T. X. ADIROV

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKADAN MASALALAR TO'PLAMI VA ULARNI YECHISHGA DOIR KO'RSATMALAR

O‘ZBEKISTON RESPUBLKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT
AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

ADIROV T. X.

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKADAN MASALALAR TO‘PLAMI VA ULARNI YECHISHGA DOIR KO‘RSATMALAR

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

TOSHKENT – 2019

UOK: 519.2
KBK: 22.172

T.Adirov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaдан masalalar to'plami va ularni yechishga doir ko'rsatmalar. O'quv qo'llanma. –T.: «Aloqachi», 2019 yil, 184 bet.

ISBN 978–9943–5643–1–2

Ushbu o'quv qo'llanma Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universitetida joriy qilingan kredit tizimidagi "Matematika II " fanidan tuzilgan fan dasturi asosida ehtimollar nazariyasi va matematik statistika qismi bo'yicha yozilgan bo'lib, universitetning barcha ta'lim yonalishlari talabalari uchun mo'ljallangan. Qo'llanmada ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar hamda ularni yechishga oid uslubiy ko'rsatmalar berilgan. O'quv qo'llanmada nafaqat masalalar, balki ularning javoblari ham berilgan bo'lib, bu talabalarning o'z yechimlarini tekshirib korishlariga imkon beradi. (*) bilan berilgan masalalar iqtidorli talabalar uchun mo'ljallangan.

Shuningdek, o'quv qo'llanmadan talabalardan tashqari, amaliy mashg'ulot darslarini olib boruvchi o'qituvchilar ham foydalanishlari mumkin.

UOK: 519.2
KBK: 22.172

Taqrizchilar:
R.R.Raxmatov; O'.N.Qalandarov; E.N. Mamurov.
Mas'ul muharrir:
A.A.Tulyaganov.

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti ilmiy-uslubiy Kengashida ko'rib chiqildi va chop etishga tavsiya etildi.

ISBN 978–9943–5643–1–2

I qism. Ehtimollar nazariyasi
1-mavzu. Tasodifiy hodisalar va ehtimolning turli ta'riflari

Tajriba natijasida hodisalarning to'la guruhini tashkil etuvchi va teng imkoniyatli, birgalikda bo'lmagan n ta elementar hodisalarning faqat bittasi ro'y berishi mumkin bo'lsin hamda A hodisaning ro'y berishi uchun elementar hodisalardan m tasi qulaylik tug'dirsin. U holda, klassik ta'rifga ko'ra, A hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{m}{n}, \quad m\leq n$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, bizni qiziqtiruvchi va har bir tajribada teng imkoniyat bilan ro'y berishi mumkin bo'lgan biror A hodisaga nisbatan bog'liqsiz tajribalar (sinashlar) ketma-ketligi o'tkazilayotgan bo'lsin. U holda A hodisaning nisbiy chastotasi deb, hodisa ro'y bergan tajribalar soni m ning o'tkazilgan barcha tajribalar soni n ga nisbatiga aytiladi:

$$w(A)=\frac{m}{n}$$

Tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisaning statistik ehtimoli sifatida nisbiy chastotani yoki unga yaqinroq sonni tanlanadi.

Klassik ta'rifdan foydalanib, masalalar yechishda kombinatorika formulalari keng qo'llaniladi. Shuni e'tiborga olib, ba'zi kombinatorika formulalarini keltiramiz.

O'rin almashtirishlar soni deb, n ta turli elementlarning o'rin almashtirishlar soni

$$P_n=n!(n!=1\cdot 2\cdot 3\ \cdots n\ );\ 0!=1$$

ga aytiladi.

O'rinlashtirish deb, n ta turli xil elementdan m tadan tuzilgan, bir-biridan elementlarining tartibi, yoki tarkibi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalarga aytiladi. Mumkin bo'lgan o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

yoki

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

formulalari orqali topiladi.

n ta turli xil elementdan *m* tadan tuzilgan, bir-biridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalar guruhlash deyiladi. Ularning umumiy soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ga teng.

D_1 soha D sohaning qismi (bo'lagi) bo'lsin va sohaning o'lchamini (yoki uzunligi, yoki yuzi, yoki hajmini va h. k.) *mes* orqali belgilaylik, u holda D sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning D_1 sohaga tushish (A hodisa) ehtimoli

$$P(A) = \frac{mesD_1}{mesD}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

1. Qutida 7 ta oq, 3 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A tavakkaliga olingan shar oq ekanligi hodisasi bo'lsin. Bu tajriba 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lib, ularning 7 tasi A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Demak,

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

2. Telefonda raqamini terayotgan abonent ohirgi ikki raqamni unutib qo'yadi va faqat bu raqamlar turlicha ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga teradi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. B – ikkita kerakli raqam terilganlik hodisasi bo'lsin. O'nta raqamni ikkitadan o'rinlashtirib, jami $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ ta turli raqamlarni terish mumkin.

Demak, $P(B) = \dfrac{1}{A_{10}^2} = \dfrac{1}{90}$

3. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elemetlar ulangan bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Tajribaning barcha mumkin bo‘lgan elementar hodisalari soni C_5^2 ga teng. Ularning ichida C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo‘lishi hodisasi (A) uchun qulaylik tug‘diradi.

Demak,

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

4. Tehnik nazorat bo‘limi tasodifiy ravishda ajratib olingan 100 ta kitobdan iborat partiyada 5 ta yaroqsiz kitob topdi (A hodisa). Yaroqsiz kitoblar sonining nisbiy chastotasini toping.

Yechish.

$$W(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$$

5. Nishonga 20 ta o‘q uzilgan bo‘lib, ulardan 18 ta o‘q nishonga tekkanligi qayd qilingan (A hodisa). Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

Yechish.

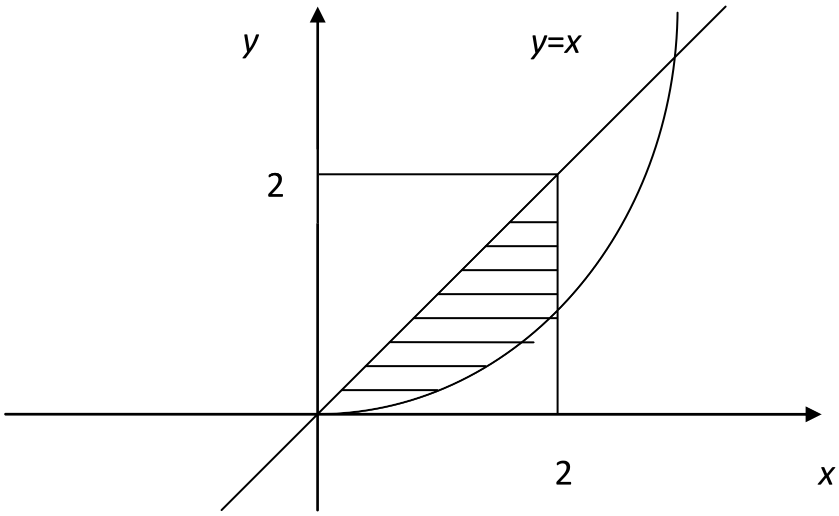
$$W(A)=\frac{18}{20}=0{,}9$$

6. [0; 2] kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $y\leq x$ va $y\geq\frac{1}{4}x^2$ tengsizliklarni qanoatlantirishi ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning shartidan (x ; y) nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases}0\leq x\leq 2;\\ 0\leq y\leq 2;\end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tavakkaliga olingan (x;y) nuqta shtrixlangan sohaga tegishli bo‘lishini anglatadi. (1. 1-rasm).



1. 1-rasm

Shtrixlangan soha nuqtalarining koordinatalari

$$\frac{1}{4}x^2 \le y \le x$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Demak, izlanayotgan ehtimol shtrixlangan soha yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya'ni

$$P(A)=\frac{\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx}{4}=\frac{1}{3}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Tavakkaliga 20 dan katta bo‘lmagan natural son tanlanganda, uning 5 ga karrali bo‘lish ehtimolini toping.

2. Kartochkalarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga 4 ta kartochka olinib, ularni bir qator qilib terilganda juft son hosil bo‘lishi ehtimolini toping.

3. Ikkita o‘yin kubi baravar tashlanganda quyidagi hodisalarning ro‘y berish ehtimolini toping:

A - tushgan ochkolar yig‘indisi 8 ga teng.

B - tushgan ochkolar ko‘paytmasi 8 ga teng.

C - tushgan ochkolar yig‘indisi ularning ko‘paytmasidan katta.

4. 8 kishi necha usul bilan chipta olish uchun teatr kassasiga navbatga turishi mumkin?

5. Qutichada 6 ta bir hil (nomerlangan) kubik bor. Tavakkaliga bitta bittadan olingan va bir qator qilib terildan kubiklarning nomerlari o‘sib borish tartibida chiqishi ehtimolini toping.

6. Qutida 5 ta bir hil buyum bo‘lib, ularning 3 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olinganda ular orasida:

A) bitta bo‘yalgan bo‘lishi;

B) ikkita bo‘yalgan bo‘lishi;

C) hech bo‘lmaganda bitta bo‘yalgan bo‘lishi ehtimolini topig.

7. Qutida 12 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Tavakklaliga

A) bitta shar olinganda, uning oq bo‘lishi;

B) bitta shar olinganda, uning qizil bo‘lishi;

C) 2 ta shar olinganda, ularning turli rangda bo‘lishi;

D) 8 ta shar olinganda, ularning 3 tasi qizil rangli bo‘lishi ehtimollarini toping.

8. Qutida 60 ta lampochka bo‘lib, ularning 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta lampochka olinadi. Olingan lampochkalar ichida:

A) yaroqsizlari yo‘q bo‘lishi;

B) yaroqlilari yo‘q bo‘lishi ehtimollarini toping.

9. Yashikda 30 ta birinchi nav va 6 ta ikkinchi nav detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olinadi:

A) olingan uchchala detal ham birinchi nav bo‘lish ehtimolini;

B) olingan detallarning hech bo‘lmaganda bittasi birinchi nav bo‘lishi ehtimolini toping.

10. Ikkita o‘yin kubi tashlanadi. Chiqqan ochkolar yig‘indisining 7 ga teng bo‘lishi ehtimolini toping.

11. N ta buyumdan iborat partiyada M ta standart buyum bor. Partiyadan tavakkaliga n ta buyum olinadi. Bu n ta buyum ichida rosa m ta standart buyum borligi ehtimolini toping.

12. M ta telegramma tasodifiy ravishda N ta aloqa bo‘limiga taqsimlandi ($N>M$). Har bir aloqa bo‘limiga bittadan ortiq telegramma kelmaslik hodisasining ehtimolini toping.

13. Qutida 5 ta bir hil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: *o, p, r, s, t.* Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan kublarda “*sport*” so‘zini o‘qish mumkin bo‘lishi ehtimolini toping.

14. Oltita bir hil kartochkaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan*a, t, m, r, s, o*. Kartochkalar yahshilab aralashtirilgandan so‘ng,bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan to‘rtta kartochkada “*soat*” so‘zini o‘qish mumkin bo‘lish ehtimolini toping.

15. Hamma tomoni bo‘yalgan kub 1000 ta bir hil o‘lchamli kubchalarga bo‘lingan va yaxshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchaning a) bitta; b) ikkita; c) uchta tomoni bo‘yalgan bo‘lishi ehtimolini toping.

16. Aralashtirilgan 36 talik kartalar dastasidan tavakkaliga bittasi olinadi. Olingan kartaning a) “tuz” bo‘lish, b) rasmli (ya‘ni “qirol”, “dama” yoki “valet”) bo‘lish ehtimoli qanday?

17. Qutida m ta oq va n ta qora sharlar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo‘lishi ehtimolini toping.

18. Bitta o‘yin kubi tashlangan. Unda

a) juft ochko tushishi;

b) 5 ochkodan kam bo‘lmagan ochko tushishi hodisalarining ehtimollarini toping.

19. Ikkita tanga tashlangan. Agar A - tangalar bir hil tomoni bilan tushishi hodisasi, B – tangalar turli tomonlari bilan tushishi hodisasi bo‘lsa, qaysi hodisaning ehtimoli kattaroq?

20. 10 nafar talaba ichida faqat ikki talaba bir guruhda o‘qiydi. 10 nafar talabani yumaloq stol atrofiga tavakkaliga o‘tkazilganda bir guruhda o‘qiydigan ikki talabaning yonma-yon o‘tirib qolish ehtimoli qanday?

21. 52 ta kartali dastadan tavakkaliga uchtasi olinadi. Ularning “3”, “7” va “tuz” bo‘lishi ehtimoli qanday?

22. Kotiba 5 ta xatni oldindan tayyorlab qo‘yilgan 5 ta manzili ko‘rsatilgan konvertlarga tasodifiy ravishda joylashtirdi. Hech bo‘lmaganda bitta xatning kerakli manzilga to‘g‘ri yetib borish ehtimolini toping.

23. Telefon raqami 7 ta raqamdan iborat. Telefon raqamlarining:

a) turli hil bo‘lishi;

b) 3 ga karrali bo‘lishi ehtimollarini toping.

24. Qutida faqat ranglari bilan farqlanuvchi 22 ta shar bor: 9 ta ko‘k, 5 ta sariq va 8 ta oq. Qaysi hodisaning ehtimoli kattaroq: qutidan sariq sharning chiqishimi yoki o‘yin kubi tashlanganda 5 ochko tushishimi?

25. 10 ta biletdan ikkitasi yutuqli. Tavakkaliga olingan 5 ta bilet orasida bittasi yutuqli bo‘lish ehtimolini toping.

26. 100 ta detal orasida 10 tasi yaroqsiz. Shu partiyadan tanlangan 5 ta detal orasida kamida bittasi yaroqsiz bo‘lish ehtimolini toping.

27. 25 kishi (jumladan, ular orasida 5 tasi ayol)dan iborat kengash 3 kishilik delegatsiyani saylaydi. Agar kengashning har bir a‘zosi bir hil ehtimollik bilan saylanish huquqiga ega bo‘lsa, delegatsiya ikkita ayol va bitta erkakdan iborat bo‘lishi ehtimolini toping.

28. Uchta o‘yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalar:

a) ihtiyoriy ikkita kubda bir ochko, uchinchisida esa bir bo‘lmagan ochko tushishi;

b) ihtiyoriy ikkita kubda bir hildagi ochko, uchinchisida esa boshqa ochko;

c) barcha kublarda turli ochkolar tushishi ehtimollarini toping.

29. *b, o, k, i, t* harflarining har biri 5 ta kartochkalardan biriga yozilgan. Kartochkalarni tasodifan bir qatorga terganda “*kitob*” so‘zining hosil bo‘lish ehtimolini toping.

30. O‘qishni bilmaydigan bola alifbening kesilgan *“A”, “A”, “A”, “N”, “N”, “S”* harflarini ixtiyoriy ravishda terib chiqdi. Bunda “ANANAS” so‘zining hosil bo‘lish ehtimoli qanday?

31. Alohida kartochkalarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yozilgan. Kartochkalar yaxshilab aralashtirilgach, tavakkaliga to‘rttasi olinadi va ketma-ket qator qilib teriladi. Hosil bo‘lgan sonlar 1, 2, 3, 4 dan iborat bo‘lishi ehtimolini toping.

32. Yashikda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Yashikdan tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning ham qora bo‘lish ehtimolini toping.

33. Ulug‘bek, Karim va yana 10 kishi kutubxonada kitob olish uchun navbatga turdi. Ulug‘bek bilan Karim o‘rtasida navbatda turganlar soni roppa-rosa beshta bo‘lish ehtimolini toping.

34. Domino qutisidan (28 dona) tavakkaliga yettita tosh olindi. Olingan toshlar ichida hech bo‘lmaganda bittasi olti ochkoli tosh bo‘lishi ehtimolini toping.

35. Mehmonxonagao‘n kishi keldi (ichida Hasan va Husan ham bor). Ular ikkita uch kishilik va bitta to‘rt kishilik xonaga joylashtirildi. Mehmonlarni necha usul bilan joylashtirish mumkin? Agar *A* Hasan va Husanning bitta to‘rt kishilik xonaga tushib qolishi hodisasi bo‘lsa, uning ehtimolini toping.

36. O‘tgan yilgi chempionatda sovrindor o‘rin olgan to‘rt komanda bu yilgi yigirmata komanda ichida birinchilik uchun qatnashmoqda. Agar hamma komanda beshtadan qilib, jami to‘rtta guruhga ajratilgan bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping. *A*= {birinchi va ikkinchi guruhga sovrindorlar tushmagan}, *B*= {har bir guruhga bittadan sovrindor tushgan}.

37. Yangi o‘quv yilining birinchi kuni1- kursiga kelgan talaba 10 ta fandan tuzilgan dars jadvalidagi fanlarni tavakkaliga topishga harakat qilmoqda. Kunlik dars jadvali 3 ta fandan tashkil topgan. Ixtiyoriy fanning dars jadvaliga tushishi ehtimoli bir xil ekanligini hisobga olgan holda, talabaning 3 ta fanni to‘g‘ri topish ehtimolini aniqlang.

38. *P* ta o‘q otar quroli bo‘lgan Zenit batereyasi bir – biriga bog‘liqmas ravishda *T* ta samolyotga qarata o‘qni otmoqda. Barcha o‘q otar qurollarning bitta samolyotga qarata o‘q otish ehtimolini toping.

39. 5 ta radiostanstiyaga ma‘lum bir paytda 6 ta radioto‘lqinida ishlashga ruhsat berilgan. Har bir radiostanstiya to‘lqinni tavakkaliga tanlaydi. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping:

A = {hamma radiostanstiyalar bir paytda ishlaganda hech bo‘lmaganda 2 ta to‘lqin bir – biriga mos kelmaydi};

B = {har xil radioto‘lqinlaridan foydalaniladi}.

40. 3 ta 1-kurs, 5 ta 2-kurs va 7 ta 3-kurs talabasi fakultet talabalar kengashiga nomzod hisoblanadi. Ular orasidan tavakkaliga 5 talaba bo‘lajak konferenstiyada ishtirok etish uchun tanlandi. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

A = {faqat 3- kurslar konferenstiyada ishtirok etadi};

B = {hamma 1- kurs talabalari konferenstiyada ishtirok etadi};

C = {konferenstiyada bitta ham 2- kurs talabasi ishtirok etmaydi}.

41. Buyumlar partiyasida yaroqli buyumlar nisbiy chastotasi 0,9 ga teng. Agar jami 200 ta buyum tekshirilgan bo‘lsa, yaroqli buyumlar sonini toping.

42. Bankka kelgan 40 ta mijozdan 30 tasi operatsiya bajardi. Mijozlarning operatsiya bajarish nisbiy chastotasini toping.

43. Bankdan kredit olgan mijozlarning qarzini muddatida qaytarish nisbiy chastotasi 0,6 ga teng. Agar 12 ta mijoz qarzni muddatida qaytarmagan bo‘lsa, hammasi bo‘lib nechta mijoz kredit olgan?

44. Sharga kub ichki chizilgan. Tavakkaliga sharga tashlangan nuqtaning kubga tushish ehtimolini toping.

45. R radiusli doiraga nuqta tashlanadi. Bu nuqta doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

46. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

47. Tavakkaliga har biri 2 dan katta bo‘lmagan ikkita x va y musbat son olinganda, bu sonlarning ko‘paytmasi $(x{\cdot}y)$ birdan katta bo‘lmasligi, $\frac{y}{x}$ bo‘linmasi esa ikkidan katta bo‘lmasligi ehtimolini toping.

48. Kvadratga doira ichki chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

49. Ikkita x va y haqiqiy son $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib tavakkaliga tanlanadi. $x^2 < y$ shartning bajarilishi ehtimolini toping.

50. Parabola kvadratning pastki asosiga urinadi va uning yuqori uchlari orqali o‘tadi. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kvadratning yuqori tomoni va parabola bilan chegaralangan sohaga tushishi ehtimolini toping.

51. R radiusli doiraga muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga tashlangan nuqtaning oltiburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

52. Uzunligi 12 sm bo‘lgan AB kesmaga tavakkaliga C nuqta qo‘yiladi. AC kesmaga qurilgan kvadrat yuzi 36 sm^2 va 81 sm^2 lar orasida bo‘lishi ehtimolini toping.

53. Portning tayin bir joyiga ikki paroxod kelib to‘xtashi kerak. Har ikkala paroxod bir-biriga bog‘lik bo‘lmagan holda sutkaning ixtiyoriy vaqtida teng imkoniyat bilan bir marotaba portga kiradi.

Agar birinchi paroxodning to‘xtash vaqti bir soat, ikkinchi paroxodning to‘xtash vaqti ikki soat bo‘lsa, u holda paroxodlarning biri-biriga joy bo‘shatish vaqtida uchrashib qolishlari ehtimolini toping.

54. [-1,2] kesmadan tavakkaliga ikkita son olindi. Bu sonlar yigindisi birdan katta, lekin ko‘paytmasi birdan kichik bo‘lish ehtimolini toping.

55. (Byuffon masalasi). Tekislikda bir-biridan $2a$ masofada joylashgan ikki to‘g‘ri chiziq orasiga $2l$ uzinlikdagi igna tavakkaliga tashlanadi. Agar $l<a$ bo‘lsa, igna parallel tug‘ri chiziqlardan birini kesishi ehtimolini aniqlang.

56 Uchlari *(0;0), (1;0), (1;1), (0;1)* nuqtalardan iborat bo‘lgan kvadratning ichga tavakkaliga $(x;y)$ nuqta tanlanadi. Quyidagi hodisaning ehtimolini toping:

$A = \{ (x; y) / x^2 + y^2 \le a^2,\ a > 0 \}.$

57. A va B hodisalarning qiymatlari $|a| \le 1;\ |b| \le 1$ kvadratda teng imkoniyatli bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping.

a)$A = \{ x^2 + 2ax + b$ kvadrat uchhadning ildizlari haqiqiy $\};$

b)$B = \{ x^2 + 2ax + b$ kvadrat uchhadning ildizlari musbat $\}.$

58. Birlik aylana ichiga 3 ta *A, B* va *C* nuqtalar tavakkaliga qo‘yilganda, hosil bo‘lgan *ABC* uchburchak o‘tkir burchakli bo‘lish ehtimolini toping.

59. Avtomashina 7 o‘rindiqdan iborat. Agar 7 kishidan uchtasi mashina haydash huquqiga ega bo‘lsa, ular necha xil usul bilan o‘rindiqlarga joylashishlari mumkin?

60. 5 ta belgidan iborat, a) birinchi raqami noldan farqli bo‘lgan, b) raqamning birinchisi lotin alifbosining harfidan boshlanib, qolganlari noldan farqli bo‘lgan 4 ta raqam bilan davom etadigan nechta turli xildagi avtomobil raqamlari mavjud?

61. Qulfni ochish uchun 5 ta turli raqamdan iborat kerakli uch xonali sonni tanlash kerak. Tajriba uchta raqamni avval terilgan kombinasiyalarni takrorlamasdan tasodifiy ravishda terishdan iborat. Qulf jami mumkin bo‘lgan urinishlarning oxirgisida ochildi. Muvoffaqiyatga erishguncha bo‘lgan urinishlar sonini aniqlang.

62. Avtobus parki 7 ta yo‘nalishning har biriga zahiradagi 12 ta avtobusdan birini chiqarishi kerak bo‘lsin. Necha xil usul bilan buni amalga oshirish mumkin?

63. O‘quvchi dushanbadan juma kungacha har kuni fizika, matematika, kimyo, ingliz tili va adabiyot fanlaridan qo‘shimcha mashg‘ulotlarga qatnaydi (bir kunda bitta fandan mashg‘ulotga boradi). O‘quvchi necha usul bilan bir haftalik qo‘shimcha mashg‘ulotlar jadvalini tuzishi mumkin?

64. Uchlari *(0,0), (1,0), (0,1)* va *(1,1)* koordinatalarda joylashgan kvadrat ichiga *M(x,y)* nuqta tashlangan. *M* nuqtaning markazi koordinata boshida joylashgan birlik doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

65. Uchlari *(0,0), (0,4), (6,0), (6,4)* koordinatalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchak hamda markazi *(2,2)* nuqtada joylashgan birlik doira berilgan. To‘g‘ri to‘rtburchakda tasodifiy tanlangan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

66. Yo‘lovchi buyumlarni saqlash xonasiga yuklarini joylashtirdi. Ma‘lum bir vaqt o‘tgach yuklarini olish uchun kelganida xona kodini unutib qo‘ygani ma‘lum bo‘ldi. Kod raqami besh xonali sondan iborat bo‘lib, unda 23 va 37 sonlari qatnashganligini eslagan holda xonani ochish uchun jami necha marta raqam terishi mumkin?

67. 8 kishidan iborat guruh a’zolari to‘g‘ri to‘rtburchakli stolning bir tomoniga joylashtiriladi. Agar stullar soni 8 ta bo‘lsa, tayin ikki kishining yonma-yon o‘tirishi ehtimolini toping.

68. 0, 1, 8 raqamlarini qog‘ozga yozib, qog‘ozni 180^0 ga aylantirsak, ularning mohiyati o‘zgarmaydi. 6 va 9 raqamlari esa miqdor jihatdan bir-biri bilan almashadi. 3, 4, 5, 7 raqamlari esa o‘z ma’nosini yo‘qotadi. To‘qqiz xonali raqamlar yozilgan qog‘ozni 180^0 ga burganda ma‘nosi jihatidan o‘zgarmaydigan nechta son mavjud?

69. F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 firmalar uchta turli S_1, S_2, S_3 shartnomalarni bajarish bo‘yicha o‘zlarining takliflarini berdilar. Ixtiyoriy firma faqat bitta shartnoma imzolashi mumkin. Shartnomalar turlicha bo‘lib, F_1 firmaning S_1 shartnomani imzolashi, S_2 shartnomani imzolashidan farqlanadi. Firmalar necha usul bilan shartnoma imzolash imkoniyatiga ega? Agar barcha shartnoma tuzishlar teng imkoniyatli bo‘lsa, F_3 firmaning shartnoma tuza olishi ehtimoli qanday?

2-mavzu. Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish teoremalari. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog‘liqsizligi. To‘la ehtimol va Bayes formulalari

1-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisadan istalgan birining ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Natija. Juft-juftibilan birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalardan istalgan birining ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

1-ta’rif. Ikkita A va B hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalarning ehtimolliklari ko‘paytmasiga teng bo‘lsa, ya‘ni

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

u holda ular bog‘liqmas(erkli)deyiladi.

2-ta’rif. Bir nechta birgalikda bo‘lgan hodisalar ixtiyoriy guruhining birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng bo‘lsa, ya‘ni

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k}),$$

u holda ular to‘plamiy bog‘liqmas(erkli) deyiladi.

2-teorema. Agar $P(A)P(B)>0$ bo‘lsa,u holda ikkita hodisaning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, ulardan birining ro‘y berish ehtimolini ikkinchisining birinchisi ro‘y berganligi sharti ostidagi shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga aytiladi, ya‘ni

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

Natija. Bir nechta bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko‘paytirilganiga teng bo‘lib, har bir keyingi hodisaning shartli ehtimoli oldingi hamma hodisalar birgalikda ro‘y berdi, degan faraz ostida hisoblanadi:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n).$$

3-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisalardan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalarning ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolini ayrilganiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Xususan, A va B hodisalar bog‘liq bo‘lsa,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(B)P_B(A)$$

formuladan, aks holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

formuladan foydalaniladi.

4-teorema. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan $A_1, A_2,.., A_n$ hodisalaridan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat A hodisaning ehtimoli, 1dan $\overline{A_1}, \overline{A_2},..., \overline{A_n}$ qarama-qarshi hodisalar ehtimollari ko‘pytmasining ayrilganiga teng, ya’ni

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n}).$$

1. Sehda bir necha stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanokni ta’mirlash talab etilishi ehtimoli 0,2 ga teng, ikkita staokni ta’mirlash talab etilishi ehtimoli 0,13 ga teng. Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni ta’mirlash talab etilishi ehtimoli esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni ta’mirlash talab etilishi ehtimolini toping.

Yechish. Quyidagi hodisalarni qaraymiz.

A={smena davomida bitta stanokni ta’mirlash talab etiladi};

B={smena davomida ikkita stanokni ta’mirlash talab etiladi};

C={smena davomida ikkitadan ortiq stanokni ta’mirlash talab etiladi}.

A, B va C hodisalar o‘zaro birgalikda emas. Bizni qiziqtiradigan hodisa:

$(A+B+C)-$ smena davomida hech bo‘lmaganda bitta stanokni ta’mirlash zarur bo‘lishi hodisasining ehtimolini topamiz:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}2+0{,}13+0{,}07=0{,}4.$$

2. Yashikda 10 ta qizil va 6 ta ko‘k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir hil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. A – hodisa olingan ikkala shar qizil bo‘lishi, B - hodisa esa olingan ikkala sharnng ko‘k bo‘lishi hodisasi bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki , A va B hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar. Demak,

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

A hodisaning ro‘y berishiga C_{10}^{2} ta elementar hodisa imkoniyat tug‘diradi. B hodisaning ro‘y berishiga esa C_{6}^{2} ta elementar hodisa imkoniyat tug‘diradi. Umumiy ro‘y berishi mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni esa C_{16}^{2} ga teng.

Demak,

$$P(A+B)=\frac{C_{10}^{2}+C_{6}^{2}}{C_{16}^{2}}=\frac{\frac{10\cdot 9}{2}+\frac{6\cdot 5}{2}}{\frac{16\cdot 15}{2}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

3. Ikki ovchi bo‘riga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi ovchining bo‘riga tegizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. Hech bo‘lmaganda bitta o‘qning bo‘riga tegishi ehtimolini toping.

Yechish. A - birinchi ovchining o‘qni bo‘riga tegizishi hodisasi, B - ikkinchi ovchining o‘qni bo‘riga tegizishi hodisasi bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo‘lgan, ammo bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. U holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=$$
$$=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

4. Tanga va kubik bir vaqtda tashlangan. “Gerb“ tushishi va “3” ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berishi ehtimolini toping.

Yechish. A - tanganing “gerb” tomoni tushishi hodisasi, B - kubik tashlanganda “3” ochkoning tushishi hodisasi bo‘lsin. A va B hodisalar bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. Demak,

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

5. Sehda 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel raqamlari bo‘yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan ishchilarning erkaklar bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

A - birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi;

B - ikkinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi;

C- uchinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasining ehtimoli:

$$P(A)=\frac{7}{10}$$

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi shartida ikkinchi ishchining kishi bo‘lishi ehtimoli, ya’ni *B* hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_A(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Oldin ajratib olinganlarning ikkalasi erkak kishi bo‘lishi sharti ostida uchinchi ajratilgan ishchining ham erkak kishi bo‘lishi ehtimoli, ya’ni *C* hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_{AB}(C)=\frac{5}{8}.$$

Ajratib olingan ishchilarning hammasi erkak kishilar bo‘lishi ehtimoli:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}.$$

6. Ko‘prik yakson bo‘lishi uchun bitta aviatsiya bombasining kelib tushishi kifoya. Agar ko‘prikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 ga teng bo‘lgan 4 ta bomba tashlangan bo‘lsa, u holdako‘prikning yakson bo‘lish ehtimolini toping.

Yeshish. Demak, kamida bitta bombaning ko‘prikka tushishi, uni yakson bo‘lishi uchun yetarli (*A* hodisa). U holda izlanayotgan ehtmollik

$$P(A)=1-0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}95$$

ga teng bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

70. Tehnik nazorat bo‘limi buyumlarning yaroqliligini tekshiradi. Buyumning yaroqli bo‘lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi yaroqli bo‘lishi ehtimolini toping.

71. Talabaga kerakli formulani uchta ma’lumotnomada bo‘lishi ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula: a) faqat bitta ma’lumotnomada; b) faqat ikkita ma’lumotnomada; c) uchchala ma’lumotnomada bo‘lishi ehtimolini toping.

72. Talaba fan bo‘yicha 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talabaning o‘qituvchi taklif etgan uchta savolni bilishi ehtimolini toping.

73. Yashikda 1dan 10 gacha raqamlangan 10 ta bir hil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birinketin 1, 2, 3 raqamli kubiklar chiqishi ehtimolini quyidagi hollarda toping:

a) kubik olingach, yashikka qaytarib solinmaydi;

b) olingan kubik yashikka qaytarib solinadi.

74. Biror joy uchun iyul oyida bulutli kunlarning o‘rtacha soni oltiga teng. Birinchi va ikkinchi iyulda havo ochiq bo‘lishi ehtimolini toping.

75. Guruhda 10 ta talaba bo‘lib, ularning 7 nafari a’lochilar. 4 ta talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a’lochilar bo‘lishi ehtimolini toping.

76. Buyumlar partiyasidan tavarshunos oily navli buyumlarni ajratmoqda. Tavakkaliga olingan buyumning oliy navli bo‘lishi ehtimoli 0,8 ga teng. Tekshirilgan uchta buyumdan faqat ikkitasinig oliy navli bo‘lishi ehtimolini toping.

77. Birinchi yashikda 4 ta oq va 8 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 6 ta qora shar bor. Har qaysi yashikdan bittadan shar olinadi. Ikkala sharning ham oq chiqishi ehtimolini toping.

7**8.** Sehda 7 taerkak va 8 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabeltartib raqami bo‘yicha tavakkaliga 3 kishi tanlangan. Tanlanganlarning hammasi ayol kishilar bo‘lishi ehtimolini toping.

79. Birinchi yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda esa 10 ta oq va 5 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lishi ehtimolini toping.

80. Bitta smenada stanokning ishlamay qolishi ehtimoli 0,05 ga teng. Uchta smenada stanokning ishlab turishi ehtimolini toping.

81. Tanga birinchi marta“gerb” tomoni bilan tushguncha tashlanadi. Tashlashlar sonining juft son bo‘lishi ehtimolini toping.

82. *A, B,* hodisalarning juft-juft bog‘liq emasligidan, ularning birgalikda bog‘liq emasligi kelib chiqmasligini ko‘rsatadigan masala tuzing.

83. Otilgan torpedoning kemani cho‘ktirib yuborish ehtimoli 0,5 ga teng. Agar kemani cho‘ktirib yuborish uchun bitta torpedoning mo‘ljalga tegishi yetarli bo‘lsa, 4 ta torpedoningkemani cho‘ktirib yuborishi ehtimolini toping.

84. Elektr zanjiriga erkli ishlaydigan 3 ta element ketma – ket ulangan. Birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda quyidagiga teng: $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}15;\ p_3 = 0{,}2.$ Zanjirda elektr tok bo‘lmasligi ehtimolini toping.

85. Ikki sportchidan har birining mashqni muvaffaqiyatli bajarish ehtimoli 0,5 ga teng. Sportchilar mashqni navbat bilan bajaradilar. Bunda har bir sportchi o‘z kuchini ikki marta sinab ko‘radi. Mashqni birinchi bo‘lib bajargan sportchi mukofot oladi. Sportchilarning mukofot olishlari ehtimolini toping.

86. Merganning uchta o‘q uzishda kamida bitta o‘qni nishonga tegizishi ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o‘q uzishda nishonga tegizish ehtimolini toping.

87. To‘rtta o‘q uzishda kamida bitta o‘qni nishonga tegishi ehtimoli 0,9984 ga teng. Bitta o‘q uzishda nishonga tegizish ehtimolini toping.

88. Ikki mergandan har biriningo‘qni nishonga tegizishi ehtimoli 0,3 ga teng. Merganlar navbat bilan o‘q uzadilar, lekin har biri ikkitadan o‘q uzadi. Birinchi bo‘lib nishonni mag‘lub etgan mergan mukofot oladi. Merganlarning mukofot olishlari ehtimolini toping.

89. Qurilma o‘zaro erkli ishlaydigan ikkita elementni o‘z ichiga oladi. Elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda 0,05 ga va 0,08 ga teng. Qurilmaning buzilishi uchun kamida bitta elementning buzilishi yetarli bo‘lsa, qurilmaning ishlamay qolish ehtimolini toping.

90. Uchta to‘pdan otishda snaryadning nishonga tegishi ehtimoli mos ravishda $p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}5;\ p_3 = 0{,}8$. Nishon yakson qilinishi uchun bitta snaryadning tegishi kifoya bo‘lsa, uchta to‘pdan bir yo‘la otishda nishonning yakson qilinishi ehtimolini toping.

91. Kutubxona javoniga tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qo‘yilgan bo‘lib, ulardan5 tasi muqovali. Kutubxonachi ayol tavakkaliga 3 ta darslik oladi. Olingan darsliklarning hech bo‘lmaganda bittasi muqovali bo‘lishi ehtimolini toping.

92. Ikkita birgalikda bo‘lmagan A_1, A_2 hodisalarning har birining ro‘y berishi ehtimoli mos ravishda 0,3 va 0,8 ga teng. Bu hodisalardan faqat bittasining ro‘y berishi ehtimolini toping.

93. Yashikda 14 ta qizil va 6 ta ko‘k tugma bor. Tavakkaliga 2 ta tugma olinadi. Olingan ikkala tugmaning bir hil rangli bo‘lishi ehtimolini toping.

94. Tetraedrning uchta tomoni mos ravishda qizil, sariq va yashil rangga bo‘yalgan bo‘lib, to‘rtinchi tomoni esa shu har uchala ranga buyalgan bo‘lakchalardan iborat. Agar tetraedr tavakkaliga tashlanib, Q, S va Y lar uning mos ravishda qizil, sariq va yashil rangdan iborat tomoni bilan tushishi hodisalari bo‘lsa, u holda bu hodisalarning juft-jufti bilan erkli, lekin to‘plamiy bog‘liq ekanligini isbotlang.

95. Mavjud n ta kalitdan faqat bittasi berilgan eshikka tushadi (eshikni ochadi). Bu eshikni ochish uchun roppa-rosa k ta kalit ($k<n$) orqali urinish ehtimoli nechaga teng?

96. Talaba darsdan so‘ng uyiga bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda har 20 minutda keladigan yo‘nalishli taksida yoki har 30 minutda keladigan avtobusda ketishi mumkin. Bekatga yetib kelgan talabaning 5 minut ichida uyiga jo‘nab ketishi ehtimolini toping.

97. Samolyot uchta turli qismdan iborat: uchuvchilar xonasi va dvigatel, yoqilg‘i idishi hamda bulardan boshqa qismlar. Samolyot urib tushirilishi uchun uning 1- qismiga bir snaryadning, 2- qismiga ikki snaryadning va 3- qismiga uch snaryadning tegishi yetarlidir.

Samolyotga otilgan snaryad har gal bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda uning turli qismlariga tegishi mumkin. Agar snaryadning samolyotga tekkanligi ma’lum bo‘lsa, u holda snaryadning samolyotning k - qismga tegish ehtimoli mos ravishda p_k ga teng. Samolyotga qarata snaryad otildi. Agar A = {samolyotga 3 ta snaryad tegdi} hodisasi, B = {samolyot urib tushirildi} hodisasi bo‘lsa, uholda $P_A(B)$ shartli ehtimollikni toping.

98. Mavjud 20 ta jamg‘arma bankidan 10 tasi shahardan tashqarida joylashgan. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda 5ta bank tanlandi. Tanlangan banklardan: a) 3 tasining; b) hech bo‘lmaganda bittasining shahardan tashqarida joylashgan jamg‘arma bank ekanligi ehtimoli qanday?

99. Musobaqada ishtirok etayotgan 16 ta futbol komandasi qur’a tashlash yo‘li bilan ikki guruhga (8 tadan) ajratildi. Ikkita kuchli komandaninga) turliguruhlarga; b) bitta guruhga tushishi ehtimolini toping.

100. $\{1, 2, . . . , n\}$ raqamlar to‘plamidan qaytarib solinmasdan tavakkaliga uchta raqam olingan. Agar birinchi olingan raqam ikkinchi olingan raqamdan kichik ekanligi ma’lum bo‘lsa, u holda uchinchi olingan raqam avvalgi olingan ikki raqam orasidagi raqambo‘lishi ehtimolini toping.

101. Kuzatishlarga ko‘ra, agar ma’lum bir davr oralig‘ida aksiyaga qo‘yilgan foiz stavkasi kamaytirilsa, uni bozordagi narxining oshishi ehtimoli 0,8 ga teng bo‘ladi. Shu davr oralig‘ida foizi stavkasining belgilangan me’yordan kamayish ehtimoli esa 0,4 ga teng bo‘ladi. Bu ma’lumotlar asosida bir vaqtning o‘zida ham foizi stavkasining kamayishi, ham aksiya narxining oshishi ehtimolini toping.

102. Qurilish kompaniyasi A mamlakat bilan aeroport terminali qurish shartnomasini imzolash ehtimoli 0,4 ga teng. B mamlakat bilan bu ehtimollik 0,3 ga teng bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta mamlakat bilan shartnoma imzolashi ehtimolini toping.

103. Bankning kredit bo‘limi tekshiruvdan o‘tkazilganda kredit olgan firmalarning 12% i kasodga uchragani sababli yaqin 5 yil ichida qarzini qaytara olmasligi ma’lum bo‘ldi. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra, kredit olgan firmalarning 20% kasodga uchrar ekan. Agar bankning kredit olgan bir mijozi inqirozga uchragani ma’lum bo‘lsa, uning qarzni o‘z vaqtida qaytara olmaslik ehtimolini toping.

Biror A hodisa hodisalarning to‘la guruhini tashkil etuvchiva juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $B_1, B_2,..., B_n$ hodisalarning (ular gipotezalar deb ataladi) biri bilan ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. Bu gipotezalarning ehtimollari ma’lum, ya’ni $P(B_1), P(B_2),..., P(B_n)$ berilgan. Bu gipotezalarning har biri yuz berganligi sharti ostida A hodisaning ro‘y berish ehtimollari ham, ya’ni $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A),...,P_{B_n}(A)$ ehtimollari ma’lum bo‘sin. U holda A hodisaning ehtimoli “to‘la ehtimol” formulasi deb ataluvchi quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(A)$$

Birgalikda bo‘lmagan, hodisalarning to‘la guruhini tashkil etadigan $B_1, B_2,..., B_n$ hodisalar berilgan va ularning $P(B_1), P(B_2),..., P(B_n)$ ehtimollari ma’lum bo‘lsin. Tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, uning natijasida A hodisa ro‘y bergan bo‘lsin, deylik. Bu hodisalarning har bir gipoteza bo‘yicha shartli ehtimollari, ya’ni $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A),...,P_{B_n}(A)$ ma’lum. A hodisa ro‘y berganligi sharti ostida B_i gipotezalar ehtimollarini qayta baholash uchun, ya’ni $P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3),...,P_A(B_n)$ shartli ehtimollarni topish uchun

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(A)}, \qquad (i = \overline{1,n})$$

Bayes formulalaridan foydalaniladi.

1. Birinchi qutida 2 ta oq , 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq, 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solindi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi.

a) olingan sharning oq bo‘lishi;

b) ikkinchi qutidan olingan shar oq bo‘lib chiqdi. Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq shar bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish.

a) quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A - ikkinchi qutidan olingan shar oq;

B_1- birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan;
B_2- birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi sharlar solingan;
B_3 - birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan.
B_1, B_2, B_3- hodisalarning to‘la guruhini tashkil etganligi uchun to‘la ehtimol formulasiga ko‘ra,

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)$$

boladi. Bunda:

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28};\ P(B_2) = \frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28};\ P(B_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28};$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{4};\ P_{B_2}(A) = \frac{5}{8};\ P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

U holda:

$$P(A) = \frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4} + \frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8} + \frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{16}\quad .$$

b) $P_A(B_1)$ ehtimollikni Bayes formulasidan foydalanib topamiz.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{21}\quad .$$

2. Ikkita avtomatda bir hil detallar ishlab chiqarilgandan so‘ng, umumiy konveyerga o‘tkaziladi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ko‘p. Birinchi avtomat o‘rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o‘rtacha hisobda detallarning 84% ini a’lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Konveyerdan tavakkaliga olingan detal a’lo sifatli bo‘lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. A – detalning a’lo sifatli bo‘lish hodisasi bo‘lsin. U holda ikkita taxmin (gipoteza) qilish mumkin:
B_1 - detalning birinchi avtomatda ishlab chiqarigan bo‘lishi hodisasi

$$P(B_1) = \frac{2}{3}\ ,$$

Ya’ni birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko‘p detal ishlab chiqaradi;
B_2- detalning ikkinchi avtomatda ishlab chiqarigan bo‘lishi hodisasi

$$P(B_2) = \frac{1}{3} \quad .$$

Agar detal birinchi avtomatda ishlab chiqarilgan bo‘lsa, uning a’lo sifatli bo‘lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_1}(A) = 0{,}6.$$

Agar detal ikkinchi avtomatda ishlab chiqarilgan bo‘lsa, uning a’lo sifatli bo‘lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_2}(A) = 0{,}84.$$

Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimoli, to‘la ehtimol formulasiga ko‘ra:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Olingan a’lo sifatli detal birinchi avtomatda ishlab chiqarilgan bo‘lishi ehtimoli Bayes formulasiga ko‘ra:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17} \approx \ 0{,}59.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

104. Yashikda 1-zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3-zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimoli 0,9 ga teng, 2- va 3-zavodda tayyorlangan detallarning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimoli mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimolini toping.

105. Birinchi idishda 10 ta shar bo‘lib, ularning 8 tasi oq, ikkinchi idishda 20 ta shar bo‘lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi. Olingan sharning oq bo‘lishi ehtimolini toping.

106. Benzin quyish shahobchasi joylashgan shassedan o‘tadigan yuk mashinalari sonining o‘sha shassedan o‘tadigan yengil mashinalar soniga nisbati 3:2 kabi. Yuk mashinasining benzin olish ehtimoli 0,1 ga, yengil mashina uchun bu ehtimollik 0,2 ga teng. Benzin quyish shahobchasi yoniga benzin quydirish uchun mashina kelib to‘htadi. Uning yuk mashinasi bo‘lish ehtimolini toping.

107. Ixtisoslashtirilgan kasalxonaga bemorlarning o‘rta hisobda 30% *K* kasallik bilan, 50% i *L* kasallik bilan, 20% i *M* kasallik bilan qabul qilindi. *K* kasallikni to‘liq davolash ehtimoli 0,7 ga, *L* va *M* kasalliklar uchun bu ehtimollik mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Kasalxonaga qabul qilingan bemor butunlay sog‘ayib ketganligi ma’lum bo‘ldi. Bu bemor *K* kasallik bilan og‘rigan bo‘lishi ehtmolini toping.

108. Sexda tayyorlanadigan detallar 2 ta nazoratchi tomonidan tekshiriladi. Detallarni tekshiruvdan o‘tkazish uchun birinchi nazoratchiga tushishi ehtimoli 0,6 ga, ikkinchi nazoratchiga tushishi ehtimoli 0,4 ga teng. Yaroqli detalning birinchi nazoratchi tomonidan yaroqsiz deb topilishi ehtimoli 0,06 ga, ikkinchi nazoratchi uchun esa bu ehtimollik 0,02 ga teng. Yaroqsiz deb topilgan detallar tekshirilganda ular ichidan yaroqli detal chiqib qoldi. Bu detalni birinchi nazoratchi tomonidan tekshirilgan bo‘lishi ehtimolini toping.

109. Yashikda qora yoki oq bo‘lish ehtimoli bir xil bo‘lgan bir dona shar bor. Yashikka bir dona oq shar solindi va yaxshilab aralashtirilgandan so‘ng, undan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan shar oq bo‘lib chiqdi. Yashikda qolgan shar oq ekanligi ehtimolini toping.

110. Elekron qurilma ketma-ket ulangan ikki qismdan iborat. Birinchi qismning ishonchliligi (berilgan *T* vaqtichida to‘xtovsiz ishlash ehtimoli) 0,9 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. *T* vaqt ichida qurilma sinovdan o‘tkazildi va bu muddat ichida qurilmaning ishdan chiqqanligi aniqlandi. Quyidagi hodisalarning ehtimollari topilsin: *A* = { *T* vaqt ichida faqat birinchi qismi ishdan chiqdi}; *B* = { *T* vaqt ichida har ikkala qismi ishdan chiqdi}.

111. Kuzatilayotgan astronomik jism ikki xil holatdan birida yoki B_1 holatda, yoki B_2 holatda bo‘lishi mumkin. Bu holatlarning ehtimolliklari $P(B_1)=0{,}6$ va $P(B_2)=0{,}4$ ekanligi ma’lum. Kuzatishni bir-biriga bog‘liqmas ravishda ikki observatoriya olib bormoqda. Odatda, birinchi observatoriya jism holati haqida 90%, ikkinchi observatoriya esa jism holati haqida 80% to‘g‘ri ma’lumot beradi. Birinchi observatoriyadan jism B_1, ikkinchi observatoriyadan esa jism B_2 holatda turibdi, degan ma’lumot kelgan bo‘lsa, uning haqiqatda B_1 holatda turgan ekanligi ehtimolini toping.

112. Muvoffaqiyatsizlikka uchragan kosmik raketa tekshirilganda, uning halokatiga to‘rt xil, ya’ni B_1, B_2, B_3 va B_4 faraz (gipoteza)larning sababchi bo‘lishi mumkinligi aniqlandi. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra, $P(B_1)=0{,}2$; $P(B_2)=0{,}4$; $P(B_3)=0{,}3$ va $P(B_4)=0{,}1$. Tekshirishlar natijasida raketa ko‘tarilish vaqtida uning yoqilg‘i saqlanadigan idishida yoriq paydo bo‘lganligi (A hodisa) aniqlandi. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra, A hodisaning shartli ehtimolliklari quyidagilarga teng: $P_{B_1}(A)=0{,}9$; $P_{B_2}(A)=0$; $P_{B_3}(A)=0{,}2$; $P_{B_4}(A)=0{,}4$. Ushbu sharoitda qaysi gipoteza eng ehtimolli?

113. Bank xodimi ishga tramvay yoki avtobusda borishi mumkin. Ishga 1/3 hollarda tramvayda, 2/3 hollarda avtobusda boradi. Agar u tramvayda borsa, uning ishga kechikib borish ehtimoli 0,05 ga, avtobusda borganida 0,01 ga teng. Bugun bank xodimining ishga kechikib kelganligi ma’lum bo‘lsa, uning tramvayda ishga kelganligi ehtimoli qanday?

114. Tumanda 6 ta ishlab chiqarish korxonasi, 8 ta do‘kon va 4 ta bank bor. Hisobchi mutaxassisligi uchun bo‘sh o‘rinning borligi ehtimoli ishlab chiqarish korxonasi uchun 0,4 ga, do‘kon uchun 0,3 ga va bank uchun 0,6 ga teng. a) tumanda hisobchi mutaxassisligi uchun bo‘sh o‘rinning mavjudligi ehtimolini toping; b) agar tumanda hisobchi mutaxassisligi uchun bo‘sh o‘rinning borligi ma’lum bo‘lsa, u aynan bankda bo‘lishi ehtimoli qanday?

115. Do‘konda uchta turli markadagi muzlatkichlar 5:7:13 nisbati kabi mavjud bo‘lib, kun davomida ularning 20 tasi sotilgan. Agar turli markadagi muzlatkichlarning sotilishi ehtimoli teng bo‘lsa, u holda sotilmay qolgan muzlatkichlarning faqat bir xil markali ekanligi ehtimolini toping.

116. Yo‘lovchi kerakli yo‘nalishga aviachipta sotib olish maqsadida 1-aviakassaga murojaat qilishi ehtimoli 0,4 ga, 2-

aviakassaga murojaat qilishi ehtimoli 0,35 ga, 3- aviakassaga murojaat qilishi ehtimoli 0,25 ga teng. Yo'lovchi kassaga murojaat qilgan vaqtida kerakli yo'nalish uchun chiptaning tugagan bo'lishi ehtimoli mos ravishda 0,3, 0,4 va 0,6 ga teng bo'lsa, uning chipta sotib olgan bo'lishi ehtimolini toping.

117. Tijorat banki o'z mablag'larini 30 % ini ipoteka kreditiga, 40 % ini iste'mol kreditiga va qolgan 30 % ini boshqa banklarga kreditga berdi. Ipoteka kreditining qaytmaslik ehtimoli 0,1 ga, iste'mol kreditining qaytmaslik ehtimoli 0,05 ga va kreditining boshqa banklardan qaytmaslik ehtimoli 0,02 ga teng. Bankka kredit so'rab, murojaat qilgan mijozning qarzni o'z vaqtida qaytarmaslik ehtimolini toping.

118. Tijorat banki o'z mablag'larining 20% ini davlat korxonalariga, 50 % ini ipoteka kreditigava 30 % ini iste'mol kreditiga sarf qilgan. Mijozlarning olgan qarzlarni qaytarmaslik ehtimollari davlat korxonalari uchun 0,1 ga, ipoteka krediti uchun 0,2 ga va iste'mol krediti uchun 0,15 ga teng bo'lsa, a) kredit olmoqchi bo'lgan yangi mijozning qarzni o'z vaqtida qaytarishi ehtimolini toping; b) qaytarilmaydigan qarz ipoteka kreditiga tegishli bo'lishi ehtimolini toping.

119. Agar bankda pul o'tkazmasi uch kun ichida amalga oshirilsa, mijozning bank bilan shartnoma tuzishi ehtmoli 0,8 ga teng. Agar mijoz pul o'tkazmasini kechroq, ya'ni bir hafta ichida olsa, uning bank bilan shartnoma tuzishi ehtmoli 0,5 ga teng. Bir haftadan ortiq vaqt ichida pul o'tkazadigan bank bilan hech bir mijoz shartnoma tuzmaydi. Bankda pul o'tkazmasining 3 kun ichida o'tishi ehtimoli 0,3 ga, bir hafta ichida o'tishi ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, mijozning bank bilan shartnoma imzolashi ehtimolini toping.

120. Qurilish ob'ektining birinchi bosqichi o'z vaqtida ishga tushishi ehtimoli 0,7 ga, 10 kun kechikib ishga tushishi ehtimoli 0,2 ga, 10 kundan 15 kungacha kechikib ishga tushishi ehtimoli 0,1 ga teng. Umumiy qurilish ob'ektining o'z vaqtida ishga tushishi ehtimoli, birinchi bosqichi o'z vaqtida tugallanishi sharti ostida 0,9 ga, 10 kunichida tugallanishi sharti ostida 0,7 ga, 10 kundan 15 kungacha tugallanishi sharti ostida 0,6 ga tengligi ma'lum bo'lsa, qurilish ob'ektining o'z vaqtida ishga tushmagan bo'lishi ehtimolini toping.

121. Guruh 5 ta "a’lo", 10 ta "yaxshi" va 15 ta "qoniqarli" bahoga o‘zlashtiruvchi talabalardan tashkil topgan. A’lochi talaba faqat "5" baho oladi. "Yaxshi" bahoga o‘zlashtiruvchi talabaning "5", yoki "4" baho olishi ehtimoli bir-biriga teng, "qoniqarli" bahoga o‘zlashtiruvchi talabaning "4", "3", yoki "2" baho olishi ehtimollari bir-biriga teng bo‘lsa, tasodifiy ravishda chaqirilgan talabaning a) "5"; b) "4" bahoga javob berishi ehtimolini toping.

122. Mijozning bankdan olgan qarzini iqtisodiy o‘sish davrida qaytara olmaslik ehtimoli 0,04 ga teng. Iqtisodiy inqiroz davrida esa bu ehtimollik 0,13 ga teng. Agar iqtisodiy o‘sish davri boshlanganlik ehtimoli 0,65 ga teng, deb faraz qilsak, mijozning bankdan olgan qarzini qaytara olmaslik ehtimolini toping.

123. Kompaniyaning raqiblari bo‘lmagan holda rivojlangan mamlakatlar bilan shartnoma tuzishi ehtimoli 0,45 ga, raqiblari bor bo‘lgan holda esa bu ehtimollik 0,25 ga teng. Agar ekspertlarning ma’lumotlariga ko‘ra, raqiblar bor bo‘lishi ehtimoli 0,4 ga teng bo‘lsa, u holda kompaniyaning shartnoma tuzishi ehtimolini toping.

124. Qishki reytingni yomon o‘zlashtirgan talabalarga qayta o‘zlashtirish uchun fanning ehtimollar nazariyasi qismidan 60 ta, matematik statistika qismidan 40 ta, jami 100 ta savol tayyorlandi. Talaba shu savollardan birini tavakkaliga tanlab unga javob bera olsa, u qayta o‘zlashtirgan hisoblanadi. Qayta o‘zlashtirishga kelgan talaba ehtimollar nazariyasi bo‘yicha 40 ta, matematik statistika bo‘yicha 30 ta savolga tayyor ekanligi ma’lum. Qayta o‘zlashtirishga kelgan talaba tavakkaliga bitta savolni tanladi va unga javob berdi. Tushgan savol matematik statistika bo‘limiga doir ekanligi ehtimolini toping.

3-mavzu. Bernulli formulasi. Muavr-Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi

Agar bir nechta sinov o'tkazilayotgan bo'lib, har bir sinashda A hodisaning ro'y berishi ehtimoli boshqa sinov natijalariga bog'liq bo'lmasa, u holda bunday sinovlar A hodisaga nisbatan erkli sinovlar deyiladi.

Faraz qilaylik, n ta erkli takroriy sinovning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p, ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ bo'lsin. Shu n ta tajribadan A hodisaning (qaysi tartibda bo'lishidan qat'iy nazar) rosa k marta ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Bernulli formulasi bilan hisoblanadi.

A hodisaning o'tkazilayotgan n ta erkli takroriy sinov davomida kamida k marta ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n),$$

ko'pi bilan k marta ro'y berishi ehtimoli esa

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k),$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Agar n ta erkli sinashda hodisaning k_0 marta ro'y berishi ehtimoli tajribaning boshqa mumkin bo'lgan natijalari ehtimollaridan kichik bo'lmasa, u holda k_0 soni eng ehtimolli son deb ataladi va u quiyadgi qo'sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Eng ehtimolli son (k_0) ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar $np-q$ kasr son bo'lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo'ladi;

b) agar $np-q$ butun son bo'lsa, u holda ikkita k_0 va k_0+1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo'ladi;

c) agar np butun son bo'lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0 = np$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, n ta erkli takroriy sinashning har birida $A_1, A_2, ..., A_k$ hodisalarning ro'y berish ehtimollari mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_k$

($p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$) bo‘lsin. Shu n ta tajribadan $A_1, A_2, ..., A_k$ hodisalarning (qaysi tartibda bo‘lishidan qat‘iy nazar) mos ravishda roppa-rosa $m_1, m_2, ..., m_k$ ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$) martaro‘y berishi ehtimoli quyidagi polinomial formula bilan hisoblanadi.

$$P(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}$$

1. Har bir otilgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli *p=2/3*. Otilgan 10 ta o‘qdan 3 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. *n=10; k=3;* $p=\frac{2}{3}$; $q=\frac{1}{3}$.

U holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{10}(3) = C_{10}^{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{7}$$

2. Tanga 6 marta tashlandi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga ko‘ra: *n=6, p=q=1/2*. U holda gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli soni

$$k_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 .$$

Demak, eng ehtimolli son $k_0 = 3$ bo‘ladi.

3. Yashikda 5 ta oq, 10 ta qora va 15 ta yashil shar bor. Yashikdan tavakkaliga qaytarib solish sharti bilan ketma-ket 6 ta shar olindi. Olingan sharlarning bittasi oq, ikkitasi qora va uchtasi yashil bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga ko‘ra, $n = 6$; $n_1 = 1$; $n_2 = 2$; $n_3 = 3$ ga teng.

A_1 - yashikdan olingan sharning oq bo‘lish hodisasi;

A_2 - yashikdan olingan sharning qora bo‘lish hodisasi;

A_3 - yashikdan olingan sharning yashil bo‘lish hodisasi bo‘lsin.

U holda bu hodisalarning ro‘y berish ehtimollari mos ravishda

$$P(A_1) = \frac{1}{6}; \quad P(A_2) = \frac{1}{3}; \quad P(A_3) = \frac{1}{2}$$

ga teng bo‘lib, $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ bo‘ladi. Endi yuqoridagi polinomial formula yordamida $P_6(1;2;3)$ ning ehtimolini hisoblaymiz:

$$P_6(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{36}.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

125. Savdo do‘koniga kirgan 8 ta xaridordan har birining harid qilish ehtimoli 0,7 ga teng. Xaridorlardan beshtasining xarid qilish ehtimolini toping.

126. Biror mergan uchun bitta o‘q uzishda nishonga tegizishi ehtimoli 0,8 ga teng va o‘q uzish tartibiga bog‘liq emas. 5 marta o‘q uzilganda nishonga rosa 2 marta tegishi ehtimolini toping.

127. Tanga 10 marta tashlanganda gerbli tomon:

a) 4 tadan 6 martagacha tushishi ehtimolini;

b) hech bo‘lmaganda bir marta tushishi ehtimolini toping.

128. Qaysi hodisaning ehtimoli katta?

a) Teng kuchli raqib bilan o‘ynab, to‘rtta partiyadan uchtasini yutib olishimi yoki sakkizta partiyadan beshtasini yutib olishimi?

b) to‘rtta partiyaning kamida uchtasini yutib olishimi yoki sakkizta partiyaning kamida beshtasini yutib olishimi?

129. Qaysi birining ehtimoli kattaroq: tangani 4 marta tashlanganda “gerb” tomonining 2 marta tushishimi, yoki 8 marta tashlanganda “gerb” tomonining 4 marta tushishimi?

130. Ishlab chiqarilgan buyumlarning 5% i yaroqsiz, tavakkaliga tanlangan 5 ta buyumdan 2 tasining yaroqsiz bo‘lishi ehtimoli nimaga teng?

131. Merganning o‘qni nishonga tegizishi ehtimoli 0,25 ga teng. Mergan nishonga qarata 8 ta o‘q uzadi. Quyidagi ehtimollarni toping:

a) kamida 7 ta o‘q nishonga tegadi;

b) kamida 1 ta o‘q nishonga tegadi.

132. Sex mahsulotining 5% i yaroqsiz. 5 ta mahsulot tanlanganda:

a) 1 ta ham yaroqsiz mahsulot yo‘q bo‘lishi;

b) 2 ta yaroqsiz mahsulot bo‘lishi ehtimoli nimaga teng.

133. O‘yin soqqasi 16 marta tashlanadi. 3 ga karrali ochkolarning eng ehtimolli sonini toping.

134. O‘qning nishonga tushishi ehtimoli $p=0,35$. Nishonga qarata 10 ta o‘q uziladi. Nishonga tushishlarning eng ehtimolli sonini toping.

135. Oilada 10 ta farzand bor. O‘g‘il bola va qiz bola tug‘lishi ehtimoli $p=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, ularning 5 tasi o‘gil bola va 5 tasi qiz bola bo‘lishi ehtimolini toping.

136. Tanga 7 marta tashlanadi. Tanganing 2 marta “raqam” tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

137. O‘qning nishonga tegishi ehtimoli $p=0,7$. Nishonga otilgan 5 ta o‘qdan 2 tasining nishonga tegishi ehtimolini toping.

138. Ikki teng kuchli shaxmatchi $2n$ ta natijaviy o‘yin o‘ynashga va’dalashdilar (durang hisobga olinmaydi). Har bir o‘yinchining navbatdagi partiyada yutishi ehtimoli 0,5 ga teng. Eng ko‘p partiyada yutgan o‘yinchi o‘yinda g‘olibi hisoblanadi. Har bir o‘yinchining 8 partiyalik o‘yinda yutish imkoniyati ko‘pmi yoki 12 partiyalik o‘yindami?

139. Qurilma ishdan chiqishi uchun undagi erkli ishlaydigan 8 ta elementdan kamida 3tasini ishdan chiqishi yetarli. Agar har bir elementning T muddat ichida ishdan chiqishi ehtimoli bir xil 0,2 ga teng bo‘lsa, shu muddat ichida butun qurilmaning ishdan chiqishi ehtimolini toping.

140. O‘zgarmas sharoitda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan ravishda nishonga qarata uch marotaba o‘q uzildi. Har bir uzilgan o‘qning nishondagi «10» ga tegishi ehtimoli $p_{10}=0,3$; «9» ga tegishi ehtimoli $p_9=0,4$, «9»ga ham, «10» ga ham tegmasligi ehtimoli $p_0=1-0,3-0,4=0,3$ ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: A={bitta «10» ga va bitta «9» ga tegishi}, B={roppa-rosa ikkita «10» ga tegishi}, C={29 dan kam bo‘lmagan ochkoning yig‘ilishi}.

141. O‘n kishidan iborat guruhdagi aspirantlarning har biri tasodifiy ravishda haftaning to‘rt kunidan birida (dushanba, seshanba, chorshanba yoki payishanba) ilmiy maqolalar bilan ishlash uchun kutubxonaga boradi. Quyidagi hodisalar ehtimollarini toping: A={dushanbada 1 ta, seshanbada 2 ta, chorshanbada 3 ta va payshanbada 4 ta aspirant kutubxonaga keldi}, B={dushanbada 3 ta, seshanbada 7 ta aspirant kutubxonaga keldi}, C={5ta aspirant haftaning birinchi ikki kunida, qolgan 5 ta aspirant esa haftaning ikkinchi ikki kunida kutubxonaga keldi}, D={dushanba va seshanbada birorta ham aspirant kutubxonaga kelmadi}.

142. Erkli tajribalar A hodisa k marta ro‘y berguncha o‘tkaziladi. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga teng bo‘lsa, n marta tajriba o‘kazish zarur bo‘lishi ehtimolini toping.

143. Elektr impulsini qayd qiluvchi asbob 1 kVdan ortiq kuchlanishga ega bo‘lgan ko‘pi bilan3 ta impulsga bardosh beradi, so‘ng ishdan chiqadi. Agar impulsning kuchlanishi 1 kVdan ortiq bo‘lishi ehtimoli 0,2 ga teng bo‘lsa, asbobning o‘n beshinchi impulsda ishdan chiqishi ehtimolini toping.

144. O‘rta hisobda sotuvga chiqariladigan avtomobillarning beshdan bir qismi nuqsonli. Tasodifan tanlangan 10 ta avtomobildan a) 3 tasining, b) kamida 3 tasining nuqsonli bo‘lishi ehtimolini toping.

145. Oilada 10ta farzand bor. O‘g‘il va qiz bolalar tug‘ilishi ehtimoli bir-biriga teng ekanligini bilgan holda, bu oilada a) uchtadan kam bo‘lmagan; b) ko‘pi bilan uchta o‘g‘il bolalar borligi ehtimolini toping.

146. Muayan oliy o‘quvyurti talabalarining o‘zlashtirish darajasi kuzatilganda 30% i "qonuqarli", 50% i "yaxshi", 20% i "a’lo" ekanligi aniqlangan. Tavakkaliga tanlangan 6 ta talaba ichida:a)"qoniqarli", "yaxshi" va "a’lo"ga o‘zlashtiruvchi talabalar sonining teng bo‘lishi; b) "qoniqarli" va "a’lo"ga o‘zlashtiruvchi talabalar sonining teng bo‘lishi ehtimoli qanday?

147. Firmani tekshiruvdan o‘tkazayotgan auditorning moliyaviy kamchiliklarni aniqlashi ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshiruv o‘tkazilayotgan 4 ta firmaning yarmida moliyaviy kamchiliklarning aniqlangan bo‘lishi ehtimolini toping.

148. Sug‘urta vakilining har bir tashrifidan so‘ng shartnoma tuzilishi ehtimoli 0,1 ga teng. 25ta tashrifdan so‘ng tuzilgan shartnomalarning eng ehtimolli sonini toping.

149. Ulgurji savdo bazasi n ta do‘konga mahsulot yetkazib beradi. Kun davomida bazaga har bir do‘kondan mahsulot uchun talabnoma tushishi ehtimoli 0,3 ga teng. Bazaga kun davomida: a) 6 ta; b) 5 tadan 11 tagacha; c) kamida bitta talabnomaning tushishi ehtimolini toping. Kun davomida bazaga kelib tushgan talabnomalarning eng ehtimolli sonini va uning ehtimolini toping.

150. Bir sutka ichida elektr energiya sarfi belgilangan me’yordan oshib ketmaslik ehtimoli 0,75 ga teng. Yaqin olti kunning to‘rt kuni davomida elektr energiya sarfi belgilangan me’yordan oshmaslik ehtimolini toping.

151. Portga 3 ta yuk ortilgan kemaning kelishi kutilmoqda. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra, keltiriladigan mollarning sifatsiz bo‘lib chiqishi ehtimoli 0,01 ekanligi aniqlangan. Kutilayotgan kemalardan hech bo‘lmaganda ikkitasining sifatli mol olib kelishi ehtimolini toping.

Bernulli formulasini n ning katta qiymatlarida qo‘llash qiyin, chunki formula katta sonlar ustida amallar bajarishni talab qiladi. Shuning uchun bizni qiziqtirayotgan bu ehtimolni Bernulli formulasini qo‘llamasdan, aniq formuladan unchalik ko‘p farq qilmaydigan boshqa bir taqribiy formula yordamida hisoblashga harakat qilamiz.

1-teorema. (Muavr- Laplasning lokal teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas bo‘lib, nol va birdan farqli bo‘lsa, u holda n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimoli (n qancha katta bo‘lsa, shuncha aniq)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ga teng. Bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

$\varphi(x)$funksiya juft bo‘lib, funksiyaning x argumentining musbat qiymatlariga mosqiymatlaridan tuzilgan jadvallar ehtimollar nazariyasiga oid ko‘pgina adabiyotlarda keltirilgan. $x \geq 4$ da $\varphi(x)=0$ deb olinadi.

Agar n ta tajribada hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k_1;k_2)$ni topish talab qilinsa, tajribalar soni katta bo‘lganda, Muavr-Laplasning integral teoremasi qo‘llaniladi.

2- teorema. (Muavr-Laplasning integral teoremasi). Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli *p (0<p<1)* ga teng bo‘lgan *n* ta tajribada hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ga teng. Bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

ko‘rinishda bo‘lib, u Laplas funksiyasi deb ataladi. Bu funksiya toq funksiya bo‘lib, uning qiymatlari jadvallashtirilgan va $x \geq 5$ da $\Phi(x)=0,5$ deb olinadi.

Eslatma. Muavr-Laplasning taqribiy formulalaridan odatda $npq \geq 9$ bo‘lgan hollarda foydalangan ma'qul. Agar tajribalar soni katta bo‘lib, har bir tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimolini *p* juda kichik bo‘lsa, u holda quyidagi

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Puasson formulasidan foydalaniladi, bu yerda *k* hodisaning *n* ta erkli tajribada ro‘y berishlari soni, $\lambda = np$ (hodisaning *n* ta erkli tajribada ro‘y berishlari o‘rtacha soni).

1. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o‘q uzilganda rosa 75 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. *n=100; k=75; p=0,8; q=0,2* .

U holda,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25.$$

1- ilovadagi jadvaldan $\varphi(-1,25) = 0,1826$.

Demak,

$$P_{100}(75) = \frac{0,1826}{4} = 0,04565.$$

2. Agar biror hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning 100 ta tajribada:

a) rosa 50 marta ro‘y berish ehtimolini;

b) kami bilan 30 marta,ko‘pi bilan 45 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish. a) shartga ko‘ra: *n=100; p=0,4; q=0,6*. Tajribalar soni *n* katta bo‘lganligi uchun, masalani lokal teoremaga ko‘ra yechamiz:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{50-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{10}{\sqrt{24}}\approx 2{,}04.$$

φ(x) - funksiyaning qiymatlar jadvalidan φ(2,04)=0,0498 ekanligini topamiz.

Muavr-Laplasning local formulasidan foydalanib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$\mathrm{P}_{100}(50)\approx\frac{1}{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}\varphi(2{,}04)=\frac{0{,}0498}{24}=0{,}0102.$$

c) Laplasning integral teoremasini qo‘llaymiz. *n=100;* $k_1=30$; $k_2=45$; *p=0,4* va *q=0,6* ekanligidan

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{-10}{\sqrt{24}}\approx -2{,}04.$$

$$\frac{k_2-np}{npq}=\frac{45-100\cdot 0{,}4}{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}=\frac{5}{24}\approx 1{,}02.$$

$\Phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan

$$\Phi(-2,04)=-\Phi(2,04)=-0,4793.$$

$$\Phi(1,02)=0,3461.$$

Topilganlarni formulaga qo‘yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$\mathrm{P}_{100}(30;45)\approx\Phi(1,02)-\Phi(-2,04)=\Phi(1,02)+\Phi(2,04)=$$
$$=0,3461+0,4793=0,8254.$$

3. *A* hodisaning 900 ta bog‘liqmas tajribaning har birida ro‘y berish ehtimoli *p=0,8* ga teng. *A* hodisa:

a) 750 marta ;

b) 710 dan 740 martagacha ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish. a) *n=900; k=750; p=0,8; q=0,2*.

U holda

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{750-900\cdot 0{,}8}{\sqrt{900\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=2{,}5.$$

jadvaldan

$$\varphi(2{,}5)\approx 0{,}0175.$$

Demak, $$\mathrm{P}_{900}(750)\approx\frac{1}{12}\varphi(2{,}5)=\frac{0{,}0175}{12}=0{,}00146.$$

b) $$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{710-720}{12}\approx -0{,}83\ ,\quad \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{740-720}{12}\approx 1{,}67$$

jadvaldan

$$\Phi(-0{,}83)=-\Phi(0{,}83)=-0{,}2967.\ \Phi(1{,}67)=0{,}4525.$$

Demak,

$$\mathrm{P}_{900}(710;740)\approx\Phi(1{,}67)-\Phi(-0{,}83)=\Phi(1{,}67)+\Phi(0{,}83)=$$
$$=0{,}4525+0{,}2967=0{,}7492.$$

4. Telefon stansiyasi 400 ta abonentga hizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo‘ng‘iroq qilishi ehtimoli 0,01 ga teng bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) bir soat davomida 5 ta abonent stantsiyaga qo‘ng‘iroq qiladi;

b) bir soat davomida 4 tadan ko‘p bo‘lmagan abonent qo‘ng‘iroq qiladi;

c) bir soat davomida kamida 3 ta abonent stantsiyaga qo‘ng‘iroq qiladi.

Yechish. *p=0,01* juda kichik, *n=400* esa katta bo‘lgani uchun, $\lambda=400\cdot 0{,}01=4$da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz:

a) $$P_{400}(5)\approx\frac{4^5}{5!}e^{-4}\approx 0{,}156293.$$

b)

$$P_{400}(0 \le k \le 4) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) =$$
$$= 0{,}018316 + 0{,}073263 + 0{,}146525 +$$
$$+ 0{,}195367 + 0{,}195367 = 0{,}628838$$

c)

$$P_{400}(3 \le k \le 400) = 1 - P_{400}(0 \le k \le 2) =$$
$$= 1 - 0{,}018316 - 0{,}0732263 - 0{,}146525 = 0{,}761896.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

152. Maktabning birinchi sinfiga 260 ta bola qabul qilindi. Agar o‘g‘il yoki qiz tug‘ilish ehtimollari bir-biriga teng bo‘lsa, qabul qilinganlarning rosa 100 tasi qiz bola bo‘lish ehtimolini toping.

153. Korhonada ishlab chiqarilgan buyumning 20% i yaroqsiz. 400 ta buyum ichidan yaroqsizlari sonining 50 bilan 100 orasida bo‘lish ehtimolini toping.

154. Kassirning qaydnomada ko‘rsatilgan pulni birinchi sanashda adashishi ehtimoli 0,04 ga teng. Uning 25 ta qaydnomadagi pullarni sanaganda ko‘pi bilan ikkita qaydnomada adashishi ehtimolini toping.

155. Zavod omboriga 5000 ta sifatli buyumlar yubordi. Har bir buyumning yo‘lda shikastlanish ehtimoli 0,0002 ga teng. 5000 ta buyum ichidan yo‘lda:

a) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimolini;

b) 3 tadan ko‘p bo‘lmaganining shikastlanishi ehtimolini;

c) 3 tadan ko‘pining shikastlanishi ehtimolini toping.

156. Do‘kon 1000 shisha ma’danli suv oldi. Do‘kon omboriga joylashtirish vaqtida 1 ta shishaning sinib qolishi ehtimoli 0,003 ga teng. Do‘konga keltirilgan shisha idishlarning:

a) rosa 2 tasi;

b) 2 tadan kami;

c) 2 tadan ko‘pi;

g) hech bo‘lmaganda bittasi singan bo‘lishi ehtimolini toping.

157. Avtomat telefon stantsiyasi 1000 ta telefon abonentiga xizmat ko‘rsatadi. 5 minut davomida ATSga abonentdan chaqiriq kelishi ehtimoli 0,005 ga teng.

a) 5 minut davomida ATSga hech bo‘lmaganda bitta chaqiriq kelishi;

b) 5 minut davomida ATSga 4 tadan ko‘p chaqiriq kelishi ehtimollarini toping.

158. Aloqa kanallari orqali 1000 ta belgi yuboriladi. Bitta belgining xato ketish ehtimoli 0,005 ga teng, rosa 50 ta belgini xato ketish ehtimolini toping.

159. Texnologik jarayonga ko‘ra, kalava ipining 1 soat davomida uzilish ehtimoli 0,2 teng. Yigiruvchi ayol 100 ta kalavaga xizmat qiladi. Uning bir soat davomida ko‘pi bilan 30 ta ipni ulashi ehtimolini toping.

160. Sug‘urta kompaniyasi 10000 mijozga (avtomobil egasiga) xizmat ko‘rsatadi. Bir yil ichida har bir avtomobilning halokatga uchrashi natijasida ta’mir talab bo‘lishi ehtimoli 0,006 ga teng. Har bir avtomabil uchun sug‘urta badali bir yilga 30000 so‘mni tashkil qiladi. Agar avtomobil halokatga uchrashi natijasida ta’mir talab bo‘lganda, uning egasi 3 million so‘m tovon puli olishi ma’lum bo‘lsa, u holda quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: A={bir yilda sug‘urta kompaniyasi sinadi}, B={bir yilda sug‘urta kompaniyasi 45 milliondan ortiq daromad ko‘radi}, C={bir yilda sug‘urta kompaniyasi 90 milliondan ortiq daromad ko‘radi}, D={bir yilda sug‘urta kompaniyasi 135 milliondan ortiq daromad ko‘radi}.

161. Simmetrik tanga tashlanganida gerb tomoni tushishlar sonining chastotasi (0,4;0,6) intervaliga tushish ehtimoli 0,975 dan kichik bo‘lmasligi uchun kamida necha marotaba tanga tashlash kerak?

162. Qutidagi oq va qora sharlar sonining nisbati 3:2 kabi. Har gal yashikdan bittadan shar olinib uning rangi e’lon qilinganidan so‘ng yana yashikka qaytarib solinadi. Har bir tajribada oq shar chiqishlari sonining nisbiy chastotasi oq shar chiqishi ehtimolidan $\varepsilon=0,05$ ga farq qilmaslik ehtimoli 0,9948 dan kam bo‘lmasligi uchun kamida necha marotaba shar olish tajribasini o‘tkazish kerak?

163. Toblangan po‘lat tarkibida uglerodning me’yori kerakli darajadan oshib ketish ehtimoli $p=0,01$ ga teng. Bu holat uchun Puasson teoremasini qo‘llab yuqoridagi natija kamida bir marotaba yuz berish ehtimoli $p=0,95$ dan oshmasligini ta’minlash uchun kamida nechta mahsulot tekshiruvga keltirilishi kerak?

164. Kredit-iqtisod fakulteti talabalaridan 5% "Oliy matematika" fanidan o‘tkaziladigan nazorat ishidan "a’lo" baho oladi.

Fakultetda tavakkaliga tanlab olingan 100 ta talabadan a) ikkitasining; b) beshtadan kam boʻlmaganining "Oliy matematika" dan "a'lo" baho olishi ehtimolini toping.

165. Institutda 1000 ta talaba oʻqiydi. Institut oshxonasi 105 oʻringa moʻljallangan boʻlib, katta tanaffuzda har bir talabaning tushlik qilish ehtimoli 0,1 ga teng. Bugun tushlik qilmoqchi boʻlgan talabalar uchun boʻsh oʻrinlarning yetmaslik ehtimolini toping.

166. Temir yoʻl vokzaliga chipta sotadigan 1000 ta avtomat oʻrnatilgan. Bir soat ichida bu avtomatlardan birining ishdan chiqish ehtimoli 0,004 ga teng. Bir soat ichida ikkita, uchta hamda beshta avtomatlarning ishdan chiqish ehtimoli qanday?

167. Aviakompaniyaning statistik ma'lumotlariga koʻra, ma'lum bir reyslarga oldindan buyurtma bergan mijozlarning 5 % i buyurtmadan voz kechadi. Agar aviakompaniya 155 oʻrinli samolyot uchun 160 ta chipta sotgan boʻlsa, samolyotda uchish maqsadida oldindan buyurtma bergan ixtiyoriy mijozning uchish ehtimoli qanday boʻladi?

168. Oliy oʻquv yurtiga kirish uchun kirish imtihonlarini muvoffaqiyatli topshirish kerak. Bunday sinovdan oʻrtacha 25% abiturient muvoffaqqiyatli oʻtishi ma'lum boʻlsa, qabul komissiyasiga tushgan 1889 ta ariza boʻyicha sinovda qatnashgan abiturientlarning hech boʻlmaganda 500 tasining barcha imtihonlarni muvoffaqiyatli topshirishi ehtimoli qanday?

169. Kompyuter sistematsi 45 ta bir xil mikroelementlardan iborat. Muayyan vaqtda har bir mikroelementning ish holatida boʻlish ehtimoli 0,8 ga teng. Agar biror bir operasiyani bajarish uchun hech boʻlmaganda 30 ta mikroelementning ish holatida boʻlishi talab qilinsa, operasiyaning muvaffaqiyatli bajarilish ehtimoli qanday?

170. Muayyan partiya 200 ta televizordan iborat boʻlib, doʻkon ularni xaridorlarga sotib yubordi. Bu partiyadagi televizorlarning kafolot davri ichida ta'mirlanish ehtimoli 0,01 ga teng. Kafolat davri ichida shu partiyadan televizor xarid qilgan rosa 4 ta xaridorning ustaxonaga murojaat qilish ehtimolini toping.

171. Korxonada muayyan turdagi 1000 ta uskuna mavjud. Bir soat ichida har bir uskunaning ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng. Bir soat ichida hech boʻlmaganda 2 ta uskunaning ishdan chiqish ehtimolini toping.

4-mavzu. Diskret tasodifiy miqdorlar. Taqsimot qonuni. Taqsimot fuhksiya va uning xossalari

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Masalan, o‘yin kubi tashlanganda tushishi mumkin bo‘lgan ochkolar soni, ishga kech qoluvchi xizmatchilar soni va hokazolar tasodifiy miqdorga misol bo‘la oladi.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldindan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymatni qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Odatda, tasodifiy miqdorlarni lotin alifbosining tartibi bo‘yicha oxirgi katta *X, Y, Z . . .* va h. k. harflari bilan, uning mumkin bo‘lgan qiymatlarini kichik

x,y,z. . . va h. k. harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar diskret yoki uzluksiz bo‘lishi mumkin.

2-ta'rif. Diskret tasodifiy miqdor deb, ayrim, ajralgan qiymatlarni ma’lum ehtimol bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo‘lishi mumkin.

3-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan miqdorga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni sanoqli bo‘lmagan cheksizdir.

4-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullar bilan berilishi mumkin:

a) birinchi satri mumkin bo‘lgan x_k qiymatlardan, ikkinchi satri p_k ehtimollardan iborat jadval ko‘rinishida, ya’ni:

$$\begin{array}{lllll} X: & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P: & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

bu yerda

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

b) grafik usulda, ya'ni Dekart koordinatalar sistemasida (x_k, p_k) nuqtalar aniqlanadi, so'ngra ularni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirib, taqsimot ko'pburchagi deb ataluvchi shakl (poligon) hosil qilinadi.

c) analitik usulda (formula ko'rinishida), ya'ni $P(X = k) = f(x)$.

Masalan, diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollari:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

ko'rinishda aniqlanadigan bo'lsin, u holda tasodifiy miqdor binomial taqsimot qonuniga bo'ysunadi deyiladi va uni *B(n,p)* ko'rinishida shartli belgilanadi.

Shiningdek, diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollari:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdor "Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi" deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollari:

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \qquad k=1,2, . . .$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday diskret tasodifiy miqdor "*p* parametrli geometrik taqsimot qonuniga" bo'ysunadi deyiladi.

1. Talabaning yozma ish variantidagi savollarning har biriga javob berishi ehtimoli 0,7 ga teng. Yozma ish variantidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. *X* tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlar $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$. dan iborat bo'ladi. *n= 4, p= 0,7;*
q =0,3 ekanligidan, *X* ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi.

$$p_1 = P_4(0) = C_4^0 (0.7)^0 (0.3)^4 = 0.0081;$$
$$p_2 = P_4(1) = C_4^1 (0.7)^1 (0.3)^3 = 0.0756;$$

$$p_3 = P_4(2) = C_4^2(0.7)^2(0.3)^2 = 0.2646;$$
$$p_4 = P_4(3) = C_4^1(0.7)^3(0.3)^1 = 0.4116;$$
$$p_5 = P_4(4) = C_4^4(0.7)^4(0.3)^0 = 0.2401.$$

U holda *X* tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,0081*	*0,0756*	*0,2646*	*0,4116*	*0,2401*

Tekshirish: 0,0081 +0,0756 + 0,2646 + 0,2401 = 1.

2. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqishi ehtimoli 0,1 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. *X* diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3.$ orqali belgilaymiz.

Bundan tashqari *n=3; p= 0,1; q =0,9* ekanligini hisobga olsak,

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0(0.1)^0(0.9)^3 = 0.729;$$
$$p_2 = P_3(1) = C_3^1(0.1)^1(0.9)^2 = 0.243;$$
$$p_3 = P_3(2) = C_3^2(0.1)^2(0.9)^1 = 0.027;$$
$$p_4 = P_3(3) = C_3^3(0.1)^3(0.9)^0 = 0.001.$$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

X	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*0,729*	*0,243*	*0,027*	*0,001*

3. Do‘konga tashrif buyurgan har bir mijozning xarid qilish ehtimoli *p=0,8* ga teng. Quyidagilarni toping:

a) xarid qilishlar soniga teng bo‘lgan *X* diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1 \leq X \leq 3$ va $X > 3$ hodisalarning ehtimolini;

c) taqsimot ko‘pburchagini chizing.

Yechish. a) *X* tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4.

Ehtimollarni Bernulli formulasi bo‘yicha hisoblaymiz:

$p_1 = P_4(X = 0) = C_4^0 (0.8)^0 (0.2)^4 = 0.0016;$

$p_2 = P_4(X = 1) = C_4^1 (0.8)^1 (0.2)^3 = 0.0256;$

$p_3 = P_4(X = 2) = C_4^2 (0.8)^2 (0.2)^2 = 0.1536;$

$p_4 = P_4(X = 3) = C_4^3 (0.8)^3 (0.2)^1 = 0.4096;$

$p_5 = P_4(X = 4) = C_4^4 (0.8)^4 (0.2)^0 = 0.4096;$

a) X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,0016*	*0,0256*	*0,1536*	*0,4096*	*0,4096*

Tekshirish:

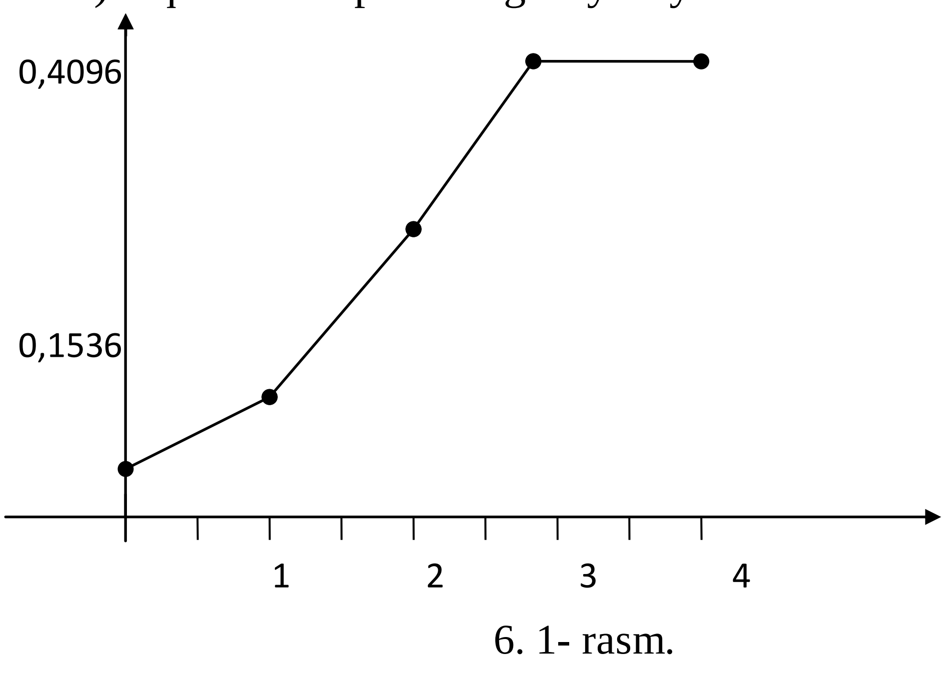
0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1.

b)

$$P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
$$= 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 = 0.5888;$$

$P(X > 3) = P(X = 4) = 0.4096.$

c) taqsimot ko‘pburchagini yasaymiz:



6. 1- rasm.

4. Telefon stansiyasi 800 ta abonentga hizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo‘ng‘iroq qilishi ehtimoli 0,01 ga teng bo‘lsa, telefon stansiyasiga qo‘ng‘iroq qilgan abonentlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra: $p=0,01$, $n=800$, $\lambda = 800 \cdot 0,01 = 8$. Puasson taqsimot qonuni bo‘yichaga X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzamiz:

X	0	1	2	3	…	799	800
P	e^{-8}	$8e^{-8}$	$32e^{-8}$	$\frac{256}{3}e^{-8}$	…	$\frac{8^{799}}{799!}e^{-8}$	$\frac{8^{800}}{800!}e^{-8}$

5. O‘yin kubigi “1” ochkosi tushguncha tashlanadi. Agar tashlashlar soni 3 tadan ortiq bo‘lmasa, “1” ochkosi tushguncha tashlashlar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. Masalada X tasodifiy miqdorning hodisaning birinchi ro‘y berishigacha bo‘lgan tajribalar soni bo‘lib, uning mumkin bo‘lgan qiymatlari: 1, 2, 3 dan iborat bo‘ladi.
O‘yin kubi bir marta tashlanganda “1” ochkoning tushishi ehtimoli $p = \frac{1}{6}$ ga teng ekanligini bilgan holda, geometrik taqsimot qonunini tuzish formulasiga ko‘ra:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$

ekanligini aniqlaymiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

172. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
P	*0,1*	*0,2*	*0,2*	*0,4*	*0,1*

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

173. Qutida 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X tasodifiy miqdor - olingan oq sharlar soni bo‘lsa, uning taqsimoti qonunini tuzing.

174. 10 ta detal solingan yashikda 8 ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi yaroqli detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

175. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

a) $\begin{array}{lcccc} X: & 2 & 4 & 5 & 6 \\ P: & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}$

b) $\begin{array}{lccc} X: & 10 & 15 & 20 \\ P: & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{array}$

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

176. Ma'lum bir partiyada yaroqsiz detallar 10% ni tashkil etadi. Tavakkaliga 4 ta detal tanlab olinadi. Bu 4 ta detal orasida yaroqsiz detallar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping.

177. Qiz va o‘g‘il bolalarning tug‘ilish ehtimollari teng deb faraz qilinadi. To‘rtta farzandi bo‘lgan oiladagi o‘g‘il bolalar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

178. Turli faoliyat bilan shug‘illanuvchi uchta firma bir-biriga bog‘liqmas ravishda o‘z mahsuloti bilan ko‘rgazmada ishtirok etmoqda. Ko‘rgazmada g‘olib bo‘lish ehtimoli birinchi firma uchun 0,8 ga, ikkinchisi uchun 0,6 ga, uchinchisi uchun 0,5 ga teng. Ko‘rgazmada g‘olib bo‘lgan firmalar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

179. Ichida 5 ta oq va 7 qora shar bo‘lgan idishdan 4 ta shar olinadi. Olingan oq sharlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

180. Ikkita tanga 3 martadan tashlanadi. «Gerbli» tomon tushishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

181. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli 3/4 ga teng bo‘lsa, 3 ta o‘q uzishda nishonga tegishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

182. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo‘lgan idishdan 5 ta shar olinadi. Chiqqan oq sharlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

183*. X va Y tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, bir xil p parametrli geometrik taqsimot qonunga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

184*. X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan λ_1, λ_2 parametrli Puasson taqsimot qonunga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

185*. X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, $B(n_1, p)$, $B(n_2, p)$ Binomial taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

186. Bankka 30 ta xabarnoma yuborilgan bo‘lib, ulardan 5 tasining soxta ekanlgi ma’lum. Tasodifiy ravishda tanlab olingan 15 ta xabarnoma tekshirildi. Tekshiruv natijasida aniqlanishi mumkin bo‘lgan soxta xabarnomalar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Tekshiruv natijasida ko‘pi bilan 2 ta soxta xabarnomaning aniqlanishi ehtimolini toping.

187. Qurilish kompaniyasida auditorlik tekshiruvi o‘tkazayotgan auditor tekshirish uchun tavakkaliga 5 ta hisob-kitob operasiyalari hujjatini tanlab oldi. Hujjatlarning 3% ida xatolik bor ekanligi ma’lum. Xatosiz yuritilgan hujjatlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Hech bo‘lmaganda bitta hujjatda xatoga yo‘l qo‘yilgan bo‘lish ehtimolini toping.

188. Telekanalda yangi kinofilm haqida reklama berilmoqda. Teletomoshabinlarning bu reklamani ko‘rish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifiy ravishda 10 ta tomoshabin tanlab olindi. Yangi kinofilm haqidagi reklama ko‘rgan tomoshabinlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Tanlab olingan tomoshabinlarning hech bo‘lmaganda ikkitasining reklamani ko‘rgan bo‘lish ehtimolini toping.

189. Bankka pul qo‘ygan omonatchilarning har beshinchisi omonat foizini olish uchun keladi. Agar hozir o‘z navbatini kutib turgan mijozlar soni 5 tani tashkil qilsa, foizini olish uchun kelgan omonatchilar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

190. Shaharda 10 ta tijorat banki bor. Bir yil ichida har bir bankning bankrotga uchrash ehtimoli 0,1 ga teng. Kelgusi yil ichida bankrotga uchrashi mumkin bo‘lgan banklar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Taqsimot ko‘pburchagini yasang. Bir yil ichida hech bo‘lmaganda bitta bankning bankrotga uchrash ehtimolini toping.

191. Navbatchi turli reyslar bo‘yicha avtobuslarning avtovakzalga kelib to‘xtashi haqida ma'lum qiladi. Turli reyslar haqidagi ma'lumot bir-biriga bog‘liqmas ravishda tasodifiy holda e'lon qilinadi. Avtovakzalga har 30 minutda o‘rtacha 5 ta reys kelib to‘xtaydi.

a) 30 minut ichida kelib to‘xtagan avtobuslar haqidagi xabarlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing;

b) 30 minut oralig‘ida uchtadan kam bo‘lmagan avtobuslarning kelib to‘xtashi ehtimolini toping;

c) 30 minut oralig‘ida birorta ham avtobusning kelib to‘xtamaslik ehtimolini toping.

192. Miltiqdan otilgan har bir o‘qning samolyotga tegish ehtimoli 0,001 ga teng. 3000 ta o‘q uziladi. Otilgan o‘qlarning samolyotga tekkanlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

193. Ikkita mergan galma-galdan nishonga qarata o‘q uzishadi. Bitta o‘q uzishda xato ketish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,2 ga, ikkinchisi uchun 0,4 ga teng. Agar 4 tadan ortiq o‘q uzilmagan bo‘lsa, nishonga tekkuncha otilgan o‘qlar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

194. Ikkita bombardimonchi samolyot nishonga tekkuncha galma-galdan bomba tashlaydi. Birinchi samolyotning nishonni aniq mo‘ljalga olish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. Agar samolyotlarning har birida 2 tadan bomba bo‘lsa, tashlangan bombalar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

5- mavzu. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari va ularning xossalari

1-ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (o‘rta qiymati) deb, uning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini bu qiymatlar mos ehtimollariga ko‘paytmasining yig‘indisiga aytiladi, ya'ni

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \quad .$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plami sanoqli bo‘lsa, u holda

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad .$$

Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, matematik kutilmasi mavjud, aks holda mavjud emas deyiladi.

Matematik kutilima quyidagi hossalarga ega:

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilmasi uning o‘ziga teng, ya'ni

$$M(C) = C.$$

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini matematik kutilima belgisidan tashqariga koeffitsient qilib chiqarish mumkin, ya'ni

$$M(CX) = CM(X).$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorlar algebraik yig‘indisining matematik kutilmasi,ularning matematik kutilmalari algebraik yig‘indisiga teng:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

4-xossa. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilmasi, ko‘paytuvchilar matematik kutilmalarining ko‘paytmasiga teng:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

2-ta’rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, uning matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi, ya’ni

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 .$$

Dispersiyani unga ekvivalent, amaliyotda hisoblash qulay bo‘lgan

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 .$$

formula yordamida ham topish mumkin. Ba’zi adabiyotlarda bu formula dispersiyaning ta’rifi sifatida keltirilgan.

Dispersiya quyidagi hossalarga ega:

1-xossa. O‘zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng, ya’ni

$$D(C) = 0.$$

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini avval kvadratga oshirib, so‘ng dispersiya belgisidan tashqariga koeffitsient qilib chiqarish mumkin, ya’ni

$$D(CX) = C^2 D(X) .$$

3-xossa. Bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar algebraik yig‘indisining dispersiyasi qo‘shiluvchilar dispersiyalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) .$$

3-ta'rif. Tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi, ya’ni

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

1. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan *X* diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

X	*4*	*6*	*10*
P	*0,2*	*0,3*	*0,5*

Yechish. $M(X) = 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 7,6.$

2. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar olingan. *X* tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilmasini va dispersiyasini hisoblang.

Yechish. Tavakkaliga bitta shar olinsa, bu shar qora yoki oq bo‘lishi mumkin. Demak, *X* tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari 0 yoki 1. U holda taqsimot qonuni quyidagicha tuziladi:

X	*0*	*1*
P	*5/6*	*1/6*

X^2	*0*	*1*
P	*5/6*	*1/6*

Demak, $M(X)=0\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$

$M(X^2)=0\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.\ D(X)=\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{5}{36}.$

2. *X* diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,2*	*0,4*	*0,3*	*0,08*	*0,02*

M(X), D(X) va $\sigma(X)$larni toping.

Yechish. $M(X)=0\cdot 0,2+1\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,08+4\cdot 0.\ 02=1,32.$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X^2	*0*	*1*	*4*	*9*	*16*
P	*0,2*	*0,4*	*0,3*	*0,08*	*0,02*

$M(X^2)=0\cdot 0,2+1\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,08+16\cdot 0,02=2,64.$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=2,64-(1,32)^2=2,64-1,7424=1,8976$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1,8976}=1,3775.$$

4. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X)=5$, $D(Y)=6$ ekanligi ma'lum bo‘lsa, $Z=3X+2Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish.

$D(Z)=D(3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=9\cdot 5+4\cdot 6=69.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

195. Ushbu

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

196. X tasodifiy miqdor-o‘yin kubi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

197. Qutida 7 ta shar bo‘lib, ularning to‘rttasi oq, qolganlari qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X - olingan oq sharlar soni. $M(X)$ni toping.

198. Ikkita o‘yin kubi baravariga 2 marta tashlanadi. X- ikkala o‘yin kublaridagi tushgan juft ochkolar soni. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

199. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X diskret tasodifiy miqdor olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo‘lsa, uning matematik kutilmasini toping.

200. Ovchi nishonga qarata to birinchi marta tekkuncha otadi, lekin otgan o‘qlarning soni 4 tadan ortmaydi. Ovchining nishonga tegizish ehtimoli 0,8 ga teng. Otilgan o‘qlar sonining taqsimot qonunini tuzing va uning dispersiyasini hisoblang.

201. O‘yin kubi 4 marta tashlanganda 6 ochkosining tushishi sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

202. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X)=4$, $D(Y)=5$ ekanligi ma'lum bo‘lsa, $Z=2X+3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

203. *X* tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi mos ravishda 2 va 10 ga teng. $Z=2X+5$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

204. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	*3*	*5*	*7*	*9*
P	*0,4*	*0,3*	*0,2*	*0,1*

205. *X* tasodifiy miqdor $P\{X=k\}=C_n^k P^k q^{n-k}, k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots n$ binomial taqsimot qonuniga ega bo‘lsa, $M(X)$ va $D(X)$ ni toping.

206. Mergan o‘q nishonga tekkuncha otadi (geometrik taqsimot), o‘qning nishonga tegish ehtimoli *p*ga teng. Otilgan o‘qlar sonining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

207. *A* hodisaning bitta tajribada ro‘y berish sonining matematik kutilmasi*A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli *p* ga tengligini isbot qiling.

208. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning mumkin bo‘lgan eng kichik va eng katta qiymatlari orasida yotishini isbot qiling.

209. Ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan *X* diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	*4,3*	*5,1*	*10,6*
P	*0,2*	*0,3*	*0,5*

210. *A* hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,2 ga teng. Agar *X* tasodifiy miqdor – *A* hodisaning 5 ta erkli tajribada ro‘y berishlari soni bo‘lsa, u holda uning dispersiyasini toping.

211. Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

212. *X* tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo‘lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo‘lib, $x_2 > x_1$ bo‘lsin. *X* ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. $M(X)=1,4$, $D(X)=0,24$. *X* tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

213. *X* tasodifiy miqdor ikkita $x_1 < x_2$ qiymatga ega. *X* ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 teng. $M(X)=2,6$, $\sigma=0,8$ bo‘lsa, *X* ning taqsimot qonunini toping.

214. X diskret tasodifiy miqdor A hodisaning ikkita erkli tajribada ro‘y berishlari soni bo‘lib, uning bu tajribalarda ro‘y berish ehtimoli bir xil va $M(X)=1{,}2$ ekanligi ma'lum bo‘lsa, $D(X)$ ni toping.

215. Ketma-ket ulangan 5 ta qusmdan iborat qurilmaning ishonchliligi (berilgan muddat ichida uzluksiz ishlashi) tekshirilmoqda. Ularni har birining ishonchlilik ehtimoli p ga teng bo‘lib, ular bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ishlaydi. Har bir qusmni tekshirish undan oldingisi ishonchli bo‘lgandagina amalga oshiriladi. X tasodifiy miqdor tajribadagi tekshirilgan qusmlar soni bo‘lsa, uning taqsimot qonunini va matematik kutilmasini toping.

216. Agar X tasodifiy miqdor faqat natural sonlar qabul qilsa, $M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$ tenglik o‘rinli ekanligini isbotlang.

217. 45 ochkodan 6 tasi yutuqli bo‘lgan “sportloto” tiraji o‘tkazilmoqda. Ishtirokchi bir dona chipta sotib oldi va uni to‘ldirdi. Uning k ta sonni to‘g‘ri topgan bo‘lish ehtimolini aniqlang (bunda k=6;5).

218. Qurilmani yig‘ish uchun 4 ta bir xil turdagi detal kerak. Omborda kerakli detallardan 10 ta bo‘lib, ulardan 5 tasi ishlatish uchun yaroqli. Tavakkaliga 10 ta detaldan 5 tasi ajratib olindi (bir detal har ehtimolga qarshi zahira uchun). Qurilmani yig‘ish mumkin bo‘lish ehtimolini toping.

219. Ikkita svetofor o‘rnatilgan yo‘lda avtomashina harakatlanmoqda. Svetoforlarda bir-biriga bog‘liqmas ravishda teng ehtimollik bilan qizil va yashil chiroqlar yonadi. X tasodifiy miqdor avtomashinaning birinchi marta to‘xtagunicha ortda qoldirgan svetoforlari soni. Agar avtomashinani haydovchi qoidaga amal qilgan holda boshqarib borayotgan bo‘lsa, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing hamda $M(X)$ va $D(X)$ larni hisoblang.

220. Archaga o‘rnatilgan chiroqlar marjoni ketma-ket ulangan. Uning lampochkalaridan biri kuyib qoldi. Chiroqlar marjoni 6 ta lampochkadan tashkil topgan va X tasodifiy miqdor kuygan lampochka aniqlanguncha tekshirilayotgan lampochkalar soni bo‘lsin. U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Taqsimot ko‘pburchagini yasang hamda $M(X)$ va $D(X)$ larni hisoblang.

221. Ikkita kompaniya uchun mukofot puli ajratilgan bo‘lib, u birinchi kompaniya uchun 10 mln. so‘mni, ikkinchi kompaniya uchun esa 15 mln. so‘mni tashkil qiladi. Birinchi kompaniya buyurtmani to‘liq bajarsa, mukofot puliga qo‘shimcha 50% ustama haq olishi, aksincha, 0,2 ehtimol bilan uni yo‘qotishi e'lon qilinda. Ikkinchi kompaniya buyurtmani to‘liq bajarsa, mukofot puliga qo‘shimcha 40% ustama haq olishi, aksincha, 0,15 ehtimol bilan uni yo‘qotishi e'lon qilinda. Bir yildan so‘ng ikkala kompaniya oladigan mukofot yig‘indisidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Kutilayotgan qo‘shimcha o‘rtacha foyda hamda risk darajasini aniqlang.

222. Tadbirkor 3 ta bankdan kredit olishi mumkin bo‘lsin. 1-bankdan
10 mln. so‘m miqdoridagi pul kreditini olish ehtimoli 1/3 ga, 2-bank uchun xuddi shunday miqdordagi pul kreditini olish ehtimoli 1/4 ga teng. 3- bankdan 20 mln. so‘m miqdoridagi pul kreditini olish ehtimoli 1/5 ga teng. Agar banklar bir-biriga bog‘liqmas ravishda ishlashi ma'lum bo‘lsa, mumkin bo‘lgan kredit pulidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing va sonli xarakteristikasini toping.

223. Bemorga uch turdagi dori tavsiya etilgan bo‘lib, ularning samaraliligi mos ravishda 0,5; 0,7 va 0,75 ga teng. Ijobiy samara beruvchi dorilar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$ va $D(X)$ni toping.

224. Samolyot halokatga uchragan kemani qidirish uchun parovoz qildi. Uning har parvozda kemani topish ehtimoli 0,4 ga teng. Qidirov parvozlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$ va $D(X)$ ni toping. Samolyotning uchinchi parvozda kemani topish ehtimolini aniqlang.

225. Ishlab chiqarish jarayonida 70% dan kam bo‘lmagan to‘g‘ri qaror qabul qiluvchi rahbar "yaxshi rahbar" bo‘lib hisoblanadi. Bunday qobiliyatga ega bo‘lgan bank boshqaruvchisi bank siyosati bo‘yicha 4 ta muhim qaror qabul qilishi kerak. To‘g‘ri qaror qabul qilish ehtimoli o‘zgarmas deb faraz qilgan holda, bank boshqaruvchisining to‘g‘ri qaror qabul qilishlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Bank boshqaruvchisining 3 tadan kam to‘g‘ri qaror qabul qilish ehtimolini toping.

226. Semestr davomida o‘qituvchilar tomonidan talabalar uchun maslahat soatlari tashkil etiladi. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fanidan maslahat soati olib boruvchi o‘qituvchi belgilangan bir soat ichida maslahat soatiga keluvchi talabalar soni X tasodifiy miqdor bo‘lib,o‘rta hisobda 8 ta talabani tashkil qilishiga e'tibor qaratdi. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. 0,5 soat ichida maslahat soatiga 3 ta talabaning tashrif buyurish ehtimolini toping.

227. Sug‘urta kompaniyasining 50 yoshdan oshgan sug‘urta polisiga ega bo‘lgan mijozlarining 30% i sog‘liqlaridan shikoyat qilib, sug‘urta summasini qoplashni talab qildilar. Tekshirish maqsadida tasodifiy ravishda 50 yoshdan oshgan, sug‘urta polisiga ega bo‘lgan 15 kishi ajratib olindi. Shikoyat bildirgan mijozlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Ajratib olinganlardan hech bo‘lmaganda 10 tasining sug‘urta summasini qoplashni talab qilishi ehtimolini toping.

228. Yakuniy nazorat bo‘yicha test 15 ta savoldan iborat bo‘lib, har bir test savoli uchun 5 ta javob tavsiya qilingan. Tavsiya qilingan javoblarning bittasi berilgan savol uchun to‘g‘ri javob bo‘lib hisoblanadi. Agar test topshiruvchi talaba barcha test savollari uchun to‘g‘ri javobni bilmasligi ma'lum bo‘lsa, talabaning test savollariga to‘g‘ri bergan javoblari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni toping. Talabaning hech bo‘lmaganda 10 ta test savoliga to‘g‘ri javob berishi ehtimoli qanday?

229. Turli reyslar bo‘yicha xalqaro aeroportga samolyotlarning kelib qo‘nish vaqti haqidagi ma'lumotlar elektron tabloda e'lon qilinadi. Turli reyslar haqidagi ma'lumotlarning tabloda paydo bo‘lishi bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda tasodifiy ravishda yuz beradi. Aeroportga bir soat davomida o‘rta hisobda 10 ta samolyot kelib qo‘nadi. Elektron tabloda bir soat davomida aeroportga kelib qo‘ngan samolyotlar haqidagi ma'lumotlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Bir soat davomida aeroportga 3 tadan kam bo‘lmagan samolyotning kelib qo‘nishi ehtimoli qanday? 15 minut davomida aeroportga bitta ham samolyotning kelib qo‘nmaslik ehtimoli-chi? (X - Puasson taqsimot qonuniga ega).

230. Shaharda transportlarning tig‘iz harakati vaqtida bir soat ichida umumiy transport vositalari uchun o‘rtacha 2 ta avtohalokat ro‘y berishi aniqlangan. Ertalabki transportlarning tig‘iz harakatlanish vaqti 1,5 soat, kechki transportlarning tig‘iz harakatlanish vaqti 2 soatni tashkil qiladi. Ertalabki va kechki transportlarning tig‘iz harakatlanish vaqtida yuz bergan avtohalokatlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Biror bir kunning ertalabki va kechki transportlarning tig‘iz harakatlanish vaqtida birorta ham avtohalokatning kuzatilmaganligi ehtimolini toping. (X - Puasson taqsimot qonuniga ega).

231. Do‘konda ma'lum bir rusumdagi 15 ta avtomobil bor. Ularning 7 tasi qora rang, 6 tasi kul rang va 2 tasi oq. Firma do‘konga qanday rangda bo‘lishidan qat'iy nazar 3 ta avtomobil sotib olmoqchi ekanligi haqida taklif berdi. Tasodifiy ravishda tanlanganqora rangdagi avtomobillar sonidan iborat X tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ni aniqlang. Firmaga sotilgan avtomobillardan kamida ikkitasining qora rangda bo‘lishi ehtimolini toping.

232. Mijozlarning bankka tashrif buyurishlari nazariy taqsimot qonunlaridan biriga (Puasson taqsimot qonuniga) buysunadi. Har 3 minutda bankkao‘rta hisobda bitta mijozning tashrif buyurishi mumkinligini bilgan holda, 15 minut davomida bankka tashrif buyurgan mijozlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. 1 minut davomida hech bo‘lmaganda 3 ta mijozning bankka tashrif buyurishi ehtimolini toping.

6-mavzu. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Taqsimot funksiya va uning xossalari. Zichlik funksiyasi

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni har doim ham jadval ko‘rinishida berilavermaydi. Masalan, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini sanab chiqish mumkin emas.

1-ta'rif. Har bir $x \in R$ uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimoli, ya’ni

$$F(x) = P(X < x)$$

funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi yoki integral funksiyasi deyiladi.

Agar$X$ diskret tasodifiy miqdor bo‘lib, $x_1,\ x_2,\ x_3$,...qiymatlarni mos ravishda $p_1,\ p_2,\ p_3$,... ehtimollar bilan qabul qilsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi hossalarga ega.

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
3. Agar $x_1 < x_2$ bo‘lsa, $F(x_1) \le F(x_2)$;
4. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

2-ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining differensial funksiyasi yoki zichlik funksiyasi deb,

$$f(x) = F'(x)$$

funksiyaga aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

orqali aniqlanadi.

Zichlik funksiya quyidagi hossalarga ega:

1. $f(x) \ge 0$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lib, u

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar, x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & agar, a < x \le b, \\ 0, & agar, x > b. \end{cases}$$

zichlik funksiyasiga ega bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor (*a*,*b*) oraliqda tekis taqsimlangan *R(a,b)* tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, *X* tasodifiy miqdor *N(a,σ)* normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Normal taqsimlangan *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning (α,β) oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Laplas funksiyasi.

Agar zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar, x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & agar, x\ge 0,\end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti ko‘rsatkichli (eksponensial) *Exp(λ)* taqsimot deyiladi.

Agar uzluksiz *X* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_X(x)$ va unga bog‘liq bo‘lmagan boshqa uzliksiz *Y* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_Y(y)$ bo‘lsa, u holda *Z*=*X*+*Y* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

ga teng bo‘ladi.

1. *X* - diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

X	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
P	*0,1*	*0,2*	*0,2*	*0,4*	*0,1*

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Ko‘rinib turibdiki, $x\in(-\infty;-2]$ uchun *X*<*x* hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi, ya’ni

$$F(x)=0$$

Endi $x\in$ (-2;1] bo‘lsin, u holda

$$F(x)=P(X<x)=P(X=-1)=0{,}1.$$

Agar $x\in$ (-1;0] bo‘lsa,

$$F(x)=P(X<x)=P(X=-1)+P(X=0)=0{,}1+0{,}2=0{,}3.$$

Huddi shuningdek, $x\in(0;1]$ bo‘lsa,

$$F(x)=0{,}1+0{,}2+0{,}2=0{,}5.$$

Agar $x\in(1;2]$ bo‘lsa,

$$F(x)=0{,}1+0{,}2+0{,}2+0{,}4=0{,}9.$$

Agar $x>2$ bo‘lsa,

$$F(x)=P(X<x)=1,$$

chunki ixtiyoriy $x>2$ uchun $X<x$ hodisa muqarrar hodisa bo‘ladi.

Shunday qilib, $F(x)$ taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le -2, \\ 0.1, & agar \quad -2<x\le -1, \\ 0.3, & agar \quad -1<x\le 0, \\ 0.5, & agar \quad 0<x\le 1, \\ 0.9, & agar \quad 1<x\le 2, \\ 1, & agar \quad x>2. \end{cases}$$

2. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le -1, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & agar \quad -1<x\le \frac{1}{3}, \\ 1, & agar \quad x>\frac{1}{3}, \end{cases}$$

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ intervalda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Taqsimot funksiyaning 2-xossasiga asosan:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Bu formulaga $a=0$, b=1/3 ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$P\left(0<X<\frac{1}{3}\right)=F\left(\frac{1}{3}\right)-F(0)=\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}}-\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=0}=\frac{1}{4}$$

3. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \sin 2x, & agar \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan,*f(x)* zichlik funksiyani toping.

Yechish. Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

$$f(x)=F'(x)\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ 2\cos 2x, & agar \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

4. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \cos x, & agar \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

F(x) taqsimot funksiyani toping.

Yechish.

$$\boldsymbol{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz}$$

formuladan foydalanamiz. Agar $x\le 0$ bo‘lsa, *F(x)=0.*

Demak,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dz=0.$$

Agar $0<x\le\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{x} \cos zdz = \sin x.$$

Agar $x > \dfrac{\pi}{2}$ bo‘lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{\pi/2} \cos zdz + \int_{\pi/2}^{x} 0\,dx = \sin z \Big|_{0}^{\pi/2} = 1.$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ \sin x, & agar \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & agar \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ \dfrac{2}{3}\sin 3x, & agar \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & agar \quad x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish.

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

formuladan foydalanamiz.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3xdx = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

233. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \sin x, & agar \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. *f(x)*zichlik funksiyani toping.

234. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \sin x, & agar \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. *F (x)* taqsimot funksiyasini toping.

235. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 3\sin 3x, & agar \quad \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan . *F (x)* taqsimot funksiyani toping.

236. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2}, & agar \quad 1<x\le 2,\\ 0, & agar \quad x>2.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. *F (x)* taqsimot funksiyani toping.

237. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi butun *Ox* o‘qida:

$$f(x)=\frac{4C}{e^{x}+e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. *C* o‘zgarmas parametrni toping.

238. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (Koshi taqsimot qonuni) butun *Ox* o‘qida:

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$$
tenglik bilan berilgan. *C* o‘zgarmas parametrni toping.

239. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (0;1) oraliqda
f(x) = C arctgx tenglik bilan berilgan bo‘lib, bu oraliqdan tashqarida *f(x) = 0*.
C o‘zgarmas parametrni toping.

240. *X* tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ x^2, & agar \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & agar \quad x > 1. \end{cases}$$

To‘rtta erkli tajriba natijasida *X* tasodifiy miqdorning rosa 3 marta (0,25;0,75) oraliqda yotadigan qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

241. *X* uzluksiz tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli *Exp(2)*qonun bo‘yicha taqsimlangan, ya’ni

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ 2e^{-2x}, & agar \quad x > 0, \end{cases}$$

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning (0,3;1) oraliqqa tushish ehtimolini toping.

242. *X* tasodifiy miqdor *N(0;2)* normal taqsimot qonuniga bo‘ysunsin. *X* tasodifiy miqdorning (-2; 3) oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

243. *X* tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ A\sin x, & agar \quad 0 < x \le \pi, \\ 0, & agar \quad x > \pi. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan.

a) *A* ni aniqlang;

b) taqsimot funksiyasi *F(x)* ni toping;

c) *f(x)* va *F(x)* funksiyalarining grafigini chizing.

244. *X* uzluksiz tasodifiy miqdor *N(20;5)* normal taqsimot qonuniga bo‘ysunsin. Tajriba natijasida *X* tasodifiy miqdorning (15;25) oraliqda joylashgan qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

245. *X* tasodifiy miqdor *R*[0;2] kesmada tekis taqsimot qonuniga ega. a) 0<*X*<0,5 hodisaning ehtimolini toping; b) *f(x)* va *F(x)* funksiyalarning grafiklarini chizing.

246. *X* tasodifiy miqdor *N(30;10)* normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. *X* tasodifiy miqdorning (10;50) oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

247. *X* tasodifiy miqdor normal taqsimlangan. Uning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,4ga teng. Tasodifiy miqdorning absolyut qiymati bo‘yicha matematik kutilmasidan chetlanishi 0,3 dan kichik bo‘lishi ehtimolini toping.

248. *X* tasodifiy miqdor Koshi taqsimot qonuni bo‘yicha taqsimlangan, ya’ni

$$F(x) = b + C\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

bunda $x \in (-\infty;+\infty)$. Bu taqsimot qonuni uzliksiz bo‘lishi uchun *a*, *b* va *C* koeffitsentlarni qanday tanlash kerak?

249*. *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, bir xil
R[-1;+1] tekis taqsimlangan taqsimot qonuniga ega. *Z=X+Y* tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping va u qanday taqsimot qonuniga mos kelishini aniqlang.

250*. *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, bir xil *F(x)* taqsimot funksiyasi bilan ifodalanuvchi qonunga ega. *U=min{X,Y}, V=max{X,Y}* tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini toping.

251*. *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, mos ravishda $Exp(\lambda_1)$, $Exp(\lambda_2)$ ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuniga ega. *Z=X+Y* tasodifiy miqdorning taqsimot qonunining zichlik funtsiyasini toping.

252*. *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, mos ravishda $Exp(\lambda_1)$, $Exp(\lambda_2)$ ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimlangan taqsimot qonuniga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunining zichlik funksiyasini toping.

7-mavzu. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Uzluksiz tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlarini butun son o‘qida qabul qilsin, u holda $f(x)$ funksiya uning zichlik funksiyasi bo‘lsin.
Agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

integral X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deyiladi, ya’ni

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx.$$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari $(a; b)$ oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

bo‘ladi.

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari Ox o‘qida yotsa, uning dispersiyasi

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)dx$$

yoki

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx]^2$$

tengliklar orqali aniqlanadi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a; b)$ oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [\int_{a}^{b} xf(x)dx]^2$$

Eslatma. Matematik kutilma va dispersiyaning diskret tasodifiy miqdorlar uchun xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli.

Tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}.$$

aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari uchun quyidagi $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k f(x)dx$ integral chekli bo‘lsa, u holda

$$M(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx$$

k- tartibli moment mavjud deyiladi.

X tasodifiy miqdorning p- tartibli kvantilli deb,

$$\begin{cases} P(X\le x)\ge p, \\ P(X\ge x)\ge 1-p, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining eng kichik ildiziga aytiladi va uni x_p orqali belgilanadi. Agar tenglamaning yechimi butun bir oraliqni tashkil qilsa, u holda kvantil oraliqning quyi chegarasiga teng deb olinadi.

1. $Exp(\lambda)$ ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo‘lib, taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \quad \lambda>0. \end{cases}$$

bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning:

a)zichlik funksiyasini;

b) matematik kutilmasini;

c) dispersiyasini toping.

Yechish. Ta’rifga asosan,

a) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \lambda>0. \end{cases}$

b) Matematik kutilima ta’rifiga asosan:

$$M(X)=\lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{aligned} &x=u, du=dx \\ &\upsilon=\int e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{aligned}\right\}=\lambda\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx\right]=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot 0}=\frac{1}{\lambda}$$

c) Dispersiyaning ta'rifiga asosan:

$$D(X)=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\left\{\begin{aligned} &x^2=u, du=2xdx \\ &\upsilon=\int e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{aligned}\right\}=$$

$$=\lambda\left[-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}dx\right]-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

2. *N(a,σ)* normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ta'rifiga ko'ra:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Integralni hisoblash uchun yangi $z=\frac{x-a}{\sigma}$ o'zgaruvchi kiritamiz. U holda

$$x=\sigma z+a, \qquad dx=\sigma dz.$$

bo'ladi. Yangi integrallash chegaralari oldingisiga tengligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Qo'shiluvchilardan birinchisi nolga teng (integral belgisi ostida toq funksiya, integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik). Qo'shiluvchilardan ikkinchisi Puasson integralining qiymati

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi},$$

ekanligini hisobga olsak,

$$M(X)=a.$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasi ta'rifiga ko'ra, $M(X)=a$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Yuqoridagiga o'xshash, $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$ yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Bundan

$$x-a=\sigma z, \quad dx=\sigma dz.$$

U holda

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2^2}}dz$$

ni hosil qilamiz. Bo'laklab integrallash natijasida $D(X)=\sigma^2$ ni topamiz.

Demak,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma.$$

Shunday qilib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdor a va σ parametrlarining ehtimoliy ma'nosi quyidagicha:

$$M(X)=a; \quad D(X)=\sigma^2.$$

3. Ushbu taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ x^2, & agar \quad 0<x\le 1, \\ 1, & agar \quad x>1. \end{cases}$$

Yechish. Zichlik funksiyasini topamiz.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Matematik kutilmasi:

$$M(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} .$$

Dispersiyasi:

$$D(X) = 2\int_0^1 x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{5}{18} .$$

8-mavzu. Amaliyotda ko‘p qo‘llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar

X diskret t. m. *binomial qonun* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar u 0,1,2,…n qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

ehtimollik bilan qabul qilsa. Bu yerda $0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = 0,1,...,n$.

Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan *X* diskret t. m. yaqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

$X=m$	0	1	2	…	m	…	N
$p_m = P\{X = m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Nyuton binomiga asosan $\sum_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$. Bunday taqsimotni $Bi(n,p)$ orqali belgilaymiz.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ agar\ x \le 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m},\ agar\ 0 < x \le n \\ 1,\ agar\ n < x. \end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz.

$$MX=\sum_{m=0}^{n} m\cdot P\{X=m\}=\sum_{m=1}^{n} m\cdot P\{X=m\}=\sum_{m=1}^{n} m\cdot C_n^m p^m q^{n-m}=$$

$$=np\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

$$DX=\sum_{m=0}^{n} m^2 P\{X=m\}-(np)^2=\sum_{m=1}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}-(np)^2=\Big|\, m^2=m(m-1)+m$$

almashtirish bajaramiz

$$\Big|=n(n-1)p^2\sum_{m=2}^{n} C_{n-2}^{m-2} p^{m-2} q^{n-m}+np\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m}-(np)^2=$$

$$n(n-1)p^2+np-(np)^2=npq.$$

Demak, $MX=np;\quad DX=npq$.

Puasson taqsimoti

Agar X t. m. 0,1,2,…m,… qiymatlarni

$$p_m=P\{X=m\}=\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *Puasson qonuni* bo‘yicha taqsimlangan t. m. deyiladi. Bu yerda a biror musbat son.

Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan X diskret t. m. ning taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

$X=m$	0	1	2	…	m	…
$p_m=P\{X=m\}$	e^{-a}	$\frac{a\cdot e^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2\cdot e^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$	…

Teylor yoyilmasiga asosan, $\sum_{m=0}^{\infty} p_m=e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}=e^{-a}\cdot e^{a}=1$. Bu taqsimotni $\Pi(a)$ orqali belgilaymiz. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ agar\ m\le 0\\ \sum\limits_{m<x}\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!},\ agar\ 0<m\le x\end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX=\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}=e^{-a}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\frac{a^m}{m!}=a\cdot e^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=a\cdot e^{-a}\cdot e^{a}=a,$$

$$DX=\sum_{m=0}^{\infty} m^2\cdot\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}-a^2=a\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\frac{a^{m-1}\cdot e^{-a}}{(m-1)!}-a^2=$$

$$=a\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!}\right]-a^2=a(a+1)-a^2=a$$

Demak, $MX=a;\quad DX=a$.

Geometrik taqsimot

Agar X t. m. 1,2,…m,… qiymatlarni

$$p_m=P\{X=m\}=q^{m-1}p$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *geometrik qonuni* bo‘yicha taqsimlangan t. m. deyiladi. Bu yerda $p=1-q\in(0,1)$.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan t. m. larga misol sifatida quyidagilarni olish mumkin: sifatsiz mahsulot chiqqunga qadar tekshirilgan mahsulotlar soni; gerb tomoni tushgunga qadar tashlangan tangalar soni; nishonga tekkunga qadar otilgan o‘qlar soni va hokazo.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan X diskret t. m. taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

$X=m$	1	2	…	m	…
$p_m=P\{X=m\}$	p	qp	…	$q^m p$	…

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}p=p\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}=p\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1,$$

chunki p_m ehtimolliklar geometrik progressiyani tashkil etadi: $p, qp, q^2p, q^3p,\ldots$. Shuning uchun ham (2. 6. 3) taqsimot geometrik taqsimot deyiladi va $Ge(p)$ orqali belgilanadi.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}0, \; agar \; m<1 \\ \sum\limits_{m<x} q^{m-1}p, \; agar \; 1\le m\le x\end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX=\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}p=p\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}=p\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^{m}\right)_q^{'}=p\left(\frac{1}{1-q}\right)_q^{'}=$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p},$$

$$DX=\sum_{m=1}^{\infty} m^2\cdot q^{m-1}p-\frac{1}{p^2}=(m^2=m(m-1)+m \text{ almashtirishni bajaramiz})=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)q^{m-1}p+\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}p-\frac{1}{p^2}=pq\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)q^{m-2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=$$

$$q\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^{m}\right)_{q^2}^{''}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=pq\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Demak, $MX=\dfrac{1}{p}$; $\quad DX=\dfrac{q}{p^2}$.

Tekis taqsimot

Agar uzluksiz X t. m. zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ agar } x\in[a,b], \\ 0, \text{ agar } x\notin[a,b]\end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u *[a,b] oraliqda tekis taqsimlangan* t. m. deyiladi.

[a,b] oraliqda tekis taqsimlangan X t. m. ni $X \sim R[a,b]$ ko‘rinishda belgilanadi. $X \sim R[a,b]$ uchun taqsimot funksiyasini topamiz.

agar $a\le x\le b$ bo‘lsa

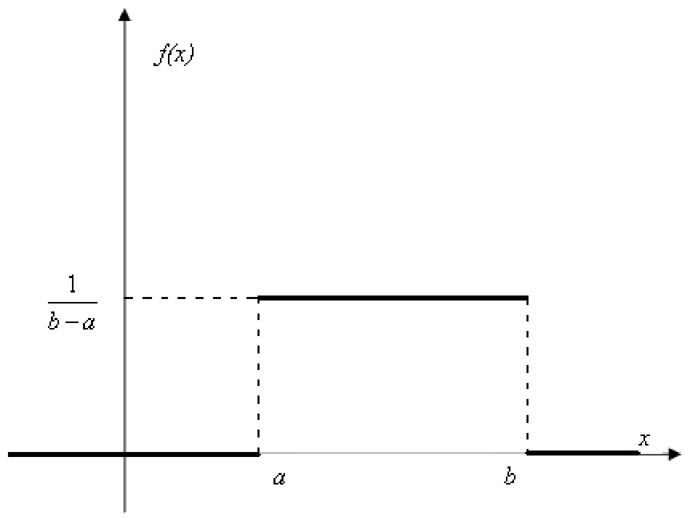
$$F(x)=\int_a^x \frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^x=\frac{x-a}{b-a},$$

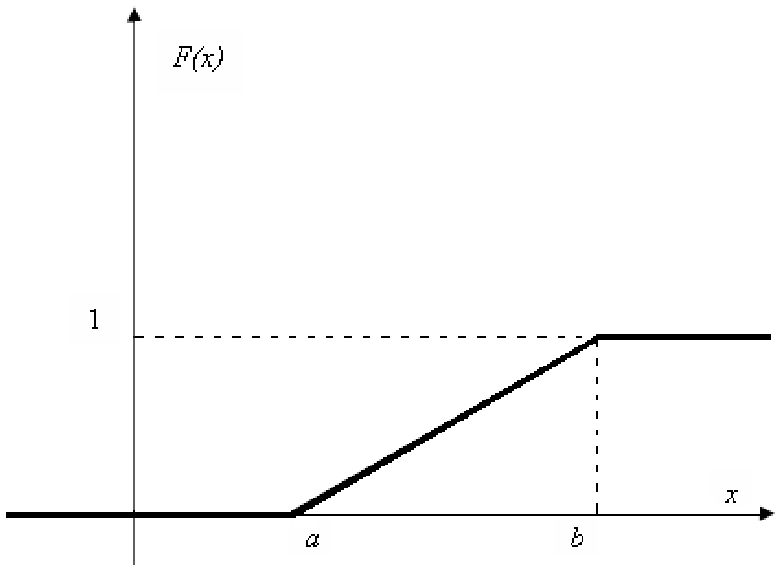
agar $x<a$ bo‘lsa, $F(x)=0$ va $x>b$ bo‘lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_{a}^{b}\frac{dt}{b-a}+\int_{b}^{x}0dt=\frac{t}{b-a}\Big|_{a}^{b}=1$$ bo‘ladi.

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<a \text{ bo'lsa,}\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{agar } a\le x\le b \text{ bo'lsa,}\\ 1, & \text{agar } b<x \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$





$X \in R[a,b]$ t. m. uchun MX va DX larni hisoblaymiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} x\cdot 0dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},;$$

$$DX = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left.\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Demak, $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

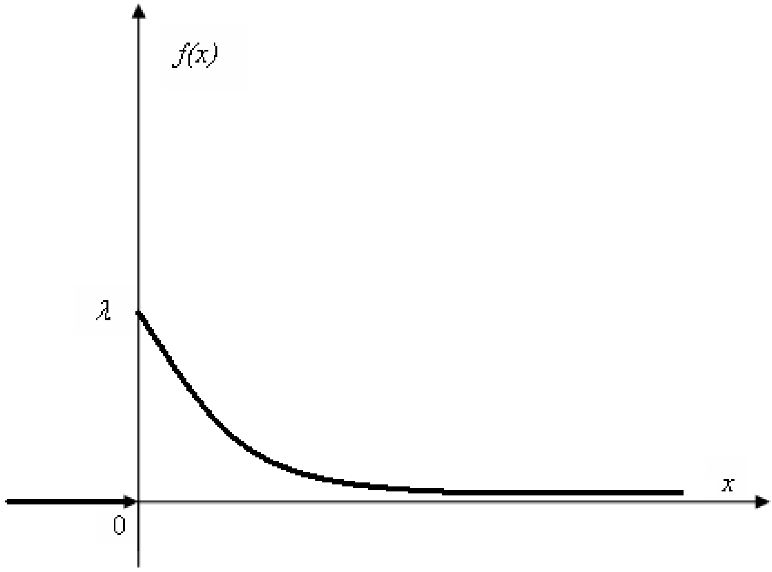
Ko‘rsatkichli taqsimot

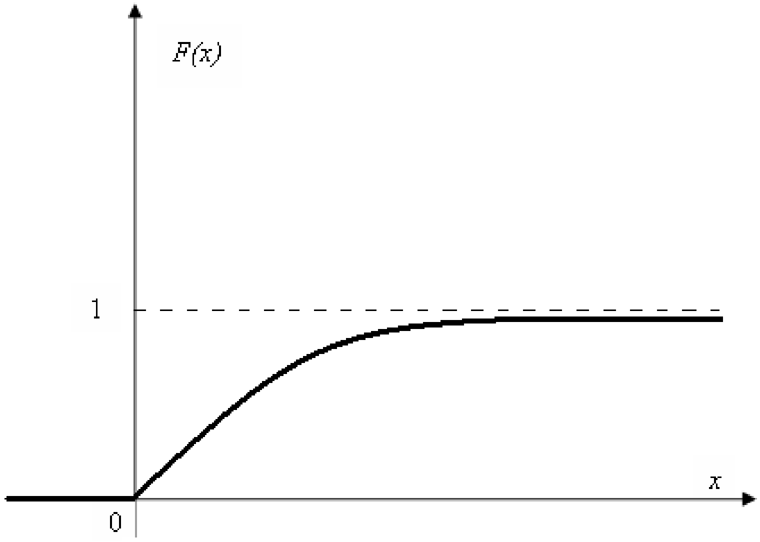
Agar uzluksiz X t. m. zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ agar } x \geq 0, \\ 0, \text{ agar } x < 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X t. m. *ko‘rsatkichli qonun* bo‘yicha taqsimlangan t. m. deyiladi. Bu yerda λ biror musbat son. λ

parametrli ko‘rsatkichli taqsimot $E(\lambda)$ orqali belgilanadi. Uning grafigi rasmda keltirilgan.





Taqsimot funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \text{ agar } x \geq 0, \\ 0, \text{ agar } x<0.\end{cases}$$

Endi ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b xde^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b\right)=\frac{1}{\lambda},$$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(MX)^2=\lambda\int_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=[\text{bo'laklab integrallash formulasini ikki marta qo'llaymiz}]=$$

$$=\lambda\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\right)\Big|_0^b\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Demak, agar $X \sim E(\lambda)$ bo‘lsa, u holda $MX=\frac{1}{\lambda}$ va $DX=\frac{1}{\lambda^2}$.

Normal taqsimot

Normal taqsimot ehtimollar nazariyasida o‘ziga xos o‘rin tutadi. Normal taqsimotning xususiyati shundan iboratki, u limit taqsimot hisoblanadi. Ya’ni boshqa taqsimotlar ma’lum shartlar ostida bu taqsimotga intiladi. Normal taqsimot amaliyotda eng ko‘p qo‘llaniladigan taqsimotdir.

X uzluksiz t. m. *normal qonun* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘lsa

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

a va $\sigma>0$ parametrlar bo‘yicha normal taqsimot $N(a,\sigma)$ orqali belgilanadi. $X\sim N(a,\sigma)$ normal t. m. ning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Agar normal taqsimot parametrlari a=0 va $\sigma=1$ bo‘lsa, u standart normal taqsimot deyiladi. Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

ko‘rinishga ega va u Laplas funksiyasi deyiladi$a$ va σ parametrlarni ma’nosini aniqlaymiz. Buning uchun $X \sim N(a,\sigma)$ t. m. ning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=\text{t almashtirish bajaramiz}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2}\sigma t+a)e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma dt=\frac{\sigma\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=0+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=a$$

Birinchi integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegarasi esa nolga nisbatan simmetrikdir. Ikkinchi integral esa Puasson integrali deyiladi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

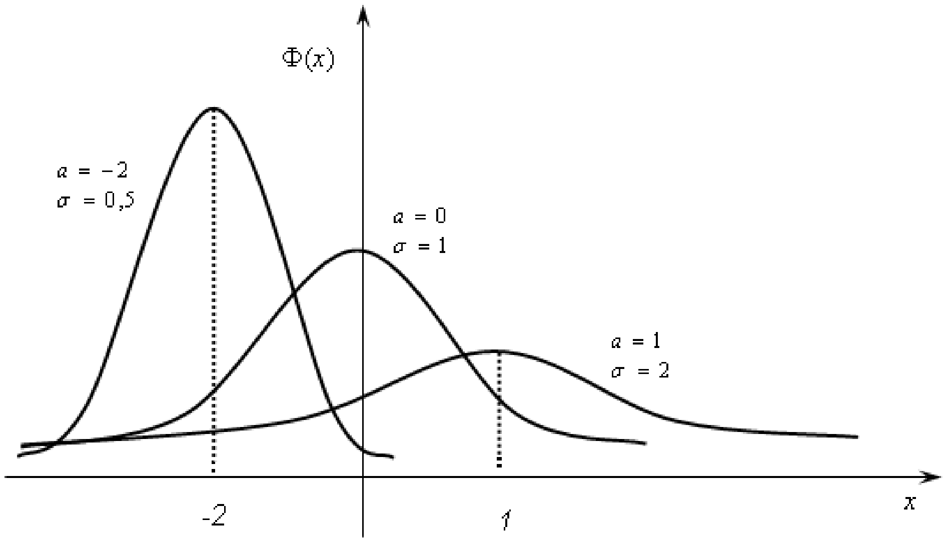
Shunday qilib, a parametr matematik kutilmani bildirar ekan. Dispersiya hisoblashda $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$=t almashtirish va bo‘laklab integrallashdan foydalanamiz:

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2\sigma^2t^2e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\sigma^2.$$

Demak, $DX = \sigma^2$ va σ o‘rtacha kvadratik tarqoqlikni bildirar ekan.



$X \sim N(a,\sigma)$ t. m. ning (α,β) intervalga tushishi ehtimolligini hisoblaymiz. Avvalgi mavzulardan ma’lumki,

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Laplas funksiyasidan foydalanib,quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Normal taqsimot taqsimot funksiyasini Laplas funksiyasi orqali quyidagicha ifodalasa bo‘ladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt = P\{-\infty < X < x\} = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \Phi_0(+\infty) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}$$

Bunda $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

Agar Laplas funksiyasi $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ va

$$P\{\alpha < X < \beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Amaliyotda ko‘p hollarda normal t. m. ning a ga nisbatan simmetrik bo‘lgan intervalga tushishi ehtimolligini hisoblashga to‘gri keladi. Uzunligi $2l$ bo‘lgan $(a\text{-}l, a+l)$ intervalni olaylik, u holda $P\{a-l\le X\le a+l\}=P\{|X-a|\le l\}=$

$$\Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right)=2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1.$$

Demak,

$$P\{|X-a|\le l\}=2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1.$$

Agar $l=3\sigma$ deb olsak, $P\{|X-a|\le 3\sigma\}=2\Phi_0(3)$ bo‘ladi. $\Phi_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvalidan $\Phi_0(3)=0.49865$ ni topamiz. U holda $P\{|X-a|\le 3\sigma\}\approx 0.9973$ bo‘ladi. Bundan quyidagi muhim natijaga ega bo‘lamiz: Agar $X \sim N(a,\sigma)$ bo‘lsa, u holda uning matematik kutilishidan chetlashishining absolut qiymati o‘rtacha kvadratik tarqoqligining uchlanganidan katta bo‘lmaydi. Bu qoida “*uch sigma qoidasi*” deyiladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

253. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{3x^2}{8}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Matematik kutilmasi va dispersiyani hisoblang.

254. *X*uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

*M(X), D(X)*va σ*(X)* larni toping.

255. Zichlik funksiyasi $f(x)=10e^{-10x}\ (x\ge 0)$ bilan berilgan ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi, o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

256. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar & x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0.5\cos x, & agar & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & agar & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ*(X)* larni toping.

257. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar & x\le 2,\\ 0.5, & agar & 2<x\le 4,\\ 0, & agar & x>4.\end{cases}$$

M(X), D(X) vaσ *(X)* larni toping.

258. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar & x<0,\\ 5e^{-5x}, & agar & x\ge 0.\end{cases}$$

M(X), D(X) vaσ *(X)* larni toping.

259. Agar *M(X)=3, D(X)=16* ekanligi ma'lum bo'lsa, normal taqsimlangan *X* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

260. *X* uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ 2x, & agar \quad 0<x\le 1,\\ 0, & agar \quad x>1.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. *M(X), D(X)* va σ *(X)* larni toping.

261. (2;8) oraliqda tekis taqsimlangan *X* tasodifiy miqdorning *M(X), D(X)* va σ *(X)* larni toping.

262. *X* uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<0,\\ 0{,}004e^{-0{,}004x}, & agar \quad x\ge 0.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. *M(X), D(X)* va σ *(X)* larni toping.

263. Normal taqsimlangan *X* tasodifiy miqdor

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. *M(X), D(X)* larni toping

264. *X*uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}(-\infty<x<\infty)$$

X ning matematik kutilmasini toping.

265. *X* tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & agar \quad x\le 0,\\ 0, & agar \quad x>0.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. *M(X)* va *D(X)* larni toping.

266. *X* tasodifiy miqdor

$$f(x)=Ax^2e^{-\lambda x}\left(\lambda>0,0\le x<\infty\right)$$

zichlik funsiyasi bilan berilgan. Taqsimot funksiyasi *F(x)* ni toping.

267. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=A+Barctgx(-\infty<x<\infty)$$

taqsimot funksiyasiga ega.

a) *A* va *B*o'zgarmas sonlarni toping;

b) *f(x)* zichlik funksiyasini toping;

c) *M(X)* ni toping.

268. *X* tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, \quad agar & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \quad agar & |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

zichlik funsiyasi bilan berilgan.

a) *A* koeffitsientini toping;

b) *F (x)* taqsimot funksiyasini toping;

c) *M(X)*va *D(X)*ni toping.

269. *X* tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}\cos^2 x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. *M(X)* va *D(X)*larni toping.

270. *X* tasodifiy miqdor tekis taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. *M(X)=4, D(X)=3. X* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

271. *X* tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiya bilan berilgan.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 3x^2, & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

*M(X)*ni toping.

272. *X* tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiya bilan berilgan.

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

a) *A*koeffitsientini toping.

b) *M(X)*ni toping.

273. *X* tasodifiy miqdor Laplas taqsimot qonuniga ega bo‘lib, zichlik funksiyasi quyidagicha

$$f(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\frac{|x-\alpha|}{\alpha}}, \qquad \alpha>0$$

Bu yerda*a*- ixtiyoriy haqiqiy son. *M(X)* va *D(X)* larni toping.

274. *X* tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Axe^{-\lambda^2x^2}, & x>0.\end{cases}$$

zichlik funksiyasiga ega.

a) *A* koeffitsientni toping;

b) *M(X)* va *D(X)*larni toping.

275. *X* tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyasiga ega.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}, & 0<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

*M(X)*ni toping.

276. *X* tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyasiga ega.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

M(X) ni toping.

277. *X* tasodifiy miqdor (-*a*, *a*) oraliqda

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Bu oraliqdan tashqarida *f(x)=0.* *X* tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

278. Koshi taqsimot qonunining zichlik funktsiyasi

$$f(x)=\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$$

berilgan. Bu taqsimotning matematik kutilmasi va yuqoriroq tartibli momentlari mavjudmi?

279. Tekshirilayotgan *X* tasodifiy miqdor *N(10,5)* qonuniyatga bo‘ysunadi. *p* ehtimollik bilan matematik kutilmasiga nisbatan simmetrik mumkin bo‘lgan qiymatlar oralig‘ini toping. *p=0. 9974, p=0. 9544, p=0. 5* larda hisoblang.

280. Shokolad qutisi avtomatik ravishda qadoqlanadi va ularning o‘rtacha massasi 1,06 kg. Qutilardan 5% ining og‘irligi 1 kg dan kamligi ma’lum bo‘lsa, qancha foyiz qutilar 940 grammdan og‘ir bo‘ladi.

281. X tasodifiy miqdor $N(1;\sigma)$ qonuniyatga egahamda $P(X<2)=0.99$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, $M(X^2)$ va $P(X^2>2)$ ni hisoblang.

282. X tasodifiy miqdor $N(a;\sigma)$ qonuniyatga ega hamda (a,b) – oraliq $M(X)$ matematik kutilmani o‘z ichiga olmaydi.

a) $Q(\sigma)=P(a<X<b)$ bo‘lsa, σ ning qanday qiymatida u maksimal bo‘ladi;

b) $M(|X-M(X)|)$ ni hisoblang.

283. Shaxtada kunlik ko‘mir qazib olish $N(a,\sigma)$ normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. Agar a=785 t. ga, σ=60 t. ga teng bo‘lsa, muayyan bir kun davomida kamida 800 t ko‘mir qazib chiqarilishi ehtimolini toping. 750 t dan 850 t gacha ko‘mir ish kunining qancha qismida qazib chiqariladi?

284. Issiqxonada yetishtirilgan tropik greyfrut mevasining og‘irligi normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. Uning matematik kutilmasi noma'lum bo‘lib, dispersiyasi 0,04 ga teng. Agronom yetishtiriladigan tropik mevaning 65% ining og‘irligi 0,5 kg. dan oshmasligini biladi. Tasodiy ravishda tanlangan greyfrutning kutilayotgan og‘irligini aniqlang.

285. Joriy yil uchun bankning foiz stavkasi haqidagi tahlilchining bashorati $N(a,\sigma)$ normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. Agar a=9% ga, σ=2,6% ga teng bo‘lsa, tahlilchilar guruhidan tasodifan tanlab olingan bitta tahlilchining bashoratiga ko‘ra, foiz stavkasining darajasi a) 11% ga ortiq, b) 14% dan kam, c) 12% dan 15% gacha bo‘lishi ehtimolini toping.

286. Biror bir kompaniya aksiyasining yil davomidagi bahosi $N(a,\sigma)$ normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. Agar a=48 sh. p. b. ga, σ=6 ga teng bo‘lsa, tahlil qilinayotgan davr oralig‘ida tasodifiy tanlangan kundagi aksiya bahosining a) 60 sh. p. b. dan ortiq, b) 60 sh. p. b. dan kam, c) 40 sh. p. b. bilan 50 sh. p. b. oralig‘ida bo‘lishi ehtimolini toping.

9-mavzu. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizliklari. Chebishev va Bernulli teoremalari

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatini oldindan aytish mumkin emas, ya'ni u tasodifiy qiymat qabul qiladi. Lekin amaliyotda ko'pincha ko'p sonli tasodifiy miqdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xususiyatini yo'qotib borar ekan. Amaliyot uchun esa ko'p tasodifiy sabablarning birgalikda ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib kelinishi katta ahamiyatga ega, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi.

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, ...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin va bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari mavjud bo'lib, ular mos ravishda $a_1, a_2, ...a_n$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, ...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli deyiladi.

Bu ta'rifning ma'nosi: n ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

tasodifiy miqdorni tasodifiy bo'lmagan

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

son bilan almashtirish mumkin ekanligidadir.

Katta sonlar qonuni bo'yicha qilingan dastlabki fundamental kashfiyotlar rus akademigi P. L. Chebishev nomi bilan chambar-chas bog'langan. Bu sohada qilingan kashfiyotlarning deyarli barchasini isbotlash jarayonida Chebishev tengsizliklari yetakchi rol o'ynaydi.

1-teorema(Chebishev tengsizligi). Musbat aniqlangan X tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo'lsa, u holda ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun quyidagi munosabat har doim o'rinli

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Bu teoremadan qator natijalar kelib chiqadi.

1-natija.

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

2-natija.

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

2-teorema. (Chebishev katta sonlar qonuni haqida). $X_1, X_2, \ldots X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o‘zaro erkli bo‘lib, ularning har biri *C* soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

3-teorema. (Bernulli katta sonlar qonuni haqida). *n* ta erkli tajribada *A* hodisaning ro‘y berishlari soni μ bo‘lsin, har bir tajribada *A* hodisa o‘zgarmas *p* ehtimol bilan ro‘y bersin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremaning ma’nosi quyidagicha: *n* yetarlicha katta bo‘lganda $\frac{\mu}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan *p* ga teng, deb olish mumkin, ya’ni $\frac{\mu}{n}$ ning qiymatlari *p* ehtimol atrofida joylashgan bo‘ladi.

Bundan tashqari, bu teorema tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik hossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

1. $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, X_n tasodifiy miqdor–*n,o,n* qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1-\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n>1)$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi-mi?
Yechish. Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n \cdot \frac{1}{n^2} + 0 \cdot \left(1-\frac{2}{n^2}\right) + n \cdot \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0^2 \cdot \left(1-\frac{2}{n^2}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2.$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. Demak, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tadbiq qilsa bo‘ladi.

2. *A* hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,5ga teng. Agar 100 ta erkli tajribao‘tkaziladigan bo‘lsa, *A* hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.
Yechish. *X* tasodifiy miqdor qaralayotgan *A* hodisaning 100 ta erkli tajribada ro‘y berishi sonining matematik kutilmasini va dispersiyasini topamiz:

$$M(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan *M(X)=50* matematik kutilmasi orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

va quyidagi Chebishev tengsizligidan foydalamiz:

$$P(|X - M(X)| \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad .$$

Bunga $M(X)=50,\ D(X)=25, \varepsilon > 10$ ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x - 50| < 10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0{,}75 \quad .$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

287. Agar $D(X)=0{,}001$ bo‘lsa, $|X-M(X)|<0.\ 1$ ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo‘yicha baholang.

288. Quyidagilar berilgan: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 0.\ 9,\ D(X)=0.\ 004$. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ε ni toping.

289. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 16 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 80 km/s dan oshmasligi ehtimolini baholang.

290. Toshkent shahrining bitta rayonida elektrenergiyaning o‘rtacha sarfi may oyida 360000 kw/s. May oyida elektrenergiya sarfining 1000000 kw/s dan oshmasligi ehtimolini baholang.

291. Aholi punktida 1 kunda suvning o‘rtacha sarfi 50000 litr. Bir kunda suv sarfining 150000 litrdan oshmasligi ehtimolini baholang.

292. X tasodifiy miqdor uchun $M(X)=1$ va $\sigma(X) = 0.2$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, $0.\ 5<X<1.\ 5$ tengsizlik ehtimolini baholang.

293. Agar $D(X)=0{,}004$ bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X-M(X)|<0{,}2$ ning ehtimolini baholang.

294. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X:	*0,3*	*0,6*
P:	*0,2*	*0,8*

$|X-M(X)|<0{,}2$ ni baholang hamda bahoni aniq ehtimol bilan solishtiring.

295. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2,...X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X_n : -n\alpha \quad 0 \quad n\alpha$$
$$P : \quad \frac{1}{2n^2} \quad 1-\frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{2n^2}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo‘llash mumkin-mi?

296. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2,...X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X_n : \quad a \quad -a$$
$$P : \quad \frac{n}{2n+1} \quad \frac{n+1}{2n+1}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo‘llash mumkin-mi?

297. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2,...X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X_n : -n\alpha \quad 0 \quad n\alpha$$
$$P : \frac{1}{2^n} \quad 1-\frac{1}{2^{n-1}} \quad \frac{1}{2^n}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo‘llash mumkin-mi?

298. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2,...X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X_n : -\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3}$$
$$P : \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo‘llash mumkin-mi?

299. *X* diskret tasodifiy ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X: 0. 3 0. 5
P: 0. 6 0. 4

$|X-M(X)|<0{,}3$ ni baholang. Bahoni aniq ehtimol bilan solishtiring.

300. Agar $D(X)=0{,}002$ bo‘lsa, $|X-M(X)|<0{,}2$ ning ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

301. Ma’lum bir joyda bir yilda o‘rtacha 75 kun quyoshli bo‘ladi. Bu joyda bir yilda quyoshli kunlarni 200 kundan ko‘p bo‘lmaslik ehtimolini baholang.

302. Avtoparkdagi avtobuslarning o‘rtacha 5 tasi har oyning oxirida ta’mirlashga jo‘natiladi. Agar A oy oxirida avtoparkning ko‘pi bilan 15 ta avtobusi ta’mirlashga jo‘natilishi hodisasi bo‘lsa, u holda bu hodisaning ehtimolini:

a) dispersiya haqida ma’lumot noma’lum bo‘lgan holda;

b) dispersiya 4 ga teng bo‘lgan holida baholang.

303. Simmetrik tanga tashlanganida gerb tomoni tushishlar sonining chastotasi (0,4;0,6) oraliqga tushishi ehtimoli 0,975 dan kichik bo‘lmasligi uchun kamida necha marotaba tanga tashlanishi kerak? (Chebishev tengsizligini qo‘llang).

304. Yashikdagi oq va qora sharlar soni 3:2 kabi nisbatda. Har gal yashikdan bittadan shar olinib uning rangi e`lon qilinganidan so‘ng yana yashikka qaytarib solinadi. Oq sharlar chiqishi sonining nisbiy chastotasi har bir tajribada oq shar chiqish ehtimolidan $\varepsilon=0.05$ ga farq qilmaslik ehtimoli 0. 9948 dan kam bo‘lmasligi uchun kamida necha marotaba shar olish tajribasini o‘tkazish kerak? (Chebishev tengsizligini qo‘llang).

305. X tasodifiy miqdor biror fizik jismni o‘lchash natijasi bo‘lsin. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi 0,1 ga va o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,02 ga teng. 0,95 ehtimollik bilan quyidagi hollarda o‘lchov nisbiy aniqligida mumkin bo‘lgan kafolatni (ε) toping (o‘lchov nisbiy aniqligi deb,

$$\left|\frac{X-M(X)}{M(X)}\right|$$

munosabat tushiniladi):

a) bir marotaba o‘lchanganda;

b) 5 marotaba o‘lchanib, o‘lchov qiymati sifatida o‘rta arifmetik olinganda.

306. Yuqoridagi masalani 100 marta o‘lchash o‘rta arifmetigi uchun hisoblang va natijani markaziy limit teoremani qo‘llash mumkin, deb topilgan qiymat bilan solishtiriring.

307. Shahar aholisining oylik o‘rtacha daromadi 400 ming so‘mni tashkil qiladi. Uning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 100 ming so‘m. Tasodifiy ravishda tanlab olingan 100 kishining o‘rtacha daromadi 350 mingdan 450 minggacha bo‘lish ehtimolini baholang.

308. 400 ta tajribaning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, hodisaning ro‘y berishlar soni bilan hodisaning ro‘y berishlari o‘rtacha soni orasidagi farqi 20 dan ko‘p bo‘lmaslik ehtimolini baholang.

309. Elektr lampaning yaroqlilik muddati ko‘rsatkichli taqsimot bo‘yicha taqsimlangan bo‘lib, matematik kutilmasi 1000 soatga teng. 100 ta lampa uchun o‘rtacha yaroqlilik muddati 900 soatdan kam bo‘lmaslik ehtimolini baholang.

II-qism. Matematik statistika elementlari

10-mavzu. Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma tahlili

Tasodifiy hodisalar ustida o‘tkazaladigan kuzatish natijalariga asoslanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijalarini (statistik ma’lumotlarni) to‘plash, ularni guruhlarga ajratish va qo‘yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iboratdir.

Biror *X* tasodifiy miqdor *F(x)* taqsimot funksiyasiga ega, deylik. *X* tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan *n* ta tajriba (kuzatish) natijasida olingan $X_1, X_2, ..., X_n$ qiymatlar to‘plamiga *n* hajmli tanlanma deyiladi, $X_1, X_2, ..., X_n$ qiymatlarni bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba’zan $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma *F(x)* nazariy taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan bosh to‘plamdan olingan, deb ham ataladi.

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, ..., x_n$ berilgan $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanmaning mos ravishdagi kuzatish natijasi bo‘lsin va $x^*_{(1)} < x^*_{(2)} < ... < x^*_{(k)}$ tanlanma kuzatish natijasi uchun qurilgan variatsion qator $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$ ning bir-biridan farq qiluvchi elementlaridan tuzilgan yangi qator bo‘lsin, ya’ni $x^*_{(1)}$ qiymat n_1 marta, $x^*_{(2)}$ qiymat n_2 marta, va hokazo, kuzatilgan bo‘lsin. U holda kuzatilgan $x^*_{(i)}$ qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chastotalar deb ataladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deganda, ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan tajriba natijalari (tanlanma) uchun chastotalarning statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x -tajriba natijalarining (tanlanma elementlarining) x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni(x dan kichik variantalar soni); n – kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi) bo‘lsin, u holda taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymati uchun $\{X<x\}$ hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga, ya’ni

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

ga aytiladi. Tanlanmaning statistik taqsimotini ko‘rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan Xmiqdorning taqsimot qonuni haqida aniqroq tasavvur hosil qilish uchun poligon va gistogramma, deb ataluvchi grafiklardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb, $(x_{(1)}^*, n_1), (x_{(2)}^*, n_2), ..., (x_{(k)}^*, n_k)$nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirishdan hosil bo‘lga0n siniq chiziqli grafikka aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x_{(1)}^*, w_1), (x_{(2)}^*, w_2), ..., (x_{(k)}^*, w_k)$ nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirishdan hosil bo‘lgan siniq chiziqli grafikka aytiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$(chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan va ketma-ket joylashtirilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat shakiga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan va ketma-ket joylashtirilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat shaklga aytiladi.

1. *n=30* hajmli bo‘lgan tanlanmaning chastotalar taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo‘lamiz.

$$w_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad w_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \qquad w_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Demak, nisbiy chastotalar taqsimoti quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish.

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$$

$$w_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2; \qquad w_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3; \qquad w_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

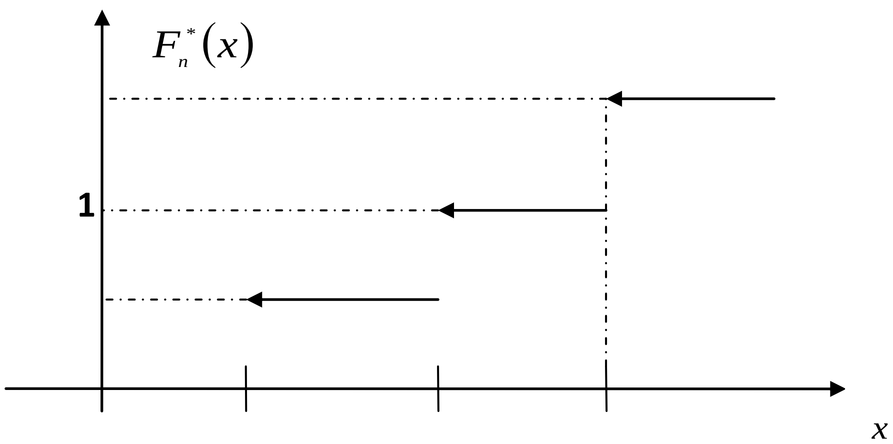
Demak, nisbiychastotalartaqsimoti:

x_i	1	4	6
w_i	0,2	0,3	0,5

Empiriktaqsimotfunksiyasiquyidagiko‘rinishdabo‘ladi.

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 1;\\ 0{,}2, & agar \quad 1<x\le 4;\\ 0{,}5, & agar \quad 4<x\le 6;\\ 1, & agar \quad x>6.\end{cases}$$

Endi empiriktaqsimotfunksiyasining grafigini yasaymiz.

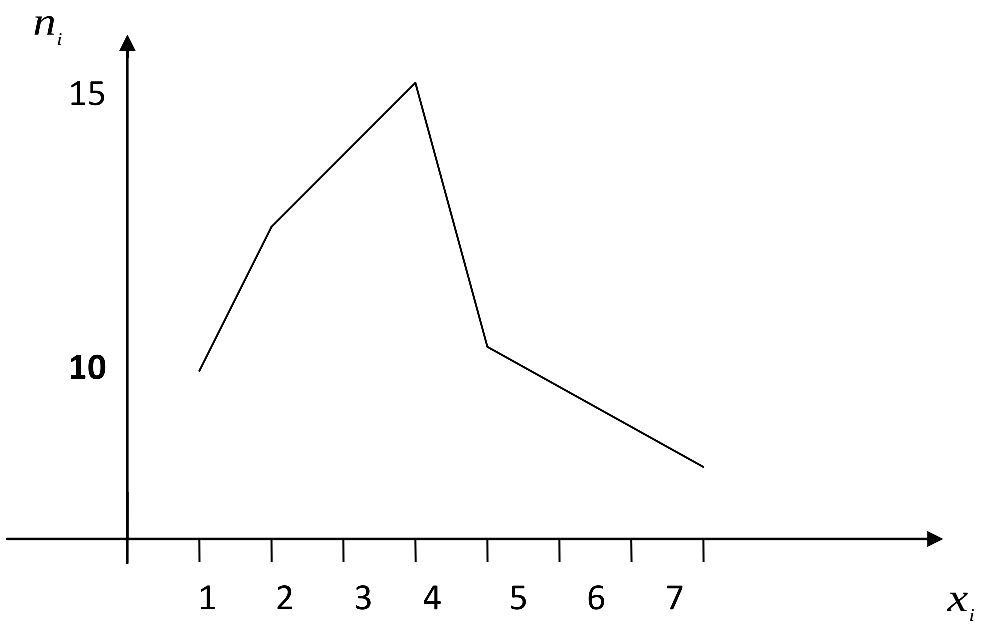


10. 1-rasm

3. Berilgan tanlanma taqsimoti boyicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish. *n=5+10+15+7+3+=40* tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



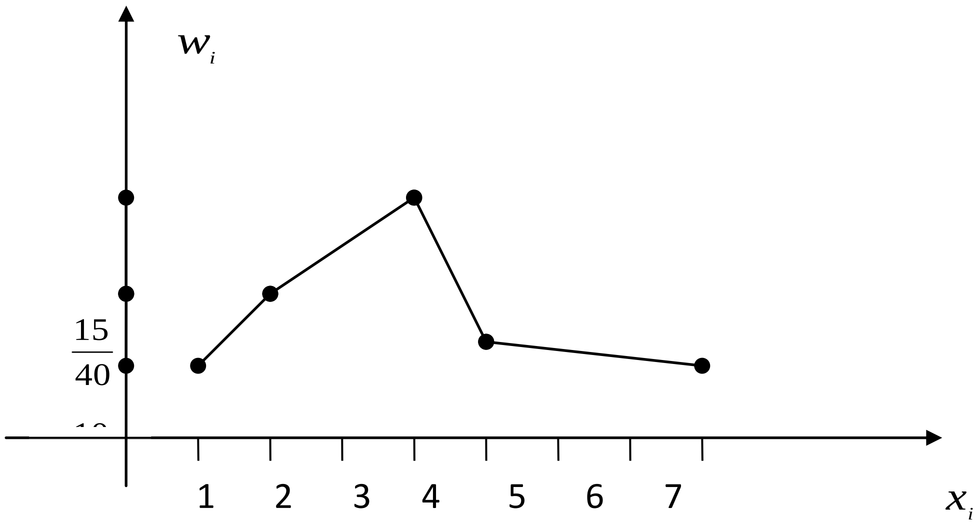
10. 2-rasm

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$w_t = \frac{5}{10}; \qquad w_2 = \frac{10}{40}; \qquad w_3 = \frac{15}{40}; \qquad w_4 = \frac{7}{40}; \qquad w_5 = \frac{3}{40};$$

x_i	1	2	4	5	8
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

Nisbiy chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

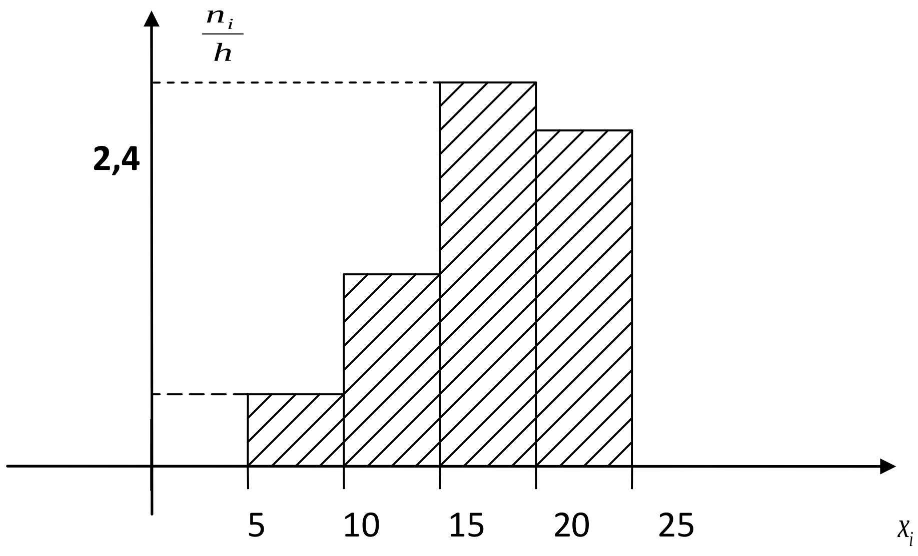


10. 3-rasm

4. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

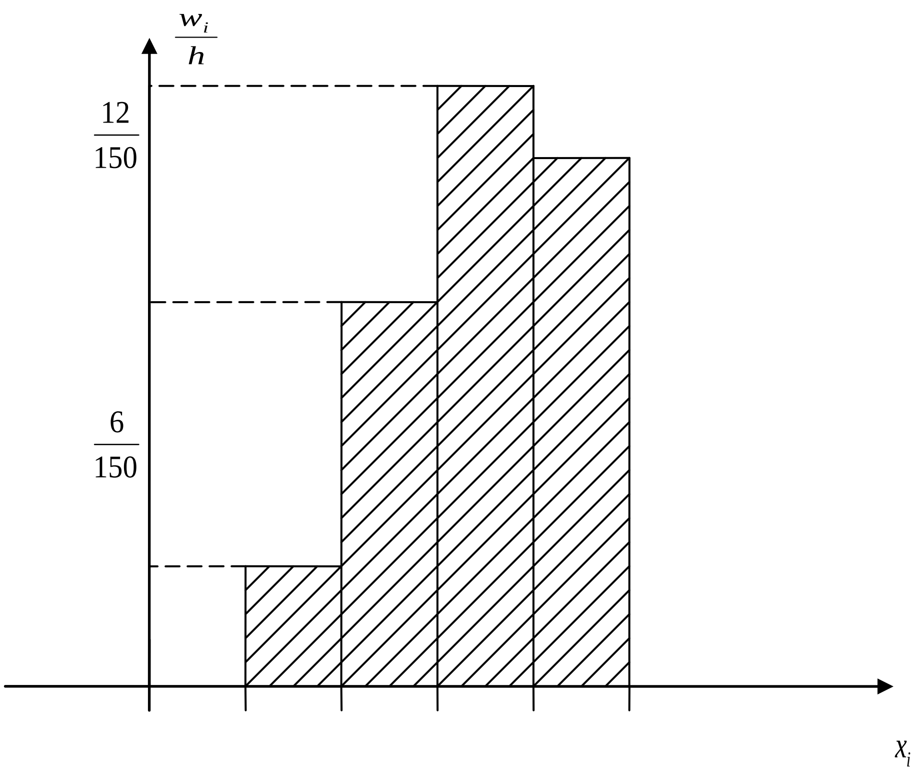
Interval ro‘yxati	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig‘indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5-10	2	0. 4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10-15	6	1. 2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15-20	12	2. 4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20-25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



10. 4- rasm

Nisbiy chastotalar gistogrammasi esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



10. 5-rasm

5. Quyida berilgan tanlanma jadvali uchun variatsion qator tuzing va ko‘rsatilgan interval bo‘yicha gistogramma yasang. Bunda *n=40, h=2* deb olinsin.

15,9; 14,0; 16,3; 10,0; 18,8; 14,1; 15,3; 17,0; 13,9; 14,6;
12,6; 14,2; 17,2; 13,3; 15,1; 16,1; 12,1; 14,7; 16,8; 15,5;
14,5; 17,7; 20,0; 14,3; 14,9; 11,5; 14,7; 14,5; 15,7; 15,3;
18,3; 15,8; 17,5; 14,8; 15,6; 17,9; 14,7; 14,9; 14,6; 13,7.

Yechish. Variatsion qator tuzamiz.

$$10{,}0<11{,}5<12{,}1<12{,}6<13{,}3<13{,}7<13{,}9<14{,}0<14{,}1<14{,}2<14{,}3<14{,}5=14{,}5<14{,}6=14{,}6<14{,}7=14{,}7=14{,}7<14{,}8<14{,}9=14{,}9<15{,}1<15{,}3=15{,}3<15{,}5<15{,}6<15{,}7<15{,}8<15{,}9<16{,}1<16{,}3<16{,}8<17{,}0<17{,}2<17{,}5<17{,}7<17{,}9<18{,}3<18{,}8<20{,}0.$$

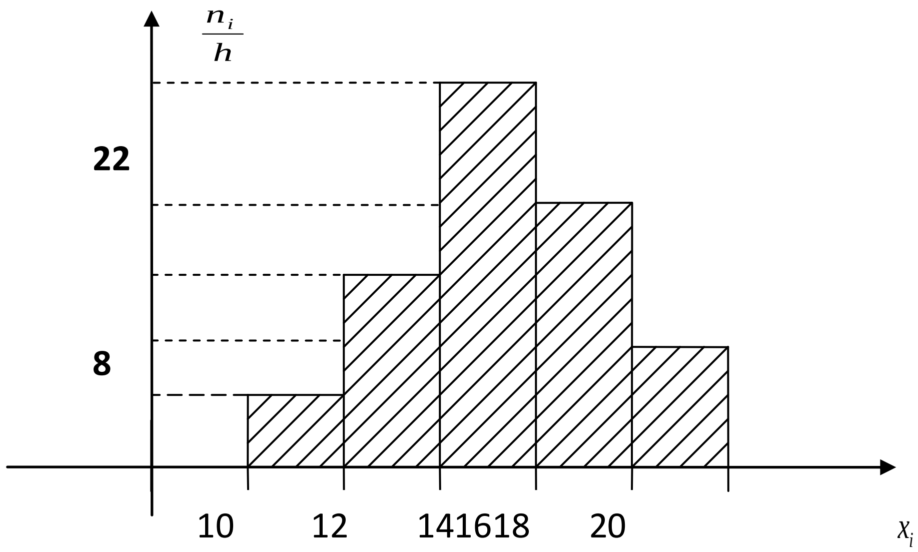
$$x_{(1)} = 10, \quad x_{(40)} = 20;$$

$$k = \frac{x_{(40)} - x_{(1)}}{h} = 5;$$

Demak, 5 ta teng oraliq bo‘yicha gistogrammalar jadvalini yasaymiz.

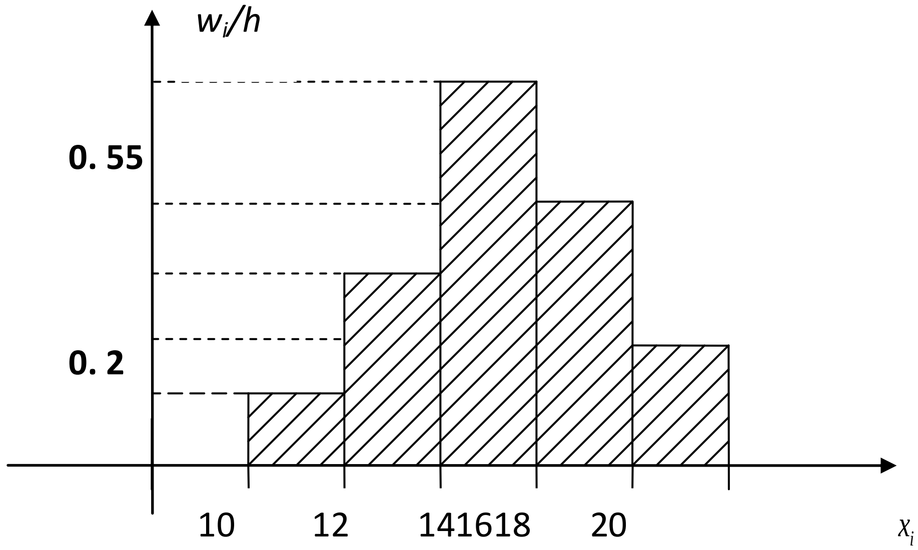
I	II	III	IV	V	VI
1	10-12	2	1	0,05	0,025
2	12-14	5	2,5	0,125	0,0625
3	14-16	22	11	0,55	0,275
4	16-18	8	4	0,2	0,1
5	18-20	3	1,5	0,075	0,0375

Gistogrammalar jadvali bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasaymiz.



10. 6-rasm

Nisbiy chastotalar gistogrammasi qiyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



10. 7-rasm

Mustaqil yechish uchun masalalar

310. Quyidagi tanlanma berilgan.

2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3.

a) variatsion qatorni tuzing.
b) chastotalar jadvalini tuzing.

c) nisbiy chastotalar poligonini chizing.

311. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 kishi tanlangan va ularning ta'rif razryadlari haqida quyidagi ma'lumotlar olingan.

1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3.

Bu ma'lumotlarga asoslangan holda:

a) tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.

b) empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini yasang.

312. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishda berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

313. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

314. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

315. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	2	4	5	7	10
w_2	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

316. Quyidagi ma’lumotlar asosida empiriktaqsimot funksiyasini toping va grafigini yasang.

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

317. Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

318. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	20	40	65	80
w_2	0.1	0.2	0.3	0.4

319. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yhati	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi	Chastota zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

320. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yhati	Qismiy interval	Qismiy intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50
$n = \sum n_i = 100$		

321. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yhati	Qismiy interval	Qismiy intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
$n = \sum n_i = 100$		

322. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	1	4	5	8	9
w_2	0.15	0.25	0.3	0.2	0.1

323. Quyidagi ma’lumotlar asosida empiriktaqsimot funksiyasini toping.

x_i	2	5	7
w_2	3	2	5

324. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	5	10	12	20
w_2	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4

325. Tanlanma

x_i	3	7	8	10
w_2	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko‘rinishida berilgan. Empiriktaqsimot funksiyasini toping va grafigini chizing.

Quyidagi 326-328- masalalarda variatsion qator tuzing va ko‘rsatilgan interval uzinligi bo‘yicha gistogramma yasang.

326. Quyida detallar partiyasining o‘lchovini standart o‘lchovdan farqi (*mm*) keltirilgan:

17;	21;	8;	20;	23;	18;	22;	20;	17;	12;
20;	11;	9;	19;	20;	9;	19;	17;	21;	13;
17;	22;	22;	10;	20;	20;	15;	19;	22;	20;
13;	21;	21;	9;	14;	11;	19;	18;	23;	19.

$n=40$, $h=2$ deb olinsin.

327. Diodlar partiyasining (*nanosekundda*) tiklanish vaqti berilgan:

69;	73;	70;	68;	61;	73;	70;	72;	67;	70;
66;	70;	76;	68;	71;	71;	68;	70;	64;	65;
72;	70;	70;	69;	66;	70;	77;	69;	71;	74;
72;	72;	72;	68;	70;	67;	71;	67;	72;	69;
66;	75;	76;	69;	71;	67;	70;	73;	71;	74.

$n=50$, $h=3$ deb olinsin.

328. Partiyadagi bir xil kimyoviy moddaning reaksiyasi davomiyligi (*sekundda*) berilgan:

8.	7.	6.	6.	2.	4.	6.	5.	5.	8.
5;	1;	7;	2;	9;	4;	0;	8;	4;	2;
6.	6.	6.	3.	6.	6.	5.	5.	7.	6.
9;	5;	1;	8;	0;	0;	6;	3;	7;	8;
6.	6.	4.	4.	5.	5.	5.	7.	6.	6.
5;	1;	2;	7;	6;	4;	3;	4;	7;	4;
6.	4.	6.	5.	5.	5.				
1;	5;	0;	8;	6;	1.				

$n=36$, $h=1$ deb olinsin.

329. Oilalarning o‘rtacha daromadi haqidagi quyidagi tanlanma jadval asosida nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing va chastotalar gistogrammasini chizing.

Oilaning o‘rtacha oylik daromadi,(kishi boshiga sh. p. b.)	75 gacha	75-100	100-125	125-150	150-175	175-200	200 va undan yuqori
Kuzatilgan oilalar soni	46	236	250	176	102	78	12

11- mavzu. Tanlanmaning asosiy sonli xarakteristikalari

X tasodifiy miqdorli bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo‘lib, θ-noma’lum parametr bo‘lsin. $x_1, x_2, ... x_n$ esa bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(x_1, x_2, ... x_n)$ statistika deyiladi.

Noma’lum parametrning taqribiy qiymati sifatida olingan har qanday statistika $L = L(x_1, x_2, ... x_n)$ parametrning bahosi deyiladi va u shu parametr belgilangan harfning ostiga n ko‘rsatkichi qo‘yib belgilanadi, masalan $\theta_n = L(x_1, x_2, ... x_n)$.

Tanlanma elementlarining o‘rta arifmetigi

$$\overline{x_n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

tanlanma o‘rtacha deyiladi.

Tanlanma elementlarining

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_n})^2$$

ko‘rinishdagi funktsiyasi tanlanma dispersiya deyiladi.

Agar baho uchun $M(\theta_n) = \theta$ shart bajarilsa, θ_n baho θ parametr uchun siljimagan baho deyiladi.

Agar θ_n baho uchun har qanday $\varepsilon > 0$ da $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta_n - \theta| > \varepsilon) = 0$ shart bajarilsa, ya’ni θ_n baho θ ga ehtimol bo‘yicha yaqinlashsa, $\theta_n \xrightarrow{P} \theta$, u holda θ_n asosli baho deyiladi.

Agar θ parametrning θ_{n1} va θ_{n2} siljimagan baholari uchun biror n hajmli tanlanmada $D(\theta_{n1}) < D(\theta_{n2})$ o‘rinli bo‘lsa, u holda θ_{n1} baho θ_{n2} bahoga nisbatan n hajmli tanlanma uchun samaraliroq (optimalroq) baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgan baho,bu hajmda eng samarali baho deyiladi.

Demak, baho dispersiyasining kichiklashib borishi uning yaxshilanib borishiga kafolat ekan. Shuning uchun bahoga qo‘yiladigan yana bir talab uchun asos bo‘lib xizmat qiladigan mashhur Rao-Kramer tensizligini keltiramiz.

Rao-Kramer teoremasi. Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdorning va θ_n statistikaning taqsimot qonunlari ma’lum bir regulyarlik (taqsimot funktsiya aniqlanish sohasi noma’lum θparametrga bog‘loq emas) shartlarini qanoatlantirsin va θ_n baho siljimagan baho bo‘lsin, u holda

$$D(\theta_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \qquad (*)$$

tanlanmaning har bir elementiga θ parameter haqida mavjud bo‘lgan Fisher axboroti deyiladi.

Bu yerda

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\, f_\theta(X)\right)^2\right].$$

Agar siljimagan $\tilde{\theta}_n$ baho dispersiyasi Rao-Kramer tengsizligining quyi chegarasiga erishsa, ya’ni (*) munosabatda tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday baho effektiv baho deyiladi.

$\overline{x}_n$ - tanlanma o‘rtacha bosh to‘plam matematik kutilmasi uchun siljimagan, asosli va eng samarali baho bo‘ladi.

σ_n^2- tanlanma dispersiya bosh to‘plam dispersiyasi uchun asosli baho bo‘ladi, lekin siljimagan baho bo‘la olmaydi (ya’ni $M(\sigma_n^2) = \frac{n-1}{n}D(X)$). Shuning uchun siljimaganlikka tuzatilgan baho, ya’ni

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$$

tuzatilgan tanlanma dispersiya deyiladi. Bundan tashqari tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildiz σ_n - tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish, tuzatilgan tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildiz esa s_n - tuzatilgan tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

Yuqoridagi keltirilgan asosiy tanlanma xarakteristikalardan tashqari yanabir qancha amaliyotda ko‘p uchraydigan tanlanma xarakteristikalarni ko‘rib o‘tamiz.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta (agar u mavjud bo‘lsa), tanlanma moda (M_o) deyiladi. Variatsion qatorni teng ikki qismga ajratuvchi tartiblangan statistika mediana (M_e) deyiladi, ya’ni

$$M_e = \begin{cases} x_{(k)}, & agar \quad n = 2k-1; \\ \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & agar \quad n = 2k. \end{cases}$$

Bundan tashqari *p*- tartibli tanlanma kvantil (x_{p_n}) quyidagi statistika yordamida aniqlanadi:

$$x_{p_n} = x_{(k)},$$

bu yerda $k = \begin{cases} [np]+1, & agar \;\; np \;\; butun \;\; bo'lmasa; \\ np, & agar \;\; np \;\; butun \;\; bo'lsa. \end{cases}$

1. Sterjenning uzunligi 5 marta o‘lchanganda quyidagi natijalar olingan:

92, 94, 103, 105, 106.

a) sterjen uzunligining tanlanma o‘rta qiymatini;

b) yo‘l qo‘yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish. a) tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T}$ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz: $u_i = x_i - 92$

$$\overline{x_T} = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100 .$$

b) tanlanma dispersiyani topamiz:

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_T)^2}{n} =$$

$$= \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34 .$$

2. Bosh to‘plamdan *n=60* hajmli tanlanma olingan.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish. Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosi tanlanma o‘rtacha bo‘ladi.

$$\overline{x_T} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{1\cdot 8 + 3\cdot 40 + 6\cdot 10 + 26\cdot 2}{60} = \frac{240}{60} = 4 .$$

4. Ushbu *n=10* hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtachani va tanlanma dispersiyani toping.

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Yechish. $u_i = 100x_i$, $(h = 1/100)$ shartli variantalarga o‘tamiz hamda quyidagi taqsimotni hosil qilamiz.

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$$\overline{u_T} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{1}{10}(1\cdot 5 + 4\cdot 3 + 8\cdot 2) = 3{,}3;$$

$$\overline{x_T} = \frac{u}{100} = 0{,}033;$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2 = \frac{5\cdot 1^2 + 3\cdot 4^2 + 2\cdot 8^2}{10} -$$

$$-\left[\frac{5\cdot 1 + 3\cdot 4 + 2\cdot 8}{10}\right] = 7{,}21;$$

$$D_T^x = h^2 D_T^u = \frac{1}{100^2}\cdot 7{,}21 \approx 0{,}0007.$$

12-mavzu. Taqsimot parametrlarinig statistik baholari va ularni topish usullari

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri baholash masalasidir. Odatda kuzatuvchi ixtiyorida bosh to‘plamdan olingan n ta kuzatish natijasi $x_1, x_2, ...x_n$ buladi. Bu $x_1, x_2, ...x_n$ miqdorlarni o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Nazariy taqsimot noma’lum parametrining bahosini topish kerakki, bu funksiya baholanadigan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Nazariy taqsimot noma’lum parametrining *statistika* yoki *empirik bahosi* deb kuzatish natijalarining (tanlanmaning) ixtiyoriy funksiyasiga aytiladi.

Masalan, taqsimot matematik kutilmasini baholash uchun tanlanmaning o‘rta qiymati

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

xizmat qiladi.

Statistik baholar baholanayotgan parametrga “yaxshi” yaqinlashishi uchun ular ayrim shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi.

Faraz qilaylik, nazariy taqsimotning θ noma’lum parametrining statistik bahosi $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ bo‘lsin.

Ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lgan statistik baho *siljimagan baho* deyiladi ($M\theta^* = \theta^*$ tenglikning o‘rinli bo‘lishidan θ^* ni siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi).

Katta hajmdagi tanlanmalar bilan ish ko‘rilganda baxoga asoslilik talabi qo‘yiladi. Agar kuzatishlar sonini cheksiz orttirilganda $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistik baho baholanayotgan θ parametrga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashsa, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun ushbu

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0, \qquad n \to \infty$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda θ^* statistik baho θparametrning *asosli bahosi* deyiladi. Bundan, θ^* parametrning dispersiyasi $n \to \infty$ da nolga intilsa, baho asosli bo‘lishi kelib chiqadi.

Tanlamaning hajmi orttirilganda matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga yaqinlashidigan statistik baho *asimptotik siljimagan* baho deyiladi.

($\lim_{n\to\infty} M\theta^* = \theta$ bo‘lganda θ^*asimptomik siljimagan baho bo‘ladi).

I. Momentlar usuli

Faraz qilaylik, X kuzatilmalari $X_1,...,X_n$ lardan iborat va taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ noma’lum parametr $\theta=(\theta_1,...,\theta_r)$ ga bog‘liq bo‘lgan t. m. bo‘lsin.

Faraz qilaylik X tasodifiy miqdorning birinchi r ta $\alpha_k = MX^k$, $k=1,...,r$ momentlari mavjud bo‘lsin. Tabiiyki, ular noma’lum θ parametrning $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$ funksiyalari bo‘ladilar. $A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} X_i^k, k=1,...,r$, tanlanma momentlarini mos ravishda $\alpha_k, k=1,...,r$, larda tenglashtirib *r* ta tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta) = A_{n1}, \\ \alpha_2(\theta) = A_{n2}, \\ \vdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r(\theta) = A_{nr}. \end{cases} \qquad (1)$$

Mana shu tenglamalar sistemasini $\theta_1,...,\theta_r$ larga nisbatan yechib, $\theta_k = \theta_k(X_1,\dots,X_n), k=1,...,r$ yechimlarga ega bo‘lamiz. Shunday topilgan θ_k, $k=1,...,r$ statistikalar *momentlar usuli* bilan noma’lum θ_k, $k=1,...,r$ paramertlar uchun tuzilgan statistik baholar bo‘ladi.

misol. Matematik kutilmasi va dispersiyasi no‘malum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni qaraylik. Noma’lum θ_1 va θ_2 parametrlarni momentlar usulida baholaylik. Bu holda (1) tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\theta_1 = A_{n1} \text{ va } \theta_2 + \theta_1^2 = A_{n2}.$$

Natijada momentlar usuli bilan tuzilgan statistik baholar

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{x}, \ \tilde{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2 = S^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Momentlar usuli bilan topilgan statistik baholar ayrim hollarda siljimagan, asosli va eng aniq baholar bo‘ladi.

II. Haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli

Kuzatilmalari $X_1,...,X_n$ lardan va umumlashgan zichlik funksiyasi $p(x,\theta)$ dan iborat X t. m. ni olaylik. Agar X diskret t. m. bo‘lsa, $p(x,\theta) = P\{X = x;\theta\}$ ehtimolliklardan, X uzluksiz t. m. bo‘lgan holda esa $p(x,\theta) = f(x;\theta)$ zichlik funksiyadan iborat bo‘ladi. Quyidagi funksiyaga $L(x_1,...,x_n,\theta) = p(x_1,\theta)\cdot ...\cdot p(x_n,\theta)$ haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasi deyiladi. Faraz qilaylik, $L(x_1,...,x_n,\theta)$ funksiya $\theta \in \Theta$ yopiq sohada biror θ^* nuqtada eng katta qiymatga erishsin:

$$L(x_1,...,x_n,\theta^*) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1,...,x_n,\theta).$$

Haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasi eng katta qiymatga erishadigan θ^* qiymat noma’lum θ parametr uchun haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli bilan tuzilgan statistik baholar deb ataladi. Ularni quyidagi tenglamalr sistemasidan ham topish mumkin:

$$\left.\frac{\partial L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial \theta_k}\right|_{\theta=\theta^*} = 0, \ k = 1,...r. \quad (2)$$

(2) tenglamalar sistemasi haqiqatga maksimal o‘xshashlik tenglamalri deyiladi.

Ko‘p ollarda (2) tenglamalar sistemasi o‘rniga quyidagi tenglamar sistemasini yechish qulay bo‘ladi:

$$\left.\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial \theta_k}\right|_{\theta=\theta^*} = 0, \ k = 1,...r. \tag{3}$$

misol. Matematik kutilmasi va dispersiyasi noma’lum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni olaylik. Haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasini tuzamiz:

$$L(x_1,...,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta_2}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2\right\}.$$

Bundan

$$\ln L(x_1,...,x_n,\theta) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\theta_2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}.$$

Avval (3) sistemaning birinchi tenglamasini qaraylik:

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n} 2(X_i-\theta_1) = 0.$$

Soddalashtirgandan so‘ng $\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta_1 = 0$ tenglamaga kelamiz.

Endi (3) sistemaning ikkinchi tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial \theta_k} = -n\cdot\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2 = 0.$$

Soddalashtirgandan so‘ng $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2 - n\theta_2^2 = 0$ tenglamaga kelamiz.

Natijada θ_1 va θ_2^2 lar uchun

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{x}, \quad \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2 = S^2$$

Ko‘rinishdagi statistik baholarni topamiz.

Demak, normal qonun uchun momentlar va haqiqatga maksimal o‘xshashlik usullari bilan tuzilgan statistik baholar aynan bir xil ekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

330. Ushbu *n=10* hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

331. *n=10* hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtachani toping.

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

332. Bosh to‘plamdan *n=50* hajmdagi tanlanma ajratilgan

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Bosh to‘plam o‘rta qiymatining siljimagan bahosini toping.

333. Guruhdagi 40 ta talabalarning yozma ish baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanma o‘rtacha va tanlanma dispersiyasini toping.

334. $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	2502	2804	2908	3028
n_i	8	30	60	2

335. $n=50$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha bosh to‘plam dispersiyasining siljigan bahosini toping.

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8
n_i	5	15	20	10

336. n=50 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	18.4	18.9	19.3	19.6
n_i	10	12	18	10

337. $n=41$ hajmli tanlanma bo‘yicha bosh to‘plam dispersiyasining $D_T=3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

338. $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tuzatilgan tanlanma dispersiyani toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

339. $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtacha, dispersiya va tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishni toping.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

340. Ushbu $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiya va tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishni toping.

x_i	23.5	26.1	28.2	30.4
n_i	2	3	4	1

341. Ushbu $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dspersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

342-344- masalalarda tanlanma o‘rtacha, tanlanma dispersiya, tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish,tanlanma moda va tanlanma medianani toping.

342. Quyidagi detallar partiyasining o‘lchovini standart o‘lchovdan farqi (*mm*) keltirilgan:

17; 21; 8; 20; 23; 18; 22; 20; 17; 12;
20; 11; 9; 19; 20; 9; 19; 17; 21; 13;
17; 22; 22; 10; 20; 20; 15; 19; 22; 20;
13; 21; 21; 9; 14; 11; 19; 18; 23; 19.

343. Diodlar partiyasining (nanosekundda) tiklanish vaqti berilgan:

69; 73; 70; 68; 61; 73; 70; 72; 67; 70;

66; 70; 76; 68; 71; 71; 68; 70; 64; 65;

72; 70; 70; 69; 66; 70; 77; 69; 71; 74;

72; 72; 72; 68; 70; 67; 71; 67; 72; 69;

66; 75; 76; 69; 71; 67; 70; 73; 71; 74.

344. Partiyadagi bir xil kimyoviy moddaning reaksiyasi davomiyligi (sekundda) berilgan:

8.5; 7.1; 6.7; 6.2; 2.9; 4.4; 6.0; 5.8; 5.4; 8.2;

6.9; 6.5; 6.1; 3.8; 6.0; 6.0; 5.6; 5.3; 7.7; 6.8;

6.5; 6.1; 4.2; 4.7; 5.6; 5.4; 5.3; 7.4; 6.7; 6.4;

6.1; 4.5; 6.0; 5.8; 5.6; 5.1.

345. X tasodifiy miqdor

$$f_\theta(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<0,\\ e^{a-x}, & agar \quad x\geq a,\end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma yordamida noma'lum a parametrning bahosi sifatida taklif qilingan $a_n = x_{(n)}$ statistika siljimagan va asosli ekanligini isbotlang.

346*. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma *R(0,1)* tekis taqsimlangan bosh to'plamdan olingan. $m_{(n)} = \dfrac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}$ statistika bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan va asosli baho ekanligini isbotlang.

347*. θ_n noma'lum θ parametrning siljimagan bahosi va $D(\theta)<\infty$ bo'lsa, θ_n^2 statistika θ^2 parametr uchun siljigan baho ekanligini isbotlang va siljishni hisoblang.

348*. Noma'lum λ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'yicha hisoblangan tanlanma o'rtacha λ parametr uchun siljimagan va asosli baho ekanligini ko'rsating.

349*. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma *R(0,1)* tekis taqsimlangan bosh to'plamdan olingan. $m_{(n)} = \dfrac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}$ statistika ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun bosh to'plam matematik kutilmasining tanlanma o'rtachaga qaraganda samaraliroq baho ekanligini isbotlang.

350. Quyidagi jadvalda ishlab chiqarish korxonasining bitta sexi bo'yicha ishchilarning o'rtacha oylik maoshi haqidagi ma'lumotlar berilgan.

Ishchilarning oylik maoshi, (sh. p. b)	200-225	225-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500	500-550	550-600
Ishchilar soni	12	23	30	38	15	11	10	9	8

Yuqoridagi ma'lumotlar bo‘yicha ishchilar oylik maoshi uchun tanlanma o‘rtacha, tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishni toping. Chastotalar gistogrammasini yasang.

351. Tanlab olingan xususiy tadbirkorlik asosida faoliyat olib boruvchi savdo do‘konlarining bir kunlik tushumi haqidagi ma'lumot quyidagi jadvalda keltirilgan.

Tovar sotishdan kelgan tushum,(mln. so‘m)	1,0 gacha	1,0-1,2	1,2-1,4	1,4-1,6	1,6-1,8	1,8-2,0	2,0 va undan yuqori
Savdo do‘kon-lari soni	12	23	30	38	15	11	10

Tovar sotishdan tushadigan o‘rtacha tushumni, tanlanma dispersiyani, o‘rtacha kvadratik chetlanishni toping.

352. Aksionerlik jamiyati tomonidan sotilgan aksiyalar haqida quyidagi ma'lumot olingan.

Aksiyani sotish, ustav kapitalidan olinadigan,%	9-15	15-21	21-27	27-33
Ochiq turdagi aksionerlik jamiyatlari soni	3	5	4	2

Aksiyani sotishning o‘rtacha foizini aniqlang. Mos ko‘rsatkichlar bo‘yicha aksiyalarni sotish foizining gistogrammasini yasang.

353. Yilning 7 oyi uchun bankning korxonalarga bergan krediti quydagi jadvalda keltirilgan.

Oylar	Aprel	may	iyun	iyul	avgust	Sentyabr	oktyabr
Kredit miqdori, (sh. p. b. da)	981,1	1025,3	1041,8	1393,0	1860,0	2153,2	2731,0

Ko‘rsatilgan davr uchun bir oylik o‘rtacha kredit miqdorini toping. Mos ko‘rsatkichlar bo‘yicha kredit miqdori gistogrammasini yasang.

354. Biror korxonada bir oy ichida ishchilarning kasalligi tufayli kelmay qolgan kunlari soni aniqlangan bo‘lsin.

Joriy oyda	0	1	2	3	4	5

qoldirilgan kunlar soni						
Ishchilar soni	10	17	25	28	30	27

Chastotalar poligonini yasang. O‘rtacha qoldirilgan kunlar sonini, o‘rtacha kvadratik chetlanishinianiqlang.

355. *A* va *B* aksiyalar haqida quyidagi ma'lumotlar berilgan.

Kelgusi yil uchun iqtisodiy ahvol	Qanday holatlar yuz berish ehtimoli	Kelgusi yilda *B* aksiyaning qaytish,%	Kelgusi yilda *A* aksiyaning qaytish,%
Ishchanlik faoliyatining pasayishi	0,3	9,8	10
O‘rtacha o‘sish	0,4	11,2	11
Ishchanlik faoliyatining o‘sishi	0,3	13	12

A va *B* aksiyalarning o‘rtacha bahosi, tanlanma dispersiyasini hisoblang. Siz qaysi tur aksiyani sotib olish maqsadga muvofiq deb hisoblaysiz?

356. Quyidagi ma'lumotlar bo‘yicha kompaniyalarning yillik daromadlarini tahlil qiling. Har bir kompaniya uchun o‘rtacha daromad miqdorini va o‘rtacha kvadratik chetlanishinitoping. Qaysi bir kompaniyaning 10 yillik ish faoliyati samaraliroq ekanini aniqlang.

Yil	Cherry Computers	Lemon Motors	Orange Electronics
1983	14,2	-6,2	37,5
1984	12,3	13,3	-10,6
1985	-16,2	-8,4	40,3
1986	15,4	27,3	5,4
1987	17,2	28,2	6,2
1988	10,3	14,5	10,2
1989	-6,3	-2,4	13,8
1990	-7,8	-3,1	11,5

1991	3,4	15,6	-6,2
1992	12,2	18,2	27,5

357. Quyidagi jadval turli iqtisodiy holatlarda “Charleston Corporation” kompaniyasi aksiyalarining bahosi bo‘lib, bu ma'lumotlar asosida aksiyaning o‘rtacha bahosini aniqlang, tanlanma dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Kompaniyaning kelgusi yil uchun iqtisodiy ahvol	Qanday holatlar yuz berish ehtimoli	Aksiyaning bahosi, (AQSh dollarida)
Krizis	0,25	65
Ishchanlik faoliyatining pasayishi	0,25	80
O‘rtacha o‘sish	0,3	95
Ishchanlik faoliyatining o‘sishi	0,2	100

358. "O‘zbekiston havo yo‘llari" aviakompaniyasining Toshkent-Istanbul reysi bo‘yicha joriy yilning avgust-sentyabr (30 kun) oylarida uchgan passajirlarning soni haqida quyidagi ma'lumotlar keltirilgan:

228, 221, 234, 218, 223, 209, 220, 216, 225, 228, 221, 229, 230, 231, 227, 219, 214, 224, 210, 226, 234, 225, 228, 223, 228, 233, 232, 236, 234, 229.

Variatsion qator tuzing. Reysdagi passajirlarning o‘rtacha sonini aniqlang. Tanlanma dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

13-mavzu. Intervalli baholar. Ishonchlilik ehtimoli va ishonchlilik oralig‘i

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma berilgan bo‘lib, uning taqsimot funksiyasi $F_\theta(x)$ hamda $\theta_n = \theta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika θ parametr uchun statistik baho bo‘lsin. Bunday baho nuqtaviy baho deyiladi. Tanlanma hajm unchalik katta bo‘lmaganda nuqtaviy baho parametrning haqiqiy qiymatidan sezilarli farq qiladi hamda nuqtaviy baholardan boshqa baholarni o‘rganishga zaruriyat paydo bo‘ladi.

Agar ixtiyoriy $\gamma \in (0;1)$ son uchun $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$ munosabatni qanoatlantiruvchi, shunday $\theta_1 < \theta_2$ son topish mumkin bo‘lsa, u holda $(\theta_1;\theta_2)$ oraliq γ ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilik oralig‘i deyiladi. Ko‘pincha $\theta_1;\theta_2$ sonlar $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaga bog‘liq qilib olinadi. Bu esa $(\theta_1;\theta_2)$ ni intervalli baho sifatida qabul qilishga olib keladi.

Dastlab normal taqsimot parametrlarining ishonchlilik oraliqlarini baholarini keltiramiz.

Normal taqsimot *a* va σ^2 parametrlarga bog‘liq.

Normal taqsimlangan bosh to‘plamning matematik kutilmasi *a* uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi.

a) agar σ - o‘rtacha kvadratik chetlanish ma’lum bo‘lsa, γ – ishonchlilik ehtimoli bilan matematik kutilma uchun

$$\overline{x_T} - t_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (1)$$

ishonchlilik oralig‘ini topamiz. Bu yerda $t_{\frac{\gamma}{2}}$ - Laplas funksiyasi $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})$ uchun, $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$ tenglamaning ildizi.

b) Agar σ – o‘rtacha kvadratik chetlanish noma’lum bo‘lsa, tanlanma hajmi *n<30* bo‘lganda

$$\overline{x_T} - t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

bu yerda, s_n- tuzatilgan tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish va $t_p(k)$- ozodlik darajasi k bo‘lgan Student taqsimotining p - tartibli kvantilli.

Normal taqsimlangan bosh to‘plamning dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchlilik oralig‘idan foydalaniladi:

a) agar a matematik kutilmasi ma’lum bo‘lsa,

$$\frac{ns_0^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{ns_0^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)}, \qquad (3)$$

bu yerda $s_o^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - a)^2$ va $\chi_p^2(k)$-ozodlik darajasi k ga teng bo‘lgan “*xi-kvadrat*” taqsimotining p –tartibli kvantili.

b) agar a matematik kutilmasi noma’lum bo‘lsa,

$$\frac{ns_n^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{ns_n^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}, \qquad (4)$$

bu yerda $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x_n})^2$.

Bernulli sxemasida γ ishonchlilik ehtimoli bilan muvoffaqiyatlar ehtimoli p ning ishonchlilik oralig‘ini topish uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$h - t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} < p < h + t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}, \qquad (5)$$

bu yerda h - A hodisa yuz berishlar sonining nisbiy chastotasi, $t_{\frac{\gamma}{2}}$ - Laplas funksiyasi $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})$ uchun, $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$ tenglamaning ildizi.

Xuddi shunga o‘xshash agar $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma no‘malum λ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega bo‘lgan bosh to‘plamdan olingan bo‘lsa, u holda λ uchun γ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchlilik oralig‘i

$$\overline{x_n} - t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{x_n}(1-\overline{x_n})}{n}} < \lambda < \overline{x_n} + t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{x_n}(1-\overline{x_n})}{n}},$$

bu yerda $t_{\frac{\alpha}{2}}$ huddi yuqoridagidek ma’noga ega.

1. Bosh to‘plam *N(a,σ)* normal taqsimlangan bo‘lsin. Noma’lum matematik kutilma(*a*) ni *γ=0,95* ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma = 5$, tanlanma o‘rtacha $\overline{x_n} = 14$ va tanlanma hajmi *n=25* berilgan.

Yechish. $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma$ munosabatdan $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$ bo‘lib, jadvaldan *t=1,96* ni topamiz. Topilganlarni

$$\overline{x_n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ formulaga qo‘yib,

$$\left(14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; 14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

yoki

(12,04; 15,96)

ishonchli oralig‘ini aniqlaymiz.

2. Bosh to‘plamning *N(a,σ)* normal taqsimlangan. *n = 16* hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma o‘rtacha $\overline{x_n} = 20,2$ va tanlanmaning tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish s_n=0,8 topilgan. Noma’lum matematik kutilmaning ishonchli oralig‘ini *γ=0,95* ishonchlilik ehtimoli bilan baholang.

Yechish. $t(n-1)_{\frac{1+\gamma}{2}}$ ni jadvaldan topamiz. *γ=0,95; n=16;*

$t(n-1)_{0.975}$=2,13. Bu qiymatlarni

$$\overline{x_n} - t(n-1)_{0.975}\frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_n} + t(n-1)_{0.975}\frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo‘ysak,

$$(20{,}2 - 2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}};20{,}2 + 2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}})$$

yoki

$$(19{,}774;20{,}626)$$

hosil bo‘ladi.

Demak, noma’lum *a* parametr 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan (19. 774;20. 626) ishonchli oralig‘ida yotadi.

3. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan *n = 16* hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish $s_n=1$ topilgan. Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi σni 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Yechish. Masalada matematik kutilmasinoma’lum bo‘lib,$\gamma=0{,}95$ va$n=16$bo‘yicha jadvaldan

$$\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1) = 27{,}5; \qquad \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1) = 6{,}26$$

ekanligini topamiz. Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo‘yamiz va 0. 5818<σ^2< 2. 5959 yoki 0. 7628<σ<1. 5987 ishonchli oralig‘ini hosil qilamiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

359. Tasodifiy miqdor σ=2 parametr bilan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lib, *n=25* hajmli tanlanma olingan. $\overline{x_n}$ =24,12. Bu taqsimotning noma’lum *a* parametri uchun $\gamma=0{,}95$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oralig‘ini toping.

360. Fizik kattalikni to‘qqizta bir xil, bog‘liq bo‘lmagan o‘lchash natijasida olingan ma’lumotning o‘rta arifmetigi $\overline{x_n}$ =42,319 va tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish σ_n=5 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini $\gamma=0{,}95$ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oralig‘ini toping.

361. Agar 10 ta bog‘liq bo‘lmagan o‘lchashlar natijasida ob’ektgacha bo‘lgan masofa (*m*) uchun 25025, 24970, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 natijalar olingan bo‘lsa, manzilgacha bo‘lgan masofaning matematik kutilmasi uchun $\gamma=0,9$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda o‘lchash xatoligi σ=100 o‘rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan, deb faraz qilinadi.

362. 10 ta erkli o‘lchashlar natijasida sterjen uzunligi (*mm*) uchun quyidagi ma’lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O‘lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilmasi uchun $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

363. Bosh to‘plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. *n* hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi s_n topilgan. Agar $n=10$ va s_n =5,1 bo‘lsa, $\gamma=0,99$ ishonchlilik ehtimoli bilan:

a) dispersiyasini qoplaydigan;

b) o‘rtacha kvadratik chetlanishni qoplaydigan ishonchli oralig‘ini toping.

364. Biror fizik kattalikni bog‘liq bo‘lmagan bir xil aniqlikdagi 9 ta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha, o‘lchashlarning o‘rta arifmetik qiymati $\overline{x_n}=30,1$ va o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ_h=6 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

365. Bosh to‘plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. Bosh to‘plamning noma’lum matematik kutilmasi(a) ni $0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan ishonchlik oralig‘ini toping, bunda o‘rtacha kvadratik chetlanish σ=4, tanlanma o‘rtacha $\overline{x_n}=10,2$ va tanlanma hajmi $n=16$.

366. Bosh to‘plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. Tanlanma o‘rtacha 0,925 ishonchlilik ehtimoli bilan noma’lum matematik kutilmasini qiymatini 0. 2 aniqlikda baholash uchun kamida nechta tajriba o‘tkazilishi kerak. O‘rtacha kvadratik chetlanishini σ=1,5 ga teng deb oling.

367. Tanlanmaning 0,975 ishonchlilik ehtimoli bilan shunday minimal hajmini topingki, bunda normal taqsimlangan bosh to‘plam noma’lum matematik kutilmasi(a)ni tanlanma o‘rtacha teng, deb olinganidagi xatolik δ =0,3 dan oshmasin. Bosh to‘plamning o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ=1,2 ga teng.

368. Bosh to‘plamdan n=10 hajmli tanlanma olingan

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to‘plam normal taqsimlangan bo‘lsa, a matematik kutilmasini tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,95 ishonchlilik bilan o‘z ichiga olishi mumkin bo‘lgan oraliqni toping.

369. Bosh to‘plamdan $n=12$ hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0. 5	-0. 4	-0. 2	0	0. 2	0. 6	0. 8	1	1. 2	1. 5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to‘plam matematik kutilmasi$a$ uchun 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oralig‘ini toping.

370. Oddiy ko‘z bilan qaraganda birxildek, lekin o‘lchovlari bilan farq qiladigan yaroqli va yaroqsiz detallar omborda aralash holda yotibdi. Shu detallar ichidan tavakkaliga 100 ta detal ajratib olindi va ularning yaroqliligi o‘lchov asbobi yordamida aniqlandi. Aniqlanganlarning 36 tasi yaroqli detal ekan. Ombordan tavakkaliga tanlangan detalning yaroqli bo‘lishi ehtimoli uchun 95% li ishonchlilik oralig‘i topilsin.

371. Avtomatik ravishda ishlab chiqarilayotgan podshipniklarning 400 tasi tekshirish uchun ajratib olingan. Natijada ularning 10 tasi yaroqsiz ekanligi aniqlandi. a) ishlab chiqarilayotgan podshipniklarning yaroqsiz bo‘lish ehtimoli uchun 90% li ishonchlilik oralig‘ini toping; b) 0,9973 ishonchlilik ehtimoli bilan ishlab chiqarilayotgan podshipniklarning yaroqsiz bo‘lishi ehtimoli uning yuqoridagi yaroqsiz bo‘lishlik chastotasidan farqi 5% dan oshmasligi uchun kamida nechta podshipnikni tekshirish kerakligini aniqlang.

372. Shaharda jami 36 ta ATS ishlaydi. Tungi soat ikkidan uchgacha bo‘lgan vaqt oralig‘ida ATS larning har birida bo‘lgan chaqiriqlarning o‘rtachasoni 2 ga tengligi qayd qilindi. Har bir ATS dagi chaqiriqlar soni Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deb faraz qilib, λparametr uchun 0,9 ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchlilik oralig‘ini toping.

373. Institutdagi 100 ta kompyuter Internet tarmog‘iga ulangan. Kun davomida (soat 9^{00} dan 18^{00} gacha) har bir kompyuter Internet tarmog‘ida ishlab turgan vaqtida vaqti-vaqti bilan o‘rtacha 2,3 marotaba noma’lum sabablarga ko‘ra, tarmoqda uzilish ro‘y beradi. Internet tarmog‘iga ulangan kompyuterlarning ishlab turgan vaqtida tarmoqda ro‘y bergan uzilishlari soni Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deb faraz qilib λparametr uchun 95% li ishonchlilik oralig‘ini toping.

374. Kurort shaharlardan birini reklama qilayotgan sayyohlik firmasi shaharning ob-havosi haqida ma'lumot berib, o‘rtacha yillik temperaturaning 20^0 C ga tengligini ta'kidlab o‘tdi. Agar havo temperaturasi normal taqsimlangan bo‘lib, kunlik temperaturaning standartdan chetlanishi 4^0 C ni tashkil qilsa,tasodifiy ravishda tanlab olingan yilning 35 kunii uchuno‘rtacha temperaturaningo‘rtacha yillik temperaturadan absolyut qiymati bo‘yicha farqi 2^0 C dan oshmaslik ehtimoli nimaga teng?

14-mavzu. Korrelyatsion va regression tahlil

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar ustida kuzatishlar otkazilgan bo‘lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$,…,$(x_k;y_k)$ lardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y orasidagi bog‘lanishni ushbu jadval ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
y_i	y_1	y_2	…	y_k

Agar kuzatishlar natijasida hosil bo‘lgan $(x_i;y_i)$ juftlarining soni juda ko‘p bo‘lsa, hamda ularning ayrimlari tez-tez takrorlanadigan bo‘lsa, u holda yuqoridagi jadval o‘rniga quyidagi ikki o‘lchovli jadvalni keltirish mumkin.

X \ Y	y_1	y_2	…	y_s	M_x
x_1	m_{11}	m_{12}	…	m_{1S}	M_{x1}
x_2	m_{21}	m_{22}	…	m_{2S}	M_{x2}
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}	…	m_{ks}	M_{xk}
M_{1S}	M_{y1}	M_{y2}	…	M_{ys}	N

Bu jadval korrelyatsion jadval yoki korrelyatsion panjara deb ataladi.

Aytaylik, X va Y miqdorlar orasidagi bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lsin. X ning har bir qiymatiga Y ning bir necha qiymati mos kelsin.

Masalan, x_1=8 da y_1=2 sonni 5 marotaba, y_2=3 sonni 3 marotaba, y_3=7 sonni 2 marotaba qabul qilgani ma’lum bo‘lsin. Bularning arifmetik o‘rtachasini topsak:

$$\overline{y}_8 = \frac{2\cdot5+3\cdot3+7\cdot2}{10} = 3{,}3;$$

u holda $\overline{y}_8$ – shartli o‘rtacha qiymat deb ataladi.

$\overline{y}_x$ – shartli o‘rtacha qiymat deb, Y ning X=x qiymatga mos qiymatlarining arifmetik o‘rtachasiga aytiladi.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsenti alohida muhim ahamiyatga ega bo‘lib,u miqdorlar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘lanishning zichligini baholash uchun xizmat qiladi. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti

$$r_T = \frac{\sum n_{xy}x_i y_i - nxy}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{\overline{(x\cdot y)} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x\sigma_y} \quad \text{yoki} \quad r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti uchun $|r_T| \le 1$ munosabat har doim o‘rinli bo‘lib, r_T kattalik birga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanish shuncha kuchlibo‘ladi. 0 ga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanishi shuncha kuchsiz bo‘ladi.

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o‘rta qiymat $\overline{x}_y$ ni toping.

X \ Y	*4*	*5*	*6*	*7*	n_y
1	*3*	*1*	-	*3*	*7*
2	-	*2*	*4*	*1*	*7*
3	*5*	*1*	*5*	-	*11*
n_x	*8*	*4*	*9*	*1*	*n=25*

Yechish.

$$x_1 = \frac{4\cdot3+5\cdot1+6\cdot0+7\cdot3}{7} = \frac{38}{7};$$

$$x_2 = \frac{4\cdot0+2\cdot5+6\cdot4+7\cdot1}{7} = \frac{41}{7};$$

$$x_3 = \frac{4\cdot 5+5\cdot 1+6\cdot 5+7\cdot 0}{11} = \frac{55}{11}$$

2. Berilgan korrelyatsion jadval bo‘yicha $\overline{Y}_x$, $\overline{X}_y$, $\sigma^2_{\bar{x}_y}$ va $\sigma^2_{\bar{y}_x}$ ni, shuningdek, σ_x , σ_y va r_{xy} ni hisoblang hamda quyidagi jadvalni to‘ldiring.

Yechish.

$$\overline{Y}_{X=10} = \frac{40\cdot 2+50\cdot 11+60\cdot 3+70\cdot 2}{18} \approx 52.7778;$$
$$\overline{Y}_{X=11} = \frac{40\cdot 1+50\cdot 19+60\cdot 2+70\cdot 4}{26} \approx 53.4615;$$
$$\overline{Y}_{X=12} = \frac{40\cdot 3+50\cdot 6+60\cdot 27+70\cdot 6}{42} \approx 58.5714;$$
$$\overline{Y}_{X=13} = \frac{40\cdot 2+50\cdot 3+60\cdot 3+70\cdot 6}{18} \approx 46.1111.$$

$$\overline{X}_{Y=40} = \frac{10\cdot 2+11\cdot 1+12\cdot 3+13\cdot 2}{8} = 11.625;$$
$$\overline{X}_{Y=50} = \frac{10\cdot 11+11\cdot 19+12\cdot 6+13\cdot 3}{39} \approx 11.0256;$$
$$\overline{X}_{Y=60} = \frac{10\cdot 3+11\cdot 2+12\cdot 27+13\cdot 3}{35} \approx 11.8571;$$
$$\overline{X}_{Y=70} = \frac{10\cdot 2+11\cdot 4+12\cdot 6+13\cdot 6}{18} \approx 11.8889.$$
$$\overline{X^2}_{Y=40} = \frac{10^2\cdot 2+11^2\cdot 1+12^2\cdot 3+13^2\cdot 2}{8} = 136.375;$$
$$\overline{X^2}_{Y=50} = \frac{10^2\cdot 11+11^2\cdot 19+12^2\cdot 6+13^2\cdot 3}{39} = 122.30769;$$
$$\overline{X^2}_{Y=60} = \frac{10^2\cdot 3+11^2\cdot 2+12^2\cdot 27+13^2\cdot 3}{35} \approx 141.05714;$$
$$\overline{X^2}_{Y=70} = \frac{10^2\cdot 2+11^2\cdot 2+12^2\cdot 6+13^2\cdot 6}{35} \approx 142.333.$$

$$\overline{Y^2}_{X=10} = \frac{40^2 \cdot 2 + 50^2 \cdot 11 + 60^2 \cdot 3 + 70^2 \cdot 2}{18} \approx 2850;$$

$$\overline{Y^2}_{X=11} = \frac{40^2 \cdot 1 + 50^2 \cdot 19 + 60^2 \cdot 2 + 70^2 \cdot 4}{26} \approx 2919.231;$$

$$\overline{Y^2}_{X=12} = \frac{40^2 \cdot 3 + 50^2 \cdot 6 + 60^2 \cdot 27 + 70^2 \cdot 6}{42} \approx 3485.714;$$

$$\overline{Y^2}_{X=13} = \frac{40^2 \cdot 2 + 50^2 \cdot 3 + 60^2 \cdot 3 + 70^2 \cdot 6}{14} \approx 3635.714;$$

$$\overline{X} = \frac{10 \cdot 18 + 11 \cdot 26 + 12 \cdot 42 + 13 \cdot 14}{100} = 11.52;$$

$$\overline{Y} = \frac{40 \cdot 8 + 50 \cdot 39 + 60 \cdot 35 + 70 \cdot 18}{100} = 56.3;$$

$$\overline{X^2} = \frac{10^2 \cdot 18 + 11^2 \cdot 26 + 12^2 \cdot 42 + 13^2 \cdot 14}{100} = 133.6;$$

$$\overline{Y^2} = \frac{40^2 \cdot 8 + 50^2 \cdot 39 + 60^2 \cdot 35 + 70^2 \cdot 18}{100} = 3245;$$

Y / X	40	50	60	70	n_y	$\overline{Y}_x$	$\sigma^2_{\overline{y}_x}$
10	2	11	3	2	18	52. 7778	64. 5039
11	1	19	2	4	26	53. 4615	61. 0988
12	3	6	27	6	42	58. 5714	55. 1054
13	2	3	3	6	14	59. 2857	120. 9184
n_x	8	39	35	18	n=100	$\overline{Y}$=56. 3	σ^2_y=75. 31
$\overline{X}_y$	11. 625	11. 025	11. 857	11. 889	$\overline{X}$=11. 52	$\overline{X \cdot Y}$=651	σ_y=8. 6781
$\sigma^2_{\overline{x}_y}$	1. 23438	0. 7438	0. 4663	0. 9876	σ^2_x=0. 8896	σ_x=0. 9432	r_{xy}=0. 2961

$$\sigma_x^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 0.8896; \qquad \sigma_x = 0.9432;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2 = 75.31; \qquad \sigma_y = 8.6781;$$

$$\overline{X \cdot Y} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 2 + 10 \cdot 50 \cdot 11 + \cdots + 13 \cdot 70 \cdot 6}{100} = 651; \qquad r_{xy} = \frac{\overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = 0.2961.$$

3. Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi 5 ta sanoat korxonalari bo‘yicha quyidagi mahsulotlar olingan.

Mehnatni elektr energiya bilan ta'minlanganligi- *X* (kvt/soat)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Mehnat unumdorligi – *Y* (dona)	14	16	14	15	17

Bu ma'lumotlardan foydalanib tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

Yechish.

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}, \qquad (*)$$

formuladagi zarur hisoblashlarni bajaramiz:

$$\overline{x} = \frac{7{,}1+8{,}3+8{,}5+9+10{,}5}{5} = 8{,}68;$$

$$\overline{y} = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15{,}2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{7{,}1^2+8{,}3^2+8{,}5^2+9^2+10{,}5^2}{5} - 8{,}68^2} \approx 1{,}1;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{14^2+16^2+14^2+15^2+17^2}{5} - 15{,}2^2} \approx 1{,}16;$$

$$\sum x_i y_i = 7{,}1\cdot14+8{,}3\cdot16+8{,}5\cdot14+9\cdot15+10{,}5\cdot17 = 664{,}7.$$

Aniqlangan qiymatlarni (*) formulaga qo'ysak,

$$r_T = \frac{664{,}7-5\cdot8{,}68\cdot15{,}2}{5\cdot1{,}1\cdot1{,}6} = \frac{5{,}02}{6{,}38} \approx 0{,}79$$

bo'ladi.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining topilgan bu qiymati *X* va *Y*belgilar orasidagi chiziqli bog'liqlik kuchli ekanligini ko'rsatadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

375. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o‘rta qiymat $\overline{x}_y$ ni toping.

$Y \backslash X$	3	4	5	6	n_y
2	5	-	1	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	n=25

376. Berilgan jadvaldan foydalanib,tanlanma shartli o‘rta qiymati $\overline{y}_x$ ni toping.

$Y \backslash X$	3	3. 5	4	4. 5	5
7	5	3	-	-	-
9	2	3	5	3	1
13	-	1	1	2	2

377. Berilgan jadval bo‘yicha tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping

X	-1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	-1	1	1	2	0

378. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

379. Agar

X	3	5	1	-2	4	2	1	0	3
Y	-2	0	1	5	1	2	3	1	1

bo‘lsa, tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

380. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	10	2	7	5

Y	8	2	6	4

381. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o‘rta qiymat $\overline{x}_y$ ni toping.

$Y \backslash X$	1	9	19	n_y
0	13	-	-	13
2	2	10	-	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

382. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o‘rta qiymat $\overline{y}_x$ ni toping.

$Y \backslash X$	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
n_x	16	16	18	n=50

383. Berilgan korrelyatsion jadval bo‘yicha $\overline{Y}_x$, $\overline{X}_y$, $\sigma^2_{\overline{x}_y}$ va $\sigma^2_{\overline{y}_x}$ ni, shuningdek, σ_x , σ_y va r_{xy} ni hisoblang.

$Y \backslash X$	5	15	25	35	45	55	n_y	$\overline{Y}_x$	$\sigma^2_{\overline{y}_x}$
10	5	7	-	-	-	-	12		
20	-	20	23	-	-	-	43		
30	-	-	30	47	2	-	79		
40	-	-	10	11	20	6	47		
50	-	-	-	9	7	3	19		
n_x	5	27	63	67	29	9	n=200		
$\overline{X}_y$									
$\sigma^2_{\overline{x}_y}$									

384. Tumandagi 10 ta oziq-ovqat do‘koni bo‘yicha bir oylik tovar-ayirboshlash hajmi (X) va shu davr mobaynidagi muomala harakatlari (*Y*) hajmi o‘rganilgan. Bu ma’lumotlar asosida tanlanma korrelyatsiya koeffitsentini toping.

X (mln so‘m)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (mln so‘m)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

385. Quyidagi berilgan ma’lumotlar bo‘yicha arpa boshog‘idagi donlar sonining (Y), boshoqning uzunligiga (X) bog‘liqligi tanlanma korrelyatsiya koeffitsentini toping.

X	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

386. Quyidagi berilgan ma’lumotlar bo‘yicha 1 ga yerdan olingan hosil miqdorning (Y) sarflangan o‘g‘it miqdoriga (X) bog‘liqligi tanlanma korrelyatsiya koeffitsentini toping

X	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y	25	27	26	30	32	35	38

387. Quyidagi ma’lumotlar bo‘yicha shakar zavodlari fondlari hajmiga (*X*) zavodlardagi bir sutkalik lavlagi sarfining (*Y*) bog‘liqligi regressiya tanlanma korrelyatsiya koeffitsentini toping.

X(mln so‘m)	120	150	250	270	350	370	400	420
Y(mln so‘m)	4	6	6	7	8	8	8	10

388. Bir oylik ish haqi fondining (*Y*) ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmiga (*X*) bog‘liqligini o‘rganish maqsadida 10 ta sanoat korxonasi bo‘yicha quyidagi ma’lumotlar olingan. tanlanma korrelyatsiya koeffitsentini toping.

Korxonalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X(mln so‘m)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920

Y(mln so‘m)	110	120	130	135	138	145	150	154	160	164

Y ning *X* ga korrelyatsion bog‘liqligi deb, $\overline{y}_x$ shartli o‘rtachaning *x* ga funksional bog‘liqligiga aytiladi:

$$y_x = f(x).$$

Bu tenglama *Y* ning *X* ga regressiya tenglamasi deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa *Y* ning *X* ga regressiya chizig‘i deb ataladi.
X ning *Y*ga regressiya tenglamasi va regressiya chizig‘i ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

$$x_y = \varphi(y).$$

Agar *Y* ning *X* ga va *X* ning *Y* ga regressiya chizig‘ining ikkalasi ham to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsa, u holda korrelyatsiya chiziqli korrelyatsiya deyiladi.
Y ning *X* ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $\overline{y}_x$ - shartli o‘rtacha qiymat, $\overline{x}$ va $\overline{y}$ tekshirilayotgan *X* va *Y* miqdorlardan olingan tanlanma uchun tanlanma o‘rtacha qiymatlari, σ_x va σ_y lar esa mos ravishda *X* va *Y* uchun tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishlari, r_T tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti.
X ning *Y* ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y})$$

1. Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi 5 ta sanoat korxonalari bo‘yicha quyidagi mahsulotlar olingan.

Mehnatni elektr energiya bilan ta’minlanganligi- *X* (kvt/soat)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Mehnat unumdorligi – *Y* (dona)	14	16	14	15	17

Bu ma’lumotlardan foydalanib, mehnat unumdorligining (*Y*) elektr energiya bilan ta’minlanganlik darajasiga (*X* ga) bog‘liqligi regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamasini toping.

Yechish. Dastlab,

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

formuladagi zarur hisoblashlarni bajarib:

$$r_T = \frac{664.7 - 5\cdot 8.68\cdot 15.2}{5\cdot 1.1\cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini topamiz.

Endi yuqoridagi hisoblanganlarni

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

regressiya tenglamasiga qo‘yib,

$$\overline{y}_x - 15.2 = 0.79\cdot\frac{1.16}{1.1}(x - 8.68)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng, regressiya tenglamasini

$$y = 0.82x + 8.08$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglama mehnat unumdorligini (*Y* ni) mehnatni elektr energiya bilan ta’minlanganlik darajasiga (*X* ga) korrelyatsion bog‘liqligini ifodalaydi.

3.Y ning *X* ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasini quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha toping.

Y \ *X*	*3*	*4*	*5*	*6*	n_y
2	*5*	-	*1*	*4*	*10*
3	*1*	*2*	-	-	*3*

4	-	*4*	*5*	*3*	*12*
n_x	*6*	*6*	*6*	*7*	*n=25*

Yechish.

$$\bar{x} = \frac{6\cdot 3 + 6\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6}{25} - \frac{18 + 24 + 30 + 42}{25} = 4.56$$

$$\bar{y} = \frac{10\cdot 2 + 3\cdot 3 + 12\cdot 4}{25} = \frac{20 + 9 + 48}{25} = 3.08$$

$$\overline{x^2} = \frac{9\cdot 6 + 16\cdot 6 + 25\cdot 6 + 36\cdot 7}{25} = \frac{54 + 96 + 150 + 252}{25} = 22.08$$

$$\overline{y^2} = \frac{4\cdot 10 + 9\cdot 3 + 16\cdot 12}{25} = \frac{40 + 27 + 192}{25} = 10.36$$

Yuqoridagilardan foydalanib, σ_x va σ_y ni topamiz.

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{22.08 - 4.56^2} \approx 1.18$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{10.36 - (3.08)^2} \approx 0.87$$

$\sum n_{xy} x_i y_i - n\overline{(xy)}$ ni topish uchun quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

Y \ X	3	4	5	6	$U = \sum n_{xy} x$	$y \cdot U$
2	15 5 10	-	5 1 2	24 4 8	44	88
3	3 1	8 2	-	-	11	33
4	-	16 4 16	25 5 20	18 3 12	59	236
$V = \sum n_{xy} y$	13	22	22	20		$\sum_y y \cdot U = 357$
$x \cdot V$	39	88	110	120	$\sum_x x \cdot V = 357$	Tekshirish

Ikkala yig‘indining bir xilga 357 ga teng ekanligi hisoblashlarning to‘g‘ri bajarilganligini ko‘rsatadi. Jadval quyidagicha to‘ldirilgan.

1 n_{xy} chastotaning x variantaga ko‘paytmasini,ya’ni $n_{xy} \cdot x$ ni , bu chastotani o‘z ichiga olgan katakning yuqori o‘ng burchagiga yoziladi. Masalan,birinchi qator kataklarining yuqori o‘ng burchaklarida 5·3=15; 1·5=5; 4·6=24 ko‘paytmalar yozilgan.

2. Birinchiqator kataklarning yuqori o‘ng burchaklarida joylashgan barcha sonlar qo‘shiladi va ularning yig‘indisini “*U*ustunning” shu qatordagi katagiga yoziladi. Masalan, birinchi qator uchun U=15+5+14=44

3. Nihoyat y variantani U ga ko‘paytiriladi va hosil bo‘lgan ko‘paytmani “yU ustunning” tegishli katagiga yoziladi.

Masalan, jadvalning birinchi qatorida y=2, U=44.

Demak,

$$y \cdot U = 2 \cdot 44 = 88.$$

4. “$y \cdot U$ ustunning” barcha sonlarini qo‘shib, $\sum_y yU$ yig‘indi hosil qilinadi, U izlanayotgan $\sum n_{xy} x_i \cdot y_i$ yig‘indiga teng bo‘ladi. Masalan, yuqoridagi jadvalda $\sum n_{xy} x_i \cdot y_i$ =357.

Tekshirish maqsadida shunga o‘xshash hisoblashlar ustunlar bo‘yicha ham o‘tkaziladi.

Izlanayotgan tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini topamiz:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - nxy}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{357 - 25 \cdot 4.56 \cdot 3.08}{25 \cdot 1.18 \cdot 0.87} = \frac{5.58}{25.665} \approx 0.23$$

Yuqorida topilgan qiymatlarni $\overline{y}_x - \overline{y} = r_T \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ regressiya tenglamasiga qo‘yib,

$$y - 3.08 = 0.23 \cdot \frac{0.87}{1.18} \cdot (x - 4.56)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng regressiya tenglamasini

$$y = 0.17x + 2.3$$

ko‘rinishda yozamiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

389-394- masalalarda X va Y tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikasini hisoblang hamda Y ning X ga va X ning Y ga regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

389.

X	0	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5	0. 6	0. 7	0. 8	0. 9
Y	0. 321	0. 282	0. 266	0. 245	0. 232	0. 227	0. 214	0. 208	0. 201	0. 200

X	1. 0	1. 1	1. 2	1. 3	1. 4	1. 5	1. 6	1. 7
Y	0. 199	0. 202	0. 203	0. 209	0. 215	0. 223	0. 234	0. 262

390.

X	1. 0	1. 5	2. 0	2. 5	3. 0	3. 5	4. 0	4. 5	5. 0	5. 5
Y	0. 22	0. 23	0. 31	0. 43	0. 56	0. 82	1. 06	1. 25	1. 72	2. 28

X	6. 0	6. 5	7. 0	7. 5	8. 0	8. 5	9. 0	9. 5	10. 0
Y	2. 67	3. 26	3. 72	4. 32	5. 11	5. 98	5. 64	7. 02	8. 32

391.

X	0. 00	0. 05	0. 10	0. 15	0. 20	0. 25	0. 30	0. 35	0. 40	0. 45	0. 50
Y	15	16	24	17	26	30	31	36	32	40	42

X	0. 55	0. 60	0. 65	0. 70	0. 75	0. 80	0. 85	0. 90	0. 95

Y	41	51	45	46	53	57	62	59	63

392.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	0. 051	0. 082	0. 151	0. 240	0. 35	0. 383	0. 44	0. 502	0. 692	0. 702

X	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	0. 798	0. 875	0. 956	1. 160	1. 249	1. 482	1. 723	1. 986

393.

X	3. 0	3. 2	3. 4	3. 6	3. 8	4. 0	4. 2	4. 4	4. 6	4. 8
Y	0. 42	0. 40	0. 41	0. 43	0. 46	0. 52	0. 54	0. 60	0. 64	0. 71

X	5. 0	5. 2	5. 4	5. 6	5. 8	6. 0
Y	0. 83	0. 87	0. 98	1. 26	1. 40	1. 50

394.

X	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5	0. 6	0. 7	0. 8	0. 9
Y	0. 96	0. 83	0. 81	0. 90	1. 11	1. 12	1. 32	1. 60	1. 70

X	1. 0	1. 1	1. 2	1. 3	1. 4	1. 5	1. 6
Y	1. 90	2. 36	2. 77	3. 28	3. 31	4. 35	4. 78

395. *Y* ning *X* ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasini quyidagi jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha toping.

Y \ X	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n=100

396. Quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha *Y* ning *X* ga va *X* ning *Y* ga regressiya to'g'ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	8
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

397. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha *Y* ning *X* ga va *X* ning *Y* ga regressiya to'g'ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	n=50

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti miqdorlar orasidagi chiziqli bog'liqlik darajasini xarakterlashi bilan muhim ahamiyatga ega. Chiziqli bo'lmagan, yoki umuman, istalgan korrelyatsion bog'lanish zichligini qanday baholash mumkin, degan savol paydo bo'lishi tabiiydir. Istalgan korrelyatsion bog'lanish uchun korrelyatsion nisbat, deb ataluvchi quyidagi xarakteristika ishlatiladi. *Y* ning *X* ga nisbatan tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda:

$$\sigma^2_{\bar{y}_x} = \frac{\sum n_{x_i}(\bar{y}_{x_i} - \bar{y})^2}{n}$$ - shartli o‘rtachaning dispersiyasi,

$$\sigma^2_y = \frac{\sum n_{y_i}(y_i - \bar{y})^2}{n}$$ - Y tasodifiy miqdorning odatdagi shartsiz dispersiyasi.

n - tanlanma hajmi

n_x - X belgi x qiymatining chastotasi,

n_y - Y belgi y qiymatining chastotasi,

$\bar{y}$ - Y belgining umumiy o‘rtacha qiymati,

$\bar{y}_x$ - Y belgining X=x sharti ostidagi shartli o‘rtacha qiymati.

X tasodifiy miqdorning Y ga nisbatan tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x} \tag{1}$$

Agar X va Y orasidagi korrelyatsion bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lib, $\bar{y}_x=f(x)$ yoki $\bar{x}_y=\varphi(y)$ regressiya funksiyalaridan hech bo‘lmaganda birining grafigi egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo‘lsa, korrelyatsiya egri chiziqli deyiladi.

Ba’zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki undan ko‘p miqdorlar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish zaruriyati tug‘iladi. Bunday holdagi korrelyatsion bog‘lanish to‘plamiy (yoki ko‘plik) korrelyatsiya deb ataladi. To‘plamiy korrelyatsiyaning eng sodda holi bo‘lgan chiziqli korrelyatsiyada X, Y va Z miqdorlar orasidagi korrelyatsion munosabat

$$Z=aX+bY+C$$

tenglama ko‘rinishida ifodalanadi.

Z tasodifiy miqdor X va Y tasodifiy miqdorlar bilan bog‘liqligining zichligi quyidagi to‘plamiy korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholanadi:

$$R_{z,xy} = \sqrt{\frac{r^2_{xz} - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r^2_{yz}}{1 - r^2_{xz}}}, \tag{2}$$

shuningdek, Y ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va X orasidagi bog‘lanish zichligi

$$r_{xz}(y)=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)\cdot(1-r_{yz}^2)}}, \qquad (3)$$

X ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va Y orasidagi bog‘lanish zichligi

$$r_{yz}(x)=\frac{r_{yz}^2-r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}, \qquad (4)$$

xususiy korrelyatiya koeffitsientlari bilan baholanadi.

Agar regressiya grafigi egri chiziq bilan ifodalansa, xususan, ikkinchi tartibli parabolik korrelyatiya bo‘lgan holda, Y ning X ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$\overline{y}_x = Ax^2+Bx+C \qquad (5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Noma’lum A, B va C parametrlarini quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases}\left(\sum n_x x^4\right)A+\left(\sum n_x x^3\right)B+\left(\sum n_x x^2\right)c=\sum n_x \overline{y}_x x^2\\ \left(\sum n_x x^3\right)A+\left(\sum n_x x^2\right)B+\left(\sum n_x x\right)c=\sum n_x \overline{y}_x x\\ \left(\sum n_x x^2\right)A+\left(\sum n_x x\right)B+nc=\sum n_x \overline{y}_x\end{cases} \qquad (6)$$

X ning Y ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$\overline{x}_y = A_1y^2+B_1y+C_1$ (7) ham yuqoridagiga o‘xshash topiladi.

1. n=50 hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo‘yicha Y miqdorning X miqdorga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	n=50
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Yechish. $\overline{y}$ - umumiy o‘rtachani topamiz.

$$\overline{y}=\frac{\sum n_i y_i}{n}=\frac{38\cdot 15+12\cdot 25}{50}=\frac{870}{50}=17.4$$

umumiy o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_{y_i}(y_i - \overline{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38\cdot(15-17.4)^2 + 12\cdot(25-17.4)^2}{50}} = 4.27$$

shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishini topamiz:

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x(y_x - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{10\cdot(21-17.4)^2 + 28\cdot(15-17.4)^2 + 12\cdot(20-17.4)^2}{50}} = 2.73.$$

Topilganlarni formulaga qo‘ysak,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y} = \frac{2.73}{4.27} = 0.64.$$

3. Quyidagi korrelyatsion jadvaldagi ma’lumotlar bo‘yicha

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$$

regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
5	3	5	10	2	-	20
10	-	-	7	12	-	19
17	-	-	-	-	20	20
n_x	22	26	18	14	20	n=100

Yechish. Quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

X	n_x	$\overline{y}_x$	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x \overline{y}_x$	$n_x \overline{y}_x x$	$n_x \overline{y}_x x^2$
0	22	0,8	0	0	0	0	17,6	0	0
1	26	3,27	26	26	26	26	85,02	85,02	85,02
2	18	6,67	36	72	144	288	120,06	240,12	480,24
3	14	9,3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
$\sum$	100		184	544	1828	6568	692,68	2075,14	7175,26

Jadvalning oxirgi satrida turgan sonlarni (6) ga qo‘yib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 6568A + 1828B + 544C = 7175{,}26; \\ 1828A + 544B + 184C = 2075{,}14; \\ 544A + 184B + 100C = 692{,}68. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, *A=0,66; B=1,23* va *C=1,07* ekanligini topamiz. Topilgan bu koeffitsientlarni (5) ga qo‘yib,

$$\overline{y}_x = 0{,}66x^2 + 1{,}23x + 1{,}07$$

ni hosil qilamiz.

3. Biror mutaxassislikka mansub ishchilarning mehnat unumdorligi (*X*), yoshi (*Y*) va mehnat staji (*Z*) ning o‘zaro bog‘liqligini tekshirish maqsadida 100 ta ishchi ajratib olindi. Bu belgilarning juft-juft bog‘liqligi tekshirilgan bo‘lib, quyidagi ma`lumotlar olingan: $r_{xy} = 0{,}20;\ r_{xz} = 0{,}41;\ r_{yz} = 0{,}82$. *X* ning *Y* va *Z* lar bilan bog‘liqligining zichligi ($R_{x,yz}$) ni va xususiy korrelyatiya koeffitsientlari ($r_{xy,z}$, $r_{xz,y}$, $r_{yz,x}$) ni aniqlang.

Yechish. Masalada *X* ning *Y* va *Z* lar bilan bog‘liqligining zichligi ($R_{x,yz}$) ni topish uchun (2) formuladan foydalanamiz:

$$R_{x,yz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 - 2\cdot r_{xy}\cdot r_{xz}\cdot r_{yz} + r_{xz}^2}{1 - r_{yz}^2}} = \sqrt{\frac{0{,}20^2 - 2\cdot 0{,}20\cdot 0{,}41\cdot 0{,}82 + 0{,}41^2}{1 - 0{,}82^2}} =$$

$$= \sqrt{0{,}225} = 0{,}47;$$

Demak, ishchilarning mehnat unumdorligi bir tomondan ularning yosh ko‘rsatkichlari, ikkinchi tomonidan esa mehnat stajlari bilan sezilarli darajada bog‘liq ekan.

Endi quyidagi to‘plamiy korrelyatsiya koeffitsientlarini baholaymiz:

$$r_{xy,z} = \frac{r_{xy}^2 - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}} = \frac{0{,}20^2 - 0{,}41\cdot 0{,}82}{\sqrt{(1-0{,}41^2)(1-0{,}82^2)}} = -0{,}26;$$

$$r_{xz,y} = \frac{r_{xz}^2 - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}} = \frac{0{,}41^2 - 0{,}20\cdot 0{,}82}{\sqrt{(1-0{,}20^2)(1-0{,}82^2)}} = 0{,}44;$$

$$r_{yz,x} = \frac{r_{yz}^2 - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}} = \frac{0{,}82^2 - 0{,}20\cdot 0{,}41}{\sqrt{(1-0{,}20^2)(1-0{,}41^2)}} = 0{,}83;$$

Xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari bo‘yicha quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

Ishchilarning mehnat unumdorligi (*X*) bilan ularning yosh ko‘rsatkich (*Y*) lari orasida to‘g‘ri korrelyatsion bog‘lanish mavjud $(r_{xy} = 0{,}20)$. Agar unga uchinchi omil, ya’ni mehnat staji (*Z*) ning bog‘liqligi hrganilganda teskari korrelyatsion bog‘lanish mavjudligini ko‘rish mumkin $(r_{xy,z} = -0{,}26)$.

Buni mehnat faoliyatining ma`lum bir davridagini inson organizmining mehnatga layoqatlilik darajasi eng yuqori bo‘lishi bilan izohlash mumkin.

Xuddi shu kabi boshqa xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari haqida ham fikr bildirish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

398-401- masalalarda $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ kvadratik regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

398.

X	0. 5	1. 0	1. 5	2. 0	2. 5	3. 0	3. 5	4. 0	4. 5
Y	0. 4	0. 3	1. 0	1. 7	2. 1	3. 4	4. 1	5. 8	7. 7

X	5. 0	5. 5	6. 0	6. 5	7. 0	7. 5	8. 0
Y	9. 4	11. 4	13. 6	15. 6	18. 6	21. 2	24. 1

399.

X	0. 4	0. 8	1. 2	1. 6	2. 0	2. 4	2. 8	3. 2	3. 6
Y	0. 43	0. 94	1. 91	3. 01	4. 0	4. 56	6. 45	8. 59	11. 1

X	4. 0	4. 4	4. 8	5. 2	5. 6	6. 0	6. 4	6. 8
Y	13. 8	16. 9	20. 4	24. 1	28. 2	32. 6	37. 4	42. 3

400.

X	0. 00	0. 05	0. 10	0. 15	0. 20	0. 25	0. 30	0. 35	0. 40
Y	25	26	4	7	6	13	30	26	32

X	0. 50	0. 55	0. 60	0. 65	0. 70	0. 75	0. 80	0. 85	0. 9
Y	32	21	11	5	16	3	21	22	51

401.

X	1. 0	1. 5	2. 0	2. 5	3. 0	3. 5	4. 0	4. 5	5. 0
Y	0. 22	0. 23	0. 31	0. 43	0. 56	0. 82	1. 06	1. 25	1. 72

X	6. 0	6. 5	7. 0	7. 5	8. 0	8. 5	9. 0	9. 5	10. 0
Y	2. 67	3. 26	3. 72	4. 32	5. 11	5. 98	6. 64	7. 02	8. 32

402. Quyidagi jadvalda berilgan ma’lumotlar bo‘yicha $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni toping.

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15

200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

403. Korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha $\overline{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

Y \ X	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
n_x	16	16	18	n=50

404. Quyidagi ma'lumotlar bo'yicha $\overline{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

Y \ X	1	9	19	n_y
0	13	-	-	13
2	2	10	-	12
3	-	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

405-408- masalalarda to'plamiy korrelyatsiya koeffitsienti topilsin va *Z* ning *X*, *Y* ga nisbatan chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi tuzilsin.

405.

X	1	-1	2	1	-1	-4	7	0	8	3	6	-2
Y	-1	1	-2	-6	-8	5	3	-3	0	-10	2	7
Z	2	0	1	-4	-8	4	11	-2	9	8	10	5

406.

X	1	4	0	5	-3	3	-5	-1	2	-2
Y	4	-6	2	-4	12	-2	14	6	0	8

Z	-4	-5	4	-1	4	0	5	1	2	7

407.

X	31	34	35	41	38	32	29	34
Y	29. 5	14. 2	18. 0	21. 3	47. 5	10. 0	21. 0	36. 5
Z	22. 0	14. 0	23. 0	43. 0	66. 0	7. 6	12. 0	36. 0

408.

X	0	44	4	61	35	64	13	56	18	2
Y	14	0	29	34	54	16	44	59	49	32
Z	0. 5	47. 2	8. 0	63. 8	18. 2	47. 5	0. 0	60. 9	19. 2	9. 0

15-mavzu. Statistik gipotezalar va ularni tekshirish

Statistik gipoteza deb, noma'lum taqsimot qonunining ko'rinishi haqidagi yoki unung ma'lum biror hossasi haqidagi bildirilgan har qanday farazga aytiladi. O'rganilayotgan muhit uchun eng maqul va uni tekshirish zarur deb bildirilgan gipoteza nolinchi (asosiy) gipoteza deb ataladi va uni H_0 bilan belgilanadi. Nolinchi gipotezadan boshqa har qanday gipotezalar alternativ gipoteza deyiladi va ularni $H_1, H_2,...$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar gipoteza X tasodifiy miqdor noma'lum taqsimit qonununi bir qiymatli aniqlasa, u holda uni oddiy gipoteza deyiladi. Oddiy gipotezadan boshqa har qanday gipotezalar murakkab gipoteza deyiladi.

Agar gipoteza noma'lum taqsimit qonuni parametrlarining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari haqida bo'lsa, uni parametrik gipoteza deyiladi.

Nolinchi (asosiy) gipotezani qabul qilish yoki qabul qilmaslikni aniqlash uchun ishlab chiqilgan har qanday qoidaga (statistik) kriteriy deyiladi. Odatda kriteriylar nazriy taqsimot qonun bilan empirik taqsimot qonun orasidagi farqqa asoslangan va H_0 gipoteza to'gri bo'lgan holatda yoki aniq, yoki jadvallashtirilgan taqsimot qonuniga ega bo'lgan $T_n = T_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika ko'rinishida quriladi. So'ngra kriteriyning qiymati nazariy taqsimot qonun bilan empirik taqsimot qonun orasidagi farq "katta" deb hisoblangan holatga mos keluvchi sohaga (K -kritik sohaga) tushib qolsa, amaliyot nazariyaga muvofiq kelmadi deb,H_0 gipoteza inkor qilinadi. Aks holda kriteriyning qiymati K ga(gipotezani qabul qilish sohasiga) tushib qolganida nolinchi gipotezani inkor etish uchun asos yo‘qligi sababli uni qabul qilamiz deyiladi.

Ko‘pincha kritik soha bilan gipotezaning qabul qilinish sohasi intervallardan iborat bo‘lib, ularni birqancha nuqtalar ajratib turadi. Bu nuqtalar kritik nuqtalar deyiladi. Kritik sohalar quyidagicha bo‘lishi mumkin:

a) o‘ng tomonlama kritik soha: $\{T_n \geq T_{kr}\}$;

b) chap tomonlama kritik soha: $\{T_n < T_{kr}\}$;

c) ikki   tomonlama kritik soha: $\{|T_n| > T_{kr}\}$.

H_0 gipoteza to‘g‘riligi sharti ostida T_n statistikaning kritik sohaga tushish ehtimoli α uning qiymatdorlik darajasi deyiladi.
Gipotezani statistik tekshirishi jarayonida ikki xil turdagi xatoga yo‘l qo‘yilish mumkin.

Birinchi tur xato shuki, bunda aslida to‘g‘ri bo‘lgan gipoteza kriteriyning qiymati kritik sohaga tushganligi sababli rad etiladi. Yuqoridagi ta’rifga ko‘ra, birinchi tur xatolik ehtimoli α ga teng ekanligini sezish qiyin emas.

Ikkinchi tur xato shuki, bunda aslida noto‘g‘ri bo‘lgan gipoteza kriteriyning qiymati gipotezani qabul qilish sohasiga tushganligi sababli qabul qilinadi. Ikkinchi tur xatolik ehtimolini β yordamida belgilanadi.

Kriteriyning quvvati deb, alternativ gipoteza o‘rinli bo‘lish sharti ostida T_n kriteriyning qiymati kritik sohaga tushishi ehtimoliga aytiladi. Bu yerda ham yuqoridagi ta’rifga asosan,kriteriy quvvati $1-\beta$ ga teng ekanligini sezish qiyin emas. Bundan esa kriteriyning quvvati qancha
katta bo‘lsa, ikkinchi tur xatolik ehtimoli shuncha kichik bo‘lishi kelib chiqadi.
H_0 gipotezani tekshirish uchun keltirilishi mumkin bo‘lgan kriteriylar ichida maksimal quvvatga ega bo‘lgan kriteriy tekis eng quvvatli kriteriy deyiladi.

1. Zavodda ishlab chiqarilayotgan avtomobillar har 100 *km* ga 10 *litr* benzin sarflaydi. Yoqilig‘i sarfini kamaytirish maqsadida dvigitilga ma’lum bir o‘zgartirishlar kiritildi. Shundayo‘zgartirish kiritilgan 25 ta avtomobil tajribadan o‘tkazilganida ularning har 100 *km*ga sarflagan yoqiligilarining o‘rtachasi $\overline{x} = 9{,}3 litr$ ekanligi aniqlandi. Avtomobillarning yoqilig‘i sarfi matematik kutilmasi*a* dispersiyasi $\sigma^2 = 4 litr^2$ bilan normal taqsimlangan deb faraz qilib, H_0: konstruksiada qilingan o‘zgarish yoqilig‘i sarfiga ta’sir qilmadi, deb bildirilgan gipotezani tekshiring. Qiymatdorlik darajasini $\alpha = 0{,}05$ deb oling.

Yechish. Agar

H_0: yoqilig‘i sarfi matematik kutilmasi*a=10*, dispersyasi $\sigma^2 = 4 litr^2$ bilan normal taqsimlangan bo‘lsa, u holda alternativ gipoteza

H_1: yoqilig‘i sarfi matematik kutilmasi$a<10$, dispersiyasi $\sigma^2 = 4 litr^2$ bilan normal taqsimlangan bo‘ladi.

Statistik kriteriy sifatida $\overline{x}$ tanlanma o‘rtachani o‘zini olamiz. Tanlanma normal taqsimlangan bosh to‘plamdan bo‘lganligi uchun $\overline{x}$ ham matematik kutilmasi*a*, dispersiyasi $\frac{\sigma^2}{25}$ bo‘lgan normal taqsimotga ega. H_0- gipoteza o‘rinli bo‘lgan shart ostida a=10 bo‘lib, quyidagi

$$U = \frac{\overline{x} - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}}$$

statistika *N(0,1)* standart normal taqsimot qonuniga ega.

u_α standar normal taqsimot qonunu *N(0;1)* ning $\alpha = 0{,}05$ tartibli kvantili bo‘lsin, u holda kritik soha sifatida {U<u_α} ni olamiz. Jadvaldan, $u_\alpha = -u_{0,95} = -1{,}645$ topamiz.

Statistik kriteriyning tanlanma qiymati

$$U_n = \frac{9{,}3 - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}} = -1{,}75.$$

$U_n < u_\alpha$ bo‘lganligi uchun H_0 gipoteza inkor etiladi, yani konstruksiada qilingan o‘zgarish yoqilig‘i sarfini kamayishiga olib keldi, degan hulosaga chiqariladi.

2. Yuqoridagi misolning sharti asosida H_0 gipotezaga alternati gipoteza H_1: a=9 va statistik kriteriy sifatida $\overline{x}$ olingan bo‘lsin, u holda $\{\overline{x} < 9,44\}$ kritik soha uchun birinchi tur va ikkinchi tur hatoliklar ehtimolini tiping.

Yechish. H_0- gipoteza o‘rinli bo‘lganligi sharti ostida $\overline{x}$ statistika $N(10;\sqrt{4/25})$ taqsimot qonunga ega bo‘ladi, bundan esa

$$\alpha = P\left(\overline{x} < 9,44;\, H_0 : a = 10\right) = F\left(\frac{9,44-10}{\sqrt{4/25}}\right) = F\left(-1,44\right) = 1 - F\left(1,44\right) \approx 0,08$$

H_1 gipoteza o‘rinli bo‘lganligi sharti ostida esa $\overline{x}$ statistika $N(9;\sqrt{4/25})$ taqsimot qonunga ega bo‘ladi, bundan

$$\beta = P\left(\overline{x} \geq 9,44;\, H_1 : a = 9\right) = 1 - F\left(\frac{9,44-9}{\sqrt{4/25}}\right) = 1 - F(-1,1) \approx 0,136.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

409. Stanokda avtomat diametri 10*mm* bo‘lgan sharchalar ishlab chiqariladi. X tasodifiy miqdor ishlab chiqarilayotgan sharchalar diametrining 10*mm*dan farqi bo‘lib, matamatik kutilmasi$a$, dispersiyasi $\sigma^2 = 0,1\,mm^2$ bo‘lgan normal taqsimot qonunga ega. Quyidagi:

$H_1 : a = 0;$

$H_2\ : a \neq 0;$

$H_3\ : -1 \leq a \leq 1.$

H_4 :sharcha ishlab chiqarilayotgan materiyalga maxsus yumshatuvchi modda qo‘shilgan,deb bildirilgan gipotezalarning qaysi biri statistik, qaysi biri oddiy va qaysi biri murakkab gipoteza bo‘ladi.

410. Bir kunda bankka kelgan 50 ta mijozdan X tasi bank operatsiyasini bajardi.

Quyida berilgan gipotezalarning qaysi biri statistik, qaysi biri oddiy va qaysi biri murakkab gipoteza bo‘ladi:

H_1: *X* tasodifiy miqdor *B(50,1/2)* taqsimot qonunga ega;

H_2: *X* tasodifiy miqdor *B(50,p)* taqsimot qonunga ega bo‘lib, bu yerda $\frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3}$;

H_3: *X* tasodifiy miqdor *B(50,p)* taqsimot qonunga ega bo‘lib, bu yerda $p \ne 1/2$;

H_4: $P(X \ge 15) \ge 1/2$;

411. H_0 gipotezani tekshirish jarayonida quyidagi holatlar yuz berdi:

a) H_0 gipotezato‘g‘ri, lekin kriteriy qiymatiga ko‘ra uni inkor qilish kerak;

b) H_0 gipotezanoto‘g‘ri, lekin kriteriy qiymatiga ko‘ra uni qabul qilish kerak;

c) H_0 gipotezato‘g‘ri va kriteriy qiymatiga ko‘ra uni qabul qilish kerak;

d) H_0 gipoteza noto‘g‘ri va kriteriy qiymatiga ko‘ra uni inkor qilish kerak. Yuqoridagi holatlarda nechanchi tur hatolik yuz bergan.

412. Qurilmani ishga yaroqliligini tekshirish maqsadida “maxsus tuzilgan test”dan o‘tkaziladi. Agar qurilma yaroqli bo‘lsa, uni testdan o‘tishi ehtimoli 0,99 ga, aks holda 0,40 ga teng. Qurilma ketma-ket 5 marotaba testdan o‘tsa, ishlatish uchun yaroqli deb tavsiya qilinadi, aks holda yaroqsiz deb topiladi. Agar qurilmaning testdan o‘tishlari soni Binomial taqsimot qonunga bo‘ysunadi deb hisoblansa, quyidagi savollarga javob bering:

a) statistik kriteriyning qiymatlar sohasi va kritik sohasi qanday? Statistik kriteriyning o‘zi qanday taqsimot qonuniga bo‘ysunadi?

b) agar 1-tur hatolik aslida yaro‘qli bo‘lgan qurilmani yaroqsiz deb topish bo‘lsa, uholda H_0 gipotezani qanday ifodalash mumkin?

c) alternativ gipoteza qanday ifodalanadi va 2-tur hatolik nimadan iborat?

d) 1- va 2-tur hatoliklar ehtimollari nechaga teng?

413. Sotish uchun keltirilgan katta partiyadagi mahsulotning qandaydir qismi yaroqsiz. Ta'minotchining fikricha bu 5%ni tashkil qiladi. Lekin iste`molchi bu 10%ni tashkil qiladi, deb hisoblaydi. Mahsulot oldi-sotdi sharti quyidagicha kelishib olindi: katta partiyadagi mahsulotlar ichidan tavakkaliga 10 tasi ajratib olinadi va uni tekshiriladi. Agar unung ichida yaroqsizlari soni bittadan ko'p bo'lmasa, mahsulot ta'minotchi sharti bo'yicha, aks holda iste`molchi sharti bo'yicha qabul qilinadi. Bu masalani statistik gipotezalarni tekshirish kriteriylari nazariyasi atamalari yordamida ifodalang va quyidagi savollarga javob bering:

a)qanday statistik kriteriylar bo'lishi mumkin? Uning qiymatlar sohasiniva kritik sohasini ko'rsating;

b) statistik kriteriy taqsimot qonunining ko'rinishi qanday?

c) asosiy va alternativ gipotezalar nimadan iborat?

d) 1- va 2-tur hatolar nimadan iborat?

414. Standart o'lchovi *a=40mm* bo'lgan boltni ishlab chiqaruvchi stanokning mahsulotini tekshirish maqsadida *n=36* ta tanlanma ajratib olindi. Tekshirilgan mahsulotlarning tanlanma o'rtachasi $\overline{x} = 40{,}2$ *mm* ekanligi aniqlandi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, bolt o'lchovi dispersiyasi $\sigma^2 = 1\, mm^2$ bo'lgan normal taqsimotga bo'ysunishi aniqlangan bo'lsa, $\alpha = 0{,}01$ qiymatdorlik darajasi bilan stanok sozlanishi musbat tomonga suljimagan, deb qarash mumkinmi? Bunda kritik soha qanday bo'ladi?

415. Yuqoridagi masalada H_0: *a=40 mm* asosiy gipotezani unga alternativ H_1: *a=40,3 mm* gipoteza bilan tekshirishda 1-tur hatolik ehtimoli $\alpha = 0{,}1$ bo'lib, 2-tur hatolik ehtimoli $\beta \le 0{,}01$ ni qanoatlantirishi uchun olinishi mumkin bo'lgan eng kichik tanlanma hajmini toping. Bu tanlanma hajmiga qanday kritik soha mos keladi?

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ tanlanma berilgan bo'lib, u asosida bosh to'plamning *F(x)* taqsimot funksiyasini aniqlash kerak bo'lsin.

Muvofiqlik kriteriysi deb, taqsimot funksiyaning aniq ko‘rinishi H_0 haqida gipotezani qabul qilish yoki rad etishga imkon beradigan kriteriyga aytiladi.

Muvofiqlik kriteriylaridan biri bo‘lgan Pirsonning «*xi-kvadrat*» kriteriysini qurish bilan tanishamiz.

Buning uchun kuzatish olib borilayotgan X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari sohasini o‘zaro kesishmaydigan $(\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k)$ intervallarga ajratamiz.

$p_i = P(X \in \Delta_i)$ - X tasodifiy miqdorning Δ_i intervalga tushishining nazariy ehtimoli bo‘lsin. Bu ehtimol H_0 gipotezadan kelib chiqqan holda hisoblanadi, ya’ni X tasodifiy miqdor $F_\theta(x)$ taqsimot funksiyaga ega deb faraz qilinadi.

n_i – tanlanma elementlarining Δ_i intervalga tushganlarning soni (ya’ni Δ_i sohaning chastotasi) bo‘lsin.

Bunda $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$ va $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ o‘rinli bo‘ladi.

Agar tanlanmaning hajmi yetarlicha katta (n>*30*) bo‘lsa, taqsimotni taqriban normal taqsimot deb olish mumkin.

Ushbu

$$\xi_i = \frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \qquad i = \overline{1,k};$$

tasodifiy miqdorlarni qaraymiz.

Teorema. Agar H_0 gipoteza to‘g‘ri va $np_i > 5$ bo‘lsa, u holda $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2$ tasodifiy miqdor *k-1* ozodlik darajali «*xi-kvadrat*» taqsimot qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorga taqsimot bo‘yicha yaqinlashadi. Demak, Pirsonning muvofiqlik kriteriysini quyidagicha ta’riflash mumkin.

Berilgan α qiymatdorlik darajasi yordamida *k-1* ozodlik darajali «*xi-kvadrat*» taqsimot qonun jadvalidan $1-\alpha$ -tartibli kvantill, ya’ni $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ topiladi. So‘ngra tanlanma ma’lumotlariga ko‘ra, χ^2 kriteriyning kuzatilgan qiymati hisoblanadi, agar u qiymat qabul qilish sohasiga tushsa, ya’ni $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ bo‘lsa, H_0 gipotezani inkor

etishga asos yo‘q deb uni qabul qilinadi, va agar $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ bo‘lsa,u holda H_0 gipoteza rad etiladi.
Agar nazariy chastotalarni hisoblashda $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_l$ parametrlarni baholashga to‘g‘ri kelsa, u holda kritik qiymat *k-l-1* ozodlik darajali «*xi-kvadrat*» taqsimot qonuni bo‘yicha topiladi.

1. Bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan:

$[0;5)$	$[5;1)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$	$[45;50)$
2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

Nazariy taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 qiymatdorlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tekshiring.

Yechish:

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 70$$

Quyidagi jadvalni tuzamiz:

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
W	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

U holda,
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i = 24,43;$$
$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i^2 = 782,67;$$
$$s_n^2 = \overline{x^2} - \left[\bar{x}\right]^2 = 185,92;$$
$$s_n = \sqrt{185,92} \approx 13,63.$$

X tekis taqsimot qonuniga ega bo‘lgani uchun

$$M(X) = \frac{a+b}{2};\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

a va b ni aniqlash uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 24.43 \\ \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = 13.63 \end{cases}$$

Bundan

a=0,85;b=48,01;

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{47.16} = 0.0212$$

Shunday qilib, X ning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < 0.85, \\ 0.0212, & agar \quad 0.85 \le x \le 48.01, \\ 0, & agar \quad x > 48{,}01. \end{cases}$$

Endi tekis taqsimot bo‘yicha X tasodifiy miqdorning [0;5), [5;10),…,[45;50) oraliqlarga tushish ehtimollarini topamiz.

$$p_1 = P(0 < X < 5) = P(0{,}85 < X < 5) = \int_{0{,}85}^{5} 0{,}0212dx = 0{,}0212x \Big/_{0{,}85}^{5} = 0{,}088$$

$$p_2 = (5 < X < 10) = \int_{5}^{10} 0{,}0212dx = 0{,}106$$

………………………………………

$$p_{10} = (45 < X < 50) = \int_{45}^{48{,}01} 0{,}0212dx = 0{,}064$$

Topilgan qiymatlarni jadval ko‘rinishda yozsak:

Δ_i	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
p_i	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106

Δ_i	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)
p_i	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

Shundan so‘ng, χ^2statistikaning amaliy qiymatini hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

n_i	p_i	$n_i p_i$	$(n_i - n_i p_i)^2$	$\frac{(n_i - n_i p_i)^2}{n_i p_i}$
2	0,088	6,16	17,3058	2,8094
12	0,106	7,42	20,9764	2,872
8	0,106	7,42	0,3365	0,0454
4	0,106	7,42	11,6964	1,51
14	0,106	7,42	43,2964	5,835
6	0,106	7,42	2,0164	0,272
10	0,106	7,42	6,6564	0,897
2	0,106	7,42	29,3764	3,954
	0,106			
$12 = \begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$	0,064	$11{,}9 = \begin{cases} 7{,}42 \\ 4{,}48 \end{cases}$	0,01	0,0008
$\sum n_i = 70$	$\sum p_i = 1$	$\sum n_i p_i = 70$		18,1948

Shunday qilib,

$$\chi^2 = 18{,}1948.$$

χ^2 taqsimot jadvalidan: $\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1) = \chi^2_{0,95}(6) = 12{,}6.$

Demak, $\chi^2 > 12{,}5$ bo‘lgani uchun bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi 0,05 qiymatdorlik darajasi bilan tekis taqsimotga mos kelmaydi, degan xulosaga ega bo‘lamiz.

1. Bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan:

Δ_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Nazariy taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 qiymatdorlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

Yechish:

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 50; \qquad w_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = \overline{1;10};$$

deb olib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02

U holda,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i w_i = 15;$$

$$s_n^2 = \overline{x^2} - \left[\bar{x}\right]^2 = 34,65;$$

$$s_n = 5,9.$$

Endi $p_i = P(X \in \Delta_i), i = \overline{1,10}$ ehtimollarni hisoblaymiz.

$$p_1 = (0 < X < 3) = P\left(\frac{0-15}{5,9} < \frac{X - M(X)}{D(X)} < \frac{3-15}{5,9}\right) =$$

$$= \Phi(-2,03) - \Phi(-2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(2,03) =$$

$$= 0,4938 - 0.4784 = 0.0154 \approx 0.02, ...$$

va hokazo.

Bu yerda, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Xuddi shunga o'xshash, qolganlarini hisoblab, quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

Δ_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Yuqoridagilardan foydalanib, "*xi-kvadrat*" ning statistik qiymatini hisoblash uchun jadval tuzamiz.

Δ_i	n_i	p_i	$n_i p_i$	$(n_i - n_i p_i)^2$	$\frac{(n_i - n_i p_i)^2}{n_i p_i}$
[0;3)		0,02			
[3;6)	$8=\begin{cases}1\\3\\4\end{cases}$	0,04	$7{,}5=\begin{cases}1\\2\\4{,}5\end{cases}$	0,5	0,0333
[6;9)		0,09			
[9;12)	6	0,15	7,5	1,5	0,3
[12;15)	11	0,19	10	1	0,1
[15;18)	10	0,19	10	0	0
[18;21)	7	0,15	7,5	0,5	0,3
[21;24)		0,09			
[24;27)	$8=\begin{cases}5\\2\\1\end{cases}$	0,04	$7{,}5=\begin{cases}4{,}5\\2\\1\end{cases}$	0,5	0,0333
[27;30)		0,02			
$\sum$	50	1	50		0,7666

Bundan $\chi^2 = 0{,}7666.$

χ^2taqsimot jadvalidan: $\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1) = \chi^2_{0,95}(3) = 7{,}81$ bo‘lib, $\chi^2 < 7{,}81$ bo‘lgani uchun bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi normal taqsimotga mos keladi, degan xulosaga ega bo‘lamiz.

“*Xi-kvadrat*” kriteriysi tasodifiy miqdorlarning bog‘liqmasligi haqidagi gipotezaga ham qo‘llash mumkin:

Faraz qilaylik, $(x_1(1); y_1(1)), (x_1(2); y_1(2)), ..., (x_1(n); y_1(n))$ tanlanma juftligi berilgan bo‘lib, quyidagi H_0: X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqmas, ya’ni

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j; \qquad (1)$$

gipotezani tekshirish talab qilinayotgan bo‘lsin. Bu munosabatning o‘ng tomonidagi ehtimollarni, ya’ni $p_i; q_j$ nazriy ehtimollarning baholarini mos ravishda $\tilde{p}_i = \frac{n_i}{n}$, $\tilde{q}_j = \frac{n_j}{n}$ orqali belgilaymiz. U holda o‘ng tomondagi ekspremental chastota $\tilde{n}_{ij} = n\tilde{p}_i \tilde{q}_j = \frac{n_i n_j}{n}$ bilan chap tomonidagi ekspremental chastota n_{ij} o‘rtasidagi farqqa asoslangan kriteriy

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{n_{ij}}, \qquad (2)$$

Bu (2) statistikaning qiymatini unga ekvivalent quyidagi formula yordamida hisoblash qulayroq

$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{n_{ij}^2}{n_i n_j} - 1\right) = n\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\tilde{n}_{ij}^2}{n_j}\right) - 1\right) \qquad (3)$$

H_0 gipoteza to'g'riligi sharti ostida *(k-1)(m-1)* ozodlik darajasiga ega "*xi-kvadrat*" taqsimot qonunli tasodifiy miqdorga intiladi. Shuning uchun χ^2 statistikaning amaliy qiymati $1-\alpha$ -tartibli *(k-1)(m-1)* ozodlik darajasiga ega "*xi-kvadrat*" taqsimot kvantilli $\chi^2(k-1)(m-1)_{1-\alpha}$ oshsa H_0 inkor etiladi, aks holda α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

2. Korxona uchta *A,B* va *C* ta'minotchidan bir xil turdagi xomashyo sotib oladi. Xomashyolarni tekshirish natijasida quyidagi ma'lumotlar olingan:

Tekshirishlar natijasi	Ta'minotchilar			Hammasi bo'lib
	A	B	C	
Yaroqli mahsulotlar	29	38	53	120
Yaroqsiz mahsulotlar	1	2	7	10
Jami	30	40	60	130

Mahsulot sifatini ta'minotchiga bog'liq emas, deb hisoblash mumkin-mi? $\alpha = 0{,}1$ da tekshiring.

H_0: mahsulotning ikki xususiyatining bog'liq emasligi, haqidagi gipotezani tekshiramiz.

Buning uchun (3) formuladan foydalanib quyidagi qiymatni topamiz:

$$\chi^2 = 130\cdot\left(\frac{29^2}{30\cdot120}+\frac{38^2}{40\cdot120}+\frac{53^2}{60\cdot120}+\frac{1^2}{30\cdot120}+\frac{2^2}{40\cdot120}+\frac{7^2}{60\cdot120}-1\right) \approx 2{,}546.$$

Ozodlik darajasi esa (2-1)· (3-1)=2. U holda $\chi^2(2)_{0,9} \approx 4{,}61.$

Demak, mahsulot sifati ta'minotchiga bog'liq emas.

Mustaqil yechish uchun masalalar

416. Bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik

Δ_i	[4,1;4,2)	4,2;4,3)	[4,3;4,4)	[4,4;4,5)	[4,5;4,6)	[4,6;4,7)	[4,6;4,7)	4,8;4,9)	4,9
n_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

taqsimoti berilgan.

Nazariy taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligi 0,05 qiymatdorlik daraja bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

417. Bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan.

Δ_i	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40	[40;50)	[50;60)
n_i	11	14	15	10	14	16

Nazariy taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq emasligini 0,05 aniqlilik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

418. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,05 qiymatdorlik darajasida ushbu n=200 hajmli tanlanma olingan. Bosh to‘plamning taqsimot qonuni normal taqsimlangan ekanligi haqidagi gipotezaga muvofiq kelish-kelmasligini tekshiring.

Δ_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

419. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,01 qiymatdorlik darajasida n_i empirik va np_i nazariy chastotalar orasidagi farq tasodifiymi, yoki muhimmi ekanligini aniqlang. Nazariy chastotalar bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan.

n_i	8	16	40	72	36	18	10
np_i	6	18	36	76	39	18	7

420. Ikki tanga bir vaqtda 20 marta tashlanganida "Gerb" tomoni tushishlar hodisasining yuz berishlari soni quyidagi jadvalda keltirilgan.

Har ikkala tangada gerb tushishlari soni	0	1	2
Hodisa yuz bergan tashlashlar soni	4	8	8

Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida ikkala tangani ham simmetrik, deb hisoblash mumkin-mi? α=0,05 deb qabul qiling (jadvalda: $\chi^2(2)_{0,95} \approx 5{,}99.$)

421. O'yin kubi 120 marta tashlanganida 40 marta olti ochkosi tushdi. Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tashlanayotgan o'yin kubini to'g'ri o'yin kubi, deb hisoblash mumkin-mi? α=0,05 deb qabul qiling (jadvalda: $\chi^2(1)_{0,95} \approx 3{,}84.$).

422. Pirson kriteriysidan foydalanib, α=0. 05 qiymatdorlik darajasida n_i empirik chastotalar bilan bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan np_i nazariy chastotalar orasidagi farqning tasodifiy yoki muhimligini aniqlang.

n_i	5	10	20	8	7
np_i	6	14	18	7	5

423. Tanga 50 marta tashlanganida 20 marta "gerb" hodisasi yuz berdi. Pirsonnig muvofiqlik kriteriysiga asosan tashlangan tangani simmetrik deb qabul qilis mumkinmi? Qiymatdorlik darajasi α=0. 1 deb oling (jadvalda: $\chi^2(1)_{0,99} \approx 2,71$ **).**

424. Shahar 5 ta tumanga ajratilgan. Quyida bu tumanlarga tarqatilgan mahsulotning (shartli birlikdagi) hajmi haqidagi ma'lumot keltirilgan.

Tumanlar	1-tuman	2-tuman	3-tuman	4-tuman	5-tuman
Mahsulot hajmi	110	130	70	90	100

Yuqoridagi ma'lumot H_0: mahsulot barcha tumanlarga teng taqsimlangan, deb bildirilgan gipotezaga muvofiqmi? Qiymatdorlik darajasi α=0. 1.

425. Radioelektron apparatura biror T muddat ichida tajribadan o'tkazildi. Agar biror apparatura shu muddat ichida ishdan chiqsa, u ta'mirlanib yana qayta ishga tushirildi. 59 ta apparaturaning tajribalar natijasi quyida keltirilgan:

Ishdan chiqishlar soni	0	1	2	3
Sinalgan apparaturalar soni	42	10	4	3

α=0. 1 qiymatdorlik darajasi bilan H_0: har bir apparaturaning ishdan chiqishlari soni Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi, deb bildirilgan gipotezani tekshiring.

426. Odatda inson istemol qiladigan dorining ta'siri, uni qabul qilish usullariga bog'liq, deb ta'kidlanadi. Ushbu farazni α=0. 05 qiymatdorlik darajasi bilan quyidagi ma'lumotlar asosida tekshiring.

Natija	Qabul qilish usullari		
	A	B	C
yomon	11	17	16
yaxshi	**20**	23	19

427. Korhonada qo‘llanilgan *A*, *B* va *C* texnologiyaning mehnat unimdorligininggo‘zgarishiga olib kelishini quyidagi ma’lumotlar yordamida tekshiring.

Mehnat unimdorligi	Qo‘llanilgan texnologiya		
	A	B	C
Oshdi	14	47	16
O‘zgarmadi	22	37	7
Kamaydi	20	25	2

Qo‘llanilgan texnologiyalar mehnat unimdorligiga ta’sir etmaydi, deb qarash mumkin-mi? α =0. 1 deb oling.

Javoblar

I qism. Ehtimollar nazariyasi

1. *p=0,2;* **2.** 4/9; **3.** $P(A)=\frac{5}{36}$; $P(B)=\frac{4}{18}$; $P(C)=\frac{11}{36}$; **4.** $P_8=8!$;
5. $\frac{1}{720}$; **6.** a) 0,6; b) 0,3; c) 0,9; **7.** a) 0,6; b) 0,4; c) 48/95;
8. $P_4(0)=P_4(4)=\frac{14}{323}\approx 0,04334$;
9. $a)\ \approx 0,57$; $b)\ \frac{356}{357}$; **10.** $\frac{1}{6}$; **11.** $\frac{C_M^m C_{N-m}^{n-m}}{C_N^n}$; **12.** $\frac{C_N^n}{C_{M+N-1}^M}$; **13.** $\frac{1}{120}$;
14. $\frac{1}{360}$; **15.** a) 0,384; b) 0,096; c) 0,008; **16.** $a)\ \frac{1}{9}$; $b)\ \frac{1}{3}$;
17. $\frac{m}{m+n}$; **18.** $a)\ \frac{1}{2}$; $b)\ \frac{1}{3}$;
19. $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$; **20.** $\frac{2}{9}$; **21.** $0,28959\cdot 10^{-2}$; **22.** $\frac{13}{20}$;
23. $a)\ \frac{9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{9\cdot 10^5}$; $b)\ \frac{3^6}{9\cdot 10^5}$; **24.** $\frac{5}{22}$; **25.** $\frac{5}{9}$; **26.** $0,4162$; **27.** $\frac{2}{23}$;
28. $a)\ \frac{5}{72}$; $b)\ \frac{5}{12}$; $c)\ \frac{5}{9}$; **29.** $\frac{1}{120}$; **30.** $\frac{1}{120}$; **31.** 0,00033; **32.** $\frac{7}{15}$; **33.** 1/11;
34. 0. 932; **35.** N=4200; 2/15; **36.** *P(A)=14/323; P(B)=125/969;*
37. $p=\frac{1}{120}$; **38.** $\frac{1}{T^{p-1}}$; **39.** $P(A)=\frac{1295}{1296}$; $P(B)=\frac{5}{144}$;
40. $P(A)=\frac{1}{143}$; $P(B)=\frac{2}{91}$; $P(C)=\frac{5}{144}$; **41.** 180; **42.** 0,9; **44.** $\frac{2}{\pi\sqrt{3}}$;
45. $\frac{2}{\pi}$;
46. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$; **47.** $p\approx 0,38$; **48.** $\frac{\pi}{4}$; **49.** $\frac{2}{3}$; **50.** $\frac{2}{3}$; **51.** $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; **52.** $\frac{1}{4}$;
53. 139/1152; **54.** 0. 237; **55.** *2l/(π/a);*

56. $$P(A)=\begin{cases}\dfrac{\pi a^2}{4}, & agar\ \ 0\le a<1,\\ \sqrt{a^2-1}+\dfrac{a^2}{2}(\arcsin\dfrac{1}{a}-\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}), & agar\ \ 1\le a<\sqrt{2},\\ 1, & agar\ \ a\ge\sqrt{2}.\end{cases}$$

57. $P(A)=\dfrac{2}{3}$; $P(B)=\dfrac{1}{12}$;**58.** $\dfrac{1}{4}$;**59.** $3\times P_6=3\times 6!$;

60. a) $9\times(10^4-1)$, b) $26\times(10^4-1)$; **61.** 60; **62.** A_{12}^7;

63. 120; **64.** $\dfrac{\pi}{4}$; **65.** $\dfrac{\pi}{24}$; **66.** 356;

67. 1/4 **;** **68.** 1500;**69.** 60; $\dfrac{3}{5}$; **70.** 0,18;

71. a) 0,188; b) 0,452; c) 0,336;

72. $\frac{57}{115}$; **73.** $a)$ $\frac{1}{720}$; $b)$ $\frac{1}{1000}$;**74.** $\frac{20}{31}$; **75.** $\frac{1}{6}$; **76.** 0,384;

77. $\dfrac{5}{24}$; **78.** $\dfrac{8}{65}$; **79.** $\frac{23}{24}$; **80.** $\frac{7}{9}$; **81.** $0,95^3$;**82.** $\frac{1}{3}$; **83.** $\frac{15}{16}$; **84.** 0,388;

85. 0,9375;

86. 0,5; **87.** 0,8; **88.** 0,76; 8**9.** 0,826; **90 .** 0,93; **91.** $\dfrac{67}{91}$; **92.** 0,26;

93. $\dfrac{53}{95}$;**95.** *1/n* gateng. *k* ga bog‘liq emas; **96.** 3/8; **97.** $1-3p_2p_3^2$

98. a) 0,348; b) 0,984; **99.** a) 0,533; b) 0,467; **100.** $\dfrac{1}{3}$; **101.** 0,32;

102. 0,58; **103.** 3/5=12%/20%; **104.** 0,78; **105.** 0,5; **106.** 3/7;

107. 5/11; **108.** 9/11; **109.** 2/3; **110.** 0. 285; **111.** 135/139; **112.** B_1;

113. 5/7;

114. a) 0,4; b) 1/3; **115.** $P(A)=\dfrac{1+C_7^5+C_{13}^5}{C_{25}^5}$ **116.** 59;

117. *P(A)=0,056;*

118. a) *P(A)=0,57;* b) $P_A(H_2)=0{,}175$.**119.** 0,17; **121.** a) 1/3; b) 1/3;

122. 0,0715; **123.** 0,37; **124.** 3/7; **125.** $\approx 0,2541$;**126 .** 0,0512;

127. a) 21/32; b) 1023/1024; **128.** a) ¼ va 7/32; b) 5/16 va 93/256;
129. 4 martadan 2 marta gerb tushish ehtimoli katta; **130.** 0,0214;
131. a) 0,00038; b) 0,8999; **132.** a) 0,774; b) 0,0021;**133.** $k_0=5$;
134. $k_0=3$; $P_{10}(3)=0,25$; **135 .** $P_{10}(5)=63/256$; **136.** 0,164;
137. 0,1323;**138.** 12 partiyalik ehtimolliroq; **139.** 0,203;
140. $P(A)=0,216$, $P(B)=0,189$, $P(C)=0,135$;
141. $P(A)\approx 0,012$, $P(B)\approx 1,144\cdot 10^{-4}$, $P(C)\approx 0,246$, $P(D)\approx 2^{-10}\approx 10^{-3}$ **;**
142. $P(B)=C_{n-1}^{k-1}p^k q^{n-k}$ **143.** ≈0,5; **144.** a) 0,201; b) 0,677;
145. a) 0,945; b) 0,172; **146.** a)0,081; b) 0,213; **147.** 0,9477;
148. 2; **150.** 0,2966;**151.** 0,999; **152.** $0,496\cdot 10^{-4}$;**153.** 0,9938;
154. 0,92; **155.** a) 0,06313; b) 0,981; c) 0,019;
156. a) 0,224; b) 0,1992; c) 0,5768; g) 0,95; **157.** a) 0,993; b) 0,561;
158. 0,1005; **159.** 0,125;
160. $P(A)<0,0001$, $P(B)\geq 0,9994$, $P(C)\geq 0,9015$, $P(D)\leq 0,2578$;
161. 127 marotaba; **162.** 753; **163.** 300; **164.** a) 0,0842; b) 0,5595;
165. 0,2743; **166.** 0,14653; 0,19537; 0,15629; **167.** 0. 804;
168. 0,0708; **169.** 0,9904; **170.** 0,09022; **171.** 0,26424;
173.

X	*0*	*1*
P	*5/6*	*1/6*

174.

X	*0*	*1*	*2*
P	*1/45*	*16/45*	*28/45*

176.

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,6561*	*0,2916*	*0,0486*	*0,0036*	*0,002*

177. $P(X=k)=C_4^k(0,5)^4,\quad k=0,1,2,3,4;$

178.

X	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*0,04*	*0,26*	*0,46*	*0,24*

179.

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*7/99*	*35/99*	*14/33*	*14/99*	*1/99*

180.

X	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*0,125*	*0,375*	*0,375*	*0,125*

181.

X	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*1/64*	*9/64*	*27/64*	*27/64*

182.

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*1/42*	*5/21*	*10/21*	*5/21*	*1/42*

183. $P(Z=k)=(k-1)p^2q^{k-2}, \quad k=2,3,...;$ **184.** Z tasodifiy miqdor $\lambda_1+\lambda_2$ parametrli Puasson taqsimot qonunga ega.

185. $B(n_1+n_2, p)$

186. $P(x=i)=\dfrac{C_5^i\cdot C_{25}^{15-i}}{C_{30}^{15}}; \ \dfrac{11}{522}, \ i=1,2,...);$

187. $P(x=i)=C_5^i 0,97^i\cdot 0,03^{5-i};$ 0,1413);

188. $P(x=i)=C_{10}^i 0,2^i\cdot 0,8^{10-i};$ 0,6242);

189. $P(x=i)=C_5^i 0,2^i\cdot 0,8^{5-i});$ **190.** $P(x=i)=C_{10}^i 0,1^i\cdot 0,9^{10-i});$

191. $a)\ P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda=5; \quad c)\ 0,87535; \ d)\ 0,00674;$

193.

X	*1*	*2*	*3*	*4*

P	*0,8*	*0,12*	*0,064*	*0,0096*

194.

X	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,7*	*0,24*	*0,042*	*0,0144*

195. $D(X)=15,21; \sigma(X)=3,9;$ **196.** $M(X)=3,5;\ D(X)=2,92;$
197. $M(X)=12/7;$ **198.** $M(X)=0,5;\ D(X)=3/8; \sigma(X)=0,612;$
199.

X	*0*	*1*	*2*
P	*7/15*	*7/15*	*1/15*

$M(X)=3/5;$

200.

X	1	2	3	4
P	p	pq	pq^2	q^3

201. $D(X)\approx 0,2985;$ **202.** $D(X)=61;$
203. $M(X)=9; \quad D(X)=40;$
209. $D(X)\approx 8,545; \quad \sigma(X)\approx 2,923;$ **210.** $D(X)=0,8;$
212.

X	*1*	*2*
P	*0,6*	*0,4*

213.

X	*1*	*3*
P	*0,2*	*0,8*

215. $M(X)=\dfrac{1-q^5}{p};$

X	1	2	3	4	5
P	p	pq	pq^2	pq^3	q^4

216. $M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$ **217.** $p_6 \approx 1.22 \cdot 10^{-7}$, $p_5 \approx 2.85 \cdot 10^{-5}$;

218. 11/42;

219. $P(x=i)=C_2^i 0{,}5^i \cdot 0{,}5^{2-i}=0{,}25\ C_2^i,\ i=0,1,2,...;\ M(X)=1;\ D(X)=1/2$

220. $P(x=i)=1/6;\ M(X)=3{,}5;\ D(X)=35/12$

221. $M(X)=29{,}85;\ D(X)=71{,}9775;$

222.

X	0	10 mln	20 mln	30 mln	40 mln
P	*2/5*	*1/3*	1/6	1/12	1/60

$M(X)=29{,}85;\ D(X)=71{,}9775;$

223. $M(X)=1{,}95;\ D(X)=0{,}6475;$

224. $P(x=i)=0{,}6^{i-1}\cdot 0{,}4; i=1,2,...;\ M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{q}{p^2};$

225. $M(X)=2{,}8;\ D(X)=0{,}84;$ 0,7599; **226.** $M(X)=8;\ D(X)=8;$

227. $P_{15}(k\geq 10)=P_{15}(10)+P_{15}(11)+...+P_{15}(15);$

228. $P_{15}(k\geq 10)=P_{15}(10)+P_{15}(11)+...+P_{15}(15);$

229. $M(X)=10;\ \lambda_{15\min}=\frac{10}{4};\ P_{15\min}(0)=e^{-\frac{10}{4}};$

230. $M(X)=D(X)=7; e^{-7};$

232. $\lambda_{3\min}=1;\ \lambda_{15\min}=5; P_{15\min}(k\geq 3)=1-P_{15\min}(0\leq k\leq 2);$

233. $$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\leq 0, \\ \cos x, & agar \quad 0<x\leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & agar \quad x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

234. $F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ 1-\cos x, & agar \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

235. $F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le \dfrac{\pi}{6},\\ -\cos x, & agar \quad \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

236. $F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & agar \quad 1<x\le 2,\\ 1, & agar \quad x>2.\end{cases}$

237. $C=\dfrac{1}{2\pi}$; **238.** $C=\dfrac{1}{2\pi}$; **239.** $C=\dfrac{4}{\pi-\ln 4}$;

240. $P_1=P(0{,}25<X<0{,}75)=\dfrac{1}{2}$; $P_4(3)=0{,}25$;

241. $\approx 0{,}41347$; **242.** 0,77453;

243. $A=\dfrac{1}{2}$; $F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \sin^2\dfrac{x}{2}, & agar \quad 0<x\le \pi,\\ 1, & agar \quad x>\pi.\end{cases}$

244. 0,6826;**245.** 0,25;**246.** 0,9544;

247. $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$; 0,5468;

248. $a>0$, $b=1/2$, $C=1/\pi$; **249.** $a=2$ parametrli Simpson taqsimot qonuni.

250. $F_U(u)=1-(1-F(u))^2$, $F_V(v)=F^2(v)$

251. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & agar \quad z\le 0,\\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\ell^{-\lambda_1 z}-\ell^{-\lambda_2 z}\right), & agar \quad z>0.\end{cases}$

252. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & agar \quad z\le 0,\\ \lambda^2 z\ell^{-\lambda z}, & agar \quad z>0.\end{cases}$

253. $M(X)=1{,}5;\quad D(X)=0{,}15;$

254. $M(X)=\frac{\pi-1}{3};\ D(X)=\frac{\pi-3}{9};\ \sigma(X)\approx 0{,}1245;$

255. $M(X)=0{,}1;\ D(X)=0{,}01;\ \sigma(X)\approx 0{,}1;$

256. $M(X)=0;\ D(X)\approx 0{,}4649;\ \sigma(X)\approx 0{,}68;$

257. $M(X)=3;\ D(X)=\frac{1}{3};\ \sigma(X)=0{,}58;$

258. $M(X)=0{,}2;\ D(X)=0{,}04;\ \sigma(X)\approx 0{,}2;$

259. $f\ (x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$; **260.** $M(X)=\frac{2}{3};\ D(X)=\frac{1}{18};$

261. $M(X)=5;\ D(X)=3;\ \sigma(X)=\sqrt{3};$ **262.** $M(X)=25;\ D(X)=625;$

263. $M(X)=1;\ D(X)=25;$

264. $M(X)=\infty;$ **265.** $M(X)=-1;\ D(X)=1;$

266. $F\ (x)=1-\dfrac{\lambda^2x^2+2\lambda x+2}{2}e^{-\lambda x};$

267. $a)\ A=\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{\pi};\ b)\ f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)};\ c)\ M(X)$ *mavjud emas.*

268. $a)\ A=\frac{1}{2};\ b)\ M(X)=0;\ D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2;$

269. $M(X)=0;\ D(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2};$

270. $f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 1,\\ \frac{1}{6}, & agar \quad 1<x\le 7,\\ 0, & agar \quad x>7.\end{cases}$

271. $M(X)=\frac{3}{4};$ **272.** $a)\ A=1;\ b)\ M(X)=1;$ **273.** $M(X)=a;\ D(X)=2a^2;$

274. $a)\ A=ah^2;\ b)\ M(X)=\frac{\sqrt{\pi}}{2h};\ D(X)=\frac{4-\pi}{4h^2};$ **275.** $M(X)=4;$ **276.** $M(X)=3;$

277. $D(X)=\frac{a^2}{2};$ **278.** *M(X)* va yuqoriroq tartibli momentlari mavjud emas. **279.** 15; 10 va 3,4; **280.** $\approx$ 99. 95%. **281.** *M(*X^2*)≈1. 1842,*

$P(X^2>2)\approx 0.8328$

282. a) $\sigma=\sqrt{\dfrac{(b-a)\left(\dfrac{a+b}{2}-m\right)}{\dfrac{\log(b-m)}{a-m}}}$, $Q(\sigma)=\Phi\left(\dfrac{b-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$ b) $\sigma\sqrt{2/\pi}$

283. 0,4013; 0,58; **284.** 516 gramm; **285.** a) 0,2206; b) 0,973; c) 0,1144;
286. a) 0,0228; b) 0,9772; c) 0,5385; **287.** 0,9; **288.** $\varepsilon\geq 2$;
289. 0,2; **290.** 0,64; **291.** 2/3; **292.** 0,84; **293.** 0,9;
294. $P\left(|X-M(X)|<0,2\right)\geq 0,69,$ (Chebishyev tengsizligi bo‘yicha), $P\left(|X-M(X)|<0,2\right)=0,8,$ (aniq ehtimol bo‘yicha); **295.** Qo‘llash mumkin;
296. Qo‘llash mumkin; **297.** Qo‘llash mumkin; **298.** Qo‘llash mumkin;
299. $P\left(|X-M(X)|<0,3\right)\geq 0,89,$ (Chebishyev tengsizligi bo‘yicha), $P\left(|X-M(X)|<0,3\right)=1,$ (aniq ehtimol bo‘yicha);
300. $\geq 0,95$; **301.** $\leq 0,375$; **302.** a) $\geq$ 0. 66; b) $\geq$ 0. 96; **303.** 1000 marotaba; **304.** 19048 marotaba; **305**. a) $\approx 0,8944$; b) $\approx 0,44$;
306. Chebishevda 0. 08944, MLT da 0. 0392. **307.** Chebishevda 0. 96, MLT da 0. 9999; **308.** Chebishevda 0. 84, MLT da 0. 9876;
309. $\geq 0,99$;

II-qism. Matematik statistika elementlari

330. $D_T=8,04$; **331.** $\bar{x}_T=1269$; **332.** $\bar{x}_T=5,76$; **333.** $\bar{x}_T=3,75$; $D_T=0,5375$;
334. $D_T=12602,7$; **335**. $D_T=0,32$; **336.** $D_T=0,5916$; **337.** $S_T=3,075$;
338. $S_T=9,49$; **339.** $D_T=167,29$; **340.** $D_T=4,89$;
341. $\bar{x}_T=166$; $D_T=4,76$; **342.** mediana va moda $h_n=d_n=19$, $M(X)=17,225$; $D(X)=19,1744$;
343. mediana va moda $h_n=d_n=70$, $M(X)=69,84$; $D(X)=9,2144$;
344. mediana va moda $h_n=d_n=6$, $M(X)=5,9389$; $D(X)=1,3079$;
356. Orange Electronicsning $M(X)$ eng katta va $M(X)/\sigma_X$ eng kichik.

357. $M(X)=84,75;\sigma_x=13,4606;$ assimmetriya $\gamma_1=0,4122$; ekssessiya $\gamma_2=1,5929$; **358.** $M(X)=225,1667; D(X)=48,142;\ \sigma_x=6,9384;$
359. $\delta=2,248$;**360.** (38. 469; 46. 169); **361.** $24948<a<25052$;
362. $23,8<a<25,4$;**363.** $a)\ 0<\sigma<14,28;\ \ b)\ 0<\sigma^2<203,902$ **;**
364. $23,38<a<36,82$;**365.** $7,63<a<12,77$; **366.** n=179; **367.** n=81;
368. **(**0,0777;3,9223);**369.** (-0,167;1,0004); **370.** **(**0. 266;0. 454);
371. a) (0. 012;0. 038); b) 88 ta; **372.** (1. 61;2. 39);**373.** (2. 00;2. 60);
374. *p=0,997;* **375.** $\bar{x}_{y=2}=4,4;\ \bar{x}_{y=3}=\frac{11}{3};\ \bar{x}_{y=4}=\frac{59}{12};$
376. $\bar{y}_{x=3}=7,571;\ \bar{y}_{x=3,5}=8,714;\ \bar{y}_{x=4}=9,667;\ \bar{y}_{x=4,5}=10,6;\ \bar{y}_{x=5}=11,667;$
377. *r=-1/6;* **378.** *r=0,997;***379.** *r=-0,1887;*
381. $\bar{x}_{y=0}=1;\ \bar{x}_{y=2}=7,6667;\ \bar{x}_{y=3}=21,88;$
382. $\bar{y}_{x=6}=1,125;\ \bar{y}_{x=30}=3,125;\ \bar{y}_{x=5}=4;$ **384.** *r=0,95757;* **385.** *r=0,92395;*
386. *r=0,98488;*
389. $\bar{x}=0.85;\ \bar{y}=0.23;\ \sigma_x^2=1.805;\ \sigma_y^2=0.00719;\ r=-0.503;$
$\bar{y}_x=-0.032x+0.26;\ \bar{x}_y=-7.97y+2.68.$
390.
$\bar{x}=5.5;\ \bar{y}=2.94;\ \sigma_x^2=7.92;\ \sigma_y^2=6.80;\ r=0.964;$
$\bar{y}_x=0.89x-1.97;\ \bar{x}_y=1.04y+2.44.$
391.
$\bar{x}=0.475;\ \bar{y}=39.5;\ \sigma_x^2=0.087;\ \sigma_y^2=234.33;\ r=0.981;$
$\bar{y}_x=50.77x+15.39;\ \bar{x}_y=2.57y+0.11.$

392.
$\bar{x}=8.5;\ \bar{y}=0.79;\ \sigma_x^2=28.5;\ \sigma_y^2=0.32;\ r=0.972;$
$\bar{y}_x=0.1x-0.11;\ \bar{x}_y=-6.94y+15.44.$
393.
$\bar{x}=4.5;\ \bar{y}=0.75;\ \sigma_x^2=0.907;\ \sigma_y^2=0.133;\ r=0.932;$
$\bar{y}_x=0.36x-853;\ \bar{x}_y=2.44y+2.67.$
394.
$\bar{x}=0.85;\ \bar{y}=2.07;\ \sigma_x^2=0.23;\ \sigma_y^2=1.64;\ r=0.938;$
$\bar{y}_x=2.52x-7.67;\ \bar{x}_y=0.35y+0.29.$
395. $\bar{y}_x=1,45x-10,36;$ **396.** $\bar{y}_x=1,92x-101,6;\quad \bar{x}_y=0,12y+3,7;$

397. $\overline{y}_x = 4x - 57{,}8;$ $\overline{x}_y = 0{,}19y + 3{,}1;$ **398.** $\overline{y}_x = 0.396x^2 - 0{,}173x + 0.265;$
399. $\overline{y}_x = 1.019x^2 - 0.869x + 1.128;$
400. $\overline{y}_x = 6.904x^2 + 9.791x + 16.887;$ **401.** $\overline{y}_x = 0.1x^2 - 0.106x + 0.226;$
402. $\overline{y}_x = 320x^2 - 13{,}01x + 9{,}9;$ $\eta_{y_x} = 0{,}99;$
403. $\overline{x}_y = 2{,}8y^2 + 0{,}02y + 3{,}18;$ $\eta_{y_x} = 0{,}96;$
404. $\overline{x}_y = 2{,}29y^2 - 1{,}25y - 1{,}25;$ $\eta_{y_x} = 0{,}92;$
405. $R = 0.815;\ Z = 1.07x + 0.59y + 1.8;$ **406.** $R = 0.739;\ Z = -1.42x - 0.26y + 2.75;$
407. $R = 0.99;\ Z = 2.80x + 1.07y - 94.55;$
408. $R = 0.933;\ Z = 0.91x - 0.059y + 2.21;$
409. H_1, H_2, H_3 - statistik gipoteza; H_1- oddiy, H_2, H_3- murakkab.
410. H_1- oddiy, H_2, H_3, H_4- murakkab statistik gipoteza;
411. a) 1-tur xatolik; b) 2-tur xatolik; c) xatolik yuz bergani yo‘q; d) xatolik yuz bergani yo‘q;
412. a){0,1,2,3,4,5}, Г={0,1,2,3,4},B(5,p); b) H_0: qurilma yaroqli, p=0,99;
c) H_1: qurilma yaroqsiz, p=0. 40; d) $\alpha \approx 0{,}05;\ \beta \approx 0{,}01.$
413. Yaroqsiz mahsulotlar soni, {0,1,2,…,10}, {2,3,…,10}; b) B(10,p); c) H_0: p=0,05; ta’minotchihaq, H_1: p=0. 1, iste`molchihaq; d) $\alpha \approx 0{,}086;\ \beta \approx 0{,}736.$
414. $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$dan $u_{0,99} = 2{,}33$bo‘lgani uchun $(40{,}2 - 40)\sqrt{36} = 1{,}2 < 2{,}33$ H_0qabul qilinadi.
$\Gamma = \left\{ \overline{x} > 40 + \frac{2{,}33}{\sqrt{36}} \right\} = \left\{ \overline{x} > 40{,}39 \right\}$. **415**. n=73, $K_n = \left\{ \overline{x} > 40{,}15 \right\};$
416. Normal taqsimotga mos keladi. **417.** Rad etishga asos yo‘q bo‘lganligi uchun uni qabul qilinadi. **418.** Rad etishga asos yo‘q;normal taqsimotga mos keladi. **419.** Rad etishga asos yo‘q;normal taqsimotga mos keladi. **420.** Ha. Har ikkala tanga simmetrik.
421. Yoq. To‘g‘ri emas. **422.** Normal taqsimlangan deb qarash mumkin**.**
423. Ha, uni simmetrik deb qarash mumkin**. 424.** Ha. **425**. H_0 inkor qilinadi. **426.** bog‘liq emas. **427**. Yo‘q ta’sir etadi**.**

1-Ilova.

$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiya qiymatlari jadvali.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0. 0	0.3989	0.3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0. 1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0. 2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0. 3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0. 4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0. 5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0. 6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0. 7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0. 8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0. 9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1. 0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1. 1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	0956
1. 2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1. 3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1. 4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1. 5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1. 6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1. 7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1. 8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1. 9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2. 0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2. 1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2. 2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2. 3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2. 4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0180	0184	0180
2. 5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2. 6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2. 7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2. 8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2. 9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3. 0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3. 1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3. 2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3. 3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3. 4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3. 5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3. 6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3. 7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3. 8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3. 9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-Ilova.

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x}e^{\frac{z^2}{2}}dz$ **funksiya qiymatlari jadvali.**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0. 00	0. 0000	0. 45	0. 1736	0. 90	0. 3159	1. 35	0. 4115
0. 01	0. 0040	0. 46	0. 1772	0. 91	0. 3186	1. 36	0. 4131
0. 02	0. 0080	0. 47	0. 1808	0. 92	0. 3212	1. 37	0. 4147
0. 03	0. 0120	0. 48	0. 1844	0. 93	0. 3238	1. 38	0. 4162
0. 04	0. 0160	0. 49	0. 1879	0. 94	0. 3264	1. 39	0. 4177
0. 05	0. 0199	0. 50	0. 1915	0. 95	0. 3289	1. 40	0. 4192
0. 06	0. 0239	0. 51	0. 1950	0. 96	0. 3315	1. 41	0. 4207
0. 07	0. 0279	0. 52	0. 1985	0. 97	0. 3340	1. 42	0. 4222
0. 08	0. 0319	0. 53	0. 2019	0. 98	0. 3365	1. 43	0. 4236
0. 09	0. 0359	0. 54	0. 2054	0. 99	0. 3389	1. 44	0. 4251
0. 10	0. 0398	0. 55	0. 2088	1. 00	0. 3413	1. 45	0. 4265
0. 11	0. 0438	0. 56	0. 2123	1. 01	0. 3438	1. 46	0. 4279
0. 12	0. 0478	0. 57	0. 2157	1. 02	0. 3461	1. 47	0. 4292
0. 13	0. 0517	0. 58	0. 2190	1. 03	0. 3485	1. 48	0. 4306
0. 14	0. 0557	0. 59	0. 2224	1. 04	0. 3508	1. 49	0. 4319
0. 15	0. 0596	0. 60	0. 2257	1. 05	0. 3531	1. 50	0. 4332
0. 16	0. 0636	0. 61	0. 2291	1. 06	0. 3554	1. 51	0. 4345
0. 17	0. 0675	0. 62	0. 2324	1. 07	0. 3577	1. 52	0. 4357
0. 18	0. 0714	0. 63	0. 2357	1. 08	0. 3599	1. 53	0. 4370
0. 19	0. 0753	0. 64	0. 2389	1. 09	0. 3621	1. 54	0. 4382
0. 20	0. 0793	0. 65	0. 2422	1. 10	0. 3643	1. 55	0. 4394
0. 21	0. 0832	0. 66	0. 2454	1. 11	0. 3665	1. 56	0. 4406
0. 22	0. 0871	0. 67	0. 2486	1. 12	0. 3685	1. 57	0. 4418
0. 23	0. 0910	0. 68	0. 2517	1. 13	03708	1. 58	0. 4429
0. 24	0. 0948	0. 69	0. 2549	1. 14	0. 3729	1. 59	0. 4441
0. 25	0. 0987	0. 70	0. 2580	1. 15	0. 3749	1. 60	0. 4452
0. 26	0. 1026	0. 71	0. 2611	1. 16	0. 3770	1. 61	0. 4463
0. 27	0. 1064	0. 72	0. 2642	1. 17	0. 3790	1. 62	0. 4474
0. 28	0. 1103	0. 73	0. 2673	1. 18	0. 3810	1. 63	0. 4484
0. 29	0. 1141	0. 74	0. 2703	1. 19	0. 3830	1. 64	0. 4495
0. 30	0. 1179	0. 75	0. 2734	1. 20	0. 3849	1. 65	0. 4505
0. 31	0. 1217	0. 76	0. 2764	1. 21	0. 3869	1. 66	0. 4515
0. 32	0. 1255	0. 77	0. 2794	1. 22	0. 3883	1. 67	0. 4525
0. 33	0. 1293	0. 78	0. 2823	1. 23	0. 3907	1. 68	0. 4535
0. 34	0. 1331	0. 79	0. 2852	1. 24	0. 3925	1. 69	0. 4545
0. 35	0. 1368	0. 80	0. 2881	1. 25	0. 3944	1. 70	0. 4554
0. 36	0. 1406	0. 81	0. 2910	1. 26	0. 3962	1. 71	0. 4564
0. 37	0. 1443	0. 82	0. 2939	1. 27	0. 3980	1. 72	0. 4573
0. 38	0. 1480	0. 83	0. 2967	1. 28	0. 3997	1. 73	0. 4582
0. 39	0. 1517	0. 84	0. 2995	1. 29	0. 4015	1. 74	0. 4591
0. 40	0. 1554	0. 85	0. 3023	1. 30	0. 4032	1. 75	0. 4599
0. 41	0. 1591	0. 86	0. 3051	1. 31	0. 4049	1. 76	0. 4608
0. 42	0. 1628	0. 87	0. 3078	1. 32	0. 4065	1. 77	0. 4616

0. 43	0. 1664	0. 88	0. 3106	1. 33	0. 4082	1. 78	0. 4625
0. 44	0. 1700	0. 89	0. 3133	1. 34	0. 4099	1. 79	0. 4633
1. 80	0. 4641	2. 00	0. 4772	2. 40	0. 4918	2. 80	0. 4974
1. 81	0. 4649	2. 02	0. 4783	2. 42	0. 4922	2. 82	0. 4976
1. 82	0. 4656	2. 04	0. 4793	2. 44	0. 4927	2. 84	0. 4977
1. 83	0. 4664	2. 06	0. 4803	2. 46	0. 4931	2. 86	0. 4979
1. 84	0. 4671	2. 08	0. 4812	2. 48	0. 4934	2. 88	0. 4980
1. 85	0. 4678	2. 10	0. 4821	2. 50	0. 4938	2. 90	0. 4981
1. 86	0. 4686	2. 12	0. 4830	2. 52	0. 4941	2. 92	0. 4982
1. 87	0. 4693	2. 14	0. 4838	2. 54	0. 4945	2. 94	0. 4984
1. 88	0. 4699	2. 16	0. 4846	2. 56	0. 4948	2. 96	0. 4985
1. 89	0. 4706	2. 18	0. 4854	2. 58	0. 4951	2. 98	0. 4986
1. 90	0. 4713	2. 20	0. 4861	2. 60	0. 4953	3. 00	0. 49865
1. 91	0. 4719	2. 22	0. 4868	2. 62	0. 4956	3. 20	0. 49931
1. 92	0. 4726	2. 24	0. 4875	2. 64	0. 4959	3. 40	0. 49966
1. 93	0. 4732	2. 26	0. 4881	2. 66	0. 4961	3. 60	0. 499841
1. 94	0. 4738	2. 28	0. 4887	2. 68	0. 4963	3. 80	0. 499828
1. 95	0. 4744	2. 30	0. 4893	2. 70	0. 4965	4. 00	0. 499968
1. 96	0. 4750	2. 32	0. 4898	2. 72	0. 4967	4. 50	0. 499997
1. 97	0. 4756	2. 34	0. 4904	2. 74	0. 4969	5. 00	0. 499997
1. 98	0. 4761	2. 36	0. 4909	2. 76	0. 4971		
1. 99	0. 4767	2. 38	0. 4913	2. 78	0. 4973		

3-Ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

k ozodlik darajasi soni	α qiymatdorlik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	0,00016	0,00098	0,0039	3,8	5,0	6,6
2	0,020	0,051	0,103	6,0	7,4	9,2
3	0,115	0,216	0,352	7,8	9,4	11,3
4	0,297	0,484	0,711	9,5	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	23,7	26,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,55	8,67	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6
21	8,90	10,3	11,6	32,7	35,5	38,9
22	9,54	11,0	12,3	33,9	36,8	40,3
23	10,2	11,7	13,1	35,2	38,1	41,6
24	10,9	12,4	13,8	36,4	39,4	43,0
25	11,5	13,1	14,6	37,7	40,6	44,3
26	12,2	13,8	15,4	38,9	41,9	45,6
27	12,9	14,6	16,2	40,1	43,2	47,0
28	13,6	15,3	16,9	41,3	44,5	48,3
29	14,3	16,0	17,7	42,6	45,7	49,6
30	15,0	16,8	18,5	43,8	47,0	50,9

4-Ilova

Styudent taqsimotining kritik nuqtalari

k	α qiymatdorlik darajasi					
	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,796	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,782	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,771	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,761	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,753	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,746	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,740	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,734	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,729	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,725	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,721	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,717	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,714	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,711	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,709	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750

Asosiy adabiyotlar

1. Мирзиёев Ш. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. –Т. : Ўзбекистон, 2017. - 488 бет.
2. Мирзиёев Ш. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. –Т. : Ўзбекистон, 2017. - 48 бет.
3. Мирзиёев Ш. М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Т. : Ўзбекистон, 2017. - 32 бет.
4. Ш. Мирзиёев. Постановление Президента Республики Узбекистан "О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Ташкентского Университета Информационных Технологий". Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2017 год ., №11,ст.158.
5. Ш. Мирзиёев. Постановление Президента Республики Узбекистан от 20 апреля 2017 "О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования".
6. Сирожиддинов С. Х. , Маматов М. Эҳтимоллар назарияси курси. Т. Ўқитувчи,1980.
7. Adirov T. X. , Xamdamov I. M. ,Shomansurova F. Ehtimollar nazariyasi vamatematik statistikadan masalalar to‘plami. T. : «Iqtisod -Moliya», 2013.
8. Адиров Т. Х. , Хамдамов И. М. , Чай З. С. "Теория вероятностей и математическая статистика" Ташкент, учебное пособие, 2017.
9. Н.Ш. Кремер. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2007.
10. Sheldon Ross. A first course in probability. Eight edition. University of Southern California. Prentice Hall is an imprint of Pearson, 2010.
11. Prasanna Sahoo. Probability and mathematical statistics. Department of mathematics, University of Louisville, 2013.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Adirov T., Adigamova E. «Теория вероятностей и математическая статистика». Сборник задач. Т. : TMI, 2003.
2. Adirov T., Xamdamov I. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar va ularni yechishga oid ko'rsatmalar. T. : «Iqtisod –Moliya», 2008.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 2008.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по "Теории вероятностей и математической статистике". Учебное пособие. 11-издание. М.: 2008.
5. Marcel B. Finan. A probability of course for the Actuaries. Arkansas Tech University, 2013.

Internet saytlari

1.www. gov. uz
2.www. Ziyonet. uz
3.www. tuit. uz
4.www. Math. uz
5.www. bilim. uz

Mundarija

I-qism. Ehtimollar nazariyasi

II-qism. Matematik statistika elementlari

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to‘plami va ularni yechishga doir ko‘rsatmalar

TATU barcha yo‘nalishi talabalari uchun o‘quv qo‘llanma

“Oliy matematika” kafedrasining 2018 yil 16-oktyabr
(7-sonli bayonnoma) majlisida ko‘rib chiqildi va chop etishga tavsiya etildi.

DI fakultetining ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqildi va chop etishga tavsiya etildi.
2018 yil 22- oktyabr №3 sonli bayonnoma

TATU ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqildi va chop etishga tavsiya etildi.
2018 yil 22 noyabr № 5(117) sonli bayonnoma

Tuzuvchi:
T.X.Adirov

Taqrizchilar: R.R.Raxmatov
O‘.N.Qalandar
E.N. Mamurov

Mas’ul muharrir: A.A.Tulyaganov

Muharrir: M.X.Axmedova