S. S. SADADDINOVA

DISKRET MATEMATIKA

1-qism

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
VA KOMMUNIKATSIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

S. S. SADADDINOVA

DISKRET MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi
tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

1-qism

TOSHKENT – 2019

UO‘K: 51
KBK: 22

S.S.Sadaddinova. Diskret matematika. 1-qism. (O‘quv qo‘llanma). – T.: «Aloqachi», 2019. – 224 b.

ISBN 978–9943–5805–2–7

Ushbu qo‘llanma universitetlar hamda texnika oliy o‘quv yurtlarining "Diskret matematika" kursi materiallarini o‘z ichiga oladi. Jumladan, to‘plamlar nazariyasi, kombinatorika elementlari, graflar nazariyasi, munosabatlar, akslantirishlar, chekli avtomatlar, injener uchun matematik mantiq elementlari, DNSh sinfi bo‘yicha minimallash, algebraik strukturalar bo‘limlarining asosiy masalalari keltirilgan.

Kitobda hozirgi zamon hisoblash matematikasi va dasturlash asoslarining yutuqlari o‘z aksini topgan.

Qo‘llanma universitetlar, texnika oliy o‘quv yurtlari, pedagogika institutlari talabalari va professor-o‘qituvchilari uchun mo‘ljallangan.

UO‘K: 51
KBK: 22

Taqrizchilar:

Sh.A.Sadullayeva – f.-m.f.d., Toshkent axborot texnologiyalari universiteti;

A.A.Abdug‘aniyev– f.-m.f.n., dotsent, Toshkent davlat texnika universiteti.

ISBN 978–9943–5805–2–7

SO‘Z BOSHI

“Diskret” tushunchasi “uzluksiz” tushunchasiga teskari tushuncha hisoblanadi. Diskret matematika fani to‘plamlar nazariyasi, kombinatorika elementlari, graflar nazariyasi, munosabatlar, akslantirishlar, chekli avtomatlar, injener uchun matematik mantiq elementlari, DNSh sinfi bo‘yicha minimallash, algebraik strukturalar kabi bir qancha bo‘limlardan tashkil topgan.

Diskret matematikaning elementar kirish qismini o‘rganmay turib, informatika va dasturlashdan muvaffaqiyatga erishib bo‘lmaydi. Diskret matematika fani “Informatika va hisoblash texnikasi”, “Raqamli qurilmalar va ularning matematik asoslari”, “Elektronika” kabi fanlar bilan chambar-chas bog‘liqdir. Ushbu kitobda mazkur fanning fundamental tushunchalari qiziqarli misollar, testlar va chizmalar yordamida bayon qilingan.

Maqsad elektron hisoblash texnikasi va avtomatlashtirilgan tizimlarni boshqaruvchi, matematik bilimlarni ham nazariy, ham amaliy usullarini egallagan injener-dasturchilarni tayyorlashdir.

Muallif qimmatli maslahatlari uchun Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti “Algoritmlash va matematik modellashtirish” kafedrasining dotsentlari O‘.N.Qalandarov, X.A.Abduvaitovlarga samimiy minnatdorchiligini bildiradi.

1. TO‘PLAMLAR NAZARIYASI

1.1. To‘plamlarning berilishi

To‘plamlar matematika va informatikada ma’lumotlarni eng qulay tilda ifodalash imkonini beradi. To‘plam tushunchasiga birinchi bo‘lib 1896 yilda G.Kantor (1845-1918) **“To‘plam bu birgalikda deb idrok etiladigan juda ko‘plikdir**, deb ta’rif bergan.

Tarixiy ma’lumot: *Georg Kantor (1845-1918) Rossiyaning Sankt-Peterburg shahrida tug‘ilgan, otasi katta savdogar va broker bo‘lgan. Bolaligidan Kantor matematikaga qiziqqan. 1856 yilda oilasi Germaniyaga ko‘chib keladi. 6 yil o‘tib, u Syurix universitetiga o‘qishga kiradi, biroq keyingi yildan matematika, fizika va filosofiyani o’rganish uchun Gall universitetiga o’tadi. U yerda mashhur matematik Karl Veyershtrass (1815-1897) bilan tanishadi. Kantorning otasi o’g’lining injener bo’lishini xohlagan bo’lsa-da, Kantor matematikaning sonlar nazariyasi yo’nalishidan ketdi va 22 yoshida Berlin universitetida fanlar doktori ilmiy darajasini oldi.*

1869 yildan Kantor Gall universitetida lektsiya o’qiy boshladi va 5 yil o’tib o’zining to’plamlar nazariyasida inqilobiy o’zgarish qilgan ishini nashr qildi. Kantor chekli sonlarning analogi bo’lgan transfinit sonlar arifmetikasini ishlab chiqish bilan matematik tadqiqotlarning yangi yo’nalishini ochib berdi. Shuningdek, Kantor aniqmas tenglamalar, trigonometrik qatorlar sohasiga ham sezilarli hissasini qo’shgan. Shuningdek, u san’at, musiqa va falsafa bilan ham qiziqqan.

Gall universitetida kam haq to’lashlariga norozi bo’lib, Berlin universitetiga ishga o’tadi. U yerda mashhur matematik Leopold Kroneker (1823-1891) bilan ziddiyatga kelib qoladi. Olim Kantorning to’plamlar haqidagi ilmiy ishlarini tanqid qiladi. O’sha davrning matematiklari tomonidan qarshiliklarga uchragan Kantor sog’ligini yo’qotadi va 1918 yilda Gallda kasalxonada vafot etadi.[1]

[1] **Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, 68-p.**

Atoqli matematik N.N.Luzin (1883-1950) o'zining to'plamlar nazariyasiga bag'ishlangan ma'ruzalarida to'plamni "To'plam bu turlicha ob'yektlarni solish mumkin bo'lgan qop" deb ta'riflar edi.

Hozirgi paytda **to'plam deb**, biror bir umumiy xususiyatga ega bo'lgan ob'yektlar majmuasiga aytiladi. To'plamni tashkil qiluvchi ob'yektlar uning **elementlari** deyiladi. To'plamlarni lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C, ..., P, Q, S, ..., X, Y, Z$ bilan, elementlarini esa kichik harflari $a, b, c, ..., p, q, s, ..., x, y, z$ bilan belgilanadi. x element X to'plamga tegishli bo'lsa, $x \in X$ ko'rinishda, tegishli bo'lmasa $x \notin X$ ko'rinishda belgilanadi.

Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam **bo'sh to'plam** deyiladi va Ø deb belgilanadi.

To'plamlar 3 xil usulda beriladi:

1) To'plamga tegishli elementlarning barchasini keltirish orqali (ro'yxat ko'rinishi), ya'ni agar $x_1, x_2, ..., x_n$ lar A to'plamning elementlari bo'lsa, u holda $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kabi yoziladi;

2) To'plam elementlarining xossalari bilan berish mumkin, bu **xarakteristik predikat** deyiladi: $A = \{x : \mathrm{P}(x)\}$;

3) To'plam elementlari formula ko'rinishida berilishi mumkin.

Misol. Toq natural sonlar to'plamini 3 xil usulda yozish:

1) ro'yxat ko'rinishi: $A = \{1,3,5,7,...\};$
2) xarakteristik predikat: $A = \{\exists x :\ x - toq \quad natural \quad sonlar\}$
3) formula shaklida: $A = \{x : x = 2n - 1,\ n \in N\}$.

Misol. 1 dan 9 gacha bo'lgan sonlar to'plamini 3 xil usulda yozish:

1) Ro'yxat ko'rinishi: $P = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\};$
2) xarakteristik predikat:

$$P = \{n \mid n := 0; \mathrm{for}\ n\ \mathrm{from}\ 1\ \ \mathrm{to}\ 9\ \mathrm{do}\ n := n + 1; \mathrm{yield}\ n\ \ \mathrm{end\ for}\};$$

3) formula shakli: $P = \{n \mid n \in N,\ \ \mathrm{n} < 10\}$.

Agar to'plam elementlari soni chekli bo'lsa, unga **chekli to'plam** deyiladi, aks holda **cheksiz to'plam** bo'ladi.

Barcha uch xonali sonlar to'plami chekli: $\{100,101,102,...,998,999\}$; tub sonlar to'plami cheksiz bo'ladi.

Cheksiz to'plamlar asosan xarakteristik predikat orqali beriladi, xususan:

$$N = \{n \mid n := 0; \mathrm{while\ \ true\ \ do}\ \ n := n + 1\ \ \mathrm{yield}\ \ n\ \ \mathrm{end\ \ while}\}.$$

Cheksiz to'plamlar ikkiga bo'linadi:
sanoqli to'plamlar va sanoqsiz to'plamlar.
Agar cheksiz to'plam elementlari bilan natural sonlar o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, unga **sanoqli to'plam** deyiladi, aks holda **sanoqsiz to'plam** bo'ladi.

Bo'sh to'plam chekli va sanoqli to'plam hisoblanadi va $\varnothing \neq \{0\}$ o'rinlidir.

Misol: a) butun sonlar to'plami sanoqli;
b) irratsional sonlar to'plami sanoqsiz;
v) juft sonlar to'plami sanoqli to'plamga misol bo'la oladi.

m dan n gacha bo'lgan butun sonlar to'plami – **diskret to'plam** bo'lib, uni

$$\{k \in Z \mid m \leq k \text{ va } k \leq n\} = \{k \in Z \mid \text{for } k \text{ from } m \text{ to } n \text{ do yield } k \text{ end for}\}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Shunday to'plamlar borki, ularning barcha elementlari boshqa biror kattaroq to'plamga tegishli bo'ladi. Masalan, $K = \{0,2,4,.......,2n,...\}$ ning barcha elementlari $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,......\}$ ning ichida yotibdi.

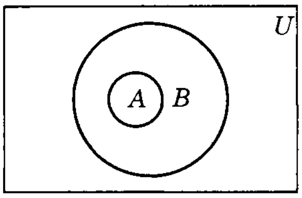
Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamning **qism to'plami** deyiladi va $A \subset B$, ba'zan **xos qism to'plam** deb ham yuritiladi.

Bo'sh to'plam va to'plamning o'zi **xosmas qism to'plam** deyiladi.

Bo'sh to'plam ixtiyoriy to'plamning qism to'plami bo'ladi.

Misol. B – barcha daraxtlar to'plami,
A – mevali daraxtlar to'plami bo'lsa, $A \subset B$ bo'ladi.

Quyida $A \subset B$ ning diagrammasi keltirilgan:



Nazorat uchun savollar:

1. To'plamlar nazariyasining asoschilari deb kimlarni bilasiz?
2. To'plam tushunchasiga ta'rif bering.
3. Sanoqli to'plam deb nimaga aytiladi?
4. Cheksiz to'plam qanday bo'ladi?
5. To'plamning berilish usullarini sanab bering.

6. Xos va xosmas qism to'plamlarning farqi nimada?
7. Qanday sonlar to'plamlarini bilasiz?

MISOL VA MASALALAR

1. Quyidagi to'plamlar uchun soddaroq berilish usulini yozing:
a) $A = \{x:\ x\text{-butun son va ва } x^2 + 4x - 12 = 0\}$;
b) $B = \{x:\ x\text{- "r" xarfi qatnashmaydigan oy nomlari}\}$;
v) $C = \{n:\ \text{n - butun son}\}$.
2. Quyidagi to'plamlar elementlarini yozing:
a) $A = \{x:\ x \in Z,\ 16 \le x \le 23\}$; b) $B = \{x:\ x \in \mathrm{Z},\ \mathrm{x}^2 < 18\}$;
v) $C = \{x:\ x \in N,\ -6 \le x \le 3\}$; g) $D = \{x:\ x \in N,\ \mathrm{x}^2 < 36\}$.
3. Butun sonlar to'plamining qism to'plamlarini yozing:
a) $A = \{3k \mid \mathrm{k} \in N,\ \mathrm{k} \le 10\}$; b) $B = \{2k \mid 1 < \mathrm{k} < 15, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\}$;
v) $C = \{n \mid \mathrm{n} \in Z,\ \mathrm{n}^2 \le 81\}$.
4. Quyidagi to'plamlarni formula va xarakteristik predikat shaklida yozing:
a) $A = \{1; 3; 5; ...; 2n - 1; ...\}$;
b) $B = \{2; 4; 6; ...; 2n; ...\}$;
v) $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

1.2. To'plamlarning tengligi

Agar to'plamlar bir xil elementlardan iborat bo'lsa va elementlarning tartibi inobatga olinmasa, bu ikkita **to'plam teng** $A = B$ deyiladi. Aks holda A va B **to'plamlar teng emas** $A \ne B$ deyiladi.

Agar $A \subset B$ va $A = B$ munosabat bajarilsa, $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

N, Z, R – mos ravishda natural, butun, haqiqiy sonlar to'plamlari uchun quyidagi munosabatlarni yozish mumkin: $N \subseteq Z, N \subseteq R, Z \subseteq R$.

Teorema 1. Ixtiyoriy A, B, C to'plamlar uchun quyidagilar o'rinli:
a) $A \subseteq A$;
b) $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo'lsa, u holda $A \subseteq C$ o'rinli.

Teorema 2. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A = B$ tenglik o'rinli bo'ladi, faqat va faqat $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa.

Demak, to’plamlar elementlari sonining tengligi ularning bir-biriga teng ekanligini bildirmaydi, shuning uchun ham quyidagi shartlarni kiritamiz: $\forall a \in A$ uchun $\exists в \in B$ topilsaki, $a = b$ bo’lib, $a \in B$ va $b \in A$ shart bajarilsa , u holda $A = B$ bo’ladi.

Misol. Teng va teng bo’lmagan to’plamlar:

$$\{a,b,c,d\} = \{c,d,a,b\};$$
$$\{a,b,c,d\} \neq \{c,a,b\};$$
$$\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1;2\}.$$

Teorema 3. Ixtiyoriy A, B, C to’plamlar uchun $A \subseteq B$ va $B \subset C$ munosabat o’rinli bo’lsa, u holda $A \subset C$ bo’ladi.

Agar to’plamning elementlari ham to’plamlardan iborat bo’lsa, unga **to’plamlar oilasi** deyiladi.

Misol.

1) $A = \{\{0\}, \{3, \ d, \ e\}, \{1, \ 2\}\}$;

2) Agar KP580 mikroprotsessor qurilmasining 8-razryad buyruq tizimi qaralayotgan bo’lsa, D to’plamlar oilasi quyidagicha yoziladi:

$$D = \{P_i : P_i - buyruq \quad berish \quad guruhi\},$$

bunda P_1- jo’natish buyruqlari to’plami,

P_2- arifmetik amallar buyruqlari to’plami,

P_3- mantiqiy amallar buyruqlari to’plami....

3) $C = \{\{a\}, \{b, \ c\}, \{e, \ f, \ g\}\}$ va $E = \{b, \ c\}$ bo’lsa, $E \not\subset C$ bo’ladi, chunki bu holda E to’plamning o’zi C to’plamlar oilasining elementi bo’ladi.

A to’plamning barcha xos va xosmas qism to’plamlaridan tuzilgan to’plamga **Bul to’plami** deyiladi va 2^A kabi belgilanadi.

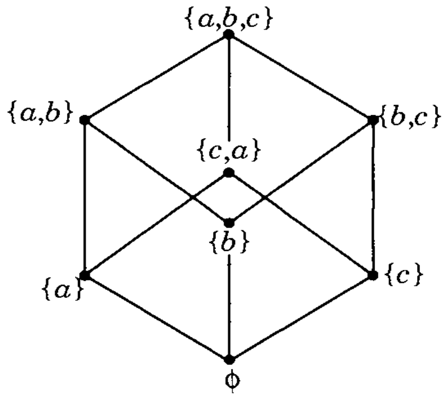
Tasdiq. Agar to’plam chekli bo’lib, n ta elementdan iborat bo’lsa, u holda bu to’plamning barcha qism to’plamlari soni 2^n ga teng.

Misol. $A = \{3, \ 5, \ 6\}$ ning barcha qism to’plamlarini yozamiz:

$$A_1 = \{3\}, \quad A_4 = \{3, \ 5\}, \quad A_7 = \{3, \ 5, \ 6\},$$
$$A_2 = \{5\}, \quad A_5 = \{3, \ 6\}, \quad A_8 = \{\varnothing\}.$$
$$A_3 = \{6\}, \quad A_6 = \{5, \ 6\},$$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ lar A to’plamning xos qism to’plamlari, A_7, A_8 lar esa xosmas qism to’plamlaridir, $2^A = \{\{3\}, \{5\}, \{6\}, \{3;5\}, \{3;6\}, \{5;6\}, \{3;5;6\}, \{\varnothing\}\}$ Bul to'plami hisoblanadi, demak 3 ta elementdan iborat to'plamning $2^3=8$ ta qism to'plami mavjud.

Misol. $A=\{a,\ b,\ c\}$ to'plamning qism to'plamlarini nemis matematigi **Gelmut Xasse (1898-1979)** quyidagi diagramma shaklida ifodalagan:



Misol. Agar A to'plam S to'plamning qism to'plami va $s \in S$ bo'lsa, u holda $A \cup \{s\}$ ham S to'plamning qism to'plami bo'ladi. Shu shart asosida S to'plamning barcha qism to'plamlarini aniqlaydigan algoritm keltirilgan: [2]

```
Algorithm subsets(S)
(* This algorithm finds the power set of a set S with n elements
   s1, s2, ..., sn. Sj denotes the jth element in the power set. *)
   Begin (* subsets *)
     power set ← {Ø}      (* initialize power set *)
     numsubsets ← 1 (* initialize the number of subsets *)
     for i = 1 to n do (* si denotes the ith element in S *)
     begin (* for *)
       j ← 1               (* j-th element in P(S) *)
       temp ← numsubsets (* temp is a temporary variable*)
       while j ≤ temp do  (* construct a new subset *)
       begin (* while *)
         add Sj ∪ {si} to the power set
         j ← j + 1
         numsubsets ← numsubsets + 1
       endwhile
     endfor
   End (* subsets *)
```

[2] **Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, 264-p.**

Nazorat uchun savollar:

1. Bul to’plami qanday tuziladi?
2. Ixtiyoriy A to’plam uchun $A \subseteq A$ o’rinli bo’lishini ko’rsating.
3. To’plamlar oilasi deganda nimani tushunasiz?
4. To’plamlar qachon teng deyiladi?
5. Ixtiyoriy A, B, C to’plamlar uchun $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo’lsa, u holda $A \subseteq C$ o’rinli ekanligini isbotlang.
6. Ixtiyoriy A, B, C to’plamlar uchun $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo’lsa, u holda $A \subseteq C$ o’rinli ekanligini isbotlang.

MISOL VA MASALALAR

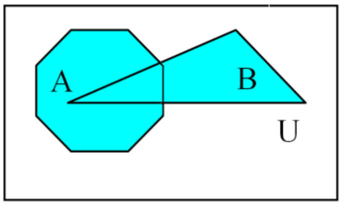
Quyidagi to’plamlarning qism to’plamlarini va Bul to’plamini tuzing:

a) $A = \{1;3;4;5\}$;
b) $B = \{a;b;c;d\}$;
v) $C = \{n: n \in N,\ 1 \le n < 4\}$.
g) $A = \{x:\ x \in Z,\ 16 \le x \le 23\}$;
d) $B = \{x:\ x \in \mathrm{Z},\ \mathrm{x}^2 < 18\}$;
e) $C = \{x:\ x \in N,\ -6 \le x \le 3\}$;
k) $D = \{x:\ x \in N,\ \mathrm{x}^2 < 36\}$;

1.3. To’plamlar ustida amallar

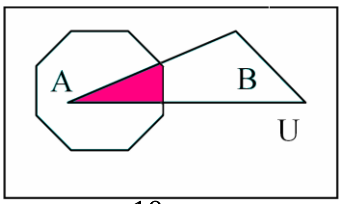
Agar qaralayotgan to’plamlarning barchasi biror U to’plamning qism to’plamlaridan iborat bo’lsa, U to’plamga **universal to’plam** yoki **universum** deyiladi.

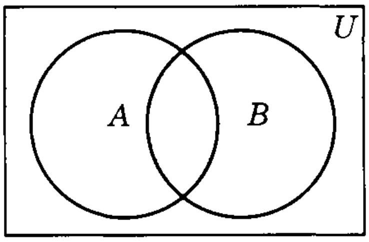
A va B to’plamlarning **birlashmasi** $A \cup B$ deb, bu to’plamlarning hech bo’lmaganda bittasiga tegishli bo’lgan elementlardan iborat to’plamga aytiladi.



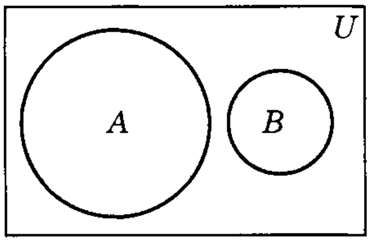
Misol. A={1;3;5} va B={4;5;6} to’plamlar berilgan bo’lsin. U holda $A \cup B$={1;3;4;5;6} bo’ladi.

A va B to’plamlarning **kesishmasi** $A \cap B$ deb, ham A to’plamga, ham B to’plamga tegishli elementlardan iborat to’plamga aytiladi.

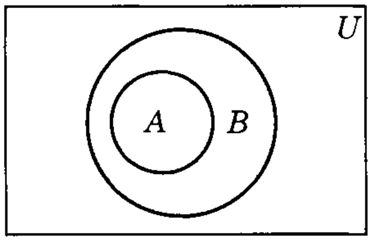




$A \cap B$



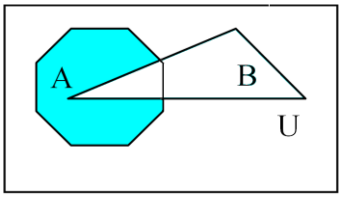
$A \cap B = \varnothing$



$A \cap B = A$

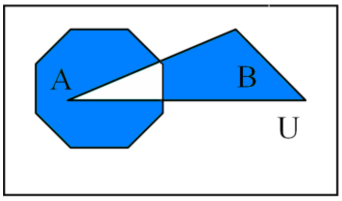
Misol. $A=\{1;3;5\}$ va $B=\{4;5;6\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda $A \cap B=\{5\}$ bo'ladi.

A to'plamdan B to'plamning **ayirmasi** $A \setminus B$ deb, A ning B ga tegishli bo'lmagan elementlaridan iborat to'plamga aytiladi.



Misol. $A=\{1;3;5\}$ va $B=\{4;5;6\}$ to'plamlar uchun $A \setminus B=\{1;3\}$ va $B \setminus A=\{4;6\}$ o'rinli.

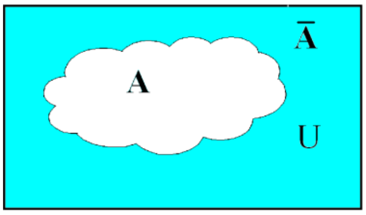
A va B to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** $A \Delta B$ deb, A to'plamning B to'plamga, B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan iborat to'plamga aytiladi: $A \Delta B = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Misol. $A=\{1;3;5\}$ va $B=\{4;5;6\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. $A \setminus B=\{1;3\}$ va $B \setminus A=\{4;6\}$ bo'lsa, simmetrik ayirmasi $A \Delta B=\{1;3;4;6\}$ bo'ladi.

U to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan tuzilgan $\overline{A}$ to'plamga A to'plamning **to'ldiruvchisi** deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{\exists x : x \in U, x \notin A\}$$



Misol. U – haqiqiy sonlar to'plami va A - ratsional sonlar to'plami bo'lsa, u holda $\overline{A}$ irratsional sonlar to'plami bo'ladi.

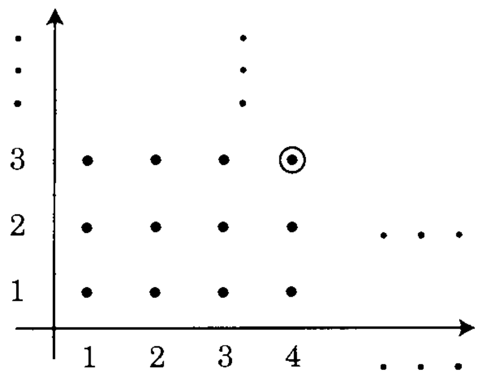
Tarixiy ma'lumot: Rene Dekart (1596-1650) *Frantsiyaning Tour shahrida tug'ilgan. 8 yoshida uni La Flesh katoliklar maktabiga berishadi, salomatligi yaxshi bo'lmagani uchun Dekart yotgan holida karavotlarning joylashuvi haqida xayol surardi. 1612 yilda oilasi bilan Parijga ko'chib o'tishadi. Shu yerda qisqa muddatda matematikani o'rganadi. 5 yil ichida harbiy mansabi taqozosi bilan Yevropani kezib chiqadi. So'ng u Parijga qaytib keladi va u yerda matematika, falsafa fanlarini o'rganadi. Xizmat vazifasi tufayli Gollandiyaga o'tkazilgandan keyin 20 yil davomida bir nechta kitob yozadi. Uning 1637 yildagi kitobi analitik geometriyaga bag'ishlangan. 1649 yilda Dekart Qirolicha Kristina taklifiga ko'ra Shvetsiyaga ko'chib keladi. O'sha yerda og'ir shamollash tufayli olamdan o'tadi.*[3]

A va B to'plamlarning **dekart ko'paytmasi** $A\times B$ deb, barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi va

$$A\times B=\{<a_i,b_j>, a_i\in A, b_j\in B\}$$

kabi belgilanadi.

Misol. $A=\{1,2,3,4\}$ va $B=\{1,2,3\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmalarini topishda quyidagi chizmani hosil qilish mumkin:



Misol. $A=\{a_1,a_2\}$ va $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmalarini topish:

$$A\times B=\{(a_1,b_1);(a_1,b_2);(a_1,b_3);(a_2,b_1);(a_2,b_2);(a_2,b_3)\};$$

$$B\times A=\{(b_1,a_1);(b_1,a_2);(b_2,a_1);(b_2,a_2);(b_3,a_1);(b_3,a_2)\}.$$

[3] Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, 87-p.

$A_1, A_2, ..., A_n$ n ta to'plamning **dekart ko'paytmasi** deb,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1; a_2; ...; a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

ko'rinishidagi to'plamga aytiladi.

$A^n = A \times A \times ... \times A$ to'plamga A to'plamning **dekart n-darajasi,** $A^2 = A \times A$ to'plamga **dekart kvadrat** deyiladi.

Teorema 1. A, B, C - ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. U holda quyidagi tengliklar o'rinli:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

v) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Teorema 2. Agar A to'plam m ta, B to'plam n ta elementdan tashkil topgan bo'lsa, u holda ularning $A \times B$ dekart ko'paytmasi $m \times n$ ta elementdan iborat bo'ladi.

$B=\{0;1\}$ to'plam uchun B^n to'plam uzunligi n ga teng 0 va 1 lardan iborat to'plam bo'ladi. Ularni dasturlash tilida n uzunlikdagi **"bit qatori"** deyiladi.

Chekli to'plamlarda amallarni modellashtirish uchun "bit qatori" qanday qo'llaniladi?

Aytaylik, $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ bo'lsin. Agar $A \subset S$ bo'lsa, u holda A to'plamga n-bit qatori $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ni mos qo'yamiz, bunda $s_i \in A$ bo'lsa, $b_i = 1$ bo'ladi. Aksincha, agar $s_i \notin A$ bo'lsa, $b_i = 0$ bo'ladi. Bunday bit qatoriga A **qism to'plamning xarakteristik vektori** deyiladi.

Misol. Universal to'plam $U = \{1;2;3;4;5\}$ va $A = \{1;3;5\}$, $B = \{3;4\}$ bo'lsin. 1) A va B to'plamlarning xarakteristik vektorlarini toping.

2) $A \cup B$; $A \cap B$; $\overline{A}$ to'plamlarning xarakteristik vektorlarini toping.

Yechilishi: A to'plamning xarakteristik vektori $a = (1;0;1;0;1)$, B to'plamning xarakteristik vektori $b = (0;0;1;1;0)$ bo'ladi.

$A \cup B$ esa $a \cup b = (1;0;1;0;1) \cup (0;0;1;1;0) = (1;0;1;1;1)$

$A \cap B$ to'plam uchun $a \cap b = (1;0;1;0;1) \cap (0;0;1;1;0) = (0;0;1;0;0)$

$\overline{A}$ ning xarakteristik vektori $\overline{a} = (0;1;0;1;0)$.

Demak, $A \cup B = \{1;3;4;5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $\overline{A} = \{2;4\}$ qism to'plamlar hosil bo'ladi.

Misol. Jadvalda $\{x, y, z\}$qism to'plamning bit qatori tartibi berilgan. Quyidagi algoritmda $\{z\}$ va $\{y, z\}$dan keyingi bit qatorini topish algoritmi keltirilgan:

Subset	Bit String
Ø	000
{x}	001
{y}	010
{x, y}	011
{z}	100
{x, z}	101
{y, z}	110
{x, y, z}	111

```
Algorithm next-subset (b_{n-1}b_{n-2} ... b_0)
(* This algorithm finds the bit string of the subset that
   follows a given subset of an n-element set S. *)
Begin (* next-subset *)
  find the first 0 from the right
  change it to 1
  replace the bits to its right with 0's
End (* next-subset *)
```

Ushbu algoritmda $S = \{x, y, z\}$ to'plamning barcha qism to'plamlari bit qatorini topish algoritmi keltirilgan:

```
Algorithm subsets (S)
(* Using the next-subset algorithm, this algorithm finds the bit
   representations of all subsets of an n-element set S. *)
Begin (* subsets *)
  b_{n-1}b_{n-2} ... b_0 ← 00...0  (* initialize string *)
  done ← false (* boolean flag *)
  while not done do
  begin (* while *)
    find the subset following b_{n-1}b_{n-2} ... b_0.

            if every bit b_i = 1 then (* terminate the loop *)
              done ← true
          endwhile
        End (* subsets *)
```

Bit qatorini qo'shish va ko'paytirish amallarini ustun shaklida quyidagicha tushuntirish mumkin:

$a = (1;0;1;1;0)$ va $b = (1;0;1;1)$ vektorlarni qo'shish:

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
+ \quad 1\ 0\ 1\ 1 \\
\hline
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1
\end{array}
$$

$a=(1;0;1;1)$ va $b=(1;0;1)$ vektorlarni ko'paytirish:

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1 \\
\times \quad 1\ 0\ 1 \\
\hline
1\ 0\ 1\ 1 \\
0\ 0\ 0\ 0\ \ \ \\
1\ 0\ 1\ 1\ \ \ \ \ \ \\
\hline
1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Ikkilik sistemasidagi ikkita sonni ko'paytirish algoritmi quyida keltirilgan:

```
Algorithm binary multiplication (x, y, p)
(* This algorithm computes the product p = (p_{m+n}p_{m+n-1}...p_0)_two
   of the binary numbers x = (x_m x_{m-1}...x_1 x_0)_two and
   y = (y_n y_{n-1}...y_1 y_0)_two, using shifting. *)
  Begin (* algorithm *)
    for j = 0 to n do
      begin (* for *)
        multiply each bit x_i by y_j
        shift the resulting binary word to the left
        by j columns
        w_j ← resulting binary word
      endfor
    add the partial products w_j
    p ← resulting sum
  End (* algorithm *)
```

1.4. Mustaqil to'plamlar va qoplamalar

To'plamni qism to'plamlarga ajratish amali – to'plamlar ustida amallarning eng ko'p uchraydigan turi hisoblanadi.

Misol 1) Laboratoriya qurilmalari to'plami astsillograf, voltmetr, generator va hokazolarga ajratiladi.

2) Natural sonlar to'plamini toq va juft sonlar to'plamlariga ajratish mumkin.

Aytaylik, $S=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ biror to'plamlar oilasi va qandaydir elementlar to'plami S' berilgan bo'lsin.

S to'plamlar oilasi S' **to'plamning bo'lagi** deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) S to'plamlar oilasidan olingan ixtiyoriy A_i to'plam $S^{/}$ to'plamning qism to'plami bo'lsa, ya'ni $\forall A_i : A_i \in S \to A_i \subseteq S^{|}$;

2) S to'plamlar oilasidan olingan ixtiyoriy A_i va A_j to'plamlar o'zaro kesishmaydigan to'plamlar bo'lsa, ya'ni

$$\forall A_i \in S, \forall A_j \in S : A_i \neq A_j \to A_i \cap A_j = \varnothing;$$

3) Bo'laklarning birlashmasi $S^{/}$ to'plamni hosil qilsa, ya'ni

$$\bigcup_{A_i \in M} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S^{|};$$

A_i - to'plamlar **bo'laklar sinflari** deyiladi.

Misol. $S^{/} = \{a;b;c;d\}$ to'plam uchun $S_1 = \{\{a;b\};\{c;d\}\}$ va $S_2 = \{\{a\};\{b;c\};\{d\}\}$ to'plamlar oilasini hosil qilish mumkin. U holda $S^{|} = S_1 \cup S_2$ bo'ladi, bunda S_1 uchun $A_1 = \{a;b\}$, $A_2 = \{c;d\}$ va S_2 uchun $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b;c\}$, $A_3 = \{d\}$ bo'laklar bo'ladi.

$\Im = \{E_i\}_{i \in I}$ biror M to'plamning qism to'plamlari $E_i \subset M$ oilasi bo'lsin. $\Im$ oila M to'plamning **qoplamasi** deyiladi, agar M ning har bir elementi E_i ning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'lsa, ya'ni

$$\forall x \in M (\exists i \in I (x \in E_i)) .$$

Agar $\Im$ oilaning elementlari o'zaro kesishmasa, ya'ni M ning har bir elementi bittadan ortiq bo'lmagan E_i to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni

$$\forall i, j \in I (i \neq j \Rightarrow E_i \bigcap E_j = \varnothing)$$

unga **diz'yunktiv oila** deyiladi

Misol. $M := \{1;2;3\}$ to'plam uchun $\{\{1;2\};\{2;3\},\{3;1\}\}$– qoplama bo'ladi. $\{\{1\};\{2\},\{3\}\}$– bo'lak ham bo'ladi, qoplama ham bo'ladi. $\{\{1\};\{2\}\}$ – diz'yunktiv oila bo'ladi, qoplama ham, bo'lak ham bo'la olmaydi.

1.5. Eyler-Venn diagrammasi asosida to'plam ko'rinishini tiklash

To'plamlarni tekislikda shakllar yordamida tasvirlash XIII asrda boshlangan. Birinchi "falsafiy kompyuter" ixtirochisi R.Lulliy (1235-1315) aylanalar yordamida sonlar, harflar va ranglar ustida amallar bajargan. Keyinchalik L.Eyler va J.Venn ishlarida ham masalalarni chizmalar yordamida yechishga urinishlarni ko'ramiz.

Tarixiy ma'lumot: Leonard Eyler (1707-1783) *Shvetsariyaning Beyzel shahrida tug'ilgan. Uning otasi ruhoniy bo'lgan va Eylerni ham ruhoniy bo'lishga undagan. Eylerning maqsadi boshqa kasb egasi bo'lish edi, lekin u otasining hoxishiga qarshi chiqmaydi va din ilmini o'rganish uchun Beyzel universitetiga o'qishga kiradi. Universitetda o'qish mobaynida Eyler matematika bilan ham shug'ullanadi va mashhur matematik Iogann Bernulli (1667-1748) nazariga tushadi. Bernulli Eylerning otasi bilan suhbatlashib, o'g'lining buyuk matematik bo'lishi mumkinligiga ishontiradi va ilmiy tadqiqotlarini matematika sohasida olib borishiga ko'ndiradi. 19 yoshida Eyler birinchi maqolasini e'lon qiladi. Ammo bu maqolasi 1727 yildagi Parij Akademiyasi mukofotiga sazovor bo'lmagan bo'lsa-da, keyinchalik Eyler bu mukofotni 12 marta yutib chiqqan. Uning aqliy xotirasi juda kuchli bo'lgan. Joy va makon tanlamasdan faqat ilm bilan shug'ullangan.*

Tarixiy ma'lumot: Jon Venn (1834-1923) *Angliyada tug'ilgan. O'rta maktabni tugatib, 1853 yilda Kembridjdagi kollejga o'qishga kiradi va 3 yilda diplom oladi. 1859 yildan Venn cherkovda xizmat qiladi, biroz vaqtdan keyin o'zi o'qigan kollejda axloqiy fanlardan ma'ruzalar o'qiy boshlaydi. 1883 yildan ruhoniylikni tashlaydi va shu yili Londonda Qirollik jamiyatiga qabul qilinadi. Venn Bulning mantiqiy ilmiga qiziqib qoladi va 1881 yilda Bul g'oyalaridagi va belgilashlaridagi nomutanosiblik hamda tushunmovchiliklarni ochib beradigan, "Mantiqiy belgilar" deb nomlangan shox asarini yozadi. Asarda Leybnits tomonidan yaratilgan va keyinchalik Eyler tomonidan rivojlantirilgan usuldan, geometrik diagrammalardan foydalanadi. Venn tadqiqot sohasini tasvirlash uchun to'g'ri to'rtburchakni kiritadi.*[4]

1.3 paragrafda kiritilgan birlashma, kesishma, ayirma va simmetrik ayirma amallari yordamida ayrim to'plamlarni boshqalari orqali ifodalash mumkin, buning uchun amallarni bajarish tartibi mavjud: birinchi to'ldiruvchi amali, so'ngra kesishma amali, undan

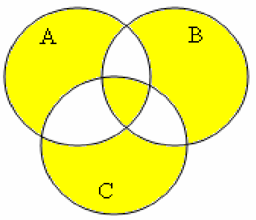
[4] **Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, 72-p.**

so’ng yig’indi va oxirida ayirma amallari bajariladi. Bu tartibni o’zgartirish uchun qavslardan foydalaniladi.

To’plamni boshqa to’plamlar orqali amallar va qavslardan foydalangan holda ifodalash **to’plamning analitik ifodasi** deyiladi. 1.3 paragrafda to’plamning analitik ifodasi berilgan bo’lsa, uning diagrammasini chizish kerak edi, endi teskari masala, ya’ni berilgan diagrammaga ko’ra to’plamning analitik ifodasini aniqlash kerak.

Misol. Eyler-Venn diagrammasidagi shtrixlangan sohani bitta universumga tegishli bo’lgan A, B, C to’plamlar orqali ifodalang.

Yechilishi:

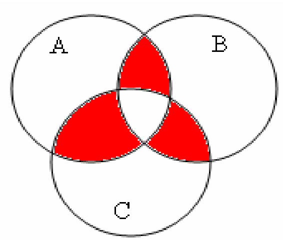


1-usul:

$(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$

2-usul: $A \Delta B \Delta C$

Misol. Shtrixlangan sohani bitta universumga tegishli bo’lgan A, B, C to’plamlar orqali ifodalang.



Yechilishi: 1-usul: $(A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \cup (B \cap C \setminus A)$

2-usul: $\overline{A \Delta B \Delta C}$

Nazorat uchun savollar:

1. To’plamlar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
2. Dekart ko’paytmani hisoblash algoritmini ayting.
3. To’plamlarning birlashmasi deb nimaga aytiladi?
4. To’plamlarning kesishmasi deb nimaga aytiladi?
5. To’plamlarning ayirmasi deb nimaga aytiladi?
6. To’plamlarning simmetrik ayirmasi deb nimaga aytiladi?

MISOL VA MASALALAR

1. “Filologiya” va “filosofiya” so’zlaridagi harflar to’plamining birlashmasi hamda kesishmasini toping.

2. “Matematika” va “grammatika” so’zlaridagi harflar to’plamining birlashmasi hamda kesishmasini toping.

3. $U=\{1,2,3,4,a,b,c,d,e\}$ universal to’plamda A va B to’plamlar berilgan bo’lsin. $A\cup B$; $A\cap B$; $A\oplus B$; $A\times B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$ to’plamlarni toping va Eyler- Venn diagrammalarida tasvirlang.

a) $A=\{1,2,a,b,c\}$, $B=\{3,4,b,c,e\}$;

b) $A=\{1,3,4,a,c\}$, $B=\{3,b,c,e\}$;

v) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$;

g) $A=\{1,4,a,c,d,e\}$, $B=\{1,a,b,c,d\}$;

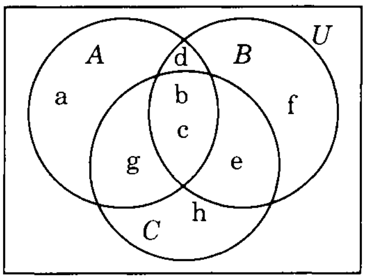
d) $A=\{3,4,a,b\}$, $B=\{1,2,3,4,a,b,c,d,e\}$.

4. $U=\{n,k,p,s,t,x,y,z\}$ universal to’plamda $A=\{n,k,p,s\}$, $B=\{p,s,t,y\}$ va $C=\{k,s,x,z\}$ to’plamlar berilgan bo’lsin. Quyidagi to’plamlarni toping:

a) $A\cup B$ b) $A\cap B$ s) $A\times B$

d) $\overline{A}$ e) $A\oplus B$ j) $\overline{A\cap B}$

5.Diagrammada berilgan A, B, C to’plamlarni va $A\cup B$; $A\cap B$; $A\oplus B$; $A\times B$; $A\cap C$, $B\cup C$ toping.



6. Universal to’plam $U=\{1;2;3;4;5;6\}$ va $A=\{1;2;3;5\}$, $B=\{3;4;5\}$ bo’lsin. Quyidagi to’plamlarning xarakteristik vektorlarini toping:

a) $A\cup\overline{B}$ s) $A\cap B$ b) $A\Delta B$ d) $\overline{A\cap B}$

Hosil bo’lgan to’plamlar elementlarini yozing.

7. $A\times B\times C$ to’plamlarning dekart ko’paytmasini toping, bunda

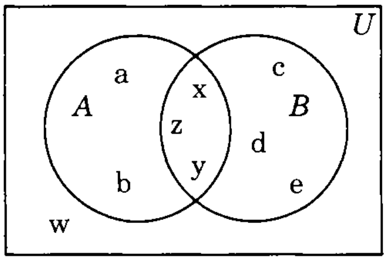
a) $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$, $C=\{c_1,c_2\}$;

b) $A=\{1,2\}$, $B=\{o\}$, $C=\{!,\$\}$;

v) $A=\{3,4\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{*\}$;

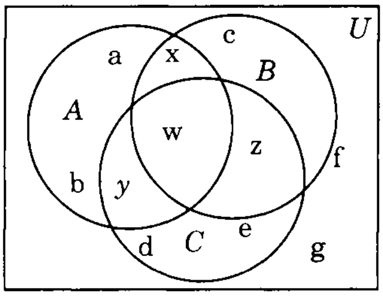
8. Diagrammada berilgan A, B to'plamlarni va

$A\cup B$; $A\cap B$; $A\oplus B$; $A\times B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$ larni toping.



9. Diagrammada berilgan A, B, C to'plamlarni va

$A\cup B$; $A\cap B$; $A\oplus B$; $A\times B$; $A\cap C$, $B\cup C$ larni toping.



Test savollari:

1. A va B to'plamlarning **birlashmasi** uchun qaysi ifoda to'g'ri?

A) $A\cup B=\{x;\ x\in A$ yoki $x\in B\}$; C) $A\cup B=\{x;\ x\in A,\ x\notin B\}$;

B) $A\cup B=\{x;\ x\in A$ va $x\in B\}$; D) $A\cup B=\{x;\ x\notin A,\ x\in B\}$.

2. A va B to'plamlarning **kesishmasi** uchun qaysi ifoda to'g'ri?

A) $A\cap B=\{x;\ x\in A$ yoki $x\in B\}$; C) $A\cap B=\{x;\ x\in A,\ x\notin B\}$;

B) $A\cap B=\{x;\ x\in A$ va $x\in B\}$; D) $A\cap B=\{x;\ x\notin A,\ x\in B\}$.

3. A va B to'plamlarning **ayirmasi** uchun analitik ifodani ko'rsating.

A) $A\setminus B=\{x;\ x\in A$ yoki $x\in B\}$; C) $A\setminus B=\{x;\ x\in A,\ x\notin B\}$;

B) $A\setminus B=\{x;\ x\in A$ va $x\in B\}$; D) $A\setminus B=\{x;\ x\notin A,\ x\in B\}$.

4. A va B to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** uchun qaysi ifoda to'g'ri?

A) $A\Delta B=\{x; x\in A$ yoki $x\in B\}$; C) $A\Delta B=\{x; x\in A$ va $x\in B\}$;

B) $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; D) $A\Delta B=\{x; x\in A, x\notin B\}$.

5. $B(X)=\{A;\ A\subset X\}$ yozuv qanday ma’noni beradi? Bu yerda X – biror to’plam.

A) $B(X)$-to’plamlar sistemasi deb ataladi;

B) $B(X)$-bo’sh to’plamni ifodalaydi;

C) $B(X)$-to’plamlar kesishmasi deb ataladi;

D) $B(X)$-to’plamlar ayirmasi deb ataladi.

6. A = {1;2;3} va B={3;4} to’plamlarning dekart ko’paytmasi nechta elementdan iborat?

A) 10 B) 15 C) 30 D) 6

7. Agar A –barcha to’g’ri to’rtburchaklar to’plami, B–romblar to’plami bo’lsa, u holda $A\cap B$ nimaga teng?

A) kvadrat; B) romb; C) uchburchak; D) $\varnothing$.

8. A={1, 2} va V={3, 4} to’plamlarning Dekart ko’paytmasini toping.

A) {1,2,3,4}; B) {(1,2),(3,4)};

C) {(1,3),(2,4)}; D) {(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)}.

9. A={12 sonining bo’luvchilari} to’plamni ro’yxat tarzida bering.

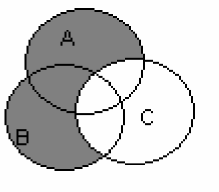
A) {1,2,3,6}; B) {12,14,36,…};

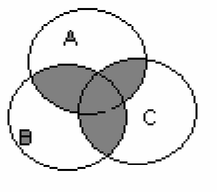
C) {1,2,3,4,6,12}; D) {1;12}.

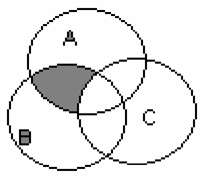
10. $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ universumda $X=\{a,b,c,d\}$ va $Y=\{b,c,d,e\}$ to’plamlar berilgan bo’lsa, $\overline{X}\Delta Y$ ni toping.

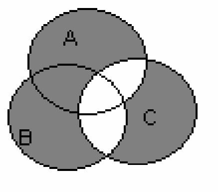
A) $\{a,f,g,h\}$ B) $\{g,h\}$ C) $\{f,h\}$ D) $\{b,c,d,f,g,h\}$

11. $(A\cup B)\setminus C$ to’plamga qaysi diagramma mos keladi?

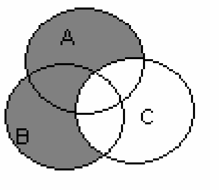
A) 

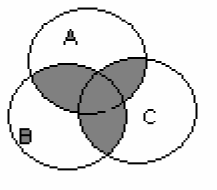
B) 

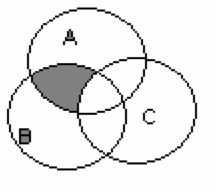
S) 

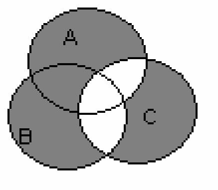
D) 

12. A∩B\C to’plamga qaysi diagramma mos keladi?

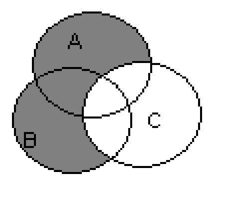
A) 

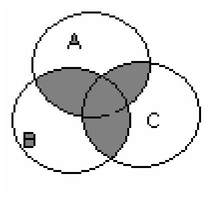
B) 

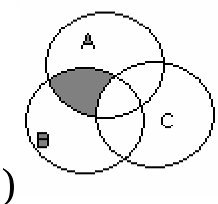
S) 

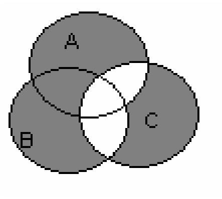
D) 

13. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$ to’plamga qaysi diagramma mos keladi?

A) 

B) 

S) 

D) 

1.6. To’plamlar ustida amallarning asosiy xossalari

U universal to’plamning A, B, C qism to’plamlari uchun quyidagi xossalar o’rinli:

Birlashma va kesishma amallarining kommutativlik xossasi:

$1^0)$ $A\cup B=B\cup A$

$2^0)$ $A\cap B=B\cap A$

1^0 –xossaning isboti: $x\in A\cup B$ bo’lsa, u holda $x\in A$ va $x\in B$ bo’ladi. Shuningdek, $x\in B\cup x\in A$ bo’lsa, $x\in B\cup A$ kelib chiqadi. Bundan $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in B\cup A$ hosil bo’ladi. Bularni umumlashtirilsa, $A\cup B=B\cup A$ kommutativlik xossasi isbotlanadi.

Birlashma va kesishma amallarining assotsiativlik xossasi:

$3^0)$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$4^0)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

Birlashma va kesishma amallarining bir-biriga nisbatan distributivlik xossasi: $5^0)$ $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$6^0)$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

Yutilish qonunlari: $7^0)$ $A\cap(A\cup B)=A$

$8^0)$ $A\cup(A\cap B)=A$

De-Morgan qonunlari (Shotlandiyalik matematik, mantiqiy munosabatlar asoschisi O. De-Morgan (1806-1871))**:**

$9^0)$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$10^0)$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

9^0 – xossaning isboti:

$$\overline{A\cap B}=\{x: x\notin(A\cap B)\}=\{x:\overline{x\in(A\cap B)}\}=\{x:\overline{((x\in A)\cap(x\in B))}\};$$

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x:(x\notin A)\cup(x\notin B)\}=\{x:\overline{x\in A}\cup\overline{x\in B}\}=\{x:\overline{((x\in A)\cap(x\in B))}\}.$$

Bo’sh va universal to’plam qonunlari:

$11^0)$ $A\cap A=A$ $12^0)$ $A\cup U=U$ $13^0)$ $A\cup\overline{A}=U$

$14^0)$ $A\cap\varnothing=\varnothing$ $15^0)$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$ $16^0)$ $\overline{U}=\varnothing$

17^0) $A\cup\varnothing = A$ 18^0) $\overline{\varnothing} = U$ 19^0) $A\cap U = A$

20^0) $A\setminus A = \varnothing$

Ayirishdan qutilish qonuni: 21^0) $A\setminus B = A\cap\overline{B}$

Ikkilangan rad etish qonuni: 22^0) $\overline{\overline{A}} = A$

To'plamlar ustida amallarning xossalari juft – juft yozilgan va har ikkinchisi birinchi xossadagi amalni o'zgartirish bilan hosil qilingan, masalan, $\cup$ amali $\cap$ ga, $\varnothing$ to'plam U ga almashtirib hosil qilingan. Xossalarning bunday mosligiga **ikkiyoqlamalik printsipi** deyiladi.

Tarixiy ma'lumot: Avgust De Morgan (1806-1871) *Hindistonning Maduray shahrida tug'ilgan, uning otasi hind armiyasida polkovnik bo'lgan. De Morgan 7 oylik bo'lganda oilasini Angliyaga ko'chirishadi. U xususiy maktabda lotin, grek va yevrey tillarini o'rgangan, matematikaga qiziqqan. 1827 yilda Kembridj universitetini tugatib, tibbiyot yoki huquq yo'nalishidan ketishi kerak edi, lekin De Morgan matematikani tanladi. U 1828 yilda London universitetiga ishga kiradi. 3 yildan keyin uni xech qanday tushuntirish bermasdan ishdan bo'shatishadi. Bundan jahli chiqqan De Morgan Kembridjga qaytadi. 1836 yilda Triniti-Kollejiga o'tib, shu yerda 1866 yilgacha faoliyat yuritadi. Astronomik jamiyat a'zosi, London matematiklar jamiyatining asoschisi bo'lgan De Morgan XIX asr matematika ilmiga salmoqli hissa qo'shdi. U matematika fanini o'qitish metodlarini ishlab chiqdi. 15 dan ortiq turdagi jurnallarda 1000 dan ortiq maqolalar nashr qildi, bir qancha darsliklar yaratdi. U asosan matematik analiz va mantiqdan ilmiy izlanishlar olib bordi. Shuningdek, matematika tarixi bilan ham qiziqdi. I.Nyuton va E.Gall biografiyasini yozadi. Vafotidan keyin 1882 yilda De Morganning rafiqasi uning biografiyasini yozadi.*

1.7. Murakkab ifodalarni soddalashtirish

To'plamlar ustida amallarning asosiy xossalariga asoslanib, to'plamlarning murakkab ifodalarini isbotlash yoki soddalashtirish mumkin.

Misol. $A\Delta B = (A\cup B)\cap\overline{A\cap B}$ tenglikni isbotlaymiz.

Tenglikning chap qismini soddalashtiramiz:

$$(A\cup B)\cap\overline{A\cap B} = (9^0\text{-xossa}) = (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) = (2^0\text{-xossa})$$

$$= (\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B) = (5^0\text{-xossa})$$

$$= \left(\overline{A}\cap(A\cup B)\right)\cup\left(\overline{B}\cap(A\cup B)\right) = (\ 5^0\text{-xossa})$$
$$= \left((\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)\right)\cup\left((\overline{B}\cap A)\cup(\overline{B}\cap B)\right) = (15^0\text{-xossa})$$
$$= \left(\varnothing\cup(B\cap\overline{A})\right)\cup\left((A\cap\overline{B})\cup\varnothing\right) =$$
$$= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = A\Delta B.$$

Misol. $\overline{A\cup(A\setminus\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{A}\setminus\overline{\mathrm{B}})}$ ifodani soddalashtiring.

$$\overline{A\cup(A\setminus\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{A}\setminus\overline{\mathrm{B}})} = (21^0\text{xossa}) = \overline{A\cup(A\cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{A}\cap\overline{\overline{B}})} =$$
$$(22^0\text{-xossa}) = \overline{A\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)} = (10^0\text{-xossa}) =$$
$$= \overline{A}\cap\overline{A\cap B}\cap\overline{\overline{A}\cap B} = (9^0\text{-xossa}) =$$
$$[\overline{A}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\cap(\overline{\overline{A}}\cup\overline{B}) = (7^0\text{-xossa}) =$$
$$= \overline{A}\cap(A\cup\overline{B}) = (5^0\text{-xossa}) =$$
$$= \left(\overline{A}\cap A\right)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}) = \overline{A}\cap\overline{B}.$$

Misol. Berilgan ifodani soddalashtiramiz:

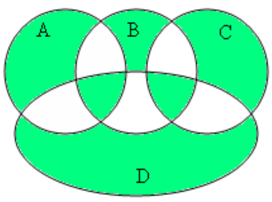
$$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}) = (A\cap\overline{B})\cup\left[(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\right] =$$
$$= (A\cap\overline{B})\cup\left[\overline{A}\cap(B\cup\overline{B})\right] = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap U) =$$
$$= (A\cap\overline{B})\cup\overline{A} = (A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A}) =$$
$$= U\cap(\overline{B}\cup\overline{A}) = \overline{B}\cup\overline{A}.$$

Nazorat uchun savollar:

1. Kommutativlik xossasini keltiring va isbotlang.
2. Distributivlik xossasini keltiring va isbotlang.
3. Assotsiativlik xossasini keltiring va isbotlang.
4. Yutilish xossasini isbotlang.
5. De-Morgan xossasini Eyler-Venn diagrammasidan foydalanib isbotlang.
6. 0 va 1 qonunlarini ayting.

MISOL VA MASALALAR

1) Eyler-Venn diagrammasidagi shtrixlangan sohani bitta universumga tegishli bo'lgan A, B, C, D to'plamlar orqali ifodalang.



2. Murakkab ifodalarni soddalashtiring:

a) $(A\cup B\cap\overline{A})\cap(\overline{A}\cup A\cap B)$;

b) $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup A\cap B\cap\overline{C}$;

∂) $\overline{A\cap\overline{B}\cup C}\cap\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cap B}$;

g) $\overline{A}\cap B\cap C\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup A\cap B\cap C$;

d) $\overline{A}\cap B\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}$;

e) $\overline{X\cup Y}\cap\overline{X\cap Y}\cup\overline{\overline{X}\cup Y}$;

n) $(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cup B\cup C)$;

m) $(\overline{A}\cup B\cup\overline{C})\cap(\overline{\overline{A}\cup B\cup C})$;

l) $(\overline{A}\cap\overline{B}\cup C)\cap(\overline{\overline{A}\cup B\cap C})$.

k) $B\cap C\cup\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap\overline{C}$.

1.8. Chekli to'plam quvvati

Chekli to'plamning asosiy xarakteristikasi bu uning elementlari sonidir.

A chekli to'plamning elementlari soniga A **to'plamning tartibi** yoki **quvvati** deyiladi va $n(A)$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Misol. $A=\{a,b,c,d\}$ to'plamning quvvati $n(A)=4$;

$B=\{\varnothing\}$ bo'sh to'plamning quvvati $n(B)=0$.

Teorema 1. Ikkita to'plam birlashmasidan iborat to'plamning quvvati

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \quad \text{ga teng.}$$

Isboti: Haqiqatan ham, $A\cup B$ to'plam umumiy elementga ega bo'lgan $A\setminus B, A\cap B, B\setminus A$ qism to'plamlardan tashkil topgan, buni Eyler – Venn diagrammasida ko'rish mumkin. Bundan tashqari, $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ va $B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ tengliklar ham o'rinli.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $|A\setminus B|=m$, $|A\cap B|=n$, $|B\setminus A|=p$. U holda $|A|=m+n$, $|B|=n+p$ va bulardan quyidagini yozish mumkin:

$$|A\cup B|=m+n+p=(m+n)+(n+p)-n=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

Teorema isbotlandi.

Teorema 2. Uchta to'plam birlashmasidan iborat to'plamning quvvati

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$$

ga teng.

Isboti:

$$|A\cup B\cup C|=|A\cup(B\cup C)|=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|=$$

$$=|A|+|B\cup C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=$$

$$=|A|+(|B|+|C|-|B\cap C|)-(|A\cap B|+|A\cap C|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|)=$$
$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|.$$

Teorema isbotlandi.

Natija. Ixtiyoriy n ta $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \in U$ to'plamlar uchun ularning birlashmasidan iborat to'plam quvvatini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) =$$
$$=\sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{i\neq j=1}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k=1}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - ....(-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

Misol. Jami 63 nafar talabadan 16 kishi ingliz tilini, 37 kishi rus tilini va 5 kishi ikkala tilni ham o'rganmoqda. Nechta talaba bu fanlarni o'rganmayapti?

Yechilishi: A={ingliz tili fanini o'rganuvchilar},

B={rus tilini o'rganuvchilar},

$A\cap B$={ikkala tilni ham o'rganuvchilar} bo'lsin.

U holda $|A|=16,\ |B|=37,\ |A\cap B|=5.$ Yuqoridagi teoremaga asosan,

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=16+37-5=48.$$

Bundan, $63-48=15$ nafar talabaning nomlari keltirilgan fanlarga qatnashmayotganligi aniqlanadi.

Nazorat uchun savollar:

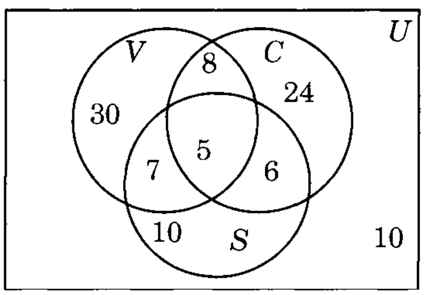
1. Chekli to'plam quvvati deb nimaga aytiladi?
2. Ikki to'plam yig'indisining quvvati qanday topiladi?
3. Uchta to'plam birlashmasidan iborat to'plamning quvvatini toping.

MISOL VA MASALALAR

1. Shahardagi 110 ta kandalotchilik sexlaridan 40 tasi A mahsulotni, 30 tasi B mahsulotni, 48 tasi C mahsulotni, 10 tasi A va B, 13 tasi B va C, 12 tasi A va C, 14 tasi faqat 2 xil mahsulot ishlab chiqarsa, ushbu mahsulotlarni ishlab chiqarmayotgan sexlar nechta?

2. 30 ta turistdan 19 tasi ingliz, 18 tasi nemis tilini biladi. Ulardan nechtasi faqat ingliz tilini biladi?

3. 42 turistdan 25 tasi ingliz, 28 tasi nemis tilini biladi. Ulardan nechtasi faqat nemis tilini, nechtasi faqat ingliz tilini, nechtasi ikkala tilni ham biladi?
4. Guruhda 40 talaba bo’lib, ulardan 25 nafari yigitlar, qolgani qizlar. Imtihonda ulardan 18 nafari “4”, 22 nafari “5” baho olgan. Agar qizlardan 9 nafari “5” baho olgan bo’lsa, “4” baho olgan yigitlar nechta?
5. Guruhdagi talabalardan 17 nafari voleybol, 16 nafari futbol, 18 nafari tennis bo’yicha to’garaklarga qatnashadi. Ulardan 5 nafari futbol va voleybol 7 nafari voleybol, tennis, 6 nafari futbol va tennis, 2 nafari esa 3 ta to’garakka ham qatnaydi. Guruhda nechta talaba bor?
6. Tumanda 32 ta fermer bo’lib, ular paxta, bug’doy va kartoshka yetishtiradi. Ulardan 26 nafari paxta, bug’doy yetishtirishi ma’lum bo’lsa, faqat kartoshka yetishtiradigan fermer nechta?
7. Potokda 100 talabadan 61 nafari ingliz tilini, 48 nafari frantsuz tilini, 56 kishi nemis tilini o’rganishadi. 24 kishi ingliz va frantsuz, 36 kishi ingliz va nemis, 30 kishi frantsuz va nemis tilini o’rganishadi. Faqat 2 tadan til o’rganayotganlar 24 kishi bo’lsa, umuman til o’rganmayotganlar nechta? Faqat bittadan til o’rganayotganlar nechta? Uchta tilni necha kishi o’rganyapti?
8. Oktyabr oyida 10 kun sovuq, 20 kun yomg’irli, 16 kun shamolli kun bo’ldi. Agar 2 kun faqat sovuq, 7 kun faqat yomgir, 5 kun faqat shamol, 4 kun sovuq, yomg’ir, shamolli kun bo’lgan bo’lsa, necha kun quyosh charaqlab turgan?
9. 1 dan 100 gacha sonlar ichida faqat 3 ga, faqat 4 ga, 3 ga va 4 ga bo’linmaydiganlari nechta?
10. 1 dan 100 gacha sonlar ichida nechta son 6 ga bo’linadi? Nechta son 3 ga bo’linmaydi? Nechta son 2 ga ham 3 ga ham bo’linmaydi?
11. 1 dan 100 gacha sonlar ichida nechta son 12 ga bo’linadi? Nechta son 4 ga ham, 3 ga ham bo’linmaydi?
12. V – vafli, C – pirog, S – tort yaxshi ko’radigan talabalar bo’lsa, vafli va tort, pirog va vafli, uchala pishiriqni ham yoqtiradigan, umuman pishiriq yoqtirmaydigan talabalar sonini aniqlang.



1.9. To’plamlar algebrasi

Agar to’plamning $\forall x_i \in M, \forall x_j \in M$ elementlari uchun $(x_i \alpha x_j) \in M$ shart bajarilsa, to’plam α amalga nisbatan **yopiq** deyiladi, α ga esa **algebraik amal** deyiladi.

Misol. 1) $N-$ natural sonlar to’plami yig’indi va ko’paytma amallariga nisbatan yopiq, chunki $\forall a \in N, \forall b \in N$ uchun $a+b \in N, a \cdot b \in N$ o’rinli.

2) Z – butun sonlar to’plami yig’indi, ayirma va ko’paytma amallariga nisbatan yopiqdir.

Bo’sh bo’lmagan qism to’plamlar oilasi U birlashma, kesishma va to’ldiruvchi amallariga nisbatan yopiq bo’lsa, bu tizimga **to’plamlar algebrasi** deyiladi.

Teorema. A va B ixtiyoriy to’plamlar bo’lsin. U holda birlashma va ayirma amallarini simmetrik ayirma va kesishma amallari yordamida ifodalash mumkin:

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B),$$

$$A \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \Delta (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Bunday yondoshuv matematikaning turli sohalarida o’z tadbiqini topdi va uning rivojlanishiga to’plamlar halqasi tushunchasi asos bo’ldi.

Agar bo’sh bo’lmagan C to’plamlar oilasi kesishma va simmetrik ayirma amallariga nisbatan yopiq bo’lsa, u holda C ga **to’plamlar halqasi** deyiladi, ya’ni $A, B \in C \Rightarrow \mathrm{A} \Delta \mathrm{B} \in \mathrm{C}$ va $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathrm{C}$ o’rinli bo’lsa.

To’plamlar halqasi assotsiativlik va kommutativlik xossalarini qanoatlantiradi. Bo’sh to’plam **halqaning noli** deyiladi.

Agar ixtiyoriy $A \in C$ uchun $A \cap E = A$ bo’lsa, u holda $E \in C$ to’plamga h**alqaning biri** deyiladi.

Halqalarda algebraik hisoblashlar oddiy arifmetik qoidalarga o’xshash amalga oshiriladi. Bunda “qo’shish” amali o’rniga “simmetrik ayirma” amali, “ko’paytma” amali o’rniga “kesishma” amali ishlatiladi.

To’plamlar algebrasi masalalarini Paskal dasturiy tili yordamida yechishni qarab chiqamiz:

Misol. Elementlari lotin alifbosining bosh va kichik harflaridan iborat to’plamni ekranga chiqaring.

Yechilishi:

```
var  zn: set of   ’A’…’z’;
     i: char;
begin   for i:= ‘A’ to  ‘Z’ do
     if  I in zn then write (I,   ’  ‘);
        for i:= ‘a’ to  ‘z’ do
     if  I in zn then write (I,   ’  ‘);
end
```

Tarixiy ma’lumot: Blez Paskal (1623-1662) *Frantsiyada tug’ilgan. Bolaligidan matematik qobiliyatini ko’rsatganiga qaramay, otasi uni qadimiy tillarni o’rganishga undaydi. 12 yoshida elementar geometriya kitobini topib oladi va undagi teoremalarni o’rgana boshlaydi. 14 yoshida har xafta bo’ladigan frantsuz matematiklari uchrashuviga qatnay boshlaydi. Keyinchalik bu to’garak frantsuz Akademiyasi bo’ldi. 16 yoshida konus kesimlar bo’yicha muhim natijalarni oladi va kitob shaklida nashr qiladi. Paskalning otasi davlat hisoblarini tekshirar edi, aqlli kishilar vaqtini befoyda ketkazmasligi kerak derdi, u.*

Paskal 19 yoshida birinchi mexanik hisoblash mashinasini yaratdi. 1650 yildan sog’ligi yomonlashgani sababli ilmiy va matematik ishlarini to’xtatadi va taqvo bilan shug’ullanadi. 3 yil o’tib, yana matematikaga qaytadi va ehtimollar nazariyasiga asos soladi. Umrining ko’p qismini kasallik bilan kurashib o’tkazgan.

Paskal dasturlash tili uning nomiga qo’yilgan

Nazorat uchun savollar:

1. To’plamlar algebrasi nima?
2. Qachon to’plam biror amalga nisbatan yopiq bo’ladi?
3. To’plamlar halqasi deb nimaga aytiladi?
4. Halqaning biri va noli deganda nimani tushunasiz?
5. Natural sonlar to’plamining yig’indi va ko’paytma amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.
6. Butun sonlar to’plamining ayirma amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.
7. Ratsional sonlar to’plamining bo’linma amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.

2. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

2.1. Kirish

Kombinatorika – diskret matematikaning bir bo’limi bo’lib, u ehtimollar nazariyasi, matematik mantiq, sonlar nazariyasi, hisoblash texnikasi va kibernetika sohalarida qo’llanilgani uchun muhim ahamiyatga ega.

Insoniyat o’z faoliyati davomida ko’p marotaba ayrim predmetlarni barcha o’rinlashtirish usullari sonini sanab chiqish yoki biror bir harakatni amalga oshirishdagi barcha mavjud usullarni aniqlash kabi masalalarga duch keladi.

1) 26 kishini kassada navbatga necha xil usulda o’rinlashtirish mumkin?

2) Xokkey bo’yicha olimpiya birinchiligida necha xil usulda oltin, kumush va bronza medallarini taqsimlash mumkin.

Bunday tipdagi masalalarga **kombinatorik masalalar** deyiladi.

Kombinatorika masalalari oson degan tushuncha hozirgi kunda eskirdi. Kombinatorika masalalari soni va turi tez sur’atlarda o’smoqda. Ko’pgina amaliy masalalar bevosita yoki bilvosita kombinatorika masalalariga keltirib yechiladi.

Hozirgi kunda kombinatorika usullaridan foydalanib yechiladigan zamonaviy masalalarga quyidagi 5 turdagi masalalar kiradi:

1. O’rinlashtirish masalalari – tekislikda predmetlarni joy-joyiga qo’yish;
2. To’ldirish va qamrab olish masalalari – masalan, berilgan fazoviy shakllarni berilgan shakl va o’lchamdagi eng kam sonli jismlar bilan to’ldirish haqidagi masala;
3. Marshrutlar haqidagi masala – mukammal reja masalasi, masalan, eng qisqa yo’lni topish masalasi;

4. Graflar nazariyasining kombinatorik masalalari – tarmoqlarni rejalashtirish masalasi: transport yoki elektr tarmoqlari masalalari, grafni bo'yash haqidagi masala;
5. Ro'yxatga olish masalasi – biror qoidani kuzatish uchun berilgan elementlar naborini tashkil etuvchi predmetlar sonini topish masalalari.

Kombinatorika masalalarini yechishda diskret to'plam tadqiq qilinadi, ya'ni bu to'plam alohida ajratilgan elementlardan tashkil topgan deb qaraladi. Ko'p hollarda bu to'plamlar chekli bo'ladi, lekin elementlar soni cheksiz bo'lgan to'plamlar inkor qilinmaydi.

2.2. Guruhlash, o'rinlashtirish va o'rin almashtirishlar

Kombinatorika masalalarini yechish asosiy ikki turga bo'linadi:

a) qism to'plamlarni tanlashga ko'ra;

b) to'plam elementlari tartibiga ko'ra.

n elementli A_n to'plamdan k elementli qism to'plam ajratib olish $(n,k)-$**tanlanma** deyiladi, bunda $k-$ **tanlanma hajmi** deyiladi.

Ajratilgan qism to'plamning har bir elementi bilan 1 dan n gacha bo'lgan sonlar o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, to'plam **tartiblangan tanlanma**, aksincha **tartiblanmagan** deyiladi.

Agar to'plam elementlaridan biror bir ro'yxat tuzib, keyin har bir elementga ro'yxatda turgan joy raqami mos qo'yilsa, har qanday chekli to'plamni tartiblash mumkin. Bundan ko'rinadiki, bittadan ortiq elementi bo'lgan to'plamni bir nechta usul bilan tartiblash mumkin.

Agar tanlangan qism to'plamda elementlar tartibi ahamiyatsiz bo'lsa, u holda tanlanmalarga $(n,k)-$**guruhlash** deyiladi va C_n^k ko'rinishida belgilanadi. C – inglizcha **"combination"**, ya'ni **"guruhlash"** so'zining bosh harfidan olingan.

Tanlanmada elementlar takrorlanishi va takrorlanmasligi mumkin.

Elementlari takrorlanuvchi tartiblanmagan $(n,k)-$tanlanmaga n elementdan k tadan **takrorlanuvchi guruhlash** deyiladi va $\tilde{C}_n^k$ ko'rinishida belgilanadi.

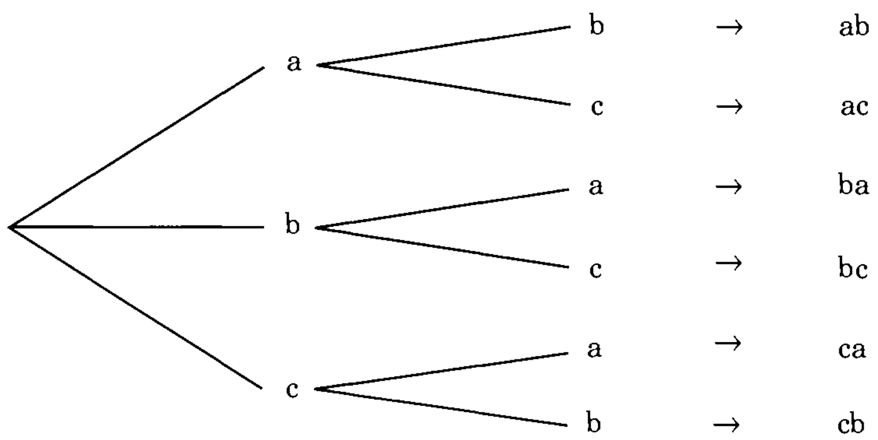
Elementlari takrorlanuvchi tartiblangan $(n,k)-$tanlanma n elementdan k tadan **takrorlanuvchi o'rinlashtirish** deyiladi va $\tilde{A}_n^k$ kabi belgilanadi. A inglizcha **"arranjiment"** – **"tartibga keltirish"** so'zidan olingan.

Agar tartiblangan tanlanmalarda elementlar o’zaro turlicha bo’lsa, u holda **takrorlanmaydigan o’rinlashtirish** deyiladi va A_n^k kabi belgilanadi.

n tadan n ta tartiblangan tanlanmaga **o’rin almashtirish** deyiladi va P_n kabi belgilanadi. O’rin almashtirish o’rinlashtirishning xususiy holi hisoblanadi. P_n inglizcha **“permutation”** – **“o’rin almashtirish”** so’zining bosh harfidan olingan.

Misol. $A_3 = \{a,b,c\}$ to’plamning 3 ta elementdan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan, takrorlanuvchi va takrorlanmaydigan tanlanmalarini ko’rsating.

1) $A_3^2 = \{\{a;b\},\{a;c\},\{b;c\},\{b;a\},\{c;a\},\{c;b\}\}$=6 ta takrorlanmaydigan o’rinlashtirish;

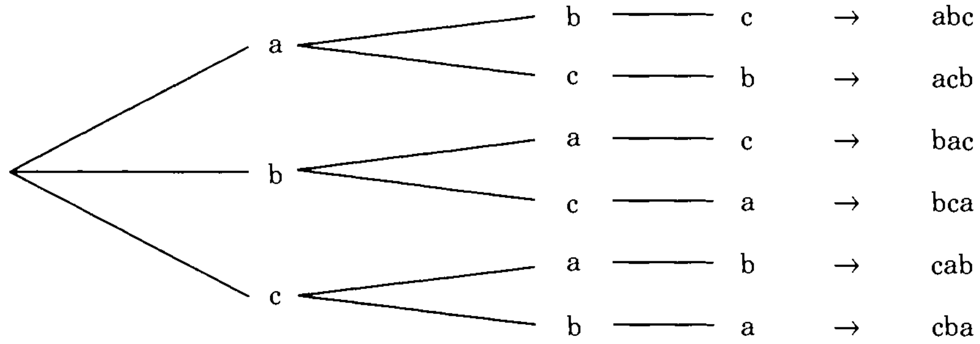


2) $\tilde{A}_3^2 = \{\{a;a\},\{a;b\},\{a;c\},\{b;b\},\{b;c\},\{b;a\},\{c;a\},\{c;b\},\{c;c\}\} = 9$ ta takrorlanadigan o’rinlashtirish;

3) $C_3^2 = \{\{a;b\},\{a;c\},\{b;c\}\} = 3$ ta takrorlanmaydigan guruhlash;

4) $\tilde{C}_3^2 = \{\{a;a\},\{a;b\},\{a;c\},\{b;b\},\{b;c\},\{c;c\}\} = 6$ ta takrorlanuvchi guruhlash;

5) $P_3 = \{\{a,b,c\},\{a,c,b\},\{b,a,c\},\{b,c,a\},\{c,a,b\},\{c,b,a\}\}$=6 o’rin almashtirish mavjud.



Nazorat uchun savollar:

1. Kombinatorika usullaridan foydalanib yechiladigan zamonaviy masalalarga qanday masalalar kiradi?
2. Tanlanma deb nimaga aytiladi?
3. Tartiblangan to'plam deb nimaga aytiladi?
4. Tartiblangan va tartiblanmagan to'plamlar farqi nimada?
5. Guruhlash ta'rifini ayting.
6. O'rinlashtirishga ta'rif bering.
7. O'rin almashtirish bilan o'rinlashtirishning farqini tushuntiring.

MISOL VA MASALALAR

1. Berilgan $\{4,5,6\}$ to'plamning 3 ta elementidan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan, takrorlanuvchi va takrorlanmaydigan tanlanmalarini tuzing.
2. Berilgan $\{0,1,2,3\}$ to'plamning 4 ta elementidan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan tanlanmalarini tuzing.
3. Berilgan $\{1,3,5,7\}$ to'plamning 4 ta elementidan 3 tadan barcha takrorlanuvchi va takrorlanmaydigan tanlanmalarini tuzing.

2.3. Kombinatorikaning asosiy qoidalari

Kombinatorikaning 1-qoidasi (yig'indi qoidasi):

Agar S to'plamdan A qism to'plamni n usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, undan farqli boshqa B qism to'plamni m usulda tanlash mumkin bo'lsa va bunda A va B larni bir vaqtda tanlash mumkin bo'lmasa, u holda S to'plamdan $A \cup B$ tanlanmani $n+m$ usulda olish mumkin.

Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar **kesishmaydigan to'plamlar** deyiladi. Xususiy holda, agar barcha $i, j = 1,2,...,k,\ i \neq j$ lar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo'lsa, u holda $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ to'plam S to'plamning o'**zaro kesishmaydigan qism to'plamlari** yoki oddiygina qilib **bo'laklari** deyiladi. Demak, yig'indi qoidasida A va B lar S to'plamning bo'laklaridir.

Misol. 410-18 guruh talabalari 16 nafar yigit va 8 nafar qizlardan iborat bo'lib, ular orasidan bir kishini ajratib olish kerak bo'lsa, ularning soni qo'shiladi va 16+8=24 talaba orasidan tanlab olinadi.

Kombinatorikaning 2-qoidasi (ko'paytma qoidasi):

Agar S to'plamdan A tanlanmani n usulda va har bir n usulda mos B tanlanmani m usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda A va B tanlanmani ko'rsatilgan tartibda $n \cdot m$ usulda amalga oshirish mumkin.

To'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan qaraydigan bo'lsak, bu qoida to'plamlarning Dekart ko'paytmasi tushunchasiga mos keladi.

Misol. "Zukhrotravel" turistik kompaniyasi "Xiva – Chirchiq" yo'nalishida sayohat uyushtirmoqchi bo'lsa, necha xil usulda sayohat smetasini ishlab chiqishi mumkin?

Yechilishi: Xivadan Chirchiqqa to'g'ridan-to'g'ri jamoat transporti yo'q, shuning uchun "Xiva – Toshkent – Chirchiq" yo'nalishi bo'yicha harakatlanishga to'g'ri keladi. Xivadan Toshkentga samolyot, avtobus yoki poyezdda yetib borish mumkin, demak, 3 xil usuldan birini tanlash mumkin;

Toshkentdan Chirchiqqa esa avtobus yoki poyezdda borish mumkin, ya'ni 2 xil tanlanma mavjud. Demak, "Xiva – Chirchiq" sayohatini $3 \cdot 2 = 6$ xil usulda tashkil qilish mumkin va 6 xil narx taklif qilish mumkin.

Ko'paytma qoidasini umumlashtirish:

Aytaylik birin-ketin k ta harakatni amalga oshirish kerak bo'lsin. Agar birinchi harakatni n_1 usulda, ikkinchi harakatni n_2 usulda, va hokazo k- harakatni n_k usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda barcha k ta harakat $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ usulda amalga oshiriladi.

Misol. Ikkinchi bosqich talabalari 3-semestrda 12 ta fanni o'rganishadi. Seshanba kuniga 3 ta turli fanni nechta usulda dars jadvaliga joylash mumkin?

Yechilishi: Bu misolda 12 ta fanni takrorlamasdan 3 tasini o'rinlashtirish kerak. Buning uchun

birinchi fanni 12 usulda,

ikkinchi fanni 11 usulda va

uchinchi fanni 10 ta usulda tanlash mumkin. Ko'paytirish qoidasiga asosan $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Demak, 3 ta turli fanni 1320 usulda joylash mumkin ekan.

Misol. Diskret matematika fanidan talabalar o'rtasida bo'ladigan olimpiadaning respublika bosqichida 16 nafar talaba qatnashmoqda. Necha xil usulda 1-, 2- va 3-o'rinlar taqsimlanishi mumkin?

Yechilishi: 3-o'rinni 16 talabadan biri egallashi mumkin. 1-o'rin sohibi aniqlangandan keyin, 2-o'rinni qolgan 15 talabadan biri egallaydi va nihoyat 1-o'rin qolgan 14 talabadan biriga nasib qiladi. Demak 1-, 2- va 3-o'rin g'oliblarini $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ xil usulda aniqlash mumkin.

Misol. 5 soniga bo'linadigan 4 xonali sonlar nechta?

Yechilishi: Masalada takrorlanuvchi o'rinlashtirish haqida so'z bormoqda. Birinchi xonaga $Z = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ to'plamning 10 ta elementidan bittasini tanlash mumkin, lekin 0 ni birinchi xonaga qo'yish mumkin emas, aks holda son 3 xonali bo'lib qoladi. Bo'linish belgisiga ko'ra son 5 ga bo'linishi uchun 0 yoki 5 bilan tugashi kerak.

Demak, 1- xona raqami uchun 9 ta tanlash mavjud;

2- va 3- xona raqamlari uchun esa 10 ta tanlash usuli bor;

4- xona, ya'ni oxirgi raqam uchun 0 yoki 5 raqamlari bo'lib, 2 ta tanlash mavjud. U holda ko'paytirish qoidasidan foydalansak, $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$ ta 5 ga bo'linadigan 4 xonali son borligini aniqlaymiz.

Agar biror m murakkab son berilgan bo'lsa, uning bo'luvchilar sonini topish uchun oldin tub sonlar ko'paytmasi shakliga keltiriladi:

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

bunda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – tub sonlar, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ daraja ko'rsatkichlari bo'lib, m murakkab sonning bo'luvchilari soni

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$$

ga teng bo'ladi.

Misol. 48 sonining bo'luvchilari sonini topish uchun $48 = 2^4 \cdot 3$ ni topamiz. U holda 48 ning bo'luvchilari soni $(4+1) \cdot (1+1) = 5 \cdot 2 = 10$ ekanligi topiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Kombinatorikaning 1-qoidasini tushuntiring.
2. Kombinatorikaning 2-qoidasini ayting.
3. Ko'paytmaning umumlashgan qoidasi nimadan iborat?

4. Tub va murakkab son ta'rifini ayting.
5. Murakkab sonning bo'luvchilar soni qanday topiladi?

MISOL VA MASALALAR

1. {4, 5, 6} to'plamning 3 ta elementidan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan, takrorlanmaydigan tanlanmalarini tuzing.

2. {0, 1, 2, 3} to'plamning o'rin almashtirishlar to'plamini ko'rsating.

3. {2, 3, 4, 5} to'plamning 4 ta elementdan 3 tadan barcha takrorlanuvchi tanlanmalarini toping.

4. Qandolat do'konida kun oxiriga kelib bir nechta pishiriq qoldi: 4 ta vaflili, 3 ta shakoladli va 1 ta mevali. Xaridor pishiriqni nechta usulda tanlashi mumkin?
5. Musobaqada qatnashish uchun universitetning 8 nafar yigit, 6 nafar qizdan iborat tennis komandasidan juftlik nechta usulda ajratiladi?

6. Yengil avtomobillarning davlat belgisi 3 ta raqam va o'zbek alifbosining 3 ta harfidan iborat. Raqam va harflar ixtiyoriy ketma-ketlikda bo'lishi mumkin deb hisoblasak, DAN idorasi nechta turli xil avtomobil raqamini berishi mumkin?

7. Quyida berilgan sonlarning nechta turli bo'luvchilari bor?
   a) 635016; b) 2474; c) 17645; d) 30599;
   e) 2520; f) 5480; g) 12600; k) 12600.

Test savollari:

1. Oq, havo rang, qizil, sariq, yashil va qora rangli matolardan nechta 3 xil rangli bayroq tayyorlash mumkin?
   A) 120 V) 18 C) 6!/3! D) 20

2. 30 talaba bir-birlari bilan fotosuratlarini almashishdi. Hammasi bo'lib nechta fotosurat tarqatilgan?
   A) 204 V) 700 C) 870 D) 780.

4.3. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar

Avvalo barcha mumkin bo'lgan A_n^k o'rinlashtirishlarni topib olamiz. Bu masalani yechish uchun ko'paytma qoidasidan foydalanamiz.

n ta elementi bo'lgan S to'plamda birinchi elementni tanlash uchun n ta imkoniyat bor, ikkinchi elementni tanlash uchun esa $n-1$ ta imkoniyat qoladi. O'rinlashtirish takrorlanmaydigan bo'lgani uchun tanlab olingan element keyingi tanlanmalarda ishtirok etmaydi. Shuning uchun k- elementni tanlash uchun $n-(k-1)=n-k+1$ imkoniyat qoladi. U holda barcha takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar soni:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

ga teng bo'ladi. Bu formulani boshqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$
$$= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} =$$
$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Bu yerda **"!"** belgisi **faktorial** deb o'qiladi.

1 dan n gacha bo'lgan barcha natural sonlar ko'paytmasi $n!$ ga teng.

Faktorialni hisoblashda 0!=1 va 1!=1 deb qabul qilingan.

Teorema. n elementga ega bo'lgan S to'plamning k elementli tartiblangan takrorlanmaydigan qism to'plamlari soni

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ga teng.

Misol. 7 kishidan iborat nazorat guruhini 4 nafar a'zosi bo'lgan nechta kichik guruhlarga ajratish mumkin?

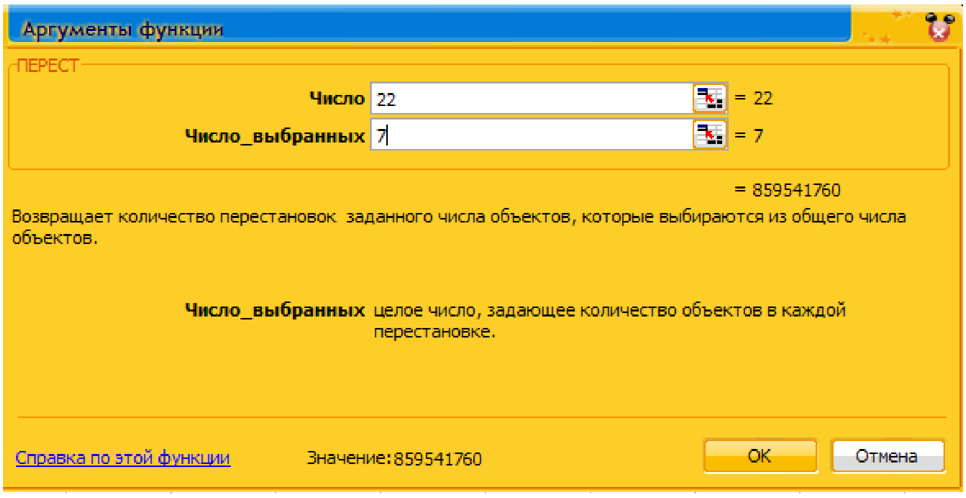
Yechilishi: Izlanayotgan usullar soni 7 ta elementdan 4 tadan o'rinlashtirishlar soniga teng, ya'ni

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{3!} = 840$$

Misol. Talaba 3 ta imtihonni bir hafta davomida topshirishi kerak. Bu harakatni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Javob: $A_6^3 = 120$.

Buni Excel dasturining standart (statistik) funktsiyalaridan biri **PEREST(SON;TANLANGAN_SON)** nomli funktsiya yordamida hisoblash mumkin. Bunda A_n^k ni aniqlashdagi SON – barcha tanlash ob'yektlari soni, ya'ni n; TANLANGAN_SON – tanlanayotgan ob'yektlar soni, ya'ni k, masalan A_{22}^7=859541760 ni hisoblang:



4.4. Berilgan to'plamning o'rin almashtirishlari soni

Avval aytganimizdek, o'rin almashtirish o'rinlashtirishning xususiy holidan iborat, shuning uchun ham o'rin almashtirishni n ta elementdan n dan o'rinlashtirish deb qarash mumkin:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

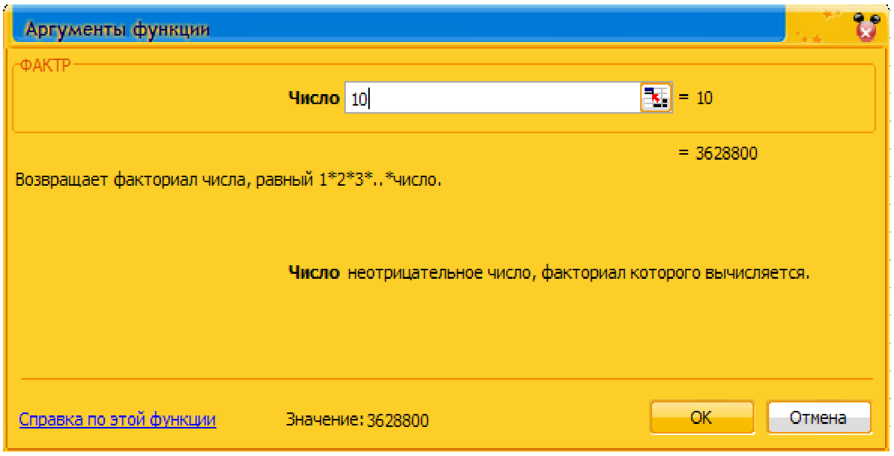
Bu son n elementli qism to'plamni tartiblash usullari soniga teng bo'ladi.

Misol. 26 kishini kassada navbatga necha xil usulda o'rinlashtirish mumkin degan savolga endi javob berish mumkin:

$$P_n = 26\,!$$

Misol. Javonga 5 ta kitobni necha xil usulda o'rinlashtirish mumkin: $P_5 = 5! = 120$.

Tadqiqotlarda o'rin almashtirishlarni hisoblashga to'g'ri kelsa, unda Excel dasturining standart (matematik) funktsiyalaridan biri $n!$ **q**iymatini maxsus **FAKTR(SON)** nomli funktsiya yordamida hisoblash mumkin. Bunda SON – n ning miqdoriy qiymatiga teng, masalan 10! ni hisoblash uchun quyidagicha ish tutiladi:



Shuningdek, ikkilangan faktorial $n!!$:

$n!! = (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k+1)$ (n toq bo'lganda);

$n!! = (2k+1)!! = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)$ (n juft bo'lganda) ularning qiymatini maxsus **DVFAKTR(SON)** nomli funktsiya yordamida hisoblash mumkin.

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishni Excel dasturlar paketidan foydalanib qanday hisoblash mumkin?
2. O'rin almashtirishlar soni Excel dasturida qanday hisoblanadi?

MISOL VA MASALALAR

1. Ifodaning qiymatini toping:

a) $\frac{14!}{12!}$; b) $\frac{10!}{4! \cdot 6!}$;

c) $\frac{17! - 16 \cdot 16! - 15 \cdot 15!}{15!}$ d) $\frac{(m+3)!}{m!}$

2. Kasrni qisqartiring:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$; b) $\frac{(n-2)!}{n!}$;

c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$; d) $\frac{2n(2n-1)}{2n!}$, $n \in N$.

3. 36 ta karta aralashtirilganda necha xil variant mavjud?
4. Stipendiya olish uchun 5 ta sardor kassaga necha xil usulda navbatga turishlari mumkin?

2.6. Takrorlanuvchi o'rinlashtirishlar

n ta elementi bo'lgan S to'plamda birinchi elementni tanlash uchun n ta imkoniyat bor, o'rinlashtirish takrorlanuvchi bo'lgani uchun qolgan ixtiyoriy element uchun ham n ta imkoniyat qoladi. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra barcha takrorlanadigan o'rinlashtirishlar soni quyidagiga teng bo'ladi:

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\ ta} = n^k$$

2.7. Takrorlanmaydigan guruhlashlar

Bizga tartiblanmagan takrorlanmaydigan n ta elementi bo'lgan S to'plam berilgan bo'lsin. C_n^k bilan A_n^k ni taqqoslaymiz. Bilamizki, k ta elementni $k!$ ta usulda tartiblash mumkin, ya'ni

$$k! \cdot C_n^k = A_n^k$$

bo'ladi. Bundan

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kelib chiqadi.

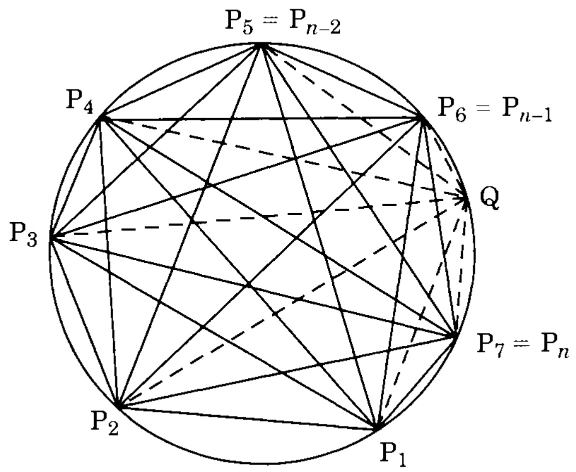
Takrorlanmaydigan guruhlashlar C_n^k sonini Excel dasturining standart (statistik) funktsiyalaridan biri

CHISLKOMB(SON;TANLANGAN_SON)

nomli funktsiya yordamida hisoblash mumkin. Bunda **SON** – barcha tanlash ob'yektlari soni, ya'ni n**; TANLANGAN_SON** – tanlanayotgan ob'yektlar soni, yani k ni bildiradi.

Misol. Har uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmagan n ta nuqta berilgan. Nuqtalarni ikkitalab tutashtirish natijasida nechta kesma o'tkazish mumkin?

Yechilishi: masala shartiga ko'ra chizmada qavariq n burchak hosil bo'ladi.



U holda 1-nuqta (n-1) ta nuqta bilan, 2-nuqta (n-2) ta nuqta bilan va h.k., (n-1) – nuqta 1 ta nuqta bilan tutashtiriladi. Bunda hosil bo'lgan to'g'ri chiziqlar soni

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+2+1=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2$$

ga teng bo'ladi.

Misol. Restoranda 7 ta asosiy taomdan 3 tasini tanlash imkoniyati berilsa, nechta usulda buyurtma qilish mumkin?

Yechilishi: Bu misolda takrorlanmaydigan 7 ta elementdan 3 tadan guruhlashni topish kerak:

$$C_7^3=\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=35.$$

Misol. Sportloto lotareya o'yinida 36 ta natural sondan 6 tasini topgan kishi asosiy yutuqqa ega bo'ladi. Asosiy yutuqni olish imkoniyati qanday?

Yechilishi: Yutuq raqamlar oltitaligi 36 tadan 6 ta takrorlanmaydigan guruhlashga teng:

$$C_{36}^6=\frac{36!}{(36-6)!\cdot 6!}=\frac{36!}{30!\cdot 6!}=\frac{31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=1947\,792.$$

Misolning javobidan ko'rinadiki, asosiy yutuqni olish imkoniyati judayam kam, ya'ni 1 947 792 tadan 1 taga teng.

5 ta, 4 ta va 3 ta raqamni topgan kishilarga ham yutuq beriladi, lekin bu yutuq shu kishilar o'rtasida teng taqsimlanadi. Bu holda 2 xil guruhlash mavjud, biri C_6^3 omadli tanlov va ikkinchisi C_{30}^3 omadsiz tanlov. U holda 3 ta raqamni topgan yutuq egalari imkoniyati:

$$C_{30}^3\cdot C_6^3=\frac{30!}{27!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5=81\,200.$$

Yutuqli bo'lish ehtimoli $\frac{81200}{1947792} \approx 0.042$ ga teng.

n ta elementi bo'lgan S to'plamni k ta qism to'plamlar yig'indisi ko'rinishida necha xil usulda yoyish mumkin degan savolni qo'yamiz. Buning uchun S to'plamni $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ o'zaro kesishmaydigan k ta qism to'plamlarga ajratish mumkin bo'lsin. Bunda ularning elementlari soni mos ravishda

$$n(A_1) = k_1,\ n(A_2) = k_2,\ \dots\ ,\ n(A_m) = k_m,$$

bo'lib, $k_1, k_2, ..., k_m$ berilgan sonlar uchun

$$k_i \geq 0,\ \ k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

shartlar bajariladi. $A_1, A_2, ..., A_m$ to'plamlar umumiy elementga ega emas. S to'plamning k_1 elementli A_1 qism to'plamini $C_n^{k_1}$ usulda tanlash mumkin, qolgan $n - k_1$ element ichidan k_2 elementli A_2 qism to'plamini $C_{n-k_1}^{k_2}$ usulda tanlash mumkin va hokazo.

Turli xil $A_1, A_2, ..., A_m$ qism to'plamlarni tanlash usullari ko'paytirish qoidasiga ko'ra

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot ... \cdot C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!\cdot(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\cdot(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot .... \cdot \frac{(n-k_1-k_2-....-k_{m-1})!}{k_m!\cdot(n-k_1-k_2-...-k_m)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ... \cdot k_m!}$$

Demak, quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. Aytaylik $k_1, k_2, ..., k_m$ butun nomanfiy sonlar bo'lib, $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$ va S to'plam n ta elementdan iborat bo'lsin. S ni elementlari mos ravishda $k_1, k_2, ..., k_m$ ta bo'lgan $A_1, A_2, ..., A_m$ m ta qism to'plamlar yig'indisi ko'rinishida ifodalash usullari soni

$$C_n(k_1, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ... \cdot k_m!}$$

ta bo'ladi. $C_n(k_1, ..., k_m)$ sonlarga **polinomial koeffitsientlar** deyiladi.

Misol. "Baraban" so'zidagi harflarni qatnashtirib, nechta so'z (ma'nosi bo'lishi shart emas!) yasash mumkin?

Yechilishi: "b" harfi k_1=2 ta,

"a" harfi k_2 =3 ta,

“r” harfi $k_3=1$ ta,

“n” harfi $k_4=1$ ta, jami harflar soni $n=7$ ta, demak,

$$C_7(2,3,1,1)=\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!}=420.$$

Misol. “Lola” so’zidagi harflardan nechta so’z yasash mukin?

$$C_4(2,1,1)=\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=12.$$

Teorema. Elementlarining k_1 tasi 1- tipda, k_2 tasi 2-tipda, va hokazo k_m tasi m-tipda bo’lgan n elementli to’plamning barcha o’rin almashtirishlar soni

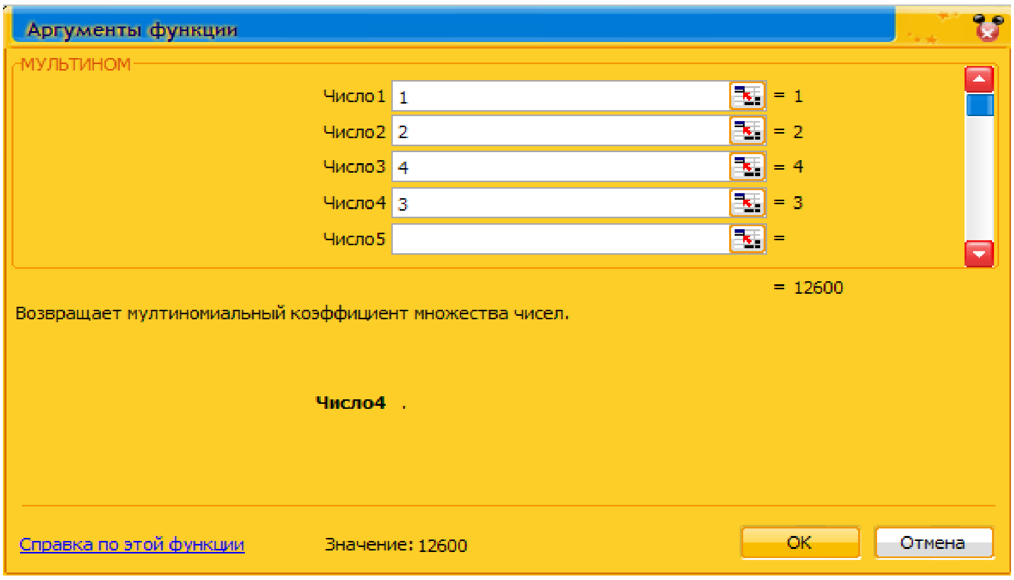
$$C_n(k_1,...,k_m)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_m!}$$

ta bo’ladi.

Tadqiqotlarda ko’p miqdordagi takrorlanuvchi o’rin almashtirishlarni hisoblashga to’g’ri kelsa, unda Excel dasturlar paketidagi **MULTINOM** komandasidan foydalanish mumkin, masalan

$$C_{10}(1,2,4,3)=\frac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 3!}=12600$$

ekanligini tezlik bilan hisoblash hech qanday qiyinchilik tug’dirmaydi.



Guruhlashning xossalari

1^0. $C_{n+m}^{n}=C_{n+m}^{m}$

2^0. $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$

3^0. $C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+...+(C_n^n)^2$

Ushbu xossalarni isbotlash uchun kombinatsiyalarni faktorial ko’rinishida yozib chiqish va hisoblash yetarli.

Teorema. n elementli to'plamning barcha qism to'plamari soni 2^n ga teng va quyidagi tenglik o'rinli:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k \ .$$

Haqiqatan ham, $C_n^k -\ n$ elementli to'plamning barcha k elementli to'plam ostilari soni bo'lgani uchun, tushunarliki barcha to'plam ostilar soni

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

yig'indiga teng bo'lib, ularning yig'indisi 2^n ga teng bo'ladi.

Misol. 30 ta talabadan 20 tasi yigitlar, tavakkaliga jurnaldagi ro'yxat bo'yicha 5 talaba chaqirildi, ularning ichida ko'pi bilan 3 tasi yigit bo'ladigan qilib necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechilishi: Masala shartida berilgan to'plamni sodda to'plamlar yig'indisi shaklida yozib olamiz:

A={0 tasi yigit, 5 tasi qiz}
B={1 tasi yigit, 4 tasi qiz}
C={2 tasi yigit, 3 tasi qiz}
D={3 tasi yigit, 2 tasi qiz}

{Ko'pi bilan 3 tasi yigit}=A∪B∪C∪D kesishmaydigan to'plamlar yig'indisining quvvati, ushbu to'plamlar quvvatlari yig'indisiga teng bo'ladi:

n({ko'pi bilan 3 tasi yigit })=n(A∪B∪C∪D)= n(A)+ n(B)+ n(C)+ n(D)=

$$= C_{20}^0 \cdot C_{10}^5 + C_{20}^1 \cdot C_{10}^4 + C_{20}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{20}^3 \cdot C_{10}^2 =$$

$$= 1 \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} + \frac{20!}{1! \cdot 19!} \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} + \frac{20!}{2! \cdot 18!} \cdot \frac{10!}{3! \cdot 7!} + \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} =$$

$$= 252 + 4200 + 190 \cdot 120 + 1140 \cdot 45 = 78552.$$

Demak, 30 ta talabadan ko'pi bilan 3 tasi yigit bo'ladigan 78552 tanlash usuli mavjud.

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorlanadigan o'rinlashtirish deb nimaga aytiladi?
2. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirish qanday topiladi?
3. Takrorlanadigan guruhlash deb nimaga aytiladi?
4. Takrorlanmaydigan guruhlash formulasini keltirib chiqaring.
5. Excel dasturlar paketidagi MULTINOM komandasidan qachon foydalaniladi?

6. Excel dasturlar paketidagi PEREST komandasi vazifasi nimadan iborat?
7. Faktorial nima?

MISOL VA MASALALAR

1. Xonada n ta chiroq bor. k ta chiroqni yoqib, xonani necha xil usulda yoritish mumkin? Xonani jami necha xil usulda yoritish mumkin?
2. n ta nuqta berilgan, ularning ixtiyoriy 3 tasi bitta chiziqda yotmaydi. Ixtiyoriy ikkita nuqtani tutashtirib nechta chiziq o'tkazish mumkin?
3. Har bir keyingi raqami oldingisidan katta bo'lgan nechta 4 xonali son tuzish mumkin?
4. Har bir keyingi raqami oldingisidan kichik bo'lgan nechta 4 xonali son tuzish mumkin?
5. Xalqaro komissiya 9 kishidan iborat. Komissiya materiallari seyfda saqlanadi. Kamida 6 kishi yig'ilgandagina seyfni ochish imkoni bo'lishi uchun, seyf nechta qulfdan iborat bo'lishi kerak va ular uchun nechta kalit tayyorlash kerak va ularni komissiya a'zolari o'rtasida qanday taqsimlash kerak?
6. Kitob javonida tasodifiy tartibda 15 ta darslik terilgan bo'lib, ularning 9 tasi o'zbek tilida, 6 tasi rus tilida. Tavakkaliga 7 ta darslik olindi. Olingan darsliklarning roppa-rosa 4 tasi o'zbekcha, 3 tasi ruscha bo'ladigan qilib necha xil usulda tanlab olish mumkin?
7. $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$ yig'indi hisoblang.
8. $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + ...$ yig'indi hisoblang.
9. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$ tenglik isbotlansin.
10. Necha xil usulda 5 ta kitobni 3 tadan qilib tanlab olish mumkin?
11. Necha xil usulda 7 odamni 3 kishidan qilib komissiya tuzish mumkin?
12. $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$ tenglikni isbotlang.
13. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ tenglikni isbotlang.
14. $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$ ayniyatni isbotlang.
15. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ ayniyatni isbotlang.
16. $C_n^0 = C_n^n$ tenglikni isbotlang.
17. $C_n^1 = C_n^{n-1}$ tenglikni isbotlang.
18. $C_n^k = C_n^{n-k}$ tenglikni isbotlang.
19. Quyidagi so'zlarni nechta usulda shifrlash mumkin?

a) BALLI; e) PARABOLA;

b) GIPERBOLA;
c) SIMMETRIK;
d) DADA;
f) ELLIPS;
g) SUMMA;
j) GURUH.

20. Tarkibida Aziz va Go'zal ham bo'lgan 12 nafar kishidan 5 kishilik komissiya tashkil qilinmoqda. Nechta turlicha komissiya tashkil qilish mumkin? Agar
   a) komissiya tarkibiga Aziz ham, Go'zal ham kirgan bo'lsa;
   b) komissiya tarkibiga Aziz ham, Go'zal ham kirmagan bo'lsa;
   v) komissiya tarkibiga yoki Aziz, yoki Go'zal kirgan bo'lsa.

2.8. Takrorlanuvchi guruhlashlar

n ta elementli to'plamning barcha tartiblanmagan takrorlanuvchi k ta elementli qism to'plamlarini ajratish t**akrorlanuvchi guruhlash** deyiladi.

S to'plamning elementlari 1;2;…; n sonlari bilan raqamlangan bo'lsin. S to'plam chekli yoki sanoqli bo'lgani uchun, har doim S to'plam elementlari va N natural sonlar to'plami elementlari o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. U holda S to'plam o'rniga o'zaro bir qiymatli moslik kuchiga asosan, unga ekvivalent bo'lgan $S^{/}=\{1;2;...;n\}$ to'plamning C_n^k guruhlashlarini topish mumkin.

$S^{/}$ to'plamning har qanday tanlanmasini $\{n_1;n_2;\,.\,n_k\}$; ko'rinishda yozish mumkin, bunda $n_1\le n_2\le...\le n_k$ ketma-ketlik o'rinli bo'lib, "tenglik" amali tanlanma takrorlanuvchi bo'lishi mumkinligini bildiradi.

k ta elementli tanlanma $\{n_1;n_2;...;n_k\}$ ga k ta elementli to'plam $\{n_1;n_2+1;...;n_k+k-1\}$ ni mos qo'yamiz, bunda elementlar turlicha bo'ladi.

$\{n_1;n_2;...;n_k\}$ va $\{n_1;n_2+1;...;n_k+k-1\}$ to'plamlar orasidagi moslik yana o'zaro bir qiymatli bo'lib, $\{n_1;n_2+1;...;n_k+k-1\}$ to'plam $S^{/}\cup\{1;2;...;k-1\}$ to'plamdan $n+k-1$ tadan takrorlanmaydigan k elementli guruhlash bo'ladi.

U holda takrorlanmaydigan C_{n+k-1}^k guruhlashlar soni $\tilde{C}_n^k$ takrorlanuvchi guruhlash soniga teng bo'ladi, ya'ni

$$\tilde{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot...\cdot(n+k-1)}{k!}.$$

Misol. 4 ta o'yin kubigini tashlab, nechta turlicha variant hosil qilish mumkin?

Yechilishi: Har bir o'yin kubigida 1 dan 6 gacha raqamlardan bittasi tushishi mumkin, ya'ni har bir kubikda 6 ta variant bo'lishi mumkin. Agar 4 ta o'yin kubigi tashlansa, har bir variantni 4 ta ob'yektning tartiblanmagan takrorlanuvchi ketma-ketligi deyish mumkin, ularning har biri uchun esa 6 ta imkoniyat bor:

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(6+4-1)!}{4!\cdot 5!} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$$

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorlanuvchi guruhlash deb nimaga aytiladi?
2. Polinomial koeffitsiyentlar qanday hisoblanadi?
3. Takrorlanuvchi guruhlash tadbiqiga misol keltiring.

MISOL VA MASALALAR

1. 0,1,2,3,4,5,6 raqamlaridan iborat DOMINO o'yini toshlari nechta?
2. 0,1,2,…, k raqamlaridan iborat DOMINO o'yini toshlari nechta?
3. Qandalotchilik sexida 11 turdagi shirinlik ishlab chiqariladi. 6 ta bir xil yoki 6 ta har xil shirinlikni necha xil usulda tanlash mumkin?
4. Muzqaymoq do'konida 8 xil turdagi muzqaymoq sotilayapti. 5 kishiga necha xil usulda muzqaymoq olish mumkin?

Tenglamalarni yeching (5-17):

5. $\left(C_x^0\right)^2 + \left(C_x^1\right)^2 + \left(C_x^2\right)^2 = 5A_7^2$
6. $A_x^{x-3} = \left(C_{x-1}^{x-3} + C_{x-1}^{x-4}\right)P_3$
7. $A_x^3 + P_{x-2} + C_x^4 - P_{x-1} = 39$
8. $1{,}5\cdot C_x^{x-2} = 0{,}5\cdot A_{x+1}^{x-1}$
9. $A_x^{x-6} = x\cdot C_{x-1}^{x-6}$
10. $C_{x-2}^{x-3} : C_x^{x-1} = A_{x-1}^{x-4} : 30$
11. $A_{x+1}^2\cdot A_x^2\cdot A_{x-1}^2 = P_3\cdot P_{x+1}$
12. $A_x^4\cdot P_{x-4} = 42\cdot P_{x-2}$
13. $P_x = C_x^{x-2}\cdot P_4\cdot 2!$
14. $120\cdot A_{2x}^x = \left(P_x\right)^2\cdot C_{2x}^x$
15. $A_{3x}^4 = 15A_{2x}^3$
16. $\dfrac{A_x^4 + A_x^2}{A_x^2} = 13$
17. $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$

Tenglamalar sistemalarini yeching (18-20):

18. $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$
19. $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x \\ C_{x-1}^y = 5 \end{cases}$
20. $C_{m+1}^{n+1} : C_{m+1}^n : C_{m+1}^{n-1} = 5:5:3$ munosabat berilgan bo'lsa, n va m ni toping.

2.9. Nyuton binomi

Maktab kursidan qisqa ko'paytirish formulalari bilan tanishsiz, masalan ikki son yig'indisining kvadrati

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=aa+ab+ba+bb=a^2+2ab+b^2$$

yoki ikki son yig'indisining kubini topish

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

kabi masalalarda a va b lar oldidagi koeffitsiyentlarni topish masalasi kelib chiqadi.

Koeffitsiyentlarni topish usulini frantsuz matematigi B.Paskal (1623 – 1662) fanga kiritgan, hozirda **Paskal uchburchagi** deb ataladi:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & n=0\\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & n=1\\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & n=2\\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & n=3\\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n=4\\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & n=5
\end{array}$$

. . . .

n soni yetarlicha katta bo'lganda, $(a+b)^n$ uchun Paskal uchburchagini tashkil qiluvchi sonlar C_n^k ga teng bo'ladi:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
C_n^0 & C_n^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

Paskal uchburchagining tashqi tomonlaridagi sonlar har doim 1 ga teng bo'ladi, chunki $C_n^0=C_n^n=1$. Paskal uchburchagining yana bir qonuniyati, uchburchakdagi 2 ta ketma-ket sonni qo'shish natijasida keyingi qatordagi shu 2 son o'rtasida turgan sonni topish mumkin. Bu xossa **Paskal formulasi**[5] deb nomlanadi: $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k$. Bunda $0<k<n$.

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\cdot\frac{n}{(n-k)k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=C_n^k.$$

[5] **Kenneth H.Rosen// Discrete Mathematics and Its Applications// Monmouth University, New York. 2012 y, 459–p.**

Binomial teorema [6]. Quyidagi tenglik o'rinli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} =$$

$$= C_n^0 \cdot a^0 \cdot b^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + ... + C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} + ... + C_n^n \cdot a^n \cdot b^0$$

bu yerda C_n^k sonlarga **binomial koeffitsiyentlar**, tenglamaga esa **Nyuton binomi** deyiladi.

Isboti: Formulani matematik induktsiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatan ham,

$n=1$ bo'lganda

$$(a+b)^1 = C_1^0 \cdot a^0 \cdot b^1 + C_1^1 \cdot a^1 \cdot b^0 = b+a;$$

$n=2$ bo'lganda $(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^0 \cdot b^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b^{2-1} + C_2^2 \cdot a^2 \cdot b^0 =$

$$= b^2 + 2ab + a^2.$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

6 15 20 15 6

21 35 35 21

56 70 56

126 126

252

Endi formulani $n-1$ uchun o'rinli deb faraz qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) =$$

$$= a \cdot (a+b)^{n-1} + b \cdot (a+b)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{(n-1)-k+1}.$$

Yig'indida indekslarni almashtiramiz: $k = j-1, j = k+1,$ u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} = \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} a^j b^{n-j}$$

bo'ladi. Bundan $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$

[6] **Kenneth H.Rosen// Discrete Mathematics and Its Applications// Monmouth University, New York. 2012 y, 459–p.**

formulani hosil qilamiz. Oxirgi tenglikda yig’indilar chegaralarini tenglashtiramiz. Buning uchun yordamchi $C_{n-1}^{-1}=0, \quad C_{n-1}^{n}=0$ tengliklarni kiritamiz, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k}$$

va

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k} a^k b^{n-k}$$

tengliklar hosil bo’ladi.

Bu tengliklarni o’rniga qo’yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}\right) a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Teorema isbotlandi.

Misol. $(2a-3b)^4$ ni darajali ko’phadga yoying.

Yechilishi: Nyuton binomi formulasidagi C_n^k koeffitsiyentlarni $C_n^k = \binom{n}{k}$ ko’rinishida ham yozish mumkin. U holda ko’phad quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\begin{aligned}(2a-3b)^4 &= \binom{4}{0}(2a)^4(-3b)^0 + \binom{4}{1}(2a)^3(-3b)^1 + \binom{4}{2}(2a)^2(-3b)^2 \\ &+ \binom{4}{3}(2a)^1(-3b)^3 + \binom{4}{4}(2a)^0(-3b)^4 \\ &= (2a)^4 + 4(2a)^3(-3b) + 6(2a)^2(-3b)^2 + 4(2a)(-3b)^3 + (-3b)^4 \\ &= 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Hozirda Nyuton binomi deb yuritiladigan yuqoridagi formulani I.Nyuton (1643-1727) gacha O’rta Osiyolik olimlar, yurtdoshlarimiz: matematik, astronom, shoir U.Xayyom (1048-1122), keyinchalik M.Ulug’bekning shogirdi G.J. al-Koshiy “Arifmetika kaliti” asarida yorqin misollarda ko’rsatib bergan. Yevropada esa B.Paskal o’z ishlarida qo’llagan. Nyutonning xizmati shundaki, u formulani daraja ko’rsatkichi n ning butun bo’lmagan holi uchun umumlashtirdi.

$|x|<1$ uchun n ning butun bo’lmagan qiymatida Nyuton binomi formulasining ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

Binom yoyilmasi ko’pgina kombinatorika formulalarida asos bo’lib xizmat qiladi, masalan:

1. $a=b=1$ bo'lganda $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ hosil bo'ladi. Bu son n ta elementli S to'plamning barcha mumkin bo'lgan tartiblanmagan qism to'plamlari soniga teng.

2. $a=1,\ b=-1$ bo'lganda $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$ ga teng, ya'ni toq va juft o'rinda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisi 2^{n-1} ga teng va ular o'zaro ham teng bo'ladi.

2.10. Katalan sonlari

$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!},\ n \geq 0$ yoki $C_n = \frac{1}{(n+1)} \cdot C_{2n}^n$ formulalar yordamida kelib chiqadigan 1, 1, 2, 5, 14, 42,…sonlariga **Katalan sonlari** deyiladi. Formuladan ko'rish mumkinki, C_n sonlarni markaziy binomial koeffitsiyentlardan hosil qilish mumkin, masalan, $C_n = \frac{1}{5} \cdot C_8^4 = \frac{70}{5} = 14$, ya'ni 8-qatordagi markaziy element 70 ni 5 ga bo'lishdan hosil bo'ladi:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Nyuton binomi va Paskal uchburchagidan foydalanib, 9 lik va 3 lik sanoq sistemalariga o'tish mumkin, bunda C_n^k o'rniga $\binom{n}{k}$ belgilash kiritamiz: Masalan, 10 lik sistemadan 9 lik sistemasiga o'tish formulasi

$$10^n = (9+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 9^{n-r}$$

bo'lsa, 1000 sonini 9 lik sistemada 1331 ga teng ekanini keltirib chiqarish mumkin:

$$\begin{aligned} 10^3 &= \sum_{r=0}^{3} \binom{3}{r} 9^{3-r} \\ &= \binom{3}{0} 9^3 + \binom{3}{1} 9^2 + \binom{3}{2} 9^1 \binom{3}{3} 9^0 \\ &= 1 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 9^0 \\ &= 1331_9 \end{aligned}$$

10 lik sistemadan 3 lik sistemasiga o’tish formulasi

$$10^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 3^{2n-2r}$$

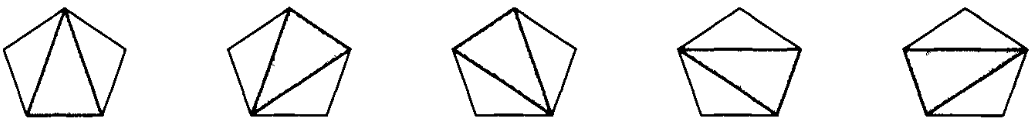
bo’lsa, 1000 sonini 3 lik sistemada 1101001 ga teng ekanini ko’ramiz:

$$\begin{aligned} 10^3 &= \binom{3}{0} 3^6 + \binom{3}{1} 3^4 + \binom{3}{2} 3^2 + \binom{3}{3} 3^0 \\ &= 1 \cdot 3^6 + 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 1101001_3 \end{aligned}$$

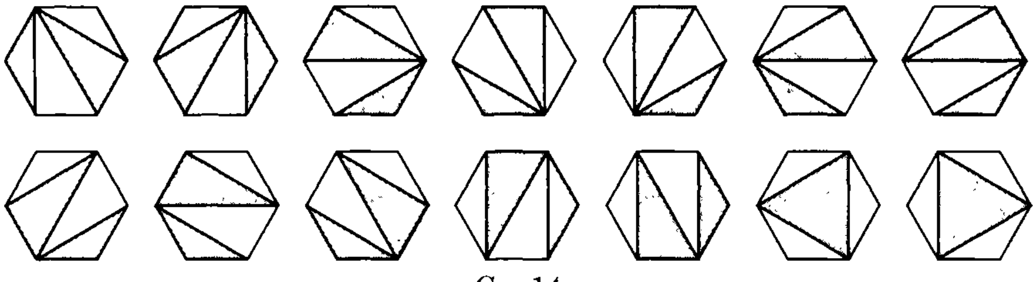
L.Eyler qavariq beshburchaklarni «triangulyatsiya», ya’ni beshburchakni kesishmaydigan dioganallar orqali uchburchaklarga ajratish masalasida Katalan sonlariga duch keladi.

Aytaylik, C_n soni qavariq $n+2$ - burchakni triangulyatsiyasiga teng bo’lsin, ya’ni $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$ va $C_5 = 14$ ga teng. Eyler quyidagini topadi: $C_n = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!}$

$C_1 = 1$ $C_2 = 2$



$C_3 = 5$



$C_5 = 14$

1759 yilda nemis matematigi I.A.fon Segner (1707-1777) C_n ni hisoblashning rekursiv tartibini yaratdi:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_0 .$$

Masalan, $C_0 = 1$. $C_4 = 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 14$ ga teng.

2.11. Nyuton binomining umumlashgan teoremasi

Teorema. k ta qo'shiluvchiga ega bo'lgan $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n$ ifoda uchun Nyuton formulasi quyidagiga teng:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1\geq 0,...,r_k\geq 0\\ r_1+r_2+...+r_k=n}} \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot ...\cdot r_k!}\cdot a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\cdot ...\cdot a_k^{r_k}$$

ya'ni yig'indi $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$ tenglamaning barcha nomanfiy butun yechimlari uchun hisoblanadi.

Misol. Nyuton polinomi formulasidan foydalanib $(a+b+c)^3$ ni hisoblaymiz. Agar qavslarni ochib, soddalashtiradigan bo'lsak, bir qancha amallarni bajargandan keyin quyidagi tenglikka kelamiz:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc.$$

Barcha hisoblashlardan keyin 10 ta haddan iborat bo'lgan tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikni polinomial formuladan oson topish mumkin: bizning misolda $n = 3,\ \ k = 3$, ya'ni $\begin{cases} r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0, \\ r_1 + r_2 + r_3 = 3. \end{cases}$

Turli koeffitsiyentlar ham 3 ta, bular: $\frac{3!}{3!\cdot 0!\cdot 0!} = 1,\ \ \frac{3!}{2!\cdot 1!\cdot 0!} = 3,\ \ \frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!} = 6.$

Natijani yozish uchun chekli sondagi r_1, r_2, r_3 indekslarni barcha mumkin bo'lgan kombinatsiyalari jadvalini tuzgan ma'qul:

r_1	r_2	r_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

U holda

$$(a+b+c)^3 = 1\cdot(a^3+b^3+c^3)+3\cdot(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+6\cdot abc$$
hosil bo'ladi.

Misol. $(x+y+z)^9$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^3y^2z^4$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.

Yechilishi: $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=4$ bo'lsa, $x^3y^2z^4$ had oldidagi koeffitsiyent

$$\frac{9!}{3!2!4!}=1260 \text{ ga teng.}$$

Misol. 15 talabani nechta usulda 3 ta o'quv guruhiga 5 nafardan guruhlarga ajratish mumkin?

Yechilishi: Bizda 15 ta ob'yekt bor, ularni 5 tadan 3 ta guruhga ajratish kerak. Bu ishni $\frac{15!}{5!5!5!}=68796$ usulda bajarish mumkin.

Misol. "MASALA" so'zidagi harflarni necha xil usulda o'rin almashtirish mumkin?

Yechilishi: Ushbu so'z 6 ta harfdan iborat bo'lgani uchun uni 6! usulda o'rin almashtirish mumkin. Biroq unda 3 ta "A" harfi qatnashgan, "A" harflarini o'rin almashtirgan bilan yangi so'z hosil bo'lmaydi. 3 ta harfni o'rin almashtirishlar soni 3! ga tengligidan $\frac{6!}{3!}=120$ qiymat topiladi.

Demak, "MASALA" so'zidagi harflarni o'rin almashtirish bilan 120 ta turli "so'z" hosil qilish mumkin ekan.

Nazorat uchun savollar:

1. Qisqa ko'paytirish formulalarini keltiring.
2. Binomial koeffitsiyentlar formulasini yozing.
3. Binomial teoremani isbotlang.
4. Paskal uchburchagining vazifasi nimadan iborat?
5. Paskal formulasini isbotlang.
6. Katalan sonlari deb qanday sonlarga aytiladi?
7. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o'tish formulalarini keltiring.

MISOL VA MASALALAR

1. Paskal uchburchagining 8-qatori quyidagicha bo'lsa,

1 7 21 35 35 21 7 1

a) 9-qator elementlarini aniqlang;

b) 10-qator elementlarini aniqlang;

2. Agar a, b, c – 8-qatordagi ketma-ket joylashgan sonlar bo'lsa, u holda 10-qatordagi sonlardan biri $a+2b+c$ yig'indiga teng bo'lishini ko'rsating;
3. $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$ tenglikni $0 \le k \le n-2$ bo'lgan hol uchun Paskal formulasidan foydalanib isbotlang.
4. "MATEMATIKA" so'zidan nechta turli xil so'z yasash mumkin?
   a) Ulardan nechtasi "T" harfi bilan boshlanadi?
   b) Ulardan nechtasida ikkita "M" yonma-yon joylashgan bo'ladi?

Quyidagi ikki had darajalarini Nyuton binomi formulasini qo'llab, ko'phadlarga yoying (5-16):

5. $(x+y)^4$ **6.** $(x-y)^5$ **7.** $(2x-1)^5$ **8.** $(x+2y)^6$

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ **10.** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$

11. $\left(2x+\frac{2}{x}\right)^8$ **12.** $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$

13. $(x+y)^5$ **14.** $(x+y)^6$ **15.** $(x+y)^7$ **16.** $(x+y)^8$

17. $(x+y+z)^9$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^5y^2z^2$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.
18. $(x+y+3)^7$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan x^3y^2 had oldidagi koeffitsiyentni toping.
19. $(2x+y+z)^9$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^4y^2z^3$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.
20. $(x+y+z-1)^6$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^2y^2z^2$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.
21. $(a+b)^{12}$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan a^5b^7 had oldidagi koeffitsiyentni toping.
22. $(a+b+3c)^{12}$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan a^5b^6c had oldidagi koeffitsiyentni toping.

Test savollari:

1. n ta elementdan k tadan guruhlashlar sonini aniqlang.

A) $\frac{n!}{(n-k)!}$ B) $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ C) $\frac{k!}{n!\,(n-k)!}$ D) n^k

2. Mashinada haydovchini ham hisobga olganda 6 ta o'rin bor. 6 kishidan 4 nafarida haydovchilik guvohnomasi bo'lsa, ularni nechta usulda o'rinlashtirish mumkin?

A) 1440 B) 240 C) 480 D) 360

3. $\frac{52!}{50!}$ ni hisoblang:

A) 2652 B) 2684 C) 2680 D) 2180

4. $\frac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$ hisoblang:

A) 204 B) 9 C) 260 D) 229

5. $(x+2)^7$ binom yoyilmasining 6-hadi oldidagi koeffitsiyentni toping.

A) 12 B) 10 C) 6 D) 21

6. Tenglamani yeching. $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$

A) 12 B) 10 C) 6 D) 4

7. Maxraji 50 ga teng nechta nomanfiy qisqarmaydigan to'g'ri kasr mavjud?

A) 60 B) 10 C) 20 D) 35

8. Talaba 8 kunda 4 ta imtihonni topshirishi kerak. Kuniga bittadan ortiq imtihon topshirish mumkin emas. U buni nechta usulda bajarishi mumkin?

A) 860 B) 1680 C) 720 D) 8!4!

9. $\frac{10!-8!}{89}$ ni hisoblang:

A) 40320 B) 84440 C) 68020 D) 18050

10. $A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$ hisoblang.

A) 204 B) 1440 C) 260 D) 229

11. $(x+2)^7$ binom yoyilmasining 7-hadi oldidagi koeffitsiyentni toping.

A) 12 B) 10 C) 6 D) 7

12. Tenglamani yeching. $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

A) 12 B) 10 C) 6 D) 7

2.12. Kombinator konfiguratsiyalar

O'rin almashtirishlar gruppasi yoki simmetrik gruppa deb nomlanuvchi muhim bir gruppani qarab chiqamiz. Bu ko'rinishdagi misollarni frantsuz matematigi Evarist Galua (1811-1832) tadqiq qilgan.

x_1, x_2, x_3 uchta element berilgan bo'lsin. Bu elementlardan 6 ta o'rin almashtirish tuzish mumkin: $x_1x_2x_3, x_1x_3x_2, x_2x_1x_3, x_2x_3x_1, x_3x_1x_2, x_3x_2x_1$. Ixtiyoriy ikkita o'rin almashtirishni ustma-ust yozib, o'rinlashtirish hosil qilamiz. Masalan:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

Bu jadval $\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_1)\}$ binar munosabatni bildiradi. Barcha mumkin bo’lgan o’rinlashtirishlar o’rin almashtirishlar soniga teng bo’ladi. Mumkin bo’lgan 6 ta o’rinlashtirishni quyidagicha belgilaymiz:

$$a=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$d=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

O’rinlashtirishlar ustida 2 o’rinli ko’paytirish amalini aniqlaymiz.

2 ta o’rinlashtirish ko’paytmasi deb, oldin birinchi keyin ikkinchi o’rinlashtirishlarni ketma-ket bajarish natijasida olingan o’rinlashtirishga aytiladi. Masalan:

$$c\times b=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}=e\,.$$

Barcha mumkin bo’lgan ko’paytirish natijalari jadvalda keltirilgan:

α	β					
	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***
a	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
b	*b*	*a*	*d*	*c*	*f*	*e*
c	*c*	*e*	*a*	*f*	*b*	*d*
d	*d*	*f*	*b*	*e*	*a*	*c*
e	*e*	*c*	*f*	*a*	*d*	*b*
f	*f*	*d*	*e*	*b*	*c*	*a*

Misol. $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ va $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ o’rin almashtirishlar superpozitsiyasini toping.

Yechilishi: $$g\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$e(x)=x$ ko’rinishidagi o’rin almashtirishga **ayniy o’rin almashtirish** deyiladi.

Masalan, $$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Birinchi va ikkinchi satr elementlari o’rnini almashtirish bilan hosil qilingan o’rin almashtirishga **teskari o’rin almashtirish** (teskari funktsiya) deyiladi.

Misol. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ga teskari o’rinlashtirishni tuzamiz:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \text{tartiblab qo'yamiz} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.13. To’plamlarni bo’laklarga ajratish

Ushbu mavzu to’plamlar nazariyasi bo’limida qaralmadi, chunki, bo’laklarga ajratish masalasi biroz murakkab bo’lib, uni hisoblash formulalari kombinatorika formulalaridan kelib chiqadi.

Aytaylik, $\Im = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ to’plam m ta elementdan iborat X to’plamning o’zaro kesishmaydigan n ta qism to’plamga **ajratilgan bo’laklari** bo’lsin. Bunda $B_i \subset X$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = X$, $B_i \neq \varnothing$, agar $i \neq j$ bo’lsa, $B_i \cap B_j = \varnothing$.

B_i qism to’plamlar bo’lakning **bloklari** deyiladi. Bo’sh bo’lmagan bloklarga ega bo’laklar bilan ekvivalentlik munosabati o’rtasida o’zaro bir qiymatli akslantirish mavjud.

Agar E_1 va E_2 X to’plamning bo’laklari bo’lib, har bir E_2 blok E_1 bloklarning birlashmasidan iborat bo’lsa, u holda E_1 bo’lak E_2 ning **maydalangan bo’lagi** deyiladi. Maydalangan bo’laklar qisman tartiblangan bo’ladi.

2-tur Stirling sonlari [7]: (J.Stirling (1699-1770))

m ta elementli to’plamning n ta bo’lakka ajratish soniga 2-**tur Stirling soni** deyiladi va quyidagicha belgilanadi: S_m^n (katta harf bilan yoziladi).

Ta’rifga ko’ra $S_m^m = 1, \quad m > 0 \quad \text{bo'lsa} \quad S_m^0 = 0,$

$$S_0^0 = 1, \quad n > m \quad \text{bo'lsa} \quad S_m^n = 0.$$

Teorema. 2-tur Stirling sonlari uchun quyidagi tenglik o’rinli:

$$S_m^n = S_{m-1}^{n-1} + nS_{m-1}^n .$$

[7] **Novikov F. A. Diskretnaya matematika dlya programmistov.ZAO Izdatelьskiy dom «Piter», 2007**. 78–c.

Isboti: $\Im$ to'plam $M=\{1,2,...,m\}$ to'plamning n ta blokka ajratilgan bo'laklari bo'lsin.

$$\Im_1=\{X\in\Im \mid \exists B\in X \quad (B=\{m\})\},\quad \Im_2=\{X\in\Im \mid \neg\exists B\in X \quad (B=\{m\})\},$$

ya'ni m ta element alohida blok hosil qiladigan bo'lak $\Im_1$ ga, qolgan barcha bo'laklar $\Im_2$ ga tegishli bo'ladi.

Bundan $\Im_2=\{X\in\Im \mid \mathrm{m}\in X \Rightarrow |X|>1\}$ ekanligi ma'lum. U holda $\Im=\Im_1\cup\Im_2$, $\Im_1\cap\Im_2=\varnothing$ o'rinli. Barcha $\Im_2$ bo'laklar quyidagicha hosil qilinadi: $\{1,2,...,m-1\}$ to'plamning barcha bo'laklari n ta blokka ajratiladi, ular S_{m-1}^n ta bo'ladi va har bir blokka navbat bilan m- element joylashtiriladi. Natijada

$$S_m^n=|\Im|=|\Im_1|+|\Im_2|=S_{m-1}^{n-1}+nS_{m-1}^n$$

tenglik hosil bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Teorema. 2-tur Stirling soni uchun $S_m^n=\sum_{i=n-1}^{m-1}C_{m-1}^iS_i^{n-1}$ tenglik o'rinli.

Isboti: $\Im$ to'plam $M=\{1,2,...,m\}$ to'plamning n ta blokka ajratilgan bo'laklari bo'lsin. $\overline{B}=\{B\subset 2^M \mid m\in B\}$ to'plamlar oilasini qaraymiz. U holda $\Im$ to'plam $\Im=\bigcup_{B\in\overline{B}}\Im_B$ ko'rinishida bo'ladi, bunda $\Im_B=\{X \mid X\in\Im \text{ va } B\in X\}$ va agar $B^{|}\neq B^{||}$ bo'lsa, $\Im_{B^{|}}\cap\Im_{B^{||}}=\varnothing$, ya'ni o'zaro kesishmaydi. Aytaylik, $B\in\overline{B}$ va $b=|B|$ bo'lsin.

U holda $\Im_B$ ning quvvati $|\Im_B|=S_{m-b}^{n-1}$ ga teng bo'ladi. $|\{B\in\overline{B} \mid b=|B|\}|=C_{m-1}^{b-1}$ ekanligidan

$$S_m^n=|\Im|=\sum_{b-1}^{m-(n-1)}\left|\bigcup_{B\in\overline{B},|B|=b}\Im_B\right|=\sum_{b=1}^{m-(n-1)}C_{m-1}^{b-1}S_{m-b}^{n-1}=\sum_{i=m-1}^{n-1}C_{m-1}^{m-i-1}S_i^{n-1}=\sum_{i=n-1}^{m-1}C_{m-1}^iS_i^{n-1}$$

tenglik hosil bo'ladi, bu yerda $i=m-b$.

Teorema isbotlandi.

1-tur Stirling sonlari: Syur'yektiv funktsiyalar soni, ya'ni m ta predmetni n ta idishga taqsimlash soniga 1-**tur Stirling soni** deyiladi (bunda idishlarning barchasi band qilingan bo'ladi) va quyidagicha belgilanadi: s_m^n (kichik harf bilan yoziladi).

Teorema. 1-va 2-tur Stirling sonlari o'rtasida $s_m^n=n!S_m^n$ bog'liqlik o'rinli.

Isboti: $\{1,2,...,m\}$ to'plamning har bir bo'lagiga to'plamlar oilasi syur'yektiv funktsiya sifatida mos qo'yiladi. Shunday qilib, turli to'plamlar oilasining syur'yektivlik darajasi – bu 2-tur Stirling sonidir S_m^n. Barcha syur'yektiv funktsiyalar soni esa $s_m^n = n!S_m^n$ ga teng.

Teorema isbotlandi.

Bell soni: (Erik Bell (1883-1960)).

m ta elementli to'plamning barcha bo'laklar soni **Bell soni** deyiladi va $B(m)$ ko'rinishida belgilanadi:

$$B(m) = \sum_{n=0}^{m} S_m^n \text{ va } B(0) = 1.$$

Teorema. Bell soni uchun $B(m+1) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i B(i)$ tenglik o'rinli.

Isboti: $\mathfrak{I}$ to'plam $M_1 = \{1,2,...,m+1\}$ to'plamning barcha bo'laklari to'plami bo'lsin. M_1 to'plamning $m+1$ elementdan iborat qism to'plamlari to'plamini qaraylik:

$$\overline{B} = \{B \subset 2^{M_1} \mid m+1 \in B\}.$$

U holda $\mathfrak{I}$ to'plam $\mathfrak{I} = \bigcup_{B \in \overline{B}} \mathfrak{I}_B$ ko'rinishida bo'ladi, bunda

$$\mathfrak{I}_B = \{X \in \mathfrak{I} \mid B \in X\}.$$

Aytaylik, $B \in \overline{B}$ va $b = |B|$ bo'lsin. U holda $\mathfrak{I}_B$ ning quvvati $|\mathfrak{I}_B| = B(m+1-b)$ ga teng bo'ladi. $|\{B \in \overline{B} \mid b = |B|\}| = C_m^{b-1}$ ekanligidan

$$B(m+1) = |\mathfrak{I}| = \sum_{b=1}^{m+1} C_m^{b-1} B(m-b+1) = \sum_{i=m}^{0} C_m^{m-i} B(i) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i B(i)$$

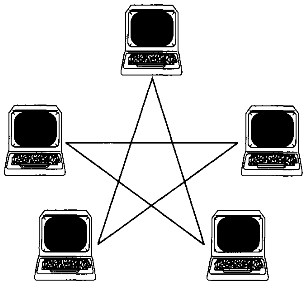
tenglik hosil bo'ladi, bu yerda $i = m - b + 1$.

Teorema isbotlandi.

Nazorat uchun savollar:

1. 1-tur Stirling soni deb qanday sonlarga aytiladi?
2. 2-tur Stirling soni deb nimaga aytiladi?
3. 1- va 2-tur Stirling sonlari bir-biri bilan qanday bog'langan?
4. Bell soni deb nimaga aytiladi?
5. E.Galuaning simmetrik gruppalarini tushuntirib bering.
6. O'rinlashtirishlar ustida ikki o'rinli ko'paytirish amali qanday aniqlanadi?
7. O'rin almashtirishlar superpozitsiyasi qanday topiladi?
8. To'plamlarni bo'laklari deganda nimani tushunasiz?
9. To'plamning bo'laklari va bloklari farqini tushuntiring.

3. GRAFLAR NAZARIYASI

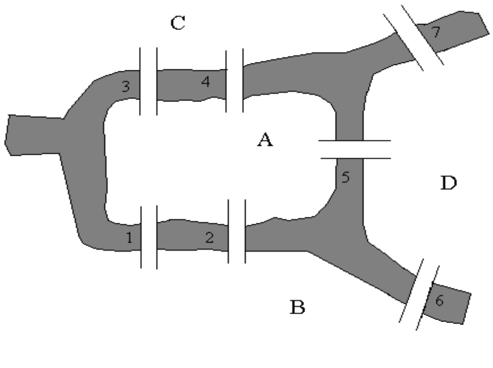


3.1. Kirish

Graflar nazariyasi – diskret matematikaning bir bo'limi bo'lib, unda ob'yektlarni o'rganish masalalarida geometrik yondashuv asosiy o'rin tutadi.

Graflar nazariyasi temir yo'l tarmoqlari, telefon yoki kompyuter tarmoqlari, irrigatsiya sistemalari kabi murakkab sistemalarning funktsiyalarini analiz qilish uchun qo'llaniladi. Shuningdek, ushbu nazariya iqtisodiy va rejali ishlab chiqarish sohalarida, ishlab chiqarishni boshqarishni avtomatlashtirishda juda ham samaralidir.

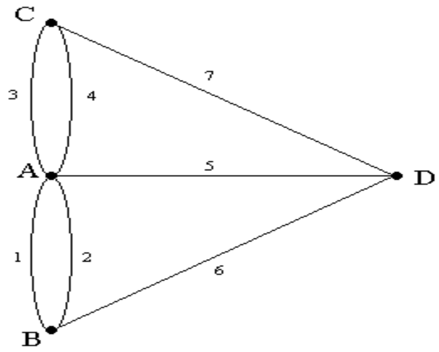
XVIII asrda mashhur shvetsariyalik matematik L.Eyler (1707-1783) Kyonigsberg ko'prigi haqidagi masalani yechish uchun birinchi marta grafdan foydalanadi. Hozirda bu masala klassik yoki Eyler masalasi nomi bilan mashhur: Shu davrda Kyonigsberg shahrida 2 ta orol bo'lib, ular Pregol daryosining 7 ta ko'prigi bilan birlashtirilgan edi. Masala quyidagicha qo'yilgan: "Shahar bo'ylab shunday sayr uyushtirish kerakki, bunda har bir ko'prikdan bir martadan o'tib, yana sayr boshlangan joyga qaytib kelish kerak".



Eski Kyonigsberg shahri sxemasi

3.1-chizma. Kyonigsberg ko'priklari modeli

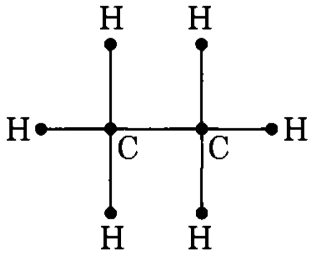
Eyler bunday sayr marshrutining yo'qligini 1736 yildayoq chizmalar tarzida isbotlab berdi.



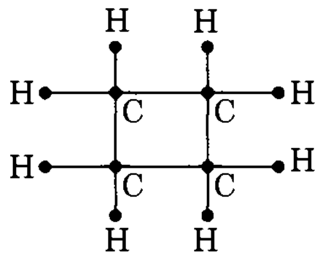
3.2-chizma. Kyonigsberg ko'priklari grafi

Eyler maqolasi e'lon qilingandan 100 yil o'tganidan keyin XIX asrning o'rtalarida elektr tarmoqlarini, kristall panjaralarni, molekula tuzilishini tadqiq qilishda graflar nazariyasining o'rganish ob'yektlari paydo bo'la boshladi.

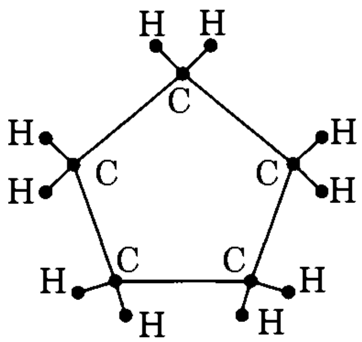
S_2N_6 – etan



S_4N_8 – tsiklobutan



S_5N_{10} – tsiklopentan



3.3-chizma. S_2N_6, S_4N_8, S_5N_{10} graflari.

Keyinchalik 1936 yilda vengeriyalik matematik D. Kyonig o'zining graflar nazariyasiga bag'ishlangan monografiyasida yuqoridagi sxemalarni "graf" deb nomlaydi.

Umuman olganda, qo'yilgan masalani yechish uchun qurilgan model – **grafdir**. Graf uchlar to'plami va uchlarni tutashtiruvchi qirralar to'plamidan iborat bo'ladi.

Eyler masalasida (3.2-chizma) A, B, C, D uchlar orol va daryo qirg'oqlarini ifodalaydi, 1 dan 7 gacha raqamlar bilan belgilangan qirralar esa 7 ta ko'prikni bildiradi.

Bir uchdan chiqib, har bir qirradan rosa bir martadan o'tib, yana shu uchga qaytib keluvchi marshrut chizmasiga **Eyler grafi** deyiladi.

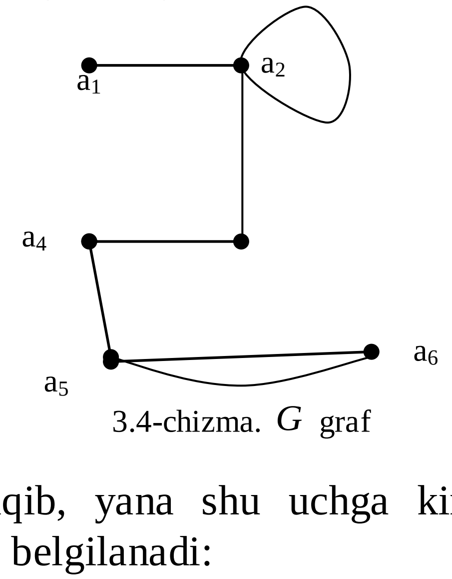
XX asrning elliginchi yillaridan boshlab kibernetika va hisoblash texnikasining rivojlanishi bilan umumiy graflar nazariyasiga doir ishlanmalar ham yaratila boshlandi. Shu davrdan graflar nazariyasining masalalari va o'rganish metodlari shakllandi.

3.2. Yo'naltirilgan va yo'naltirilmagan graflar

Bo'sh bo'lmagan $U=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ uchlar to'plami va $Q=\{(a_{i1},a_{j1}),...,(a_{ik},a_{jk})\}$ qirralar to'plamidan tuzilgan tartiblangan $G=(U,Q)$ juftlikka **oddiy graf** deyiladi. U to'plamning elementlari $a_1,a_2,...,a_n$ lar **grafning uchlari**, Q to'plamning $(a_{i1},a_{j1}),...,(a_{ik},a_{jk})$ juftliklari **grafning qirralari** deyiladi.

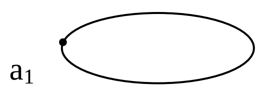
Grafning ikkita uchini birlashtiruvchi chiziqqa q**irra** deyiladi, agar (a_i,a_j) qirra berilgan bo'lsa, u holda a_i va a_j **uchlar birlashtirilgan** deyiladi.

Misol. Agar $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ va
$Q=\{(a_1,a_2),(a_2,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_4),(a_4,a_5),(a_5,a_6),(a_6,a_5)\}$ bo'lsin, u holda U va Q to'plam quyidagi G grafni hosil qiladi.



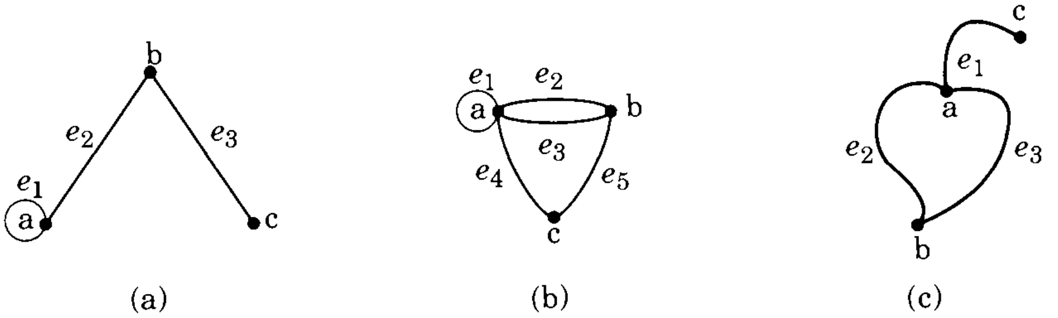
3.4-chizma. G graf

Bitta uchdan chiqib, yana shu uchga kiruvchi qirraga **ilmoq** deyiladi va (a_i,a_i) kabi belgilanadi:



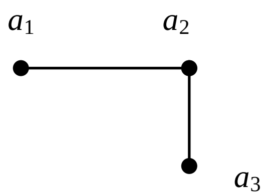
3.5-chizma. Ilmoq

Grafning ikkita uchi umumiy qirra bilan o'zaro bog'langan bo'lsa, ular **qo'shni uchlar** deyiladi. Agar grafning ikkita qirrasi umumiy uchga ega bo'lsa, ular **qo'shni qirralar** deyiladi. Quyida turli ko'rinishdagi graflar keltirilgan:



3.6-chizma. Uchlari a,b,c va qirralari e_1,e_2,e_3,e_4,e_5

($a_1;a_2$) qirra ($a_2;a_3$) qirraga qo'shni, chunki a_2 uch ular uchun umumiy.

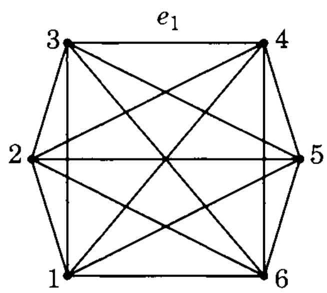


Uchlari qirralar bilan bog'lanmagan grafga **nolgraf** deyiladi.

$\bullet a_1$ $\bullet a_2$

$\bullet a_3$ $\bullet a_4$

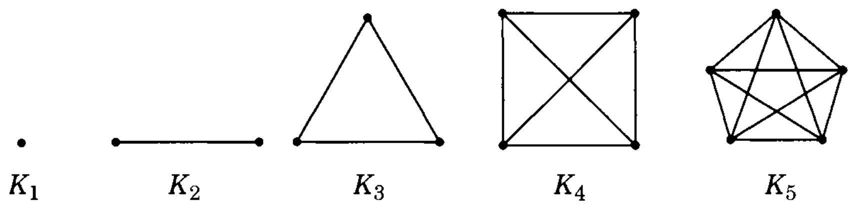
Misol. Fuqaro **o'**zining qaysi regionda ekanligini bildirish maqsadida o'zi yashaydigan harbiy bo'limga borib, ro'yxatdan o'tib qo'yadi. Toshkent shahridagi harbiy bo'limlar (1) Chilonzor, (2) Yunusobod, (3) M.Ulug'bek, (4) Olmazor, (5) Shayhontoxur, (6) Uchtepa tumanlarida mavjud bo'lsin. Har bir bo'limdagi kompyuter telefon simi orqali o'zaro bog'langan. Kompyuterlar to'rini graf yordamida quyidagicha tasvirlash mumkin:



3.7-chizma. Kompyuterlar to’ri

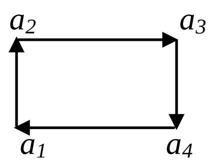
Agar grafning barcha uchlari o’zaro bog’langan bo’lsa, unga **to’liq graf** deyiladi.

n ta uchga ega to’liq graf K_n ko’rinishida belgilanadi:

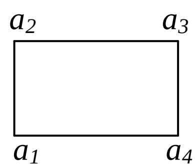


3.8-chizma. K_n to’liq graflar

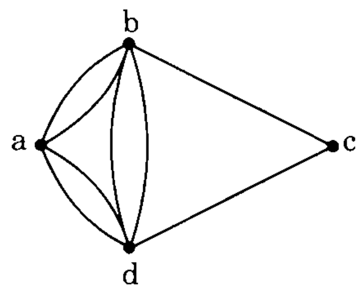
Agar grafning barcha qirralarida yo’nalish ko’rsatilgan bo’lsa, unga **yo’naltirigan graf** deyiladi. Yo’naltirilgan graflarda uchlarni tutashtiruvchi qirralarga **yoylar** deyiladi.



Agar grafning qirralarida yo’nalish ko’rsatilmagan bo’lsa, unga **yo’naltirilmagan graf** deyiladi.



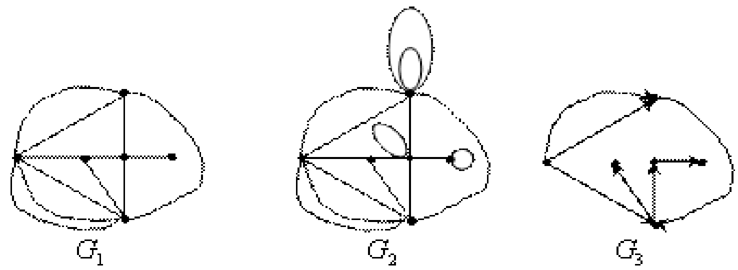
Ikkita uchni tutashtiruvchi bir nechta qirralar **karrali qirralar** deyiladi.



3.9-chizma. Karrali qirralarga ega graf

Karrali qirralarga va ilmoqqa ega bo'lmagan, chekli sondagi qirralar va uchlardan iborat graf **oddiy graf** deyiladi.

Agar grafda karrali qirralar mavjud bo'lsa, bunday grafga **multigraf** deyiladi. Agar grafda karrali qirralar bilan birga uchni o'z-o'zi bilan tutashtiruvchi ilmoqlar ham mavjud bo'lsa, bunday grafga **psevdograf** deyiladi.



3.10-chizma.

G_1 – multigraf, G_2 – psevdograf, G_3 – orientirlangan multigraf.

Agar berilgan uch qirraning oxiri bo'lsa, qirra va uch **intsident** deyiladi.

Nazorat uchun savollar:

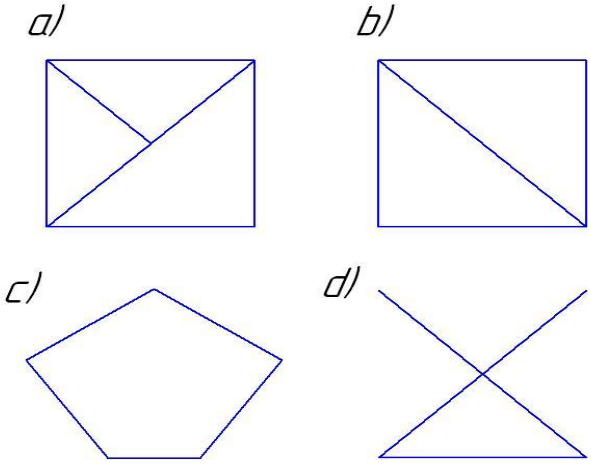
1. Graflar nazariyasining kelib chiqish tarixi qanday?
2. Oddiy graf deb nimaga aytiladi?
3. Graf ta'rifini ayting.
4. Ilmoq, karrali qirra tushunchalariga ta'rif bering.
5. Multigraf, psevdograf ta'rifini keltiring.
6. To'liq graf nima?
7. To'liq graf turlarini chizing.

3.3. Qism graf. Izomorfizm

G^* graf G grafning q**ismi** deyiladi, agarda G^* ning uchlari to'plami G ga tegishli bo'lsa, ya'ni $U^* \subseteq U$ bo'lsa, hamda G^* ning barcha qirralari G ning ham qirralari bo'lsa, ya'ni $Q^* \subset Q$.

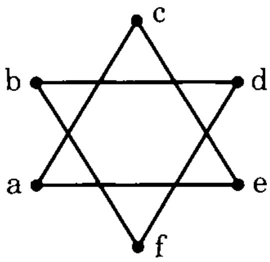
Misol. Quyida berilgan b), c), d) graflar ichidan a) grafning qism grafini toping.

Yechilishi: b) va c) graflar a) grafning qismi bo'ladi. d) esa a) ning qism grafi bo'la olmaydi.



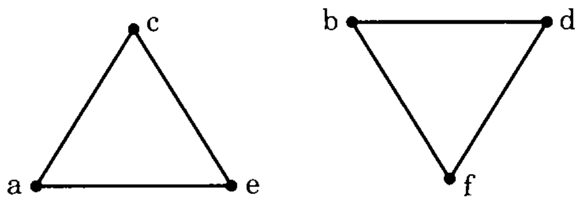
2.10-chizma.

Misol. 2.11-rasmda berilgan grafning qism graflarini ajrating.



2.11-chizma.

Yechilishi:

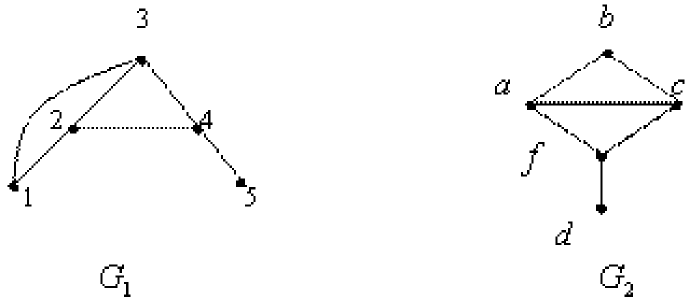


G^* graf G g**rafning to'ldiruvchisi** deyiladi, agarda uning barcha uchlari G grafga tegishli bo'lib, birorta ham qirrasi G ga tegishli bo'lmasa.

Agar graflarning uchlari to'plami orasida qo'shnilik munosabatini saqlovchi biyektsiya mavjud bo'lsa, bu ikkita g**raf izomorf** deyiladi. G graf H grafga izomorf bo'lsa, $G \cong H$ kabi belgilanadi.

Misol. Quyidagi chizmada $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ qo'shnilik munosabatini saqlovchi biyektsiya

$\varphi(1)=b,\ \varphi(2)=a,\ \varphi(3)=c,\ \varphi(4)=f,\ \varphi(5)=d$ mavjud bo’lgani uchun $G_1 \cong G_2$ izomorf bo’ladi:



Agar graf o’zining to’ldiruvchisiga izomorf bo’lsa, graf o’zini o’zi **to’ldiruvchi** deyiladi.

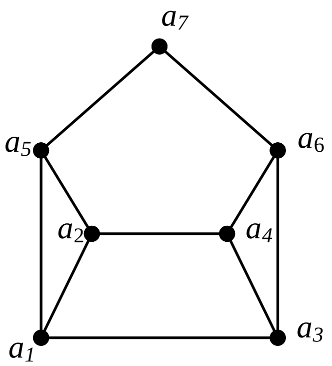
3.4. Qo’shnilik matritsasi

1) Faraz qilaylik, G **yo’naltirilmagan graf** bo’lsin.

Ustunlariga ham qatorlariga ham grafning uchlarini mos qo’yish bilan quyidagi qoida asosida tuzilgan A_{ij} matritsaga grafning **qo’shnilik matritsasi** deyiladi:

$$A_{ij}=\begin{cases} k, & \text{agar } a_i \text{ va } a_j \text{ uchlar } k \text{ ta qirra bilan birlashgan bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } a_i \text{ va } a_j \text{ uchlar birlashmagan bo'lsa} \end{cases}$$

Misol. Quyidagi yo’naltirilmagan grafning qo’shnilik matritsasini tuzing:



$$\begin{array}{c} \\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\\ a_6\\ a_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

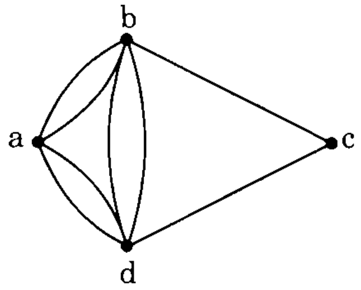
Har bir qatordagi qirralar yig’indisi mos uchning darajasini bildiradi. Masalan, deg(A)=3, deg(B)=5.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array} \quad \text{row sum} \\
\mathrm{A}= \begin{array}{c} \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 5 \quad \leftarrow \deg(\mathrm{B}) \\ 3 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Teorema [8]**.** n ta $v_1, v_2, ..., v_n$ uchga ega bo'lgan G graf qirralarini e bilan belgilasak, uchlar darajalari yig'indisi qirralarning ikkilanganiga teng:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2e$$

Misol. Chizmada ko'rsatilgan graf uchlarining darajalar yig'indisi= 4 + 5 + 2 + 5 = 16. Demak, qirralar soni 16/2 = 8.



2) G <u>**yo'naltirilgan graf**</u> uchun ustunlariga ham qatorlariga ham grafning uchlarini mos qo'yish bilan quyidagi qoida asosida tuzilgan A_{ij} matritsaga grafning **qo'shnilik matritsasi** deyiladi:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } a_i \text{ uch } a_j \text{ uchning boshlanishi bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } a_i \text{ uch } a_j \text{ uchga qo'shni bo'lmasa va } a_i \text{ uch } a_j \text{ uchning oxiri bo'lsa} \end{cases}$$

Qo'shnilik matritsasining diagonalida turgan birlar grafning ilmoqlariga mos keladi. Izolyatsiyalangan uchga nollardan tashkil topgan satr va ustun mos keladi.

Qo'shnilik matritsasidagi birlar soni grafdagi qirralar soniga teng.

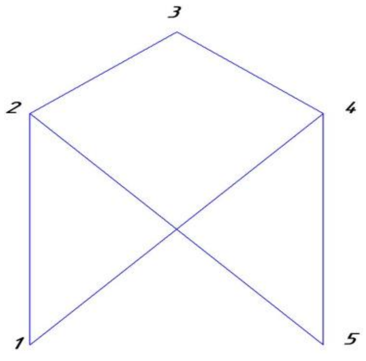
Misol. Uchlari $U = \{1;2;3;4;5\}$ va qirralari

$$V = \{(1;2),(1;4),(2;3),(3;4),(2;5),(4;5)\}$$

bo'lgan $G(U,V)$ **g**rafni yasang.

[8] **Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, 541–p.**

Yechilishi:



$$A_{5,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

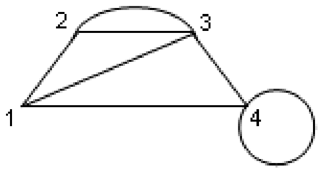
Matritsa bilan berilgan grafni yasash uchun matritsa diagonalida joylashgan elementlarni bilish yetarli.

MISOL VA MASALALAR

1. Berilgan qo'shnilik matritsasiga ko'ra grafning tasvirini toping:

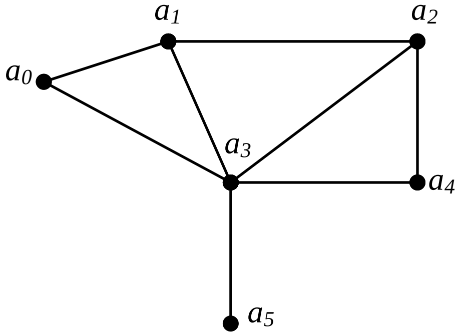
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Rasmda tasvirlangan graflar uchun qo'shnilik matritsasini yozing:

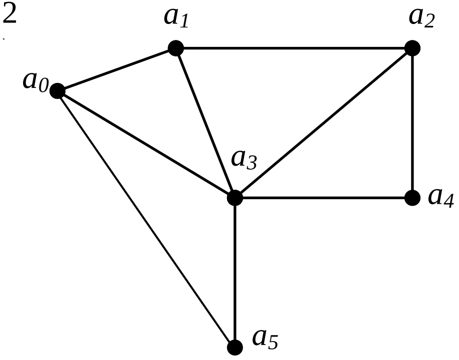


3. Rasmda tasvirlangan graflar uchun qo'shnilik matritsasini yozing:

1



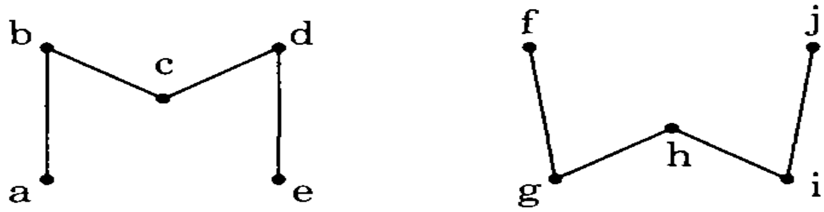
2



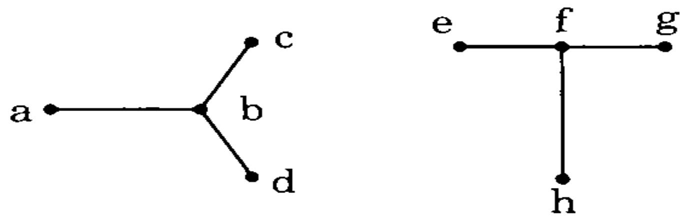
Quyidagi graflar izomorfmi? Agar izomorf bo'lsa, ular orasidagi qo'shnilik munosabatini saqlovchi biyektsiyani ko'rsating(1-14):

1.

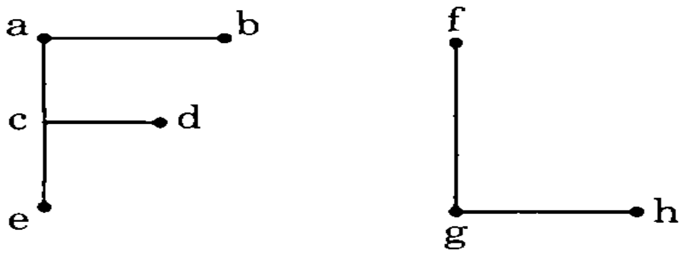
2.



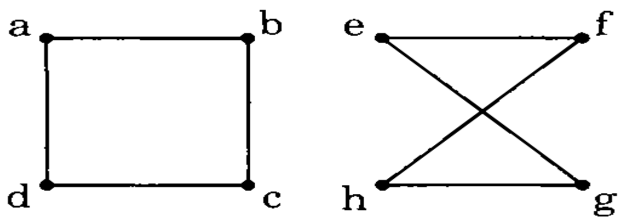
3.



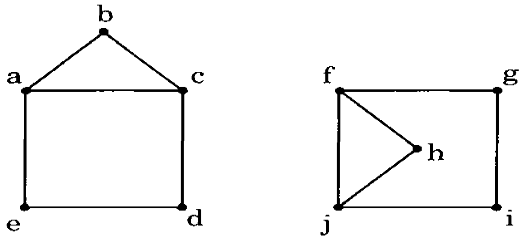
4.



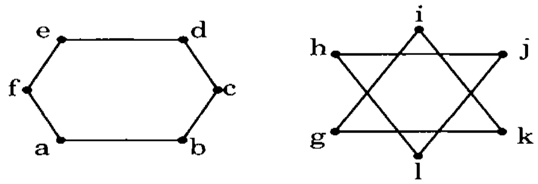
5.



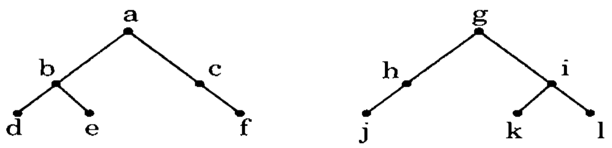
6.



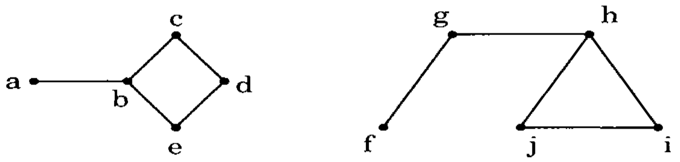
7.



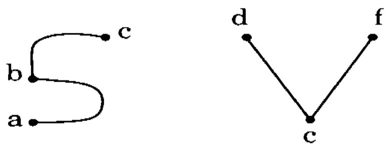
8.



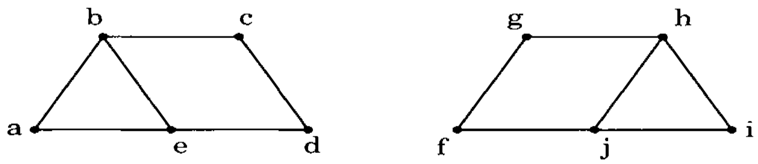
9.



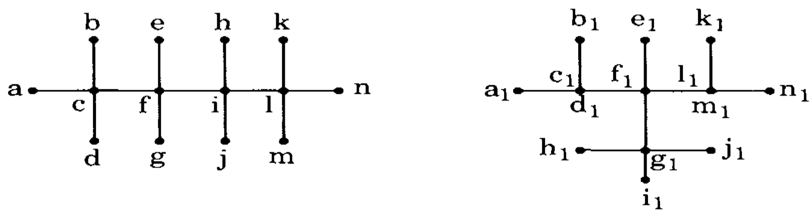
10.



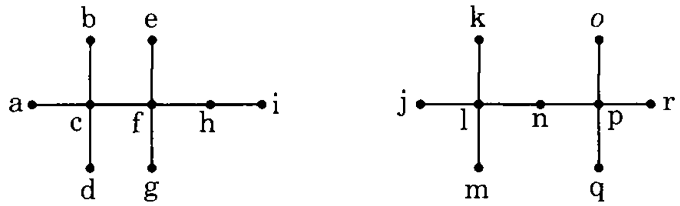
11.



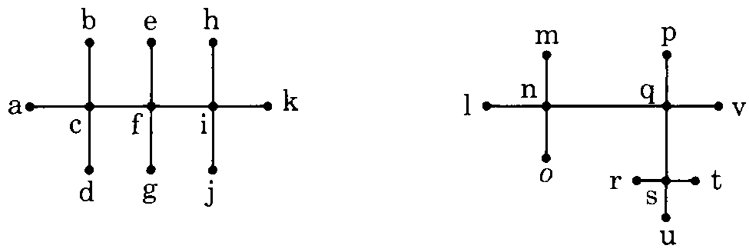
12.



13.



14.



15. Berilgan qo'shnilik matritsasiga ko'ra graf tasvirini chizing:

a)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Test savollari:

1. K_{12} to'liq grafda qirralar sonini toping.
   A) 24 B) 12 C) 66 D) 120

2. $K_{4,13}$ ikki karrali to'liq grafda qirralar sonini toping.
   A) 4 B) 13 C) 17 D) 52

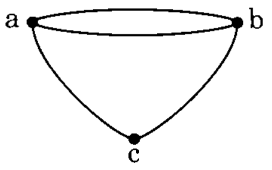
3. $K_{6,6}$ ikki karrali grafda bitta uchga qo'shni bo'lgan uchlar sonini toping.
   A) 2 B) 3 C) 5 D) 6

4. K_7 to'liq grafning bitta uchiga intsident qirralari sonini toping.
   A) 7 B) 6 C) 5 D) 8

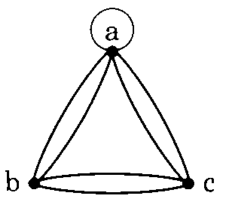
5. K_6 to'liq grafdagi har bir uch darajasi nimaga teng?
   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

6. Qaysi biri oddiy graf?

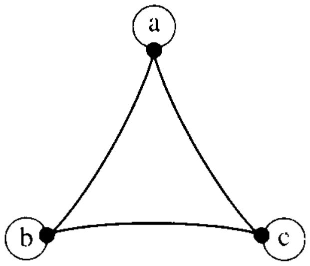
1.



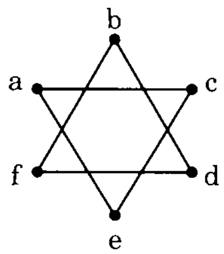
2.



3.



4.



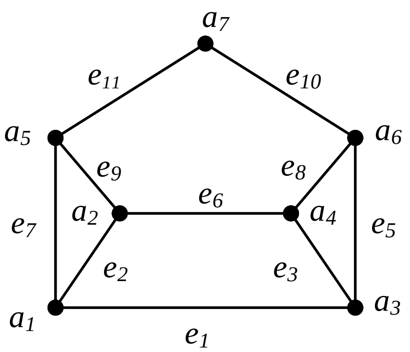
3.5. Intsidentlik matritsasi

<u>Yo’naltirilmagan,</u> uchlari $\{v_1,...,v_n\}$ bo’lgan chekli G grafning **intsidentlik matritsasi** $\|A_{ij}\|$ $(i=1,...,m,\ j=1,...,n)$ deb, m ta qator va n ta ustundan iborat quyidagi matritsaga aytiladi:

a) A_{ij} matritsaning satrlariga G ning uchlari, ustunlariga esa qirralari mos qo’yiladi;

b) $$A_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } e_i \text{ qirra } a_j \text{ uchga intsident bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } e_i \text{ qirra } a_j \text{ uchga intsident bo'lmasa}\end{cases}$$

Misol.



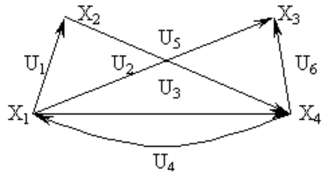
$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

<u>Yo’naltirilgan,</u> uchlari $\{v_1,...,v_n\}$ bo’lgan chekli G grafning **intsidentlik matritsasi** $\|A_{ij}\|$ $(i=1,...,m,\ j=1,...,n)$ deb, m ta qator va n ta ustundan iborat quyidagi matritsaga aytiladi:

a) A_{ij} matritsaning satrlariga G ning uchlari, ustunlariga esa qirralari mos qo’yiladi;

b) $$A_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } a_j \text{ uch } e_i \text{ qirraning boshi bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } a_j \text{ uch } e_i \text{ qirraga intsident bo'lmasa;}\\ \text{-}1, & \text{agar } a_j \text{ uch } e_i \text{ qirraning oxiri bo'lsa}\end{cases}$$

Misol. Rasmda tasvirlangan graf uchun intsidentlik matritsasini yozing:



Yechilishi: Intsidentlik matritsasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Nazorat uchun savollar:

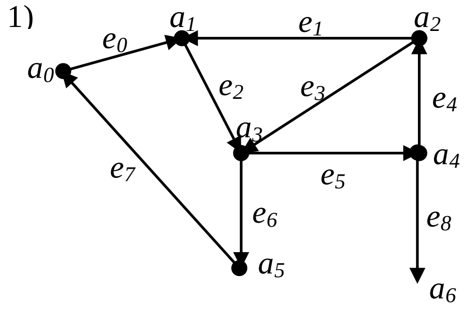
1. Qism grafga ta'rif bering.
2. To'ldiruvchi graf deb nimaga aytiladi?
3. Izomorf graflar deganda nimani tushunasiz?
4. Yo'naltirilmagan graf uchun qo'shnilik matritsasini tushuntiring.
5. Yo'naltirilgan graflarda qo'shnilik matritsasi ta'rifini ayting.
6. Ilmoqlar va qirralar sonini qanday aniqlash mumkin?
7. Yo'naltirilmagan graf uchun intsidentlik matritsasini tushuntiring.
8. Yo'naltirilgan graflarda intsidentlik matritsasi ta'rifini ayting.

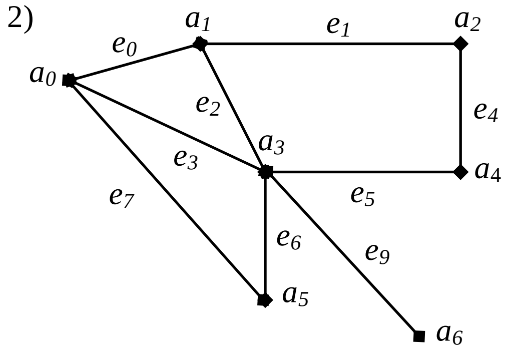
MISOL VA MASALALAR

1. Berilgan intsidentlik matritsasiga ko'ra grafning tasvirini toping:

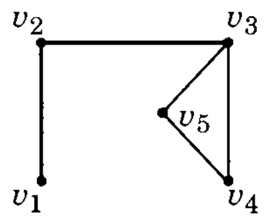
$$A_u = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

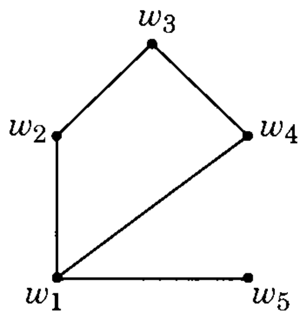
2. Quyidagi yo'naltirilgan va yo'naltirilmagan graflar uchun intsidentlik matritsalarini aniqlang:





3. Quyidagi graflar izomorfmi? Izomorf bo'lsa, biyektsiyani yozing.





Test savollari:

1. Oddiy graf 8 uchga ega bo'lsa, uning uchlari qanday darajali bo'ladi?

A) 8,6,5,4,4,3,2,2; V) 4,4,3,3,2,2,2,2;
C) 7,7,5,5,4,2,2,1; D) 6,6,6,5,5,3,2,0.

2. Oddiy graf 7 uchga ega bo'lsa, uning uchlari qanday darajali bo'ladi?

A) 7,6,5,4,4,3,2; V) 5,5,4,3,2,1,1;
C) 5,5,5,5,4,2,1; D) 6,6,6,6,5,5.

3. Oddiy graf 6 uchga ega bo'lsa, uning uchlari qanday darajali bo'ladi?

A) 6, 5, 4, 4, 3, 2; V) 5,3,3,2,1,1;
C) 5, 5, 5, 5, 4, 4; D) 5, 4, 3, 2, 1, 0.

3.5. Yo'naltirilgan graflarda kuchli bog'langanlik

Graf **bog'liq** deyiladi, agarda unda ixtiyoriy ikkita uchni biror marshrut birlashtirib tursa. Istalgan grafni bog'liq bo'lgan qism graflarga ajratish mumkin. Bunday bog'lovchi komponentlarning minimal soniga grafning **bog'liqlilik soni** deyiladi va $c(G)$ kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik, $G=(V,E)$ graf berilgan bo'lsin. Ushbu grafning $c=c(G)$ **bog'liqlilik komponentlari sonini hisoblash algoritmi** quyidagicha bo'ladi [9]:

begin
  $V' := V$;
  $c := 0$;
  while $V' \neq \varnothing$ do
    begin
      $y = V'$ ni tanlash;
      y marshrut bilan birlashtirilgan barcha uchlarni topish;
      y uchni V' dan olib tashlang va
      mos qirrani E dan olib tashlang;
      $c := c+1$;
    end
end

Eng yaqin qo'shnini topish algoritmi:

begin
  $v \in V$ ni tanlash;
  marshrut $:= v$;
  $w := 0$;
  $v' := v$;
  v' ni belgilash;
  while belgilanmagan uchlar qoladi **do**
    begin
      v' ga eng yaqin
      belgilanmagan uch u ni tanlash;
      marshrut:=marshrut u ;
      $w := w + qirra$ *vazni* $v' \, u$;
      $v' := u$;
      v' ni belgilash;
    end
  marshrut:=marshrut v ;
  $w := w + qirra$ *vazni* $v' \, v$;
end

[9] **Xaggarti R. Diskretnaya matematika dlya programmistov. ZAO RITS Texnosfera», 2003. 124–s.**

3.7. Graf chizish algoritmlari

Tasodifiy yo'naltirilmagan graf chizish algoritmi:

n ta uch va m ta qirradan iborat yo'naltirilmagan grafning qo'shnilik matritsasi M $n\times n$ o'lchamli bo'lib, bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan $2m$ ta R rostlik qiymatlarini qabul qiladi. Ushbu misoldagi graf ilmoqqa ega emas deb qaraymiz, ya'ni ixtiyoriy $i=1,2,...,n$ uchun $M(i,i)=\ddot{E}$. Algoritmning k-qadamida ($k=1,2,...,m$) datchik yordamida matritsaning (i,j) yacheykalarini topuvchi va unga "R" harfini yozib qo'yuvchi tasodifiy sonni olamiz. Agar (i,j) manzildagi yacheykaga bunday harf yozilgan bo'lsa yoki $i=j$ bo'lsa, ushbu qadamni omadsiz hisoblab, m ni bir birlikka oshiramiz.

Input

$n-$ **grafning uchlari soni;**

$m-$ **grafning qirralari soni;**

$M-$ **barcha yacheykalarida "Yo" ni saqlovchi** $n\times n$ **o'lchamli matritsa;**

begin

for $k=1$ **to** m **do**

begin

datchik yordamida tasodifiy r **sonni olish;**

$N:=[n^2 r]+1$**;**

$i:=[N:n]+1$**;**

$j:=N-(i-1)\cdot n$**;**

If $M(i,j):=R$ **and** $i\neq j$ **then**

begin

$M(i,j):=R$**;**

$M(j,i):=R$**;**

end

else $m:=m+1$

end

end

Output $M-$ **yo'naltirilmagan grafning qo'shnilik matritsasi.**

Tasodifiy orgraf (yo'naltirilgan graf) chizish algoritmi:

n ta uch va m ta yoydan iborat orgrafning qo'shnilik matritsasi M $n\times n$ o'lchamli bo'lib, m ta "R" rostlik qiymatini qabul qiladi. Ushbu misoldagi graf ilmoqqa ega emas. Algoritmning har bir k-qadamida ($k=1,2,...,m$) datchik yordamida matritsaning (i,j) yacheykalarini aniqlaydigan va unga "R" harfini yozib qo'yadigan tasodifiy sonni aniqlaymiz. Agar (i,j) manzildagi yacheykaga bunday harf yozilgan bo'lsa yoki $i=j$ bo'lsa, ushbu qadamni omadsiz hisoblab, m ni bir birlikka oshiramiz.

Input
$n-$ **grafning uchlari soni;**
$m-$ **grafning yoylari soni;**
$M-$ **barcha yacheykalarida "Yo" ni saqlovchi $n\times n$ o'lchamli matritsa;**
begin
for $k=1$ **to** m **do**
begin
datchik yordamida tasodifiy r sonni olish;
$N:=[n^2r]+1$**;**
$i:=[N:n]+1$**;**
$j:=N-(i-1)\cdot n$**;**
If $M(i,j):\neq R$ **and** $i\neq j$ **then**
begin
$M(i,j):=R$**;**
end
else $m:=m+1$
end
end
Output orgrafning qo'shnilik matritsasi.

Tasodifiy kontursiz orgraf chizish algoritmi:

n ta uch va m ta yoydan iborat yo'naltirilgan grafning qo'shnilik matritsasi M $n\times n$ o'lchamli bo'lib, m ta "R" rostlik qiymatini qabul qiladi. Ushbu misoldagi graf ilmoqqa ega emas. Algoritmning har bir k-qadamida $(k=1,2,...,m)$ datchik yordamida matritsaning (i,j) yacheykalarini manzillarini aniqlaydigan va $i<j$ holda (i,j) yacheykaga, $i>j$ holda (j,i) yacheykaga "R" harfini yozib qo'yadigan tasodifiy sonni aniqlaymiz. Agar (i,j) manzildagi yacheykaga bunday harf yozilgan yoki $i=j$ bo'lsa, ushbu qadamni omadsiz hisoblab, m ni bir birlikka oshiramiz.

Input
$n-$ **Grafning uchlari soni;**
$m-$ **Grafning yoylari soni;**
$M-$ **barcha yacheykalarida "Yo" ni saqlovchi $n\times n$ o'lchamli matritsa;**
begin
for $k=1$ **to** m **do**
begin

datchik yordamida tasodifiy r **sonni olish;**

$N := [n^2 r] + 1$**;**

$i := [N : n] + 1$**;**

$j := N - (i-1) \cdot n$**;**

if $i \neq j$ **and** $i < j$ **and** $M(i, j) :\neq R$ **then**

$M(i, j) : -R$

if $i \neq j$ **and** $i > j$ **and** $M(i, j) :\neq R$ **then**

$M(j, i) := R$

else $m := m + 1$

end

end

Output M – **yo'naltirilgan kontursiz grafning qo'shnilik matritsasi**.

3.8. Eyler graflari

Qo'shni yoylar ketma-ketligi **yo'l**, qo'shni qirralar ketma-ketligi **zanjir** deyiladi. Yopiq yo'l **kontur** deyiladi, yopiq zanjir esa s**ikl** deyiladi.

L.Eyler 1736 yilda graflar nazariyasining ancha umumiy hisoblangan quyidagi savoliga ham javob topdi: qanday shartlar bajarilganda grafda barcha qirralardan faqat bir marta o'tadigan sikl mavjud bo'ladi?

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o'tadigan zanjir E**yler zanjiri** deb ataladi.

Yopiq Eyler zanjiriga (ya'ni E**yler sikliga**) ega graf E**yler grafi** deyiladi.

Agar grafda yopiq bo'lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Eyler grafi** deyiladi.

Teorema. Graf Eyler grafi bo'lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija. Bog'lamli graf yarim Eyler grafi bo'lishi uchun undagi ikkitadan ko'p bo'lmagan uchlarning darajalari toq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Har bir yoydan faqat bir marta o'tadigan yo'l **orientirlangan Eyler yo'li** deyiladi.

Tarkibida oriyentirlangan Eyler yo'li bor bo'lgan oriyentirlangan graf **oriyentirlangan Eyler grafi** deyiladi.

Eyler zanjirini tuzishning Flyori algoritmi

Qirralari soni n ga teng bo'lgan berilgan Eyler grafida Eyler zanjirini tuzishning **Flyori algoritmini** keltiramiz. Bu algoritmga ko'ra grafning qirralari Eyler siklida uchrashi tartibi bo'yicha 1 dan n gacha raqamlab chiqiladi.

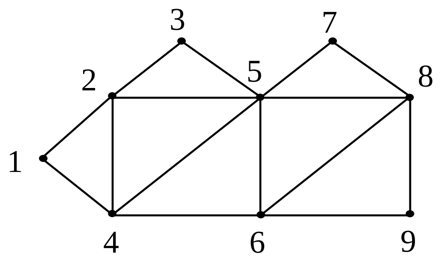
Berilgan Eyler grafi uchun ketma-ketlik Flyori algoritmiga asosan quyidagi ikkita qoida asosida bajariladi:

1. Grafning ixtiyoriy v uchidan boshlab bu uchga intsident bo'lgan istalgan qirraga (masalan, vv' qirraga) 1 raqami beriladi. Bu qirra grafdan olib tashlanadi va v uchdan v' uchga (ya'ni olib tashlangan qirraga intsident uchga) o'tiladi.

2. Oxirgi o'tishdan oldingi o'tish natijasida hosil bo'lgan uch w bo'lsin va oxirgi o'tishda biror qirraga k raqami berilgan deylik. w uchga intsident istalgan qirra imkoni boricha shunday tanlanadiki, bu qirrani olib tashlash grafdagi bog'lamlilikni buzmasin. Tanlangan qirraga navbatdagi ($k+1$) raqami beriladi va bu qirra grafdan olib tashlanadi.

Flyori algoritmiga ko'ra ish yuritish Eyler grafi uchun doimo chekli jarayon ekanligi va bu jarayon doimo grafdan barcha qirralarning olib tashlanishi, ya'ni Eyler zanjirini tuzish bilan tugashi isbotlangan. Shuni ham ta'kidlash kerakki, Flyori algoritmini qo'llash jarayonida qirralarni tanlash imkoniyatlari ko'p bo'lgani uchun, bunday vaziyatlarda, algoritmni qo'llash mavjud Eyler sikllaridan birini topish bilan cheklanadi.

Tushunarliki, Flyori algoritmini takror qo'llab (bunda qirralarni tanlash jarayoni algoritmini avvalgi qo'llashlardagidek aynan takrorlanmasligi kerak) Grafda mavjud bo'lgan barcha Eyler sikllarini topish mumkin.



M i s o l . Quyidagi grafni qaraymiz. Avvalo bu grafning Eyler grafi bo'lishi shartini tekshiramiz.

Yechilishi: Berilgan grafda 9 ta uch bo'lib, 1, 3, 7, 9-uchlarning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8-uchlarning darajasi 4 ga, 5-uchning darajasi esa

6 ga teng. Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalari juftdir. Shuning uchun, 1- teoremaga ko'ra, ushbu graf Eyler grafidir va uning tarkibida Eyler sikli mavjud.

Berilgan grafga Flyori algoritmini qo'llab mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz. Dastlabki uch sifatida grafdagi 1-uchi olingan bo'lsin. Bu uchdan ikki yo'nalishda: $(1;2)$ qirra bo'ylab yoki $(1;4)$ qirra bo'ylab harakatlanish mumkin. Masalan, $(1;2)$ qirra bo'ylab harakatlanib, 2-uchga o'tamiz. Endi harakatni 3 yo'nalishda: yo $(2;3)$ qirra bo'ylab, yo $(2;4)$ qirra bo'ylab, yoki $(2;5)$ qirra bo'ylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, $(2;3)$ qirra bo'ylab harakatlanib, 3-uchga o'tgan bo'laylik. Shu usulda davom etib mumkin bo'lgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi tsiklni hosil qilamiz:

$$((1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,6),(6,9),(9,8),(8,6),$$
$$(6,5),(5,8),(8,7),(7,5),(5,2),(2,4),(4,1)).$$

Eyler grafida Eyler siklini qurish algoritmi

Kirish: $G(V,E)$ eyler grafi qo'shnilik ro'yxati bilan berilgan bo'lsin ($\Gamma[v] - v$ uch bilan qo'shni uchlar to'plami).

Chiqish: eyler siklining uchlar ketma-ketligi.

$S := \varnothing$ {uchlar oqimi}

select $v \in V$ {ixtiyoriy uch}

$v \to S$ {v uchni S oqimga qo'shish}

while $S \neq \varnothing$ **do**

$v :=$ top S {v –oqimning yuqori (tepa) elementi}

if $\Gamma[v] = \varnothing$ **then**

$v \leftarrow S$; yield v {eyler siklining navbatdagi uchi}

else

select $u \in \Gamma[v]$ {qo'shnilik ro'yxatidan birinchi uchni olish}

$u \to S$ {u uchni S oqimga qo'shish}

$\Gamma[v] := \Gamma[v] - u; \Gamma[u] := \Gamma[u] - v$ {(v,u) qirrani o'chirish}

end while

[10] **Novikov F. A. Diskretnaya matematika dlya programmistov.ZAO Izdatelьskiy**

dom «Piter», 2007. 341–c.

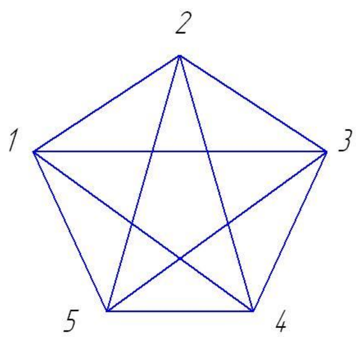
3.9. Graflarda Gamilton siklini izlash masalasi

Irlandiya matematigi U.Gamilton (1805-1865) dodekaedrni tekshirib, uning har bir uchidan faqat bir marta o'tadigan siklni izlab topgan va shu asosda 1859 yilda "Olam bo'ylab sayohat" nomli o'yinni yaratgan.

Grafning har bir uchidan faqat bir marta o'tadigan zanjir **Gamilton zanjiri** deyiladi. Yopiq Gamilton zanjiriga (ya'ni **Gamilton sikliga**) ega graf **Gamilton grafi** deyiladi. Agar grafda yopiq bo'lmagan Gamilton zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Gamilton grafi** deyiladi.

Oriyentirlangan graflarda ham grafning har bir uchidan faqat bir marta o'tuvchi oriyentirlangan sikllarni qarash mumkin.

Quyida K_5 to'liq graf tasvirlangan bo'lib, uning sikli 123451 Gamilton sikli bo'ladi:



Eyler va Gamilton graflari bir-birlariga o'xshash ta'riflansada, grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlaydigan alomat(mezon)ni topish masalasi ancha murakkab muammo hisoblanadi. Hozirgi vaqtgacha graflar nazariyasida grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlovchi shartlarni o'rganish bo'yicha izlanishlar davom etib, bu sohadagi ishlar hanuzgacha dolzarbligini yo'qotmasdan kelmoqda.

Qandaydir shartlarga bo'ysunuvchi graflarda Gamilton sikli mavjudligi haqida bir necha tasdiqlar mavjud. Qator hollarda bu tasdiqlarning isbotlari konstruktiv bo'lganligidan, Gamilton siklini tuzishga doir samarali algoritmlar ham yaratilgan.

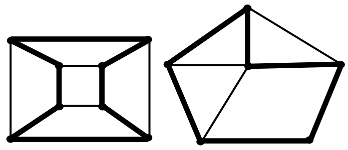
1952 yilda Daniyalik matematik G.E.Dirak (1925-1984) quyidagi teoremani isbotladi:

Teorema 1. Uchlari soni 3 tadan kam bo'lmagan grafdagi istalgan uchning darajasi uchlar sonining yarmidan kam bo'lmasa, bu graf Gamilton grafi bo'ladi.

1960 yilda Norvegiyalik matematik O.Ousten (1899-1968) quyidagi teoremani isbotladi:

Teorema 2. Agar uchlari soni m ga ($m > 2$) teng bo'lgan grafdagi qo'shni bo'lmagan ixtiyoriy uchlar darajalari yig'indisi m dan kam bo'lmasa, u holda bu graf Gamilton grafi bo'ladi.

Misol.



Ushbu graflar Gamilton graflari bo'la oladi. Chunki, bu graflarning har birida bir nechtadan Gamilton sikllari mavjud. Mumkin bo'lgan ba'zi Gamilton sikllari shaklda qalin chiziqlar bilan ifodalangan.

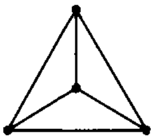
Nazorat uchun savollar:

1. Qanday graflar bog'liq deyiladi?
2. Bog'liqlilik komponentlari soni qanday hisoblanadi?
3. Eng yaqin qo'shnini topish algoritmi qanday bo'ladi?
4. Tasodifiy yo'naltirilmagan graf chizish algoritmini tushuntiring.
5. Tasodifiy orgraf chizish algoritmi qanday bo'ladi?
6. Tasodifiy kontursiz orgraf chizish algoritmini tushuntiring.
7. Yo'l, zanjir, sikl deb nimaga aytiladi?
8. Eyler grafi, Eyler zanjiri haqida gapiring.
9. Gamilton grafi, Gamilton sikli, zanjiriga ta'rif bering.

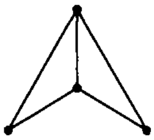
MISOL VA MASALALAR

Quyidagi 1-7- misollarda qaysi graf Eyler grafi bo'ladi?

1.

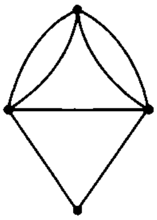


2.

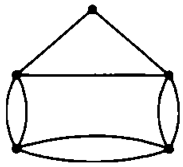


3.

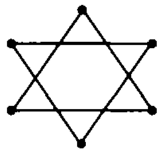
4.



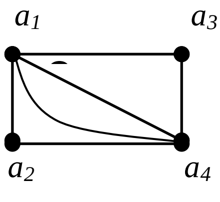
5.



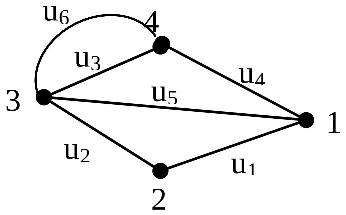
6.



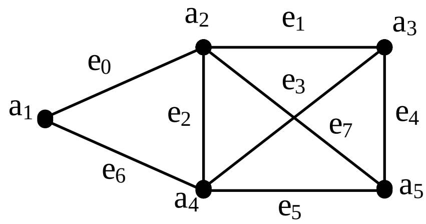
7.



8. Chizmadagi graf uchun keltirilgan marshrutlardan qaysi biri oddiy zanjir bo'ladi?

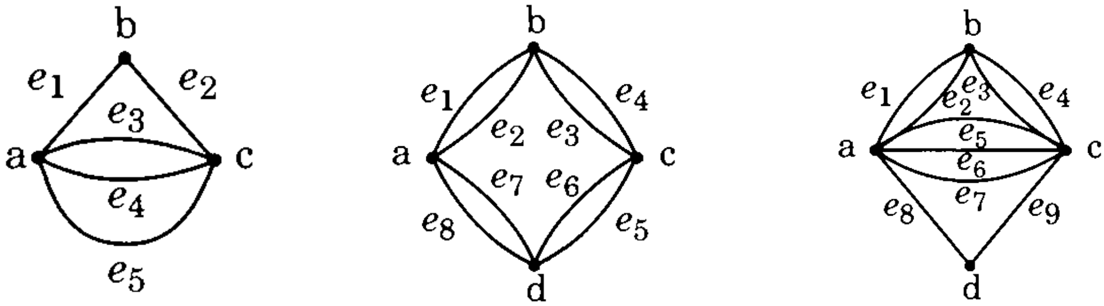


9. Quyidagi graf uchun Gamilton sikli mavjudmi?



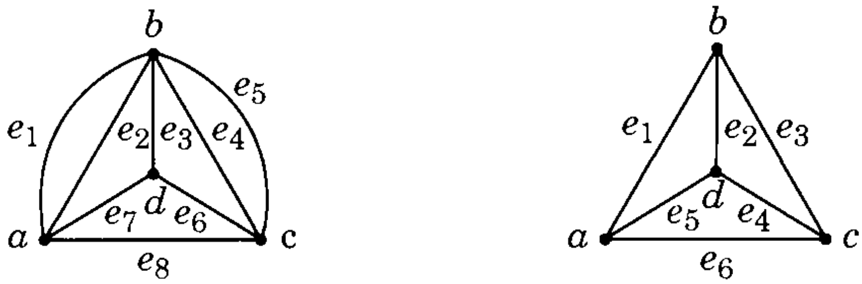
10. Keltirilgan graflarda Eyler sikli bo'lsa, uni ko'rsating:

a) b) v)



5.Berilgan graflarda eng qisqa yo'lni aniqlang.

a) b)



3.10. Eksterimal masalalar, optimallash masalalari, universal masalalar

1. Graflarni bo'yash masalasi "4 xil rang masalasi" deb ham yuritiladi. Bu masala geografik xaritani bo'yash bilan bog'liq amaliyot yuzasidan kelib chiqqan.

Ixtiyoriy xaritani bo'yash uchun 4 ta rang yetarlimi?

1840 yilda mashhur nemis matematigi A.F.Myobiyus ushbu masalani yechishga uringan. Ammo yaqinda ikkita amerikalik matematik masala yechimini kompyuter yordamida topishga muvaffaq bo'lishdi.

2. Amaliy masalalarda yo'naltirilmagan graflarda ikkita qirrasi orasidagi eng qisqa yo'lni topish masalasi katta ahamiyatga ega. Bunday masalalarga graflar usulida yondoshish iqtisodiy foyda keltiradi. Transport masalalarida yetkazib berish rejalarini arzonlashgan narxda yoki qisqa vaqt mobaynida yetkazib berish ta'minlanadi.

3. Graflardan raqamli tizimlarni analiz va sintez qilish uchun ham qo'llaniladi. Bunda grafning qirrasi diskret holatga o'tadi, 6-bo'limda chekli avtomatlar misolida tushuntirilgan.

4. Graflar yordamida texnik qurilmalarni sxemalar ko'rinishida ifodalash mumkin. Masalan, mikrosxemalar topologiyasi, aloqa liniyasi sxema platasi va boshqalar. Bular 8-bo'limda mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal shakllar misolida tushuntirilgan.

3.11. Graflarda masofa tushunchasi

$G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu grafda har qanday ikkita v_1 va v_2 uchlar bog'langan bo'lgani uchun chetlari v_1 va v_2 uchlardan iborat bo'lgan hech bo'lmasa bitta marshrut bor.

Quyidagi metrika aksiomalarini qanoatlantiruvchi v_1 va v_2 uchlarni bog'lovchi eng qisqa (v_1,v_2) marshrutning uzunligi v_1 va v_2 **uchlar orasidagi masofa** deyiladi va $d(v_1,v_2)$ bilan belgilanadi:

1) $d(v_1,v_2)\geq 0$;

2) $v_1=v_2$ bo'lgandagina $d(v_1,v_2)=0$ bo'ladi;

3) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$;

4) $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)\geq d(v_1,v_3)$ (uchburchak tengsizligi).

Eng qisqa marshrut oddiy zanjirdir. $d(v,v)=0$ deb qabul qilamiz.

G grafning ixtiyoriy $v\in V$ uchi uchun aniqlangan $e(v)=\max\limits_{w\in V} d(v,w)$ miqdor shu v **uchning ekstsentrisiteti** deyiladi.

G grafning barcha uchlari ekstsentrisitetlari orasidagi qiymatlardan eng kattasi shu g**rafning diametri** deyiladi.

G grafningG diametri, odatda, $d(G)$ bilan belgilanadi: $d(G)=\max\limits_{v\in V} e(v)$. Diametr bu grafning istalgan ikki uchi orasidagi mumkin bo'lgan eng katta masofadir, ya'ni $d(G)=\max\limits_{v_1,v_2\in V} d(v_1,v_2)$.

Uzunligi $d(G)$ga teng bo'lgan oddiy zanjir **diametral zanjir** deyiladi. Grafda diametral zanjir yagona bo'lmasligi mumkin.

Bog'lamli G graf barcha uchlarining ekstsentrisitetlari orasidagi eng kichik qiymat (minimali) shu g**rafning radiusi** deyiladi.

G grafning radiusi, odatda, $r(G)$ bilan belgilanadi: $r(G)=\min\limits_{v\in V} e(v)$. Ravshanki, $r(G)=\min\limits_{v_1\in V}\max\limits_{v_2\in V} d(v_1,v_2)$.

Bog'lamli G grafdagi ekstsentrisiteti radiusga teng v_0 uch g**rafning markazi** (**markaziy uchi**) deyiladi.

Agar v_0 uch G grafning markazi bo'lsa, u holda $e(v_0)=\min\limits_{v\in V} e(v)$ bo'ladi, ya'ni grafning markaziy uchi minimal ekstsentrisitetga egadir.

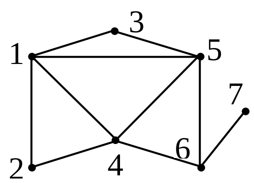
Agar grafning markazidan boshqa biror uchigacha bo'lgan oddiy zanjir eng uzun masofaga ega bo'lsa, u holda bu zanjir **radial oddiy zanjir** deyiladi.

Tabiiyki, grafning radiusi uning diametridan katta emas va graf bittadan ko'p markazga ega bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari, grafning barcha uchlari uning markaziy uchlari bo'lishi ham mumkin.

Grafning markaziy uchlarini topish bilan bog'liq masalalar aholiga xizmat ko'rsatadigan qandaydir ob'yektning (kasalxona, maktab va shu kabilarning) joylashish o'rnini aniqlash bilan bog'liq muammolarni hal qilishda qo'llanilishi mumkin. Bunda ob'yektgacha borish vaqti, punktlar orasidagi masofa va shu kabilarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Bunday masalalarga **o'rinlashtirishning minimaks masalalari** deyiladi.

M i s o l. Quyidagi $U=\{1;2;3;4;5;6;7\}$,

$Q=\{(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;4),(3;5),(4;5),(4;6),(5;6),(6;7)\}$ graf berilgan:



Bu grafda $d(1,6)=2$, $d(2,7)=3$, $d(G)=3$; $(1,4,6,7)$ va $(1,5,6,7)$ zanjirlar diametral zanjirlardir, $(1,3)$ va $(1,3,5,6,7)$ zanjirlar esa diametral zanjirlar bo'la olmaydi. Berilgan grafda 4, 5 va 6 belgili uchlar markazlar bo'lib, $r(G)=2$ hamda $(6,7)$ va $(6,4,1)$ radial oddiy zanjirlardir.

3.12. Kommivoyajyor masalasi

Berilgan grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo'lsa, yoyiga) qandaydir haqiqiy sonni mos qo'yib, bu sonni **qirraning** (**yoyning**) **uzunligi** deb ataymiz.

Qirraning (yoyning) uzunligi **additivlik** xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya'ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan **zanjirning** (**yo'lning**) **uzunligi** shu zanjirni (yo'lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig'indisiga tengdir.

Amaliyotda uchraydigan ko'plab masalalarda marshrut uzunligini minimallashtirish talab etiladi. Shunday masalalardan biri **kommivoyajyor** masalasidir. Masalaning shartida kommivoyajyor, ya'ni sayohatchi oralaridagi masofa ma'lum bo'lgan p ta shaharni har biriga bir martadan borib, tamosha qilishi kerak va qaysi shahardan boshlagan bo'lsa, yana o'sha shaharga qaytib kelishi kerak bo'ladi. Bunda bosib o'tilgan masofalar yig'indisi minimal bo'ladigan harakat marshrutini topish talab qilinadi.

$G=(V,U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo'lsin, bu yerda $V=\{1,2,...,m\}$. G grafning biror $s\in V$ uchidan boshqa $t\in V$ uchiga boruvchi yo'llar orasida uzunligi eng kichik bo'lganini topish masalasi bilan shug'ullanamiz.

Grafdagi (i,j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C=(c_{ij}),\ i,j=\overline{1,m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta'kidlaganlarimizga ko'ra, C matritsaning c_{ij} elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo'lishi mumkin. Agar grafda biror i uchdan chiqib j uchga kiruvchi yoy mavjud bo'lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij}=\infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud emas deb hisoblaymiz, chunki aks holda eng qisqa yo'l mavjud emas.

Minimal uzunlikka ega yo’l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Gollandiyalik matematik E.V. Deykstra (1930-2002) tomonidan taklif etilgan algoritm ko’p qo’llaniladi.

Grafning 1-uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo’lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi:**

Dastlabki qadam. Manbaga $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo’yib, bu uchni dastlab $R = \varnothing$ deb qabul qilingan R to’plamga kiritamiz: $R = \{1\}$. $\overline{R} = V \setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang’ich uchi R to’plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to’plamga tegishli bo’lgan barcha yoylar to’plami $(R, \overline{R})$ bo’lsin. Har bir $(i, j) \in (R, \overline{R})$ yoy uchun $h_{ij} = \varepsilon_i + c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i \in R$ uchga mos qo’yilgan qiymat (grafning 1-uchidan chiqib i-uchigacha eng qisqa yo’l uzunligi) belgilangan.

$\varepsilon_j = \min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R, \overline{R})$ to’plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i, j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j \in \overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo’yamiz. ε_j qiymat mos qo’yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to’plamdan chiqarib R to’plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to’plamga tegishli bo’lgan barcha (i, j) yoylar uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \ge \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o’rinli bo’lmagan (ya’ni $\varepsilon_{j_*} > \varepsilon_i + c_{ij_*}$ bo’lgan) barcha j_*-uchlarning har biriga mos qo’yilgan eski ε_{j_*} qiymat o’rniga yangi $\varepsilon_i + c_{ij_*}$ qiymatni mos qo’yamiz va (i, j_*) yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

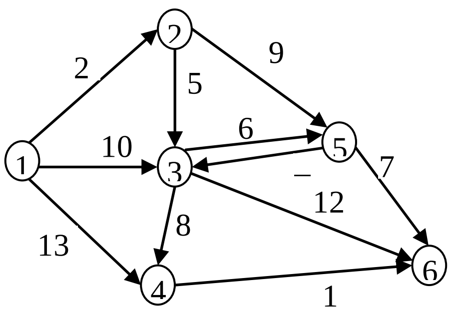
Uchlarga qiymat mos qo’yish jarayonini oxirgi (k-) uchga qiymat mos qo’yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1-uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo’l uzunligi ε_k bo’ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo’nalishiga qarama-qarshi yo’nalishda uning 1-uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1-uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo’l(lar)ni topamiz.

Deykstra algoritmi:

begin
  for har bir $v \in V$ **do**
    begin
      $d[v] := w(A, v);$
      RATNTO $(v) := A;$
    end
  A uchni belgilash;
  while belgilanmagan uchlar qoladi **do**
    begin
      $u :=$ A dagi minimal masofali belgilanmagan uch;
        u uchni belgilash;
      for $uv \in E$ shartni qanoatlantiruvchi har
        bir belgilanmagan v uch **do**
        begin
        $d' := d[u] + w(u, v)$
          if $d' < d[v]$ **then**
            begin
            $d[v] := d'$;
RATNTO $(v) :=$ RATNTO $(u), v$;
            end
        end
    end
end

Misol. Quyidagi yo'naltirilgan grafda oltita uch ($V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)



va 11 ta yoy mavjud.

Deykstra algoritmini qo'llab, eng qisqa uzunlikka ega yo'lni topish masalasi bilan shug'ullanamiz:

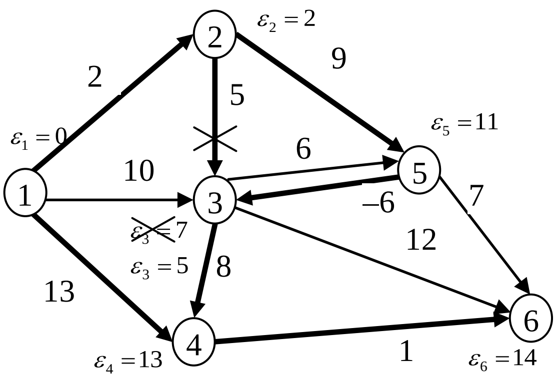
Dastlabki qadam. Manbaga (1-uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo'yamiz va $R = \{1\}$ to'plamga ega bo'lamiz. Shuning uchun, $\bar{R} = V \setminus R = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'ladi.

Umumiy qadam. 1- iteratsiya. $R=\{1\}$ va $\overline{R}=\{2,3,4,5,6\}$ bo'lgani uchun boshlang'ich uchi R to'plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to'plam elementi bo'lgan barcha yoylar to'plami $(R,\overline{R})=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$ ga ega bo'lamiz. $(R,\overline{R})$ to'plamga tegishli bo'lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz: $(1,2)$ yoy uchun $h_{12}=\varepsilon_1+c_{12}=0+2=2$;

$(1,3)$ yoy uchun $h_{13}=\varepsilon_1+c_{13}=0+10=10$;

$(1,4)$ yoy uchun $h_{14}=\varepsilon_1+c_{14}=0+13=13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo'lgani uchun $(1,2)$ yoyni ajratamiz va 2-uchga $\varepsilon_2=2$ qiymatni mos qo'yamiz. Algoritmga ko'ra, 2-uchni $\overline{R}$ to'plamdan chiqarib, R to'plamga kiritamiz. Natijada $R=\{1,2\}$ va $\overline{R}=\{3,4,5,6\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz.



Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan bitta $(1,2)$ yoy bo'lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1+c_{12}\geq\varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0+2\geq 2$ ko'rinishdagi to'g'ri munosabatdan iborat bo'lgani uchun 2- iteratsiyaga o'tamiz.

2- iteratsiya. $(R,\overline{R})=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,5)\}$ bo'lgani sababli $h_{13}=10$, $h_{14}=13$, $h_{23}=7$ va $h_{25}=11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13},h_{14},h_{23},h_{25}\}=h_{23}=7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat $(2,3)$ yoyga mos keladi. Shuning uchun, $(2,3)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3=7$ qiymatni 3-uchga mos qo'yamiz. 3-uchni $\overline{R}$ to'plamdan chiqarib, R to'plamga kiritgandan so'ng R=\{1,2,3\} va $\overline{R}=\{4,5,6\}$ to'plamlar hosil bo'ladi.

Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan uchta $(1,2)$, $(1,3)$ va $(2,3)$ yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1+c_{12}\geq\varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1-iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o'zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1+c_{13}\geq\varepsilon_3$ va $\varepsilon_2+c_{23}\geq\varepsilon_3$

munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0+10\geq 7$ va $2+5\geq 7$ ko'rinishda bajariladi. Shuning uchun 3- iteratsiyaga o'tamiz.

3- iteratsiya. Boshlang'ich uchi $R=\{1, 2, 3\}$ to'plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R}=\{4, 5, 6\}$ to'plamga tegishli bo'lgan yoylar to'rtta: $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$. Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14}=13$, $h_{25}=11$, $h_{34}=15$, $h_{35}=13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14},h_{25},h_{34},h_{35}\}=h_{25}=11$ bo'ladi.

Demak, bu iteratsiyada $(2, 5)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_5=11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko'ra, $R=\{1, 2, 3, 5\}$ va $\overline{R}=\{4, 6\}$ to'plamlarni hosil qilamiz.

Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan yoylar oltita: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$. Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i+c_{ij}\geq\varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2- iteratsiyalarda $(1, 2)$, $(2, 3)$ va $(1, 3)$ yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5-uch qatnashgan $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$ yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo'lamiz: $(2, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_2+c_{25}\geq\varepsilon_5$ munosabat to'g'ri ($2+9\geq 11$), $(3, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_3+c_{35}\geq\varepsilon_5$ munosabat to'g'ri ($7+6\geq 11$), lekin $(5, 3)$ yoy uchun $\varepsilon_5+c_{53}\geq\varepsilon_3$ munosabat noto'g'ri ($11+(-6)=5<7$). Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko'ra $\varepsilon_3=7$ o'rniga $\varepsilon_3=5$ deb olamiz va $(5, 3)$ yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan $(2, 3)$ yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz. Shaklda $\varepsilon_3=7$ yozuvning va $(2, 3)$ yoyning qalin chizig'i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo'yilgan.

4-iteratsiya. $R=\{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{R}=\{4, 6\}$ bo'lgani uchun $(R,\overline{R})=\{(1, 4),(3, 4),(3, 6),(5, 6)\}$ va $h_{14}=13$, $h_{34}=13$, $h_{36}=17$, $h_{56}=18$ hamda $\min\{h_{14},h_{34},h_{36},h_{56}\}=h_{14}=h_{34}=13$ bo'ladi. Demak, $(1, 4)$ va $(3, 4)$ yoylarni ajratamiz hamda 4-uchga $\varepsilon_4=13$ qiymatni mos qo'yamiz. Natijada $R=\{1, 2, 3, 5, 4\}$, $\overline{R}=\{6\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz.

$\varepsilon_i+c_{ij}\geq\varepsilon_j$ munosabatning to'g'riligi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ va $(3, 4)$ yoylar uchun tekshirib ko'rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma'lum bo'ladi.

5- iteratsiya. Endi $(R,\overline{R})=\{(3, 6),(4, 6),(5, 6)\}$ bo'lgani uchun $h_{36}=17$, $h_{46}=14$, $h_{56}=18$ va $\min\{h_{36},h_{46},h_{56}\}=h_{46}=14$ bo'ladi. Bu yerda minimum $(4, 6)$ yoyda erishilgani uchun uni ajratib, yo'naltirilgan grafning oxirgi 6-uchiga $\varepsilon_6=14$ qiymatni mos qo'yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan grafda 1-uchdan 6-uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo'l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6-uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo’nalishiga qarama-qarshi yo’nalishda harakatlanib, uning 1-uchiga kelishimiz kerak. 6-uchga kiruvchi uchta yoydan faqat bittasi ($(4, 6)$ yoy) ajratilgan bo’lgani uchun $(4, 6)$ yoy yo’nalishiga qarama-qarshi yo’nalishda harakat qilib, 6-uchdan 4-uchga kelamiz. 4-uchga kiruvchi ikkala ($(1, 4)$ va $(3, 4)$) yoylar ham ajratilgan bo’lgani uchun biz tuzmoqchi bo’lgan eng qisqa uzunlikka ega yo’l yagona emas.

Agar harakatni $(1, 4)$ yoy yo’nalishiga teskari yo’nalishda davom ettirsak, u holda 4-uchdan 1-uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo’llardan biri bo’lgan $\mu_1 = (1, 4, 6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni $(3, 4)$ yoy yo’nalishiga teskari yo’nalishda davom ettirsak, u holda 4-uchdan 3- uchga kelamiz. 3-uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ($(5, 3)$ yoy) ajratilgan bo’lgani uchun 3-uchdan 5-uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2-, keyin esa 1-uchga o’tib mumkin bo’lgan eng qisqa uzunlikka ega bo’lgan yo’llardan ikkinchisini, ya’ni $\mu_2 = (1, 2, 5, 3, 4, 6)$ marshrutni aniqlaymiz.

Shunday qilib, grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo’llar borligini aniqladik. Bu yo’llarning har biri minimal $\varepsilon_6 = 14$ uzunlikka ega.

Eng qisqa yo’lni topish algoritmi:

begin
  $e := G$ grafning eng kichik vaznli qirrasi;
  $T := \{e\}$;
  $E' := E \setminus \{e\}$;
  while $E' \neq \varnothing$ **do**
    begin
      $e' := E'$ dagi eng kichik vaznli qirra;
      $T := T \cup \{e'\}$;
      $E' := E' \setminus \{T\}$ dagi qirralar to’plami
      bunda T ni to’ldirish tsikl hosil qilmaydi;
    end
end

Nazorat uchun savollar:

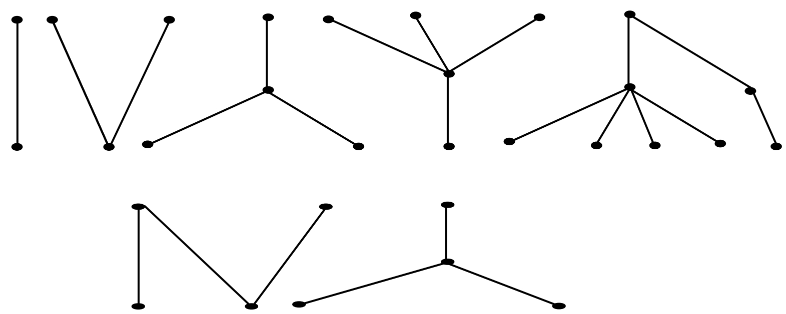
1. Ikki bo’lakli graf deb nimaga aytiladi?
2. To’liq ikki bo’lakli graf deganda nimani tushunasiz?
3. Grafning markazi, grafning radiusi?
4. Eng qisqa yo’lni topish algoritmini tushuntiring.

5. Kommivoyajyor masalasi mazmunini ayting.
6. Deykstra algoritmini yozing.
7. Metrika aksiomlarini yozing.

3.13. Daraxt, o'rmon tushunchalari

Siklga ega bo'lmagan yo'naltirilmagan graf **daraxt** deyiladi. Daraxt ilmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo'lmagan yo'naltirilmagan graf o'**rmon** (**atsiklik graf**) deyiladi.

Misol 1. Quyida komponentali soni 5 ga teng bo'lgan graf tasvirlangan bo'lib, u o'rmondir. Bu grafdagi bog'lamli komponentalarning har biri daraxtdir.



M**isol 2.** 4 ta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan daraxtlar (hammasi bo'lib 2 ta):

5 ta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday daraxtlar esa oltita ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Teorema1 (Daraxtlar haqidagi asosiy teorema). Uchlari soni m va qirralari soni n bo'lgan G graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:

1) G daraxtdir;

2) G atsiklikdir va $n = m - 1$;

3) G bog'lamlidir va $n = m - 1$;

4) G bog'lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash natijasida bog'lamli bo'lmagan graf hosil bo'ladi, ya'ni G ning har bir qirrasi ko'prikdir;

5) G grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtiriladi;

6) G atsiklik bo'lib, uning qo'shni bo'lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirish natijasida faqat bitta tsiklga ega bo'lgan graf hosil bo'ladi.

N a t i j a 1. Bittadan ko'p uchga ega bo'lgan istalgan daraxtda hech bo'lmaganda ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.

N a t i j a 2. m ta uch va k ta bog'lamli komponentali o'rmondagi qirralar soni $(m-k)$ ga tengdir.

T e o r e m a 2. Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo'shni uchlaridan iborat bo'ladi.

A. Keli uglerod atomlari soni berilgan va C_nH_{2n+2} ko'rinishdagi kimyoviy formula bilan ifodalanuvchi to'yingan uglevodorodlar sonini topish masalasini har bir uchining darajasi 1 yoki 4 bo'lgan daraxtlar sonini topish masalasiga keltirib hal qilgan.

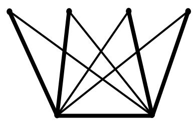
T e o r e m a 3 (K e l i t e o r e m a s i). Uchlari soni m bo'lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.

3.14. Grafning siklomatik soni

Faraz qilaylik, G ilmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan qandaydir bog'lamli graf bo'lsin. Bu grafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo'lgan graf bog'lamli graf bo'lishi ravshandir.

Grafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo'lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo'llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog'lovchi graf – daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt G g**rafning sinch daraxti** (**karkas**) deyiladi. Tabiiyki, bitta grafning bir nechta sinch daraxtlari mavjud bo'lishi mumkin.

M i s o l. Quyidagi grafda sinchlardan biri qalin chiziq bilan ifodalangan.



Endi G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan m ta uch, n ta qirra va k ta bog'lamli komponentalardan tashkil topgan graf bo'lsin. Agar yuqorida tavsiflangan usul yordamida G grafdan qirralarni ketma-ket olib tashlash natijasida uning har bir komponentasi bog'lamliligi buzilmasa, u holda berilgan G g**rafning sinch o'rmoni** deb ataluvchi grafni hosil qilish mumkin.

Berilgan G grafdan uning sinch o'rmonini hosil qilish maqsadida olib tashlanishi kerak bo'lgan qirralar soni $\lambda = \lambda(G)$ bu qirralarni olib tashlash tartibiga bog'liq emasligi va $\lambda = n - m + k$ bo'lishi ravshandir.

Qaralayotgan G graf uchun $m - k \le n$ tengsizlik o'rinli bo'lganligidan, $\lambda(G) \ge 0$ bo'ladi. $\lambda(G)$ sonni G g**rafning siklomatik soni** (s**iklik rangi**) deb ataymiz.

Tasdiq 1. Grafning siklomatik soni tushunchasi, qandaydir ma'noda, grafning bog'lamlilik darajasini aniqlovchi vositadir. Ravshanki, daraxt uchun $\lambda = 0$ bo'ladi.

Tasdiq 2. Grafning o'rmon bo'lishi uchun uning siklomatik soni nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Tasdiq 3. Grafning yagona siklga ega bo'lishi uchun uning siklomatik soni 1 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Qirralari soni uchlari sonidan kichik bo'lmagan graf siklga egadir.

Misol. Yuqoridagi misolda tasvirlangan graf $(6,9)$-graf bo'lib, uning bog'lamlilik komponentalari soni birga teng. Bu grafning siklomatik sonini aniqlasak, $\lambda = 9 - 6 + 1 = 4$ bo'ladi. Olib tashlangan qirralar shaklda ingichka chiziqlar bilan ifodalangan.

3.15. Tarmoqlar va chegaralar usuli

Berilgan $M = \{a_1, a_2, ...\}$ to'plam va har bir E_i elementi M dan olingan $R = \{E_0; E_1, E_2, ...\}$ majmuani **tarmoq** deyiladi va $M(E_0; E_1, E_2, ...)$ bilan belgilanadi, bu yerda $E_i = (a_{\nu_1(i)}, a_{\nu_2(i)}, ...)$. M to'plamning ob'yektlari tarmoqning **uchlari** deb, E_0 majmuadagi ob'yektlar esa **tarmoqning qutblari** deyiladi. Tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar "**blok-sxema**", "g**ipergraf**" tushunchalaridir.

Oddiy qilib aytganda, har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan N yo'naltirilgan grafga **tarmoq** deyiladi.

Quyidagi algoritm tarmoqdagi maksimal oqimni aniqlaydi. Agar oqim o'tkazish qobiliyatiga ega yoylar matritsasi bilan berilgan bo'lsa hamda oqimning dastlabki yaqinlashishi ma'lum bo'lsa, S manba bilan zanjir orqali ulangan S uchlar to'plamini aniqlaymiz.

Agar $t \in S$ bo'lsa, oqim maksimal emas, uni δ kattalikka oshirish mumkin. Zanjirni aniqlash va bir vaqtning o'zida δ kattalikni hisoblab borish uchun algoritmda quyidagi yordamchi ma'lumotlar tuzilmasidan foydalanilgan:

P: array $[1...p]$ of record
  s: enum (–,+) {“belgi”, ya’ni yoy yo’nalishi}
  $n:1...p$ {zanjirda oldindan mavjud bo’lgan uch}
  δ: real {oqimning kuchayishi mumkinligi}
end record
N: array $[1...p]$ of 0…1 {bog’lamni belgilash}
S: array $[1...p]$ of 0…1 {uchni S to’plamga tegishlilik belgisi}

Maksimal oqimni topish algoritmi:

Kirish: o’tkazish qobiliyatiga ega **S**: **array** $[1...p,1...p]$ **of real**
s manba va t oqimga ega $G(V,E)$ tarmoq
Chiqish: maksimal oqim matritsasi F : **array** $[1...p,1...p]$ **of real**

for $u,v\in V$ **do**
  $F[u,v]:=0$ {dastlab oqim nolga teng}
end for
  M: {oqimning o’sish iteratsiyasi}
  for $v\in V$ **do**
    $S[v]:=0; N[v]:=0; P[v]:=(+,nil,0)$ {initsiallash}
  end for
  $S[s]:=1; P[s]:=(+,nil,\infty)$ { $s\in S$ bo’lgani uchun}
  repeat
    $a:=0$ { S ni kengayish belgisi}
    for $v\in V$ **do**
      if $S[v]:=1 \,\&\, N[v]=0$ **then**
        for $u\in \Gamma(v)$ **do**
          if $S[u]=0 \,\&\, F[v,u]<C[v,u]$ **then**
            $S[u]:=1; P[u]:=(+,v,\min(P[v],\delta,C[v,u]-F[v,u])); a:=1$
          end if
        end for
        for $u\in \Gamma^{-1}(v)$ **do**
        if $S[u]=0 \,\&\, F[v,u]>0$ **then**
          $S[u]:=1; P[u]:=(-,v,\min(P[v].\delta,F[u,v])); a:=1$
        end if
      end for
      $N[v]:=1$ { v uch belgilandi}
    end if
  end for
  if $S[t]$ **then**
    $x:=t$ {zanjirning joriy bog’lami}
    $\delta:=P[t].\delta$ {oqimning o’zgarish kattaligi}

```
while x ≠ s do
   if P[x].s = + then
      F[P[x].n, x] := F[P[x].n, x] + δ  {oqimning kuchayishi}
   else
      F[x, P[x].n] := F[x, P[x].n] − δ  {oqimning kuchayishi}
   end if
   x := P[x].n  {zanjirning oldingi bog'lami}
end while
goto M
end if
until a = 0
```

3.16. Graflarni bo'yash masalasi

Planar graflarni bo'yash masalasi graflar nazariyasining eng mashhur muammolaridan biri hisoblanadi. O'tgan asrning o'rtalarida paydo bo'lgan masala hamon mutaxassis va qiziquvchilar diqqatida.

Dastlab savol quyidagicha qo'yilgan: geografik xaritani bo'yash uchun ixtiyoriy 2 ta qo'shni davlatni rangi har xil bo'lishini ta'minlashda 4 xil rang yetarlimi?

Ko'priklarsiz bog'langan tekis multigraf **xarita** deyiladi.

Umumiy qirraga ega bo'lgan xarita tomonlari **chegaradosh** deyiladi.

f funktsiya mavjud bo'lib, unda G - 1 dan k gacha raqamlardan iborat va $f(G)$- **chegara rangi**, G- esa k-rang hisoblanadi (qo'shni chegaralar turli xil bo'lganda). k- rang mavjud bo'lsa, xarita k**-bo'yalgan** deyiladi.

1879 yilda britaniyalik matematik A. Keli o'z maqolasida xaritalarni bo'yash muammosini 4 xil rang gipotezasi bilan ta'riflab berdi. 4 xil bo'yoq gipotezasi: har qanday xarita 4 xil bo'yoq bilan bo'yaladi.

Agar geometrik ikki bo'lakli graf G^* uchi k- bo'yalgan bo'lsa, G xarita k**-bo'yalgan** deyiladi.

Shunday tekis graflar mavjudki, ular 4 rangdan kamroq rangda to'g'ri bo'yalgan. Masalan, K_4 grafi.

2 va 3 xil rangli planar graflarni ko'rib chiqaylik:

Teorema 1. Graf ikki bo'lakli bo'lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodalanuvchi sikl bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

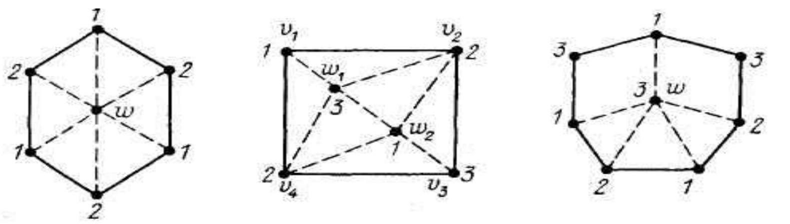
Berilgan $G=(V,U)$ grafning ikki bo'lakliligini aniqlashning sodda usuli bor. Bu usul **ko'ndalangiga izlash** deyiladi.

Ko'ndalangiga izlash usuliga ko'ra grafning uchlari $0,1,2,3,...$ raqamlar bilan quyidagi qoida bo'yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo'shni barcha uchlarga 1 belgisi qo'yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo'shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo'q uchlarga 2 belgisini qo'yamiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o'xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo'lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog'lamli bo'lsa, u holda ko'ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

Bog'lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so'ng, uning uchlari to'plami Vni ikkita V_j va V_q to'plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to'plamga, qolgan uchlarni esa V_q to'plamga kiritamiz (0 raqamli uch V_j to'plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to'plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to'plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo'sh bo'lsa, u holda berilgan G graf ikki bo'laklidir, aks holda u ikki bo'lakli emas.

Hozirgacha $k>2$ bo'lgan hol uchun grafning k bo'lakliligini aniqlash bo'yicha oddiy usul topilmagan.

1. G tomon chegaralari juft uzunlik sikli bo'lib, uchlari 2 xil rangda bo'yalgan, masalan, 1 va 2. Shunda G ni ichiga w uchni joylaymiz va uni 3-rang bilan bo'yaymiz.
2. Qirralari 3 xil rangda bo'yalgan G tomon chegaralarida 4 ta sikl mavjud $S=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_1)$, masalan, v_1 – 1-rang, v_2 – 2-rang, v_3 – 3-rang, v_4 – 4-rang.



3. G tomon chegaralarida l-sikl mavjud, $l\geq 4$ va barcha qirralari 3 ta rang bilan bo'yalgan. Shunda G ni ichiga w uchni joylaymiz va uni 3-rang bilan bo'yaymiz hamda barcha 1 va 2 raqamli rangdagi qirralar bilan bog'laymiz.

Teorema 2. Ixtiyoriy 3 ta sikldan kam bo'lmagan yassi graf 3 xil rangda bo'yaladi.

To'rt xil rang gipotezasi o'sha davrlarda ko'p izlanuvchilar diqqatini tortgan. 1880 yilga kelib esa bu masalaning birinchi isbotini A.Kemp taqdim etdi. 1890 yilda R. Xivud bu isbotning xatosini aniqladi. Shu bilan birga u, agar to'rt so'zini besh so'ziga o'zgartirsak, isbotlash osonroq bo'lishini ta'kidlagan.

Agar grafning uchlar to'plamini o'zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to'plamlarga ajratish mumkin bo'lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to'plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to'plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo'lsa, u holda bunday graf **ikki bo'lakli graf** (**bixromatik** yoki **Kyonig grafi**) deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ikki bo'lakli grafning har bir bo'lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo'shni bo'la olmaydi.

Biror bo'lagida faqat bitta uch bo'lgan to'la ikki bo'lakli graf **yulduz** deyiladi. Agar ikki bo'lakli grafning turli bo'laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo'shni bo'lsa, u holda bu graf **to'la ikki bo'lakli graf** deyiladi va $K_{m,n}$ bilan belgilanadi, bu yerda m va n grafning bo'laklaridagi uchlar sonlari. $K_{m,n}=(V,U)$ graf uchun $|V|=m+n$ va $|U|=mn$ bo'lishi ravshan, bu yerda $|V|$ – $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ – uning qirralari soni.

Teorema 3 (Kyonig teoremasi). Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf siklga ega.

Teorema 4. Tekis va boglamli $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=2+n$ tenglik o'rinlidir, bu yerda $m=|V|$, $n=|U|$, r – yoqlar soni.

Teorema 5. Agar karrali qirralari bo'lmagan ilmoqsiz grafda m ta uch, n ta qirra va k ta bog'lamlilik komponentalari bo'lsa, u holda quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$m-k\le n\le\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}.$$

Nazorat uchun savollar:

1. O'rmon, daraxt tushunchalariga ta'rif bering.
2. Grafning sinch daraxti deb nimaga aytiladi?
3. Graflarni bo'yashda eng kam rang masalasini tushuntirib bering.
4. Keli teoremasini ayting.
5. Kyonig teoremasini keltiring.
6. Grafning siklomatik soni deb nimaga aytiladi?

4. MUNOSABATLAR

4.1. Kirish

Turmushda ikki inson, aytaylik Said va Alining qarindoshligi haqida gapirganda shuni nazarda tutiladiki, shunday ikkita oila mavjud, Said va Alining shu oilalarga qandaydir aloqasi bor. Tartiblangan (Said,Ali) juftligi boshqa tartiblangan kishilar juftligidan shunisi bilan farq qiladiki, ularning orasida aka-ukalik yoki ota-o’g’illik, jiyanlik kabi munosabatlar bo’lishi mumkin.

Diskret matematikada ham dekart ko’paytmaning tartiblangan juftliklari orasidan o’zaro qandaydir “qarindoshlik” munosabatlariga ega bo’lgan juftliklarni ajratib ko’rsatish mumkin. Ixtiyoriy ikki to’plamning elementlari orasidagi munosabatlar uchun binar munosabat tushunchasini kiritamiz. Bu tushuncha matematikada ham, informatikada ham ko’p uchraydi. Bir nechta to’plam elementlari orasidagi munosabat ma’lumotlar jadvali shaklida beriladi. Ushbu bob tadbiqini ma’lumotlar bazasini boshqarish tizimini tasvirlashda ishlatiladigan n – ar munosabatlarda ko’rish mumkin.

4.1. Munosabatlar va ularning turlari

Ixtiyoriy A va B to’plamlarning **dekart ko’paytmasi** berilgan bo’lsin:

$$A\times B=\{(x,\ \mathrm{y}),\ \mathrm{x}\in A,\ \mathrm{y}\in B\}.$$

Bunda x va y lar (x,y) juftlikning **koordinatalari** deyiladi, demak mos ravishda x - juftlikning **birinchi koordinatasi**, y esa juftlikning **ikkinchi koordinatasi** deyiladi.

Dekart ko’paytmaga misol qilib to’g’ri burchakli dekart koordinata sistemasidagi nuqtalar to’plamini olish mumkin, ya’ni tekislikda har bir nuqta ikkita koordinataga ega: abstsissa va ordinata.

Misol. $A=\{a_1,a_2\}$ va $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$A\times B=\{a_1,a_2\}\times\{b_1,b_2,b_3\}=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}.$$

$R=A\times B$ dekart ko'paytmaga **to'g'ri dekart ko'paytma,** $R^{-1}=B\times A$ ifodaga **teskari dekart ko'paytma** deyiladi.

Dekart ko'paytmaning xossalari:

1⁰. Dekart ko'paytma kommutativ emas: $A\times B\neq B\times A$

2⁰. Dekart ko'paytma assotsiativ: $((A\times B)\times C)=(A\times(B\times C))$.

$P\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ dekart ko'paytmaning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan P qism to'plamiga $A_1,A_2,\ldots,A_n$ to'plamlar orasida aniqlangan n **o'rinli munosabat** yoki n o'rinli **predikat** deyiladi.

Agar $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in P$ bo'lsa, P munosabat $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ elementlar uchun **rost munosabat** deyiladi va $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$ bo'ladi, agar $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\notin P$ bo'lsa, P munosabat **yolg'on munosabat** deyiladi va $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)=0$ yoki $\overline{P}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ kabi yoziladi.

Agar $P\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ n o'rinli munosabatda $n=1$ bo'lsa, P munosabat A_1 to'plamning qism to'plami bo'ladi va **unar munosabat** yoki **xossa** deyiladi. $n=2$ bo'lganda esa **binar munosabat** yoki **moslik** deyiladi.

Agar $P\subseteq A^2$ bo'lsa, P ga A to'plamning **elementlari orasidagi munosabat** deyiladi.

Misol. Unar munosabatlarga misollar keltiramiz:

1) $A_1=Z$ butun sonlar to'plamidan iborat bo'lsin. $P(x)\subseteq Z$ unar munosabat $P(x)=1$ shart bilan aniqlansin, bunda x – juft son, u holda P munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $P=\{\ldots;-4;-2;0;2;4;\ldots\}$.

2) $A_1=R$ aqiqiy sonlar to'plamidan iborat, $P\subseteq R$ munosabat $P(x)=1$ shart bilan aniqlansin, bunda x – irratsional son bo'lsin, u holda P munosabat quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi:

$$P(\sqrt{2})=P(e)=P(\pi)=1;$$

$$P(0)=P(1)=P\left(-\frac{1}{3}\right)=0.$$

3) A_1 – barcha odamlar to'plami, $P(x)\subseteq A_1$ munosabatda x – erkak kishi bo'lsin. Javob: $P(x)=1$ bo'ladi.

4) A_1 – tekislikdagi barcha uchburchaklar to'plami bo'lsa, x – teng yonli uchburchaklar bo'lsin. Javob: $P(x)=1$ bo'ladi.

Misol. Binar munosabatlarga misollar keltiramiz:

1) $P_1 \subseteq Z \times Z$ binar munosabat $P_1(x,y)=1$ shart bilan aniqlansin, bunda $x-y$ lar 3 ga bo'linadigan sonlar, u holda P munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R=\{(4;1);(5;2);\ (6;3);...\}.$$

2) $P_2 \subseteq Z \times Z$ munosabat $P_2(x,y)=1$ shart bilan aniqlansin, bunda $x+y$ lar 2 ga bo'linadigan sonlar bo'lsin, u holda P munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R=\{(1;1);(0;2);\ (5;3);...\}.$$

3) $P_3 \subseteq R \times R$ munosabat, $P_3(x,y)=1$ shart bilan aniqlansin, bunda $x-y$ ratsional son. U holda quyidagilar o'rinli:

$$P_3(1;4)=P_3\left(\sqrt{2}+2;\sqrt{2}\right)=P_3(e;e-1)=1;$$

$$P_3\left(1;\sqrt{2}\right)=P_3(1;e)=P_3(1;\pi)=0;$$

$$P_3\left(\sqrt{2};\pi\right)=P_3(e;\pi)=0.$$

4) A – to'plam elementlari kitob nashriyotlari nomlari bo'lsin.

B – to'plam elementlari ushbu kitoblarni sotadigan firmalar bo'lsin, u holda P–munosabatga nashriyot va firmalar o'rtasida tuzilgan shartnomalar to'plami deb, ma'no berish mumkin.

Oddiy qilib aytsak, dekart ko'paytmaning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan qism to'plamiga **munosabat** deyiladi.

P-munosabat bo'lsin, u holda $P \subset A \times B$ bo'ladi. $<x,\ y> \in R$ yozuv o'rniga ko'pincha $x\,P\,y$ yoziladi va "x element y ga nisbatan P munosabatda" deb o'qiladi.

Misol. $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ va $B=\{1\ ,\ 2\}$ bo'lsin, u holda

$$A \times B=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,\ 2>,<3,\ 1>,<3,\ 2>\}$$

Munosabatlar 1) $R_1=\{<1,\ 1>,<3,\ 2>\}$

2) $R_2=\{<1,\ 1>,<1,\ 2>,<2,2>\}$

ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Agar ixtiyoriy $x \in A$ va $y \in B$ elementlar uchun $P(x,y)=1$ dan $P^{-1}(y,x)=1$ kelib chiqsa, $P \subseteq A \times B$ binar munosabat uchun $P^{-1} \subseteq B \times A$ binar munosabat **teskari munosabat** deyiladi,

$x=y$ bo'lganda $I_A(x,y)=1$ shart bajarilsa, $I_A \subseteq A\times A$ binar munosabatga **dioganal munosabat** yoki **ayniy munosabat** deyiladi. Ayniy munosabat uchun $I_A^{-1}=I_A$ tenglik o'rinli.

Binar munosabat haqida alohida to'xtalib o'tamiz, chunki munosabatlar orasida eng ko'p uchraydigani - bu binar munosabatdir.

X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin.

X va Y to'plamlar elementlarini qandaydir usul bilan mos qo'yib, tartiblangan juftliklarni hosil qilaylik. Agar har bir $x\in X$ element uchun $y\in Y$ element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X va Y to'plamlar o'rtasida **moslik o'rnatildi** deyiladi.

Moslikni berish uchun quyidagilarni ko'rsatish zarur:

1) elementlari boshqa biror to'plam elementlari bilan mos qo'yiladigan X to'plam;

2) elementlari X to'plam elementlari bilan mos qo'yiladigan Y to'plam;

3) moslikni aniqlovchi qoida, ya'ni $R\subseteq X\times Y$ to'plam, uning elementlari moslikda qatnashuvchi barcha (x,y) juftliklardan iborat.

Shunday qilib, f moslik $f=<X,Y,R>$ to'plamlar uchligidan iborat bo'ladi, bunda $R\subseteq X\times Y$. Agar $(x,y)\in R$ bo'lsa, y element x elementga **mos qo'yilgan** deyiladi.

Misol. Laboratoriya xonasida 8 ta laboratoriya qurilmasi bor: $X=\{x_1,x_2,...,x_8\}$. Laboratoriya ishini bajarish uchun 10 nafar talaba 5 ta guruhga ajralishdi: $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$. U holda quyidagicha moslik bo'lishi mumkin: $f=\{X,Y,(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_3,y_3),(x_5,y_4),(x_8,y_5)\}$,
bu yerda $(x_1,x_2,...x_8)$ – moslikning aniqlanish sohasi, (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) – moslikning qiymatlari sohasi bo'ladi.

Binar munosabat 4 xilda bo'ladi:

1. **Birga-bir qiymatli moslik**, bu X va Y to'plamlar elementlari orasidagi shunday moslikki, bunda X ning har bir elementiga Y ning bitta yagona elementi mos qo'yiladi. Masalan, musbat butun sonning kvadrati butun musbat sonning o'zi bilan birga-bir mos qo'yilgan.
2. **Birga-ko'p qiymatli moslik**, bunda X ning bitta elementiga Y dan ikkita va undan ortiq element mos qo'yilgan bo'ladi.

Masalan, $X-$ butun musbat sonlar to'plami bo'lsin: $X=\{4,\ 9,\ 16\}$;

Y – X dan olingan kvadrat ildiz bo'lsin:

$$Y=\{-2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4\}.$$

3. **Ko’pga-bir qiymatli moslik**, bunda Y to’plamning har bir elementiga X to’plamdan bir nechta qiymat mos qo’yiladi. Masalan, imtihon topshiruvchi talabalar to’plami X ga baholar to’plami Y mos qo’yiladi. Bunda har bir talaba bittadan baho oladi, lekin bir xil baho bir nechta talabaga qo’yiladi.

4. **Ko’pga-ko’p qiymatli moslik**, bunda X to’plamning bitta elementiga Y to’plamdan bir nechta qiymat mos qo’yiladi, shuningdek, Y ning bitta elementiga X dan bir nechta qiymat mos qo’yiladi. Masalan, X - biror qurilmaning bajaruvchi sxemalari, Y - esa elementlar tipi deyish mumkin.

Misol. Odamlar o’rtasidagi “qarindoshlik” munosabati binar munosabat bo’lib, bu to’plam umumiy ajdodga ega bo’lgan odamlar juftligini o’z ichiga oladi.

Binar munosabatlar 3 xil usulda beriladi:

Juftliklar ro’yxati;

Matritsa;

Graf ko’rinishida.

$T \subset A \times A$ berilgan bo’lsin, bu yerda $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Agar a va b orasida T munosabat bo’lsa, S kvadrat matritsaning i-satri va j-ustuni kesishgan joyda joylashgan k element 1 ga teng bo’ladi; aks holda $C_{ij} = 0$.

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } (a_i, a_j) \in \mathrm{T} \\ 0, & \text{agar } (a_i, a_j) \notin T \end{cases}$$

Misol tariqasida amerikalik matematik Djon fon Neyman (1903-1957) taqdim qilgan qurilmalar to’plamidan tashkil topgan EHM blok-sxemasini qaraymiz:

$$M = \{a, b, c, d, e\}.$$

bunda $a-$kiritish qurilmasi; $b-$protsessor; $c-$boshqarish qurilmasi; $d-$xotira qurilmasi; $e-$chikarish kurilmasi.

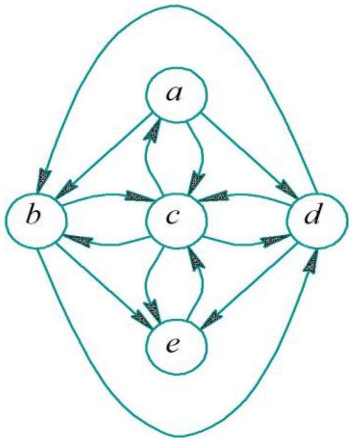
Agar axborot m_i qurilmadan m_j qurilmaga tushsa, u holda m_i va m_j qurilmalar T munosabatda bo’ladi. T binar munosabatni quyidagicha berish mumkin:

$$T = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(b,e),(c,a).(c,b),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(d,e),(e,c)\}$$

Ushbu binar munosabatni matritsa shaklida berish ham mumkin:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
B = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

T munosabatni graf shaklida ham tasvirlash mumkin.



Rasm 4.1

Misol. $M = \{1,2,3,4,5\}$ to'plamda aniqlangan

$$T = \{(a,b) : (a-b)\text{- juft son}\}$$

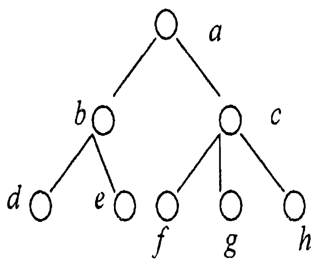
munosabat berilgan bo'lsin. Munosabatni ro'yxat va matritsa bilan bering.

1) T = {(1;1), (1;3), (1;5), (2;2), (2;4), (3;1), (3;3), (3;5), (4;2), (4;4), (5;1), (5;3), (5;5)}.
2) Matritsa ko'rinishi:

T	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

yoki $\|T\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Misol. 4.2-rasmdagi $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ odamlar to'plami grafi berilgan bo'lsin.



Rasm 4.2

Quyidagi munosabatlar haqida gapirish mumkin:

a) R_1 – "yaqin o'rtoq bo'lish" munosabati:

$$R_1 = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,f),(c,g),(c,h),(b,a),$$
$$(c,a),(d,b),(e,b),(f,c),(g,c),(h,c)\}$$

$$\|R_1\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) R_2 – "boshliq bo'lish" munosabati:

$$R_2 = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(a,h),\ (b,d),(b,e),(c,f),(c,g),(c,h)\}$$

v) R_3 – "ota bo'lish" munosabati:

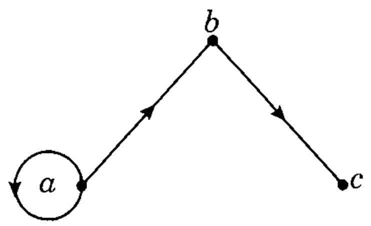
$$R_3 = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,f),(c,g),(c,h)\}.$$

Misol. $A=\{4,\ 5,\ 6\}$ va $B=\{1,2,3,4\}$ to'plamlar uchun $U \subseteq A\times B$ va $R \subseteq A\times B$ bo'lgan $U=\{(x,y):\ x+y=8\}$, $R=\{(x,y):\ x<y\}$ binar munosabatlarni tuzing.

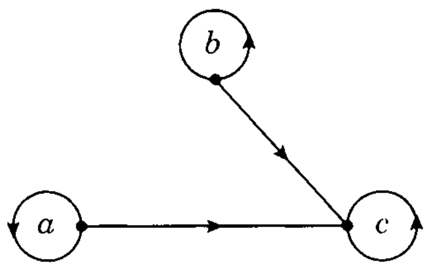
Yechilishi: $U=\{(4,4),(5,3),(6,2)\}$ va $R=\{(x,y):\ \mathrm{x}<\mathrm{y}\}=\varnothing$.

Misol. R va S graflar berilgan bo'lsa, $R \cup S$ va $R \cap S$ amallarni bajaring:

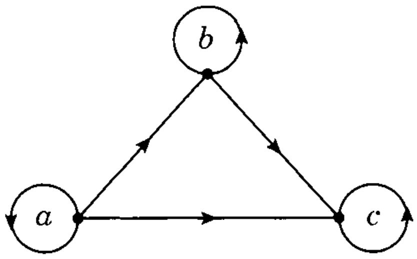
$R=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$

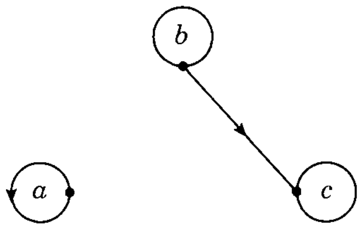


$S=\{(a,a),(a,c),(b,b)\}$



Yechilishi:





Nazorat uchun savollar:

1. Munosabat deb nimaga aytiladi?
2. Munosabatlar turlarini sanang va ta'rif bering.
3. Binar munosabatning berilish usullarini ayting.
4. Munosabatning aniqlanish va qiymatlar sohalariga ta'rif bering.

MISOL VA MASALALAR

1. $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ bo'lsin. R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 munosabatlarini ro'yxat va matritsa bilan bering, agar:

a) R_1 – "qat'iy kichik bo'lish";

b) R_2 – "1 dan farqli umumiy bo'luvchiga ega bo'lish";

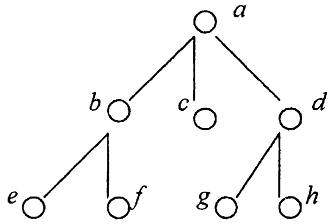
v) R_3 – "3 ga bo'linganda bir xil qoldiqqa ega bo'lish";

g) R_4 – "$(a-b)$ – toq son";

d) R_5 – "$(a+b)$ – juft son".

Barcha munosabatlar uchun D_l va D_r ni ko'rsating.

2. Quyidagi struktura ko'rinishidagi munosabatlarni ro'yxat shaklida yozing:



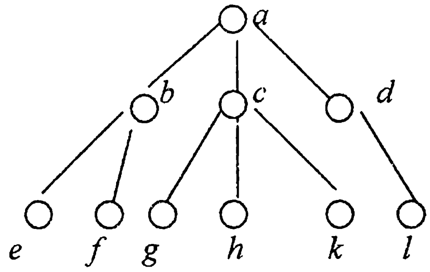
R_1 – "bevosita boshliq bo'lish";

R_2 – "bobo bo'lish";

R_3 – "berilgan oilaning farzandi bo'lish".

3. Quyidagi strukturaning elementlar to'plami uchun berilgan munosabatlarning xususiyatlarini aniqlang:

R_1 – “bevosita boshlig’i bo’lish”;
R_2 – “xolavachchalar bo’lish”;
R_3 – “yoshroq bo’lish”:

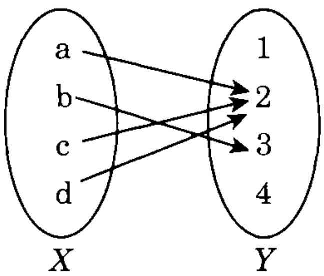


4. M={ 1,2, 3,4, 5, 6, 7, 8} to’plam uchun munosabatlar matritsasini tuzing va ular bo’yicha quyidagi munosabatlar xususiyatlarini aniqlang:

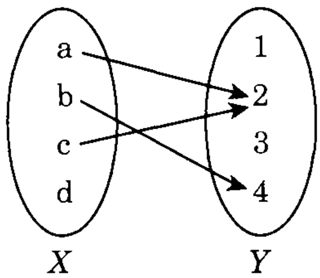
a) $R_1 = \{(a, b): a > b\}$;
b) $R_2 = \{(a, b): (a+1)$ bo’luvchi $(b+a)\}$;
v) $R_3 = \{(a, b): (a+b+1)$ juft son$\}$.

5. Quyidagi chizmalar bilan berilgan to’plamlar va ular orasidagi munosabatlarni yozing:

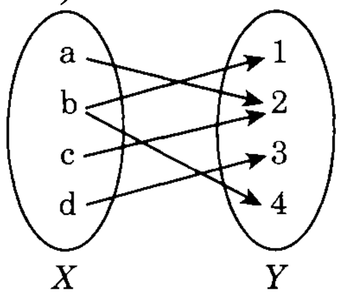
a)



b)



s)



4.3. Munosabatlar superpozitsiyasi

$P \subseteq A \times B$ va $Q \subseteq B \times C$ binar munosabatlar uchun $P o Q \subseteq A \times C$ predikat quyidagicha aniqlangan bo’lsin: $(P \circ Q)(x, z) = 1$ shart bilan aniqlangan ixtiyoriy $x \in A,\ z \in C$ uchun shunday $y \in B$ topiladiki, $P(x, y) = 1,\ Q(y, z) = 1$ o’rinli bo’ladi. $P o Q$ ga P va Q munosabatlarning **superpozitsiyasi** deyiladi:

$$P \circ Q = \{(x, z) : \forall x \in A, z \in C \text{ va } \exists y \in B \Rightarrow (x, z) \in P \text{ va } (y, z) \in Q\}.$$

Misol. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$ va $C=\{x,y,z\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

$$P \subseteq A\times B=\{(1,a);(1,c);(2,b);(2,c);(3,a)\};$$
$$K \subseteq B\times C=\{(a,x);(a,y);(b,y);(b,z);(c,x);(c,z)\};$$
$$P\circ Q \subseteq A\times C\setminus\{(3;z)\}=\{(1,x);(1,y);(1,z);(2,x);(2,y);(2,z);(3,x);(3,y)\}.$$

Misol. $A=\{a,b,c,d\}$ to'plam berilgan bo'lsin.

$P\subseteq A\times A=\{(a,a);(a,b);(a,d);(c,a);(c,b);(d,a)\}$; u holda teskari munosabat $P^{-1}\subseteq A\times A=\{(a,a);(b,a);(d,a);(a,c);(b,c);(a,d)\}$ bo'ladi. Quyidagilarni hisoblaymiz: $P\cap P^{-1}, P\circ P^{-1}, P^{-1}\circ P$:

$P\cap P^{-1}$ = $\{(a;a),(a;d),(d;a)\}$;

$P\circ P^{-1}$=$\{(a;a),(a;c),(a;d),(c;a),(c;c),(c;d),(d;a),(d;c),(d;d)\}$;

$P^{-1}\circ P$=$\{(a;a),(a;b),(a;d),(b;a),(b;b),(b;d),(d;a),(d;b),(d;d)\}$.

Bundan ko'rinadiki, $P\circ P^{-1}\neq P^{-1}\circ P$, ya'ni superpozitsiya amali kommutativ emas.

Teorema 1. $P\subseteq A\times B$ munosabat uchun quyidagilar o'rinli:

a) $I_A\circ P=P$;

b) $P\circ I_B=P$.

Isboti: a) $(x;y)\in I_A\circ P$ ni qaraylik, uning uchun shunday $z\in B$ topiladiki, $(x;z)\in I_A$ va $(z;y)\in P$. Biroq $(x;z)\in I_A$ dan $x=z$ kelib chiqadi, demak $(x;y)\in P$, u holda $I_A\circ P\subseteq P$.

Endi $(x;y)\in P$ bo'lgan holni qaraymiz, bu holda $(x;x)\in I_A$ va $(x;y)\in P$ hosil bo'ladi. Ya'ni shunday $z\in(z=x)$ topiladiki, uning uchun $(x;z)\in I_A$ va $(z;y)\in P$ bo'ladi, demak $(x;y)\in I_A\circ P$.

c) shart ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema isbotlandi.

Teorema 2. $P\subseteq A\times B$ va $Q\subseteq B\times C$ binar munosabatlar uchun

$(P\circ Q)^{-1}=Q^{-1}\circ P^{-1}$ tenglik o'rinli.

Isboti: $(z;x)\in(P\circ Q)^{-1}\leftrightarrow(x;z)\in P\circ Q$ uchun shunday $y\in B$ element topiladiki, uning uchun $(x;y)\in P$ va $(y;z)\in Q\leftrightarrow(y;x)\in P^{-1}$ va $(z;y)\in Q^{-1}\leftrightarrow(z;x)\in Q^{-1}\circ P^{-1}$ bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Teorema 3. $P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C,\ R \subseteq C \times D$ binar munosabatlar uchun $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ superpozitsiyaning assotsiativligi o'rinli.

Isboti: $(x;t) \in (P \circ Q) \circ R$ uchun shunday $z \in C$ element topiladiki, uning uchun $(x;z) \in (P \circ Q) \circ R$ va shunday $y \in B$ element topiladiki, uning uchun $(x;y) \in P$, $(y;z) \in Q$ va $(z;t) \in R$ munosabatlar o'rinli. Ularning superpozitsiyasini hisoblab, $(x;y) \in P$ va $(y;t) \in Q \circ R$ dan $(x;t) \in P \circ (Q \circ R)$ ga kelamiz. Demak, $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.

Teorema isbotlandi.

MISOL VA MASALALAR

$A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$, S=$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ to'plamlarda aniqlangan $R_1 \subset A \times B$ va $R_2 \subset B \times C$ binar munosabatlarning **superpozitsiyasini** toping:

a) $R_1=\{(a,2),(a,3),(b,1),(s,2)\}$, $R_2=\{(1,\alpha),(2,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\}$

b) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(2,\gamma),(1,\alpha),(1,\beta)\}$

v) $R_1=\{(a,3),(b,2),(s,1),(s,2)\}$, $R_2=\{(1,\beta),(2,\alpha),(3,\beta),(3,\gamma)\}$

g) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(1,\gamma),(3,\alpha),(1,\beta)\}$

d) $R_1=\{(a,1),(a,3),(s,1),(s,3)\}$, $R_2=\{(2,\alpha),(2,\gamma),(1,\beta),(3,\alpha)\}$

e) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(1,\gamma),(1,\alpha),(3,\beta)\}$.

4.4. Ekvivalentlik munosabati

Binar munosabatlarda $(x;y) \in P$ o'rniga $x\,P\,y$ yozuv ham ishlatiladi.

Agar X to'plamdagi ixtiyoriy x element to'g'risida u o'z-o'zi bilan P munosabatda deyish mumkin bo'lsa, X to'plamdagi munosabat **refleksiv munosabat** deyiladi va xPx ko'rinishida belgilanadi.

Agar X to'plamdagi x elementning y bilan P munosabatda bo'lishidan y elementning ham x bilan P munosabatda bo'lishi kelib chiqsa, X to'plamdagi P munosabat **simmetrik munosabat** deyiladi va $x\,P\,y \Rightarrow y\,P\,x$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar X to'plamdagi x elementning y bilan P munosabatda bo'lishi va y elementning z bilan P munosabatda bo'lishidan x elementning z bilan P munosabatda bo'lishi kelib chiqsa, X to'plamdagi P munosabat **tranzitiv munosabat** deyiladi va $x\,P\,y,\ yPz \Rightarrow xPz$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar X to'plamning turli x va y elementlari uchun x elementning y bilan P munosabatda bo'lishidan y elementning x bilan P munosabatda bo'lmasligi kelib chiqsa, X to'plamdagi P munosabat **antisimmetrik munosabat** deyiladi va $xPy \Rightarrow y\bar{P}x$ ko'rinishida belgilanadi.

$P \subseteq A \times A$ binar munosabat ham refleksivlik, ham simmetriklik, ham tranzitivlik shartlarini qanoatlantirsa, P munosabatga **ekvivalentlik munosabati** deyiladi, ya'ni

a) $\forall x \in A$ uchun xPx;

b) $xPy \Rightarrow yPx$;

v) $\forall\ (x,\ y) \in P,\ (y;z) \in P$ uchun xPy va yPz dan xPz kelib chiksa.

Misol.

1) "=" munosabati ekvivalent munosabat;
2) Qarindoshlik munosabati ekvivalent munosabat;
3) "Sevgi" munosabati ekvivalent munosabat emas.

Misol. $A = Z$ butun sonlar to'plami va unda aniqlangan $P \subseteq Z \times Z$ munosabat shunday $x - y$ larki, ular 3 ga bo'linadi.

a) x-$x=0$ soni 3 ga bo'linadi.

b) $x - y$ ifoda 3 ga bo'linsa, $y - x = -(x - y)$ ham 3 ga bo'linadi.

v) $x - y$ ifoda 3 ga bo'linsa va $y - z$ ifoda 3 ga bo'linsa, u holda $(x - y) + (y - z) = x - z$ ham 3 ga bo'linadi.

Demak, $P \subseteq Z \times Z = \{x \in Z, y \in Z \mid x - y \vdots 3 \quad \text{ga} \quad \text{bo'linadi}\}$ munosabat ekvivalent munosabat bo'ladi.

$x \in A$ elementning **ekvivalentlik sinfi** deb, $E(x) = \{{}^{y}/_{x \sim y}\}$ to'plamga aytiladi.

A to'plam elementlarining E ekvivalentlik bo'yicha ekvivalent sinflar to'plami **faktor – to'plam** deyiladi va ${}^{A}/_{E} = \{{}^{E(x)}/_{x \in A}\}$ kabi belgilanadi.

Misol. Agar $\{(a,b);(c,d)\} \in K$ to'plam elementlari uchun $a+d=b+s$ tenglik bajarilsa, u holda K munosabat $N \times N$ to'plamda ekvivalentlik munosabati bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi:

1) *Refleksivlik:* agar A to'plamda K refleksivlik munosabati bo'lsa, u holda $\forall x \in Q,\ (x;x) \in Q$. Bizning misolda A to'plam o'rnida $N \times N$ to'plam va x element o'rnida (x,y) juftlik. Bunda $N \times N$ to'plamda K munosabat

refleksiv bo'ladi, agarda $\forall(x;y)\in Q$, $\{(x;y),(x;y)\}\in Q$. Ta'rifga ko'ra, *K: a+d=b+s*, lekin $a+b=b+a$, demak, *K* - refleksiv munosabat.

2) *Simmetriklik:* agar $\{(a,b);(c,d)\}\in K$ bo'lsa, u holda $\{(c,d);(a,b)\}\in K$, *a+d=b+s* bundan s+*b=d+a*. Demak, *K* – *s*immetrik munosabat.

3) *Tranzitivlik:* agar $\{(a,b);(c,d)\}\in K$, $\{(c,d);(f,g)\}\in K$ bo'lsa, u xolda $\{(a,b);(f,g)\}\in K$ bo'ladi, chunki *a+d=b+s* va *s+g=d+f*. U xolda *(a+d)+(s+g)=(b+s)+(d+f)* $\Rightarrow$ *a+d+s+g=b+s+d+f* $\Rightarrow$ *a+g=b+f*, ya'ni *K*– tranzitiv munosabat.

Demak, *K* munosabat ham refleksiv, ham simmetrik, ham tranzitiv bo'lgani uchun ekvivalent munosabat bo'ladi.

Har bir elementi A to'plamning faqat va faqat bitta qism to'plamiga tegishli bo'lgan kesishmaydigan qism to'plamlar majmuasi A to'plamning **bo'laklari** deyiladi.

Teorema. *A/E* faktor-to'plam *A* to'plamning bo'lagi bo'ladi. Va aksincha, agar $R=\{A_i\}$ – *A* to'plamning biror bo'lagi bo'lsa, u xolda bu bo'lakka biror y va A_y dan olingan $x;y$ elementlar uchun $x\in y$ qoida bo'yicha *E* ekvivalentlik munosabatini topish mumkin.

Nazorat uchun savollar:

1. Munosabatlar superpozitsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Munosabatlar superpozitsiyasining xossalarini ayting.
3. Refleksiv munosabat deganda nimani tushunasiz?
4. Simmetrik munosabat ta'rifini ayting.
5. Tranzitiv munosabatga misol keltiring.
6. Qanday munosabatga ekvivalent munosabat deyiladi?

MISOL VA MASALALAR:

1. Birdan farqli natural sonlar to'plami dekart kvadratida aniqlangan *R*={ (x,y): x va y lar birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega} munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?
2. $A=\{a,b,c\}$ to'plam dekart kvadratida simmetrik bo'lgan, refleksiv, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
3. $A=\{a,b,c\}$ to'plam dekart kvadratida tranzitiv bo'lgan, refleksiv, simmetrik bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

4. $A=\{a,b,c\}$ to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik bo'lgan, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
5. A={1,2,3,4} to'plam dekart kvadratida refleksiv bo'lgan, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
6. A={1,2,3,4} to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring.
7. A={1,2,3,4} to'plam dekart kvadratida ekvivalent munosabatga misol keltiring va isbotlang.

Test savollari:

1. Elementlarini raqamlab chiqish mumkin bo'lgan cheksiz to'plam qanday nomlanadi?

A) chekli; B) sanoqli; C) cheksiz; D) $\varnothing$.

2. A={1;2;3}; B={4;5;6}; C={7;8;9} to'plamlar berilgan. $D=A\cup B\cup C$ to'plamning elementlari soni nechta?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 5

3. A={1,2,3,4} to'plamning dekart kvadratida aniqlangan R={(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(4,1),(4,3)} munosabat

a) refleksivlik, b) simmetriklik, v) tranzitivlik,
g) antisimmetriklik xossalaridan qaysi birini qanoatlantiradi?

A) a B) b,v C) v,g D) b

4. A={1,2,3,4,5,6} to'plamdagi $x\leq y$ binar munosabatning qism to'plami qaysi javobda ko'rsatilgan?

A) {(1,1), (1,2), (3,6), (5,6)}; B) {(1,2), (2,5), (4,2)}
C) {1, 2, 3, 4}; D) {(6,3), (2,4)}

5. A to'plamdagi R binar munosabat tranzitivlik xossasini qanoatlantiradi, agarda quyidagi o'rinli bo'lsa:

A) xRx A to'plamdagi ixtiyoriy x uchun;
B) xRy dan yRx kelib chiqadi;
C) xRy va yRx dan $x=y$ kelib chiqadi;
D) xRy va yRz dan xRz bo'ladi.

6. Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam qanday nomlanadi?

A) Singleton B) bo'sh to'plam C) chekli to'plam D) nol

7. A={1,2,3,4,5,6} to'plamdagi «o'zaro tub» binar munosabatning qism to'plamini toping.

A) {(1,1), (1,2), (3,6), (5,6)}; B) {(1,2), (2,5), (4,2)};
C) {1, 2, 3, 4}; D) {(2,3),(5,3)}.

8. Soddalashtiring: $(A/B)\cup(A\cap B)$

A) $A\cap B$; B) A; C) $A\Delta B$; D) $A\cup B$

4.5. Munosabatlar maydoni

Biror A va B to'plamlar hamda ularda aniqlangan $P\subseteq A\times B$ munosabat berilgan bo'lsin. P–munosabatning **chap sohasi** yoki **aniqlanish sohasi** D_l deb, P–munosabatga tegishli juftliklar birinchi elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va $D_l=\{\exists x\colon\ (x,y)\in\ P\}$ kabi belgilanadi. *l-"left"*, ya'ni "chap" so'zidan olingan.

P–munosabatning **o'ng sohasi** yoki **qiymatlar sohasi** D_r deb, P–munosabatga tegishli juftliklarning ikkinchi elementlar to'plamiga aytiladi va $D_r=\{\exists\, y:(x,y)\in P\}$ kabi belgilanadi. *r-"right"*, ya'ni "o'ng" so'zidan olingan.

Geometrik ma'noda D_l - P munosabatning X to'plamga proyektsiyasi, D_r- P munosabatning Y to'plamdagi proyektsiyasi hisoblanadi.

Aniqlanish va qiymatlar sohalarining birlashmasi $D_l\cup D_r$ ga P **munosabat maydoni** deyiladi va $F(P)$ kabi belgilanadi.

P munosabatning chap va o'ng sohalaridagi bir xil qiymatga ega bo'lgan elementlari, ikkala tomonga ham tegishli deb hisoblanadi, xususan A^2 dekart kvadrat uchun $F(P)=A$ bo'ladi.

$R^{-1}=\{(y\,,x)\colon\ (x\,,y)\in \mathrm{R}\}$ to'plamga R munosabatga **teskari munosabat** deyiladi.

Misol. A={2,3,4,5,6,7,8} to'plamda binar munosabat

$$R=\{(x,y):x,y\in A,x\ \text{element}\ y\ \text{ni bo'ladi va}\ \ x\le 3\}$$

shart bilan aniqlangan bo'lsin. U holda

R={(2,2), (2, 4), (2,6), (2, 8), (3, 3), (3, 6)};

$D_l=\{2, 3\}$;

$D_r=\{2, 3, 4, 6, 8\}$;

R^{-1}= {(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3)}.

Nazorat uchun savollar:

1. Munosabatning aniqlanish sohasiga ta'rif bering.
2. Munosabatning qiymatlar sohasi ta'rifini ayting.
3. Munosabatlar maydoni deganda nimani tushunasiz?
4. Teskari munosabat deb nimaga aytiladi?

MISOL VA MASALALAR

$A=\{a,b,c,d,e\}$, $V=\{1,2,3,4\}$ to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A\times B$ va $R_2 \subseteq B\times B=B^2$ bo'lsa,

1) R_1, R_2 munosabatlarni grafik ko'rinishda ifodalang;
2) R_1, R_2 munosabatlarning aniqlanish va qiymatlar sohalarini toping;
3) $R_1, R_2, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_2^2$, $R_2 \cap R_2^{-1}$ - munosabatlarning matritsalarini toping;
4) R_2 munosabatni refleksivlik, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik xossalariga tekshiring.

1. $R_1=\{<a;3>,<b;1>,<b;3>,<c;2>,<c;4>,<d;3>,<e;1>,<e;2>,<e;3>,<e;4>\}$,
$R_2=\{<1;4>,<2;1>,<2;2>,<2;3>,<3;2>,<3;3,<4;1>,<4;3>\}$.

2. $R_1=\{<a;1>,<a;3>,<a;4>,<d;3>,<c;1>,<c;3>,<c;4>,<d;1>,<d;3>,<e;4>\}$,
$R_2=\{<1;1>,<1;4>,<2;1>,<2;3>,<3;2>,<4;1,<4;3>,<4;4>\}$.

3. $R_1=\{<a;1>,<a;3>,<b;1>,<b;3>,<c;1>,<c;3>,<d;3>,<d;4>,<e;2>,<e;4>\}$,
$R_2=\{<1;1>,<1;2>,<1;4>,<2;3>,<3;2>,<3;4,<4;1>,<4;4>\}$.

4. $R_1=\{<a;3>,<b;3>,<c;2>,<c;3>,<c;4>,<d;2>,<d;3>,<d;4>,<e;2>,<e;4>\}$,
$R_2=\{<1;2>,<1;4>,<2;1>,<2;3>,<3;2>,<3;4,<4;1>,<4;3>\}$.

5. $R_1=\{<a;3>,<a;4>,<b;2>,<b;3>,<c;2>,<c;3>,<c;4>,<d;3>,<d;2>,<d;4>\}$,
$R_2=\{<1;3>,<1;4>,<2;3>,<2;4>,<3;2>,<3;3,<4;1>,<4;3>\}$.

6. $R_1=\{<a;1>,<a;3>,<b;2>,<b;4>,<c;1>,<c;3>,<c;4>,<d;4>,<e;3>,<e;4>\}$,
$R_2=\{<1;1>,<2;1>,<2;4>,<3;1>,<3;2>,<3;3,<3;4>,<4;4>\}$.

7. $R_1=\{<a;3>,<b;1>,<b;3>,<c;2>,<c;4>,<d;3>,<e;1>,<e;2>,<e;3>,<e;4>\}$,
$R_2=\{<1;4>,<2;1>,<2;2>,<2;3>,<3;2>,<3;3,<4;1>,<4;3>\}$.

8. $R_1 = \{<b;1>,<b;4>,<c;1>,<c;2>,<c;4>,<d;4>,<e;1>,<e;2>,<e;3>,<e;4>\},$
$R_2 = \{<1;1>,<1;2>,<1;3>,<2;1>,<2;4>,<3;1,<3;4>,<4;4>\}.$

9. $R_1 = \{<b;1>,<b;2>,<b;3>,<b;4>,<c;2>,<c;4>,<d;2>,<d;4>,<e;2>,<e;4>\},$
$R_2 = \{<2;1>,<2;2>,<2;3>,<2;4>,<3;2>,<3;4,<4;2>,<4;4>\}.$

10. $R_1 = \{<a;3>,<b;1>,<b;3>,<c;4>,<d;3>,<e;1>,<e;2>,<e;4>\},$
$R_2 = \{<1;4>,<2;1>,<2;2>,<3;2>,<3;3,<4;1>,<4;3>\}.$

5. AKSLANTIRISHLAR

Ushbu bo'limda akslantirish, ya'ni funktsiya tushunchasi kiritiladi. Zamonaviy dasturlash tillarida funktsiyalar juda keng qo'llaniladi. Ular qism dasturlarni alohida ajratib hisoblash imkonini beradi. Funktsional dasturlash tillarida sodda funktsiyalardan foydalanib, murakkab funktsiyalarni tatqiq qilish uchun funktsiyalar kompozitsiyasini yaxshi bilish kerak. Bobning amaliy tadbiqi sifatida funktsiyalar kompozitsiyalarini hisoblashni o'rganamiz.

5.1. Akslantirishlar

$f \subset A \times B$ munosabatga **funktsiya** yoki A to'plamdan B to'plamga **akslantirish** deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

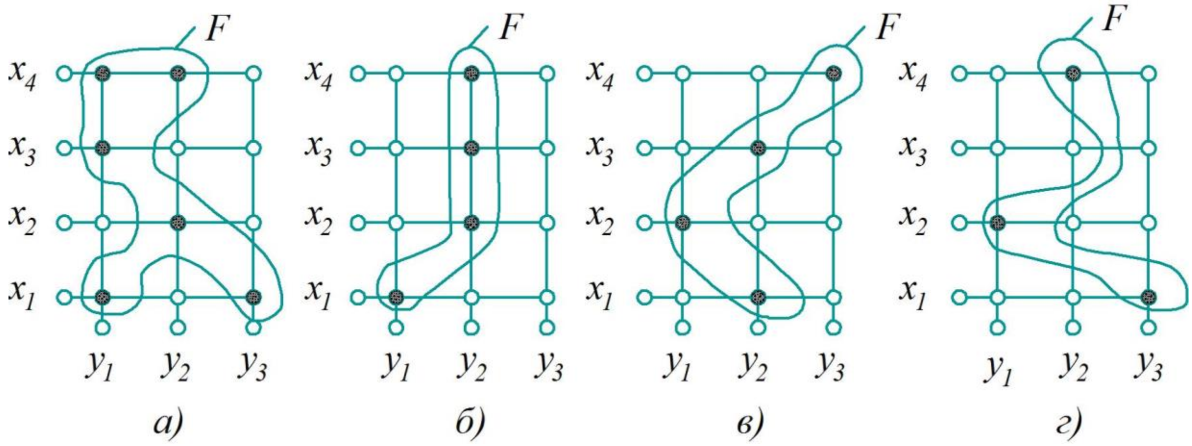
1) $D_l(f) = A$, $D_r(f) \subseteq B$,

2) $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ ekanligidan $y_1 = y_2$ ekanligi kelib chiqsa.

Funktsiya $f : A \to B$ yoki $A \xrightarrow{f} B$ kabi belgilanadi, agar $(x, y) \in f$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ kabi yoziladi va f funktsiya x elementga y elementni mos qo'yadi deb gapiriladi. $y \in B$ elementga x elementning **obrazi**, $x \in A$ elementga y ning **proobrazi** deyiladi.

Agar $D_l(f) \subset A$ bo'lsa, f funktsiya **qismiy funktsiya** deyiladi.

Ikkita to’plam dekart ko’paytmasini to’g’ri burchakli panjaraga mos qo’yish mumkin, bunda tugunlar dekart ko’paytma elementlarini bildiradi, barcha tugunlarni egri chiziq ichiga olib belgilaymiz.



Rasm 5.1.

Rasmda $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ va $B=\{y_1,y_2,y_3\}$ to’plamlarning dekart ko’paytmalaridan olingan qism to’plamlar tasvirlangan, bunda a- funktsiya emas; b, v- funktsiya, g-qismiy funktsiya tasviri.

Bu munosabatni qo’shnilik matritsasi orqali quyidagicha berish mumkin:

Misol.

1) $g=\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ - munosabat funktsiya bo’ladi.

2) $R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ - munosabat funktsiya bo’lmaydi.

3) $f=\{(x,x^2-2x+3),\ x\in R\}$- munosabat funktsiya bo’ladi va $y=x^2-2x+3$ ko’rinishda ham yoziladi.

Agar a) $D_l(f)=D_l(g)$;

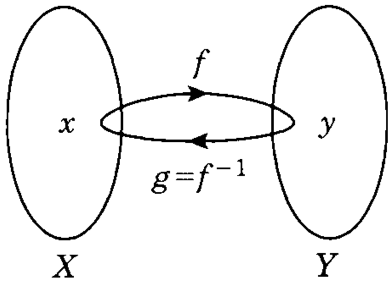
b) ixtiyoriy $x\in D_l(f)$ uchun $f(x)=g(x)$ bajarilsa, $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ va $g:\mathrm{C}\to D$ akslantirishlarga **teng akslantirishlar** deyiladi.

1) $f:A\to B$ akslantirishga **teskari akslantirish** f^{-1} deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirishga aytiladi:

a) $D_l\left(f^{-1}\right)=D_r(f)=B$;

b) $D_r\left(f^{-1}\right)=D_l(f)=A$;

v) ixtiyoriy $x\in A$ uchun $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ teskari akslantirish o’rinli.



Rasm 5.2.

2) $I_A : A \longleftrightarrow A$ akslantirish quyidagicha aniqlanadi;

a) $D_l(I_A) = D_r(I_A) = A$;

b) ixtiyoriy $x \in A$ uchun $I_A(x) = x$. I_A ga A da **birlik akslantirish** yoki **ayniy akslantirish** deyiladi.

Teorema 1 (*Birlashmaning obrazi obrazlar birlashmasiga teng*). $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq A$ lar uchun $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ tenglik o'rinli.

Teorema 2 (*Birlashmaning proobrazi proobrazlar birlashmasiga teng*). $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq B$ lar uchun $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ tenglik o'rinli.

Teorema3. $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq A$ lar uchun $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ tenglik o'rinli.

Teskari tasdiq o'rinli bo'lmasligini misol yordamida ko'ramiz. $f(x) = x^2 : R \to R_+ \cup \{0\}$ akslantirish bo'lsin. X va Y to'plamlar sifatida $X = [-1;0]$, $Y = [0;1]$ larni ko'raylik. Ravshanki, $f(X) = [0;1]$, $f(Y) = [0;1]$, demak ularning kesishmasi $f(X) \cap f(Y) = [0;1]$. So'ngra $[-1;0] \cap [0;1] = \{0\}$ ekanligidan $f(X \cap Y) = f(\{0\}) = \{0\}$ ni aniqlaymiz. Bu holda qism to'plam bo'lish $f(X) \cap f(Y) \not\subset f(X \cap Y)$ munosabati bajarilmaydi.

Teorema 4. $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq B$ to'plamlar uchun $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ tenglik o'rinli.

Agar f^{-1} munosabat qismiy funktsiya bo'lsa, ya'ni $\forall x_1, x_2 \in D_l(f)$ dan olingan $x_1 \neq x_2$ учун $f(x_1) \neq f(x_2)$ bajarilsa, f funktsiyaga o'**zaro bir qiymatli** f**unktsiya** yoki **in'yektiv funktsiya** deyiladi va $f : A \xrightarrow{1-1} B$ kabi belgilanadi.

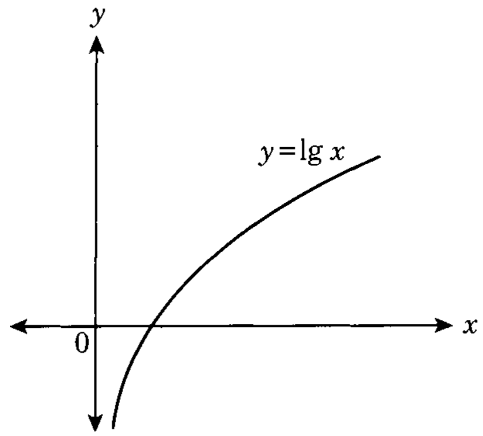
Demak, in’yektiv funktsiyada takrorlanuvchi qiymatlar bo’lmaydi. Bundan $f(x_1)=f(x_2)$ dan $x_1=x_2$ kelib chiqadi.

Misol. $f(x)=4x+3$ funktsiya $f(x): R\to R$ in’yektiv funktsiya bo’lishini ko’rsating.

Yechilishi: Faraz qilaylik, $f(x_1)=f(x_2)$ bo’lsin, ya’ni $4x_1+3=4x_2+3$, bundan $4x_1=4x_2$, $x_1=x_2$ kelib chiqadi. Demak, f – in’yektiv funktsiya bo’ladi.

Misol. $y=\lg x$ funktsiya $y: R\to R$ in’yektiv funktsiya bo’lishini ko’rsating.

Yechilishi: $y=\lg x$ funktsiya grafigini yasaymiz, chizmadan har bir *x* argumentga faqat bitta *u* element mos kelishini ko’rish mumkin, demak berilgan funktsiya in’yektiv.



Rasm 5.3.

Agar $D_r(f)=\mathrm{B}$ bo’lsa, $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ funktsiya A **ni** B **ga ustiga akslantirish** yoki **syur’yektiv funktsiya** deyiladi va $f:\mathrm{A}\xrightarrow{\text{устига}}B$ kabi belgilanadi.

Misol. $f(x)=4x+3$ funktsiyani syur’yektivlikka tekshiramiz.

Yechilishi: Aytaylik, $\mathrm{b}\in\mathrm{R}$ bo’lsin. Ta’rifga ko’ra, f – syur’yektiv funktsiya bo’lishi uchun $D_r(a)=b$ o’rinli bo’ladigan shunday haqiqiy son $a\in R$ ni topish mumkin. Buning uchun $b=4a+3$ deb olsak, $a=\frac{b-3}{4}$ son topiladi. Demak, f - syur’yektiv funktsiya.

Ham in’yektiv, ham syur’yektiv bo’lgan f funktsiyaga A va B to’plamlarning **biyektiv funktsiyasi** deyiladi va $f:\mathrm{A}\longleftrightarrow B$ kabi belgilanadi.

$f(x)=4x+3$ funktsiya ham in’yektiv, ham syur’yektiv, demak biyektiv ham bo’ladi.

Umuman olganda, $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ akslantirishlarning barchasi $f(x): R\to R$ biyektsiya bo’ladi.

Misol. $f(x)=\sin x$ tenglik uchun:

a) $f(x): R\to R$ akslantirish in’yektiv ham, syur’yektiv ham bo’lmaydi.

b) $f(x): R\to[-1;1]$ akslantirish syur’yektiv bo’ladi, lekin in’yektiv bo’lmaydi.

v) $f(x): [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]$ akslantirish biyektiv bo’ladi.

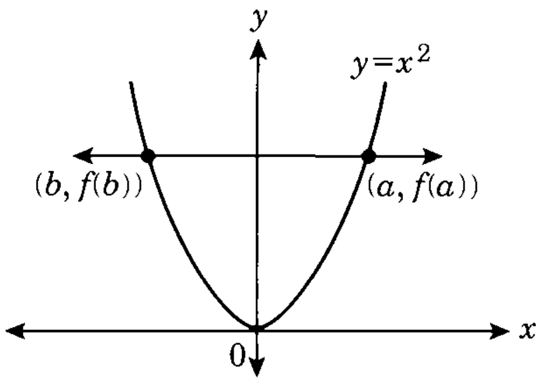
Misol. $f(x)=x^2$ tenglik uchun:

a) $f(x): R\to R$ in’yektiv ham, syur’yektiv ham emas.

b) $f(x): [0;\infty)\to R$ in’yektiv bo’ladi, syur’yektiv emas.

v) $f(x): R\to[0;\infty)$ syur’yektiv bo’ladi, in’yektiv emas.

g) $f(x): [0;\infty)\to[0;\infty)$ biyektiv akslantirish bo’ladi.



Rasm 5.4.

Keltirilgan misollardan ko’rinadiki, $f: A\to B_x$ akslantirishlarda nafaqat f amalning tuzilishi, balki A va B to’plamlarning ham tuzilishi muhim rol o’ynaydi..

Misol 8. $f_i:$ R $\to$ R, $i=1,2,3,...$funktsiyalarni qaraylik.

1) $f_1(x)=e^x$ funktsiya in’yektiv, lekin syur’yektiv emas.

2) $f_2(x)=x\sin x$ funktsiya in’yektiv emas, lekin syur’yektiv.

3) $f_3(x)=2x-1$funktsiya ham in’yektiv, ham syur’yektiv, demak, biyektiv bo’ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Funktsiya deb nimaga aytiladi?
2. Qismiy funktsiyaga ta’rif bering.
3. Qanday funktsiyaga in’yektiv funktsiya deyiladi?
4. Qanday funktsiyaga syur’yektiv funktsiya deyiladi?

5. Biyektiv funktsiya deb nimaga aytiladi?
6. Teng va teskari akslantirishlarni tushuntiring.

MISOL VA MASALALAR:

1. X,Y,Z to'plamlarning dekart ko'paytmasini to'g'ri burchakli panjaraga mos qo'ying. Tugunlarda aniqlanish sohasi $X\times Y$, qiymatlar sohasi Z bo'lgan 2 o'rinli funktsiyani tasvirlang, bunda

a) $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$;
b) $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$;
v) $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, $Z=\{z_1,z_2\}$;
g) $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$;

2. X,Y to'plamlarning dekart ko'paytmasini to'g'ri burchakli panjaraga mos qo'ying. Tugunlarda $X\times Y$ elementlari bo'lib, in'yektiv va syur'yektiv funktsiyalarni ajrating, bunda

a) $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$;
b) $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$;
v) $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$;
g) $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$;

3. A={1,2,3,4}, $B=\{a,b,c,d\}$ to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan quyidagicha R munosabatlar funktsiya bo'ladimi? U holda in'yektivlik, syur'yektivlik va biyektivlikka tekshiring:

a) $P=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,d)\}$ b) $P=\{(1,a),(2,b),(3,a),(4,d)\}$
s) $P=\{(1,a),(2,c),(3,b),(3,d)\}$ d) $P=\{(2,a),(1,b),(2,c),(4,d)\}$
e) $P=\{(2,a),(3,b),(1,c),(4,d)\}$ f) $P=\{(3,a),(3,b),(4,c),(4,d)\}$
g) $P=\{(4,a),(1,b),(2,a),(3,c)\}$ i) $P=\{(1,a),(3,b),(2,c),(4,d)\}$

4. Agar $f_i(x):(-\infty;+\infty)\to(-\infty;+\infty)$ berilgan bo'lsa, ularni in'yektivlik, syur'yektivlik, biyektivlikka tekshiring:

a) $f(x)=x^2$ e) $f(x)=\ln x$
b) $f(x)=tgx$ f) $f(x)=2x^2+1$
s) $f(x)=\cos x$ g) $f(x)=ctgx$
d) $f(x)=\log_3 x$ i) $f(x)=x-5$

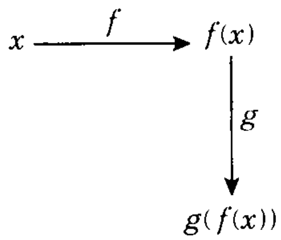
5. $A=\{x : x\in \mathrm{R},\quad x\neq 1\}$ to'plam va $f :\ \mathrm{A}\to \mathrm{A}$ akslantirish $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ formula bilan berilgan bo'lsin. f ni biyektivlikka tekshiring va unga teskari funktsiyani toping.

5.2. Akslantirishlar superpozitsiyasi

$f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ va $g:\mathrm{B}\to C$ akslantirishlar berilgan bo'lsin. f va g **akslantirishlar superpozitsiyasi** deb,

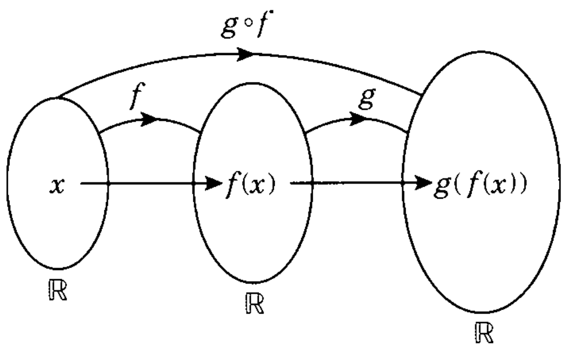
1) $D_l(g\circ f)=A$;
2) $D_r(g\circ f)=C$;
3) ixtiyoriy $x\in D_l(g\circ f)$ uchun $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

shartlarni qanoatlantiruvchi $g\circ f : A\to C$ akslantirishga aytiladi.



Rasm 5.5.

Akslantirishlar superpozitsiyasi **kompozitsiya** yoki **murakkab funktsiya** deb ham ataladi $g(f(x))$.



Rasm 5.6.

Teorema 1. $f:A\to B$ biyektiv akslantirish bo'lsin. U holda:

1) f^{-1} ham biyektiv akslantirish bo'ladi;
2) $f\circ f^{-1}=I_B$;
3) $f^{-1}\circ f=I_A$;
4) $I_B\circ f=f$;
5) $f\circ I_A=f$;
6) $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$.

Teorema 2. f va g akslantirishlar uchun quyidagi shartlar o'rinli:

1) Agar $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $g: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ bo'lsa, u holda $g \circ f : A \to C$;

2) Agar $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bo'lsa, u holda $I_A \circ f = f$, $f \circ I_B = f$;

3) Agar $f: \mathrm{A} \xrightarrow{ni} B$, $g: \mathrm{B} \xrightarrow{ni} C$ bo'lsa, u holda $f \circ g : \mathrm{A} \xrightarrow{ni} C$.

4) Agar f va g lar in'yektiv akslantirish bo'lsa, u holda $f \circ g$ ham in'yektiv akslantirish bo'ladi.

5) Agar $f: \mathrm{A} \longleftrightarrow B$, $g: \mathrm{B} \longleftrightarrow C$ bo'lsa, u holda $f \circ g: \mathrm{A} \longleftrightarrow C$ bo'ladi.

Teorema 3. $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ akslantirishlar uchun $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ munosabat o'rinli.

Ko'rish mumkinki, akslantirishlar kompozitsiyasi binar munosabatlar kompozitsiyasining xususiy holidan iborat. Binar munosabatlar uchun assotsiativlik qonuni bajarilganligi uchun akslantirishlar kompozitsiyasi uchun ham bajariladi.

Misol. Ikkita $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x^2$ va $g: R \to R,\ g(x) = 4x + 3$ funktsiyalar uchun $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ kompozitsiyalarni toping.

Yechilishi: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x+3) = (4x+3)^2 = 16x^2 + 24x + 9;$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2;$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = x^4;$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(4x+3) = 4(4x+3) + 3 = 16x + 15.$$

Misol. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{agar } x \le 4 \text{ bo'lsa,} \\ x-3, & \text{agar } x > 4 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \le 5 \text{ bo'lsa,} \\ 2x-1, & \text{agar } x > 5 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

funktsiyalarning kompozitsiyasini toping.

Yechilishi: $(g \circ f)(2) = 16$ va $(g \circ f)(5) = 4$. Demak

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & \text{agar } x \le 3 \\ 2x+3 & \text{agar } 3 < x \le 4 \\ (x-3)^2 & \text{agar } 4 < x \le 8 \\ 2x-7 & \text{boshqa hollarda} \end{cases}$$

Misol. $f(x) = ax + b$ va $g(x) = \dfrac{x-b}{a}$ funktsiyalar kompozitsiyasini toping.

Yechilishi:

$$(1)\ (g\circ f)(x)=g(f(x)) \qquad (2)\ (f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$$=g(ax+b) \qquad =f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$=\frac{(ax+b)-b}{a} \qquad =a\left(\frac{x-b}{a}\right)+b$$

$$=x \qquad =x$$

Bundan ko'rinadiki, oxirgi misoldagi $g(f(x))$ va $f(g(x))$ funktsiyalar teng funtsiyalardir.

A ni B ga akslantiruvchi barcha funktsiyalar to'plami B^A bilan belgilanadi. $B^A=\{f:\ f:A\to B\}$.

$f:A^n\to B$ funktsiya A dan B ga $n-$ **o'rinli funktsiya** deyiladi, agar y qiymat $n-$ o'rinli f funktsiyaning (x_1, x_2,...., x_n) argument qiymatidagi qiymati bo'lsa, va u $y=f(x_1,x_2,....,x_n)$ kabi yoziladi.

$f:A^n\to A$ funktsiya A tuplamda $n-$**o'rinli algebraik amal** deyiladi.

$n=1$ bo'lganda, f funktsiyaga **unar amal**, $n=2$ bo'lganda esa f funktsiyaga **binar amal** deyiladi. $n=0$ bo'lganda $f:A^0\to A$ amal $\{(\varnothing,a)\}$ biror bir $a\in A$ uchun bo'ladi. Ko'p hollarda A to'plamda 0 o'rinli amal
$\{(\varnothing,a)\}$ ni A to'plamdagi **konstanta** deyiladi va ***a*** **e**lement bilan ifodalanadi.

Misol. 1) Haqiqiy sonlarni qo'shish amali 2 o'rinli, ya'ni binar amal $+:R^2\to R$ bo'ladi, chunki qo'shish amali bir juft a,b songa $a+b$ sonni mos qo'yadi.
2) R – to'plamning ixtiyoriy ajratib ko'rsatilgan elementini, masalan $\sqrt{2}$ ni 0 o'rinli amal deyish mumkin, ya'ni R da konstantadir.

{0,1} qiymatlardan ixtiyoriy birini qabul qiladigan funktsiyaga **binar funktsiya** deyiladi.

a) $f_1:A_1\to B$ va $f_2:A_2\to B$ akslantirishlar berilgan bo'lsin. f_1 va f_2 **akslantirishlar kelishilgan** deyiladi, agarda ixtiyoriy $x\in D(f_1)\cap D(f_2)$ uchun $f_1(x)=f_2(x)$ tenglik bajarilsa.

b) $f_i:A_i\to B$ $(i\in I)$ akslantirishlar oilasi berilgan bo'lsin. $f_i\,(i\in I)$ **akslantirishlar oilasi kelishilgan** deyiladi, agarda f_i akslantirishlar o'zaro kelishilgan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $i,j\in I$ va $x\in D(f_i)\cap D(f_j)$ lar uchun $f_i(x)=f_j(x)$ tenglik bajarilsa.

Agar akslantirishlarning $D(f_i)$ aniqlanish sohalari o'zaro kesishmasa, u holda $f_i\,(i\in I)$ akslantirishlar oilasi kelishilgan bo'ladi.

5.3. Dirixle printsipi

$f: A \to B$ funktsiya A chekli to'plamni B chekli to'plamga akslantirsin. Deylik, A to'plam n ta elementdan iborat bo'lsin: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Dirixle printsipi: Agar $|A| > |B|$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda f ning bitta qiymati bir martadan ortiq uchraydi, ya'ni $a_i \neq a_j$ elementlar juftligi topiladiki, ular uchun $f(a_i) = f(a_j)$ bo'ladi.

Oddiy qilib aytadigan bo'lsak, Dirixle printsipi 10 ta quyonni 9 ta katakka har bir katakda bittadan quyon o'tiradigan qilib joylash mumkin emas degan ma'noni beradi.

Misol. Avtobusda 15 nafar yo'lovchi ketyapti. Ulardan hech bo'lmaganda 2 tasining tug'ilgan kuni bir xil oyda bo'lishi mumkinligini ko'rsating.

Yechilishi: Avtobusdagi odamlar to'plamini A, 12 ta oy nomlarini esa B deb belgilaymiz. $f: A \to B$ funktsiya avtobusdagi har bir kishiga uning tug'ilgan oyini mos qo'ysin. $|A| = 15$, $|B| = 12$ demak, $|A| > |B|$. Dirixle printsipiga ko'ra, f funktsiya takrorlanuvchi qiymatga ega. Bundan esa, hech bo'lmaganda 2 kishining tug'ilgan kuni bir xil oyda bo'lishi kelib chiqadi.

Misol. Agar hech bo'lmaganda 2 kishining familiyasi bir xil harfda boshlanib, bir xil harf bilan tugaydigan bo'lsa, telefon ma'lumotnomasiga yozilgan familiyalarning minimal soni qanday bo'ladi?

Yechilishi: A – ma'lumotnomadagi familiyalar to'plami, B – o'zbek alifbosidan olingan harflar juftligi to'plami. $f: A \to B$ bir xil familiyalarning birinchi va oxirgi harflarini mos qo'yuvchi funktsiya. Masalan, f(Abdullaev)= (a, b). B to'plam $26 \cdot 26 = 676$ juft harfdan iborat. Dirixle printsipiga ko'ra, agar $|A| > |B| = 676$ bo'lsa, familiyasi bir xil harfda boshlanib, bir xil harf bilan tugaydigan hech bo'lmaganda 2 kishi topiladi. Shuning uchun telefon ma'lumotnomasi 676 tadan kam bo'lmagan familiyadan tuzilgan bo'lishi kerak.

MISOL VA MASALALAR

Quyida keltirilgan $f,g:R\to R$ funktsiyalar uchun $f\circ g,$ $g\circ f,$ $f\circ f,$ $g\circ g$ kompozitsiyalar aniqlansin.

1. $f(x)=x^2-2$ va $g(x)=2x^3+5x+1$

2. $f(x)=x^2$ va $g(x)=\begin{cases}1+2x, & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo'lsa,}\\ 1-x, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}1+x, & \text{agar } x\geq 1 \text{ bo'lsa,}\\ 2x-2, & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{agar } x\geq 1 \text{ bo'lsa,}\\ x, & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}x+1, & \text{agar } x<2 \text{ bo'lsa,}\\ 4-x, & \text{agar } x\geq 2 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{agar } x\leq 1 \text{ bo'lsa,}\\ e^{-x+1}, & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa,}\\ 2x+1, & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x, & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x\geq -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{agar } x\leq 1 \text{ bo'lsa,}\\ -x+2, & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ \sin x & \text{agar } x\geq -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,}\\ x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}|x| & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa,}\\ -(x-1)^2+1 & \text{agar } x\geq 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{agar } x<-2 \text{ bo'lsa,}\\ x+2 & \text{agar } x\geq -2 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}\sin x & \text{agar } x<\dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,}\\ -x+\pi & \text{agar } x\geq \dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

Test savollari:

1. $f:M\to N$ uchun $A\subset M$ ning proobrazini aniqlang.

A) $f(a)=\{f(a);a\in\varnothing\};$ B) $f(a)=\{f(a);a\notin A\};$

C) $f(a)=\{f(a);a\in A\}$; D) $f(a)=\{f(a);a\in c\}$

2. $f:M\to \mathrm{N}$ uchun $B\subset N$ ning obrazini aniqlang.

A) $f^{-1}(B)=\{x\in M;\, f(x)\in B\}$; B) $f^{-1}(B)=\{x\in M;\, f(x)\notin B\}$;

C) $f^{-1}(B)=\{x\in M;\, f(x)\in B\bigcup R\}$; D) $f^{-1}(.)=\{x\in m;\, f(x)\in c^2\}$

3. Agar bo'sh bo'lmagan S to'plamlar tizimi kesishma va simmetrik ayirma amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, S to'plamga … deyiladi.

A) halqa B) maydon C) algebra D) sanoqli to'plam

4. To'plamlarni dekart ko'paytmasida $A=\{a,b\}$ va B={1,2} munosabatlar aniqlangan. Qaysi munosabat syur'yektiv funktsiya $f:A\to B$ bo'ladi?

A) $\{(a,1),(b,2)\}$; B) $\{(a,1),(b,1),(a,2)\}$; C) $\{(a,2)\}$; D) $\{(a,2),(b,2)\}$.

5. To'plamlarni dekart ko'paytmasida A={1, 2} va $B=\{a,b,c\}$ munosabatlar aniqlangan. Qaysi munosabat in'yektiv funktsiya $f:A\to B$ bo'ladi?

A) $\{(1,b),(2,a),(1,c)\}$; B) {(1,a), (2,a)};

C) $\{(1,a),(2,c)\}$; D) $\{(1,a),(2,b),(1,c),(2,c)\}$.

5.4. Rekurrent munosabatlar, ishlovchi funktsiyalar

Bir metodni sinab ko'rdingiz xato chiqdi.
Uni tashlangda boshqasini sinab ko'ring.
Asosiysi, nimanidir sinab ko'ring.
(Franklin Ruzvelt)[11]

Rekursiya – diskret matematika va informatikada keng qo'llaniladigan, texnika muammolarini yecha oladigan kuchli va haqiqiy metoddir. ALGOL, FORTRAN 90, C++, Java kabi dasturlash tillari rekursiyani hisoblashga yordam beradi. Rekkurrent munosabatlarni yechishning 3 ta usuli mavjud:

iteratsiya;
xarakteristik tenglamalar;
hosil qiluvchi funktsiyalar.

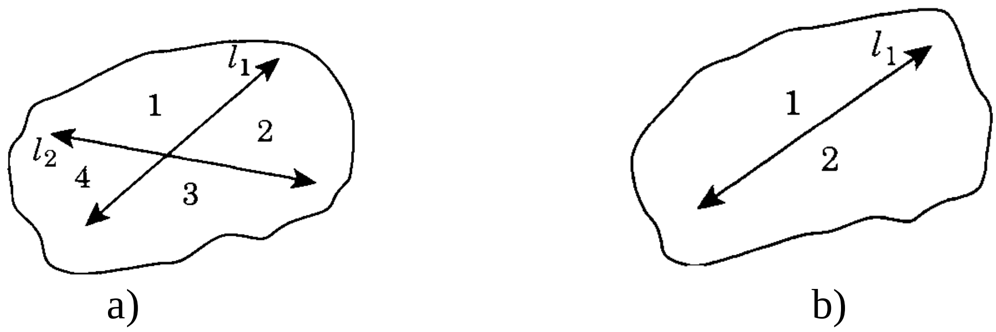
Funktsiyaning rekursiv ta'rifi: $a \in W$ va $X = \{a, a+1, a+2, ...\}$ bo'lsin. Aniqlanish sohasi X bo'lgan f funktsiya $k \geq 1$ bo'lganda 3 qismdan iborat bo'ladi:

- **Bazis qism.** Funktsiyaning bir nechta dastlabki qiymatlari aniqlangan bo'ladi, masalan, $f(a), f(a+1), ..., f(a+k-1)$. Bu qiymatlarni aniqlaydigan tenglamaga **boshlang'ich shart** deyiladi.
- **Rekursiv qism.** $f(n)$ funktsiyaning k ta qiymatini hisoblashda $f(n-1), f(n-2), ..., f(n-k)$ ketma-ketlik topiladi. Bunday formula takrorlash munosabati (yoki rekursiya formulasi) deyiladi.
- **Chegaraviy qism.** Topilgan funktsiya qiymatlari baholanadi.

Misol. Samolyot fazoda shunday chiziqlar chizadiki, ularning har ikkitasi parallel emas. $f(n)$ chiziqlar bilan ajratilgan sohalar soni bo'lsa, bu sonni rekursiv aniqlang.

Yechilishi: Agar samolyot l_1 chiziq chizsa, u holda $f_1 = 2$ bo'ladi (rasm-a). l_2 chiziq chizilsa, u holda l_1 bilan kesishish nuktasida u 2 ga bo'linadi va har bir bo'lagi o'zi yotgan sohasini 2 ga bo'ladi, ya'ni

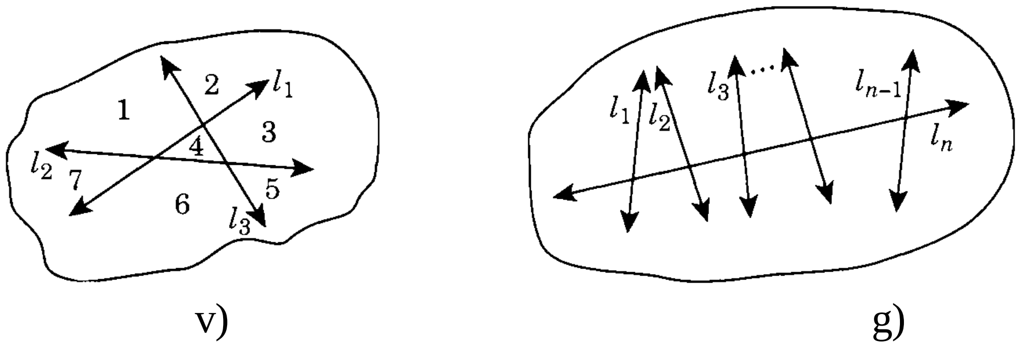
$f_2 = f_1 + 2 = 4$ bo'ladi (rasm-b).



Rasm 5.7.

---

[11] **Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, 261–p.**



Rasm 5.8.

$$f_n = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad n = 0 \\ f_{n-1} + n, & \text{boshqa hollarda} \end{cases}$$

Nazorat uchun savollar:

1. Rekursiya nima?
2. Dirixle printsipini tushuntiring.
3. Rekurrent formulalar qanday hosil qilinadi?
4. Rekkurrent munosabatlarni yechishning nechta usuli bor?
5. Rekursiv funktsiyaga ta’rif bering.

MISOL VA MASALALAR

Quyida keltirilgan misollarda birinchi 5 ta hadini toping:

1. $a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2$

2. $a_0 = 1$

$a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1$

3. $a_1 = 1$

$a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1}, n \geq 2$

4. $a_1 = 1, a_2 = 2$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

5. $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, n \geq 4$

6. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, n \geq 4$

6. CHEKLI AVTOMATLAR

6.1.Avtomat tili, formal grammatika tushunchasi

Aytaylik, vaqtga bog'liq holda kirish, chiqish va oraliq o'zgaruvchilari bilan aniqlanadigan qandaydir tizim berilgan bo'lsin. Tizimni tadqiqot uchun qulay bo'lgan chekli sondagi tashqi qutblarga ega «qora quti» deb tasavvur qilamiz.

Rasm 6.1. Qora quti

Vaqtning biror (o'zgarmas bo'lishi shart emas) intervalida sinxron signal ishlab chiqaruvchi mustaqil sinxron manba mavjud, deb faraz qilamiz. Tizimning barcha o'zgaruvchilari faqat vaqtning diskret momentidagi sinxron signallarga mos o'lchanadi. Bu vaqt momentiga **takt momenti** deyiladi. Biror $y(t)$ o'zgaruvchining vaqtni t_v $(v = 1,2,3,...)$ v- takt momentidagi qiymatini bundan keyin y_v deb belgilaymiz. Vaqtning diskretliligi haqidagi farazga ko'ra **tizim sinxron** deyiladi va 6.2- rasmdagi ko'rinishda tasvirlanishi mumkin.

Rasm 6.2. Sinxron tizim

Har bir o'zgaruvchi faqat chekli sondagi turli qiymatlarni (sonli yoki sonli bo'lmagan) qabul qilishi mumkin bo'lsin. y o'zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini y **o'zgaruvchining alfaviti** deyiladi va Y bilan belgilanadi. Y to'plamning elementlariga **simvol** deyiladi. Agar kirish o'zgaruvchilari $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(u)}$ larni alfavitini mos ravishda $X^{(1)}, X^{(2)}, ..., X^{(u)}$ deb belgilansa, u holda tizimning **kirish alfaviti** X quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$X = X^{(1)} \times X^{(2)} \times ... \times X^{(u)}.$$

Xuddi shuningdek, agar chiqish o'zgaruvchilari $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(w)}$ lar alfavitini mos ravishda $Z^{(1)}, Z^{(2)}, ..., Z^{(w)}$ deb belgilansa, u holda tizimning **chiqish alfaviti** Z quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$Z = Z^{(1)} \times Z^{(2)} \times ... \times Z^{(w)}.$$

Kirish va chiqish alfavitlari ta'rifidan ko'rish mumkinki, X ning bitta $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(u)})$ kirish simvoli tizimning barcha u kirish o'zgaruvchilarini, Z alfavitning bitta $z = (z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(w)})$ chiqish simvoli esa barcha w chiqish o'zgaruvchilarini aniqlash uchun yetarli. Natijada diskret tizimning sxematik tasvirini ikki qutbli quti ko'rinishida olamiz (rasm 6.3).

Rasm 6.3. Ikki qutbli quti

Misol. Tasavvur qilishimiz uchun ikkita $x^{(1)}, x^{(2)}$ kirish va ikkita $z^{(1)}, z^{(2)}$ chiqishga ega bo'lgan hisoblash qurilmasini qarab chiqamiz. Vaqtning t_v $(v = 1,2,3,...)$ momentlarida $x^{(1)}$ da 0 va 1 simvollari, $x^{(2)}$ da esa 1,2 va 3 simvollari berilgan bo'lsin. Qurilma v- takt momentida chiqishda quyidagi kattaliklarni chiqarib beradi:

$$z_v^{(1)} = x_v^{(1)} x_v^{(2)} + x_{v-1}^{(1)} x_{v-1}^{(2)} \quad \text{va} \quad z_v^{(2)} = \left| x_v^{(1)} x_v^{(2)} - x_{v-1}^{(1)} x_{v-1}^{(2)} \right|.$$

Shunday qilib, $X^{(1)} = \{0,1\}$, $X^{(2)} = \{1,2,3\}$,

$$Z^{(1)} = \{0,1,2,3,4,5,6\}, \quad Z^{(2)} = \{0,1,2,3\}$$

alfavitlarga ega bo'lamiz, ularni dekart ko'paytirib esa, kirish va chiqish alfavitlarini hosil qilamiz:

$$X = X^{(1)} \times X^{(2)} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\},$$

$$Z = Z^{(1)} \times Z^{(2)} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),$$
$$(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),$$
$$(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(6,0),(6,1),(6,2),(6,3)\}.$$

Tizimdagi oraliq o'zgaruvchilarning qiymatlari **tizim holatini** aniqlaydi. Vaqtning t_v momentidagi tizim holatini s_v bilan belgilaymiz. Tizimga xos bo'lgan barcha mumkin bo'lgan holatlarining birlashmasi tizimning **holatlar to'plami** deyiladi va S bilan belgilanadi.

v-takt momentidagi s_v holat va x_v kirish simvoli birgalikda tizimning berilgan momentdagi chiqish simvoli z_v ni va uning keyingi $v+1$- takt momentidagi s_{v+1} holatini aniqlaydi.

6.2. Avtomat bazislari va mukammallik muammolari

Umuman olganda holatlar to'plamini tuzish murakkab vazifa bo'lib, har doim ham bir xil chiqmaydi. Demak, holatlar to'plamini aniqlashning umumiy qoidasi bo'lmagani uchun ko'pincha tajriba qilish va taqribiy qiymatlar asosida ketma-ket yaqinlashish metodiga murojaat qilinadi. S holatlar to'plamini tezroq va aniqroq tuzish tadqiqotchining sezish qobiliyatiga va o'rganayotgan tizimni qanchalik yaxshi bilishiga bog'liq.

Chekli kirish alfaviti $X=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_p\}$ ga, chekli chiqish alfaviti $Z=\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_q\}$ ga, chekli holatlar to'plami $S=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\}$ ga va ikkita xarakteristik funktsiyasiga $z_v = f_z(x_v,s_v)$, $s_{v+1} = f_s(x_v,s_v)$ ega bo'lgan sinxron tizimga **M chekli avtomat (Mili avtomati)** deyiladi, bu yerda $x_v, z_v, s_v -$mos ravishda vaqtning t_v $(v=1,2,3,...)$ momentidagi kirish, chiqish simvollari va M avtomatning holatidir.

Agar M chekli avtomatning f_z xarakteristik funktsiyasi faqat avtomatning holatiga bog'liq bo'lsa, ya'ni $f_z(x_v,s_v)= f_z(s_v)$ bo'lsa, unga **Mur avtomati** deyiladi.

Agar M chekli avtomatning f_z xarakteristik funktsiyasi faqat kirish simvoliga bog'liq bo'lsa, ya'ni $f_z(x_v,s_v)= f_z(x_v)$ bo'lsa, unga **trivial avtomat (**xotirasiz avtomat yoki kombinatsion qurilma**)** deyiladi.

Bundan buyon chekli avtomat deganda, agar uning modifikatsiyasi haqida gapirilmagan bo'lsa, Mili avtomatini tushunamiz.

6.3. Avtomatlar bilan eksperiment o'tkazish

Misol 1. Tangani bir necha marta uloqtirish natijasida ketma-ket tasodifiy gerb va raqam tomonlari tushsin. Chekli avtomat har birinchi gerb tushganda gerb seriyasiga, har gal birinchi ikkitasi raqam tushganda raqamlar seriyasiga belgilab borsin. Chekli avtomatni A deb belgilaymiz. A avtomatning kirish va chiqish alfavitlarini, holatlar to'plamini tuzing.

Yechilishi:

A avtomatning kirish alfaviti $X=\{raqam\ (R),\ \ gerb\ \ (G)\}$ to'plam,

chiqish alfaviti $Z=\{raqam\ \ (\vee\ ),\ \ raqam\ \ yo'q\ \ (-\ )\}$ to'plam,

holatlar to'plami esa

$S=\{gerb\ ham, raqam\ ham\ yo'q\ (GRY), birinchi\ raqam\ tushsa\ (BR),$

$ikkita\ raqam\ tushsa\ (IR), birinchi\ gerb\ tushsa\ (BG)\}$ bo'ladi.

Qachonki avtomat IR holatida va kirish R bo'lsa yoki qachonki avtomat BG holatidan boshqa holatlarda va kirish G bo'lsa, belgi qo'yiladi. Har qanday holatda va kirishda G simvoli paydo bo'lganda, avtomat BG holatiga o'tadi. Agar avtomat kirishiga R tushsa, u holda GRY va BG holatlaridan BR holatiga o'tadi, BR va IR holatlaridan IR holatiga o'tadi.

Misol 2. 26 satr ingliz tili alifbosidan va probellardan tuzilgan matndagi un birikmasi bilan boshlanib, d harfi bilan tugaydigan (united, understand va h.k.) so'zlar sonini hisoblaydigan $A1$ avtomatni tasvirlang.

Yechilishi: Probelni π simvoli bilan, d,u,n harflardan boshqa barcha harflarni λ simvoli bilan belgilaymiz.

U holda $A1$ avtomatning kirish alfaviti $X=\{d,n,u,\pi,\lambda\}$,

chiqish alfaviti $Z=\{hisobla,\ \ hisoblama\}$, holatlar to'plami

$S=\{yangi\ so'z, yangi\ so'zni\ kutish, u, u\ \ kshi, u-n\ kelishi, u\text{-}n\text{-}d\ kelishi\}$ bo'ladi.

$A1$ avtomatning joriy holatida $u-n-d$ va kirishda π paydo bo'lganda uning chiqishida "*hisobla*" simvoli, boshqa barcha holatlarda "*hisoblama*" simvoli paydo bo'ladi.

Agar avtomat istalgan holatda bo'lib, kirishda π simvoli berilsa, avtomat "*yangi so'z*" holatiga o'tadi.

Avtomat "*yangi so'z*" holatida bo'lib, kirishda u simvoli berilsa, u "u *kelishi*" holatiga o'tadi. Kirishda "d,n yoki λ" simvollar berilganda esa, "*yangi so'zni kutish*" holatiga o'tadi.

Joriy holatda "u *kelishi*", kirishda n paydo bo'lganda avtomat "$u-n$ *kelishi*" holatiga o'tadi. Kirishda "d,u yoki λ" simvollar berilganda esa, "*yangi so'zni kutish*" holatiga o'tadi.

Agar berilgan takt momentidagi holatda "$u-n$ *kelishi*" yoki "$u-n-d$ *kelishi*" va kirishda d paydo bo'lsa, u holda "$u-n-d$ *kelishi*" holatiga o'tiladi.

Kirishda " n,u yoki λ" simvollar berilganda esa, "$u-n$ *kelishi*" holatiga o'tadi. "*yangi so'zni kutish*" holatida va kirishda π dan boshqa simvollar berilganda avtomat yana "*yangi so'zni kutish*" holatiga o'tadi.

$\xi_{i1}, \xi_{i2}, ..., \xi_{il}$ ko'rinishidagi kirish simvollari ketma-ketligi **kirish ketma-ketligi** deyiladi. $\xi_{i1}, \xi_{i2}, ..., \xi_{il}$ kirish ketma-ketligi l uzunlikka ega bo'lib, shunday uzunlikdagi **chiqish ketma-ketligi** $\zeta_{j1}, \zeta_{j2}, ..., \zeta_{jl}$ ni hosil qiladi. Avtomatning kirish ketma-ketligiga reaktsiyasini faqat va faqat avtomatning boshlang'ich holati ma'lum bo'lgandagina taxmin qilish mumkin.

Masalan, 1-misoldagi gerb va raqamdan iborat kirish ketma-ketligini qayta ishlash uchun mo'ljallangan avtomat reaktsiyasini ko'rish mumkin. Agar avtomatning dastlabki holati GRY bo'lsa, kirish ketma-ketligi G,G,R,G,R,R,R,G,R,R,R,G,G,R,R,G,R,G bo'ladi (jadval 6.1).

Jadval 6.1.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Kirish	G	G	R	G	R	R	R	G	R	R	R	G	G	R	R	G	R	G
Holat	GRY	BG	BG	BR	BG	BR	IR	IR	BG	BR	IR	IR	BG	BG	BR	IR	BG	BR
Chiqish	∨	-	-	∨	-	-	∨	∨	-	-	∨	∨	-	-	-	∨	-	∨

Nazorat uchun savollar:

1. Avtomat tili deganda nimani tushundingiz?
2. Takt momenti deb nimaga aytiladi?
3. Qanday tizimni sinxron tizim deyiladi?
4. Qora qutini sxematik tasvirlab bering.
5. Tizim holatini qaysi o'zgaruvchi aniqlaydi?
6. Mili avtomati va trivial avtomatlarni ta'riflang.
7. Mur avtomati tuzilishga ega?

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi chekli avtomatlarda kirish o'zgaruvchisi x va chiqish o'zgaruvchisi z bo'lsin. Chekli avtomatlarning kirish va chiqish alfavitini va holatlar to'plamini tuzing, holatlar to'plamini asoslang:

1. Qurilmaga 0 va 1 raqamlari kiritiladi. Yig'ilgan son birligi 3 modul bo'yicha hisoblanadi (x-kirish raqami, z-yig'ilgan son);
2. Tanga bir necha marta uloqtiriladi va ketma-ket raqam tushganda juft sondagi raqam uchun belgi qo'yiladi, har ikkinchi gerb tushganda (ketma-ket bo'lishi shart emas) belgi qo'yiladi (x-tanga tomoni, z- qo'yilgan belgi);
3. Uch qavatli binoda o'rnatilgan liftning har bir qavatida chaqirish tugmasi bor va quyidagi tartibda ishlaydi: agar bir tugma bosilsa, lift shu tugma o'rnatilgan qavatga harakatlanadi. Agar bir vaqtda 2 yoki 3 tugma bosilsa, lift ularning eng quyisiga tomon harakatlanadi. Lift harakatlanayotgan paytda tugmalar bosilmasligi kerak (x- chaqirish tugmasi bosilgan qavat, z- lift yo'nalishi va to'xtamasdan o'tadigan qavatlar soni).

6.4. Chekli avtomatning o'tishlar jadvali

Mos xarakteristik funktsiyalari $f_z(x_v,s_v)$, $f_s(x_v,s_v)$ ga teng z_v- va $s_{v+1}-$qism jadvallardan tuzilgan jadvalga chekli avtomatning **o'tishlar jadvali** deyiladi (jadval 6.2).

Jadval 6.2

	z_v					s_{v+1}				
x_v / s_v	ξ_1	$\dots$	ξ_i	$\dots$	ξ_p	ξ_1	$\dots$	ξ_i	$\dots$	ξ_p
σ_1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
σ_j	$\dots$	$\dots$	$f_z(\xi_i,\sigma_j)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f_s(\xi_i,\sigma_j)$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
σ_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

z_v – qism jadvalning ξ_i ($i = 1,2,...,p$) ustuni va σ_j ($j = 1,2,...,n$) satri kesishgan yacheykasida $f_z(\xi_i, \sigma_j) \in Z$ funktsiyaning qiymati, s_{v+1} – qism jadvalning mos yacheykasida esa $f_s(\xi_i, \sigma_j) \in S$ funktsiyaning qiymati yoziladi.

Misol. 26 satr ingliz tili alifbosidan va probellardan tuzilgan matndagi *un* birikmasi bilan boshlanib, *d* harfi bilan tugaydigan (united, understand va h.k.) so'zlar sonini hisoblaydigan $A1$ avtomatda probel π simvoli bilan, d, u, n harflardan boshqa barcha harflar λ simvoli bilan belgilanadi. $A1$ avtomatning o'tishlar jadvalini tuzamiz.

z_v – qism jadvaldagi "*hisobla*" va "*hisoblama*" chiqish simvollariga 1 va 0 raqamlarini mos qo'yamiz. s_{v+1} – qism jadvalning "*yangi so'z*", "*yangi so'zni kutish*", "u *kelishi*", "$u-n$ *kelishi*" va "$u-n-d$ *kelishi*" holatlarini 1,2,3,4 va 5 raqamlar bilan belgilaymiz (jadval 6.3).

Jadval 6.3

	z_v					s_{v+1}				
x_v / s_v	d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
1	0	0	0	0	0	2	2	3	1	2
2	0	0	0	0	0	2	2	2	1	2
3	0	0	0	0	0	2	4	2	1	2
4	0	0	0	0	0	5	4	4	1	4
5	0	0	0	1	0	5	4	4	1	4

6.5. Avtomatlar quvvati. Izomorfizm

n holatga, p kirish va q chiqish simvollaridan tuzilgan avtomatga (n, p, q) – **avtomat** deyiladi. (n, p, q) – sinfidagi avtomatlarning quvvati

$$N_{n,p,q} = (qn)^{pn}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar har bir i va $j \neq i$ uchun shunday k mavjud bo'lsaki, ular uchun $f_z(\xi_k, \sigma_i) \neq f_z(\xi_k, \sigma_j)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, (n, p, q) – avtomatga **aniq minimal avtomat** deyiladi. Aniq minimal (n, p, q) – avtomatda z_v – qism jadvaldagi barcha satr elementlari turlicha bo'ladi. Aniq minimal (n, p, q) – avtomat quvvati

$$N'_{n,p,q} = n^{pn} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r)$$

ga teng, $N'_{n,p,q}$ ning manfiy qiymatlari 0 ga teng deb olinadi.

σ_i va σ_j satrlar ikkala qism jadvalda ham bir xil bo'lsa yoki har bir σ_i simvolni σ_j simvol bilan (yoki σ_j ni σ_i ga) almashtirganda bir xil bo'ladigan hech bo'lmaganda bir juft satri topilsa, unga **aniq qisqaruvchi** $(n,p,q)-$**avtomat** deyiladi. Aniq qisqaruvchi $(n,p,q)-$avtomatning quvvatini baholash uchun quyidagi tengsizlikdan foydalaniladi:

$$N''_{n,p,q} \ge (qn)^{pn} - \prod_{r=0}^{n-1} \left[(qn)^p - r \right]$$

Holatlaridagi mumkin bo'lgan xilma-xillikni hisobga olmaganda xarakteristik funktsiyalari bir xil bo'lgan ikkita avtomatga **bir-biriga izomorf avtomatlar** deyiladi. 6.4-jadvalda $A1$ avtomatga izomorf bo'lgan avtomat keltirilgan. U dastlabki 1,2,3,4,5 holatlarni mos ravishda 5,4,3,2,1 ga almashtirish natijasida olingan.

Jadval 6.4

	z_v					s_{v+1}				
x_v / s_v	d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
1	0	0	0	1	0	1	2	2	5	2
2	0	0	0	0	0	1	2	2	5	2
3	0	0	0	0	0	4	2	4	5	4
4	0	0	0	0	0	4	4	4	5	4
5	0	0	0	0	0	4	4	3	5	4

Izomorf avtomatlari bo'lmagan aniq minimal $(n,p,q)-$avtomatlar sinfining quvvati

$$N^{ЯМ}{}_{n,p,q} = \frac{n^{pn}}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r)$$

formula bilan aniqlanadi, $N^{ЯМ}{}_{n,p,q}$ ning manfiy qiymatlari 0 ga teng deb olinadi.

Nazorat uchun savollar:

1. Chekli avtomatning o'tishlar jadvali deb nimaga aytiladi?

2. Aniq minimal avtomat qanday bo'ladi?
3. $(n, p, q)-$avtomatga ta'rif bering.
4. Aniq qisqaruvchi avtomatni tasvirlang.
5. Izomorf avtomatlar deb nimaga aytiladi?
6. Izomorf avtomatlarga misol keltiring.

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi chekli avtomatlar uchun o'tish jadvalini tuzing va berilgan dastlabki holatdagi tasodifiy kirish ketma-ketligi uchun to'g'ri ishlashini tekshiring.

1. Qurilmaga 0 va 1 raqamlari kiritiladi. Yig'ilgan son birligi 3 modul bo'yicha hisoblanadi (x-kirish raqami, z-yig'ilgan son);

2. Tanga bir necha marta uloqtiriladi va ketma-ket raqam tushganda juft sondagi raqam uchun belgi qo'yiladi, har ikkinchi gerb tushganda (ketma-ket bo'lishi shart emas) belgi qo'yiladi (x-tanga tomoni, z- qo'yilgan belgi);

3. Uch qavatli binoda o'rnatilgan liftning har bir qavatda chaqirish tugmasi bor va quyidagi tartibda ishlaydi: agar bir tugma bosilsa, lift shu tugma o'rnatilgan qavatga arakatlanadi. Agar bir vaqtda 2 yoki 3 tugma bosilsa, lift ularning eng quyisiga tomon harakatlanadi. Lift harakatlanayotgan paytda tugmalar bosilmasligi kerak (x- chaqirish tugmasi bosilgan qavat, z- lift yo'nalishi va to'xtamasdan o'tadigan qavatlar soni);

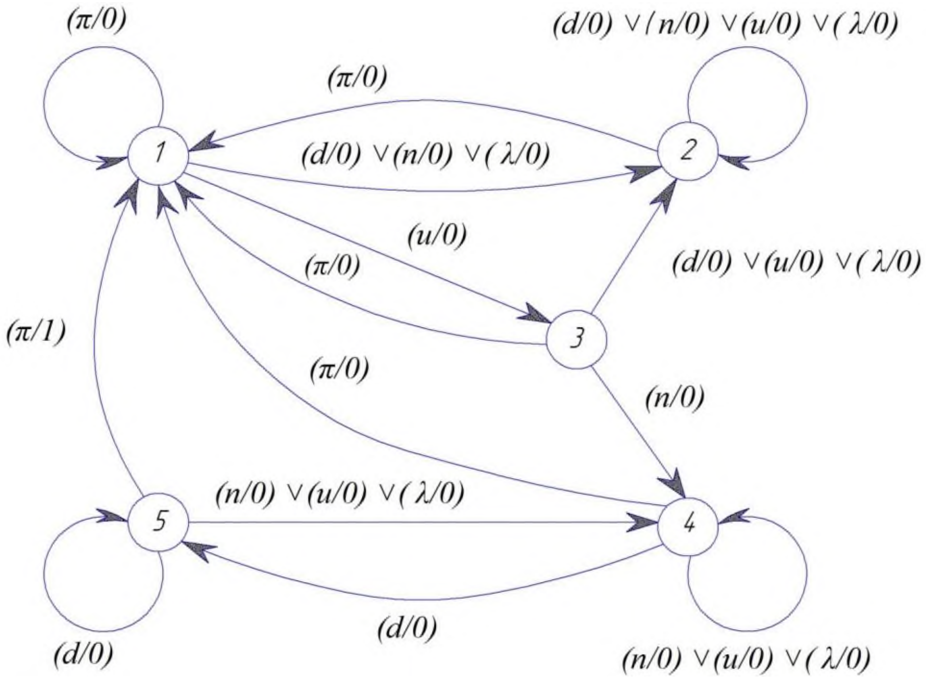
4. Quyidagi o'tish jadvali berilgan avtomatga 1,2,3,4,5,6 holatlarni mos ravishda 2,3,4,5,6,1 ga almashtirish orqali izomorf avtomat quring:

	z_v				s_{v+1}				
x_v \ s_v	α	β	α	β	x_v \ s_v	α	β	α	β
1	0	0	1	1	4	0	1	4	2
2	0	0	2	1	5	1	0	5	3
3	0	1	3	2	6	1	0	6	3

6.6. Chekli avtomatda o'tishlar grafi. Avtomatlarda ekvivalentlik

Uchlari avtomatning $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ holatlariga, qirralari esa bir holatdan boshqasiga mumkin bo'lgan o'tishlarga mos keluvchi oriyentirlangan graf $(n,p,q)-$**avtomatning o'tishlar grafi** deyiladi. O'tishlar grafining har bir (σ_i,σ_j) qirrasi vaznga ega, bu vazn $(\xi_{k1}/\zeta_{l1})\vee(\xi_{k2}/\zeta_{l2})\vee...\vee(\xi_{kr}/\zeta_{lr})$ mantiqiy yig'indiga teng. **Kirish-chiqish juftligi** deb ataluvchi istalgan (ξ_{kh}/ζ_{lh}) qo'shiluvchi uchun $\zeta_{lh}=f_z(\xi_{kh},\sigma_i),\sigma_j=f_s(\xi_{kh},\sigma_i)$ tenglik o'rinli, ya'ni σ_i holatida bo'lgan avtomat ξ_{kh} kirishda ζ_{lh} chiqish simvolini beradi va σ_j holatga o'tadi.

Misol. $A1$ avtomatning 6.3-jadvalga mos keladigan o'tishlar grafi 6.4-rasmda tasvirlangan. Grafning ixtiyoriy uchidan chiquvchi yoylar kirish alfaviti quvvatiga teng bo'lgan kirish-chiqish juftligidan iborat to'liq p sonni saqlaydi. Demak, $A1$ avtomatning kirish alfaviti quvvati 5 ga teng bo'lgani uchun o'tishlar grafidagi har bir uchdan 5 ta yoy chiqadi.

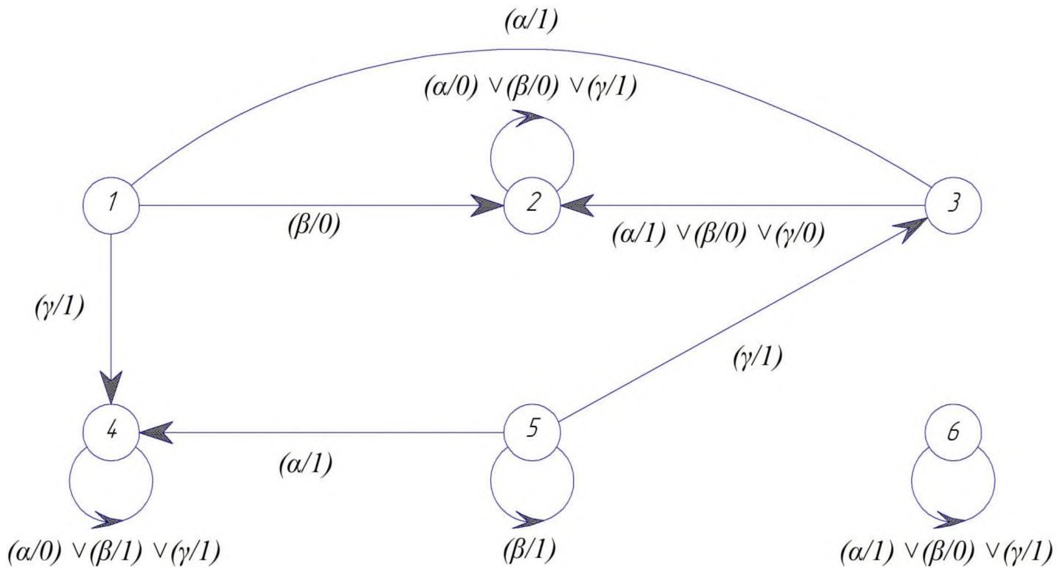


Rasm 6.4. $A1$ avtomatning o'tishlar grafi

O’tishlar grafining bevosita ustunlik tomoni shundaki, u kirish ketma-ketligiga bo’lgan avtomat reaktsiyasini aniqlashni osonlashtiradi. Masalan, $A1$ avtomatning dastlabki holat 3 da $\pi, u, n, \lambda, \lambda, d, \pi$ kirish ketma-ketligiga reaktsiyasi 0,0,0,0,0,0,1 chiqish ketma-ketligi bo’lishi, 6.4-rasmdan oson topiladi. Chizmaga ko’ra, avtomat ketma-ket 1,3,4,4,4,5,1 holatlarda bo’ladi.

Barcha yoylarni kiruvchi, chiquvchi va ilmoqqa ajratish bilan holatlarni va qism avtomatlarni klassifikatsiya qilish mumkin.

O’tish grafida kirish yoyi yo’q, lekin hech bo’lmaganda bitta chiqish yoyiga ega uchga mos holatga **o’tkinchi holat** deyiladi. Chiqish yoyi yo’q, lekin hech bo’lmaganda bitta kirish yoyiga ega uchga mos holat **berk holat** deyiladi. Kirish yoyi ham chiqish yoyi ham bo’lmagan uchni **ajralgan holat** deyiladi. $A2$ avtomatda 1 va 5 o’tkinchi holatlar, 2 va 4 berk holatlar, 6 ajralgan holatdir (6.5-rasm).



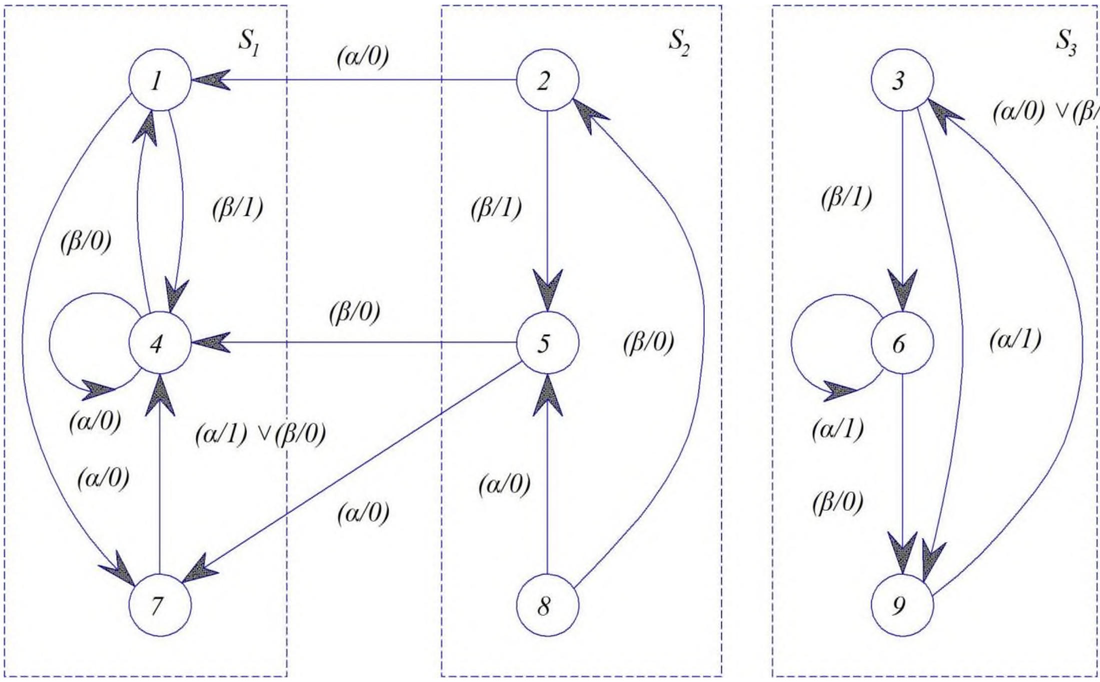
Rasm 6.5. $A2$ avtomat holatlar grafi

Avtomat holatlari to’plami S ning har qanday qism to’plami shu avtomatning qism avtomatlarini ifodalaydi.

Tashlab ketish mumkin, lekin orqaga qaytish mumkin bo’lmagan qism avtomatga **o’tkinchi qism avtomat** deyiladi. **Berk qism avtomatga** boshqa biror qism avtomatdan kelish mumkin, lekin uni tashlab ketish mumkin emas. **Ajralgan qism avtomatga** biror yo’l orqali borib ham bo’lmaydi, undan chiqib ham bo’lmaydi. $A3$ avtomatning holatlar to’plami $S = \{1, 2, ..., 9\}$ 6.6-rasmda ko’rsatilgandek,

$S_1 = \{1,4,7\}$ berk, $S_2 = \{2,5,8\}$ o'tkinchi, $S_3 = \{3,6,9\}$ ajralgan qism avtomatlarga mos qism to'plamlarga ajratilgan.

k dan uzun bo'lmagan kirish ketma-ketligini kiritganda S_i holatdan o'tish mumkin bo'lgan barcha holatlar to'plami $G_k(S_i)$ bo'lsin. Istalgan uzunlikdagi kirish ketma-ketligini kiritganda o'tish mumkin bo'lgan barcha holatlar to'plami $G(S_i)$ bo'lsin. $G(S_i)$ to'plam quyidagi algoritmni aniqlash imkonini beradi:



Rasm 6.6. $A3$ avtomat

Algoritm G:

1) S_i ni yuklash;

2) $G_0(S_i) \leftarrow S_i, k \leftarrow 1$;

3) $G_k(S_i) \leftarrow G_{k-1}(S_i) \cup O[G_{k-1}(S_i)]$, bu yerda $O[G_{k-1}(S_i)]-$ $G_{k-1}(S_i)$ to'plamning birlik radius atrofi;

4) Agar $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$ bo'lsa, u holda $k \leftarrow k+1$ bo'ladi va 3 qadamga qaytish; aks holda $G(S_i) = G_k(S_i)$.

$A3$ avtomatga tadbiq qilganda ushbu algoritm $S_i = \{5, 6\}$ uchun $G(S_i) = \{1,3,4,5,6,7,9\}$ ni topadi.

Agar S_i qism to'plam faqat bitta σ_j holatdan tashkil topgan bo'lsa, u holda $G(S_i) = G(\sigma_j)$ to'plam $\sigma_j -$**erishiladigan to'plam** deyiladi. Masalan, $A3$ avtomatda 4-erishiladigan to'plam uni berk qism avtomatda aniqlaydigan $S_1 = \{1,4,7\}$ to'plamdir.

σ_i va σ_j lar avtomatning n holatlaridan tashkil topgan bo'lsin. Agar σ_j holat umuman olganda σ_i holatdan kelib chiqadigan bo'lsa, u holda σ_j uzunligi $(n-1)$ dan ko'p bo'lmagan kirish ketma-ketligini berish bilan erishiladi.

Agar M avtomatning dastlabki holati σ_j ekanligi ma'lum bo'lsa, S holatlar to'plamini **unga ekvivalent bo'lgan** $\sigma_j -$erishiladigan to'plamga almashtirib, avtomatni qisqartirish mumkin. Masalan, $A3$ avtomatda 4- dastlabki holat $S_1 = \{1,4,7\}$ holatlar to'plamiga ekvivalent, 6-dastlabki holat esa $S_3 = \{3,6,9\}$ holatlar to'plamiga ekvivalentdir.

Faraz qilaylik, M avtomatning o'tishlar grafidagi barcha yoylar mos qirralar bilan almashtirilgan bo'lsin. Bunda S_i to'plam holatlari bilan k dan uzun bo'lmagan zanjir orqali bog'langan barcha holatlar to'plami $H_k(S_i)$ bo'lsin. $H(S_i)$ esa S_i to'plam holatlari bilan ixtiyoriy uzunlikdagi zanjir orqali bog'langan holatlar to'plami bo'lsin. Agar S_i qism to'plamda faqat σ_j holat bo'lsa, u holda $H(S_i) = H(\sigma_i)$ to'plam σ_j bilan ixtiyoriy uzunlikdagi zanjir bilan bog'langan holatlar to'plamidan iborat bo'ladi.

$H(S_i)$ to'plamni H algoritm yordamida aniqlash mumkin. H algoritmni G algoritmdagi G belgilarni H ga almashtirish bilan hosil qilish mumkin.

Algoritm H:

1) S_i ni yuklash;

2) $H_0(S_i) \leftarrow S_i, k \leftarrow 1$;

3) $H_k(S_i) \leftarrow H_{k-1}(S_i) \cup O[H_{k-1}(S_i)]$, bu yerda $O[H_{k-1}(S_i)]-$ $H_{k-1}(S_i)$ to'plamning birlik radius atrofi;

4) Agar $H_k(S_i) \neq H_{k-1}(S_i)$ bo'lsa, u holda $k \leftarrow k+1$ bo'ladi va 3 qadamga qaytish; aks holda $H(S_i) = H_k(S_i)$.

Masalan, $A3$ avtomatda $S_i = \{1,4\}$ bo'lganda $H(S_i) = \{1,2,4,5,7,8\}$ ga, $S_i = \{9\}$ bo'lganda $H(S_i) = \{3,6,9\}$ ga teng.

Agar avtomatda 2 va undan ortiq ajralgan qism avtomatlar bo'lsa, unga **yoyiladigan avtomat** deyiladi. Agar M avtomat uchun $H(\sigma_i) = S$ bo'lsa, u **yoyilmaydigan avtomat**, aks holda $H(\sigma_i)$ avtomatning ajralgan yoyilmaydigan qism avtomatlarini ifodalaydi. Avtomatning maksimal yoyilmasi, ya'ni avtomatni maksimal sondagi mumkin bo'lgan ajralgan qism avtomatlarga yoyish quyidagi algoritm yordamida bajariladi:

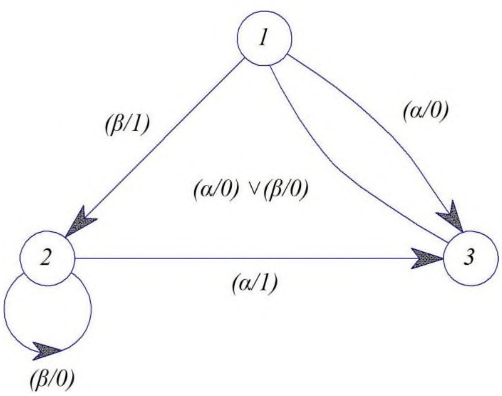
Algoritm K:

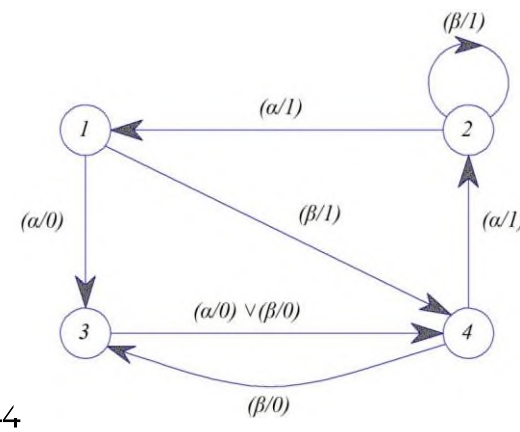
1) $S_1 \leftarrow S,\ k \leftarrow 1$;
2) S_k dan ixtiyoriy σ_{ik} holatni tanlash va k – ajralgan qism avtomatni aniqlaydigan $H(\sigma_{ik})$ ni topish
3) Agar $H(\sigma_{i1}) \cup H(\sigma_{i2}) \cup ... \cup H(\sigma_{ik}) \neq S$ bo'lsa, u holda $S_{k+1} \leftarrow S \setminus H(\sigma_{i1}) \cup H(\sigma_{i2}) \cup ... \cup H(\sigma_{ik}),\ k \leftarrow k+1$ bo'ladi va 2 qadamga qaytish; aks holda avtomatning maksimal yoyilmasi $H(\sigma_{i1}), H(\sigma_{i2}), ..., H(\sigma_{ik})$ to'plamlar bilan aniqlanuvchi ajralgan qism avtomatlar soni k ga teng bo'ladi.

$A3$ avtomatga tadbiq qilganda ushbu algoritm 2 ta ajralgan qism avtomatni topadi, ular $\{1,2,4,5,7,8\}$ va $\{3,6,9\}$. $A1$ avtomatga tadbiq qilganda esa 1 ta $\{1,2,3,4,5\}$ ajralgan qism avtomatni topadi, bu degani $A1$ yoyilmaydigan avtomat ekan.

Bir xil kirish alfavitiga ega bo'lgan 2 va undan ortiq avtomatlar **taqqoslanuvchi** deyiladi. $M_1, M_2, ..., M_N$ avtomatlar N ta turli tizimni aks ettiruvchi taqqoslanuvchi avtomatlar bo'lsin. Agar $M_1, M_2, ..., M_N$ larni M avtomatning ajratilgan qism avtomatlari deb qaralsa, M ga $M_1, M_2, ..., M_N$ avtomatlarni **bo'laklarga ajratiladigan avtomat** deyiladi va $\Delta(M_1, M_2, ..., M_N)$ kabi belgilanadi.

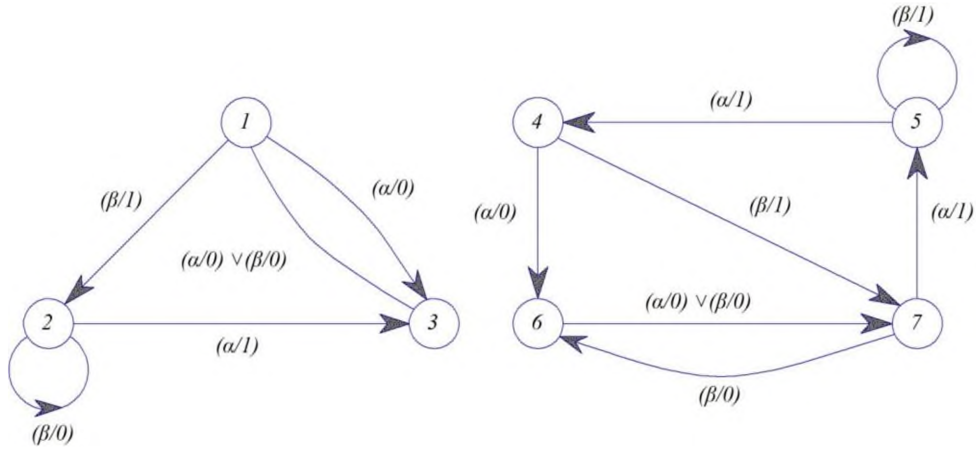
$\Delta(M_1, M_2, ..., M_N)$ bo'laklanadigan avtomatning o'tish grafi $M_1, M_2, ..., M_N$ avtomatlar o'tish graflarining birlashmasiga teng, bunda holatlar shunday belgilanishi kerakki, $\Delta(M_1, M_2, ..., M_N)$ da ikkita bir xil holat bo'lmasin. Misol tariqasida, $A4$ va $A5$ avtomatlarning o'tish graflarini keltiramiz (6.7, 6.8-rasm). 6.9-rasmda esa $\Delta(A4, A5)$ bo'laklangan avtomat tasvirlangan.





Rasm 6.7. $A4$ avtomat

Rasm 6.8. $A5$ avtomat



Rasm 6.9. $\Delta(A4, A5)$ bo’laklangan avtomat

Nazorat uchun savollar:

1. Avtomatning o’tishlar grafi deb nimaga aytiladi?
2. O’tkinchi, berk, ajralgan qism avtomatlarni tushuntiring.
3. Holatlar to’plamini aniqlaydigan algoritmni tuzing.
4. Yoyiladigan va yoyilmaydigan avtomatlar farqini ayting.
5. Bog’langan holatlar to’plamini aniqlash algoritmini keltiring.
6. Taqqoslanuvchi avtomatlar qanday bo’ladi?
7. Bo’laklarga ajratiladigan avtomatni tasvirlab bering.
8. Avtomatning maksimal yoyilmasini aniqlaydigan algoritmni yozing.

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi chekli avtomatlar uchun o’tishlar grafini quring:

1. 0 va 1 raqamlar qurilmaga kiritiladi. Yig’ilgan son birligi 3 modul bo’yicha hisoblanadi (x-kirish raqami, z-yig’ilgan son);

2. Tanga bir necha marta uloqtiriladi va ketma-ket raqam tushganda juft sondagi raqam uchun belgi qo’yiladi, har ikkinchi gerb tushganda (ketma-ket bo’lishi shart emas) belgi qo’yiladi (x-tanga tomoni, z- qo’yilgan belgi);

3. Uch qavatli binoda o’rnatilgan liftning har bir qavatda chaqirish tugmasi bor va quyidagi tartibda ishlaydi: agar bir tugma bosilsa, lift shu tugma o’rnatilgan qavatga harakatlanadi. Agar bir vaqtda 2 yoki 3 tugma

bosilsa, lift ularning eng quyisiga tomon harakatlanadi. Lift harakatlanayotgan paytda tugmalar bosilmasligi kerak (x- chaqirish tugmasi bosilgan qavat, z- lift yo'nalishi va to'xtamasdan o'tadigan qavatlar soni);

4. Xarakteristik funktsiyalari quyidagi o'tish jadvallari bilan berilgan 2 ta avtomat uchun

a) o'tishlar grafini quring;

b) o'tkinchi, berk, ajralgan holatlarni aniqlang;

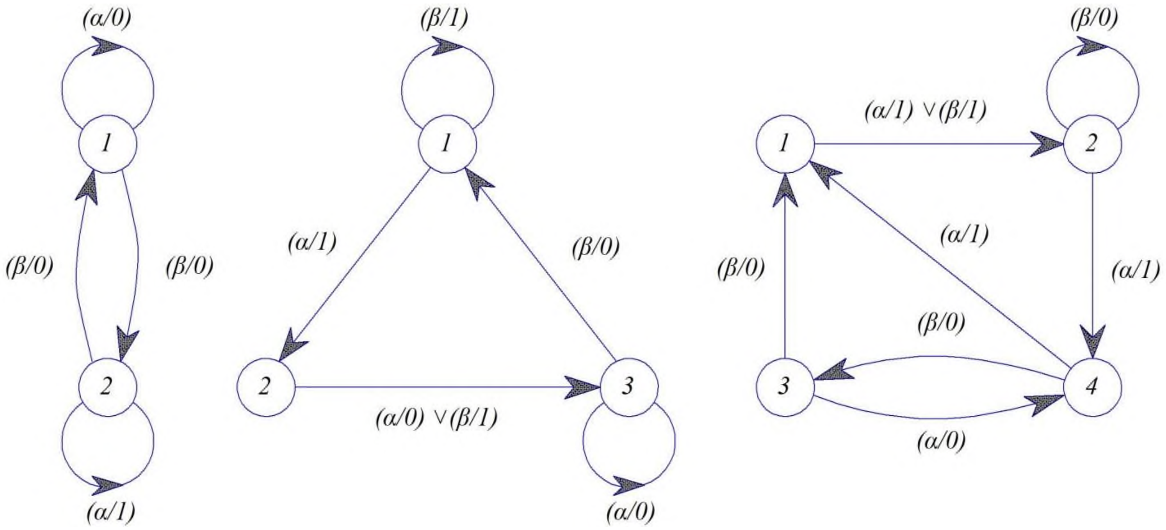
v) 1,2,…,8-erishiladigan $G(1), G(2), ..., G(8)$ to'plamlarni toping.

	z_v		s_{v+1}		z_v		s_{v+1}		
x_v \ s_v	α	β	α	β	x_v \ s_v	α	β	α	β
1	0	1	2	2	5	1	0	1	6
2	1	0	2	2	6	0	1	7	1
3	1	0	7	6	7	1	1	7	7
4	0	1	4	3	8	1	0	8	8

5. O'tishlar jadvali berilgan A avtomatning K algoritm bo'yicha maksimal yoyilmasini toping.

	z_v		s_{v+1}		z_v		s_{v+1}		
x_v \ s_v	α	β	α	β	x_v \ s_v	α	β	α	β
1	0	1	3	2	6	1	0	5	4
2	0	0	2	1	7	1	1	9	8
3	1	0	2	2	8	1	0	8	9
4	0	1	1	5	9	0	1	7	7
5	0	0	3	2					

6. Quyidagi taqqoslanuvchi avtomatlar uchun o'tishlar jadvalini tuzing.



Rasm.6.10. Taqqoslanuvchi avtomatlar

6.7. Chekli avtomatning o'tishlar matritsasi

$(n,p,q)-$avtomatning **o'tishlar matritsasi** deb, elementlari quyidagicha aniqlanadigan $M=[m_{ij}]_{n\times n}$ matritsaga aytiladi:

$$m_{ij}=\begin{cases}(\xi_{k1}/\zeta_{l1})\vee(\xi_{k2}/\zeta_{l2})\vee\ldots\vee(\xi_{kr}/\zeta_{lr}), & \text{agar } (\sigma_i,\sigma_j)\in G \text{ bo'lsa;}\\ 0, \text{ agar aksincha bo'lsa}\end{cases}$$

Bu yerda $(\xi_{k1}/\zeta_{l1})\vee(\xi_{k2}/\zeta_{l2})\vee\ldots\vee(\xi_{kr}/\zeta_{lr})$ kirish-chiqish juftliklari diz'yunktsiyasi bo'lib, ularning har biri avtomatni σ_i holatdan σ_j holatga o'tkazadi. O'tishlar matritsasining har bir satrida rosa p ta kirish-chiqish juftligi bo'lishi kerak.

Agar σ_k ustundagi diagonaldan boshqa barcha elementlar 0 ga teng bo'lsa, σ_k satrda esa diagonaldan boshqa 0 dan farqli elementlar mavjud bo'lsa, u holda σ_k ga **o'tkinchi holat** deyiladi.

Agar σ_k satrdagi diagonaldan boshqa barcha elementlar 0 ga teng bo'lsa, σ_k ustunda esa diagonaldan boshqa 0 dan farqli elementlar mavjud bo'lsa, u holda σ_k ga **berk holat** deyiladi. Agar σ_k ustundagi va σ_k satrdagi diagonaldan boshqa barcha elementlar 0 ga teng bo'lsa, u holda σ_k ga **ajralgan holat** deyiladi.

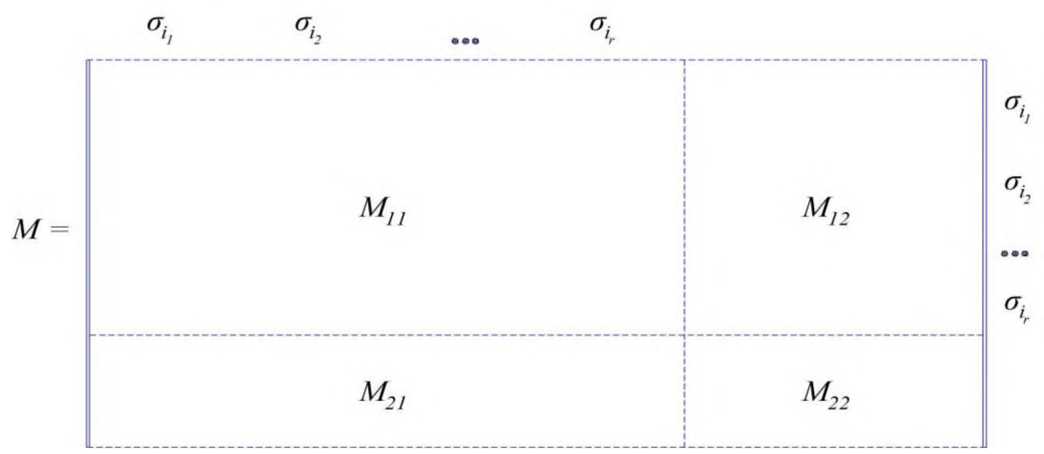
Misol uchun $A2$ avtomatning o'tishlar matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Ushbu matritsaning har bir satri rosa 3 juft kirish-chiqishga ega. 1 va 5 holatlar o'tkinchi, 2 va 4 holatlar berk, 6- esa ajralgan holat hisoblanadi.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}
$$

$$
A2 = \left| \begin{array}{cccccc}
0 & (\beta/0) & (\alpha/1) & (\gamma/0) & 0 & 0 \\
0 & (\alpha/0)\vee(\beta/0)\vee(\gamma/1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0)\vee(\gamma/0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (\alpha/0)\vee(\beta/1)\vee(\gamma/1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & (\gamma/1) & (\alpha/1) & (\beta/1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0)\vee(\gamma/1)
\end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

$S_i = \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{ir}\}$ to'plam o'tkinchi, berk, ajralgan qism avtomatni tasvirlaydimi yoki yo'qmi, buni aniqlash uchun M matritsaning satr va ustunlarini shunday joylashtirish kerakki, $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{ir}$ satr va ustunlar birinchi satr va ustundan boshlab qo'shni o'rinlarda joylashsin. Bunday qurish M matritsani 4 ta $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ qismga ajratadi:



Agar M_{21} faqat 0 lar bilan to'lgan, yaъni $M_{21} = 0$ va $M_{12} \neq 0$ bo'lsa, S_i o'tkinchi qism avtomatni aniqlaydi;

agar $M_{21} \neq 0$ va $M_{12} = 0$ bo'lsa, S_i berk qism avtomatni aniqlaydi;

agar $M_{21} = 0$ va $M_{12} = 0$ bo'lsa, ajralgan qism avtomat bo'ladi.

$A3$ avtomatning o'tishlar matritsasida satr va ustunlar shunday tasvirlanganki, 1,4,7 satr va ustunlar bitta joyga yig'ilgan, ularning kesishmalari esa M_{11} sohada yotibdi:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & \\
\hline
 & 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & (\beta/0) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 2 \\
A3= & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & 0 & (\alpha/1) & 3 \\
 & 0 & & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) & 0 & (\beta/0) & 6 \\
 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0 & 0 & 0 & 8 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 9
\end{array}
$$

Matritsada $M_{21}\neq 0$, $M_{12}=0$ ekanini ko’rish mumkin. Bundan kelib chiqadiki, $A3$ avtomatning holatlar to’plami $\{1,4,7\}$ uni berk qism avtomat ekanini bildiradi.

M matritsaning (i,j) yacheykasida joylashgan va σ_i holatdan σ_j holatgacha yo’l uzunligi 1 ga mos har bir noldan farqli elementini π_{ij} deb belgilaymiz. Shunday o’zgartirilgan o’tishlar matritsasini $\overline{M}$ deb belgilaymiz. U holda $\overline{M}^k$ matritsaning (i,j) yacheykasidagi noldan farqli $\pi_{il1},\pi_{l1l2},\ldots,\pi_{l_{k-1}j}$ element σ_i dan σ_j gacha bo’lgan k uzunlikdagi yo’lni ifodalaydi. Misol uchun $A1$ avtomatning $\overline{A1}$ va $\overline{A1}^2$ o’tish matritsalari quyidagicha bo’ladi:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
 & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 1 \\
 & \pi_{21} & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\overline{A1}= & \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 & 3 \\
 & \pi_{41} & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 4 \\
 & \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & \pi_{55} & 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
 & \pi_{11}\pi_{11}+\pi_{12}\pi_{21}+\pi_{13}\pi_{31} & \pi_{11}\pi_{12}+\pi_{12}\pi_{22}+\pi_{13}\pi_{32} & \pi_{11}\pi_{13} & \pi_{13}\pi_{34} & 0 & 1 \\
 & \pi_{21}\pi_{11}+\pi_{22}\pi_{21} & \pi_{21}\pi_{12}+\pi_{22}\pi_{22} & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 & 2 \\
\overline{A1}^2= & \pi_{31}\pi_{11}+\pi_{32}\pi_{21}+\pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12}+\pi_{32}\pi_{22} & \pi_{31}\pi_{13} & \pi_{34}\pi_{44} & \pi_{34}\pi_{45} & 3 \\
 & \pi_{41}\pi_{11}+\pi_{44}\pi_{41}+\pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & \pi_{44}\pi_{44}+\pi_{45}\pi_{54} & \pi_{44}\pi_{45}+\pi_{45}\pi_{55} & 4 \\
 & \pi_{51}\pi_{11}+\pi_{54}\pi_{41}+\pi_{55}\pi_{51} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & \pi_{54}\pi_{44}+\pi_{55}\pi_{54} & \pi_{54}\pi_{45}+\pi_{55}\pi_{55} & 5
\end{array}
$$

$\overline{A1}^2$ matritsadan ko'rinadiki, 3-holatdan 2-holatga uzunligi 2 bo'lgan ikkita yo'l bor, ular $\pi_{31}\pi_{12}$ va $\pi_{32}\pi_{22}$. 2-holatdan 4- yoki 5-holatlarga uzunligi 2 bo'lgan yo'l yo'q.

Agar $i, l_1, l_2, ..., l_{k-1}, j$ indekslar turlicha bo'lsa, σ_i dan σ_j ga boradigan uzunligi k bo'lgan $\pi_{il1}, \pi_{l1l2}, ..., \pi_{l_{k-1}j}$ yo'lni **elementar yo'l,**

agar $l_1, l_2, ..., l_{k-1}$ indekslar turlicha va i, j indekslar teng bo'lsa, uzunligi k bo'lgan **elementar kontur** deyiladi. n holatli avtomatda elementar yo'l uzunligi $(n-1)$ dan, elementar kontur uzunligi esa n dan katta bo'lishi mumkin emas. Elementar bo'lmagan yo'l **ortiqcha yo'l** deyiladi.

(i, j) yacheykasi faqat uzunligi k bo'lgan σ_i dan σ_j ga boradigan elementar yo'lnigina saqlaydigan matritsani $\overline{M}'^{k}$ deb belgilaymiz. Berilgan $\overline{M}$ matritsadan $l > 0$ uchun $\overline{M}'^{l}$ matritsani quyidagi algoritm asosida hosil qilish mumkin.

Algoritm L:

1) $\overline{M}$ matritsaning bosh diagonalidagi barcha elementlarni 0 ga aylantirib, $\overline{M}' = \overline{M}'^{(1)}$ ni hosil qilamiz. $k \leftarrow 1$ o'zgaruvchi.

2) $\overline{M}'^{k} \cdot \overline{M}'^{l}$ ko'paytmani topish va har bir ortiqcha yo'lni 0 ga aylantirb, $\overline{M}'^{(k+1)}$ ni hosil qilish;

3) agar $k+1 < l$ bo'lsa, u holda $k \leftarrow k+1$ bo'ladi va 2 qadamga qaytish, aks holda $\overline{M}'^{(k+1)} = \overline{M}'^{l}$.

L algoritmdan $\overline{A1}', \overline{A1}'^{(2)}, \overline{A1}'^{(3)}, \overline{A1}'^{(4)}$ matritsalarni qurishda foydalanamiz

$$\overline{A1}' = \begin{vmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & 0 & 0 & \pi_{45} \\ \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{A1}'^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & \pi_{13}\pi_{32} & 0 & \pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{32}\pi_{21} + \pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12} & 0 & 0 & \pi_{34}\pi_{45} \\ \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{54}\pi_{41} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{A1}'^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51} & \pi_{34}\pi_{41}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} + \pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} + \pi_{54}\pi_{41}\pi_{12} & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13} & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{A1}'^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} \\ 0 & \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Agar n holatli M avtomatni σ_i holatdan σ_j holatga olib boradigan yo'l mavjud bo'lsa, u holda bunday eng qisqa $1 \le k \le n-1$ yo'l $\overline{M}'^{k}$ matritsalardan birining biror (i, j) elementi bilan ifodalanadi va quyidagi algoritm orqali topilishi mumkin:

Algoritm P**:**

1) $k \leftarrow 1$
2) $\overline{M}'^{k}$ ni topish
3) agar $\overline{M}'^{k}$ matritsaning (i, j) elementi nolga teng va $k < n-1$ bo'lsa, u xolda $k \leftarrow k+1$ va 2 qadamga qaytish
4) agar $\overline{M}'^{k}$ matritsaning (i, j) elementi nolga teng va $k = n-1$ bo'lsa, u holda σ_i dan σ_j ga olib boradigan yo'l yo'q; aks holda (i, j) element σ_i dan σ_j gacha bo'lgan eng qisqa yo'lga teng.

Masalan, $\overline{A1}'$, $\overline{A1}'^{(2)}$ matritsalardagi (1,5) element 0 ga teng, biroq $\overline{A1}'^{(3)}$ matritsada 1-holatdan 5-gacha bo'lgan eng qisqa yo'l $\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45}$ ga teng,

n holatli avtomatda n uzunlikdagi elementar kontur **to’liq (gamilton) konturi** deyiladi. $\overline{M'}\,\overline{M'}^{(n-1)}$ matritsaning bosh diagonali M avtomatning barcha to’liq konturlarini o’zida saqlaydi.

Demak, $\overline{A1'}\,\overline{A1'}^{(4)}$ matritsaning bosh diagonalidagi barcha elementlar nolga teng bo’lganligi sababli $A1$ avtomatda to’liq konturlar yo’q. Aksincha, 3 ta holatli $A4$ avtomatda $\overline{A4A4'}^{(2)}$ matritsasiga ko’ra $\pi_{12}\pi_{23}\pi_{31}$, $\pi_{23}\pi_{31}\pi_{12}$,
$\pi_{31}\pi_{12}\pi_{23}$ to’liq konturlari mavjud:

$$\overline{A4A4'}^{(2)} = \begin{vmatrix} \pi_{12}\pi_{23}\pi_{31} & \pi_{13}\pi_{31}\pi_{12} & 0 \\ 0 & \pi_{23}\pi_{31}\pi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{31}\pi_{12}\pi_{23} \end{vmatrix}$$

Nazorat uchun savollar:

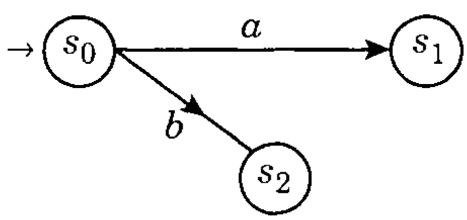
1. $(n, p, q)-$avtomatning o’tishlar matritsasi deb nimaga aytiladi?
2. O’tkinchi, berk, ajralgan holatlarni tushuntiring.
3. Elementar yo’l, elementar kontur ta’riflarini ayting.
4. Avtomatda eng qisqa yo’lni topadigan algoritmni yozing.

Misol. {a, b} to’plam xarflaridan iborat “aa” dan boshlanib, “bb” bilan tugaydigan so’zlarni qabul qiluvchi chekli avtomatni modellashtiring

Yechilishi: Avtomatni qadam ba qadam tuzamiz.

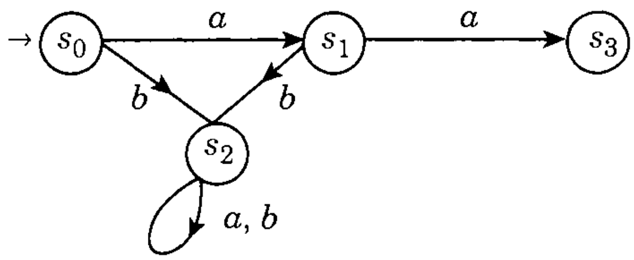
Qadam 0. Dastlab avtomat s_0 boshlang’ich holatda bo’lsin.

Qadam 1. Agar birinchi belgi $-a$ bo’lsa, s_0 dan keyingi s_1 holatni e’lon qilish uchun aralashtiriladi va keyingi belgi kutiladi. Agar birinchi belgi –b bo’lsa, so’z qabul qilinmaydi, s_2 deb belgilanadi (6.11-rasmga qarang).



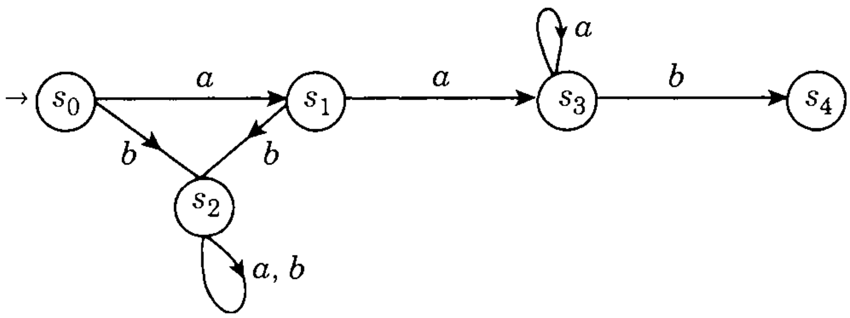
Rasm 6.11

Qadam 2. Agar kiruvchi belgi s_1 dan $-a$ bo'lsa, s_3 ni e'lon qilish uchun aralashtiriladi va qator "bb" da tugaydimi yo'qmi, aniqlanadi. Boshqa tomondan, agar s_1 dan kirish belgisi $-b$ bo'lsa, bu mumkin bo'lmagan belgi, shuning uchun uni s_2 ga o'tkaziladi. s_2 da esa qanday simvol bo'lsa ham, o'sha joyda qolsin (6.12- rasmga qarang).



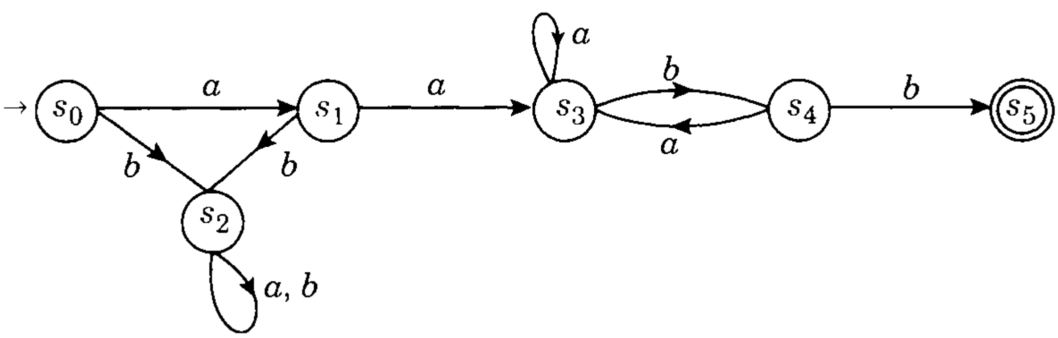
Rasm 6.12

Qadam 3. s_0 dan s_3 ga harakatlanayotgan har qanday so'z aa bilan boshlanishi kerak. a ning keyingi keladiganlari birinchisidan keyinda tursin (6.13- rasmda s_3 ga qarang). Agarda so'z oxirida $-b$ kelib qolsa, yangi s_4 yacheykaga borsin (6.13- rasmga qarang).



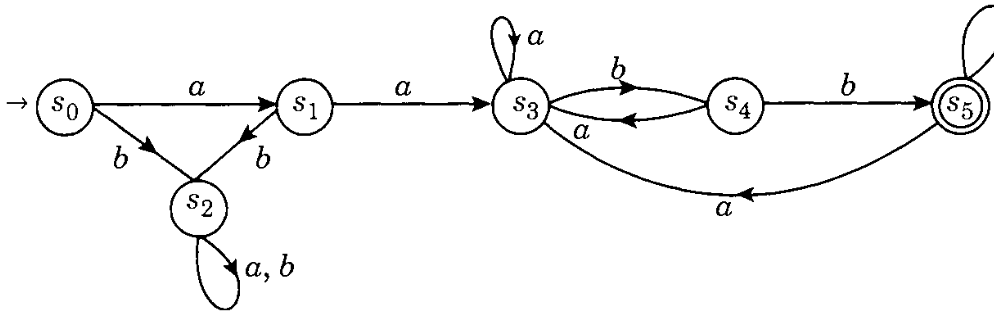
Rasm 6.13

Qadam 4. Agar s_4 dan kirish simvoli $-a$ bo'lsa, u holda s_3 ga qaytiladi va bb juftlik izlanadi. Agar s_4 dan kirish simvoli $-b$ kelib qolsa, yangi s_5 yacheykaga borsin (6.14- rasmga qarang).



Rasm 6.14

Qadam 5. Agarda s_5 dan $-b$ kelib qolsa, yana s_5 ga qaytsin. Biroq s_5 dan $-a$ kelib qolsa, bb ni izlash uchun s_3 ga qaytiladi. s_5 holat bb bilan tugagan izlangan so'zlarni saqlaydi. Bu 6 ta qadam chekli avtomatni hosil qiladi (6.15- rasmga qarang).



Rasm 6.15

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi chekli avtomatlar uchun o'tishlar matritsasini tuzing:

1. 0 va 1 raqamlar qurilmaga kiritiladi. Yig'ilgan son birligi 3 modul bo'yicha hisoblanadi (x-kirish raqami, z-yig'ilgan son);

2. Tanga bir necha marta uloqtiriladi va ketma-ket raqam tushganda juft sondagi raqam uchun belgi qo'yiladi, har ikkinchi gerb tushganda (ketma-ket bo'lishi shart emas) belgi qo'yiladi (x-tanga tomoni, z - qo'yilgan belgi);

3. Uch qavatli binoda o'rnatilgan liftning har bir qavatda chaqirish tugmasi bor va quyidagi tartibda ishlaydi: agar bir tugma bosilsa, lift shu tugma o'rnatilgan qavatga harakatlanadi. Agar bir vaqtda 2 yoki 3 tugma bosilsa, lift ularning eng quyisiga tomon harakatlanadi. Lift harakatlanayotgan paytda tugmalar bosilmasligi kerak (x- chaqirish tugmasi bosilgan qavat, z- lift yo'nalishi va to'xtamasdan o'tadigan qavatlar soni);

4. O'tishlar matritsasi berilgan A avtomatda

a) o'tkinchi, berk, ajralgan holatlarni toping;

b) $G_1(5,7)$ va $H_1(2,3)$ ni aniqlang;

v) o'tishlar matritsasida satr va ustunlar tartibini o'zgartirish bilan $\{1,2,4,7\}$ va $\{3,5,6,8\}$ holatlar to'plamlari o'tkinchi va berk qism avtomatlar juftligi yoki ajralgan qism avtomatlar juftligi bo'lishi mumkinmi?

$$A=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\\
\left|\begin{array}{cccccccc}
(\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (\alpha/0) & 0 & (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha/1) & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1)\vee(\beta/0) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & (\alpha/1)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0)\vee(\beta/1) & 0 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8 \end{array}$$

5. 4-misoldagi A avtomat uchun

a) $\overline{A}, \overline{A}^2, \overline{A}^3$ matritsalarni tuzing;

b) $\overline{A}'^{(1)}, \overline{A}'^{(2)}, \dots, \overline{A}'^{(7)}$ matritsalarni tuzing;

7. INJENER UCHUN MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

7.1. Kirish

Amaliy nuqtai nazardan qaraydigan bo’lsak, matematik mantiq ma’lumotlar bazasini qurishda, elektrotexnika, informatika va hisoblash texnikasi va umuman, barcha raqamli qurilmalarda dasturlash tili uchun asos bo’lib xizmat qiladi. Shuning uchun ham tahliliy mulohaza yuritishga qiziquvchi har bir kishi matematik mantiq bo’limini o’rganishi kerak.

Insoniyat tomonidan to’plangan matematik bilimlarni jamlashda greklarning hissasi nihoyatda salmoqli bo’lgan, shuningdek, ular mantiq, ya’ni to’g’ri mulohaza yuritish san’ati bilan ham shug’ullanishgan.

Er. av. 389 yilda **Platon (er.av. 427-347)** asos solgan falsafiy maktabda matematikaning ilk nazariy asoslari qurildi. Platon mantiqiy teoremalarni isbotlashning quyidagi 3 xil metodini ishlab chiqdi:

1) analitik metod;
2) sintetik metod;
3) apagogik metod.

Analitik metod – har biri o’zidan oldingisining bevosita natijasi bo’lgan gaplar zanjirini hosil qilishdan iborat. Bu zanjirning birinchi elementini isbotlash kerak bo’lgan mulohaza, oxirgi elementini esa isbotlangan haqiqat tashkil qiladi.

Sintetik metod – analitik metodning aksi bo’lib, unda birinchi element isbotlangan haqiqat va har bitta mulohaza o’zidan keyingisining natijasi bo’ladi.

Apagogik metod – teskarisini faraz qilish yo’li bilan isbotlash metodi bo’lib, unda zanjirning birinchi elementi isbotlash kerak bo’lgan mulohazani inkor qilish bo’ladi, oxirida esa ziddiyatga olib kelinadi.

Platonning shogirdlaridan **Aristotel Stagirit (er.av. 384 -322)** alohida ajralib turadi. Aristotelni mantiq ilmining asoschisi desak, yanglishmaymiz, chunki u o'zigacha bo'lgan barcha mantiqiy bilimlarni jamladi va mantiqiy qonuniyatlar sistemasini yaratdi. Bu qonunlardan tabiatni tadqiq qilishda mulohazalar quroli sifatida foydalandi. Aristotelning olamni o'rganishdagi bilimlari yagona bo'lib, **naturfalsafa** deb nom olgan.

Aristotel mantiqiy ilmining mazmuni deduktiv mulohaza yuritishga asoslangan. **Deduktsiya** bu – umumiy xulosalardan xususiy xulosalarga kelishdir. Mantiqning deduktiv bo'limi boshqacha **sillogistika** deb ham yuritiladi. Hozirda bu mantiqiy ilm – **formal mantiq** deb ataladi.

Qadimgi greklar matematikani ikkiga ajratib o'rganishgan: mantiqni hisoblash san'ati deb, arifmetikani sonlar nazariyasi deb nomlashgan.

7.2. Sodda va murakkab mulohazalar

Rost yoki yolg'onligi aniq bo'lgan darak gap **mulohaza** deyiladi.

So'roq va undov gaplar mulohaza hisoblanmaydi, ya'ni: "Bugun kinoga kiramizmi?" yoki "Kitobga tegma!"

Mulohazalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi:

A, B, C, ….

Agar mulohaza rost bo'lsa A=1, yolg'on bo'lsa, A=0 deb belgilaymiz, ba'zi adabiyotlarda, shuningdek, "Informatika va hisoblash texnikasi" fanining **"ALGOL", "BOOLEAN", "C++"** dasturlash tillarida rost mulohazaga "T", ya'ni "true" so'zining, yolg'on mulohazaga "F", ya'ni "false" so'zining bosh harflari ishlatiladi.

Misol. 1. A="2x6=14"=0;

2. B="2+2=4"=1;

3. S="Qor oq"=1;

4. D="Bugun dushanba bo'lsa, u holda ertaga seshanba bo'ladi"=1;

5. E="agar 1+1=3 bo'lsa, u holda jumadan keyin yakshanba keladi"=?

5-mulohaza rostmi yoki yolg'onmi? Hozircha biror narsa deyish qiyin, biroq mantiqiy amallarni kiritganimizdan keyin bu savolga osongina javob topasiz.

Shunday fikrlar borki, ular tuzilishi bo'yicha mulohazaga o'xshaydi, lekin mulohaza emas. Masalan, ikki varaq qog'oz olamiz-da, ularni 1- va 2- deb raqamlaymiz. Birinchi qog'ozga "Ikkinchi varaqda yolg'on yozilgan" deb, ikkinchi qog'ozga esa "Birinchi varaqda rost yozilgan" degan mulohazani yozamiz. Bir qaraganda sodda mulohazaga o'xshaydi, biroq …! Savol beramiz, bu mulohazalar rostmi yoki yolg'onmi? Bu fikrlar ziddiyatga olib keladi, ya'ni ularni rost yoki yolg'onligi haqida aniq gapirib bo'lmaydi. Bunday mulohazalar matematikada **mantiqiy paradoks** deyiladi. Demak, ko'rinishidan mulohazaga o'xshagan har qanday gap ham mulohaza bo'lavermaydi.

Mulohazalar sodda yoki murakkab bo'lishi mumkin.

Agar A mulohazaning o'zi bir tasdiq bo'lib, ma'nosi bo'yicha u bilan ustma - ust tushmaydigan bir qismini ajratib ko'rsatish mumkin bo'lmasa, u holda A mulohazaga **sodda mulohaza** deyiladi.

Misol. A: "0 soni 1 sonidan kichik";
B: "Bugun havo iliq".

Sodda mulohazalardan mantiqiy bog'lovchilar yoki mantiqiy amallar yordamida hosil qilingan mulohazaga **murakkab mulohaza** deyiladi.

Misol. C: "7 tub son va 6 toq son" **;**
D: "Oy Yer atrofida aylanadi yoki O'zbekiston Evropada joylashgan".

Mulohaza ikkita qiymatdan birini "rost", ya'ni "1" yoki "yolg'on", ya'ni "0" ni qabul qiladi. Bu qiymatlarga mulohazaning **rostlik qiymatlari** deyiladi.

Mulohazaning rostlik qiymatlaridan tuzilgan jadvalga **rostlik jadvali** deyiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Matematik mantiq fanining ahamiyati nimada deb o'ylaysiz?
2. Mantiq ilmiga asos solgan olimlardan kimlarni bilasiz?
3. Mantiqiy mulohazalarni isbotlashning metodlarini ayting.
4. Deduktsiya deganda nimani tushunasiz?
5. Mulohazaga ta'rif bering.
6. Mantiqiy paradoksni taъriflang va misol keltiring.

Sodda va murakkab mulohazalar farqini tushuntiring.

7.3. Asosiy mantiqiy bog'liqliklar

Mulohazalar ustida quyidagi asosiy 5 ta mantiqiy amal bajariladi: **i**nkor qilish, kon'yunktsiya, diz'yunktsiya, implikatsiya va ekvivalentlik amallari.

A mulohazaning **inkori deb**, shunday yangi mulohazaga aytiladiki, agarda A mulohaza yolg'on bo'lsa, uning inkori chin bo'ladi va aksincha. A mulohazaning inkori $\neg A$ yoki $\bar{\mathbf{A}}$ kabi belgilanadi va "A emas" deb o'qiladi.

Inkor qilish amali uchun rostlik jadvalini tuzish mumkin:

A	$\neg\mathbf{A}$
1	0
0	1

A va B mulohazalarning **kon'yunktsiyasi deb**, A va B mulohazalar bir vaqtda rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan barcha hollarda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aytiladi va $A\,\&\,B$ yoki $A \wedge B$ kabi belgilanadi hamda "va" deb o'qiladi.

Kon'yunktsiya amalining rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A\,\&\,B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A va B mulohazalarning **diz'yunktsiyasi deb**, A va B mulohazalardan kamida bittasi rost bo'lganda rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aytiladi va $A \vee B$ kabi belgilanadi hamda "yoki" deb o'qiladi. Diz'yunktsiya amalining rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

{0; 1; ¬; &; \/}-to'plamga **mulohazalar algebrasi** yoki **Bul algebrasi** deyiladi.

A va B mulohazalarning **implikatsiyasi deb**, A mulohaza rost bo'lib, B yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan barcha hollarda rost qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aytiladi va **A**$\rightarrow B$ kabi belgilanadi va "A dan B kelib chiqadi" yoki "Agar A o'rinli bo'lsa, B o'rinli bo'ladi" deb o'qiladi. A mulohaza Implikatsiya amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Misol. A: "Bugun yomg'ir yog'di" va B: "Men soyabon oldim" mulohazalar bo'lsin. Agar yomg'irda qolib, kayfiyatim buzilganini, ho'l bo'lganimni 0, hammasi «OK» bo'lganini 1 qiymatlar bilan belgilasak, implikatsiyani shunday tushuntirish mumkin:

A	B	$A \rightarrow B$
Bugun yomg'ir yog'madi	Menda soyabon yo'q	1
Bugun yomg'ir yog'madi	Men soyabon oldim	1
Bugun yomg'ir yog'di	Menda soyabon yo'q	0
Bugun yomg'ir yog'di	Men soyabon oldim	1

Misol. Aytaylik, r: ΔABC teng tomonli uchburchak va
q: "ΔABC teng yonli uchburchak" bo'lsin.

U holda $p \rightarrow q$: Agar ΔABC teng tomonli bo'lsa, u holda u teng yonli hamdir. Shuningdek, $q \rightarrow p$: Agar ΔABC teng yonli bo'lsa, u holda u teng tomonlidir.

Bilib qo'ying: $q \rightarrow p$ mulohazada $q-$gipoteza, $p-$natija.

r	q	$p \rightarrow q$
ΔABC teng tomonli bo'lmasa	ΔABC teng yonli bo'lmaydi	1
ΔABC teng tomonli bo'lmasa	ΔABC teng yonli bo'ladi	1
ΔABC teng tomonli bo'lsa	ΔABC teng yonli bo'lmaydi	0
ΔABC teng tomonli bo'lsa	ΔABC teng yonli bo'ladi	1

Misol. $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ni hisoblang.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

A va B mulohazalarning e**kvivalentligi deb**, A va B mulohazalarning bir xil qiymatlarida rost bo'lib, har xil qiymatlarida esa yolg'on bo'luvchi mulohazaga aytiladi va **A~B, A↔B** kabi belgilanadi va "A va B teng kuchli", "A bo'ladi, qachonki B bo'lsa" yoki "A mulohaza B uchun yetarli va zarur" deb o'qiladi. Ekvivalentlik amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Misol. Aytaylik, r: ΔABC teng tomonli uchburchak va
q: "ΔABC hamma burchaklari teng" bo'lsin.
U holda $p \leftrightarrow q$: ΔABC teng tomonli bo'ladi, faqat va faqat hamma burchagi teng bo'lsa.

Halqali yig'indi amali $A \oplus B$.

Bu amal ekvivalentlik amalining inkoriga teng bo'ladi, ya'ni

$$A \oplus B = \neg(A \sim B).$$

Halqali yig'indi amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sheffer shtrixi $A \mid B$.

Ushbu amalni kon'yunktsiya va diz'yunktsiya amallari yordamida hosil qilish mumkin, ya'ni $A \mid B = \neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$

Sheffer shtrixi amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sheffer shtrixi amalining xossalari:

1^0. $\neg A = A \mid A$

2^0. $A \& B = \neg(A \mid B) = (A \mid B) \mid (A \mid B)$

3^0. $A \vee B = \neg A \mid \neg B = (A \mid A) \mid (B \mid B)$

Pirs strelkasi A↓B.

Ushbu amalni ham kon'yunktsiya va diz'yunktsiya amallari yordamida hosil qilish mumkin, ya'ni

$$A \downarrow B = \neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B$$

Pirs strelkasi amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Pirs strelkasi amalining xossalari:

1^0. $\neg A = A \downarrow A$

2^0. $A \vee B = \neg(A \downarrow B) = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$

3^0. $A \& B = \neg A \downarrow \neg B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$

Pirs strelkasi **q**atnashgan Bul ifodasini Sheffer shtrixi **yo**rdamida hosil qilish mumkin:

$$A \downarrow B = \neg A \& \neg B = \neg\neg(A \mid B) = \neg[(A \mid A) \mid (B \mid B)] =$$
$$= [(A \mid A) \mid (B \mid B)] \mid [(A \mid A) \mid (B \mid B)] \qquad (1)$$

yoki Sheffer shtrixi **q**atnashgan Bul ifodasini Pirs strelkasi **yo**rdamida hosil qilish mumkin:

$$A \mid B = \neg A \vee \neg B = \neg(\neg A \downarrow \neg B) = \neg[(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)] =$$
$$= [(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)] \downarrow [(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)] \qquad (2)$$

Bundan ko'rinadiki, ixtiyoriy ifodani faqat Sheffer shtrixi yordamida yo Pirs strelkasi **yo**rdamida yoki faqatgina kon'yunktsiya va inkor yordamida yoki faqatgina diz'yunktsiya va inkor yordamida yozish mumkin ekan.

Quyidagi jadvalda to'plamlar ustida amallar bilan mantiqiy amallarning o'xshashligi keltirilgan:

Set operations	Logic operations
$A \cap B$	A AND B
$A \cup B$	A OR B
A'	COMP(A)
$A \oplus B$	A XOR B
$A - B$	A AND (COMP(B))

7.4. Predikatlar. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari

Bizga natural sonlar to'plami N berilgan bo'lsin.

x element N to'plamning ixtiyoriy elementi bo'lsin. U holda quyidagi jumlalar: A(x)={x soni 7 ga bo'linadi}; B(x)={x>10}; C(x)={x tub son};
D(x)={$(x-5)^2<10$} darak gaplar bo'lganligi uchun mulohaza hisoblanadi, lekin ularning rost yoki yolg'onligi haqida hech narsa ayta olmaymiz.

Rost yoki yolg'onligi noma'lum bo'lgan mulohazalar **aniqmas mulohazalar** yoki **predikatlar** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda x ning o'rniga turli qiymatlarni qo'ysak, turlicha mulohazalarhosil bo'ladi, ya'ni

A(7)={7 soni 7 ga bo'linadi} =1;

A(10)={10 soni 7 ga bo'linadi}=0

Natural sonlar to'plamida berilgan biror $P(x)$ predikatni olaylik. Agar $P(x)$ predikat bo'lsa, u holda $(\forall x)P(x)$ – yozuv N to'plamda ixtiyoriy x uchun $P(x)$ mulohaza o'rinli degan ma'noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo'ladi, qachonki x ning ixtiyoriy qiymatida $P(x)$ o'rinli bo'lsa. Agarda x ning bittagina qiymatida o'rinli bo'lmasa, $P(x)$ mulohaza yolg'on bo'ladi. ∀ - belgi **umumiylik kvantori** deyiladi.

Misol. $A(x)$={4^x+1 soni tub son} mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko'ramiz:

$A(1)$={4^1+1=5 soni tub son}=1;
$A(2)$={4^2+1=17 soni tub son}=1;
$A(3)$={4^3+1=65 soni tub son} =0, demak, x=3 da bu mulohaza yolg'on bo'ladi.

Shuning uchun ham $(\forall x)A(x)$ mulohaza yolg'on mulohaza hisoblanadi.

Misol. $(\forall x)B(x)$={x^2-x soni 2 ga bo'linadi} mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko'ramiz:

$B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, … larda mulohaza o'rinli, lekin bu usul bilan barcha sonlarni tekshirib chiqishning iloji yo'q, shuning uchun mulohazani rostligini quyidagicha isbotlash mumkin:

$x^2-x=x(x-1)$ ketma-ket kelgan 2 ta sonning ko'paytmasida bittasi albatta juft son bo'ladi, demak bu ko'paytma har doim 2 ga bo'linadi. Bundan $(\forall x)B(x)$ mulohazaning rostligi kelib chiqadi.

Agar $P(x)$ predikat bo'lsa, u holda $(\exists x)$ $P(x)$ – yozuv N to'plamda shunday x element topiladiki, uning uchun $P(x)$ mulohaza o'rinli degan ma'noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo'ladi, qachonki x ning kamida bitta qiymatida $P(x)$ o'rinli bo'lsa. ∃ - belgi **mavjudlik kvantori** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda $(\exists x)A(x)$ mulohaza ham, $(\exists x)V(x)$ mulohaza ham chin bo'ladi.

Umumiylik va mavjudlik kvantorlari uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\neg(\forall x)\ P(x) = (\exists x)\ \neg P(x)$
2^0. $\neg(\exists x)\ P(x) = (\forall x)\ \neg P(x)$
3^0. $(\forall x)[\ P(x) \& E(x)] = (\forall x)\ P(x) \& (\forall x)\ E(x)$
4^0. $(\exists x)[\ P(x) \&\ E(x)] \Rightarrow (\exists x)\ P(x) \& (\exists x)\ E(x)$
5^0. $(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)E(x) \Rightarrow (\forall x)[\ P(x) \vee E(x)]$
6^0. $(\exists x)[\ P(x) \vee E(x)] \Rightarrow (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)\ E(x)$

Nazorat uchun savollar:

1. A mulohazaning inkori deb nimaga aytiladi?

2. Mulohazalar kon'yunktsiyasiga ta'rif bering.
3.Mulohazalar diz'yunktsiyasi ta'rifini va rostlik jadvalini tushuntiring.
4. Mulohazalar implikatsiyasi nima?
5. Ekvivalent mulohazalar deb nimaga aytiladi?
6. Halqali yig'indi amalini tushuntiring.
7. Sheffer shtrixi va Pirs strelkasi amallarini rostlik jadvali yordamida tushuntiring.
8. Predikat ta'rifini ayting va misol keltiring.
9. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari nimani aniqlaydi?

MISOL VA MASALALAR

1. $P(x)=\{x^2+1=0$, x-haqiqiy son$\}$ bo'lsa, $(\exists x)P(x)$ predikatni so'z bilan ifodalang va rostligini tekshiring.
2. $P(x)=\{x^2=25$, x - butun son$\}$ mulohaza uchun $(\exists x)P(x)$ ni ifodalang va rostligini tekshiring.

7.5. Formulalar. Formulalarning teng kuchliligi

Mantiqiy amallar yordamida tuzilgan murakkab mulohazaga **formula** deyiladi. Formulalar grek harflari bilan belgilanadi: α, β, γ, δ, ….

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ mulohazalar α formulada qatnashadigan barcha mulohazalar bo'lsa, α= α($A_1, A_2, ..., A_n$) kabi belgilanadi.

Misol . a) $\alpha(A)=\neg A$;
b) $\beta(A, B, C)=A\&B\to C$;
v) $\gamma(A, B)=A\&B \vee \neg A\&\neg B$.

bunda *A*, *B*, *C*, … sodda mulohazalar **argument** yoki **mantiqiy o'zgaruvchilar**, α, β, γ, … formulalar esa **funktsiya** deb ham yuritiladi.

Formulaning to'g'ri tuzilgan bo'lishida qavslarning o'rni juda muhim.

Formulalarda qavslarni kamaytirish maqsadida amallarning bajarilish tartibi quyidagicha kelishib olingan. Agar formulada qavslar bo'lmasa,

birinchi inkor amali – ¬,
ikkinchi kon'yunktsiya – &,

uchinchi bo’lib diz‘yunktsiya – $\vee$,
undan so’ng implikatsiya – $\rightarrow$ va
oxirida ekvivalentlik – ~ amali bajariladi.

Agar mulohazada bir xil amal qatnashgan bo’lsa, u holda ularni tartibi bilan ketma-ket bajariladi:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D = ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D.$$

Kon‘yunktsiya amali diz‘yunktsiyaga qaraganda kuchliroq bog’lovchi hisoblanadi, ya‘ni $A \vee B \wedge C = A \vee (B \wedge C)$.

Diz‘yunktsiya implikatsiyaga qaraganda kuchliroq bog’aydi, shuning uchun ham quyidagi tenglik o’rinli:

$$A \wedge B \vee C \rightarrow D = ((A \wedge B) \vee C) \rightarrow D.$$

Implikatsiya ekvivalentlikka qaraganda kuchliroq, ya’ni

$$A \leftrightarrow B \rightarrow C = A \leftrightarrow (B \rightarrow C).$$

Misol. Quyidagi misolda amallar tartibini qavslar bilan ko’rsatamiz:

$$A \rightarrow \overline{B \vee C} \leftrightarrow \overline{A} \vee B \rightarrow C \cdot \overline{A} \vee B \rightarrow A =$$
$$= A \rightarrow \overline{B \vee C} \leftrightarrow \overline{A} \vee B \rightarrow ((C \cdot \overline{A}) \vee B) \rightarrow A =$$
$$= (A \rightarrow \overline{B \vee C}) \leftrightarrow ((\overline{A} \vee B) \rightarrow ((C \cdot \overline{A}) \vee B)) \rightarrow A =$$
$$= ((A \rightarrow \overline{B \vee C}) \leftrightarrow ((\overline{A} \vee B) \rightarrow ((C \cdot \overline{A}) \vee B)) \rightarrow A).$$

Argumenti va funktsiya qiymati 0 yoki 1 qiymatni qabul qiluvchi n ta o’zgaruvchi $A_1, A_2, ..., A_n$ ga bog’liq bo’lgan har qanday α= α($A_1, A_2, ..., A_n$) funktsiya **Bul funktsiyasi** deyiladi.

α($A_1, A_2, ..., A_n$) formulaning **mantiqiy imkoniyati** deb, $A_1, A_2, ..., A_n$ o’zgaruvchilarning bo’lishi mumkin bo’lgan barcha rostlik qiymatlariga aytiladi.

α formulaning barcha mantiqiy imkoniyatlarini o’z ichiga olgan jadvalga α formulaning **mantiqiy imkoniyatlari jadvali** deyiladi.

Teorema 1. n ta o’zgaruvchi qatnashgan formulaning 0 va 1 qiymatlarni qabul qiluvchi mumkin bo’lgan mantiqiy imkoniyatlari soni 2^n ga teng.

Agar α va β formulalar uchun umumiy bo’lgan mantiqiy imkoniyatlarda α va β bir xil qiymat qabul qilsa, u holda α va β formulalar **teng kuchli** deyiladi va **α≡β** kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda, agarda formulalarning rostlik jadvallari mos bo’lsa, ular teng kuchli bo’ladi.

Agar barcha mantiqiy imkoniyatlarda α formula faqat 1 ga teng qiymat qabul qilsa, α formula **ayniy haqiqat** yoki **tavtologiya** deyiladi va $\alpha\equiv 1$ yoki $\models\alpha$ kabi belgilanadi.

n ta o'zgaruvchi qatnashgan formulaning mumkin bo'lgan barcha mantiqiy imkoniyatlarini yozish uchun qabul qilingan tartib mavjud. Bu ketma-ketlik (0,0,..,0,0) dan boshlanadi. Har bir keyingi qatorda ikkilik sanoq sistemasida oldingi qatordagi qiymatlarga 1 ni qo'shamiz va nihoyat hamma qiymatlar 1 lardan iborat bo'lganda ishni tugatamiz: (1,1,..,1,1). Ikkilik sanoq sistemasida qo'shish qoidasini eslatib o'tamiz: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=10.

Agar o'zgaruvchilar soni 3 ta yoki 4 ta bo'lsa, u holda mos ravishda 8 ta yoki 16 ta qator hosil bo'ladi:

n=3 bulsa

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

n=4 bulsa

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Misol. $\alpha(A,B)=\neg(A\&B)\to(\neg A\vee\neg B)$ formulaning tavtologiya bo'lishini tekshirib ko'rish mumkin:

A	**B**	$\neg(A\&B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\vee\neg B$	$\alpha(A,B)=\neg(A\&B)\to(\neg A\vee\neg B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

Teorema 2. Agar α va $\alpha \rightarrow \beta$ formulalar tavtologiya bo'lsa, u holda β ham tavtologiya bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz, ya'ni β tavtologiya bo'lmasin, u holda β ning barcha qiymatlari 0 bo'ladi. Lekin α tavtologiya bo'lgani uchun har doim 1 qiymat qabul qiladi. Bundan $\alpha \rightarrow \beta=0$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa $\alpha \rightarrow \beta$ tavtologiya degan teorema shartiga zid. Biz qarama – qarshilikka duch keldik. Demak, β tavtologiya bo'lar ekan.

Teorema isbotlandi.

Agar barcha mantiqiy imkoniyatlarda α formula faqat 0 ga teng qiymat qabul qilsa, α formula **ayniy yolg'on** yoki **ziddiyat** deyiladi va $\alpha \equiv 0$ kabi belgilanadi.

Misol. $\alpha(A)= \neg A \sim A$ formula ziddiyatdir:

A	$\neg$A	α(A)= $\neg$A~A
0	1	0
1	0	0

7.6. Mantiq qonunlari

Bizga biror α, β, γ mantiqiy formulalar berilgan bo'lsin. Ushbu formulalar uchun quyidagi mantiq qonunlari har doim o'rinli bo'ladi:

1. Ikkilangan rad etish qonuni: $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
2. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya amallarining idempotentlik qonuni:
$$\alpha \& \alpha \equiv \alpha,$$
$$\alpha \lor \alpha \equiv \alpha$$
3. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya amallarining kommutativlik qonuni:
$$\alpha \& \beta \equiv \beta \& \alpha,$$
$$\alpha \lor \beta = \beta \lor \alpha$$
4. Kon'yunktsiya va diz'yunktsiya amallarining assotsiativlik qonuni:
$$\alpha \& (\beta \& \gamma) \equiv (\alpha \& \beta) \& \gamma,$$
$$\alpha \lor (\beta \lor \gamma) = (\alpha \lor \beta) \lor \gamma)$$

5. Kon’yunktsiya va diz’yunktsiya amallarining bir-biriga nisbatan distributivlik qonuni:

$$\boldsymbol{\alpha\&(\beta\vee\gamma)\equiv(\alpha\&\beta)\vee(\alpha\&\gamma)},$$
$$\boldsymbol{\alpha\vee(\beta\&\gamma)\equiv(\alpha\vee\beta)\&(\alpha\vee\gamma)}$$

6. Yutilish qonunlari: $\boldsymbol{\alpha\&(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha\vee(\alpha\&\beta)\equiv\alpha}$

7. De Morgan qonunlari**:** $\boldsymbol{\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\ \&\ \neg\beta}$

A	**B**	**¬(A∨B)**	**¬A&¬B**
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

$$\boldsymbol{\neg(\alpha\&\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta}$$

A	**B**	**¬(A&B)**	**¬A∨¬B**
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

8. Tavtologiya qonuni: $\boldsymbol{\alpha\vee\neg\alpha\equiv1}$
9. Ziddiyat qonuni: $\boldsymbol{\alpha\ \&\ \neg\alpha\equiv0}$
10. 0 va 1 qonunlari: $\boldsymbol{\alpha\&1\equiv\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha\&0\equiv0}$

$\boldsymbol{\alpha\vee1\equiv1}$, $\boldsymbol{\alpha\vee0\equiv\alpha}$

$\boldsymbol{\neg1\equiv0}$, $\boldsymbol{\neg0\equiv1}$

11. Kontrpozitsiya qonuni: $\boldsymbol{\alpha\to\beta\equiv\neg\beta\to\neg\alpha}$

α	β	$\alpha\to\beta$	$\overline{\beta}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}\to\overline{\alpha}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

12. Implikatsiyadan qutilish qonuni: **α→β≡ ⌐α\/β**
13. Ekvivalentlikdan qutilish qonuni:

α~β≡(α→β)&(β→α)≡ α&β \/ ⌐α&⌐β

14. Implikatsiya xossalari: **0→α≡1, 1→α≡α,**

α→1≡1, α→0≡ ⌐ α.

Mantiq qonunlarini isbotlash uchun ularning rostlik jadvallarini tuzish yetarli.

7.7. Mantiq funktsiyalari uchun rostlik jadvalini tuzish

Misol. $\alpha(A,B,C) = (A \vee B) \leftrightarrow (C \to \overline{A})$

formulaning rostlik jadvalini tuzish uchun amallarni bajarish ketma-ketligidan foydalanamiz: $\alpha(0,0,0) = (0 \vee 0) \leftrightarrow (0 \to \overline{0}) = 0 \leftrightarrow (0 \to 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0;$

$$\alpha(0,0,1) = (0 \vee 0) \leftrightarrow (1 \to \overline{0}) = 0 \leftrightarrow (1 \to 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0;$$
$$\alpha(0,1,0) = (0 \vee 1) \leftrightarrow (0 \to \overline{0}) = 1 \leftrightarrow (0 \to 1) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(0,1,1) = (0 \vee 1) \leftrightarrow (1 \to \overline{0}) = 1 \leftrightarrow (1 \to 1) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(1,0,0) = (1 \vee 0) \leftrightarrow (0 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (0 \to 0) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(1,0,1) = (1 \vee 0) \leftrightarrow (1 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (1 \to 0) = 1 \leftrightarrow 0 = 0;$$
$$\alpha(1,1,0) = (1 \vee 1) \leftrightarrow (0 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (0 \to 0) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(1,1,1) = (1 \vee 1) \leftrightarrow (1 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (1 \to 0) = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$$

Rostlik jadvalini tuzamiz:

A	**B**	**C**	**A\/B**	**⌐A**	**C→⌐A**	**α (A,B,C)= (A\/B)~(C→⌐A)**
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Misol. α(A, B, C)= ⌐(A&B)→(A\/B~C)
formulaning rostlik jadvalini tuzish uchun amallarni bajarish ketma-ketligidan foydalanamiz:

A	B	C	A&B	¬ (A&B)	A∨B	A∨B~C	α(A, B, C)= ¬(A&B)→(A∨B~C)
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1

Nazorat uchun savollar:

1. Formula deb nimaga aytiladi?
2. Formulaning mantiqiy imkoniyati deganda nimani tushunasiz?
3. Qanday formulaga tavtologiya deyiladi?
4. Ziddiyat nima?
5. & va ∨ amallarining kommutativlik qonunini tushuntiring.
6. De Morgan qonunini isbotlang.
7. Mantiq funktsiyalarining rostlik jadvalini tuzish ketma-ketligini ayting.

MISOL VA MASALALAR

Mantiq funktsiyalari uchun rostlik jadvalini tuzing:

1. α(A,B,C)= ¬A&B∨¬(A∨C)
2. α(A,B,C)=C→(¬A∨¬B)
3. α(A,B,C)=A&B→¬(A∨¬B)
4. α(A,B,C)=(A&B&¬C)~(¬A∨ B)
5. α(A,B,C)=(¬A∨¬C)~B
6. α(A,B,C)=(A→B)→¬C
7. α(A,B,C)=(¬A→¬B)&(B→C)
8. α(A,B,C)=A&(B→C)∨¬B
9. α(A,B,C)=¬(A&B∨C)
10. α(A,B,C)=(A~B)&(¬B~¬C)
11. α(A,B,C)=(¬A→¬C)~B
12. α(A,B,C)=(¬B∨¬C)→(A∨C)
13. α(A,B,C)=A→(¬B∨¬C)

14. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\to B)\&(\neg B\to A)\&\neg C$
15. $\alpha(A,B,C)=C\vee A\&\neg B$
16. $\alpha(A,B,C)=A\&(\neg A\&B\vee C)\&(A\vee\neg C)$
17. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\vee B)\&(\neg B\vee A\&C)$
18. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\sim A)\&(\neg A\vee\neg C)$
19. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\&A\&\neg C$
20. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\&B)\to(C\&A)$
21. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\sim C)\&A\&\neg C$
22. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\vee\neg A\&\neg B)\&(C\to B)$
23. $\alpha(A,B,C)=(A\vee B\ \&\neg C\vee\neg A\&\neg B\&C)\&A\&\neg B$
24. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\&(C\to A)$
25. $\alpha(A,B,C)=(A\&\neg B\&C\vee\neg A\&\neg C)\&B$
26. $\alpha(A,B,C)=(A\oplus B\&C)\to A\vee C$
27. $\alpha(A,B,C)=(A\mid B)\to(\neg C\&B\oplus A)$
28. $\alpha(A,B,C)=(A\to\neg B)\oplus(C\vee A)$
29. $\alpha(A,b,C)=(A\vee B)\oplus(\neg C\sim B)$
30. $\alpha(A,B,C)=((A\downarrow B)\&\neg C)\to A\mid((\neg B\oplus\neg C)\sim\neg(A\vee C)$

Test savollari:

1. De Morgan qonunlarini ko’rsating.
   A) $\alpha\&(\beta\&\gamma)\equiv(\alpha\&\beta)\&\gamma$, $\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma$;
   B) $\alpha\&(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha$, $\alpha\vee(\alpha\&\beta)\equiv\alpha$;
   C) $\alpha\to\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta$;
   D) $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\&\neg\beta$; $\neg(\alpha\&\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta$.

2. Diz’yunktsiyaning assotsiativligi qonunini toping.
   A) $\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma$; B) $\alpha\&(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha$;
   C) $\alpha\to\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta$; D) $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\&\neg\beta$.

3. Kon’yunktsiyaning kommutativligi qonunini aniqlang.
   A) $\alpha\&\beta\equiv\beta\&\alpha$; B) $\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha$;
   C) $\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma$; D) $\alpha\&(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha$.

4. $A\to B$ implikatsiya quyidagilardan qaysi biriga teng?
   A) $\neg\alpha\vee\beta$; B) $\beta\vee\alpha$;
   C) $\beta\&\alpha$; D) $\alpha\vee\beta$.

5. $\alpha \oplus \beta$ halqali yig'indi quyidagilardan qaysi biriga teng?

A) $\neg\alpha \vee \beta$; B) $\beta \vee \alpha$;

C) $\neg(\alpha \sim \beta)$; D) $\beta \& \alpha$.

6. $\neg\alpha$ ning to'ldiruvchisi nimaga teng?

A) $\neg\alpha$; B) α; C) $\beta \& \alpha$; D) $\alpha \vee \beta$.

7. 0 va 1 qonunlarini ko'rsating:

A) $\alpha \vee \neg\alpha \equiv 1$; $\alpha \& \neg\alpha \equiv 0$

B) $\alpha \& 1 \equiv \alpha$, $\alpha \& 0 \equiv 0$; $\alpha \vee 1 \equiv 1$, $\alpha \vee 0 \equiv \alpha$; $\neg 1 \equiv 0$, $\neg 0 \equiv 1$

C) $0 \to \alpha \equiv 1$, $1 \to \alpha \equiv \alpha$,

D) $\alpha \to 1 \equiv 1$, $\alpha \to 0 \equiv \neg\alpha$.

8. DNSH SINFI BO'YICHA MINIMALLASH

8.1. Normal shakllar

Barcha mulohazalarni tadqiq qilish oson bo'lishi uchun mantiqiy qonunlar yordamida ularni biror umumiy standart ko'rinishga keltirish mumkin. Masalan, har qanday Bul algebrasi formulasi uchun unga teng kuchli bo'lgan va faqatgina inkor $\neg$, kon'yunktsiya & va diz'yunktsiya $\vee$ amallarini o'z ichiga olgan formulani yozish mumkin. Buning uchun implikatsiya va ekvivalentlikdan qutilish qonunlaridan foydalanish yetarli.

$A_1, A_2, ..., A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarning yoki ularni inkorlarining kon'yunktsiyasi **kon'yunktiv birhad** deyiladi:

$$A \& B \& \overline{C}; \quad A_1 \& A_2 \& \overline{A_3};$$

$\neg(A\&C)$ – kon'yunktiv birhad bo'la olmaydi, chunki agar qavs ochilsa, kon'yunktsiya amali diz'yunktsiya amaliga aylanib qoladi.

$A_1, A_2, ..., A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarning yoki ularni inkorlarining diz'yunktsiyasi **diz'yunktiv birhad** deyiladi:

$$A_1 \vee \overline{A}_2 \vee A_3, \quad A \vee B \vee \neg C.$$

Kon'yunktiv birhadlarning diz'yunktsiyasiga d**iz'yunktiv normal shakl (DNSH)** deyiladi:

$$\neg A_1\&A_2\&A_3\vee\neg A_1\&A_2\&A_3\&\neg A_4, \quad A\&V\vee\neg A\&V\vee A\&\neg C.$$

Diz'yunktiv birhadlarning kon'yunktsiyasiga **kon'yunktiv normal shakl (KNSH)** deyiladi:

$$(\neg A_1\vee A_2\vee A_3)\&(A_1\vee\neg A_2\vee\neg A_3).$$

8.2. Mukammal normal shakllar

Agar birhadda A_i yoki $\neg A_i$ formulalar juftligidan faqat bittasi qatnashgan bo'lsa, $A_1, A_2, ..., A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarining kon'yunktiv yoki diz'yunktiv birhadlari **mukammal** deyiladi.

Agar kon'yunktiv normal shaklda $A_1, A_2, ..., A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarining takrorlanmaydigan mukammal diz'yunktiv birhadlari qatnashgan bo'lsa, u holda **mukammal kon'yunktiv normal shakl** (MKNSH) deyiladi.

Agar diz'yunktiv normal shaklda $A_1, A_2, ..., A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarning takrorlanmaydigan mukammal kon'yunktiv birhadlari qatnashgan bo'lsa, u holda **mukammal diz'yunktiv normal shakl** (MDNSH) deyiladi.

Misol. $A\&V\vee\neg A\&V\vee A\&\neg V$ – MDNSH;
$(\neg A_1\vee A_2\vee A_3)\&(A_1\vee\neg A_2\vee\neg A_3)$ – MKNSH bo'ladi.

Misol. $\alpha=\left(A\&B\to\overline{C}\right)\Leftrightarrow\left(C\to B\&\overline{A}\right)$ formulani DNSH ga keltiramiz.

$$\alpha=\left(\overline{A\&B}\vee\overline{C}\right)\leftrightarrow\left(\overline{C}\vee\overline{A}\&B\right)=\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\leftrightarrow\left(\overline{C}\vee\overline{A}\&B\right)=\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\&\left(\overline{C}\vee\overline{A}\&B\right)\vee$$

$$\left(\overline{\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}}\right)\&\left(\overline{\overline{C}\vee\overline{A}\&B}\right)=\overline{A}\&\overline{C}\vee\overline{B}\&\overline{C}\vee\overline{C}\&\overline{C}\vee\overline{A}\&\overline{A}\&B\vee\overline{B}\&\overline{A}\&B\vee$$

$$\vee\overline{C}\&\overline{A}\&B\vee\overline{\overline{A}}\&\overline{\overline{B}}\&\overline{\overline{C}}\&\overline{\overline{C}}\&\left(\overline{\overline{A}}\vee\overline{B}\right)=\overline{A}\overline{C}\vee\overline{B}\overline{C}\vee\overline{C}\vee\overline{A}B\vee0\cdot\overline{A}\vee$$

$$\vee\overline{A}B\overline{C}\vee ABC\&\left(A\vee\overline{B}\right)=\overline{A}\overline{C}\vee\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}B\vee\overline{A}B\overline{C}\vee\overline{C}\vee ABC=$$

$$=\overline{C}\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{A}B\vee1\right)\vee\overline{A}B\vee ABC=\overline{C}\vee B\left(\overline{A}\vee A\right)\left(\overline{A}\vee C\right)=\overline{C}\vee\overline{A}B\vee BC=$$

$$=\overline{C}\vee B\vee\overline{A}B=B\vee\overline{C}\ \text{– MDNSH.}$$

Misol. $\alpha=(A\leftrightarrow BC)\to\left(\overline{B}\leftrightarrow A\right)$ formulani MDNSH ga keltiramiz.

$$\alpha=\left(A\cdot B\cdot C\vee\overline{A}\cdot\overline{BC}\right)\to\left(\overline{B}\cdot A\vee\overline{\overline{B}}\cdot\overline{A}\right)=\overline{ABC\vee\overline{A}\cdot\left(\overline{B}\vee\overline{C}\right)}\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=$$

$$=\overline{ABC\vee\overline{A}\cdot\overline{B}\vee\overline{A}\overline{C}}\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=\overline{ABC}\cdot\overline{\overline{A}\overline{B}}\cdot\overline{\overline{A}\overline{C}}\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=$$

$$=\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\left(A\vee B\right)\left(A\vee C\right)\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=\left(\overline{A}B\vee A\overline{B}\vee\overline{C}A\vee\overline{C}B\right)\left(A\vee C\right)\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=$$

$$=\overline{A}BC\vee\overline{B}AA\vee\overline{B}AC\vee\overline{C}AA\vee\overline{C}BA\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=$$

$$=\overline{A}BC\vee A\overline{B}\vee A\overline{B}C\vee A\overline{C}\vee AB\overline{C}\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=\overline{A}B\left(C\vee1\right)\vee A\overline{B}\left(1\vee C\right)\vee A\overline{C}\left(1\vee B\right)=$$

$$=\overline{A}B\vee A\overline{B}\vee A\overline{C}\ \text{– MDNSH.}$$

Nazorat uchun savollar:

1. Kon'yunktiv birhad deganda nimani tushunasiz?
2. Diz'yunktiv birhadga taъrif bering?
3. Kon'yunktiv normal shakl deganda nimani tushunasiz?
4. Mukammal birhad deb nimaga aytiladi?
5. Diz'yunktiv normal shakl nima? Misol keltiring.
6. MDNSH, MKNSH larni tushuntiring.

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi formulalarni MDNSH ga keltiring:

1. $\alpha(x,y,z)=(x\oplus y\wedge z)\to x\vee z$;
2. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,y)\to(\bar{z}\wedge y\oplus x)$;
3. $\alpha(x,y,z)=(x\to\bar{y}\wedge z)\oplus(x\vee z)$;
4. $\alpha(x,y,z)=(x\vee y)\oplus(y\sim\bar{z})$;
5. $\alpha(x,y,z)=((x\downarrow\bar{y})\wedge\bar{z})\to x\,|\,y\vee z$;
6. $\alpha(x,y,z)=(x\wedge y\vee\bar{y})\wedge(x\to z)$;
7. $\alpha(x,y,z)=(x\vee\bar{y}\wedge z)\,|\,(x\vee y\wedge z)\sim\bar{x}$;
8. $\alpha(x,y,z)=(x\to z)\wedge(y\to x)$;
9. $\alpha(x,y,z)=((x\downarrow\bar{y})\,|\,z)\oplus(\bar{x}\wedge z)$;
10. $\alpha(x,y,z)=(x\to y)\oplus(x\to y\wedge z)\vee(x\downarrow y)$;
11. $\alpha(x,y,z)=(x\wedge z)\oplus(y\to\bar{z})\to x\wedge y$;
12. $\alpha(x,y,z)=(x\vee\bar{y})\downarrow(\bar{x}\to(y\to z))$;
13. $\alpha(x,y,z)=x\to((\bar{y}\to z)\to y\wedge z)$;
14. $\alpha(x,y,z)=(x\vee(y\to z))\wedge(x\oplus y)$;
15. $\alpha(x,y,z)=\neg(x\downarrow\bar{y})\vee(x\sim z)\,|\,(x\oplus y\wedge z)$;
16. $\alpha(x,y,z)=(\bar{x}\vee y)\wedge(y\,|\,\bar{z})\to(x\sim x\wedge z)$;
17. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,\bar{y})\wedge(y\downarrow z)\to(x\oplus z)$;
18. $\alpha(x,y,z)=x\wedge(\bar{y}\wedge\bar{z})\oplus(\bar{x}\to z)$;
19. $\alpha(x,y,z)=((x\,|\,\bar{z}\wedge y)\,|\,(\bar{y}\,|\,z)$;
20. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,\bar{y})\downarrow(y\wedge z)\,|\,(x\vee z)$;
21. $\alpha(x,y,z)=(z\to\bar{y}\wedge x)\oplus\overline{y\vee z}$;
22. $\alpha(x,y,z)=x\to\overline{\bar{y}\wedge z}\oplus\overline{x\vee\bar{z}}$;

8.3. Rostlik jadvali bo'yicha mantiq funktsiyasi ko'rinishini tiklash

Biz shu paytgacha berilgan formula uchun rostlik jadvallarini tuzishni qarab chiqdik. Aksincha, rostlik jadvali berilgan bo'lsa, mantiq funktsiyasini tiklash mumkinmi?

Aytaylik, bizga *A, B, C* mulohaza o'zgaruvchilariga bog'liq bo'lgan $\alpha=\alpha(A,B,C)$ formulaning rostlik jadvali berilgan bo'lsin.

A	**B**	**C**	**α=α(A,B,C)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ushbu rostlik jadvaliga ega bo'lgan cheksiz ko'p teng kuchli formulalar mavjud. Ulardan ikkitasini, ya'ni rostlik jadvalidagi birlar qatori bo'yicha va rostlik jadvalidagi nollar qatori bo'yicha mantiq funktsiyasi ko'rinishini tiklashni ko'rib chiqamiz.

1) **Rostlik jadvalida $\alpha=\alpha(A,B,C)$ formula 1 ga teng bo'lgan qator raqamlarini yozib chiqamiz:**

2–qator
3–qator
6–qator
8–qator

Har bir qatorning mantiqiy imkoniyatlaridagina 1 ga teng bo'lgan, boshqa imkoniyatlarda esa 0 ga teng bo'lgan formulalarni yozib chiqamiz. Buning uchun 1 ga teng bo'lgan qatordagi mulohazalar qiymatlarini rostga aylantirib, mantiq qonunlariga asosan mulohazalar kon'yunktsiyalarini olish kerak:

2–qator uchun: $\neg A\&\neg B\&C$;
3–qator uchun: $\neg A\&B\&\neg C$;
6–qator uchun: $A\&\neg B\&C$;
8–qator uchun: $A\&B\&C$

bo’ladi. Agar 2–,3–,6–,8–qatorlar bo’yicha olingan formulalar diz’yunktsiyalari olinsa, hosil bo’lgan formula izlanayotgan formula bo’ladi:

$$\alpha(A,B,C)=\neg A\&\neg B\&C\vee\neg A\&B\&\neg C\vee A\&\neg B\&C\vee A\&B\&C \quad (1)$$

2) **Rostlik jadvalida $\alpha=\alpha(A,B,C)$ formula 0 ga teng bo’lgan qator raqamlarini yozib chiqamiz:** 1-qator
4-qator
5-qator
7-qator

Har bir qator mantiqiy imkoniyatlaridagina 0 ga teng bo’lgan, boshqa imkoniyatlarda esa 1 ga teng bo’lgan formulalarni yozib chiqamiz. Buning uchun 0 ga teng bo’lgan qatordagi fikr o’zgaruvchilari qiymatlarini 0 (yolg’on) ga aylantirib, ularning diz’yunktsiyalarini olish kerak. U holda

1–qator uchun: $A\vee B\vee C$;
4–qator uchun: $A\vee\neg B\vee\neg C$;
5–qator uchun: $\neg A\vee B\vee C$;
7–qator uchun: $\neg A\vee\neg B\vee C$

bo’ladi.

Agar qatorlar bo’yicha olingan diz’yunktsiyalarning kon’yunktsiyasi olinsa, hosil bo’lgan formula izlanayotgan formula bo’ladi.

$$\alpha(A,B,C)=(A\vee B\vee C)\&(A\vee\neg B\vee\neg C)\&(\neg A\vee B\vee C)\&(\neg A\vee\neg B\vee C) \quad (2)$$

(1)–MDNSH va (2)–MKNSHlar teng kuchli, chunki ularning rostlik jadvallari bir xil. Shuning uchun ham ulardan qaysi birini tuzish kamroq vaqt talab qilsa, shu ko’rinishini tiklash maqsadga muvofiq.

Rostlik jadvali berilgan ixtiyoriy formulani DNSH ko’rinishini tiklaydigan algoritm quyidagicha bo’ladi:

```
Algorithm DNF(f)
(* This algorithm finds the DNF of a boolean function. *)
  Begin (* algorithm *)
    if the function f is given by a boolean expression then
      construct a logic table for the function f
    DNF ← 0 (* initialize DNF *)
    for each row in the table do
      if the corresponding functional value is 1 then
        begin (* if *)
          construct a minterm
          DNF ← DNF + minterm
        endif
  End (* algorithm *)
```

Teorema 1. Har bir ayniy yolg'on bo'lmagan formula yagona mukammal diz'yunktiv normal shaklga ega.

Teorema 2. Har bir tavtologiya bo'lmagan formula yagona mukammal kon'yunktiv normal shaklga ega.

Nazorat uchun savollar:

1. Birlar qatori bo'yicha funktsiya ko'rinishini tiklashni tushuntiring.
2. Nollar qatori bo'yicha funktsiya ko'rinishini tiklashni tushuntiring.

MISOL VA MASALALAR

Rostlik jadvali berilgan mantiq funktsiyalarining formulasini tiklang:

A	***B***	***C***	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0

8.4. Jegalkin polinomi

Mantiqiy formulaning kon'yunktsiya va simmetrik ayirma amallari bilan ifodalangan shakliga **Jegalkin polinomi** deyiladi.

Mantiqiy formulani Bul ifodasidan Jegalkin polinomi ko'rinishiga keltirish uchun 4 ta bosqich amalga oshiriladi:

1-bosqich: Berilgan formulani DNSH ga keltirish;

2-bosqich: Diz'yunktsiya amalidan qutilish kerak:

$$x \vee y = \overline{\neg x \& \neg y}$$

3-bosqich: Inkor amalini simmetrik ayirma amali bilan almashtirish:

$$\neg x = x \oplus 1;$$

4-bosqich: Hosil bo'lgan ifodani soddalashtirish, bunda

$$x \oplus x = 0$$

tenglikdan foydalaniladi.

Misol. $$x \to y = \neg x \vee y = \overline{\neg\neg x \,\&\, \neg y} = \overline{x \,\&\, \neg y} = (x \,\&\, (y \oplus 1)) \oplus 1 =$$

$$= (x \,\&\, y \oplus x) \oplus 1 = x \,\&\, y \oplus x \oplus 1.$$

O'zgaruvchilarida inkor qatnashmagan kon'yunktsiyaga **monoton kon'yunktsiya** deyiladi. Kon'yunktsiya amali bilan birlashtirilgan o'zgaruvchilar soniga **polinom rangi** deyiladi. Polinomda qatnashgan hadlarning eng katta rangi **Jegalkin ko'phadi darajasi** deyiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Jegakin ko'phadi deb nimaga aytiladi?
2. Mantiqiy formulani Jegalkin ko'phadiga o'tkazish uslini tushuntiring.

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi Bul formulalarini Jegalkin polinomiga o'tkazing:

1. $\alpha(x,y,z) = (\overline{x \oplus y} \wedge z) \to x \vee z$;
2. $\alpha(x,y,z) = (x \mid y) \to (\overline{\bar{z} \wedge y} \oplus x)$;
3. $\alpha(x,y,z) = (\overline{x \to \bar{y}} \wedge z) \oplus (x \vee z)$;
4. $\alpha(x,y,z) = \overline{x \vee y} \oplus (y \sim \bar{z})$;
5. $\alpha(x,y,z) = ((x \downarrow \bar{y}) \wedge \bar{z}) \to \overline{x \mid y} \vee z$;
6. $\alpha(x,y,z) = (\overline{x \wedge y} \vee \bar{y}) \wedge (x \to z)$;
7. $\alpha(x,y,z) = (x \vee \bar{y} \wedge z) \mid (x \vee y \wedge z) \sim \bar{x}$;
8. $\alpha(x,y,z) = (x \to z) \wedge (y \to x)$;
9. $\alpha(x,y,z) = ((x \downarrow \bar{y}) \mid z) \oplus (\bar{x} \wedge z)$;
10. $\alpha(x,y,z) = (x \to y) \oplus (x \to y \wedge z) \vee (x \downarrow y)$;
11. $\alpha(x,y,z) = (x \wedge z) \oplus (y \to \bar{z}) \to x \wedge y$;
12. $\alpha(x,y,z) = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \to (y \to z))$;

13. $\alpha(x,y,z) = x \to ((\bar{y} \to z) \to y \wedge z)$;

14. $\alpha(x,y,z) = (x \vee (y \to z)) \wedge (x \oplus y)$;

15. $\alpha(x,y,z) = \neg(x \downarrow \bar{y}) \vee (x \sim z) \mid (x \oplus y \wedge z)$;

16. $\alpha(x,y,z) = (\bar{x} \vee y) \wedge (y \mid \bar{z}) \to (x \sim x \wedge z)$;

17. $\alpha(x,y,z) = (x \mid \bar{y}) \wedge (y \downarrow z) \to (x \oplus z)$;

18. $\alpha(x,y,z) = x \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}) \oplus (\bar{x} \to z)$;

19. $\alpha(x,y,z) = ((x \mid \bar{z} \wedge y) \mid (\bar{y} \mid z)$;

20. $\alpha(x,y,z) = (x \mid \bar{y}) \downarrow (y \wedge z) \mid (x \vee z)$;

21. $\alpha(x,y,z) = (z \to \bar{y} \wedge x) \oplus \overline{y \vee z}$;

22. $\alpha(x,y,z) = x \to \overline{\bar{y} \wedge z} \oplus \overline{x \vee \bar{z}}$;

23. $\alpha(x,y,z) = (x \oplus y \wedge z) \to x \vee z$;

24. $\alpha(x,y,z) = (x \mid y) \to (\bar{z} \wedge y \oplus x)$;

25. $\alpha(x,y,z) = (x \to \bar{y} \wedge z) \oplus (x \vee z)$;

26. $\alpha(x,y,z) = (x \vee y) \oplus (y \sim \bar{z})$;

27. $\alpha(x,y,z) = ((x \downarrow \bar{y}) \wedge \bar{z}) \to x \mid y \vee z$;

28. $\alpha(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (y \mid \bar{z}) \to (x \sim \bar{x} \wedge z)$;

29. $\alpha(x,y,z) = (x \mid \bar{y}) \wedge (y \downarrow z) \to \overline{x \oplus z}$;

30. $\alpha(x,y,z) = x \wedge \overline{\bar{y} \wedge \bar{z}} \oplus (\bar{x} \to \bar{z})$;

Test savollari:

1. $\alpha(x,y) = \bar{x}\bar{y} \vee xy$ funktsiyani Jegalkin polinomiga o'tkazing:

A) $xy \oplus x \oplus y$ B) $xy \oplus x \oplus y \oplus 1$

C) $x \oplus y \oplus 1$ D) $xy \oplus x \oplus y$

2. $\alpha(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z}$ funktsiyani Jegalkin polinomiga o'tkazing:

A) $xy \oplus x \oplus y$ B) $xy \oplus xz \oplus yz \oplus z$

C) $x \oplus y \oplus 1$ D) $x \oplus y$

3. $\alpha(x,y) = \bar{x}y \vee xy \vee x\bar{y}$ funktsiyani Jegalkin polinomiga o'tkazing:

A) $xy \oplus x \oplus y$ B) $xy \oplus xz \oplus yz \oplus z$

C) $x \oplus y \oplus 1$ D) $x \oplus y$

4. R- "Men TATU da o'qiyman", K – "Men diskret matematika fanini sevaman" mulohazalari berilgan bo'lsa, bu mulohazalardan "Men TATU da o'qiyman va diskret matematika fanini sevaman" ma'nosini beruvchi mantiq algebrasi formulasini hosil qiling.

A) $P \vee Q$; B) $P \wedge Q$;

C) $P \to Q$;   D) $P \oplus Q$.

5. R- “Men TATU ga o’qishga kiraman”, K – “Men diskret matematika fanini o’rganaman” mulohazalari berilgan bo’lsa, bu mulohazalardan “Men TATU ga kirsam, u holda diskret matematika fanini o’rganaman” ma’nosini beruvchi mantiq algebrasi formulasini hosil qiling.

A) $P \vee Q$;   B) $P \wedge Q$;

C) $P \to Q$;   D) $P \oplus Q$.

8.5. Ikkilik mantiqiy elementlari

Bul ifodalari J. Bul (1815-1864) tomonidan rivojlantirilib, XX asrning 30-yillarida raqamli mantiqiy sxemalarda qo’llanilgan.

Raqamli elektron qurilmalarni tuzish bilan shug’ullanuvchi mutaxassislar Bul algebrasi masalalarini chuqur o’rganishlari kerak bo’ladi. Bul algebrasi funktsiyalarining asosiy tadbiqlaridan biri bu funktsional elementlar sxemasini qurishdir. Bunga misol qilib, EHM, mikrokalkulyator va boshqa raqamli elektron qurilmalarning ishlash printsipini ko’rsatishimiz mumkin.

Har qanday raqamli sxemalarning asosiy tarkibiy qismini mantiqiy elementlar tashkil etadi.

Agar C zanjirdan tok o’tayotgan bo’lsa, u holda $S=1$ deb; agar S zanjirdan tok o’tmasa, u holda $S=0$ deb yozishimiz mumkin.

Demak, mantiqiy elementlar ikkita raqam, 0 va 1 raqamlari bilan ish ko’radi, shuning uchun ham **ikkilik mantiqiy elementlar** deyiladi.

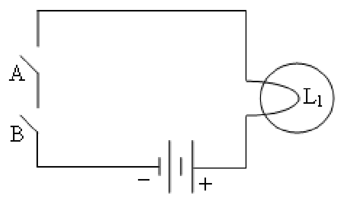
Raqamli elektrotexnika sohasida ishlaydigan mutaxassislar ikkilik mantiqiy elementlar bilan har kuni ro’para kelishadi. Mantiqiy elementlarni oddiy o’chirib-yoqqichlarda, releda, vakuum lampa, tranzistorlar, diodlar yoki integral sxemalarda yig’ish mumkin. Integral sxemalarning keng qo’llanilishi va arzonligini hisobga olsak, raqamli qurilmalarni faqat integral sxemalarning o’zidan yig’ish maqsadga muvofiq. Asosiy mantiqiy elementlar 7 xil: “va”, “yoki”, “emas”,“va-emas”, “yoki-emas”, “birortasi, lekin hammasi mas”, “birortasi, lekin hammasi emasga yo’l qo’ymaydigan”.

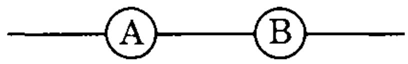
Mantiqiy elementlar u yoki bu vazifani bajarganligi sababli ularni **funktsional elementlar** deyiladi. Funktsional elementlarni bir-biriga ulash natijasida **funktsional sxemalar** hosil qilinadi.

1. “Va” mantiqiy elementi

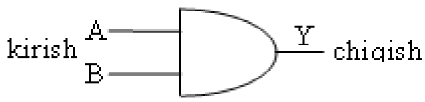
“Va” mantiqiy elementini ba’zan “hammasi yoki hech narsa” elementi deb ham yuritiladi. Mexanik o’chirib-yoqqich orqali “va” mantiqiy elementining ishlash printsipini ko’rib chiqamiz.

Agar zanjirda *A* va B kalitlar ketma-ket ulangan bo’lsa, u holda C zanjirda L_1 lampa yonishi uchun *A* va B kalitlarning ikkalasi ham yopilishi kerak, ya’ni $A=1$ va B=*1* bo’lishi kerak. Kon’yunktsiya xuddi shu xossalarga ega. Demak, “va” mantiqiy elementining ishlash printsipi kon’yunktsiya amali bilan bir xil ekan.





“Va” mantiqiy elementining sxematik tasvirida ikkita kirish, bitta chiqish bo’lib, u quyidagicha:



“Mantiqiy” terminidan odatda biror bir qarorni qabul qilish jarayonida foydalaniladi. Shuning uchun ham mantiqiy elementni shunday sxema deyish mumkinki, unda kirish signallariga asoslanib, chiqishda “ha” yoki “yo’q” deyish hal qilinadi. Yuqorida ko’rganimizdek, lampa yonishi uchun uning ikkala kirish joyida “ha” signali (kalitlar yopilishi kerak) berilishi kerak.

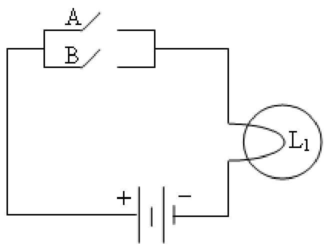
Rostlik jadvali “va” mantiqiy elementining ishlashi haqida to’liq ma’lumot beradi:

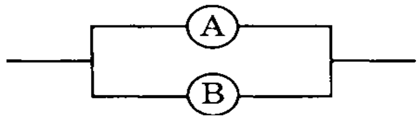
A	***B***	***Y=A&B***
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

“Va” mantiqiy elementi uchun kiritilgan belgilash *A* va B kirish signallari “va” mantiqiy funktsiyasi bilan bog’langan bo’lib, chiqishda ***Y*** signal paydo bo’ladi” deb o’qiladi. Ushbu tasdiqning qisqartirilgan ifodasi **Bul ifodasi (*A&B*)** deyiladi. Bul ifodasi – universal til bo’lib, injenerlar va texnik xodimlar tomonidan raqamli texnikada keng qo'llaniladi.

2. "Yoki" mantiqiy elementi

"Yoki" mantiqiy elementini ba'zan "hech bo'lmasa birortasi yoki hammasi" deb ham yuritiladi. Oddiy o'chirib-yoqqichlar yordamida "yoki" mantiqiy elementining ishlash printsipini quyidagicha tushuntirish mumkin: *C* zanjirda *A* va B kalitlar parallel ulangan bo'lsa, "yoki" mantiqiy elementi ishlaydi:





Chizmadan ko'rinadiki, kalitlarning hech bo'lmaganda bittasini yoki ikkalasini ham yopganda L_1 lampa yonadi.

"Yoki" mantiqiy elementining sxematik ko'rinishi quyidagicha:

Bul ifodasi $A \cup B$ ko'rinishda bo'ladi.

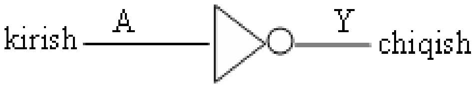
"Yoki" mantiqiy elementining rostlik jadvali uning ishlashi haqida to'liq ma'lumot beradi:

A	***B***	$\boldsymbol{A \vee B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. "Emas" mantiqiy elementi

"Va" hamda "yoki" mantiqiy elementlari ikkita kirish va bitta chiqishga ega edi. "Emas" sxemasida esa bitta kirish va bitta chiqish mavjud. "Emas" mantiqiy elementini **invertor** deb ham yuritiladi. Uning asosiy vazifasi chiqishda kirish signaliga teskari bo'lgan signalni ta'minlashdan iborat.

Invertor quyidagicha belgilanadi:

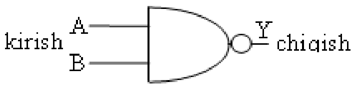


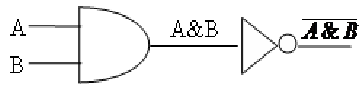
Bul ifodasi $\overline{A}$ ko’rinishda bo’ladi. “Emas” mantiqiy elementi uchun rostlik jadvali:

A	**¬*A***
1	0
0	1

4. “Va-emas” mantiqiy elementi

“Va-emas” mantiqiy elementini Sheffer shtrixi deb ham yuritiladi, u inventorlangan “va” ni amalga oshiradi. Ushbu mantiqiy amal quyidagicha belgilanadi:





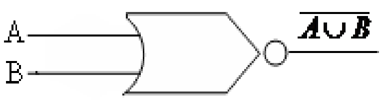
Bu belgini quyidagicha yoyib ham yozish mumkin.

“Va-emas” mantiqiy elementining Bul ifodasi $\overline{A\&B}$ ko’rinishda bo’ladi. “Va-emas” mantiqiy elementining rostlik jadvali yordamida ishlash printsipini ko’rish mumkin:

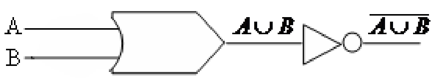
A	*B*	*A&B*	$U=\overline{A\&B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

5. “Yoki-emas” mantiqiy elementi

“Yoki-emas” mantiqiy elementini Pirs strelkasi deb ham yuritiladi, u inventorlangan “yoki”ni amalga oshiradi, sxematik ko’rinishi quyidagicha:



Bu belgini quyidagicha yoyib ham yozish mumkin:



“Yoki-emas” mantiqiy elementining rostlik jadvali yordamida uning ishlash printsipini ko’rish mumkin:

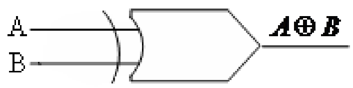
A	*B*	*A*$\lor$*B*	*U*=$\overline{A \lor B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

6.

7. “Birortasi, lekin hammasi emas”

Ushbu mantiqiy elementning Bul ifodasi: $A \oplus B = \neg(A \sim B)$

Uning sxematik ko’rinishi quyidagicha:



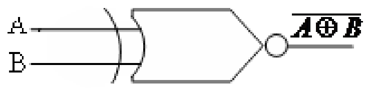
“Birortasi, lekin hammasi emas” mantiqiy elementining ishlash printsipi quyidagicha:

A	***B***	***A⊕B***
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

8. “Birortasi, lekin hammasi emasga yo’l qo’ymaydigan”

Mantiqiy elementning Bul ifodasi: $\neg(A \oplus B) = A \sim B$

Uning sxematik ko’rinishi quyidagicha:

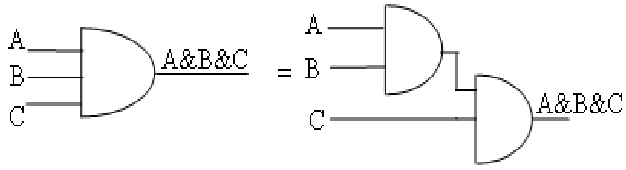


“Birortasi, lekin hammasi emasga yo’l qo’ymaydigan” mantiqiy elementining ishlash printsipi quyidagicha:

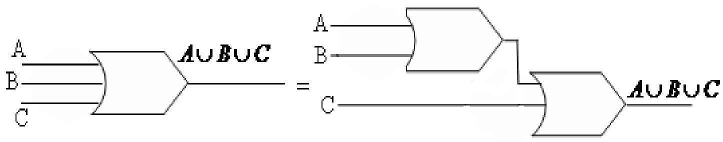
A	*B*	*A*⊕B	¬(*A*⊕B) =*A*~B
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Ikkitadan ortiq kirishga ega bo'lgan mantiqiy elementlar uchun ham mos ravishda quyidagicha belgilashlar ishlatiladi.

3 ta kirishga ega "va" mantiqiy elementi:



3 ta kirishga ega bo'lgan "yoki" mantiqiy elementining sxematik ko'rinishi quyidagicha:

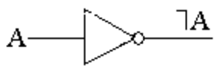


8.6. Ikkilik mantiqiy elementlarni "va-emas" da hosil qilish

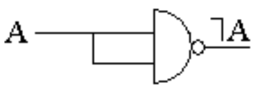
Juda ko'p integral sxemalarda asosan "va-emas" mantiqiy elementi bo'lgani uchun boshqa mantiqiy elementlarni "va-emas" yordamida hosil qilishni o'rganish juda foyda beradi.

1) Invertorni hosil qilish:

Buning uchun $\neg(A\&A)=\neg A$ tenglikdan foydalanamiz, ya'ni

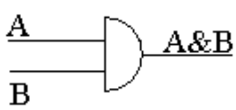


"emas" ikkilik mantiqiy elementini

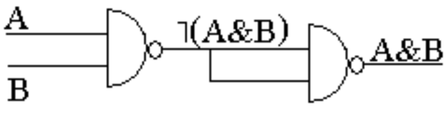


"va-emas" ikkilik mantiqiy elementiga o'zgartiramiz.

2) "Va" mantiqiy elementini hosil qilish:

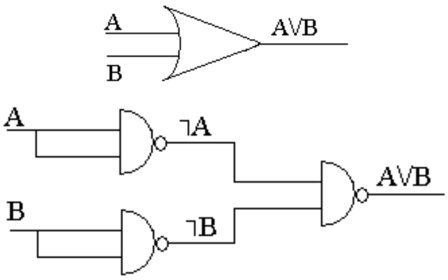


Bunda $\neg\neg(A\&B)=A\&B$ tenglik o'rinli bo'ladi.



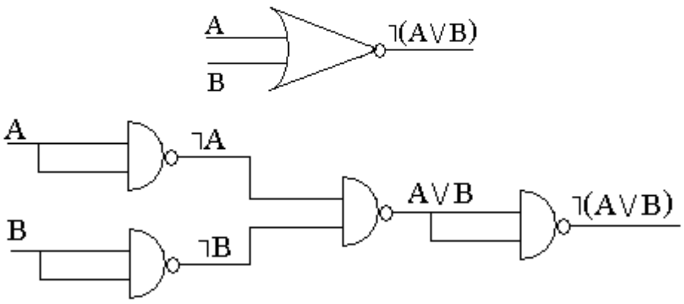
3) “Yoki” mantiqiy elementini hosil qilish:

Agar *A* va B ni invertorlasak, faqat “va-emas” mantiqiy elementidan foydalanib, “yoki” mantiqiy elementini hosil qilish mumkin, ya’ni $\neg(\neg A \& \neg B) = A \vee B$ tenglikdan foydalanamiz:



4) “Yoki-emas” mantiqiy elementini hosil qilish:

Buning uchun $\neg(\neg A \& \neg B) = A \vee B$ ni yana bir marta invertorlaymiz:



8.7. Yarim bitlik yig’uvchi sxemasini qurish[12]

Funktsional sxemalarning tadbiqi sifatida ikki bitlik yig’uvchi sxemasini misol qilish mumkin. Ikki bitlik yig’uvchi – bu ikkilik sanoq sistemasidagi 2 xonali sonlarni yig’indisini hisoblab, yechimda 3 xonali ikkilik sanoq sistemasidagi sonni beruvchi qurilmadir. Masalan, 10+11=101.

Ikki bitlik yig’uvchi funktsional sxemani yaratish uchun avvalo 2 ta ikkilik sonni qo’shish uchun yarim bitlik yig’uvchini qurib olamiz. Bunda yechimda 2 xonali ikkilik sanoq sistemasidagi son hosil qilinadi. Masalan, 1+1=10.

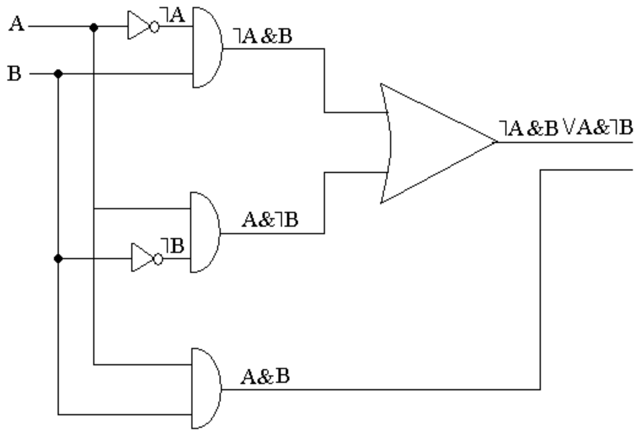
Aytaylik, *A* va B lar qo’shish kerak bo’lgan ikkilik sonlar, *u* va *v* lar esa yig’uvchining chiqishida hosil bo’ladigan yig’indilar bo’lsin. Rostlik jadvali kirish va chiqishdagi sonlar orasidagi bog’lanishni ko’rsatadi:

[12] Xaggarti R. Diskretnaya matematika dlya programmistov. ZAO RITS Texnosfera», 2003. 244–s.

A	***B***	*u*	*v*
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Bundan $u = A \& B$ (o'tkazish razryadi) va
$v = \neg A \& B \vee A \& \neg B$ (2 modul bo'yicha yig'indi).

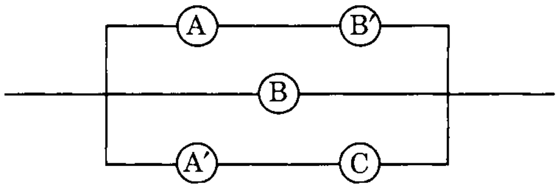
Quyida yarim bitlik yig'uvchining sxemasi:



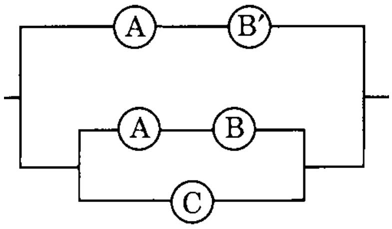
Sxemada $A \& B$ va $\neg A \& B \vee A \& \neg B$ mantiqiy elementlarning kirish ma'lumotlari o'tkazish razryadi va 2 modul bo'yicha yig'indi hisoblanadi.

Ikki bitlik yig'uvchining funktsional sxemasi ham xuddi yarim bitlik yig'uvchi sxemasiga o'xshash, biroq unda kirishda 2 ta ikki xonali ikkilik son, chiqishda esa kiruvchi sonlar yig'indisiga teng bo'lgan uch xonali son hosil bo'ladi.

Misol. $[(A \wedge B') \vee B] \vee (A' \wedge C)$ ifodani sxematik ko'rinishda tasvirlash:



Misol. Quyidagi sxemani mantiqiy amallar yordamida ifodalang:



Yechilishi:

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B') \vee [(A \wedge B) \vee C[&\equiv [(A \wedge B') \vee (A \wedge B)[\vee C \\
&\equiv [A \wedge (B' \vee B)[\vee C \\
&\equiv (A \wedge T) \vee C \\
&\equiv A \vee C
\end{aligned}
$$

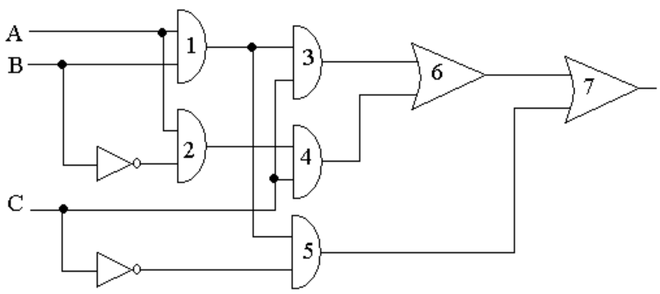
Nazorat uchun avollar:

1. Ikkilik mantiqiy elementlari deb nimaga aytiladi?
2. Funktsional sxema deganda nimani tushunasiz?
3. “Va” mantiqiy elementini va ishlash printsipini tushuntiring.
4. “Emas” hamda “Va-emas” elementlarining farqini aytib bering.
5. Invertor nima?
6. Yarim bitlik yig’uvchi sxemasi qanday quriladi?

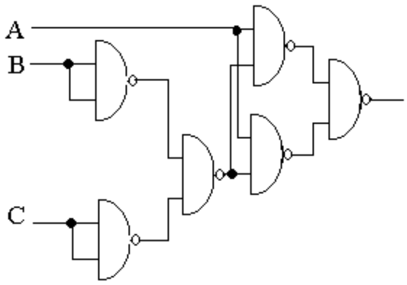
MISOL VA MASALALAR

Quyidagi 1-2 funktsional sxemalarning chiqishida qanday mantiqiy funktsiya hosil bo‘ladi?

1.



2.



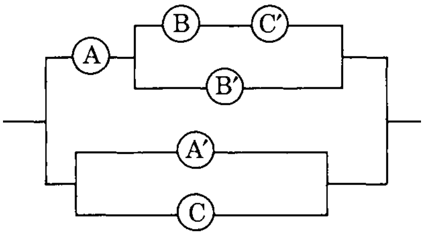
Quyidagi 3-6 misollarda mantiqiy ifodalarni sxematik ko'rinishda tasvirlang:

3. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$; 4. $(A \vee B') \wedge (A' \vee B)$;

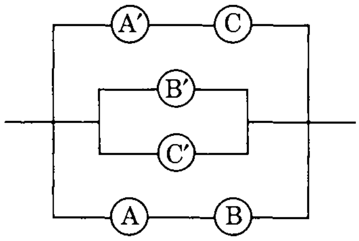
5. $(A \vee B') \vee (A \vee B)$; 6. $(A \wedge B) \vee (A' \wedge B) \vee (B' \wedge C)$;

Quyidagi 7-13 sxemalarni mantiqiy amallar yordamida ifodalang:

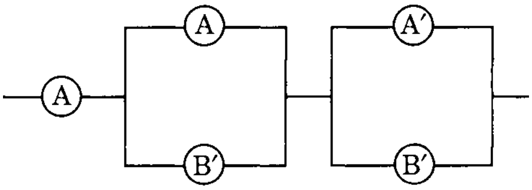
7.



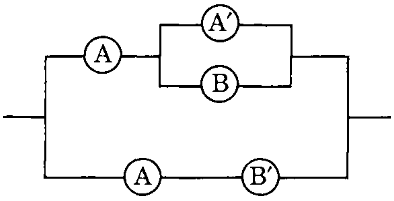
8.



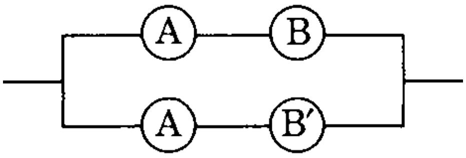
9.



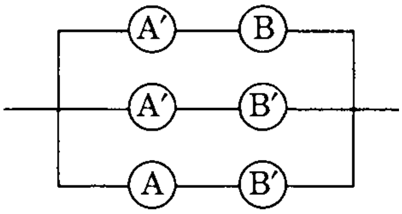
10.

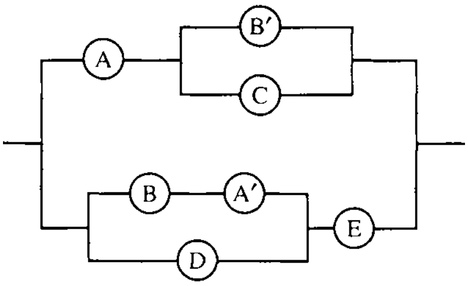


11.



12.

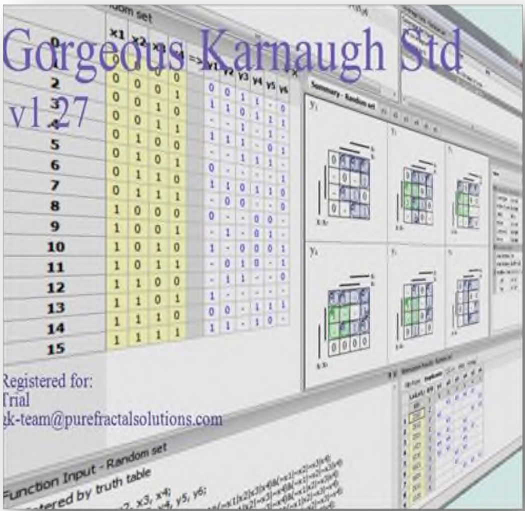


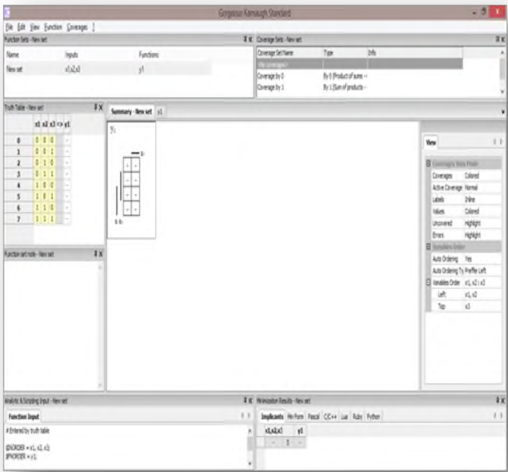


13.

8.8. Mantiqiy sxemalarni minimallashtirish dasturlari

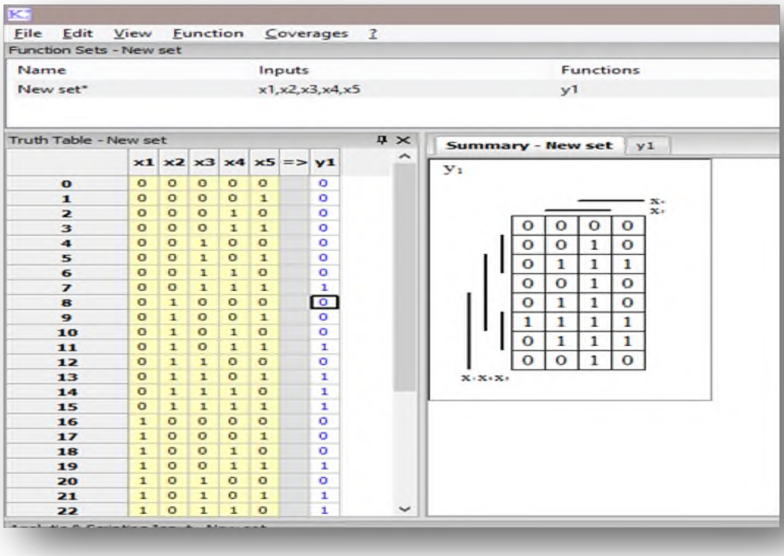
Ma’lumki, har qanday mantiqiy qurilma mantiqiy 1 va 0 lar asosida ish ko’radi. Biror-bir yangi qurilmani yaratishdan oldin uning mantiqiy ko’rinishi tuziladi. Bunda natijani minimallashtirish, ya‘ni soddalashtirish uchun Karno kartasidan foydalaniladi. Agar o’zgaruvchilar soni yetarlicha ko’p bo’lsa, Karno kartasini tuzish va natijani ixchamlashtirish ko’p vaqt talab qiladi. “Pure Fractal Solutions” kompaniyasi tomonidan **2008 yilda yaratilgan Gorgeous Karnaugh Standard dasturi** yordamida Karno kartalarini tez va oson hisoblash imkoniyati paydo bo’ldi. Dasturning ko’rinishi quyidagicha:





Aytaylik, ovoz berish natijalarini qayd qiluvchi maxsus qurilma yasash kerak bo’lsin. Ovoz berishda 5 kishi qatnashsin va ularning yarmidan ko’pi ma‘qullagan qaror qabul qilinsin. Buning uchun kirishlar soni 5 ta, ya‘ni *x1*, *x2*, *x3*, *x4*, *x5*, natijani esa *y* qiymatga teng deb olib, qurilmaning mantiqiy ko’rinishi tuziladi, natijaning minimallashgan ko’rinishi dasturda quyidagicha bo’ladi:

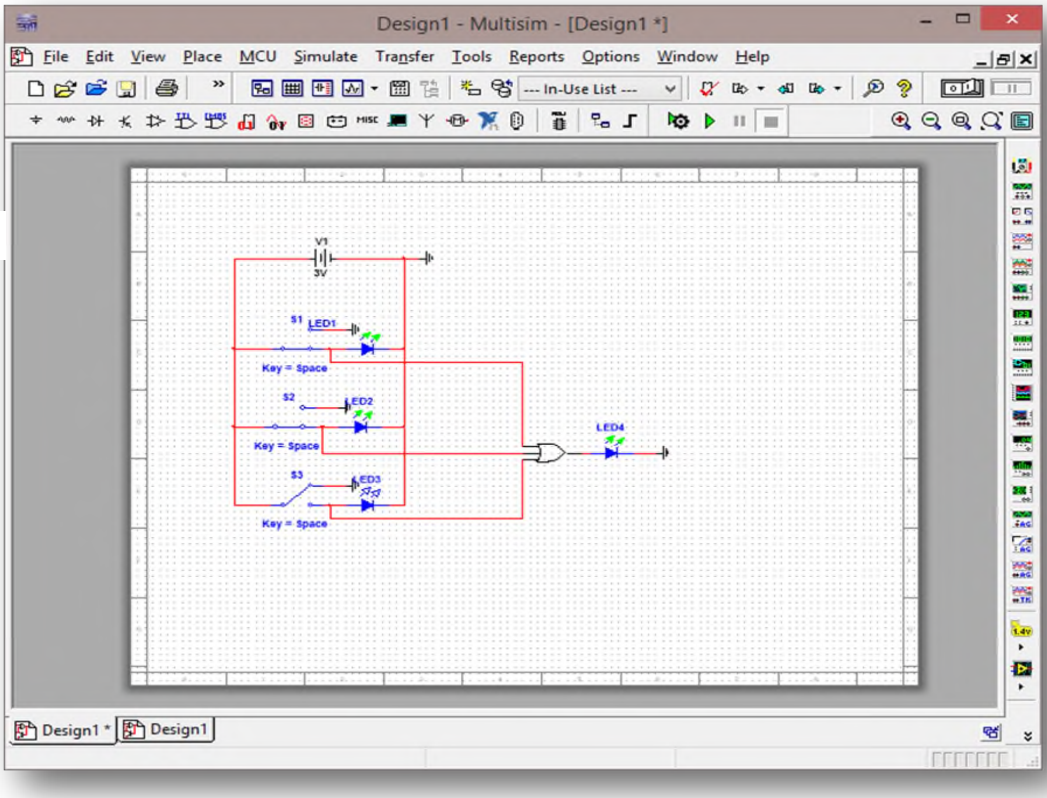
y1=~x1&~x2&x3&x4&x5|~x1&x2&~x3&x4&x5|~x1&x2&x3&~x4&x5|~x1&x2&x3&x4&~x5|~x1&x2&x3&x4&x5|x1&~x2&~x3&x4&x5|x1&~x2&x3&~x4&x5|x1&~x2&x3&x4&~x5|x1&~x2&x3&x4&x5|x1&x2&~x3&~x4&x5|x1&x2&~x3&x4&x5|x1&x2&x3&~x4&~x5|x1&x2&x3&~x4&x5|x1&x2&x3&x4&~x5|x1&x2&x3&x4&x5;



Karno kartasiga joylashtirib, natijaning ixcham ko'rinishi olindi. Keyingi bosqich olingan natijani sxematik tasvirlashdan iborat. Agar mantiqiy sxemalar platalarda tuzilsa, vaqt va mablag' masalasi ko'ndalang turadi. Bu muammoni hal qilishda "Multisim" dasturidan foydalanish samara beradi. **"Multisim" dasturining birinchi versiyasi "National Instruments" kompaniyasi tomonidan 2001 yilda yaratilgan** bo'lib, 2013 yilda takomillashtirilgan versiyasi taqdim qilindi. Ushbu dastur yordamida rele-kontakt sxemalarini, funktsional vazifani bajaruvchi tizimlarning mantiqiy sxemalarini virtual tarzda tuzish va natijani ko'rish mumkin.

Yuqoridagi Karno kartasidan olingan natijalar bo'yicha sxema tuzish va sxemaning to'g'ri ishlayotganiga ishonch hosil qilish mumkin.

Dasturning umumiy ko'rinishi quyidagicha:



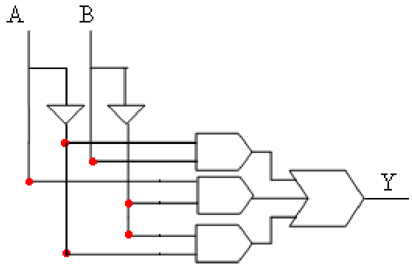
8.9. Ikkilik mantiqiy elementlarining qo’llanilishi

Mantiqiy elementlarning shartli belgilanishi, rostlik jadvallari va Bul ifodalari elektrotexnika sohasidagi real masalalarni yechishda juda qo’l keladi. Har qanday fikrlar algebrasi formulasini “inkor - ¬”, “va - &”, “yoki – ∨” amallari orqali yozish mumkin, buning uchun “implikatsiya - →”, “ekvivalentlik - ~” dan qutilish qoidalarini qo’llash yetarli.

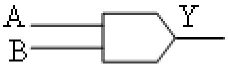
¬, & va ∨ amallaridan iborat formulaga mos parallel va ketma-ket ulash qoidalariga asoslangan sxemalar tuzish mumkin va aksincha, ixtiyoriy raqamli sxemaga mos ¬, & va ∨ amallaridan foydalanib, Bul formulasini tuzish mumkin.

Agar biror bir murakkab sxema berilgan bo’lsa, unga mos formulani yoyib, mantiq qonunlariga asosan soddalashtirib, soddalashgan formulaga mos sxemani qayta tuzilsa, hosil bo’lgan soddalashgan sxema boshlang’ich sxemaning vazifasini bajaradi. Bu amaliyotga **minimallashtirish** deyiladi.

Misol. Ushbu $(\overline{A}\&B)\vee(A\&\overline{B})\vee(\overline{A}\&\overline{B})$ formulaga mos sxema:



Yuqoridagi sxemani mantiq qonunlari yordamida soddalashtirib, tuzilgan sxema:



Ikkala sxema hm bir xil vazifani bajaradi, chunki ularning rostlik jadvallari bir xil.

8.10. Mantiqiy sxemalarda analiz va sintez masalalari

Sintez. Mantiqiy sxemalarning sintezi masalasi quyidagi 3 ta bosqichdan iborat:

1) berilgan fizikaviy ma‘lumotlar bo'yicha biror matematik ifoda (tenglama, formula) tuziladi va minimallashtiriladi;

2) minimallashtirilgan matematik ifodaning qandaydir funktsiyani bajaruvchi sxemasi chiziladi;

3) hosil qilingan sxema biror vazifani bajaruvchi haqiqiy sxemaga aylantiriladi.

Analiz. Analiz masalasi – bu ikkinchi bosqichning teskarisi hisoblanadi, ya‘ni berilgan mantiqiy sxema bo'yicha matematik ifodani tuzish va tadqiq qilish.

Bizni bu uchta bosqichdan ikkinchisi ko'proq qiziqtiradi. Shuning uchun har doim sintez masalasini yechishda biror mantiqiy $\alpha=\alpha(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ funktsiya berilgan bo'ladi, maqsad chiqishda berilgan mantiqiy funktsiya α ning vazifasini bajaruvchi mantiqiy zanjir sxemasini tuzishdan iborat.

Bundan keyin mantiqiy zanjir sxemasi deganda „va“, „yoki“, „emas“ Bul algebrasi bazislari orqali hosil qilingan sxemani tushunamiz.

Misol. (Sintez) Talabalarga 3 kishi yashirin ovoz berganda ko'pchilik ovoz bilan qaror qabul qiladigan sxemani tuzish vazifasi yuklatilgan bo'lsin. Chiqarilgan qarorga ovoz beruvchilar rozi bo'lishsa, o'zlariga tegishli tugmachani bosishadi, aks holda tugmachalarga tegishmaydi. Agar ko'pchilik, ya‘ni kamida ikki kishi „ha“ deb ovoz berib, o’zlariga tegishli tugmachalarni bosganda signal chirog’i yonishi kerak.

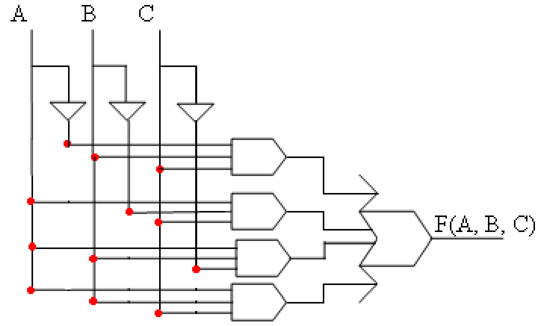
Amaliy masalani mantiqiy ko’rinishga o’tkazish maqsadida ovoz beruvchilarni *A*, B, *C* mulohaza o’zgaruvchilari deb olamiz, u holda *A*, B, *C* mulohaza o’zgaruvchilari 2 xil qiymat qabul qilishi mumkin: ha deb ovoz berishganda – 1, yo’q deb ovoz berishganda esa – 0 qiymat, betaraf bo’lgan holni inobatga olmaymiz. U holda berilgan masalaning rostlik jadvali quyidagicha bo’ladi:

A	**B**	**C**	**α=α(A,B,C)**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ushbu rostlik jadvalining birlar qatori bo’yicha MDNSH dagi formulasi quyidagicha bo’ladi:

$$\alpha(A, B, C)= \neg A\&B\&C \lor A\&\neg B\&C \lor A\&B\&\neg C \lor A\&B\&C$$

Bu formulaga mos sxema esa quyidagicha bo’ladi:

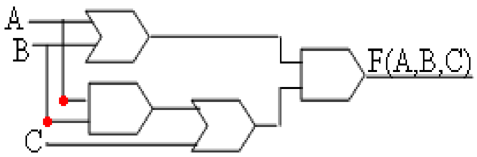


3 ta invertor, 4 ta uchtadan kirishga ega bo’lgan “va”, 1 ta to’rtta kirishga ega bo’lgan “yoki”, jami 8 ta elementdan iborat sxema hosil bo’ladi.

Yuqoridagi formulani mantiq qonunlariga ko’ra soddalashtiramiz:

$$\alpha(A,B,C)= \neg A\&B\&C \lor A\&\neg B\&C \lor A\&B\&\neg C \lor A\&B\&C=$$
$$=A\&B\&(\neg C \lor C) \lor C\&(\neg A\&B \lor A\&\neg B)=$$
$$=(A\&B \lor C)\&(A\&B \lor \neg A\&B \lor A\&\neg B)=(A\&B \lor C)\&(B \lor A\&\neg B)=$$
$$=(A \lor B)\&(A\&B \lor C)$$

Minimallashtirilgan formulaga mos sxema quyidagi ko’rinishda bo’ladi:



Ikkala sxema ham bir xil vazifani bajaradi, chunki ularga mos formulalarning rostlik jadvali bir xil, lekin soddalashgan sxema ikki baravar kam elementdan iborat bo’lsa-da, qiymat jihatdan undan ham ko’proq sarf harajatni talab qiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Gorgeous Karnaugh Standard dasturining ishlash printsipini tushuntiring.
2. Multisim dasturi qanday vazifani bajaradi?
3. Minimallashtirish masalasi deganda nimani tushunasiz?
4. Mantiqiy sxemalarda analiz masalasi nimadan iborat?
5. Mantiqiy semalarda sintez qanday amalga oshiriladi?

MISOL VA MASALALAR

Quyidagi mantiqiy formulalar uchun funktsional sxemalar tuzing:

1. $\alpha(x,y,z)=(\overline{x\oplus y}\wedge z)\to x\vee z$;
2. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,y)\to(\overline{\overline{z}\wedge y\oplus x})$;
3. $\alpha(x,y,z)=(\overline{x\to\overline{y}}\wedge z)\oplus(x\vee z)$;
4. $\alpha(x,y,z)=\overline{x\vee y}\oplus(y\sim\overline{z})$;
5. $\alpha(x,y,z)=((x\downarrow\overline{y})\wedge\overline{z})\to\overline{x\,|\,y}\vee z$;
6. $\alpha(x,y,z)=(\overline{x\wedge y}\vee\overline{y})\wedge(x\to z)$;
7. $\alpha(x,y,z)=(x\vee\overline{y}\wedge z)\,|\,(x\vee y\wedge z)\sim\overline{x}$;
8. $\alpha(x,y,z)=(x\to z)\wedge(y\to x)$;
9. $\alpha(x,y,z)=((x\downarrow\overline{y})\,|\,z)\oplus(\overline{x}\wedge z)$;
10. $\alpha(x,y,z)=(x\to y)\oplus(x\to y\wedge z)\vee(x\downarrow y)$;
11. $\alpha(x,y,z)=(x\wedge z)\oplus(y\to\overline{z})\to x\wedge y$;
12. $\alpha(x,y,z)=(x\vee\overline{y})\downarrow(\overline{x}\to(y\to z))$;
13. $\alpha(x,y,z)=x\to((\overline{y}\to z)\to y\wedge z)$;
14. $\alpha(x,y,z)=(x\vee(y\to z))\wedge(x\oplus y)$;

15. $\alpha(x,y,z)=\neg(x\downarrow\overline{y})\vee(x\sim z)\,|\,(x\oplus y\wedge z)$;

16. $\alpha(x,y,z)=(\overline{x}\vee y)\wedge(y\,|\,\overline{z})\to(x\sim x\wedge z)$;

17. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,\overline{y})\wedge(y\downarrow z)\to(x\oplus z)$;

18. $\alpha(x,y,z)=x\wedge(\overline{y}\wedge\overline{z})\oplus(\overline{x}\to z)$;

19. $\alpha(x,y,z)=((x\,|\,\overline{z}\wedge y)\,|\,(\overline{y}\,|\,z)$;

20. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,\overline{y})\downarrow(y\wedge z)\,|\,(x\vee z)$;

21. $\alpha(x,y,z)=(z\to\overline{y}\wedge x)\oplus\overline{y\vee z}$;

22. $\alpha(x,y,z)=x\to\overline{\overline{y}\wedge z}\oplus\overline{x\vee\overline{z}}$;

23. $\alpha(x,y,z)=(x\oplus y\wedge z)\to x\vee z$;

24. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,y)\to(\overline{z}\wedge y\oplus x)$;

25. $\alpha(x,y,z)=(x\to\overline{y}\wedge z)\oplus(x\vee z)$;

26. $\alpha(x,y,z)=(x\vee y)\oplus(y\sim\overline{z})$;

27. $\alpha(x,y,z)=((x\downarrow\overline{y})\wedge\overline{z})\to x\,|\,y\vee z$;

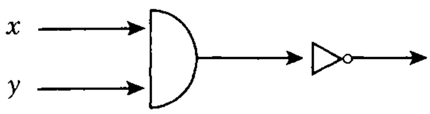
28. $\alpha(x,y,z)=(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(y\,|\,\overline{z})\to(x\sim\overline{x}\wedge z)$;

29. $\alpha(x,y,z)=(x\,|\,\overline{y})\wedge(y\downarrow z)\to\overline{x\oplus z}$;

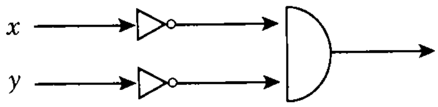
30. $\alpha(x,y,z)=x\wedge\overline{\overline{y}\wedge\overline{z}}\oplus(\overline{x}\to\overline{z})$;

Quyidagi sxemalarning chiqishida qanday funktsiya bo’lishini toping:

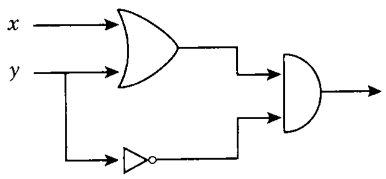
1.



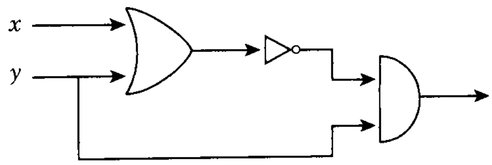
2.



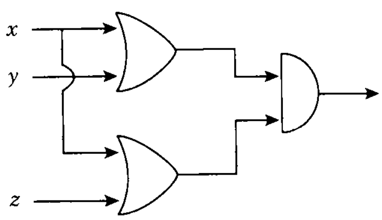
3.



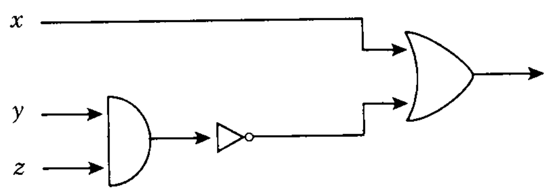
4.



5.

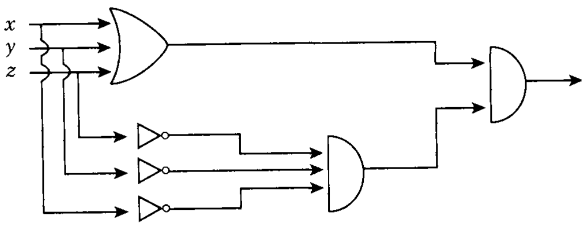


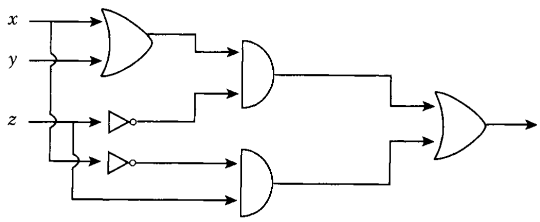
6.



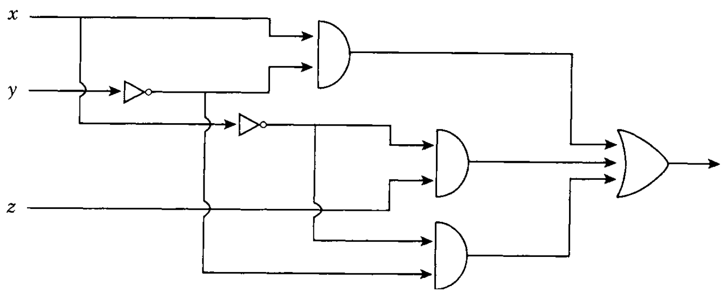
7.

8.

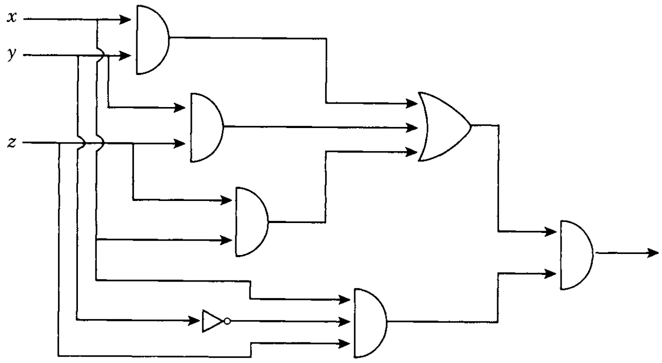




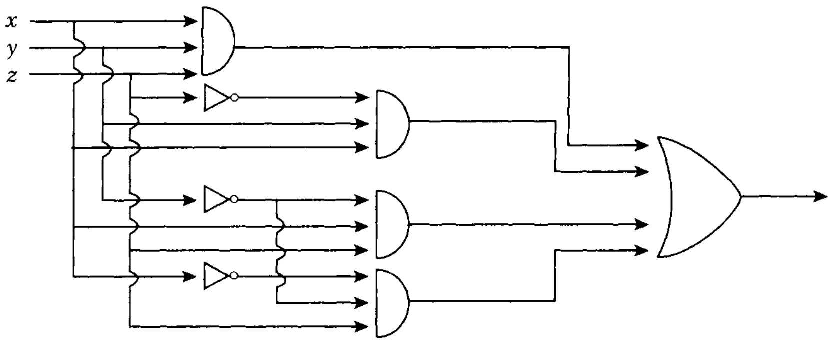
9.



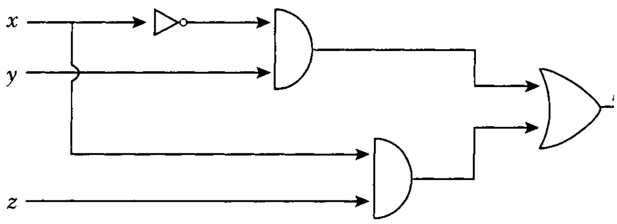
10.



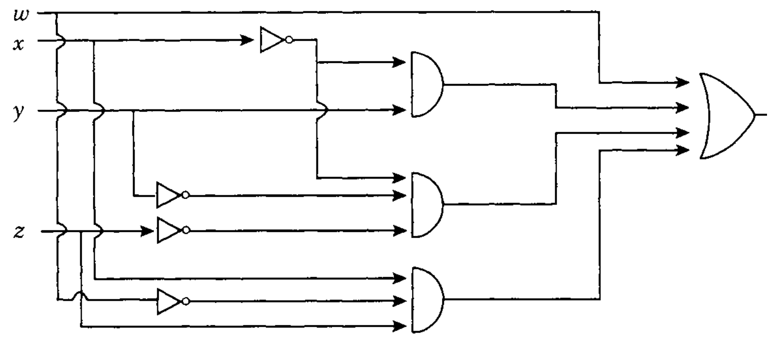
11.



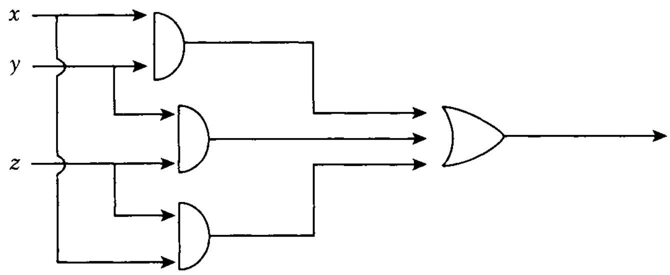
12.



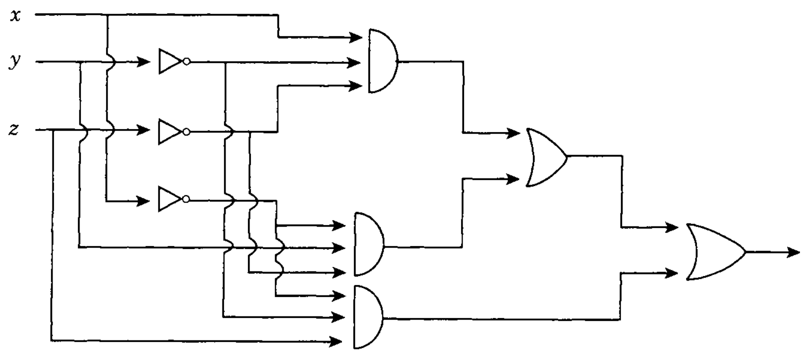
13.



14.



15.



8.11. Minimallashtirishning jadval usullari

Mukammal diz‘yunktiv normal shakllarni minimallashtirishda Bul ifodalarida bir-biriga qo’shni hadlarini topish va bu hadlarni birlashtirish katta mehnat talab qiladi. Bu esa soddalashtirishda analitik usulning kamchiligi hisoblanadi. Amaliyotda mantiq funktsiyalarini minimallashtirish uchun mantiqiy o’zgaruvchilar soni kamroq bo’lsa, jadval usuli birmuncha qulay hisoblanadi. Jadval usulining afzalligi:

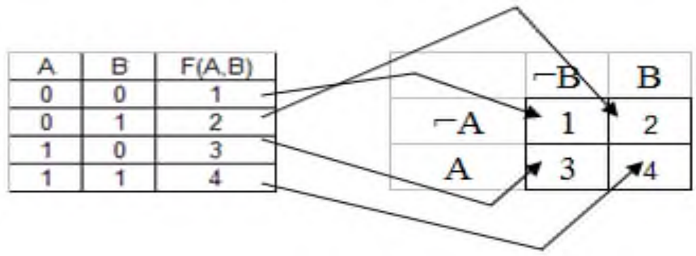
1) birlashtiriladigan hadlarni izlash oson;
2) topilgan hadlarni birlashtirish oson;
3) funktsiyaning barcha minimal shakllarini topish mumkin.

Jadval usullari quyidagilar: Karno kartalari, Veych, Venn diagrammalari, yechimlar daraxti hisoblanadi. Ushbu mavzuda biz Karno kartasi usuli bilan tanishamiz.

1953 yil M. Karno Bul ifodalarini soddalashtirish va grafik tasvirlash tizimini ishlab chiqqanligi haqida maqola e‘lon qildi. Hozirda bu usul Karno kartalari usuli deb yuritiladi. Karno kartalarining quyidagi turlarini ko’rib chiqamiz:

1. Ikki o’zgaruvchili Karno kartasi

Aytaylik, Bul ifodasi ikkita mulohaza o’zgaruvchisidan tashkil topgan bo’lsin va quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo’lsin. U holda ikki o’zgaruvchili Karno kartasi quyidagicha bo’ladi:



Agar $F(A,B)$ formula MDNSH da berilgan bo’lsa, u holda

№1 o’ringa $\neg A\&\neg$B

№2 o’ringa $\neg A\&$B

№3 o’ringa $A\&\neg$B

№4 o’ringa $A\&$B

hadlar mos kelib, shunday hadlar $F(A,B)$ formulada mavjud bo’lsa, Karno kartasida bu hadlarga mos o’rinlarga 1, qolgan o’rinlarga 0 raqami yoziladi.

Ikki o’zgaruvchili Karno kartasi to’ldirilgandan keyin 2 ning darajalaricha birlarni o’z ichiga oladigan (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …) konturlar chiziladi. Bu konturlar gorizontaliga yoki vertikaliga bir-biriga qo’shni bo’lgan birlarni o’z ichiga olishi kerak. Konturga olish jarayoni barcha birlar kontur ichida qolguncha davom ettiriladi va konturlar iloji boricha maksimal ikkining darajalaricha birlarni o’z ichiga olishi kerak. Konturga olish jarayoni tugagandan keyin har bir kontur ichida qatnashgan bir-biriga teskari bo’lgan fikr o’zgaruvchilari tushirib qoldiriladi va har bir konturda qolgan o’zgaruvchilarning diz’yunktsiyasi olinadi. Hosil bo’lgan ifoda Karno kartasi bo’yicha minimallashgan ifoda bo’lib, undan ortiq minimallashtirish mumkin emas.

Misol. Quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan ifodani soddalashtiring:

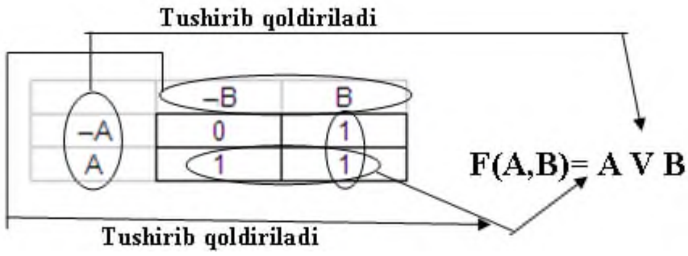
A	B	$F(A,B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	$\neg B$	B
$\neg A$	1	0
A	1	1

Ifodaning to'liq ko'rinishi: $(A,B)=\neg A\&\neg B\vee A\&\neg B\vee A\&B$

minimal ko'rinishi esa: $F(A,B)=A\vee\neg B$

Misol. $F(A,B)=\neg A\&B\vee A\&\neg B\vee A\&B$ formulaga mos Karno kartasi quyidagi ko'rinishni oladi, ya'ni karta MDNSH bo'yicha tuziladi:



	$\neg$B	B
$\neg A$	0	1
A	1	1

Yuqorida keltirilgan sxemaga muvofiq gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo'shni bo'lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to'ldiruvchi o'zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o'zgaruvchilarning diz'yunktsiyasi olinadi. Natijada formula quyidagi ko'rinishni oladi: $F(A,B)=A\vee$B.

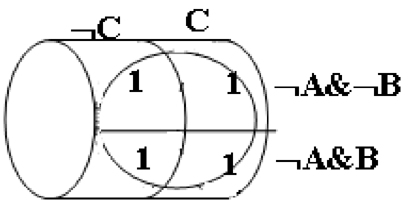
2. Uch o'zgaruvchili Karno kartalari

Aytaylik, Bul ifodasi uchta mulohaza o'zgaruvchisidan tashkil topgan bo'lsin va quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo'lsin. U holda uch o'zgaruvchili Karno kartasi quyidagicha bo'ladi:

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	№1
0	0	1	№2
0	1	0	№3
0	1	1	№4
1	0	0	№5
1	0	1	№6
1	1	0	№7
1	1	1	№8

	$\neg C$	C
$\neg A\&\neg B$	№1	№2
$\neg A\&B$	№3	№4
$A\&B$	№7	№8
$A\&\neg B$	№5	№6

Uch o'zgaruvchili Karno kartalarida ham ikki o'zgaruvchili Karno kartalaridagidek gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo'shni bo'lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir kontur iloji boricha ko'proq ikkini darajalaricha birlarni (2^1, 2^2, 2^3,…) o'z ichiga olishi va konturga olish jarayoni barcha birlar kontur ichida qolguncha davom ettirilishi lozim. Har bir kontur soddalashtirilgan Bul ifodasining yangi a‘zosini bildiradi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to'ldiruvchi o'zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o'zgaruvchilarning diz‘yunktsiyasi olinadi. Bundan tashqari uch o'zgaruvchili Karno kartalarida 1- va 4-qatorlar bir-biriga qo'shni hisoblanadi, chunki karta gorizontaliga o'ralganda 1- va 4- qatorlar bir-biriga qo'shni bo'lib qoladi.



$F(A,B,C)$ formula quyidagicha rostlik jadvali bilan berilgan bo'lsin:

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	¬C	C
¬A&¬B	1	0
¬A&B	1	1
A&B	1	1
A&¬B	1	0

¬B va B lar bir-birini to'ldiradi

	¬C	C
¬A&¬B	1	0
¬A&B	1	1
A&B	1	1
A&¬B	1	0

F(A,B,C)=B∨¬C

¬C va C, ¬A va A lar bir-birini to'ldiradi

3. To’rt o’zgaruvchili Karno kartalari

4 o’zgaruvchili Karno kartalarida 2 va 3 o’zgaruvchili Karno kartalaridagi usullar qo’llaniladi. Faqatgina 4 o’zgaruvchili Karno kartalarida 1– va 4–ustunlar, 1– va 4– qatorlar bir-biriga qo’shni hisoblanadi, chunki ular mos ravishda vertikal yoki gorizontal silindrlarga o’ralsa, ushbu ustunlar yoki qatorlar bir-biriga qo’shni bo’lib qoladi. 4 o’zgaruvchili Karno kartalarining to’rtta burchagi ham bir-biriga qo’shni hisoblanadi, chunki karta “sferaga” o’ralsa, to’rtta burchak ham bir-biriga qo’shniga aylanadi.

Masalan: F(0,0,0,1)=F(0,0,1,1)=F(1,0,0,1)=F(1,0,1,1)=0

	¬C&¬D	¬C&D	C&D	C&¬D
¬A&¬B	1	0	0	1
¬A&B	1	1	1	1
A&B	1	1	1	1
A&¬B	1	0	0	1

Karno kartasi bo’yicha formulaning soddalashgan ko’rinishi quyidagicha bo’ladi: F(A,B,C)= B∨¬D.

6. Veych diagrammasi

Veych diagrammasi berilgan n o’zgaruvchili funktsiya uchun 2^n ta katakdan iborat jadvaldir. Agar n - juft son bo’lsa, jadval kvadrat shaklida, agar n- toq son bo’lsa, to’g’ri to’rtburchak shaklida bo’ladi. Har bir katakka mantiqiy imkoniyatlar raqami yoziladi:

№	A	B	
№1	0	0	¬A&¬B
№2	0	1	¬A&B
№3	1	0	A&¬B
№4	1	1	A&B

Xuddi Karno kartalari kabi bir-biriga qo’shni hadlar sifatida geometrik qo’shni bo’lgan kataklar olinadi, ya’ni umumiy tomonga ega bo’lgan va ixtiyoriy qator yoki ustunning chetki kataklari juftligi qo’shni hisoblanadi.

Veych diagrammasi bo’yicha minimallashtirish quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

1) MDNSH da berilgan minimallashtirish kerak bo’lgan funktsiyaning barcha 1 ga teng qiymatlari diagrammada belgilanadi.

2) iloji boricha ko'proq birlarni o'z ichiga qamrab olgan to'g'ri to'rtburchaklar yuzasi belgilanadi.

3) hadlarning diz'yunktsiyalari olinadi.

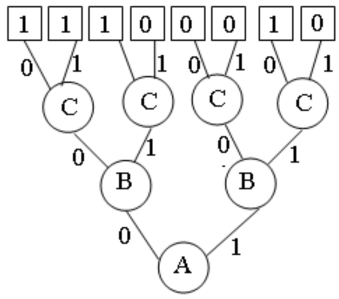
Veych diagrammalari xuddi Karno kartalariga o'xshash, lekin jadval tuzilishi bilan farq qiladi.

8.12. Yechimlar daraxti

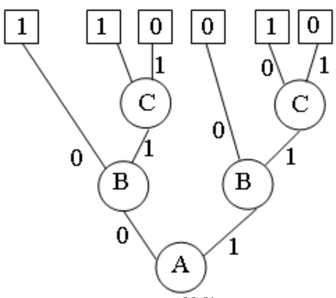
Dasturlashda xotirani va vaqtni tejash maqsadida mantiq algebrasi funktsiyalari bilan ishlaganda, ularni "tabiiy" (massivlarda) ifodalamasdan, mantiqiy amallarni bajarishga maxsus yo'naltirilgan ko'rinishda ifodalash samaraliroq hisoblanadi. Buning uchun n o'zgaruvchili Bul funktsiyasi rostlik jadvalini $n+1$ balandlikdagi to'liq binar daraxt ko'rinishida ifodalash mumkin. Daraxt yaruslari o'zgaruvchilarga mos keladi, daraxt shoxlari esa o'zgaruvchilar qiymatlariga mos keladi. Har bir mulohaza o'zgaruvchisidan ikkita shox chiqib, chap shoxga – 0, o'ng shoxga esa – 1 qiymat mos qo'yiladi. Bunday daraxt **yechimlar daraxti** yoki **semantik daraxt** deyiladi.

Misol. $F(A,B,C)$ funktsiya quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo'lsin:

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

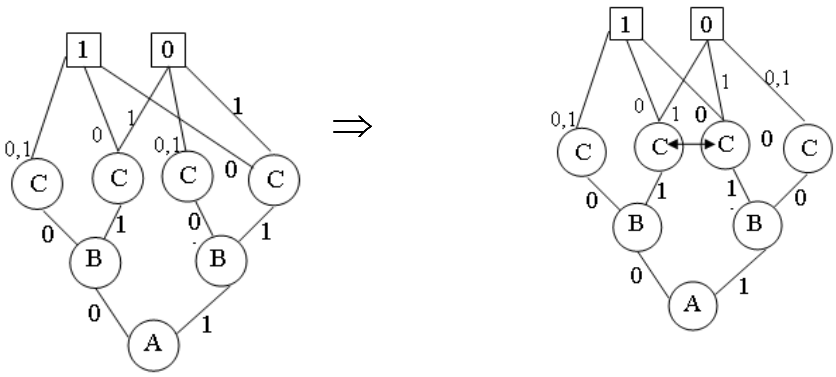


1) Yechimlar daraxtida barcha bir xil qiymatga ega bo'lgan barglarini (daraxt ostilarini), shu qiymat bilan almashtirilsa yechimlar daraxti hajmining sezilarli darajada ixchamlashganini ko'ramiz:

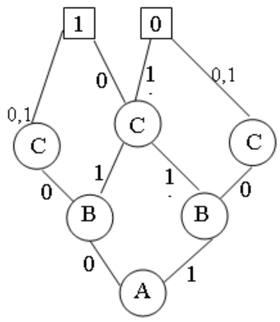


Shuningdek, bog'liqliklarning daraxt ko'rinishidan voz kechilsa, yechimlar daraxtini anchagina ixchamlashtirish mumkin. Quyidagicha uchta ketma-ket shakl almashtirishlardan so'ng binar yechimlar daraxtidan binar yechimlar diagrammasi hosil bo'ladi:

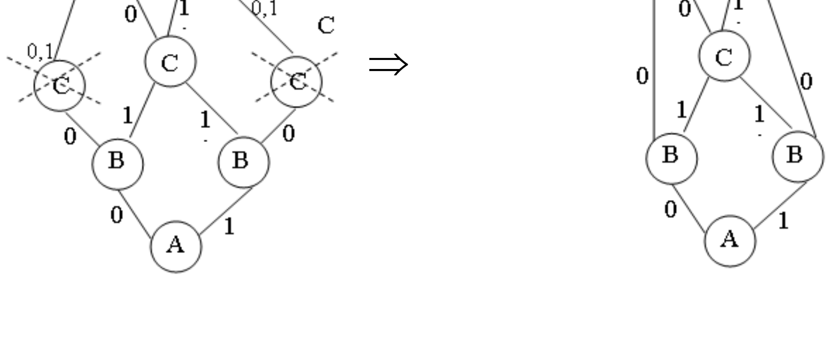
2) 0 va 1 qiymatlarni qabul qilgan yaproqlar birlashtiriladi. Natijada daraxt quyidagi ko'rinishni oladi:



3) Diagrammada izomorf (o'xshash) diagramma ostilari birlashtiriladi:



4) Ikkala chiquvchi shoxi ham bitta joyga boradigan tugunlar ahamiyatsiz o'zgaruvchi sifatida tushirib qoldiriladi va bu tugunga kiruvchi shox chiquvchi shoxlar boradigan tugunlargacha davom ettiriladi.

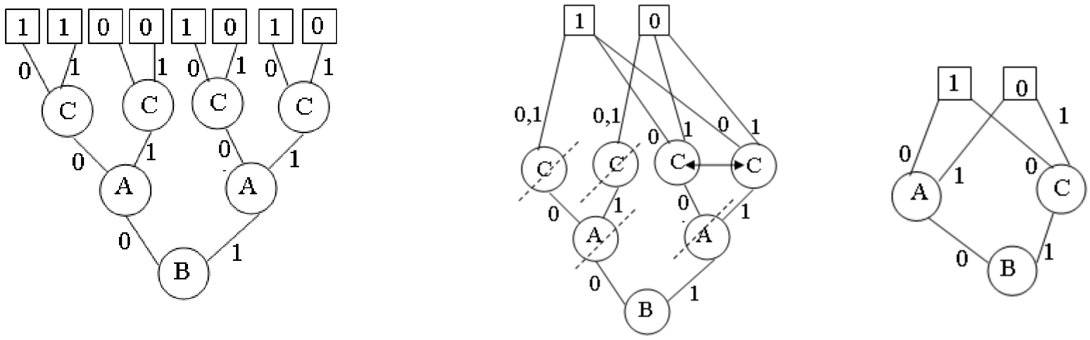


Natijada $F(A,B,C)$ funktsiya qiymatlarini yechimlarning qism dasturini quyidagicha berish mumkin:

if A**=B=0 or** A**=**C**=0 and B=1 or** A**=B=1 and** C**=0**
then $F(A,B,C)$**=1 else** $F(A,B,C)$**=0**

Yechimlar daraxtidan yechimlar diagrammasiga o'tish natijasi boshlang'ich yechimlar daraxtida o'zgaruvchilarni yaruslarga qaysi tartibda qo'yilganligiga ham bog'liq.

Yuqoridagi misolda yechimlar daraxtida o'zgaruvchilarni yaruslarga B, A, C tartibida joylashtirilsa, u holda yechimlar diagrammasi yanada ixchamlashadi:



Natijada $F(A,B,C)$ funktsiya qiymatlarini yechimlarning binar diagrammasi orqali berish mumkin:

if B=1 **then** $F(A,B,C)=\neg C$ **else** $F(A,B,C)=\neg A$

Ushbu ko'rilgan misol shundan dalolat beradiki, ayrim hollarda funktsiyalarning shunday maxsus ko'rinishlarini qurish mumkinki, funktsiyalarni massivlar yoki formulalar yordamida ifodalash kabi universal usullarga nisbatan, xotirada kam ma'lumot saqlashni va shu bilan birga hisoblashni tezroq amalga oshirish imkonini beradi.

Nazorat uchun savollar:

1. Karno kartalarining turlari va ishlash printsipini ayting.
2. Echimlar daraxtidan qanday maqsadda foydalaniladi?
3. Minimallashtirishning yana qanday turlarini bilasiz?

MISOL VA MASALALAR

a) Quyida keltirilgan misollar uchun Karno kartalarini tuzib, minimallashtiring.

1. F(1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
2. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
3. F (0,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
4. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=1
5. F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=1
6. F (0,0,1)= F (0,1,0)= F (1,1,0)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
7. F (0,0,0)= F (0,0,1)= F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
8. F (0,0,0)= F (0,0,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
9. F (0,1,1)= F (1,1,1)=1
10. F (0,1,0)= F (1,1,0)=1
11. F (0,0,1)= F (1,0,1)=1
12. F (0,0,0)= F (1,0,0)=1
13. F (0,0,1)= F (1,0,0)=1
14. F (0,0,0)= F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)=1
15. F (0,0,0)= F (0,0,1)= F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,0,0)=1
16. F (0,1,0)= F (0,0,1)= F (0,1,0)= F (1,1,0)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
17. F (0,1,1)= F (0,0,1)= F (0,1,0)= F (1,1,0)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
18. F (0,1,0)= F (0,0,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
19. F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=0
20. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=0
21. F (0,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
22. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=0
23. F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=1
24. F (0,0,0)= F (1,0,0)=0
25. F (0,0,1)= F (1,0,0)=0

b) Quyida keltirilgan misollar uchun yechimlar daraxtini chizing va qism dasturini tuzing:

1. F (0,0,0)= F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)=1
2. F (0,0,0)= F (0,0,1)= F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,0,0)=1
3. F (0,1,0)= F (0,0,1)= F (0,1,0)= F (1,1,0)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
4. F (0,1,1)= F (0,0,1)= F (0,1,0)= F (1,1,0)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
5. F (0,1,0)= F (0,0,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
6. F (0,1,1)= F (1,1,1)=0
7. F (0,1,0)= F (1,1,0)=0
8. F (0,0,1)= F (1,0,1)=0
9. F (0,0,0)= F (1,0,0)=0

10. F (0,0,0)= F (0,0,1)= F (0,1,0)=1
11. F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
12. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
13. F (0,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=0
14. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=1
15. F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=0
16. F (0,1,1)= F (1,1,1)=1
17. F (0,1,0)= F (1,1,0)=1
18. F (0,0,1)= F (1,0,1)=1
19. F (0,0,0)= F (1,0,0)=1
20. F (0,0,1)= F (1,0,0)=1
21. F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=0
22. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=0
23. F (0,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,0)= F (1,0,1)=1
24. F (0,1,0)= F (0,1,1)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=0
25. F (0,1,1)= F (1,1,0)= F (1,1,1)= F (1,0,1)=1

9. BUL ALGEBRASI. KOMBINATOR KONFIGURATSIYALAR

9.1. Kirish

1854 yilda J.Bul tomonidan nashr qilingan mulohazalar qonunlarini tadqiq qilishga bag'ishlangan ilmiy ishi matematikaning ikkita sohasini: simvolik logika va hozirda bul algebrasi deb nomlanuvchi matematik tizimni bog'liqligini ochib berdi. 1930 yilgacha bu kashfiyot fanda o'z tadbig'ini topa olmadi. 1938 yilda Massachusets texnika universiteti professori Klod Elvud Shennon elektr zanjirlarini analiz qilishda bul algebrasi qonunlaridan foydalanib, olimlarga Bul kashfiyoti eshigini ochib berdi. Shu davrdan boshlab elektr qurilmalarini, shu jumladan, kompyuterni analiz qilishda, dizaynida, soddalashtirishda bul algebrasi qonunlari muhim o'rin egallab kelmoqda.

9.2. Bul algebrasi

Bo'sh bo'lmagan S to'plam va unda aniqlangan bir yoki bir nechta amallar, qator aksiomalarni o'z ichiga olgan tizimga **bul algebrasi** deyiladi.

Odam skeletini olib qaraylik, u oq tanli bo'ladimi, qora tanlimi, o'zbekmi, koreysmi hammani skeleti bir xil, bir xil xarakteristikaga ega. Xuddi shuningdek, matematik tizimning ham umumiy tomonlari bor. Matematik tizimni o'rganganimizda ana shunday tizimlarning turli masalalarga tadbiq qilib bo'ladigan umumiy xususiyatlarini o'rganish kerak. Bul algebrasiga formal ta'rif berishdan oldin 2 ta aniq masalani qarab chiqaylik.

1-masala: Aytaylik, U biror to'plam va $P(U)$ uning qism to'plamlarining to'plami bo'lsin, A, B, C lar esa $P(U)$ ning elementlari bo'lsin. U holda to'plamlar nazariyasi bo'limidan ma'lumki, birlashma, kesishma va to'ldiruvchi amallari quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

kommutativlik xossasi:

$$A \bigcup B = B \bigcup A; \qquad A \bigcap B = B \bigcap A$$

assotsiativlik xossasi:

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C); \qquad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$$

distributivlik xossasi:

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) \qquad (A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$$

0 va 1 qonuni:

$$A \bigcap U = A; \qquad A \bigcup \varnothing = A$$

To'ldiruvchi xossasi:

$$A \bigcup \overline{A} = \mathrm{U}; \qquad A \bigcap \overline{A} = \varnothing$$

2-masala: Bu masala biroz murakkabroq. Aytaylik, 30 sonining musbat bo'luvchilari to'plami D_{30} bo'lsin: $D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.

3 ta $\oplus$, $\otimes$ va $'$ amallarni kiritamiz:

$$a \otimes b = EKUK\{a;b\}; \qquad a \oplus b = EKUB\{a;b\}^{+}$$

$$a' = \frac{30}{a}.$$

Misol uchun

$$2 \otimes 3 = EKUK\{2;3\} = 6 = 3 \otimes 2; \qquad 6 \otimes 10 = EKUK\{6;10\} = 30 = 10 \otimes 6$$

$$2 \oplus 3 = EKUB\{2;3\}^{+} = 1 = 3 \oplus 2; \qquad 6 \oplus 10 = EKUB\{6;10\}^{+} = 2 = 10 \oplus 6$$

$$6' = \frac{30}{6} = 5; \qquad 5' = \frac{30}{5} = 6$$

$$6 \otimes 6' = 6 \otimes 5 = EKUK\{6;6'\} = 30; \quad 5 \oplus 5' = 5 \oplus 6 = EKUB\{5;5'\} = 1.$$

$\oplus$, $\otimes$ va $'$ amallari quyidagi xossalarni qanoatlantiradi:

kommutativlik xossasi: $a \otimes b = b \otimes a;$; $\qquad a \oplus b = b \oplus a;$

assotsiativlik xossasi: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$; $\qquad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

distributivlik xossasi: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c);$ $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c);$

0 va 1 qonuni: $a \otimes 1 = a;$; $\qquad a \oplus 30 = a$

To'ldiruvchi xossasi: $a \otimes a' = 30;$; $\qquad a \oplus a' = 1.$

Ikkala masalani yaxshilab o'rganing, ularning umumiylik jihati bormi?

Ikkala holda ham bo'sh bo'lmagan B to'plam 2 ta maxsus elementni saqlaydi:

1-masalada $\varnothing$ va U, 2-masalada esa 1 va 30. Bundan tashqari, ikkala masalada ham 10 ta xossani qanoatlantiruvchi 2 ta binar amal, bitta unar amal mavjud. Bu umumiylik quyida bayon qilinadigan bulean algebrasi deb nomlanuvchi matematik tizimning asosini tashkil qiladi.

Bo'sh bo'lmagan B to'plamda aniqlangan 0 va 1 elementlari, B to'plamning barcha x, y, z elementlari uchun quyidagi xossalarni qanoatlantiruvchi ikkita + va · binar amal, bitta ' unar amaldan iborat tizimga $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ bul algebrasi deyiladi:

Kommutativlik qonuni: $x + y = y + x;$; $x \cdot y = y \cdot x;$

Assotsiativlik qonuni: $x + (y + z) = (x + y) + z;$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$

Distributivlik qonuni: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z);$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z);$

0 va 1 qonuni: $x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x;$

$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0;$

$1' = 0;$ $0' = 1;$

To'ldiruvchi qonuni: $x + x' = 1;$ $x \cdot x' = 0.$

Idempotentlik qonuni: $x + x = x;$ $x \cdot x = x.$

Yutilish qonuni: $x + xy = x;$ $x(x + y) = x;$

Isboti:

$$\begin{aligned} x + xy &= x1 + xy \\ &= x(1 + y) \\ &= x(y + 1) \\ &= x1 \\ &= x \end{aligned}$$

De-Morgan qonuni: $(x + y)' = x'y';$ $(xy)' = x' + y';$

Misol. Isbotlang: 1) $(x + y) + x'y' = 1$

$$\begin{aligned} (x + y) + x'y' &= x + (y + x'y') \\ &= x + (y1 + x'y') \\ &= x + [y(x + x') + x'y'] \\ &= x + [(yx + yx') + x'y'] \\ &= x + [xy + (x'y + x'y')] \\ &= (x + xy) + (x'y + x'y') \\ &= x(1 + y) + x'(y + y') \\ &= x1 + x'(y + y') \\ &= x1 + x'1 \\ &= x + x' \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) $(x + y)(x'y') = 0$

$$\begin{aligned} (x + y)(x'y') &= (x'y')(x + y) \\ &= (x'y')x + (x'y')y \\ &= x(x'y') + (x'y')y \\ &= (xx')y' + x'(y'y) \end{aligned}$$

$$= (xx')y' + x'(yy')$$
$$= 0y' + x'0$$
$$= y'0 + x'0$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Bilib qo'ying:

1) + , · , ' amallar 1-masaladagi $\cup, \cap, ^{-}$ amallariga mos keladi.

2) Bundan keyin $x \cdot y$ o'rniga qulaylik uchun xy deb yozamiz.

3) E'tibor bergan bo'lsangiz amallarning xossalari 2 ustunga ajratilgan va har ikkinchisi birinchi ifodadagi amalni o'zgartirish bilan hosil qilingan. Xossalarning bunday mosligiga **ikkiyoqlamalik printsipi** deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, bul algebrasi kamida 2 ta element 0 va 1 dan iborat bo'ladi.

Savol: Ikkita elementdan bul algebrasini hosil qilish mumkinmi?

Quyidagi misol bu savolga ha deb javob beradi:

$B = \{0,1\}$ to'plam va unda aniqlangan + , · va ' amallar berilgan bo'lsin. 10 ta qonuniyatni tekshirib ko'ramiz:

$$0+0=0 \qquad 0+1=1 \qquad 1+0=1 \qquad 1+1=1$$
$$0\cdot 0=0 \qquad 0\cdot 1=0 \qquad 1\cdot 0=0 \qquad 1\cdot 1=1$$
$$0'=1 \qquad 1'=0$$

Bundan ko'rinadiki, kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik qonunlari bajariladi. 0 - nol element, 1 esa birlik element hisoblanadi. 0 va 1 uchun to'ldiruvchi amali ham o'rinli:

$$0+0'=0+1=1;; \qquad 1+1'=1+0=1;$$
$$0\cdot 0'=0\cdot 1=0;; \qquad 1\cdot 1'=1\cdot 0=0;$$

Demak, $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ bul algebrasi bo'ladi.

2-masaladagi D_{30} to'plam va unda aniqlangan $\oplus, \otimes$ va ' amallar bul algebrasi bo'ladimi?

(1) $6 \oplus 6 = 6$ (2) $5 \oplus 30 = 30$ (3) $(5')' = 5$

(4) $3 \oplus (3 \odot 5) = 3$ (5) $(3 \oplus 5)' = 3' \odot 5'$ (6) $(5 \odot 6)' = 5' \oplus 6'$

Yechilishi: (1) $6 \otimes 6 = EKUK\{6;6\} = 6$;

(2) $5 \otimes 30 = EKUK\{5;30\} = 30$;

(3) $5' = \frac{30}{5} = 6$;

Bundan $(5')' = 6' = \frac{30}{6} = 5$

(4) $3 \oplus 5 = EKUB\{3;5\} = 1$

Bundan

$3 \otimes (3 \oplus 5) = 3 \otimes 1 = EKUK\{3;1\} = 1$

(5) $3 \otimes 5 = EKUK\{3;5\} = 15$

Bundan $(3 \otimes 5)' = 15' = \frac{30}{15} = 2$

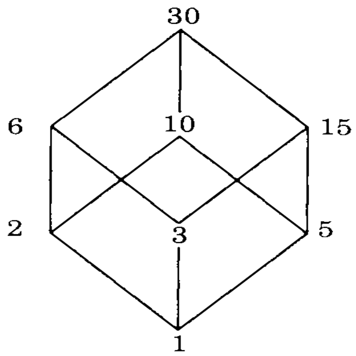
$3' \oplus 5' = 10 \oplus 6 = EKUB\{10;6\} =$
$= 2 = (3 \otimes 5)'$

(6) $5 \oplus 6 = EKUB\{5;6\} = 1$

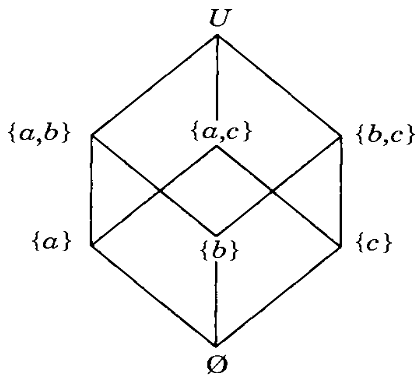
Bundan

$(5 \oplus 6)' = 1' = \frac{30}{1} = 30 = 5 \otimes 6 =$
$= EKUK\{5;6\} = 5' \otimes 6'$

D_{30} va $P(U)$ bul algebralari bir-biriga o'xshash, bu yerda $U = \{a,b,c\}$.
Ular Xasse diagrammalari yordamida berilgan:



D_{30} ning Xasse diagrammasi



$P(U)$ ning Xasse diagrammasi

D_{30} va $P(U)$ larning diagrammalari bir xil, chunki ular izomorf: $D_{30} \cong P(U)$.

$f : D_{30} \to P(U)$ izomorfizmni ko'rsating:

$f(x \otimes y) = f(x) \cup f(y)$ va $f(x \oplus y) = f(x) \cap f(y)$, $f(x') = (f(x))'$.

Nazorat uchun savollar:

1. Bul algebrasi deb nimaga aytiladi?
2. D_{70} va $P(U)$ algebralar izomorf bo'ladimi?
3. $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ bul algebrasi bo'lishini isbotlang.

MISOL VA MASALALAR

D_{30} bul algebrasida quyidagilarni hisoblang:

1. $6 \oplus 10$ **2.** $6 \odot 10$ **3.** $2 \oplus (3 \oplus 5)$ **4.** $(2 \oplus 3) \oplus 5$

5. $3 \odot (5 \odot 6)$ **6.** $(3 \odot 5) \odot 6$ **7.** $(3 \oplus 6)'$ **8.** $3' \odot 6'$

9. $(5 \odot 10)'$ **10.** $5' \oplus 10'$ **11.** $2 \odot 3 \oplus 5$ **12.** $2 \oplus 3 \odot 5$

$D_{70} = \{1,2,5,7,10,14,35,70\}$ to'plamda 70 ning musbat bo'luvchilari uchun $\oplus$, $\otimes$ va ' amallari kiritilgan:

$$x \otimes y = EKUK\{x;y\}; \qquad x \oplus y = EKUB\{x;y\}; \qquad x' = \frac{70}{x}.$$

Quyidagilarni hisoblang:

13. $7 \oplus 5$ **14.** $2 \odot 7$ **15.** $(5 \oplus 7)'$ **16.** $5' \odot 7'$

17. $(7 \odot 2)'$ **18.** $7' \oplus 2'$ **19.** $10 \oplus 10$ **20.** $7 \odot 7$

D_{70} bul algebrasida quyidagilarni hisoblang:

21. $(5')' = 5$ **22.** $7 \oplus (7 \odot 5) = 7$

23. $5 \odot (5 \oplus 7) = 5$ **24.** $(5 \oplus 7)' = 5' \odot 7'$

Lug'atli ko'rsatkich

ADABIYOTLAR

1. Thomas Koshy// Discrete Mathematics with Applications// Department in Oxford, California. 2012 y, –1045 p.
2. Kenneth H.Rosen// Discrete Mathematics and Its Applications// Monmouth University, New York. 2012 y, –1070 p.
3. Sadaddinova S.S., Abduraxmanova Yu.M., Raximova F.S. Diskret matematika. T, “Aloqachi”. 2014 y. –251 b.
4. To‘rayev H.H., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. T. “Ilm-ziyo”, 2009, –262 b.
5. Асеев Г.Г., Абрамов О.М., Ситников Д.Е. Дискретная математика. Ростов на Дону, «Феникс», 2003. – 246 с.
6. Гаджиев А.А. Основы дискретной математики. Махачкала, 2006. – 365 с.
7. Гаврилов Г.П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математики. М.: Наука. 2005. – 122 с.
8. Гильберт Д., Бернойс П. Основания математики. М.: Наука, 1979. – 156 с.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: “Наука”, 1979.
10. Еруссалимский Я. М. Дискретная математика теория, задачи, приложения. М.:«Вузовская книга», 2002.–268с.
11. Емиличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Теория графов. М.:«Наука» 1991.–243с.
12. Ершов Ю.Л. и др. Математическая логика. М., «Наука» 1987.
13. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. М. “Просвешение”.1986.
14. Кулабухов С.Ю. Дискретная математика. Таганрог, 2001. – 150 с.
15. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: “Мир”, 1970.
16. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.ЗАО Издательский дом «Питер», 2007. –383 с.
17. Малцев А.И. Алгебраические системы. М.: “Наука”, 1970.
18. Мендельсон Н. Введение в математическую логику. – М.:”Мир”, 1974.
19. Судоплатов С.В., Овчанникова Е. В. Элементы дискретной математики. М.: «Инфра-М», 2002.
20. Тўраев Х. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т.: “Ўқитувчи”, 2003. –176 б.
21. Шопарев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. Санкт-Петербург. «БХВ- Петербург» 2009. –282 с.
23. Зиков А.А. Основы теории графов. М., «Наука» 1987. –134 с.
24. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. ЗАО РИТС Техносфера», 2003.–313 с.
25. Qalandarov O‘.N., Abduvaitov H.A., Chay Z.S. Matematik mantiq masalalari, tadbiqi va ularni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.Toshkent, 2012 y.– 30 b.

Mundarija