi yoyning birligi;

Kirishning noravshan atamasi - 2-3 qatlamlar orasidagi yoylarga tegishlilik funksiyasi;

3-4 qatlamlar orasidagi yoylar-qatlamlar og‘irligi;

4-5 qatlamlar orasidagi yoylar birligi.

7.6 - jadvalga quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$\mu^T(u)$- u o‘zgaruvchining T atamaga tegishlilik funksiyasi;

$\bar{d}_j$ - sinf markazi $d_j \in [\underline{y}, \bar{y}]$.

7.4 - jadvalga kiruvchi *noravshan qonunlar va qonunlar sinfining* elementlarini aniqlashda (7.201) - formulada min va max noravshan - mantiqiy operatsiyalari ko‘paytirish va bo‘lish arifmetik amallari bilan almashtirilgan. Bunday almashtirish imkoniyati [85] - ishda asoslanib berilgan. Bu esa differensiallash uchun qulay ifodalarni olishga imkon beradi.

7.7.3. Neyronoravshan to‘rga o‘rgatish

O‘rganishning mazmuni yoylarning shunday turlarini tanlashdan iboratki, neyronoravshan approksimatsiya va ob’ektning real hatti-harakati orasidagi farqi kichik bo‘lsin. O‘rganish uchun quyidagi rekurrent munosabatlar tizimi qo‘llaniladi:

$$w_{jp}(t+1) = w_{jp}(t) - \mu \frac{\partial E_t}{\partial w_{jp}(t)}, \tag{7.206}$$

$$c_i^{jp}(t+1) = c_i^{jp}(t) - \eta \frac{\partial E_t}{\partial c_i^{jp}(t)}, \tag{7.207}$$

$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp}(t) - \eta \frac{\partial E_t}{\partial b_i^{jp}(t)}, \quad j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}, p = k_j. \tag{7.208}$$

Ular esa neyron to‘rlar nazariyasida qo‘llaniladigan quyidagi mezonni minimallashtiradi,

$$E_t = \frac{1}{2}(\hat{y}_t - y_t)^2, \tag{7.209}$$

bu yerda:

$\hat{y}_t$ va y_t –-o‘rganishning t -qadamida (7.200) ob’yektning nazariy va tajribaviy chiqishlari;

$w_j^p; c_i^{jp}, b_i^{jp}$, -o‘rganishning t-qadamida qonunlar og‘irligi(w) va (b,c) tegishlilik funksiyalari parametrlari.

(7.206)-(7.208) munosabatlarga kiruvchi xususiy hosilalar (E_t) xatolikning neyronoravshan to‘r parametrlarining o‘zgarishiga sezgirligini belgilaydi va quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{\partial E_t}{\partial w_{jp}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \mu^{dj}(y)}{\partial w_{jp}}, \tag{7.210}$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial c_i^{jp}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial c_i^{jp}}, \tag{7.211}$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial b_i^{jp}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial b_i^{jp}}, \tag{7.212}$$

Bu yerda

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial E_t}{\partial y} = y_t - \hat{y}_t, \tag{7.213}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial y}{\partial \mu^{d_j}(y)} = \frac{\overline{d_j} \sum_{j=1}^{m} \mu^{d_j}(y) - \sum_{j=1}^{m} \bar{d}_j \mu^{d_j}(y)}{\left(\sum_{j=1}^{m} \mu^{d_j}(y) \right)^2}, \tag{7.214}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial \mu^{d_j}(y)}{\partial\left(\prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i)\right)} = w_{jp}, \tag{7.215}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\partial\left(\prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i)\right)}{\partial \nu^{jp}(x_i)} = \frac{1}{\mu^{jp}(x_i)} \prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i), \tag{7.216}$$

$$\frac{\partial \mu^{d_j}(y)}{\partial w_{jp}} = \prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i), \tag{7.217}$$

$$\frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial c_i^{jp}} = \frac{2c_i^{jp}(x_i - b_i^{jp})^2}{((c_i^{jp})^2 + (x_i - b_i^{jp})^2)^2}, \tag{7.218}$$

$$\frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial b_i^{jp}} = \frac{2(c_i^{jp})^2(x_i - b_i^{jp})}{\left((c_i^{jp})^2 + (x_i - b_i^{jp})^2\right)^2}. \tag{7.219}$$

Qoidaga ko‘ra, neyro-noravshan to‘rni o‘rganishning algoritmi ikki bosqichdan iborat. Birinchi bosqichda to‘rning berilgan arxitekturasiga to‘g‘ri keluvchi (y) ob’yekt chiqishining model qiymati hisoblanadi. Ikkinchi bosqichda (E_t) bog‘sizlikning qiymati hisoblab topiladi hamda (7.210)-(7.219) formulalar bo‘yicha neyronlar orasidagi aloqalarning og‘irligi qayta hisoblanadi.

Nazorat savollari

1.Magnit-elastik plastinkaning matematik modelini tushuntiring.

2. Elektron sxemalar sinf hodisalarining matematik modellariga misol keltiring.

3.Ekvivalent sxemalarning algebraviy-topologik ta’rifi.

4. Iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari.

5.Ekologik- matematik modellarga misollar keltiring.

6. Saqlanish qonunlariga asoslangan modellarning matematik apparati.

7 Chiqindilarni atmosferaga ko‘chirish va diffuziyasining asosiy tenglamalarini keltiring.

8. Elektrofizikaning ba’zi hodisalarining matematik modellariga misollar keltiring.

9.Neyronoravshan modellashtirishga misollar keltiring.

8.MATEMATIK MODELLARNI TAHLIL QILISH, MODEL VA OBYEKTNING ADEKVATLIGI

8.1. Modellarni soddalashtirish usullari

Odatda tizimlarning harakat jarayoni shunchalik murakkabki, buning uchun ularning matematik modellarini soddalashtirish talab etiladi. Eng ko‘p tarqalgan soddalashtirish usullari quyidagilar:

- dekompozitsiya – murakkab tizimni ancha sodda bo‘lgan qator qism tizim (kenja) larga ajratish;
- muhim bo‘lgan xossalar, ta’sirlar va boshqa narsalarni (muhim bo‘lmagan va hisobga olinmaydigan) parametrik holda ajratib olish (makromodellashtirish usuli);
- umumiy qabul qilingan kichik chetlanish usuli yordamida o‘zgaruvchilarning qandaydir o‘zgarish sohasida chiziqsiz jarayonlarni chiziqlashtirish (linearizatsiya) ;
- tarqatma parametrlar tizimini jamlangan parametrlar tizimiga keltirish;
- jarayonlarning dinamik xossalarini chetlab o‘tish.

Yuqorida sanab o‘tilgan soddalashtirish usullarning ba’zi birlarini ko‘rib chiqamiz.

Umumiy olganda dekompozitsiyaning aniq maqsadi o‘zgaruvchilar fazosi $\{y_1, y_2, ..., y_q, x_1, x_2, ..., x_p, v_1, v_2, ..., v_r, f_1, f_2, ..., f_s\}$ ni q ta kichik o‘lchamdagi fazo ostilariga bo‘lish bo‘lib, bunda mos o‘zgaruvchilarga oid faqat y_i chiqishlar aloqasi hisobga olinadi. Agar ixtiyoriy chiqish boshqa chiqishlar bilan bog‘liq bo‘lsa, u holda amaliy jihatdan dekompozitsiya mumkin emas.

Misol. Faraz qilaylik $\{y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, f_1, f_2, f_3\}$ o‘zgaruvchilar fazosi berilgan bo‘lsin va ular uchun quyidagi yetarlicha kuchli aloqalar mavjud bo‘lsin:

$$\begin{aligned} &y_1 \leftrightarrow x_1,\ \ v_2, v_3, f_2, \\ &y_2 \leftrightarrow y_1,\ \ x_2,\ \ v_1, v_2, f_1, \\ &y_3 \leftrightarrow x_1,\ \ v_3, f_1, f_2. \end{aligned} \tag{8.1}$$

U holda tizim fazoda quyidagi koordinatalar bilan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} &y_1(x_1,\ \ v_2, v_3, f_2), \\ &y_2(y_1, v_1, v_2, f_1), \\ &y_3(x_1,\ \ v_3, f_1, f_2). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Agar tizimning umumiy modeli katta o‘lchamdagi oshkormas quyidagi ko‘rinishdagi:

$$\varphi\{y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, f_1, f_2, f_3\} = 0, \qquad (8.3)$$

munosabat bilan aniqlansa, u holda tizimning holati (8.1) bog'lanishlar (8.2) munosabatlarni hisobga olish natijasida (8.3) ko'rinishdagi murakkab modelga kelinadi. (8.3) murakkab modelni unga ekvivalent bo'lgan har y_1, y_2, y_3 chiqishlar uchun uchta xususiy sodda modellarga ajratish mumkin.

$$\varphi_1(y_1, x_1, v_2, v_3, f_2) = 0;$$
$$\varphi_2(y_2, x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, f_1, f_2) = 0;$$
$$\varphi_3(y_3, x_1, v_3, f_1, f_2) = 0.$$

Shunday qilib, keltirilgan tizimning dekompozitsiya usulini qo'llash orqali masalani nazariy jihatdan o'rganish yetarlicha sodda ko'rinishga keltiriladi.

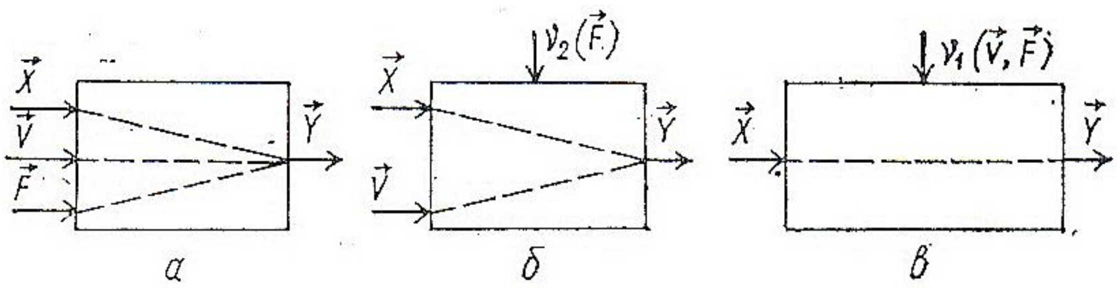
Endi modellashtirishda makromodellashtirish usulini ko'rib chiqamiz. Bu usulni qo'llashda o'zgaruvchilarning berilgan fazosida chiquvchi o'zgaruvchilarga juda ham katta tasir ko'rsatganlari (o'ta ahamiyatga ega bo'lganlari) qoldiriladi. Hisobga olinmagan ta'sirlar hisobga olingan o'zgaruvchilardan koeffisientlarni o'zgartirish (multiplikativ ta'sir holida) yoki ozod hadlarini kiritish (additiv ta'sirlar uchun) yo'li bilan hisobga olinadi.

O'ta muhim ta'sirlarni hisobga olib soddalashgan modellarni qurishda adaptiv model usuli o'ta muhim ahamiyatga ega. Ya'ni model koeffisientlari shunday joylashtiriladiki, bunda obyekt va model chiqishlarining chetlanish o'lchami talab qilingan (minimal) qiymatni qabul qilsin. Buning uchun bog'lanmalarni minimumlash mezonidan foydalaniladi. Barqarorlangan o'zgaruvchilar chiquvchi o'zgaruvchilarning o'zgarishiga olib kelmaydi va modelda aks etmaydi. Makromodel deb ataluvchi qisqartirilgan model tuzilishi $\vec{X}$ boshqaruvchi kanali, $\vec{V}$ boshqariluvchi va $\vec{F}$ boshqarilmaydigan kanallar ta'sirlari uch kanalli, ikki kanalli va bir kanalli bo'lishi mumkin. $\vec{V}$ va $\vec{F}$ ta'sirlarni aks ettiruvchi $v_2(\vec{F})$ va $v(\vec{V}, \vec{F})$ tiplashtirilgan toyilishlarning ikki va bir kanalli modellarda hisobga olinishi qolgan kanallarning koeffisientlarini qurish hisobiga parametrli ishlab chiqiladi. Masalan, agar k-chi ($k = \overline{1, q}$) chiquvchi o'zgaruvchi U_k uchun model

$$\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_q, x_1, x_2, ..., x_{\rho_3}, v_1, v_2, ..., v_{r_3}, f_1, f_2, ..., f_{s_3}) = 0 \qquad (8.4)$$

ko'rinishda bo'lsa, unda uch kanalli makromodelni qurish quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_{i3}, x_1, x_2, ..., x_{p_2}, v_1, v_2, ..., v_{r_2}, f_1, f_2, ..., f_{s3}) = 0 .$$



8.1 rasm

Bundan makromodeldagi o‘zgaruvchilar sonining qisqarishini ko‘rsatuvchi
$q_3 < q,\ p_3 < p,\ r_3 < r,\ \ s_3 < s,$ tengsizlik bajarilishiga intiladi.

Ikki kanalli makromodel quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_{q_2}, x_1, x_2, ..., x_{\rho_2}, v_1, v_2, ..., v_{r_2}, t) = 0\,.$$

multiplikativ ta’sir holatida (t- parametr) bo‘ladi va

$$\varphi_{k_2}(y_1, y_2, \ldots, y_{q_2}, x_1, x_2, \ldots, x_{p_2}, v_1, v_2, \ldots, v_{r_2}, v_1, v_2, \ldots, v_{n_2}) = 0\,,$$

model esa additiv ta’sir holatida ($\vec{F}$ boshqarilmaydigan toyishlar hisobga olganda). Bu yerda $v_1, v_2, ..., v_{n2}$ – modelga $Y_3(\vec{F})$ toyinish shaklidagi $\vec{F}$ ta’sirini hisobga olish maqsadida kiritilgan bir necha erkin hadlar. Xuddi shunday usul yordamida bir kanalli makromodel ham quriladi:

$$\varphi_{k_1}(y_1, y_2, ..., y_{q_2}, x_1, x_2, ..., x_{\rho_1} t) = 0$$

yoki:

$$\varphi_{k1}(y_1, y_2, ..., y_{q_1}, x_1, x_2, ..., x_{\rho_1}, v_1, v_2, ..., v_{n_1}) = 0\,,$$

bu yerda $v_1, v_2, ..., v_n$ – modelga $v_1(\vec{V}, \vec{F})$ toyinish shaklidagi $\vec{V}$ va $\vec{F}$ ta’sirlarini hisobga oluvchi erkin hadlar.

Dastlabki umumiy ko‘rinishdagi (8.4) modelning har xil ta’sirlar natijasida u_k chiquvchi o‘zgaruvchilariga ta’sir darajasini baholash uchun u_k bo‘yicha hosilalar, ya’ni $\frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \frac{\partial y_k}{\partial v_i}, \frac{\partial y_k}{\partial f_e}$ xususiy hosilalar hisoblanadi. Buning uchun faqat (8.4) formuladagi u_k o‘zgaruvchilari topiladi. Hosila natijasiga qarab qanaqa ta’sir murakkab tizimning funksionallanish jarayoniga berilgan o‘zgaruvchilarning o‘zgarish ta’sir qilishini aytish mumkin.

Talqinning dastlabki jarayonida holat faqat vaqtga emas, fazoviy koordinatalariga ham bog‘liq bo‘ladi. Taqsimlangan parametrli to‘plamidan jamlangan parametrli obyektlarni ajratish mumkin. Bular shunaqangi obyektlarki, ya’ni fazoning chekli sonda qayd etilgan nuqtalardagi kiruvchi va chiquvchi o‘zgaruvchilarning qiymatini bilish yetarli. Masalan, taqsimlangan parametrli chiziqli obyektlar tuzilishi bo‘yicha jamlangan parametrli ko‘p o‘lchovchi chiziqli obyektlar ko‘rinishida tasvirlanishlari mumkin. Faraz qilaylik, x (t, λ) kiruvchi va y (t, l) chiquvchi o‘zgaruvchilari vaqt va fazoviy koordinatalar bo‘yicha funksiyalar bo‘lgan chiziqli obyekt berilgan bo‘lsin. Unda taqsimlangan parametr holati uchun obyektning kiruvchi ta’sirga reaksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$y(t,l)=\int\int_{0}^{\infty} x(\tau,\lambda)Y(\tau,t,\lambda,l)d\lambda d\tau\ . \qquad (8.5)$$

Bu yerda *U*- Grin funksiyasi, u berilgan bir necha chegaraviy shartlarda aniqlanadi; Ω- fazoviy koordinatalarning aniqlanish sohasi. Chiziqli tizim jamlangan parametrli tizimga olib kelinadi, deb hisoblaymiz. Unda (8.5)ni quyidagi ko‘rinishda ifodalash orqali chekli sondagi $\lambda_k(k=\overline{1,p}),\ l_i(i=\overline{1,q}),$ nuqtalarda kirish va chiqish o‘zgaruvchilarning qiymatlarini aniqlash mumkin:

$$y(t,l_i)=\sum_{k=1}^{\rho}\int_{0}^{\infty} x(\tau,\lambda_k)Y(t,\tau,\lambda_k,l_i)dv. \qquad (8.6)$$

(8.6)ga belgilashlarni kiritamiz:

$y(t,l_i)=y_i(t)-$fazoning ***i***- chi nuqtasidagi vaqt funksiyasi;

$x(\tau,\lambda_k)=x_k(\tau);\ Y(\tau,t,\lambda_k,l_i)=g_{ki}(\tau,t)-$impulsli o‘tish funksiyasi yoki vaqt funksiyasi . Unda (8.6) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y_i(t)=\sum_{k=1}^{\rho}\int_{0}^{\infty} x_k(\tau)g_{ki}(\tau,t)d\tau\ \ (\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{q}}). \qquad (8.7)$$

Demak, taqsimlangan parametrli tizim P kirish va Q chiqish o‘zgaruvchilari bilan jamlangan parametrli ko‘p o‘lchovli chiziqli tizimga almashtiriladi. (8.7) integral ifodalar tizimini bir qancha kirish signallarining chiqish signallariga almashishini amalga oshiruvchi dinamik tizim deb qaralsa bo‘ladi [3].

Oddiy misol sifatida taqsimlanlangan parametrli obyektga jamlangan parametrli obyektga keltirishga rezistor parametrlarini aniqlash masalasini ko‘rib chiqish mumkin.

Misol taraqasida elastik plastinka harakatining matematik modelini ko‘rib chiqamiz.

Matematik modelni chiqarishda Kirxgof gipotezasi va Gamilton-Ostrogradskiy tamoyiliga asoslanamiz.

.

Kirxgof gipotezasiga ko‘ra:

$$\mathrm{u}_1=-\mathrm{z}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}},\mathrm{u}_2=-\mathrm{z}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}},\mathrm{u}_3=\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}), \qquad (8.8)$$

bu yerda w-plastinka o‘rta tekisligining egilishi.
Bu holda Koshi munosabatlari quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\varepsilon_{11} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{22} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_{12} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{8.9}$$

va Guk qonuni esa quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right), \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right), \\
\sigma_{12} &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Gamilton–Ostrogradskiy tamoyiliga ko‘ra:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(K - \Pi + A)dt = 0,$$

bu yerda k-kinetik energiya, p-potensial energiya, a-tashqi kuchlar bo‘lib, ular quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1}\int_v \delta K dtdv = \int_{t_0}^{t_1}\int_v \rho\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\delta\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\delta\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t}\delta\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)dtdv, \\
&\int_{t_0}^{t_1}\int_v \delta\Pi dtdv = \int_{t_0}^{t_1}\int_v \left(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33}\right)dtdv, \\
&\int_{t_0}^{t_1}\int_v \delta A dtdv = \int_{t_0}^{t_1}\int_v \left(\left(X + \rho K_x\right)\delta u_1 + \left(Y + \rho K_y\right)\delta u_2 + \left(Z + \rho K_z\right)\delta u_3\right)dtdv.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

(8.11) ga (8.8)-(8.10) qo‘yamiz va bo‘laklab integrallash natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + Q_Z = 0. \tag{8.12}$$

(8.12) tenglama quyidagi chegaraviy shartlarda yechiladi:

$$\left.\begin{aligned}
&(-\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - \frac{\partial M_{12}}{\partial y})\delta w\Big|_x = 0, \\
&(M_{11})\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_x = 0, (M_{12})\delta\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_x = 0, \\
&(-\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} - \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x})\delta w\Big|_y = 0, \\
&(M_{12})\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_y = 0, (M_{22})\delta\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_y = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

bu yerda

$$N_{11}=\int_z \sigma_{11}dz, M_{11}=\int_z z\sigma_{11}dz, N_{12}=\int_z \sigma_2 dz, M_{12}=\int_z z\sigma_{12}dz,$$

$$N_{22}=\int_z \sigma_{22}dz, M_{22}=\int_z z\sigma_{22}dz, N_x=\int_z Xdz, M_x=\int_z zXdz,$$

$$M_y=\int_z zYdz, Q_z=\int_z Zdz.$$

(8.12) va (8.13) tenglamalarga quyidagicha aniqlangan boshlang‘ich shartlar ham qo‘shiladi:

$$w\big|_{t=t_0}=w_0, \overset{/}{w}. \tag{8.14}$$

Shunday qilib, elastik plastinka harakatining matematik modeli (8.8) tenglama va (8.13)-(8.14) shartlar bilan to‘la aniqlanadi.

Endi (8.12) tenglamani tahlil qilamiz. Amaliy hisoblarda bu tenglamaning 2- va 3- hadlari kichik bo‘lganligi uchun tashlab yuboriladi va shu bilan modelni soddalashtiriladi. Natijada (8.12)ni soddalashgan ko‘rinishini olamiz:

$$\rho u\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial y^2}\right)=q \; .$$

8.2. Modelni tahlil qilish

Tahlil qilinayotgan obyektning matematik modeli formallashtirilgan va soddalashtirilgan ko‘rinishdagi yoritmasidan iborat. Bunda obyektga doir barcha alomatlar tizimning boshlang‘ich tashkil etuvchi to‘plam osti majmui bilan birga hisobga olinadi. Matematik modelning ko‘rinishi nafaqat borliq obyektning tabiati bilan, balki qaralayotgan masala uchun talab qilinayotgan modelga hamda uni yechish aniqligiga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun ham olingan modelning muhandislik masalalarini yechish va undagi o‘zgaruvchilarning o‘zgarish chegaralarini topish uchun mazkur modelni yetarlicha samarali qo‘llash sohalarini aniqlash maqsadida uni tadqiq qilish lozim.

Misol. Sterjen o‘qi bo‘yicha yo‘naltirilgan P siquvchi kuch ta’sirida EI o‘zgarmas bikirli sterjenning egilishi to‘g‘risidagi masalani qaraymiz. Faraz qilaylik, sterjenni chap oxiri (x=0) qo‘zg‘almas, o‘ng oxiri (x=l) esa siljishi mumkin. Uzunligi l bo‘lgan sterjenning egilishdagi min P ni topish talab etiladi (Eyler masalasi).

Materiallar qarshiligi fanidan ma’lumki, bir jinsli xodaning vertikal egilishi quyidagi differensial tenglamaning ushbu chegaraviy shartga ko‘ra:

$$y^{(IV)}+\frac{P}{El}y''=0 \tag{8.15}$$

quyidagi ifoda yechiladi:

$$\begin{aligned} y(0)&=y'(0)=0;\\ y(l)&=y''(l)=0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

(8.15)ning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x. \tag{8.17}$$

Bu yerda $\alpha=\sqrt{\frac{P}{El}}$.

(8.16) chegaraviy shartning ikkita birinchi shartlariga ko‘ra

$$C_1+C_3=0,\ C_2+C_4\alpha=0,$$

bu yerda: $C_1=-C_3, C_4=-\frac{C_2}{\alpha}.$

Ushbu munosabatlarni yechimga qo‘yamiz va quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$y=C_1(1-\cos\alpha x)+C_2\left(x-\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right).$$

Ma’lumki, $\alpha\neq 0$, u holda (8.2) ning ikkinchi ikkita chegaraviy shartlari quyidagi ifodalarni beradi:

$$\left.\begin{aligned} C_1\cos\alpha l+C_2\frac{\sin\alpha l}{\alpha}&=0;\\ C_1(1-\cos\alpha l)-C_2\left(l-\frac{\sin\alpha l}{\alpha}\right)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Biz nol bo‘lmagan yechimni topishimiz kerak, shuning uchun (8.18) ning diterminanti nolga teng bo‘lishi kerak:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha l & l-\frac{\sin\alpha l}{\alpha}\\ \cos\alpha l & \frac{\sin\alpha l}{\alpha} \end{vmatrix}=0.$$

Diterminantlarni ochib, ushbu trigonometrik tenglamani hosil qilamiz:

$$(1-\cos\ \alpha l)\frac{\sin\ \alpha l}{\alpha}-\cos\alpha l\left(l-\frac{\sin\alpha l}{\alpha}\right)=0.$$

Bu

$$\sin\alpha l-\alpha l\cos\alpha l=0\Rightarrow tg\alpha l=\alpha l. \tag{8.19}$$

Bu yerda $\alpha=\sqrt{\frac{P}{El}}$ bo‘lgani uchun (8.19) ifodani yechamiz va minPga mos keluvchi α ning eng kichik qiymatini olamiz va natijada $P_{крит}$ ning quyidagi qiymatini topamiz:

$$P_{крит}\cong 20{,}187\frac{El}{l^2}.$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki, tg $\alpha l = \alpha l$ tenglama ko'plab yechimga ega. Lekin real oby'ekt uchun tenglama faqat bitta $\alpha_{\min}(\alpha \neq 0)$ yechimga ega bo'ladi, buni fizik tajriba ham tasdiqlaydi. Shunday qilib, tanlangan matematik model qaralayotgan obyektni etarlicha qamrab olmagan yanada aniq modelni olish uchun sterjen massasining geometrik o'lchamlarini, ishqalanish kuchini va boshqa parametrlarini hisobga olgan holda ishlab chiqish maqsadga muvofiq.

Real obyektni tadqiq qilish uchun matematik modelning samarali qo'llanilishini quyidagi misolda ko'rsatamiz.

Misol. Ikkita elastik massa bilan birlashtirilgan mexanik ostsillyatorning majburiy tebranish rejimini tadqiq qilish masalasini qaraymiz. Faraz qilaylik, $F(\alpha) = F \sin \omega t$ majburiy kuch ostida m massali jismning tebranishi qaralayotgan bo'lsin. Ma'lumki, mazkur jarayonning modeli ishqalanish kuchini hisobga olinganda uning tenglamasi quyida oddiy differensial tenglama bilan aniqlanadi:

$$m\ddot{x} + cx = F \sin \omega t,$$

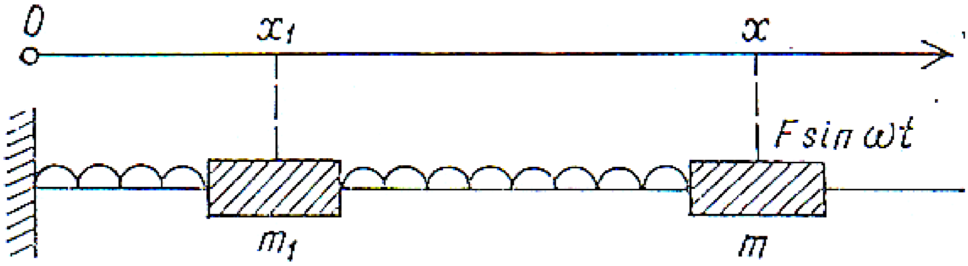
bu yerda S – tiklanish koeffisienti (purjinani bikirligiga bog'liq bo'ladi); F – ω chastota tashqi qo'zg'alish amplitudasi; x - m massaning joriy koordinatasi.

O'tish jarayoni tugagandan so'ng kuzatilayotgan barqaror (shakllangan) tebranish amplitudasi

$$Q = \frac{F}{\left|C - m\omega^2\right|} \qquad (8.20)$$

formula bilan aniqlanadi.

Masalani quyidagicha qo'yamiz: Mazkur tebranayotgan m massaga boshqa bir m_1 massaning elastik bog'lanishi (prujina orqali) qaralayotgan tebranishlarga qanday ta'sir etadi? (8.1- rasm).



8.1-rasm

Agar x_1 orqali bu massaning joriy koordinatasini va S_1 orqali esa tiklanish koeffisientini belgilasak, u holda quyidagi tenglamalar tizimini olamiz:

$$\ddot{m}x + Cx + C_1(x - x_1 = F \sin \omega t);$$
$$m_1\ddot{x}_1 + C_1(x_1 - x) = 0.$$

Bu tenglamalarni yechib ushbu jismlarning har biri uchun barqaror tebranishlar amplitudasini topamiz:

1) m massa uchun:

$$A = \frac{F}{\left| C - m\omega^2 - \frac{m_1\omega^2 C_1}{C_1 - m_1\omega^2} \right|}; \tag{8.21}$$

2) m_1 massa uchun:

$$A_1 = \frac{FC_1}{\left|(C_1 - m\omega^2 + C)(C_1 - m_1\omega^2 - C_1^2)\right|}. \tag{8.22}$$

Endi tebranishlarning amplitudalari Q va A massalarni bog‘languncha va bog‘langandan keyin solishtiramiz.

Bu yerda C_1 parametrni va ulangan jism m_1 massasining aniq bir qiymatlarini tanlab A amplitudani ancha kamaytirishga erishish mumkin. A<Q kichik bo‘ladigan shartni topamiz, ya’ni massalarni ulash natijasida m massaning tebranish amplitudasi kamayadi. Bu shartni (8.20) va (8.21) orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$\left(\frac{C}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{C_1}{m_1} - \omega^2\right) < 0. \tag{8.23}$$

(8.23) tengsizlik quyidagi ma’noni bildiradi. Agar berilgan ostsillyatorning xos chastotasi $\sqrt{\frac{C}{m}}$ majburiy chastotasi katta bo‘lsa, u holda birlashtirilgan ostsillyatorning xos chastotasi $\sqrt{\frac{C_1}{m_1}}$ ω dan kichik bo‘lishi kerak va aksincha. Bundan tashqari S_1 va m_1 larning qiymatlarini mos ravishda shunday tanlash orqali sterjen A amplitudasini kerakligicha kichraytirilishi mumkin, agar $C_1 - m_1\omega^2 \to 0 \left(\text{яъни } \frac{C_1}{m_1} \to \omega^2\right)$ amplitudaning qiymati nolga intilsa.

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz: parametrlarning ma’lum bir munosabatlarida ulangan ostsillyator massasiga qo‘yilgan majburlovchi kuch ta’sirida tinch holatda bo‘ladi, lekin to‘g‘ridan-to‘g‘ri kuch qo‘yilmagan boshqa bir massa esa buraladi.

Xuddi shunday xulosani dempfirlanuvchi ostsillyator uchun ham chiqarish mumkin. Endi A<Q bo‘ladigan shartni topamiz, ya’ni qo‘shimcha massani ulash natijasida m massani amplitudasining tebranishi kichrayadi.

Mazkur natija tebranishni o‘ziga qabul qiluvchi tebranayotgan tizimga qo‘shimcha massani elastik ulashga asoslangan qurilma konstruksiyalarini majburiy tebranishi (dinamik so‘nuvchi tebranish) so‘ndirish g‘oyasini keltirib chiqaradi. Bunday qurilmalarni tatbiqi juda ham keng, masalan obyektlarni zararli tebranishini (korabllar, samolyotlar, kosmik apparatlar) yo‘qotishda ishlatiladi.

Shu bilan birga ulangan massa juda ham kichik bo‘lmasligi kerak, chunki (8.22) dan ko‘rinib turibdiki uning A_1 amplitudasi uchun $S_1=m_1\omega^2$ bo‘lganda $A=\frac{F}{C_1}=\frac{F}{m_1\omega^2}$ qiymat kichik m_1 larda tez o‘sadi. Bundan tashqari m_1 va m massalarning tebranishlari konstruksiyalar o‘lchamlari bilan chegaralangan.

Matematik modellarni tahlil qilishda uning parametrlarini o‘lchamlarini modelga qo‘yganda o‘ng va chap tomonlari o‘lchamlari bir xil chiqishi kerak. Ushbu nuqtai nazardan quyida biz o‘lchamlarni matematik masalalarni tahlil qilish usuli sifatida qaraymiz.

O‘lchamlarni tahlil qilish modellarini tadqiq qilish usuli sifatida

Model qurilgandan so‘ng keyingi bosqich, yani qo‘yilgan masalani yechish bosqichiga o‘tiladi. Bu usullar matematik formulalar va belgilar bilan yozilgan analitik yoki natijalari sonli va grafik ko‘rinishida olishda maxsus sxemalar ishlatilsa, unda sonli diskret bo‘lishi mumkin. Lekin qaralayotgan masalani yechishdan avval mazkur matematik modelning o‘lchamlarini tahlil qilish va parametrlarini o‘xshashligini aniqlashtirib olish darkor. Chunki tabiat, texnologik, va shunga o‘xshash ko‘plab iqtisodiy va sotsial obyektlar fundamental simmetrik (o‘xshashlik, qaytarishlik) xossalariga ega. O‘rganilayotgan hodisada biron bir simmetriyaning bor mavjudligi unga nisbatan kamroq simmetriyaga ega bo‘lgan analogiga nisbatan mazkur ko‘plab soddalikka ega bo‘ladi. Matematik modellarni soddalashtirish va yanada ularning tahlilini soddalashtirishning ko‘plab usullari aynan simmetriyalik xossasiga asoslangan. Matematik modelni tashkil etuvchi tenglamalar tizimini tartibini pasaytirish, qidirilayotgan miqdorlarga bog‘liq bo‘lgan o‘zgaruvchilar sonini qaraylik, jarayonni aniqlovchi o‘zgarmas parametrlar sonini kamaytirish va x.k. larga ushbu xossa imkon beradi. Simmetriyalik xossasini qo‘lashga tipik misol sifatida modelga kiruvchi kattaliklar (miqdorlar)o‘lchamlarini tahlil (mexanik, fizik, iqtisodiy va h.k.) manoga ega bo‘lgan obeyktni malum tasniflari qandaydir birliklarda o‘lchanadi. Masalan, massa grammlarda, harorat Kelven graduslarida, yalpi milliy daromod so‘mda va h.k. Bunday miqdorlar o‘lchamli deyiladi. Ularning sonli qiymatlari o‘lchash birligini tanlashga bog‘liq bo‘ladi. Ular orasida erkin (asosiy) o‘lchamli miqdorlar yoki o‘lchamli erkin miqdorlar ajratiladi. Masalan, SGS (santimetr, gramm, sekund) birlik mexanik hodisalarni ifodalashda ishlatilsa, u holda *l* uzunligi massa va T vaqt o‘lchamlari erkli bo‘ladi va ularning biri boshqasi orqali ifodalanmaydi. Bundan farqli ravishda $E=\frac{m\upsilon^2}{2}$ munosabat asosiy miqdorlar o‘lchamiga ko‘ra $[E]-[m][\lambda]^2[T]^2=\Gamma\cdot cm^2\cdot c^{-2}$ bilan aniqlanadi va u o‘lchamlik formulasi deb aytiladi (bu yerda $v=\frac{dx}{dt}$ $[f]$ esa f formulaning o‘lchamini ifodalaydi). Xuddi shunga o‘xshash bu jarayonlar uchun ham o‘lchamlilik formulasini o‘rnatish mumkin.

Masalan, Nyutonning ikkinchi qonunini qaraylik, yani $F=ma$, bu yerda m - massa a - tezlanish. $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ni e’tiborga olgan holda kuch uchun ham quyidagi ko‘rinishdagi o‘lchamlik formulasini olamiz:

$$[F]=[m][L]\cdot[T]^{-2}. \tag{8.24}$$

Xuddi shunday boshqa bir miqdorlar uchun o‘lchamlilik formulasini keltiramiz:

tezlik - $[\upsilon]=[L]\cdot[T]^{-1}$,

tezlanish - $[a]=[L]\cdot[T]^{-2}$,

ish - $[A]=[m]\cdot[L]^2\cdot[T]^{-2}$,

quvvati - $[N]=[m]\cdot[L]^2\cdot[T]^2$.

Endi o‘quvchiga tushunarli bo‘lishi uchun geometrik va mexanik o‘xshashlik tushunchalari ustida to‘xtalib o‘tamiz.

Elementar geometrik kursidan malumki, ikkita uchburchakning mos burchaklari teng bo‘lsa va mos tomonlarini uzunliklarini munosabati ham teng bo‘lsa ular o‘xshash deyiladi. Bu munosabat masshtab, ya’ni o‘xshashlik koeffisienti sanaladi. Uchburchak uzunliklarini ma’lum masshtabga qo‘yib, o‘xshash uchburchakni, ya’ni aynan mazkur shakldagi boshqa o‘lchamli uchburchakni hosil qilamiz.

Mexanik o‘xshashlik geometrik o‘xshashlikka nisbatan yanada yuqori bo‘lgan o‘xshashlikdir. Mexanik modelda geometrik o‘xshashlik, albatta saqlanadi. Bu yerda modelning fizik parametrlari va natur obyektning o‘xshashligi ham zarur. Masalan, model va obyektning masalalar, kuchlar, solishtirma bosimlarining ham o‘xshashliklari saqlangan bo‘lishi kerak. Lekin fizik parametrlarning o‘xshashligi o‘rganiladigan hodisa uchun muhim bo‘lgan parametrlarga qo‘laniladi.

Masalan, natural obektivning material ichki kuchlanishi tadqiq qilinayotgan obyektga o‘z ta’sirini o‘tkazmaydi, shuning uchun ham model ixtiyoriy materialdan tayyorlanishi mumkin, chunki bu holda materialning tasnifi uchun o‘xshashlik shart emas.

Geometrik va mexanik o‘xshashlik model bilan natur obyektning o‘zaro bir qiymatlik sharti deb ataladi, bunda obyektning o‘ziga xosligi aniqlanadi, uni model bilan bitta sinfda, obyekt bilan hodisalar esa bitta guruhda aniqlanadi. Bu shuni anglatadiki, model ham, natur obyekt ham bir xil parametrlar, masalan, elastiklik, solishtirma bosim, zichlik va harorat bilan aniqlanadi.

Ikkita o‘xshash obyekt va hodisaning (natur va model) mos aniqlovchilari bir – biriga faqat o‘xshashlik koeffisienti bilan yoki mos parametrlarini almashtirish ko‘paytuvchisi bilan farq qiladi.

O‘xshashlik kiritilsa, (8.24) o‘lchamlar formulasidan olinishi mumkin. Bu ayniqsa o‘rganilayotgan obyekt va hodisani tavsiflanuvchi bog‘lovchi parametrlar tenglamalarini tadqiqotchi ololmagan holatga tegishli. Shunday qilib, o‘lchamlik formulasidan kuch uchun Nyutonning o‘xshashlik kriteriyasini olish mumkin:

$$[P]=[M]\cdot[L]\cdot[T]^{-2} \text{ yoki } \frac{[P]\cdot[T]^2}{[M]\cdot[L]}=1, \text{yoki } \frac{Pt^2}{mc}=idem. \qquad (8.25)$$

Bu yerda idem (lat.) – xuddi shunday manoni beradi.

Umuman olganda, o‘xshashlik va o‘lchamlilik nazariyasi tadqiqotchiga modellashtirishdagi o‘lchamsizlik komplekslarining va o‘xshashlik kriteriyalarini topishda keng yo‘l ochib beradi. Quyida eng ko‘p tarqalgan shunday o‘lchamsiz komplekslarni keltiramiz. Ular o‘z navbatida yangi o‘lchamsiz komplekslarni mustaqil ravishda qo‘llashi mumkin.

Ularning ko‘pchiligi aniqlovchi tenglamalarning natijalari hisoblanadi:

$$\frac{\upsilon t}{l};\frac{\upsilon}{\varphi l};\frac{\upsilon^2}{jl};\frac{Pt^2}{ml}; \text{ va } \frac{Pl}{pl^3\upsilon^2}. \qquad (8.26)$$

Bu yerda φ^* - aylanishning burchak tezligi rad/s;

S- materialning zichligi, kg/m^3 .

Hisob – kitoblarni kiritishda o‘lchamsiz komplekslardan foydalanib, ularni ko‘paytirish va bo‘lish orqali yangi har xil munosabatlarni olish mumkin.

O‘xshashlik kriteriyasini aniqlashda yana bir usulni ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, dinamik tezlik Nyutonning ikkinchi qonun bo‘yicha ifodalanuvchi harakatini amalga oshirsin:

$$F_1 = m_1 \frac{d\upsilon_1}{dt_1} \text{ va } P_2 = m_2 \frac{d\upsilon^2}{d\,t^2} \quad . \tag{8.27}$$

Barcha miqdorlar o‘xshashlik fakti mavjudligidan kelib chiquvchi munosabatlar bilan bog‘langan (8.26) tenglamaga tegishli:

$$F_1 = K_F\, F_2,\ \ m_1 = k_m\, m_2,\ \ \upsilon_1 = k_\upsilon\, \upsilon_2,\ \ t_1 = k_1\, t_2 \,.$$

Bu yerda $k_{F,}\ k_m, k_\upsilon$ va k_t o‘xshashlikning mos koeffisientlari, 1 indeksi natur obyektga, 2- indeks esa modelga mos kelsin.

Olingan ifodalarni (8.27) ning (8.24)- tenglamasini ko‘rib, quyidagi ifodani olamiz:

$$K_F\, F_2 = k_m\, m_2 \frac{k_\upsilon d\upsilon_2}{k_t dt_2} \quad .$$

So‘ngra sodda almashtirish natijasida, yani barcha o‘xshashlik koeffisientlarini bu munosabatning chap tomonida guruhlab, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\left[\frac{k_F\, k_t}{k_m\, k_\upsilon}\right] P_2 = m_2 \frac{d\upsilon_2}{dt_2}. \tag{8.28}$$

(8.27) va (8.28) ayniy bo‘lishlari uchun kvadrat qavs ichidagi ifodalar teng bo‘lishi lozim. Bu shartni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{F_{1t}\, tn}{m_{1t}\, \upsilon_{1t}} = \frac{P_m\, t_m}{m_m\, \upsilon_m} = idem\,. \tag{8.29}$$

Model va natur obyekt uchun bir xil bo‘ladigan o‘lchamsiz (8.24) kompleks o‘xshashlik kriteriesi yoki o‘xshashlik invarianti (o‘zgarmaslik) deb ataladi va u (8.27) bilan to‘la ustma – ust tushadi. Xususan, (8.24) munosabati Nyuton qonunining o‘xshashligi deyiladi va N harfi bilan belgilanadi.

U quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\frac{P_H t_H^2}{m_H l_H} = \frac{P_M t_M^2}{m_M l_M} = idlm\,.$$

O‘xshashlik kriteriyasi N (8.26) dan ular o‘lchamsizlikka keltirilib to‘g‘ridan-to‘g‘ri olinishi ham mumkin, ya’ni:

$$\frac{F}{m\dfrac{d\upsilon}{dt}} = 1,$$

($d\upsilon / dt$ differensial υ / t munosabat bilan almashtirgan holda).

O‘xshashlik nazariyasida obyekt va model uchun o‘xshashlik kriteriyasi va faqat bir xil sonli qiymatlarga ega bo‘lishlari balki obyekt va hodisalar parametrlarini tadqiq qilish uchun xarakterli ixtiyoriy o‘lchamsiz munosabatlar (komplekslar) uchun ham isbotlangan.

Demak, yuqorida keltirilgan faktlarga asosan, invariantlik xossasiga ko‘ra, quyidagini ta’kidlab o‘tamiz: o‘lchash birligi tizimi har xil olinganda ham, hattoki obyektni tavsiflovchi miqdorlar orasidagi aloqalar ham o‘zgarmaydi. Masalan, Su va SGS tizimlarida yuqorida qaralgan Nyuton qonuni F =ma bir xil ko‘rinishda yozilgan. Hodisa va jarayonlarning invariantligiga nisbatan o‘lchash birligining o‘zgarishi P – teoremada o‘z aksini topgan, yani fizik o‘lchamlarining tahlili P – teoremaga asoslangan.

P – teorema. Faraz qilaylik, $a_1 a_2$ va a_u o‘lchamlar orasida u+1 funksional aloqa berilgan:

$$a = F(a_1, a_2, a_k + 1, \dots a_u)\,. \qquad (8.30)$$

$a_1 \dots a_k$ erkin o‘lchamlar va mazkur aloqalar o‘lchash birligi tizimini tanlashga bog‘liq bo‘lmasin (a miqdor topiladigan, qolganlari esa berilgan). U holda (8.24) aloqa quyidagi ko‘rinishda ifoda etilishi mumkin:

$$\Pi = F(\underbrace{1,\dots 1}_{k},\ \underbrace{\Pi_2 \dots,\ \Pi_n - k}_{n-k}), \qquad (8.31)$$

yani $a_1 \dots, a_n$ o‘lchamli miqdorlar n+1 ta o‘lchamsiz kombinatsiyasi ifoda etuvchi $\Pi_1, \Pi_{tm}, \Pi_{n-k}$ ta n+1-k miqdorlar orasidagi munosabatlarni ifoda etadi. P, P_1, P_{n-k} miqdorlar $a, a_1, .. a_u$ lar quyidagi sodda munosabatlar bilan bog‘langan:

$$\begin{aligned} a &= \Pi a_1^{m1} a_1^{m2} \dots a_k^{ak}, \\ a_{k+1} &= \Pi_1 a_1^{l1} \dots a_k^{lk}, \\ a_u &= \Pi_{u-k} a_1^{u1} \dots a_k^{pk}. \end{aligned} \qquad (8.32)$$

Bu yerda $m_1, \dots m_k; l_1, .. l_k; \dots; P_1, \dots P_k$ daraja ko‘rsatkichlari bo‘lib ular $a, a_{k+1}, .. a_u$ o‘lchamli bog‘liq miqdorlar uchun mos o‘lchamli formulalardagiga o‘xshash. Masalan, quyidagi formula uchun:

$$[a] = [a_1]^{m1} [a_1]^{m2} \dots [a_k]^{mk}\,.$$

Isbot. Birinchi navbatda o‘lchamli erkin miqdor $a_1 (i = 1, \overline{k})$ ni $a_i = \bar{a}_i d_i$ ko‘rinishida ifodalab, (8.30) munosabatni o‘lchamsizlashtiramiz. Ishlatilayotgan birlik tizimda $\bar{a}_i$ o‘lchamsiz koeffisient a_i miqdorning sonli qiymati, d_i ko‘paytuvchi esa o‘zgarish masshtabi (o‘nlab va yuzlab foizlar, yuz yoki minglab graduslar, million va milliard so‘mlar va h.k)

a_i ni o‘lchamini ifodalaydi.. $a, a_{k+1}, ..., a_n$ o‘lchovsiz ko‘paytiruvchilar uchun sonli qiymatlar $\alpha_i, i = 1,...,k$ masshtabli ko‘paytiruvchilar yordamida quyidagicha hisoblanadi:

(8.30) munosabatni $\bar{a} = \dfrac{a}{\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}...\alpha_k^{m_k}}$, $\bar{a}_{k+1} = \dfrac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1}\alpha_2^{l_2}...\alpha_k^{l_k}}$, $\bar{a}_n = \dfrac{a_n}{\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}...\alpha_k^{p_k}}$

birlik o‘lchovlariga bog‘liq bo‘lmagan $a, a_1, ..., a_n$ kattaliklarining sonli qiymatlari o‘rtasidagi bog‘liqlik kabi izohlash mumkin.

Shu bois, ixtiyoriy $\alpha_i, i = 1,...,k$ masshtab ko‘paytiruvchilari uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\bar{a} = F(\bar{a}, \bar{a}_1, ..., \vec{a}_k, \bar{a}_{k+1}, ..., \bar{a}_n),$$

yoki

$$\frac{a}{\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}...\alpha_k^{m_k}} = F\left(\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, ..., \frac{a_k}{\alpha_k}, \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1}\alpha_2^{l_2}...\alpha_k^{l_k}}, ..., \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_p}...\alpha_k^{p_k}}\right).$$

Endi $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2, ..., \alpha_k = a_k$ ni qo‘yamiz. Boshqacha aytganda, olingan birlik o‘lchovli tizimdagi $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_k$ kattaliklar ayniyatli birga teng bo‘ladigan holatda masshtab ko‘paytiruvchilarni tanlaymiz. Unda oxirgi munosabatdan (8.31) va (8.32) formulalar kelib chiqadi.

P-teoremasini qo‘llashda obyektni tavsiflovchi kattaliklar soni kamayadi va dastlabki a kattaligini ($a_{k+1}, ..., a_n$ kattaliklar ham) $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ va $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_k$ lar orqali ifodalash usulini beradi. U (8.30) funksional bog‘liqlikning konkret ko‘rinishiga “befarq” bo‘ladi va faqat F funksiyaning moslanuvchanligini talab qiladi.

Xususiy holda, agar $n = k$ bo‘lsa, unda (8.31) dan $\Pi = const$ va $a = const = a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k}$ kelib chiqadi. Ya’ni yechim uchun berilgan parametrlar orqali oddiy ifoda olinadi (a ning aniq qiymatini bilish uchun doimiyni aniqlash kerak bo‘ladi). Masalan, bizga ma’lum T mayatnikning kichik tebranish davri uning boshlang‘ich og‘ishi va tezligiga bog‘liq bo‘lmaydi, faqat uzunligi, m massasi va erkin tushish tezlanishi g yordamida aniqlanadi. $T = T(l, m, g)$ funksional bog‘lig‘ligi to‘rtta o‘lchov birligi kattaliklarida tashkil etiladi. Ularning uchtasi mustaqil o‘lchamlarga ega. Bularning o‘lchov birliklari sifatida T, l va m olinsa, unda g o‘lchov birligi uchun $[g] = [l][T]^{-2}$ yoki $[T] = [l]^{1/2}[g]^{-1/2}$ olamiz. Bu yerda $T = const\sqrt{l/g}$.

Mazkur formula o‘lchamsiz ko‘paytiruvchilargacha bo‘lgan aniqlikdagi mayatnikning tebranish tenglamasidan olingan yechimga mos keladi (uning davri m ga bog‘liq bo‘lmasligi aniqlanadi).

Obyektni tavsiflovchi o‘lchamsiz parametrlar o‘lchov birliklarni variatsiyalashda o‘zgarmaydi va shu bois P teoremada qatnashmaydi.

O‘lchovsizlantirish (masshtablash) prosedurasi matematik modellarni o‘rganishda har doim foydali, shu bois obyekt haqida dastlabki zaruriy ma’lumotni berish mumkin. Masalan, masalani masshtablash natijasida ma’lum bo‘ldiki, uning yechimi to‘rtta emas, faqat bitta parametr yordamida aniqlanadi.

P teorema yordamida $\Pi_1,...,\Pi_{n-k}$ o‘lchovsiz kattaliklarini olamiz. O‘zining masshtabi bo‘yicha har xil, lekin kelib chiqish mohiyati bo‘yicha bir xil va jarayonlar berilgan $\Pi_1,...,\Pi_{n-k}$ parametrlar majmuasi bo‘yicha o‘zlarini bir xil sifatli bo‘lishi ma’nosida ularni o‘xshashlik parametrlari (kriteriyasi) deb atash mumkin.

O‘lchov birliklar tizimiga nisbatan modellarning invariantligi ularning simmetriyasining ko‘proq umumiy xususiyatlarining xususiy holati. Xususan, eng yaxshi ishlab chiqilgan va modellar o‘xshashligidan foydalangan holda keng qo‘llaniladigan yondashuv differensial tenglamalarni tadqiqot qilishda invariant guruhlash usuli deb atalmish usulga asoslangan.

Haqiqatan ham, ko‘pgina hodisalarning matematik modelining tarkibiy qismini ifodalovchi ko‘pchilik differensial tenglamalar bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilar va dastlabki funksiyalar kiruvchi bir qancha almashtirishlarda o‘zgarmas (invariant) bo‘lib qoladi.

Masalan, issiqlik o‘tkazgich tenglamasi quyidagicha bo‘lsin:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = div(\chi \cdot gradT). \qquad (8.33)$$

$t^{'} = t + t_0$ vaqt siljishida invariant bo‘ladi, agar *s* va χ funksiyalar $\vec{r}$ ga va $\vec{r}^{\,'} = \vec{r} + \vec{r}_0$ koordinata siljishiga bog‘liq bo‘lmasa. Ayrim hollarda $c = c_0, \quad \chi = \chi_0 T^{\sigma}$ bo‘ladi, ya’ni issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisientining darajali bog‘liqligida “siqish-cho‘zish” almashtirishlari haroratga $t^{'} = \alpha t, \quad \vec{r}^{\,'} = \beta\vec{r}, \quad T^{'} = \gamma T$ (α, β, γ sonlari qanaqadir aloqada bog‘langan bo‘lishi kerak) bo‘lganda o‘zining ko‘rinishini o‘zgartirmaydi. Ko‘rish osonki, ya’ni ideal politron gaz uchun gazli dinamikaning massa koordinatalarida yozilgan quyidagi bir o‘lchovli tenglamasi analogik xususiyatlarga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial m}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(p\rho^{-\delta}) = 0. \qquad (8.34)$$

Bu yoki boshqa ko‘rinishdagi invariantlik ko‘pchilik qurilgan modellarning borligini bilish qiyin emas.

Yuqorida ko‘rsatilgan fikrlashlar ko‘rsatadiki, matematik modelni o‘lchamlilik shartiga ko‘ra qarama qarshi emaslik talabi bo‘yicha tekshirish va o‘lchamligini tahlil qilish muhim ahamiyatga ega. Bularning barchasi o‘zgaruvchilar sonini minimumga keltirishga imkon beradi va modellarni tuzishda qo‘pol xatolarga yo‘l qo‘ymaydi.

Tenglamalarni P-teoremaga o‘lchamsiz shaklda yozish maqsadga muvofiq. Bu esa o‘z navbatida modelni tekshirishni osonlashtiradi va uning natijasi universalligini ta’minlaydi. Shu bilan birga masalani yechish bog‘liq bo‘lgan o‘lchamsiz kattaliklar va parametrlarni aniqlashtirib olishga yordam beradi.

Yana shuni ta’kidlash mumkinki, matematik modellarni o‘lchamliligini va qarama qarshiligini (adekvatlik) tahlil qilishdan tashqari ularni guruhli almashtirishlarga nisbatan jarayonlarni umumiy simmetrik xossasi va invariantlikka nisbatan ham tekshirish lozim.

Matematik modelning o‘lchamliligi, adekvatliligi va invariantlik qonunlariga bo‘ysunishi tekshirib bo‘lingandan so‘ng uni yechishga o‘tish mumkin. Shuning uchun modelni realizatsiya qilishdagi usullarini tanlash to‘g‘risida fikr yuritamiz.

Model shakllantirib bo‘lingandan so‘ng uning aniq yechimini topishga harakat qilib ko‘rish lozim. Bu holda aniq yechish imkoni bo‘lishi bo‘lmasligi ham mumkin.

Bu yerda aniq yechim tushunchasi har xil tushuniladi. Ba’zida, agar masala kvadraturalarga keltirilmagan bo‘lsa, uning aniq yechimi deb qabul qilinadi. Integrallar xos bo‘lishi, ularni umuman aniq integrallab bo‘lmasligi mumkin. Bu holda, albatta, integrallarning qiymati taqribiy ravishda sonli usullar yordamida hisoblanadi. Nima uchun agar masala oddiy differensial tenglamalar tizimiga keltirish bo‘lsa, uning aniq yechimi bor, deyiladi? Chunki oddiy differensial tenglamalarni sifat jihatdan tahlil qilish mumkin. Ikkinchidan, Koshi masalasini yechish uchun ko‘plab dasturiy komplekslar mavjud va ular hozirgi zamon kompyuterlarining amaliy dasturiy ta’minotini tashkil etadi.

Yana bir muhim narsa ustida to‘xtalib o‘tish foydali. Matematik modelni realizatsiya qilish usulini tanlashda uning geometrik konfiguratsiyasiga, masala o‘lchamiga, chiziqli va chiziqsizligini ta’minlovchi universal usullarini tanlash lozim. Hozirda universal usullarga to‘r usuli, variatsion usullar, chekli elementlar usuli kabi va h.k. usullar kiradi. Har bir qo‘llanilayotgan mazkur taqribiy usullarning kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Bu kamchilik va ustunliklarning yaqinlashish tezligi kompyuterning tezkor xotiralariga va h.k. larga bog‘liq. Albatta, masalani yechish algoritmlarini tanlashda ushbu omillarni hisobga olish lozim.

8.3. Obyekt va model adekvatligi

Izomorfizm va gomomorfizm. Obyektni tadqiq qilishda modelni tadqiq qilish va kiritilish natijalarini obyektga o‘tkazishning zaruriy sharti - bu model bilan obyektning adekvatligi talabidir. Adekvatlik mazkur tadqiqot maqsadlari uchun muhim obyektning barcha xossalarini yetarlicha to‘la bo‘lgan modellar qayta tiklashdan iborat. Ta’kidlash joizki, hech qachon barcha parametrlar bo‘yicha originalga mos keluvchi absolyut adekvatlik to‘g‘risida gapirish mumkin emas. Demak, o‘xshashlik darajasini baholash faqat originaldan farq bahosiga tayangan holatda bo‘lishi mumkin. Farqlanish bahosi tabiiy ravishda katta qiyinchiliklar bilan birlashgan, chunki, odatda uning barcha haqiqiy yaxlitligi bilan obyektni solishtirish uchun qo‘llash imkoniyati yo‘q.

Adekvatlik tushunchasi juda ham keng bo‘lib, izomorfizm va gomomorfizm tushunchasi bo‘lgan qat’iy matematik munosabatlarga asoslangan. Umumiy holda model bilan tadqiq etiladigan obyektli izomorfligini ta’minlash nafaqat qiyin bajariladigan ish, balki ortiqcha hol. Chunki modelning murakkabligi shunchalik qiyin bo‘lishi mumkinki, bunda echilayotgan masalani soddalashtirishga hech qanday imkoniyat bo‘lmasligi mumkin. Gomomorfizm izomorfizm kabi modeldagi tadqiqot obyektining barcha xossalari va munosabatlari saqlanishini ko‘zda tutadi. Lekin bu yerda o‘zaro bir qiymatlilik mosligi talabi modelni obyektga bir qiymatli moslik talabi bilan almashtiriladi va bunda model bilan obyektning modelga mosligi bir qiymatli emas.

Izomorf model nazariy jihatda obyektga original xos bo‘lgan barcha xususiyatlarni o‘z ichiga oladi. Izomorf modelni qurishga intilish bu o‘zaro bir qiymatli moslikni o‘rnatadigan almashtirishni topishdan iborat.

Misol. Faraz qilaylik, $S(S_1)$ va $S(S_2)$ tizimlar ikkilik differensial tenglamalar bilan aniqlangan bo‘lsin:

$$S(S_1)=\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=x+y\\ \dfrac{dy}{dx}=x-y\end{cases}, \qquad (8.35)$$

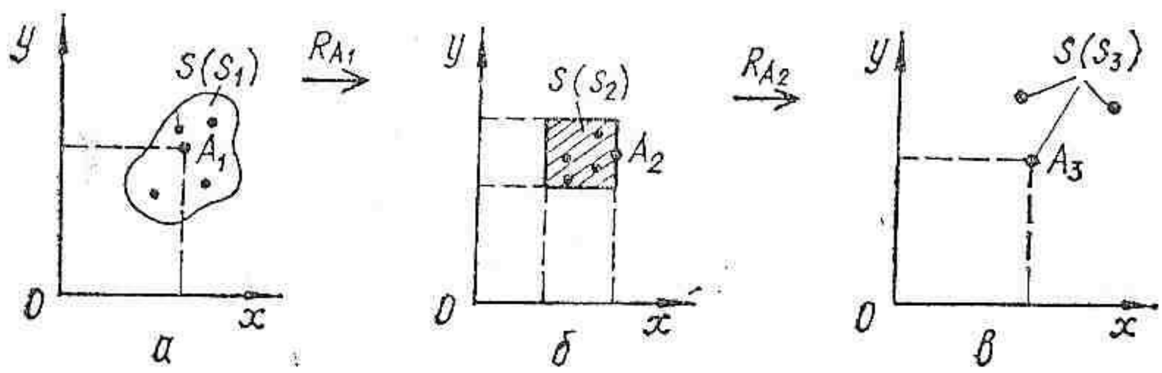
$$S(S_2)=\begin{cases}\dfrac{du}{dx}=-u+v\\ \dfrac{dv}{dx}=-x+v\end{cases}. \qquad (8.36)$$

Bir tizimdan ikkinchisiga o‘tkazishning shunday qoidasini ko‘rsatish kerakki, bunda tizimlar izomorf bo‘lsin. Boshqacha aytganda (8.35) va (8.36) tizimlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslikni o‘rnatadigan shunday R almashtirishni topish zarur.

Ravshanki, bunday almashtirishlar

$$R:\begin{cases}u\Rightarrow y\\ v\Rightarrow x\end{cases}$$

bo‘ladi. Bu almashtirishlar bitta tizimni ikkinchisiga izomorfizm aniqligida almashtiradi.



8.2-rasm

Gomomorfizm ikkita o‘xshash obyektlar orasidagi shunday aloqa shaklini aniqlaydiki, bunda faqat bir tomonli almashtirish yo‘li bilan dastlabki obyektni soddaroq bo‘lgan tizimga keltirishga imkon beradi va u dastlabki obyektga gomomorf bo‘ladi. Bu dastlabki tizimning gomomorf nusxasi deyiladi. 8.2-rasmda ushbu tushunchani grafik illyustratsiyasi keltirilgan. Bu yerda $S(S_1)$ - tekislikdagi nuqtalar tizimi (sohasi) (8.2a-rasm), $S(S_2)$ - to‘g‘ri to‘rtburchaklar (8.2b-rasm), $S(S_3)$ - alohida nuqtalar (8.2v-rasm). R_{A_1} almashtirish $S(S_1)$ tizimdagi A_1 nuqta bilan $S(S_2)$ tizimdagi berilgan to‘g‘ri to‘rtburchakdagi A_2 nuqta bilan moslikni o‘rnatadi. Bu yerda $S(S_2)$ tizim $S(S_1)$ dagi nuqtalarga mos keluvchi nuqtalar to‘plamidan tashkil topgan. $S(S_2)$ da to‘g‘ri to‘rtburchakka mos keluvchi A_3 nuqtani R_{A_2} almashtirish yordamida hosil qilamiz. Shunday qilib, $S(S_3)$ tizim $S(S_1)$ tizimning soddalashtirilgan gomomorf nusxasi. $S(S_3)$ tizimdagi har bir nuqta $S(S_1)$ tizimdagi nuqtalar to‘plamiga mos keladi. Ya’ni $S(S_3)$ nuqta $S(S_1)$ ga nisbatan kattaroq ”vazn”ga ega bo‘ladi. $S(S_3)$ dan $S(S_1)$ ga o‘tkazuvchi teskari R^1 almashtirish mumkin emas. Shuning uchun ham $S(S_3)$ tizim $S(S_1)$ tizimga gomomorf aniqlikkacha aniqlik bilan o‘xshash.

8.4. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar va uzilishlardagi shartlar. Optimum chegaralari va shartlari

1.Masalaning qo‘yilishi uchun tadqiqot sohasini berib qo‘yish, koordinata sistemasini hamda vaqt hisobining boshini tanlash, chegaraviy va boshlang‘ich shartlarni berib qo‘yish kerak. Vaqt hisobining boshida ko‘chish, tezliklar, temperatura va zichlikning qiymatlari belgilab qo‘yiladi. Qattiq jismlarda qoldiqli deformatsiya, kuchlanish kattaliklari va anizotropiya darajasi belgilab qo‘yiladi.
Chegaraviy shartlar quyidagicha tanlanadi:

1ko‘chish:

siqilish: $\vec{u} = 0$;

2) tezlik:

yopishish: $\vec{v}_{среды} = \vec{v}_{гр}$,

qamrab olish: $v_{пссред} = v_{пгг}$;

3) kuchlanish:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_{nn} + \vec{p}_{n\tau} = \vec{f}(M,t);$$

4) quvvat:

$$\vec{N} = \vec{\varphi}(M,t), \quad \vec{M} = \vec{\phi}(M,t).$$

Tutash muhit mexanikasi (TTM) ning bo‘limlarida, masalan, filtratsiya nazariyasida chegaraviy shartlar bosimga nisbatan yozib olinadi. Shunday qilib, agar chegaralar o‘tkazmas bo‘lib, tashqi sirt bilan almashinuv bo‘lmasa, u holda

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Omega} = 0$$

(n – tashqi normal; Ω - D filtratsiya sohasining chegarasi). O‘tkazuvchan chegara holida vaqt o‘tishi bilan bosimning sirtdagi o‘zgarishi berib quyiladi, ya’ni

$$\left. p(x_1, x_2, x_3, t)\right|_{\Omega} = g(\Omega, t).$$

Oxirgi formulada g=0 bo‘lib qolsa, o‘tkazmas chegara sharti kelib chiqadi.

Qatlam yuzasi bilan atrof muhit o‘rtasidagi konvektiv massa almashinish qonuni

$$\left.\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n}+dp\right)\right|_{\Gamma}=\psi(\Gamma,t)$$

ko‘rinishda yozib olinadi.

Masalalarni ko‘rib chiqishda, boshlang‘ich va chetki shartlardan tashqari, quvurlar ishining texnologik rejimini xarakterlovchi ichki manbalardagi (stoklardagi) shartlarni berib qo‘yish kerak. Quvurlarda qo‘yiladigan shartlar har xil: to‘planib qolgan bosimlarning doimiy qiymatlari, quvurlarning debiti, bosimlarning domiy gradienti, stvoldagi harakat tezligi va h.k.

Eng xarakterlisi berilgan debit rejimidir:

$$q_i(t)=\int\limits_{h_0}^{h}\oint\limits_{t_i}\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n}d\sigma dx_3$$

($q_i(t)$-i-quvurning debiti; $h=h_1-h_0$ qatlamning quvvati). Berilgan shartga quvurlarni ishga tushirishning boshqa texnologik rejimlari ham keltirilishi mumkin.

Harakat jarayonida tizimda kuchli va sust uzilishlar, ya’ni sathning ko‘chish, tezlik va ularning hosilalari uzilishga duch keladigan chiziqlari vujudga kelishi mumkin. Uzilishlardagi shartlar chegaraviy o‘tish natijasida saqlanish qonunlarining integral shaklidan keltirib chiqariladi. Agar uzilish sirti Ω

$$f(x,y,z,t)=0$$

funksiya bilan ifodalansa, u holda bu sath bo‘yicha harakat tezligi

$$\vec{D}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}|gradf|\vec{n}\right)$$

formula bo‘yicha aniqlanadi, bu yerda $\vec{n}$ - Ω sathga o‘tkazilgan normaldir.

Endilikda uzilish sathidagi chegaraviy shartlarni yozib olamiz:

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1(D-v_{n1})=\rho_2(D-v_{n2})\\&R+p_{n1}+\rho_1v_1(D-v_{n1})=p_{n2}+\rho_2v_2(D-v_{n2})\\&W+p_{n1}v_1-q_{n1}+\rho_1(D-v_{n1})\left(\frac{v_1^2}{2}+U_1\right)=p_{n2}v_2-q_{n2}+\rho_2(D-v_{n2})\left(\frac{v_2^2}{2}+U_2\right)\\&\rho_1(v_{n1}-D)(S_1-S_2)=\Psi\end{aligned}\right\}$$

($\vec{R},W,\Psi$ -S tashqi kuchga, energiya tushuviga va mos ravishda entropiyaga taqsimlanuvchi sirtiy zichliklar). Bu munosabatlar massa, impuls, energiya va entropiya balansi tenglamalaridan keltirib chiqarilgan.

2. TTM ning muqobil masalalari

$$f_i(x)\le 0,\quad i\in J^-,$$

$$f_i(x) = 0, \quad i \in J^0$$

cheklanishli F(x) maqsad funksiyasi ekstremumga erishadigan $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ muqobillashtiruvchi o‘zgaruvchilarning qiymatini aniqlovchi matematik dasturlashtirish masalalariga keltiriladi. Agar F(x) ekstremumi minimum bo‘lsa, u holda

$$\left.\begin{aligned} F_{\min} &= F(x^*) \leq F(x) \\ f_i(x^*) &\leq 0, \quad i \in J^- \\ f_i(x^*) &= 0, \quad i \in J^0 \end{aligned}\right\}$$

F(x) va $f_i(x)$ ko‘rinishiga qarab, bu masalani yechish uchun chiziqli va nochiziqli dasturlashtirish (kvadratik, qavariq, diskret, dinamik) hamda tasodifiy qidirish usullari ko‘llaniladi.

Chegaraviy tizimlarni sanab o‘tamiz:

1. Mustahkamlik:

$$I_\sigma \leq [\sigma]$$

($[\sigma]$ - mavjud kuchlanish; I_σ - invariant).

2. Mustahkamlik:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{kr}$$

(σ_{kr} - kritik kuchlanish).

3. Qattiqlik:

$$\vec{u}_\xi \leq \left|\overrightarrow{u_\xi}\right|$$

($\left|\overrightarrow{u_\xi}\right|$ -berilgan nuqtalarning ko‘chishlari).

4. Tezlik:

$$\vec{v}_{\max} \leq \left|\vec{v}\right|$$

($\left|\vec{v}\right|$ - ruxsat berilgan tezlik).

5. Rezonans:

$$\omega_C \neq \omega_B$$

(ω_C va ω_B - tizimning xususiy va majburiy tebranishlar chastotasi).

Temperatura:

$$T \leq [T_i]$$

($[T_i]$ -ruxsat berilgan temperatura).

Aniq tuzilishlarni o‘rganganda shuningdek tarkibiy va texnologik cheklanishlar hisobga olinadi.

Maqsad funksiyasi sifatida:

obyekt og‘irligi $G \to \min$;

hajm $V \to \min$;

narx $C \to \min$

lar olinadi.

8.4.1. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar

Muhit nuqtalarida turli vaqt momentidagi temperatura taqsimoti xususiy hosilali tenglamalardan (issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalri) aniqlanadi. Temperatura maydoni T(x,y,z,t) ni so‘zsiz aniqlash uchun issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasidan tashqari qo‘shimcha (xulosalovchi) munosabatlarni shakllantirish kerak, chunki xususiy hosilali tenglamaning yechimi ixtiyoriy funksiyagacha bo‘lgan aniqlikda topiladi. Bunday ixtiyoriylikni bartaraf etish uchun qo‘shimcha munosabatlar kiritiladi: ayrim nuqtalarda yechimning o‘zi, ayrim yo‘nalishlarda yechimdan olingan hosilalar ma’lum bo‘ladi.

Temperatura maydoni fazoning ma’lum bir sohasida hisoblanadi. Soddalik maqsadida doimiy hisoblash sohasi Ω bilan cheklanib qolamiz, aynan unda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining yechimi qidiriladi.

Aniqlik maqsadida, t=0 vaqt momentidan boshlab, ma’lum bir $t = t_{\max} > 0$ vaqt momentigacha bo‘lgan issiqlik uzatish jarayoni o‘rganilmoqda deb faraz qilamiz. Shuning uchun issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi $Q = \{(x, y, z, t) |\ (x, y, z) \in \Omega,\quad 0 < t < t_{\max}\}$ tsilindrda, ya’ni

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = div(kgradT) + f, \qquad (x, y, z, t) \in Q \tag{8.37}$$

da qidiriladi.

Bu tenglamada ham fazo bo‘yicha, ham vaqt bo‘yicha olingan xususiy hosilalar ishtirok etadi. Shuning uchun qo‘shimcha munosabatlar Ω fazoviy sohaning nuqtalar to‘plamida va $(0, t_{\max})$ vaqt oralig‘ida, Q tsilindrning ayrim nuqtalari to‘plamida berilishi kerak.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik uchun odatda chegaraviy masalalar qo‘yiladi. Bizning holimizda qo‘shimcha munosabtlar Q chegarasida qo‘yiladi va chegaraviy shartlar deb nomlanadi. Q tsilindrning yon sathidagi shartlar boshlang‘ich shartlarning qo‘yilishiga to‘g‘ri keladi.

Yanada murakkabroq shartlarni qo‘yish ham mumkin. Masalan, t=0 dagi boshlang‘ich shartlarning o‘rniga Q silindrning boshqa bir kesimida, masalan ma’lum bir $t = t^*$ dagi qo‘shimcha shartlar berilishi mumkin. Boshqa so‘z bilan aytganda, qo‘shimcha shartlar berilgan nuqtalar to‘plami Q ichida ham yotishi mumkin. Ushbu yo‘nalishdagi ayrim imkoniyatlar issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalari uchun asosiy masala turlarini ajratib ko‘rsatganda muhokama etiladi.

Odatda, temperatura maydoni boshlang‘ich vaqt momentida, ya’ni

$$T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \Omega \tag{8.38}$$

da berilgan deb olinadi. Yuqori jadallikka ega bo‘lgan temperatura jarayonlarini issiqlik o‘tkazuvchanlikning giperbolik tenglamalari asosida ko‘rib chiqayotganda vaqt bo‘yicha ikkita shart qo‘yish kerak. Bu (8.38) shartdan tashqari:

$$\frac{\partial}{\partial e}T(x,y,z,t)=v(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in\Omega, \qquad t=0 \ . \tag{8.39}$$

Shartni qo‘yishga imkon yaratadi.

(8.38) turdagi shartning qo‘yilishi amaliy modellashtirishda belgilangan vaqt momentida temperaturani to‘g‘ridan- to‘g‘ri o‘lchashni talab etadi. Bunday o‘lchovlarni har doim ham o‘tkazib bo‘lmaydi. Shuning uchun boshqa yondashuvlar ham ishlatilishi mumkin. Masalan, (8.37) tenglama uchun chekli vaqt momentidagi shartlar, ya’ni (8.38) shartning o‘rniga

$$T(x,y,z,t_{\max})=T^{m}(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in\Omega \tag{8.40}$$

shart ishlatilishi mumkin. Bunday holatda (8.40) shartga ko‘ra, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi asosida $t<t_{\max}$ oldingi vaqt momentidagi temperatura maydonini tiklash kerak. Shunday qilib, biz issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun retrospektiv masalani hosil qilib olamiz.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chegaraviy shartlari ichidan asosiy chegaraviy shartlar sifatida birinchi, ikkinchi va uchinchi turlari ajratiladi. Eng oson vaziyat temperatura maydonining $\partial\Omega$ chegarada (birinchi tur chegaraviy shartlari) berilishi bilan xarakterlanadi:

$$T(x,y,z,t)=g(x,y,x,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma \, . \tag{8.41}$$

Bu yerda G $-\Omega$ ning yon sirti: $\Gamma=\{(x,y,z,t)|\ (x,y,z)\in\partial\Omega,\, 0<t<t_{\max}\}$. (8.41) birinchi tur shartlari, shuningdek, Dirixle shartlari deb nomlanadi.

Ikkinchi tur chegaraviy shartlari (Neyman shartlari) chegarada issiqlik oqimining berilishiga mos keladi. Izotrop muhitdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi (8.37) uning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$k\frac{\partial T}{\partial n}=q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma \, . \tag{8.42}$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ orqali Ω sathga nisbatan $\partial\Omega$ satrga o‘tkazilgan tashqi normal belgilangan.

Anizotrop muhitlarda issiqlik o‘tkazuvchanlikning ikkinchi tur chegaraviy shartlarining qo‘yilishi qiyin masaladir. $\cos(n,x), \ \cos(n,y), \ \cos(n,z)$ - tashqi normalning yo‘naltiruvchi kosinuslari bo‘lsin. Oqim

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cos(n, x) +$$
$$+ \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yzz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cos(n, y) + \tag{8.43}$$
$$+ \left(k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cos(n, z)$$

ifoda bilan aniqlanib, u normal bo‘yicha differensiallashga mos keladi. Ikkinchi tur chegaraviy sharti

$$\frac{\partial T}{\partial v} = q(x, y, z, t), \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma \tag{8.44}$$

ko‘rinishida yozib olinib, (8.42) shartni anizotrop muhit holi uchun umumlashtiradi ($\frac{\partial}{\partial v} = k \frac{\partial}{\partial n}$ deb olgan holda).

Uchinchi tur chegaraviy sharti qattiq jism sirti bilan T_c temperaturali atrof muhit o‘rtasidagi konvektiv issiqlik almashinuvini modellashtiradi. Odatda issiqlik oqimi sirt bilan atrof muhit temperaturalarining ayirmasiga proportsional deb olinadi, shuning uchun izotrop muhit uchun

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - T_c) = 0, \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma \tag{8.45}$$

ga ega bo‘lamiz, bu yerda α - issiqlik almashinuvi koeffisienti. Anizotrop muhit holida ham mos shart shu kabi sharhlanadi.

Uchinchi tur chegaraviy shartlari yuqorida keltirilganlarga nisbatan umumiyroq deb olinadi. Bu shartlarni

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - g) = q, \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma \tag{8.46}$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin.

U holda (8.37) $\alpha \to 0$ da biz (8.42) ikkinchi tur shartiga va aksincha, $\alpha \to \infty$ da (8.41) birinchi tur shartiga ega bo‘lamiz.

8.4.2. Biriktirish sharti

Har xil issiqlik- fizik tavsifli ikkita muhitning aloqa chegarasidagi shartlar- biriktirish shartlar alohida e’tiborga sazovordir. Avvalo, issiqlik o‘tkavchanlik tenglamasi uchun qaysi biriktirish shartlari tabiiy va ularni sharhlash shart emasligini aniqlashtirib olamiz. Bunda aloqa shartlari muhit chegarasidan o‘tganda issiqlik-fizik tavsiflar orasidagi uzilishlar bilan ta’minlanadi.

Ikkita bir jinsli muhitning aloqasi x=0 tekislik bo‘ylab o‘tadi deb faraz qilamiz. x>0 qism fazoni egalovchi muhitga taalluqli issiqlik-fizik tavsiflarni plyus bilan belgilaymiz, ikkinchi muhit (x <0) uchun minusli belgilashlardan foydalanamiz. Issiqlik o‘tkazuvchanlikning

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+f \qquad (8.47)$$

ko‘rinishidagi tenglamasini ko‘ramiz. Tenglamaning koeffisientlari x=0 da uziladi:

$$c,\rho,k,f=\begin{cases}c^{+},\rho^{+},k^{+},f^{+}, & x>0\\ c^{-},\rho^{-},k^{-},f^{-}, & x<0.\end{cases} \qquad (8.48)$$

(8.47) tenglama koeffisientlarning ushbu uzilishni hisobga olgan holda tenglamaning yechimi (T temperatura) uzluksiz, uning birinchi tartibli hosilalari esa uzilishga ega deb olish maqsadga muvofiq. Shuning uchun bitta muhitdan ikkinchisiga o‘tayotganda temperaturaning uzluksizlik shartini

$$[T]=0, \qquad x=0 \qquad (8.49)$$

ko‘rinishda yozib olamiz, bu yerda [3] orqali aloqa chegarasidan o‘tayotganda sodir bo‘lgan sakrash belgilangan. Ko‘rilayotgan holda $[T]=T(x+0,y,z)-T(x-0,y,z)$. Temperaturaning birinchi hosilalari uchun biriktirish shartlarini bayon etish qoldi, xolos.

Uzulishga ega bo‘lgan (8.48) koeffisientli (8.47) issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun tabiiy biriktirish shartlarini hosil qilish uchun quyidagi yo‘ldan borish mumkin. Aloqa chegarasida chegaralangan δS sohani ajratamiz va boshlang‘ich (8.47) tenglamani 2ε kenglikdagi soha bo‘yicha integrallaymiz: $\Omega_{\varepsilon}=\{(x,y,z)|\ -\varepsilon<x<\varepsilon,\ \ (y,z)\in\delta\}$. Temperaturaning uzluksizligini ((8.49) shartni), $\varepsilon\to 0$ da uzilishlarning chekli ekanligini hisobga olgan holda:

$$\int_{\delta S}\left(k^{+}\frac{\partial T}{\partial x}-k^{-}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dydz=0$$

ga ega bo‘lamiz. δS elementning ihtiyoriyligi hisobiga biriktirish shartining quyidagi ko‘rinishiga ega bo‘lamiz:

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]=0, \qquad x=0. \qquad (8.50)$$

(8.50) biriktirish sharti issiqlik oqimining uzluksizligini akslantiradi.

Biriktirishning tabiiy shartlari (8.49), (8.50) kabi ikkita muhit birikuvining ixtiyoriy egri chiziqli chegarasida S $-\Omega$ sohaning ichki chegarasida yozib olinadi. Ular temperatura va issiqlik oqimining uzluksizligini ta’minlab:

$$[T]=0, \qquad (x,y,z)\in S, \qquad (8.51)$$

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial n}\right]=0, \qquad (x,y,z)\in S \qquad (8.52)$$

ko‘rinishda yozib olinadi. (8.51), (8.52) biriktirish shartlari ideal aloqaning shartlaridir. (8.51), (8.52) (8.48) uzilishli koeffisientga ega bo‘lgan (8.47) tenglama uchun tabiiy ekanligini yana bir bora qayd etamiz, ular tenglamaning o‘ziga kiritilgan bo‘lib, ularni har doim alohida sharhlashga ehtiyoj yo‘q.

Anizotrop muhit holida (8.52) o‘rniga issiqlik oqimining uzluksizlik sharti

$$\left[\frac{\partial T}{\partial v}\right] = 0, \qquad (x, y, z) \in S \tag{8.53}$$

ko‘rinishida ishlatilib, unda (8.43) dagi belgilashlar qo‘llanilgan.

Agar ikkita muhitning chegarasida ideal aloqa sharti (temperatura va issiqlik oqimining uzluksizligi) bajarilmasa, alohida muhitda yozib olingan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini to‘ldiruvchi biriktirish shartlarini shakllantirish zarur. Bu biriktirishlar aloqa chegarasidagi issiqlik jarayonlarining xususiyatlarini akslantirib, har doim ham issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining o‘ziga kiritilavermaydi.

Aloqa chegarasida q_S quvvatli sirtiy issiqlik manbai bo‘lsin. U holda temperaturaning uzluksizligi to‘g‘risidagi faraz o‘rinli bo‘ladi, ya’ni (8.51) shart bajariladi, lekin issiqlik oqimi uzilishga uchraydi. (8.52) biriktirishning bir jinsli sharti o‘rniga quyidagi ko‘rinishdagi bir jinsli bo‘lmagan shartni yozib olish kerak:

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial n}\right] = q_S, \qquad (x, y, z) \in S\,. \tag{8.54}$$

(8.51) biriktirish shartlari aloqa chegarasi S ni ajratmasdan, butun hisoblash sohasi uchun yozib olinadigan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining o‘ziga kiritilishi mumkin. Issiqlikning sirtiy manbai (8.47) tenglamadagi qo‘shimcha qo‘shiluvchi bilan hisobga olinadi:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \delta_S q_S + f\,. \tag{8.55}$$

(8.55) tenglamada δ_S sirtiy δ-funksiya bo‘lib, u ixtiyoriy P(x,y,z) funksiya uchun:

$$\int_{\Omega} \delta_S P(x, y, z)dxdydz = \int_{S} P(x, y, z)ds$$

shart bajariladigan qilib tanlanadi. Hisoblash issiqlik fizikasida biriktirish shartlarining boshqa turlari ham ajratiladi. Misol tariqasida, temperatura uzluksiz bo‘lgan va issiqlik oqimining uzilishi

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial n}\right] = c_S\rho\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (x, y, z) \in S\,, \tag{8.56}$$

(bu yerda: c_S-aloqaning jamlangan sig‘imi) ga teng bo‘lgan jamlangan issiqlik sig‘imi turidagi shartni ajratib ko‘rsatamiz. (8.51), (8.56) biriktirish shartlari δ-sirtiy funksiyadan foydalanish natijasida (8.55) tenglama singari issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga kiritiladi.

Amaliy tadqiqotlarda ideal aloqa shartlari alohida e’tiborga sazovordir. Bunday holat g‘adir-budur qatiq jismlarining zich bo‘lmagan ta’sirida amalga oshadi. Noideal aloqada issiqlik oqimi uzluksiz, bu esa energiyaning saqlanish qonunini aks etadi. Shunday qilib, biz biriktirishning bitta shartiga - (8.52) shartga ega bo‘ldik. Noideal aloqa chegarasidan o‘tayotganda temperatura issiqlik oqimiga proportsional bo‘lgan uzilishga uchraydi:

$$[T] = \frac{1}{\alpha} k \frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (x, y, z) \in S \ , \tag{8.57}$$

bu yerda aloqaviy issiqlik almashinuvi koeffisienti α aloqa shartlari bilan bog‘liq.

8.4.3. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalariga to‘g‘ri va teskari masalalar

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun asosiy masala sinflarini ajratamiz. Avvalo biz boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning berilishi bilan xarakterlanadigan chegaraviy masalalarni ko‘rib chiqamiz. Masalan, (8.37) issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun tenglama (8.38) boshlang‘ich shart va (8.41) birinchi turdagi chegaraviy shart bilan to‘ldiriladigan birinchi chegaraviy masala qo‘yilishi mumkin. Shu kabi ikkinchi chegaraviy masala- (8.45) shart ko‘yiladi.

Tadqiqotning mustaqil obyekti sifatida $\partial\Omega_1$ chegaraning bir qismida bir turdagi shart, qolgan $\partial\Omega_2 \left(\partial\Omega_2 = \frac{\partial\Omega}{\partial\Omega_1} \right)$ qismida esa- boshqa shart qo‘yilgan holni tanlashimiz mumkin. Masalan (1) tenglama uchun chegaraviy shartlar:

$$T(x, y, z, t) = g(x, y, z, t), \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma_1,$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q(x, y, z, t), \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma_2$$

ko‘rinishda bo‘lishi mumkin, bu yerda $\Gamma_\alpha = \{x, y, z, t) | (x, y, z) \in \partial\Omega_\alpha, \ 0 < t < t_{\max}\}, \quad \alpha = 1,2$. Shunga ko‘ra aralash chegaraviy shartlarga, aralash chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz.

Qayd etilgan chegaraviy masalalar sinfi qo‘shimcha shartlarning $\partial\Omega$ chegarada (chegaraviy G sirtda) berilishi bilan xarakterlanadi va t=0 (boshlang‘ich shart) xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida yaxshi o‘rganilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalarining muhim masalalar sinfidir.

Ko‘rilayotgan chegaraviy masalalar to‘g‘ri qo‘yilganlar (Adamar bo‘yicha to‘g‘ri) sinfiga mansubdir. Xususiy hosilali tenglamalarning masalasi tug‘ri ko‘yilgan deyiladi, agar quyidagi uchta asosiy shart bajarilsa:

1) masalaning yechimi mavjud bo‘lsa;

2) bu yechim yagona bo‘lsa;

3) yechim tenglama koeffisientlari va qo‘shimcha shartlarga (chegaraviy va boshlang‘ich shartlarga) uzluksiz bog‘liq bo‘lsa.

Agar ushbu shartlarning aqalli bittasi buzilsa, masala noto‘g‘ri qo‘yilgan masalalar sinfiga tegishli bo‘ladi. Ko‘pincha noto‘g‘rilik kiruvchi parametrlarning kichik chekinishlariga nisbatan yechim barqarorligining (3 shart) buzilishiga bog‘liq bo‘ladi.Chegaraviy masalalarning sababli-oqibatli aloqalar nuqtai nazaridan qaralishi chegaraviy masalarni issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalarining to‘g‘ri masalari sifatida qabul qilishga imkon beradi Teskari masalarda sababli-oqibatli aloqalarning buzilishi ko‘pincha teskari masalalarning noto‘g‘ri qo‘yilishi bilan bog‘liq bo‘ladi.

Issiqlik o‘tkazuvchanlikning teskari masalalari zaruriy berk shartlarning (chegaraviy va boshlang‘ich) to‘liq berilmagani va/yoki tenglamaning o‘zi to‘liq aniqlanmaganligi (koeffisientlar, o‘ng tomon berilmagan, hisoblash sohasi aniqlashtirilmagan) dan iborat bo‘ladi. Buning o‘rniga tenglamaning yechimi, sohasi va h.k lar tug‘risida ma’lum bir ko‘shimcha axborot ma’lum bo‘ladi. Shuni qayd etish joizki, ushbu qo‘shimcha axborot turli xil ko‘rinishlarda berilishi mumkin. Bu yo‘nalishdagi ayrim imkoniyatlar quyida ko‘rib chiqiladi.

Issiqlik o‘tkazuvchanlikning eng sodda teskari masalasiga t=0 dagi (8.38) boshlang‘ich shartlarning o‘rniga $t = t_{\max}$ vaqt momentidagi (8.40) shartlar berilgan masala (issiqlik o‘tkazuvchanlikning rertoustuvor teskari masalasi, teskari vaqtli masala) misol bo‘la oladi. Zaruriy chegaraviy shartlar berilmagan issiqli o‘tkazuvchanlik tenglamalarining teskari masalalari muhim amaliy ahamiyatga ega. Masalan, $\partial\Omega_1$chegaraning bir qismida ikkita shart berilgan , qolgan $\partial\Omega_2$ qismida berilmagan bo‘lsin,

$$T(x, y, z, t) = g(x, y, z, t), \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma_1, \tag{8.58}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = q(x, y, z, t), \qquad (x, y, z, t) \in \Gamma_1, \tag{8.59}$$

bunday vaziyat $\partial\Omega_2$ chegaraning biron bir qismida temperaturani yoki issiqlik oqimini tug‘ridan-to‘g‘ri o‘lchab bo‘lmaganda o‘rinli bo‘ladi.

8.5. Matematik modellarning universalligi

Turli xil jarayonlarning matematik modellari bir xil bo‘lishi mumkin. Albatta, mazkur matematik modellarda turli jarayonlar uchun qaralayotgan obyektga tegishli parametrlarning ma’nosi turlicha bo‘ladi. Masalan, “tirik”materiya (amyoba) va “nomateriya” qiymat (ehtimolligi zichligi) bir xil ko‘rinishdagi parabolik tipdagi tenglama bilan ifoda qilinadi. Demak, mexanik yoki fizik yoki biologik yoki iqtisodiy jarayonlar orasida analogiyalar mavjud. Biz quyida ushbu analogiyalarni [1] obyekt bo‘yicha ko‘rib chiqamiz.

1. Amyobalar to‘planishining dinamikasi. Amyoba o‘lchami o‘n mikronga (10^{-3} sm) yaqin bo‘lgan, tuproqda yashovchi va soxta oyoqchalari, ya’ni o‘z jismini ismi bilan harakat qiluvchi. Asosan amyobalar bakteriyalar bilan ozuqlanadi va ozuqalarni tuproq bilan birga yutadi (agar ozuqa etarli bo‘lsa, u holda amyobalar ikki qismga bo‘linish yo‘li bilan ko‘payadi).

Kuzatish va tajribalardan ma’lumki, bir-biriga yaqin masofada joylashgan yetarlicha ko‘p sondagi amyobalar oilasining o‘sish dinamikasi o‘ta murakkabdir. Masalan, tashqi shart-sharoitlar natijasida o‘ta katta sohadagi amyobalar bir joyga to‘planishi va yaxlit shakldagi kabi harakat qila boshlaydilar, vaholanki bu yerda har amyobaning individualligi saqlangan bo‘lsa ham. Kuzatish natijasida shu narsa aniqlanganki, bu mikroskopik “tartiblangan” harakat amyobalarning o‘zlari tomonidan ishlab chiqilgan qandaydir ximik modellarining yanada yuqori konsentratsiyasi tomon yo‘naltirilgan bo‘ladi. Amyobalarning to‘planishi dinamikasining matematik modeli quyidagi farazlarga asoslanadi:

1) amyobalar orasidagi masofa ularning to‘planish o‘lchamlariga nisbatan kichik, shuning uchun ham bu to‘plashni “tutash muhit” deb qarash mumkin. $N(x,y,x,t)$ amyobalarning birlik hajmdagi sonining konsenratsiyasi;

2) qaralayotgan jarayon bir o‘lchovli, ya’ni amyobalar konsentratsiyasi va boshqa miqdorlar x koordinata va t vaqtning funksiyasi bo‘ladi;

3) amyobalar mikroskopik harakat jarayonida tug‘ilmaydi ham, o‘lmaydilar ham, ya’ni amyobalarning ko‘payish vaqti va hayotning tasnifiga nisbatan tasnifiy harakat vaqti kichik;

4) imkon beradigan tashqi ta’sirlar (oziq-ovqat, issiqlik va h.k.) bo‘lmaganda amyobalarning individual harakati tartibsiz va xaotik

bo‘ladi. Ajratib olingan yo‘nalishlar bo‘lmagani uchun har bir amyoba tip ehtimollik bilan o‘ngga va chapga harakat qiladi;
5) agar muhitda “o‘ziga tortuvchi” kimyoviy modda bo‘lsa, o‘zlarining shaxsiy harakatlariga ushbu modda tomon ularning yo‘naltirilgan holdagi zich harakati ham qo‘shiladi.

Yuqoridagi farazlarga ko‘ra endi uning matematik modelini quramiz.
Amyobalarning soni bo‘yicha “saqlanish qonuni” asosida dx muhit elementi va dt vaqtda amyobalarning balans tenglamasini tuzamiz (3-faraz). Bu holda dx hajmda (ko‘ndalang kesim yuzasi birlik bo‘lganda) amyobalarning umumiy soni elementning chap va o‘ng chegaralari amyobalar potogi $W(x,t)$ ning farqiga ko‘ra o‘zgaradi. $W(x,t)$ miqdor odatdagi kabi tushuniladi: bu birlik vaqtda birlik sirtni kesib o‘tuvchi amyobalar soni. Izlanayotgan tenglamaning ko‘rinishi:

$$[\overline{N}(x,t+dt)-\overline{N}(x,t)]dx=[\overline{W}(x,t)-\overline{W}(x+dx,t)]dt,$$

bu yerda $\overline{N}$, $\overline{W}$ lar dx, dt kichik oraliqlardagi miqdorlarning qandaydir o‘rta qiymatlari. dx va dt larni nolga intiltirib amyobalar soni balans differensial tenglamalarga kelamiz:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{\partial w}{\partial x}.$$

$W=W_c+W_d$ miqdor ikkita tashkil etuvchilar W_c va W_d larning yig‘indisiga teng. Umumiy oqimning qismi W_c amyobalarning xaotik harakatlari natijasida va shuning uchun ham issiqlik diffuziyasi jarayoni uchun Fure qonuniga analogik qilib tenglamani amyobalarning konsentratsiyasi gradienti orqali yozish mumkin:

$$W_c=-\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

bu yerda $\mu>0$- qaralayotgan “muhitni” tasniflovchi ma’lum bir koeffisient. W_c va μ miqdor uchun issiqlikni jo‘natish hodisasi uchun qo‘llaniladigan mulohazalar bo‘yicha ham mikrodarajadagi jarayonlar to‘la-to‘kis tahlil qilgan holda ham chiqarish mumkin.

Amyobalarning yo‘naltirgan oqimini ifodalovchi W_d ni ifodalay olishi uchun “o‘ziga tortuvchi” zichlik gradienti qancha katta bo‘lsa, W_d qiymat ham shuncha katta bo‘ladi deb hisoblaymiz:

$$W_d=\eta N\frac{\partial p}{\partial x},$$

bu yerda $\eta>0$ qaror o‘zgarmas, $p(x,t)$- jism zichligi, gradient oldidagi N ko‘paytuvchi esa shuni bildiradiki, p zichlik gradienti berilgan bo‘lsa, oqim tashkil qiluvchisi W_d berilgan nuqtadagi amyobalar konsentratsiyasini proportsional bo‘ladi:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial N}{\partial x} - \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x}\right). \qquad (8.60)$$

(8.60) tenglamada 2 ta noma’lum funksiyalar N va ρ bor. Shuning uchun ham saqlanish qonunidan foydalanib, ρ miqdor uchun ham balans tenglamasini chiqarish lozim. Bu yerda ximik moddaning ajralish tezligiga amaliyotlarning konsentratsiyasi proportsional ekanini hisobga olish kerak. Shu bilan birga moddalarning bo‘linish tezligi tabiiy ravishda uning konsentratsiyasiga proprtsional deb hisoblaymiz (radiatsiyaning bo‘linish jarayoniga analogik holda). Shunday qilib birlik vaqtda, birlik hajmda:

$$f = \alpha N - \beta \rho$$

ga teng bo‘lgan modda soni paydo bo‘ladi va yo‘qotiladi. Bu yerda $\alpha > 0,\ \beta > 0$ - mos ravishda uning amyobalar bo‘linish tezligi. Elementar hajm muhitida modda zichligi o‘zgarish elementining o‘ng va chap chegaralarining ayirmasi natijasida amalga oshiriladi. Issiqlik ko‘proq qizdirilgan issiqlik o‘tkazuvchi muhit uchastkalaridan kam qizdirilgan uchastkalarga tarqalganidek, u ko‘proq konsentratsiyalangan joydan kam kontsentratsiyalangan joyga diffuziyalanadi.

Fik qonuniga ko‘ra bu harakat W_ρ quyidagicha aniqlanadi:

$$W_\rho = -D\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

bu yerda $D > 0$ - diffuziya koeffisienti (Fik qonunini chiqarish Fure qonunini chiqarishga o‘xshashdir).

Shunday qilib, moddaning balans tenglamasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial W_\rho}{\partial x} + f$$

ko‘rinishga keladi, agar W_ρ va f uchun

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha N - \beta \rho \qquad (8.61)$$

bo‘lsa, (8.60), (8.61) tenglamalar ularga kiruvchi $\mu, \eta, \alpha, \beta, D$ kiritiluvchi ma’lumotlar bilan birga qilingan farazlarga ko‘ra amyobalar to‘planishining modeli bo‘lib xizmat qiladi. Masalani bir qiymatli yechish uchun, ya’ni obyektdagi mazkur differensial tenglamalar chegaraviy va boshlang‘ich shartlarini aniqlash lozim. Bu yerda eng sodda hol bo‘lib Koshi masalasi qo‘yiladi, agar jarayon chegaralanmagan fazoda ya’ni $-\infty < x < \infty$ da qaralayotgan bo‘lsa. Bu holda $t=0$ momentida amyobalarning boshlang‘ich konsentratsiyasi. $N(x,0)=N_0(x)$ va modda zichligi $\rho(x,0)=\rho_0(x)$ larni bilish etarli.

Demak, mazkur masalaning matematik modeli quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial N}{\partial x}-\eta N_0\frac{\partial \rho}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+\alpha N-\beta\rho,$$

$$N(x,t)\big|_{t=0}=N_0(x),$$

$$\rho(x,t)\big|_{t=0}=\rho_0(x).$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

(8.60) va (8.61) tenglamalar o‘zaro bog‘langan: birinchi tenglamaga ρ va ikkinchisiga esa N kattaligi kirgan. Shu bilan birga (8.60) va (8.61) tenglamalar tizimi chiziqsiz. Chiziqsizlik (8.60) tenglamaning o‘ng tomonining qavs ichidagi $\eta N\frac{\partial\rho}{\partial x}$ hadi tufayli yuzaga keladi. Amyobalarning konsentratsiyasi N va modda zichligi ρ ga nisbatan (8.60) va (8.61) tenglamalar parabolik tipdagi tenglamalar hisoblanadi.

Agar amyobalar “o‘ziga tortuvchi” moddalarni ajratishmasa, ya’ni $\rho(x,t)\equiv 0$, u holda (8.60) tenglama issiqlik tarqalish (yoki diffuziya) tenglamasiga keladi:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}.$$

Oxirgi tenglamadan ko‘rinib turibdiki, W oqimda faqat W_c tashkil etuvchigina qolgan, ya’ni bu yerda faqat amyobalarning yo‘naltirilmagan tartibsiz harakati hisobga olingan. Agar qandaydir sababga ko‘ra amyobalar modda ajratishni to‘xtatib qo‘ysalar, u holda (8.61) tenglamada α koeffisient nolga teng bo‘ladi. Bu holda (8.61) ning ushbu momentidan boshlab quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi (bo‘linishli diffuziya):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}-\beta\rho\quad. \tag{8.62}$$

Oxirgi tenglamani sodda almashtirish orqali issiqlik tarqalish tenglamasiga keltirish mumkin (bu almashtirishni o‘quvchiga mustaqil hal qilishni topshiramiz):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(8.60) va (8.61) tenglamalarning chiziqsizliklari uchun ularning umumiy yechimini qurish mumkin emas. Shuning uchun ham amyobalarning fazoviy-vaqtli to‘planishini dinamikasi sodda masala emas. Lekin agar vaqtdan va fazodan o‘ta kichik chetlanishlari $N \equiv N_0,\ \rho \equiv \rho_0$ ni o‘rganilsa masala ancha soddalashadi, ya’ni chiziqsiz masala chiziqli masalaga keladi. Bunday yechim

$$\alpha N_0 = \beta \rho_0$$

munosabatidagina o‘rinli bo‘lib, moddaning ajralishi va bo‘linishi bir-birini tenglashtiradi (turg‘unlashtiradi).

Doimiy satrlarda (8.60) va (8.61) tizimlarni chiziqlashtirish tizimi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} - \eta N_0 \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 \overline{\rho}}{\partial x^2} + \alpha \overline{N} - \beta \overline{\rho}, \end{aligned} \tag{8.63}$$

bu yerda N va ρ - kichik ta’sir $(\overline{N} << N_0,\ \overline{\rho} << \rho_0)$. Bu tenglamaning umumiy yechimini chegaralanmagan $-\infty < x < \infty$ (bu holda chegaraviy shartlarni qanoatlantirishga hojat yo‘q) ikkita xususiy yechimning garmonik yig‘indisi ko‘rinishida qurish mumkin.

$$\overline{N} = C_1 \sin kxe^{\gamma t}, \quad \overline{\rho} = C_2 \sin kxe^{\gamma t},$$

bu yerda $k > 0$ - to‘lqinli son, C_1, C_2 - konstantalar. Xususiy yechimlar uchun quyidagi munosabatlar bajarilishi shart:

$$\begin{aligned} C_1(\gamma + \mu k^2) &= C_2 \eta N_0 k^2, \\ C_2(\gamma + \beta + Dk^2) &= C_1 \alpha, \end{aligned} \tag{8.64}$$

bu shartlar $\lambda = 2\pi / k$ garmonika uzunligi bilan uning inkrementi (yoki dekrementi) γ ni bog‘lovchi va vaqtga nisbatan o‘sish va so‘nishni tavsiflaydi. (8.64) dan C_1 va C_2 larni yo‘qotib γ ga nisbatan kvadrat tenglamani hosil qilamiz, ya’ni

$$\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \tag{8.65}$$

bu yerda $b = \beta + k^2(\mu + D),\ \ c = \mu k^2(\beta + Dk^2) - \eta\alpha N_0 k^2$. (8.65) tenglamaning ikkala ildizi ham manfiy bo‘ladi shu holda va shu holdagi qachonki $c > 0$ bo‘lsa, ya’ni

$$\mu(\beta + Dk^2) > \eta\alpha N_0. \tag{8.66}$$

(8.61) o‘rinli bo‘ladi, qachonki vaqt o‘tishi bilan k ning ixtiyoriy qiymatida ixtiyoriy uzunligidagi to‘lqinning amplitudasi ta’siri (qo‘zg‘alishi) kamayadi va doimiy yechim turg‘un bo‘ladi. (8.60) tengsizlikdan ko‘rinib turibdiki,

$$\mu\beta > \eta\alpha N_0 \quad (\text{ёки}\ \ \mu > \eta\rho_0)$$

o‘rinli, ya’ni amyobalarni yetarlicha kichik to‘planishida (g‘uj bo‘lishida) fiksirlangan masala parametrlarida. Aks holda doimiy yechim turg‘unmas bo‘lishi mumkin va amyobalar g‘ujlanish evolyutsiyasi murakkab ko‘rinishni oladi.

Ta’kidlab o‘tamizki, chiziqlashtirilgan model qaralayotgan jarayon uchun barcha holatlarni tasvirlab bermaydi, lekin masalani to‘la o‘rganish uchun undan foydali ma’lumotlarni chiqarib olish mumkin.

2. Tasodifiy markovli jarayon. Ko‘rib o‘tilgan jarayonga aynan o‘xshash bo‘lgan hol – suyuqlik molekulalari bilan tartibsiz to‘qnashuvchi kuch ta’sirida xaotik siljuvni (Broun harakati) amalga oshiruvchi suyuqlikda joylashtirilgan kichik qattiq zarracha harakat jarayoni hisoblanadi. Zarra ixtiyoriy $t \geq t_0$ vaqtda uch o‘lchovli $\Re^3$ fazoda x, y, z koordinata bilan beriladi. Quyida masalani soddalashtirish uchun bir o‘lchovli bo‘lgan holni qaraymiz, ya’ni zarraning ox o‘qi $(x \in \Re^1)$ bo‘yicha tasodifiy brounli harakati qaraladi.

Agar t vaqtda x nuqta holati bo‘yicha uning $t' > t$ vaqtda $\Re^1$ fazoning qandaydir qismida ixtiyoriy bo‘lishi ehtimolligi bilan bir qiymatli aniqlansa, tasodifiy jarayon markovli deyiladi.

Markovli jarayon x' nuqtada ehtimollik zichligi deb ataluvchi

$$p(t, x, t', x'), \qquad x \in \Re^1$$

funksiya bilan xarakterlanadi. Buni bilgan holda, zarrachani t' momentga qandaydir $E(x')$ atrofda bo‘lish ehtimolligini hisoblash mumkin:

$$p(x, t, t', E) = \int_{E(x')} p(x, t, x', t')dx' \cdot$$

Ma’lumki, p funksiya uchun me’yorlashtirish sharti:

$$\int_{\Re^1} p(t, x, t', x')dx' = 1 \qquad (8.67)$$

bajariladi, ya’ni ixtiyoriy momentda zarracha albatta $\Re^1$ fazoning qandaydir nuqtasida bo‘ladi.

Markovli jarayon uchun modelni qurishda uning kuchli uzluksiz bo‘lish farazi uchta muhim shart sifatida ishlatiladi. Zarracha kichik Δt vaqt oralig‘ida kichik ehtimol bilan sezilarli $\Delta x \geq \delta$ koordinata orttirmani oladi deb hisoblanadi. $\delta > 0$ uchun bu quyidagi ma’noni bildiradi

$$\int_{|x'-x| \geq \delta} p(t - \Delta t, x, t, x')dx' = o(\Delta t)$$

yoki bunga ekvivalent bo‘lgan yozuv

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x'-x| \geq \delta} p(t - \Delta t, x, t, x')dx' = 0\,. \qquad (8.68)$$

Bundan tashqari ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun x bo‘yicha tekis limit mavjud, deb hisoblanadi:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x'-x|<\delta} (x'-x) p(t-\Delta t, x, t, x') dx' = b > 0, \tag{8.69}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x'-x|<\delta} (x'-x)^2 p(t-\Delta t, x, t, x') dx' = 2a > 0. \tag{8.70}$$

Bu farazlarni quyidagicha interpretatsiya qilish mumkin: t momentda zarracha uchun $|x'-x| < \delta$ intervalda bo‘lish ehtimoli Δt ga proportsional va qandaydir “o‘rta” qiymatning $|x'-x|$ ning kvadratiga tabiiy ravishda teskari proportsional. Umuman olganda, a va b miqdorlar x nuqta va t momentga bog‘liq, ya’ni $a = a(x,t),\ b = b(x,t)$. Lekin bu yerda soddalik uchun a va b lar o‘zgarmas bo‘lgan hol qaraladi.

Shunday qilib, quyida yana bir qiladigan farazimiz p funksiyani x bo‘yicha xususiy hosilalarining uzluksizligidir

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{8.71}$$

Qaralayotgan jarayonning asosiy xossasi Markov ayniyati bilan aniqlanadi:

$$p(t, x, t', x') = \int_{\Re^1} p(x, t, \bar{t}, \bar{x}) p(\bar{t}, \bar{x}, t', x') d\bar{x}, \tag{8.72}$$

bu yerda $t < \bar{t} < t'$ - t dan t' bo‘lgan oraliqdagi qandaydir vaqt momenti, x- t'momentdagi zarracha koordinatasi, $t < \bar{t} < t'$ zarrachani x nuqtadan x' nuqtaga o‘tish harakatining vaqt oralig‘i. (8.49) ning ma’nosi x nuqtadan x' nuqtaga o‘tishni qarashda ochiladi, ya’ni bu yerda 2 ta ketma-ket o‘tish – avval x nuqtadan $\bar{x}$ nuqtaga so‘ngra esa $\bar{x}$ nuqtadan x' nuqtaga o‘tiladi.

Ikkita bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalar har bir hodisalar ehtimolliklari ko‘paytmasiga teng. Shuning uchun ham (8.72) da integral ostiga mos miqdorlar ko‘paytmalari keltirilgan. Integral mumkin bo‘lgan barcha oraliq $\bar{x} \in \Re^1$ nuqtalar bo‘yicha olinadi.

Qaralayotgan tur uchun Markov ayniyati p funksiyaning t, x va t', x' nuqtalari qiymatlarini ma’lum bir tarzda bog‘lab o‘ziga xos “fundamental qonun” o‘rnini bosadi. Uning yordamida $t - \Delta t$ va t momentda p miqdorning farqini hisoblaymiz:

$$p(t-\Delta t, x, t', x') - p(t, x, t', x') =$$
$$= \int_{\Re^1} p(t-\Delta t, x, t, \bar{x}) p(t, \bar{x}, t', x') d\bar{x} - p(t, x, t', x') \int_{\Re^1} p(t-\Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}.$$

Bu tenglik chap qismining birinchi hadi uning o‘ng tomonidagi ikkinchi hadiga unga aynan teng bo‘lgan hadni me’yorlashtirish bilan teng bo‘lish sharti bo‘yicha integralga ko‘paytirilgani mos keladi. $p(t,x,t',x')$ ko‘paytma $\bar{x}$ ga bog‘liq emas va shuning uchun ham uni integral ishorasi ostidan chiqargan holda tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$p(t-\Delta t,x,t',x')-p(t,x,t',x')=$$
$$=\int_{\Re^1}[p(t,\bar{x},t',x')-p(t,x,t',x')]p(t--\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}.$$

Tenglik ikkala tomonini Δt ga bo‘lamiz va integralni $|\bar{x}-x|\geq\delta$ va $|\bar{x}-x|<\delta$ sohalar bo‘yicha ikkita integralga bo‘lamiz:

$$\frac{p(t-\Delta t,x,t',x')-p(t,x,t',x')}{\Delta t}=I_1+I_2, \qquad (8.73)$$

bu yerda

$$I_1=\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|\geq\delta}\left[p(t,\bar{x},t',x')-p(t,x,t',x')\right]p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})dx,$$

$$I_2=\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|<\delta}\left[p(t,\bar{x},t',x')-p(t,x,t',x')\right]p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})dx.$$

(8.73) kuchli uzluksizlik xossasiga ko‘ra $\Delta t\to 0$ da I_1 integral nolga intiladi.

I_2 integralda (8.71) ni hisobiga $(\bar{x}-x)$ ni darajalari bo‘yicha taxlab almashtirish o‘tkazamiz.

$$I_2=\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|<\delta}\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial x}(\bar{x}-x)p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}+$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|<\delta}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}(\bar{x}-x)^2p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}+$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|<\delta}o\left[(\bar{x}-x)^2\right]\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}.$$

Bu tenglikda Δt ni nolga intiltiramiz, bunda integral ostida turgan p ning xususiy hosilalari $\bar{x}$ ga bog‘liq emasligini hisobga olamiz. (8.69) va (8.70) ning limitlari tengligi faraziga integral ishorasi ostidagi ikkita hadni tashqariga chiqaramiz va

$$b\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial x},\quad a\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}$$

larni olamiz, uchinchi qo‘shiluvchini

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\bar{x}-x|<\delta}(\bar{x}-x)^2p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}$$

ko‘rinishda tasvirlaymiz.

Bu yerda $\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)$ $\varepsilon(\bar{x}-x)$ funksiyaning o‘rta qiymati. Ta’rifga ko‘ra $o\left[(\bar{x}-x)^2\right]$ miqdor $\delta\to 0$ da $\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)\to 0$. Oxirgi hadni $\delta\to 0$ da hisoblaymiz.

Shuning uchun ham $\Delta t \to 0$ da uning 1-hadi nolga teng. Natijada (8.35) ning chap tomoni $\Delta t \to 0$ da p funksiyasidan t bo'yicha olingan hosilasi teng. Bu natijalarni qo'shib (8.35) Kolmogorov tenglamasidan ehtimollik zichligi uchun barcha $t > 0$ va $-\infty < x < \infty$ larda o'rinli bo'lgan quyidagi differensial tenglamani olamiz.

$$\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial t} = a\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2} + b\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial x}. \qquad (8.74)$$

(8.74) tenglama chiziqli parabolik tenglama. Uning umumlashgani ham ushbu xossaga ega. Masalan, agar a va b parametrlar t va x ga bog'liq bo'lsa, u holda (8.74) quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (8.75)$$

Agar x nuqta n-o'lchovli fazoga tegishli, ya'ni $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bo'lsa, u holda p funksiya uchun (8.74) va (8.75) uchun umumlashgan quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad (8.76)$$

bu yerda $b_i(t,x)$ va $a_{ij}(t,x)$lar (8.69), (8.70) formulalar bo'yicha hisoblanadilar. Lekin $(x'-x)$ ko'paytuvchi o'rniga $(x'-x)$: miqdor, (8.69) da esa $(x'-x)^2$ o'rniga $(x'-x)_i\ (x'-x)_j,\quad ij = \overline{1,n}$ ifodalar ishlatiladi.

Eslatib o'tamizki, (8.70) formal umumlashtirish emas. Tasodifiy Markovli jarayonlar nafaqat real fizik maydonda (brounli harakat), balki fazali maydonda ham sodir bo'lishi mumkin. Ular texnik va ko'plab shunga o'xshash tizimlarda ham sodir bo'lishi mumkin. Bunda ularning holati uchdan ortiq bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ fazoli o'zgaruvchilar majmuasi bilan ifodalanadi.

Kolmogorov tenglamasining eng sodda ko'rinishi $b = 0$ da (8.74) tenglamadan kelib chiqadi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad (8.77)$$

(8.75) o'z navbatida issiqlik tarqalish (yoki diffuziya) tenglamasini ifoda etadi.

Lekin issiqlik uzatish tenglamasi bilan tasodifiy Markovli jarayon bir-biridan tubdan farqlanadi. $p(t,x)$ funksiya uchun (8.74) tenglamani chiqarishda (8.68)-(8.71) ko'rinishdagi kuchli uzluksizlik shartidan chiqarildi. Bundan kelib chiqadiki, $p(t,x)$ funksiya Kolmogorov tenglamasining ixtiyoriy yechimi bo'la olmaydi. U shuning uchun ham (8.74)-(8.77) ning fundamental yechimi bo'ladi.

$p(t,x)$ funksiyaning bu xossasini (8.77) sodda tenglama misolida tushuntirish mumkin. Faraz qilaylik, $u(t,x)$ funksiya $t > t_0$ va $-\infty < x < \infty$ da aniqlangan va:

$$u(t,x) \to u_0(x) \geq 0, \quad t \to t_0 \tag{8.78}$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi (8.77) tenglamaning yechimi.

Bunda, agar $p(t,x,t',x')$ (8.77) ni fundamental yechimi bo‘lsa, u holda $u(t,x)$ funksiya quyidagi formula bo‘yicha topiladi:

$$u(t,x) = \int_{\Re^1} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' \cdot \tag{8.79}$$

Bundan kelib chiqadiki, (8.79) ko‘rinishda beriladigan $u(t,x)$ funksiya (8.77) ning yechimi. Buni hal qilishni o‘quvchi e’tiboriga havola qilamiz (8.78) hossa (8.79) da integralni ajratishga asoslangan:

$$u(t,x) = \int_{|x'-x|<\delta} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' + \int_{|x'-x|\geq\delta} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' \cdot$$

$t = t_0$ da nuqta x koordinata esa, shuning uchun ham $|x'-x| \geq \delta$ sohada $t' \to t \to t_0$ da uni topish ehtimolligi kuchli uzluksizlikka ko‘ra nol bo‘ladi, ya’ni $t' \to t_0$ da $p(t,x,t',x') \to 0$. Shunday qilib oxirgi formuladan quyidagini olamiz:

$$\lim_{t'\to t_0} \int_{\Re^1} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' = \lim_{t'\to t_0} \int_{|x-y|<\delta} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' \cdot$$

$t' \to t_0$ va $x' \to x$ da (8.67) normallashtirish shartini ishlatib va oxirgi formulada chap limit δ ga bog‘liqmasligiga ko‘ra quyidagi ifodani olamiz:

$$\lim_{t'\to t_0} \int_{\Re^1} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' = u_0(x) \cdot$$

Bu esa (8.78) munosabatni anglatadi.

$p(t,x)$ funksiya ixtiyoriy emas, balki Kolmogorov tenglamasining fundamental yechimi ekanligi qaralayotgan modelning defekti emas. U tasodifiy Markovli jarayonning tabiiy xossasini ifodalaydi. Haqiqatan ham $t = t_0$ momentda adashuvchi nuqta qandaydir x_0 koordinataga ega bo‘ladi, shuning uchun ham $x \neq x_0$ da $p(x,t_0) \equiv 0$ bo‘ladi. Shu bilan bir qatorda $t' = t = t_0$ da (8.65) shartdan

$$\int_{\Re^1} p(x,t_0)dx = 1$$

kelib chiqadi. Ya’ni (8.62) ((8.59)-(8.61) tenglamalar ham) tenglama uchun δ-funksiya boshlang‘ich ma’lumotdir. Bunday boshlang‘ich shartlarda chiziqli parabolik tenglama uchun Koshi masalasini yechimi ularning fundamental yechimlari deyiladi. Unga umumiy (8.72)-(8.74) tenglamalar uchun ularning sodda ko‘rinishdagi fundamental yechimlarining ko‘rinishi mavjud emas. Lekin $p(t,x)$ kattalik Kolmogorov tenglamasiga bo‘ysunadi va uning fundamental yechimi bo‘lishligi tasodifiy Markovli jarayonlarda sodir bo‘ladigan obyektlarni tadqiq qilishda ko‘p ishlatiladi, xususan ular bunday obyektlar boshqarish masalalarida o‘z ahamiyatiga ega.

Shunday qilib parabolik tipdagi tenglamalar matematik modellarning universalligiga misollardan biri (8.1-jadval). Ular umuman har xil tabiatli keng ko‘lamli jarayonlarni o‘zida ifodalaydi. Ta’kidlab o‘tamizki, parabolik tipdagi tenglamalar xaotik tartibsiz hodisalar (issiqlik uzatish, diffuziya va h.k.) bilan chambarchas bog‘langan. Shu bilan birga ular determinallashtirilgan (yer qatlamidagi suvning harakati, g‘ovak muhitda gaz va suyuqlik filtratsiyasi va h.k.) tizimlar sifatida ham ko‘plab jarayonlarda qo‘llaniladi.

Matematik modellarning universalligi bizni o‘rab turgan borliqning yagona in’ikosi va ularni ifodalashning usullari. Shuning uchun ham bir hodisani matematik modellashtirishda to‘plangan va ishlab chiqilgan usullar hamda natijalar analogiya bo‘yicha umuman boshqa jarayonlarning ko‘plab sinflariga o‘tkazilishi mumkin.

8.1-jadval

Obyekt (jarayon)	Asosiy farazlar va qonunlar
Yer qatlamidagi suvning harakati	Massaning soflanishi, Darsi qonuni
Issiqlik uzatish modda diffuziyasi	Energiyaning saqlanishi, Fure qonuni; massaning saqlanishi; Fik qonuni
Amyobalarning to‘planish harakati	Amyobalar sonining saqlanishi, “o‘ziga tortuvchi” modda bo‘lmaganda amyobalarning xaotik harakati
Tasodifiy markovli jarayon	Markov ayniyati, jarayonning kuchli uzluksizligi

Parabolik tenglamalar misolida keltirilgan matematik modellarning universalligini ko‘plab jarayonlarni ifodalovchi giperbolik va elliptik tenglamalar uchun bajarilishini o‘quvchilar e’tiboriga havola qilamiz.

Nazorat savollari

1. Modellarni soddalashtirish usullarini tushuntirib bering.
2. Modelni tahlil qilish deganda nimani tushunasiz?
3. Obyekt va modelni adekvatligiga misollar keltiring.
4. Matematik modellarning universalligi deganda nimani tushunasiz?

9. Statistik modellashtirish usullari (Monte Karlo usuli)

9.1. Kompyuterda imitatsion modellashtirish

Kompyuterda modellashtirish ilmiy tadqiqotning yangi usuli sifatida quyidagilarga asoslanadi [19-25]:

- o‘rganilayotgan jarayonni tasvirlash uchun matematik modellar qurish;
- yuqori tezlikka va inson bilan muloqot olib borish imkoniga ega bo‘lgan yangi hisoblash mashinalarini qo‘llash.

Kompyuterda modellashtirishning asosi quyidagilardan tashkil topgan: matematik model asosida kompyuter yordami bilan qator hisoblash tajribalarini o‘tkazish, ya’ni obyekt yoki jarayon xossalarini o‘rganish, uning optimal parametr va ishlash rejimlarini topish, hamda modelini aniqlashtirishdir. Masalan, u yoki bu jarayonni tasvirlovchi matematik tenglamalar asosida uning koeffitsientlari, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarini o‘zgartirib obyektda qanday o‘zgarish bo‘lishini tadqiq qilishdir.

Kompyuterda modellashtirish – bu hisoblash texnikalarini ishlatgan holda matematik modellashtirishdir. Kompyuterda modellashtirish quyidagilarni bajarishga yo‘naltirilgan:

- modellashtirish maqsadini aniqlash;
- matematik modelni ishlab chiqish;
- modelni formallashtirish;
- modelning kompyuterda dasturini ishlab chiqish;
- modelli tajribani rejalashtirish;
- tajriba rejasini amalga oshirish;
- modellashtirish natijalarini analiz va intyerpritatsiya qilish.

Imitatsion model - bu matematik model asosida kompyuterda hisoblash tajribalarini o‘tkazib, real obyekt, jarayon yoki tizim holatini taqlid (imitatsiya) qilishdir.

Real obyekt va jarayonni o‘rganish matematik modelning ikki turi yordamida amalga oshiriladi:

- Analitik,
- Imitatsion.

Real jarayon va tizimning holatini analitik modelda tasvirlashda aniq funksional bog‘lanishlar yordamida beriladi (chiziqli yoki chiziqsiz tenglamalar, differentsial yoki integral tenglamalar). Biroq bunday bog‘lanishlarni faqat real obyekt va jarayonning oddiy hollari uchun olish mumkin. Murakkab jarayonlar uchun esa analitik model haqiqiyga ancha qo‘pol yaqinlikda bo‘ladi. Shu sabab tadqiqotchi ayrim hollarda imitatsion mordellashtirishni qo‘llashga majbur bo‘ladi.

Imitatsion modellashtirish matematik model asosida real obyekt, jarayon yoki tizim holatini taqlid qilishda kompyuterda hisoblash tajribalarini o‘tkazish uchun sonli usullardan bo‘lib hisoblanadi.

Imitatsion modellashtirish – bu ma’lum berilgan vaqt ichida ishlayotgan, hamda taqlid qilinayotgan real obyekt yoki jarayonning matematik modeli bilan kompyuterda hisoblash tajribalarini rejalashtirish, tashkil qilish va bajarishning algoritmik usullari to‘plamidir.

Imitatsion modellashtirishning asosiy afzalliklari:

1. Jarayon yoki tizimni yuqori darajada detallashtirish natijasida uning komponentalari (elementlari) holatini tasvirlash imkoniyati;
2. Imitatsion modellashtirish va tizim yoki jarayonning tashqi muhit holati parametrlari orasida chegaralarning yo‘qligi;
3. Vaqt bo‘yicha komponentalar va tizim parametrlarining o‘zaro dinamik ta’sirini o‘rganish imkoniyati.

Bu afzalliklar imitatsion usullarning keng tarqalishini ta’minlaydi.

Imitatsion modellarni qo‘llash quyidagi holatlarda tavsiya qilinadi:

1. Agar tugallangan tadqiqot masalasi qo‘yilishi mavjud bo‘lmasa va obyektni modellashtirish asosida bilish jarayoni ketayotgan bo‘lsa, *imitatsion model* jarayonni o‘rganish vositasi bo‘lib xizmat qiladi.
2. Agar analitik usul mavjud bo‘lib, lekin matematik jarayon murakkab va qiyin bo‘lsa, *imitatsion modellashtirish* masalasini yechishning oddiy usulini beradi.
3. Jarayon yoki tizim parametrlari ta’sirini baholashdan tashqari ma’lum vaqt ichida jarayon yoki tizim elementlari holatini kuzatish kerak bo‘lganda.
4. Real sharoitda jarayonni kuzatish mumkin bo‘lmagan holatda *imitatsion modellashtirish murakkab tizimni tadqiq qilishning yagona usuli bo‘ladi* (termoyadro sintezi reaktsiyasi, kosmik fazoni tadqiq qilish).
5. Jarayon o‘tishini tekshirish yoki imitatsiya qilishda tizim holatini hodisani tezlashtirish yoki sekinlashtirish kerak bo‘lganda.
6. Yangi texnikani o‘rganish uchun mutaxassislar tayyorlashda. Bunda imitatsion model yangi texnikalarni ishlatishda bir qator imkoniyatlarni yaratib beradi.

7. Real jarayon yoki tizimning yangi holatini o‘rganishda. Bunda imitatsiya real tajribalar o‘tkazishning yangi strategiya va usullarni tekshirishda xizmat qiladi.

Lekin shu bilan birga imitatsion modellashtirish bir qator afzalliklarga va shu qatorda kamchiliklarga ham ega:

1. Yaxshi imitatsion modelni ishlab chiqish ko‘p hollarda juda qimmatga tushadi va ko‘p vaqt talab qiladi.
2. Shunday hollar ham bo‘lishi mumkinki, imitatsion modelning noaniqlik darajasini aniqlay olmaymiz.
3. Ayrim tadqiqotchilar imitatsion modelga murojaat qilayotganda, undagi qiyinchiliklarga duch kelganda, qator metodologik xarakterdagi xatoliklarga yo‘l qo‘yadi.

Shunday bo‘lsada imitatsion model murakkab jarayonlar va tizimni analiz va sintez qilish masalasida eng keng qo‘llaniladigan usullardan biri bo‘lib hisoblanadi.

Imitatsion modellashtirishning asosiy turlaridan biri bu EHMda ishlanuvchi murakkab tasodifiy jarayonlarni qayta ishlashga asoslangan *statistik imitatsion modellashtirish* bo‘lib hisoblanadi.

Tasodifiy o‘zgarishga (toyish, siljishga) mansub bo‘lgan murakkab tizimlarni tadqiq qilishda ehtimolli analitik model va ehtimolli imitatsion model ishlatiladi.

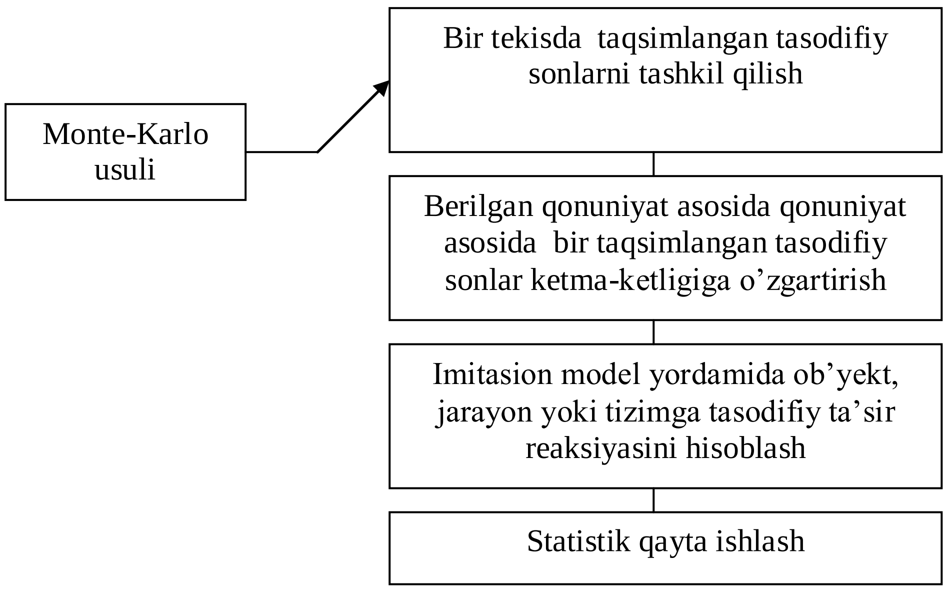
Ehtimolli analitik modelda tasodifiy faktorlar ta’siri berilgan jarayonning ehtimolli tasodifiy xarakteristikasi bilan hisobga olinadi (ehtimollik taqsimoti, spektral zichlik yoki korrelyatsion funksiya qonuni). Shu sabab ehtimolli analitik modellar qurishda murakkab hisoblash masalalari tasvirlanadi (qaraladi). Shuning uchun ehtimolli analitik modellashtirishni o‘rganishda yetarlicha oddiy tizimlar ishlatiladi.

Shuni aytish kerakki, imitatsion modelda tasodifiy o‘zgarishlarni kiritish murakkablikka olib kelmaydi. Shu sabab murakkab tasodifiy jarayonlarni tadqiq qilish hozirgi kunda imitatsion modellar yordamida amalga oshiriladi.

Ehtimolli imitatsion modellashtirishda tasodifiy jarayonlar xarakteristikasi bilan emas, jarayon yoki tizim parametrlarining aniq tasodifiy son qiymatlari bilan ish yuritiladi. Bunda qaralayotgan jarayon imitatsion modelida qayta ishlab chiqilib olingan natijalar tasodifiy ishlangan bo‘ladi. Shuning uchun jarayonning obyektiv va turg‘un xarakteristikalarini topish uchun uning ko‘p marotaba ishlab chiqilib keyingi qayta ishlanib olingan statistik ma’lumotlari talab etiladi. Shu sabab ham tasodifiy o‘zgarishga (siljishga) moyil bo‘lgan murakkab jarayon va tizimlarni imitatsion modellashtirish yordamida tadqiq qilish statistik modellashtirish nomini olgan.

Tasodifiy jarayonning statistik modeli – bu tasodifiy o‘zgarishga (siljishga) moyil bo‘lgan murakkab tizim ishlashini, hamda uning elementlari orasidagi o‘zaro ta’sirini imitatsiya qiluvchi, ehtimollik xaraktyerni o‘zida oluvchi algoritmdir.

Kompyuterda statistik imitatsion modellashtirishni amalga oshirishda berilgan ehtimollik xarakteristikasi bilan kompyuterda tasodifiy sonlarni ketma ketlikda olish masalasi kelib chiqadi. Berilgan taqsimot qonuni asosida ketma-ket tasodifiy sonlarni generatsiya qilish masalasini yechshning sonli usul “statistik sinov usuli” yoki “Monte-Karlo usuli” deb nom olgan.



9.1-rasm. Statistik sinov usulining umumlashtirilgan algoritmi

Monte-Karlo usuli statistik modellashtirishdan tashqari bir necha sonli usullar (integral olish, tenglamani yechish) qatori ilovalariga ham ega. Monte-Karlo usuli – bu berilgan ehtimollik xarakteristikasi bilan psevdotasodifiy sonlarni ketma-ket olishning kompyuterda modellashtiruvchi sonli usuldir.

Demak, statistik modellashtirish - bu tasodifiy o‘zgarishga (siljishga) moyil bo‘lgan murakkab jarayon va tizim ishlashini imitatsion model yordamida o‘rganish usulidir.

Statistik modellashtirish metodikasi quyidagi bosqichlardan iborat [21,22]:

1. Har bir sinovda kompyuterda parametrlarning tasodifiy qiymatini imitatsiyalovchi berilgan korrelyatsion va ehtimollik taqsimot qonuni (Monte-Karlo usuli) asosida psevdotasodifiy ketma-ketlikni kompyuterda modellashtirish.
2. Imitatsion matematik modelda olingan sonli ketma-ketlikni qayta ishlash.
3. Modellashtirish natijalarini statistik qayta ishlash.

Statistik sinov usulining umumlashtirilgan algoritmi 9.1-rasmda keltirilgan.

9.2. Tasodifiy hodisa va kattaliklar, ularning taqsimot qonuniyatlari va sonli xarakteristikalari

Ehtimollar nazariyasi usullari turli sohalarda keng ishlatiladi. Fizika, geodeziya, astronomiya, xatoliklarni kuzatish nazariyasida avtomatik boshqarish nazariyasida va boshqa ko‘plab nazariy va amaliy fanlarda qo‘llanilib kelmoqda. Ehtimollar nazariyasi matematik va amaliy statistikani asoslash uchun xizmat qilmoqda. O‘z navbatida ishlab chiqarishni rejalashtirish va tashkal etishda, texnologik jarayonlarni tahlil qilishda va boshqa maqsadlarda keng ishlatilmoqda. Oxirgi yillarda ehtimollar nazariyasi fan va texnikaning bir qancha sohalariga ham kirib keldi. Jumladan, matematik modellashtirish, kompyuterda imitatsion modellashtirish, robototexnika va boshqa [1].

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb sinovlar natijasida bitta va faqat bitta mumkin bo‘lgan qiymat qabul qiluvchi, oldindan aniq bo‘lmagan va faqat tasodifiy hodisaga bog‘liq, oldindan aniqlab bo‘lmaydigan kattalikka aytiladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

X, Y, Z – tasodifiy kattaliklar (miqdor);

x_i, y_i, z_i – tasodifiy kattaliklarning mumkin bo‘lgan qiymatlari.

2-ta’rif. Tasodifiy kattaliklar (miqdorlar) ma’lum aniqlangan ehtimollik bilan ayrim $x_i,\ i=\overline{1,n}$ yoki $i=\overline{1,\infty}$ mumkin bo‘lgan qiymatlar qabul qilsa *diskret (uzuluvchi)* deyiladi.

3-ta’rif. Tasodifiy kattaliklar (miqdorlar) ma’lum chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lsa *uzluksiz* deyiladi. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar mumkin bo‘lgan qiymatlar soni, oraliq kattaligiga bog‘liq bo‘lmagan holda, cheksizdir $x_i,\ i=\overline{1,\infty}$.

Diskret tasodifiy miqdorlarni berish uchun uning mumkin bo‘lgan qiymatlarini sanab o‘tish yetarli emas, yana uning ehtimolligini ko‘rsatiish ham kerak.

4-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuniyati deb, uning mumkin bo‘lgan qiymatlari va paydo bo‘lish ehtimoli orasidagi mosligiga aytiladi.

Taqsimot qonuniyatlari

Taqsimot qonuniyatini jadval, analitik (formula ko‘rinishda) va grafik ko‘rinishda (ko‘pburchakli taqsimot ko‘rinishda) berish mumkin [1].

Taqsimot qonuniyatining jadval qiymatlari:

$X x_1 x_2 ... x_n \rightarrow$ tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari;

$P p_1 p_2 ... \mathrm{p}_n \rightarrow$ tasodifiy miqdorning paydo bo‘lishlik ehtimollari.

Taqsimot qonuniyatining analitik berilishi:

Bernolli qonuni bilan aniqlanadigan Binominal qonuniyat

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^n - k,$$

k = 0, 1, 2, …, n – hodisaning paydo bo‘lishlik imkoniyatlari soni

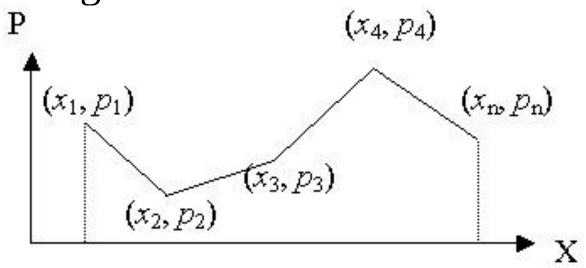
q = 1-p – hodisaning paydo bo‘lmaslik ehtimoli.

Puassonning asimptotik formulasi yordamida aniqlanadigan, Puasson taqsimoti:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

bu yerda: λ - hodisa oqimi intensivligi.

Taqsimot qonuniyatining analitik berilishi 9.2-rasmda tasvirlangan.



9.2-rasm**.** Taqsimot qonuniyatining analitik berilishi

Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuniyatini jadval, formula va grafik ko‘rinishda berish usulini faqat diskret tasodifiy miqdorlar uchun qo‘llash mumkin.

Taqsimot qonuniyatini integral funksiya ko‘rinishida diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham berish mumkin.

Integral taqsimot funksiya (ITF) – bu x ning har bir mumkin bo‘lgan qiymati uchun ehtimolligini aniqlovchi shunday F(x) funksiyaki, X tasodifiy kattalik (miqdor) x ning qiymatidan kichik qiymat oladi, ya'ni

$$F(x) = P(X < x).$$

Integral taqsimot funksiyasi geometrik ma'nosi – bu shunday ehtimollikki, bunda X tasodifiy kattalik (miqdor) qiymatini x son o'qining chap nuqtalari ichidan qabul qiladi.

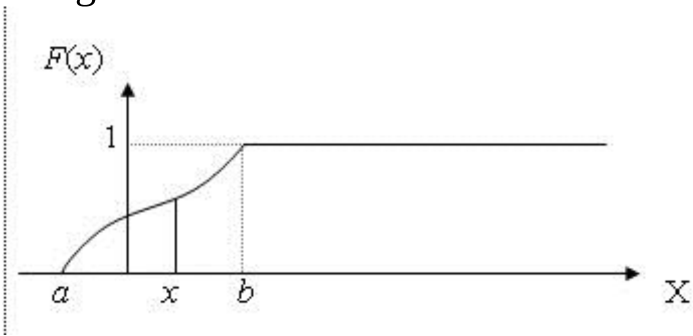
Integral taqsimot funksiyasi xossalari:

1. Integral taqsimot funksiya qiymatlari [0;1] oraliqda yotadi: $0 \le F(x) \le 1.$
2. Tasodifiy miqdor X (a,b) interval oralig'ida yotish ehtimoli shu intervalda taqsimot integral funksiyasining o'zgarishiga teng $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$
3. Agar tasodifiy miqdor x ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) interval oralig'ida yotsa, u holda

$F(x) = 0$, agar $x \le a$,

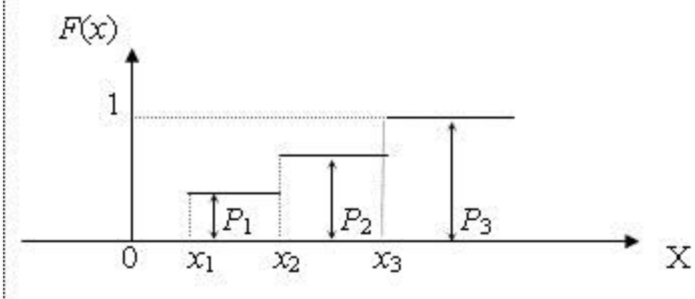
$F(x) = 0$, agar $x \ge b$.

Uzluksiz tasodifiy miqdor integral taqsimot funksiyasi grafigi 2.29- rasmda keltirilgan.



9.3- rasm. Uzluksiz tasodifiy miqdor integral taqsimot funksiyasi

Diskret tasodifiy miqdor integral taqsimot funksiyasi grafigi 9.4-rasmda keltirilgan.



9.4-rasm. Diskret tasodifiy miqdor

Uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollik taqsimotini ifodalash uchun differensial taqsimot funksiyasi ishlatiladi.

Differensial taqsimot funksiyasi (DTF) yoki ehtimollik zichligi – bu integral funksiyadan birinchi hosiladir

$$f(x) = F'(x).$$

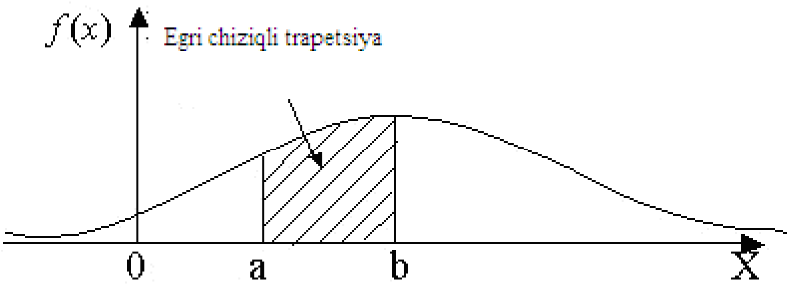
Integral taqsimot funksiyasi differensial taqsimot funksiyasi uchun dastlabki ko‘rinishdir. Unda

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(x)dx = P(-\infty < X < x).$$

Tasodifiy miqdor X (a,b) interval oralig‘ida yotish ehtimoli shu intervalda quyidagi integralga teng:

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{x} f(x)dx.$$

Uning geometrik ma’nosi shundan iboratki, tasodifiy miqdor X (a,b) interval oralig‘ida yotish ehtimoli x o‘qi, $f(x)$ taqsimot egri chizig‘i, $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlardan tuzilgan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng (9.5-rasm).



9.5-rasm. Egri chiziqli trapetsiya

Differensial taqsimot funksiyasi grafigi egik taqsimot deb aytiladi. Differentsial taqsimot funksiyasi xossalari:

1. Differensial taqsimot funksiyasi manfiy emas, ya’ni $f(x) \ge 0$.
2. Agar tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari (a,b) interval oralig‘ida yotsa, u holda:

$$\int_{a}^{x} f(x)dx = 1.$$

Demak, differensial taqsimot funksiyasi $f(x)=F'(x)$, u holda quyidagini yozish mumkin:

$$f(x) = \lim \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \Delta x \to 0 \quad (9.1)$$

(9.1) asosida quyidagini yozamiz:

$$F(x+\Delta x) - F(x) \cong f(x) \cdot \Delta x \quad (9.2)$$

Differensial taqsimot funksiyasiga ayrim hollarda uzluksiz tasodifiy miqdorlarning ehtimollik taqsimot qonuni ham deyiladi.

Amaliy masalalarni yechishda har xil uzluksiz tasodifiy miqdorlarning ehtimollik taqsimot qonuniga duch kelinadi. Normal va tekis taqsimot qonuniyatlari uchratiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, diskret tasodifiy miqdorlarning ehtimollik taqsimot qonuniyati uning mumkin bo'lgan qiymatlari va paydo bo'lish ehtimoli orasidagi mosligiga aytiladi. Ehtimolliklarni jadval, analitik (Bernolli formulasi bo'yicha binaminal taqsimot, Puasson taqsimoti) va grafik ko'rinishda (ko'pburchakli taqsimot ko'rinishda) berish mumkin.

Ehtimollik taqsimot tekis deyiladi, agar (a,b) intervalda tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yotib, differentsial taqsimot funksiyasi bir xil qiymat qabul qilsa, ya'ni f(x) = C bo'lsa.
Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = 1,$$

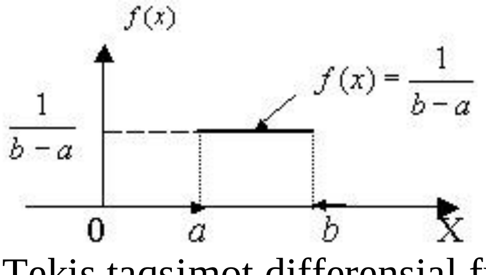
u holda

$$C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}.$$

Bu yerdan tekis taqsimot qonunini analitik ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Ehtimollik tekis taqsimot differensial funksiyasi grafigi 2.32-rasmdagi kabi tasvirlanadi.

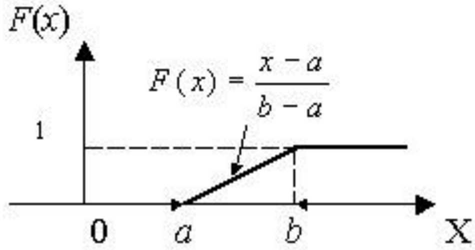


9.6-rasm**.** Tekis taqsimot differensial funksiyasi

Tekis taqsimot integral funksiyasi analitik ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$F(x)=\begin{cases}0,\text{agar } x\le a,\ \text{bu yerda } f(x)=0;\\ \dfrac{x-a}{b-a},\text{agar } a<x\le b,\ \text{bu yerda } F(x)=\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a};\\ 1,\text{agar } x>b,\ \text{bu yerda } F(x)=\dfrac{b-a}{b-a}=1.\end{cases}$$

Ehtimollik tekis taqsimot integral funksiyasi grafigi 2.33-rasmda tasvirlangan.



9.7-rasm**.** Tekis taqsimot integral funksiyasi

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikasi

Zichlik taqsimot qonuni tasodifiy miqdorni xaraktyerlaydi. Lekin ayrim hollarda taqsimot qonuni aniq bo‘lmaydi va tasodifiy miqdorlar sonli xarakteristikalaridan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Bularga quyidagilar kiradi [17,20]:

1. Matematik kutish *M*,
2. Dispersiya *D*,
3. O‘rta kvadratik chetlanish σ.

Diskret tasodifiy miqdor *X* ning matematik kutishi – bu barcha mumkin bo‘lgan $x_i,\ i=\overline{1,n}$ qiymatlarini uning ehtimollariga $p_i,\ i=\overline{1,n}$ ko‘paytmasi yig‘indisidir.

$$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n \qquad (9.3)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor X ning matematik kutishi uning barcha [*a,b*] oraliqda yotuvchi mumkin bo‘lgan qiymatlari bo‘lib - bu aniq integraldir.

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \qquad (9.4)$$

Tasodifiy miqdor matematik kutishi (diskret va hamda uzluksiz uchun) tasodifiy emas (doimiy) kattalik. U tasodifiy miqdorning o‘rta qiymati bilan xarakterlanadi.

Matematik kutish xossalari:

1. $M(C)=C$ – o‘zgarmasning matematik kutishi shu o‘zgarmas o‘ziga teng.
2. $M(CX)=C\cdot M(X)$.
3. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.

4. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Matematik kutishning ehtimollik ma'nosi:

Matematik kutish taqriban tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlari o'rta arifmetigiga teng:

$$M(X)\approx \breve{X}=x_1\cdot\frac{m_1}{n}+x_2\cdot\frac{m_2}{n}+...+x_k\cdot\frac{m_k}{n}=x_1\cdot W_1+x_2\cdot W_2+...+x_k\cdot W_k,$$

bu yerda: m_k– kuzatish chastotasi, W_k– nisbiy chastota.

Dispersiya va o'rta kvadratik chetlanish – bu tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikasi bo'lib, uning matematik kutishi atrofida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari tarqalishini (yoyilishini) baholashga imkon beradi.

Tasodifiy miqdor qiymatlari va uning matematik kutishi orasidagi farq chetlanish deyiladi, ya'ni

$$x_I - M(X).$$

Aytaylik, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniyati aniq bo'lsin:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

U holda bu tasodifiy miqdorning chetlanish taqsimot qonuniyati quyidagicha bo'ladi:

$X-M(X)$	$x_1-M(X)$	$x_2-M(X)$	...	$x_n-M(X)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Demak, bitta mumkin bo'lgan chetlanish musbat, boshqasi manfiy, u holda matematik kutish juda muhim xossaga ega bo'ladi:

$$M(X-M(X))=0,$$

ya'ni, matematik kutish chetlanishi hamma vaqt nolga teng bo'ladi.

Shuning uchun tasodifiy miqdorning matematik kutish atrofida tarqalishini (yoyilishini) baholash uchun tasodifiy miqdorning kvadrat chetlanishi hisoblanadi, ya'ni

$$(x_i - M(X))^2.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi (diskret va uzluksiz uchun ham) deb tasodifiy miqdorning uning matematik kutishidan kvadrat chetlanishining matematik kutishiga aytiladi.

Tasodifiy miqdorning diskret holi uchun: $D(X) = M(X-M(X))^2$

Tasodifiy miqdorning uzluksiz holi uchun:

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Oxirgi ifodada tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) oraliqda yotadi.

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi (diskret va uzluksiz uchun ham) tasodifiy emas (o‘zgarmas kattalik).

Masalan:

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi quyidagi taqsimot qonuniga ega:

X	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutishi:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 = 2.3 .$$

Tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlarining kvadrat chetlanishi:

$$(x_1 - M(X))^2 = (1 - 2.3)^2 = 1.69,$$
$$(x_2 - M(X))^2 = (2 - 2.3)^2 = 0.09,$$
$$(x_3 - M(X))^2 = (5 - 2.3)^2 = 7.29.$$

Kvadrat chetlanishning taqsimot qonuni:

$(x\text{-}M(X))^2$	1.69	0.09	7.29
p	0.3	0.5	0.2

U holda keltirilgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi quyidagiga teng:

$$D(X) = 1.69 \cdot 0.3 + 0.09 \cdot 0.5 + 7.29 \cdot 0.2 = 201 .$$

Tasodifiy miqdorning o‘rta kvadrat chetlanishi X dispersiyasidan kvadrat ildiz deyiladi, ya’ni:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Keltirilgan misolda tasodifiy miqdorning o‘rta kvadrat chetlanishi quyidagiga teng:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{201} = 14.177446 .$$

Dispersiyani hisoblash uchun ayrim hollarda quyidagi formuladan foydalanish qulay: $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$, ya’ni dispersiya tasodifiy miqdor kvadratining matematik kutishi va uning kvadrati farqiga teng.

Oldingi misolni yana bir marta qaraymiz.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniyati berilgan:

X	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutishi quyidagiga teng:

$$M(X) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 = 2.3 .$$

Tasodifiy miqdorning kvadrati taqsimot qonuniyati, ya’ni X^2:

X^2	1	4	25
P	0.3	0.5	0.2

X^2 ning matematik kutishi teng:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.5 + 25 \cdot 0.2 = 7.3.$$

U holda keltirilgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi teng:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 7.3 - (2.3)^2 = 2.01.$$

O‘rta kvadratik chetlanish:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{201} = 1.4177.$$

Misol qaraymiz. Uzluksiz tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin.

Aytaylik, uzluksiz tasodifiy miqdor integral funksiya qonuniyatida berilgan bo‘lsin:

$$F_x = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0, \\ x, & \text{agar } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{agar } 0 > 1. \end{cases}$$

Differensial funksiya qonuniyatini topamiz:

$$f_x = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0, \\ 1, & \text{agar } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{agar } 0 > 1. \end{cases}$$

Matematik kutish X va X^2:

$$M(X) = \int_0^1 xf(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 1dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$M(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

U holda:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{12}\right)^2;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0.288675.$$

Agar tasodifiy miqdor tekis qonuniyati $[a,b]$ intervalda berilgan bo‘lsa, uning matematik kutishi, dispersiyasi va o‘rta kvadratik chetlanishi quyidagiga teng:

$$M(X) = \frac{1}{2} \cdot (a+b),$$

$$D(X) = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2,$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot (b-a)^2.$$

Dispersiya xossasi:

1. D(C)=0

2. D(CX)=C^2D(X)
3. D(X+Y)=D(X)+D(Y),
4. D(C+X)=D(X),
5. D(X-Y)=D(X)+D(Y).

O‘rta kvadratik chetlanish xossasi:

$$\sigma(X+Y+Z)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+\sigma^2(Z)}.$$

Har xil nazariy qonunlar ichida uzluksiz tasodifiy miqdor normal ehtimollik taqsimot qonuniyati alohida joy egallaydi, ya’ni ko‘pgina amaliy tadqiqotlarda asosiy bo‘lib hisoblanadi. Ko‘pgina ishlab chiqarish jarayoni bilan bog‘liq tasodifiy hodisalar uning yordamida tavsiflanadi.

Normal qonuniyat taqsimotiga bo‘ysunuvchi tasodifiy hodisalarga ishlab chiqarish parametrlarini o‘lchash xatoliklari, tayyorlashda texnologik xatoliklarni tarqalishi, ko‘pchilik biologik obyektlarning og‘irligi va o‘sishi va boshqalar kiradi.

Differensial funksiya tavsiflanuvchi uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollik taqsimoti qonuniyati normal deyiladi.

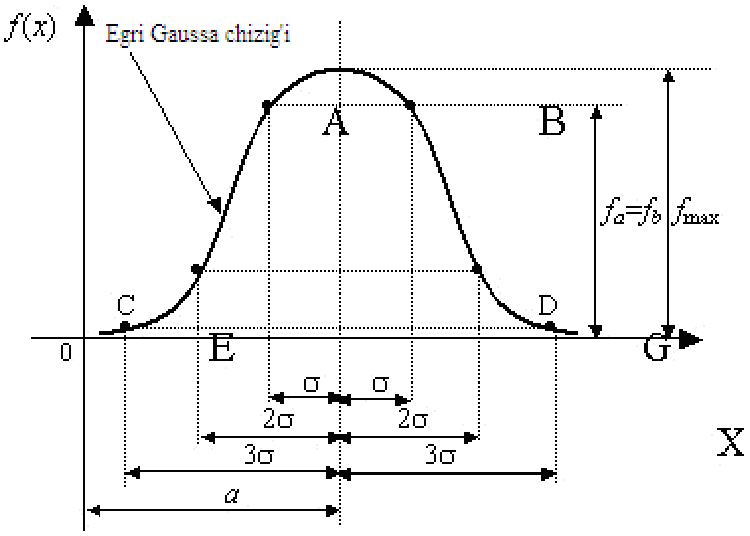
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{9.5}$$

bu yerda

a - tasodifiy miqdorningn matematik kutishi;

σ- normal taqsimotning o‘rta kvadratik chetlanishi.

Normal taqsimotning differensial funksiyasi grafigi normal egri chizig‘i (Gauss egri chizig‘i) deyiladi (9.8-rasm).



9.8-rasm**.** Normal taqsimotning differensial funksiyasi grafigi

Normal egri chizig‘i (Gauss egri chizig‘i) xossalari:

1. Egri chiziq x=a to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik.

2. Normal egri chiziq x o‘qi ustida joylashgan, ya’ni x ning barcha qiymatlarida $f(x)$ funksiya hamma vaqt musbat.

3. x o‘qi grafikka gorizontal assimptota.

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

4. $x = a$ da funksiya $f(x)$ maksimumga teng:

$$f_m ax = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.4}{\sigma}.$$

5. A va B nuqtalarda $x = a - \sigma$ va $x = a + \sigma$ bo‘lganda egri chiziq egilish nuqtasiga ega, ordinatasi quyidagiga teng:

$$f_A = f_B = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx 0.6 \cdot f_{\max} \approx \frac{0.24}{\sigma}.$$

Bunda tasodifiy miqdor absolyut kattalikdan chetlanish ehtimolligi normal taqsimlanishda bo‘lib, matematik kutish o‘rta kvadratik chetlanishdan oshmaydi, ya’ni 0,6826 teng bo‘ladi.

6. E va G nuqtalarda $x = a - 2\sigma$ va $x = a + 2\sigma$ bo‘lganda, $f(x)$ funksiya qiymati quyidagiga teng:

$$f_E = f_G = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2} \approx \frac{0.05}{\sigma}.$$

7. C va D nuqtalarda Gauss egri chizig‘i abstsissa o‘qiga assimtotik yaqinlashib, $x = a - 3\sigma$ va $x = a + 3\sigma$ bo‘lganda abstsissa o‘qiga juda yaqinlashadi. Bu nuqtalarda f(x) funksiya qiymati juda kichik bo‘ladi.

$$f_C = f_D = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{9}{2}\right)} \approx \frac{0.0044}{\sigma},$$

a parametr kattaligi (tasodifiy miqdor matematik kutishi) o‘zgarishi normal egri chiziq formasini o‘zgartirmaydi, uni *X* o‘qi bo‘yicha siljitadi xolos. O‘ngga agar, *a* oshsa va chapga, agar *a* kamaysa.

a=0 bo‘lganda normal egri chiziq ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

σ parametr kattaligi (o‘rta kvadratik chetlanish) o‘zgarishi normal egri chiziq formasini o‘zgartiradi: σ ning o‘sishi bilan normal egri chiziq ordinatasi kamayadi, egri chiziq *X* o‘qi bo‘yicha cho‘ziladi. σ ning kamayishi bilan normal egri chiziq ordinatasi oshadi, egri chiziq *X* o‘qi bo‘yicha qisiladi va yanada “o‘tkircho‘qqili” bo‘lib boradi.

Demak, α va σ ning har qanday qiymatida normal egri chiziqning maydon chegarasi va *X* o‘qi teng birlikda qoladi (ya’ni tasodifiy miqdor ehtimolligi normal taqsimlangan bo‘lib, *X* o‘qi bilan chegaralangan normal egri chiziqdan qiymatlarni qabul qiladi va 1 ga teng) .

α va σ istalgan parametrlar bilan normal taqsimot, ya’ni differensial funksiya bilan tavsiflangan

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

umumiy normal taqsimot deyiladi.

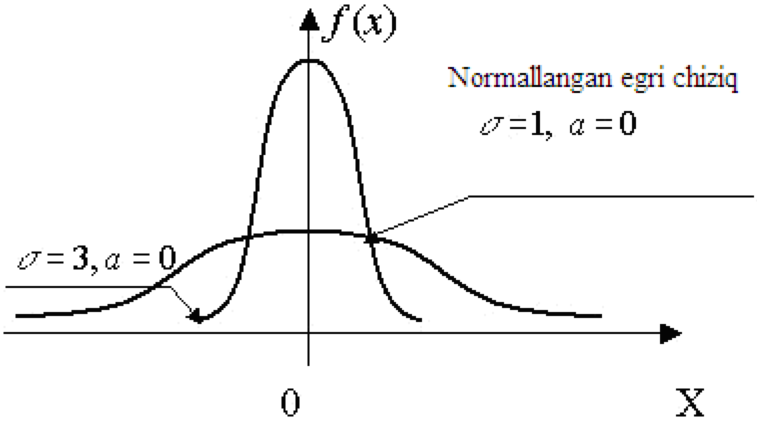
$\alpha=0$ va $\sigma=1$ parametrlar bilan normal taqsimot, ya’ni differensial funksiya bilan tavsiflangan,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x)^2}{2}}, \qquad (9.6)$$

normallashtirilgan taqsimot deyiladi (9.9-rasm).

Normallashtirilgan taqsimotda differensial taqsimot funksiyasi quyidagilarga teng:

$$f_max\approx 0.4;\ f_A=f_B\approx 0.24;\ f_C=f_D\approx 0.0044;\ f_E=f_G\approx 0.05.$$



9.9-rasm. Normallashtirilgan taqsimot funksiyasi grafigi

Umumiy normal taqsimotning integral funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx, \qquad (9.7)$$

Normallashtirilgan taqsimotning integral funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \qquad (9.8)$$

bu yerda $z=\frac{x-a}{\sigma}$.

Aytaylik, (c,d) intervalda tasodifiy miqdor X normal qonuniyat bilan taqsimlangan bo‘lsin. U holda X tasodifiy miqdorning qabul qiluvchi qiymatlari (c,d) intervalda yotish ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi

$$P(x < X < d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Bu ifodani normallashtiramiz. Buning uchun yangi *z* o'zgaruvchi kiritamiz

Bu yerda: $x = \sigma \cdot z + a,\ dx = \sigma dz.$

Yangi integrallash chegaralari:

$x = c,\ z = \frac{c-a}{\sigma};$ uchun

$x = d,\ z = \frac{d-a}{\sigma};$ uchun

U holda, normallashtirishdan keyin *X* tasodifiy miqdorning qabul qiluvchi qiymatlari (*c*,*d*) intervalda yotish ehtimolligi quyidagiga teng bo'ladi

$$P(x < X < d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-a}{\sigma}}^{\frac{d-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma \cdot dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{d-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} - \int_{0}^{\frac{c-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Laplas funksiyasidan foydalanamiz

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

oxirida quyidagiga ega bo'lamiz

$$P(x < X < d) = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right).$$

Misol. Tasodifiy miqdor *X* normal qonuniyat bo'yicha taqsimlangan. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutish va o'rta kvadratik chetlanishi *a*=30 va $\sigma = 10$ teng. X tasodifiy miqdorning (10, 50) intervalda qabul qiladigan qiymatlari ehtimolini topish talab qilinadi..

Yechish:

Shart bo'yicha: $c = 10; d = 50; a = 30; \sigma = 10.$

U holda

$$P(x10X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2).$$

Tayyor Laplas jadvalidan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

Bu yerdan $P(x10X < 50) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544.$

Chebishev tengsizligi. Agar ξ-t.m. chekli dispersiyaga ega bo'lca, u holda ixtyoriy $\varepsilon > 0$ uchun gh$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

tengsizlik o'rinli.

Kolmogorov tengsizligi. Bog'liqsiz $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ t.m. lar uchun $M\xi_k = 0, D\xi_k < \infty,\quad k = \overline{1,n}$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}|\xi_1+\xi_2+...+\xi_k|>\varepsilon\right\}<\frac{D(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)}{\varepsilon^2}$$

tengsizlik o‘rinli.

Katta sonlar qonuni.

Ehtimollik fazosi $\{\Omega, F, P\}$ da $\xi_n=\xi_n(\omega)$, n=1,2,… va $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo‘lib, ularning taqsimot funksiyalari mos ravishda $F_n(x)=P\{\xi_n<x\}, n=1,2,...$ va $F(x)=P\{\xi<x\}$ bo‘lsin.

Ehtimollar nazariyasida ham, boshqa sohalarda funksiyalar ketma-ketligi yaqinlashishlariga o‘xshash, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi yaqinlashishi turli ko‘rinishlarda bo‘ladi.

Agar ixtiyoriy musbat $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\}=0$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\{\xi_n\}$, n=1,2,… tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga *R* ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi va $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ kabi belgilanadi.

Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun

$$P\{\omega: \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\}=1$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\{\xi_n\}$, n=1,2,… tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga *bir* ehtimollik bilan yaqinlashadi, deyarli yaqinlashadi deyiladi va $\xi_n \xrightarrow{1\text{эхт}} \xi$ kabi belgilanadi.

Agar $n\to\infty$ da $M|\xi_n-\xi|^r\to 0$ shart bajarilsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga o‘rtacha r-tartibda yaqinlashadi deyiladi va $\xi_n \xrightarrow{r\ \text{урта}} \xi$ kabi belgilanadi. Agar *r*=2 bo‘lsa bu yaqinlashishga o‘rta kvadratik yaqinlashish deyiladi va $\xi_n=\xi$ kabi belgilanadi.

Agar $\{F_n(x)\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $n\to\infty$da taqsimot funksiyaga *F(x)* ning har bir uzluksiz nuqtasida erishsa, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$$

bo‘lsa, u holda $F_n(x)=P\{\xi_n<x\}$, $n=1,2,...$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $F(x)=P\{\xi<x\}$ taqsimot funksiyaga kuchsiz yaqinlashadi va tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n\}$ ξ tasodifiy miqdorga taqsimot bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi va bu ifoda $\xi_n \xrightarrow{\upsilon} \xi$ kabi belgilanadi. Bu yerda $\{\xi_n\}$ va ξ tasodifiy miqdorlar turli ehtimollik fazolarida berilgan bo‘lishi mumkin.

Katta sonlar qonuni, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremalar tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklarining ehtimol bo‘yicha yaqinlashishi, bir ehtimol bilan yaqinlashishi va taqsimot bo‘yicha yaqinlashishlariga mos ravishda misol bo‘la oladi.

Katta sonlar qonuni. Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\{a_n\}$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo‘lib, ixtiyoriy musbat $\xi > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} - a_n\right| \geq \varepsilon\right\} = 0 \qquad (9.9)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysinadi deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonunining o‘rinliligini isbotlashda ko‘pincha Chebishev tengsizligidan foydalaniladi.

Chebeshiv teoremasi. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, ularning dispersiyalari o‘zgarmas S soni bilan tekis chegaralangan bo‘lsa, $(D\xi_k \leq C, k = 1,2,...)$, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi va (2.374) munosabatda $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k$ bo‘ladi.

Xinchin teoremasi. Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan, bir xil taqsimlangan bo‘lib, matematik kutulmalari $M\xi_1 = a$ mavjud bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} - a_n\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

Markov teoremasi. Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = 0$$

shart bajarilsa, u holda $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik uchun KSQ o‘rinlidir.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni. Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\{a_n\}$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo‘lib,

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + ... + \xi_n(\omega)}{n} - a_n\right) = 0\right\} = 1 \qquad (9.10)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi qanday shartlarni qanoatlantirganda kuchaytirilgan katta sonlar o‘rinli bo‘ladi, degan savolga A.N. Kolmogorovning quyidagi teoremalaridan javob topish mumkin.

9.1-teorema. Agar $\{\xi_n\}$-o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib,

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{D\xi_N}{n^2}<\infty$$

shart bajarilsa ketma-ketlik kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo‘ysinadi va (9.10) munosabatda $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k$ bo‘ladi.

9.2-teorema. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga bo‘ysinishi uchun ularning matematik kutulmasi bo‘lishi zarur va yetarlidir.

9.3-markaziy limit teorema. Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\{A_n\}$ va $\{B_n\}$, $B_n>0$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-A_n}{B_n}<x\right\}=\Phi(x)$$

munosabat bajarilsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o‘rinli deyiladi, bu yerda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

9.4-teorema. (Levi). Agar $\{\xi_n\}$-bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, $M\xi_1=a, D\xi_1=\sigma^2<\infty$ bo‘lsa, u holda $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}=\Phi(x)$$

bo‘ladi.

9.**5-teorema (Lindeberg).** Agar $\{\xi_n\}$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ixtiyoriy o‘zgarmas $\tau>0$ da Lindeberg sharti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_n|>\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)=0$$

o‘rinli bo‘lsa, bu yerda $a_k=M\xi_k, B_n^2=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k$, u holda $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a_k)<x\right\}=\Phi(x)..$$

Shuni ta'kidlash kerakki, agar $\{\xi_n\}$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan bo'lib, $D\xi_1 < \infty$ bulsa, Lindeberg sharti bajariladi.

9.**6-teorema (Lyapunov).** Agar $\{\xi_n\}$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - a_k|^{2+\delta} = 0$$

shart bajarilsa, $\{\xi_n\}$ ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi.

9.3. Bosh majmua. Tanlanma. Tanlanma xarakteristikalar. Empirik taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Statistikada tanlanma usul. Tartiblashgan statistikalar hamda variatsion qator. Empirik taqsimot funksiyasining tasodifiy qiymatning taqsimot funksiyasiga yaqinlishishi to'g'risidagi teorema. Glivenko-Kantelli teoremasi.

9.3.1. Bosh majmua. Tanlanma. Tanlanma xarakteristikalar.

Amaliyotda odatda qaralayotgan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksayasi noma'lum bo'ladi. Bunday hollarda uni ξ ni kuzatish natijasida olingan tanglanma orqali aniqlanadi. Berilgan ξ tasodifiy miqdorga mos kelgan n hajmdagi tanlanma agar, ξ ni n marta bog'liqsiz kuzatish natijasida olingan $X_1,...,X_n$ ketma-ketlikka aytiladi [15,17,20]. Bu holda $X_1,...,X_n$ tanlanma ξ ning bosh to'plamidan olingan deb, bunday to'plam taqsimoti ξ niig taqsimotidan iboratdir. Bunda X_i lar ξ ni taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar deb ataladi. Ba'zida tanlanmani ($X_1,...,X_n$) - vektor ko'rinishda belgilash qulaydir. Demak ξ noma'lum R taqsimotga ega bo'lsa, u holda $X^{(n)}$ tanlanma R taqsimotga ega bosh to'plamdan olingan bo'lib, u yaratgan $(A^{(n)}, B^{(n)}, P^{(n)})$ ehtimollik fazosi statistik strukturaga misol bo'la oladi. Odatda R taqsimot biror R oilaga tegishli bo'lib, $(A^{(n)}, B^{(n)}, P)$ statistik struktypada R oila noma'lum parametr $\in H$ aniqlikda beriladi va uchlikling o'zi esa statistik model deb ataladi. Biz belgilarni osonlashtirish maqsadida keyinchalik $(F_\theta, \theta, \Theta)$ taqsimotlar oilasi o'rniga unga mos kelgan taqsimot funksiyaliri oilasi $F = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ ni qaraymiz. $F(x,\theta)$ga mos uchlik funksiya $p(x,\theta)$ ni keng ma'noda tushunamiz; *ya'ni* agar ξ absolyut uzluksiz tipda bo'lsa, $p(x,\theta) = \dfrac{dF(x,\theta)}{dx}$; agar ξ diskret tipda bo'lsa $p(x,\theta) = P_\theta(\xi = x)$. Biz $F(x,\theta)$ (ya'ni P_θ) ga nisbatan hisoblangan matematik kutilma va dispersiyalarni M_θ va D_θ orqali belgilaymiz. $X^{(n)}$ tanlanmaning birgalikdagi uchlik funksiyasi haqiqatga o‘xshashlik funksiyasi deb ataladi. Bu funksiya muhim ahamiyatta ega bo‘lib,

$$L_u(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(X_i,\theta) \qquad (9.11)$$

formula orqali yoziladi. Noma’lum θ parametr skalyar yoki s sonli vektordir $\theta=(\theta_1,...,\theta), s\geq 1$. Matematik statistikaning muhim masalalaridan biri $X^{(n)}$ tanlanma orqali noma’lum θ parametrni (va demak P_θ taqsimotnt*)* baholash (ya’ni aniqlash) dan ibortdir. Amalda $L_n(\theta)$ funksiya (9.11) ko‘paytma orqali aniqlanganligi tufayli $p(x,\theta)$ ning ko‘rinishini bilish shartlidir. Ko‘pgina diskret va uzluksiz tipdagi taqsimotlar

$$p(x,\theta)=C(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} Q_t(\theta)T_i(x)\right\}h(x), \theta\in\Theta, \qquad (9.12)$$

eksponentsial oila ko‘rinishida yoziladi. Bu yerda S(θ) va $Q_i(\theta)$ lar faqat θ ga hamda *h(x)* va $T_i(x)$ lar faqat x ga bog‘liqdir.

9.3.2. Empirik taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Statistikadagi tanlanma usul. Tartiblashgan statistika hamda variatsion qator. Empirik taqsimot funksiyasining tasodifiy qiymatning taqsimot funksiyasiga yaqinlashishi to‘g‘risidagi teorema. Glivenko-Kantelli teoremasi.

Statistik baholarni o‘rganishda $F(x,\theta)$ taqsimot funksiyasining bahosi – empirik taqsimot funksiya (e.t.f.) keng qo‘llaniladi. Agar $F(x,\theta)=P_\theta(\xi<x)$ bo‘lsa, $X^{(n)}$ tanlanma orqali e.t.f. quyidagicha aniqlanadi [15,17,20]:

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_1<x),$$

bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikatori belgilangan. $F_n(x)$ diskret taqsimot bo‘lib, uning sakrash kattaligi $\frac{1}{n}$ ga teng va sakrash nuqtalari esa tartiblangan X_i (varianta) lardan iborat.

X miqdoriy alomat chastotalarining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilash kiritamiz: n_x-alomatlarning x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatuvlar soni; *n*-umumiy kuzatuvlar soni (tanlanmaning hajmi). Ma’lumki, $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi n_x/n ga teng. Agar x o‘zgarsa, u holda, umuman olganja nisbiy chastota ham o‘zgaradi, ya’ni n_x/n nisbiy chastota x ga bog‘liq funksiyadir. Bu

funksiya empirik (tajriba) yo‘li bilan topilgani uchun, u empirik deb ataladi.

Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, x ning har bir qiymatiga nisbatan $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlovchi $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi.

Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra

$$F^*(x) = n_x / n.$$

Bu yerda n_x- x dan kichik variantlar soni; *n*- tanlanmaning hajmi.

Shunday qilib, masalan $F^*(x_2)$ ni topish uchun, x_2 dan kichik variantlar sonini tanlanmaning hajmiga bo‘lish lozim:

$$F^*(x_2) = n_{x_2} / n.$$

Empirik taqsimot funksiyasidan farqli o‘laroq, bosh to‘plamning *F(x)* taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik va nazariy funksiyalar o‘rtasidagi asosiy farq, *F(x)* nazariy funksiya $X < x$ hodisaning ehtimolini, $F^*(x)$ funksiya esa huddi shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaganligidadir. Bernulli teormasiga ko‘ra $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi, ya’ni $F^*(x)$ ehtimoli bo‘yicha mazkur hodisaning *F(x)* ehtimoliga intiladi. Boshqa so‘z bilan aytganda, katta n larda $F^*(x)$ va *F(x)* sonlar bir-biridan katta farq qilmaydi, ya’ni $\lim_{n\to\infty} P[|x - F^*(x)| < \varepsilon] = l(\varepsilon > 0)$. Bu yerdan, bosh to‘plamning nazariy (integral) taqsimot funksiyasini taqriban ifodalash uchun tanlamaning empirik taqsimot funksiyasidan foydalanishning maqsadga muvofiq ekanligi ko‘rstailgan.

Bu xulosa $F^*(x)$ *F(x)* ning barcha xossalarini o‘zida mujassamlashtirgani bilan tushuntiriladi. Haqiqatdan ham, $F^*(x)$ funksiyaning ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) empirik funksiyaning qiymatlari [0,1] kesmaga tegishli bo‘ladi;

2) $F^*(x)$- kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1-eng kichik variant bo‘lsa, u holda $x \le x_1$ da $F^*(x) = 0$ agar x_k— eng katta variant bo‘lsa, u holda $x \le x_k$ da $F^*(x) = 1$.

Shunday qilib, empirik taqsimot funksiyasi bosh to‘plamning nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Bulardan tashqari, F_n binomial tasodifiy miqdorlar o‘rta arifmetik qiymati sifatida F uchun ko‘pgina yaxshi xossalarga ega bahodir. Jumladan, u siljimagan, asosli, asimptotik normal bahodir. Xususan, F_n uchun uning tekis kuchli asosli ekanini anglatuvchi quyidagi Glivenko-Kantelli teoremasi o‘rinlidir:

$P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{|x|\le\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\right)=1$ (biz vaqtincha F ni θ ga bog'liqligini tushirib yozamiz).

$X^{(n)}$ tenglamaning elementlarini kamaymaslik tartibida joylashtirishdan hosil bo'lgan $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\ldots\le X_{(n)}$ to'plamni variatsion qator deb ataymiz. Biz yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek $X_{(i)}$ lar F_n ning sakrash nuqtalaridir. Ko'pgina statistik baholarni F_n ning funksionali sifatida ifodalash mumkin. Masalan, $M_\theta\xi^k=\nu_k(F)-k$- tartibli moment uchun tabiiy baho $\nu_{nk}=\nu_k(F_n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_j^k-k$- tartibli empirik momentdir. Bunda baholarni umumlashtirish mumkin. Agar $M(F)=h\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(x)dF(x)\right)$ funksionalni biror *a* va *h* funksiyalar berilganida baholash talab qilinsa, bunday baho sifatida $M_n=M(F_n)=h\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a(X_j)\right)$ olish mumkin.

9.4. Nuqtaviy va oraliq baholash. Taqsimotlarning parametrik oilasi. Siljimagan, mukammal va effektiv baholar. Baholarni olish usullari: momentlar usuli va maksimal o'xshashlik usuli

Endi ba'zi taqsimot oilalariga misollar keltiramiz [17,20].

1) Puasson taqsimoti: $p(x,\theta)=\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!},x\in\{0,1,2,\ldots\},\theta\in\Theta=(0,+\infty);$

2) Normal taqsimot:

$$p(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right\},x\in R^1,\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=R^1\times R_1^1;$$

3) Binomial taqsimot: $p(x,\theta)=\theta^x\cdot(1-\theta)^{1-x},x\in\{0,1\},\theta\in\Theta=(0,1);$

4) $[\theta_1,\theta_2]$ oraliqdagi tekis taqsimot:

$$p(x,\theta)=\begin{cases}0,x\notin[\theta_1,\theta_2],\\ \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1},x\in[\theta_1,\theta_2],\end{cases}\quad x\in[\theta_1,\theta_2],\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=(-\infty;\theta_2)\times R^1;$$

5) Ko'rsatkichli taqsimot: $p(x,\theta)=\begin{cases}0,x<0,\\ \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta},x\ge 0,\end{cases}x\in[0,+\infty),\theta\in\Theta=R^1;$

6) Veybull taqsimoti:

$$p(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta_2\cdot x^{\theta_1-1}}{\theta_1}\exp\left(-\dfrac{x^{\theta_2}}{\theta_1}\right),x\ge 0\\ 0,x<0,\end{cases}x\in[0,+\infty),\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=R^1\times R^2;$$

7) Pareto taqsimoti: $p(x,\theta)=\begin{cases}0, x<1,\\ \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, x\geq 1,\end{cases} x\in[1,+\infty), \theta\in\Theta=(1;\infty);$

8) Koshi taqsimoti:

$$p(x,\theta)=\frac{1}{\pi}\frac{\theta_2}{\left[\theta_2^2+(x-\theta_1)^2\right]}, x\in R^1, \theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=R^1\times R^2;$$

Bu yerda 1) va 3) misollardagi taqsimotlar diskret tipda, qolganlari esa uzluksiz tipdadir. Bundan tashqari, 4) va 8) lardan boshqa qolgan 6ta taqsimot eksponentsial oilaga misol bo‘la oladi.

Endilikda matematik statistikaning asosiy tushunchalarini qisman keltirib o‘tamiz: $X^{(n)}$ tanlanmaning ixtiyoriy o‘lchovli funksiyasiga $T\left(X^{(n)}\right)$ statistika deb ataladi. Agar $T\left(X^{(n)}\right)$ statistikaning qiymatlar to‘plami Θ ga teng bo‘lsa, bunday statistika statistik baho (yoki qisqacha baho) deb ataladi. Baholarni $\theta=\theta_n\left(X^{(n)}\right)=(\theta_{1n},...,\theta_{nn}), s\geq 1$, orqali belgilaymiz. Umuman baholar ikki turda bo‘ladi: **nuqtaviy** va **interval**. Nuqtaviy baholashda biz θ uchun aniq bir $\{\theta\}$- statistikalar ketma-ketligini taklif etamiz va interval baholashda esa noma’lum θ ni 1 ga etarlicha yaqin ehtimol bilan qoplovchi biror $\left[\theta_n^-\left(X^{(n)}\right);\theta_n^+\left(X^{(n)}\right)\right]$ oraliqni taklif etamiz. Biz dastlab nuqtaviy baholarning xossalari va ba’zan baholash usullari bilan tanishib o‘tamiz, Ta’rif, tushunchalarni skalyar (S=1) hol uchun keltiramiz. Vektor parametr uchun esa zarurat bo‘lgan holda keltiramiz.

$\{N_n, n*1\}$ baholar ketma-ketligi θ uchun asosli (yoki kuchli asosli) baho deb ataladi, agar θ_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi θ ga $(n\to\infty\ \partial a)$ ehtimol bilan (yoki 1 ehtimol bilan) intilsa, ($\theta_n\xrightarrow{r}\theta$ yoki $\theta_n\xrightarrow{1\,\text{эхт}}\theta$).

Agar $M_\theta\theta_n=\theta$ tenglik $\forall\theta\in\Theta$ uchun bajarilsa, $\{\theta_n, n\geq 1\}$ ketma-ketlik θ uchun siljimagan baho deb ataladi. Agarda $M_\theta\theta_n\to\theta\ \ n\to\infty$ bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlik asimptotik siljimagan baho deb ataladi. $M_\theta\theta_n-\theta=B_n(\theta)$ farq θ_n bahoning sistematik xatoligi deb ataladi.

Agar θ uchun ikki va undan ortiq baholar tavsiya etilgan bo‘lsa, ularni bir-biriga nisbatan effektivlik xossasi orqali solishtirish mumkin. Masalan, agar θ uchun $\{\theta_n, n\geq 1\}$ va $\{\theta_n^2, n\geq 1\}$ baholar ketma-ketligi qaralayotgan bo‘lsa, θ_n^2 baho θ_n ga nisbatan effektiv deb ataladi, agar barcha $\theta\in\Theta$ uchun $M_0\left(\theta_n^2-\theta\right)^2<M_0\left(\theta_n-\theta\right)^2$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa. Bu ketma-ketlik asimptotik effektiv deb ataladi, agar barcha $\theta\in\Theta$ uchun $\dfrac{M_n\left(\theta_n^*-\theta\right)^2}{M_n\left(\theta_n-\theta\right)^2}<1$ tengsizlik bajarilsa. Agar θ_n^* va θ_n lar ikkalasi uchun siljimagan baholar bo‘lsa, θ_n^* ning effektivligi proporsiyalarni solishtirish $D_\theta \theta_n^2 < D_\theta \theta_n, \forall \theta \in \Theta$ orqali aniqlanadi. Tushunarliki, vektor baholarning asoslilik va siljimaganlik xossari ular komponentlari orqali osongina kiritilishi mumkin. Ammo effektivlik tushunchasi vektor parametr uchun atroflicha aniqlanishi mumkin. Shulardan biri quyidagicha ta’riflanadi: ixtiyoriy $v = (v_1, ..., v_n) \in R^2, s > 1$ vektor yordamida R^2 da $v\theta = v_1\theta_1 + ... + v_n\theta_n$ skalyar ko‘paytma kiritamiz. U holda $\theta_n^* = (\theta_{1n}^*, ..., \theta_{nn}^*)$ va $\theta_n = (\theta_{1n}, ..., \theta_{nn})$ uchun effektiv baho deb ataladi, agar barcha $\theta \in \Theta$ uchun

$$M_0(v, \theta_n^8 - \theta)^2 < M_0(v, \theta_n - \theta)^2,$$

$$\sum_{i,j=\overline{1,n}} M_\theta(\theta_{in}^+ - \theta_i^+)(\theta_{jn}^+ - \theta_j^+) < \sum_{i,j=\overline{1,n}} M_\theta(\theta_{in} - \theta_i)(\theta_{jn} - \theta_j)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa.

Tekis minimal dispersiyali siljimagan baho (TMDSB) deb $D[T^*(\mathbf{X}_n)] \le D[T(\mathbf{X}_n)]$: $\forall \theta \in \Theta$, $\forall T(\mathbf{X}_n) : M[T(\mathbf{X}_n)] = \theta$ shartni qanoatlantiruvchi $T^*(\mathbf{X}_n)$ bahoga aytiladi.

Bosh to‘plamning miqdoriy alomatini o‘rganish kerak bo‘lsin.Nazariy mulohazalardan alomatning qanday taqsimotga ega ekanligini aniqlagan bo‘laylik. Mazkur taqsimotni aniqlab beruvchi parametrlarni baholash masalasi paydo bo‘ladi. Masalan, agar o‘rganilayotgan alomatning bosh to‘plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma’lum bo‘lsa, u holda matematik kutilma va o‘rta kvadratik chetlashishni baholash (taqriban topish) zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to‘liq aniqlab beradi; agar alomat Puasson taqsimotiga ega bo‘lsa, u holda bu taqsimot aniqlanadigan X parametrni baholash kerak bo‘ladi.

Odatda tadqiqotchining ixtiyorida tanlanma ma’lumotlari, masalan $x_1, x_2, .., x_n$ miqdoriy alomatning n ta kuzatuv (bu yerda kuzatuvlar mustaqil deb faraz qilinadi) natijasida olingan qiymatlari bo‘ladi. Baholanuvchi parametr aynan shu ma’lumotlar orqali ifodalanadi. $x_1, x_2, .., x_n$ ni erkli tasodifiy qiymatlar $x_1, x_2, .., x_n$ sifatida qabul qilish natijasida nazariy taqsimotidagi noma’lum parametrning statistik bahosini topish —baholanuvchi parametrning taqribiy qiymatini beruvchi kuzatilayotgan tasodifiy qiymatlarga bog‘liq funksiyani topish demakdir. Masalan, quyida ko‘rsatiladigandek, normal taqsimotning matematik kutilmasini baholash uchun

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + .. + X_n)/n.$$

funksiya (alomat bo‘yicha kuzatilayotgan qiymatlarining o‘rta arifmetigi) xizmat qiladi. Shunday qilib, nazariy taqsimotga oid noma’lum parametrning statistik bahosi deb kuzatilayotgan tasodifiy qiymatlarga bog‘liq funksiya tushuniladi.

Bosh to‘plamning taqsimot qonunidagi har bir parametrga nisbatan izlanayotgan qiymatlarni hisoblashga imkon beruvchi ko‘plab funksiyalar mavjud. Masalan, matematik kutilmaning bahosini tanlanma qiymatlarning o‘rta arifmetinigi, variatsion qatordagi chetki hadlar yig‘indisining yarmini, tanlanmaning o‘rta hadi va h.k. larni olish orqali hisoblash mumkin. Qayd qilingan funksiyalar baholarning sifati va joriy etish murakkabligi bilan farq qiladi.

Empirik taqsimotni xarakterlash uchun markaziy va boshlang‘ich momentlarning baholaridan foydalanish mumkin. To‘rtinchi tartibgacha bo‘lgan momentlar qo‘llaniladi, chunki tanlanma momentlarning aniqligi ularning tartibi osishi bilan tushib ketadi, xususan r-tartibli boshlang‘ich momentlarning dispersiyasi $2r$ tartibli momentlarga bog‘liq bo‘ladi. U katta hajmdagi tanlanmalarda ham yuqori tartibli momentlar uchun ahamiyatli tus oladi. Momentlarning tanlanma qiymatlari bevosita tanlanma yoki guruhlangan ma’lumotlar bo‘yicha aniqlanadi.

X tasodifiy kattalik markaziy momentlarning tanlanma qiymatlari tanlanma bo‘yicha quyidagi formulalar bo‘yicha hisoblanadi:

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;$$
$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^k, \quad k = 2, 3, 4. \tag{9.13}$$

Ushbu kattaliklar $m_1 - m_4$ nazariy momentlarning baholari bo‘lib hisoblanadi va tasodifiy deb qabul qilinadi. (9.13) formulalar bo‘yicha hisoblashlar birinchi tartibdan yuqori momentlarning mukammal, ammo siljigan baholarini beradi. Siljishlarni tanlanmaning hajmiga bog‘liq koeffitsientlarni kiritish orqali bartaraf etishga erishiladi. Siljimagan va mukammal baholar bo‘lib, quyidagi formulalar bo‘yicha hisoblangan baholar hisoblanadi:

$$\mu_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2,$$
$$\mu_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\mu_3\,, \tag{9.14}$$
$$\mu_4 = \frac{n(n^2 - 2n + 3)\mu_4 - 3n(2n-3)\mu_2^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Guruhlanmagan ma’lumotlar bo‘yicha r-tartibli boshlang‘ich empirik moment

$$\eta_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,r}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{9.15}$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Momentlarning markaziy va boshlang‘ich baholari o‘zaro quyidagi munosabatlar orqali bog‘langan:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \eta_1, \quad \tilde{\mu}_2 = \eta_2 - \eta_1^2, \\ &\mu_3 = \eta_3 - 3\eta_1\eta_2 + 2\eta_1^3, \\ &\mu_4 = \eta_4 - 4\eta_1\eta_3 + 6\eta_1^2\eta_2 - 3\eta_1^4. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Eksperimental ma’lumotlarni qayta ishlash jarayonida avvaliga boshlang‘ich momentlarning baholarini aniqlash, so‘ngra esa markaziy momentlarning siljigan baholariga o‘tish va nihoyat siljimagan baholarni hisoblash qulaydir.

Nuqtaviy baholash yagona sonli qiymatning topilishini ko‘zda tutib, aynan u parametrning qiymati sifatida qabul qilinadi. Bunday baholashdan eksperimental ma’lumotlar (EM) hajmi yetarli darajada katta bo‘lganda aniqlash maqsadga muvofiqdir. Jumladan, EM ning yetarli hajmi to‘g‘risida umumiy tushuncha yo‘q, uning qiymati baholanuvchi pametrning ko‘rinishiga bog‘liq (bu masalalaga parametrlarni oraliq baholash usullarini o‘rganishda qaytish lozim, hozircha esa 10 tadan kam bo‘lmagan qiymatli tanlanmani yetarli deb qabul qilamiz). EM ning kichik hajmlarida nuqtaviy baholashlar parametrlarning haqiqiy qiymatlaridan tubdan farq qilishi mumkin, bu esa ularning qo‘llashga layoqatligini yo‘qotadi.

Usul K.Pirson tomonidan 1894-yilda taklif etilgan. Usulning mohiyati:

Nechta noma’lum taqsimot parametrlarini baholash kerak bo‘lsa, shuncha empirik momentlar tanlanadi. Kichik tartibli momentlarni tadbiq etish maqsadga muvofiqdir, chunki momentlarning tartibi ortishi bilanoq baholarni hisoblash xatoligi kattalashib boradi;

EM bo‘yicha hisoblangan momentlar bahosi nazariy momentlarga tenglashtiriladi;

Taqsimot parametrlari momentlar orqali aniqlanadi, parametrlarning momentlarga bog‘liqligini ifodalovchi tenglamalar tuziladi, natijada tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bu sistemaning yechimi bosh to‘plamning taqsimot parametrlari bahosini beradi.

9.1-misol. Faraz qilaylik, qiymatlar tanlanmasi berilgan X tasodifiy qiymat gamma-taqsimotga ega bo‘lsin. Bu taqsimotning parametrlari bahosini topish lozim (qayd etish mumkinki, normal taqsimot gamma-taqsimotning xususiy holi bo‘lib hisoblanadi).

Yechim. Gamma-taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega

$$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\exp(-\lambda x),\qquad x\ge 0,\ \ \lambda>0,\ \ \nu\ge 0.$$

Taqsimot ikkita ν va λ parametr orqali xarakterlanadi, shuning uchun bitta parametrni matematik kutilmaning bahosi orqali, boshqasini esa dispersiya bahosi orqali ifodalash lozim. Ushbu taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi mos ravishda ν/λ va □ /□ ^{2} ga teng. Ularning baholari 3-misolda aniqlangan: □ $_1$= 27,51, □ $_2$ = 0,91;. U holda baholanuvchi parametrlar uchun tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\nu}{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\mu_1,$$

$$\frac{\nu}{\lambda^2}=\frac{1}{n-1}.$$

Momentlar usuli mukammal, yetarli baholarni hosil qilib olishga imkon beradi, ular umumiy sharoitlarda asomptotik jihatdan normal taqsmilangan bo‘ladi. Siljishni to‘g‘irlashlar kiritish orqali bartaraf etish mumkin. Baholarning samaradorligi yuqori emas, ya’ni katta hajmdagi tanlanmalarda ham baholarning dispersiyasi nisbatan yuqori bo‘ladi (normal taqsimotdan tashqari, chunki unga nisbatan momentlar usuli samarali baholarni beradi). Amaliyotga joriy etish nuqtai nazaridan momentlar usuli maksimal o‘xshashlik usulidan soddaroq. Qayd etish joizki, usulni to‘rtadan ortiq bo‘lmagan parametrlarni baholash uchun tatbiq etish maqsadga muvofiq, chunki tanlanma usullarning aniqligi ularning tartibi ortishi bilanoq tushib ketadi.

Maksimal o‘xshashlik usuli

θ parametrning m*aksimal o‘xshashlik usulining bahosi (MRUB)* deb, Θ parametrik to‘plamning $L(\mathbf{X}_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)$ maksimal o‘xshashlik funksiyasi o‘zining eng katta qiymati: $L(\mathbf{X}_n,\hat{\theta})=\sup\limits_{\theta\in\Theta}L(\mathbf{X}_n,\theta)$ ga erishadigan nuqtaga aytiladi.

Agar tanlanma fazodan olingan ixtiyoriy $\mathbf{X}_n$ tanlanmaga nisbatan $L(\mathbf{X}_n,\theta)$ maksimumga θ nuqtada erishilsa va $L(\mathbf{X}_n,\theta)$ θ bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda θ ning MRUB

$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X}_n,\theta)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1,...,r$ tenglamani qanoatlantiradi, bu tenglama *o'xshashlik tenglamasi* deb ataladi [19,21,20,24].

9.2-misol. Bernulli taqsimotining r parametri uchun maksimal o'xshashlik bahosini quring: $P\{\xi = k\} = p^k(1-p)^{1-k}$, $k = 0, 1$.

Yechish:

Logarifmik o'xshashlik funksiyasi

$$\ln L(X_1,...,X_n;p) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \ln p + (1-X_i)\ln(1-p)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ln(1-p);$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0 \quad => \quad \hat{p} = \bar{X},$$

ga teng bo'lib, bu yerda $\bar{X}$ – o'rta tanlanma qiymat.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2}\right)\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{(1-p)^2} = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{(1-p)^2}.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning $p = \bar{X}$ dagi ishorasini tekshiramiz:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}\right|_{p=\bar{X}} = -\frac{n\bar{X}}{p^2} - \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - n\bar{X}\right) = -\frac{n\bar{X}}{\bar{X}^2} - \frac{n}{(1-\bar{X})^2}\left(1-\bar{X}\right) =$$

$$= -\frac{n}{\bar{X}} - \frac{n}{(1-\bar{X})} = -\frac{n(1-\bar{X}+\bar{X})}{\bar{X}(1-\bar{X})} = -\frac{n}{\bar{X}(1-\bar{X})} < 0.$$

Shunday qilib, $p = \bar{X}$ da o'xshashlik funksiyasi o'zining maksimumiga erishadi.

9.3-misol. Tekis taqsimotning $\theta > 0$ parametri uchun $[0, \theta]$ kesmada maksimal o'xshashlik bahosini quring.

Yechish:

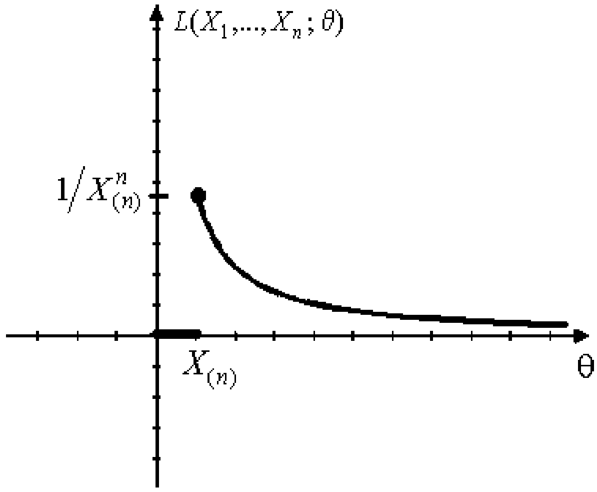
Tanlanmaning o'xshashlik funksiyasi quyidagiga teng

$$L(X_1,...,X_n;\theta) = \begin{cases} \theta^{-n}, \textit{ agar barcha } X_j \in [0,\theta] \\ 0, \textit{ agar kamida bitta } X_j \notin [0,\theta] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \theta^{-n}, \ agar\ X_{(n)} \le \theta \\ 0, \ agar\ X_{(n)} > \theta \end{cases},$$

Bu yerda $X_{(n)}$ – maksimal tartiblashgan statistika.

Tanlanmaning fiksirlangan qiymatlarida (bevosita $X_{(n)}$ fiksirlangan qiymatda) $L(X_1,...,X_n;\theta)$ ning θ ga bog'liqligi 9.10-rasmda ko'rsatilgan. O'xshashlik funksiyasining maksimumiga $\theta = X_{(n)}$ nuqtada erishiladi. Shuning uchun maksimal o'xshashlikning izlanayotgan bahosi $\hat{\theta} = X_{(n)}$ ga teng bo'ladi.



9.10-rasm. O'xshashlik funksiyasi

9.5. Mukammallik mezoni. O'xshashlik funksiyasi. Fisherning axborot miqdori. Rao-Kramer tengsizligi. Samaradorlik mezoni. Eksponentsial model uchun samarali baholar. Ko'p o'lchovli parametr uchun Rao-Kramer tengsizligi. Faktorlashtirish mezoni.

Mukammallik

Ma'lum bir $\tau(\theta)$ funksiyaning $T(\mathbf{X}_n)$ bahosi, agar $n \to \infty$ da $T(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{P} \tau(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$ munosabat o'rinli bo'lganda *mukammal* deyiladi. YA'ni $n \to \infty$ da $\forall \varepsilon > 0$: $P\{|T(\mathbf{X}_n) - \tau(\theta)| > \varepsilon\} \to 0$.

Mukammallik xossasi ixtiyoriy baholash qoidasi uchun majburiydir, lekin u asimptotik hisoblanadi va fiksirlangan tanlanma hajmida bahoning xossalariga (siljimaganlik va minimal dispersiya xossalaridan farqli o'laroq) bog'liq bo'lmaydi [19,21,24].

Mukammallik mezoni. $n \to \infty$ da $M_\theta T_n = \tau(\theta) + \varepsilon_n, D_\theta T_n = \delta_n$ va $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta) \to 0, \delta_n = \delta_n(\theta) \to 0$ bo'lsin. U holda $T(\mathbf{X}_n)$ – $\tau = \tau(\theta)$ funksiyaning mukammal bahosi bo'lib hisoblanadi.

Samaradorlik

$\{F(x;\theta), \theta \in \Omega\}$ oila quyidagi shartlar bajarilganda regulyar hisoblanadi:

1) ixtiyoriy θ, $\theta \in \Omega$ ga nisbatan $f(x;\theta)$ zichlik θ bo‘yicha differentsiallanuvchi bo‘ladi, ya’ni $\frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)$ mavjud;

2) $\{x : f(x,\theta) = 0\}$ to‘plam θ ga bog‘liq bo‘lmaydi.

Rao-Kramer tengsizligi. Agar regulyarlik shartlari bajarilsa, u holda $\tau(\theta)$ parametrik funksiyaning $T(\mathbf{X}_n)$ siljimagan bahosiga nisbatan quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$D[T(\mathbf{X}_n)] \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}, \tag{9.17}$$

bu yerda $i(\theta)$ – Fisherning axborot miqdori. (9.17) tengsizlikning quyi chegarasiga erishiladigan baholash *samarali* deb ataladi.

Samaradorlik mezoni. $T(\mathbf{X}_n)$ – $\tau(\theta)$ ning samarali bahosi bo‘ladi, agar

$$T(\mathbf{X}_n) - \tau(\theta) = a(\theta)U(\mathbf{X}_n, \theta). \tag{9.18}$$

Bu yerda $a(\theta)$ – θ ga bog‘liq biror-bir funksiya, $U(\mathbf{X}_n,\theta) = \frac{\partial \ln L(\mathbf{X}_n,\theta)}{\partial\theta}$.

9.4-misol. $X_1,...,X_n$ – Maksvell taqsimotidan olingan $f(x;\theta) = \frac{2x^2}{\theta^3\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\}, x > 0, \theta > 0$ zichlik funksiyali tanlanma bo‘lsin.

$\hat{\theta} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\bar{X}$ bahoni siljimaganlik, mukammallik va samaradorlikka tekshirish lozim.

Yechish:

1. *Siljimaganlik.*

$$M\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\bar{X}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4n}\sum_{i=1}^{n}MX_i = \frac{\sqrt{2\pi}}{4n}\sum_{i=1}^{n}\frac{4\theta}{\sqrt{2\pi}} = \theta,$$

$\Rightarrow$ $\hat{\theta} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\bar{X}$ baholash θ parametrning siljimagan bahosi bo‘lib hisoblanadi.

2. *Mukamallik.*

$\hat{\theta}$ siljimagan bo‘lgani uchun, bizga $D(\hat{\theta})$ bahoning dispersiyasini o‘rganish etarlidir.

$$D(\hat{\theta}) = \frac{2\pi}{16n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i = \frac{\pi}{8n}\cdot\frac{3\pi-8}{\pi}\theta^2 \to 0,\ n\to\infty,$$

$\Rightarrow$ mukamallik mezoni bo‘yicha $\hat{\theta} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\bar{X}$ mukammal hisoblanadi.

3. Samaradorlik.

Rao-Kramer tengsizligida quyi chegaraga erishilishini tekshirib ko‘ramiz.

Fisherning axborot miqdorini topamiz:

$$i(\theta) = -M\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = -M\left(\frac{3}{\theta^2} - \frac{3x^2}{\theta^4}\right) = \frac{3}{\theta^2}\left(\frac{MX^2}{\theta^2} - 1\right) = \frac{3}{\theta^2}\left(\frac{3\theta^2}{\theta^2} - 1\right) = \frac{6}{\theta^2};$$

$$\frac{1}{ni(\theta)} = \frac{\theta^2}{6n} \neq \frac{3\pi - 8}{8n}\theta^2 = D(\hat{\theta}), \Rightarrow \hat{\theta}$$ θ ning samarali bahosi bo‘lmaydi.

5-misol. Veybul taqsimotining masshtab parametri uchun samarali baholashga yo‘l qo‘yadigan $\tau(\theta)$ funksiyani toping:

$$f(x,\theta) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right\}, \; x \geq 0, \; \theta > 0, \; \alpha > 0.$$

Yechish:

Ehtimolli model regulyar hisoblanadi, chunki tasodifiy qiymatning aniqlanish sohasi parametrlarga bog‘liq bo‘lmaydi va zichlik funksiyasi θ bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘ladi. Shuning uchun samaradorlik mezonidan foydalanish mumkin. Logarifmik o‘xshashlik funksiyasi va uning hosilalari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\ln L(\mathbf{X}_n,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\alpha \cdot X_i^{\alpha-1} - \alpha\ln\theta - \frac{X_i^\alpha}{\theta^\alpha}\right],$$

$$U(\mathbf{X}_n,\theta) = \frac{\partial \ln L(\mathbf{X}_n,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n} X_i^\alpha .$$

Bu yerdan

$$\frac{\theta^{\alpha+1}}{n\alpha}U(\mathbf{X}_n,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^\alpha - \theta^\alpha .$$

Shunday qilib $T(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^\alpha$ $\tau(\theta) = \theta^\alpha$ funksiyaning samarali bahosi bo‘ladi.

Baho statistika bo‘lgani uchun statistikaning ham ba’zi xossalarini bilish zarur. $T = T\left(X^{(n)}\right)$ statistika R oila (yoki parametr) uchun yetarli (yoki kifoya) statistika deb ataladi, agar statistikaning berilgan $T\left(X^{(n)}\right) = t$ qiymatida $X^{(n)}$ ning shartli taqsimoti $P_\theta\left(X^{(n)} \in B / T\left(X^{(n)}\right) = t\right), \forall B \in B^{(n)}$ da θ parametrga bog‘liq bo‘lmasa. Demak, $T\left(X^{(n)}\right)$ yetarli statistika bo‘lsa, u θ haqidagi to‘liq ma’lumotga ega bo‘ladi va bunday holda biror boshqa statistikani bilishimiz θ haqida biror qo‘shimcha ma’lumot bermaydi. Agar baho yetarli statistika bo‘lsa, bu bahoning yana bir muhim xususiyatlaridan biridir. Xususan, $X^{(n)}$ tanlanmaning o'zi trivial etarli statistika deb ataladi. Etarli statistikani aniqlashda yuqoridagi shartli taqsimotni hisoblash ancha qiyin masaladir. Ammo bunday hollarda Neyman-Fisherning quyidagi faktorlashtirish alomati juda qulaydir: $T = T\left(X^{(n)}\right)$ statistika θ parametr uchun yetarli statistika bo'lishi uchun haqiqatga o'xshashlik funksiyasi $L_n(\theta)$ ning quyidagi ko'rinishda ifodalanishi zarur vay etarlidir:

$$L_n(\theta) = \Psi_n\left(T\left(X^{(n)}\right), \theta\right) \cdot h_n\left(X^{(n)}\right), \theta \in \Theta. \tag{9.19}$$

Bu yerda Ψ_n va h_n lar mos ravishda (T, θ) va $X^{(n)}$ larga bog'liq nomanfiy funksiyalardir. Masalan, $L_n(\theta)$ funksiya uchun $L_n(\theta) = n\prod_{i=1}^{n} P\left(X_{(1)}, \theta\right)$ ifoda o'rinli ekanidan $\left(X_{(1)}, ..., X_{(n)}\right)$ variatsion qatorning ham trivial yetarli statistika ekani kelib chiqadi. YA'ni bir misol sifatida eksponentsial oilani olish mumkin. Osongina ko'rish mumkinki, bu holda $\left(\sum_{j=1}^{n} T_1\left(X_j\right), ..., \sum_{j=1}^{n} T_n\left(X_j\right)\right)$- statistika eksponentsial oila uchun yetarli statistikadir. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, birgina taqsimotlar oilasi uchun bir necha yetarli statistika mavjud bo'lishi mumkin. Bunday hollarda ular ichidan soddaroq ko'rinishdagisini tanlashimiz kerak. Masalan, binomial taqsimot uchun

$$T_1 = X^{(n)} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right), T_2 = \left(X_1 + X_2, X_3, ..., X_n\right), ...,$$
$$T_{n-1} = \left(X_1 + ... + X_{n-2}, X_n\right), T_n = X_1 + ... + X_n$$

larning hammasi yetarli statistika bo'ladi. Ammo bu holda T_n statistika qolganlarining funksiyasi va u sodda ko'rinishda, ya'ni bir o'lchovli bo'lgani uchun yetarli statistika sifatida qo'llanilishi mumkin.

Agar F oila uchun etarli statistika T_n mavjud bo'lsa, noma'lum θ parametr uchun baho θ_n^* ni T_n orqali tuzish maqsadga muvofiqdir. Natijada bunday baholar effektivlik xossalariga ega bo'lishi mumkin. Masalan, agar θ_n noma'lum θ uchun biror baho, T_n-etarli statistika bo'lsa, u holda shartli matematik kutilma orqali hisoblanadigan $\theta_n^* = M_\theta\left(\theta_n / T_n\right)$ baho quyidagi xossalarga ega bo'ladi: barcha $\theta \in \Theta$ uchun

$$M_\theta \theta_n = M_\theta \theta_n^*,$$
$$M_\theta\left(\theta_n^* - \theta\right)^2 \leq M_\theta\left(\theta_n - \theta\right)^2,$$

munosabatlar o'rinli bo'lib, oxirgi tengsizlikda tenglik o'rinli bo'lishi uchun 1 ehtimol bilan $\theta_n^* = \theta_n$ bo'lishi zarur va etarlidir. Demak, agar θ_n siljimagan baho bo'lsa, $D\theta_n^* \leq D\theta_n$ tengsizlik θ_n^* optimal bahoni aniqlaydi. Bunday θ_n^* baho minimal dispersiyaga ega bo‘lgan siljimagan baho deb aytiladi.

9.6. Markaziy statistika yordamida ishonch oralig‘ini qurish. Nuqtaviy baholashni taqsimlash yordamida ishonch oralig‘ini qurish

Agar $G(\mathbf{X}_n,\theta)$ taqsimot θ ga bog‘liq bo‘lmasa va har qanday fiksirlangan θ da $G(\mathbf{X}_n,\theta)$statistika uzluksiz va θ bo‘yicha qat’iy monoton bo‘lsa $G(\mathbf{X}_n,\theta)$ *markaziy statistika* deb ataladi .

Markaziy statistika yordamida ishonch oralig‘ini qurish mumkin. $f_G(g)$ $G(\mathbf{X}_n,\theta)$ statistikaning taqsimot zichligi bo‘lsin [17,20].

1. g_1, g_2 ning $P\{g_1 < G(X_n,\theta) < g_2\} = \int_{g_1}^{g_2} f_G(g)dg = \gamma$ munosabatni qanoatlantiruvchi yechimlarini topamiz.

2. $G(X_n,\tilde{T}_1) = g_1$, $G(X_n,\tilde{T}_2) = g_2$ tenglamani $\tilde{T}_1,\tilde{T}_2$ ga nisbatan yechib olamiz.

3. Ishonch oralig‘ining chegaralarini aniqlaymiz

$$T_1 = \min\{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2\},\ T_2 = \max\{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2\}.$$

Markaziy statistika yordamida ishonch oralig‘ini qurishda asosiy muammo shu markaziy statistikani topishdan iboratdir. Markaziy statistika mavjud va sodda ko‘rinishga ega bo‘ladigan modellar sinfini ajratib ko‘rsatish mumkin.

$F(x,\theta)$ –kuzatilayotnan tasodifiy qiymatning θ parametr bo‘yicha monoton taqsimot funksiyasi bo‘lsin. Markaziy statistika sifatida n-shakldagi parametrli gamma-taqsimotga bo‘ysunadigan $G(\mathbf{X}_n,\theta) = -\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i,\theta)$ funksiyani olish mumkin.

Paramerlarning nuqtaviy bahosining taqsimotidan foydalangan holda ishonch oralig‘ini qurish

Agar θ parmetrga nisbatan $T_n = T(\mathbf{X}_n)$ nuqtaviy baholash mavjud bo‘lib, uning θ bo‘yicha monoton va uzluksiz $F_T(t,\theta)$ taqsimot funksiyasi berilgan bo‘lsa, u holda ishonch oralig‘ini shu funksiyaga asoslangan holda qurish mumkin[15,17,20]:

1. $T_n = T(\mathbf{X}_n)$ nuqtaviy baholashni hisoblaymiz.

2. $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ ga nisbatan

$$F_T\left(T_n, \tilde{\theta}_1\right) = \frac{1-\gamma}{2}, F_T\left(T_n, \tilde{\theta}_2\right) = \frac{1+\gamma}{2}$$

tenglamalarni yechib olamiz.

3. Ishonch oralig‘ining chegaralarini aniqlaymiz:

$$T_1 = \min\left(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right), T_2 = \max\left(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right).$$

6-misol. $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$, $x \geq 0$ eksponentsial taqsimotning θ parametri uchun $X_1,...,X_n$ tanlanma bo‘yicha aniq γ-ishonch oralig‘ini quring.

Yechish:

$F(x;\theta) = 1 - \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$ taqsimot funksiyasi θ parametr bo‘yicha monoton (o‘suvchi) hisoblanadi ($F'_\theta(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}} > 0$), demak markaziy statistika sifatida $f(x;\alpha,n) = \frac{x^{n-1}e^{-x/\alpha}}{\Gamma(n)\alpha^n}$ zichlik funksiyali gamma taqsimotga bo‘ysungan $G(\mathbf{X}_n,\theta) = -\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_i,\theta)$ funksiyani olish mumkin, bu yerda, $x > 0$, $\alpha > 0$, n – tanlanmaning hajmi.

U holda γ-ishonch oralig‘ining (T_1, T_2) chegaralari $G(\mathbf{X}_n, T_1) = g_1$, $G(\mathbf{X}_n, T_2) = g_2$ tenglamalarni sonli yechish orqali topiladi, bu yerda g_1 va g_2 $P\{g_1 < G(\mathbf{X}_n,\theta) < g_2\} = \int_{g_1}^{g_2}\frac{x^{n-1}e^{-x/\alpha}}{\Gamma(n)\alpha^n}dx = \gamma$ munosabatni qanoatlantiradigan qilib tanlanadi.

9.7. Statistik gipotezalarni tekshirish nazariyasi. Pirsonning xi-kvadrat mutanosiblik mezoni

U yoki bu taqsimotning xarakteri to‘g‘risidagi barcha farazlar-gipoteza bo‘lgani tufayli, ular nazariy hamda empirik chastotalar o‘rtasidagi farq qay hollarda ahamiyatsiz, ya’ni tasodifiy, qay hollarda esa ahamiyatli (tasodifiy emas) ligini o‘rnatishga imkon beruvchi *mutanosiblik mezonlari* yordamida statistik tekshiruvdan o‘tkazilishi lozim. Shunday qilib, mutanosiblik mezonlari qatorini tekislash davomida empirik qatordagi taqsimotning xarakteri to‘g‘risida o‘rtaga tashlangan gipotezaning to‘g‘riligini tasdiqlash yoki inkor etishga imkon beradi.

Bir qator mutanosiblik mezonlari mavjud. Ko‘p hollarda Pirson, Romanovskiy va Kolmogorov mezonlari tadbiq etiladi [19-21,24,25].

Pirsonning χ^2 *mutanosiblik mezoni asosiy mezonlardan biri bo‘lib*:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'}$$

bu yerda k –empirik taqsimot bo‘lib yuborgan guruhlar soni, f_i– i-guruhdagi alomatning kuzatilayotgan chastotasi, f_i'– nazariy chastota.

χ^2 taqsimot uchun jadvallar tuzilgan bo‘lib, ularda α ahamiyatlik darajasi hamda *df (yoki* ν) erkinlik darajasi uchun χ^2 mutanosiblik mezonining kritik qiymati ko‘rsatilgan bo‘ladi.

α ahamiyatlilik darajasi –o‘rtaga tashlangan gipotezaning xatolik tufayli chetlashish ehtimoli, ya’ni to‘g‘ri gipotezaning rad etilish ehtimoli. Statistikada uchta bosqichdan foyladaniladi:

- a= 0,10, u holda R=0,90 (100 tadan 10 ta holda to‘g‘ri gipotea rad etilishi mumkin);
- a= 0,05, u holda R=0,95;
- a= 0,01, u holda R=0,99.

df erkinlik darajalari soni taqsimot qatoridagi guruhlar soni minus bog‘lanishlar soni ko‘rinishida ifodalanadi: *df = k –z.* Bog‘lanishlar soni deganda empirik qatorning nazariy chastotalarni hisoblashda qo‘llanilgan ko‘rsatkichlar, ya’ni empirik hamda nazariy chastotalarni bog‘lovchi ko‘rsatkichlar soni tushuniladi.

Masalan, normal taqsimot egri chizig‘i bo‘ylab tekislashda uchta bog‘lanish mavjud bo‘ladi:

$$\bar{x}_{эмп} = \bar{x}'_{теор}; \quad \bar{\sigma}_{эмп} = \bar{\sigma}'_{теор}; \quad \sum f_{эмп} = \sum f_{i\ теор}.$$

Shu tufayli normal taqsimot egri chizig‘i bo‘ylab tekislashda erkinlik darajalarining soni *df = k –3* ko‘rinishda aniqlanadi.

Muhimlikni baholash uchun hisoblangan qiymat $\chi^2_{расч}$ jadvaldagi $\chi^2_{табл}$ qiymat bilan solishtiriladi.

Nazariy va empirik taqsimotlar to‘laligicha ustma-ust tushganda $\chi^2 = 0$, aks holda esa $\chi^2 > 0$ *tengsizlik bajariladi*. Agar $\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}$ bo‘lsa, u holda berilgan ahamiyatlilik darajasi hamda erkinlik darajalarining soni asosida uzoqlashishlarning ahamiyatsizligi (tasodifiyligi) to‘g‘risidagi gipotezani bekor qilamiz.

$\chi^2_{расч} \le \chi^2_{табл}$ bo‘lgan holda empirik qator ko‘zda tutilgan taqsimot to‘g‘risidagi gipotezaga to‘g‘ri keladi va *R=(1-a)* ehtimollik bilan nazariy hamda empirik chastotalar o‘rtasidagi farq tasodifiy ekanligini tasdiqlash mumkin degan xulosaga kelamiz.

Pirsonning mutanosiblik mezoni to‘plam hajmi yetarli darajada katta $N \geq 50$ bo‘lganda qo‘llaniladi, jumladan bunda har bir guruhning chastotasi beshdan kichik bo‘lmasligi shart.

9.8. Normallikni tekshirish mezoni. Normal tanlanmalar dispersiyalarining tengligi to‘g‘risidagi gipotezani tekshirish uchun Fisher mezoni

Mezondan normal taqsimotli ikkita tanlanmaning dispersiyalarini taqqoslash uchun foydalaniladi.

Ikkita tanlanmaning dispersiyalari qiymati bo‘yicha katta dispersiya (sur’atda yoziladi) ga nisbatan kichigini (mahrajda yoziladi) taqqoslash orqali solishtiriladi [19-21,24,25]. Shuning uchun mezonning qiymati 1, 0 dan katta yoki teng.

Gipotezalar

H_0: 1-tanlanmadagi dispersiya 2-tanlanmadagi dispersiyadan farq qilmaydi

H_1: 1-tanlanmadagi dispersiya 2-tanlanmadagi dispersiyadan farq qilymadi

Cheklovlar (chegaralanishlar)

Tanlanmalar to‘g‘risidagi ma’lumotlar oraliqlar shkalasi yoki munosabatlar shkalasi bo‘yicha o‘lchanishi lozim.

Ikkala taqqoslanuvchi tanlanmalar normal taqsimot qonuniga ega bo‘lishi kerak.

Algoritm

1. Bitta mutanosiblik mezoni bo‘yicha taqsimot qonunining normalligi tekshiriladi.
2. Har bir tanlanma uchun $\bar{x}_1$va $\bar{x}_2$ qiymatlarning o‘rta arifmetigi $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda x_i – i-kuzatuv natijasining qiymati
3. Har bir tanlanma uchun $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ formula bo‘yicha dispersiyalarning S_{x1}^2va S_{x2}^2 qiymatlari hisoblanadi
4. Tanlanmalar bo‘yicha erkinlik darajalari soni aniqlanadi:
$df_1 = (n_1 - 1)$- birinchi tanlanma bo‘yicha va $df_2 = (n_2 - 1)$ ikkinchi tanlanma bo‘yicha.
5. $F_{эмп}$ -mezonning empirik qiymati

$F_{эмп} = \dfrac{S_{x1}^2}{S_{x2}^2}$ yoki $F_{эмп} = \dfrac{S_{x2}^2}{S_{x1}^2}$ formulalardan biri bo‘yicha hisoblanadi, bunda sur’atdagi dispersiya mahrajdagi dispersiyadan katta bo‘lishi kerak.

6. Fisher mezonining topilgan empirik qiymati $F'_{эмп}$ $F'_{кр}$(ilovadagi 2-jadval bo‘yicha) kritik qiymat bilan taqqsolanadi.

7. Agar empirik qiymat $F'_{эмп} < F'_{кр}$ bo‘lsa, u holda tanlanmalardagi dispersiyalarning tengligi to‘g‘risidagi H_0 gipoteza berilgan α ahamiyatlilik darajasida qabul qilinadi.

9.9. Tasodifiy sonlar ketma-ketligini generatsiya qilish usullari

Kompyuterda statistik modellashtirishni amalga oshirishda berilgan ehtimollik xaraktyerstika bilan kompyuterda ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlarni olish (generatsiya qilish) masalasi (paydo bo‘ladi) kelib chiqadi. Bunda har bir son – bu real jarayon yoki tizimning tasodifiy (toyishiga) siljishiga olib keluvchi, qandaydir parametrini tasodifiy qiymatga imitatsiya qiladi. Kompyuterda bunday ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlarni generatsiya qilish *"Monte-Karlo usuli" nomini olgan [17,20].*

Matematik adabiyotlarda “ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlar” yoki oddiy “tasodifiy sonlar” termini ishlatiladi. Lekin, bu terminlarni falsafa nuqtai nazaridan tahlil qiladigan bo‘lsak, u holda savol berish mumkin: tasodifiy songa o‘xshish obyekt bormi? 2 soni - bu tasodifiy sonmi? Yoki 17 soni - tasodifiy sonmi? Albatta, yo‘q. Agar aniq termin ishlatilsa, u holda faqat ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlar yoki parametrning tasodifiy qiymati haqida aytish mumkin. Lekin adabiyotlarda “ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlar” va “tasodifiy sonlar” termini ishlatiladi. Bu shuni bildiradiki har bir son ketma ketlikning boshqa biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ixtiyoriy ravishda olinadi va uning berilgan intervalda paydo bo‘lishlikdagi aniqlangan ehtimolligi mavjud.

Oldin olimlar, o‘z ishlarida tasodifiy sonlarni olishda o‘yin kartalari, chuqurlikka sharchalarni tashlash kabi yo‘llardan foydalangan. Keyinchalik tasodifiy sonlarni olish uchun maxsus mexanik mashinalardan foydalandi. 1955 yili RAND Corporation bu mashinalarda milliondan ortiq tasodifiy sonlardan iborat yaxshi jadvalni ishlab chiqdi va uni chop etdi. Kompyuterlarning yaratilishidan keyin ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlarni olishning (kompyuterda generatsiya qiluvchi) yaroqli dasturini ishlab chiqish uchun effektiv algoritmlarni izlash boshlandi.

Tasodifiy sonlar ketma-ketligi

Ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlarni detyerministik usulda, ya'ni maxsus algoritm yordamida hosil qilish *psevdotasodifiy yoki kvazitasodifiy* deyiladi.

Tasodifiy sonlarni berilgan taqsimot qonuniyatda berilgan intervalda kompyuterda generatsiya qilish masalasi bir necha bosqichlardan iborat:

- Oldin [0,1] intervalda psevdotasodifiy sonlar tekis taqsimlangan ketma-ketlikda olinadi.
- Tekis taqsimlangan ketma-ketlikdan berilgan taqsimot qonuniyatda berilgan intervalda psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligi olinadi. Bir xil ehtimollikka ega tasodifiy sonlar ketma ketligi tekis taqsimlangan deyiladi.
- Tekis taqsimlangan psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligini olishning algoritmik usuli mohiyati shundan iboratki, psevdotasodifiy sonlar ma'lum bir rekkurent formula $x_{i+1} = f(x_i)$ yordamida olinadi. Bu yerda (i+1) qiymat oldingi qiymatlardan arifmetik va mantiqiy operatsiyalarni o'zida mujassamlashtirgan bir necha algoritmlarni qo'llash yo'li bilan tashkil qilinadi.

Barcha usullar uchun umumiy bo'lgan talablar:

1.Psevdotasodifiy sonning har birini olishda operatsiyalar soni kichik bo'lishi kerak;

2.Tasodifiy son taqsimoti – tekis taqsimotga yaqin bo'lishi kerak.

O'rta kvadrat usuli

Birinchi bor tekis taqsimlangan psevdotasodifiy sonlarni olishning algoritmik usulini Djon fon Neyman (kibernetika asoschilaridan biri) taklif qildi. Bu usul *"O'rta kvadrat usuli" ("metod srednix kvadratov") nomini oldi*.

Usulning mohiyati quyidagicha: olingi tasodifiy son kvadratga ko'tariladi, keyin natijadan o'rta raqam (son) chiqariladi.

Misol:

$$x_0 = 0.2061, \text{ bo'lsin u holda } x_0^2 = 0.04|2477|21;$$
$$x_1 = 0.2477,\ x_1^2 = 0.06|1355|29;$$
$$x_2 = 0.1355,\ x_2^2 = 0.01|8360|25$$

va hokazo.

O'rta kvadrat usuli dan ko'rinib turibdiki oldingi sonlarni yetarlicha yaxshi "aralashtirish" kerak. Lekin, u kamchiliklarga ham ega:

1. Agar, ketma-ketlikning qaysidir a’zosi nolga teng bo‘lsa, u holda barcha keyingi a’zolari ham nolga teng bo‘ladi.

2. Ketma-ketlik “takrorlanib qolish” ("zasiklivatsya") tendensiyasiga ega, ya’ni cheksiz sondagi takrorlanadigan sikl tashkil etishi mumkin.

“Takrorlanib qolish” ("zasiklivatsya") xossasi rekurrent formulalarga $x_{i+1}=f(x)$ asoslanib qurilgan barcha ketma-ketliklarga xosdir.

Takrorlanuvchi sikl davr (period) deyiladi. Davr uzunligi har xil ketma-ketliklar uchun har xil. Qancha katta bo‘lsa, shuncha yaxshi.

Chiziqli kongruent usul

Bugungi kunda eng yaxshi ma’lum usullardan tasodifiy sonni imitatsiya qilish bo‘lib, u 1948 yil D.X.Lemyer tomonidan taklif etilgan sxemaning xususiy holidir.

Bu usulning mohiyati quyidagicha: To‘rtta “sehrli sonlar” ("magicheskie chisla") olamiz:

x_0– boshlang‘ich qiymat, $x_0 \geq 0$;

a– ko‘paytiruvchi, $a \geq 0$;

c– orttiruvchi, $c \geq 0$;

m– modul, $m > x_0, m > a, m > c$.

U holda izlanayotgan tasodifiy sonlar ketma-ketligi quyidagi munosabatdan olinadi:

$$x_{i+1} = (ax_i + c)(m),\ n \geq 0, \tag{9.20}$$

ya’ni har bir tasodifiy son - (ax_i+c) ni m ga bo‘lishdagi qoldiqdan aniqlanadi (operatsiya Mod – qoldiqni aniqlash bo‘lib, bu termin “modulo" so‘zidan olingan – tarjimada "qoldiq"dir).

(9.20) munosabatdan olingan ketma-ketlik chiziqli kongruentli ketma-ketlik deyiladi.

Misol: $x_0 = a = c = 7$, $m = 10$.

U holda ketma-ketlik quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0,…

Ko‘rinib turibdiki “sehrli sonlar” dan olingan qiymatlar ketma-ketligi darhol “takrorlanib qolish” bo‘lib, bu yerda davr uzunligi 4 ga teng.

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, “sehrli sonlar”ni ixtiyoriy olish mumkin emas. Ko‘plab tadqiqotlar o‘tkazilgan va “qanday qoida asosida tanlash kerak” “sehrli sonlar”ni savoli bo‘yicha teoremalar isbot qilingan.

c=0 bo‘lganda tasodifiy sonni olish usuli "multiplikativ kongruent usul", $c \neq 0$ - bo‘lganda esa "aralash kongruent usul" deyiladi. c=0 bo‘lganda ketma ketlikni olish tez ishlab chiqariladi, lekin ketma-ketlikning davr uzunligi kamayadi.

m modulni tanlash. Uzun ketma-ketlikni olish va hisoblash tezligini oshirish uchun m ni mashina razryadiga moslab olish kerak. 32^x razryadli mashina uchun $m = 2^{31}$=2147483648,

Demak, 32^x razryadli mashina uchun maksimal butun son mashinada joylashuvchi $w = 2^{31} - 1 = 2147483647...$ songa teng.

U holda $m = w + 1$.

Ko‘paytiruvchi qiymati ketma-ketlikning davr uzunligiga ham ta’sir qiladi. Bu savol bo‘yicha ham ko‘plab tadqiqotlar o‘tkazilgan.

Chiziqli kongruentli ketma-ketlik – keltirilgan tasodifiy sonlar manbaida yagona emas. Uni umumlashtirish mumkin, masalan kvadratik kongruent usulda

$$x_{i+1} = (dx_1^2 + a \cdot X_n + c) Mod(m).$$

Ma’lumki, kvadratik usulni R.Koveyu taklif etgan:

$$x_{i+1} = x_i (x_i + 1) Mod(2^e).$$

Tasodifiy sonni oluvchi ma’lum usullardan biri, Fibonachchi ketma-ketligini ishlab chiquvchi usuldir:

$$x_{i+1} = (x + x_i - 1) Mod(m).$$

Tasodifiy sonni oluvchi ma’lum usullardan yana biri Grinom taklif qilgan usuldir:

$$x_{i+1} = (x + x_i - k) Mod(m),$$

bu yerda *k*- katta son.

Mavjud yana additiv deb ataluvchi usul bor. Bu usulda ko‘paytirish va bo‘lish operatsiyalari talab etilmaydi, va boshqa usullar.

Monte-Karlo usuli

Statistik tajribalar haqidagi tushuncha asosida statistik sinovlar usuli (Monte-Karlo usuli) yotadi. Uning ma’nosi shundan iboratki, sinovlar natijasi berilgan qonuniyat bo‘yicha taqsimlangan ma’lum tasodifiy miqdor qiymatidan bog‘liq qilib qo‘yiladi. Shuning uchun ham har bir sinov natijasi tasodifiy xaraktyerga egadir. Bir qancha sinovlar o‘tkazilgandan keyin ko‘plab kuzatiladigan xarakteristik qiymatlar olinadi. Olingan ma’lumotlar (qiymatlar) qayta ishlanadi va mos son baho kattaligida tasvirlanadi.

Statistik sinovlar usulini stoxastik va detyerminallashgan tizimlarni tadqiq qilishda ishlatamiz. Bu usulni kompyutersiz qo‘llash mumkin emas.

Misol. Aytaylik aylana r = 5 radiusga ega, uning markazi (1,2) nuqta koordinatasi bilan joylashgan. Unga mos aylana tenglamasi quyidagicha.

$(x\text{-}1)^2 + (u\text{-}2)^2 = 25.$

Aylana maydonini baholash kerak.

Masalani Monte-Karlo usulida yechish uchun aylanani kvadratda yozamiz. Uning qirralari koordinatalari (-4;-3); (6;-3); (-4;7); (6;7) bo‘lsin. U holda kvadrat ichidagi har qanday nuqta quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kerak $-4 < x < 6$ va $-3 < u < 7$.

Berilgan masalani yechishda barcha kvadrat ichidagi nuqtalar bir xil ehtimollik bilan paydo bo‘ladi, ya’ni x va y bir xil ehtimollik zichligi bilan taqsimlangan.

(- 4 < x < 6) uchun $F(x)$ = 1/10, aks hol uchun $F(x)$ = 0,

(-3 < y < 7) uchun $F(y)$ = 1/10, aks hol uchun $F(y)$ = 0.

Sinovlarni o‘tkazamiz va tasodifiy nuqtalar to‘plamini olamiz, aylana ichiga tushuvchi nuqtalar sonini sanab chiqamiz. Agar olingan nuqtalar n kuzatishlardan tashkil qilingan bo‘lsa va n tadan m ta nuqta aylana ichiga tushgan bo‘lsa, u holda aylana maydonini baholashni quyidagi formuladan olish mumkin:

$S_{kr} = S_{kv}\, m/n = 100\, m/n.$

9.1-jadvalda n ning har xil qiymatida olingan S_{kr} bahosi keltirilgan. Bunda har bir n uchun 5 ta progon bajarilgan ($S_{kr} \approx 78{,}54$ sm).

9.1-jadval

Aylana maydoni bahosi

Progon nomeri	**Aylana maydoni bahosi S_{kr}**				
	Sinovlar soni *n*				
	100	200	1 000	5 000	10 000
1	78	79,5	77	79,5	77
2	70	77	78	81,88	78,8
3	81	77,3	80,2	79,5	79,8
4	70	79,13	81,29	78,22	78,6
5	79	77,72	77,76	79	78,26
O‘rtacha	75,6	78,63	78,77	78,23	78,88
Dispersiya	27,3	0,3	0,0789	0,0785	0,01

9.10. Tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar ketma-ketligini kompyuterda generatsiya qilish

Har xil turdagi kompyuterlarning standart matematik va dasturiy ta'minoti tekis taqsimlangan psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligi**ni generatsiya qilish uchun m**axsus protsedura va qism dasturlariga ega. Hozirgi vaqtda barcha yuqori darajali tillar tekis taqsimlangan psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligi **genyeratori dasturiga ega**. Ularga *tasodifiy sonlar datchigi* deb atashadi. Tasodifiy sonlar datchigi quyidagi nomlarga ega: RAN, RAND, RANDU, RND, RANDOM, RANDOMIZE va boshqa. Bu nomlar inglizcha random so'zidan olingan bo'lib, tasodifan ma'nosini anglatadi. Shu sabab tasodifiy sonlar datchigi ayrim hollarda *randomizator* ham deb yuritiladi [21,24].

Tasodifiy sonlar datchigi odatda nol va bir bilan tekis taqsimlangan haqiqiy sonlar ketma-ketligi**ni** Un **generatsiya qiladi. Lekin oldin datchik noldan to m gacha intervalda butun** tasodifiy sonlar x_i ketma-ketligi**ni generatsiya qiladi. Bu yerda m mashinada joylashuvchi maksimal butun sondan bittaga katta son.**

32^x razryadli mashina uchun m:

$$m = 2^{31}=2147483648.$$

$$1/m = 0.4656613\ E\text{-}9.$$

RANDU datchigi algoritmi

Tekis taqsimlangan tasodifiy sonlarning RANDU datchigini ko'rib chiqamiz. Bu datchik maxsus IBM tizimi uchun mo'ljallangan va boshlang'ich takrorlanishdan oldin 2^{29} qiymatni tashkil qiladi. Datchik algoritmi daraja qoldig'i usulini ishlatadi.

RANDU datchigi quyidagiga mo'ljallangan:

[0,1] intervalda tekis taqsimlangan tasodifiy haqiqiy son YF va $[0,2^{31}]$ intervalda tasodifiy butun son IY hisoblash. Kiritiladigan son sifatida IX butun tasodifiy son xizmat qiladi, chiqishda yangi butun IY son va haqiqiy YF sonlari tashkil qilinadi (2.37-rasm).

Datchikka murojaat:

RANDU (IX,IY,YF).

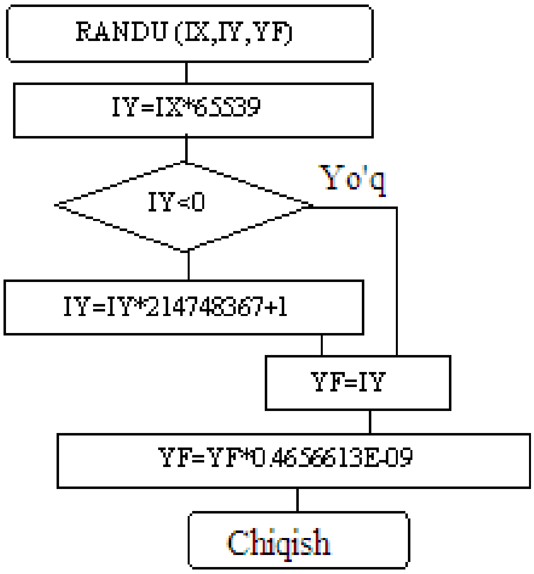
Parametrlar tavsifi:

IX – birinchi murojaatda – toq butun son $\leq 9.$

Birinchi murojaatdan keyin IX=IY, bu yerda IY – oldingi murojaatda hisoblangan, butun son.

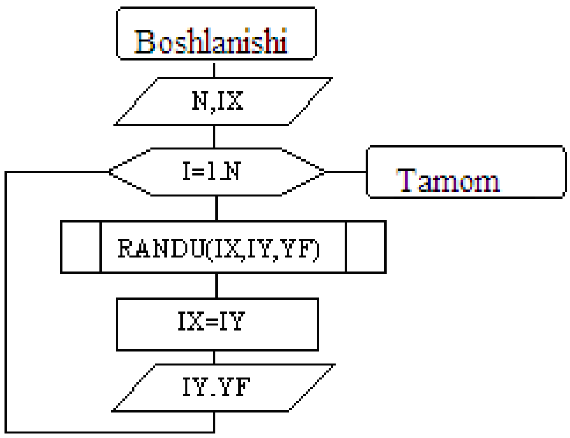
IY – butun tasodifiy sonni, u $[0,2^{31}]$ intervalda aniqlanadi.

YF– [0,1] intervalda tekis taqsimlangan haqiqiy son natijasida olingan.



9.11-rasm**.** RANDU datchigi algoritmi

RANDU datchigini ishlatib, tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar ketma-ketligini hisoblash va chop etish algoritmini quramiz (9.12-rasm).



9.12-rasm**.** Tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar ketma-ketligini hisoblash algoritmi

Boshlang‘ich ma’lumotlar:

N – ketma-ketlik uzunligi (kolichestvo ispitaniy).
birinchi murojaatda – toq butun $son \leq 9$.

IX – boshlang‘ich qiymat, toq butun $son \leq 9$.

Misol: IX = 1234567.

Parametr IX ning har xil boshlang‘ich qiymatlarida har xil tekis taqsimlangan psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligi tashkil qilinadi.

[0,1] oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy sonlarni generatsiya qilish uchun bitta oldingi sonni o‘zida oluvchi murakkab arifmetik ifodadan kasr qismini ajratishni ishlatadi.

V_{i+1} =FRAC(k V_i)

FRAC – kasr qismini ajratish operatori,

V_i – oldingi tasodifiy son,

V_{i+1} - keyingi tasodifiy son,

k-8t = 3,

t – toq butun son.

V_0 ning har xil boshlang‘ich qiymatlarida har xil ketma-ketlikdagi tasodifiy sonlar tashkil qilinadi.

Tasodifiy sonlar soni bitta davrda bir necha mingdan yuz minglabgacha.

[0,1] oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy sonlarni [a,b] oraliqqa o‘tkazish uchun quyidagi formulani ishlatish mumkin:

$$x_{i+1} = a + (b - a)V_{i+1} .$$

9.11. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni modellashtirish usullari

Normal taqsimot qonuniyati bilan tasodifiy sonni modellashtirish masalasini yechish bir necha bosqichdan iborat:

1. Oldin normal taqsimot imitatsiya qilinadi va [0,1] oraliqda tekis taqsimlangan psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligi olinadi.
2. Keyin, tekis taqsimlangan psevdotasodifiy miqdorni ishlatib normal taqsimot qonuniyati bilan psevdotasodifiy sonlar ketma-ketligi olinadi (ko‘p hollarda normallashtirilgan holda, ya’ni M(X) = 0. $\sigma = 1$).

Aytaylik, Y – [0,1] intervalda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin. Normal qonuniyat bilan taqsimlangan X tasodifiy miqdorni olish talab qilingan bo‘lsin.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni modellashtirishning ayrim usullarini qarab chiqamiz.

Qutb koordinatasi usuli

*Qutb koordinatasi usuli n*ormal qonuniyat bilan taqsimlangan psevdotasodifiy miqdorlar ketma-ketligini olishning birinchi usullariga kiradi. Bu usul o‘rta qiymati nolga teng va o‘rta kvadratik chetlanishi birga teng ikkita berilgan bog‘liq bo‘lmagan normal taqsimlangan tasodifiy sonlar y_1 va y_2 bilan ikkita bog‘liq bo‘lmagan x_1 va x_2 normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarni hisoblaydi.

Usul algoritmi:

1. [0,1] intervalda ikkita bog‘liq bo‘lmagan normal taqsimlangan y_1 va y_2 tasodifiy sonlarni ishlab chiqish.

2. Formula kiritiladi va hisoblanadi:

$V_1 = 2 * y_1 - 1;$

$V_2 = 2 * y_2 - 1.$

Endi V_1 va V_2 kattaliklar [-1;+1] intervalda tekis taqsimlangan va ularni siljuvchi nuqta formasida tasvirlash qulay.

3. Formula kiritiladi va hisoblanadi:

$S = V_1^2 + V_2^2$

4. Shart tekshiriladi: $S \geq 1$.

Agar "ha" bo‘lsa, u holda 1 qadamga qaytish kerak.

Agar "yo‘q" bo‘lsa, u holda 5 qadamga o‘tiladi.

5. x_1 va x_2 hisoblash:

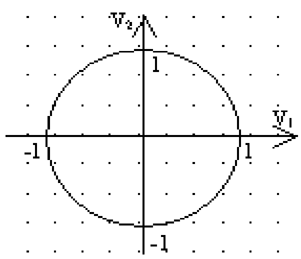
$$x_1 = V_1 \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln S}{S}},$$
$$x_2 = V_2 \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln S}{S}}. \qquad (9.21)$$

6. x_1 va x_2 olingan kattaliklar – bu o‘rta qiymati nolga teng va o‘rta kvatratik chetlanishi birga teng deb talab qilinadigan normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlardir.

7. Boshqa o‘rta qiymat va o‘rta kvatratik chetlanish uchun hisoblash quyidagicha bo‘ladi:

$x_i = a + x_i \cdot \sigma.$

Qutb koordinatasi usulini analitik geometriyadan foydalanib oson isbotlash mumkin. Dekart koordinatalari V_1 va V_2 bilan aniqlangan tekislikni qaraymiz. Usulning 1 va 2 qadamlarida biz tekislikda d*ekart koordinatalari* (V_1,V_2) va polyar koordinatalari $V_1 = R \cdot \cos\theta, V_2 = R \cdot \sin\theta,$ bilan tekis taqsimlangan tasodifiy nuqtalarni olamiz. Bu yerda R^2=S. Keyin usulning 1 va 2 qadamlari yordamida biz bu tasodifiy nuqtalarning faqat birlik aylana ichida joylashganlarini qoldiramiz (9.13-rasm).



9.13-rasm. Qutb koordinata usulining geometrik tasviri

Bunda birlik aylana ichida nuqtalarning tushishi o‘rta qiymati nolga teng va o‘rta kvadratik chetlanishi birga teng bo‘lgan normal taqsimot qonuniyatiga bo‘ysunadi.

Birlik aylana ichida normal taqsimlangan, polyar koordinata nuqtalariga o‘tish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$x_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln y_1} \cdot \cos(2\pi \cdot y_1),$$
$$x_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln y_2} \cdot \cos(2\pi \cdot y_2). \qquad (9.22)$$

Nazorat savollari

1. Tasodifiy miqdor deb qanday kattalikka aytiladi?
2. Tasodifiy miqdorlar qachon diskret (uzuluvchi) deyiladi?
3. Tasodifiy miqdorlar qachon uzluksiz deyiladi?
4. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuniyati deb nimaga aytiladi?
5. Taqsimot qonuniyati qanday ko‘rinishda berilishi mumkin?
6. Integral taqsimot funksiyasi va uning geometrik ma’nosi nima?
7. Integral taqsimot funksiyasi qanday xossalarga ega?
8. Differentsial taqsimot funksiyasi nima va u qanday xossalarga ega?
9. Zichlik taqsimot qonuni nima?
10. Tasodifiy miqdorlarning qanday sonli xarakteristikalari bor?
11. Matematik kutish nima va uning qanday xossalari bor?
12. Dispersiya nima va u qanday xossalarga ega?
13. O‘rta kvadratik chetlanish nima va u qanday xossalarga ega?
14. Gauss egri chizig‘i deb nimaga aytiladi va u qanday xossalarga ega?
15. Umumiy normal taqsimot va normallas

Adabiyotlar

1. Самарский А.А., Михайлов М. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физ.мат.лит., 2005. – 320 с.
2. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоиздат, 1996. – 544 с.
3. Молчанов И. Моделирование сложных систем.- М.: Наука 1986.-402с.
4. Ахмеров Р.Р. Математическое моделирование. Курс лекций для студентов механико-математического факультета НГУ. Новосибирск Изд-во НГУ, 2005.-375с.
5. В.К.Кабулов, А.Ф.Файзуллаев, Ш.А.Назиров. Ал-Хорезми, алгоритм и алгоритмизация. Ташкент: Фан, 2006. – 665 с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. – 512с.
7. Дьяконов В.П. Maple 7: учебный курс. СПб.: Питер, 2001.-605с.
8. Коробейников В.П. Математическое моделирование катастрофических явлений природы.-М.:Знание,1986.-48с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия “Математика. Кибернетика”;№1).
9. Кабулов В.К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. Ташкент: Фан, 1978. – 302 с.
10. Von Ludwig Bertalanffy. General System Theory / Общая теория систем. New York: George Braziller, 1968.
11. Михалевич В.С., Волкович В.А. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982. 288 с.
12. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982. 152 с.
13. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1974. 344 с.
14. Исраилов М.И. Ҳисоблаш математикаси. Тошкент. “Ўқитувчи” 1990.-321с.
15. Белолипецкий В.М., Шокин Ю.И. Математические моделирование в задачах охраны окружающей среды.- Новосибирск: Изд. “ИНФОЛИО-пресс”, 1997.-240с.
16. Андриевский Б., Фрадков А.Элементы математического моделирования в программных средах Matlab5. М.:Наука,2002.-286с.
17. Вабихевич П.Н. Численное моделирование. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 152с.
18. Дородницын А.А. Информатика: предмет и задачи // Кибернетика. Становление информатики. – М.: Наука, 1996.
19. Дородницын А.А., Еленин Г.Г. Симметрия в решении уравнений математической физики. – М.: Знание, 1984. – 64с.
20. Коробейников В.П. Математическое моделирование катастрофических явлений природы. – М.: Знание, 1986. – 48с.
21. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608с.

22. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 278с.
23. Михайлов А.П. Математическое моделирование распределения власти в иерархических структурах // Математическое моделирование. – 1994. – Т. 6, № 6. – С. 108-138.
24. Петров А.А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – М.Наука, 1996.
25. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повехенко Ю.А. и др. Разностные схемы на нерегулярных сетках. – Минск: ЗАО «Критерий», 1996. – 274с.
26. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. “Наука”, М. 1966.
27. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа., М. 1967.
28. Ортега Д., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Издательство : М.:Наука,1986.-401с.
29. Каханер Д., Моулер К.,Нэш С.Численные методы и программное обеспечение. М.:Мир,1978.-372с.
30. ЭрроусмитД., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с предложениями. “Платон”, 1997.-403с.
31. ЭрроусмитД., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с предложениями. “Платон”, 1997.
32. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики.-СПб.: БХВ-Петербург,2001.-528 с.
33. Дьяконов В., Круглов В. Matlab: анализ, идентификация и моделирование систем. СПб.: Питер,2002.-444с.
34. Samarskii A.**A.,** Vabishchevich P.N. Computational Heat Transfer. V. 1,2. – N.Y.: Willey, 1995. – 406 p., 422 p.
35. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1996.
36. Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик программалаш. “Ўқитувчи”, Т. 1989 й.
37. Ильин В.П.Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука. Главная редакция физико-механической литературы. 1985. 336 с.
38. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск, Вышэйшая школа, 1985.
39. Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волохенко А.Б. Математическое программирование. “Высщая школа” М. 1980г.
40. Кабулов В.К. Оптимал планлаштириш масаласи. “Фан”, Т.1975й.
41. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel. “Санкт-Перербург”, 1997г.
42. Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, 1984й. 1 қисм.
43. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. М. Изд. МАИ 1998.

44. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. М. БЕК, 1998.
45. Мину М. Математическое программирование. М. Наука, 1983.
46. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. “Наука”, М. 1966.
47. Растригин Л.А. Системы экстремального управления. М. Наука, 1990.
48. Юсуфбеков Н.А., Балакиров В, С., Волкова М.Е., Гулямов Ш.М. Методы оптимизации. Ташкент, 2001.
49. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. - М.: Наука, 1988.
50. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении. - К.: Высшая школа, 1991.
51. Зайченко Ю.П. Исследование операций. - К.: Высшая школа, 1988.
52. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. - М.: Высшая школа, 1975.
53. Сакович В.А. Исследование операций. - Минск, Высшая школа, 1985.
54. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2 книгах. - М.: Мир, 1985
55. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. М.,Наука 1969.
56. Джемилов Н.И., Эйдельнант М.И. Сборник задач по математическому программированию. Ташкент, Укитувчи 1990.
57. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
58. Березин И. А. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1959, гл. X.
59. Кабулов В.К. Алгоритмизация теория упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент. Фан, 1966.
60. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М.: Наука, 1977. - 272 с.
61. Рахматулин Х.А., Шкенев Ю.С. Взаимодействие сред и полей. - Ташкент: Фан, 1985. - 232 с.
62. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. - Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. - 408 с.
63. Назиров Ш.А., Нуралиев Ф.М. Математическое моделирование процессов влияния электромагнитного поля на тонкую проводящую пластину сложной формы // The 4th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT2010). 12-14 October 2010. – Tashkent, 2010. http://aict2010.qafqaz.edu.az.
64. Nazirov Sh.A., Nuraliev F.M. Mathematical Modeling of Processes of Electro-Magnetic Fields’ Affection Thin Conducting Plates by Complex Form // American Journal of Computational and Applied Mathematics. – USA, 2012. – Vol. 2 (1). – PP. 30-33.
65. Nuraliev F.M. Algorithmization in Magneto-elasticity of Thin Plates and Shells of the Complex Configurations // Computer Science and Information Technology. – USA, 2015. – Vol. 3(3). – PP. 66-69.

MUNDARIJA

SH.A.NAZIROV, D.T.MUXAMEDIEVA
F.M.NURALIEV, A.NE’MATOV.

MATEMATIK MODELLASHTIRISH ASOSLARI

(Monografiya)

Toshkent – «Aloqachi» – 2020

Muharrir:	Q.Matqurbonov
Tex. muharrir:	A.Tog‘ayev
Musavvir:	B.Esanov
Musahhiha:	F.Tog‘ayeva
Kompyuterda sahifalovchi:	Sh.To‘xtamurodov

Nashr.lits. AI №176. 11.06.11.
Bosishga ruxsat etildi: 21.08.2019. Bichimi 60x841 /16.
Shartli bosma tabog‘i 23,25. Nashr bosma tabog‘i 22,75.
Adadi 60. Buyurtma № 12 .

«Nihol print» Ok da chop etildi.
Toshkent sh., M. Ashrafiy ko‘chasi, 99/101.