А. Г. КУРОШ

ОЛИЙ АЛГЕБРА КУРСИ

РУСЧА ЎНИНЧИ НАШРИДАН ТАРЖИМА

СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги университетлар учун дарслик сифатида тасдиқ этган

„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ
Тошкент — 1976

517.1
К 94

Курош А. Г.

Олий алгебра курси. Ун-тлар учун дарслик. Русча 10-нашр. таржима. Т. „Ўқитувчи“, 1976.

461 б. Адабиётлар рўйхати: б.457—458.

Курош А. Г. Курс высшей алгебры.

517.1

$К \frac{20203 \ № \ 34}{М. \ 353. \ 06. \ 76} 123 - 75$

ОЛТИНЧИ БОБ

КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

26 §. Квадратик формани каноник кўринишга келтириш

Квадратик формалар назариясининг манбалари аналитик геометрияда, чунончи иккинчи тартибли чизиқлар (ва сиртлар) назариясида ётади. Маълумки, текисликдаги иккинчи тартибли марказий эгри чизиқнинг тенгламаси тўғри бурчакли координаталар бошини шу эгри чизиқ марказига кўчиргандан сўнг қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D. \qquad (1)$$

Яна, маълумки, координата ўқларини бирор α бурчакка шундай буриш мумкинки, яъни x, y координаталардан x', y' координаталарга шундай ўтиш мумкинки,

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

бўлади, бу янги координаталарда эгри чизиқнинг тенгламаси ушбу „каноник“ кўринишга эга бўлади:

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D; \qquad (3)$$

демак, бу тенгламада номаълумлар кўпайтмаси $x'y'$ нинг олдидаги коэффициент нолга тенг. Координаталарни алмаштириш (2) ни равшанки, номаълумларни чизиқли алмаштириш деб, шу билан бирга хосмас алмаштириш деб талқин этиш мумкин (13 § га қаранг), чунки унинг коэффициентларидан тузилган детерминант бирга тенг. Бу алмаштириш (1) тенгламанинг чап томонига татбиқ қилинади ва шунинг учун (1) тенгламанинг чап томони (2) хосмас чизиқли алмаштириш орқали (3) тенгламанинг чап томонига келтирилади деб айтиш мумкин.

Турли-туман татбиқлар шунга ўхшаш назарияни номаълумлар сони иккита эмас, балки исталган n га тенг бўлган, коэффициентлар эса ё ҳақиқий, ёки исталган комплекс сонлар бўлган ҳол учун ҳам тузишни тақозо этди.

(1) тенгламанинг чап томонида турган ифодани умумлаштириб, қуйидаги тушунчага келамиз:

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг $f(x)$ *квадратик формаси* деб ҳар бир ҳади бу номаълумлардан бирининг квадрати ёки иккита турли номаълумнинг кўпайтмасидан иборат бўлган йиғиндига айтилади. Квадратик форманинг коэффициентлари ҳақиқий ёки исталган комплекс сонлар бўлишига боғлиқ равишда, квадратик форма *ҳақиқий* ёки *комплекс* дейилади.

f квадратик формада ўхшаш ҳадлар ихчамланган деб ҳисоблаб, бу форманинг коэффициентлари учун қуйидаги белгилашларни киритамиз: x^2_i олдидаги коэффициентни a_{ij} орқали $i \neq j$ учун $x_i\, x_j$ кўпайтма олдидаги коэффициентни эса $2a_{ii}$ орқали [(1) билан солиштиринг!] белгилаймиз. Бироқ $x_i x_j = x_j x_i$ бўлгани учун бу кўпайтма олдидаги коэффициент $2a_{ji}$ орқали ҳам белгиланиши мумкин эди, яъни биз киритган белгилашлар

$$a_{ji} = a_{ij} \tag{4}$$

тенгликнинг ўринли бўлишини фараз этади. $2a_{ij}x_ix_j$ ҳадни энди ушбу

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$$

кўринишда, f квадратик форманинг ўзини эса мумкин бўлган барча $a_{ij}x_ix_j$ (бу ерда i ва j бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда 1 дан n гача бўлган қийматларни қабул қилади) ҳадлар йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; \tag{5}$$

хусусан, $i = j$ бўлганда $a_{ii}x^2_i$ ҳад ҳосил бўлади. a_{ij} коэффициентлардан n-тартибли $A = (a_{ij})$ квадрат матрица тузиш мумкинлиги равшан; у *f квадратик форманинг матрицаси*, бу матрицанинг ранги r эса квадратик форманинг *ранги* дейилади. Хусусан, агар $r = n$, яъни матрица хосмас бўлса, f квадратик форма ҳам *хосмас* дейилади. (4) тенгликка кўра, A матрицанинг бош диагоналга нисбатан симметрик бўлган элементлари бир-бирига тенг, яъни A — *симметрик* матрица. Аксинча, n-тартибли исталган A симметрик матрица учун коэффициентлари A матрица элементларидан иборат бўлган, n та номаълумнинг тўла аниқланган (тайин бир) (5) квадратик формасини кўрсатиш мумкин.

(5) квадратик формани тўғри бурчакли матрицаларни 14-§ да киритилган кўпайтиришдан фойдаланиб, бошқача кўринишда ёзиш ҳам мумкин. Дастлаб қуйидагича белгилашга келишиб оламиз: агар квадрат, ёки умуман, тўғри бурчакли A матрица берилган бўлса, у ҳолда A' орқали A матрицани транспонирлаш натижасида ҳосил қилинган матрица белгиланади.

КИРИШ

Математик-студентнинг математикадан оладиган билими математика фанининг учта асосий тармоғини, чунончи математик анализ, аналитик геометрия ва олий алгебрани ўрганишдан бошланади. Улар бир қатор туташиш нуқталарига, баъзи ўринларда умумийликка эга бўлиб, биргаликда эса ҳозирги замон математика фани қуриладиган бинонинг пойдеворини ташкил этади.

Мазкур китоб олий алгебрани баён қилишга бағишланган. Олий алгебра мактаб элементар алгебра курси мазмунини янада чуқурлаштирилгани, шу билан бирга табиий умумлашганидир. Тенгламалар ечиш мактаб алгебра курсида, ҳеч сўзсиз, асосий масала бўлиб ҳисобланади. Тенгламаларни ечиш бир номаълумли биринчи даражали битта тенгламани ечишдек энг содда ҳолдан бошланишини, сўнгра у икки йўналишда ривожлантирилишини китобхон эсласа керак. Бир томондан, икки номаълумли ва уч номаълумли биринчи даражали иккита ва мос равишда учта тенгламадан иборат системалар қаралади; иккинчи томондан, бир номаълумли битта квадрат тенглама, шунингдек, юқорироқ даражали тенгламаларнинг осонликча квадрат тенгламага келтириладиган баъзи хусусий типлари (масалан, биквадрат тенгламалар) ўрганилади.

Бу иккала йўналиш олий алгебрада, унинг иккита катта бўлимга ажралишини аниқлаб, ўзининг бундан кейинги ривожини топади. Улардан бири, чунончи, чизиқли алгебра асослари биринчи даражали ёки одатда айтилишича, чизиқли тенгламаларнинг ихтиёрий системаларини ўрганади. Тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлган ҳолда бундай системаларни ечиш учун детерминантлар назарияси аппарати яратилади. Бироқ тенгламалари сони номаълумлари сонига тенг бўлмаган системаларни (бу ҳол элементар алгебра нуқтаи назаридан нотаниш, аммо татбиқлар учун жуда муҳим) ўрганиш учун бу аппарат энди етарли бўлмай қолди. Хусусан, матрицалар назариясини, яъни бир неча сатр ва устунлардан иборат квадрат ёки тўғри тўртбурчак жадвалларда жойлашган сонлар системалари назариясини ишлаб чиқиш зарурияти туғилди. Бу назария жуда ҳам чуқур бўлиб, унинг татбиқлари чизиқли тенгламалар системалари назарияси чегарасидан анча четга чиқади. Иккинчи томондан, чизиқли тенгламалар системалари назариясини ўрганиш кўп ўлчовли (вектор ёки чизиқли деб аталувчи) фазоларни киритишни ва ўрганишни талаб этди. Математикадан хабарсиз бўлган одамлар кўп ўлчовли (биринчи навбатда, тўрт ўлчовли) фазо тўғрисида ноаниқ ва кўпинча хато тасаввурларга эгадирлар; аслида эса бу тушунча соф математик, ҳатто асосан алгебраик тушунча бўлиб, кўпгина математик тадқиқотларда, шунингдек, физика ва механикада муҳим восита бўлиб хизмат қилади.

Олий алгебранинг кўпҳадлар алгебраси деб аталувчи иккинчи ярми битта номаълумнинг ихтиёрий даражали битта тенгламасини ўрганишга бағишланади. Квадрат тенгламаларни ечиш учун формула мавжуд эканлигини ҳисобга оладиган бўлсак, шунга ўхшаш формулаларни янада юқори даражали тенгламалар учун ҳам излаш табиий бир ҳол бўлар эди. Алгебранинг бу бўлими тарихан ана шундай ривожланди ҳам. Шуни айтиш керакки, учинчи ва тўртинчи даражали тенгламаларни ечиш учун формулалар XVI асрдаёқ топилган эди. Шундан сўнг бешинчи ва ундан юқори даражали тенгламаларнинг илдизларини бу тенгламаларнинг коэффициентлари орқали радикалларда ифодаловчи формулаларни муваффақиятсиз изланишлар бошланди. Бу изланишлар бундай формулаларни топиш мумкин эмаслиги ва бешинчи даражадан бошлаб қолган барча юқори даражалар учун ҳатто илдизлари радикаллар ёрдамида ёзилиши мумкин бўлмаган бутун коэффициентли тенгламаларнинг конкрет мисоллари мавжуд эканлиги исбот қилингунга қадар, XIX аср бошларигача давом этди.

Юқори даражали тенгламаларни ечиш учун формулалар йўқлигини ачинарли бир ҳол деб ҳисоблаш керак эмас—ҳатто учинчи ва тўртинчи даражали тенгламалар бўлган ҳолда бундай формулалар мавжуд бўлса-да, улар жуда ҳам бесўнақай бўлиб, амалда деярли фойдаси камдир. Бошқа томондан, физиклар ёки инженерлар ечишга тўғри келадиган тенгламаларнинг коэффициентлари одатда ўлчашлар натижасида олинган миқдорлар, яъни тақрибий миқдорлар бўлиб, шу сабабли илдизларни ҳам тақрибан, берилган аниқликда билиш керак бўлади, холос. Бу эса тенгламаларни тақрибий ечишнинг турли усулларини ишлаб чиқишга олиб келди. Уларнинг энг соддаларигина олий алгебра курсида баён қилинади.

Бироқ кўпҳадлар алгебрасида асосий масала тенгламаларнинг илдизларини амалда топиш эмас, балки уларнинг мавжудлиги масаласи экан. Маълумки, ҳатто ҳақиқий илдизларга эга бўлмаган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенгламалар ҳам мавжуд. Сонлар запасини барча комплекс сонлар тўпламигача тўлдириб, энди квадрат тенгламалар илдизга эга бўлишини ҳамда бу учинчи ва тўртинчи даражали тенгламалар учун ҳам ўринли бўлишини (бу уларни ечиш учун формулалар мавжудлигидан келиб чиқади) кўрамиз. Бироқ, ҳатто комплекс сонлар ичида ҳам бирорта илдизга эга бўлмаган бешинчи ёки ундан юқорироқ тартибли тенглама топилмасмикин ва бундай тенгламаларнинг илдизларини топиш учун комплекс сонлардан сонларнинг янада кенгроқ запасига ўтишга тўғри келмайдими? Бу саволга муҳим бир теоремадан жавоб топамиз: коэффициентлари фақат ҳақиқий бўлмасдан, балки комплекс ҳам бўлган исталган сонлардан иборат ҳар қандай тенглама комплекс (хусусий ҳолда, ҳақиқий) илдизларга эга бўлади, шу билан бирга бу илдизлар, умуман айтганда, тенглама даражаси қандай бўлса, шунчадир.

Олий алгебра курси асосий мазмунининг қисқача обзори шундан иборат. Шуни таъкидлаш керакки, олий алгебра кўп тармоқли, мазмунга бой ва доим ривожланаётган улкан алгебра фанининг бошланишидир, холос. Алгебранинг олий алгебра курси чегарасидан ташқарида бўлган тармоқларига юзаки бўлса-да обзор беришга ҳаракат қилиб кўрамиз.

Улкан фан бўлган чизиқли алгебра асосан матрицалар назариясига ва у билан боғлиқ бўлган вектор фазоларни чизиқли алмаштириш назариясига бағишланган бўлиб, ундан ташқари формалар назарияси, инвариантлар назарияси ва дифференциал геометрияда муҳим роль ўйнайдиган тензор алгебрасини ҳам ўз ичига олади. Вектор фазолар назарияси бундан кейинги ривожланишини алгебрадан ташқарида, функционал анализда (чексиз ўлчовли фазолар) топади. Чизиқли алгебра фақат математикада эмас, балки механикада, физикада ва техникавий фанларда татбиқ этилишининг хилма-хиллиги ва аҳамиятига кўра ҳозирча алгебранинг кўпдан-кўп тармоқлари ичида биринчи бўлиб ҳисобланади.

Кўп ўн йилликлар давомида бир номаълумнинг ихтиёрий даражали битта тенгламаси назарияси сифатида ривожланиб келган кўпҳадлар алгебраси ҳозирги пайтга келиб асосан тугалланди. У ўзининг бундан кейинги тараққиётини қисман комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясининг баъзи бўлимларида топди, асосан у майдонлар назариясигача ўсди. Бу ҳақда кейинроқ сўз юритамиз. Бир нечта номаълумнинг чизиқли бўлмаган, балки ихтиёрий даражали тенгламалари системалари ҳақидаги жуда қийин масалага келсак (олий алгебра курсида ўрганиладиган иккала йўналишни бирлаштирувчи бу масалага мазкур курсда деярли тегилмайди), у аслида математиканинг алгебраик геометрия деб аталувчи махсус тармоғига тегишлидир.

Тенглама радикалларда ечилиши мумкин бўлган шартлар ҳақидаги масалага француз математиги Галуа (1811—1832) тўлиқ жавоб берди. Унинг тадқиқотлари алгебранинг ривожланишида янги йўналишларни кўрсатиб берди ва бу XX асрдаёқ, алгебрачи-немис аёли Э. Нётер (1882—1935) ишларидан сўнг алгебра фани масалаларига янги нуқтаи назарнинг шаклланишига олиб келди. Ҳозир тенгламаларни ўрганиш алгебранинг марказий масаласи эмаслиги аниқдир. Алгебраик тадқиқотларнинг ҳақиқий объекти деб сонларни қўшиш ва кўпайтиришга ўхшаш, лекин сонлардан бошқа объектлар устида бажарилиши мумкин бўлган алгебраик амалларни ҳисоблаш лозим.

Мактаб ўқувчиси физика курсида кучларни қўшиш амалига дуч келади. Университет ва педагогика институтларида ўқитиладиган математика фанларида алгебраик амалларга жуда кўп мисоллар келтирилади— матрицаларни, функцияларни қўшиш ва кўпайтириш, фазони алмаштиришлар, векторлар устида амаллар ва ҳоказо. Бу амаллар одатда сонлар устидаги амалларга ўхшаш бўлиб, ўшандай номлар билан аталади, баъзан эса сонлар устида бажариладиган амалларнинг баъзи хоссалари ўша амаллар учун ўринли бўлмай қолади. Масалан, кўпинча ва жуда муҳим пайтларда амаллар нокоммутатив (кўпайтма кўпайтувчилар тартибига боғлиқ бўлади), баъзан эса ноассоциатив ҳам (учта кўпайтувчининг кўпайтмаси қавсларнинг тартибига боғлиқ бўлади) бўлиб қолади.

Алгебраик системаларнинг унча кўп бўлмаган энг муҳим турлари, яъни бирор алгебраик амаллар аниқланган бирор табиатли элементлардан тузилган тўпламлар системалари жиддий ўрганилади. Хусусан, майдонлар шулар жумласидандир. Булар алгебраик системалар бўлиб, уларда ҳақиқий ва комплекс сонлар системаларидагига ўхшаш қўшиш ва кўпайтириш амалларини бажариш аниқланган ва уларнинг ҳар иккаласи коммутатив ҳамда ассоциатив, дистрибутивлик қонуни билан боғланган (яъни қавсларни очишнинг одатдаги қоидаси ўринли) ва тескари амалларга—айириш ва бўлиш амалларига эга. Майдонлар назарияси тенгламалар назариясининг бундан кейинги ривожланиши учун табиий соҳа бўлди, унинг асосий тармоқлари—алгебраик сонларнинг майдонлари назарияси билан алгебраик функцияларнинг майдонлари назарияси эса майдонлар назариясини мос равишда сонлар назарияси ва комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси билан боғлади. Олий алгебра курси майдонлар назариясига элементар муқаддимани ўз ичига олади, курснинг айрим бўлимлари: бир нечта номаълумнинг кўпҳадлари, матрицанинг нормал шакли бўлимлари эса бевосита ихтиёрий асосий майдон учун баён қилинади.

Ҳалқа тушунчаси майдон тушунчасига қараганда янада кенгроқдир. Майдондан фарқли ўлароқ, бу ерда энди бўлинишнинг бажарилиши талаб қилинмайди ва, бундан ташқари, кўпайтириш нокоммутатив, ҳатто ноассоциатив ҳам бўлиши мумкин. Барча бутун сонлар(манфий сонларни ҳам қўшиб ҳисоблаганда) тўплами, бир номаълумнинг кўпҳадлари системаси ва ҳақиқий ўзгарувчининг ҳақиқий функциялари системаси ҳалқага доир энг содда мисоллар бўлади. Ҳалқалар назарияси алгебранинг энг кекса тармоқларидан бўлмиш гиперкомплекс системалар назарияси ва идеаллар назариясини ўз ичига олади, у бир қатор математик фанлар, хусусан, функционал анализ билан боғланган ва физикада ҳам ўз татбиқларини топмоқда. Олий алгебра курсига ҳалқа тушунчасининг, асосан, таърифигина кирган.

Группалар назариясининг татбиқ қилиниш соҳаси яна ҳам кенгроқ. Группа деб битта асосий амалли алгебраик системага айтилади, шу билан бирга бу амал коммутатив бўлиши шарт бўлмаса-да, ассоциатив бўлиши керак ва агар асосий амал кўпайтириш деб қабул қилинган бўлса, у тескари амал—бўлиш амалига эга бўлиши лозим. Масалан, қўшиш амалига нисбатан қаралаётган бутун сонлар тўплами ва кўпайтириш амалига нисбатан қаралаётган мусбат ҳақиқий сонлар тўплами шулар жумласидандир. Группалар Галуа назариясидаёқ тенгламаларнинг радикалларда ечилиш масаласида катта роль ўйнади, ҳозирда эса улар майдонлар назариясида, геометриянинг кўпгина бўлимларида, топологияда, шунингдек, математикадан ташқари—кристаллографияда, назарий физикада муҳим восита бўлиб ҳисобланади. Умуман татбиқ қилиниш соҳасининг кенглигига кўра группалар назарияси алгебранинг барча тармоқлари ичида чизиқли алгебрадан кейинги ўринда туради. Курсимизда группалар назарияси асосларига бағишланган бир боб ўрин олган.

Сўнгги ўн йилликларда алгебранинг янги соҳаси—структуралар назарияси юзага келди ва жадал ривожланди. Структура деб иккита амалли—қўшиш ва кўпайтиришга эга бўлган алгебраик системага айтилади. Бу амаллар коммутатив ва ассоциатив бўлиши ҳамда қуйидаги талабларни қондириши керак: элементнинг ўз-ўзи билан йиғиндиси ҳам, ўз-ўзига кўпайтмаси ҳам бу элементнинг ўзига тенг бўлиши керак; агар иккита элементнинг йиғиндиси уларнинг бирига тенг бўлса, у ҳолда кўпайтма уларнинг бошқасига тенг ва аксинча. Энг кичик умумий бўлинувчи ва энг катта умумий бўлувчини олиш амалларига нисбатан қаралаётган натурал сонлар тўплами структурага мисол бўлади. Структуралар назарияси группалар назарияси ва ҳалқалар назарияси, шунингдек, тўпламлар назарияси билан ажойиб боғланишларга эга; геометриянинг эски тармоқларидан бири, чунончи проектив геометрия моҳияти бўйича структуралар назариясининг бир қисми бўлиб қолди;

бундан ташқари, структуралар назариясининг электр тармоқлари назариясидаги бир татбиқини ҳам айтиб ўтиш лозим эди.

Группалар назарияси, ҳалқалар назарияси ва структуралар назариясининг баъзи қисмлари орасида мавжуд бўлган умумийликлар алгебраик системаларнинг умумий назарияси (ёки универсал алгебралар) нинг пайдо бўлишига сабаб бўлди. Бу назария эндигина дастлабки қадамларини қўяётган бўлса-да, унинг контури яққол кўзга ташланмоқда, математик логика билан унинг орасидаги алоқалар эса келгусида унинг жиддий ривожланишига ишонч билдиришга имкон беради.

Юқорида баён қилинган схемага алгебра фанининг кўп қиррали бутун мазмунини жо қилиб бўлмайди, албатта. Хусусан, алгебранинг математиканинг бошқа соҳалари билан чегарадош бўлган бир қатор бўлимлари мавжуд. Топологик алгебра шулар жумласидандир. У шундай алгебраик системаларни ўрганадики, уларда бу системалар элементлари учун аниқланган амаллар бирорта яқинлашишга нисбатан узлуксиздир; бунга мисол қилиб ҳақиқий сонлар системасини келтириш мумкин. Топологик алгебрага геометрияда, назарий физикада, гидродинамикада кўпдан-кўп татбиқларга эга бўлган узлуксиз группалар (ёки Ли группалари) назарияси яқинроқ. Бироқ Ли группалари назарияси алгебраик, топологик, геометрик ва назарий-функционал методларнинг шундай чирмашиб кетиши билан ажралиб турадики, уни математиканинг алоҳида бир тармоғи деб ҳисоблаш тўғри бўлур эди. Булардан ташқари, тартибланган алгебраик системалар назарияси мавжуд бўлиб, у геометрия асосларига тегишли тадқиқотлар натижасида вужудга келган ва функционал анализда ўз татбиқини топган. Ниҳоят, алгебра ва дифференциал тенгламалар назарияси орасидаги янги муносабатларни тайин этувчи дифференциал алгебра ривожлана бошлади.

Ўз-ўзидан равшанки, алгебра фанининг уни ҳозирги кундаги даражага олиб келган ажойиб тараққиёти тасодифий бир ҳол эмас—у математика умумий тараққиётининг бир қисми бўлиб, кўп жиҳатдан алгебрага бошқа математик фанлар томонидан қўйилган талабларни қондириш зарурлигидан ҳам келиб чиқди. Иккинчи томондан, алгебранинг ривожланиши бу фанга қўшни фанлар тармоқларининг ривожланишига жуда катта таъсир кўрсатди ва кўрсатмоқда. Бу таъсир, айниқса ҳозирги замон алгебраси учун хос бўлган татбиқлар соҳасининг кенгайиши туфайли янада кучаймоқда ва шу сабабли ҳозирда математиканинг „алгебралаштирилиши“ ҳақида гаплар пайдо бўлмоқда.

Олий алгебрага юқорида берилган обзор юзаки бўлишидан ташқари, бу фан тараққиётининг тарихи тўғрисида тўлиқ тасаввур бермайди. Шу боисдан мазкур муқаддимани алгебра тарихининг қисқача обзори билан тугатамиз.

Алгебранинг баъзи масалалари билан, хусусан, энг содда тенгламаларни ечиш билан қадим замонлардаёқ вавилонлик, сўнгра эса қадимги грек математиклари шуғулланганлар. Бу даврдаги алгебраик тадқиқотларнинг чўққиси бўлиб грек (александриялик) математиги Диофантнинг (эрамизнинг III асри) ишлари ҳисобланади. Кейинчалик бу текширишлар ҳинд математиклари Ариабхата (VI аср), Брамагупта (VII аср), Бхаскара (XII аср) томонидан давом эттирилди. Хитойда алгебра масалаларини ишлаб чиқиш жуда эрта бошланди—Чжан Цан (эрамизгача II аср), Цзин Чоу-чан (эрамизгача I аср). Цинь Цзю-шао (XIII аср) энг кўзга кўринган хитой алгебрачиларидан бири бўлган.

Алгебранинг тараққиётига ўрта аср шарқининг (араб тилида ёзган) математиклари айниқса, ўрта осиёлик ўзбек олими Муҳаммад Ал-Хоразмий (IX аср) ҳамда тожик математиги ва шоири Умар Хайём (1040—1123) катта ҳисса қўшдилар. Чунончи, „алгебра“ сўзи Ал-Хоразмийнинг „Ал-жабр вал-муқобала“ китобининг номи муносабати билан келиб чиққан.

Юқорида тилга олинган вавилон, грек, ҳинд, хитой ва ўрта осиёлик алгебрачиларнинг тадқиқотлари алгебранинг ҳозирги пайтда элементар алгебра курсига кирадиган масалаларига тегишли бўлиб, баъзидагина учинчи даражали тенгламаларга тааллуқли эди. Ўрта асрлардаги Ғарбий Европа алгебрачиларининг ва Уйғониш даври алгебрачиларининг тадқиқотлари ҳам асосан ана шу доирадан четга чиқмади; итальян математиги Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (XII аср) ва ҳозирги замон алгебраик символиканинг яратувчиси француз Виет (1540—1603) номларини тилга олиб ўтамиз. XVI асрда учинчи ва тўртинчи даражали тенгламаларни ечиш методлари топилгани юқорида айтиб ўтилган эди; бу ерда итальянлар Ферро (1456—1526), Тарталья(1500—1557), Кардано (1501—1576) ва Феррари (1522—1565) нинг номларини айтиб ўтиш лозим.

XVII ва XVIII асрларда тенгламаларнинг умумий назариясини (яъни кўпҳадлар алгебрасини) ишлаб чиқиш устида қизғин иш кетди. Бу ишда ўша замоннинг буюк олимлари француз Декарт (1596—1650), инглиз Ньютон (1643—1727), французлар Даламбер (1717—1783), Лагранж (1736—1813) иштирок этдилар. Шунингдек, XVIII асрда детерминантлар назариясини қуриш ҳам бошланди— швейцар математиги Крамер (1704—1752), француз олими Лаплас (1749 — 1827). XVIII ва XIX асрлар чегарасида немис математиги Гаусс (1777—1855)сон коэффициентли тенгламаларнинг илдизлари мавжудлиги ҳақида юқорида қайд қилинган асосий теоремани исбот қилди.

XIX асрнинг бошланиши алгебра тарихида тенгламаларнинг радикалларда ечилиши проблемасини ҳал қилиниши билан нишонланди. Даражалари бешдан катта ёки бешга тенг бўлган тенгламаларни ечиш учун формулалар мавжуд эмаслигини исботи итальян математиги Руффини (1765—1822) ҳамда анча жиддий формада норвег олими Абель (1802—1829) томонидан ҳосил қилинди. Юқорида қайд қилинганидек, тенглама радикалларда ечилиши учун зарур бўлган шартлар тўғрисидаги масаланинг муфассал ечими Галуага мансубдир.

Галуа назарияси алгебранинг ва ундаги янги йўналишларнинг XIX аср ўрталари ва унинг иккинчи ярмида кенг ривожланиши учун туртки бўлди. Чунончи, алгебраик сонлар ва алгебраик функциялар майдонлари назарияси ва у билан боғлиқ бўлган идеаллар назарияси пайдо бўлди. Бу ерда немис математиклари Куммер (1810—1893), Кронекер (1823—1891) ва Дедекинд (1831—1916) нинг ҳамда рус математиклари Е. И. Золотарёв (1847—1878) ва Г. Ф. Вороной (1868—1908) нинг номларини тилга олиш керак. Лагранж ва Галуа томонидан асос солинган чекли группалар назарияси янада ривожланди, бу соҳада французлар Коши (1789—1857) ва Жордан (1838—1922), норвег математиги Силов (1832—1918), немис алгебрачилари Фробёниус (1849-1918) ва Гёльдер (1859—1937) иш олиб бордилар. Норвег математиги С. Ли (1842—1899) нинг тадқиқотлари узлуксиз группалар назариясига асос солди.

Инглиз олими Гамильтон (1805—1865) ва немис математиги Грасман (1809—1877) нинг ишлари туфайли гиперкомплекс системалар назарияси ёки ҳозирги пайтда алгебралар назарияси деб аталувчи назарияга асос солинди. Рус математиги Ф. Э. Молин (1861—1941) нинг аср охирига тегишли бўлган ишлари алгебранинг бу тармоғини бундан кейинги равожланишида катта роль ўйнади.

Чизиқли алгебра XIX асрда, аввало инглиз математиклари Сильвестр (1814—1897) ва Кэли (1821—1895) нинг ишлари туфайли гуркираб ривожланди. Кўпҳадлар алгебрасини ишлаб чиқиш ҳам давом этди, рус геометри Н. И. Лобачевскийнинг (1792—1856) тенгламаларни тақрибий ечиш усулини ва немис математиги Гурвицнинг (1859—1919) ишларини қайд қилиб ўтамиз. XIX асрнинг иккинчи ярмида алгебраик геометрия, хусусан, немис математиги М. Нётер (1844—1922) ишларида яратила бошланди.

XX асрга келиб алгебраик тадқиқотлар жуда катта кўламга эга бўлди ва алгебра, бизга маълумки, математикада ўзининг муносиб ўрнини эгаллади. Бу даврда алгебранинг жуда кўп янги бўлимлари пайдо бўлди; майдонларнинг умумий назарияси (ўнинчи йиллар), ҳалқалар назарияси ва группаларнинг умумий назарияси (йигирманчи йиллар), топологик алгебра ва структуралар назарияси (ўттизинчи йиллар); қирқинчи ва эллигинчи йилларда ярим группалар назарияси ва квазигруппалар назарияси, универсал алгебралар назарияси, гомологик алгебра, категориялар назарияси пайдо бўлди. Алгебранинг ҳамма бўлимларида фанга катта ҳисса қўшган йирик олимлар иш олиб бормоқдалар, бир қатор мамлакатларда катта-катта алгебра мактаблари вужудга келмоқда. Хусусан, бу Совет Иттифоқига ҳам тааллуқлидир.

Революцияга қадар рус алгебрачиларидан юқорида номи тилга олинганлардан ташқари яна С. О. Шатуновскийни (1859—1929) ва Д. А. Гравени (1863—1939) кўрсатиб ўтиш керак. Аммо ватанимизда алгебраик тадқиқотлар Улуғ Октябрь революциясидан кейингина гуркираб ўсди. Бу тадқиқотлар ҳозирги замон алгебрасининг деярли барча бўлимларини қамраб олади, шу билан бирга уларнинг баъзиларида совет алгебрачиларининг ишлари етакчи бўлиб ҳисобланади. Фақат иккита номни — майдонлар назарияси ва Ли группалари назарияси соҳасида иш олиб борган Н. Г. Чеботарёвни (1894—1947) ҳамда машҳур қутбчи ва шу билан бир вақтда йирик алгебрачи, совет назарий-группа мактабининг асосчиси О. Ю. Шмидтни (1891—1956) тилга олиб ўтамиз.

Алгебранинг ҳозирги аҳволи ва унинг ривожланиш йўллари ҳақидаги қисқача обзорни тугатар эканмиз, бу ерда қараб чиқилган масалалар асосан олий алгебра курси чегарасидан ташқарида ётишини яна бир бор таъкидлашимиз лозим. Обзорнинг вазифаси китобхонни олий алгебра курсининг бутун алгебраик фанда ва математиканинг улкан иморатида тутган ўрни ҳақида тўғри тасаввур ҳосил қилишга ёрдам беришдан иборат эди.

БИРИНЧИ БОБ

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ. ДЕТЕРМИНАНТЛАР

1-§. Номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули

Олий алгебра курсини бир нечта ўзгарувчили биринчи даражали тенгламалар системаларини ёки, бошқача қилиб айтганда, *чизиқли тенгламалар системаларини* 1) ўрганишдан бошлаймиз.

Чизиқли тенгламалар системалари назарияси алгебранинг катта ва муҳим бўлими — чизиқли алгебрага асос солади, китобимизнинг каттагина қисми, жумладан, унинг дастлабки учта боби унга бағишланади. Ана шу бобларда кўриб чиқиладиган тенгламаларнинг коэффициентларини, номаълумларнинг қийматларини ва умуман, биз учратадиган барча сонларни ҳақиқий деб ҳисоблаш керак. Шуни ҳам айтиш керакки, бу боблардаги айтилганларнинг ҳаммасини ихтиёрий комплекс сонлар бўлган ҳол учун ҳам такрорлаш мумкин (комплекс сонлар ўқувчига ўрта мактаб курсидан маълум).

Элементар алгебрадан фарқли ўлароқ, бу ерда тенгламалари ва номаълумлари сони ихтиёрий бўлган системаларни ўрганамиз, баъзан системадаги тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг деб фараз қилинмаган ҳоллар ҳам кўрилади. Бизга n номаълумли s та чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин. Қуйидаги символикадан фойдаланишга келишиб оламиз: номаълумларни индексли x ҳарфи орқали белгилаймиз: x_1, x_2, ..., x_n; тенгламалар номерлаб чиқилган деб ҳисоблаймиз — биринчи, иккинчи, ... s-тенглама; i-тенгламадаги x_j номаълумнинг коэффициентини a_{ij} орқали белгилаймиз 2); ниҳоят, i-тенгламанинг озод ҳадини b_i орқали белгилаймиз.

---

1) Бундай деб аталиши аналитик геометрияда икки номаълумли биринчи даражали тенглама тўғри чизиқни аниқлаши билан боғлиқ.

2) Шундай қилиб, бу ерда биз иккита индекс ишлатамиз: биринчи индекс тенглама номерини, иккинчиси эса номаълум номерини кўрсатади Ёзувни қисқартириш мақсадида бу индекслар вергул билан ажратилмайди; шундай бўлса-да, масалан, a_{11} бўлган ҳолда „a бир бир" дейиш ўрнига „a ўн бир" деб, a_{34} бўлган ҳолда „a уч тўрт" дейиш ўрнига „a ўттиз тўрт" деб ўқимаслик керак.

Энди системамиз умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Номаълумлар олдидаги коэффициентлар s та *сатр* ва n та *устундан* иборат *матрица* деб аталувчи тўғри тўртбурчакли ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}a_{s2} \dots a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

жадвални ташкил этади; a_{ij} сонлар матрицанинг *элементлари* деб аталади.[1] Агар $s = n$ (яъни сатрлар сони устунлар сонига тенг) бўлса, матрица *n-тартибли квадрат матрица* деб аталади. Бу матрицанинг юқори чап учидан пастки ўнг учи томон ўтувчи диагонали (яъни $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлардан тузилган диагональ) *бош диагональ* дейилади. Агар n-тартибли квадрат матрицанинг бош диагонали элементлари бирга тенг бўлиб, бу диагоналдан ташқаридаги элементлари эса нолга тенг бўлса, у *n-тартибли бирлик матрица* дейилади.

(1) чизиқли тенгламалар системасининг *ечими* деб шундай n та $k_1, k_2, \dots, k_n$ сонлар системасига айтиладики, тенгламаларнинг ҳар биридаги x_i номаълумларни мос $k_i (i = 1,2, \dots n)$ лар[2] билан алмаштирганда (1) системанинг ҳар бир тенгламаси айниятга айланади.

Чизиқли тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаслиги мумкин, бундай ҳолда системага *биргаликда бўлмаган* система дейилади. Масалан,

$$x_1 + 5x_2 = 1,$$
$$x_1 + 5x_2 = 7$$

система ана шундай системадир; бу тенгламаларни чап томонлари бир хил, бироқ ўнг томонлари турлича ва шунинг учун номаълумлар қийматларининг ҳеч қандай системаси иккала тенгламани бир вақтда қаноатлантира олмайди.

Агар чизиқли тенгламалар системаси ечимларга эга бўлса, система *биргаликда* дейилади. Агар биргаликда бўлган систе-

---

[1] Шундай қилиб, агар (2) матрицани (1) системага алоқадор эмас деб қарасак, a_{ij} элементнинг биринчи индекси сатр номерини иккинчиси эса устун номерини кўрсатиб, буларнинг кесишган жойида a_{ij} элемент туради.

[2] $k_1, k_2, \dots k_n$ сонлар системанинг n та эмас, балки битта ечимини ташкил этишини таъкидлаб ўтамиз.

ма биргина—ягона ечимга эга бўлса,система, *аниқ* система деб (элементар алгебрада ана шундай системаларгина кўрилади), агар ечим биттадан кўп бўлса, *аниқмас* система деб аталади; кейинроқ бундай ҳолда ечимларнинг ҳатто чексиз кўп бўлишини кўрамиз. Масалан,

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7, \\ x_1 + x_2 \; &= 4 \end{aligned}\right\}$$

система аниқ: у $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ ечимларга эга ва номаълумни йўқотиш усули ёрдамида бу ечим ягона бўлишини осонгина текшириш мумкин. Иккинчи томондан,

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1, \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

система эса аниқмас, чунки

$$x_1 = k, \quad x_2 = 3k - 1 \tag{3}$$

кўринишдаги чексиз ечимларга эга, бу ерда k — ихтиёрий сон, шу билан бирга (3) формулалар бўйича ҳосил қилинадиган ечимлар биз кўраётган системанинг барча ечимларини беради.

Чизиқли тенгламалар системалари назариясининг вазифаси тенгламаларнинг берилган системаси биргаликдами ёки йўқми эканлигини, агар биргаликда бўлса, ечимлар сонини аниқлашга имкон берувчи методларни ишлаб чиқишдан, шунингдек, бу ечимларнинг барчасини топиш усулини кўрсатишдан иборатдир.

Биз ишни коэффициентлари сонлардан иборат бўлган система ечимларини амалий равишда топишда энг қулай бўлган *номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулидан* ёки *Гаусс методидан* бошлаймиз.

Дастлаб қуйидагига эътибор берайлик. Келгусида чизиқли тенгламалар системасини қуйидагича ўзгартиришимизга тўғри келади: система тенгламаларидан бирортасининг ҳар иккала қисмини бирорта сонга кўпайтириб, системанинг бошқа бир тенгламасининг мос қисмидан айириш. Аниқлик учун (1) система биринчи тенгламасининг ҳар иккала томонини c сонга кўпайтириб, иккинчи тенгламанинг мос қисмларидан айираётган бўлайлик. Биз чизиқли тенгламаларнинг ушбу янги системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; &\cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

бу ерда

$$a'_{2j}=a_{2j}-ca_{1j}, \quad (j=1,2,\ldots,n),\ b'_2=b_2-cb_1.$$

(1) *ва* (4) *тенгламалар системалари ўзаро эквивалент, яъни улар бир вақтда ё биргаликда эмас, ёки бир вақтда биргаликда ва бир хил ечимларга эга.* Дарҳақиқат, $k_1, k_2,\ldots,k_n$ лар (1) системанинг ихтиёрий ечими бўлсин. Бу сонлар (4) системанинг иккинчи тенгламасидан ташқари барча тенгламаларини қаноатлантириши равшан. Бироқ улар (4) системанинг иккинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиради—бунга ишонч ҳосил қилиш учун бу тенглама (1) системанинг иккинчи ва биринчи тенгламалари орқали қандай ифодаланишини эслаш кифоя. Аксинча, (4) системанинг ҳар қандай ечими (1) системани ҳам қаноатлантиради. Дарҳақиқат, (1) системанинг иккинчи тенгламаси (4) системанинг биринчи тенгламасини $-c$ га кўпайтириб, унинг иккинчи тенгламасининг ҳар иккала томонидан айириш орқали ҳосил қилинади.

Агар (1) системага юқорида кўрилган алмаштиришни бир неча марта татбиқ қилсак, у ҳолда тенгламаларнинг янги ҳосил қилинган системаси дастлабки (1) системага эквивалентлигича қолиши тушунарлидир.

Шундай ҳол рўй бериши мумкинки, бундай алмаштиришлардан сўнг системамизда чап томонидаги барча коэффициентлари нолга тенг бўлган тенглама пайдо бўлиб қолади. Агар бу тенгламанинг озод ҳади ҳам нолга тенг бўлса, тенглама номаълумларнинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлади ва шунинг учун *бу тенгламани ташлаб юбориб, берилган системага эквивалент бўлган тенгламалар системасига эга бўламиз.* Агар бу тенгламанинг озод ҳади нолдан фарқли бўлса, бу тенглама номаълумларнинг ҳеч қандай қийматларида ўринли бўлмайди ва шунинг учун *ҳосил қилган системамиз унга эквивалент бўлган дастлабки система каби биргаликда бўлмайди.*

Энди Гаусс методини баён қилишга ўтамиз.

Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаси (1) берилган бўлсин. Аниқлик учун $a_{11}\neq 0$ бўлсин дейлик. Аслида у нолга тенг ҳам бўлиши мумкин, албатта. Бунда ишни системанинг биринчи тенгламасидаги бирорта нолдан фарқли коэффициентдан бошлашимиз лозим.

Энди биринчи тенгламадан ташқари барча тенгламаларда x_1 ни йўқотиб, (1) системани ўзгартирамиз. Бунинг учун биринчи тенгламанинг ҳар иккала томонини $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ сонга кўпайтириб, иккинчи тенгламанинг мос қисмларидан айирамиз, сўнгра $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ сонга кўпайтирилган биринчи тенгламанинг иккала қисмини учинчи тенгламанинг мос қисмларидан айирамиз ва ҳоказо.

Ана шу йўл билан биз n номаълумли s та чизиқли тенгламадан иборат янги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a'_{s2}x_2 + a'_{s3}x_3 + \ldots + a'_{sn}x_n &= b'_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Янги a'_{ij} коэффициентларнинг ва b'_i озод ҳадларнинг ифодасини берилган (1) системанинг коэффициентлари ва озод ҳадлари орқали ошкор равишда ёзишга зарурат йўқ.

(5) тенгламалар системаси (1) системага эквивалент эканлиги бизга маълум. Энди (5) системани ўзгартирамиз. Бунда биринчи тенгламага мутлақо тегмаймиз ва (5) системанинг биринчи тенгламасидан ташқари барча тенгламаларидан иборат қисмини алмаштириш керак деб ҳисоблаймиз. Бунда бу тенгламалар ичида чап томонларининг барча коэффициентлари нолга тенг бўлган тенгламалар мавжуд эмас деб ҳисоблаймиз, албатта бундай тенгламаларни, агар уларнинг озод ҳадлари ҳам нолга тенг бўлса, ташлаб юборган бўлар эдик, акс ҳолда эса системанинг биргаликда эмаслигини исбот қилган бўлар эдик Шундай қилиб, a'_{ij} коэффициентлар орасида нолдан фарқлилари бор; аниқлик учун $a'_{22} \neq 0$ деб қабул қиламиз. Энди (5) системани ўзгартирамиз, бунинг учун

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}},\ \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \ldots, \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}$$

сонларга кўпайтирилган иккинчи тенгламанинг ҳар иккала қисмини мос равишда учинчи ва ундан кейинги тенгламаларнинг иккала қисмидан айирамиз. Бу билан биринчи ва иккинчи тенгламадан ташқари барча тенгламаларда x_2 номаълумни йўқотдик ва (5) системага эквивалент ва шунинг учун (1) системага ҳам эквивалент бўлган қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a''_{t3}x_3 + \quad + a''_{tn}x_n &= b''_t. \end{aligned}\right\}$$

Энди системамиз t та тенгламага эга бўлади, $t \leqslant s$, чунки баъзи тенгламалар ташлаб юборилган бўлиши ҳам мумкин. Система тенгламаларининг сони x_1 номаълум йўқотилганидан кейинoқ камайиши мумкинлиги тушунарлидир. Сўнгра ҳосил қилинган системанинг дастлабки иккита тенгламасидан ташқари барча тенгламаларидан иборат қисмигина алмаштирилади.

Номаълумларни кетма-кет йўқотиш процесси қачон тўхтайди?

Агар биз тенгламаларидан бири нолдан фарқли озод ҳадга эга бўлиб, чап томонидаги барча коэффициентлари эса нолга тенг бўлган системага эга бўлиб қолсак, у ҳолда биламизки, берилган система биргаликда бўлмайди.

Акс ҳолда, (1) системага эквивалент бўлган қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}\,x_k + \ldots + a'_{2n}\,x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(k-2)}_{k-1,\,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,k}\,x_k + \ldots + a^{(k-2)}_{k-1,\,n}x_n = b^{(k-2)}_{k-1}, \\ a^{(k-1)}_{kk}\,x_k + \ldots + a^{(k-1)}_{kn}\,x_n = b^{(k-1)}_k. \end{array}\right| \quad (6)$$

Бу ерда

$$a_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0,\ \ldots,\ a^{(k-2)}_{k-1,k-1} \neq 0$$
$$a^{(k-1)}_{kk} \neq 0$$

Шунингдек, $k \leqslant s$ эканлигини қайд қилиб ўтамиз, равшанки, $k \leqslant n$.

Бу *ҳолда (1) система биргаликдадир. У $k = n$ бўлганда аниқ ва $k < n$ бўлганда аниқмас бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, агар $k = n$ бўлса, (6) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(n-1)}_{nn}\,x_n = b^{(n-1)}_n. \end{array}\right| \quad (7)$$

Охирги тенгламадан x_n номаълум учун тайин бир қиймат ҳосил қиламиз. Бу қийматни охиридан иккинчи тенгламага қўйиб, x_{n-1} номаълум учун бир қийматли аниқланган тайин қиймат топамиз. Шундай давом эттириб, (7) система ва бинобарин (1) система ягона ечимга эга эканлигини топамиз, яъни улар биргаликда ва аниқ эканлигини кўрамиз.

Агар $k < n$ бўлса, у ҳолда „озод" номаълумлар $x_{k+1}, \ldots, x_n$ учун ихтиёрий сонли қийматлар оламиз, сўнгра (6) системада пастдан юқорига қараб ҳаракатланиб, юқоридаги каби x_k, $x_{k-1}, \dots, x_2$, x_1 номаълумлар учун тайин қийматлар топамиз. Озод ўзгарувчиларнинг қийматларини чексиз кўп усул билан танлаб олиш мумкин бўлгани учун бизнинг (6) системамиз, демак, (1) системамиз биргаликда, бироқ аниқмас бўлади. Бу ерда кўрсатилган усул билан (озод номаълумларнинг қийматларини мумкин бўлган барча танлашларда) (1) системанинг барча ечимлари топилишини осонгина текшириш мумкин.

Юзаки қараганда Гаусс методи ёрдами билан чизиқли тенгламалар системаси келтирилиши мумкин бўлган яна бир кўриниш, чунончи (7) системага фақат x_n номаълумга эга бўлган бир нечта тенгламани қўшиб ёзиш туфайли ҳосил бўладиган кўриниш мавжуддай туюлади. Аслида эса бу ҳолда алмаштириш охиригача етказилмагандир: $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ бўлгани учун $n+1$-сидан бошлаб барча тенгламаларда x_n номаълум йўқотилиши мумкин.

Тенгламалар системасининг (7) „учбурчак“ ёки (6) „трапецоидал“ ($k < n$ бўлганда) шакли a_{11}, a'_{22} ва ҳоказо коэффициентлар нолдан фарқли деган фараз остида ҳосил бўлди. Умумий ҳолда номаълумларни йўқотиш процессини охиригача етказганимиздан кейин ҳосил бўладиган тенгламалар системаси номаълумларнинг номерланиши кераклича ўзгартирилганидан кейингина учбурчак ёки трапецоидал шаклга эга бўлади.

Юқорида айтилганларни якунлаб қуйидагини ҳосил қиламиз: *Гаусс методини чизиқли тенгламаларнинг ҳар қандай системаси учун татбиқ этиш мумкин. Бунда, агар алмаштиришлар процессида барча номаълумларининг олдидаги коэффициентлари нолга тенг, озод ҳади эса нолдан фарқли бўлган тенглама ҳосил қилсак, система биргаликда бўлмайди; агар бундай тенгламага эга бўлмасак, система биргаликда бўлади. Агар биргаликдаги система (7) учбурчак кўринишига келса, у аниқ бўлади ва $k<n$ бўлганда (6) трапецоидал кўринишга келса, аниқмас бўлади.*

Айтилганларни чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси бўлган ҳолга, яъни озод ҳадлари нолга тенг бўлган тенгламаларга қўллайлик. Бундай система ҳар доим биргаликда бўлади, чунки у $(0, 0, \dots, 0)$ ноль ечимга эга. Қаралаётган системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик бўлсин. У ҳолда системамиз учбурчак шаклига келтирилиши мумкин эмас; чунки Гаусс методи бўйича ўзгартириш процессида тенгламалар сони камайиши мумкин, лекин ортиши мумкин эмас; бинобарин у трапецоидал кўринишга келтирилади, яъни аниқмасдир.

Бошқача айтганда, *агар чизиқли бир жинсли тенгламалар системасида тенгламалар сони номаълумлар сонидан* *кичик бўлса, бу система ноль ечимдан ташқари яна ноль бўлмаган*, яъни баъзи (ёки ҳатто, барча) номаълумларнинг қийматлари нолдан фарқли ечимларга ҳам эга бўлади; *бундай ечимлар чексиз кўп бўлади.*

Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс методи билан ечишда система коэффициентларидан тузилган матрицани ёзиб олиб, унга озод ҳадлардан иборат устунни қўшиб қўйиш керак (қулайлик учун бу устунни вертикал чизиқча билан ажратиб қўйиш керак) ва барча алмаштиришларни бу „кенгайтирилган" матрица устида бажариш керак.

Мисоллар. 1. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг кенгайтирилган матрицасини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right.$$

Натижада, ягона ечим $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=-1$ га эга бўлган лар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9, \\ -3x_2 - 2x_3 &= 11, \\ -8x_3 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Берилган система аниқ экан.

2. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1, \\ x_1 \qquad - 7x_3 + 2x_4 &= -5, \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Системанинг кенгайтирилган матрицасини ўзгартирамиз;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

$0=2$ тенгламага эга бўлган системага келдик. Демак, берилган система биргаликда эмас.

3. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу система бир жинсли тенгламалар системаси, шу билан бирга тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик: шунинг учун у аниқмас бўлиши керак. Барча озод ҳадлар нолга тенг бўлганлиги сабабли системанинг фақат коэффициентларидан тузилган матрицани ўзгартирамиз:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} 2x_3 \qquad\quad - 2x_4 &= 0, \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

Озод номаълум сифатида x_2 ёки x_4 номаълумларнинг ихтиёрий бирини олиш мумкин. $x_4 = \alpha$ бўлсин, У ҳолда биринчи тенгламадан $x_2 = \alpha$ эканлиги келиб чиқади,шундан сўнг иккинчи тенгламадан $x_3 = \frac{4}{5}\alpha$ ни, ва, ниҳоят учинчи тенгламадан $x_1 = \frac{3}{5}\alpha$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$\frac{3}{5}\alpha,\ \alpha,\ \frac{4}{5}\alpha,\ \alpha$$

лар берилган тенгламалар системаси ечимларининг умумий кўриниши бўлади.

2- §. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар

Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг олдинги параграфда баён қилинган усули анча содда бўлиб, ҳисоблаш машиналарида осонгина амалга ошириш мумкин бўлган бир хилдаги ҳисоблашларни бажаришни тақозо этади. Шундай бўлсада, унинг муҳим камчилиги системанинг биргаликда бўлиши ёки аниқ эканлигини ифодаловчи шартларни система коэффициентлари ва озод ҳадлар ёрдамида таърифлашга имкон бермаслигидир.

Бундан ташқари, система аниқ бўлган тақдирда ҳам, бу усул система ечимларини унинг коэффициентлари ва озод ҳадлари орқали ифодаловчи формулаларни топишга имкон бермайди. Буларнинг барчаси турли назарий масалаларни ечишда, хусусан, геометрик тадқиқотларда зарурдир, шунинг учун чизиқли тенгламалар системаси назариясини бошқача, янада кучли усуллар билан ривожлантиришга тўғри келади. Умумий ҳол кейинги бобда қаралади, мазкур бобнинг мазмуни эса тенгламаларининг ва номаълумларининг сони тенг бўлган аниқ системага бағишланади. Баёнимизни элементар алгебра курсида ўрганилган икки ва уч номаълумли системалардан бошлаймиз.

Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}\right\} \begin{matrix} a_{22} \\ a_{12} \end{matrix} \qquad (1)$$

Бу системанинг коэффициентлари иккинчи тартибли квадрат матрица ташкил этади:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

(1) системага коэффициентларни тенглаш усулини қўллаб,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

ни ҳосил қиламиз.

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

Номаълумларнинг ҳосил қилинган қийматларини (1) га қўйиб, (3) ифодалар (1) системанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин; бу ечимнинг ягоналиги масаласи 7- § да қаралади.

Номаълумларнинг қийматлари (3) нинг умумий махражи (2) матрица элементлари орқали осонгина ифодаланади: у бош диагональ элементлари кўпайтмасидан иккинчи диагональ элементлари кўпайтмасининг айирилганига тенг. Бу сон (2) матрицанинг *детерминанти* (ёки *аниқловчиси*) ёки одатда *иккинчи тартибли детерминанти* дейилади; чунки (2) матрица иккинчи тартибли матрицадир. (2) матрицанинг детерминантини белгилаш учун қуйидаги символ ишлатилади: (2) матрица кўчириб ёзилади, бироқ у қавслар ўрнига тўғри чизиқчалар орасига олинади; шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{4}$$

Мисоллар.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 5;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 11.$

Яна шуни бир бор таъкидлаш лозимки, матрица сонлардан иборат жадвал бўлса, детерминант квадрат матрица билан маълум равишда боғлиқ бўлган сондир. $a_{11}a_{22}$ ва $a_{12}a_{21}$ кўпайтмалар иккинчи тартибли детерминантнинг *ҳадлари* деб аталишини қайд қилиб ўтамиз.

(3) ифодаларнинг суратлари махраж эга бўлган кўринишга эга, яъни улар ҳам иккинчи тартибли детерминантлардир: x_1 учун ифоданинг сурати (2) матрицадан унинг биринчи усту-

нини (1) системанинг озод ҳадлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлган матрицанинг детерминантидир, x_2 учун ифоданинг сурати (2) матрицадан унинг иккинчи устунини худди шундай алмаштиришдан ҳосил бўлган матрица детерминантидир. Энди (3) формулаларни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (5)$$

Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини ечишнинг (*Крамер қоидаси* деб аталувчи) бу қоидаси сўз билан қуйидагича ифодаланади:

Агар (1) *тенгламалар системасининг коэффициентларидан тузилган* (4) *детерминант нолдан фарқли бўлса*, у *ҳолда* (1) *системанинг ечимини қуйидагича ҳосил қиламиз; номаълумларнинг қийматлари учун шундай касрларни қабул қиламизки, уларнинг умумий махражи бўлиб* (4) *детерминант хизмат қилади;* x_i, $i = 1, 2$[1] *номаълумнинг сурати эса* (4) *детерминантда* i- *устунни (яъни изланаётган номаълумнинг коэффициентлари устунини* (1) *системанинг озод ҳадларидан иборат устун билан алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган детерминантдан иборат бўлади*[1].

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7, \\ x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

системани ечинг.

Коэффициентлардан тузилган детерминант

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

бўлиб, у нолдан фарқли ва шунинг учун системага Крамер қоидасини қўллаш мумкин. Номаълумлар учун суратлар ушбу

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

детерминантлар бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги сонлар системаси системамизнинг ечими бўлади:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{19}{7}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{11}{7}.$$

---

[1] Биз бундай таърифлашда қисқалик учун „детерминантда" устунларни алмаштириш ҳақида сўзлаяпмиз. Худди шунга ўхшаш, келгусида ҳам, агар бу қулайроқ бўлса, детерминантнинг сатрлари ва устунлари ҳақида, унинг элементлари ҳақида, диагоналлари ҳақида ва бошқалар ҳақида сўз юритамиз.

Иккинчи тартибли детерминантларнинг киритилиши икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини ечишда (бундай системаларни ечишда шу пайтгача ҳеч қандай қийинчилик туғилмаган) сезиларли енгиллик туғдирмайди. Лекин уч *номаълумли учта чизиқли тенглама системаси* бўлган ҳол учун бундай методлар амалий жиҳатдан фойдали бўлади.

Қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

система ва унинг коэффициентларидан тузилган

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

матрица берилган бўлсин.

(6) тенгламалардан биринчисининг ҳар иккала қисмини $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ га, иккинчи тенгламанинг ҳар иккала қисмини $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ га, учинчи тенгламанинг иккала қисмини $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ га кўпайтириб, сўнгра учала тенгламани қўшсак, осонгина текшириб кўриш мумкинки, x_2 ва x_3 ларнинг коэффициентлари нолга тенг бўлиб қолади, яъни бу номаълумлар бир пайтда йўқотилади ва биз қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32})\,x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - \\ - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}.\end{gathered} \tag{8}$$

Бу тенгликда x_1 олдидаги коэффициент (7) матрицага мос келувчи *учинчи тартибли детерминант* дейилади. Уни ёзиш учун иккинчи тартибли детерминант бўлган ҳолдаги каби символика қўлланади; шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{9}$$

Учинчи тартибли детерминантнинг ифодаси узундан-узоқ бўлса-да, унинг (7) матрица элементларидан тузилиш қонуни анча соддадир. Дарҳақиқат, детерминантнинг (9) ифодасига мусбат ишора билан кирувчи учта элементидан биттаси бош диагональ элементлари кўпайтмасидан иборат бўлади, бошқа иккита элементнинг ҳар бири бу диагоналга параллел тўғри чизиқда ётувчи элементлар билан матрицанинг қарама-қарши бурчагида ётган элемент кўпайтмасидан иборатдир. (9)га манфий ишора билан кирувчи ҳадлар худди шу усулда, бироқ иккинчи диагоналга нисбатан тузилади. Шундай қилиб, учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблашда (бир оз машқ қилинганда) натижага анча тез олиб келувчи усулни ҳосил қиламиз.

1- чизма.

1- чизмада чап томонда учинчи тартибли детерминантнинг мусбат ҳадларини, ўнг томонда унинг манфий ҳадларини ҳисоблаш схемаси кўрсатилган.

Мисоллар.

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5 + 1\cdot1\cdot2 + 2(-4)\cdot3 - 2\cdot3\cdot2 - 1\cdot(-4)\cdot5 - 2\cdot1\cdot3 = 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 16 = 10.$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0 + 0\cdot2\cdot1 + (-5)\cdot(-2)\cdot(-2) - (-5)\cdot3\cdot1 - 0\cdot(-2)\cdot0 - (1)\cdot2\cdot(-2) = -20 + 15 + 4 = -1.$$

(8) тенгликнинг ўнг томони ҳам учинчи тартибли детерминант бўлади, бу детерминант (7) матрицанинг биринчи устунини (6) системанинг озод ҳадлари устуни билан алмаштиришдан ҳосил қилинган матрица детерминантидир. Агар (9) детерминантни d ҳарфи билан, унинг j- устунини ($j = 1, 2, 3$) (6) системанинг озод ҳадларидан иборат устун билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантни d_j символ билан белгиласак, (8) тенглик $dx_1 = d_1$ кўринишга келади, бу ердан $d \neq 0$ бўлганда

$$x_1 = \frac{d_1}{d} \tag{10}$$

келиб чиқади.

Ана шундай йўл билан (6) тенгламани мос равишда

$$a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},\quad a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},\quad a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

сонларга кўпайтириб, x_2 учун (яна $d \neq 0$ бўлганда) қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$x_2 = \frac{d_2}{d}. \tag{11}$$

Ниҳоят, бу тенгламаларни мос равишда $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ларга кўпайтириб, x_3 учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$x_3=\frac{d_3}{d}. \qquad (12)$$

(10)—(12) ифодаларни (6) тенгламага келтириб қўйсак (d ва барча d_j детерминантлар очиб ёзилган деб фараз қилиниши табиийдир), узундан-узоқ, бироқ китобхонга тушунарли бўлган ҳисоблашлар ёрдамида берилган барча тенгламалар қаноатланишини, яъни (10)—(12) сонлар (6) системанинг ечимини ташкил этишини кўрган бўлар эдик. Шундай қилиб, *агар уч номаълумли учта тенглама системасининг коэффициентларидан тузилган детерминант нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу системанинг ечими Крамер қоидаси бўйича топилиши мумкин. Бу ҳол учун ҳам Крамер қоидаси иккита тенглама системаси бўлган ҳолдаги каби ифодаланади.* Бу тасдиқнинг бошқача (биз тушириб қолдирган ҳисоблашларга таянмайдиган) исботини, шунингдек, (6) системанинг (10)—(12) ечимлари ягоналигининг—шу билан бирга, янада умумий ҳол учун—исботини китобхон 7-§ дан топади.

Мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=0,\\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1,\\ x_1+3x_2-2x_3&=4. \end{aligned}\right\}$$

Коэффициентлардан тузилган детерминант нолдан фарқли:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,$$

шунинг учун системага Крамер қоидасини қўллаш мумкин. Номаълумлар учун сураглар ушбу

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21$$

детерминантлар бўлади, яъни системанинг ечими қуйидаги сонлар системасидан иборат бўлади:

$$x_1=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

3-§. Ўрин алмаштиришлар ва ўрнига қўйишлар

n-тартибли детерминантларни аниқлаш ва ўрганиш учун бизга чекли тўпламларга доир баъзи тушунчалар ва фактлар керак бўлади, n та элементдан иборат бирорта чекли M тўплам берилган бўлсин Бу элементлар дастлабки n та 1, 2, ...,

n натурал сонлар ёрдамида номерлаб чиқилиши мумкин ва бизни қизиқтирадиган масалаларда бу тўплам элементларининг индивидуал хоссалари ҳеч қандай аҳамият касб этмаганлиги сабабли, биз M тўпламнинг элементлари учун $1, 2, \ldots, n$ сонларнинг ўзини олиб қўя қоламиз.

$1, 2, \ldots, n$ сонларнинг жойлашишининг биз фойдаланадиган нормал тартибдан ташқари уларни яна бошқа кўп усуллар билан тартиблаш мумкин. Масалан, 1, 2, 3, 4 сонларни яна қуйидаги усуллар билан жойлаштириш мумкин: 3, 1, 2, 4 ёки 2, 4, 1, 3 ва ҳоказо. $1, 2, \ldots, n$ сонларнинг маълум бир аниқ тартибда ҳар қандай жойлашишига n та сондан (ёки n та символдан) тузилган *ўрин алмаштириш* дейилади.

n та символдан иборат ҳар хил ўрин алмаштиришлар сони $n!$ („эн факториал“ деб ўқилади) билан белгиланувчи *$1 \cdot 2 \ldots n$ кўпайтмага тенг.* Дарҳақиқат, n та символдан иборат ўрин алмаштиришнинг умумий кўриниши $i_1, i_2, \ldots, i_n$ бўлади, бу ерда i_s ларнинг ҳар бири $1, 2, \ldots, n$ сонларнинг бири, шу билан бирга $1, 2, \ldots, n$ сонларнинг ҳеч қайсиси икки марта учрамайди. i_1 деб $1, 2, \ldots, n$ сонларнинг ихтиёрий бирортасини олиш мумкин; бу n та турли имкониятларни беради. Агар, энди i_1 танлаб олинган бўлса, у ҳолда i_2 деб қолган $n-1$ та сондан биринигина олиш мумкин, яъни i_1 ва i_2 символларни танлаб олишнинг турли усуллари сони $n(n-1)$ кўпайтмага тенг ва ҳоказо.

Шундай қилиб, n та символдан иборат ўрин алмаштиришлар сони $n = 2$ да $2! = 2$ га тенг (12 ва 21 ўрин алмаштиришлар; $n \leqslant 9$ бўлган мисолларда ўринлари алмашинаётган символларни вергул билан ажратмаймиз), $n = 3$ да бу сон $3! = 6$ га $n = 4$ да у $4! = 24$ га тенг. Сўнгра n нинг ўсиши билан ўри алмаштиришлар сони ниҳоятда тез ўсади; масалан, $n = 5$ д у $5! = 120$ га, $n = 10$ да эса 3 628 800 га тенг.

Агар бирорта ўрин алмаштиришда ихтиёрий иккита символнинг (ёнма-ён турган бўлиши шарт эмас) ўринларини алмаштириб, қолган символларни ўз ўрнида қолдирсак, равшанки, янги ўрин алмаштиришни ҳосил қиламиз. Ўрин алмаштиришни бундай ўзгартириш (алмаштириш) *транспозиция* дейилади.

n та символдан иборат барча $n!$ ўрин алмаштиришларни шундай тартибда жойлаштириш мумкинки, бунда ҳа бир кейинги ўрин алмаштириш олдингисидан биргина транспозиция ёрдамида ҳосил қилинади, шу билан бирга транспозициялашни ихтиёрий ўрин алмаштиришдан бошла мумкин.

Бу тасдиқ $n = 2$ да ўринли: агар 12 ўрин алмаштиришда бошлаш талаб қилинаётган бўлса, изланаётган жойлашув 12, 21 бўлади; агар 21 ўрин алмаштиришдан бошлаш лозим бўлса, бу жойлашув 21, 12 бўлади Тасдиғимиз $n-1$ учун исбот қилинган деб фараз қилиб, уни n учун исботлаймиз.

$$i_1, i_2, \ldots, i_n \qquad (1$$

ўрин алмаштиришдан бошлашимиз керак бўлсин. Биринчи ўринда i_1 турган n символдан иборат барча ўрин алмаштиришларни қараб чиқамиз. Бундай ўрин алмаштиришлар $(n-1)!$ та ва уларни теореманинг талабларига мослаб тартиблаштириш, шу билан бирга (1) ўрин алмаштиришдан бошлаш мумкин, чунки бу аслида $n-1$ та символдан иборат барча ўрин алмаштиришларни тартиблаштиришга келтирилади. Бундай тартиблашни индуктив фаразга мувофиқ ихтиёрий ўрин алмаштиришдан, хусусан, $i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришдан бошлаш мумкин, n та символдан ана шундай йўл билан ҳосил қилинган ўрин алмаштиришларнинг охиргисида i_1 символни ихтиёрий бошқа бир символ билан, масалан, i_2 билан транспозициялаймиз ва янги ҳосил қилинган ўрин алмаштиришдан бошлаб, биринчи ўринда i_2 турган барча ўрин алмаштиришларни кераклича тартиблаштирамиз ва ҳоказо. Бундай йўл билан, равшанки, n символдан иборат барча ўрин алмаштиришларни саралаб чиқиш мумкин.

Бу теоремадан, *n символдан иборат ихтиёрий ўрин алмаштиришдан ўша символлардан тузилган бошқа ўрин алмаштиришга бир нечта транспозиция ёрдамида ўтиш мумкинлиги* келиб чиқади.

Агар берилган ўрин алмаштиришда $i > j$ бўлиб, бироқ i бу ўрин алмаштиришда j дан олдин турган бўлса, i ва j сонлар *инверсия* ташкил этади дейилади. Агар ўрин алмаштиришнинг символлари жуфт сондаги инверсия ташкил этса, у *жуфт*, акс ҳолда эса *тоқ* дейилади. Масалан, 1, 2, ..., n ўрин алмаштириш ҳар қандай n да жуфт бўлади, чунки унда инверсиялар сони нолга тенг. 451362 ($n = 6$) ўрин алмаштириш 8 та инверсияга эга ва шунинг учун жуфт, 38524671 ($n = 8$) ўрин алмаштириш 15 та инверсияга эга ва шунинг учун тоқдир.

Ҳар қандай транспозиция ўрин алмаштиришнинг жуфт-тоқлигини ўзгартиради.

Бу муҳим теоремани исботлаш учун транспонирланаётган i ва j символлар ёнма-ён турган, яъни ўрин алмаштириш ..., i, j, ... кўринишга (бу ердаги кўп нуқталар транспозицияда тегилмайдиган символларни билдиради) эга бўлган ҳолни қараймиз. Транспозиция бизнинг ўрин алмаштиришимизни ..., j, i, ... ўрин алмаштиришга айлантиради, шу билан бирга, равшанки, ҳар иккала ўрин алмаштиришда i, j символларнинг ҳар қайсиси ўз ўрнида қолган символлар билан бир хил инверсия ташкил этади. Агар i ва j символлар аввал инверсиялар ташкил этмаган бўлса, у ҳолда янги ўрин алмаштиришда битта янги инверсия пайдо бўлади, яъни инверсиялар сони биттага ортади; агар улар аввал инверсия ташкил этган бўлса, у ҳолда энди у инверсия йўқолади, яъни инверсиялар сони битта камаяди. Ҳар иккала ҳолда ҳам инверсиянинг жуфт-тоқлиги ўзгаради.

Энди транспозицияланаётган i ва j символлар орасида s та ($s > 0$) символ жойлашган бўлсин, яъни ўрин алмаштириш

$$\ldots, i, k_1, k_2, \ldots k_s, j, \ldots \tag{2}$$

кўринишга эга бўлсин.

i ва j символларнинг транспозициясини қўшни элементларнинг транспозициясини $2s+1$ марта кетма-кет бажариш натижасида ҳосил қилиш мумкин. Булар i ва k_1 символларнинг, сўнгра i (энди у k_1 символ ўрнида турган бўлади) ва k_2 ва ҳоказо символларнинг ўрнини то i символ k_s символнинг ўрнини эгалламагунча бўладиган транспозициялардир. Бу s та транспозициядан кейин i ва j символларни алмаштирувчи транспозиция, сўнгра j символнинг барча k лар билан s та транспозицияси келади, шундан сўнг j символ i нинг ўрнини эгаллайди, k символлар эса ўзларининг эски ўринларига қайтиб келади Шундай қилиб, биз ўрин алмаштиришнинг жуфт-тоқлигини тоқ марта ўзгартирдик, шунинг учун (2) ва

$$\ldots, j, k_1, k_2 \ldots, k_s, i \ldots \tag{3}$$

ўрин алмаштиришларнинг жуфт-тоқлиги қарама-қаршидир.

$n \geqslant 2$ бўлганда n та символдан тузилган жуфт ўрин алмаштиришлар сони тоқ ўрин алмаштиришлар сонига яъни $\frac{1}{2}n!$ га тенг.

Дарҳақиқат, илгари айтилганлар асосида n га символдан иборат ҳамма ўрин алмаштиришларни шундай тартиблаштирамизки, уларнинг ҳар қайсиси олдингисидан биргина транспозиция орқали ҳосил бўлади.

Қўшни ўрин алмаштиришлар қарама-қарши жуфт-тоқликка эга бўлади, яъни улар шундай жойлашганки, жуфт ва тоқ ўрин алмаштиришлар навбатлашиб келади Энди бизнинг тасдиғимиз $n \geqslant 2$ да $n!$ сон жуфтдир деган кўриниб турган изоҳдан келиб чиқади.

Энди янги бир, яъни *n-даражали ўрнига қўйиш* деган тушунчани киритамиз. n символдан иборат иккита ўрин алмаштиришни бирининг остига иккинчисини ёзиб ҳосил бўлган иккита сатрни қавсга оламиз; масалан $n = 5$ бўлганда:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Бу мисолда[1] 3 сони остида 5 сони, 5 сони остида 2 сони турибди ва ҳоказо. Биз 3 сони 5 га *ўтади*, 5 сони 2 га ўтади, 1 сони 3 га ўтади, 4 сони 4 га ўтади (ёки *ўз ўрнида қолади*) ва, ниҳоят, 2 сони 1 га ўтади деймиз. Шундай қилиб, (4) кўринишда бири иккинчисининг тагига ёзилган иккита ўрин алмаштириш биринчи бешта натурал сондан иборат тўпламни ўз-ўзига *ўзаро бир қийматли аксланишини*, яъни 1, 2, 3, 4, 5 натурал сонларнинг ҳар бирига мос равишда шу натурал сонларнинг бирортасини мос қўювчи аксланишни аниқлайди (шу билан бирга, турли сонларга турли сонлар мос қўйилади). Бунда сонлар атиги 5 та, яъни тўплам чекли бўлгани учун бу бешта соннинг ҳар бири 1, 2, 3, 4, 5 сонларнинг бирига, яъни ўзи „ўтадиган“ сонга мос келади.

Биринчи бешта натурал сондан иборат тўпламни (4) ёрдамида ҳосил қилинган ўзаро бир қийматли аксланишни бешта символдан иборат бошқа бир жуфт ўрин алмаштиришларни бирини тагига иккинчисини ёзиб ҳосил қилишимиз ҳам мумкин эканлиги равшандир. Бу ёзувлар (4) дан устунларни бир неча марта транспозициялаш орқали ҳосил қилинади; масалан, қуйидагилар бунга мисол бўлиши мумкин:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Бу ёзувларнинг барчасида 3 сони 5 га, 5 сони 2 га ўтади ва ҳоказо.

Худди шунингдек, бири иккинчисининг тагига ёзилган n та символдан иборат иккита ўрин алмаштириш ҳам биринчи n та натурал сондан иборат тўпламни ўз-ўзига ўзаро бир қийматли бирор аксланишини аниқлайди. Биринчи n та натурал сондан иборат A тўпламнинг ўз-ўзига ўзаро бир қийматли аксланиши *n-даражали ўрнига қўйиш* дейилади. Шу билан бирга, равшанки, ҳар қандай A ўрнига қўйишни бири иккинчиси тагига ёзилган иккита ўрин алмаштириш ёрдамида ёзиш мумкин:

$$A = \begin{pmatrix} i_1, & i_2 & \ldots, & i_n \\ a_{i_1}, & a_{i_2}, & \ldots, & a_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

бу ерда a_i орқали A ўрнига қўйишда i сони ($i = 1, 2, \ldots, n$) ўтадиган сон белгиланган.

A ўрнига қўйиш (6) кўринишдаги кўпгина ҳар хил ёзувларга эга. Масалан, (4) ва (5) биргина 5-даражали ўрнига қўйишнинг ҳар хил ёзувларидир.

---

[1] Ташқи кўринишдан у иккита сатр ва 5 та устундан иборат матрицани эслатса-да бироқ бутунлай бошқача маънога эга.

A ўрнига қўйишнинг бир ёзувидан иккинчисига устунларни бир неча марта транспозициялаш ёрдамида ўтиш мумкин. Бунда (6) кўринишдаги шундай ёзувни ҳосил қилиш мумкинки, унинг юқори (ёки пастки) сатрида n та символдан иборат олдиндан берилган ўрин алмаштириш туриши мумкин. Хусусан, n-даражали ихтиёрий A ўрнига қўйиш қуйидаги

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

кўринишда, яъни юқори сатрида натурал сонлар жойлашган кўринишда ёзилиши мумкин. Бундай ёзувда ҳар хил ўрнига қўйишлар бир-биридан пастки сатрда турган ўрин алмаштиришлар билан фарқланади ва шунинг учун *n-даражали ўрнига қўйишлар n та символдан иборат ўрин алмаштиришлар сонига, яъни $n!$ га тенг.*

n-даражали ўрнига қўйишга мисол қилиб барча символлари ўз ўрнида қоладиган ушбу *айнан ўрнига қўйишни* келтириш мумкин:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

A ўрнига қўйишнинг (6) ёзувида юқори ва пастки сатрлар турлича роль ўйнайдилар ва уларнинг ўринларини алмаштириб, умуман айтганда, бошқа ўрнига қўйишни ҳосил қиламиз Масалан, 4-даражали ушбу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ва } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишлар ҳар хил: биринчида 2 сони 4 га, иккинчида 2 сони 3 га ўтади.

n-даражали A ўрнига қўйишнинг ихтиёрий (6) ёзувини олайлик. Бу ёзувнинг юқори ва пастки сатрларини ташкил этувчи ўрин алмаштиришлар ёки бир хил, ёки қарама-қарши жуфт-тоқликка эга бўлиши мумкин. A ўрнига қўйишнинг бошқа бир ихтиёрий ёзувига ўтиш юқори сатрда бир нечта транспозицияни кетма-кет бажариш ва пастки сатрда уларга мос транспозицияларни бажариш орқали амалга оширилиши мумкинлигини биламиз. Бироқ (6) ёзувнинг юқори сатрида битта транспозицияни бажариб ва пастки сатрида мос элементларни битта транспозициялаб, биз бир вақтнинг ўзида ҳар иккала ўрин алмаштиришларнинг жуфт-тоқлигини ўзгартирамиз ва шунинг учун ҳам бу жуфт-тоқликларнинг бир хилда ёки қарама-қарши бўлишини сақлаймиз. Бу ердан, *A ўрнига қўйишнинг барча ёзувларида юқори ва пастки сатрларнинг жуфт-тоқлиги ёки бир хилда бўлиши, ёки барча ёзувларда қарама-қарши бўлишлиги келиб чиқади.* Биринчи ҳолда A ўрнига қўйиш *жуфт* дейилади, иккинчи ҳолда эса *тоқ* дейилади. Хусусан, айнан ўрнига қўйиш жуфт бўлади.

Агар A ўрнига қўйиш (7) кўринишда ёзилган бўлса, яъни юқори сатрида жуфт ўрин алмаштириш $1, 2, \ldots, n$ турган бўлса, у ҳолда A ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги пастки сатрда турган $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ўрин алмаштиришнинг жуфт-тоқлиги билан аниқланади. Бу ердан n-даражали жуфт ўрнига қўйишлар сони тоқ ўрнига қўйишлар сонига, яъни $\frac{1}{2}\ n!$ га тенг эканлиги келиб чиқади.

Ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги таърифига қуйидаги бир оз ўзгартирилган шакл бериш мумкин. Агар (6) ёзувда ҳар иккала сатрнинг жуфт-тоқлиги бир хил бўлса, у ҳолда ҳар иккала сатрда инверсиялар сони ё жуфт, ёки ҳар иккаласида ҳам тоқ, яъни (6) ёзувнинг иккала сатридаги инверсияларнинг умумий сони жуфт бўлади; агар (6) ёзувдаги сатрларнинг жуфт-тоқлиги қарама-қарши бўлса, у ҳолда бу иккала сатрдаги инверсияларнинг умумий сони тоқ бўлади. Шундай қилиб, *агар A ўрнига қўйишнинг ихтиёрий ёзувида иккала сатрдаги инверсияларнинг умумий сони жуфт бўлса, A ўрнига қўйиш жуфт бўлади, акс ҳолда тоқ бўлади.*

Мисол. Ушбу 5-даражали ўрнига қўйиш берилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бу ўрнига қўйишнинг юқори сатрида 4 та, пастки сатрида 7 та инверсия бор. Иккала сатрдаги инверсияларнинг умумий сони 11 ва шунинг учун ўрнига қўйиш тоқ.

Бу ўрнига қўйишни қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Юқори сатрдаги инверсиялар сони 0 та, пастдагиники 5 та, яъни инверсияларнинг умумий сони яна тоқ. Кўриб турибмизки, ўрнига қўйишнинг ҳар хил ёзувларида инверсияларнинг умумий сони эмас, балки бу соннинг жуфт-тоқлиги сақланади.

Энди ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлигини аниқлашнинг юқорида келтирилган шаклларига эквивалент бўлган бошқа шаклларини кўрсатмоқчимиз[1]. Ана шу мақсадда *ўрнига қўйишларни кўпайтиришни* аниқлаймиз. Бу тушунча мустақил равишда ҳам қизиқиш туғдиради. Маълумки, n-даражали ўрнига қўйишлар $1, 2, \ldots, n$ сонлар тўпламининг ўз-ўзига ўзаро бир қийматли аксланишидир. $1, 2, \ldots, n$ тўпламни ўз-ўзига кетма-кет икки марта ўзаро бир қийматли аксланиш натижаси,

---

[1] Бу бизга фақат 14-бобда керак бўлади, шунинг учун бу материални биринчи ўқишда ташлаб кетиш мумкин.

равшанки, яна бу тўпламни ўз-ўзига ўзаро бир қийматли акслантишидан иборат бўлади, яъни n-даражали иккита ўрнига қўйишни кетма-кет бажариш тайин бир учинчи n-даражали ўрнига қўйишга олиб келади. Бу ўрнига қўйиш берилган биринчи ўрнига қўйишнинг иккинчисига *кўпайтмаси* дейилади. Масалан, агар тўртинчи даражали

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишлар берилган бўлса, у ҳолда

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, A ўрнига қўйишда 1 символ 3 га ўтади, бироқ B да 3 символ 4 га ўтади, шунинг учун AB да 1 символ 4 га ўтади ва ҳоказо.

Бир хил даражали ўрнига қўйишларнигина ўзаро кўпайтириш мумкин.

n-даражали ўрнига қўйишларни кўпайтириш $n \geqslant 3$ да нокоммутативдир. Дарҳақиқат, юқорида кўрилган A ва B ўрнига қўйишлар учун BA кўпайтма

$$BA=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$

кўринишга эга, яъни BA ўрнига қўйиш AB дан фарқлидир. Коммутативлик қонуни баъзи ўрнига қўйишлар жуфти учун тасодифан бажариб қолишини ҳисобга олмаганда, бундай мисолларни $n \geqslant 3$ бўлган барча n лар учун топиш мумкин.

Ўрнига қўйишларни кўпайтириш ассоциативдир, яъни маълум тартибда (нокоммутатив бўлганлиги сабабли) олинган исталган чекли сондаги n-даражали ўрнига қўйишлар кўпайтмаси ҳақида сўз юритиш мумкин. Дарҳақиқат, A, B ва C ўрнига қўйишлар берилган бўлсин ва i_1 символ ($1 \leqslant i_1 \leqslant n$) A ўрнига қўйиш натижасида i_2 символга, i_2 символ B ўрнига қўйишда i_3 символга, бу эса ўз навбатида C ўрнига қўйишда i_4 символга ўтсин. У ҳолда AB ўрнига қўйиш натижасида i_1 символ i_3 символга, BC да i_2 символ i_4 га ва шунинг учун i_1 символ $(AB)C$ ўрнига қўйиш натижасида ҳам, $A(BC)$ ўрнига қўйиш натижасида ҳам i_4 символга ўтади.

Ихтиёрий A ўрнига қўйишнинг айнан ўрнига қўйиш E га кўпайтмаси, шунингдек, E нинг A га кўпайтмаси A га тенглиги равшан:

$$AE=EA=A.$$

Ниҳоят, A ўрнига қўйишга *тескари* ўрнига қўйиш деб ўша даражали шундай A^{-1} ўрнига қўйишга айтамизки, унинг учун

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

муносабат бажарилади.

Берилган

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйиш учун тескари ўрнига қўйиш бўлиб, A нинг юқори ва пастки сатрларини алмаштиришдан ҳосил бўлган

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйиш хизмат қилишини кўриш осон.

Энди махсус кўринишдаги ўрнига қўйишларни кўриб чиқамиз. Улар айнан ўрнига қўйиш E дан унинг пастки сатрида битта транспозиция бажариш натижасида ҳосил бўлади. Бундай ўрнига қўйишлар тоқдир; улар *транспозициялар* дейилади ва

$$\begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix} \tag{8}$$

кўринишга эга бўлади; бу ерда ўз ўрнида қоладиган символлар кўп нуқталар билан алмаштирилган. Бу транспозицияни (i, j) символ билан белгилашга келишиб оламиз. i, j символларнинг транспозициясини ихтиёрий A ўрнига қўйишнинг (7) ёзувидаги пастки сатрга қўллаш A ўрнига қўйишни ўнг томондан (8) ўрнига қўйишга, яъни (i, j) га кўпайтиришга тенг кучлидир.

Маълумки, n та символдан иборат барча ўрин алмаштиришларни уларнинг бироргасидан, масалан, $1, 2, \dots, n$ дан кетма-кет транспозициялар бажариб ҳосил қилиш мумкин; шунинг учун ҳар қандай ўрнига қўйиш айнан ўрнига қўйишнинг пастки сатрида бир нечта транспозицияни кетма-кет бажаришдан, яъни уни (8) кўринишдаги ўрнига қўйишга кетма-кет кўпайтиришдан ҳосил қилиниши мумкин. Демак, (E кўпайтувчини тушириб қолдириб) *ҳар қандай ўрнига қўйиш транспозицияларнинг кўпайтмаси кўринишида тасвирланади* деб таъкидлаш мумкин.

Ҳар қандай ўрнига қўйишни турлича усуллар билан транспозицияларнинг кўпайтмасига ёйиш мумкин. Масалан, кўпайтмада E ўрнига қўйишни берадиган, яъни ўзаро ейишиб кетадиган (i, j) (j, i) кўринишдаги иккита бир хил кўпайтувчини ҳар доим қўшимча қилиш мумкин.

Унчалик тривиал бўлмаган мисол кўрсатамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12)\,(15)\,(34) = (14)\,(24)\,(45)\,(34)\,(13).$$

Ўрнига қўйиш жуфт-тоқлигини аниқлашнинг янги усули қуйидаги теоремага асосланган:

Ўрнига қўйишнинг транспозицияларга кўпайтмасининг барча ёйилмаларида бу транспозициялар сонининг жуфт-тоқлиги бир хилда бўлади, шу билан бирга у ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги билан бир хилда бўлади.

Масалан, юқорида кўрилган мисолда ўрнига қўйиш тоқ бўлади, буни инверсиялар сонини ҳисоблаш билан текшириш ҳам мумкин.

Агар биз *исталган k та транспозициянинг кўпайтмаси жуфт-тоқлиги k сонининг жуфт-тоқлиги билан бир хилда бўлган ўрнига қўйиш эканлигини кўрсатсак*, бу теорема исбот қилинган бўлади. $k = 1$ да теорема ўринли; чунки транспозиция тоқ ўрнига қўйишдир. Кўпайтувчилар сони $k - 1$ та бўлган ҳол учун даъво исбот қилинган бўлсин. У ҳолда унинг k та кўпайтувчи учун тўғрилиги қуйидагидан келиб чиқади: $k-1$ ва k сонлар қарама-қарши жуфт-тоқликка эга, ўрнига қўйишнинг (берилган ҳолда $k - 1$ та кўпайтувчи кўпайтмасининг) транспозицияга кўпайтмаси эса бу транспозицияни ўрнига қўйишнинг пастки сатрида бажаришга тенг кучли, яъни унинг жуфт-тоқлигини ўзгартиради.

Ўрнига қўйишларни уларнинг жуфт-тоқлигини осонгина топишга имкон берадиган ёзувининг қулай усули *циклларга ёйишдир.* n-даражали ҳар қандай ўрнига қўйиш $1, 2, \ldots, n$ символларнинг баъзиларини ўз ўрнида қолдириши мумкин, қолганларини эса кўчириши мумкин. *Циклик ўрнига қўйиш* ёки *цикл* деб шундай ўрнига қўйишга айтиладики, уни етарлича кўп марта такрорлагандан сўнг, у ҳақиқатан ҳам кўчирадиган символларнинг ҳар қайсиси бу символларнинг ихтиёрий бошқа бирига ўтиши мумкин. Масалан, саккизинчи даражали қуйидаги

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйиш шундайдир. у ҳақиқатан ҳам, 2, 3, 6 ва 8 символларни кўчиради, шу билан бирга 2 символни 8 га, 8 символни 3 га, 3 символни 6 га, 6 символни эса яна 2 га ўтказади.

Циклларга барча транспозициялар мансубдир. Цикллар учун транспозицияларни қисқача ёзишнинг юқорида ишлатилган усулига ўхшаш, қуйидаги ёзув ишлатилади: ҳақиқатан ўрни алмаштириладиган символлар ўрнига қўйишни такрорлашда бир-бирига қандай тартибда ўтса, кичик қавсда шундай тартибда ёзилади; ёзув ҳақиқатан кўчириладиган символларнинг ихтиёрий биридан бошланади, охирги символ эса биринчи символга ўтади деб ҳисобланади. Масалан, юқоридаги мисол учун бу ёзув қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(2\ 8\ 3\ 6).$$

Цикл ҳақиқатан кўчирадиган символлар сони *циклнинг узунлиги* дейилади.

Агар n-даражали иккита циклда ҳақиқатда ўрни алмаштириладиган умумий символлар бўлмаса, улар *эркин* (боғлиқмас) цикллар дейилади. Эркин циклларни ўзаро кўпайтирганда кўпайтувчилар тартиби натижага таъсир қилмаслиги тушунарлидир.

Ҳар қандай ўрнига қўйиш иккита-иккитадан олганда эркин бўлган цикллар кўпайтмасига ягона усул билан ёйилиши мумкин. Бу даъвонинг исботи қийин эмас ва шунинг учун биз уни тушириб қолдирамиз. Ёйиш амалда қуйидагича бажарилади: ҳақиқатда кўчириладиган символларнинг исталган биридан бошлаймиз ва ундан кейин ўрнига қўйишни такрорлаш натижасида бу символ ўтадиган символларни ёзамиз бу ишни дастлабки символга қайтгунимизча давом эттирамиз. Циклни бундай „ёпишдан“ сўнг қолган ҳақиқатда кўчириладиган символларнинг биридан бошлаб, иккинчи циклни ҳосил қиламиз ва ҳоказо.

Мисоллар.

1)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}=(13)\ (254).$$

2)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&2&8&7&6&1&4&3\end{pmatrix}=(156)\ (38)\ (47).$$

Аксинча, эркин циклларга ёйилмаси билан берилган ҳар қандай ўрнига қўйиш учун (бу ўрнига қўйишнинг даражаси маълум деган шарт остида) унинг ёзувининг одатдаги шаклини топиш мумкин. Масалан,

3) агар (1372) (45) ўрнига қўйишнинг даражаси 7 га тенг эканлиги маълум бўлса:

$$(1372)\ (45)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&7&5&4&6&2\end{pmatrix}.$$

n-даражали ўрнига қўйиш берилган ва s — унинг ёйилмасидаги эркин цикллар сони плюс ўрнига қўйиш ўз ўрнида қолдирадиган символлар сони бўлсин[1]). $n-s$ айирма бу ўрнига қўйишнинг *декременти* дейилади. Декремент ҳақиқатда алмаштириладиган символлар сони минус ўрнига қўйиш ёйилмасига кирадиган эркин цикллар сонига тенг эканлиги равшан. Юқорида кўрилган 1), 2) ва 3) мисоллар учун декремент мос равишда 3, 4 ва 4 га тенг бўлади.

Ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги унинг декрементининг жуфт-тоқлиги билан бир хил бўлади

Дарҳақиқат, k узунликдаги ҳар қандай циклни $k-1$ та транспозициянинг кўпайтмаси шаклида қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k)=(i_1,\ i_2)\,(i_1,\ i_3)\ \ldots\ (i_1\ \ i_k).$$

Энди A ўрнига қўйишнинг эркин циклларга ёйилмаси берилган деб фараз қилайлик. Агар циклларнинг ҳар қайсиси ҳозир кўрсатилган усул билан транспозицияларнинг кўпайтмасига ёйилган бўлса, у ҳолда биз A ўрнига қўйишнинг транспозициялар кўпайтмаси кўринишидаги тасвирини ҳосил қиламиз. Бу транспозициялар сони A ўрнига қўйиш ҳақиқатда кўчирадиган символлар сонидан бу ўрнига қўйишнинг ёйилмасидаги эркин цикллар сони қадар кичик бўлиши равшандир. Бу ердан A ўрнига қўйишни декремент сонига тенг бўлган транспозициялар кўпайтмасига ёйиш мумкинлиги келиб чиқади ва шунинг учун ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги декрементнинг жуфт-тоқлиги билан аниқланади.

---

[1]) Ўрнига қўйиш ўз ўрнида қолдирадиган ҳар қандай символга 1 узунликдаги „циклни“ мос қўйиш мумкин, масалан, юқоридаги (2) мисолда (156) (38) (47) (2) деб ёзиш мумкин эди, бироқ биз бундай қилмаймиз.

4-§. n-тартибли детерминантлар

Энди 2-§ да $n=2$ ва $n=3$ учун ҳосил қилинган натижаларни n ихтиёрий бўлган ҳол учун умумлаштирамиз. Шу мақсадда n тартибли детерминантларни киритиш керак. Бироқ буни иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар киритилган йўл билан, яъни чизиқли тенгламалар системаларини умумий кўринишда ечиш орқали бажариб бўлмайди: n ортиши билан ҳисоблашлар узундан-узоқ бўла бориб, n ихтиёрий бўлганда эса бу ҳисоблашларни амалда бажариб бўлмас эди. Биз бошқача йўл танлаймиз: бизга маълум бўлган иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларни мос матрицалар элементлари орқали аниқланадиган умумий бир қонунни тайинлашга уриниб кўрамиз ва бу қонунни n-тартибли детерминантни таърифлашга қўллаймиз, кейин эса бундай аниқлашда Крамер қоидаси ўринли бўлиб қолишини исботлаймиз.

Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларнинг ифодаларини эсга олайлик:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Бу ердан иккинчи тартибли детерминантнинг ҳар қандай ҳади турли сатр ва турли устунда турган иккита элементнинг кўпайтмасидан иборатлиги кўринади, шу билан бирга иккинчи тартибли матрица элементларидан тузиш мумкин бўлган бундай барча кўпайтмалар (улар бор-йўғи иккита) детерминантнинг ҳадлари сифатида ишлатилган. Худди шунга ўхшаш учинчи тартибли детерминантнинг ҳар қандай ҳади ҳар бир сатрдан ва ҳар бир устундан биттадан олинган учта элементнинг кўпайтмасидан иборат, шу билан бирга яна барча бундай кўпайтмалар детерминантнинг ҳадлари сифатида ишлатилади.

Энди n-тартибли квадрат матрица берилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Бу матрицанинг турли сатрлари ва турли устунларида жойлашган n та элементнинг мумкин бўлган барча кўпайтмаларини, яъни

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} \tag{2}$$

кўринишдаги кўпайтмаларни қараймиз, бу ерда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ индекслар 1, 2, ..., n сонлардан иборат бирор ўрин алмаштиришни ташкил қилади. Бундай кўпайтмалар сони n та символдан иборат турли ўрин алмаштиришлар сонига, яъни $n!$ га тенг. Бу кўпайтмаларни (1) матрицага мос келадиган бўлгуси n-тартибли детерминантнинг ҳадлари деб ҳисоблаймиз.

(2) кўпайтма детерминант таркибига қандай ишора билан киришини аниқлаш учун бу кўпайтмаларнинг индексларидан

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

ўрнига қўйишни тузиш мумкинлигига эътибор берайлик, бу ерда агар (2) кўпайтма таркибига i-сатр ва α_i-устунда турган элемент кирса, i символ α_i га ўтади. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларнинг ифодаларини кўрадиган бўлсак, уларга мусбат ишора билан индекслари жуфт ўрнига қўйишни ташкил қиладиган, манфий ишора билан эса индекслари тоқ ўрнига қўйиш ташкил қиладиган ҳадлар киришини кўрамиз. Бу қонуниятнинг n-тартибли детерминантни таърифлашда ҳам сақлаб қолиниши табиийдир.

Шундай қилиб, биз қуйидаги таърифга келамиз: (1) матрицага мос келувчи n-тартибли детерминант деб $n!$ та ҳаднинг ушбу тартибда тузилган алгебраик йиғиндисига айтилади: ҳадлар бўлиб матрицанинг ҳар қайси сатридан ва ҳар қайси устунидан биттадан олинган n та элементдан тузилган, мумкин бўлган барча кўпайтмалар хизмат қилади; шу билан бирга ҳаднинг индекслари жуфт ўрнига қўйишни ташкил этса, у мусбат ишора билан, акс ҳолда эса манфий ишора билан олинади. (1) матрицага мос келувчи n-тартибли детерминантни ёзиш учун иккинчи ва учинчи тартибли детерминант бўлган ҳолдаги символдан фойдаланамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

n-тартибли детерминантлар $n=2$ ва $n=3$ бўлганда илгари кўрилган иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларга айланади, $n=1$ да эса, яъни фақат битта элементдан иборат матрица учун детерминант шу элементнинг ўзига тенг. Биз $n>3$ да n-тартибли детерминантни чизиқли тенгламалар системасини ечишга татбиқ этиш мумкинми ёки йўқми эканлигини ҳозирча билмаймиз. Бу 7-§ да кўрсатилади; дастлаб, n-тартибли детерминантларни батафсил текшириш керак, хусусан, уларни ҳисоблаш методларини топиш керак, чунки, ҳатто унча катта бўлмаган n ларда детерминантни унинг таърифига таяниб ҳисоблаш анча мураккаб иш бўлар эди.

Ҳозир n-тартибли детерминантнинг баъзи энг содда хоссаларини тайинлаймиз. Бу хоссалар асосан қуйидаги иккита масаланинг бирортасига тегишли бўлади: бир томондан, бизни қандай шартларда детерминант нолга тенг бўлиши қизиқтиради; иккинчи томондан матрицага тегишли шундай алмаштиришларни кўрсатамизки, улар матрицанинг детерминантини ўзгартирмайди ёки уни осон ҳисобга олиш мумкин бўлган бир оз ўзгаришларга дучор қилади

(1) матрицани *транспонирлаш* деб, уни шундай алмаштиришга айтиладики, бунда матрицанинг сатрлари ўша номерли устунга айланади, яъни (1) матрицадан қуйидаги

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

матрицага ўтилади; транспонирлаш (1) матрицани унинг бош диагонали атрофида буришдир деб айтиш мумкин. Мос равишда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

детерминант (4) детерминантни транспонирлаш туфайли ҳосил қилинди дейилади.

I хосса. *Детерминант транспонирлаш натижасида ўзгармайди.*

Дарҳақиқат, (4) детерминантнинг ҳар қайси ҳади

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \qquad (7)$$

кўринишга эга, бу ерда иккинчи индекслар 1, 2, ..., n символлардан тузилган бирорта ўрин алмаштиришни ташкил этади. Бироқ (7) кўпайтманинг кўпайтувчилари (6) детерминантда ҳам турли сатрларда ва турли устунларда қолади, яъни (7) кўпайтма транспонирланган детерминант учун ҳам ҳад бўлиб хизмат қилади. Тескариси ҳам тўғрилиги равшан, шунинг учун (4) ва (6) детерминантлар бир хил ҳадлардан тузилган. (7) ҳаднинг (4) даги ишораси

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (8)$$

ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги билан аниқланади; (6) детерминантда элементларнинг биринчи индекслари устун номерини, иккинчилари сатр номерини кўрсатади, шунинг учун (7) ҳадга (6) детерминантда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 \quad 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{9}$$

ўрнига қўйиш мос келади. (8) ва (9) ўрнига қўйишлар умумий ҳолда турличадир, бироқ улар бир хил жуфт тоқликка эга эканлиги равшан; шунинг учун (7) ҳад ҳар иккала детерминантда бир хил ишорага эга. Шундай қилиб, (4) ва (6) детерминантлар бир хил ишора билан олинган бир хилдаги ҳадларнинг йиғиндисидан иборат, яъни улар бир-бирига тенг.

1-хоссадан детерминантнинг сатрлари ҳақидаги ҳар қандай даъво унинг устунлари учун ҳам ўринли ва аксинча эканлиги келиб чиқади, яъни *детерминантда* (матрицадан фарқли равишда) *сатрлар ва устунлар тенг ҳуқуқлидир*. Шунга мувофиқ, бундан кейинги 2—9-хоссаларни детерминантнинг фақат сатрлари учун таърифлаймиз ва исботлаймиз; устунлар учун худди шундай хоссалар алоҳида исбот талаб қилмайди.

2-хосса. *Агар детерминантнинг сатрларидан бири нолларидан иборат бўлса, бундай детерминант нолга тенг бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, детерминантнинг i-сатридаги барча элементлар ноллардан иборат бўлсин. Детерминантнинг ҳар қайси ҳадига i-сатрдаги битта элемент кўпайтувчи бўлиб кириши керак, шунинг учун бу ҳолда детерминантнинг барча ҳадлари нолга тенг.

3-хосса. *Агар бир детерминант иккинчисидан унинг иккита сатрининг ўрнини алмаштириш орқали ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда биринчи детерминантнинг барча элементлари тескари ишора билан иккинчи детерминантнинг ҳам элементлари бўлади, яъни иккита сатрнинг ўрни алмашишидан детерминант фақат ишорасини ўзгартиради.*

Ҳақиқатан ҳам, (4) детерминантда i ва j-сатрларнинг ўринлари алмаштирилаётган бўлиб ($i \neq j$), қолган барча сатрлар эса ўз ўрнида қолсин. Қуйидаги детерминантни ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{j1} \, a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{i1} \, a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \, a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{10}$$

(ён томонда сатрларнинг номерлари кўрсатилган). Агар

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \tag{11}$$

(4) детерминантнинг ҳади бўлса, унинг барча кўпайтувчилари (10) детерминантда ҳам турли сатрларда ва турли устунларда қолиши равшан. Шундай қилиб, (4) ва (10) детерминантлар бир хил ҳадлардан тузилган. (11) ҳадга (4) детерминантда

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

ўрнига қўйиш, (10) детерминантда эса

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

ўрнига қўйиш мос келади, чунки масалан, $a_{i\alpha_i}$ элемент энди j-сатрда туриб, эски α_i-устунда қолади. (13) ўрнига қўйиш (12) ўрнига қўйишдан унинг юқори сатрида битта транспозиция бажариш орқали ҳосил қилинади, яъни тескари жуфтлиқликка эга. Бу ердан (4) детерминантнинг барча элементлари (10) детерминантга тескари ишора билан кириши кўринади, яъни (4) ва (10) детерминантлар бир-биридан фақат ишоралари билан фарқ қилади.

4-хосса. *Иккита бир хил сатрга эга бўлган детерминант нолга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, детерминант d сонга тенг бўлсин ва унинг i-ва j-сатрларидаги $(i \neq j)$ элементлари ўзаро тенг бўлсин.

Бу иккита сатрнинг ўрнини алмаштиргандан сўнг, 3-хоссага кўра детерминант $-d$ сонга тенг бўлиб қолади. Бироқ бир хил сатрларнинг ўринлари алмаштирилаётгани сабабли, детерминант аслида ўзгармайди, яъни $d = -d$, бу ердан $d = 0$.

5-хосса. *Агар детерминантнинг бирорта сатрининг барча элементларини бирор k сонга кўпайтирилса, у ҳолда детерминантнинг ўзи ҳам k га кўпайтирилади.*

i-сатрнинг барча элементлари k га кўпайтирилган бўлсин. Детерминантнинг ҳар қайси ҳадида i-сатрдаги элементлардан роса биттаси бўлади, шунинг учун ҳар қайси ҳад k кўпайтувчига эга бўлиб қолади, яъни детерминант k га кўпайтирилган бўлиб қолади.

Бу хоссани қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин: *детерминантнинг бирор сатри барча элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгиси ташқарисига чиқариш мумкин.*

6-хосса. *Иккита пропорционал сатрга эга бўлган детерминант нолга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, детерминантнинг j-сатри элементлари i-сатрнинг мос элементларидан $(i \neq j)$ биргина k кўпайтувчи билан фарқ қилсин. j-сатрдаги бу умумий кўпайтувчи k ни детерминант белгисидан ташқарига чиқариб, иккита сатри бир хил бўлган детерминантни ҳосил қиламиз, бундай детерминант эса 4-хоссага кўра нолга тенг.

4-хосса (шунингдек, $n > 1$ да 2-хосса ҳам) 6-хоссанинг ($k=1$ ва $k=0$ да) хусусий ҳоли бўлиши равшандир.

7-хосса. *Агар n-тартибли детерминант i-сатрининг барча элементлари иккита қўшилувчининг йиғиндиси, яъни*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

кўринишда ифодаланган бўлса, у ҳолда детерминант шундай иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўладики, бу детерминантларнинг i-сатридан ташқари барча сатрлари берилган детерминантникидай бўлади, уларнинг биридаги i-сатр b_j элементлардан, бошқаси эса c_j элементлардан иборат бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, берилган детерминантнинг ҳар қандай ҳадини қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots(b_{\alpha_i}+c_{\alpha_i})\dots a_{n\alpha_n} =$$
$$= a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots b_{\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots c_{\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}.$$

Бу йиғиндиларнинг биринчи қўшилувчиларини бирга (мос ҳадлар детерминантда қандай ишорага эга бўлса, ўша ишоралар билан) йиғиб, равшанки, n-тартибли детерминант ҳосил қиламиз. Бу детерминант берилган детерминантдан фақат i-сатрида a_{ij} элементлар ўрнида b_j элементлар туриши билан фарқ қилади. Иккинчи қўшилувчилар мос равишда i-сатрида c_j элементлар турган детерминант тузади. Шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7-хоссани ҳеч бир қийинчиликсиз i-сатрнинг ҳар қандай элементи иккита эмас, балки m та ($m \geqslant 2$) қўшилувчидан иборат бўлган ҳол учун ҳам ўринли эканлигини исботлаш мумкин.

Агар ҳар қандай j ($i = 1, \dots, i-1, i+1, \dots n$) номерли сатр учун шундай k_j сон топиш мумкин бўлсаки, j-сатрни k_j га кўпайтириб, сўнгра i-сатрдан бошқа ҳамма сатрларни қўшиб (бунда сатрларни қўшишни бу сатрларнинг барча элементлари ҳар бир устунда алоҳида қўшилади деб тушуниш керак), i-сатрни ҳосил қилсак, детерминантнинг i-сатрини унинг қолган сатрларининг *чизиқли комбинацияси* деб айтамиз. k_j коэффициентларнинг баъзилари нолга тенг бўлиши мумкин, яъни i-сатр аслида барча сатрларнинг эмас, балки қолган баъзи сатрларнинг чизиқли комбинацияси бўлади. Хусусан, k_j коэффициентларнинг фақат биттаси нолдан фарқли бўлса, биз иккита сатрнинг пропорционаллигига эга бўламиз. Ниҳоят, сатр бутунлайноллардан иборат бўлса, у ҳолда бу сатр ҳар доим қолган сатрларнинг чизиқли комбинацияси бўлади (барча k_j лар нолга тенг бўлган ҳол).

8-хосса. *Агар детерминантнинг сатрларидан бири унинг қолган сатрларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, детерминант нолга тенг бўлади.*

Айтайлик, i-сатр қолган s та сатрнинг чизиқли комбинацияси бўлсин ($1 \leqslant s \leqslant n-1$). У ҳолда i-сатрнинг ҳар қандай элементи s та қўшилувчининг йиғиндиси бўлади, бинобарин, 7 хоссани татбиқ этиб, берилган детерминантимизни ҳар бирининг i-сатри бошқа сатрларининг бирортасига пропорционал бўлган детерминантлар йиғиндиси кўринишида тасвирлаймиз. 6-хоссага кўра бу детерминантлар нолга тенг, бинобарин, берилган детерминант ҳам нолга тенг.

Бу хосса 6-хоссанинг умумлаштирилишидир, шу билан бирга 10-§ да бу хосса детерминант нолга тенг бўлишининг энг умумий ҳолини бериши исботланади.

9-хосса. *Агар детерминантнинг сатрларидан бирига бошқа сатрнинг мос элементларини бирорта сонга кўпайтириб қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Ҳақиқатан ҳам, d детерминантнинг i-сатрига k сонга кўпайтирилган j-сатр ($j \neq i$) қўшилаётган бўлсин, яъни янги детерминантда i-сатрнинг ҳар қандай элементи $a_{is} + ka_{js}$, $s = 1, 2, \ldots, n$ кўринишга эга бўлсин. У ҳолда, 7-хоссага кўра бу детерминант шундай иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўладики, уларнинг биринчиси d бўлиб, иккинчиси эса иккита пропорционал сатрга эга бўлади ва шунинг учун ҳам нолга тенг бўлади.

k сон манфий бўлиши ҳам мумкин, шу сабабдан, *детерминант унинг бир сатридан бирорта сонга кўпайтирилган бошқа сатрини айирганда ҳам ўзгармайди.* Умуман, *агар детерминантнинг бирорта сатрига бошқа сатрларнинг исталган чизиқли комбинацияси қўшилса, унинг қиймати ўзгармайди.*

Бир мисол кўрайлик. Агар детерминантнинг бош диагоналга нисбатан симметрик бўлган элементлари бир-биридан фақат ишоралари билангина фарқланса, яъни барча i ва j ларда $a_{ji} = -a_{ij}$ бўлса (бундан барча i лар учун $a_{ii} = -a_{ii} = 0$ эканлиги келиб чиқади), бундай детерминант *қия симметрик* детерминант дейилади. Шундай қилиб, детерминант қуйидаги кўринишда бўлади:

$$d = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & . & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & . . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг ҳар бир сатрини -1 сонга кўпайтириб, транспонирланган, яъни яна d га тенг бўлган детерминант ҳосил қиламиз, бу ердан 5-хоссага кўра

$$(-1)^n d = d$$

муносабатни ҳосил қиламиз. n тоқ бўлганда, бу ердан $-d=d$, яъни $d=0$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, *тоқ тартибли ҳар қандай қия симметрик детерминант нолга тенг.*

5· §. Минорлар ва уларнинг алгебраик тўлдирувчилари

n тартибли детерминантларни бевосита уларнинг таърифидан фойдаланиб, яъни ҳар гал барча $n!$ та ҳадни ёзиб, уларнинг ишорасини аниқлаб ва ҳоказо ишларни бажариб ҳисоблаш қандай қийинчиликлар туғдириши юқорида қайд қилиб ўтилган эди. Детерминантларни ҳисоблашнинг n-тартибли детерминантни қуйи тартибли детерминантлар орқали ифодалаш мумкинлигига асосланган соддароқ методлари мавжуд. Шу мақсадда қуйидаги тушунчани киритамиз.

n-тартибли d детерминант берилган бўлсин. $1 \leqslant k \leqslant n-1$ шартни қаноатлантирувчи k сон оламиз ва детерминантда ихтиёрий k та сатр ва k та устунни танлаймиз. Бу сатрлар ва устунлар кесишган жойларда турган, яъни танлаб олинган сатрларнинг бирига ва танлаб олинган устунларнинг бирига тегишли бўлган элементлар k-тартибли матрица ташкил этиши равшан. Бу матрицанинг детерминанти d детерминантнинг *k-тартибли минори* дейилади. Шунингдек, k-тартибли минор бу d детерминантда $n-k$ та сатр ва $n-k$ та устунни ўчиришдан ҳосил бўладиган детерминант деб ҳам айтиш мумкин. Хусусан, детерминантда битта сатр ва битта устунни ўчиришдан кейин $(n-1)$-тартибли минорни ҳосил қиламиз; иккинчи томондан биринчи тартибли минорлар бўлиб, d детерминантнинг айрим элементлари хизмат қилади.

n-тартибли d детерминантда k-тартибли M минор олинган бўлсин. Агар биз бу минор турган сатрлар ва устунларни чизиб чиқсак, $(n-k)$-тартибли M' минор қолади ва у M минор учун *тўлдирувчи минор* дейилади. Аксинча, агар M' минорнинг элементлари турган сатрлар ва устунларни чизиб чиқадиган бўлсак, равшанки, M минор қолади. Шундай қилиб, детерминантнинг *ўзаро тўлдирувчи минорлари жуфти* ҳақида гапириш мумкин. Хусусан, a_{ij} элемент ва детерминантда i-сатр ва j-устунни чизишдан ҳосил бўлган $n-1$-тартибли минор ўзаро тўлдирувчи минорлар жуфтини ҳосил қилади.

Агар k-тартибли M минор $i_1, i_2, \ldots, i_k$ номерли сатрлар ва $j_1, j_2, \ldots, j_k$ номерли устунларда жойлашган бўлса, у ҳолда M

минорнинг *алгебраик тўлдирувчиси* деб унинг тўлдирувчи M' минорини айтамиз. Бу минорнинг ишораси M минор жойлашган сатрлар ва устунларнинг номерлари йиғиндисининг, яъни

$$s_M = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k \qquad (1)$$

йиғиндининг жуфт ёки тоқлигига қараб, мусбат ёки манфий бўлади. Бошқача айтганда, M минор учун алгебраик тўлдирувчи $(-1)^{s_M} M'$ сон бўлади.

k-тартибли ихтиёрий M минорни унинг алгебраик тўлдирувчисига кўпайтмаси d детерминантда алгебраик йиғинди бўлиб, унинг қўшилувчилари M минорнинг ҳадларини M' минорнинг $(-1)^{s_M}$ ишора билан олинган ҳадларига кўпайтиришдан ҳосил бўлади. Бу қўшилувчилар d детерминантнинг бирор ҳадлари бўлади, шу билан бирга уларнинг бу йиғиндидаги ишоралари уларнинг детерминант таркибига кирган ишоралари билан бир хил бўлади.

Бу теореманинг исботини M минор детерминантнинг юқори чап учида, яъни 1, 2, . . . ,k номерли сатрлар ва шу номерли устунларда жойлашган ҳолдан бошлаймиз:

$$d = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{\,,\,k+} & \dots & a_{1n} \\ \dots & M & \dots & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,\,k} & a_{k+1,\,k+1} & \dots & a_{k+1,\,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \dots & M' & \dots \\ a_{,1} & \dots & a_{nk} & a_{n,\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|,$$

у ҳолда M' минор детерминантнинг пастки ўнг бурчагини эгаллайди. s_M сон бу ҳолда жуфт бўлади:

$$s_M = 1 + 2 + \dots + k + 1 + 2 + \dots + k = 2(1 + 2 + \dots + k),$$

шунинг учун M нинг алгебраик тўлдирувчиси бўлиб, M' минорнинг ўзи хизмат қилади. M минорнинг ихтиёрий

$$a_{1\alpha_1} a_{\ \alpha} \dots a_{k\alpha_k} \qquad (2)$$

ҳадини олайлик; агар l

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ўрнига қўйишдаги инверсиялар сони бўлса, олинган ҳаднинг M даги ишораси $(-1,^{l}$ бўлади. M' минорнинг ихтиёрий

$$a_{k+1,\ \beta_{k+1}} \cdot a_{k+2\ \beta_{k+2}} \dots a_{n\ \beta_n} \qquad (4)$$

ҳади бу минорда $(-1)^{l'}$ ишорага эга, бу ерда l'

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 \dots n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} \dots \beta_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

ўрнига қўйишдаги инверсиялар сони.

(2) ва (4) ҳадларни бир-бирига кўпайтириб, детерминантнинг турли сатр ва устунларида жойлашган n та элементининг кўпайтмаси

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{k\alpha_k} a_{k+1,\ \beta_{k+1}} a_{k+2,\ \beta_{k+2}} \dots a_{n\ \beta_n} \tag{6}$$

ни ҳосил қиламиз; бинобарин у d детерминантнинг ҳади бўлади. (6) ҳаднинг MM' кўпайтмадаги ишораси (2) ва (4) ҳадлар ишораларининг кўпайтмасига, яъни $(-1)^l \cdot (-1)^{l'}$ эга бўлади. Худди шундай ишорага d детерминантда (6) ҳад ҳам эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳаднинг индексларидан тузилган

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots k & k+1 & k+2 \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} \dots \beta_n \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишнинг пастки сатрида фақат $l + l'$ та инверсия бор, чунки ҳеч қайси α ҳеч бир β билан инверсия туза олмайди: барча α лар k дан катта эмас, барча β лар $k + 1$ дан кичик эмас.

Бу билан теореманинг биз қараётган хусусий ҳоли исботланди. Умумий ҳолни қарашга ўтамиз, яъни M минор $i_1 i_2, \dots, i_k$ номерли сатрларда ва $j_1, j_2, \dots, j_k$ номерли устунларда жойлашган бўлсин деб фараз қилайлик, шу билан бирга

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k,\ j_1 < j_2 < \dots < j_k$$

бўлсин.

Детерминантнинг сатрларини ва устунларини алмаштира бориб, M минорни юқори чап бурчакка суришга, шу билан бирга бунда тўлдирувчи минор ўзгармайдиган қилиб суришга ҳаракат қиламиз. Шу мақсадда, i_1- сатрни $(i_1 - 1)$- сатр билан, сўнгра $(i_1 - 2)$- сатр билан алмаштирамиз ва ҳоказо. Бу процессни i_1- сатр биринчи сатрнинг ўрнини эгалламагунча давом эттира берамиз; бунинг учун сатрларни $i_1 - 1$ марта ўрнини алмаштиришимиз керак бўлади. Сўнгра i_2- сатрни ундан юқори турган сатрлар билан кетма-кет ўрнини алмаштирамиз. Бу ишни у бевосита i_1- сатр остида, яъни барча алмаштиришлар бошлангунга қадар иккинчи сатр эгаллаган ўрнига жойлашгунча давом эттирамиз; бунинг учун сатрларнинг ўрнини $i_2 - 2$ марта алмаштиришимиз керак (буни текшириш осон). Худди шундай, i_3- сатрни учинчи сатр ўрнига сурамиз ва ҳоказо; бу иш i_k- сатр k- сатрнинг ўрнини эгалламагунча давом эттирилади.

Биз ҳаммаси бўлиб сатрларнинг

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_k - k) = (i_1 + i_2 + \dots + i_k) - \\ - (1 + 2 + \dots + k)$$

транспозициясини бажаришимиз лозим.

M минор энди янги детерминантнинг биринчи k та сатрида жойлашди. Энди детерминант устунларининг ўринларини кетма-кет алмаштирамиз: j_1- сатрни у биринчи ўринни эгалламагунча ўзидан олдин турган устунлар билан, сўнгра j_2-сатрни иккинчи ўринни эгалламагунча ва ҳоказо алмаштирамиз. Устунларнинг ҳаммаси бўлиб

$$(j_1 + j_2 + \dots + j_k) - (1 + 2 + \dots k)$$

марта ўринлари алмаштирилади. Бундай барча алмаштиришлардан сўнг янги d' детерминантга келамиз. M минор бу детерминантнинг юқори чап бурчагида жойлашган бўлади. Биз ҳар гал фақат қўшни сатрлар ёки устунларни алмаштирганимиз сабабли, d детерминантда M' минор турган сатрлар ва устунларнинг ўзаро вазияти ўзгаришсиз қолади ва шунинг учун d' детерминантда M минорга тўлдирувчи бўлиб, пастки ўнг бурчакни эгалловчи M' минор қолади. Юқорида исботланганига кўра MM' кўпайтма d' детерминантнинг бирор миқдордаги ҳадлари йиғиндиси бўлиб, бу ҳадлар d' детерминантга қандай ишоралар билан кирган бўлса, ўша ишоралар билан олинган.

Бироқ d' детерминант d детерминантдан сатрлар ва устунларни

$$[(i_1 + i_2 + \dots + i_k) - (1 + 2 + \dots + k)] + [(j_1 + j_2 + \dots + j_k) - \\ - (1 + 2 + \dots + k)] = s_M - 2(1 + 2 + \dots + k)$$

та транспозициялаш орқали ҳосил қилинган, шунинг учун олдинги параграфдан маълумки, d' детерминантнинг ҳадлари d детерминантнинг мос ҳадларидан фақат $(-1)^{s_M}$ ишора билангина фарқланадилар (жуфт сон $2(1 + 2 + \dots + k$, табиийки, ишорага таъсир этмайди). Бу ердан, $(-1)^{s_M} MM'$ кўпайтма d детерминантнинг маълум миқдордаги ҳадларидан тузилган бўлиб, бу ҳадлар шу детерминантда қандай ишорага эга бўлсалар, шундай ишора билан олинганликлари келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

Агар M ва M' минорлар ўзаро тўлдирувчи бўлсалар, у ҳолда s_M ва $s_{M'}$ сонлар бир хил жуфт тоқликка эга бўлишларини қайд қилиб ўтамиз. Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай сатр ва ҳар қандай устуннинг номери бу сонларнинг биттаси ва фақат биттасига қўшилувчи бўлиб киради, шунинг учун $s_M + s_{M'}$ йиғинди детерминантнинг барча сатрлари ва устунлари номерларининг умумий йиғиндисига, яъни $2(1 + 2 + \dots + n)$ жуфт сонга тенг.

6-§. Детерминантларни ҳисоблаш

Олдинги параграфнинг натижалари n-тартибли детерминантни ҳисоблашни бир нечта $(n-1)$-тартибли детерминантларни ҳисоблашга олиб келишга имкон беради. Дастлаб қуйидаги белгилашларни киритамиз: агар a_{ij} d детерминантнинг элементи бўлса, M_{ij} орқали тўлдирувчи минорни ёки қисқача шу a_{ij} *элементнинг минорини*, яъни детерминантда i-сатр ва j-устунни ўчиришдан ҳосил бўлган $(n-1)$-тартибли минорни белгилаймиз. Сўнгра, A_{ij} орқали a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини белгилаймиз, яъни

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Олдинги параграфда $a_{ij} A_{ij}$ кўпайтма d детерминантнинг бир нечта ҳадлари йиғиндисидан иборат эканлиги ва бу ҳадлар d детерминантнинг таркибига қандай ишора билан кирсалар, бу ердаги йиғиндига шу ишора билан киришлари исботланган эди. Бу ҳадларнинг сонини санаб чиқиш осон: у M_{ij} минордаги ҳадлар сонига, яъни $(n-1)!$ га тенг.

Энди d детерминантнинг исталган i-сатрини танлаймиз ва бу сатрдаги ҳар қайси элементни унинг алгебраик тўлдирувчисига кўпайтмасини оламиз:

$$a_{i1} A_{i1},\ a_{i2} A_{i2},\ \ldots,\ a_{in} A_{in}. \qquad (1)$$

d детерминантнинг ҳеч қайси ҳади бир вақтда (1) кўринишдаги кўпайтмаларнинг турли иккитасига кира олмайди: детерминантнинг $a_{i1} A_{i1}$ кўпайтмага кирувчи барча ҳадлари i-сатрдаги a_{i1} элементга эга ва шунинг учун улар $a_{i2} A_{i2}$ кўпайтмага кирувчи ҳадлардан, яъни i-сатрдаги a_{i2} элементга эга бўлган ҳадлардан фарқ қиладилар ва ҳоказо.

Иккинчи томондан, d детерминантнинг барча (1) кўпайтмаларга кирувчи ҳадларининг умумий сони

$$(n-1)! \cdot n = n!$$

га тенг, яъни бу билан d детерминантнинг барча ҳадлари тамом бўлади. Шундай қилиб, *d детерминантни i-сатри бўйича қуйидаги ёйилмаси* ўринли эканлигини исбот қилдик:

$$d = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}, \qquad (2)$$

яъни *детерминант унинг ихтиёрий сатри барча элементларини уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг.* Детерминантнинг шунга ўхшаш ёйилмасини унинг ихтиёрий устуни бўйича ҳам олиш мумкин.

(2) ёйилмада алгебраик тўлдирувчиларни мусбат ёки манфий ишорали мос минорлар билан алмаштириб, n-тартибли детерминантни ҳисоблашни $(n-1)$-тартибли бир

нечта детерминантни ҳисоблашга келтирамиз. Агар i-сатрдаги баъзи элементлар нолга тенг бўлса, у ҳолда уларга мос минорларни, табиийки, ҳисоблаб ўтириш керак эмаслигини қайд қилиб ўтайлик. Шунга мувофиқ дастлаб детерминантни 9-хоссани (4-параграфга қаранг) татбиқ қилиб шундай ўзгартириш керакки, унинг сатрларидан ёки устунларидан бирида етарлича кўп элементлар ноллар билан алмаштирилган бўлсин. Ҳақиқатда *9-хосса исталган сатрда ёки исталган устунда битта элементдан ташқари барча элементларни ноллар билан алмаштиришга имкон беради.* Ҳақиқатан ҳам, агар $a_{ik} \neq 0$ бўлса, i-сатрнинг ихтиёрий a_{ij} $(j \neq k)$ элементи k-устунни $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$ га кўпайтириб j-устундан айириш натижасида ноль билан алмаштирилади. Шундай қилиб, n-тартибли детерминантни $(n-1)$-тартибли битта детерминантни ҳисоблашга келтириш мумкин.

Мисоллар.

1. Ушбу тўртинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни унинг учинчи сатрида битта ноль борлигидан фойдаланиб, шу сатр бўйича ёямиз.

$$d = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил қилинган учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаб, топамиз.

$$d = 2 \cdot 16 - 40 + 48 = 40.$$

2. Ушбу бешинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Иккинчи сатрга учга кўпайтирилган бешинчи сатрни қўшиб ва тўртинчи сатрдан тўртга кўпайтирилган бешинчи сатрни айириб,

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу детерминантни нолга тенг бўлмаган фақат битта элементга эга бўлган учинчи устуни бўйича ёямиз (индекслар йиғиндиси $5+3$, яъни жуфт):

$$d=(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Янги ҳосил қилинган детерминантни унинг биринчи сатрига иккига кўпайтирилган иккинчи сатрни қўшиб ва учинчи сатрдан учга кўпайтирилган иккинчи сатрни, тўртинчи сатрдан эса иккига кўпайтирилган иккинчи сатрни айириб, ўзгартирамиз:

$$d=-\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи устун бўйича ёйиб чиқамиз (бу устуннинг ягона нолга тенг бўлмаган элементига индексларнинг тоқ йиғиндиси мос келишини қайд қилиб ўтайлик):

$$d=\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & 24 \end{vmatrix}.$$

Бу учинчи тартибли детерминантни унинг учинчи сатри бўйича ёйиб чиқиб, ҳисоблаймиз:

$$d=36\begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix}-(-33)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix}+(-24)-\begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix}=$$

$$=36\cdot(-72)-(-33)\cdot(-104)+(-24)\cdot(-208)=1032.$$

3. *Агар детерминантнинг бош диагоналидан бир тарафда ётган барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда бу детерминант бош диагоналда турувчи элементларнинг кўпайтмасига тенг бўлади.*

Иккинчи тартибли детерминант учун бу даъво ўринли эканлиги равшан. Биз уни индукция ёрдамида исботлаймиз, яъни $(n-1)$- тартибли детерминантлар учун бу даъво исботланган деб, қуйидаги n- тартибли детерминантни қараймиз:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Уни биринчи устун бўйича ёйиб чиқиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Бироқ ўнг қисмда турган минорга индукциядаги фараз татбиқ қилинишини мумкин, яъни у $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$ кўпайтмага тенг, шунинг учун ҳам

$$d=a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

4. Ушбу

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

детерминант *Вандермонд детерминанти* дейилади.

Ихтиёрий n да Вандермонд детерминанти мумкин бўлган барча $a_i - a_j$ айирмаларнинг (бу ерда $1 < j < i \leqslant n$) кўпайтмасига тенг эканлигини исбот қиламиз Ҳақиқатан ҳам, $n = 2$ да

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

бўлади. Даъво $(n-1)$-тартибли Вандермонд детерминантлари учун исботланган бўлсин. d детерминантни қуйидагича ўзгартирамиз: n сатрдан (охирги сатрдан) a_1 га кўпайтирилган $(n-1)$-сатрни айирамиз, сўнгра $(n-1)$-сатрдан яна a_1 га кўпайтирилган $(n-2)$ сатрни айирамиз ва ҳоказо, ниҳоят, иккинчи сатрдан a_1 га кўпайтирилган биринчи сатрни айирамиз. Биз қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи устун бўйича ёйиб, $(n-1)$-тартибли детерминантга келамиз; барча устунлардан умумий кўпайтувчиларни детерминант белгиси ташқарисига чиқарилгандан сўнг детерминант қуйидаги кўринишни олади:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ a_2 & a_3 & \dots a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Охирги кўпайтувчи $(n-1)$-тартибли Вандермонд детерминантидир, яъни фаразга кўра $2 \leqslant j < i \leqslant n$ учун барча $a_i - a_j$ айирмаларнинг кўпайтмасига тенг. Демак, кўпайтмани белгилаш учун Π символдан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \cdot \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n}(a_i - a_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(a_i - a_j).$$

Худди шундай метод билан

$$d' = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots 1 \end{vmatrix}$$

детерминант *мумкин бўлган барча* $a_i - a_j$ *айирмаларнинг* (бу ерда $1 < i < j < n$) *кўпайтмасига тенг эканлигини*, яъни

$$d' = \prod_{1<i<j<n} (a_i - a_j)$$

ни исботлаш мумкин.

Детерминантнинг сатри ёки устуни бўйича юқорида ҳосил қилинган ёйилмаларини умумлаштириб, *детерминантни бир нечта сатри ёки устуни бўйича ёйиш* тўғрисида сўз юритадиган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Лаплас теоремаси. *n-тартибли d детерминантда k та сатр (ёки k та устун) ихтиёрий танланган бўлсин, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. У ҳолда танлаб олинган сатрларда жойлашган k-тартибли барча минорларни уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндиси d детерминантга тенг.*

Исботи. d детерминантда $i_1, i_2, \dots, i_k$ номерли сатрлар танлаб олинган бўлсин. Биз биламизки, бу сатрларда жойлашган k-тартибли M минорнинг унинг алгебраик тўлдирувчисига кўпайтмаси d детерминантнинг бирорта миқдордаги элементлари бўлиб, улар детерминант таркибига қандай ишора билан кирсалар, шу ишора билан олинадилар. Бинобарин, агар биз M ни танлаб олинган сатрларда жойлашган барча k-тартибли минорлардан иборат бўлишига эришиб, детерминантнинг барча ҳадларини ҳосил қилишимиз мумкинлигини, шу билан бирга уларнинг ҳеч бири икки марта учрамаслигини кўрсатсак, теорема исботланган бўлади.

Айтайлик,

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \tag{3}$$

ҳад d детерминантнинг ихтиёрий ҳади бўлсин. Бу ҳаддан биз танлаб олган $i_1, i_2, \dots, i_k$ номерли сатрларга тегишли бўлган элементларнинг кўпайтмасини алоҳида оламиз. Бу кўпайтма қуйидаги кўринишда бўлади:

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \dots a_{i_k\alpha_{i_k}}; \tag{4}$$

бу кўпайтманинг k та кўпайтувчиси k та турли устунларда, яъни $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ номерли устунларда турибди. Бинобарин, устунларнинг бу номерлари (3) ҳаднинг берилиши билан тўла аниқланади. Агар биз бу $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ номерли устунлар ва олдин танлаб олинган $i_1, i_2, \dots, i_k$ номерли сатрларнинг кесишган жойида турган k-тартибли минорни M орқали белгилайдиган бўлсак, у ҳолда (4) кўпайтма M минорнинг ҳадларидан бири бўлади; (3) ҳаднинг (4) га кирмаган барча элементларининг кўпайтмаси эса M нинг тўлдирувчи минорига киради. Шундай қилиб, детерминантнинг ҳар қандай ҳади танлаб олинган сатрлардаги бирор тўла аниқланган k-тартибли минорнинг унинг тўлдирувчи минорига кўпайтмасига киради, шу билан бирга бу ҳад бу иккита минорнинг тайин ҳадлари кўпайтмасидан иборат бўлади. Ниҳоят, детерминантда қандай ишорага эга бўлса, шундай ишора билан олиниши керак бўлган ҳадни ҳосил қилиш учун, биз биламизки, тўлдирувчи минорни алгебраик минор билан алмаштириш керак. Шу билан теореманинг исботи тамом бўлади.

Теореманинг исботини бирмунча бошқача йўл билан олиб бориш ҳам мумкин эди. Яъни танлаб олинган сатрларда жойлашган k-тартибли ҳар қандай M минорни унинг алгебраик тўлдирувчисига кўпайтмаси $k!\,(n-k)!$ та ҳаддан иборат бўлади, чунки k-тартибли M минор $k!$ та ҳаддан, унинг алгебраик тўлдирувчиси $(n-k)$-тартибли минордан, эҳтимол, фақат ишораси билан фарқланиб, $(n-k)!$ та ҳадга эга. Иккинчи томондан, танлаб олинган сатрларда жойлашган k-тартибли минорларнинг сони n та элементдан k тадан тузилган группалар сонига, яъни қуйидаги сонга тенг:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Буларни кўпайтириб, танлаб олинган сатрлардаги барча k-тартибли минорларни уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмаларининг йиғиндиси $n!$ та қўшилувчидан иборат эканлигини ҳосил қиламиз. Бироқ d детерминант ҳадларининг умумий сони ҳам худди шунча. Бинобарин, агар биз d детерминантнинг ҳар қандай ҳади минорларнинг уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмасининг йиғиндисига ҳеч бўлмаганда бир марта киришини (у ҳолда у аниқ бир марта киради) кўрсатсак, теорема исбот қилинган бўлади. Бунинг учун китобхонга бундан олдинги исботлашдаги мулоҳазаларни (баъзи бир соддалаштиришлар билан) такрорлашгина қолади.

Лаплас теоремаси n-тартибли детерминантни ҳисоблашни k ва $(n-k)$-тартибли бир нечта детерминантни ҳисоблашга олиб келади. Бундай янги детерминантлар, умуман айтганда, анча кўп бўлади ва шунинг учун Лаплас теоремасини детерминантда k та сатрни (ёки устунни) бу сатрларда жойлашган k-тартибли минорларнинг кўпчилиги нолга тенг бўладиган қилиб танлаб олиш мумкин бўлган ҳоллардагина татбиқ қилиш мақсадга мувофиқдир.

Мисоллар.

1. Биринчи k та сатрида ва охирги $n-k$ та устунида турган барча элементлари нолга тенг бўлган ушбу детерминанг берилган бўлсин:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\, a_{1k} & & \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} & & \text{\Large 0} \\ a_{k1} & \dots\, a_{kk} & & \\ a_{k+1,1} & \dots\, a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots\, a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots\, a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots\, a_{nn} \end{vmatrix}$$

У ҳолда бу детерминант ўзининг иккита минори кўпайтмасига тенг:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1} \dots a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1} \dots a_{k+1,\,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,\,k+1} \quad \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Буни исбот қилиш учун детерминантни биринчи k та сатр бўйича ёйиш кифоя.

2. Юқори чап бурчагида фақатноллардан тузилган n- тартибли минор турган $2n$- тартибли d детерминант берилган бўлсин. Агар юқори ўнг, пастки чап ва пастки ўнг бурчакларда турган n- тартибли минорлар мос равишда M, M' ва M'' орқали белгиланадиган бўлса, яъни детерминантни символик тарзда

$$d = \begin{vmatrix} 0 & M \\ M' & M'' \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда $d = (-1)^n MM'$.

Буни исботлаш учун детерминантни биринчи n та сатр бўйича ёямиз ва

$$s_M = (1 + 2 + \dots + n) + [(n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n] \cdot n + 2n^2$$

эканлигини кўрамиз, яъни s_M ва n бир хил жуфт-тоқликка эга экан

3. Ушбу

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисобланг.

Бу детерминантни қулай жойлашган ноллари бўлган биринчи ва учинчи ~~сатр~~лар бўйича ёйиб,
устун

$$d = (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8) \cdot (-20) - (-10) \cdot (-62) - 7 \cdot 87 = -1069$$

эканлигини топамиз.

7- §. Крамер қоидаси

Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларга ўхшаш киритилган n-тартибли детерминантларнинг юқорида баён қилинган назарияси бу детерминантлар, иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар каби чизиқли тенгламалар системаларини ечимда татбиқ қилиниши мумкин эканлигини кўрсатишга имкон беради. Даставвал, детерминантларни сатр ёки устун бўйича ёйиш билан боғлиқ бўлган қўшимча бир эслатма киритамиз; бу эслатмадан кейинчалик кўп фойдаланилади. Ушбу

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантни унинг j-устуни бўйича ёямиз:

$$d = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{1j} A_{nj},$$

сўнгра бу ёйилмада j-устунининг элементларини ихтиёрий n та сонлар системаси $b_1, b_2, \dots, b_n$ билан алмаштирамиз. Биз ҳосил қиладиган

$$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$$

ифода, табиийки, d детерминантнинг j-устунини $b_1, b_2, \dots, b_n$ сонлар билан алмаштиришдан ҳосил бўладиган ушбу

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} \dots b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots b_2 \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантнинг j-устун бўйича ёйилмаси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, d детерминантнинг j-устунини алмаштириш бу устуннинг элементлари минорларига ва шунинг учун ҳам уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига таъсир қилмайди.

Буни $b_1, b_2, \dots, b_n$ сонлар сифатида d детерминантнинг k-устуни ($k \neq j$ бўлганда) элементлари олинган ҳолга қўллаймиз. Бундай алмаштиришдан ҳосил қилинган детерминант иккита бир хил устунга (j-ва k-устунлар) эга ва демак, у нолга тенг бўлади. Бинобарин, бу детерминантни унинг j-устуни бўйича ёйилмаси ҳам нолга тенг бўлади, яъни $j \neq k$ бўлганда

$$a_{1k} A_{1j} + a_{2k} A_{2j} + \dots + a_{nk} A_{nj} = 0.$$

Шундай қилиб, *детерминантнинг бирорта устунидаги ҳамма элементларини бошқа устунининг мос элементлари алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг.* Худди шундай натижа детерминантнинг сатрлари учун ҳам албатта ўринлидир.

Чизиқли тенгламалар системаларини текширишга ўтамиз, шу билан бирга ҳозирча тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлган ҳол билан чегараланамиз, яъни

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

кўринишдаги системаларни қараймиз.

Қўшимча равишда, бу системадаги номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган детерминант (биз уни қисқача, *система детерминанти* деб атаймиз) нолдан фарқли деб ҳисоблаймиз. Ана шу фаразларда (1) система биргаликда эканлигини ва ҳатто аниқ эканлигини исботлаймиз.

2-§ да уч номаълумли учта тенглама системасини ечишда биз ҳар қайси тенгламани бирорта кўпайтувчига кўпайтириб, сўнгра бу тенгламаларни қўшган эдик. Натижада уч номаълумдан иккитасининг олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиб қолар эди. Биз ишлатган ўша кўпайтувчилар берилган тенгламадаги изланаётган номаълум коэффициентнинг система детерминантидаги алгебраик тўлдирувчиси эканлигини кўриб турибмиз. Мана шу усулдан (1) системани ечишда фойдаланамиз.

Дастлаб, (1) система биргаликда ва $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — унинг ечимларидан бири деб ҳисоблаймиз, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

j символ $1, 2, \dots, n$ сонларнинг исталган бири бўлсин. (2) тенгликларнинг биринчисининг иккала томонини A_{1j} га, яъни a_{1j} элементнинг система детерминанти d даги алгебраик тўлдирувчисига кўпайтирамиз; иккинчи тенгликнинг иккала томонини A_{2j} га кўпайтирамиз ва ҳоказо, ниҳоят, охирги тенгликнинг иккала томонини A_{nj} га кўпайтирамиз. Бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларини алоҳида-алоҳида қўшиб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\begin{gathered} (a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \dots + a_{n1}A_{nj})\alpha_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \dots + \\ + a_{n2}A_{nj})\alpha_2 + \dots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj})\alpha_j + \\ + \dots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \dots + a_{nn}A_{nj})\alpha_n = \\ b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}. \end{gathered}$$

Бу тенгликда α_j нинг коэффициенти бўлиб d хизмат қилади, қолган барча α ларнинг коэффициентлари юқорида қайд қилинган эслатмага кўра нолга тенг бўлади. Озод ҳад эса d детерминантда j-устунни (1) системанинг озод ҳадлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантдан иборат бўлади. Агар бу детерминантни 2-§ даги каби d_j орқали белгилайдиган бўлсак, тенглигимиз қуйидаги кўринишни олади:

$$d\alpha_j = d_j$$

бу ердан $d \neq 0$ бўлганлиги учун

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

Шу билан, агар (1) система биргаликда бўлса, у ҳолда (1) система ушбу

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d}, \qquad \alpha_2 = \frac{d_2}{d}, \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{d_n}{d} \tag{3}$$

ягона ечимга эга бўлишлиги исбот қилинди.

Энди (3) сонлар системаси ҳақиқатан ҳам (1) тенгламалар системасини қаноатлантиришини, яъни (1) система биргаликда эканлигини кўрсатамиз. Бунда биз одат бўлиб қолган қуйидаги символикадан фойдаланамиз.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ кўринишдаги ҳар қандай йиғинди қисқача $\sum_{i=1}^{n} a_i$ орқали белгиланади. Агар a_{ij} қўшилувчилари иккита индексли бўлган ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) йиғинди қаралаётган бўлса, у ҳолда биринчи индексни тайинлаб элементлар йиғиндисини, яъни $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ (бу ерда $i = 1, 2, \ldots, n$) йиғиндини олиш, кейин эса бу ҳамма йигиндиларни қўшиш мумкин. У ҳолда барча a_{ij} элементларнинг йиғиндиси учун

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

ёзувни ҳосил қиламиз.

Бироқ дастлаб иккинчи индексни тайинлаб a_{ij} қўшилувчиларни қўшиш, сўнгра ҳосил бўлган йиғиндиларни қўшиш ҳам мумкин эди. Шунинг учун

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

яъни *қўш йиғиндида қўшиш тартибини ўзгартириш мумкин.*

(1) системанинг i-тенгламасига (3) номаълумларнинг қийматларини қўямиз. i-тенгламанинг чап томонини $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ кўринишда ёзиш мумкинлиги ва $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{ij}$ бўлганлиги учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right).$$

Бу алмаштиришларга нисбатан қуйидагини қайд қиламиз: $\frac{1}{d}$ сон барча қўшилувчиларга умумий кўпайтувчи бўлиб келди ва биз уни йиғинди ташқарисига чиқардик, бундан ташқари қўшиш тартиби ўзгартирилганидан сўнг, b_k кўпайтувчи ички йиғинди белгиси ташқарисига чиқарилган, чунки у ички йиғинди индекси j га боғлиқ эмас.

Маълумки, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ ифода $k = i$ бўлганда d га, қолган барча k ларда 0 га тенг. Шундай қилиб, бизнинг k бўйича ташқи йиғиндимизда фақат битта қўшилувчи қолади, у ҳам бўлса, $b_i d$ дан иборат бўлади, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\cdot b_i d = b_i.$$

Бу билан (3) сонлар системаси ҳақиқатан ҳам (1) тенгламалар системаси учун ечим бўлиши исботланди.

Биз қуйидаги муҳим натижани ҳосил қилдик:

Детерминанти нолдан фарқли бўлган n номаълумли n та тенглама системаси ечимга эга ва бу ечим ягонадир. Бу ечим (3) формулалар бўйича, яъни *Крамер қоидаси* бўйича ҳосил қилинади; бу қоиданинг ифодаланиши иккита тенглама системаси бўлган ҳолдаги кабидир (2-§ га қаранг).

Мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8,\\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 &= 9,\\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5,\\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг детерминанти нолдан фарқли:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27,$$

шунинг учун системага Крамер қоидасини қўллаш мумкин. Номаълумларнинг қийматлари ифодасидаги суратлар қуйидаги детерминантлар бўлади:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 108,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \qquad d_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

Шундай қилиб, $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ берилган системанинг ечими, шу билан бирга ягона ечими бўлади.

Биз n номаълумли n та тенглама системаси (1) нинг детерминанти нолга тенг бўлган ҳолни қарамадик. Бу ҳолни 2-бобда, тенгламалари ва номаълумлари сони ихтиёрий бўлган системаларнинг умумий назариясини баён этишда қараб чиқамиз.

n номаълумли n та чизиқли тенглама системасига доир яна бир фактни келтириб ўтамиз n номаълумли n та бир жинсли чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин (1-§ га қаранг):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Бу ҳолда барча d_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) детерминантлар ноллардан тузилган устунга эга ва шунинг учун улар нолга тенг. Шундай қилиб, агар (4) системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, яъни бу системага Крамер қоидасини татбиқ қилиш мумкин бўлса, у ҳолда (4) системанинг ягона ечими ноль ечимдан иборат бўлади:

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0. \qquad (5)$$

Бу ердан ушбу натижа келиб чиқади:

Агар n номаълумли n та бир жинсли чизиқли тенглама системаси ноль ечимдан фарқли ечимга эга бўлса, бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур.

12-§ да тескариси ҳам, яъни агар бундай системанинг детерминанти ҳақиқатан ҳам нолга тенг бўлса, у ҳолда ҳар қандай бир жинсли тенгламалар системаси учун мавжудлиги равшан бўлган ноль ечимдан ташқари яна бошқа ечимлар ҳам мавжуд эканлиги кўрсатилади.

Мисол. k нинг қандай қийматларида

$$\left.\begin{aligned} kx_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + kx_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

система ноль бўлмаган ечимга эга бўлиши мумкин?

Бу системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

фақат $k = \pm 1$ бўлганда нолга тенг. k нинг бу иккита қийматининг ҳар бирида берилган системанинг ноль ечимдан фарқли ечимлари ҳақиқатан ҳам борлигини кўриш осон.

Крамер қоидасининг аҳамияти асосан шундаки, бу қоида қўлланиши мумкин бўлган ҳолларда системанинг ечими учун бу система коэффициентлари орқали аниқ ифода беради. Бироқ Крамер қоидасидан амалда фойдаланиш кўпгина узундан-узоқ ҳисоблашлар билан боғлиқдир: n номаълумли n та чизиқли тенглама системаси бўлган ҳолда n-тартибли $n + 1$ та детерминантни ҳисоблашга тўғри келади. 1-§ да баён қилинган номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули шу жиҳатдан анча қулайдир, чунки бу усул талаб этадиган ҳисоблашлар аслида n-тартибли битта детерминантни ҳисоблашда бажаришга тўғри келадиган ҳисоблашларга тенг кучлидир.

Турли татбиқларда коэффициентлари ва озод ҳадлари бирон бир физик катталикни ўлчаш натижасида ҳосил бўлган, яъни фақат маълум бир аниқликда тақрибан топилган ҳақиқий сонлар бўлган чизиқли тенгламалар системалари учраб туради. Бундай системаларни ечиш учун юқорида баён қилинган методлар баъзан ноқулай бўлиб чиқади, чунки улар унча аниқ бўлмаган натижаларга олиб келади ва шунинг учун уларнинг ўрнига турли итерацион методлар, яъни кўрсатилган тенгламалар системаларини номаълумларни кетма-кет яқинлаштириш ёрдамида ечишга имкон берадиган методлар ишлаб чиқилган. Бундай методларнинг баёнини ўқувчи тақрибий ҳисоблашлар назариясига оид китоблардан топиши мумкин.

ИККИНЧИ БОБ

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ (УМУМИЙ НАЗАРИЯ)

8-§. n ўлчовли вектор фазо

Чизиқли тенгламалар системасининг умумий назариясини қуриш учун Крамер қоидаси татбиқ этилиши мумкин бўлган системаларни ечишда муваффақият билан хизмат қилган аппарат энди етарли эмас. Детерминантлар ва матрицалардан ташқари ўзича ҳам катта умумматематик аҳамиятга эга бўлган янги бир тушунчани, яъни кўп ўлчовли вектор фазо тушунчасини киритишимиз керак бўлади.

Дастлаб бир нечта бошланғич изоҳлар бериб ўтамиз. Аналитик геометрия курсидан маълумки, текисликнинг ҳар қандай нуқтаси ўзининг иккита координатаси (берилган координата ўқларидаги) билан, яъни иккита ҳақиқий соннинг тартибланган системаси билан аниқланади; текисликдаги ҳар қандай вектор ўзининг иккита компоненти билан, яъни яна иккита ҳақиқий соннинг тартибланган системаси билан аниқланади. Шунга ўхшаш уч ўлчовли фазонинг ҳар қандай нуқтаси ўзининг учта координатаси билан, фазодаги ҳар қандай вектор ўзининг учта компоненти билан аниқланади.

Геометрияда, шунингдек, механикада ва физикада кўпинча шундай объектларни ўрганишга тўғри келадики, уларни тўла аниқлаш учун учта ҳақиқий соннинг берилиши етарли бўлмайди. Масалан, уч ўлчовли фазода шарлар тўпламини қарайлик. Шар тўла аниқланган бўлиши учун унинг радиуси ва марказининг координаталари берилган бўлиши, яъни тўртта ҳақиқий сондан иборат тартибланган система берилиши керак. Яна шуниси ҳам борки, радиус фақат мусбат қийматлар қабул қилиши мумкин. Иккинчи томондан, қаттиқ жисмнинг фазодаги турли ҳолатларини қарайлик. Агар жисмнинг оғирлик маркази координаталари (яъни учта ҳақиқий сон), оғирлик марказидан ўтувчи бирорта тайинланган ўқнинг йўналиши (иккита сон — учта йўналтирувчи косинусдан иккитаси) ва, ниҳоят, бу ўқ атрофида бурилиш бурчаги кўрсатилган бўлса, унинг вазияти тўла аниқланган бўлади. Шундай қилиб, фазодаги қаттиқ жисмнинг вазияти олтита ҳақиқий сондан иборат тартибланган система билан аниқланади.

Бу мисоллар *n* та ҳақиқий соннинг барча мумкин бўлган тартибланган системалари тўпламини қараш мақсадга мувофиқлигини кўрсатади. Бу тўплам унда қўшиш ва сонга кўпайтириш операциялари киритилгандан кейин (бу қуйироқда, уч ўлчовли фазонинг компонентлар орқали ифодаланган векторлари устидаги мос операцияларга ўхшаш амалга оширилади) *n* ўлчовли вектор фазо номини олади. Шундай қилиб, *n* ўлчовли вектор фазо фақат алгебраик тузилма бўлиб, у уч ўлчовли фазонинг координаталар бошидан чиқувчи векторлари тўпламининг баъзи энг содда хоссаларини сақлайди.

n та соннинг тартибланган ушбу

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (1)$$

системаси *n ўлчовли вектор* дейилади. a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сонлар α векторнинг *компонентлари* дейилади α ва

$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, \text{[illegible]} \qquad (2)$$

векторларнинг бир хил ўринда турган компонентлари устма-уст тушса, яъни агар $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ бўлса, бу векторлар *тенг* деб ҳисобланади. Векторларни белгилаш учун бундан буён грек алфавитининг кичик ҳарфлари ишлатилади, латин алфавитининг кичик ҳарфлари эса сонларни белгилаш учун ишлатилади.

Векторларга мисоллар сифатида қуйидагиларни келтирамиз: 1) текисликда ёки уч ўлчовли фазода координаталар бошидан чиққан вектор-кесмалар тайинланган координаталар системасида мос равишда юқорида айтилган маънода икки ва уч ўлчовли векторлар бўлади; 2) *n* номаълумли ҳар қандай чизиқли тенгламанинг коэффициентлари *n* ўлчовли вектор ташкил этади; 3) *n* номаълумли чизиқли тенгламаларнинг исталган системасининг ҳар қандай ечими *n* ўлчовли вектор бўлади; 4) агар *s* та сатрли ва *n* та устунли матрица берилган бўлса, у ҳолда унинг сатрлари *n* ўлчовли векторлар, устунлари эса *s* ўлчовли векторлар бўлади; 5) *s* та сатрли ва *n* та устунли матрицанинг ўзи *sn* ўлчовли вектор сифатида қаралиши мумкин: матрица элементларини сатрма сатр бўйича кетма-кет ўқиб чиқиш кифоя; хусусий ҳолда, *n* тартибли квадрат матрицани n^2 ўлчовли вектор деб қараш мумкин, шу билан бирга, равшанки, ҳар қандай n^2 ўлчовли вектор шу йўл билан *n*-тартибли бирорта матрицадан ҳосил қилиниши мумкин.

(1) ва (2) векторларнинг йиғиндиси деб компонентлари қўшилаётган векторларнинг мос компонентлари йиғиндисидан иборат бўлган

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \qquad (3)$$

векторга айтилади. Векторларни қўшиш сонларни қўшиш коммутатив ва ассоциатив бўлгани сабабли коммутатив ва ассоциативдир.

Ноль ролини ушбу

$$0 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \tag{4}$$

ноль вектор ўйнайди.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha + 0 = (a_1 + 0,\ a_2 + 0,\ \ldots,\ a_n + 0) = (a_1, a_2, \ldots,\ a_n) = \alpha.$$

Ноль векторни ёзиш учун ноль сонини ифодаловчи 0 символнинг ўзидан фойдаланамиз; айни пайтда ноль сони ҳақида гапириляптими ёки ноль вектор тўғрисидами эканлиги масаласи ҳеч қачон қийинчилик туғдирмайди; шундай бўлса-да, ўқувчи шу бобдаги параграфларни ўрганишда 0 символининг турлича талқин этилишини эсда тутиши керак.

(1) векторга қарама-қарши вектор деб

$$-\alpha = (-a_1, -a_2,\ \ldots,\ -a_n) \tag{5}$$

векторни айтамиз.

Равшанки, $\alpha + (-\alpha) = 0$. Энди векторларни қўшишга тескари амал—айириш мавжуд эканлигини кўриш осон: (1) ва (2) векторларнинг айирмаси $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ бўлади, яъни

$$\alpha - \beta = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots,\ a_n - b_n). \tag{6}$$

n ўлчовли векторларни (3) формула билан аниқланадиган қўшиш векторларни текисликда ёки уч ўлчовли фазода параллелограмм қоидаси бўйича геометрик қўшишдан келиб чиққан. Геометрияда векторни ҳақиқий сонга („скаляр“га) кўпайтириш ҳам ишлатилади: α векторни k сонга кўпайтириш $k > 0$ бўлганда α ни k марта чўзиш (яъни $k < 1$ да сиқиш) ни, $k < 0$ да эса $|k|$ марта чўзиш ва йўналишни тескарисига алмаштиришни билдиради. Бу қоидани α векторнинг компонентлари орқали ифодалаб ва текширилаётган умумий ҳолга ўтиб, қуйидаги таърифни ҳосил қиламиз:

(1) *векторнинг k сонга кўпайтмаси* деб компонентлари α векторнинг мос компонентларини k га кўпайтмасига тенг бўлган

$$k\alpha = \alpha k = (ka_1,\ ka_2,\ \ldots,\ ka_n) \tag{7}$$

векторга айтилади.

Бу таърифдан қуйидаги муҳим хулосалар келиб чиқади (уларни текшириш ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади):

$$k(\alpha \pm \beta) = k\alpha \pm k\beta; \tag{8}$$

$$(k \pm l)\alpha = k\alpha \pm l\alpha; \tag{9}$$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha; \tag{10}$$

$$1 \cdot \alpha = \alpha, \tag{11}$$

Қуйидаги хоссалар ҳам осонгина исбот қилиниши мумкин ёки (8) — (11) хоссалардан натижалар сифатида ҳосил қилиниши мумкин:

$$0 \cdot \alpha = 0, \tag{12}$$

$$(-1) \cdot \alpha = -\alpha; \tag{13}$$

$$k \cdot 0 = 0; \tag{14}$$

$$\text{агар } k\alpha = 0 \text{ бўлса, ё } k = 0, \text{ ёки } \alpha = 0. \tag{15}$$

Векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари аниқланган барча ҳақиқий компонентли n ўлчовли векторлар тўплами *n ўлчовли вектор фазо дейилади.*

Шуни таъкидлаб ўтамизки, n ўлчовли вектор фазо таърифига векторни векторга ҳеч қандай кўпайтириш кирмайди. Векторларни кўпайтиришни аниқлаш қийин эмас — масалан, векторлар кўпайтмасининг компонентлари кўпайтувчи векторлар мос компонентларининг кўпайтмасига тенг деб олиш мумкин. Бироқ бундай кўпайтириш ҳеч қандай жиддий татбиққа эга бўлмас эди. Масалан, текисликда ёки уч ўлчовли фазода координаталар бошидан чиққан вектор-кесмалар тайинланган координаталар системасида икки ўлчовли ва мос равишда уч ўлчовли вектор фазолар ташкил этадилар. Бу мисолда векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш, юқорида қайд қилиб ўтилганидек, муҳим геометрик маъно касб этган бир пайтда векторларнинг компонентлари бўйича кўпайтиришга бирон бир тузукроқ геометрик талқин бериб бўлмайди.

Яна бир мисол кўрайлик. n номаълумли чизиқли тенгламанинг чап қисми, яъни

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

кўринишдаги ифода $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг *чизиқли формаси* дейилади. Равшанки, f чизиқли форма ўз коэффициентларидан иборат $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вектор билан тўла аниқланади; аксинча, ҳар қандай n ўлчовли вектор бирорта чизиқли формани бир қийматли аниқлайди. Векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш чизиқли формалар устида бажариладиган мос операцияларга айланади; бу операциялардан биз 1-§ да кенг фойдаланган эдик. Векторларни компонентлаб кўпайтириш бу мисолда ҳам ҳеч қандай маънога эга эмас.

9-§. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги

Агар $\beta = k\alpha$ тенгликни қаноатлантирувчи k сон мавжуд бўлса, n ўлчовли вектор фазонинг β вектори α векторга *пропорционал* дейилади (олдинги параграфнинг (7) формуласига қаранг). Хусусан, ноль вектор $0 = 0\alpha$ тенгликка кўра ҳар қандай α векторга пропорционал. Агар $\beta = k\alpha$ ва $\beta \neq 0$ бўлса, бундан $k \neq 0$ ни оламиз, у ҳолда $\alpha = k^{-1}\beta$, яъни ноль бўлмаган векторлар учун пропорционаллик симметриклик хоссасига эга

Векторларнинг пропорционаллиги тушунчасининг умумлашгани бўлиб қуйидаги тушунча хизмат қилади (матрица сатрлари бўлган ҳол учун бу тушунчага 4-§ да дуч келган эдик): агар шундай $l_1, l_2, \ldots, l_s$ сонлар мавжуд бўлсаки, улар учун

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_s\alpha_s$$

муносабат бажарилса, β вектор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ векторларнинг *чизиқли комбинацияси* дейилади.

Шундай қилиб, β векторнинг j-компоненти $(j = 1,2, \ldots, n)$ векторлар йиғиндиси ва векторлар кўпайтмаси таърифига кўра $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ векторлар j-компонентларининг мос равишда $l_1, l_2, \ldots, l_s$ ларга кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

Ушбу

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r \qquad (r \geqslant 2) \tag{1}$$

векторлар системасининг ҳеч бўлмаганда бир вектори (1) системанинг қолган векторларининг чизиқли комбинацияси бўлса, (1) система *чизиқли боғлиқ*, акс ҳолда эса *чизиқли эркли* дейилади.

Бу муҳим тушунчанинг бошқа формасини кўрсатамиз: агар *ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли* шундай $k_1, k_2, \ldots, k_r$ сонларни топиш мумкин бўлсаки, улар учун

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = 0 \tag{2}$$

тенглик ўринли бўлса, (1) векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўлади.

Бу иккита таърифнинг эквивалентлигини исботлаш қийин эмас. Масалан, айтайлик, (1) системанинг α_r вектори қолган векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлсин:

$$\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_{r-1}\,\alpha_{r-1}.$$

Бу ердан

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_{r-1}\alpha_{r-1} - \alpha_r = 0$$

тенглик, яъни (2) кўринишдаги тенглик келиб чиқади, бу ерда $i = 1,2, \ldots, r-1$ учун $k_i = l_i$ ва $k_r = -1$, яъни $k_r \neq 0$. Энди аксинча, (1) векторлар (2) муносабат билан боғланган бўлиб, унда масалан, $k_r \neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\alpha_r = \left(-\frac{k_1}{k_r}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k_r}\right)\alpha_2 + \ldots + \left(-\frac{k_{r-1}}{k_r}\right)\alpha_{r-1},$$

яъни α_r вектор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$\alpha_1 = (5, 2, 1),\ \alpha_2 = (-1, 3, 3),\ \alpha_3 = (9, 7, 5),\ \alpha_4 = (3,\ 8,\ 7)$$

векторлар системаси чизиқли боғлиқ, чунки векторлар

$$4\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$$

муносабат билан боғланган. Бу муносабатда барча коэффициентлар нолдан фарқли. Бироқ берилган векторлар орасида баъзи коэффициентлари нолга тенг бўлган бошқа чизиқли боғланишлар ҳам мавжуд, масалан,

$$2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0,\ 3\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0.$$

Чизиқли боғлиқликнинг юқорида келтирилган таърифларидан иккинчиси $r = 1$ бўлган ҳолга, яъни биргина α вектордан иборат система бўлган ҳолга ҳам татбиқ қилинади: *бу система $\alpha = 0$ бўлганда ва фақат шу ҳолдагина чизиқли боғлиқ бўлади*. Ҳақиқатан ҳам, агар $\alpha = 0$ бўлса, у ҳолда, масалан, $k = 1$ да $k\alpha = 0$ бўлади. Аксинча, агар $k\alpha = 0$ ва $k \neq 0$ бўлса, $\alpha = 0$ бўлади.

Чизиқли боғлиқлик тушунчасининг қуйидаги хоссасини қайд қилиб ўтамиз.

Агар (1) векторлар системасининг бирорта қисм системаси чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда бутун (1) система ҳам чизиқли боғлиқ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (1) системанинг $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s (\ s < r)$ векторлари

$$k\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0$$

муносабат билан боғланган бўлсин, бу ерда ҳамма коэффициентлар ҳам нолга тенг эмас. Бу ердан

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s + 0 \cdot \alpha_{s+1} + \ldots + 0 \cdot \alpha_r = 0$$

муносабат келиб чиқади, яъни (1) система чизиқли боғлиқ.

Бу хоссадан иккита тенг векторга эга бўлган, умуман, иккита пропорционал векторга эга бўлган векторлар системаси, шунингдек, ноль векторга эга бўлган ҳар қандай системанинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади. Ҳозир исбот қилинган хоссани қуйидагича ифодалаш мумкин: *агар (1) векторлар системаси чизиқли эркли бўлса, у ҳолда унинг ҳар қандай қисм системаси ҳам чизиқли эркли бўлади.*

n ўлчовли векторларнинг чизиқли эркли системаси қанча векторга эга бўлиши мумкин ва, хусусан, векторлари сони чексиз кўп бўлган чизиқли эркли системалар мавжудми, деган савол туғилади.

Бу саволга жавоб бериш учун n ўлчовли вектор фазода бу фазонинг *бирлик векторлари* деб аталувчи

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = (1,0,0,\ \dots,\ 0), \\ \varepsilon_2 = (0,1,0,\ \dots,\ 0), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = (0,0,0,\ \dots,\ 1) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

векторларни қараймиз. *Бирлик векторлар системаси чизиқли эрклидир:* қуйидаги тенглик

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n = 0$$

ўринли бўлсин; бу тенгликнинг чап томони $(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n)$ векторга тенг бўлганлиги учун

$$(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n) = 0$$

бўлади, яъни $k_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, чунки ноль векторнинг барча компоненталари нолга тенг, векторларнинг тенглиги эса уларнинг мос компоненталарининг тенглигига тенг кучлидир.

Шундай қилиб, биз n ўлчовли вектор фазода n та вектордан иборат битта чизиқли эркли система топдик. Ўқувчи кейинчалик бу фазода бундай турли системалар аслида чексиз кўп эканлигини кўради.

Иккинчи томондан қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

n ўлчовли вектор фазонинг ҳар қандай s та вектори $s > n$ бўлганда чизиқли боғлиқ система ташкил этади.

Ҳақиқатан ҳам, қуйидаги векторлар берилган бўлсин:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = (a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1n}), \\ \alpha_2 = (a_{21},\ a_{22},\ \dots,\ a_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_s = (a_{s1},\ a_{s2},\ \dots,\ a_{sn}). \end{array}$$

Биз ҳаммаси бирдан нолга тенг бўлмаган шундай $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_s$ сонларни топишимиз керакки, улар учун ушбу

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \qquad (4)$$

тенглик ўринли бўлсин.

(4) тенгликдан компоненталар орасидаги мос тенгликларга ўтиб,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{s1}k_s = 0, \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{s2}k_s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{sn}k_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

системани ҳосил қиламиз.

(5) тенгликлар s та $k_1, k_2, \ldots, k_s$ номаълумларга нисбатан n та чизиқли бир жинсли тенгламалар системасини ташкил этади. Бу системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик, шунинг учун 1-§ охирида исботланганга кўра бу система нолъ ечимга эга. Шундай қилиб, (4) тенгликни қаноатлантирадиган, ҳаммаси бирдан нолга тенг бўлмаган $k_1, k_2, \ldots, k_s$ сонларни топиш мумкин. Теорема исбот бўлди.

Агар берилган n ўлчовли векторларнинг чизиқли эркли системаси

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{6}$$

га n ўлчовчи исталган β векторни қўшганда чизиқли боғлиқ система ҳосил бўладиган бўлса, берилган (6) системага *максимал* чизиқли эркли система деймиз. $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r, \beta$ векторларни боғловчи ҳар қандай чизиқли боғланишда β олдидаги коэффициент нолдан фарқли бўлганлиги сабабли (акс ҳолда (6) система чизиқли боғлиқ бўлар эди), β вектор (6) векторлар орқали чизиқли ифодаланади. Шунинг учун (6) векторлар чизиқли эркли бўлиб, исталган n ўлчовли β вектор эса уларнинг чизиқли комбинацияси бўлганда ва фақат шу ҳолдагина (6) векторлар системаси максимал чизиқли эркли система бўлади.

Юқорида ҳосил қилинган натижалардан *n ўлчовли фазода n та вектордан иборат ҳар қандай чизиқли эркли система максимал система бўлишлиги, шунингдек, бу фазо векторларининг ҳар қандай максимал чизиқли эркли системаси n тадан кўп бўлмаган вектордан ташкил топиши келиб чиқади.*

n ўлчовли векторларнинг ҳар қандай чизиқли эркли системаси ҳеч бўлмаганда битта максимал чизиқли эркли системада мавжуд бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар векторларнинг берилган системаси максимал бўлмаса, у ҳолда унга битта векторни шундай қўшиб қўйиш мумкинки, ҳосил бўлган система чизиқли эрклилигича қолади. Агар бу янги система ҳали ҳам максимал бўлмаса, унга яна битта вектор қўшиш мумкин ва ҳоказо. Бу процесс чексиз давом этиши мумкин эмас, чунки энди $n+1$ та вектордан иборат ихтиёрий n ўлчовли векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўлади.

Ноль бўлмаган биргина вектордан иборат ҳар қандай система чизиқли эркли бўлгани учун қуйидагини ҳосил қиламиз: *ҳар қандай ноль бўлмаган вектор бирорта максимал чизиқли эркли системада мавжуд бўлади,* шунинг учун ҳам *n ўлчовли вектор фазода векторларнинг чексиз кўп турли максимал чизиқли эркли системалари мавжуд.*

Қуйидаги савол туғилади: бу фазода векторлари сони n дан кичик бўлган максимал чизиқли эркли системалар мавжудми ёки исталган бундай системадаги векторлар сони албатта n га тенг бўладими? Бу муҳим саволга жавоб баъзи бошланғич тушунчалардан кейин қуйироқда берилади.

Агар β вектор

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{7}$$

векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлса, у ҳолда кўпинча β *вектор (7) система орқали чизиқли ифодаланади* дейилади. Равшанки, агар β вектор бу системанинг бирор қисм системаси орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда у (7) система орқали ҳам чизиқли ифодаланади, бунинг учун қолган векторларни нолга тенг бўлган коэффициентлар билан олиш кифоя. Бу терминологияни умумлаштириб, агар ҳар қандай β_l вектор ($l = 1, 2, \ldots, s$) (7) система векторларининг чизиқли комбинацияси бўлса,

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \tag{8}$$

векторлар системаси (7) система орқали чизиқли ифодаланади дейилади.

Бу тушунчанинг транзитивлигини кўрсатамиз: *агар (8) система (7) система орқали чизиқли ифодаланса,*

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t \tag{9}$$

векторлар системаси эса (8) система орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда (9) ҳам (7) орқали чизиқли ифодаланади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\gamma_j = \sum_{l=1}^{s} l_{jl}\beta_l, \quad j = 1,2, \ldots, t, \tag{10}$$

бироқ

$$\beta_l = \sum_{m=1}^{r} k_{lm}\alpha_m, \quad l = 1,2, \ldots, s.$$

Бу ифодаларни (10) га қўйиб,

$$\gamma_j = \sum_{l=1}^{s} l_{jl}\left(\sum_{m=1}^{r} k_{lm}\alpha_m\right) = \sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{s} l_{jl}k_{lm}\right)\alpha_m$$

ни ҳосил қиламиз, яъни ҳар қандай γ_j, $j = 1,2, \ldots, t$ вектор (7) векторлар системасининг чизиқли комбинацияси бўлади.

Агар иккита векторлар системасининг ҳар қайсиси бошқаси орқали чизиқли ифодаланса, бу системалар *эквивалент* дейилади. Векторлар системаларининг бир-бири орқали чизиқли ифодаланиш хоссасининг ҳозиргина исбот қилинган транзитивлигидан векторлар системаларининг эквивалентлик тушунчасининг транзитивлиги, шунингдек қуйидаги даъво келиб чиқади: *агар векторларнинг иккита системаси эквивалент бўлса* *ва агар биророта вектор бу системаларнинг бири орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда у иккинчи система орқали ҳам чизиқли ифодаланади.*

Агар ўзаро эквивалент бўлган иккита вектор системадан бири чизиқли эркли бўлса, у ҳолда бу хоссага иккинчи система ҳам эга деб айтиб бўлмайди. Агар бу иккала система чизиқли эркли бўлса, у ҳолда уларга кирувчи векторларнинг сони ҳақида муҳим бир мулоҳазани келтириш мумкин. Дастлаб қуйидаги теоремани исбот қиламиз. Бу теореманинг келгусидаги ролини эътиборга олиб ва бу теоремага ҳали кўп мурожаат қилишимиз сабабли уни асосий теорема деб атаймиз.

Агар n ўлчовчи вектор фазода иккита:

(I) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r,$

(II) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$

векторлар системаси берилган бўлиб, улардан биринчиси чизиқли эркли ҳамда иккинчиси орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда биринчи системадаги векторлар сони иккинчи системадаги векторлар сонидан ортиқ бўлмайди, яъни $r \leqslant s$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, айтайлик $r > s$ бўлсин. Шартга кўра, (I) системанинг ҳар қайси вектори (II) система орқали чизиқли ифодаланади:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1s}\beta_s, \\ \alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2s}\beta_s, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \ldots + a_{rs}\beta_s. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Бу чизиқли ифодаларнинг коэффициентлари s ўлчовли r та вектор системасини ташкил этади:

$$\begin{array}{l} \gamma_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1s}), \\ \gamma_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2s}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rs}), \end{array}$$

$r > s$ бўлгани учун бу векторлар чизиқли боғлиқ, яъни

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_r\gamma_r = 0,$$

бу ерда $k_1, k_2, \ldots, k_r$ коэффициентларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. Бундан компонентлар орасидаги қуйидаги тенгликларга келамиз:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (12)$$

Энди (I) система векторларининг қуйидаги чизиқли комбинацияси

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

ни ёки, қисқача, $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i$ ни қараймиз. (11) ва (12) дан фойдаланиб,

$$\sum_{j=1}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij}\right)\beta_j = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бироқ бу (I) системанинг чизиқли эркли эканлигига зид.

Исбот қилинган бу асосий теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади:

Ҳар қандай иккита эквивалент чизиқли эркли векторлар системаси тенг сондаги векторларга эга бўлади.

n ўлчовли векторларнинг ихтиёрий иккита максимал чизиқли эркли системаси эквивалент бўлиши равшан. Бинобарин, улар бир хил сондаги векторлардан ташкил топади. Маълумки, *n* та вектордан иборат бундай турдаги системалар мавжуд, шу сабабли ниҳоят илгари қўйилган саволга жавоб ҳосил қиламиз: *n ўлчовли вектор фазо векторларининг ҳар қандай максимал чизиқли эркли системаси n та вектордан иборат.*

Ҳосил қилинган натижалардан бошқа хулосаларни ҳам келтириб чиқариш мумкин:

Агар векторларнинг чизиқли эркли системасида унда максимал бўлган иккита чизиқли эркли қисм система олинган бўлса (яъни шундай қисм системаки, унга системамизнинг биророта ҳам векторини чизиқли эрклиликни бузмаган ҳолда қўшиш мумкин эмас), у ҳолда бу қисм системалардаги векторлар сони тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \tag{13}$$

векторлар системасида

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \quad s < r \tag{14}$$

қисм система максимал чизиқли эркли қисм система бўлса, у ҳолда $\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_r$ векторларнинг ҳар бири (14) система орқали чизиқли ифодаланади. Иккинчи томондан, (13) системадаги ҳар қайси α_i вектор бу система орқали чизиқли ифодаланади: α_i векторнинг олдидаги коэффициентни 1 деб, системанинг қолган векторларининг олдидаги коэффициентни эса 0 деб олиш етарли. Энди (13) ва (14) системаларнинг эквивалентлигини кўриш осон. Бу ердан (13) система ўзининг ҳар қандай максимал чизиқли эркли қисм системасига эквивалент эканлиги келиб чиқади, шу сабабли бу барча қисм системалар ўзаро эквивалент, яъни улар чизиқли эркли бўлиб, бир хил сондаги векторларга эга бўладилар.

Берилган векторлар системасининг исталган максимал чизиқли эркли системасига кирувчи векторлар сони бу системанинг *рангги* дейилади. Бу тушунчадан фойдаланиб асосий теоремадан яна бир натижа келтириб чиқарамиз.

п ўлчовли векторларнинг иккита

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \tag{15}$$

ва

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \tag{16}$$

системаси берилган бўлсин. Бу системалар чизиқли эркли бўлиши шарт эмас, шу билан бирга (15) системанинг ранги k сонга, (16) системанинг ранги эса l сонга тенг бўлсин. Агар биринчи система иккинчи система орқали чизиқли ифодаланса, $k \leqslant l$ бўлади. Агар бу системалар эквивалент бўлса, $k = l$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \dots, \alpha_{l_k} \tag{17}$$

ва

$$\beta_{l_1}, \beta_{l_2}, \dots, \beta_{l_k} \tag{18}$$

мос ҳолда (15) ва (16) системаларнинг ихтиёрий максимал чизиқли эркли қисм системалари бўлсин. У ҳолда (15) ва (17) системалар ўзаро эквивалент, бу (16) ва (18) системалар учун ҳам ўринли. (15) система (16) система орқали чизиқли ифодаланишидан энди (17) система ҳам (16) система орқали чизиқли ифодаланиши, шунинг учун (16) системага эквивалент бўлган (18) система орқали ҳам чизиқли ифодаланиши келиб чиқади, энди (17) системанинг чизиқли эрклилигидан фойдаланиб асосий теоремани қўллаш қолди. Исбот қилинаётган хулосанинг иккинчи қисми биринчисидан келиб чиқади.

10- §. Матрицанинг ранги

Агар бирор n ўлчовли векторлар системаси берилган бўлса, векторларнинг бу системаси чизиқли боғлиқми ёки йўқми деган табиий савол туғилади. Ҳар қайси конкрет ҳолда бу саволнинг жавоби қийинчиликсиз топилади деб ўйлаш мумкин эмас. Масалан, векторларнинг ушбу

$$\alpha = (2, -5, 1, -1), \quad \beta = (1, 3, 6, 5), \quad \gamma = (-1, 4, 1, 2)$$

системасини текширганда унда бирон бир чизиқли боғланишни пайқаш қийин, ваҳоланки бу векторлар

$$7\alpha - 3\beta + 11\gamma = 0$$

муносабат билан боғланган.

Бу масалани ечишнинг бир усулини 1-§ беради; берилган векторларнинг компонентлари бизга маълум бўлгани сабабли, изланаётган чизиқли боғланишнинг коэффициентларини номаълумлар деб ҳисоблаб, чизиқли бир жинсли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни Гаусс методи билан ечамиз. Мазкур параграфда қаралаётган масалага бошқача ёндошиш кўрсатилади, бу билан биз асосий мақсадимизга — ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаларини ечишга анча яқинлашган бўламиз.

s та сатр ва n та устундан иборат (s ва n сонлар ўзаро ҳеч бир боғланмаган).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Ву матрицанинг s ўлчовли векторлар сифатида қаралаётган устунлари, умуман айтганда, чизиқли боғлиқ бўлиши мумкин. Устунлар системасининг ранги, яъни матрицанинг чизиқли эркли устунларининг максимал сони (аниқроғи, устунлар системасининг ихтиёрий максимал чизиқли эркли қисм системасига кирувчи устунларининг сони) бу матрицанинг ранги дейилади.

Равшанки, худди шунга ўхшаш A матрицанинг сатрларини ҳам n ўлчовли векторлар деб қараш мумкин. Маълум бўлишича, матрица сатрлари системасининг ранги унинг устунлари системасининг рангига, яъни бу матрицанинг рангига тенг экан. Кутилмаган бу даъвонинг исботи матрица рангини аниқлашнинг яна бир (матрицани амалий жиҳатдан ҳисоблашга ҳам имкон берадиган) формасини кўрсатганимиздан сўнг келтирилади.

Дастлаб тўғри тўрт бурчакли матрицалар бўлган ҳол учун минор тушунчасини умумлаштирамиз. A матрицада ихтиёрий k та сатр ва k та устунни танлаб оламиз, $k \leqslant \min(s, n)$. Бу сатр ва устунларнинг кесишган жойида турувчи элементлар k-тартибли квадрат матрица ташкил этади, бу матрицанинг детерминанти A матрицанинг k *тартибли минори* дейилади. Бизни A матрицанинг нолдан фарқли бўлган минорларининг тартиби аниқроғи, бу тартибларнинг ичида энг юқориси қизиқтиради. Уни излашда қуйидаги кўрсатмага эътибор бериш фойдалидир: *агар A матрицанинг k-тартибли* *барча минорлари нолга тенг бўлса, у ҳолда k дан юқори тартибли барча минорлари ҳам нолга тенг.* Ҳақиқатан ҳам, $(k+j)$-тартибли $(k<k+j \leqslant \min(s,n))$ ҳар қандай минорни Лаплас теоремасига асосан исталган k та сатри бўйича ёйиб, бу минорни j-тартибли минорларга кўпайтирилган k тартибли минорлар йиғиндиси шаклида тасвирлаймиз Бу билан унинг нолга тенг эканлигини исбот қилган бўламиз

Энди матрица ранги ҳақидаги қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби бу матрицанинг рангига тенг.

Исботи. A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби r га тенг бўлсин. Ушбу

$$A=\left|\begin{array}{|ccc|ccc}
\cline{1-3}
a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & D & \ldots & \ldots & & \ldots \\
a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{r} \\
\cline{1-3}
\multicolumn{1}{c}{a_{r+1,1}} & \ldots & \multicolumn{1}{c}{a_{r+1,r}} & a_{r+1,r+1} & \ldots & a_{r+1,n} \\
\multicolumn{1}{c}{\ldots} & \ldots & \multicolumn{1}{c}{\ldots} & \ldots & \ldots & \ldots \\
\multicolumn{1}{c}{a_{s1}} & \ldots & \multicolumn{1}{c}{a_{sr}} & a_{s,r+1} & \ldots & a_{s}
\end{array}\right|$$

матрицанинг юқори чап бурчагида турган r-тартибли D минор нолдан фарқли бўлсин деб фараз қиламиз, $D \neq 0$. Бу исботнинг умумийлигига зиён етказмайди. У ҳолда A матрицанинг биринчи r та устуни ўзаро чизиқли эркли бўлади: агар уларнинг орасида чизиқли боғланиш мавжуд бўлганида эди, у ҳолда векторлар қўшилганда уларнинг мос компонентлари қўшилганлиги сабабли, D минорнинг устунлари орасида ҳам ана шу чизиқли боғланиш мавжуд бўлар эди ва шунинг учун D минор нолга тенг бўлар эди.

Энди A матрицанинг ҳар қандай l-устуни $(r<l \leqslant n \pm)$ биринчи r та устуннинг чизиқли комбинацияси бўлишини исбот қиламиз. Ихтиёрий $l(1 \leqslant l \leqslant s)$ оламиз ва D минорни l-устун ва l-сатрнинг мос элементлари орқали „ҳошиялашдан“ ҳосил бўладиган $(r+1)$-тартибли ёрдамчи

$$\Delta_l=\begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1l} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rl} \\
a_{l1} & \ldots & a_{lr} & a_{ll}
\end{vmatrix}$$

детерминант тузамиз. l ҳар қандай бўлганда ҳам Δ_l детерминант нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам, агар $i>r$ бўлса, Δ_i минор A матрицамизнинг $(r+1)$-тартибли минори бўлади, шунинг учун у r сонни танлаб олинишига кўра нолга тенг бўлади

Агар $l \leqslant r$ бўлса, у ҳолда Δ_l A матрицанинг минори бўла олмайди, чунки уни матрицанинг баъзи сатрлари ва устунларини ўчиришдан ҳосил қилиб бўлмайди; бироқ энди Δ_l детерминант иккита бир хил сатрга эга бўлади ва, демак, яна нолга тенг бўлади.

Δ_l детерминантдаги охирги сатр элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини қарайлик, a_{ll} элемент учун, табиийки, D минор алгебраик тўлдирувчи бўлиб хизмат қилади. Агар $1 \leqslant j \leqslant r$ бўлса, у ҳолда Δ_l да a_{lj} элемент учун алгебраик тўлдирувчи ушбу

$$A_j = (-1)^{(r+1)+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$$

сон бўлади, у l га боғлиқ эмас ва шунинг учун ҳам A_j орқали белгиланган. Шундай қилиб, Δ_l детерминантни унинг охирги сатри бўйича ёйиб ва бу ёйилмани нолга тенглаб (чунки $\Delta_l = 0$)

$$a_{l1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{lr}A_l + a_{ll}D = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан $D \neq 0$ эканлигини назарга олсак:

$$a_{ll} = \frac{A_1}{D}a_{l1} - \frac{A_2}{D}a_{l2} - \dots - \frac{A_r}{D}a_{lr}.$$

Бу тенглик барча l лар ($l = 1, 2, \dots s$) учун тўғри, унинг коэффициентлари l га боғлиқ бўлмагани учун A матрицанинг l- устуни A нинг мос ҳолда $-\frac{A_1}{D}, -\frac{A_2}{D}, \dots, -\frac{A_r}{D}$ коэффициентлар билан олинган биринчи r та устунининг йиғиндисидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, A матрица устунлари системасида r та устундан иборат максимал чизиқли эркли қисм система топдик. Бу билан А матрицанинг ранги r га тенг эканлиги исбот бўлди, яъни ранг ҳақидаги теорема исбот қилинди.

Бу теорема матрица рангини амалда ҳисоблаш методини беради, шу сабабли берилган векторлар системасида чизиқли боғланиш мавжудлиги ҳақидаги масалани ҳал қилиш усулини ҳам беради; берилган векторлар устунлари бўлиб хизмат қиладиган матрица тузиб ва бу матрицанинг рангини ҳисоблаб, берилган системанинг чизиқли эркли векторларининг максимал сонини топамиз.

Матрица рангини топишнинг ранг ҳақидаги теоремага асосланган методи бу матрицани чекли бўлса-да, бироқ кўп сондаги минорларини ҳисоблашни талаб этади. Ҳозир киритиладиган изоҳ бу методга анча соддалик киритишга имкон беради. Агар ўқувчи ранг ҳақидаги теореманинг исботини яна бир таҳлил қилиб чиқадиган бўлса, у ҳолда у исбот давомида A матрицанинг $r+1)$- тартибли барча минорларининг нолга тенглигидан фойдаланмаганимизни, аслида нолга тенг бўлмаган r- тартибли D минорни ҳошияловчи $(r+1)$-тартибли минорларгина ишлатилганлигини ва шунинг учун фақат шу минорларнигина нолга тенглигидан r сон A матрицанинг чизиқли эркли устунларининг максимал сони эканлигининг келиб чиқишини кўради; бундан A матрицанинг умуман $(r+1)$- тартибли барча минорларини нолга тенглиги келиб чиқади. Шундай қилиб, биз матрица рангини ҳисоблашнинг қуйидаги қоидасига келамиз.

Матрица рангини ҳисоблашда қуйи тартибли минорлардан юқори тартибли минорларга ўтиш керак. Агар нолдан фарқли k- тартибли D минор топилган бўлса, у ҳолда D минорни ҳошияловчи $(k+1)$- тартибли минорларнигина ҳисобланади: агар уларнинг барчаси нолга тенг бўлса, матрицанинг ранги k га тенг бўлади.

Мисоллар

1. Ушбу матрицанинг рангини топинг:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг юқори чап бурчагида турган иккинчи тартибли минори нолга тенг. Бироқ матрицада нолдан фарқли иккинчи тартибли минорлар ҳам мавжуд, масалан,

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

d минорни ҳошияловчи учинчи тартибли

$$d'=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

минор нолдан фарқли, $d'=1$, бироқ d' минорни ҳошияловчи тўртинчи тартибли минорларнинг ҳар иккаласи ҳам нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Шундай қилиб, A матрицанинг ранги учга тенг.

2. Ушбу

$$\alpha_1=(2,\ -2,\ -4),\ \alpha_2=(1,\ 9,\ 3),\ \alpha_3=(-2,\ -4,\ 1),\ \alpha_4=(3,\ 7,\ -1)$$

векторлар системасида максимал чизиқли эркли қисм система топинг.

Берилган векторлар устунлари бўлиб хизмат қиладиган

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица тузамиз. Бу матрицанинг ранги иккига тенг: юқори чап бурчакда турган иккинчи тартибли минор нолдан фарқли, бироқ уни ҳошияловчи учинчи тартибли ҳар иккала минор нолга тенг. Бу ердан, α_1, α_2 векторлар берилган системада максимал чизиқли эркли қисм системалардан бирини ташкил этиши келиб чиқади

Матрица ранги ҳақидаги теореманинг натижаси сифатида илгари келтириб ўтилган қуйидаги даъвони исботлаймиз:

Ҳар қандай матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сони унинг чизиқли эркли устунларининг максимал сонига, яъни бу матрица рангига тенг.

Буни исботлаш учун матрицани транспонирлаймиз, яъни унинг сатрларини, номерлашни сақлаган ҳолда, устунларига айлантирамиз. Транспонирлаш натижасида матрицанинг нолдан фарқли минорларининг максимал тартиби ўзгариши мумкин эмас, чунки транспонирлаш детерминантни ўзгартирмайди, берилган матрицанинг ҳар қандай минори учун матрицани транспонирлаш натижасида ҳосил қилинган минор янги матрицада бўлади ва аксинча. Бу ерда янги матрицанинг ранги берилган матрицанинг рангига тенг эканлиги келиб чиқади; шу билан бирга у янги матрицанинг чизиқли эркли устунларининг максимал сонига, яъни берилган матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сонига тенг.

Мисол. 8- § да n та номаълумнинг чизиқли формаси тушунчаси киритилган ва чизиқли формаларни қўшиш ва уларни сонга кўпайтириш аниқланган эди. Бу таъриф чизиқли формаларга чизиқли боғлиқлик тушунчасини унинг барча хоссалари билан биргаликда ўтказишга имкон беради.

Чизиқли формалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4, \\ f_2 &= 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4. \\ f_3 &= x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4, \\ f_4 &= 2x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Бу системада максимал чизиқли эркли қисм системани ажратиш керак. Бу формаларнинг коэффициентларидан матрица тузамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ва унинг рангини топамиз. Матрицанинг юқори чап бурчагидаги иккинчи тартибли минор нолдан фарқли, бироқ уни ҳошияловчи тўртта учинчи тартибли минорнинг ҳаммаси нолга тенглигини текшириш осон. Бу ердан, матрицанинг биринчи иккита сатри чизиқли боғлиқ эмас, учинчи ва тўртинчи сатрлари эса уларнинг чизиқли комбинацияси бўлиши келиб чиқади. Бинобарин, f_1, f_2 система берилган чизиқли формалар системасининг изланаётган қисм системаси бўлади.

Матрица ранги ҳақидаги теоремадан келиб чиқадиган яна бир муҳим натижани келтирамиз.

n- тартибли детерминантнинг сатрлари орасида чизиқли боғланиш мавжуд бўлган ҳолдагина ва фақат шу ҳолдагина, у нолга тенг бўлади.

Бу даъво 4- § да бир томонга исботланган эди (8- хосса). Энди бизга нолга тенг бўлган n- тартибли детерминант берилган бўлсин,яъни бошқача айтганда,максимал тартибга эга бўлган ягона минори нолга тенг бўлган n- тартибли квадрат матрица берилган бўлсин. Бу ердан, бу матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартибли n дан кичиклиги, яъни рангнинг n дан кичиклиги,бинобарин юқорида исбот қилинганга асосан, бу матрицанинг сатрлари чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади.

Исбот қилинган бу натижада сатрлар ўрнига детерминант устунлари ҳақида сўз юритиш мумкин эканлиги равшандир.

Матрица рангини ҳисоблашнинг ранг ҳақидаги теоремага боғлиқ бўлмаган ва детерминантларни ҳисоблашни талаб этмайдиган яна бошқа бир методи мавжуд. Бу методдан қайси устунлар (ёки сатрлар) максимал чизиқли эркли система ташкил этиши билан қизиқмай, балки фақат рангнинг ўзинигина билишимиз керак бўлган ҳолда фойдаланиш мумкин.

Шу методни баён қилайлик.

А матрицани ***элементар алмаштиришлар*** деб уни қуйидагича алмаштиришларга айтилади:

(a) иккита сатрнинг ёки иккита устуннинг ўрнини алмаштириш (транспозиция);

(b) сатрни (ёки устунни) нолдан фарқли ихтиёрий сонга кўпайтириш;

(c) бир сатрга (ёки устунга) бирор сонга кўпайтирилган бошқа сатрни (устунни) қўшиш.

Осонгина кўриш мумкинки, ***элементар алмаштиришлар матрицанинг рангини ўзгартирмайди.*** Ҳақиқатан ҳам бу алмаштиришлар, масалан, матрица устунларига қўлланадиган бўлса, у ҳолда векторлар сифатида қаралаётган устунлар системаси унга эквивалент система билан алмашади. Буни (c) алмаштириш учунгина исбот қиламиз, чунки (a) ва (b) учун бу равшандир. Айтайлик, l- устунга k сонга кўпайтирилган j- устун қўшилаётган бўлсин. Агар алмаштириш бажарилгунча матрица устунлари бўлиб

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots, \alpha_j \ldots, \alpha_n \tag{1}$$

векторлар хизмат қилган бўлса, у ҳолда алмаштиришдан сўнг матрица устунлари

$$\alpha_1, \ldots, \alpha'_l = \alpha_l + k\alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n \tag{2}$$

векторлар бўлади.

(2) система (1) система орқали чизиқли ифодаланади,

$$\alpha_l = \alpha'_l - k\alpha_j$$

тенглик эса (1) система ҳам ўз навбатида (2) орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатади. Бинобарин, бу системалар эквивалент ва шунинг учун уларнинг максимал чизиқли эркли қисм системалари бир хил сондаги векторлардан иборат бўлади.

Шундай қилиб, матрица рангини ҳисоблашда дастлаб уни элементар алмаштиришларнинг бирон бир комбинацияси ёрдамида соддалаштириб олиш мумкин.

Агар s та сатр ва n та устунга эга бўлган матрицанинг 1 га тенг бўлган $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ (бу ерда $0 < r < \min(s, n)$) элементларидан ташқари қолган барча элементлари нолга тенг бўлса, бу матрица *диагонал шаклга* эга дейилади. Бундай матрицанинг ранги r га тенг эканлиги равшан.

Ҳар қандай матрицани элементар алмаштиришлар билан диагонал шаклга келтириш мумкин.

Дарҳақиқат, ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \cdot & a_{sn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Агар унинг барча элементлари нолга тенг бўлса, у диагонал шаклга эга бўлган. Агар унда нолдан фарқли элементлар бўлса, у ҳолда сатрлар ва устунлар транспозицияси ёрдамида a_{11} элементнинг нолдан фарқли бўлишига эришиш мумкин. Сўнгра биринчи сатрни a_{11}^{-1} га кўпайтириб, a_{11} элементни бирга айлантирамиз. Агар энди j-устундан, $(j > 1)$ a_{1j} га кўпайтирилган биринчи устунни айирадиган бўлсак, a_{1j} элемент ноль билан алмаштирилади. Иккинчисидан бошлаб барча устунларни ва барча сатрларни шундай алмаштирсак, қуйидаги кўринишдаги матрицага келамиз:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{s2} & \ldots & a'_{sn} \end{pmatrix}.$$

Пастки ўнг бурчакда жойлашган ва ҳоказо матрицаларда ҳам худди шундай алмаштиришлар бажариб, чекли сондаги қадамдан сўнг ранги берилган A матрицанинг рангига тенг бўлган диагонал шаклдаги матрицани ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, *матрица рангини топиш учун бу матрицани элементар алмаштиришлар ёрдамида диагонал шаклга келтириш керак ва ҳосил қилинган матрицанинг бош диагоналида турган бирлар сонини ҳисоблаш керак.*

Мисол. Ушбу матрица рангини топинг:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицада биринчи ва иккинчи устунларнинг ўринларини алмаштириб ва биринчи сатрни $\frac{1}{2}$ сонига кўпайтириб, қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бунинг учинчи устунига иккилантирилган биринчи устунни қўшиб, сўнгра янги биринчи сатрнинг бирорта карралисини қолган ҳар қайси сатрга қўшиб,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. Ниҳоят, бу матрицанинг иккинчи сатрини —1 га кўпайтириб, учинчи устундан учлантирилган иккинчи устунни айириб, сўнгра учинчи ва бешинчи сатрлардан янги иккинчи сатрнинг бирорта карралисини айириб, изланаётган диагонал шаклга келамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шундай қилиб, матрицанинг ранги иккига тенг.

13-бобда матрицаларни элементар алмаштиришга ва унинг диагонал шаклига яна дуч келамиз, бироқ бу матрицаларнинг элементлари сонлар эмас, балки кўпҳадлар бўлади.

11- §. Чизиқли тенгламалар системалари

Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаларини ўрганишга киришамиз, шу билан бирга энди бу системада тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг деб фараз қилмаймиз. Шундай бўлса-да, ҳосил қилинган натижалар тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг, лекин системанинг детерминанти нолга тенг бўлган ҳол (бу ҳол 7- § да кўрилмаган) учун ҳам ўз кучини сақлайди.

Чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right| \qquad (1)$$

1- § дан маълумки, энг олдин бу системанинг биргаликда бўлиш-бўлмаслик масаласини ҳал қилиш керак. Шу мақсадда системанинг коэффициентларидан тузилган A матрица ва A га озод ҳадларни қўшишдан ҳосил бўлган „кенгайтирилган“ $\overline{A}$ матрицани оламиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

ва бу матрицаларнинг рангларини ҳисоблаймиз. Осонгина кўриш мумкинки, $\bar{A}$ *матрицанинг ранги ё A матрицанинг рангига тенг, ёки ундан битта ортиқ.* Ҳақиқатан ҳам, A матрица устунларининг бирорта максимал чизиқли эркли системасини олайлик. У $\bar{A}$ матрицада ҳам чизиқли эркли бўлади. Агар A максималлик хоссасини ҳам сақласа, яъни озод ҳадлардан тузилган устун у орқали чизиқли ифодаланса A ва $\bar{A}$ матрицаларнинг ранглари тенг бўлади; акс ҳолда устунларнинг бу системасига озод ҳадлардан иборат устунни қўшиб, $\bar{A}$ матрица устунларининг чизиқли эркли системасини ҳосил қиламиз: бу система $\bar{A}$ да максимал бўлади.

Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш масаласи қуйидаги теорема орқали тўла ҳал қилинади:

Кронекер — Капелли теоремаси (*1*) *чизиқли тенгламалар системаси кенгайтирилган $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрица рангига тенг бўлганда ва фақат шу ҳолдагина биргаликда бўлади.*

Исботи. 1. (1) система биргаликда бўлсин ва $k_1, k_2, \ldots, k_n$ унинг ечимларидан бири бўлсин. Бу сонларни (1) системадаги номаълумлар ўрнига қўйиб, s та айният ҳосил қиламиз. Бу айниятлар $\bar{A}$ матрицанинг охирги устуни қолган барча устунларнинг мос равишда $k_1, k_2, \ldots, k_n$ коэффициентлар билан олинган йиғиндиси эканлигини кўрсатади. $\bar{A}$ матрицанинг ҳар қандай бошқа устуни A матрицага ҳам киради ва шунинг учун бу матрицанинг барча устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Аксинча, A матрицанинг ҳар қайси устуни $\bar{A}$ нинг ҳам устуни бўлади, яъни бу матрицанинг устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Бу ердан A ва $\bar{A}$ матрицаларнинг устунлари системаси ўзаро эквивалент эканлиги келиб чиқади, шунинг учун 9- § охирида исбот қилинганига кўра бу иккала s ўлчовли векторлар системаси бир хил рангга эга; бошқача айтганда A ва $\bar{A}$ матрицаларнинг ранглари ўзаро тенг.

2. Энди A ва $\bar{A}$ матрицалар бир хил рангга эга эканлиги берилган бўлсин. Бу ердан A матрица устунларининг исталган максимал чизиқли эркли системаси $\bar{A}$ матрицада ҳам максимал чизиқли эркли система бўлиб қолишлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, бу система орқали, шу сабабли умуман, A матрица устунлари системаси орқали $\bar{A}$ матрицанинг охирги устуни чизиқли ифодаланади. Бинобарин, шундай $k_1\ k_2, \ldots, k_n$ коэффициентлар системаси мавжудки, A матрицанинг бу коэффициентлар билан олинган устунлари йиғиндиси озод ҳадлардан иборат устунга тенг, шунинг учун $k_1, k_2, \ldots, k_n$ сонлар (1) системанинг ечимини ташкил қилади. Шундай қилиб,

A ва $\bar{A}$ матрицалар рангларининг бир хилда бўлишидан (1) системанинг биргаликда бўлиши келиб чиқади.

Теорема тўла исбот қилинди. Бу теоремани конкрет мисолларга татбиқ қилишда дастлаб A матрицанинг рангини ҳисоблаш керак, бунинг учун бу матрицанинг нолдан фарқли минорлари ичидан шундайини топиш керакки, уни ҳошияловчи минорлар нолга тенг бўлсин; M шундай минор бўлсин. Сўнгра $\bar{A}$ матрицанинг M ни ҳошияловчи, бироқ A да бўлмаган ((1 системанинг *характеристик детерминантлари* деб аталувчи) барча минорларини ҳисоблаш керак. Агар уларнинг барчаси нолга тенг бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрица рангига тенг ва шу сабабли (1) система биргаликда бўлади, акс ҳолда у биргаликда бўлмайди. Шундай қилиб, Кронекер—Капелли теоремасини қуйидагича ифодалаш мумкин: (1) *чизиқли тенгламалар системасининг барча характеристик детерминантлари нолга тенг бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина (1) система биргаликда бўлади.*

(1) система биргаликда бўлсин деб фараз қилайлик. Бу системанинг биргаликда эканлигини тайинловчи Кронекер—Капелли теоремаси ечим мавжуд эканлигини тасдиқлайди; бироқ у системанинг барча ечимларини амалда топиш учун ҳеч қандай усул бермайди. Ҳозир бу масалани ечишга ўтамиз.

A матрицанинг ранги r га тенг бўлсин. Бундан олдинги параграфда кўрсатилишича, r сон A матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сонига тенг. Аниқлик учун A матрицанинг биринчи r та сатри чизиқли эркли деб, қолган ҳар қайси сатри эса уларнинг чизиқли комбинацияси бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $\bar{A}$ матрицанинг биринчи r та сатри ҳам чизиқли эркли бўлади: уларнинг орасидаги ҳар қандай чизиқли боғланиш A матрицанинг ҳам биринчи r та сатри орасидаги чизиқли боғланиш бўлар эди (векторларни қўшиш таърифини эсланг!). Сўнгра, A ва $\bar{A}$ матрицалар рангларининг тенглигидан $\bar{A}$ матрицанинг биринчи r та сатри бу матрицада сатрларнинг максимал чизиқли эркли системасини ташкил этиши келиб чиқади, яъни $\bar{A}$ нинг бошқа ҳар қандай сатри уларнинг чизиқли комбинацияси бўлади.

Бу ердан (1) системанинг ҳар қандай тенгламасини қандайдир коэффициентлар билан олинган биринчи r та тенгламанинг йиғиндиси шаклида тасвирлаш мумкинлиги келиб чиқади, шунинг учун биринчи r та тенгламанинг исталган умумий ечими (1) системанинг барча тенгламаларини қаноатлантиради. Бинобарин,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_2\ x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n=b_r \end{array}\right\} \qquad (2)$$

системанинг барча ечимларини топиш етарли. (2) система тенгламаларининг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан иборат сатрлар чизиқли эркли, яъни коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги r га тенг бўлгани сабабли $r \leqslant n$ ва ундан ташқари бу матрицанинг r-тартибли минорларидан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқлидир. Агар $r=n$ бўлса, у ҳолда (2) тенгламалари ва номаълумлари сони бир хил ва детерминанти нолдан фарқли бўлган система бўлади, яъни у, бинобарин (1) система ҳам, биргина ечимга, яъни Крамер қоидаси бўйича топиладиган ечимга эга бўлади.

Энди $r < n$ бўлсин ҳамда аниқлик учун биринчи r та номаълумнинг коэффициентларидан тузилган r-тартибли минор нолдан фарқли бўлсин. (2) тенгламаларнинг ҳар қайсисида $x_{r+1}, \ldots, x_n$ номаълумли ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз ва бу номаълумлар учун бирор $c_{r+1}, \ldots, c_n$ қийматларни танлаб оламиз. r та $x_1, x_2, \ldots, x_r$ номаълумли r та тенглама системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{2n}c_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{rn}c_n \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Бу системага Крамер қоидаси татбиқ этилиши мумкин, шунинг учун унинг биргина $c_1, c_2, \ldots c_r$ ечими мавжуд; равшанки, $c_1, c_2, \ldots c_r, c_{r+1}, \ldots c_n$ сонлар системаси (2) системанинг ечими бўлиб хизмат қилади. *Озод номаълумлар* деб аталувчи $x_{r+1}, \ldots, x_n$ номаълумларга $c_{r+1}, \ldots, c_n$ қийматларни ихтиёрий танлаб олишимиз мумкин бўлгани учун (2) системанинг чексиз кўп турлича ечимлари шу йўл билан ҳосил қилиниши мумкин.

Иккинчи томондан, (2) системанинг ҳар қандай ечими кўрсатилган йўл билан ҳосил қилиниши мумкин: агар (2) системанинг бирорта $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ечими берилган бўлса, у ҳолда озод номаълумларнинг қийматлари сифатида $c_{r+1}, \ldots, c_n$ сонларни оламиз. У ҳолда $c_1, c_2, \ldots, c_r$ сонлар (3) системани қаноатлантиради ва шунинг учун бу системанинг Крамер қоидаси бўйича топиладиган ягона ечимини ташкил этади.

Юқорида айтилганларнинг ҳаммаси ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг қуйидаги қоидаси кўринишида ифодаланади:

Чизиқли тенгламаларнинг биргаликда бўлган (1) системаси берилган бўлсин ва коэффициентлардан тузилган A матрицанинг ранги r га тенг бўлсин. A да r та чизиқли эркли сатр танлаймиз ва (1) *системада коэффициентлари танлаб олинган сатрларга кирган тенгламаларнигина қолдирамиз. Бу тенгламаларнинг чап қисмида шундай r та номаълумни қолдирамизки, уларнинг олдидаги коэффициентлардан тузилган детерминант нолдан фарқли бўлсин, қолган номаълумларни эса озод номаълумлар деб эълон қиламиз ва тенгламаларнинг ўнг қисмига ўтказамиз. Озод номаълумларга ихтиёрий сонли қийматлар бериб ва қолган номаълумларнинг қийматларини Крамер қоидаси бўйича ҳисоблаб, (1) системанинг барча ечимларини ҳосил қиламиз.*

Илгари ҳосил қилинган натижани яна бир бор ифодалаймиз: *Биргаликда бўлган (1) системанинг A матрицаси ранги номаълумлар сонига тенг бўлганда ва фақат шу ҳолда система биргина ечимга эга бўлади.*

Мисоллар 1. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

Коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги иккига тенг: бу матрицанинг юқори чап бурчагида турган иккинчи тартибли минор нолдан фарқли, бироқ уни ҳошияловчи учинчи тартибли ҳар иккала минор ҳам нолга тенг. Кенгайтирилган матрицанинг ранги учга тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Бу ердан система биргаликда эмаслиги келиб чиқади.

2. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 &= -3, \\ 4x_1 + 9x_2 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

Коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги иккига, яъни номаълумлар сонига тенг; кенгайтирилган матрицанинг ранги ҳам иккига тенг. Шундай қилиб, система биргаликда ва биргина ечимга эга. Биринчи иккита тенгламанинг чап қисмлари чизиқли эркли; бу иккита тенглама системасини ечиб, номаълумлар учун қуйидаги қийматларни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = -\frac{5}{17}, \quad x_2 = \frac{23}{17}.$$

Бу ечимлар учинчи тенгламани ҳам қаноатлантиришини кўриш осон.

3. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Система биргаликда, чунки кенгайтирилган матрицанинг ранги ҳам, коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги ҳам иккига тенг. Биринчи ва учинчи тенгламаларнинг чап қисмлари чизиқли эркли, чунки x_1 ва x_2 номаълумлар олдидаги коэффициентлар нолдан фарқли иккинчи тартибли минор ташкил этади. Бу иккита тенгламадан иборат системани ечамиз, бунда x_3, x_4, x_5 номаълумларни озод ҳадлар деб ҳисоблаб, уларни тенгламаларнинг ўнг томонига ўтказамиз ва уларга қандайдир сонли қийматлар берилган деб фараз қиламиз. Крамер қойдасини татбиқ қилиб, ушбу

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\,x_8 - \frac{3}{4}\,x_4 - x_5,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\,x_3 + \frac{7}{4}\,x_4$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликлар берилган системанинг *умумий ечимини* аниқлайди:улардаги озод номаълумларга ихтиёрий сонли қийматлар бериб, берилган системанинг барча ечимларини ҳосил қиламиз. Масалан, (2, 5, 3 0, 0), (3, 5 2, 1, — 2), $\left(0,\ -\frac{1}{4},\ -1,\ 1, \frac{1}{4}\right)$ ва ҳоказо векторлар системанинг ечимлари бўлади. Иккинчи томондан, умумий ечимдан x_1 ва x_2 лар учун чиқарилган ифодаларни системанинг исталган тенгламасига, масалан, илгари қаралмаган иккинчи тенгламасига келтириб қўйсак, айният ҳосил қиламиз.

4. Ушбу системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 &= -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Бу ерда тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлса-да, аммо системанинг детерминанти нолга тенг ва шунинг учун Крамер қоидасини татбиқ қилиб бўлмайди. Коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги учга тенг - бу матрицанинг юқори ўнг бурчагида нолдан фарқли учинчи тартибли минор жойлашган. Кенгайтирилган матрицанинг ранги ҳам учга тенг, яъни система биргаликда. Фақат биринчи учта тенгламани қараб ва x_1 номаълумни озод ҳисоблаб, умумий ечимни қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_1,\ x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}\,x_1,\ x_4 = 0.$$

5. n номаълумли $n+1$ та тенгламадан иборат система берилган бўлсин. Бу системанинг кенгайтирилган $\overline{A}$ матрицаси $(n+1)$-тартибли квадрат матрица бўлади. Агар система биргаликда бўлса, у ҳолда Кронекер—Капелли теоремасига мувофиқ, $\overline{A}$ матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак.

Масалан,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 8x_2 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 &= 1, \\ 4x_1 + 7x_2 &= -4, \end{aligned}\right\}$$

система берилган бўлсин. Бу тенгламаларнинг коэффициентларидан ва озод ҳадларидан тузилган детерминант нолдан фарқли:

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -77,$$

шу сабабли система биргаликда эмас.

Тескари даъво, умуман айтганда, тўғри бўлмайди: $\bar{A}$ матрица детерминантининг нолдан фарқли бўлишидан A ва $\bar{A}$ матрицалар рангларининг ўзаро тенг бўлиши келиб чиқмайди.

12- §. Чизиқли бир жинсли тенгламалар системалари

Аввалги параграфда ҳосил қилинган натижаларни системамиз *чизиқли бир жинсли тенгламалар системалари* бўлган ҳол учун татбиқ қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Кронекер—Капелли теоремасидан бу система ҳар доим биргаликда эканлиги келиб чиқади, чунки ноллардан иборат устуннинг қўшилиши матрица рангини орттира олмайди. Шу билан бирга, бу бевосита ҳам кўриниб турибди—(1) система олдиндан *ноль ечим* (0, 0, ..., 0) га эга.

Айтайлик, (1) система коэффициентларидан тузилган A матрицанинг ранги r га тенг бўлсин. *Агар $r = n$ бўлса, у ҳолда ноль ечим (1) системанинг ягона ечими бўлади; $r < n$ бўлганда система ноль ечимдан ташқари яна бошқа ечимларга ҳам эга бўлади* ва бу барча ечимларни топиш учун юқорида ихтиёрий тенгламалар системаси бўлган ҳолдаги каби усул қўлланилади. Хусусан, *n номаълумли n та чизиқли бир жинсли тенглама системасининг детерминанти нолга тенг бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина система ноль ечимдан фарқли бошқа ечимларга ҳам эга бўлади*¹). Ҳақиқатан ҳам, бу детерминантнинг нолга тенглиги A матрица ранги n дан кичик деган даъвога тенг кучли. Иккинчи томондан, *бир жинсли тенгламалар системасида тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик бўлса, у ҳолда система албатта ноль ечимдан фарқли ечимларга эга бўлади*, чунки бундай ҳолда ранг номаълумлар сонига тенг бўла олмайди; бу натижа 1-§ да бошқача мулоҳазалардан олинган эди.

---

¹) Бу даъвонинг бир қисми 7-§ да исботланган эди.

Хусусий ҳолда, система n номаълумли $n-1$ та бир жинсли тенгламадан иборат бўлган ҳолни қараб чиқамиз, шу билан бирга бу ерда тенгламаларнинг чап қисмлари ўзаро чизиқли эркли деб фараз қиламиз. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

матрица бу система коэффициентларидан тузилган бўлсин; A матрицада i-устунни ($i=1, 2, \dots, n$) ўчиришдан ҳосил бўлган ($n-1$)-тартибли минорни M_i орқали белгилаймиз. *У ҳолда берилган системанинг ечимларидан бири*

$$M_1, -M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1} M_n \tag{2}$$

сонлар системаси бўлиб, қолган ҳар қандай ечим унга пропорционал бўлади.

Исботи. Шартга кўра, A матрицанинг ранги $n-1$ га тенг бўлгани учун M_i минорларнинг бирортаси нолдан фарқли бўлиши керак; M_n шу минор бўлсин. Системада x_n номаълумни озод деб фараз қиламиз ва ҳар қайси тенгламада уни ўнг томонга ўтказамиз, натижада

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1,n-1}x_{n-1} &= -a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2,n-1}x_{n-1} &= -a_{2n}x_n. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\dots+a_{n-1,n-1}x_{n-1} &= -a_{n-1,n}x_n \end{aligned}$$

ни ҳосил қиламиз. Сўнгра Крамер қоидасини татбиқ қилиб, берилган тенгламалар системасининг умумий ечимини ҳосил қиламиз. Бу ечим баъзи бир унча мураккаб бўлмаган ўзгартишлардан кейин қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_i=(-1)^{n-i}\frac{M_i}{M_n}x_n,\quad i=1, 2, \dots, n-1. \tag{3}$$

$x_n=(-1)^{n-1}M_n$ деб олсак, $x_i=(-1)^{2n-i-1}M_i$ ($i=1, 2 \dots, n-1$) ни ёки $(2n-i-1)-(i-1)=2n-2i$ айирма жуфт сон бўлгани учун $x_i=(-1)^{i-1}M_i$ ни ҳосил қиламиз, яъни (2) сонлар системаси ҳақиқатан ҳам берилган тенгламалар системасининг ечими бўлади. Бу системанинг ҳар қандай бошқа ечими (3) формуладан номаълумнинг бошқача сон қийматида ҳосил қилинади ва шунинг учун ҳам у (2) ечимга пропорционал бўлади. Қаралаётган даъво $M_n=0$, бироқ M_i ($1 \leqslant i < n-1$) минорлардан бири нолдан фарқли бўлган ҳол учун ҳам ўринли эканлиги равшан.

Чизиқли бир жинсли тенгламалар системаларининг ечимлари қуйидаги хоссаларга эга. Агар $\beta=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ вектор (1) системанинг ечими бўлса, у ҳолда k ҳар қандай сон бўлганда $k\beta=(kb_1, kb_2, \dots, kb_n)$ вектор ҳам бу системанинг ечими бўлади, бунга шу ечимни (1) тенгламаларининг ихтиёрий бирортасига қўйиб ишонч ҳосил қилиш мумкин. Сўнгра, агар $\gamma=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ вектор системанинг яна бир ечими бўлса, у ҳолда $\beta+\gamma=(b_1+c_1,\ b_2+c_2\ ,\ \ldots\ ,b_n+c_n)$ вектор ҳам бу системанинг ечими бўлади:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_j+c_j)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j=0,\quad i=1,2,\ \ldots,\ s.$$

Шунинг учун, умуман, *бир жинсли (1) система ечимларининг ҳар қандай чизиқли комбинацияси ҳам шу системанинг ечими бўлади.* Система *бир жинсли бўлмаган*, яъни озод ҳадларининг ҳаммаси ҳам нолга тенг бўлмаган чизиқли тенгламалар системаси бўлган ҳол учун мос даъво ўринли эмаслигини айтиб ўтамиз: бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасининг иккита ечимининг йиғиндиси ҳам, бу система ечимининг сонга кўпайтмаси ҳам шу системанинг ечими бўла олмайди.

9-§ дан бизга маълумки, n ўлчовли векторларнинг n та вектордан ортиқ ҳар қандай системаси чизиқли боғлиқдир. Бу ердан бир жинсли (1) системанинг n ўлчовли векторлар бўлиб ҳисобланган ечимлари ичидан чекли максимал (шу маънода максималки, (1) системанинг ҳар қандай бошқа ечими танлаб олинган мана шу системага кирувчи ечимларнинг чизиқли комбинацияси бўлади) чизиқли эркли система танлаб олиш мумкин эканлиги келиб чиқади (1) бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг ҳар қандай максимал чизиқли эркли системаси (1) тенгламалар системаси *ечимларининг фундаментал системаси* дейилади.

Қуйидагини яна бир марта таъкидлаймиз: *n ўлчовли вектор берилган фундаментал системани ташкил этувчи векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлгандагина ва фақат ана шундагина у (1) системанинг ечими бўлади.*

Равшанки, (1) система ноль бўлмаган ечимларга эга бўлган ҳолда, яъни унинг коэффициентларидан тузилган матрицанинг ранги номаълумлар сонидан кичик бўлган ҳолдагина фундаментал система мавжуд бўлади. Бунда (1) система кўпгина турли фундаментал ечимлар системаларига эга бўлиши мумкин. Бироқ бу системалар ўзаро эквивалент, чунки ҳар қайси системанинг ҳар бир вектори бошқа исталган система орқали чизиқли ифодаланади ва шунинг учун *бу системалар бир хил сондаги ечимлардан иборат бўлади.*

Қуйидаги теорема ўринли:

Агар (1) бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг коэффициентларидан тузилган матрицанинг ранги r номаълумлар сони n дан кичик бўлса, у ҳолда (1) системанинг фундаментал ечимлари системаси $n-r$ та ечимдан иборат бўлади.

Бу теоремани исбот қилиш учун $n-r$ (1) системадаги озод номаълумлар сони эканлигини қайд қилайлик; $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,$

x_n озод номаълумлар бўлсин. Тартиби $n-r$ бўлган нолдан фарқли ихтиёрий d детерминантни қараймиз. Уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$d=\begin{vmatrix} c_{1,r+1}, & c_{1,r+2}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{2,r+1}, & c_{2,r+2}, & \ldots, & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-r,\,r+1}, & c_{n-r,\,r+2}, & \ldots, & c_{n-r,n} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантнинг i-сатри $(1\leqslant i\leqslant n-r)$ элементларини озод номаълумларнинг қийматлари сифатида олсак, маълумки, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ номаълумлар учун бир қийматли аниқланган қийматлар ҳосил қиламиз, яъни (1) тенгламалар системасининг аниқ бир ечимига келамиз; бу ечимни вектор кўринишида ёзамиз:

$$\alpha_i=(c_{i1},\ c_{i2},\ \ldots,\ c_{ir},\ c_{i,r+1},\ c_{i,r+2},\ \ldots,\ c_{in}).$$

Ҳосил қилинган $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ векторлар системаси (1) тенгламалар системаси учун фундаментал ечимлар системаси бўлади. Ҳақиқатан ҳам, векторларнинг бу системаси чизиқли эркли, чунки бу векторларни сатрлар қилиб ёзишдан ҳосил бўлган матрица $(n-r)$-тартибли нолдан фарқли d минорга эга. Иккинчи томондан,

$$\beta=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r,\ b_{r+1},\ b_{r+2},\ \ldots,\ b_n)$$

(1) тенгламалар системасининг ихтиёрий ечими бўлсин. β вектор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ векторлар орқали чизиқли ифодаланишини исботлаймиз.

$\alpha'_i\ (i=1,2, \ldots, n-r)$ орқали d детерминантнинг $(n-r)$ ўлчовли вектор сифатида қаралаётган i-сатрини белгилаймиз.

Сўнгра

$$\beta'=(b_{r+1},\ b_{r+2},\ \ldots,\ b_n)$$

деймиз, $\alpha'_i\ (i=1,2, \ldots, n-r)$ векторлар чизиқли эркли, чунки $d\neq 0$. Бироқ $n-r$ ўлчовли

$$\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \ldots,\ \alpha'_{n-r},\ \beta'$$

векторлар системаси чизиқли боғлиқ, чунки унда векторлар сони уларнинг ўлчовидан катта. Бинобарин, шундай $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$ сонлар мавжудки,

$$\beta'=k_1\alpha'_1+k_2\alpha'_2+\ \ldots\ +k_{n-r}\alpha'_{n-r} \tag{4}$$

бўлади.

Энди n ўлчовли

$$\delta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ \ldots\ +k_{n-r}\alpha_{n-r}-\beta$$

векторни қарайлик.

δ вектор (1) бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг чизиқли комбинацияси бўлиши билан бирга, бу системанинг ечими ҳамдир. (4) дан δ ечимда барча озод номаълумларнинг қийматлари нолга тенг эканлиги келиб чиқади. Бироқ (1) тенгламалар системасининг озод номаълумларнинг қийматлари нолга тенг бўлганда ҳосил бўладиган ягона ечими ноль ечим бўлади. Шундай қилиб, $\delta = 0$, яъни

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_{n-r}\alpha_{n-r}.$$

Теорема исбот бўлди.

d детерминант сифатида $(n-r)$-тартибли нолдан фарқли мумкин бўлган барча детерминантларни олиб, биз (1) бир жинсли тенгламалар системасининг барча фундаментал ечимлари системаларини оламиз. Юқорида келтирилган исбот шу даъвони айтишга имкон беради.

Мисол. Чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси берилган:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0,\\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0,\\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0,\\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги иккига тенг, номаълумларнинг сони бешга тенг, шунинг учун бу тенгламалар системасининг ҳар қандай фундаментал ечимлар системаси учта ечимдан иборат. Биринчи иккита чизиқли эркли тенглама билан чекланиб ва x_3, x_4, x_5 ларни озод номаълумлар деб ҳисоблаб, системани ечамиз. Умумий ечимни қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5,$$
$$x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5.$$

Сўнгра учта чизиқли эркли уч ўлчовли вектор оламиз: (1, 0, 0), (0, 1, 0) (0, 0, 1). Буларни ҳар қайсисининг компонентини умумий ечимга озод номаълумларнинг қийматлари сифатида келтириб қўйиб ва x_1, x_2 ларнинг қийматларини ҳисоблаб, берилган тенгламалар системасининг қуйидаги фундаментал ечимлари системасини ҳосил қиламиз:

$$\alpha_1 = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0\right),$$
$$\alpha_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right).$$

Бир жинсли бўлмаган системалар ва бир жинсли системалар ечимлари орасида мавжуд бўлган боғланишларни қараб чиқиш билан ушбу параграфни тугаллаймиз.

Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1 x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right| \tag{5}$$

(5) системадан озод ҳадларни ноль билан алмаштиришдан ҳосил қилинган ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right| \tag{6}$$

чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси (5) система учун *келтирилган система* дейилади. (5) ва (6) системаларнинг ечимлари орасида яқин боғланиш мавжуд бўлиб, уни қуйидаги иккита теорема кўрсатади:

I. *(5) системанинг ихтиёрий ечими билан (6) системанинг ихтиёрий ечими йиғиндиси яна (5) системанинг ечими бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — (5) системанинг ечими, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — (6) системанинг ечими бўлсин. (5) системанинг ихтиёрий тенгламасини, масалан, k-тенгламасини оламиз ва ундаги номаълумлар ўрнига $c_1 + d_1$, $c_2 + d_2$, $\ldots$, $c_n + d_n$ сонларни қўямиз. У ҳолда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}d_j = b_k + 0 = b_k$$

ни ҳосил қиламиз.

II. *(5) системанинг ихтиёрий иккита ечимининг айирмаси келтирилган (6) система учун ечим бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ва $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$ (5) системанинг ечимлари бўлсин. (6) системанинг тенгламаларидан исталган бирини, масалан, k-тенгламани оламиз ва ундаги номаълумлар ўрнига

$$c_1 - c'_1,\ c_2 - c'_2,\ \ldots,\ c_n - c'_n$$

сонларни қўямиз. У ҳолда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j - c'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c'_j = b_k - b_k = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу теоремалардан, *чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси (5) нинг битта ечимини топиб ва уни келтирилган (6) системанинг ҳар бир ечими билан қўшиб, (5) системанинг барча ечимларини топиш мумкинлиги* келиб чиқади.

УЧИНЧИ БОВ

МАТРИЦАЛАР АЛГЕБРАСИ

13-§. Матрицаларни кўпайтириш

Аввалги бобларда матрица тушунчасидан чизиқли тенгламалар системаларини ўрганишда муҳим ёрдамчи қурол сифатида фойдаланилди. Бу тушунчанинг кўпдан-кўп бошқа татбиқлари уни катта мустақил назария сифатида таркиб топишига сабаб бўлди. Бу назариянинг кўпгина қисмлари курсимиз чегарасидан ташқарига чиқади. Биз ҳозир бу назариянинг асослари билан шуғулланамиз, у берилган тартибли барча квадрат матрицалар тўпламида ўзига хос, бироқ тўла асосланган иккита алгебраик амал—қўшиш ва кўпайтириш амалининг аниқланиши билан бошланади. Биз матрицаларни кўпайтиришни аниқлашдан бошлаймиз; матрицаларни қўшиш амали 15-§ да киритилади.

Аналитик геометрия курсидан маълумки, текисликда тўғри бурчакли координаталар системасини α бурчакка бурганда нуқталарнинг координаталари қуйидаги формулалар бўйича алмаштирилади:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

бу ерда x, y — нуқтанинг эски координаталари, x', y'—унинг янги координаталари; шундай қилиб, x ва y лар x', y' орқали бирор сонли коэффициентлар билан чизиқли ифодаланади. Бошқа кўпгина ҳолларда ҳам номаълумларни (ёки ўзгарувчиларни) шундай алмаштиришга тўғри келадики, уларда эски номаълумлар янгилари орқали чизиқли ифодаланади; номаълумларни бундай алмаштиришни одатда уларнинг чизиқли алмаштирилиши (ёки чизиқли ўрнига қўйиш) дейилади. Шундай қилиб, қуйидаги таърифга келамиз:

Номаълумларни чизиқли алмаштириш деб n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар системасидан n та $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълумлар системасига шундай ўтишга айтиладики, унда эски номаълумлар янгилари орқали бирор сонли коэффициентлар ёрдамида чизиқли ифодаланади:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n = a\ _1y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{array}\right| \qquad (1)$$

(1) чизиқли алмаштириш ўзининг коэффициентларидан тузилган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица билан тўла аниқланади, чунки бир хил матрицага эга бўлган иккита чизиқли алмаштириш бир-биридан фақат номаълумларни белгилашга келишиб олинган ҳарфлари билангина фарқланиши мумкин. Биз бу белгилашни танлаш ўз ихтиёримизда деб ҳисоблаймиз. Аксинча, n-тартибли ихтиёрий матрица берилган бўлса, биз бу матрица коэффициентлар матрицаси бўлиб хизмат қиладиган чизиқли алмаштиришни дарҳол ёза оламиз. Шундай қилиб, n та номаълумни чизиқли алмаштириш ва n-тартибли квадрат матрицалар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд, шунинг учун чизиқли алмаштиришлар билан боғлиқ бўлган ҳар қандай тушунчага ва бу алмаштиришларнинг ҳар қандай хоссасига матрицага тегишли бўлган шунга ўхшаш тушунча ёки хосса мос келиши керак.

Иккита чизиқли алмаштиришни кетма-кет бажариш масаласини қараб чиқамиз. (1) чизиқли алмаштиришдан кейин номаълумларнинг $y_1, y_2, \dots, y_n$ системасини $z_1, z_2, \dots, z_n$ системага ўтказувчи

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \dots + b_{2n}z_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \dots + b_{nn}z_n \end{array}\right| \qquad (2)$$

чизиқли алмаштириш бажарилган бўлсин; бу алмаштиришнинг матрицасини B орқали белгилаймиз. (1) га $y_1, y_2, \dots, y_n$ ларнинг ифодаларини (2) дан олиб келиб қўйиб, $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларни $z_1, z_2, \dots, z_n$ номаълумлар орқали ифодаловчи чизиқли ифодаларга келамиз.

Шундай қилиб, *номаълумларни иккита чизиқли алмаштиришни кетма-кет бажариш натижаси яна чизиқли алмаштириш бўлар экан.*

Мисол. Қуйидаги

$$\begin{aligned} x_1 &= 3y_1 - y_2, & y_1 &= z_1 + z_2, \\ x_2 &= y_1 + 5y_2, & y_2 &= 4z_1 + 2z_2 \end{aligned}$$

чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш натижаси ушбу

$$\begin{aligned} x_1 &= 3(z_1 + z_2) - (4z_1 + 2z_2) = -z_1 + z_2, \\ x_2 &= (z_1 + z_2) + 5(4z_1 + 2z_2) = 21z_1 + 11z_2 \end{aligned}$$

чизиқли алмаштириш бўлади.

(1) ва (2) алмаштиришларни кетма-кет бажариш натижаси бўлган чизиқли алмаштириш матрицасини C орқали белгилаймиз ва унинг c_{ik} $(i,k = 1,2, \ldots, n)$ элементлари A ва B матрицаларнинг элементлари орқали қандай қонун билан ифодаланишини топамиз. (1) ва (2) алмаштиришларни қисқача

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}z_k, \ j = 1,2, \ldots, n$$

кўринишда ёзиб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}z_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)z_k, \ i=1, 2, \ldots, n.$$

Шундай қилиб, x_i учун ифодада z_k нинг олдидаги коэффициент, яъни C матрицанинг c_{ik} элементи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}; \qquad (3)$$

C матрицанинг i-сатрида ва k-устунида турган элементи A матрицанинг i-сатридаги ва B матрицанинг k-устунидаги мос элементлар кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

C матрица элементларини A ва B матрицалар элементлари орқали ифодалайдиган (3) формула A ва B матрицалар берилганда, A ва B матрицаларга мос келувчи чизиқли алмаштиришларни текшириб ўтирмасдан, дарҳол C матрицани ёзишга имкон беради. Шу йўл билан n-тартибли квадрат матрицалар жуфтига бир қийматли аниқланган учинчи матрица мос қўйилади. Барча n-тартибли квадрат матрицалар тўпламида алгебраик амални аниқладик деб айтиш мумкин; бу амал *матрицаларни кўпайтириш* деб аталади, C матрица эса A матрицанинг B матрицага *кўпайтмаси* дейилади:

$$C = AB.$$

Чизиқли алмаштиришлар билан матрицаларни кўпайтириш орасидаги боғланишни яна бир бор таърифлаймиз:

✱ *Матрицалари A ва B бўлган иккита чизиқли алмаштиришни кетма-кет бажариш натижасида ҳосил бўлган чизиқли алмаштириш коэффициентларининг матрицаси AB дан иборатдир.*

Мисоллар:

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1+9\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3,+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

3) $$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) $$\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - y_2 + 3y_3, \\ x_2 &= y_1 - 2y_2, \\ x_3 &= 7y_2 - y_3 \end{aligned} \quad \text{ва} \quad \begin{aligned} y_1 &= 2z_1 + z_3, \\ y_2 &= z_2 - 5z_3, \\ y_3 &= 2z_2 \end{aligned}$$

чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш натижасини топинг.

Матрицаларни кўпайтирамиз:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix}$$

шунинг учун изланаётган чизиқли алмаштириш қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10z_1 + 5z_2 + 10z_3, \\ x_2 &= 2z_1 - 2z_2 + 11z_3, \\ x_3 &= 5z_2 - 35z_3. \end{aligned}$$

Матрицаларни кўпайтиришга доир ҳозиргина кўриб чиқилган мисоллардан бирортасини, масалан, 2) мисолни олайлик ва худди шу матрицаларнинг тескари тартибда олинган кўпайтмасини топайлик:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларнинг кўпайтмаси кўпайтувчиларнинг тартибига боғлиқ эканлигини кўрамиз, яъни *матрицаларни кўпайтириш коммутатив эмас* экан. Дарвоқе, худди шундай бўлиши табиийдир, чунки юқорида C матрицага (3) формула ёрдамида таъриф берилганда A ва B матрицалар таърифга тенг ҳуқуқли бўлмаган ҳолда кирган эдилар: A нинг сатрлари, B нинг устунлари олинган эди.

Ўрин алмашмайдиган n-тартибли матрицаларга, яъни кўпайтувчиларнинг ўрни алмаштирилишидан кўпайтмаси ўзгарадиган матрицаларга мисолларни $n = 2$ дан бошлаб, барча n лар учун кўрсатиш мумкин (I) мисолдаги иккинчи тартибли матрицалар ўрин алмашмайдиган матрицалардир. Баъзан берилган иккита матрица тасодифан ўрин алмашадиган бўлиб қолиши ҳам мумкин, буни қуйидаги мисолдан кўриш мумкин:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш ассоциативдир: бинобарин, маълум тартибда (кўпайтиришнинг нокоммутативлиги сабабли) олинган ихтиёрий чекли сондаги n-тартибли матрицаларнинг бир қийматли аниқланган кўпайтмаси ҳақида сўз юритиш мумкин.

Исботи. n-тартибли ихтиёрий A, B ва C матрица берилган бўлсин. Уларни элементларнинг умумий кўринишини ифодаловчи ушбу қисқача кўринишда ёзамиз: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Сўнгра қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$AB = U = (u_{ij}), \qquad BC = V = (v_{ij}),$$
$$(AB)C = S = (s_{ij}), \qquad A(BC) = T = (t_{ij}).$$

Биз $(AB)C = A(BC)$ тенгликнинг ўринли эканлигини, яъни $S = T$ ни исбот қилишимиз керак. Бироқ

$$u_{il} = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} b_{kl}, \quad v_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj}$$

ва шунинг учун $S = UO$, $T = AV$ тенгликларга кўра,

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^{n} u_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$
$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

яъни $s_{ij} = t_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Матрицаларни кўпайтириш хоссаларини бундан буёнги текширишлар уларнинг детерминантларидан фойдаланишни тақозо этади. A матрицанинг детерминантини, қисқалик учун, $|A|$ орқали белгилашга келишиб оламиз. Агар ўқувчи юқорида кўриб чиқилган мисолларда кўпайтирилаётган матрицаларнинг детерминантларини ҳисоблаб чиқса ва бу детерминантлар кўпайтмасини берилган матрицалар кўпайтмасининг детерминанти билан солиштириб кўрса, детерминантларни кўпайтириш ҳақидаги қуйидаги муҳим теорема билан ифодаланувчи қизиқ қонуниятни сезади:

n-тартибли бир нечта матрицалар кўпайтмасининг детерминанти бу матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг.

Бу теоремани иккита матрица бўлган ҳол учун исботлаш етарлидир. n-тартибли $A=(a_{ij})$ ва $B=(b_{ij})$ матрицалар берилган ва $AB=C=(c_{ij})$ бўлсин. $2n$-тартибли қуйидаги Δ детерминантни тузамиз: унинг юқори чап бурчагига A матрицани, пастки ўнг бурчагига B матрицани қўямиз, бутун юқори ўнг бурчакни ноллар билан тўлдирамиз ва ниҳоят, пастки чап бурчакнинг диагонали бўйлаб -1 сонини, қолган жойларига нолни қўямиз. Демак, Δ детерминант қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Δ детерминантга Лаплас теоремасини (биринчи n та сатр бўйича ёйиш) қўлланиш қуйидаги тенгликка олиб келади:

$$\Delta=|A|\cdot|B|. \tag{4}$$

Иккинчи томондан, Δ детерминантни—унинг қийматини ўзгартирмасдан—шундай ўзгартирамизки, барча b_{ij} $(i, j=1,2, \ldots, n)$ элементлар ноллар билан алмашиниб қолсин. Ана шу мақсадда Δ детерминантнинг $(n+1)$-устунига b_{11} га кўпайтирилган биринчи устунини, b_{21} га кўпайтирилган иккинчи устунини ва ҳоказо, b_{n1} га кўпайтирилган n-устунини қўшамиз. Сўнгра Δ детерминантнинг $(n+2)$-устунига b_{12} га кўпайтирилган биринчи устунини, b_{22} га кўпайтирилган иккинчи устунини қўшамиз ва ҳоказо. Умуман, Δ детерминантнинг $(n+j)$-устунига $(j=1, 2, \ldots, n)$ мос равишда $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ коэффициентлар билан олинган биринчи n та устуннинг йиғиндисини қўшамиз.

Детерминантни ўзгартирмайдиган бундай алмаштиришлар аслида барча b_{ij} элементларни ноллар билан алмашинишига олиб келишини кўриш осон. Шу билан бир вақтда детерминантнинг юқори ўнг бурчагида ноллар ўрнига қуйидаги сонлар пайдо бўлади: детерминантнинг i-сатри ва $(n+i)$-устуни $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ кесишган ерда, (3) га кўра, $C=AB$ матрицанинг c_{ij} элементига тенг бўлган $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots,+$

$+ a_{in}b_{nj}$ сон туради. Бинобарин, энди детерминантнинг юқори ўнг бурчагини C матрица эгаллайди:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Лаплас теоремасини яна бир марта қўллаб, детерминантни унинг охирги n та устуни бўйича ёямиз. $|C|$ минор учун тўлдирувчи минор $(-1)^n$ га тенг, $|C|$ минор 1, 2, ..., n номерли сатрларда ва $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ номерли устунларда жойлашганлиги ва шу билан бирга

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) + (n+2) + \dots + 2n = 2n^2 + n$$

бўлганлиги учун

$$\Delta = (-1)^{2n^2+n}(-1)^n|C| = (-1)^{2(n^2+n)}|C|$$

ёки $2(n^2+n)$ соннинг жуфтлиги сабабли

$$\Delta = |C|. \tag{5}$$

(4) ва (5) дан, ниҳоят, исботланаётган

$$C = |A| \cdot |B|$$

тенглик келиб чиқади.

Детерминантларни кўпайтириш ҳақидаги теорема Лаплас теоремасини татбиқ қилмасдан ҳам исботланиши мумкин эди. Бундай исботлардан бирини ўқувчи 16- § нинг охиридан топади.

14- §. Тескари матрица

Квадрат матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у *махсус*, акс ҳолда *махсусмас* матрица дейилади. Бунга мос ҳолда номаълумларнинг чизиқли алмаштирилиши ҳам бу алмаштиришнинг коэффициентларидан тузилган детерминантнинг нолга тенг ёки тенг эмаслигига қараб, махсус ёки махсусмас дейилади. Олдинги параграфнинг охирида исботланган теоремадан қуйидаги даъволар келиб чиқади.

Ҳеч бўлмаганда биттаси махсус бўлган матрицаларнинг кўпайтмаси махсус матрица бўлади.

Исталган махсусмас матрицаларнинг кўпайтмаси махсусмас матрица бўлади.

Бу ердан матрицаларни кўпайтириш билан чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш орасидаги боғланишга кўра қуйидаги даъво келиб чиқади: *бир нечта чизиқли алмаштиришни кетма-кет бажаришнинг натижаси берилган барча алмаштиришлар махсусмас бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда махсусмас алмаштириш бўлади.*

Матрицаларни кўпайтиришда бир ролини ушбу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

бирлик матрица бажаради, шу билан бирга у берилган тартибли ихтиёрий A матрица билан ўрин алмашувчанлик хоссасига эга:

$$AE = EA = A. \tag{1}$$

Бу тенгликлир ё матрицаларни кўпайтириш қоидаларини бевосита қўлланиш орқали ёки бирлик матрица номаълумларни **айнан** чизиқли алмаштирилиши

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \quad y_2, \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_n &= \qquad y_n, \end{aligned}$$

га мос келади деган изоҳ асосида исботланади (айнан чизиқли алмаштиришни ихтиёрий бошқа бир чизиқли алмаштиришдан олдин ёки кейин бажарилиши, равшанки, бу алмаштиришни ўзгартирмайди).

E матрица A—исталган матрица бўлганда (1) шартни қаноатлантирувчи ягона матрица эканлигини қайд қилиб ўтайлик. Ҳақиқатан ҳам, агар шундай хоссага эга бўлган яна бир E' матрица мавжуд бўлганда эди, у ҳолда қуйидагига эга бўлар эдик:

$$E'E = E', \; E'E = E,$$

бу ердан

$$E' = E.$$

Берилган A матрица учун *тескари матрицанинг* мавжуд бўлиши ҳақидаги масала анчагина мураккабдир. Матрицаларни кўпайтириш нокоммутатив бўлганлиги сабабли ҳозирча *ўнг* тескари матрица ҳақида сўз юритамиз, яъни шундай A^{-1} матрица ҳақидаки, A матрицани ўнг томондан унга кўпайтмаси бирлик матрицани беради:

$$AA^{-1} = E. \tag{2}$$

Агар A матрица махсус бўлса, у ҳолда—агар A^{-1} матрица мавжуд бўлганида эди—(2) тенгликнинг чап томонида турган кўпайтма, бизга маълумки, махсус матрица бўлар эди, бу тенгликнинг ўнг томонида турган E матрица аслида махсусмас бўлади, чунки унинг детерминанти бирга тенг. Шундай қилиб, махсус матрица ўнг тескари матрицага эга бўла олмайди. Худди шундай мулоҳазалар у чап тескари матрицага ҳам эга эмаслигини кўрсатади ва шунинг учун *махсус матрица учун тескари матрица умуман мавжуд эмас.*

Махсусмас матрица бўлган ҳолга ўтишдан олдин дастлаб қуйидаги ёрдамчи тушунчани киритамиз. n-тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин.

A матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчиларидан (бунда a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси j-сатр ва i-устун кесишган жойда туради) тузилган

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

211

матрица A матрицага **бириктирилган** (ёки **ўзаро**) матрица дейилади.

AA^* ва A^*A кўпайтмаларни топайлик. Детерминантнинг сатри ёки устуни бўйича ёйишнинг 6-§ даги маълум формуласидан, шунингдек, 7-§ даги детерминантнинг ихтиёрий сатри (устуни) элементларининг бошқа сатрнинг (устуннинг) мос элементлари алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмаларининг йиғиндиси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб ва A матрицанинг детерминантини d орқали белгилаб ($d = |A|$), қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$A^*A = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Бу ердан, агар *A матрица махсусмас бўлса, у ҳолда унинг бириктирилган матрицаси A^* ҳам махсусмас бўлиши ва шу билан бирга A^* матрицанинг d^* детерминанти A матрицанинг детерминанти d нинг $n-1$-даражасига тенг бўлиши келиб чиқади.*

Ҳақиқатан ҳам, (3) тенгликлардан детерминантлар орасидаги тенгликка ўтиб,

$$dd^* = d^n$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $d \neq 0$ бўлганлиги учун

$$d^* = d^{n-1}.$$[1]

Энди ҳар қандай махсусмас A матрица учун тескари матрицанинг мавжудлигини исботлаш ва унинг кўринишини топиш мумкин. Дастлаб қуйидагига эътибор берайлик. Агар иккита матрицанинг AB кўпайтмасини қараётган ва кўпайтувчилардан бирининг, масалан, B нинг барча элементларини ўзгармас d сонга бўлсак, у ҳолда AB кўпайтманинг барча элементлари ҳам шу сонга бўлинади: буни исботлаш учун матрицаларни кўпайтириш таърифини эслаш кифоя. Шундай қилиб, агар

$$d = |A| \neq 0$$

бўлса, (3) тенгликлардан *A матрица учун тескари матрица бўлиб, бириктирилган A^* матрицанинг барча элементларини d сонга бўлишдан ҳосил бўлган ушбу*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}$$

матрица хизмат қилиши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (3) дан

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \tag{4}$$

тенгликлар келиб чиқади.

Яна бир бор таъкидлаймизки, A^{-1} матрицанинг i-сатрида $|A|$ детерминантнинг i-устуни элементларининг $d = |A|$ га бўлинган алгебраик тўлдирувчилар туради.

A^{-1} *матрица берилган махсусмас A матрица учун* (4) *шартни қаноатлантирувчи ягона матрица* эканлигини исботлаш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар C матрица шундай бўлсаки, унинг учун

$$AC = CA = E$$

---

[1] Агар A матрица махсус бўлса, у ҳолда унинг бириктирилган матрицаси A^* ҳам махсус эканлигини, шу билан бирга у 1 дан катта бўлмаган рангга эга бўлишини исботлаш ҳам мумкин эди.

бўлса, у ҳолда

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$
$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1},$$

бу ердан $C = A^{-1}$.

(4) дан ва детерминантларни кўпайтириш ҳақидаги теоремадан A^{-1} *матрицанинг детерминанти* $\frac{1}{|A|}$ *га тенглиги келиб чиқади, бинобарин, бу матрица ҳам махсусмас бўлади; унинг учун A матрица тескари матрица бўлиб хизмат қилади.*

Энди агар n-тартибли A ва B квадрат матрицалар берилган бўлиб, A махсусмас, B эса ихтиёрий бўлса, у ҳолда B ни A га ўнгдан (*ўнг*) *ва чапдан* (*чап*) *бўлишни* бажаришимиз, яъни ушбу

$$AX = B, \quad YA = B \tag{5}$$

матрицавий тенгламаларни ечишимиз мумкин.

Бунинг учун матрицаларни кўпайтиришнинг ассоциативлигига кўра

$$X = A^{-1}B, \quad Y = BA^{-1}$$

деб олиш етарли, шу билан бирга матрицаларни кўпайтириш нокоммутатив бўлгани сабабли (5) тенгламаларнинг бу ечимлари турлича бўлади.

Мисоллар. 1) қуйидаги матрица берилган:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Унинг детерминанти $|A| = 5$, шунинг учун тескари матрица A^{-1} мавжуд, ва

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2) қуйидаги матрицалар берилган:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

A матрица махсусмас, шу билан бирга

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Шунинг учун $AX = B$, $YA = B$ тенгламаларнинг ечимлари қуйидаги матрицалардан иборат бўлади:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тўғри бурчакли матрицаларни кўпайтириш. Матрицаларни кўпайтириш аввалги параграфда бир хил тартибли квадрат матрицалар учун аниқланган бўлса-да, уни A ва B тўғри бурчакли матрицалар бўлган ҳол учун ҳам тарқатиш мумкин, фақат бунда аввалги параграфнинг (3) формуласини қўлланиш мумкин бўлиши керак, яъни агар A матрицанинг ҳар бир сатрида нечта элемент бўлса, B матрицанинг ҳар қайси устунида шунча элемент бўлиши керак. Бошқача айтганда, A ва *B матрицаларнинг кўпайтмаси ҳақида A матрицанинг устунлари сони B матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлган ҳолдагина сўз юритиш мумкин; шу билан бирга AB матрицанинг сатрлари сони A матрицанинг сатрлари сонига, унинг устунлари сони эса B матрицанинг устунлари сонига тенг.*

Мисоллар.

1)
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

2)
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

3)
$$(5\ 1\ 0\ -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (11\ -1).$$

Тўғри бурчакли матрицаларни кўпайтиришни номаълумларни чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш билан боғлаш мумкин, бунда фақат чизиқли алмаштиришнинг таърифидаги чизиқли алмаштиришда номаълумлар сони сақланади деган фараздан воз кечишга тўғри келади.

Шунингдек, юқорида квадрат матрицалар бўлган ҳол учун қилинган исботни сўзма-сўз такрорлаб, *ассоциативлик қонуни тўғри бурчакли матрицаларни кўпайтиришда ҳам ўз кучида қолишини текшириш осон.*

Ҳозир Крамер қоидасининг янгича исботини келтириб чиқариш учун тўғри бурчакли матрицаларни кўпайтиришдан ва тескари матрицанинг хоссаларидан фойдаланамиз. Бу исбот 7-§ даги каби узундан-узоқ ҳисоблашларни талаб этмайди. n номаълумли n та чизиқли тенглама системаси

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (6)$$

берилган бўлиб, бу системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлсин. (6) системанинг коэффициентларидан тузилган матрицани A орқали белгилаймиз; бу матрица махсусмас, чунки фаразимизга кўра $d = |A| \neq 0$. (6) системанинг номаълумларидан иборат устунини X орқали, озод ҳадларидан иборат устунини B орқали белгилаймиз, яъни

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

AX кўпайтма маънога эга, чунки A матрица устунларининг сони X матрицанинг сатрлари сонига тенг, шу билан бирга бу кўпайтма (6) система тенгламаларининг чап қисмидан тузилган устун бўлади. Шундай қилиб, (6) системани битта матрицавий тенглама шаклида ёзиш мумкин:

$$AX = B. \qquad (7)$$

(7) тенгламанинг ҳар иккала томонини мавжудлиги A квадрат матрицанинг махсусмаслигидан келиб чиқадиган A^{-1} матрицага чап томондан кўпайтириб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$X = A^{-1}B. \qquad (8)$$

Ўнг томонда турган кўпайтма биргина устундан иборат матрица бўлади; унинг j-элементи A^{-1} матрицанинг j-сатри элементларини B матрицанинг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисидан иборат, яъни қуйидаги сонга тенг:

$$\frac{A_{1j}}{d} b_1 + \frac{A_{2j}}{d} b_2 + \ldots + \frac{A_{nj}}{d} b_n = \frac{1}{d}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_n).$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги қавс ичида d детерминантнинг j-устунини B устун билан алмаштиришдан ҳосил бўлган d_j детерминантнинг j-устуни бўйича ёйилмаси турибди. Шунлай қилиб, (8) формулалар (6) системанинг Крамер қоидаси бўйича ҳосил қилинадиган ечимларини ифодаловчи 7-§ даги (3) формулаларга тенг кучлидир.

Номаълумларнинг ҳосил қилинган қийматлари ҳақиқатан ҳам (6) системанинг ечимини ташкил қилишини кўрсатишгина қолди. Бунинг учун (8) ифодани (7) матрицавий тенгламага келтириб қўйиш етарли, бу эса $B=B$ айниятга олиб келиши равшан.

Матрицалар кўпайтмасининг ранги. Детерминантларни кўпайтириш ҳақидаги теорема махсус матрицалар бўлган ҳолда уларнинг кўпайтмаси (махсус квадрат матрицаларни уларни ранги бўйича ажрата олиш мумкин бўлса-да) ҳам махсус бўлади деган тасдиқдан ортиқ бошқа тасдиққа олиб келмайди. Кўпайтувчилар ранглари билан кўпайтма ранги орасида аниқ бир боғланиш йўқлигини қайд қилиб ўтайлик, буни қуйидаги мисоллардан кўриш мумкин:

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{matrix}2&0\\0&0\end{matrix}\right.\cdot\left.\begin{matrix}0&0\\0&3\end{matrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};$$

ҳар иккала ҳолда ҳам ранги бир бўлган матрицалар кўпайтириляпти, бироқ кўпайтманинг ранги биринчи ҳолда бирга, иккинчи ҳолда эса нолга тенг. Квадрат матрицалар учунгина эмас, балки тўғри бурчакли матрицалар учун ҳам қуйидаги теорема ўринлидир.

Матрицалар кўпайтмасининг ранги ҳар қайси кўпайтувчи матрицанинг рангидан юқори эмас.

Бу теоремани иккита кўпайтувчи бўлган ҳол учун исботлаш етарли. A ва B матрицалар берилган ва бу матрицалар учун AB кўпайтма маънога эга бўлсин; $AB=C$ деб белгилаймиз. C матрица элементларининг ифодасини берувчи (3) формулани (13-§) қараб чиқайлик. Бу формулани k нинг берилган қиймати ва i нинг ($i=1,2,\ldots$) мумкин бўлган барча қийматлари учун олиб, C матрицанинг k-устуни A матрицанинг бирор коэффициентлар билан (аниқроғи, $b_{1k}, b_{2k}, \ldots$, коэффициентлар билан) олинган барча устунларининг йиғиндисидан иборатлигини ҳосил қиламиз. Бу билан C матрица устунлари системаси A матрица устунлари системаси орқали чизиқли ифодаланиши исботланди, шунинг учун, 9-§ да кўрсатилганидек, биринчи системанинг ранги иккинчи системанинг рангидан кичик ёки унга тенг; бошқача айтганда, C матрицанинг ранги A матрицанинг рангидан катта эмас. Иккинчи томондан, 13-§ даги ўша (3) формулага кўра, берилган i ва барча k ларда C матрицанинг ҳар қандай i-сатри B матрица сатрларининг чизиқли комбинацияси бўлиши келиб чиққанлиги учун юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида C матрицанинг ранги B матрицанинг рангидан юқори эмаслигини кўрамиз.

Янада аниқроқ натижага кўпайтувчилардан бири хосмас квадрат матрица бўлган ҳолда эришилади:

Ихтиёрий A матрицани ўнгдан ёки чапдан хосмас Q квадрат матрицага кўпайтмасининг ранги A матрицанинг рангига тенг.

Масалан,

$$AQ = C \tag{9}$$

бўлсин.

Бундан олдинги теоремадан C матрицанинг ранги A матрицанинг рангидан юқори эмаслиги келиб чиқади. Бироқ (9) тенгликни ўнг томондан Q^{-1} га кўпайтириб,

$$A = CQ^{-1}$$

тенгликка келамиз, демак, яна аввалги теоремага кўра A нинг ранги C нинг рангидан юқори эмас. Бу иккита натижани таққослаб, A ва C матрицаларнинг ранги бир хил эканлигини кўрамиз.

15-§. Матрицаларни қўшиш ва матрицаларни сонга кўпайтириш

n-тартибли квадрат матрицалар учун **қўшиш** қуйидагича аниқланади:

$A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ *квадрат матрицаларнинг* $A + B$ йиғиндиси деб, ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос элементлари йиғиндиси

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$[1]

га тенг бўлган $C = (c_{ij})$ матрицага айтилади.

Матрицаларни бундай қўшишнинг коммутативлиги ва ассоциативлиги равшандир. Қўшиш учун тескари амал — айириш амали мавжуд, шу билан бирга A ва B матрицаларнинг айирмаси бўлиб, элементлари берилган матрицаларнинг мос элементлари айирмасига тенг бўлган матрица хизмат қилади. Бунда ноль ролини фақат ноллардан тузилган *ноль матрица* ўйнайди; келгусида бу матрица 0 символи билан белгиланади: ноль матрица билан ноль сонини аралаштириб юборишнинг жиддий хавфи йўқ.

---

[1] Албатта, матрицаларнинг кўпайтмасини ҳам мос элементларни ўзаро кўпайтириб, табиий равишда аниқлаш ҳам мумкин эди. Бироқ бундай кўпайтириш 13-§ да аниқланган кўпайтиришдан фарқли ўлароқ, бирон-бир жиддий татбиққа эга бўлмас эди.

Квадрат матрицаларни қўшиш ва 13-§ да аниқланган кўпайтириш амаллари дистрибутивлик қонунлари билан боғланган.

Ҳақиқатан ҳам, n-тартибли $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ матрицалар берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий i ва j лар учун тўғрилиги аён бўлган қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}.$$

Бироқ бу тенгликнинг чап томони $(A+B)C$ матрицанинг i-сатри ва j-устунида турган элементидан иборат, ўнг томон эса $AC+BC$ матрицанинг худди шу ерда турувчи элементидир. Бу билан

$$(A+B)C=AC+BC$$

тенглик исбот бўлди. $C(A+B)=CA+CB$ тенглик ҳам шу йўл билан исботланади — матрицаларни кўпайтиришнинг нокоммутативлиги дистрибутивликнинг бу ҳар иккала қонунини исботлашни талаб этади.

Матрицаларни сонга кўпайтиришнинг ушбу таърифини киритамиз. $A=(a_{ij})$ *квадрат матрицанинг* k *сонга кўпайтмаси* kA деб A матрицанинг барча элементларини k га кўпайтиришдан ҳосил бўладиган $A'=(a'_{ij})$ матрицага айтилади, бу ерда

$$a'_{ij}=ka_{ij}.$$

Матрицани сонга кўпайтиришнинг мисолига олдинги параграфда дуч келган эдик: агар A матрица махсусмас бўлиб, шу билан бирга $|A|=d$ бўлса, у ҳолда унинг тескари матрицаси A^{-1} ва бириктирилган матрицаси A^*

$$A^{-1}=d^{-1}A^*$$

тенглик билан боғланган бўлади.

Маълумки, ҳар қандай n-тартибли квадрат матрицани n^2 ўлчовли вектор сифатида қараш мумкин, шу билан бирга матрицалар ва векторлар орасидаги бу мослик ўзаро бир қийматлидир. Матрицаларни қўшиш ва матрицаларни сонга кўпайтиришнинг ҳозиргина аниқланган таърифлари, бу мосликка кўра, векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтиришга алмашади. Шундай қилиб, *n-тартибли квадрат матрицалар тўпламини n^2 ўлчовли вектор фазо каби қараш мумкин.*

Бундан қуйидаги тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади (бу ерда A, B лар n-тартибли матрицалар; k, l—сонлар, 1—бир сони):

$$k(A+B)=kA+kB, \quad (1)$$

$$(k+l)A=kA+lA, \quad (2)$$

$$k(lA)=(kl)A, \quad (3)$$

$$1\cdot A=A. \quad (4)$$

(1) ва (2) хоссалар матрицаларни сонга кўпайтиришни матрицаларни қўшиш билан боғлайди. Шу билан бирга матрицаларни сонга кўпайтириш билан матрицаларнинг ўзини кўпайтириш орасида ушбу муҳим боғланиш бор:

$$(kA)B = A(kB) = k(AB), \tag{5}$$

яъни *агар матрицалар кўпайтмасида кўпайтувчилардан бири k сонга кўпайтирилса, у ҳолда бутун кўпайтма ҳам k га кўпайтирилади.*

Ҳақиқатан ҳам, айтайлик, $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ матрицалар ҳамда k сон берилган бўлсин. У ҳолда исталган i ва j учун

$$\sum_{s=1}^{n} (ka_{is})b_{sj} = k\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

бўлади. Бу тенгликнинг чап томони $(kA)B$ матрицанинг i-сатри ва j-устунида турган элементи, ўнг томони эса $k(AB)$ матрицанинг худди ўша ерда турган элементидир. Бу билан

$$(kA)B = k(AB)$$

тенглик исботланди. $A(kB) = k(AB)$ тенглик ҳам худди шу йўл билан исботланади.

Матрицани сонга кўпайтириш амали матрица ёзувининг янги усулини киритишга имкон беради. E_{ij} орқали i-сатри ва j-устуни кесишган жойда бир турган, қолган ҳамма элементлари эса нолга тенг бўлган матрицани белгилаймиз. $i=1, 2,\ldots, n$ ва $j=1, 2, \ldots, n$ деб фараз қилиб, n^2 та ана шундай матрицани ҳосил қиламиз. Улар текшириб кўриш осон бўлган қуйидаги кўпайтириш жадвали воситасида ўзаро боғланган:

$$E_{is}E_{sj} = E_{ij}, \quad s \neq t \text{ бўлганда } E_{is}\,E_{tj} = 0.$$

kE_{ij} матрица E_{ij} матрицадан шуниси билан фарқ қиладики, унинг i-сатри ва j-устуни кесишган жойда k сон туради. Шуни назарда тутиб ва матрицаларни қўшиш таърифидан фойдаланиб, ихтиёрий A квадрат матрица учун қуйидаги ёзувни ҳосил қиламиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}, \tag{6}$$

шу билан бирга, равшанки, A матрицанинг (6) кўринишдаги ёзуви ягонадир.

kE матрица (бу ерда E — бирлик матрица) матрицаларни сонга кўпайтириш таърифига кўра қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$kE=\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & k\ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix},$$

яъни бош диагоналда бир хил k сон туради, бу диагоналдан ташқаридаги барча элементлар эса нолга тенг. Бундай матрицалар *скаляр* матрицалар дейилади.

Матрицаларни қўшиш таърифи

$$kE+lE=(k+l)E \tag{7}$$

тенгликка олиб келади.

Иккинчи томондан, матрицаларни кўпайтириш таърифидан фойдаланиб ёки (5) тенгликка таяниб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$kE\cdot lE=(kl)E. \tag{8}$$

A матрицани k сонга кўпайтиришни A ни kE скаляр матрицага (матрицаларни кўпайтириш маъносида) кўпайтириш деб талқин қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (5) га кўра

$$(kE)A=A(kE)=kA.$$

Шунингдек, *бу ердан ҳар қандай скаляр матрица ихтиёрий A матрица билан ўрин алмашинувчи эканлиги келиб чиқади.* Ана шу хоссага эга бўлган ягона матрицалар скаляр матрицалар эканлиги жуда муҳимдир:

Агар n-тартибли бирорта $C=(c_{ij})$ матрица шундай тартибли ихтиёрий матрица билан ўрин алмашинувчи бўлса, у ҳолда C скаляр матрица бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $i\neq j$ дейлик ва шартга кўра бир-бирига тенг бўлган CE_{ij} ва $E_{ij}C$ кўпайтмаларни қарайлик (E_{ij} матрицанинг юқоридаги таърифига қаранг). Осонгина кўриш мумкинки, CE_{ij} матрицанинг j-устунидан ташқари барча устунлари ноллардан ташкил топган, j-устуни эса C матрицанинг i-устуни билан бир хил; хусусан, CE_{ij} матрицанинг i-сатри ва j-устуни кесишган жойда c_{ii} элемент турибди. Шунга ўхшаш, $E_{ij}C$ матрицанинг i-сатридан бошқа ҳамма сатрларидан ноллар туради, i-сатри эса C матрицанинг j-сатри билан бир хил; $E_{ij}C$ матрицанинг i-сатри ва j-устуни кесишган жойда c_{jj} элемент жойлашган. $CE_{ij}=E_{ij}C$ тенгликдан фойдаланиб, $c_{ii}=c_{jj}$ эканлигини (ўзаро тенг матрицаларнинг бир хил жойларда турган элементлари сифатида) кўрамиз, яъни C матрицанинг бош диагоналидаги барча элементлар бир-бирига тенг. Иккинчи томондан, CE_{ij} матрицанинг j-сатри ва j-устуни кесишган жойда c_{jj} элемент турибди; бироқ $E_{ij}C$ матрицада ўша ерда $i \neq j$ бўлгани учун ноль турибди ва шунинг учун $c_{jl} = 0$, яъни C матрицанинг бош диагоналдан ташқарида жойлашган ҳар қандай элементи нолга тенг. Теорема исбот бўлди.

16*-§. Детерминантлар назариясини аксиоматик қуриш

n-тартибли детерминант берилган n-тартибли квадрат матрица томонидан бир қийматли аниқланадиган сондир. Бу тушунчанинг 4-§ да келтирилган таърифи детерминантни берилган матрицанинг элементлари орқали ифодалаш қоидасини беради. Бироқ бу конструктив таърифни аксиоматик таъриф билан алмаштириш мумкин, бошқача сўз билан айтганда, детерминантнинг 4- ва 6-§ ларда тайинланган хоссалари ичидан шундайларини кўрсатиш мумкинки, матрицанинг бу хоссаларга эга бўлган ҳақиқий қийматли ягона функцияси унинг детерминанти бўлади.

Бу хилдаги функцияни аниқлашнинг энг содда усули детерминантнинг сатр бўйича ёйилмаларидан фойдаланишдан иборатдир. Исталган тартибли квадрат матрицаларни қараймиз. Ана шундай ҳар бир M матрицага d_M сон мос қўйилган, шу билан бирга қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:

1) агар M биринчи тартибли матрица бўлса, яъни у биргина a элементдан иборат бўлса, у ҳолда $d_M = a$.

2) агар n-тартибли M матрицанинг биринчи сатри $a_{11}, a_{12}, \ldots. a_{1n}$ элементлардан ташкил топган бўлса ва $M_i(i=1,2,\ldots, n)$ орқали M нинг биринчи сатри ва i-устунини ўчиришдан кейин қоладиган $(n-1)$-тартибли матрица белгиланган бўлса, у ҳолда

$$d_M = a_{11}d_{M_1} - a_{12}d_{M_2} + a_{13}d_{M_3} - \ldots + (-1)^{n-1}a_{1n}d_{M_n}.$$

Бундай ҳолда ҳар қандай M матрица учун d_M сон бу матрицанинг детерминантига тенг. Бу даъвони исботлашни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз. У n бўйича индукция ва 6-§ натижаларидан фойдаланиб исботланади.

Детерминантнинг аксиоматик таърифлари ичида фақат берилган битта n тартибга тааллуқли ва детерминантнинг 4-§ да тайинланган энг содда хоссаларига асосланган бошқа формалари кўпроқ қизиқиш туғдиради. Ҳозир ана шундай таърифларнинг бирини қарашга киришамиз.

n-тартибли ҳар қандай M квадрат матрицага d_M сон мос қўйилган бўлсин, шу билан бирга қуйидаги шартлар бажарилсин:

I. *Агар M матрицанинг сатрларидан бири k га кўпайтирилса, у ҳолда d_M сон ҳам k га кўпаяди.*

II. *Агар M матрицанинг сатрларидан бирига бу матрицанинг бошқа сатри қўшилса, d_M сон ўзгармайди.*

III. *Агар E — бирлик матрица бўлса, у ҳолда $d_E = 1$.*

Исталган M матрица учун d_M сон бу матрицанинг детерминантига тенг эканлигини исботлаймиз.

Дастлаб I—III шартлардан d_M соннинг детерминантни тегишли хоссаларига ўхшаш хоссаларини келтириб чиқарамиз.

(1) *Агар M матрицанинг сатрларидан бири ноллардан ташкил топган бўлса, у ҳолда $d_M = 0$ бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, ноллардан иборат сатрни 0 сонга кўпайтиришимиздан матрица ўзгармайди, бироқ I шартга кўра d_M сон 0 кўпайтувчига эга бўлади. Шунинг учун

$$d_M = 0 \cdot d_M = 0.$$

(2) *Агар M матрицанинг i-сатрига унинг k сонга кўпайтирилган j-сатри ($j \neq i$) қўшилса, d_M сон ўзгармайди.*

Агар $k = 0$ бўлса, ҳаммаси равшан. Агар $k \neq 0$ бўлса, у ҳолда j-сатрни k га кўпайтирамиз ва M' матрицани ҳосил қиламиз. Унинг учун I шартга кўра $d_{M'} = kd_M$. Сўнгра M' матрицанинг l-сатрига унинг j-сатрини қўшамиз ва M'' матрицани ҳосил қиламиз, унинг учун II шартга кўра $d_{M''} = d_{M'}$. Ниҳоят, M'' матрицанинг j-сатрини k^{-1} сонга кўпайтирамиз. M''' матрицага эга бўламиз, у аслида M дан исбот қилинаётган хосса ифодасида кўрсатилган алмаштириш орқали ҳосил қилинган, шу билан бирга

$$d_{M'''} = k^{-1}d_{M''} = k^{-1}d_{M'} = k^{-1} \cdot kd_M = d_M.$$

(3) *Агар M матрицанинг сатрлари чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $d_M = 0$.*

Ҳақиқатан ҳам, сатрлардан бири, масалан, l-сатр бошқа сатрларнинг чизиқли комбинацияси бўлса, у ҳолда (2) алмаштиришни бир неча марта қўллаб, l-сатрни ноллардан иборат сатр билан алмаштириш мумкин. (2) алмаштириш d_M сонни ўзгартирмайди, шунинг учун (1) хоссага кўра $d_M = 0$.

(4) *Агар M матрицанинг i-сатри иккита β ва γ векторнинг йиғиндиси бўлса ва агар M' ҳамда M'' матрицалар M матрицадан унинг i-сатрини мос равишда β ва γ векторлар билан алмаштиришдан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда*

$$d_M = d_{M'} + d_{M''}.$$

Ҳақиқатан ҳам, M матрицанинг i-сатридан ташқари барча сатрлари системаси S бўлсин дейлик. Агар S да чизиқли боғланиш мавжуд бўлса, у ҳолда M, M' ва M'' матрицаларнинг ҳар бирининг сатрлари чизиқли боғлиқ ва шунинг учун (3) хоссага кўра $d_M = d_{M'} = d_{M''} = 0$, бу ердан исботланаётган хоссанинг кўрилаётган ҳол учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Агар $n-1$ та вектордан иборат S система чизиқли эркли бўлса, у ҳолда 9-§ нинг натижалари кўрсатадики, уни бирорта α вектор билан n ўлчовли вектор фазонинг максимал чизиқли эркли векторлар системасигача тўлдириш мумкин. β ва γ векторларни бу система орқали чизиқли ифодалаш мумкин. α вектор бу ифодаларга мос равишда k ва l коэффициентлар билан кирсин; демак, α вектор $\beta+\gamma$ учун ифодага, яъни M матрицанинг i-сатри учун ифодага $k+l$ коэффициент билан киради. Энди M, M' ва M'' матрицаларни қуйидагича ўзгартириш мумкин: уларнинг i-сатрларидан бошқа сатрларнинг бирор чизиқли комбинацияларини шундай айирамизки, натижада матрицаларнинг i-сатрлари бўлиб, мос равишда $(k+l)\alpha$, kl ва $l\alpha$ векторлар хизмат қилсин. Шунинг учун M матрицадан унинг i-сатрини α вектор билан алмаштиришдан ҳосил бўлган матрицани M° орқали белгилаб ҳамда (2) ва I хоссаларни эътиборга олиб, қуйидаги тенгликларга келамиз:

$$d_M = (k+l)d_{M^\circ},\ d_{M'} = kd_{M^\circ},\ d_{M''} = ld_{M^\circ}.$$

Шу билан (4) хосса исбот бўлди.

(5) *Агар* $\overline{M}$ *матрица* M *матрицадан иккита сатрни транспозициялаш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда* $d_{\overline{M}} = -d_M$ *бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, айтайлик, M матрицада i ва j номерли сатрларнинг ўринларини алмаштириш керак бўлсин. Бунга қуйидаги алмаштиришлар кетма-кетлиги орқали эришиш мумкин: дастлаб M матрицанинг i сатрига унинг j-сатрини қўшамиз ва M' матрицани ҳосил қиламиз, бунда II шартга кўра $d_{M'} = d_M$. Сўнгра M' матрицанинг j-сатридан унинг i-сатрини айирамиз ва M'' матрицага эга бўламиз, (2) хоссага кўра бу матрица учун $d_{M''} = d_{M'}$; M'' матрицанинг j-сатри M матрицанинг i-сатридан ишораси билан фарқ қилади. Энди M'' матрицанинг i-сатрига унинг j-сатрини қўшамиз. Бундай алмаштириш натижасида ҳосил қилинган M''' матрица учун II шартга кўра $d_{M'''} = d_{M''}$ бўлади, шу билан бирга бу матрицанинг i-сатри M матрицанинг j-сатри билан бир хил бўлади. Ниҳоят M''' матрицанинг j-сатрини -1 га кўпайтириб, изланаётган $\overline{M}$ матрицага келамиз. Шу сабабли, I шартга кўра

$$d_{\overline{M}} = -d_{M'''} = -d_M.$$

(6) *Агар M' матрица M матрицадан сатрларнинг ўринларини алмаштиришдан ҳосил қилинган бўлса, шу билан бирга M' матрицанинг i-сатри ($i=1, 2, \dots, n$) бўлиб M матрицанинг α_i-сатри хизмат қилса, у ҳолда*

$$d_{M'} = \pm d_M;$$

бунда мусбат ишора

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйиш жуфт бўлган ҳолга, манфий ишора эса у тоқ бўлган ҳолга мос келади.

Дарҳақиқат, M' матрица M матрицадан иккита сатрнинг маълум сондаги транспозицияси билан ҳосил қилиниши мумкин ва шунинг учун (5) хоссадан фойдаланиш мумкин, 3-§ дан маълумки, бу транспозициялар сонининг жуфт-тоқлиги юқоридаги ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлигини белгилайди.

Энди $M=(a_{ij})$, $N=(b_{ij})$ матрицаларни ва уларнинг 13-§ даги маънода кўпайтмаси $Q=MN$ ни қараймиз d_Q сонни топайлик. Бизга маълумки, Q матрицанинг ҳар қандай i-сатри N матрицанинг мос равишда $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ коэффициентлар билан олинган барча сатрларининг йиғиндисидан иборат (масалан, 14- § га қаранг). Q матрицанинг барча сатрларини уларнинг N матрица сатрлари орқали кўрсатилган чизиқли ифодалари билан алмаштирамиз ва бир неча марта (4) хоссадан фойдаланамиз. Натижада d_Q сон қуйидаги кўринишдаги мумкин бўлган барча T матрицалар учун d_T сонларнинг йиғиндисига тенг бўлишини кўрамиз: T матрицанинг i-сатри ($i=1, 2, \dots, n$) N матрицанинг $a_{i\alpha_i}$ сонга кўпайтирилган α_i-сатрига тенг. Бунда (3) хоссага кўра, қилинаётган мулоҳазаларимиздан барча шундай T матрицаларни чиқариб ташлаш мумкинки, улар учун шундай i ва j мавжуд бўлиб $(i \neq j)\alpha_i = \alpha_j$ бўлади; бошқача айтганда, фақат шундай T матрицалар қоладики, улар учун $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ индекслар $1, 2 \dots, n$ сонларнинг ўрин алмаштиришларини ташкил этади. I ва (6) хоссаларга кўра бундай матрица учун d_T сон қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$d_T = \pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} d_N,$$

бу ерда ишора индекслардан иборат ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлигига қараб аниқланади Бу ердан d_Q сон учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз: d_T кўринишдаги барча қўшилувчилардан умумий кўпайтувчи d_N ни қавсдан ташқарига чиқарсак, қавс ичида, равшанки, M матрицанинг 4-§ да берилган конструктив маънодаги $|M|$ детерминанти қолади, яъни

$$d_Q = |M| \cdot d_N. \qquad (*)$$

Агар энди N матрица сифатида бирлик матрица E ни оладиган бўлсак, у ҳолда $Q = M$ бўлади ва III хоссага кўра $d_N = d_E = 1$, *яъни исталган M матрица учун қуйидаги*

$$d_M = |M|$$

тенглик ўринли бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди. Бир вақтнинг ўзида детерминантларни кўпайтириш ҳақидаги теорема яна бир марта, Лаплас теоремасини қўлламасдан туриб исбот қилинди: бунинг учун (*) тенгликда d_Q ва d_N сонларни мос матрицаларнинг детерминантлари билан алмаштириш кифоя.

Бу аксиоматик мулоҳазаларни I—III шартларнинг боғлиқ эмаслигини (эрклилигини) исботлаш билан, яъни бу шартларни ҳеч бири бошқа иккитасининг натижаси эмаслигини исботлаш билан туғаллаймиз.

III шартнинг боғлиқ эмаслигини исботлаш учун n-тартибли ҳар қандай M матрица учун $d_M = 0$ деб фараз қиламиз. Равшанки, I ва II шартлар бажарилади, аммо III шарт бузилади.

II шартнинг боғлиқ эмаслигини исботлаш учун ҳар қандай M матрица учун d_M сон бу матрицанинг бош диагоналида жойлашган элементларнинг кўпайтмасига тенг деб оламиз. I ва III шартлар бажарилади, лекин II шарт эса энди ўринли бўлмайди.

Ниҳоят, I шартнинг боғлиқ эмаслигини исботлаш учун ҳар қандай M матрица учун $d_M = 1$ дейлик. II ва III шартлар бу ҳолда бажарилади, аммо I шарт бузилади.

ТЎРТИНЧИ БОБ

КОМПЛЕКС СОНЛАР

17- §. Комплекс сонлар системаси

Элементар алгебра курсини ўрганиш давомида сонлар запасининг бир неча марта бойишини, кенгайишини кўрамиз.

Алгебрани ўргана бошлаётган мактаб ўқувчиси бутун мусбат ва каср сонлар ҳақидаги билимини алгебрага арифметикадан олиб киради. Аслида алгебра манфий сонларни киритишдан, яъни энг муҳим сонлар системалари ичида биринчи система: барча бутун мусбат ва манфий сонлардан ҳамда нолдан иборат *бутун сонлар* системасини тайин этишдан ва мусбат, шунингдек, манфий бўлган барча бутун ва каср сонлардан иборат анча кенгроқ система — *рационал сонлар* системасини тайин этишдан бошланади.

Сонлар запасининг бундан кейинги кенгайтирилиши муҳокамаларга иррационал сонларни киритишда содир бўлади. Барча рационал ва барча иррационал сонлардан иборат система *ҳақиқий сонлар* системаси дейилади. Ҳақиқий сонлар системасининг жиддий назарияси, одатда, университетнинг математик анализ курсида кўрилади; бироқ биз учун олий алгебрани ўрганишга киришаётган китобхонинг ҳақиқий сонлар тўғрисида олдинги бобларда олган маълумоти етарли ва бу маълумот келгуси боблар учун ҳам етарли бўлади.

Ниҳоят, элементар алгебра курсининг охирида ҳақиқий сонлар системаси *комплекс сонлар* системасигача кенгаяди. Сонларнинг бу системаси ўқувчи учун ҳақиқий сонлар системасига қараганда анча нотаниш бўлиб кўринади, аслида эса у кўпгина ажойиб хоссаларга эга. Ушбу бобда комплекс сонлар назарияси яна бир бор кераклича тўла баён этилади.

Комплекс сонлар ушбу масала муносабати билан киритилади. Маълумки, ҳақиқий коэффициентли исталган квадрат тенгламани ечиш учун ҳақиқий сонларнинг ўзи етарли эмас. Ҳақиқий сонлар ичида илдизларга эга бўлмаган квадрат тенгламаларнинг энг соддаси ушбу

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

тенгламадир, бизни ҳозир фақат шу тенглама қизиқтиради. Олдимизга қўйилган масала қуйидагича: *ҳақиқий сонлар систе-*

масини сонларнинг шундай системасигача кенгайтириш керакки, унда (1) тенглама илдизга эга бўлсин.

Сонларнинг бу янги системасини қуриш учун материал сифатида текислик нуқталарини оламиз. Ҳақиқий сонларни тўғри чизиқнинг нуқталари билан тасвирлаш (бунда координаталар боши ва масштаб бирлиги берилганда тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасига унинг абсциссасини мос қўйсак, тўғри чизиқдаги барча нуқталар тўплами билан барча ҳақиқий сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилишига асосланилади) математиканинг барча бўлимларида ишлатилади ва биз унга шунчалик ўрганиб қолганмизки, одатда ҳақиқий сон билан уни тасвирловчи нуқтани бир-биридан фарқ қилмаймиз.

Шундай қилиб, *текисликнинг барча нуқталари билан тасвирланувчи сонлар системасини таърифламоқчимиз.* Шу пайтгача текислик нуқталарини қўшиш ёки кўпайтиришга дуч келмаган эдик, шунинг учун нуқталар устида бажариладиган амалларни танлаб олиш ҳуқуқига эгамиз, бунда фақат сонларнинг янги системаси, биз уни қайси мақсад учун тузаётган бўлсак, ўша хоссаларга эга бўлишини таъминлашимиз керак. Бу таърифлар айниқса кўпайтма учун дастлаб анча сунъий бўлиб кўринади. Бироқ 10- бобда амалларнинг бошқа ҳеч қандай таърифлари биринчи қарашда ҳатто анча табиий бўлиб кўринса-да, бизни мақсадга олиб келмаслиги, яъни ҳақиқий сонлар системасининг (1) тенгламанинг илдизини ўз ичига олган кенгайтмасини қуришга олиб келмаслиги кўрсатилади. Ўша ернинг ўзида бундай қуришда текислик нуқталарини бошқа ҳар қандай материал билан алмаштириш ўзининг алгебраик хоссалари бўйича қуйида қуриладиган комплекс сонлар системасидан фарқ қиладиган сонлар системасига олиб келмаслиги кўрсатилади.

Текисликда тўғри бурчакли координаталар системаси танланган бўлсин. Текислик нуқталарини α, β, γ, ... ҳарфлари билан белгилашга ҳамда абсциссаси a ва ординатаси b бўлган α нуқтани (a, b) орқали ёзишга, яъни аналитик геометрияда қабул қилинганидан бир оз четга чиқиб, $\alpha = (a, b)$ деб ёзишга келишиб оламиз. Агар $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ нуқталар берилган бўлса, бу нуқталарнинг *йиғиндиси* деб абсциссаси $a + c$ ва ординатаси $b + d$ бўлган нуқтани атаймиз, яъни

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \qquad (2)$$

$\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ нуқталарнинг *кўпайтмаси* деб абсциссаси $ac - bd$ ва ординатаси $ad + bc$ бўлган нуқтани атаймиз, яъни

$$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \qquad (3)$$

Ана шу йўл билан текисликнинг барча нуқталари тўпламида иккита алгебраик амални аниқладик. Қуйидагини кўрсатамиз: *ҳақиқий сонлар системасида ёки рационал сонлар системасида амаллар қандай асосий хоссаларга эга бўлса, бу амаллар ҳам шундай асосий хоссаларга эгадир: уларнинг ҳар иккаласи ҳам коммутатив ва ассоциативдир ҳамда дистрибутивлик қонуни билан боғланган ва улар учун тескари амаллар—айириш ва бўлиш (нолга бўлишдан ташқари) амаллари мавжуд.*

Қўшишнинг коммутативлиги ва ассоциативлиги аёндир (аниқроғи, ҳақиқий сонларни қўшишнинг тегишли хоссаларидан келиб чиқади), чунки текисликнинг нуқталарини қўшишда уларнинг абсциссаларини алоҳида ва ординаталарини алоҳида қўшилади. Кўпайтиришнинг коммутативлиги α ва β нуқталар кўпайтириш таърифига симметрик равишда киришига асосланган. Кўпайтиришнинг ассоциативлигини қуйидаги тенгликлар исбот қилади:

$$[(a,\ b)\ (c,\ d)]\ (e,\ f) = (ac - bd,\ ad + bc)\ (e,\ f) =$$
$$= (ace - bde - adf - bcf,\ acf - bdf + ade + bce),$$
$$(a,\ b)\ [(c,\ d)\ (e, f)] = (a,\ b)\ (ce - df,\ cf + de) =$$
$$= (ace - adf - bcf - bde,\ acf + ade + bce - bdf).$$

Дистрибутивлик қонуни қуйидаги тенгликлардан келиб чиқади:

$$[(a,\ b) + (c,\ d)]\ (e,\ f) = (a + c,\ b + d)\ (e,\ f) =$$
$$= (ae - ce - bf - df,\ af + cf + be + de),$$
$$(a,\ b)\ \ (c,\ f) + (c,\ d)\ \ (e,\ f) = (ae - bf,\ \ af + bc) + (ce - df,$$
$$cf + de) = (ae - bf + ce - df,\ af + be + cf + de).$$

Тескари амаллар ҳақидаги масалани кўриб чиқамиз. Агар $\alpha = (a,\ b)$ ва $\beta = (c,\ d)$ нуқталар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг айирмаси шундай $(x,\ y)$ нуқта бўладики, унинг учун

$$(c,\ d) + (x,\ y) = (a,\ b).$$

бўлади. Бу ердан, (2) га кўра

$$c + x = a,\ d + y = b.$$

Шундай қилиб, $\alpha = (a,\ b)$ ва $\beta = (c,\ d)$ нуқталарнинг *айирмаси* ушбу

$$\alpha - \beta = (a - c,\ b - d) \tag{4}$$

нуқта бўлади ва бу айирма бир қийматли аниқлангандир. Хусусан, ноль бўлиб координаталар боши (0, 0), $\alpha = (a,\ b)$ нуқта учун *қарама-қарши* нуқта бўлиб эса

$$-\alpha = (-a,\ -b)$$

нуқта хизмат қилади. (5)

Сўнгра, $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ нуқталар берилган бўлсин, шу билан бирга β нуқта нолдан фарқли бўлсин, яъни c, d координаталардан ҳеч бўлмаганда бири ноль эмас ва шунинг учун $c^2 + d^2 \neq 0$. α ни β га бўлишдан чиққан бўлинма шундай (x, y) нуқта бўлиши керакки,унинг учун $(c, d)(x, y) = (a, b)$ бўлади. Бу ердан, (3) га кўра

$$cx - dy = a,$$
$$dx + cy = b.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Шундай қилиб, $\beta \neq 0$ бўлганда $\frac{\alpha}{\beta}$ *бўлинма* мавжуд ва бир қийматли аниқланган:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right). \qquad (6)$$

Бу ерда $\beta = \alpha$ десак, бизнинг бу кўпайтиришимизда *бир* бўлиб, абсциссалар ўқида координаталар бошидан 1 масофа ўнгда ётувчи (1, 0) нуқта хизмат қилишини кўрамиз. Сўнгра (6) да $\alpha = 1 = (1, 0)$ деб фараз қилиб, $\beta \neq 0$ бўлганда β учун *тескари* нуқта

$$\beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right) \qquad (7)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, текислик нуқталари билан тасвирланадиган сонлар системасини туздик, шу билан бирга бу сонлар устида бажариладиган амаллар (2) ва (3) формулалар бўйича аниқланади. Сонларнинг бу системаси *комплекс сонлар системаси* дейилади.

Комплекс сонлар системаси ҳақиқий сонлар системасининг кенгайтмаси эканлигини кўрсатамиз. Ана шу мақсадда абсциссалар ўқида ётувчи нуқталарни, яъни $(a, 0)$ кўринишдаги нуқталарни қараймиз: $(a, 0)$ нуқтага a ҳақиқий сонни мос келтириб, равшанки, қаралаётган нуқталар тўплами ва барча ҳақиқий сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мосликни ҳосил қиламиз. Бу нуқталарга (2) ва (3) формулаларнинг қўлланилиши

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

тенгликларни келтириб чиқаради, яъни $(a, 0)$ нуқталар бир-бири билан мос ҳақиқий сонлар каби қўшилади ва кўпайтирилади. Шундай қилиб, *абсциссалар ўқида ётувчи ва комплекс* *сонлар системасининг бир қисми сифатида қаралувчи нуқталар тўплами ўзининг алгебраик хоссалари бўйича тўғри чизиқнинг нуқталари каби одатдаги усулда тасвирланадиган ҳақиқий сонлар системасидан ҳеч бир фарқ қилмайди.*

Бу келгусида $(a, 0)$ нуқтани ва a ҳақиқий сонни бир-биридан фарқламасликка, яъни ҳар доим $(a, 0) = a$ дейишга имкон беради.

Хусусан, комплекс сонлар системасидаги ноль (0, 0) ва бир (1, 0) одатдаги ҳақиқий сонлар 0 ва 1 дир.

Энди биз комплекс сонлар ичида (1) *тенгламанинг илдизи* бор эканлигини, яъни квадрати ҳақиқий сон -1 га тенг сон борлигини кўрсатишимиз керак. Бу сон, масалан, (0, 1) нуқта, яъни ординаталар ўқида координаталар бошидан 1 бирлик масофа юқорида жойлашган нуқта бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (3) ни қўллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = (-1, 0) = -1.$$

Бу нуқтани i деб белгилашга келишиб оламиз, шундай қилиб, $i^2 = -1$.

Ниҳоят, *тузилган комплекс сонлар учун уларнинг одатдаги ёзуви ҳосил қилиниши мумкинлигини* кўрсатамиз. Бунинг учун дастлаб b ҳақиқий соннинг i нуқтага кўпайтмасини топамиз:

$$bi = (b,\ 0) \cdot (0,\ 1) = (0,\ b);$$

бу, бинобарин, ординаталар ўқида ётувчи ва ординатаси b га тенг бўлган нуқтадир, шу билан бирга ординаталар ўқининг барча нуқталари шундай кўпайтма кўринишида тасвирланади. Энди (a, b) ихтиёрий нуқта бўлса, у ҳолда

$$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b)$$

тенгликка кўра

$$(a,\ b) = a + bi$$

ни ҳосил қиламиз, яъни биз ҳақиқатан ҳам комплекс сонларнинг одатдаги ёзувига келамиз; $a + bi$ ифодадаги кўпайтма ва йиғиндини биз қурган комплекс сонлар системасида аниқланган маънода тушуниш керак, албатта.

Комплекс сонлар назариясини қуришни тамомлар эканмиз, *китобнинг олдинги бобларининг мазмуни* — детерминантлар назарияси ҳам, чизиқли тенгламалар системалари назарияси ҳам, векторларнинг чизиқли боғлиқлиги назарияси ҳам, матрица устида бажариладиган амаллар назарияси ҳам *муҳокамаларга фақат ҳақиқий сонлар эмас, балки исталган комплекс сонлар киритилган ҳол учун ҳам ҳеч қандай чеклашларсиз қайтарилишини ўқувчи ҳеч бир қийинчиликсиз текшира олади.*

Пировардида, комплекс сонлар назариясининг биз амалга оширган қурилиши қуйидаги саволни келтириб чиқаришини қайд қилиб ўтайлик: уч ўлчовли фазо нуқталарини қўшишни ва кўпайтиришни • бу нуқталар тўплами комплекс сонлар системасини ёки, ҳеч бўлмаса, ҳақиқий сонлар системасини ўз ичига оладиган қилиб аниқлаш мумкин эмасмикин? Бу савол мазкур курс программасидан четга чиқади, фақат шуни айтиш мумкинки, бу саволга бериладиган жавоб салбийдир.

Иккинчи томондан, комплекс сонларни юқорида аниқланган маънода қўшиш, умуман олганда, текисликда координаталар бошидан чиққан векторларни қўшиш (кейинги параграфга қаранг) билан бир хилда эканлигини назарга олсак, қуйидаги саволнинг қўйилиши табиийдир: бирон-бир n лар учун n ўлчовли ҳақиқий вектор фазода векторларни кўпайтиришни шундай аниқлаш мумкинки, векторларни бундай кўпайтиришга ва одатдаги қўшишга нисбатан бизнинг фазо ҳақиқий сонлар системасини ўз ичига олган сонлар системаси бўлиб қолсин. Агар амалларнинг рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар системасида эга бўлган барча хоссаларининг бажарилишини талаб қиладиган бўлсак, буни бажариб бўлмасликни кўрсатиш мумкин. Агар кўпайтиришнинг коммутативлигидан воз кечадиган бўлсак, у ҳолда бундай ясашни тўрт ўлчовли фазода бажариш мумкин; сонларнинг ҳосил бўладиган системаси *кватернионлар системаси* дейилади. Шунга ўхшаш ясаш саккиз ўлчовли фазода ҳам мумкин — унда *Кэли сонлари системаси* деб аталувчи система ҳосил бўлади. Шуни айтиш керакки, бу ерда кўпайтиришнинг фақат коммутативлигидан эмас, балки ассоциативлигидан ҳам (уни анча бўш бир талаб билан алмаштириб) воз кечишга тўғри келади.

18-§. Комплекс сонларнинг келгусидаги ўрганилиши

Тарихий анъанага айланиб қолган келишувга биноан, комплекс сон i ни *мавҳум бирлик* деб, bi кўринишдаги сонларни эса *соф мавҳум сонлар* деб атаймиз. Ҳолбуки, бу сонларнинг мавжуд эканлиги бизда шубҳа туғдирмайди ва текисликнинг бу сонлар билан ифодаланадиган нуқталарини ордината ўқи нуқталарини кўрсатишимиз мумкин. α комплекс соннинг $\alpha = a + bi$ кўринишдаги ёзувида a сон α соннинг *ҳақиқий қисми*, bi эса унинг *мавҳум қисми* дейилади. Нуқталари комплекс сонлар билан 17-§ даги усул бўйича айнан тенглаштирилган текислик *комплекс текислик* дейилади. Бу текисликнинг абсциссалар ўқи *ҳақиқий ўқ* дейилади, чунки унинг нуқталари ҳақиқий сонларни тасвирлайди; комплекс текисликнинг ординаталар ўқи мос равишда *мавҳум ўқ* дейилади.

$a+bi$ кўринишда ёзилган комплекс сонларни қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш аввалги параграфнинг (2), (4), (3) ва (6) формулаларига кўра қуйидагича бажарилади:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Комплекс сонларни қўшишда уларнинг ҳақиқий қисмлари алоҳида ва мавҳум қисмлари алоҳида қўшилади деб айта оламиз; шунга ўхшаш қоида айириш учун ҳам ўринлидир. Кўпайтириш ва бўлиш формулаларининг сўз билан ифодаси узундан-узоқ бўлиб, биз уни бу ерда келтириб ўтирмаймиз. Юқоридаги формулаларнинг охиргисини ёдда сақлашга ҳожат йўқ; бу формулани, берилган касрнинг сурат ва махражини унинг махражидан фақат мавҳум қисми олдидаги ишораси билан фарқланадиган сонгагина кўпайтириб, келтириб чиқариш мумкин эканлигини эсда тутиш кифоя.

Ҳақиқатан ҳам,

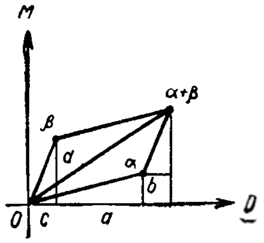
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Мисоллар.

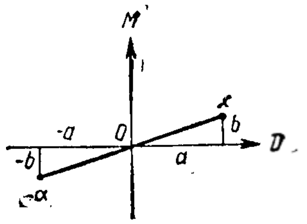
1) $(2+5i)+(1-7i)=(2+1)+(5-7)i=3-2i;$
2) $(3-9i)-(7+i)=(3-7)+(-9-1)i=-4-10i;$
3) $(1+2i)(3-i)=[1\cdot 3-2\cdot(-1)]+[1\cdot(-1)+2\cdot 3]i=5+5i;$
4) $\dfrac{23+i}{3+i}=\dfrac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{70-20i}{10}=7-2i.$

Комплекс сонларни текисликнинг нуқталари билан тасвирлаш комплекс сонлар учун аниқланган амалларни геометрик талқин этилишини тақозо қилиши табиий. Қўшиш учун бундай талқинни ҳосил қилиш қийинчилик туғдирмайди. $\alpha=a+bi$ ва $\beta=c+di$ сонлар берилган бўлсин. Уларга мос келувчи (a, b) ва (c, d) нуқталарни координаталар боши билан кесмалар ёрдамида туташтирамиз, ва бу кесмаларни томонлар ҳисоблаб, параллелограмм ясаймиз (2-расм). Бу параллелограммнинг тўртинчи учи, равшанки, $(a+c, b+d)$ нуқта бўлади. Шундай қилиб геометрик нуқтаи назардан, *комплекс сонларни қўшиш параллелограмм қоидаси бўйича, яъни координаталар бошидан чиқадиган векторларни қўшиш қоидаси бўйича бажарилади.*

$\alpha=a+bi$ сонга қарама- қарши бўлган сон комплекс текисликдаги нуқта бўлиб, у α га координаталар бошига



2- расм.

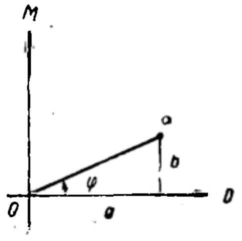


3- расм.

нисбатан симметрик бўлади (3- расм). Бу ердан айиришнинг геометрик талқинини ҳеч бир қийинчиликсиз ҳосил қилиш мумкин.

Комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлишнинг геометрик маъноси комплекс сонларнинг шу пайтга қадар фойдаланиб келинган ёзувидан фарқли янги ёзувини киритганимиздан сўнггина тушунарли бўлади.

α соннинг $\alpha = a + bi$ кўринишдаги ёзувида бу сонга мос келувчи нуқтанинг декарт координаталаридан фойдаланилади.



4- расм.

Бироқ нуқтанинг текисликдаги вазияти унинг қутб координаталари: координаталар бошидан нуқтагача бўлган масофа r ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан координаталар бошидан бу нуқта томон йўналиш орасидаги φ бурчакнинг берилиши билан ҳам тўла аниқланади (4- расм).

r сон манфий бўлмаган ҳақиқий сон бўлиб, у фақат 0 нуқта учунгина нолга тенгдир. Ҳақиқий ўқда ётувчи, яъни ҳақиқий сон бўлган α учун r сон унинг абсолют қиймати бўлади, шунинг учун исталган α комплекс сон учун ҳам уни баъзан α нинг *абсолют қиймати* дейилади; бироқ кўпинча r сон α нинг модули дейилади ва $|\alpha|$ орқали белгиланади.

φ бурчак α соннинг аргументи дейилади ва $\arg\alpha$[1] каби белгиланади. φ бурчак исталган ҳақиқий қийматлар: мусбат қийматлар ҳам, манфий қийматлар ҳам қабул қилиши мумкин, бунда мусбат бурчаклар соат стрелкасига қарши йўналишда ҳисобланиши лозим, бироқ бурчаклар бир-биридан 2π га ёки 2π га каррали бўлган сонга фарқ қилсалар, у ҳолда текисликнинг уларга мос нуқталари устма-уст тушади.

---

[1] Бинобарин, нуқта қутб координаталарининг одат бўлиб қолган номлари—қутб радиуси ва қутб бурчагидан воз кечамиз.

Шундай қилиб, α комплекс соннинг аргументи бир-биридан 2π га бутун каррали бўлган сонларга фарқ қиладиган чексиз кўп қийматларга эга; бинобарин, модуллари ва аргументлари билан берилган иккита комплекс соннинг тенглигидан, уларнинг модуллари тенг бўлиб, аргументлари 2π га каррали бутун сонгагина фарқ қилиши тўғрисида хулоса чиқариш мумкин. Аргумент фақат ноль сон учун аниқланмаган; аммо бу сон $|0| = 0$ тенглик билан тўла аниқланади.

Комплекс соннинг аргументи ҳақиқий сон ишорасининг табиий умумлаштанидир. Дарҳақиқат, мусбат ҳақиқий соннинг аргументи 0 га тенг, манфий ҳақиқий соннинг аргументи π га тенг; ҳақиқий ўқда координаталар бошидан фақат иккига йўналиш чиқади ва уларни иккита символ: „+“ ва „—“ орқали фарқлантириш мумкин, комплекс текисликда эса 0 нуқтадан чиқувчи йўналишлар чексиз кўп ва улар энди ўзларининг ҳақиқий ўқнинг йўналиши билан ҳосил қилган бурчаклари билан фарқланадилар.

Декарт ва қутб координаталари орасида, текисликда нуқталар қандай жойлашганидан қатъи назар, ушбу муносабат мавжуд:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Бу ердан

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

(1) формулани ихтиёрий $\alpha = a + bi$ комплекс сонга татбиқ қиламиз:

$$\alpha = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i$$

ёки

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Аксинча, $\alpha = a + bi$ сонни $\alpha = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ кўринишда ёзиш мумкин бўлсин, бу ерда r_0 ва φ_0 — бирорта ҳақиқий сонлар, шу билан бирга $r_0 > 0$. У ҳолда $r_0\cos\varphi_0 = a$, $r_0\sin\varphi_0 = b$, бу ердан $r_0 = +\sqrt{a^2 + b^2}$, яъни (2) га кўра $r_0 = |\alpha|$. Бу ердан (1) дан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\cos\varphi_0 = \cos\varphi$, $\sin\varphi_0 = \sin\varphi$, яъни $\varphi_0 = \arg\alpha$. Шундай қилиб, *ҳар қандай α комплекс сон (3) кўринишдаги бир қийматли ёзувга эга*, бу ерда $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$ (бунда φ аргумент, албатта, 2π каррали қўшилувчиларгача аниқликда аниқланган). α соннинг бу ёзуви унинг *тригонометрик шакли* дейилади ва ундан келгусида кўп фойдаланилади.

$$\alpha = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \ \beta = \cos\frac{19}{3}\pi + i\sin\frac{19}{3}\pi$$

ва

$$\gamma = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

сонлар тригонометрик шаклда берилган;

бу ерда $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 1$, $|\gamma| = \sqrt{3}$; $\arg\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\arg\beta = \frac{19}{3}\pi$,

$$\arg\gamma = -\frac{\pi}{7}\left(\text{ёки } \arg\beta = \frac{\pi}{3},\ \arg\gamma = \frac{13}{7}\pi\right).$$

Иккинчи томондан, ушбу

$$\alpha' = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right),\ \beta' = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

$$\gamma' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{3}{4}\pi\right),\ \delta' = \sin\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi$$

комплекс сонларнинг берилиши (3) ёзувни эслатса-да, улар тригонометрик шаклда берилмаган. Бу сонлар тригонометрик шаклда қуйидагича ёзилади:

$$\alpha' = 2\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right),\quad \beta' = 3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right),$$

$$\delta' = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$

γ' соннинг тригонометрик шаклини излашда, комплекс соннинг оддий ёзувидан тригонометрик шаклига ва аксинча ўтишда деярли ҳар доим учрайдиган қийинчиликка дуч келинади; синус ва косинуснинг берилган сонли қийматларига кўра аниқ бурчакни, берилган бурчак учун эса унинг синуси ва косинусининг аниқ қийматини топиш баъзи айрим ҳолларни ҳисобга олмаганда мумкин эмас.

α ва β комплекс сонлар тригонометрик шаклда берилган бўлсин: $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Бу сонларни кўпайтирамиз:

$$\alpha\beta = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\cdot[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] =$$
$$= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'),$$

ёки

$$\alpha\beta = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \tag{4}$$

$\alpha\beta$ кўпайтманинг тригонометрик шаклдаги ёзувини ҳосил қилдик, шунинг учун $|\alpha\beta| = rr'$ ёки

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|, \tag{5}$$

яъни *комплекс сонлар кўпайтмасининг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг*; сўнгра $\arg(\alpha\beta) = \varphi + \varphi'$ ёки

$$\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta, \tag{6}$$

яъни *комплекс сонлар кўпайтмасининг аргументи кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндисига тенг*[1]. Бу қоидалар, равшанки, исталган чекли сондаги комплекс сонлар учун ҳам

---

[1] Бу ерда тенглик 2π га каррали қўшилувчигача аниқликда тушунилишини таъкидлаймиз.

ўринлидир. Ҳақиқий сонлар бўлган ҳолга татбиқ қилинганда, (5) формула бу сонлар абсолют қийматларининг маълум хоссасини беради, (6) эса, осонгина текшириб кўриш мумкинки, ҳақиқий сонларни кўпайтиришдаги ишоралар қоидасига айланади.

Шунга ўхшаш қоидалар бўлинма учун ҳам ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ бўлсин, шу билан бирга $\beta \neq 0$, яъни $r' \neq 0$. У ҳолда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi')} =$$

$$= \frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')$$

ёки

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + \sin(\varphi - \varphi')]. \tag{7}$$

Бу ердан

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{r}{r'} \text{ ёки}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \tag{8}$$

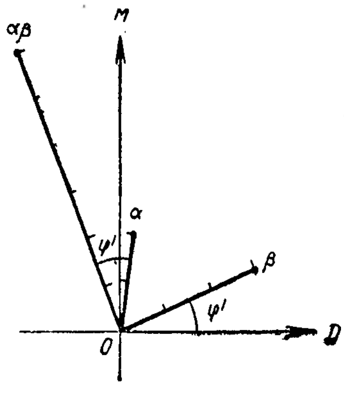
эканлиги келиб чиқади, яъни *иккита комплекс сон бўлинмасининг модули бўлувчининг модулига бўлинган бўлинувчи модулига тенг*;

сўнгра $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \varphi - \varphi'$ ёки

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg\alpha - \arg\beta, \tag{9}$$

яъни *иккита комплекс сон бўлинмасининг аргументи бўлинувчининг аргументидан бўлувчининг аргументини айирилганига тенг.*

Энди кўпайтириш ва бўлишнинг геометрик маъноси ҳеч бир қийинчиликсиз аниқланади. Дарҳақиқат, (5) ва (6) формулаларга кўра, α сонниннг $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ сонга кўпайтмасини тасвирловчи нуқтани 0 дан α га томон йўналган векторни (5-расм) соат стрелкаси йўналишига қарши $\varphi' = \arg\beta$ буржакка буриш, сўнгра эса бу векторни $r' = |\beta|$ марта чўзиш ($0 \leqslant r' < 1$ бўлганда бу чўзиш эмас, балки сиқиш бўлади, албатта) би-



5-расм.

лан ҳосил қиламиз. Сўнгра (7) дан $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ бўлганда

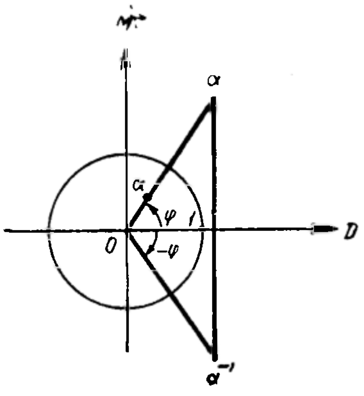
$$\alpha^{-1} = r^{-1}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] \tag{10}$$

эканлиги келиб чиқади, яъни $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$, $\arg(\alpha^{-1}) = -\arg\alpha$. Шундай қилиб, агар α нуқтадан бу нуқта ётган ярим тўғри чизиқда ётувчи ва ноль нуқтадан шу ярим тўғри чизиқ бўйлаб r^{-1} масофада ётган α' нуқтага[1] ўтсак (6- расм), сўнгра α' га ҳақиқий ўққа нисбатан симметрик бўлган нуқтага ўтсак, α^{-1} нуқтани ҳосил қиламиз.

Тригонометрик шаклда берилган комплекс сонларнинг йиғиндисини ва айирмасини (4) ва (7) га ўхшаш формулалар билан ифодалаш мумкин эмас. Бироқ йиғиндининг модули учун қуйидаги муҳим тенгсизликлар мавжуд:

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \tag{11}$$

яъни *иккита комплекс сон йиғиндисининг модули қўшилувчилар модуллари йиғиндисидан кичик ёки унга тенг, аммо бу модулларнинг айирмасидан* катта ёки унга тенг. (11) тенгсизликлар элементар геометриянинг учбурчакнинг томонлари ҳақидаги маълум теоремасидан келиб чиқади ($|\alpha + \beta|$ томонлари $|\alpha|$ ва $|\beta|$ бўлган параллелограммнинг диагоналига тенг эканлиги маълум). α, β ва 0 нуқталар бир тўғри чизиқда ётган ҳол алоҳида диққатга сазовордир; фақат шу ҳолдагина (11) формулаларда тенгликка эришиш мумкин. Бу ҳолни қараб чиқишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.



6- расм.

(11) дан, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ ва

$$|-\beta| = |\beta| \tag{12}$$

---

[1] $|\alpha| = 1$ бўлганда ва фақат шундагина, яъни нуқта *бирлик доиранинг* айланасида ётсагина $|\alpha'| = |\alpha|$ бўлади. Агар α бирлик доиранинг ичида ётса, у ҳолда α' ундан ташқарида бўлади ва аксинча, шу билан бирга ана шу йўл билан, шубҳасиз, комплекс текисликнинг бирлик доирасидан ташқари ётган барча нуқталари билан бу доиранинг ичида ётган ва нолдан фарқли барча нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик ҳосил қиламиз.

(бу тенглик, масалан, $-\beta$ соннинг геометрик талқинидан келиб чиқиши мумкин) га кўра, шунингдек,

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta| \tag{13}$$

тенгсизликлар ҳам келиб чиқади, яъни айирманинг модули учун йиғиндининг модулидагидек тенгсизликлар ўринли бўлади

(11) тенгсизликларни яна қуйидаги йўл билан ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. Айтайлик, $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ ва $\alpha+\beta$ соннинг тригонометрик шакли $\alpha+\beta = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ бўлсин. Ҳақиқий қисмларни алоҳида ва мавҳум қисмларни алоҳида қўшиб,

$$r\cos\varphi + r'\cos\varphi' = R\cos\psi,$$
$$r\sin\varphi + r'\sin\varphi' = R\sin\psi$$

ни ҳосил қиламиз; биринчи тенгликнинг ҳар иккала томонини $\cos\psi$ га, иккинчисининг иккала томонини $\sin\psi$ га кўпайтириб, уларни қўшсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$r(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + r'(\cos\varphi'\cos\psi + \sin\varphi'\sin\psi) =$$
$$= R(\cos^2\psi + \sin^2\psi),$$

яъни

$$r\cos(\varphi-\psi) + r'\cos(\varphi'-\psi) = R.$$

Бу ердан, косинус ҳеч қачон бирдан катта бўла олмаслиги сабабли, $r + r' \geqslant R$ тенглик келиб чиқади, яъни $|\alpha| + |\beta| \geqslant |\alpha+\beta|$. Иккинчи томондан $\alpha = (\alpha+\beta)-\beta = (\alpha+\beta)+(-\beta)$. Бу ердан ҳозиргина исботланганга ва (12) га кўра,

$$|\alpha| \leqslant |\alpha+\beta| + |-\beta| = |\alpha+\beta| + |\beta|,$$

бундан $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha+\beta|$.

Комплекс сонлар учун „катта“ ва „кичик“ тушунчаларини маънога эга бўладиган қилиб аниқлаб бўлмайди, чунки бу сонлар, нуқталари табиий равишда тартибланган тўғри чизиқда ётган ҳақиқий сонлардан фарқли ўлароқ, тўғри чизиқда ётмасдан, балки текисликда ётади. Шунинг учун комплекс сонларнинг ўзини (уларнинг модулларини эмас) ҳеч қачон тенгсизлик белгиси билан бирлаштириб бўлмайди.

Қўшма сонлар. $\alpha = a + bi$ комплекс сон берилган бўлсин. α дан мавҳум қисмининг ишораси билангина фарқ қилувчи $a-bi$ сон α билан *қўшма сон* дейилади ва $\overline{\alpha}$ каби белгиланади.

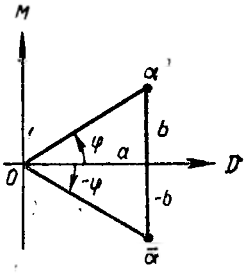
Комплекс сонларни бўлишни қараётганда бу номни киритмасак-да, қўшма сонлардан фойдаланганимизни эслатиб ўтамиз.

$\overline{\alpha}$ га қўшма сон, равшанки, α бўлади, яъни қўшма сонлар жуфти ҳақида гапириш мумкин. Ҳақиқий сонлар ва фақат шулargina ўз-ўзларига қўшма бўлади.

Геометрик нуқтаи назардан қўшма сонлар ҳақиқий ўққа нисбатан симметрик бўлган нуқталардир (7- расм). Бу ердан

$$|\bar\alpha| = |\alpha|,\ \arg\bar\alpha = -\arg\alpha \qquad (14)$$

тенгликлар келиб чиқади.



7- расм.

Қўшма комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳақиқий сонлар бўлади. Дарҳақиқат,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\bar\alpha = 2a,\\ \alpha\bar\alpha = a^2+b^2 = |\alpha|^2.\end{array}\right\} \qquad (15)$$

Охирги тенглик $\alpha\bar\alpha$ сон $\alpha\neq 0$ бўлганда, ҳатто мусбат бўлишини кўрсатади. 24- § да қўшма сонларнинг ҳозир исботланган хоссаси улар учун характерли эканлигини кўрсатувчи теорема баён қилинади.

$$(a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)\,i$$

тенглик *иккита соннинг йиғиндиси билан қўшма бўлган сон қўшилувчилар билан қўшма бўлган сонларнинг йиғиндисига тенг эканлигини кўрсатади*:

$$\overline{\alpha+\beta} = \bar\alpha+\bar\beta. \qquad (16)$$

Шунга ўхшаш,

$$(a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)\,i$$

тенгликдан *кўпайтмага қўшма бўлган сон кўпайтувчилар билан қўшма бўлган сонларнинг кўпайтмасига тенг эканлиги келиб чиқади:*

$$\overline{\alpha\beta} = \bar\alpha\cdot\bar\beta. \qquad (17)$$

Бевосита текшириш

$$\overline{\alpha-\beta} = \bar\alpha-\bar\beta, \qquad (18)$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar\alpha}{\bar\beta}. \qquad (19)$$

формулаларнинг тўғрилигини кўрсатади.

Қуйидаги даъвони исбот қилайлик: *агар* α *сон бирон-бир усул билан* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *комплекс сонлар орқали қўшиш,* кўпайтириш, айириш ва бўлиш ёрдамида ифодаланган бўлса, *у ҳолда бу ифодада барча* β_k *сонларни уларнинг қўшмалари билан алмаштирсак,* α *билан қўшма бўлган сонни ҳосил қиламиз*; хусусан, агар α сон ҳақиқий бўлса, у барча β_k комплекс сонларни уларнинг қўшмалари билан алмаштириш натижасида ўзгармайди.

Бу даъвони n бўйича индукция ёрдамида исботлаймиз, чунки у $n=2$ бўлганда (16)—(19) формулалардан келиб чиқади. Айтайлик, α сон $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ сонлар (булар ҳар хил бўлиши шарт эмас) орқали ифодаланган бўлсин. Бу ифодада қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш амаллари қай тартибда бажарилиши аниқ кўрсатилган. Охирги бажарадиган ишимиз бу амалларнинг бирортасини $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ (бу ерда $1 \leqslant k \leqslant n-1$) сонлар орқали ифодаланган γ_1 сонга ва $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$ сонлар орқали ифодаланган γ_2 сонга татбиқ қилиш бўлади. Индуктив фараз бўйича $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ сонларни уларнинг қўшмаларига алмаштириш γ_1 ни $\bar{\gamma}_1$га, $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ сонларни уларнинг қўшмаларига алмаштириш эса γ_2 ни $\bar{\gamma}_2$ га алмашишига олиб келади. Бироқ, (16)—(19) формулаларнинг бирортаси бўйича γ_1 ва γ_2 дан $\bar{\gamma}_1$ ва $\bar{\gamma}_2$ га ўтиш α сонни $\bar{\alpha}$ га айлантиради.

19- §. Комплекс сонлардан илдиз чиқариш

Комплекс сонларни даражага кўтариш ва улардан илдиз чиқариш масаласига ўтамиз. $\alpha = a + bi$ сонни бутун мусбат n- даражага кўтариш учун $(a+bi)^n$ ифодага Ньютон формуласини татбиқ қилиш (бу формула комплекс сонлар учун ҳам ўринли, чунки унинг исботи дистрибутивлик қонунигагина асосланган), сўнгра $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ дан, умуман,

$$1; \quad i^{4k} \neq i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$$

тенгликлардан фойдаланиш кифоя.

Агар α сон тригонометрик шаклда берилган бўлса, у ҳолда n бутун мусбат бўлганда аввалги параграфнинг (4) формуласидан *Муавр формуласи* деб аталувчи ушбу формула келиб чиқади:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1}$$

яъни *комплекс сонни даражага кўтаришда модуль шу даражага кўтарилади, аргумент эса даража кўрсаткичига кўпайтирилади.* (1) формула манфий бутун кўрсаткичлар учун ҳам тўғри. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$ бўлгани сабабли, тригонометрик шакли аввалги параграфнинг (10) формуласига кўра ҳосил қилинадиган α^{-1} сонга Муавр формуласини татбиқ қилиш етарли.

Мисоллар.

1) $i^{37} = i$, $i^{122} = -1$;

2) $(2+5i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5i + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 i^2 + 5^3 i^3 = 8 + 60i - 150 - 125i = -112 - 65i$,

$$3)\ \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=(\sqrt{2})^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4;$$

$$4)\ \left[3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{-3}=3^{-3}\left[\cos\left(-\frac{3}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{5}\pi\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{27}\left(\cos\frac{7}{5}\pi+i\sin\frac{7}{5}\pi\right).$$

Муавр формуласининг хусусий ҳоли, яъни

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

тенглик каррали бурчакнинг синуси ва косинуси учун формулаларни осонгина ҳосил қилишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, бу тенгликнинг чап томонини бином формуласи бўйича очиб чиқиб ва тенгликнинг ҳар иккала томонининг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини алоҳида-алоҳида тенглаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi+$$
$$+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi-\ldots,$$
$$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi+$$
$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi\ldots,$$

бу ерда $\binom{n}{k}$ — биномиал коэффициентнинг одатдаги белгиланишидир:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}.$$

$\imath=2$ бўлганда аввалдан маълум бўлган

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,$$
$$\sin 2\varphi=2\cos\varphi\sin\varphi$$

формулаларга, $n=3$ бўлганда эса

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi=3\cos^2\sin\varphi-\sin^3\varphi$$

формулаларга келамиз.

Комплекс сонлардан илдиз чиқариш кўпгина қийинчиликлар билан боғлиқ. $\alpha=a+bi$ сондан квадрат илдиз чиқаришдан бошлаймиз. Биз, ҳозирча, квадрати α га тенг бўлган комплекс сон мавжудми ёки йўқми эканини билмаймиз. Ана шундай $u+vi$

сон мавжуд деб фараз қилайлик, яъни одатдаги белгилашдан фойдаланиб

$$\sqrt{a+bi} = u + vi$$

деб ёзиш мумкин бўлсин.

$$(u+vi)^2 = a + bi$$

тенгликдан

$$\left.\begin{aligned} u^2 - v^2 &= a, \\ 2uv &= b \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

келиб чиқади. (2) тенгликларнинг ҳар қайсисининг иккала томонини квадратга кўтариб, сўнгра уларни қўшиб,

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$u^2 + v^2 = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Бу тенгликда мусбат ишора шунинг учун ҳам олиндики, u ва v сонлар ҳақиқий ва шунинг учун тенгликнинг чап қисми мусбат. Бу тенгликдан ва (2) тенгликларнинг биринчисидан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$u^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$v^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Квадрат илдизлар чиқариб, u учун бир-биридан ишораси билан фарқ қилувчи иккита қийматга, шунингдек, v учун ҳам иккита қийматга эга бўламиз. Бу қийматларнинг ҳаммаси ҳақиқий бўлади, чунки квадрат илдизлар a ва b ҳар қандай бўлганда ҳам мусбат сонлардан чиқарилади. u ва v учун ҳосил қилинган қийматларни ўзаро ихтиёрий равишда комбинациялаш мумкин эмас, чунки (2) тенгликларнинг иккинчисига кўра uv кўпайтманинг ишораси b нинг ишораси билан бир хил бўлиши керак. Бу эса u ва v ларнинг қийматларини мумкин бўлган иккита комбинациясини, яъни α соннинг квадрат илдизини қиймати бўлиши мумкин бўлган $u+vi$ кўринишдаги иккита сонни беради; бу сонлар бир-биридан ишоралари билан фарқ қилади. Содда, бироқ узундан-узоқ текшириш (ҳосил қилинган сонларни $b > 0$ бўлган ҳол учун ва $b<0$ бўлган ҳол учун алоҳида квадратга кўтариш ёрдамида текшириш) биз топган сонлар ҳақиқатан ҳам α сондан олинган квадрат илдизнинг қийматлари эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, *комплекс сондан илдиз чиқариш ҳар доим мумкин ва у бир-биридан ишора билан фарқ қиладиган иккита қиймат беради.*

Хусусан, энди манфий ҳақиқий сондан ҳам квадрат илдиз чиқариш мумкин бўлиб қолади, бунда бу илдизнинг қийматлари соф мавҳум бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $a < 0$ ва $b = 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{a^2 + b^2} = -a$ бўлади, чунки бу илдиз мусбат бўлиши керак, у ҳолда $u^2 = \frac{1}{2}(a - a) = 0$, яъни $u = 0$, бу ердан $\sqrt{a} = \pm vi$.

Мисол. $\alpha = 21 - 20i$ бўлсин. У ҳолда $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{441 + 400} = 29$. Шунинг учун $u^2 = \frac{1}{2}(21 + 29) = 25$, $v^2 = \frac{1}{2}(-21 + 29) = 4$, бу ердан $u = \pm 5$, $v = \pm 2$, b манфий бўлганлиги сабабли u ва v нинг ишоралари турлича бўлиши керак, шунинг учун

$$\sqrt{21 - 20i} = \pm (5 - 2i).$$

$a + bi$ кўринишда берилган комплекс сонлардан иккинчи даражага қараганда юқорироқ даражали илдизлар чиқаришга уриниш енгиб бўлмайдиган қийинчиликларни келтириб чиқаради Масалан, юқоридаги усул бўйича $a + bi$ сондан куб илдиз чиқармоқчи бўлсак, у ҳолда бирорта ёрдамчи учинчи даражали тенгламани ечишимиз керак бўлади, ваҳоланки, ҳозирча бундай тенгламаларни ечишни билмаймиз ва 38-§ да кўрамизки, бу эса ўз навбатида комплекс сондан куб илдиз чиқаришни талаб этади. Иккинчи томондан, комплекс соннинг тригонометрик шакли исталган тартибли илдиз чиқариш учун жуда қулай ва ундан фойдаланиб бу масалани ҳозир тўла ҳал қиламиз.

$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ сондан n-даражали илдиз чиқариш керак бўлсин. Буни бажариш мумкин ва натижада $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ сон ҳосил бўлади деб фараз қилайлик, яъни

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

У ҳолда Муавр формуласига кўра $\rho^n = r$, яъни $\rho = \sqrt[n]{r}$, бу ерда ўнг томонда мусбат ҳақиқий сон r дан олинган n-даражали илдизнинг бир қийматли аниқланган мусбат қиймати турибди. Иккинчи томондан, (3) тengликнинг чап қисмини аргументи $n\theta$ дан иборат Бироқ $n\theta$ бурчак φ га тенг деб айтиб бўлмайди, чунки бу бурчаклар аслида бир-биридан 2π соннинг бирорта бутун каррали қўшилувчисига фарқ қилишлари мумкин Шунинг учун $n\theta = \varphi + 2k\pi$, бу ерда k—бутун сон, бундан

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Аксинча, агар $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ сонни оладиган бўлсак, у ҳолда исталган бутун мусбат ёки манфий k ларда бу соннинг n-даражаси α га тенг бўлади. Шундай қилиб,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \qquad (4)$$

k га турли қийматлар бериб, ҳар доим ҳам изланаётган илдизнинг турли қийматларини ҳосил қила бермаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \qquad (5)$$

бўлганда илдизнинг n та қийматини ҳосил қиламиз, уларнинг ҳаммаси турлича бўлади, чунки k ни биттага орттириш аргументнинг $\frac{2\pi}{n}$ га ортишига сабаб бўлади. Энди k ихтиёрий бўлсин. Агар $k = nq + r$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(nq + r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

яъни аргументнинг бизнинг k даги қиймати аргументнинг $k=r$ даги қийматидан 2π га каррали бўлган сонга фарқ қилади: бинобарин, илдизнинг $k=r$ бўлгандаги каби қийматини, яъни (5) системага кирувчи қийматни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, α *комплекс сондан ҳар доим n-даражали илдиз чиқариш мумкин ва натижада n та турли қийматлар ҳосил бўлади. n-даражали илдизнинг барча қийматлари радиуси $\sqrt[n]{|\alpha|}$ га тенг ва маркази ноль нуқтада бўлган айланада жойлашган бўлиб, улар бу айланани n та тенг бўлакка бўлади.*

Хусусан, α ҳақиқий соннинг n-даражали илдизи ҳам n та турли қийматга эга; α нинг ишорасига ва n нинг жуфт-тоқлигига қараб бу қийматларнинг иккитаси, биттаси ҳақиқий бўлади ёки бирортаси ҳам ҳақиқий бўлмайди.

Мисоллар.

$$1)\ \beta = \sqrt[8]{2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right);$$

$$k = 0:\quad \beta_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$k = 1:\quad \beta_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right);$$

$$k = 2:\quad \beta_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

$$2)\quad \beta=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2};$$

$$\beta_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\ \beta_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\beta_0.$$

$$3)\quad \beta=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right);$$

$$\beta_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3};$$

$$\beta_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2;$$

$$\beta_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3},$$

Бирнинг илдизлари. 1 сонидан n- даражали илдиз чиқариш ҳоли айниқса муҳимдир. Бу илдиз n та қийматга эга бўлиб, уларнинг барчаси ёки, бошқача қилиб айтганда, *бирдан олинган n- даражали илдизларнинг* барчаси $1=\cos 0+i\sin 0$ тенгликка ва (4) формулага кўра ушбу формула орқали берилади:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{6}$$

1 дан олинган n- даражали илдизнинг ҳақиқий қийматлари (6) формуладан, агар n жуфт бўлса, $k=0$ ва $\frac{n}{2}$ бўлганда, агар n тоқ бўлса, $k=0$ бўлганда ҳосил бўлади. Комплекс текисликда бирнинг n- даражали илдизлари бирлик айланада жойлашган бўлиб, уни бир-бирига тенг бўлган n та ёйга ажратади; ана шундай бўлиш нуқталардан бири 1 сонидир. Бу ердан, бирнинг n- даражали илдизлари ичида ҳақиқий бўлмаганлари ҳақиқий ўққа нисбатан симметрик жойлашганлиги, яъни жуфт-жуфти билан қўшма эканлиги келиб чиқади. Бирнинг квадрат илдизи иккита қийматга эга: 1 ва -1, тўртинчи даражали илдизи эса тўртта қийматга эга: 1, -1, i ва $-i$. Келгусида зарур бўлиб қолишини назарда тутиб, бирнинг *куб илдизларини* билиб қўйиш фойдалидир. Улар, (6) га кўра, $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ (бу ерда $k=0,\ 1,\ 2$) сонлар, яъни бирнинг ўзидан ташқари ўзаро қўшма бўлган

$\varepsilon_0=1$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \varepsilon_2&=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

сонлардан иборатдир.

α комплекс соннинг n- даражали барча илдизларини бу илдизларнинг бирортасини бирнинг n- даражали ҳамма илдизларига кўпайтириб чиқиш билан ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, α соннинг n- даражали илдизларидан бири β бўлсин, яъни $\beta^n = \alpha$, ε эса 1 дан олинган n- даражали илдизнинг ихтиёрий қиймати бўлсин, яъни $\varepsilon^n = 1$. Унда $(\beta\varepsilon)^n = \beta^n\varepsilon^n = \alpha$, яъни $\beta\varepsilon$ ҳам $\sqrt[n]{\alpha}$ нинг қийматларидан бири бўлади. β ни 1 дан олинган n- даражали илдизларнинг ҳар бирига кўпайтириб, α соннинг n- даражали илдизининг n та турли қийматини, яъни бу илдизнинг барча қийматларини ҳосил қиламиз.

Мисоллар. 1) -8 нинг куб илдизларидан бири -2. Қолган иккитаси (7) га кўра, ушбу сонлардан иборат бўлади:

$-2\varepsilon_1 = 1 - i\sqrt{3}$ ва $-2\varepsilon_2 = 1 + i\sqrt{3}$ [юқоридаги 3) мисолга қаранг].

2) $\sqrt[4]{81}$ тўртта қийматга эга: $3, -3, 3i, -3i$.

Бирнинг n- даражали иккита илдизининг кўпайтмаси яна бирнинг n- даражали илдизидир. Дарҳақиқат, агар $\varepsilon^n = 1$ ва $\eta^n = 1$ бўлса,у ҳолда $(\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n\eta^n = 1$ бўлади. Сўнгра *бирнинг n- даражали илдизига тескари сон ҳам бирнинг n-* даражали илдизи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\varepsilon^n = 1$ бўлсин. У ҳолда $\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1$ дан $\varepsilon^n \cdot (\varepsilon^{-1})^n = 1$, яъни $(\varepsilon^{-1})^n = 1$ келиб чиқади. Умуман, *бирнинг n- даражали илдизининг ҳар қандай даражаси яна бирнинг n- даражали илдизи бўлади.*

Бирнинг k- даражали ҳар қандай илдизи k га каррали бўлган ҳар қандай l учун ҳам бирнинг l- даражали илдизи бўлади. Бу ердан, агар бирнинг n- даражали барча илдизлари тўпламини қараб чиқадиган бўлсак,у ҳолда бу илдизларнинг баъзилари n нинг бўлувчилари бўлган бирор n' лар учун бирнинг n'- даражали илдизлари бўлишлиги келиб чиқади. Бироқ ҳар қандай n учун бирнинг n- даражали шундай илдизлари мавжудки, улар бирнинг n дан кичик даражали ҳеч қандай илдизи бўла олмайди. Бундай илдизлар бирнинг n- даражали *бошланғич илдизлари* дейилади. Уларнинг мавжуд эканлиги (6) формуладан келиб чиқади: агар илдизнинг берилган k нинг қийматига мос келувчи қийматини ε_k орқали (демак, $\varepsilon_0 = 1$ бўлади) белгиласак, у ҳолда Муавр формуласи (1) га асосан,

$$\varepsilon_1^k = \varepsilon_k.$$

Бинобарин, ε_1 нинг n дан кичик ҳеч қандай даражаси 1 га тенг бўлмайди, яъни $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{\pi} + i\sin\frac{2\pi}{\pi}$ бошланғич илдиз бўлади.

Бирнинг n- даражали ε илдизининг ε^k, $k=0, 1, \ldots, n-1$ даражалари ҳар хил, яъни улар бирнинг n- даражали барча илдизларини ташкил этганда ва фақат шундагина ε бошланғич илдиз бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар ε нинг кўрсатилган барча даражалари ҳар хил бўлса, у ҳолда равшанки ε бирнинг n- даражали бошланғич илдизи бўлади. Агар, масалан, $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$ бўлганда $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ бўлса, $\varepsilon^{l-k} = 1$ бўлиб, $1 \leqslant l-k \leqslant n-1$ тенгсизликларга биноан ε илдиз бошланғич бўлмайди.

Юқорида топилган ε_1 сон, умумий ҳолда, ягона n- даражали бошланғич илдиз эмас. Барча бундай илдизларини топиш учун қуйидаги теорема хизмат қилади.

Агар ε бирнинг n- даражали бошланғич илдизи бўлса, у ҳолда k сон n билан ўзаро туб бўлганда ва фақат шундагина ε^k сон n- даражали бошланғич илдиз бўлади

Ҳақиқатан ҳам, k ва n ларнинг энг катта умумий бўлувчиси d бўлсин. Агар $d>1$ ва $k=dk'$, $n=dn'$ бўлса, у ҳолда

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1,$$

яъни ε^k илдиз бирнинг n'- даражали илдизи экан.

Иккинчи томондан, айтайлик, $d=1$ ва шу билан бирга ε^k сон бирнинг m- даражали $(1 \leqslant m < n)$ илдизи бўлсин. Демак,

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1.$$

ε сон бирнинг n- даражали бошланғич илдизи бўлгани сабабли, яъни фақатгина унинг n га каррали бўлган даражаларигина 1 га тенг бўлгани учун km сон n га каррали бўлади. Бироқ $1 \leqslant m < n$ бўлгани учун k ва n сонлар ўзаро туб бўла олмайди. Бу эса шартимизга зиддир.

Шундай қилиб, бирнинг n-даражали бошланғич илдизлари сони n дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган мусбат бутун k ларнинг сонига тенг. Одатда $\varphi(n)$ орқали белгиланадиган бу соннинг ифодасини сонлар назариясининг исталган курсидан топиш мумкин

Агар p туб сон бўлса, у ҳолда бирнинг ўзидан ташқари ана шу илдизлар бирнинг p- даражали бошланғич илдизлари бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, бирнинг тўртинчи даражали илдизлари ичида бошланғич илдизлар 1 ва -1 эмас, балки i ва $-i$ бўлади.

БЕШИНЧИ БОБ

КЎПҲАДЛАР ВА УЛАРНИНГ ИЛДИЗЛАРИ

20-§. Кўпҳадлар устида амаллар

Китобнинг дастлабки икки бобининг мазмуни, чунончи детерминантлар назарияси ва чизиқли тенгламалар системалари назарияси мактаб алгебра курсининг бир номаълумли биринчи даражали битта тенгламасидан бошлаб, икки ва уч номаълумли биринчи даражали, мос равишда, иккита ва учта тенглама системасига олиб борувчи йўналишнинг бевосита ривожланиши натижасидир. Элементар алгебрадаги (у ерда яна ҳам муҳимроқ эътиборга молик бўлган) бошқа бир йўналиш биринчи даражали бир номаълумли тенгламадан яна бир номаълумли ихтиёрий квадрат тенгламага, сўнгра учинчи ва тўртинчи даражали тенгламаларнинг баъзи бир хусусий типларига ўтишдан иборат эди. Бу йўналиш олий алгебранинг бир номаълумли исталган n-даражали ихтиёрий тенгламаларни ўрганишга бағишланган каттагина ва сермазмун бўлимига айланади. Алгебранинг тарихан энг дастлабки бўлимларидан бўлган бу қисмига мазкур боб ва китобнинг кейинги баъзи боблари таалluқлидир.

n-даражали (n — бирор бутун мусбат сон) тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1)$$

Бу тенгламанинг a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n коэффициентларини ихтиёрий комплекс сонлар деб ҳисоблаймиз, шу билан бирга *бош коэффициент* a_0 нолдан фарқли бўлиши керак.

Агар (1) тенглама ёзилган бўлса, у ҳолда доимо уни ечиш талаб этилади деб фараз қилинади. Бошқача айтганда, x номаълум учун шундай сон қийматлар топиш талаб этиладики, улар бу тенгламани қаноатлантирсин, яъни уларни номаълумнинг ўрнига қўйгандан ва кўрсатилган барча амалларни бажаргандан сўнг (1) тенгламанинг чап томони нолга тенг бўлсин.

Бироқ (1) тенгламани ечиш масаласини бу тенгламанинг чап томони

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (2)$$

ни текширишнинг умумий масаласи билан алмаштириш мақсадга мувофиқдир. (2) ифода *x номаълумнинг n-даражали кўпҳади* (ёки *полиноми*) дейилади. Бу терминларнинг биринчисини танлаймиз; энди кўпҳад деб фақат (2) кўринишдаги ифодага айтилишини, яъни элементар алгебрада бўлганидек бирҳадларнинг исталган йиғиндиси эмас, балки x номаълумнинг бирор сонли коэффициентлар билан олинган манфий бўлмаган бутун даражалари йиғиндиси айтилишини қатъий ёдда тутиш керак. Хусусан, номаълум x ни манфий ёки каср кўрсаткичлар билан ўз ичига олган кўпҳадларни, масалан, $2x^2 - \frac{1}{x} + 3$, ёки $ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1} + d + ex + fx^2$, ёки $x^{\frac{1}{2}} + 1$ ларни кўпҳадлар деб ҳисобламаймиз. Кўпҳадларни қисқача ёзиш учун $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ ва ҳоказо символлардан фойдаланилади.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларда номаълумнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлар тенг бўлса, бу кўпҳадлар *тенг* (ёки *айнан тенг*) деб ҳисобланади. Жумладан, ҳеч бўлмаганда битта коэффициенти нолдан фарқли бўлган кўпҳад нолга тенг бўлиши мумкин эмас, шунинг учун n-даражали тенгламаларнинг (1) ёзувидаги тенглик белгисини ҳозир аниқланган кўпҳадлар тенглигига ҳеч қандай алоқаси йўқ. Кўпҳадларни боғловчи „=“ белгисини бундан буён бу кўпҳадларнинг айнан тенглиги маъносида тушуниш керак.

Шундай қилиб, n-даражали (2) кўпҳадга ўзининг a_0, a_1, ... ,a_n (бу ерда $a_0 \neq 0$) коэффициентлари билан тўла аниқланадиган бирорта формал ифода деб қараш керак. Бу сўзларнинг аниқ маъноси анча кейин, 10- бобда очиб берилади. Кўпҳаднинг (2) кўринишдаги, яъни x номаълум даражаларининг камайиб бориш тартиби кўринишдаги ёзувидан ташқари яна бошқа ёзувлари ҳам бўлиши мумкинлигини айтиб ўтайлик. Улар (2) дан қўшилувчиларнинг ўринларини алмаштириш ёрдамида ҳосил қилинади, масалан, номаълумнинг ўсиб борувчи даражалари бўйича ёзув бунга мисол бўлиши мумкин.

Албатта, (2) кўпҳадга математик анализ нуқтаи назаридан ҳам қараш мумкин, яъни уни комплекс ўзгарувчи x нинг комплекс функцияси деб ҳисоблаш мумкин. Бироқ шуни назарда тутиш керакки, иккита функциянинг қийматлари x ўзгарувчининг барча қийматларида тенг бўлган ҳолдагина, бу функциялар тенг деб ҳисобланади. Юқорида келтирилган формал алгебраик маънода ўзаро тенг бўлган иккита кўпҳад x нинг функциялари сифатида ҳам ўзаро тенг бўлишлари равшан. Бунинг акси 24-§ да исбот қилинади. Бу айтилганлардан кейин коэффициентлари сонлардан иборат бўлган кўпҳад тушунчасига алгебраик ва назарий функционал нуқтаи назарлар тенг кучли бўлиб қолади, шундай бўлса-да, ҳозирча ҳар гал кўпҳад тушунчасига қандай маъно берилаётганлигини кўрсатишимиз керак. Ушбу параграфда ва келгуси икки параграфда кўпҳад тушунчасига формал-алгебраик ифода сифатида қараймиз.

Исталган n натурал сон учун n-даражали кўпҳад мавжуд бўлиши тушунарли. Мумкин бўлган ана шундай барча кўпҳадларни қарар эканмиз, биринчи, иккинчи, учинчи ва ҳоказо даражали кўпҳадлардан бўлак, *нолинчи даражали кўпҳадларга*, яъни нолдан фарқли комплекс сонларга ҳам дуч келамиз. Ноль сони ҳам кўпҳад деб ҳисобланади; у даражаси аниқланмаган ягона кўпҳаддир.

Ҳозир коэффициентлари комплекс сонлардан иборат бўлган кўпҳадлар учун қўшиш ва кўпайтириш амалларини аниқлаймиз. Бу амаллар ўқувчига элементар алгебра курсидан маълум бўлган ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар устида бажариладиган амаллар сингари киритилади.

Агар комплекс коэффициентли $f(x)$ ва $q(x)$ кўпҳадлар берилган бўлиб, улар қулайлик учун x нинг ўсиб борувчи даражалари бўйича ёзилган бўлса:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_n \neq 0,$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{s-1}x^{s-1} + b_sx^s \ , b_S \neq 0$$

ва, масалан, $n \geqslant s$ бўлса, у ҳолда уларнинг *йиғиндиси* деб қуйидаги

$$f(x) + q(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$$

кўпҳадга айтилади. Бу кўпҳаднинг коэффициентлари $f(x)$ ва $q(x)$ кўпҳадларнинг номаълумнинг бир хил даражалари олдида турган коэффициентларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$c_i = a_i + b_i, \ i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

шу билан бирга $n > s$ бўлганда $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$ коэффициентларни нолга тенг деб ҳисоблаш керак. Агар $n > s$ бўлса, йиғиндининг даражаси n га тенг бўлади, бироқ $n = s$ да у тасодифан n дан кичик бўлиб қолиши мумкин, чунончи $b_n = -a_n$ бўлган ҳолда шундай бўлади.

$f(x)$ ва $q(x)$ кўпҳадларнинг *кўпайтмаси* деб ушбу

$$f(x) \cdot q(x) = d_0 + d_1x + \ldots + d_{n+s-1}x^{n \cdot s-1} + d_{n+s}x^{n+s}$$

кўпҳадга айтилади. Унинг коэффициентлари қуйидагича аниқланади:

$$d_i = \sum_{k \pm l = i} a_k b_l, \ i = 0, 1, \ldots, n + s - 1, \ n + s, \tag{4}$$

яъни d_l коэффициент $f(x)$ ва $q(x)$ кўпҳадларнинг индекслари йиғиндиси l га тенг бўлган коэффициентларининг кўпайтмаси ва барча бундай кўпайтмаларнинг йиғиндисига тенг; хусусан, $d_0 = a_0 b_0$, $d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots, d_{n+s} = a_n b_S$. Охирги тенгликдан $d_{n+s} \neq 0$ тенглик келиб чиқади, шунинг учун *иккита кўпҳад кўпайтмасининг даражаси бу кўпҳадлар даражаларининг йиғиндисига тенг.*

Бу ердан, *нолдан фарқли кўпҳадларнинг кўпайтмаси ҳеч қачон нолга тенг бўлмаслиги* келиб чиқади.

Кўпҳадлар учун киритилган амаллар қандай хоссаларга эга? Қўшишнинг коммутативлик ва ассоциативлиги бу хоссаларнинг сонларни қўшиш учун тўғрилигидан дарҳол келиб чиқади, чунки номаълумнинг ҳар бир даражаси олдидаги коэффициентлар алоҳида-алоҳида қўшилади. Айириш амали ҳам бажарилар экан: ноль ролини кўпҳадлар қаторига киритилган ноль сони ўйнайди, юқорида ёзилган $f(x)$ кўпҳад учун эса қарама-қарши кўпҳад қуйидагича бўлади:

$$-f(x) = -a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n.$$

Кўпайтиришнинг коммутативлиги сонларни кўпайтиришнинг коммутативлигидан ва кўпҳадларни кўпайтиришга берилган таърифда ҳар иккала $f(x)$ ва $q(x)$ кўпайтувчиларнинг коэффициентлари бутунлай тенг ҳуқуқ билан олиниш фактидан келиб чиқади. Кўпайтиришнинг ассоциативлиги қуйидагича исботланади: агар юқорида ёзилган $f(x)$ ва $g(x)$ дан ташқари яна

$$h(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{t-1} x^{t-1} + c_t x^t, \ c_t \neq 0$$

кўпҳад ҳам берилган бўлса, у ҳолда $[f(x)\ g(x)]\ h(x)$ кўпайтмада x^l, $i = 0, l, \ldots, n + s + t$ олдидаги коэффициент бўлиб,

$$\sum_{j+m=l} \Big(\sum_{k+l=j} a_k b_l \Big) c_m = \sum_{k+l+m=l} a_k b_l c_m$$

сон, $f(x)\,[g(x)\,h(x)]$ кўпайтмада эса юқоридаги сонга тенг бўлган

$$\sum_{k+j=l} a_k \Big(\sum_{l+m=j} b_l c_m \Big) = \sum_{k+l+m=l} a_k b_l c_m$$

сон хизмат қилади.

Ниҳоят, дистрибутивлик қонунининг ўринли эканлиги

$$\sum_{k\pm l=l} (a_k + b_k)\, c_l = \sum_{k+l=l} a_k c_l + \sum_{k+l} b_k c_l$$

тенгликдан келиб чиқади, чунки бу тенгликнинг чап томони x^l нинг $[f(x)+g(x)]\,h(x)$ кўпҳаддаги коэффициенти бўлиб, унинг ўнг томони эса ўша даражали номаълумнинг, яъни x^l нинг $f(x)\,h(x)+q(x)\,h(x)$ кўпҳаддаги коэффициентидир.

Кўпҳадларни кўпайтиришда бир ролини нолинчи даражали кўпҳад деб қаралувчи 1 сони ўйнашини айтиб ўгайлик. Иккинчи томондан, $f(x)$ *нолинчи даражали кўпҳад бўлганда ва фақат шундагина, тескари кўпҳад* $f^{-1}(x)$ *га эга бўлиб,*

$$f(x)\,f^{-1}(x)=1 \tag{5}$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ нолдан фарқли a сондан иборат бўлса, у ҳолда a^{-1} сон унинг учун тескари кўпҳад бўлади. Агар $f(x)$ нинг даражаси $n\geqslant 1$ бўлиб, $f^{-1}(x)$ кўпҳад мавжуд бўлганда эди, у ҳолда (5) тенгликнинг чап томони даражаси n дан кичик бўлмаган бир пайтда, шу тенгликнинг ўнг томонида нолинчи даражали кўпҳад турган бўлар эди.

Бу ердан келиб чиқадики, *кўпҳадларни кўпайтиришга тескари бўлган амал — бўлиш амали мавжуд эмас.* Шу жиҳатдан комплекс коэффициентли барча кўпҳадлар ҳамма бутун сонлар системасини эслатади. Бу ўхшашлик яна шундан ҳам кўринадики, кўпҳадлар учун ҳам бутун сонлар сингари қолдиқли бўлиш алгоритми мавжуддир. Бу алгоритм ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар бўлган ҳол учун китобхонга элементар алгебра курсиданоқ маълум. Бироқ комплекс коэффициентли кўпҳадлар бўлган ҳолни текшираётганлигимиз учун шуларга тегишли барча таърифларни беришимиз ва исботларни келтиришимиз зарур.

Ихтиёрий $f(x)$ *ва* $g(x)$ *кўпҳадлар учун шундай* $q(x)$ *ва* $r(x)$ *кўпҳадлар топиш мумкинки, ушбу*

$$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x) \tag{6}$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $r(x)$ *нинг даражаси* $g(x)$ *нинг даражасидан кичик ёки* $r(x)=0$ *бўлади. Бу шартни қаноатлантирувчи* $q(x)$ *ва* $r(x)$ *кўпҳадлар бир қийматли аниқланади.*

Дастлаб теореманинг иккинчи қисмини исбот қиламиз. Айтайлик,

$$f(x)=g(x)\,\bar{q}(x)+\bar{r}(x) \tag{7}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\bar{q}(x)$ ва $\bar{r}(x)$ кўпҳадлар ҳам мавжуд бўлсин, шу билан бирга $\bar{r}(x)$ нинг даражаси яна $g(x)$ нинг даражасидан кичик бўлсин[1]. (6) ва (7) тенгликларнинг ўнг томонларини бир-бирига тенглаб, топамиз:

$$g(x)[q(x)-\bar{q}(x)]=\bar{r}(x)-r(x).$$

---

[1] Ёки $\bar{r}(x)=0$. Бундан буён бу ҳолни айгиб ўтилмайди.

Бу тенглик ўнг томонининг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан кичик, чап томонининг даражаси эса $q(x)-\bar{q}(x)\neq 0$ бўлганда $g\ x)$ нинг даражасидан катта ёки унга тенг бўлар эди. Шунинг учун $q(x)-\bar{q}(x)=0$, яъни $q(x)=\bar{q}(x)$ бўлиши керак, у ҳолда $r(x)=\bar{r}(x)$ бўлади. Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Теореманинг биринчи қисмини исботлашга ўтамиз. $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг даражалари мос равишда n ва s бўлсин. Агар $n<s$ бўлса, у ҳолда $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$ дейиш мумкин. Агар $n\geqslant s$ бўлса, у ҳолда элементар алгебрада номаълум даражаларининг камайиб бориш тартибида жойлашган ҳақиқий коэффициентли кўпҳадларни бўлиш қандай бажарилган бўлса, шундай усулдан фойдаланамиз.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0,$$
$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_{s-1}x+b_s,\ b_0\neq 0$$

берилган бўлсин.

$$f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x)=f_1(x) \qquad (8)$$

деб фараз қилиб, даражаси n дан кичик бўлган кўпҳадни ҳосил қиламиз. Бу даражани n_1 орқали $f_1(x)$ кўпҳаднинг юқори ҳадини эса a_{10} орқали белгилаймиз. Сўнгра ҳали ҳам $n_1\geqslant s$ бўлса,

$$f_1(x)-\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}g(x)=f_2(x) \qquad (8_1)$$

деб фараз қиламиз. $f_2(x)$кўпҳаднинг даражасини n_2 орқали, юқори ҳадини эса a_{20} орқали белгилаймиз. Сўнгра

$$f_2(x)-\frac{a_{20}}{b_0}x^{n_2-s}g(x)=f_8(x) \qquad (8_2)$$

деб фараз қиламиз ва ҳоказо.

$f_1(x)$, $f_2(x)$. . . кўпҳадларнинг даражалари камайиб борганлиги ($n>n_1>n_2>\ldots$) сабабли, чекли сондаги қадамдан сўнг, n_k даражаси s дан кичик бўлган шундай $f_k(x)$ кўпҳадга келамизки,

$$f_{k-1}(x)-\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}g(x)=f_k(x) \qquad (8_{k-1})$$

бўлиб, юқоридаги процесс ана шу ерда тўхтайди. Энди (8), (8_1), . . ., (8_{k-1}) тенгликларни қўшиб,

$$f(x)-\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}\right)g(x)=f_k(x)$$

ни ҳосил қиламиз, яъни

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s},$$

$$r(x) = f_k(x)$$

кўпҳадлар ҳақиқатан ҳам (6) тенгликни қаноатлантиради, шу билан бирга $r(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан ҳақиқатан ҳам кичик.

$q(x)$ кўпҳад $f(x)$ ни $g(x)$ га бўлишдан чиққан *бўлинма*, $r(x)$ эса бу бўлишдан ҳосил бўлган *қолдиқ* деб аталишини эслатиб ўтайлик.

Қолдиқли бўлишнинг кўриб чиқилган алгоритмидан, *агар $f(x)$ ва $g(x)$ лар ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар бўлса, у ҳолда барча $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ кўпҳадларнинг коэффициентлари, шу сабабли бўлинма $q(x)$ нинг ҳам, қолдиқ $r(x)$ нинг ҳам коэффициентлари ҳақиқий бўлишлиги* осонгина келиб чиқади.

21-§. Бўлувчилар. Энг катта умумий бўлувчи

Комплекс коэффициентли нолга тенг бўлмаган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳадлар берилган бўлсин. Агар $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га бўлишдан чиққан қолдиқ нолга тенг бўлса, яъни бошқача айтганда, $f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ га *бўлинса* (ёки *қолдиқсиз бўлинса*), у ҳолда $\varphi(x)$ кўпҳад $f(x)$ нинг *бўлувчиси* дейилади.

Ушбу

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x) \tag{1}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\psi(x)$ кўпҳад мавжуд бўлганда ва фақат шундагина, $\varphi(x)$ кўпҳад $f(x)$ нинг бўлувчиси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\varphi(x)$ кўпҳад $f(x)$ учун бўлувчи бўлса, у ҳолда $\psi(x)$ сифатида $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га бўлишдан чиққан бўлинмани олиш керак. Аксинча, (1) тенгликни қаноатлантирувчи $\psi(x)$ кўпҳад мавжуд бўлсин дейлик. Аввалги параграфда

$$f(x) = \varphi(x)\,q(x) + r(x)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $q(x)$ ва $r(x)$ кўпҳадларнинг ягоналигидан ва $r(x)$ нинг даражаси $\varphi(x)$ нинг даражасидан кичик деган шартга кўра, мазкур ҳолда $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га бўлишдан чиққан бўлинма $\psi(x)$ га тенг, қолдиқ эса нолга тенг.

Равшанки, агар (1) тенглик ўринли бўлса у ҳолда $\psi(x)$ ҳам $f(x)$ учун бўлувчи бўлади. Сўнгра $\varphi(x)$ нинг даражаси $f(x)$ никидан юқори бўлмаслиги равшан.

Шуни қайд қилиб ўтайликки, агар $f(x)$ кўпҳад ва унинг бўлувчиси $\varphi(x)$ иккаласи рационал ёки ҳақиқий коэффициентларга эга бўлсалар, у ҳолда $\psi(x)$ кўпҳад ҳам рационал ёки мос равишда, ҳақиқий коэффициентларга эга бўлади, чунки у бўлиш алгоритми ёрдамида изланяпти. Албатта, рационал ёки ҳақиқий коэффициентли кўпҳад шундай бўлувчиларга эга бўлиши мумкинки, уларнинг ҳамма коэффициентлари ҳам рационал ёки, мос равишда, ҳақиқий бўлавермайди. Бунга қуйидаги тенглик мисол бўлади:

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Кўпҳадлар бўлинишининг келгусида жуда кўп татбиқларда керак бўладиган баъзи бир асосий хоссаларини келтирамиз

I. *Агар $f(x)$ кўпҳад $g(x)$ га бўлинса, $g(x)$ эса $h(x)$ га бўлинса, у ҳолда $f(x)$ ҳам $h(x)$ га бўлинади.*

Ҳақиқатан ҳам, шартга кўра $f(x) = g(x)\varphi(x)$ ва $g(x) = h(x)\psi(x)$, шунинг учун $f(x) = h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$.

II. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар $\varphi(x)$ га бўлинса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси ва айирмаси ҳам $\varphi(x)$ га бўлинади.*

Ҳақиқатан ҳам $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ ва $g(x) = \varphi(x)\chi(x)$ тенгликлардан $f(x) \pm g(x) = \varphi(x)[\psi(x) \pm \chi(x)]$ келиб чиқади.

III. *Агар $f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ га бўлинса, у ҳолда $f(x)$ нинг ихтиёрий $g(x)$ кўпҳадга кўпайтмаси ҳам $\varphi(x)$ га бўлинади.*

Дарҳақиқат, агар $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)g(x) = \varphi(x)[\psi(x)g(x)]$ бўлади.

II ва III дан қуйидаги хосса келиб чиқади:

IV. *Агар $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ кўпҳадларнинг ҳар бири $\varphi(x)$ га бўлинса, у ҳолда*

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \ldots + f_k(x)g_k(x)$$

кўпҳад ҳам $\varphi(x)$ га бўлинади, бу ерда $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x)$ — ихтиёрий кўпҳадлар.

V. *Ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад исталган нолинчи даражали кўпҳадга бўлинади.*

Дарҳақиқат, агар $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ бўлиб, c эса нолга тенг бўлмаган ихтиёрий сон бўлса, яъни нолинчи даражали ихтиёрий кўпҳад бўлса, у ҳолда

$$f(x) = c\left(\frac{a_0}{c}x^n + \frac{a_1}{c}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{c}\right).$$

VI. *Агар $f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ га бўлинса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $c\varphi(x)$ га ҳам бўлинади, бу ерда c — нолдан фарқли ихтиёрий сон.*

Дарҳақиқат, $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ тенгликдан $f(x) = [c\varphi(x)] \times [c^{-1}\psi(x)]$ тенглик келиб чиқади.

VII. *$cf(x)$ $(c \neq 0)$ кўпҳадлар ва фақат шуларгина, $f(x)$ кўпҳаднинг даражалари $f(x)$ ники билан бир хил бўлган бўлувчилари бўлади.*

Дарҳақиқат, $f(x) = c^{-1}[cf(x)]$, яъни $f(x)$ кўпҳад $cf(x)$ га бўлинади.

Иккинчи томондан, агар $f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ га бўлинса, шу билан бирга $f(x)$ ва $\varphi(x)$ ларнинг даражалари бир хил бўлса, у ҳолда $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га бўлишдан чиққан бўлинманинг даражаси нолга тенг бўлиши керак, яъни $f(x) = d\varphi(x)$, $d \neq 0$, бундан $\varphi(x) = d^{-1}f(x)$.

Бу ердан қуйидаги хосса келиб чиқади:

VIII. $g(x) = cf(x)$ $(c \neq 0)$ *бўлганда ва фақат шундагина,* $f(x)$, $g(x)$ *кўпҳадлар бир вақтда бир-бирларига бўлинадилар.*

Ниҳоят, VIII ва I дан ушбу хосса келиб чиқади:

IX. $f(x)$ *ва* $cf(x)$ *(бу ерда* $c \neq 0$*) кўпҳадлардан бирининг ҳар қандай бўлувчиси иккинчи кўпҳад учун ҳам бўлувчи бўлади.*

Энг-катта умумий бўлувчи. Ихтиёрий $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар берилган бўлсин. Агар $\varphi(x)$ кўпҳад $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг ҳар қайсиси учун бўлувчи бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ бу кўпҳадларнинг *умумий бўлувчиси* дейилади. V хоссадан (юқорига қаранг) $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг умумий бўлувчилари қаторига барча нолинчи даражали кўпҳадлар ҳам кириши келиб чиқади. Агар бу иккала кўпҳаднинг бошқа умумий бўлувчилари бўлмаса, улар *ўзаро туб* дейилади.

Умумий ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар x га боғлиқ бўлган бўлувчиларга эга бўлиши мумкин; ҳозир бу кўпҳадларнинг *энг катта* умумий бўлувчиси тушунчасини киритамиз.

$f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси уларнинг энг юқори даражали умумий бўлувчисидир деб таърифлаш ноқулай бўлиб чиқар эди. Чунки бир томондан биз ҳозирча $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар бир-биридан нолинчи даражали кўпайтувчилари билангина эмас, балки бошқа кўпайтувчилари билан ҳам фарқ қиладиган кўпгина турли хил энг катта умумий бўлувчиларга эга бўладими, йўқмилигини, яъни бу таъриф жуда ҳам кўп ноаниқликка эга бўлиш-бўлмаслигини билмаймиз. Иккинчи томондан, ўқувчи элементар арифметикада бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш масаласи билан танишган ва 12 ҳамда 18 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси 6, бу сонларнинг умумий бўлувчилари ичида фақат энг каттаси бўлибгина қолмай, ҳатто уларнинг ихгиёрий бошқа бир умумий бўлувчисига ҳам бўлинишини билади; ҳақиқатан ҳам, 12 ва 18 сонларининг бошқа умумий бўлувчилари қуйидаги сонлар бўлади: 1, 2, 3, —1, —2, —3, —6.

Шу сабабли кўпҳадлар бўлган ҳол учун қуйидаги таърифни қабул қиламиз:

Нолдан фарқли $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг *энг катта умумий бўлувчиси* деб шундай $d(x)$ кўпҳадга айтиладики, у берилган кўпҳадларнинг умумий бўлувчиси бўлиши билан бирга ўзи ҳам бу кўпҳадларнинг исталган бошқа бир умумий бўлувчисига бўлинади. $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг умумий бўлувчиси $(f(x), g(x))$ символ орқали белгиланади.

Бу таъриф ихтиёрий $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар учун энг катта умумий бўлувчи мавжудми ёки йўқми деган саволни очиқ қолдиради. Қуйида ана шу саволга ижобий жавоб берилади. Шу билан бирга берилган кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини амалда топиш усули ҳам берилади. Табиийки, бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини одатдаги топиш усулини бу ерда татбиқ қила олмаймиз, чунки ҳозирча кўпҳадларга нисбатан бутун сонларни туб кўпайтувчилар кўпайтмасига ёйишга ўхшаш усулни қўллана олмаймиз. Бироқ бутун сонлар учун *кетма-кет бўлиш алгоритми* ёки *Евклид алгоритми* деб аталувчи бошқа бир усул мавжуд; ана шу усулни кўпҳадлар учун ҳам бемалол қўллаш мумкин.

Кўпҳадлар учун Евклид алгоритми қуйидагидан иборат. $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар берилган бўлсин. $f(x)$ ни $g(x)$ га бўламиз ва, умуман айтганда, бирор $r_1(x)$ қолдиқни ҳосил қиламиз. Сўнгра $g(x)$ ни $r_1(x)$ га бўламиз ва $r_2(x)$ қолдиқни ҳосил қиламиз, $r_1(x)$ ни $r_2(x)$ га бўламиз ва ҳоказо. Қолдиқларнинг даражалари доимо пасайиб борганлиги сабабли, кетма-кет бўлишнинг бу занжирида шундай жойга келишимиз керакки, ўша ерда бўлиш қолдиқсиз бажарилади ва шунинг учун процесс тўхтайди. $f(x)$ ва $g(x)$ *кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси шундай* $r_k(x)$ *қолдиқ бўладики, ундан олдин келувчи* $r_{k-1}(x)$ *қолдиқ бу қолдиққа бутун (қолдиқсиз) бўлинади.*

Буни исботлаш учун юқоридаги абзацда баён қилинганларни тенгликларнинг қуйидаги занжири кўринишида ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\,q_1(x) + r_1(x),\\
g(x) &= r_1(x)\,q_2(x) + r_2(x),\\
r_1(x) &= r_2(x)\,q_3(x) + r_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{k-3}(x) &= r_{k-2}(x)\,q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)\,q_k(x) + r_k(x),\\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)\,q_{k+1}(x).
\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Охирги тенглик $r_k(x)$ қолдиқ $r_{k-1}(x)$ учун бўлувчи бўлишини кўрсатади. Бу ердан, охиргисидан олдинги тенгликнинг ўнг томонидаги иккала қўшилувчи ҳам $r_k(x)$ бўлиниши келиб чиқади, шунинг учун $r_k(x)$ қолдиқ $r_{k-2}(x)$ учун ҳам бўлувчи бўлади. Сўнгра шу йўл билан юқорига кўтарила бориб, $r_k(x)$ қолдиқ $r_{k-3}(x), \ldots, r_2(x), r_1(x)$ лар учун ҳам бўлувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ердан, иккинчи тенгликка кўра $r_k(x)$ қолдиқ $g(x)$ учун ҳам, шу сабабли биринчи тенгликка кўра $f(x)$ учун ҳам бўлувчи эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $r_k(x)$ қолдиқ $f(x)$ ва $g(x)$ лар учун умумий бўлувчи бўлади.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг ихтиёрий умумий бўлувчиси $\varphi(x)$ ни олайлик. (2) даги биринчи тенгликнинг чап томони ва ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи $\varphi(x)$ га бўлинганлиги сабабли $r_1(x)$ ҳам $\varphi(x)$ га бўлинади. Иккинчи ва кейинги тенгликларга ўтиб, худди шундай усул билан, $r_2(x)$, $r_3\ x)$ . . . кўпҳадлар ҳам $\varphi(x)$ га бўлинишини кўрамиз Ниҳоят, агар $r_{k-2}(x)$ ва $r_{k-1}(x)$ лар $\varphi(x)$ га бўлиниши исбот қилинган бўлса, у ҳолда охиргисидан олдинги тенгликдан $r_k(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ га бўлинишини кўрамиз. Шундай қилиб, $r_k(x)$ ҳақиқатан ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ лар учун энг катта умумий бўлувчи бўлар экан.

Шундай қилиб, иккита кўпҳад энг катта умумий бўлувчига эга бўлишини исботладик ва уни топиш усулини ҳосил қилдик. Бу усул, агар $f(x)$ *ва $g(x)$ кўпҳадларнинг ҳар иккаласи рационал ёки ҳақиқий коэффициентларга эга бўлса, у ҳолда уларнинг энг катта умумий бўлувчисининг коэффициентлари ҳам рационал ёки мос равишда, ҳақиқий бўлишини* кўрсатади. Аммо бу кўпҳадларнинг шундай бўлувчилари ҳам мавжуд бўлиши мумкинки, уларнинг ҳамма коэффициентлари ҳам рационал (ҳақиқий) бўлавермайди, албатта. Масалан, коэффициентлари рационал бўлган

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6,\quad g\ x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$$

кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси рационал коэффициентли $x^2 - 2$ кўпҳаддан иборат бўлиши билан бир қаторда, берилган кўпҳадларнинг коэффициентларининг баъзилари рационал бўлмаган умумий бўлувчиси $x - \sqrt{2}$ ҳам мавжуд.

Агар $d(x)$ кўпҳад $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда VIII ва IX хоссаларнинг (юқорига қаранг) кўрсатишича, бу кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси сифатида cdx (бу ерда c—нолдан фарқли ихтиёрий сон) кўпҳадни ҳам олиш мумкин. Бошқача сўз билан айтганда, *иккита кўпҳаднинг энг катта бўлувчиси нолинчи даражали кўпайтувчи аниқлигидагина аниқланган.* Шу сабабли, иккита кўпҳаднинг энг катта умумий бўлувчисини юқори коэффициенти ҳар доим бирга тенг бўлади деб шартлашиб олиш мумкин. Бу шартлашувдан фойдаланиб, қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: *иккита кўпҳаднинг энг катта умумий бўлувчиси бирга тенг бўлганда ва фақат шундагина, бу кўпҳадлар ўзаро туб бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, ўзаро туб бўлган иккита кўпҳаднинг энг катта умумий бўлувчиси сифатида нолдан фарқли исталган сонни олиш мумкин, бироқ уни тескари элементга кўпайтириб, бирни ҳосил қиламиз.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, \quad g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг.

Коэффициентлари бутун сонлардан иборат кўпҳадларга Евклид алгоритмини қўллар эканмиз, каср коэффициентлар билан иш кўрмаслик учун бўлинувчини нолдан фарқли исталган сонга кўпайтириш ёки бўлувчини қисқартириш мумкин. Буни кетма-кет бўлишнинг бирор пайтидангина эмас, балки бўлиш процесси давомида ҳам амалга ошириш мумкин. Албатта, бу бўлинмага таъсир қилмай қолмайди, бироқ бизни қизиқтирадиган қолдиқлар фақат нолинчи даражали бирорта кўпайтувчигагина ўзгарадилар, бунга эса, маълумки, энг катта умумий бўлувчини топишда йўл қўйиш мумкин. Аввал $f(x)$ ни 3 га кўпайтириб олиб, $f(x)$ ни $g(x)$ га бўламиз:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9 & 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ \underline{3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3x\phantom{{}-9}} & \overline{\quad x + 1 \quad} \\ -x^3 - 5x^2 - 9x - 9 & \end{array}$$

(— 3 га кўпайтирамиз)

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 15x^2 + 27x + 27 \\ \underline{3x^3 + 10x^2 + 2x - 3} \\ 5x^2 + 25x + 30 \end{array}$$

Шундай қилиб, 5 га қисқартиргандан сўнг биринчи қолдиқ $r_1(x) = x^2 + 5x + 6$ бўлади. $g(x)$ ни унга бўламиз:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & x^2 + 5x + 6 \\ \underline{3x^3 + 15x^2 + 18x\phantom{{}-3}} & \overline{\quad 3x - 5 \quad} \\ -5x^2 - 16x - 3 & \\ \underline{-5x^2 - 25x - 30} & \\ 9x + 27. & \end{array}$$

Демак, иккинчи қолдиқ 9 га қисқартирилгандан сўнг, $r_2(x) = x + 3$ бўлади. $r_1(x) = r_2(x)(x + 2)$ бўлгани учун $r_2(x)$ бу қолдиққа ундан олдин келувчи қолдиқ бутун бўлинадиган сўнгги қолдиқдир. Бинобарин, у изланаётган энг катта умумий бўлувчидир:

$$(f(x), g(x)) = x + 3.$$

Евклид алгоритмидан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

Агар $d(x)$ кўпҳад $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда шундай $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадларни топиш мумкинки,

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x) \tag{3}$$

бўлади. Бунда агар $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг даражалари нолдан катта бўлса, у ҳолда $u(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан кичик деб, $v(x)$ нинг даражаси эса $f(x)$ нинг даражасидан кичик деб ҳисоблаш мумкин.

Теореманинг исботи (2) тенгликларга асосланади. Агар $r_k(x) = d(x)$ эканлигини ҳисобга олсак ва $u_1(x) = 1$, $v_1(x) = -q_k(x)$ десак, (2) нинг охиридан олдинги тенглигидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d(x) = r_{k-2}(x)\,u_1(x) + r_{k-1}(x)\,v_1(x).$$

Бу ерга $r_{k-1}(x)$ нинг $r_{k-3}(x)$ ва $r_{k-2}(x)$ орқали ифодасини (2) тенгликдан келтириб қўйсак,

$$d(x) = r_{k-3}(x)\,u_2(x) + r_{k-2}(x)\,v_2(x)$$

ҳосил бўлади, бу ерда $u_2(x) = v_1(x)$, $v_2(x) = u_1(x) - v_1(x)\,q_{k-1}(x)$ эканлиги равшан. (2) тенгликлар бўйлаб юқорига томон ҳаракатлана борсак, пировардида (3) тенгликка келамиз.

Теоремадаги иккинчи даъвони исбот қилиш учун (3) тенгликни қаноатлантирувчи $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадлар топилган, бироқ масалан, $u(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан катта ёки унга тенг деб фараз қиламиз. $u(x)$ ни $g(x)$ га бўламиз:

$$u(x) = g(x)\,q(x) + r(x),$$

(бу ерда $r(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан кичик) ва бу ифодани (3) га қўямиз. Қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$f(x)\,r(x) + g(x)\,[v(x) + f(x)\,q(x)] = d(x).$$

$f(x)$ ёнида турган кўпайтувчининг даражаси энди $g(x)$ нинг даражасидан кичик бўлади. Квадрат қавс ичида турган кўпҳаднинг даражаси ўз навбатида $f(x)$ нинг даражасидан кичик бўлади, чунки акс ҳолда чап томондаги иккинчи қўшилувчининг даражаси $g(x)\,f(x)$ кўпайтманинг даражасидан кичик бўлмас эди ва биринчи қўшилувчининг даражаси бу кўпайтма даражасидан кичик бўлганлиги сабабли, чап томоннинг (ҳаммасининг) даражаси $g(x)\,f(x)$ нинг даражасидан катта ёки унга тенг бўлган бўлар эди. Ваҳоланки, фаразимизга кўра $d(x)$ кўпҳад $g(x)\,f(x)$ нинг даражасидан кичик даражага эга.

Теорема исбот бўлди. Шу билан бирга, агар $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар рационал ёки ҳақиқий коэффициентларга эга бўлса, у ҳолда (3) тенгликни қаноатлантирувчи $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадларни шундай танлаб олиш мумкинки, уларнинг коэффициентлари рационал ёки мос равишда, ҳақиқий бўлади деган хулосани чиқара оламиз.

Мисол. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 10$, $g(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 14$ бўлганда (3) тенгликни қаноатлантирадиган $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадларни топайлик.

Бу кўпҳадларга Евклид алгоритмини қўллаймиз, бироқ энди бу ерда бўлиш пайтида бўлинмаларни ўзгаришига йўл қўйиш мумкин эмас, чунки бу бўлинмалар $u(x)$ ва $v(x)$ ларни топишда ишлатилади Ушбу тенгликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$f(x) = g(x) + (-7x^2 + 12x + 4);$$

$$g(x) = (-7x^2 + 12x + 4)\left(-\frac{1}{7}x - \frac{54}{49}\right) + \frac{235}{49}(x - 2);$$

$$-7x^2 + 12x + 4 = (x - 2)(-7x - 2)$$

Бу ердан $(f(x), g(x)) = x - 2$ ва

$$u(x) = \frac{7}{235}x + \frac{54}{235}, \quad v(x) = -\frac{7}{235}x - \frac{5}{235}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ҳозиргина исбот қилинган теоремани ўзаро туб кўпҳадларга татбиқ этиб ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1 \qquad (4)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $u(x)$ *ва* $v(x)$ *кўпҳадларни топиш мумкин бўлганда ва фақат шу ҳолдагина,* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *кўпҳадлар ўзаро туб бўлади.*

Бу натижага таяниб, ўзаро туб кўпҳадлар ҳақида бир неча содда, аммо муҳим теоремаларни исботлаш мумкин.

а) *агар* $f(x)$ *кўпҳад* $\varphi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *кўпҳадларнинг ҳар бири билан ўзаро туб бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *уларнинг кўпайтмаси билан ҳам ўзаро туб бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, (4) га асосан шундай $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадлар мавжудки,

$$f(x)u(x) + \varphi(x)v(x) = 1$$

бўлади. Бу тенгликни $\psi(x)$ га кўпайтириб,

$$f(x)[u\,x)\psi(x)] + [\varphi(x)\psi(x)]v(x) = \psi(x)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан $f(x)$ ва $\varphi(x)\psi(x)$ ларнинг ҳар қандай умумий бўлувчиси $\psi(x)$ учун ҳам бўлувчи бўлишлиги келиб чиқади; бироқ шартга кўра $(f(x), \psi(x)) = 1$;

б) *агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *кўпҳадларнинг кўпайтмаси* $\varphi(x)$ *га бўлинса, аммо* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *ўзаро туб бўлса, у ҳолда* $g(x)$ *кўпҳад* $\varphi(x)$ *га бўлинади.*

Ҳақиқатан ҳам,

$$f(x)u(x) + \varphi(x)v(x) = 1;$$

тенгликни $g(x)$ га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$[f(x)g(x)]u(x) + \varphi(x)[v(x)g(x)] = g(x).$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги иккала қўшилувчи $\varphi(x)$ га бўлинади; бинобарин, $\varphi(x)$ га $g(x)$ ҳам бўлинади.

в) *агар* $f(x)$ *кўпҳад ўзаро туб бўлган* $\varphi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *кўпҳадларнинг ҳар қайсисига бўлинса, у ҳолда* $f(x)$ *уларнинг кўпайтмасига ҳам бўлинади.*

Ҳақиқатан ҳам, $f(x) = \varphi(x)\bar{\varphi}(x)$, шу сабабли ўнг томонда турган кўпайтма $\psi(x)$ га бўлинади. Шунинг учун, б) га мувофиқ $\bar{\varphi}(x)$ кўпҳад $\psi(x)$ га бўлинади. $\bar{\varphi}(x) = \psi(x)\bar{\psi}(x)$, бу ердан $f(x) = [\varphi(x)\psi(x)]\bar{\psi}(x)$.

Энг катта умумий бўлувчи тушунчасини ихтиёрий чекли сондаги кўпҳадлар системаси учун ҳам тарқатиш мумкин: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ кўпҳадларнинг *энг катта умумий бўлувчиси* деб бу кўпҳадларнинг шундай умумий бўлувчисига айтиладики, у ана шу кўпҳадларнинг исталган бошқа бир бўлувчисига бўлинади. Ихтиёрий чекли сондаги кўпҳадлар системаси учун энг катта умумий бўлувчининг мавжудлиги уни ҳисоблашга имкон берадиган ушбу теоремадан келиб чиқади: $f_1(x), f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ $f_{s-1}(x)$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси билан $f_s(x)$ кўпҳаднинг энг катта умумий бўлувчисига **тенг.**

Ҳақиқатан ҳам, $s = 2$ да теорема тўғри. Шу сабабли уни $s - 1$ учун тўғри деб ҳисоблаймиз, яъни хусусан $f_1(x)_1, f_2(x)$, $\ldots, f_{s-1}(x)$ кўпҳадлар учун энг катта умумий бўлувчи $d(x)$ мавжуд эканлиги исботланган деб ҳисоблаймиз. $\bar{d}(x)$ орқали $d(x)$ ва $f_s(x)$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини белгилаймиз. У, равшанки, берилган барча кўпҳадлар учун умумий бўлувчи бўлади. Иккинчи томондан, бу кўпҳадларнинг бошқа ҳар қандай умумий бўлувчиси $d(x)$ учун ва демак, $\bar{d}(x)$ учун ҳам бўлувчи бўлади.

Хусусан, агар $f_1(x), f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ кўпҳадларнинг умумий бўлувчиси фақат нолинчи даражали кўпҳадлар бўлса, яъни уларнинг энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг бўлса, берилган кўпҳадлар системаси *ўзаро туб* дейилади. Агар $s > 2$ бўлса, бу кўпҳадлар жуфт-жуфти билан ўзаро туб бўлмаслиги ҳам мумкин.

Масалан, $f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, $g(x) = x^2 - x - 20$, $h(x) = x^3 + x^2 - 12x$ кўпҳадлар системаси ўзаро туб, бироқ

$$(f(x), g(x)) = x - 5, \ (f(x), h(x)) = x - 3, \ (g(x), h(x)) = x + 4.$$

Китобхон ўзаро туб кўпҳадлар ҳақида юқорида исбот қилинган *а*) — *в*) теоремаларни ихтиёрий чекли сондаги кўпҳадлар учун ҳам осонгина умумлаштириши мумкин.

22-§. Кўпҳадларнинг илдизлари

Биз 20-§ да кўпҳад тушунчасига назарий-функционал нуқтаи назардан қараганимизда кўпҳаднинг қийматлари билан танишган эдик. У ерда берилган таърифни эслатамиз.

Агар

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

бирор кўпҳад, c эса бирор сон бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг (1) ифодасида x номаълумни c сон билан алмаштириб ва кўрсатилган барча амалларни бажаргандан сўнг ҳосил қилинадиган

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_n$$

сон $f(x)$ *кўпҳаднинг* $x=c$ *даги қиймати* дейилади. Агар $f(x) = g(x)$ тенглик кўпҳадларнинг 20-§ да аниқланган алгебраик маънодаги тенглиги бўлса, у ҳолда c ҳар қандай бўлганда ҳам $f(c) = g(c)$. Шунингдек, агар

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \qquad \psi(x) = f(x)g(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\varphi(c)=f(c) + g(c), \qquad \psi(c) = f(c)g(c)$$

эканлигини кўриш осон. Бошқача айтганда, кўпҳадларни 20-§ да аниқланган қўшиш ва кўпайтириш кўпҳадга назарий функционал нуқтаи назардан қараганда функцияларни қўшиш ва кўпайтиришга айланиб, у ана шу функцияларнинг мос қийматларини қўшиш ёки кўпайтириш маъносида тушунилади.

Агар $f(x) = 0$ бўлса, яъни кўпҳад ундаги номаълум ўрнига c сон қўйилганда нолга айланса, c сон $f(x)$ кўпҳаднинг (ёки $f(x) = 0$ тенгламанинг) *илдизи* дейилади. Бу тушунча кўпҳадларнинг бундан олдинги параграфда ўрганилган бўлиниш назариясига бутунлай тегишли эканлигини ҳозир кўрсатамиз.

Агар $f(x)$ кўпҳадни биринчи даражали ихтиёрий кўпҳадга (ёки бундан буён атаганимиздек, *чизиқли кўпҳадга*) бўлсак, у ҳолда қолдиқ ё нолинчи даражали бирорта кўпҳад, ёки ноль бўлади, яъни ҳар ҳолда бирорта r сон бўлади. Қуйидаги теорема бу қолдиқни, $f(x)$ кўпҳад $x-c$ кўринишдаги кўпҳадга бўлинаётган ҳолда, бўлишнинг ўзини бажармасдан туриб топишга имкон беради.

$f(x)$ кўпҳадни $x-c$ чизиқли кўпҳадга бўлишдан чиққан қолдиқ $f(x)$ кўпҳаднинг $x=c$ даги қиймати $f(c)$ га тенг.

Ҳақиқатан ҳам,

$$f(x) = (x-c)q(x) + r$$

бўлсин. $x=c$ да бу тенгликнинг ҳар иккала томонида қуйидаги қийматларни ҳосил қиламиз:

$$f(c) = (c-c)q(c) + r = r,$$

бу эса теоремани исботлайди.

Бу ердан қуйидаги жуда ҳам муҳим натижа келиб чиқади: *$f(x)$ кўпҳад $x-c$ га бўлинганда, ва фақат шундагина, c сон $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлади.*

Иккинчи томондан, агар $f(x)$ биринчи даражали бирорта $ax+b$ кўпҳадга бўлинса, равшанки, у $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$ кўпҳадга ҳам, яъни $x-c$ кўринишдаги кўпҳадга ҳам бўлинади. Шундай қилиб, *$f(x)$ кўпҳаднинг илдизларини излаш унинг чизиқли бўлувчиларини излашга тенг кучлидир.*

Юқорида айтилганига кўра, $f(x)$ кўпҳадни $x-c$ чизиқли иккиҳадга бўлишнинг кўпҳадларни бўлишнинг умумий алгоритмига қараганда анча содда қуйидаги усули қизиқиш туғдиради. Бу усул Горнер усули дейилади. Айтайлик,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n \tag{2}$$

ва

$$f(x)=(x-c)q(x)+r \tag{3}$$

бўлсин, бу ерда

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}.$$

(3) да x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$\begin{aligned}a_0&=b_0.\\ a_1&=b_1-cb_0,\\ a_2&=b_2-cb_1,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n-1}&=b_{n-1}-cb_{n-2}\\ a_n&=r-cb_{n-1}.\end{aligned}$$

Бу ердан $b_0=a_0$, $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=1,2,\ldots,n-1$ эканлиги келиб чиқади, яъни b_k коэффициент ундан олдин келувчи b_{k-1} коэффициентни c га кўпайтириш ва мос a_k коэффициентни қўшиш билан ҳосил қилинади; ниҳоят, $r=cb_{n-1}+a_n$, яъни $f(c)$ га тенглиги бизга маълум бўлган r қолдиқ ҳам шу қонун бўйича ҳосил қилинади. Шундай қилиб, бўлинма ва қолдиқнинг коэффициентларини қуйидаги мисоллардаги каби схема бўйича жойлашадиган бир хилдаги ҳисоблашлар ёрдамида кетма-кет ҳосил қилиш мумкин

1. $f(x)=2x^5-x^4-3x^3+x-3$ ни $x-3$ га бўлинг. $f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари чизиқнинг устида, бўлинма ва қолдиқнинг кетма-кет ҳисоблаб топилувчи мос коэффициентлари чизиқнинг тагида, чап ён томонда эса c нинг берилган мисолдаги қиймати турадиган жадвал тузамиз:

$$\begin{array}{r|llllll} & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3\\ \hline 3 & 2, & 3\cdot1-1=5, & 3\cdot5-3=12, & 3\cdot12+0=36, & 3\cdot36+1=109, & 3\cdot109-3=324\end{array}$$

Шундай қилиб, изланаётган бўлинма

$$q(x)=2x^4+5x^3+12x^2+36x+109,$$

қолдиқ эса $r=f(3)=324$ бўлади.

2. $f(x)=x^4-8x^3+x^2+4x-9$ ни $x+1$ га бўлинг.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -8 & 1 & 4 & -9 \\ \hline -1 & 1 & -9 & 10 & -6 & -8 \end{array}$$

Шунинг учун бўлинма

$$q(x)=x^3-9x^2+10x-6,$$

қолдиқ эса $r=f(-1)=-3$ бўлади.

Горнер усулидан номаълумнинг берилган қийматида функциянинг қийматини тез ҳисоблаш учун ҳам фойдаланиш мумкинлиги бу мисоллардан кўриниб турибди.

Каррали илдизлар. Агар c сон $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, яъни $f(c)=0$ бўлса, бизга маълумки, $f(x)$ кўпҳад $x-c$ га бўлинади. Шундай бўлиб қолиши мумкинки, $f(x)$ кўпҳад $x-c$ чизиқли иккиҳаднинг фақат биринчи даражасига эмас, балки унинг юқорироқ даражаларига ҳам бўлинади. Ҳар ҳолда шундай натурал k сон топиладики, $f(x)$ кўпҳад $(x-c)^k$ га бутун (қолдиқсиз) бўлинади, аммо $(x-c)^{k+1}$ га бўлинмайди. Шунинг учун

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x),$$

бу ерда $\varphi(x)$ кўпҳад энди $x-c$ га бўлинмайди, яъни c унинг илдизи бўлмайди. k сон c илдизнинг $f(x)$ кўпҳаддаги *карралилиги* дейилиб, c илдизнинг ўзи эса бу кўпҳаднинг k *каррали илдизи* дейилади. Агар $k=1$ бўлса, c илдиз *оддий* дейилади.

Каррали илдиз тушунчаси кўпҳаднинг ҳосиласи тушунчаси билан чамбарчас боғланган. Бироқ биз коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлар бўлган кўпҳадларни ўрганамиз ва шунинг учун математик анализ курсида киритилган ҳосила тушунчасидан бевосита фойдалана олмаймиз. Қуйида айтилганларни кўпҳад ҳосиласининг анализ курсига боғлиқ бўлмаган таърифи деб қараш керак.

Коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлар бўлган n-даражали

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

кўпҳад берилган бўлсин. Унинг *ҳосиласи* (ёки *биринчи ҳосиласи*) деб $(n-1)$-даражали

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

кўпҳадга айтилади. Нолинчи даражали кўпҳаднинг ва нолнинг ҳосиласи нолга тенг деб ҳисобланади. $f(x)$ кўпҳаднинг биринчи ҳосиласидан олинган ҳосила унинг *иккинчи ҳосиласи* дейилади ва $f''(x)$ орқали белгиланади ва ҳоказо.

Ушбу

$$f^{(n)}(x)=n!\,a_0$$

тенгликнинг тўғрилиги равшан, шунинг учун $f^{(n+1)}(x)=0$, яъни *n-даражали кўпҳаднинг $(n+1)$-ҳосиласи нолга тенг.*

Комплекс коэффициентли кўпҳадлар билан иш кўрилаётган ушбу ҳолда ҳосиланинг анализ курсида ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар учун исботланган хоссаларидан фойдалана олмаймиз ва шу сабабли ҳосилага юқорида берилган таърифдангина фойдаланиб, бу хоссаларни яна исбот қилишимиз керак. Бизни йиғинди ва кўпайтма учун дифференциаллаш формулалари деб аталувчи қуйидаги хоссалар қизиқтиради:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x), \tag{4}$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x). \tag{5}$$

Бу формулаларни бевосита ҳисоблаш орқали текшириш мумкин. Бунинг учун $f(x)$ ва $g(x)$ сифатида ихтиёрий иккита кўпҳад олиб, ҳосилага юқорида берилган таърифни қўллаш керак; буни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

(5) формула кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли сон бўлган ҳол учун ҳеч бир қийинчиликсиз умумлаштирилади ва шу сабабли одатдаги усул билан даражанинг ҳосиласи формуласи

$$(f^k(x))'=kf^{k-1}(x)f'(x) \tag{6}$$

ҳам келтириб чиқарилиши мумкин. Қуйидаги теоремани исботлашни олдимизга мақсад қилиб қўяйлик:

Агар c сон $f(x)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлса, у ҳолда $k>1$ бўлганда у $f(x)$ кўпҳаддан олинган биринчи ҳосиланинг $k-1$ каррали илдизи бўлади; агар $k=1$ бўлса, у ҳолда c сон $f'(x)$ учун илдиз бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам,

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x), \quad k\geqslant 1 \tag{7}$$

бўлсин, бу ерда $\varphi(x)$ кўпҳад $x-c$ га энди бўлинмайди. (8) тенгликни дифференциаллаб, топамиз:

$$f'(x)=(x-c)^k\varphi'(x)+k(x-c)^{k-1}\varphi(x)=$$
$$=(x-c)^{k-1}[(x-c)\varphi'(x)+k\varphi(x)].$$

Квадрат қавс ичида турган йиғиндининг биринчи қўшилувчиси $x-c$ га бўлинади, иккинчиси эса $x-c$ га бўлинмайди; шунинг учун бутун йиғиндининг $x-c$ га бўлиниши мумкин эмас. $f'(x)$ ни $(x-c)^{k-1}$ га бўлишдан чиққан бўлинма бир қийматли аниқланганлигини назарда тутиб, $x-c$ иккиҳаднинг $f'(x)$ кўпҳад бўлинадиган энг катта даражаси $(x-c)^{k-1}$ эканлигини ҳосил қиламиз, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Бу теоремани бир неча марта қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз: *$f(x)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бу кўпҳаднинг s-ҳосиласида $k-s$ каррали бўлади ($k\geqslant s$) ва $f(x)$ нинг k-ҳосиласи учун биринчи марта илдиз бўлмайди.*

23- §. Асосий теорема

Бундан олдинги параграфда кўпҳадларнинг илдизлари билан шуғулланар эканмиз, ҳар қандай кўпҳад ҳам илдизга эга бўлавередими деган савол қўймадик. Коэффициентлари ҳақиқий бўлиб, ҳақиқий илдизга эга бўлмаган кўпҳадлар мавжудлиги бизга маълум; x^2+1—ана шундай кўпҳадлардан бири. Ҳатто комплекс сонлар ичида ҳам илдизга эга бўлмаган (айниқса, агар коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлардан иборат кўпҳадлар қаралаётган бўлса) кўпҳадлар мавжуд деб кутиш мумкин. Агар шундай бўлиб чиққанда эди, комплекс сонлар системасини кенгайтиришга тўғри келар эди. Шундай бўлсада, аслида, ушбу теорема—комплекс сонлар алгебрасининг асосий теоремаси ўринлидир.

Даражаси бирдан кичик бўлмаган исталган сон коэффициентли ҳар қандай кўпҳаднинг ҳеч бўлмаганда битта, умумий ҳолда комплекс илдизи бўлади.

Бу теорема математиканинг энг катта ютуқларидан бири ҳисобланади ва фаннинг хилма-хил соҳаларида татбиқ қилинади. Хусусан, коэффициентлари сонлардан иборат бўлган кўпҳадларнинг келгуси назарияси шу теоремага асосланган ва шунинг учун ҳам илгари (баъзида ҳозир ҳам) бу теорема „олий алгебранинг асосий теоремаси“ деб аталар эди. Аслида эса асосий теорема соф алгебраик эмас. Унинг барча исботлари (уни дастлаб XVIII асрнинг охирида исбот қилган Гауссдан кейин бундай исботлар жуда кўплаб топилди) ҳақиқий ва комплекс сонларнинг топологик хоссаларидан, яъни узлуксизлик билан боғлиқ бўлган хоссалардан озми-кўпми фойдаланишга мажбурдир.

Қуйида келтириладиган исботда комплекс коэффициентли $f(x)$ кўпҳад комплекс ўзгарувчи x нинг комплекс функцияси сифатида қаралади. Демак, x ихтиёрий комплекс қийматларни қабул қилиши мумкин, яъни бошқача айтганда, комплекс сонларни қуришнинг 17-§ да баён қилинган усули ҳисобга олинса, x ўзгарувчи *комплекс текисликда* ўзгаради. $f(x)$ функциянинг қийматлари ҳам комплекс сонлар бўлади. Ҳақиқий ўзгарувчининг ҳақиқий функцияларида эркли ўзгарувчининг қийматлари битта сон ўқида (абсциссалар ўқида), функциянинг қийматлари эса бошқа ўқда (ординаталар ўқида) белгилангани каби, бу ерда ҳам функциянинг қийматлари комплекс текисликнинг иккинчи нусхасида белгиланади деб ҳисоблаш мумкин.

Китобхонга математик анализ курсидан маълум бўлган функция узлуксизлигининг таърифи комплекс ўзгарувчининг функцияси учун ҳам сақланади, аммо таърифнинг баёнида абсолют қийматлар модуллар билан алмаштирилади.

Агар ҳар қандай ҳақиқий сон ε учун шундай мусбат ҳақиқий сон δ топиш мумкин бўлсаки, модули $|h| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган h орттирма ҳар қандай (умуман олганда, комплекс) бўлганда ҳам

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, x комплекс ўзгарувчининг $f(x)$ комплекс функцияси x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади. Агар $f(x)$ функция ўзи аниқланган барча x_0 нуқталарда *узлуксиз* бўлса, яъни агар $f(x)$ кўпҳад бўлса, унга бутун комплекс текисликда *узлуксиз* функция дейилади.

$f(x)$ кўпҳад комплекс ўзгарувчи x нинг узлуксиз функциясидир.

Бу теореманинг исботини математик анализ курсида қандай қилинса, шундай олиб бориш мумкин эди, чунончи узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳам узлуксиз эканлигини кўрсатиб ва ҳар доим биргина комплекс сонга тенг бўлган функция узлуксиз бўлишини эътиборга олиб исботлаш мумкин эди. Бироқ биз бошқача йўл тутамиз.

Дастлаб теоремани хусусий ҳолда, чунончи $f(x)$ кўпҳаднинг озод ҳади нолга тенг бўлган ҳолда исботлаймиз, шу билан бирга $f(x)$ нинг фақат $x_0 = 0$ нуқтада узлуксизлигини исбот қиламиз Бошқача айтганда, қуйидаги леммани исбот қиламиз (h ўрнига x ёзамиз):

1-лемма. *Агар $f(x)$ кўпҳаднинг озод ҳади нолга тенг бўлса:*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x,$$

яъни $f(0) = 0$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиш мумкинки, $|x| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x)| < \varepsilon$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$A = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)$$

бўлсин.

ε бизга олдиндан берилган. Агар δ учун

$$\delta = \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}$$

ни оладиган бўлсак, у талаб қилинаётган шартларни қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам,

$$|f(x)| \leqslant |a_0||x|^n + |a_1||x|^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}||x| \leqslant$$
$$\leqslant A(|x|^n + |x|^{n-1} + \ldots + |x|).$$

яъни

$$|f(x)| \leqslant A\frac{|x|-|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

$|x| < \delta$ ва (1) га кўра $\delta < 1$ бўлганлиги сабабли

$$\frac{|x|-|x|^{n+1}}{1-|x|} < \frac{|x|}{1-|x|},$$

шунинг учун

$$|f(x)| < \frac{A|x|}{1-|x|} < \frac{A\delta}{1-\delta} = \frac{A\frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}}{1-\frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}} = \varepsilon,$$

шуни исботлаш талаб этилган эди.

Энди қуйидаги формулани келтириб чиқарамиз. Коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлардан иборат бўлган

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳад берилган бўлсин. Ундаги x ўрнига $x+h$ йиғиндини (бу ерда h—иккинчи номаълум) қўямиз. Ўнг томондаги ҳар бир $(x+h)^k$, $k \leqslant n$ даражани бином формуласи бўйича ёйиб ва h нинг бир хил даражали ҳадларини жамлаб, тўғрилигини китобхон қийинчиликсиз текшира оладиган ушбу

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $f(x+h)$ ни h „орттирманинг“ даражалари бўйича ёйилмасини берадиган *Тейлор формуласини* исбот қилган бўламиз.

Энди ихтиёрий $f(x)$ кўпҳаднинг исталган x_0 нуқтада узлуксизлиги қуйидагича исботланади. Тейлор формуласига кўра

$$f(x_0+h)-f(x_0) = c_1h + c_2h^2 + \ldots + c_nh^n = \varphi(h),$$

бу ерда

$$c_1 = f'(x_0),\ c_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0),\ \ldots,\ c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

h номаълумнинг $\varphi(h)$ кўпҳади озод ҳади бўлмаган кўпҳаддир, шунинг учун 1-леммага кўра ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиш мумкинки, $|h| < \delta$ бўлганда $|\varphi(h)| < \varepsilon$ бўлади, яъни

$$|f(x_0+h)|-f(x_0)| < \varepsilon,$$

шуни исботлаш талаб этилган эди.

18-§ даги (13) формулага асосланган

$$||f(x_0+h)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x_0+h)-f(x_0)|$$

тенгсизликдан ва кўпҳаднинг ҳозир исботланган узлуксизлигидан $f(x)$ кўпҳаднинг *модули* $|f(x)|$ *нинг узлуксиз эканлиги* келиб чиқади; бу модуль, равшанки, комплекс ўзгарувчи x нинг манфий бўлмаган ҳақиқий функциясидир.

Ҳозир асосий теоремани исботлашда ишлатиладиган леммалар исбот қилинади.

Юқори ҳад модули ҳақида лемма. *Агар коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлар бўлган n-даражали* $(n>1)$

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

кўпҳад берилган бўлса ва агар k исталган мусбат ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда x номаълумнинг модуль бўйича етарлича катта қийматларида

$$|a_0x^n|>k|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n| \qquad (2)$$

тенгсизлик ўринлидир, яъни юқори ҳаднинг модули қолган барча ҳадлар йиғиндисининг модулидан катта, шу билан бирга исталганча марта катта бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентлар модулларининг ичида энг каттаси A бўлсин:

$$A=\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

У ҳолда (комплекс сонлар йиғиндиси ва кўпайтмаси модулининг 18-§ даги хоссаларига қаранг)

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n|\leqslant|a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+|a_n|\leqslant A(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\ldots+1)=A\frac{|x|^n-1}{|x|-1}.$$

$|x|>1$ деб,

$$\frac{|x|^n-1}{|x|-1}<\frac{|x|^n}{|x|-1}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n|<A\frac{|x|^n}{|x|-1}.$$

Шундай қилиб, агар x номаълум $|x|>1$ шартдан ташқари яна ушбу

$$kA\frac{|x|^n}{|x|-1}\leqslant|a_0x^n|=|a_0||x|^n$$

тенгсизликни ҳам қаноатлантирса, яъни

$$|x|>\frac{kA}{|a_0|}+1 \qquad (3)$$

бўлса, (2) тенгсизлик бажарилади. (3) тенгсизликнинг ўнг томони 1 дан катта бўлгани учун x нинг бу тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида (2) тенгсизлик бажарилади. Шу билан лемма исботланди.

Кўпҳад модулининг ўсиши ҳақида лемма. *Коэффициентлари комплекс, даражаси бирдан кичик бўлмаган ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад учун ва исталганча катта бўлган ҳар қандай мусбат ҳақиқий M сон учун шундай мусбат ҳақиқий N сон топиш мумкинки, $|x|>N$ бўлганда $|f(x)|>M$ бўлади.*

Айтайлик,

$$f(x = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

бўлсин. 18-§ даги (11) формулага кўра

$$\begin{aligned} |f(x)| = |a_0x^n + (a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)| \geqslant \\ \geqslant |a_0x^n| - |a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|. \end{aligned} \tag{4}$$

$k=2$ деб, юқори ҳад модули ҳақидаги леммани қўллаймиз: шундай N_1 сон мавжудки, $|x|>N_1$ бўлганда

$$|a_0x^n| > 2|a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|$$

бўлади. Бу ердан

$$\left|a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\right| < \frac{1}{2}\left|a_0x^n\right|,$$

яъни (4) га кўра

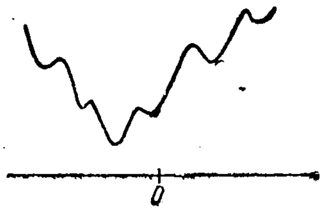
$$|f(x)| > |a_0x^n| - \frac{1}{2}\left|a_0x^n\right| = \frac{1}{2}\left|a_0x^n\right|.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони

$$|x| > N_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$$

бўлганда M дан катта бўлади. Шундай қилиб, $|x| > N = \max(N_1, N_2)$ бўлганда $|f(x)| > M$ бўлади.

Бу лемманинг маъноси қуйидаги геометрик иллюстрация ёрдамида очиб берилиши мумкин. Биз ундан мазкур параграфда бир неча бор фойдаланамиз. Комплекс текисликнинг ҳар қайси x_0 нуқтасида бу текисликка узунлиги (берилган масштаб бирлигида) $f(x)$ кўпҳаднинг шу нуқтадаги қиймати модулига, яъни $|f(x_0)|$ га тенг бўлган перпендикуляр чиқарилган деб фараз қилайлик. Кўпҳад модулининг юқорида исбот қилинган узлуксизлигига кўра перпендикулярларнинг охирлари (учлари) комплекс текисликнинг тепасида жойлашган бирорта узлуксиз эгри чизиқли сирт ташкил этади. Кўпҳад модулининг ўсиши ҳақидаги лемма бу сирт $|x_0|$ ўсганда комплекс текис-



8- расм

ликдан борган сари узоқлашиб боришини кўрсатади. Бундай узоқлашиш, тушунарлики, монотон бўлмайди. 8- расм бу сиртнинг комплекс текисликка перпендикуляр ва 0 нуқтадан ўтувчи текислик билан кесишиш чизиғини схематик тасвирлайди.

Қуйидаги лемма асосий теореманинг исботида муҳим роль ўйнайди:

Даламбер леммаси *Агар n-даражали* $(n \geqslant 1)$ $f(x)$ *кўпҳад* $x = x_0$ *да нолга айланмаса,* $f(x) \neq 0$ *— ва шунинг учун* $|f(x_0)| > 0$ *— у ҳолда умуман комплекс бўлган шундай* h *орттирма топиш мумкинки,*

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|$$

бўлади.

Тейлор формуласига кўра, ҳозирча h орттирма ихтиёрий десак,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

бўлади. Шарт бўйича, x_0 сон $f(x)$ учун илдиз эмас. Бироқ тасодифан бу сон $f'(x)$ учун, шунингдек, бошқа баъзи бир ҳосилалар учун илдиз бўлиб қолиши мумкин. x_0 илдизи бўлмаган энг биринчи ҳосила k- ҳосила бўлсин $(k \geqslant 1)$, яъни

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{k-1}(x_0) = 0, \quad f^k(x_0) \neq 0.$$

Бундай k мавжуд, чунки агар a_0 сон $f(x)$ кўпҳаднинг юқори коэффициенти бўлса, у ҳолда

$$f^{(n)}_{(x_0)} = n!a_0 \neq 0.$$

Шундай қилиб,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) +$$
$$+ \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

$f^{(k+1)}(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)$ сонларнинг баъзилари нолга тенг бўлиши мумкин, бироқ бу биз учун муҳим эмас.

Бу тенгликнинг иккала гомонини шартга кўра нолдан фарқли бўлган $f(x_0)$ га бўлиб ва

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!f(x_0)}, \quad j = k, \ k+1, \ \ldots, \ n$$

белгилашни киритиб,

$$\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} = 1 + c_k h^k + c_{k+1} h^{k+1} + \ldots + c_n h^n$$

ни ёки $c_k \neq 0$ бўлгани учун

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = (1 + c_k h^k) + c_k h^k \left(\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \ldots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Модулларга ўтсак,

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| \leqslant |1 + c_k h^k| + |c_k h^k| \left|\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \ldots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}\right| \tag{5}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шу пайтгача қадар h орттирма тўғрисида ҳеч нарса фараз қилмадик. Энди h ни *танлаб оламиз*, бунда унинг модулини ва аргументини алоҳида-алоҳида танлаймиз. h нинг модули қуйидагича танланади:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \ldots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}$$

h нинг озод ҳадсиз кўпҳади бўлгани учун 1-леммага кўра $\left(\varepsilon = \frac{1}{2}\right.$ деб оламиз$\left.\right)$ шундай δ_1 топиш мумкинки, $|h| < \delta_1$ бўлганда

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \ldots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}\right| < \frac{1}{2} \tag{6}$$

бўлади. Иккинчи томондан

$$|h| < \delta_2 = \sqrt[k]{|c_k|^{-1}}$$

бўлганда

$$|c_k h^k| < 1 \tag{7}$$

бўлади.

h нинг модули

$$|h| < \min(\delta_1, \delta_2) \tag{8}$$

тенгсизлик асосида танланган деб фараз қилайлик. У ҳолда (6) га кўра (5) тенгсизлик қуйидаги қатъий тенгсизликка айланади:

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| < |1 + c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k|; \tag{9}$$

(7) шартдан кейинчалик фойдаланамиз.

h нинг аргументини танлаш учун $c_k h^k$ сон манфий ҳақиқий сон бўлишлигини талаб қиламиз. Бошқача айтганда,

$$\arg(c_k h^k) = \arg c_k + k \arg h = \pi,$$

бу ердан

$$\arg h = \frac{\pi - \arg c_k}{k}. \tag{10}$$

h ни бундай танлашда $c_k h^k$ сон ўзининг абсолют қийматидан ишора бўйича фарқ қилади:

$$c_k h^k = -|c_k h^k|,$$

шунинг учун (7) тенгсизликдан фойдаланиб,

$$|1+c_kh^k| = |1-|c_kh^k|| = 1-|c_kh^k|$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, h ни (8) ва (10) шартлар асосида танлаб олишда (9) тенгсизлик ушбу кўринишга келади:

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| < 1-|c_kh^k| + \frac{1}{2}|c_kh^k| = 1-\frac{1}{2}|c_kh^k|,$$

яъни

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} < 1,$$

бу ердан

$$|(f(x_0+h)| < |f(x_0)|$$

келиб чиқади, бу Даламбер леммасини исботлайди.

Юқорида келтирилган геометрик иллюстрация ёрдамида Даламбер леммасини қуйидагича тушунтириш мумкин. $|f(x_0)|>0$ эканлиги берилган. Бу x_0 нуқтада комплекс текисликка ўтказилган перпендикулярнинг узунлиги нолдан фарқли деган сўз. У ҳолда Даламбер леммасига кўра шундай $x_1 = x_0 + h$ нуқтани топиш мумкинки, $|f(x_1)| < |f(x_0)|$ бўлади, яъни x_1 нуқтадаги перпендикуляр x_0 дагига қараганда қисқароқ бўлади ва демак, перпендикулярларнинг охирларидан ҳосил бўлган сирт бу янги нуқтада комплекс тексликка анча яқин бўлади. Лемманинг исботи h нинг модулини хоҳлаганча кичик қилиб олиш мумкинлигини, яъни x_1 нуқтани x_0 нуқтага истаганча яқин қилиб олиш мумкинлигини кўрсатади; бироқ биз келгусида бу айтилгандан фойдаланмаймиз.

$f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлиб шундай комплекс сонлар (яъни комплекс текисликнинг нуқталари) хизмат қиладики, перпендикулярларнинг охирларидан ҳосил бўлган сирт комплекс текисликка ўша нуқталарда уринади. Даламбер леммасининг ўзигагина таяниб бундай нуқталарнинг мавжудлигини исботлаш мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, бу леммадан фойдаланиб нуқталарнинг шундай чексиз кетма-кетлиги $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ни топиш мумкинки,

$$|f(x_0)| > |f(x_1)| > |f(x_2)| > \ldots \tag{11}$$

бўлади. Бироқ бу ердан $f(\bar{x}) = 0$ бўладиган $\bar{x}$ нуқтанинг мавжудлиги келиб чиқмайди, ундан ташқари, мусбат ҳақиқий сонларнинг камаювчи (11) кетма-кетлиги нолга интилиши ҳеч ҳам шарт эмас.

Келгуси баёнимиз комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясидаги бир теоремага асосланган бўлиб, бу теорема китобхонга математик анализ курсидан маълум бўлган Вейерштрасс теоремасининг умумлашганидир. У комплекс ўзгарувчининг ҳақиқий функцияларига, яъни комплекс ўзгарувчининг ҳақиқий қийматларгина қабул қилувчи функцияларига тегишлидир; бундай функцияларга кўпҳад модули мисол бўлади. Бу теоремани таърифлашда соддалик учун *ёпиқ доира* E ҳақида гапирамиз; ёпиқ доира деганда комплекс текисликнинг барча чегара нуқталари ўзига қўшилган доирани тушунамиз.

Агар комплекс ўзгарувчи x *нинг ҳақиқий* $g(x)$ *функцияси ёпиқ доира* E *нинг барча нуқталарида узлуксиз бўлса, у ҳолда* E *да шундай* x_0 *нуқта мавжудки,* E *дан олинган барча* x *лар учун* $g(x) \geqslant g(x_0)$ *тенгсизлик ўринли бўлади. Бинобарин,* x_0 *нуқта* $g(x)$ *учун* E *доирадаги минимум нуқта бўлади.*

Бу теореманинг исботини комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясига доир барча курслардан топиш мумкин, шу сабабли уни келтирмаймиз.

$g(x)$ функция E доиранинг ҳамма нуқталарида манфий бўлмаган ҳол билан чегараланиб—фақат ана шу ҳол биз учун қизиқиш туғдиради—юқорида фойдаланилган иллюстрация ёрдамида бу теореманинг геометрик маъносини тушунтирамиз. E доиранинг ҳар бир x_0 нуқтасидан $g(x_0)$ узунликдаги перпендикуляр ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг охирлари узлуксиз эгри чизиқли сиртнинг бўлагини ташкил этади, шу билан бирга E доиранинг ёпиқлиги туфайли сиртнинг ана шу бўлаги учун минимум нуқталарининг мавжудлиги геометрик жиҳатдан етарлича ойдинлашади. Бу иллюстрация, албатта, теорема исботининг ўрнини боса олмайди.

Энди асосий теореманинг бевосита исботига ўтишимиз мумкин. n-даражали $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин ($n \geqslant 1$). Агар унинг озод ҳади a_n бўлса, равшанки, $f(0) = a_n$. Бу кўпҳадга, $M = |f(0)| = |a_n|$ деб, кўпҳад модулининг ўсиши ҳақидаги леммани қўллаймиз. Демак, шундай N мавжудки, $|x| > N$ бўлганда $|f(x)| > |f(0)|$ бўлади. Вейерштрасс теоремасининг юқоридагича умумлашмасини, ёпиқ E доирани ҳар қандай танлаб олинганда ҳам, $|f(x)|$ функцияга татбиқ этилиши мумкинлиги равшан. E сифатида маркази 0 нуқтада бўлган N радиусли айлана билан чегараланган ёпиқ доирани оламиз. $|f(x)|$ учун E доирадаги минимум нуқта x_0 бўлсин, у ҳолда, хусусан, $|f(x_0)| \leqslant |f(0)|$ эканлиги келиб чиқади.

x_0 *нуқта аслида* $|f(x)|$ *учун бутун комплекс текисликда минимум нуқта бўлишини* кўриш осон: агар x' нуқта E дан ташқарида ётса, у ҳолда $|x'| > N$ бўлади ва шунинг учун

$$|f(x')| > |f(0)| \geqslant |f(x_0)|.$$

Ниҳоят, бу ердан $f(x_0) = 0$ эканлиги, яъни x_0 нуқта $f(x)$ *учун илдиз бўлишлиги* келиб чиқади; агар $f(x_0) \neq 0$ бўлганда эди, у ҳолда Даламбер леммасига кўра шундай x_1 нуқта мавжуд бўлардики, бу нуқтада $|f(x_1)| < |f(x_0)|$ бўлар эди; бироқ бу x_0 нуқтанинг ҳозиргина тайинланган хоссасига зиддир.

Асосий теореманинг яна бир исботи 55-§ да келтирилишини қайд қилиб ўтамиз.

24-§. Асосий теоремадан келиб чиқадиган натижалар

Коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлар бўлган n-даражали $(n \geqslant 1)$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0 \qquad (1)$$

кўпҳад берилган бўлсин. Биз уни бу ерда ҳам ўзининг коэффициентлари тўплами билан тўла аниқланган формал алгебраик ифода деб қараймиз. Илдизнинг мавжудлиги ҳақида бундан олдинги параграфда исбот қилинган асосий теорема $f(x)$ учун комплекс ёки ҳақиқий α_1 илдиз мавжуд деб айтишга имкон беради. Шу сабабли $f(x)$ кўпҳад

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,\varphi(x)$$

ёйилмага эга. $\varphi(x)$ нинг коэффициентлари ҳам ҳақиқий ёки комплекс сонлардан иборат бўлади, шунинг учун у α_2 илдизга эга, бу ердан

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,\psi(x).$$

Шу йўсинда давом этсак, чекли сондаги қадамдан сўнг n-даражали $f(x)$ кўпҳаднинг n та чизиқли кўпайтувчилар кўпайтмаси шаклидаги ёйилмасига келамиз:

$$f(x) = a_0\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,\ldots\,(x - \alpha_n). \qquad (2)$$

a_0 коэффициент қуйидаги сабабга кўра пайдо бўлди: агар (2) ифоданинг ўнг томонида бирорта b коэффициент турганида эди, у ҳолда қавсларни очгандан сўнг $f(x)$ нинг юқори ҳади bx^n кўринишда бўлар эди, ваҳоланки, аслида (1) га кўра, у a_0x^n бўлиши керак. Шунинг учун $b = a_0$ (2) *ёйилма шу типдаги ёйилма кўпайтувчиларининг тартиби аниқлигида ягонадир.*

Ҳақиқатан ҳам, айтайлик,

$$f(x) = a_0(x - \beta_1)\,(x - \beta_2)\,\ldots\,(x - \beta_n) \qquad (3)$$

ёйилма ҳам ўринли бўлсин (2) ва (3) дан.

$$(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,\ldots\,(x-\alpha_n) = (x-\beta_1)\,(x-\beta_2)\,\ldots\,(x-\beta_n) \qquad (4)$$

тенглик келиб чиқади.

Агар α_i илдиз барча β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ лардан фарқли бўлганда эди, у ҳолда (4) да номаълум ўрнига α_i ни қўйиб, чап томонда ноль, ўнг томонда эса нолдан фарқли сонни ҳосил қилган бўлар эдик. Шундай қилиб, *ҳар қандай α_i илдиз биронта β_j илдизга тенг ва аксинча.*

Бу ердан ҳали (2)-ва (3) ёйилмаларнинг устма-уст тушиши келиб чиқмайди. Ҳақиқатан ҳам, α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ илдизлар орасида бир-бирига тенглари ҳам бўлиши мумкин. Масалан, бу илдизларнинг s таси α_1 га тенг бўлсин ва иккинчи томондан β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ илдизлар ичида α_1 га тенг бўлган t та илдиз мавжуд бўлсин дейлик. $s = t$ эканлигини кўрсатишимиз керак.

Кўпҳадлар кўпайтмасининг даражаси кўпайтувчилар даражалари йиғиндисига тенг бўлганлиги сабабли, нолдан фарқли иккита кўпҳаднинг кўпайтмаси нолга тенг бўлиши мумкин эмас. Бу ердан, агар кўпҳадларнинг иккита кўпайтмаси бир-бирига тенг бўлса, *у ҳолда тенгликнинг иккала томонини умумий кўпайтувчига қисқартириш мумкинлиги* келиб чиқади: агар

$$f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$$

ва $\varphi(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$[f(x) - g(x)]\,\varphi(x) = 0$$

дан $f(x) - g(x) = 0$ келиб чиқади, яъни

$$f(x) = g(x).$$

Буни (4) тенгликка татбиқ этамиз. Масалан, агар $s > t$ бўлса, у ҳолда (4) тенгликнинг иккала томонини $(x-\alpha_1)^t$ кўпайтувчига қисқартириб, чап томони ҳали ҳам $x-\alpha_1$ кўпайтувчига эга бўлган, ўнг томони эса бу кўпайтувчига эга бўлмаган тенгликни ҳосил қиламиз. Бироқ юқорида бу қарама-қаршиликка олиб келиши кўрсатилган эди. Шундай қилиб, (2) ёйилманинг $f(x)$ кўпҳад учун ягоналиги исбот қилинди.

Бир хил кўпайтувчиларни жамлаб, (2) ёйилмани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}; \tag{5}$$

бу ерда

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n.$$

Бунда, энди $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ илдизлар орасида бир-бирига тенг бўлганлари йўқ деб ҳисобланади.

(5) даги k_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ сон α_i илдизнинг $f(x)$ кўпҳаддаги карраси эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, бу каррачилик (такрорийлик) s_i га тенг бўлса, у ҳолда $k_i \leqslant s_i$ бўлади. Айтайлик, $k_i < s_i$ бўлсин, $f(x)$ кўпҳад учун илдиз карралигининг таърифига асосан

$$f(x) = (x-\alpha_i)^{s_i}\varphi(x)$$

ёйилма мавжуд. Бу ёйилмада $\varphi(x)$ кўпайтувчини унинг чизиқли кўпайтувчиларга ёйилмаси билан алмаштирсак, $f(x)$ нинг (2) дан фарқли чизиқли кўпайтувчиларга ёйилмасини ҳосил қилган бўлур эдик, яъни бу ёйилманинг юқорида исбот қилинган ягоналигига зид хулосага келар эдик.

Шундай қилиб, қуйидаги муҳим натижани исбот қилдик: *Коэффициентлари ихтиёрий сонлардан иборат бўлган n-даражали ($n \geqslant 1$) $f(x)$ кўпҳад — агар унинг илдизларининг ҳар бирини уларнинг карралиги нечта бўлса, шунча марта санасак — n та илдизга эга бўлади.*

Теорема $n = 0$ да ҳам ўринли эканлигини қайд қилиб ўтайлик, чунки нолинчи даражали кўпҳаднинг илдизга эга эмаслиги тушунарли. Бу теоремани фақат даражага эга бўлмаган ва x нинг исталган қийматида нолга тенг бўлган 0 кўпҳадгагина татбиқ қилиб бўлмайди. Бу айтилган изоҳдан қуйидаги теоремани исбот қилишда фойдаланамиз:

Агар даражалари n дан юқори бўлмаган $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар номаълумнинг n та дан ортиқ турли қийматларида тенг қийматларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) = g(x)$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x) - g(x)$ кўпҳад фаразимизга кўра n тадан ортиқ илдизга эгадир, унинг даражаси эса n дан юқори бўлмаганлиги сабабли $f(x) - g(x) = 0$ тенглик ўринли бўлиши керак.

Шундай қилиб, ҳар хил сонлар чексиз кўп эканлигини ҳисобга олсак, *ихтиёрий иккита турли $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳад учун x номаълумнинг шундай c қийматлари топиладики, $f(c) \neq g(c)$ бўлади* деб айтиш мумкин. Бундай c ларни фақатгина комплекс сонлар орасидан эмас, балки ҳақиқий, рационал ва ҳатто бутун сонлар орасидан ҳам топиш мумкин.

Шундай қилиб, x номаълумнинг ҳеч бўлмаганда бирорта даражасида турлича коэффициентларга эга бўлган сон коэффициентли иккита кўпҳад x комплекс ўзгарувчининг турлича комплекс функциялари бўлади. Бу билан, ниҳоят, *сон коэффициентли кўпҳадлар учун кўпҳадлар тенглигининг 20-§ да кўрсатилган иккита таърифи — алгебраик ва назарий-функционал таърифларининг тенг кучли эканлиги* исботланди.

Юқорида исбот қилинган теорема, *даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳад номаълумнинг сони n дан катта бўлган ихтиёрий турли қийматларига мос келувчи ўз қийматлари билан тўла аниқланади* деб даъво қилишга имкон беради. Кўпҳаднинг бу қийматларини ихтиёрий бериш мумкинми? Агар кўпҳаднинг қийматлари номаълумнинг $n+1$ та турлича қийматларида бериляпти деб фараз қилинса, жавоб ижобий бўлади: *номаълумнинг берилган $n+1$ та турли қийматла-*

рида олдиндан берилган қийматларни қабул қилувчи, даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳад ҳамма вақт мавжуддир.

Ҳақиқатан ҳам, номаълумнинг (турлича деб фараз қилинаётган $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ қийматларида мос равишда $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ қийматлар қабул қиладиган, даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳад гузиш керак бўлсин. Бу кўпҳад қуйидагича бўлади:

$$f(x)=\sum_{l=1}^{n+1}\frac{c_l(x-a_1)\ldots(x-a_{l-1})(x-a_{l+1})\ldots(x-a_{n+1})}{(a_l-a_1)\ldots(a_l-a_{l-1})(a_l-a_{l+1})\ldots(a_l-a_{n+})} \qquad (6)$$

Дарҳақиқат, унинг даражаси n дан юқори эмас, $f(a_l)$ қиймати эса c_l га тенг.

(6) формула *Лагранжнинг интерполяцион формуласи* дейилади. „Интерполяцион“ деган ном бу формула бўйича кўпҳаднинг $n+1$ нуқтадаги қийматига кўра унинг бошқа ҳамма нуқталаридаги қийматини ҳисоблаш мумкинлигидан келиб чиққан.

Виет формулалари Бош коэффициенти 1 бўлган n-даражали $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин:

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n \qquad (7)$$

ва $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ унинг илдизлари бўлсин[1]. У ҳолда $f(x)$ қуйидаги ёйилмага эга бўлади:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n).$$

Ўнг тарафдаги қавсларни кўпайтириб, сўнгра ўхшаш ҳадларни ихчамлаб ва ҳосил бўлган коэффициентларни (7) даги коэффициентлар билан таққослаб, *Виет формулалари* леб аталувчи ва кўпҳад коэффициентларини унинг илдизлари орқали ифодаловчи қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_n),\\
a_2 &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ \ldots\ +\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ \ldots\ +\alpha_{n-1}\alpha_n,\\
a_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ \ldots\ +\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ \ldots\ +\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),\\
a_n &= (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n.
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, k-тенгликнинг ($k=1, 2, \ldots, n$) ўнг томонида k та илдизнинг мумкин бўлган барча кўпайтмаларининг k нинг жуфт ёки тоқлигига қараб мусбат ёки манфий ишора билан олинган йиғиндиси турибди.

$n=2$ да бу формулалар квадрат кўпҳаднинг илдизлари ва коэффициентлари орасидаги элементар алгебрадан маълум бўл-

---

[1] Бу ерда ҳар бир каррали илдиз мос сон марта олинган.

ган муносабатга айланади. $n = 3$ да, яъни учинчи даражали кўпҳадлар учун бу формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\ a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3,\ a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Виет формулалари кўпҳадни унинг берилган илдизлари бўйича ёзишни осонлаштиради. Масалан, оддий илдизлари 5 ва —2 ҳамда икки каррали илдизи 3 бўлган тўртинчи даражали $f(x)$ кўпҳадни топайлик. Қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a_1 = -(5 - 2 + 3 + 3) = -9,$$
$$a_2 = 5\cdot(-2) + 5\cdot 3 + 5\cdot 3 + (-2)\cdot 3 + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 3 = 17,$$
$$a_3 = -[5\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 3 + (-2)\cdot 3\cdot 3] = 33,$$
$$a_4 = 5\cdot(-2)\cdot 3\cdot 3 = -90,$$

шунинг учун

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90.$$

Агар $f(x)$ кўпҳаднинг бош коэффициенти a_0 бирдан фарқли бўлса, Виет формуласини татбиқ қилиш учун дастлаб барча коэффициентларни a_0 га бўлиш керак, бу кўпҳад илдизларига таъсир қилмайди. Шундай қилиб, бу ҳолда Виет формулалари барча коэффициентларнинг бош коэффициентга нисбати учун ифодани беради.

Ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар. Ҳозир комплекс сонлар алгебраси асосий теоремасининг ҳақиқий коэффициентли кўпҳадларга тааллуқли бўлган баъзи бир натижаларини келтириб чиқарамиз. Аслини олганда, асосий теореманинг юқорида айтиб ўтилган энг муҳим аҳамияти ҳам худди ана шу натижаларга асослангандир.

Айтайлик, ҳақиқий коэффициентли

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳад α комплекс илдизга эга бўлсин, яъни

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Охирги тенгликда барча сонларни уларнинг қўшмасига алмаштирсак, тенглик бузилмаслигини биламиз. Бироқ барча $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n$ коэффициентлар ва шунингдек, ўнг томонда турган 0 сони ҳақиқий сонлар бўлгани учун бундай алмаштиришда улар ўзгармайди ва биз

$$a_0\bar{\alpha}^n + a_1\bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n = 0$$

тенгликка келамиз, яъни

$$f(\bar{\alpha}) = 0.$$

Шундай қилиб, *агар комплекс (бироқ ҳақиқий бўлмаган) сон α коэффициентлари ҳақиқий бўлган $f(x)$ кўпҳад учун илдиз бўлса, у ҳолда α га қўшма бўлган $\bar{\alpha}$ сон ҳам $f(x)$ нинг илдизи бўлади,* Демак, $f(x)$ кўпҳад коэффициентларининг ҳақиқий эканлиги 18- § дан маълум бўлган

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\, x + \alpha\bar{\alpha} \qquad (8)$$

квадрат учҳадга бўлинади. Ана шундан фойдаланиб, α ва $\bar{\alpha}$ *илдизларнинг $f(x)$ кўпҳаддаги карралиликлари бир хил эканлигини* кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, бу илдизлар мос равишда k ва l карралиликларга эга бўлсин ва масалан $k > l$ деб фараз қилайлик, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $\varphi(x)$ нинг l- даражасига бўлинади:

$$f(x) = \varphi^l(x)\, q(x).$$

$q(x)$ ҳақиқий коэффициентли иккита кўпҳаднинг бўлинмаси бўлгани сабабли ҳақиқий коэффициентларга эга бўлади, бироқ $\bar{\alpha}$ унинг илдизи бўлмаган бир ҳолда, α сон унинг $k - l$ каррали илдизи бўлади. Бу эса юқорида исботланганига зиддир. Бундан $k = l$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, энди *коэффициентлари ҳақиқий бўлган ҳар қандай кўпҳаднинг комплекс илдизлари жуфт-жуфти билан қўшмадир* деб айтиш мумкин. Бу ердан ва (2) кўринишдаги ёйилмаларнинг ягоналигининг юқоридаги исботидан ушбу узил-кесил натижа келиб чиқади:

Коэффициентлари ҳақиқий бўлган ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад ўзининг бош коэффициенти a_0 ва унинг ҳақиқий илдизларига мос келувчи $x - \alpha$ кўринишдаги чизиқли ҳақиқий коэффициентли бир нечта кўпҳадларнинг ва унинг қўшма комплекс илдизлари жуфтига мос келувчи (8) кўринишдаги кўпҳадларнинг кўпайтмаси шаклида ягона усул билан (кўпайтувчилар тартиби аниқлигида) тасвирланади.

Қуйидагини таъкидлаб ўтиш келгуси баёнимиз учун фойдалидир: коэффициентлари ҳақиқий ва бош коэффициенти 1 бўлган кўпҳадлар ичида кичик даражали кўпайтувчиларга ажралмайдиганлар (биз уларни *келтирилмайдиган* кўпҳадлар деб атаймиз) фақат $x - \alpha$ кўринишдаги чизиқли кўпҳадлар ва (8) кўринишдаги квадрат кўпҳадлардир, холос.

25*- §. Рационал касрлар

Математик анализ курсида биз кўпҳад деб атаган бутун рационал функциялардан ташқари яна *каср рационал функциялар* ҳам ўрганилади: булар иккита рационал функциянинг бўлинмаси $\frac{f(x)}{(\rho x)}$ дир, бу ерда $g(x) \neq 0$. Бу функциялар устида бажариладиган алгебраик амаллар худди рационал сонлар, яъни сурат ва махражи бутун сонлар бўлган касрлар устида бажариладиган амаллар бўйсунадиган қонунлар асосида бажарилади. Иккита каср-рационал функцияларнинг—бундан буён уларни *рационал касрлар* деб атаймиз—тенглиги ҳам касрларнинг элементар арифметикадаги тенглиги маъносида тушунилади. Аниқлик учун коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган рационал касрлар билан иш кўрамиз; ўқувчи мазкур параграфда айтиладиганларнинг ҳаммасини коэффициентлари комплекс бўлган рационал касрлар учун деярли сўзма-сўз такрорлаш мумкинлигини осонликча пайқаб олади.

Агар рационал касрнинг сурати унинг махражи билан ўзаро туб бўлса, рационал каср *қисқармас* каср дейилади.

Ҳар қандай рационал каср унинг сурати ва махражи учун умумий бўлган нолинчи даражали кўпайтувчи аниқлигида бир қийматли аниқланадиган бирорта қисқармас касрга тенгдир.

Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай рационал касрни сурат ва махражнинг энг катта умумий бўлувчисига қисқартириш мумкин, натижада унга тенг бўлган қисқармас каср ҳосил бўлади. Сўнгра, агар $\frac{f(x)}{g(x)}$ ва $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ қисқармас касрлар бир-бирига тенг бўлса, яъни

$$f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x) \qquad (1)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ нинг ўзаро туб эканлигидан (21-§ даги *б*) хоссага кўра) $\varphi(x)$ $f(x)$ га бўлинади; $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ларнинг ўзаро туб эканлигидан эса $f(x)$ нинг $\varphi(x)$ га бўлиниши келиб чиқади. Шундай қилиб, $f(x) = c\varphi(x)$, унда (1) дан $g(x) = c\psi(x)$.

Агар рационал каср суратининг даражаси махражи даражасидан кичик бўлса, у *тўғри* каср дейилади. Агар 0 кўпҳадни ҳам тўғри касрлар тўпламига киритишни шартлашсак, у ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир:

Ҳар қандай рационал каср ягона усул билан кўпҳад ва тўғри каср йиғиндиси шаклида тасвирланади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\frac{f(x)}{g(x)}$ рационал каср берилган бўлса ва суратни махражга бўлиб,

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

тенгликни ҳосил қилсак (бу ерда $r(x)$ нинг даражаси $g(x)$ никидан кичик), у ҳолда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

эканлигини текшириш осон. Шунингдек, агар

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

тенглик ҳам ўринли бўлса, бу ерда $\varphi(x)$ нинг даражаси $\psi(x)$ никидан кичик, у ҳолда қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$q(x)-\bar{q}(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)g(x)-\psi(x)r(x)}{\psi(x)\,g(x)}.$$

Чап томонда кўпҳад, ўнг томонда эса осонликча кўриш мумкинки, тўғри каср турганлиги сабабли $q(x)-\bar{q}(x)=0$ эканлигини ва

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Тўғри рационал касрларни ўрганишга киришар эканмиз, олдинги параграфнинг охирида айтиб ўтилганидек $x-\alpha$ (бу ерда α — ҳақиқий сон) кўринишдаги ва $x^2-(\beta+\bar{\beta})\,x+\beta\bar{\beta}$ (бу ерда β ва $\bar{\beta}$ — қўшма комплекс сонлар жуфти) кўринишдаги кўпҳадлар келтирилмайдиган ҳақиқий кўпҳадлар эканлигини эслатиб ўтамиз. Осонгина текшириш билан комплекс ҳолда $x-\alpha$ (бу ерда α — исталган комплекс сон) кўринишдаги кўпҳадлар худди шундай роль ўйнашини кўриш мумкин.

Агар $\frac{f(x)}{g(x)}$ тўғри рационал касрнинг $g(x)$ махражи келтирилмайдиган $p(x)$ кўпҳаднинг даражаси бўлиб,

$$g(x)=p^k(x),\ k\geqslant 1.$$

$f(x)$ суратнинг даражаси эса $p(x)$ нинг даражасидан кичик бўлса, каср *энг содда* каср дейилади.

Қуйидаги асосий теорема ўринли:

Ҳар қандай тўғри рационал каср энг содда касрлар йиғиндисига ёйилади.

Исботи. Аввал тўғри рационал каср $\frac{f(x)}{g(x)\,h(x)}$ ни кўрайлик, бу ерда $g(x)$ ва $h(x)$ — ўзаро туб кўпҳадлар:

$$(g(x),\ h(x))=1.$$

Бинобарин, 21- § га кўра шундай $\bar{u}(x)$ ва $\bar{v}(x)$ кўпҳадлар мавжудки,

$$g(x)\,\bar{u}(x)+h(x)\,\bar{v}(x)=1.$$

Бу ердан

$$g(x)[\bar{u}(x)\,f(x)]+h(x)\,[\bar{v}(x)\,f(x)]=f(x). \qquad (2)$$

$\bar{u}(x)\,f(x)$ кўпайтмани $h(x)$ га бўлиб, даражаси $h(x)$ нинг даражасидан кичик бўлган $u(x)$ қолдиқни ҳосил қилган бўлайлик. У ҳолда (2) тенгликни қуйидаги кўринишда қайта ёзиш мумкин:

$$g(x)\,u(x)+h(x)\,v(x)=f(x), \qquad (3)$$

бу ерда $v(x)$ — ифодасини ёзиш унча қийин бўлмаган кўпҳад. $g\,x)\,u(x)$ кўпайтманинг даражаси $g(x)\,h(x)$ кўпайтманинг даражасидан кичик ва худди шунинг ўзи шартга кўра $f(x)$ учун ўринли бўлганлиги сабабли, $h(x)\,v(x)$ кўпайтма ҳам $g(x)\,h(x)$ нинг даражасидан кичик даражага эга, шунинг учун $v(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан кичик. (3) дан

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{v(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{h(x)}$$

тенглик келиб чиқади, унинг ўнг томонида тўғри касрлар йиғиндиси турибди.

Агар $g(x)$, $h(x)$ махражларнинг ҳеч бўлмаганда бири ўзаро туб кўпайтувчиларнинг кўпайтмасига ёйилса, у ҳолда навбатдаги ёйишни амалга ошириш мумкин. Ана шундай давом этиб, *ҳар қандай тўғри каср ҳар бирининг махражи бирорта келтирилмайдиган кўпҳаднинг даражасидан иборат бир нечта тўғри каср йиғиндисига ёйилишини кўрамиз.* Аниқроғи, агар $\frac{f(x)}{g(x)}$ тўгри каср берилган бўлиб, унинг махражи келтирилмайдиган кўпайтувчиларга ёйилса:

$$g(x) = p_1^{k_1}(x)\, p_2^{k_2}(x)\, \ldots\, p_l^{k_l}(x)$$

(рационал каср махражининг бош коэффициентини ҳар доим 1 га тенг деб ҳисоблаш мумкин, албатта), шу билан бирга $i \neq j$ бўлганда $p_i\,x) \neq p_j(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{u_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \ldots + \frac{u_l(x)}{p_l^{k_l}(x)};$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги барча қўшилувчилар тўғри касрлардир.

Энди $\frac{u(x)}{p^k(x)}$ кўринишдаги, тўғри касрни кўриб чиқиш қолди, бу ерда $p(x)$ — келтирилмас кўпҳад. Қолдиқли бўлиш алгоритмини қўлланиб, $u(x)$ ни $p^{k-1}(x)$ га бўламиз; ҳосил бўлган қолдиқни $p^{k-2}x$ га бўламиз ва ҳоказо.

Қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} u(x) &= p^{k-1}(x)\, s_1(x) + u_1(x), \\ u_1(x) &= p^{k-2}(x)\, s_2(x) + u_2(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{k-2}(x &= p(x)\, s_{k-1}(x) + u_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Бу ерда $u(x)$ нинг даражаси, шартга кўра $p^k(x)$ нинг даражасидан кичик, $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ қолдиқларнинг даражалари эса мос бўлувчи $p^{k-i}(x)$ ларнинг даражасидан кичик бўлганлиги учун барча $s_1(x)$, $s_2(x)$, $\ldots$, $s_{k-1}(x)$ бўлинмаларнинг даражалари $p(x$ кўпҳаднинг даражасидан қатъий кичик бўлади. Охирги қолдиқ $u_{k-1}(x$ нинг даражаси ҳам $p(x)$ нинг даражасидан кичик. Юқоридаги тенгликлардан

$$u(x)=p^{k-1}(x)s_1(x)+p^{k-2}(x)s_2(x)+\ldots+p(x\,s_{k-1}(x)+u_{k-1}(x)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу ердан $\frac{u(x)}{p^k(x)}$ рационал касрнинг изланаётган энг содда касрлар йиғиндиси шаклидаги тасвирига келамиз:

$$\frac{u(x)}{p^k(x)}=\frac{u_{k-1}(x)}{p^k(x)}+\frac{s_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)}+\ldots+\frac{s_2(x)}{p^2(x)}+\frac{s_1(x)}{p(x)}.$$

Асосий теорема исбот бўлди. Уни қуйидаги **ягоналик теоремаси** билан тўлдириш мумкин:

Ҳар қандай тўғри рационал каср энг содда касрлар йиғиндиси кўринишидаги ягона ёйилмага эгадир.

Ҳақиқатан ҳам, бирорга тўғри каср энг содда касрлар йиғиндиси шаклида икки хил усул билан тасвирланган бўлсин дейлик. Уларнинг биринчисидан иккинчисини айириб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, энг содда касрларнинг айнан нолга тенг бўлган йиғиндисини ҳосил қиламиз. Бу йиғиндини ташкил этувчи энг содда касрларнинг махражлари турлича $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ келтирилмас кўпҳадларнинг баъзи бир даражалари бўлсин ва бу махражларнинг бири бўлган $p_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, s$ кўпҳаднинг энг юқори даражаси $p_i^{k_i}(x)$ бўлсин. Кўрилаётган тенгликнинг ҳар иккала томонини $p_1^{k_1-1}(x)\,p_2^{k_2}(x)\,\ldots\,p_s^{k_s}(x)$ кўпайтмага кўпайтирамиз. Натижада, йиғиндидаги битта қўшилувчидан ташқари барча қўшилувчилар кўпҳадга айланади. $\frac{u(x)}{p_1^{k_1}(x)}$ қўшилувчига келадиган бўлсак, у махражи $p_1(x)$, сурати эса $u(x)\,p_2^{k_2}(x)\,\ldots\,p_s^{k_s}(x)$ кўпайтма бўлган касрга айланади. Сурат махражга яхлит бўлинмайди, чунки $p_1(x)$ кўпҳад келтирилмас кўпҳад, суратнинг барча кўпайтувчилари эса у билан ўзаро туб.

Қолдиқли бўлишни бажариб, натижада кўпҳаднинг ва нолдан фарқли тўғри касрнинг йиғиндиси нолга тенг эканлигини ҳосил қиламиз.

Бироқ бунинг бўлиши мумкин эмас.

Мисол. Ушбу ҳақиқий $\frac{f(x)}{g(x)}$ тўғри касрни энг содда касрлар йиғиндисига ёйинг, бу ерда

$$f(x)=2x^4-10x^3+7x^2+4x+3,$$
$$g(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2.$$

Қуйидагини осонликча текшириш мумкин:

$$g(x) = (x+2)(x-1)^2(x^2+1),$$

шу билан бирга $x+2$, $x-1$, x^2+1 кўпҳадларнинг ҳар бири келтирилмас кўпҳаддир. Юқорида баён қилинган назариядан изланаётган ёйилма қуйидаги кўринишга эга бўлиши келиб чиқади:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}, \tag{4}$$

бу ерда A, B, C, D, E сонлар ҳозирча номаълум. (4) дан ушбу тенглик келиб чиқади:

$$f(x) = A(x-1)^2(x^2+1) + B(x+2)(x^2+1) + C(x+2)(x-1)(x^2+1) + \\ + D(x+2)(x-1)^2 + E(x+2)(x-1)^2. \tag{5}$$

(5) тенгликнинг ҳар иккала томонида x номаълумнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, бешта номаълум A, B, C, D, E га нисбатан бешта чизиқли тенглама системасини ҳосил қилган бўлур эдик, шу билан бирга юқорида исбот қилинганига кўра бу система ечимга эга бўлиб, бу ечим ягонадир. Бироқ биз бошқача йўл тутамиз

(5) тенгликда $x = -2$ деб, $45A = 135$ тенгликни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$A = 3. \tag{6}$$

Сўнгра, (5) да $x = 1$ деб, $6B = 6$ ни, яъни

$$B = 1 \tag{7}$$

ни топамиз. Энди (5) да кетма-кет $x = 0$ ва $x = -1$ деймиз. (6) ва (7) дан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} -2C + 2E &= -2, \\ -4C - 4D + 4E &= -8, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

бу ердан

$$D = 1. \tag{9}$$

Ниҳоят, (5) да $x = 2$ деймиз. (6), (7) ва (9) лардан фойдаланиб,

$$20C + 4E = -52$$

тенгламага келамиз, у (8) тенгламаларнинг биринчиси билан биргаликда

$$C = -2, \ E = -3$$

ни беради. Шундай қилиб,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$

РУСЧА ОЛТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Бу китобнинг биринчи нашри 1946 йилда босилиб чиқди, сўнгра у 1950, 1952, 1955 ва 1956 йилларда қайта нашр қилинди. Иккинчи ва тўртинчи нашрларни тайёрлашда китоб жиддий қайта ишлаб чиқилди, ундан мақсад Москва университетида алгебра ўқитиш тажрибасини акс эттиришдан иборат эди. Ушбу олтинчи нашрини тайёрлашда китоб шунчалик қайта ишландики, уни эски китобнинг олтинчи нашри эмас, балки тўла асос билан тамомила янги китоб дейиш мумкин.

Бундай қайта ишлаб чиқишга иккита нарса сабаб бўлди. Аввало китоб шу пайтга қадар университетларнинг дастлабки икки семестри материалинигина ўз ичига олган бўлиб, эндиликда унинг ҳажми университет олий алгебра курсининг мажбурий материалини таъминлаши мумкин бўладиган қилиб кенгайтирилиши кераклиги ҳақида бир қатор истаклар билдирилган эди. Ана шу мақсадда китобга бир неча янги боблар киритилди. Улардан бири группалар назарияси асосларига бағишланган, қолганлари эса чизиқли алгебранинг чизиқли фазолар назарияси, евклид фазолар назарияси, λ-матрицалар ҳамда матрицаларнинг жордан нормал формаси назарияси каби бўлимларига тегишлидир.

Албатта, ҳозирги пайтда мамлакатимиз алгебра адабиётида чизиқли алгебрага доир ҳажми, мазмуни, баён қилиниш характерига кўра ҳар хил бўлган бир қатор яхши китоблар мавжуд. Ушбу китоб, ҳатто чизиқли алгебрага тегишли бўлган анчагина материал қўшилишига қарамай, бу китоблардан у ёки бунисининг ўрнини эгаллаши мумкин деб даъво қилиб бўлмайди. Шундай бўлса-да, битта дарсликда ягона услубда баён этилган бутун мажбурий материалга эга бўлиш студентга, сўзсиз, қулайлик яратади.

Иккинчи томондан, китобнинг олдинги нашрларида бобларнинг қабул қилинган тартиби материални баён этишнин Москва университетида амалда бўлган тартибига аллақачонлар жавоб бермай қўйган эди — бу тартиб эса маълум бир вақтга қадар аналитик геометрия ва математик анализ курсларинин тегишли талабларини бажариш кераклиги билан белгиланади. Ундан ташқари, уч йил бурун Москва университетида олий алгебранинг янги программаси киритилган эди. Ўтган давр мобайнида бу программа муваффақият билан синовдан ўтди, шу сабабли китобдаги материални бу программага аниқ мос келадиган қилиб қайта ишлаб чиқиш мақсадга мувофиқ бўлиб қолди. Бу программага тўла жавоб берадиган дарсликнинг пайдо бўлиши уни мамлакатимизнинг бошқа университетларида ҳам киритишни осонлаштиради деган умиддамиз.

Материални семестрлар бўйича тақсимланишини кўрсатамиз: 1-семестр—1—5-боблар,2- семестр—6—9- боблар,3- семестр—10, 11, 13 ва 14- боблар. Шуни қайд қилиш керакки, Москва университетининг механик-студентлари олий алгебрани фақат биринчи икки семестр ҳажмида ўрганадилар.

Ҳеч шубҳа йўқки, китобнинг бундай қайта ишланиши, ундан педагогика институтларида фойдаланишда қийинчилик туғдирмай, балки қулайлик яратади.

Китобнинг бундан олдинги қайта ишланишлари унинг ҳажмини ҳеч бир катталаштирмасдан амалга оширилган эди. Бу гал бунга амал қилиб бўлмади, албатта. Китоб ҳажмини бир оз бўлса-да қисқартириш мақсадида ундан баъзи материалларни, жумладан, Гурвиц теоремасига, алгебралар назариясига ва Фробёниус теоремаларига бағишланган параграфларни чиқариб ташлашга тўғри келди. Шундай бўлишига қарамасдан, китобга ҳозирги пайтда мажбурий программага кирадиган материалнигина киритиш билан чекланиб қолиш, яъни бу китобни лекциялар конспектига айлантириб қўйиш ҳам мақсадга мувофиқ эмас эди. Китобда сақланиб қолинган мажбурий бўлмаган материал—бутунлай унга доир параграфлар юлдузча билан белгиланган—ўз вақтида олий алгебра курсининг мажбурий программасига кирган бўлиб, баъзи университет ёки педагогика институтларининг программасига ҳозир ҳам киради ёки олий алгебра курсига ажратилган соатлар кўпроқ бўлганда эди, бу материал программага киритилган бўларди.

Китобни қайта ишлашда унча муҳим бўлмаган тузатишлар ҳам киритилди, лекин биз уларга тўхталиб ўтирмадик.

А. Курош

Москва, декабрь, 1958 йил.

Агар A ва B матрицаларни кўпайтириш мумкин бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринлидир:

$$(AB)' = B'A', \tag{6}$$

яъни *кўпайтмани транспонирлаш натижасида олинган матрица кўпайтувчи матрицаларни транспонирлашдан ҳосил қилинган матрицаларнинг тескари тартибда олинган кўпайтмасига тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, агар AB кўпайтма аниқланган бўлса, осонгина текшириб кўриш мумкинки, $B'A'$ кўпайтма ҳам аниқланган: B' матрицанинг устунлари сони A' матрицанинг сатрлари сонига тенг. $(AB)'$ матрицанинг i-сатри ва j-устунида турган элементи AB матрицада j-сатр ва i-устунда жойлашган. Шунинг учун у A матрицанинг j-сатри ва B матрица i-устунидаги мос элементлар кўпайтмаларининг йиғиндисига, яъни A' матрицанинг j-устуни ва B' матрицанинг i-сатри мос элементлари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг. Шу билан (6) тенглик исбот бўлди.

A матрица ўзининг транспонирланган матрицасига тенг бўлганда ва фақат шундагина, яъни

$$A' = A$$

бўлгандагина симметрик бўлишини қайд қилиб ўтайлик.

Номаълумлардан тузилган устунни X орқали белгилаймиз:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Бу n та сатр ва битта устундан иборат матрицадир. Бу матрицани транспонирлаб, битта сатрдан иборат

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

матрицани ҳосил қиламиз.

Матрицаси $A = (a_{ij})$ бўлган (5) квадратик форма энди қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$f = X'AX. \tag{7}$$

Ҳақиқатан ҳам, AX кўпайтма битта устундан иборат матрица бўлади:

$$AX = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{Vmatrix}.$$

Бу матрицани X' матрицага чапдан кўпайтириб, битта сатр ва битта устундан иборат „матрицани", яъни (5) тенгликнинг ўнг томонини ҳосил қиламиз.

Агар f квадратик формага кирувчи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар устида матрицаси $Q = (q_{ik})$ бўлган

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

чизиқли алмаштириш бажарадиган бўлсак, f квадратик форма қандай ўзгаради? Бунда, агар f форма ҳақиқий бўлса, у ҳолда Q матрицанинг элементлари ҳам ҳақиқий бўлиши керак деб ҳисоблаймиз $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълумлардан иборат устунни Y орқали белгилаб (8) чизиқли алмаштиришни қуйидаги матрицавий тенглик кўринишида ёзамиз:

$$X = QY. \tag{9}$$

Бу ердан (6) га кўра

$$X' = Y'Q'. \tag{10}$$

(9) ва (10) ни f форманинг (7) ёзувига қўйсак,

$$f = Y'(Q'AQ)Y$$

ёки

$$f = Y'BY.$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$B = Q'AQ.$$

B матрица симметрик бўлади, чунки кўпайтувчилар сони истаганча бўлганда ҳам ўринли бўлиши аниқ бўлган (6) тенгликка ва A матрицанинг симметрик эканлигига тенг кучли бўлган $A' = A$ тенгликка кўра, ушбу

$$B' = Q'A'Q = Q'AQ = B$$

муносабатга эгамиз.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди:

n та номаълумнинг матрицаси A бўлган квадратик формаси номаълумларнинг матрицаси Q бўлган чизиқли алмаштирилишини бажарилгандан сўнг янги номаълумларнинг квадратик формасига айланади, шу билан бирга бу форманинг матрицаси $Q'AQ$ кўпайтмадан иборат бўлади.

Энди хосмас чизиқли алмаштиришни бажаряпмиз деб фараз қилайлик, яъни Q ва демак, Q' — хосмас матрицалардир. Бу ҳолда $Q'AQ$ кўпайтма A матрицани хосмас матрицаларга кўпайтиришдан ҳосил бўлади, шунинг учун 14-§ даги натижалардан келиб чиқишича, бу кўпайтманинг ранги A матрицанинг рангига тенг. Шундай қилиб, *квадратик форманинг ранги хосмас чизиқли алмаштириш бажаришда ўзгармайди.*

Ҳозир ушбу параграф бошида айтиб ўтилган иккинчи тартибли марказий эгри чизиқ тенгламасини каноник кўриниш (3) га келтириш ҳақидаги геометрик масалага ўхшаш, ихтиёрий квадратик формани бирорта хосмас чизиқли алмаштириш ёрдамида номаълумларнинг квадратлари йиғиндиси кўринишида ёзиш, яъни турли номаълумлар кўпайтмалари олдидаги барча коэффициентлар ноль бўладиган кўринишга келтириш ҳақидаги масалани кўриб чиқамиз; квадратик форманинг бундай махсус кўриниши *каноник* кўриниш дейилади. Дастлаб, n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумнинг f квадратик формаси хосмас чизиқли алмаштириш орқали

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ny_n^2 \qquad (11)$$

каноник кўринишга келтирилган бўлсин деб фараз қилайлик, бу ерда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ янги номаълумлар. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ коэффициентларнинг баъзилари нолга тенг бўлиши мумкин, албатта. (11) *да нолдан фарқли коэффициентларнинг сони албатта f форманинг ранги r га тенг* бўлишини исбот қиламиз.

Ҳақиқатан ҳам, (11) ни хосмас алмаштириш ёрдамида ҳосил қилганлигимиз сабабли, (11) нинг ўнг томонидаги квадратик форманинг ранги ҳам r бўлиши керак. Бироқ бу квадратик форманинг матрицаси диагонал кўринишга эга

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix},$$

шунинг учун ҳам, бу матрицанинг ранги r бўлиши керак деган талаб унинг диагоналида нолдан фарқли роппа-роса r та элемент турибди деган фаразга тенг кучлидир.

Квадратик формалар ҳақидаги ушбу асосий теоремани исботлашга ўтамиз.

Ҳар қандай квадратик форма бирор хосмас чизиқли алмаштириш орқали каноник кўринишга келтирилиши мумкин. Агар бунда ҳақиқий квадратик форма қаралаётган бўлса, у ҳолда кўрсатилган чизиқли алмаштиришнинг ҳамма коэффициентларини ҳақиқий деб ҳисоблаш мумкин.

Бу теорема битта номаълумнинг квадратик формаси бўлган ҳол учун тўғри, чунки ана шундай ҳар бир форма каноник бўлган ax^2 кўринишда бўлади. Бинобарин, исботни номаълумлар сони бўйича индукция ёрдамида олиб борсак бўлади, яъни теорема номаълумлар сони n дан кичик бўлган квадратик формалар учун исботланган деб, уни n та номаълумнинг квадратик формаси учун исботлашимиз мумкин.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумнинг квадратик формаси

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{12}$$

берилган бўлсин. Шундай хосмас чизиқли алмаштиришни топишга ҳаракат қиламизки, у f дан номаълумлардан бирининг квадратини ажратсин, яъни у f ни бу квадратнинг ва қолган номаълумларнинг бирор квадратик формаси йиғиндиси кўринишига келтирсин. Агар f форманинг матрицасида бош диагоналда турган $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ коэффициентлар ичида нолдан фарқлилари бўлса, яъни (12) га x_i номаълумларнинг ҳеч бўлмаганда бирининг квадрати нолдан фарқли коэффициент билан кирса, бу мақсадга осон эришилади.

Масалан, $a_{11} \neq 0$ бўлсин. У ҳолда, квадратик форма бўлган ушбу $a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$ ифода ҳам бизнинг f формамиз x_1 номаълумли қандай ҳадларга эга бўлса, худди шундай ҳадларга эга бўлишини текшириш осон. Шунинг учун

$$f - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = g$$

айирма x_1 номаълумга эмас, балки $x_2, \ldots, x_n$ номаълумларгагина эга бўлган квадратик форма бўлади. Бу ердан

$$f = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + g.$$

Агар

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \quad y_l = x_l, \ (l = 2, 3, \ldots, n) \tag{13}$$

белгилашларни киритсак,

$$f = a_{11}^{-1} y_1^2 + g \tag{14}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда g энди $y_2, y_8, \ldots, y_n$ номаълумларнинг квадратик формаси бўлади. (14) ифода f учун изланаётган ифодадир, чунки у (12) дан хосмас чизиқли алмаштириш ёрдамида, чунончи детерминанти a_{11}, шунинг учун ҳам хосмас бўлган (13) чизиқли алмаштиришга тескари алмаштириш ёрдамида ҳосил қилинган.

Агар $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f формада дастлаб номаълумларнинг квадратларини пайдо бўлишига олиб келадиган ёрдамчи чизиқли алмаштириш бажариш керак. Бу форманинг (12) ёзувидаги коэффициентлар ичида нолдан фарқлилари бўлиши кераклиги сабабли — акс ҳолда, исботлайдиган нарсанинг ўзи бўлмасди — айтайлик, $a_{12} \neq 0$ бўлсин, яъни f форма $2a_{12}x_1x_2$ ҳаднинг ва ҳар бирига

$x_3, \dots, x_n$ номаълумларнинг ақалли биттаси кирадиган ҳадларнинг йиғиндисидан иборат бўлади.

Ушбу чизиқли алмаштиришни бажарамиз:

$$x_1 = z_1 - z_2,\ x_2 = z_1 + z_2,\ i = 3, \dots, n \text{ бўлганда } x_i = z_i. \quad (15)$$

Бу алмаштириш хосмас, чунки у ушбу детерминантга эга:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Бу алмаштириш натижасида формамизнинг $2a_{12}x_1x_2$ ҳади

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$$

кўринишни олади, яъни f формада бирданига иккита номаълумнинг нолдан фарқли коэффициентга эга бўлган квадрати пайдо бўлади. Шу билан бирга улар қолган ҳадларнинг ҳеч бири билан қисқариб кета олмайди, чунки қолган ҳадларнинг ҳар бирига $z_3, \dots, z_n$ номаълумларнинг ҳеч бўлмаганда бири киради. Ҳозир биз юқорида кўриб чиқилган ҳолга келиб қолдик, яъни яна бир хосмас чизиқли алмаштириш билан f формани (14) кўринишга келтиришимиз мумкин.

Исботни тугаллаш учун ушбуни қайд қилиш қолди: g квадратик форма n дан кичик бўлган сондаги номаълумларга боғлиқ ва шунинг учун индукция бўйича $y_2, y_3, \dots, y_n$ номаълумларнинг бирор хосмас чизиқли алмаштирилиши ёрдамида каноник кўринишга келтирилади. Демак, барча n номаълумларни y_1 ни ўзгаришсиз қолдирадиган алмаштириш (хосмас эканлигини кўриш осон) деб қараладиган бу алмаштириш (14) ни каноник кўринишга келтиради. Шундай қилиб, f квадратик форма икки ёки учта хосмас чизиқли алмаштириш (бу хосмас алмаштиришларни биргина хосмас чизиқли алмаштириш — уларнинг кўпайтмаси билан алмаштириш мумкин) ёрдамида номаълумларнинг бирор коэффициентли квадратлари йиғиндиси кўринишига келтирилади. Бу квадратларнинг сони форма ранги r га тенг эканлиги бизга маълум. Бунинг устига, агар f квадратик форма ҳақиқий бўлса, у ҳолда f форманинг каноник кўринишидаги коэффициентлари ҳам, f ни бу кўринишга келтирувчи чизиқли алмаштиришнинг коэффициентлари ҳам ҳақиқий бўлади; дарҳақиқат (13) га тескари бўлган чизиқли алмаштириш ҳам, (15) чизиқли алмаштириш ҳам ҳақиқий коэффициентларга эга.

Асосий теореманинг исботи тугади. Бу исботда ишлатилган метод квадратик формани ҳақиқатан ҳам каноник кўринишга келтиришга доир конкрет мисоллар ечишда татбиқ қилиниши мумкин. Фақат биз исботда фойдаланган индукция ўрнига юқорида баён қилинган метод ёрдамида номаълумларнинг квадратларини кетма-кет ажратиш мумкин.

Мисол. Ушбу квадратик формани каноник кўринишга келтиринг:

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1. \tag{16}$$

Бу формада номаълумларнинг квадратлари йўқ, шу сабабли дастлаб матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлган

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$$

хосмас чизиқли алмаштиришни бажарамиз, шундан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Бу ерда y_1^2 олдидаги коэффициент нолдан фарқли, шунинг учун формадан бир номаълумнинг квадратини ажратиш мумкин.

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3$$

деб, яъни тескари алмаштиришининг матрицаси

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлган чизиқли алмаштириш бажариб, f ни ушбу кўринишга келтирамиз:

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_2z_3.$$

Ҳозирча фақат z_1 номаълумнинг квадрати ажралди, чунки формада ҳали бошқа иккита номаълумнинг кўпайтмаси бор. z_2^2 олдидаги коэффициентнинг нолга тенг эмаслигидан фойдаланиб юқорида баён қилинган методни яна бир бор қўлланамиз. Тескари матрицаси

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлган

$$t_1 = z_1,\ t_2 = -2z_2 - 4z_3,\ t_3 = z_3$$

чизиқли алмаштиришни бажариб, ниҳоят, f квадратик формани каноник кўринишга келтирамиз:

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2. \tag{17}$$

(16) ни дарҳол (17) га келтирувчи чизиқли алмаштиришнинг матрицаси ушбу

$$ABC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

кўпайтмадан иборат бўлади.

Бевосита ўрнига қўйиш билан ҳам ушбу

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2 + 3t_3, \\ x_2 &= \frac{1}{2} t_1 - \frac{1}{2} t_2 - t_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad t_3 \end{aligned}$$

хосмас (чунки детерминанти $-\frac{1}{2}$ га тенг) чизиқли алмаштириш (16) ни (17) га келтиришини текшириб кўриш осон.

Квадратик формани каноник кўринишга келтириш назарияси иккинчи тартибли марказий эгри чизиқларнинг геометрик назариясига ўхшатиб тузилди, бироқ унинг умумлашгани бўлиб ҳисоблана олмайди. Ҳақиқатан ҳам, бизнинг назариямизда исталган хосмас чизиқли алмаштиришларга йўл қўйилади, иккинчи тартибли эгри чизиқни каноник кўринишга келтириш эса текисликни буриш бўлиб ҳисобланадиган (2) кўринишдаги жуда ҳам махсус чизиқли алмаштиришлар туфайли амалга оширилади. Бироқ бу геометрик назария n та номаълумнинг ҳақиқий коэффициентли квадратик формаси бўлган ҳол учун умумлаштирилиши мумкин. Квадратик формаларни бош ўқларга келтириш деб аталувчи бу умумлаштиришнинг баёни 8-бобда берилади.

27- §. Инерция қонуни

Берилган квадратик форма келтириладиган каноник кўриниш унинг учун бир қийматли аниқланган эмас: ҳар қандай квадратик форма жуда кўп турли усуллар билан каноник кўринишга келтирилиши мумкин. Масалан, олдинги параграфда кўриб чиқилган $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ квадратик форма ушбу

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_2 &= t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x_3 &= \qquad\quad t_3 \end{aligned}$$

хосмас чизиқли алмаштириш орқали илгари ҳосил қилинганидан фарқли бўлган

$$f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$$

каноник кўринишга келтирилади.

Берилган f форма келтириладиган турлича каноник квадратик формалар учун нима умумий деган савол туғилади. Бу савол, маълум бўлишича, ушбу савол билан чамбарчас боғлиқ экан: қандай шартда берилган иккита квадратик форманинг бири хосмас чизиқли алмаштириш орқали иккинчисига ўтказилиши мумкин? Бу саволларга бериладиган жавоб комплекс квадратик формалар ёки ҳақиқий квадратик формалар кўрилаётганига боғлиқ бўлади.

Дастлаб, ихтиёрий комплекс квадратик формалар қаралаяпти деб ва шу билан бирга ихтиёрий комплекс коэффициентли хосмас чизиқли алмаштиришлардан фойдаланишга йўл қўйилади, деб фараз қилайлик.

Бизга маълумки, n номаълумнинг ранги r бўлган квадратик формаси

$$f = c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \ldots + c_ry_r^2$$

каноник кўринишга келтирилади, бу ерда барча $c_1, c_2, \ldots, c_r$ коэффициентлар нолдан фарқли. Ҳар қандай комплекс сондан квадрат илдиз чиқишидан фойдаланиб, қуйидаги хосмас чизиқли алмаштиришни бажарамиз:

$$i = 1, 2, \ldots, r \text{ да } z_i = \sqrt{c_iy_i}; \; j = r + 1, \ldots, n \text{ да } z_j = y_j.$$

Бу алмаштириш f формани ***нормал кўриниш*** деб аталувчи

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2$$

кўринишга келтиради; бу r та номаълумнинг коэффициентлари 1 га тенг бўлган квадратлари йиғиндисидан иборат оддийгина йиғиндидир.

Нормал кўриниш f форманинг ранги r гагина боғлиқ, яъни ранги r бўлган барча квадратик формалар бир хил кўриниш — (1) нормал кўринишга келтирилади. Бинобарин, агар n та номаълумнинг квадратик формалари бўлган f ва g бир хил r рангга эга бўлса, у ҳолда f ни (1) га, сўнгра (1) ни g га ўтказиш мумкин, яъни f ни g га ўтказувчи хосмас чизиқли алмаштириш мавжуд. Иккинчи томондан, ҳеч қандай хосмас чизиқли алмаштириш форма рангини ўзгартирмаслиги сабабли, қуйидаги натижага келамиз:

n та номаълумнинг иккита комплекс квадратик формасининг ранглари тенг бўлганда, ва фақат шундагина, улар комплекс коэффициентли хосмас чизиқли алмаштиришлар ёрдамида бир-бирига ўтади.

Бу теоремадан ҳеч бир қийинчиликсиз ушбу натижа келиб чиқади: *ранги r бўлган комплекс квадратик форманинг каноник кўриниши бўлиб r та номаълумнинг нолдан фарқли ихтиёрий комплекс коэффициентли квадратларининг ҳар қандай йиғиндиси хизмат қилиши мумкин.*

Агар ҳақиқий квадратик формалар кўрилаётган бўлса, ва энг муҳими, ҳақиқий коэффициентли чизиқли алмаштиришлargагина йўл қўйиладиган бўлса, иш анча қийинлашади. Бу ҳолда энди ҳар қандай форма ҳам (1) кўринишга келтира берилмайди, чунки бу манфий сондан квадрат илдиз чиқаришни талаб этиб қолиши мумкин. Бироқ, агар бир нечта номаълумнинг коэффициентлари $+1$ ёки -1 бўлган квадратларининг йиғиндисини квадратик форманинг *нормал кўриниши* деб атасак, у ҳолда *ҳар қандай f квадратик формани ҳақиқий коэффициентли хосмас чизиқли алмаштириш орқали нормал кўринишга келтириш мумкинлигини осонликча кўрсатиш мумкин.*

Ҳақиқатан ҳам, n та номаълумнинг ранги r бўлган квадратик формаси қуйидагича ёзиш мумкин бўлган (агар керак бўлса, номаълумларнинг номерланишини ўзгартириб) каноник кўринишга келтирилади:

$$f = c_1y_1^2 + \ldots + c_ky_k^2 - c_{k+1}y_{k+1}^2 - \ldots - c_ry_r^2, \ 0 \leqslant k \leqslant r.$$

Бу ерда барча $c_1, \ldots, c_k; \ c_{k+1}, \ldots, c_r$ сонлар нолдан фарқли ва мусбат. У ҳолда ушбу ҳақиқий коэффициентли хосмас чизиқли алмаштириш

$$i = 1, \ 2, \ldots, r \text{ да } z_i = \sqrt{c_iy_i}; \quad j = r + 1, \ldots, n \text{ да } z_j = y_j$$

f ни ушбу нормал кўринишга келтиради:

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

Бу ерда квадратларнинг умумий сони форманинг рангига тенг бўлади.

Ҳақиқий квадратик форма нормал кўринишга кўпгина турли алмаштиришлар орқали келтирилиши мумкин, бироқ номаълумлар номерланиши аниқлигида у фақат биргина нормал кўринишга келтирилади. Буни *ҳақиқий квадратик формаларнинг инерция қонуни* деб аталувчи ушбу муҳим теорема кўрсатади:

Берилган ҳақиқий коэффициентли квадратик форманинг ҳақиқий хосмас чизиқли алмаштириш ёрдамида ҳосил қилинган нормал кўринишидаги мусбат квадратлар сони ва манфий квадратлар сони бу алмаштиришнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас.

Ҳақиқатан ҳам, n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумнинг квадратик формаси f нинг ранги r бўлиб, икки усул билан қуйидаги нормал кўринишга келтирилган бўлсин:

$$\begin{aligned} f = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2 = \\ = z_1^2 + \dots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \dots - z_r^2. \end{aligned} \tag{2}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумлардан $y_1, y_2, \dots, y_n$ номаълумларга ўтиш хосмас чизиқли алмаштириш бўлгани учун, аксинча, иккинчи номаълумлар ҳам биринчи номаълумлар орқали нолдан фарқли бўлган детерминант билан чизиқли ифодаланадилар:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Шунга ўхшаш

$$z_j = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

шу билан бирга коэффициентлардан тузилган детерминант яна нолдан фарқли. Коэффициентлар (3) да ҳам, (4) да ҳам ҳақиқий сонлардир.

Энди $k < l$ деб фараз қиламиз ва ушбу тенгликлар системасини ёзамиз:

$$y_1 = 0, \dots, y_k = 0, \quad z_{l+1} = 0, \dots, z_r = 0, \dots, z_n = 0. \tag{5}$$

Агар бу тенгликларнинг чап томонлари уларнинг (3) ва (4) даги ифодалари билан алмаштириладиган бўлса, n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумли $n - l + k$ та чизиқли бир жинсли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик, шунинг учун 1-§ дан маълумки, система ноль бўлмаган ҳақиқий $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ечимга эга.

Энди (2) тенгликдаги барча y ва z ларни уларнинг (3) ва (4) ифодалари билан алмаштирамиз, сўнгра номаълумлар ўрнига $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонларни қўямиз. Агар бундай ўрнига қўйишдан сўнг y_i ва z_j ларнинг қийматлари қисқалик учун $y_i(\alpha)$ ва $z_j(\alpha)$ орқали белгиланса, (2) ифода (5) га биноан қуйидаги тенгликка айланади:

$$-y^2_{k+1}(\alpha) - \dots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \dots + z_l^2(\alpha). \tag{6}$$

(3) ва (4) даги барча коэффициентлар ҳақиқий бўлганлиги учун (6) тенгликка кирувчи ҳамма квадратлар мусбат, шунинг учун (6) дан бу квадратларнинг ҳаммаси нолга тенг эканлиги келиб чиқади; бу ердан

$$z_1(\alpha) = 0, \dots, z_l(\alpha) = 0 \tag{7}$$

тенгликлар келиб чиқади. Иккинчи томондан, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонларнинг танлаб олинишига кўра,

$$z_{l+1}(\alpha) = 0, \ldots, z_r(\alpha) = 0, \ldots, z_n(\alpha) = 0. \qquad (8)$$

Шундай қилиб, n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли n та чизиқли бир жинсли тенглама системаси

$$z_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(7) ва (8) га асосан ноль бўлмаган $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ечимга эга, яъни бу системанинг детерминанти ноль бўлиши керак. Бироқ бу (4) алмаштириш хосмас деган фаразга зид. $l < k$ бўлганда ҳам шундай зиддиятга келамиз. Демак, бу ердан $k = l$ тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Берилган f ҳақиқий квадратик форманинг келтирилган каноник кўринишидаги мусбат ишорали квадратлар сони бу форма *инерциясининг мусбат индекси* деб, манфий квадратлар сони эса *инерциянинг манфий индекси* деб, инерциянинг мусбат ва манфий индекслари орасидаги айирма f форманинг *сигнатураси* деб аталади. Форманинг ранги берилганда ҳозир аниқланган учта сондан ихтиёрий биропгасининг берилиши қолган иккитасини тўла аниқлайди; шунинг учун ҳам келгусида бу учта соннинг исталган бири ҳақида гапириш мумкин.

Қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

n та номаълумнинг ҳақиқий коэффициентли иккита квадратик формаси бир хил рангга ва бир хил сигнатурага эга бўлганда ва фақат шундагина, улар хосмас ҳақиқий чизиқли алмаштириш орқали бир-бирларига ўтказилади.

Ҳақиқатан ҳам, f форма g формага хосмас ҳақиқий алмаштириш орқали ўтадиган бўлсин. Бу алмаштириш форма рангини ўзгартирмаслигини биламиз. У сигнатурани ҳам ўзгартира олмайди, чунки акс ҳолда f ва g турлича нормал кўринишларга келтирилган бўлар эдилар, у ҳолда f форма инерция қонунига хилоф ҳолда бу иккала нормал кўринишга келтирилар эди. Аксинча, агар f ва g формалар бир хил ранг ва бир хил сигнатурага эга бўлса, улар бир хил нормал кўринишга келадилар ва шунинг учун улар бир-бирларига ўтказилишлари мумкин.

Агар g квадратик форма нолга тенг бўлмаган ҳақиқий коэффициентли

$$g = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_r y_r^2 \qquad (9)$$

каноник кўринишда берилган бўлса, у ҳолда бу форманинг ранги r га тенг эканлиги равшан. Бунга форманинг нормал кўринишга келтиришнинг юқорида қўлланилган усулини татбиқ этиб, g форма инерциясининг мусбат индекси (9) тенгликнинг ўнг томонидаги мусбат коэффициентлар сонига тенг эканлигини кўриш осон. Бу ердан ва олдинги теоремадан ушбу натижа келиб чиқади:

f квадратик форманинг ранги r га тенг бўлганда ва бу форма инерциясининг мусбат индекси (9) даги мусбат коэффициентлар сони билан бир хил бўлганда ва фақат шундагина, (9) ифода форманинг каноник кўриниши бўлади.

Ажралувчи квадратик кўпҳадлар. n та номаълумнинг исталган иккита

$$\varphi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad \psi = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

чизиқли формасини бир-бирига кўпайтириб, равшанки, бирор квадратик формани ҳосил қиламиз. Ҳар қандай квадратик форма ҳам иккита чизиқли форманинг кўпайтмаси шаклида тасвирлана бермайди. Шунинг учун бу қачон ўринли бўлишини, яъни квадратик форма *ажралувчи* бўладиган шартларни келтириб чиқарамиз.

Комплекс $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ квадратик форма ранги иккидан кичик ёки унга тенг бўлганда ва фақат шундагина ажралади. Ҳақиқий $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ квадратик форманинг ранги ёки бирдан катта бўлмаса, ёки у иккига тенг бўлиб, сигнатураси эса 0 га тенг бўлганда ва фақат шундагина ажралади.

Аввал чизиқли φ ва ψ формаларнинг кўпайтмасини кўриб чиқамиз. Агар бу формаларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси ноль бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси коэффициентлари нолга тенг бўлган квадратик форма бўлади, яъни унинг ранги 0 бўлади. Агар φ ва ψ чизиқли формалар пропорционал бўлса:

$$\psi = c\varphi,$$

($c \neq 0$ ва φ — ноль эмас) у ҳолда, масалан, a_1 коэффициент нолдан фарқли бўлсин. У ҳолда,

$$y_1 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \quad y_i = x_i, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

хосмас чизиқли алмаштириш $\varphi\psi$ квадратик формани

$$\varphi\psi = c y_1^2$$

кўринишга келтиради. Ўнг томонда ранги 1 бўлган квадратик форма турибди, шунинг учун $\varphi\psi$ квадратик форманинг ранги ҳам 1 га тенг. Ниҳоят, энди φ ва ψ чизиқли формалар пропорционал бўлмасин дейлик ва, айтайлик,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \\ y_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n, \\ y_i &= x_i, \quad (i = 3, 4, \dots, n) \end{aligned}$$

чизиқли алмаштириш хосмас бўлади; у $\varphi\psi$ квадратик формани

$$\varphi\psi = y_1 y_2$$

кўринишга келтиради. Ўнг томонда ранги 2 бўлган квадратик форма турибди. Унинг коэффициентлари ҳақиқий бўлган ҳолда, сигнатураси 0 дир.

Тескари даъвони исботлашга ўтамиз. Ранги 0 бўлган квадратик форма бири нолга тенг бўлган иккита чизиқли форманинг кўпайтмаси деб қаралиши мумкин, албатта. Ранги 1 бўлган $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квадратик форма хосмас чизиқли алмаштириш орқали

$$f = cy_1^2, \ c \neq 0$$

кўринишга, яъни

$$f = (cy_1)\, y_1$$

кўринишга келтирилади. y_1 ни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар орқали чизиқли ифодалаб, f форманинг иккита чизиқли форма кўпайтмаси кўринишидаги тасвирини ҳосил қиламиз. Ниҳоят, ранги 2, сигнатураси 0 бўлган $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квадратик форма хосмас чизиқли алмаштириш орқали

$$f = y_1^2 - y_2^2$$

кўринишга келтирилади; ранги 2 бўлган исталган комплекс квадратик форма худди шу кўринишга келтирилиши мумкин.

Бироқ

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2);$$

y_1 ва y_2 ларни уларнинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар орқали чизиқли ифодалари билан алмаштирганимиздан сўнг, ўнг томонда иккита чизиқли форманинг кўпайтмаси туради. Теорема исбот бўлди.

28- §. Мусбат аниқланган формалар

Агар n та номаълумнинг ҳақиқий коэффициентли f квадратик формаси n та мусбат квадратдан иборат нормал кўринишга келтирилса, яъни бу форманинг ранги ҳам, инерциясининг мусбат индекси ҳам номаълумлар сонига тенг бўлса, бу форма *мусбат аниқланган* дейилади.

Қуйида келтириладиган теорема мусбат аниқланган формаларни, уларни нормал ёки каноник кўринишга келтириб ўтирмасдан, тавсифлашга имкон беради.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумнинг ҳақиқий коэффициентли f квадратик формаси ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлган бу номаълумларнинг ҳар қандай ҳақиқий қийматларида мусбат қийматлар қабул қилганда ва, фақат шундагина, бу форма мусбат аниқланган бўлади.

Исботи. f форма мусбат аниқланган бўлсин, яъни ушбу нормал кўринишга келтириладиган бўлсин:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \tag{1}$$

бу ерда

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

ва ҳақиқий a_{ij} коэффициентлардан тузилган детерминант нолдан фарқли. Агар f га ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг ихтиёрий ҳақиқий қийматларини қўймоқчи бўлсак, уларни дастлаб (2) га, сўнгра эса барча y_i лар учун ҳосил қилинган қийматларни (1) га қўйиш мумкин. (2) дан $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар учун олинган қийматларнинг ҳаммаси бирданига нолга тенг бўлмаслигини қайд қилиб ўтайлик, чунки акс ҳолда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

чизиқли бир жинсли тенгламалар системасининг детерминанти нолдан фарқли бўлса-да, у ноль бўлмаган ечимларга эга эканлигини ҳосил қилар эдик. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар учун топилган қийматларни (1) га қўйиб, f форманинг орасида нолга тенг бўлмаганлари ҳам бор бўлган n та ҳақиқий соннинг квадратлари йиғиндисига тенг бўлган қийматини ҳосил қиламиз; бинобарин, бу қиймат қатъий мусбат бўлади.

Аксинча, f форма мусбат аниқланган бўлмасин, яъни ё унинг ранги ёки инерциясининг мусбат индекси n дан кичик бўлсин. Бу форманинг (2) хосмас чизиқли алмаштириш ёрдамида келтириладиган нормал кўринишида янги номаълумлардан ҳеч бўлмаганда биттаси, масалан, y_n ё бутунлай йўқ ёки минус ишора билан туради деган сўздир. Бундай ҳолда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар учун шундай ҳақиқий қийматлар танлаб олиш мумкинки, номаълумларнинг бу қийматларида f форманинг қиймати нолга тенг ёки, ҳатто манфий бўлишини кўрсатамиз. Масалан, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг (2) дан $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$, $y_n = 1$ бўлганда ҳосил бўладиган тенгламалар системасини Крамер қоидаси бўйича ечганда ҳосил қилинадиган қийматлари юқорида тилга олинган қийматлар бўлади. Дарҳақиқат, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг бу қийматларида f форма: агар y_n^2 бу форманинг нормал кўринишига кирмаса, нолга, агар y_n^2 нормал кўринишга манфий ишора билан кирса -1 га тенг.

Ҳозир исбот қилинган теоремадан мусбат аниқланган квадратик формалар татбиқ қилинадиган ҳамма ерда фойдаланилади.

Бироқ бу теорема ёрдамида форма коэффициентлари бўйича унинг мусбат аниқланган эканлигини тайинлаш мумкин эмас. Бу мақсад учун бошқа бир теорема хизмат қилади. Уни исботлаш ва таърифлаш учун дастлаб битта ёрдамчи тушунча киритамиз. n та номаълумнинг матрицаси $A = (a_{ij})$ бўлган f квадратик формаси берилган бўлсин. Бу матрицанинг юқори чап бурчагига жойлашган $1, 2, \dots, n$-тартибли минорлари, яъни

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

минорлар (буларнинг энг охиргиси, равшанки, A матрицанинг детерминанти билан бир хил) f форманинг *бош минорлари* дейилади.

Қуйидаги теорема ўринли:

n та номаълумнинг коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган квадратик формаси унинг бош минорлари қатъий мусбат бўлганда ва фақат шундагина, мусбат аниқланган бўлади.

Исботи. $n = 1$ бўлганда теорема ўринли, чунки бу ҳолда форма ax^2 кўринишга эга ва шунинг учун $a > 0$ бўлганда ва фақат шундагина, мусбат аниқланган. Шунинг учун теоремани $n - 1$ та номаълум учун исбот қилинган деб фараз қилиб, уни n та номаълум учун исбот қиламиз.

Аввал қуйидагига эътибор берайлик:

Коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган f квадратик форма берилган бўлиб, унинг коэффициентларидан тузилган матрица A бўлсин. Агар f квадратик форма устида ҳақиқий матрицаси Q бўлган хосмас чизиқли алмаштириш бажарилаётган бўлса, у ҳолда *форма детерминантининг (яъни форма матрицаси детерминантининг) ишораси ўзгармайди.*

Ҳақиқатан ҳам, алмаштиришдан сўнг матрицаси $Q'AQ$ бўлган квадратик формани ҳосил қиламиз, бироқ $|Q'| = |Q|$ бўлгани учун

$$|Q'AQ| = |Q'| \cdot |A| \cdot |Q| = |A| \cdot |Q|^2,$$

яъни $|A|$ детерминант мусбат сонга кўпайтириляпти.

Энди ушбу квадратик форма берилган бўлсин:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$f = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + 2\sum_{l=1}^{n-1} a_{ln}x_lx_n + a_{nn}x_n^2, \tag{3}$$

бу ерда φ форма $n-1$ та номаълумнинг f форманинг x_n номаълум кирмаган ҳадларидан тузилган квадратик формасидир. φ форманинг бош минорлари f форманинг охиргисидан ташқари ҳамма бош минорлари билан бир хил эканлиги равшан.

f форма мусбат аниқланган бўлсин. Бу ҳолда φ форма ҳам мусбат аниқланган бўлади: агар $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ номаълумларнинг φ форма қатъий мусбат бўлмаган қиймат оладиган, орасида нолга тенг бўлмаганлари ҳам бор бўлган қийматлари мавжуд бўлганда эди, у ҳолда қўшимча равишда $x_n = 0$ деб фараз қилиб, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ номаълумларнинг қийматлари орасида нолга тенг бўлмаганлари ҳам бор бўлса-да, (3) га кўра, f форманинг ҳам қатъий мусбат бўлмаган қийматларини ҳосил қилган бўлар эдик.

Шунинг учун индуктив фаразга кўра φ форманинг ҳамма бош минорлари, яъни f форманинг, охиргисидан ташқари, ҳамма минорлари қатъий мусбат. f форманинг охирги бош минорига, яъни A матрицанинг детерминантига келсак, унинг мусбат эканлиги қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади: f форма мусбат аниқланган бўлгани учун, у хосмас чизиқли алмаштириш ёрдамида n та мусбат квадратдан тузилган нормал кўринишга келтирилади. Бу нормал кўринишнинг детерминанти қатъий мусбат, шунинг учун юқоридаги изоҳга кўра f форманинг детерминанти ҳам мусбат.

Энди f форманинг ҳамма бош минорлари қатъий мусбат бўлсин. Бу ердан φ форманинг ҳамма бош минорлари мусбат эканлиги, яъни индуктив фараз бўйича бу форманинг мусбат аниқланган эканлиги келиб чиқади. Бинобарин, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ номаълумларнинг шундай хосмас чизиқли алмаштирилиши мавжудки, у φ формани янги $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ номаълумларнинг $n-1$ та мусбат квадратлари йиғиндиси кўринишига келтиради. Бу чизиқли алмаштиришни, $x_n = y_n$ деб фараз қилиб, барча $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларни (хосмас) чизиқли алмаштиришгача тўлдириш мумкин. (3) га кўра f форма кўрсатилган алмаштириш орқали ушбу

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{l=1}^{n-1} b_{ln}y_ly_n + b_{nn}y_n^2 \tag{4}$$

кўринишга келтирилади. b_{ln} коэффициентларнинг аниқ ифодалари биз учун муҳим эмас.

$$y_i^2 + 2b_{in}\; y_iy_n = (y_i + b_{in}y_n)^2 - b^2_{in}y_n^2$$

бўлгани учун

$$z_i = y_i + b_{in}y_n, \ i = 1, \ 2, \dots, n-1, \ z_n = y_n$$

хосмас чизиқли алмаштириш f формани (4) га кўра

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + cz_n^2 \tag{5}$$

каноник кўринишга келтиради.

f форманинг мусбат аниқланган эканлигини кўрсатиш учун c соннинг мусбат эканлигини кўрсатиш қолди. (5) тенгликнинг ўнг томонида турган форманинг детерминанти c га тенг. Бироқ бу детерминант мусбат бўлиши керак, чунки (5) тенгликнинг ўнг томони f формадан иккита хосмас чизиқли алмаштириш орқали ҳосил қилинган, f форманинг детерминанти эса бу форманинг охирги бош минори сифатида мусбат эди.

Теореманинг исботи тугади.

Мисоллар 1. Ушбу

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

квадратик форма мусбат аниқланган, чунки унинг бош минорлари мусбат

$$5, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Ушбу

$$f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

квадратик форма мусбат аниқланган эмас, чунки унинг иккинчи бош минори манфий:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Мусбат аниқланган квадратик формаларга ўхшаш *манфий аниқланган формаларни* ҳам, яъни нормал кўринишлари номаълумларнинг фақат манфий квадратларидангина иборат хосмас квадратик формаларни киритиш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз. Нормал кўринишлари бир хил ишорали квадратлардан тузилган хос квадратик формалар баъзан *ярим аниқланган* формалар дейилади. Ниҳоят, нормал кўринишлари номаълумларнинг мусбат квадратлари билан бир қаторда манфий квадратларидан ҳам тузилган квадратик формалар *аниқланмаган* (*аниқмас*) дейилади.

ЕТТИНЧИ БОВ

ЧИЗИҚЛИ ФАЗОЛАР

29- §. Чизиқли фазо таърифи. Изоморфизм

n ўлчовли вектор фазонинг 8- § да берилган таърифи n ўлчовли векторни n та соннинг тартибланган системаси каби аниқлашдан бошланган эди. Кейин n ўлчовли векторлар учун қўшиш ва сонга кўпайтириш киритилган эди, бу эса n ўлчовли вектор фазо тушунчасига олиб келган эди. Вектор фазоларга дастлабки мисол қилиб, текисликда ёки уч ўлчовли фазода координаталар бошидан чиқувчи вектор-кесмалар тўпламини олиш мумкин. Бироқ геометрия курсида бу мисолларга дуч келар эканмиз, векторларни уларнинг бирор тайинланган координаталар системасидаги компоненталари орқали бериш зарур деб ҳамма вақт ҳам ҳисобламаймиз, чунки векторларни қўшиш ва уларни скалярга кўпайтириш координаталар системасининг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда геометрик аниқланади. Чунончи, текисликда ёки фазода векторларни қўшиш параллелограмм қоидаси бўйича бажарилади, векторни α сонга кўпайтириш эса бу векторни α марта (агар α манфий сон бўлса, вектор йўналишини тескарисига ўзгартириш билан) чўзишни билдиради. Умумий ҳолда ҳам вектор фазонинг „координатасиз" таърифини, яъни векторларни сонларнинг тартибланган системаси каби бериш талаб этилмайдиган таърифни киритиш мақсадга мувофиқдир. Ҳозир ана шундай таъриф берилади. Бу таъриф аксиоматик таърифдир: унда алоҳида векторнинг хоссалари тўғрисида ҳеч нима дейилмайди, бироқ векторлар устида бажариладиган амаллар бўйсиниши керак бўлган хоссалар санаб ўтилади.

V тўплам берилган бўлсин; унинг элементлари латинча кичик ҳарфлар билан белгиланади: a, b, c... [1] V тўпламда ундаги a, b элементларнинг ҳар қандай жуфтига V дан олинган, бир қийматли аниқланган $a+b$ элементни мос қўювчи ва a, b ларнинг *йиғиндиси* деб аталган *қўшиш амали* ва *ҳақи-*

---

[1] 2-бобда қабул қилингандан фарқли ўлароқ, бу ерда ва кейинги бобларда векторларни латин алфавитининг кичик ҳарфлари билан, сонларни эса грек алфавитининг кичик ҳарфлари билан белгилаймиз.

қий сонга кўпайтириш амали аниқланган бўлсин, шу билан бирга *a элементнинг* α *сонга кўпайтмаси* αa бир қийматли аниқланган ва V га тегишлидир.

Агар кўрсатилган амаллар қуйидаги I-VIII хоссаларга эга бўлсалар, V тўплам элементлари *векторлар* деб; V нинг ўзи эса *ҳақиқий чизиқли* (ёки *вектор,* ёки *аффин*) *фазо* дейилади:

I. Қўшиш коммутатив, $a+b=b+a$.

II. Қўшиш ассоциатив, $(a+b)+c=a+(b+c)$.

III. V да ундаги барча a лар учун $a+0=a$ шартни қаноатлантирадиган *ноль элемент* 0 мавжуд.

Ноль элементнинг ягоналигини I дан фойдаланиб исботлаш осон: агар 0_1 ва 0_2—иккита ноль элемент бўлса, у ҳолда

$$0_1+0_2=0_1,$$
$$0_1+0_2=0_2+0_1=0_2,$$

бу ердан $0_1=0_2$.

IV. Vда ҳар қандай a элемент учун $a+(-a)=0$ шартни қаноатлантирадиган $-a$ *қарама-қарши элемент* мавжуд.

Қарама-қарши элементнинг ягоналиги II ва I га кўра осонликча текширилади; агар $(-a)_1$ ва $(-a)_2$ лар a учун иккита қарама-қарши элемент бўлса, у ҳолда

$$(-a)_1+[a+(-a)_2]=(-a_1)+0=(-a)_1,$$
$$[(-a)_1+a]+(-a)_2=0+(-a)_2=(-a)_2,$$

бу ердан $(-a)_1=(-a)_2$.

I—IV аксиомалардан $a-b$ айирманинг, яъни

$$b+x=a \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантирадиган элементнинг *мавжудлиги ва ягоналиги* келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$a-b=a+(-b)$$

деб олиш мумкин, чунки

$$b+[a+(-b)]=[b+(-b)]+a=0+a=a.$$

Агар (1) тенгламани қаноатлантирадиган, яъни

$$b+c=a$$

бўладиган яна бир c элемент мавжуд бўлса, у ҳолда бу тенгликнинг ҳар иккала қисмиға $-b$ элементни қўшиб,

$$c=a+(-b)$$

ни ҳосил қиламиз.

Навбатдаги V—VIII аксиомалар (8-§ билан таққосланг) сонга кўпайтиришни қўшиш билан ва сонлар устидаги амаллар билан боғлайди Чунончи, V дан олинган исталган a, b элементлар учун, исталган α, β ҳақиқий сонлар учун ва ҳақиқий сон 1 учун қуйидаги тенгликлар бажарилиши керак:

V. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$;
VI. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$;
VII. $(\alpha\beta)a=\alpha(\ a)$;
VIII $1\cdot a=a$.

Бу аксиомалардан келиб чиқадиган баъзи энг содда хоссаларни кўрсатамиз.

[1]. $$\alpha\cdot 0=0.$$

Ҳақиқиқатан ҳам V даги бирор a учун

$$\alpha a=\alpha(a+0)=\alpha a+\alpha\cdot 0,$$

яъни

$$\alpha\cdot 0=\alpha a-\alpha a=\alpha a+[-(\alpha a)]=0.$$

[2]. $$0\cdot a=0,$$

бу ерда чап томонда ноль сони, ўнг томонда эса V даги ноль элемент турибди.

Исботлаш учун исталган α сонни оламиз. У ҳолда

$$\alpha a=(\alpha+0)a=\alpha a+0\cdot a,$$

бу ердан

$$0\cdot a=\alpha a-\alpha a=0.$$

[3]. Агар $\alpha a=0$ бўлса, у ҳолда ёки $\alpha=0$, ёки $a=0$.

Ҳақиқатан ҳам агар $\alpha\neq 0$, яъни α^{-1} сон мавжуд бўлса, у ҳолда

$$a=1\cdot a=(\alpha^{-1}\alpha)a=\alpha^{-1}(\alpha a)=\alpha^{-1}\cdot 0=0.$$

[4]. $$\alpha(-a)=-\alpha a.$$

Дарҳақиқат

$$\alpha a+\alpha(-a)=\alpha[a+(-a)]=\alpha\cdot 0=0,$$

яъни $\alpha(-a)$ элемент αa элементга қарама-қарши.

[5]. $$(-\alpha)a=-\alpha a.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha a+(-\alpha)a=[\alpha+(-\alpha)]a=0\cdot a=0,$$

яъни $(-\alpha)a$ элемент αa элементга қарама-қарши.

[6]. $\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b$.

Ҳақиқатан ҳам, [4] га кўра,

$$\alpha(a-b)=\alpha[a+(-b)]=\alpha a+\alpha(-b)=\alpha a+(-\alpha b)=\alpha a-\alpha b.$$

[7]. $$(\alpha-\beta)a=\alpha a-\beta a.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$(\alpha-\beta)a=[\alpha+(-\beta)]a=\alpha a+(-\beta)a=\alpha a+(-\beta a)=\alpha a-\beta a.$$

Юқорида санаб ўтилган аксиомалар ва улардан келиб чиқадиган натижалардан келгусида бирон-бир изоҳсиз фойдалана боришимизни қайд қилиб ўтамиз.

Юқорида ҳақиқий чизиқли фазога таъриф берилди. Агар биз V тўпламда фақат ҳақиқий сонга эмас, балки исталган комплекс сонга ҳам кўпайтириш аниқланган деб фараз қиладиган бўлсак, ўша I—VIII аксиомаларни сақлаган ҳолда *комплекс чизиқли фазонинг* таърифини ҳосил қилган бўлар эдик. Қуйида аниқлик учун, ҳақиқий чизиқли фазолар қаралади, бироқ ушбу бобда айтилганларнинг ҳаммасини комплекс чизиқли фазолар учун сўзма-сўз такрорлаш мумкин.

Ҳақиқий чизиқли фазоларнинг мисолларини келтириш осон. Энг аввал, 2-бобда ўрганилган вектор-сатрлардан тузилган n ўлчовли ҳақиқий вектор фазолар бунга мисол бўла олади. Агар қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари параграф бошида кўрсатилган геометрик маънода тушуниладиган бўлса, текисликда ёки уч ўлчовли фазода координата бошидан чиқадиган вектор-кесмалар тўплами ҳам чизиқли фазо бўлади.

Бундан ташқари „чексиз ўлчовли“ деб аталувчи чизиқли фазоларнинг ҳам мисоллари мавжуд. Ҳақиқий сонларнинг мумкин бўлган барча кетма-кетликларини қарайлик; у қуйидаги кўринишга эга:

$$a=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots).$$

Кетма-кетликлар устида бажариладиган амаллар компонентлар бўйича бажарилади: агар

$$b=(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots),$$

бўлса, у ҳолда

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n,\ \ldots);$$

иккинчи томондан исталган γ ҳақиқий сон учун

$$\gamma a=(\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n,\ \ldots).$$

Барча I—VIII аксиомалар бажарилади, яъни ҳақиқий чизиқли фазони ҳосил қиламиз.

Агар функцияларни қўшишни ва уларни ҳақиқий сонга кўпайтиришни функциялар назариясида қабул қилинган маънода, яъни эркли ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос келган қийматларни қўшиш ёки сонга кўпайтириш каби тушунилса, ҳақиқий ўзгарувчининг мумкин бўлган барча ҳақиқий функциялари тўплами ҳам чексиз ўлчовли фазога мисол бўлади.

Изоморфизм. Барча чизиқли фазолар ичидан табиий равишда чекли ўлчовли деб аташ мумкин бўлганларни ажратиб олиш бизнинг энг дастлабки вазифамиздир. Аввал битта умумий тушунча киритамиз.

Чизиқли фазоға таъриф беришда векторлар устида бажариладиган амалларнинг хоссалари тўғрисида гапирилди, бироқ векторларнинг ўзларининг хоссалари тўғрисида ҳеч нарса дейилмайди. Шунга кўра, берилган иккита чизиқли фазонинг векторлари табиатан мутлақо ҳар хил бўлсалар-да, бироқ амалларнинг хоссалари нуқтаи назаридан бу иккита фазо бир-биридан фарқ қилмайдиган бўлиши мумкин. Аниқ таъриф қуйидагича:

Агар иккита ҳақиқий чизиқли V ва V' фазо векторлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлса, яъни V даги ҳар қандай a векторга V' дан a' вектор—a векторнинг образи—мос қўйилган бўлса, шу билан бирга V даги турли векторлар турлича образларга эга бўлсалар ва V' даги ҳар қандай вектор V даги бирор вектор учун образ бўлса ҳамда бундай мосликда иккита вектор йиғиндисининг образи бўлиб, бу векторлар образларнинг йиғиндиси хизмат қилса:

$$(a+b)' = a' + b', \tag{2}$$

векторнинг сонга кўпайтмасининг образи эса бу вектор образининг ўша сонга кўпайтмасидан иборат бўлса:

$$(\alpha a)' = \alpha a' \tag{3}$$

берилган V ва V' ҳақиқий чизиқли фазолар *изоморф* дейилади. V ва V' фазолар орасида (2) ва (3) шартларга бўйсунувчи ўзаро бир қийматли мослик *изоморф мослик* дейилишини айтиб ўтайлик.

Масалан, текисликда координаталар бошидан чиқадиган вектор-кесмалар фазоси ҳақиқий сонларнинг тартибланган жуфтларидан тузилган икки ўлчовли вектор фазога изоморфдир: агар текисликда бирор координаталар системасини тайинласак ва ҳар қандай вектор-кесмага унинг координатасининг тартибланган жуфтини мос келтирсак, бу фазолар орасида изоморф мосликни ҳосил қиламиз.

Чизиқли фазолар изоморфизмининг қуйидаги хоссасини исбот қиламиз: *V ва V' фазолар орасидаги изоморф мосликда V даги ноль элементнинг образини V' даги ноль элемент бажаради.*

Ҳақиқатан ҳам, a V даги бирор вектор, a' эса унинг V' даги образи бўлсин. У ҳолда, (2) га кўра

$$a' = (a+0)' = a' + 0',$$

яъни $0'$ V' фазонинг ноли бўлади.

30- §. Чекли ўлчовли фазолар Базалар

Вектор-сатрлар чизиқли боғлиқлигининг 9-§ да келтирилган иккита таърифида ҳам бу таърифларнинг эквивалентлилиги ҳақидаги теореманинг исботида ҳам фақат векторлар устида бажариладиган амаллардан фойдаланилганлигини ва шу сабабли уларни исталган чизиқли фазолар бўлган ҳол учун татбиқ қилиш мумкинлигини китобхон ҳеч бир қийинчиликсиз текшириб кўриши мумкин. Бинобарин, аксиоматик аниқланган чизиқли фазоларда векторларнинг чизиқли эркли системаси ҳақида, максимал чизиқли эркли системалар ҳақида (агар булар мавжуд бўлса) ва ҳоказолар ҳақида гапириш мумкин.

Агар V ва V' чизиқли фазолар изоморф бўлса, у ҳолда V даги $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторлар системаси уларнинг V' даги образлари системаси $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ чизиқли боғлиқ бўлганда ва фақат шундагина чизиқли боғлиқ бўлади.

Агар (V даги барча a лар учун) $a \to a'$ мослик V ва V' орасидаги изоморф мослик бўлса, у ҳолда тескари $a' \to a$ мослик ҳам изоморф бўлишини қайд қилиб ўтамиз. Шу сабабли $a_1, a_2, \ldots, a_k$ система чизиқли боғлиқ бўлган ҳолни қараб чиқиш етарли.

Орасида нолга тенг эмаслари ҳам бор бўлган шундай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ сонлар мавжуд бўлсинки, улар учун ушбу

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$$

тенглик бажарилсин. Қаралаётган изоморфизмда бу тенглик ўнг қисмининг образи V' фазодаги ноль $0'$ бўлиши бизга маълум. Чап томонининг образини олсак ва (2), (3) ларни бир неча марта қўлласак,

$$\alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \ldots + \alpha_k a'_k = 0'$$

ни ҳосил қиламиз, яъни $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ система ҳам чизиқли боғлиқ экан.

Чекли ўлчовли фазолар. Агар V чизиқли фазода чекли максимал чизиқли эркли векторлар системасини топиш мумкин бўлса, бундай фазо *чекли ўлчовли* дейилади; векторларнинг ана шундай ҳар қандай системаси V фазонинг *базаси* дейилади.

Чекли ўлчовли чизиқли фазо кўпгина турли базаларга эга бўлиши мумкин. Масалан, текисликдаги вектор-кесмалар фазосида база бўлиб, бир тўғри чизиқда ётмаган ва нолдан фарқли ихтиёрий векторлар жуфти хизмат қилади. Чекли ўлчовли фазога берган таърифимиз, бу фазода ҳар хил сондаги векторлардан ташкил топган базалар мавжуд бўлиши мумкинми деган саволга ҳозирча жавоб бермаслигини қайд қиламиз.

Бундан ташқари, баъзи чекли ўлчовли фазоларда ҳатто векторлар сони исталганча катта бўлган базалар мавжуд деб фараз қилиш мумкин. Ҳозир, ҳақиқий аҳвол аслида қандай эканлигини аниқлашга киришамиз.

V чизиқли фазо n та вектордан иборат

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{1}$$

базага эга бўлсин. Агар a вектор V даги ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда (1) чизиқли эркли системанинг максимал эканлигидан a векторнинг бу система орқали чизиқли ифодаланиши келиб чиқади:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n. \tag{2}$$

Иккинчи томондан, (1) система чизиқли эркли бўлгани учун (2) ифода a вектор учун ягона бўлади: агар

$$a = \alpha' e_1 + \alpha'_2 e_2 + \ldots + \alpha'_n e_n$$

бўлса, у ҳолда

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) e_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n) e_n = 0,$$

бу ердан

$$\alpha_i = \alpha'_i, \quad i = 1,2, \ldots, n.$$

Шундай қилиб, a векторга унинг (1) база орқали (2) ифодасидаги коэффициентлардан тузилган

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{3}$$

сатр ёки бизнинг айтишимизча, унинг (1) *базадаги координаталари сатри* бир қийматли мос келади. Аксинча, (3) кўринишдаги ҳар қандай сатр, яъни 2-бобдаги маънода қараладиган ҳар қандай n ўлчовли вектор V фазонинг бирор вектори учун, чунончи (1) база ёрдамида (2) кўринишда ёзиладиган вектор учун (1) базада координаталар сатри бўлиб хизмат қилади.

Шундай қилиб, V фазонинг ҳамма векторлари ва сатрларнинг n ўлчовли вектор фазосининг барча векторлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни ҳосил қилдик. (1) базанинг танлаб олинишига боғлиқ бўлган бу мослик изоморф эканлигини кўрсатамиз.

V фазода (1) база ёрдамида (2) кўринишда ифодаланувчи a вектордан ташқари, (1) база ёрдамида ифодаси

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

бўлган яна бир b векторни оламиз.
У ҳолда

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$

яъни *a ва b векторларнинг йиғиндисига уларнинг (1) базадаги координаталари сатрларининг йиғиндиси мос келади.* Иккинчи томондан,

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1)e_1 + (\gamma\alpha_2)e_2 + \ldots + (\gamma\alpha_n)e_n,$$

яъни *a векторнинг γ сонга кўпайтмасига унинг (1) базадаги координаталар сатрининг ана шу γ сонга кўпайтмаси мос келади.*

Бу билан қуйидаги теорема исбот бўлди:

n та вектордан иборат базага эга бўлган ҳар қандай чизиқли фазо сатрларнинг n ўлчовли вектор фазосига изоморфдир.

Чизиқли фазолар орасидаги изоморф мосликда векторларнинг чизиқли боғлиқ системаси чизиқли боғлиқ системага ўтиши ва аксинча эканлиги маълум, шунинг учун чизиқли эркли система чизиқли эркли системага ўтади. Бу ердан, *изоморф мосликда база яна базага ўтиши келиб чиқади.*

Ҳақиқатан ҳам, V фазонинг $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базаси V ва V' фазолар орасидаги изоморф мосликда V' фазонинг чизиқли эркли бўлса-да, бироқ максимал бўлмаган $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ векторлар системасига ўтсин. Бинобарин, V' да шундай f' вектор топиш мумкинки, $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, f'$ система чизиқли эрклилигича қолади. Бироқ f' вектор қаралаётган изоморфизмда V даги бирор f вектор учун образ бўлади. У ҳолда $e_1, e_2, \ldots,$ $\ldots, e_n, f$ векторлар системаси, база таърифига зид ўлароқ, чизиқли эркли бўлиши кераклигини ҳосил қиламиз.

Бизга яна маълумки (9-§ га қаранг), сатрларнинг n ўлчовли векторлар фазосида барча максимал чизиқли эркли системалар n та вектордан иборат, $n+1$ вектордан иборат ҳар қандай система чизиқли боғлиқ ва векторларнинг ҳар қандай чизиқли эркли системаси бирор максимал чизиқли эркли системада ётади. Изоморф мосликларнинг юқорида тайинланган хоссаларини эътиборга олиб, қуйидаги натижаларни ҳосил қиламиз:

Чекли ўлчовли чизиқли V фазонинг ҳамма базалари бир хил сондаги векторлардан иборат. Агар бу сон n га тенг бўлса, *V фазо n ўлчовли чизиқли фазо, n* сон эса бу фазонинг *ўлчами* дейилади.

n ўлчовли чизиқли фазонинг $n+1$ та векторидан иборат ҳар қандай система чизиқли боғлиқ.

n ўлчовли чизиқли фазонинг ҳар қандай чизиқли эркли системаси бу фазонинг бирор базасида ётади.

Энди ҳақиқий чизиқли фазоларнинг мисоли сифатида юқорида келтирилган кетма-кетликлар фазоси ва функциялар фазоси чекли ўлчовли фазолар эмаслигини кўриш осон: ўқувчи ҳеч бир қийинчиликсиз бу фазоларнинг ҳар бирида исталган катта сондаги векторлардан ташкил топган чизиқли эркли системалар топиши мумкин.

Базалар орасидаги муносабат. Биз ўрганаётган объект чекли ўлчовли чизиқли фазолардир. n ўлчовли чизиқли фазоларни ўрганар эканмиз, тушунарлики, аслида 2- бобдаёқ киритилган сатрларнинг n ўлчовли вектор фазосини ўрганган бўламиз Бироқ илгари бу фазода битта база, у ҳам бўлса бирлик векторлардан, яъни битта координатаси бирга тенг бўлиб, қолган координаталари нолга тенг бўлган векторлардан тузилган база ажратилган эди ва фазонинг ҳамма векторлари уларнинг ана шу базадаги координаталари сатрлари билан берилар эди; бу ерда эса энди фазонинг ҳамма базалари биз учун тенг ҳуқуқлидир.

n ўлчовли чизиқли фазода қанча база топиш мумкинлигини ва бу базалар бир-бири билан қандай муносабатда эканлигини кўрайлик.

n ўлчовли чизиқли V фазода

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{4}$$

ва

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \tag{5}$$

базалар берилган бўлсин. (5) базанинг ҳар бир вектори V фазонинг ҳар қандай вектори каби (4) база орқали бир қийматли ёзилади:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Сатрлари (5) векторларнинг (4) базадаги координаталари сатрларидан иборат бўлган

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \ldots & \tau_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \tau_{n1} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица (4) базадан (5) базага *ўтиш матрицаси* дейилади.

(4) ва (5) базалар ҳамда ўтиш матрицаси T орасидаги муносабатни (6) га кўра ушбу

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

матрицавий тенглик кўринишида ёзиш мумкин ёки устун шаклида ёзилган (4) ва (5) ни мос равишда e ва e' орқали белгиласак:

$$e' = Te,$$

Иккинчи томондан, агар T' (5) базадан (4) базага ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда

$$e = T'e'.$$

Бу ердан

$$e = (T'T)\,e,$$
$$e' = (T\,T')\,e',$$

яъни e ва e' базалар чизиқли эркли бўлгани учун

$$T'\,T = T\,T' = E,$$

бу ердан

$$T' = T^{-1}.$$

Бу билан *бир базадан бошқасига ўтиш матрицаси ҳардоим хосмас матрица бўлиши* исботланди.

Элементлари ҳақиқий бўлган n- тартибли ҳар қандай хосмас квадрат матрица n ўлчовли ҳақиқий чизиқли фазонинг берилган базасидан бирор бошқа базага ўтиш матрицаси бўлиб хизмат қилади.

Ҳақиқатан ҳам, (4) база ва n- тартибли хосмас T матрица берилган бўлсин. (5) сифатида шундай векторлар системасини оламизки, улар учун T матрицанинг сатрлари уларнинг (4) базадаги координаталар сатри бўлсин; бинобарин, (7) тенглик ўринли бўлади. (5) векторлар чизиқли эрклидир — уларнинг орасидаги чизиқли боғлиқлик T матрица сатрларининг чизиқли боғлиқлигини келтириб чиқарар эдики, бу эса матрицанинг хосмас эканлигига зиддир. Шунинг учун n та вектордан иборат (5) чизиқли эркли система биз қараётган фазонинг базаси бўлади, T матрица эса (4) базадан (5) базага ўтиш матрицаси бўлади.

n ўлчовли чизиқли фазода n- тартибли ҳар хил хосмас квадрат матрицалар қанча кўп мавжуд бўлса, шунча кўп ҳар хил базалар мавжуд бўлишини кўрамиз. Албатта бир хил векторлардан тузилган, бироқ турли таргибда ёзилган базалар бирбиридан фарқли деб ҳисобланади.

Векторнинг координаталарини алмаштириш. n ўлчовли фазода ўтиш матрицаси $T = (\tau_{ij})$ бўлган (4) ва (5) базалар берилган бўлсин:

$$e' = Te.$$

Ихтиёрий a векторнинг бу базалардаги координаталар сатрлари орасидаги муносабатни топамиз.

Айтайлик,

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \tag{8}$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i$$

бўлсин, (6) дан фойдаланиб

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\left(\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij}\right)e_j$$

ни ҳосил қиламиз. (8) билан солиштириб ва векторнинг база орқали ёзувининг ягоналигидан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij},\quad j=1, 2, \ldots, n,$$

яъни

$$(\alpha_1.\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)\,T$$

матрицавий тенглик ўринлидир.

Шундай қилиб, *а векторнинг е базадаги координаталар сатри бу векторнинг е' базадаги координаталар сатрини е базадан е' базага ўтиш матрицасига ўнг томондан кўпайтирилганига тенг.*

Тушунарлики, бу ердан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,T^{-1}.$$

Мисол. Базаси

$$e_1,\ e_2,\ e_3 \tag{9}$$

бўлган уч ўлчовли ҳақиқий чизиқли фазони қарайлик. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} e'_1&=5e_1-e_2-2e_3,\\ e'_2&=2e_1+3e_2,\\ e'_3&=-2e_1+e_2+e_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

векторлар ҳам бу фазода база ташкил этади ва (9) дан (10) га ўтиш матрицаси

$$T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлади, бу ердан

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Шунинг учун $a=e_1+4e_2-e_3$ векторнинг (10) базадаги координаталар сатри қуйидагича бўлади:

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)=(1, 4, -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13, 6, -27),$$

яъни

$$a=-13e'_1+6e'_2-27e'_3$$

31- §. Чизиқли алмаштиришлар

Номаълумларни чизиқли алмаштириш тушунчаси билан 3-бобда танишган эдик. Ҳозир киритиладиган тушунча худди шундай ном билан аталса-да, бироқ бошқача характерга эга бўлади. Шундай бўлишига қарамай, бир хил номдаги бу иккита тушунча орасидаги баъзи бир муносабатларни кўрсатиш мумкин.

n ўлчовли ҳақиқий чизиқли фазо берилган бўлсин. Уни V_n орқали белгилаймиз. Бу фазони *алмаштиришни*, яъни V_n фазонинг ҳар бир a векторини шу фазонинг бирор a' векторига ўтказувчи акслантиришни қараймиз. a' вектор a векторнинг қаралаётган алмаштиришдаги *образи* дейилади.

Агар алмаштириш φ орқали белгиланган бўлса, у ҳолда a векторнинг образини $\varphi(a)$ ёки φa орқали эмас—бу ўқувчига қулайроқ бўлур эди—балки, $a\varphi$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$a' = a\varphi.$$

Агар V_n чизиқли фазони φ алмаштириш исталган иккита a ва b векторнинг йиғиндисини бу векторлар образларининг йиғиндисига:

$$(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi, \tag{1}$$

исталган a векторнинг исталган α сонга кўпайтмасини эса a вектор образи билан шу α соннинг кўпайтмасига ўтказса:

$$(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi), \tag{2}$$

φ алмаштириш *чизиқли алмаштириш* дейилади.

Бу таърифдан дарҳол *чизиқли фазонинг чизиқли алмаштириши берилган $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторларнинг исталган чизиқли комбинациясини бу векторлар образларининг чизиқли комбинациясига (ўша коэффициентлар билан) ўтказиши келиб чиқади.*

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k)\varphi = \alpha_1(a_1\varphi) + \alpha_2(a_2\varphi) + \\ + \ldots + \alpha_k(a_k\varphi). \tag{3}$$

Ушбу даъвони исботлаймиз:

Чизиқли фазо V_n ни исталган чизиқли алмаштириш φ да ноль вектор 0 қўзғалмасдан қолади:

$$0\varphi = 0,$$

берилган a вектор учун қарама-қарши бўлган векторнинг образи *a векторнинг образига қарама-қарши бўлган вектор бўлади:*

$$(-a)\varphi = -a\varphi.$$

Ҳақиқатан ҳам, агар b—ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда (2) га кўра

$$0\varphi = (0\cdot b)\varphi = 0\cdot(b\varphi) = 0.$$

Иккинчи томондан,

$$(-a)\varphi = [(-1)a]\varphi = (-1)(a\varphi) = -a\varphi,$$

Чизиқли фазони чизиқли алмаштириш тушунчаси аналитик геометрия курсидан маълум бўлган текисликни ёки уч ўлчовли фазони аффин алмаштиришнинг умумлашмаси сифатида келиб чиққан; дарҳақиқат, (1) ва (2) шартлар аффин алмаштиришлар учун бажарилади. Бу шартлар текисликдаги ёки уч ўлчовли фазодаги векторларнинг бирор тўғри чизиққа (ёки бирор текисликка) проекциялари учун ҳам бажарилади. Шундай қилиб, масалан, текисликнинг координаталар бошидан чиқувчи вектор-кесмаларининг икки ўлчовли чизиқли фазосида ҳар қандай векторни унинг координаталар бошидан ўтувчи бирор ўққа проекциясига ўтказувчи алмаштириш—чизиқли алмаштириш бўлади.

Ҳар қандай a векторни ўз ўрнида қолдирувчи:

$$a\varepsilon = a$$

айнан алмаштириш ε ва ҳар қандай a векторни 0 га акслантирувчи:

$$a\omega = 0$$

ноль алмаштириш ω ихтиёрий V_n фазода чизиқли алмаштиришларга мисол бўлади.

Ҳозир V_n чизиқли фазонинг барча чизиқли алмаштиришларининг бирор тасвирини ҳосил қиламиз.

$$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad (4)$$

V_n фазонинг базаси бўлсин; устун шаклида жойлашган (4) базани, илгаригидек, e орқали белгилаймиз. V_n фазонинг ҳар қандай a вектори (4) база ёрдамида векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида бир қийматли тасвирлангани учун, (3) га кўра, a векторнинг образи ўша коэффициентлар билан (4) векторлар образлари орқали ифодаланади. Бошқача сўз билан айтганда, *V_n фазони ҳар қандай φ чизиқли алмаштириш тайинланган* (4) *база барча векторларининг*

$$e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$$

образлари берилиши билан бир қийматли аниқланади.

V_n фазонинг n та вектордан иборат тартибланган

$$c_1, c_2, \dots, c_n \qquad (5)$$

система қандай бўлмасин, бу фазони шундай чизиқли алмаштириш φ мавжудки (шу билан бирга у ягонадир) бу ал-

маштиришда (5) *система* (4) *база векторлари образларининг системаси бўлиб хизмат қилади:*

$$e_i\varphi = c_i, \quad i = 1,2, \ldots, n. \tag{6}$$

φ алмаштиришнинг ягоналиги юқорида исбот қилинган, фақат унинг мавжуд эканлигини исбот қилиш етарли. φ алмаштиришни қуйидагича аниқлаймиз: агар a—фазонинг ихтиёрий вектори бўлса ва

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

унинг (4) базадаги ёзуви бўлса, у ҳолда

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \tag{7}$$

деймиз. Бу алмаштиришнинг чизиқли эканлигини исбот қиламиз Агар

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

фазонинг ихтиёрий бошқа вектори бўлса, у ҳолда

$$(a+b)\varphi = \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\, e_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = a\varphi + b\varphi.$$

Агар γ—исталган сон бўлса, у ҳолда

$$(\gamma a)\,\varphi = \left|\sum_{-1}^{n} (\gamma\alpha_i)\, e_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i\ c_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \gamma(a\varphi).$$

(6) тенгликнинг ўринли эканлиги масаласига келсак, у алмаштиришнинг (7) бўйича аниқланишидан келиб чиқади, чунки e_i векторнинг (4) базада 1 га тенг бўлган i- координатасидан ташқари барча координаталари нолга тенг.

Бинобарин, V_n *чизиқли фазони барча чизиқли алмаштиришлар билан бу фазонинг* n *та вектордан тузилган барча* (5) *тартибланган системалар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатдик.*

Бироқ ҳар қандай c_i вектор (4) базада аниқ бир ёзувга эга:

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad i = 1,2, \ldots, n. \tag{8}$$

c_i векторнинг (4) базадаги координаталаридан

$$A = (\alpha_{ij}) \qquad (9)$$

квадрат матрица тузиш мумкин, бу ерда матрицанинг i-сатри сифатида ($i = 1, 2, \dots, n$) c_i вектор координаталари сатри олинади. (5) система ихтиёрий бўлгани учун A матрица ихтиёрий ҳақиқий коэффициентли n-тартибли квадрат матрица бўлади.

Шундай қилиб, V_n фазони барча чизиқли алмаштиришлар билан барча n-тартибли квадрат матрицалар орасидаги ўзаро бир қийматли мосликка эгамиз: бу мослик, албатта, (4) базанинг танлаб олинишига боғлиқдир.

A матрица (4) базада φ алмаштиришни беради ёки қисқача, *A чизиқли алмаштириш φ нинг (4) базадаги матрицаси* деб айтамиз. Агар (4) база векторлари образларидан тузилган устунни $e\varphi$ орқали белгилайдиган бўлсак, у ҳолда (6), (8) ва (9) дан ушбу матрицавий тенглик келиб чиқади:

$$e\varphi = Ae. \qquad (10)$$

Бу тенглик φ чизиқли алмаштириш, e база ва бу чизиқли алмаштиришни шу базада берувчи A матрица орасида мавжуд бўлган муносабатларни тўла тавсифлайди.

φ чизиқли алмаштиришнинг (4) базадаги матрицаси A ни билган ҳолда a векторнинг бу базадаги координаталари бўйича унинг $a\varphi$ образи координаталарини қандай топиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Агар

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

бўлса, у ҳолда

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi),$$

бу

$$a\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(e\varphi)$$

матрицавий тенгликка тенг кучлидир.

(10) дан фойдалансак ва матрицаларни кўпайтиришнинг ассоциативлигини матрицалардан бири векторлардан тузилган устундан иборат бўлганда ҳам текшириш осонлигини назарга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a\varphi = [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A]e$$

Бу ердан, *$a\varphi$ векторнинг координаталар сатри a векторнинг координаталар сатрини φ чизиқли алмаштиришнинг A матрицасига ўнг томондан кўпайтирилганига (ҳаммаси (4) базада) тенг эканлиги келиб чиқади.*

Мисол. Уч ўлчовли чизиқли фазонинг e_1, e_2, e_3 базасида φ чизиқли алмаштириш

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица билан берилган бўлсин. Агар

$$a = 5e_1 + e_2 - 2e_3$$

бўлса, у ҳолда

$$(5,\ 1,\ -2)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = (-9,\ 16,\ 0),$$

яъни

$$a\varphi = -9e_1 + 16e_2.$$

Чизиқли алмаштиришнинг турли базалардаги матрицалари орасида муносабат. Чизиқли алмаштиришни берувчи матрица базанинг танлаб олинишига боғлиқ эканлиги ўз-ўзидан маълум. Турли базаларда бир хил чизиқли алмаштиришни берувчи матрицалар орасида қандай муносабат бор эканлигини кўрсатамиз.

Ўтиш матрицаси T бўлган e ва e' базалар берилган бўлсин,

$$e' = Te \tag{11}$$

ва φ чизиқли алмаштириш бу базаларда мос равишда A ва A' матрицалар билан берилган бўлсин:

$$e\varphi = Ae,\quad e'\varphi = A'e'. \tag{12}$$

(12) нинг иккинчи тенглиги, (11) га кўра

$$(Te)\varphi = A'(Te)$$

тенгликка олиб келади. Бироқ

$$(Te)\varphi = T(e\varphi).$$

Ҳақиқатан ҳам, агар $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{in})$ сатр T матрицанинг i-сатри бўлса, у ҳолда

$$(\tau_{i1}e_1 + \tau_{i2}e_2 + \ldots + \tau_{in}e_n)\varphi = \tau_{i1}(e_1\varphi) + \tau_{i2}(e_2\varphi) + \ldots + \tau_{in}(e_n\varphi)$$

Шундай қилиб, (12) га кўра

$$(Te)\varphi = T(e\varphi) = T(Ae) = (TA)e,$$
$$A'(Te) = (A'T)e,$$

яъни

$$(TA)e = (A'T)e.$$

Агар ҳеч бўлмаганда битта i, $1 \leqslant i \leqslant n$ учун TA матрицанинг i сатри $A'T$ матрицанинг i-сатридан фарқли бўлса, у ҳолда $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторларнинг иккита ҳар хил чизиқли комби нацияси бир-бирига тенг бўлиб қолади, бу эса e базанинг чизиқли эркли эканлигига зиддир. Шундай қилиб,

$$TA = A'T,$$

бу ердан ўтиш матрицаси T нинг хосмас эканлигига кўра

$$A' = TAT^{-1},\quad A = T^{-1}A'T. \tag{13}$$

Агар B ва C квадрат матрицалар

$$C = Q^{-1}BQ$$

(бу ерда Q—бирор хосмас матрица) тенглик орқали богланган бўлса, улар *ўхшаш матрицалар* дейилишини қайд қилиб ўтайлик. Бундай ҳолда C матрица B матрицани Q матрица билан *трансформациялаш* ёрдамида ҳосил қилинган дейилади.

Юқорида исбот қилинган (13) тенгликларни қуйидаги муҳим теорема кўринишида баён қилиш мумкин:

Турли базаларда бир хил чизиқли алмаштиришни берувчи матрицалар бир-бирлари билан ўхшашдир. Бунда φ чизиқли алмаштиришнинг e' базадаги матрицаси бу алмаштиришнинг e базадаги матрицасини e' базадан e базага ўтиш матрицаси билан трансформациялаш ёрдамида ҳосил қилинади.

Агар A матрица e базада φ чизиқли алмаштиришни берса, у ҳолда A матрицага ўхшаш исталган B

$$B = Q^{-1}AQ$$

матрица ҳам бирор базада, чунончи e дан ўтиш матрицаси Q^{-1} ёрдамида ҳосил қилинадиган базада φ алмаштиришни беришини қайд қилиб ўтайлик.

Чизиқли алмаштиришлар устида амаллар. V_n фазони ҳар бир чизиқли алмаштиришга унинг тайинланган базадаги матрицасини мос келтириб, исботланганга кўра, барча чизиқли алмаштиришлар ва барча n-тартибли квадрат матрицалар орасида ўзаро бир қийматли мосликни ҳосил қиламиз. Матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш, шунингдек, матрицани сонга кўпайтириш амалларига чизиқли алмаштиришлар устида ҳам худди шундай амаллар мос келишини кутиш табиийдир.

V_n чизиқли фазода φ ва ψ чизиқли алмаштиришлар берилган бўлсин. Ушбу

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi \tag{14}$$

тенглик билан аниқланадиган $\varphi+\psi$ алмаштиришни бу алмаштиришларнинг *йиғиндиси* деб атаймиз, бинобарин, бу тенглик исталган a векторни унинг φ ва ψ алмаштиришлардаги образлари йиғиндисига ўтказади.

$\varphi+\psi$ *алмаштириш чизиқлидир.* Ҳақиқатан ҳам, исталган a ва b векторлар ва исталган α сон учун:

$$(a+b)(\varphi+\psi)=(a+b)\varphi+(a+b)\psi=a\varphi+b\varphi+a\psi+b\psi=$$
$$=a(\varphi+\psi)+b(\varphi+\psi);$$
$$(\alpha a)(\varphi+\psi)=(\alpha a)\varphi+(\alpha a)\psi=\alpha(a\varphi)+\alpha(a\psi)=$$
$$=\alpha(a\varphi+a\psi)=\alpha[a(\varphi+\psi)].$$

φ ва ψ чизиқли алмаштиришларнинг *кўпайтмаси* деб

$$a(\varphi\psi)=(a\varphi)\psi \tag{15}$$

тенглик билан аниқланувчи, яъни φ ва ψ алмаштиришларни кетма-кет бажаришдан ҳосил бўладиган $\varphi\psi$ алмаштиришга айтамиз.

$\varphi\psi$ *алмаштириш чизиқлидир*:

$$(a+b)(\varphi\psi)=[(a+b)\varphi]\psi=(a\varphi+b\varphi)\psi=(a\varphi)\psi+(b\varphi)\psi=$$
$$=a(\varphi\psi)+b(\varphi\psi);$$
$$(\alpha a)(\varphi\psi)=[\alpha a)\varphi]\psi=[\alpha(a\varphi)]\psi=\alpha[(a\varphi)\psi]=\alpha[a(\varphi\psi)].$$

Ниҳоят, φ *чизиқли алмаштиришни* $\varkappa$ *сонга кўпайтмаси* деб

$$a(\varkappa\varphi)=\varkappa(a\varphi) \tag{16}$$

тенглик билан аниқланувчи $\varkappa\varphi$ алмаштиришга айтамиз; бинобарин, барча векторларнинг образлари φ алмаштиришда $\varkappa$ сонга кўпайтирилади.

$\varkappa\varphi$ *алмаштириш чизиқлидир*:

$$(a+b)(\varkappa\varphi)=\varkappa[(a+b)\varphi]=\varkappa(a\varphi+b\varphi)=\varkappa(a\varphi)+\varkappa(b\varphi)=$$
$$=a(\varkappa\varphi)+b(\varkappa\varphi);$$
$$(\alpha a)(\varkappa\varphi)=\varkappa[(\alpha a)\varphi]=\varkappa[\alpha(a\varphi)]=\alpha[\varkappa(a\varphi)]=\alpha[a(\varkappa\varphi)].$$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ базада φ ва ψ алмаштиришлар мос равишда $A=(\alpha_{ij})$ ва $B=(\beta_{ij})$ матрицалар билан берилган бўлсин:

$$\boldsymbol{e}\varphi=A\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{e}\psi=B\boldsymbol{e}.$$

У ҳолда, (14) га кўра

$$e_i(\varphi+\psi)=e_i\varphi+e_i\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}e_j=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})e_j,$$

яъни

$$e(\varphi+\psi)=(A+B)\boldsymbol{e}.$$

Шундай қилиб, *исталган базада чизиқли алмаштиришлар йиғиндисининг матрицаси бу алмаштиришларнинг уша базадаги матрицалари йиғиндисига тенг.*

Иккинчи томондан, (15) га кўра

$$e_i(\varphi\psi) = (e_i\varphi)\psi = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j\right)\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(e_j\psi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}\right)e_k,$$

яъни

$$e(\varphi\psi) = (AB)e.$$

Бошқача сўз билан айтганда, *исталган базада чизиқли алмаштиришлар кўпайтмасининг матрицаси бу алмаштиришларнинг ўша базадаги матрицалари кўпайтмасига тенг.*

Ниҳоят, (16) га кўра

$$e_i(\varkappa\varphi) = \varkappa(e_i\varphi) = \varkappa\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j = \sum_{j=1}^{n} (\varkappa\alpha_{ij})\, e_j,$$

яъни

$$e(\varkappa\varphi) = (\varkappa A)e.$$

Демак, *бирор базада φ чизиқли алмаштиришнинг $\varkappa$ сонга кўпайтмасини берувчи матрица φ алмаштиришнинг шу базадаги матрицасини $\varkappa$ сонга кўпайтирилганига тенг.*

Ҳосил қилинган натижалардан чизиқли алмаштиришлар устида бажариладиган амаллар матрицалар устида бажариладиган амаллар каби хоссаларга эга бўлиши келиб чиқади. Масалан, чизиқли алмаштиришларни қўшиш коммутатив ва ассоциатив, кўпайтириш эса ассоциатив, бироқ $n>1$ да нокоммутативдир. Чизиқли алмаштиришлар учун бир қийматли айириш мавжуд. Шунингдек, *айнан алмаштириш ε чизиқли алмаштиришлар ичида бир ролини, ноль алмаштириш ω эса ноль ролини ўйнашини ҳам айтиб ўтайлик.* Дарҳақиқат, исталган базада ε алмаштириш бирлик матрица орқали, ω алмаштириш эса ноль матрица орқали берилади.

32*- §. Чизиқли қисм фазолар

V чизиқли фазонинг L қисм тўпламининг ўзи ҳам V да аниқланган векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амалларига нисбатан чизиқли фазо бўлса, L га V фазонинг *чизиқли қисм фазоси* дейилади. Масалан, уч ўлчовли евклид фазосида координаталар бошидан чиқувчи ва координата бошидан ўтувчи бирор текисликда (ёки бирор тўғри чизиқда) ётувчи векторлар тўплами чизиқли қисм фазо бўлади.

V фазонинг бўш бўлмаган L қисм тўплами унинг чизиқли қисм фазоси бўлиши учун қуйидаги талабларнинг бажарилиши етарли:

Хосмас чизиқли алмаштиришлар учун юқорида келтирилган таърифга тенг кучли бўлган яна кўпгина бошқа таърифларни, хусусан, қуйидаги 4—6 таърифларни келтириш мумкин

4. V_n фазонинг турли векторлари φ алмаштиришда турли образларга эга бўладилар.

Ҳақиқатан ҳам, агар φ алмаштириш 4-хоссага эга бўлса, у ҳолда бу алмаштиришнинг ядроси фақат ноль вектордан иборат бўлади, яъни 3-хосса ҳам бажарилади. Агар a ва b векторлар шундай бўлсаки, улар учун $a \neq b$, бироқ $a\varphi = b\varphi$ бўлса, у ҳолда $a - b \neq 0$, бироқ $(a - b)\varphi = 0$ бўлади, яъни 3-хосса бажарилмайди.

2 ва 4 дан ушбу келиб чиқади:

5. φ алмаштириш V_n фазонинг ана шу бутун фазога ўзаро бир қийматли аксланишидир:

5 дан хосмас чизиқли алмаштириш φ учун ҳар қандай $a\varphi$ векторни a векторга ўтказувчи

$$(a\varphi)\varphi^{-1} = a$$

φ^{-1} *тескари алмаштириш* мавжуд эканлиги келиб чиқади. φ^{-1} *алмаштириш чизиқли бўлади,* чунки

$$(a\varphi + b\varphi)\varphi^{-1} = [(a + b)\varphi]\varphi^{-1} = a + b,$$
$$[\alpha(a\varphi)]\varphi^{-1} = [(\alpha a)\varphi]\varphi^{-1} = \alpha a.$$

φ^{-1} алмаштиришнинг аниқланишидан

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$$

келиб чиқади; (11) тенгликлар тескари алмаштиришнинг таърифи сифатида қаралиши мумкин. Бу ердан ва бундан олдинги параграфнинг охирги натижаларидан: *агар хосмас чизиқли алмаштириш φ бирор базада 1-хоссага кўра хосмас бўлган A матрица орқали бериладиган бўлса, у ҳолда φ^{-1} алмаштириш шу базада A^{-1} матрица орқали берилиши келиб чиқади.*

Шундай қилиб, хосмас чизиқли алмаштиришнинг қуйидаги таърифини ҳосил қиламиз:

6 φ алмаштириш учун тескари φ^{-1} алмаштириш мавжуд.

33- §. Характеристик илдизлар ва хос қийматлар

$A = (\alpha_{ij})$—элементлари ҳақиқий бўлган n-тартибли квадрат матрица бўлсин. λ эса бирор номаълум бўлсин. У ҳолда $A - \lambda E$ матрица (бу ерда E n-тартибли бирлик матрица) A матрицанинг *характеристик матрицаси дейилади.* λE матрицанинг бош диагоналида λ турганлиги, қолган барча элементлари эса нолга тенг бўлганлиги сабабли

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots\alpha_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots\alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

бўлади.

$A-\lambda E$ матрицанинг детерминанти λ нинг n-даражали кўпҳади бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бош диагоналдаги элементларнинг кўпайтмаси λ нинг юқори коэффициенти $(-1)^n\lambda^n$ бўлган кўпҳади бўлади. Детерминантнинг қолган ҳамма элементлари бош диагоналда турган элементларнинг камида иккитасига эга бўлмайди ва шунинг учун уларнинг λ га нисбатан даражалари $n-2$ дан юқори бўлмайди. Бу кўпҳаднинг коэффициентларини осонгина топиш мумкин. Масалан, λ^{n-1} нинг олдидаги коэффициент $(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn})$ га тенг, озод ҳад эса A матрицанинг детерминанти билан устма-уст тушади.

n-даражали $|A-\lambda E|$ кўпҳад A матрицанинг *характеристик кўпҳади* дейилади, унинг ҳақиқий, шу билан бирга комплекс ҳам бўлиши мумкин бўлган илдизлари эса бу матрицанинг *характеристик илдизлари* дейилади.

Ўхшаш матрицалар бир хил характеристик кўпҳадларга, бинобарин бир хил характеристик илдизларга эга.

Ҳақиқатан ҳам,

$$B=Q^{-1}AQ$$

бўлсин. У ҳолда λE матрица Q матрица билан ўрин алмашинувчан ҳамда $|Q^{-1}|=|Q|^{-1}$ эканлигини назарга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$|B-\lambda E|=|Q^{-1}AQ-\lambda E|=|Q^{-1}(A-\lambda E)Q|=$$
$$=|Q|^{-1}\cdot|A-\lambda E|\cdot|Q|=|A-\lambda E|,$$

ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Бундан турли базаларда чизиқли алмаштиришни берувчи матрицалар орасида 31-§ да исбот қилинган боғланиш ҳақидаги теоремага кўра ушбу натижа келиб чиқади: φ *чизиқли алмаштириш турли базаларда турли матрицалар орқали берилса-да, бироқ барча бу матрицалар бир хил характеристик илдизлар тўпламига эга бўлади* Шу сабабли бу илдизларни φ алмаштиришнинг *характеристик илдизлари* деб аташ мумкин. Бу характеристик илдизларнинг бутун тўплами (бунда ҳар қайси илдиз характеристик кўпҳадда қандай карраликка эга бўлса, шундай карралик билан олинади) φ чизиқли алмаштиришнинг *спектри* дейилади.

Характеристик илдизлар чизиқли алмаштиришларни ўрганишда жуда катта роль ўйнайди. Китобхон ҳали бунга кўп марта ишонч ҳосил қилади. Ҳозир характеристик илдизларнинг татбиқларидан бирини кўрсатамиз.

V_n ҳақиқий чизиқли фазода φ чизиқли алмаштириш берилган бўлсин. Агар нолдан фарқли b вектор φ алмаштириш орқали b векторга пропорционал бўлган векторга ўтса:

$$b\varphi = \lambda_0 b,$$

бу ерда λ_0—бирор ҳақиқий сон, у ҳолда b вектор φ алмаштиришнинг *хос вектори*, λ_0 сон эса бу алмаштиришнинг *хос қиймати* дейилади, шу билан бирга бундай ҳолда b хос вектор λ_0 хос қийматга *тааллуқли* дейилади.

$b \neq 0$ бўлгани учун (1) шартни қаноатлантирувчи λ_0 сон b вектор учун бир қийматли аниқланишини қайд қилиб ўтамиз. Сўнгра, ноль вектор (1) шартни исталган λ_0 учун қаноатлантирса-да, φ алмаштиришнинг хос вектори бўлиб ҳисобланмаслигини таъкидлаймиз.

Евклид текислигини координаталар боши атрофида π га каррали бўлмаган бурчакка буриш хос векторларга эга бўлмаган чизиқли алмаштиришга мисол бўлади. Бошқа бир мисол сифатида текисликни чўзишни олиш мумкин, бунда координаталар бошидан чиқувчи барча векторлар, айтайлик, беш марта чўзилади. Бу чизиқли алмаштириш бўлади, шу билан бирга ноль бўлмаган векторлар унинг учун хос векторлар бўлади; уларнинг ҳаммаси хос қиймат 5 га тааллуқли бўлади.

φ *чизиқли алмаштиришнинг ҳақиқий характеристик илдизлари (агар улар мавжуд бўлса) ва фақат улар, бу алмаштиришнинг хос қийматлари бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, айтайлик, φ алмаштириш $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базада $A = (\alpha_{ij})$ матрицага эга бўлсин ва

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

вектор φ алмаштиришнинг хос вектори бўлсин:

$$b\varphi = \lambda_0 b. \tag{2}$$

31-§ да исботланганига кўра

$$b\varphi = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A]e. \tag{3}$$

(2) ва 3) тенгликлардан ушбу тенгликлар системаси келиб чиқади:

$$\begin{aligned} \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{21} + \ldots + \beta_n\alpha_{n1} &= \lambda_0\beta_1, \\ \beta_1\alpha_{12} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{n2} &= \lambda_0\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1\alpha_{1n} + \beta_2\alpha_{2n} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} &= \lambda_0\beta_n. \end{aligned} \tag{4}$$

$b \neq 0$ бўлгани учун $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ сонларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. Шундай қилиб, (4) га кўра, чизиқли бир жинсли тенгламалар ушбу

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \lambda_0)x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{n1}x_n &= 0, \\ \alpha_{12}x_1 + (\alpha_{22} - \lambda_0)x_2 + \ldots + \alpha_{n2}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda_0\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

системасининг ноль бўлмаган ечимлари мавжуд, шу сабабли унинг детерминанти нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda_0, & \alpha_{21}, \ldots, & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22} - \lambda_0, \ldots, & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n}, & \alpha_{2n}, \ldots & \alpha_{nn} - \lambda_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Транспонирлаб,

$$|A - \lambda_0 E| = 0 \tag{7}$$

эканини топамиз, яъни λ_0 хос қиймат ҳақиқатан ҳам A матрица учун, бинобарин, φ алмаштириш учун ҳам ҳақиқий характеристик илдиз экан.

Аксинча, λ_0 сон φ алмаштиришнинг ва демак, A матрицанинг ҳам исталган ҳақиқий характеристик илдизи бўлсин. У ҳолда (7) тенглик ўринли бўлади, шу сабабли (7) дан транспонирлаш натижасида ҳосил бўлган (6) тенглик ҳам ўринли бўлади. Бу ердан, чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг (5) системаси ноль бўлмаган, шу билан бирга ҳатто ҳақиқий ечимларга эга эканлиги келиб чиқади, чунки бу системанинг барча коэффициентлари ҳақиқийдир. Агар бу ечимни

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \tag{8}$$

орқали белгилайдиган бўлсак, (4) тенгликлар ўринли бўлади. b орқали V_n фазонинг $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базада (8) координаталар сатрига эга бўлган векторини белгилаймиз; $b \neq 0$ эканлиги равшан. У ҳолда (3) тенглик ўринли, (4) ва (3) дан эса (2) келиб чиқади. Шундай қилиб, λ_0 хос қийматга тааллуқли бўлган b вектор φ алмаштиришнинг хос вектори экан. Теорема исбот бўлди.

Агар комплекс чизиқли фазо қаралаётган бўлса, у ҳолда характеристик илдизларнинг ҳақиқий бўлиш талаби ортиқча бўлишини айтиб ўтайлик. Бундай ҳолда қуйидаги теорема исбот қилинган бўлур эди: *комплекс чизиқли фазонинг чизиқли алмаштиришнинг характеристик илдизлари ва фақат улар бу алмаштиришнинг хос қийматлари бўлади.* Бу ердан, *комплекс чизиқли фазода ҳар қандай чизиқли алмаштириш хос векторларга эга бўлиши келиб чиқади.*

Қаралаётган ҳақиқий фазоларга қайтар эканмиз, қуйидагини қайд қилиб ўтамиз: чизиқли алмаштириш φ нинг λ_0 хос қийматга тааллуқли бўлган хос векторлари тўплами чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси (5) нинг ноль бўлмаган ҳақиқий ечимлари тўплами билан устма-уст тушади. Бу ердан φ *чизиқли алмаштиришнинг* λ_0 хос қийматга тааллуқли бўлган *хос векторлари тўплами, бу тўпламга ноль векторни қўшгандан сўнг,* V_n *фазонинг чизиқли қисм фазоси* бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, 12-§ да исбот қилинганига кўра: *n-номаълумли чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг исталган системасининг (ҳақиқий) ечимлари* тўплами V_n фазонинг чизиқли қисм фазоси бўлишлиги келиб чиқади.

Оддий спектрли чизиқли алмаштиришлар. Кўпгина ҳолларда берилган чизиқли алмаштириш φ бирор базада диагонал матрицага эга бўладими-йўқми эканлигини билиш зарур бўлиб қолади. Дарҳақиқат, ҳар қандай чизиқли алмаштириш ҳам диагонал матрица орқали берилавермайди. Бунинг учун зарур ва етарли шартлар 61-§ да кўрсатилади, ҳозир эса битта етарли шартни кўрсатамиз.

Дастлаб қуйидаги ёрдамчи натижаларни исбот қиламиз:

Агар $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *базанинг барча векторлари* φ *чизиқли алмаштиришнинг хос векторлари бўлса, у ҳолда ва фақат шу ҳолда* φ *алмаштириш бу базада диагонал матрица орқали берилади.*

Ҳақиқатан ҳам,

$$e_i\varphi = \lambda_i e_i$$

тенглик кўрсатилган базада φ алмаштиришни берувчи матрицанинг i-сатридаги элементлари ичида бош диагоналдан ташқаридаги ҳамма элементлари нолга тенглигига, бош диагоналда яъни i-ўринда) эса λ_i сон туради дейилишига тенг кучлидир.

φ *чизиқли алмаштиришнинг турли хос қийматларига тааллуқли бўлган* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *хос векторлари чизиқли эркли система ташкил этади.*

Бу даъвони k бўйича индукция ёрдамида исботлаймиз, чунки $k = 1$ да ўринли: битта хос вектор—хос вектор нолдан фарқли бўлгани учун—чизиқли эркли система ташкил этади. Энди

$$b_i\varphi = \lambda_i b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

ва

$$i \neq j \text{ да } \lambda_i \neq \lambda_j$$

бўлсин Агар

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_k b_k = 0 \tag{9}$$

изиқли боғланиш мавжуд бўлса ва бу ерда, масалан, $\alpha_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (9) нинг ҳар иккала томонига φ алмаштиришни татбиқ этиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\alpha_1\lambda_1 b_1 + \alpha_2\lambda_2 b_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k b_k = 0.$$

Бу ердан λ_k га кўпайтирилган (9) тенгликни айириб,

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) b_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) b_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) b_{k-1} = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ векторлар орасидаги тривиал бўлмаган чизиқли боғланишни ифодалайди, чунки $(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$.

Агар ҳақиқий чизиқли алмаштириш φ нинг барча характеристик илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлса, у *оддий спектрга* эга дейилади. Демак, φ чизиқли алмаштириш n та ҳар хил хос қийматларга эга бўлади, шунинг учун исботланган теоремага кўра, V_n фазода φ алмаштиришнинг хос векторларидан ташкил топган база мавжуд. Шундай қилиб, *оддий спектрли ҳар қандай чизиқли алмаштириш диагонал матрица орқали берилиши мумкин.*

Чизиқли алмаштиришдан уни берувчи матрицаларга ўтиб, қуйидаги натижани ҳосил қиламиз:

Барча характеристик илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлган ҳар қандай матрица диагонал матрицага ўхшашдир ёки бошқача айтганда, *бундай матрица диагонал кўринишга келтирилади.*

нинг танланишига боғлиқ, шу билан бирга биз ҳозирча скаляр кўпайтиришни қандайдир принципиал бошқа усул билан ҳам аниқлаш мумкинми ёки йўқлигини айта олмаймиз. Бизнинг эндиги мақсадимиз n ўлчовли чизиқли фазони евклид фазосига айлантиришнинг барча мумкин бўлган усулларини кўздан кечириб чиқиб, маълум маънода ҳар қандай n учун фақат биттагина n ўлчовли евклид фазоси мавжуд эканлигини аниқлашдан иборат.

Ихтиёрий n ўлчовли евклид фазоси E_n берилган бўлсин, яъни n ўлчовли чизиқли фазода ихтиёрий усул билан скаляр кўпайтириш киритилган бўлсин. Агар a ва b векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни $(a, b) = 0$ бўлса, улар ортогонал дейилади. (1) дан ноль векторнинг исталган векторга ортогоналлиги келиб чиқади; аммо нолдан фарқли ортогонал векторлар ҳам мавжуд бўлиши мумкин.

Агар векторлар системасининг барча векторлари жуфт-жуфти билан ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда бундай система *ортогонал система* деб аталади.

Нолдан фарқли ҳар қандай векторларнинг ортогонал системаси чизиқли эркли системадир.

Ҳақиқатан ҳам, E_n да a_1 $a_2, \ldots, a_k$ векторлар системаси берилган бўлсин, шу билан бирга $a_i \neq 0$, $i = 1,2, \ldots, k$ ва

$$i \neq j \text{ бўлганда } (a_i \ \ a_j) = 0 \tag{4}$$

бўлсин. Агар

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$$

бўлса, бу тенгликнинг ҳар икки томонини $a_l (1 < l \leqslant k)$ векторга скаляр кўпайтириб, (1), (2) ва (4) га кўра ушбуни ҳосил қиламиз:

$$0 = (0, a_l) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k, a_l) =$$
$$= \alpha_1 (a_1, a_l) + \alpha_2 (a_2, a_l) + \ldots + \alpha_k (a_k, a_l) = \alpha_l (a_l, a_l).$$

Бундан $(a_i, a_l) > 0$ бўлгани учун IV га асосан $\alpha_l = 0$, $l = 1,2, \ldots, k$ эканлиги келиб чиқади, шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Қуйида ортогоналлаш процесси, яъни E_n евклид фазосида k та вектордан ташкил топган ихтиёрий

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{5}$$

чизиқли эркли системадан ҳеч бири нолга тенг бўлмаган k та векторнинг ортогонал системасига ўтиш усули баён этилади; бу векторлар $b_1, b_2, \ldots, b_k$ орқали белгиланади.

$b_1 = a_1$ деймиз, яъни (5) системанинг биринчи вектори биз тузаётган ортогонал системага ҳам киради. Сўнгра

$$b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$$

бўлсин. $b_1 = a_1$ ҳамда a_1 ва a_2 векторлар чизиқли боғлиқмас бўлганлигидан исталган α_1 сон учун b_2 вектор нолдан фарқли бўлади. Бу сонни b_2 векторнинг b_1 векторга ортогонал бўлиши шартидан танлаймиз:

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, \alpha_1 b_1 + a_2) = \alpha_1(b_1, b_1) + (b_1, a_2), \qquad a2),$$

бундан IV га кўра

$$\alpha_1 = -\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}.$$

Нолдан фарқли $b_1, b_2, \ldots, b_l$ векторларнинг ортогонал системаси тузилган бўлсин; қўшимча равишда ҳар қандай $i\,(1 \leqslant i \leqslant l)$ учун b_i вектор $a_1, a_2, \ldots, a_i$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат деб фараз қилайлик. Агар b_{l+1} вектор

$$b_{l+1} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_l b_l + a_{l+1}$$

кўринишда олинса, у ҳолда фаразимиз b_{l+1} вектор учун ҳам ўринли бўлади. Бунда b_{l+1} вектор нолдан фарқли, чунки (5) система чизиқли боғлиқ эмас, a_{l+1} вектор эса $b_1, b_2, \ldots, b_l$ векторларнинг тузилишида иштирок этмайди. $\alpha_i\ (i = 1, 2, \ldots, l)$ коэффициентларни b_{l+1} векторнинг барча $b_i\ (i = 1, 2, \ldots, l)$ векторларга ортогонал бўлиши лозимлиги шартидан топамиз:

$$0 = (b_i, b_{l+1}) = (b_i, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_l b_l + a_{l+1}) =$$
$$= \alpha_1 (b_i, b_2) + \alpha_2 (b_i, b_2) + \ldots + \alpha_l (b_i, b_l) + (b_i, a_{l+1});$$

бундан $b_1, b_2, \ldots, b_l$ векторлар ўзаро ортогонал бўлгани учун

$$\alpha_i (b_i, b_i) + (b_i, a_{l+1}) = 0,$$

яъни

$$\alpha_i = -\frac{(b_i, a_{l+1})}{(b_i, b_i)}, \quad i = 1,2, \ldots, l$$

ҳосил бўлади.

Бу процессни давом эттириб, биз изланаётган ортогонал система $b_1, b_2 \ldots, b_k$ ни тузамиз.

Ортогоналлаш процессини E_n фазонинг ихтиёрий базасига татбиқ этиб, n та нолдан фарқли векторларнинг ортогонал системасини, яъни – бу система юқорида исботланганига асосан чизиқли эркли бўлгани учун – *ортогонал базасини* ҳосил қиламиз. Шу билан бирга ортогоналлаш процессини (жараёнини) биринчи қадами муносабати билан қилинган мулоҳазани қўлласак ҳамда нолга тенг бўлмаган ҳар қандай векторни бирор-та базага киритиш мумкин эканлигини ҳисобга олсак, қуйидаги фикрни ифодалаш мумкин:

Ҳар қандай евклид фазоси ортогонал базаларга эга, шу билан бирга бу фазонинг исталган нолдан фарқли вектори бирор ортогонал база таркибига киради.

Келгусида ортогонал базаларнинг махсус синфи (махсус бир кўриниши муҳим роль ўйнайди; базаларнинг бу синфи аналитик геометрияда қўлланиладиган тўғри бурчакли декарт координаталар системасига мос келади.

Агар b векторнинг скаляр квадрати бирга тенг, яъни

$$(b, b) = 1$$

бўлса, уни *нормаланган* деймиз. Агар $a \neq 0$ бўлса (бундан $(a, a) > 0$ бўлади), у ҳолда a векторни *нормалаш* деб ушбу

$$b = \frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\, a$$

векторга ўтишга айтилади. b вектор нормаланган бўлади, чунки

$$(b, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{(a\ ,a)}}\, a,\ \frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\, a\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\right)^2 (a, a) = 1.$$

Агар E_n евклид фазосининг $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базаси ортогонал бўлиб, унинг ҳамма векторлари нормаланган, яъни

$$\begin{aligned} &i \neq j \text{ да } (e_i, e_j) = 0, \\ &i = 1, 2, \ldots, n \text{ да } (e_i, e_i) = 1 \end{aligned} \qquad (6)$$

бўлса, бундай база *ортонормаланган база* деб аталади.

Ҳар қандай евклид фазоси ортонормаланган базага эга.

Буни исботлаш учун исталган ортогонал базани олиш ва унинг барча векторларини нормалаш кифоя. Бунда база ортогоналлигича қолади, чунки ихтиёрий α ва β лар учун $(a, b) = 0$ тенгликдан

$$(\alpha a, \beta b) = \alpha\beta\,(a, b) = 0$$

келиб чиқади.

E_n евклид фазосининг $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базаси ортонормаланган бўлиши учун фазонинг исталган иккита векторининг скаляр кўпайтмаси бу векторларнинг танланган базадаги мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг бўлиши, яъни агар

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \qquad (7)$$

бўлса, у ҳолда

$$(a\ b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \qquad (8)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳақиқаган ҳам, агар бизнинг база учун (6) тенглик ўринли бўлса, у ҳолда

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j, (e_i e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Аксинча, агар танланган базада (7) кўринишда ёзилган ҳар қандай a ва b векторлар учун (8) тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a ва b векторлар сифатида бу базанинг исталган иккита бир хил ёки ҳар хил e_i ва e_j векторларини олиб, биз (8) дан (6) тенгликни келтириб чиқарамиз.

Ҳозиргина ҳосил қилинган натижани ихтиёрий n учун n ўлчовли евклид фазоси мавжудлигининг юқорида баён қилинган исботи билан солиштириб, қуйидаги даъвони айтиш мумкин: *агар n ўлчовли V_n чизиқли фазода ихтиёрий база танланган бўлса, у ҳолда V_n да скаляр кўпайтиришни шундай аниқлаш мумкинки, ҳосил бўлган евклид фазосида танланган база ортонормаланган базалардан бири бўлади.*

Евклид фазоларининг изоморфизми. E ва E' евклид фазолари векторлари орасида шундай ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлсаки, натижада ушбу шартлар бажарилса, улар *изоморф* фазолар деб аталади:

1) бу мослик E ва E' ларни чизиқли фазо деб қараганда улар орасидаги изоморф мосликдир (29-§ га қаранг);

2) бу мосликда скаляр кўпайтма сақланади; бошқача қилиб айтганда, агар E даги a ва b векторларнинг E' даги образи a' ва b' лар бўлса

$$(a, b) = (a', b') \tag{9}$$

тенглик ўринли бўлади.

1) шартдан, дарҳол, *изоморф евклид фазолари бир хил ўлчамга эга эканлиги келиб чиқади.* Тескари даъво ҳам ўринли эканлигини исботлайлик.

Бир хил n ўлчамга эга бўлган ҳар қандай E ва E' евклид фазолари ўзаро изоморфдир.

Ҳақиқатан ҳам, E ва E' фазоларда мос равишда

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{10}$$

ва

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \tag{11}$$

ортонормаланган базаларни танлаб олайлик.

E нинг ихтиёрий

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

векторига, a вектор (10). базада қандай координаталарга эга бўлса, E' нинг (11) базада худди шу координаталарга эга бўлган

$$a' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i$$

векторини мос қўямиз. Шубҳасиз, бу мослик E ва E' чизиқли фазолар орасида изоморф мослик бўлади. Шу билан бир қаторда (9) тенглик ҳам ўринли эканлигини кўрсатайлик: агар

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \quad b' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i$$

бўлса, (8) га асосан [(10) ва (11) базаларнинг ортонормаллиги эътиборга олинсин!]

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = (a', b').$$

Изоморф евклид фазоларини ҳар хил фазолар деб қарамаслик табиийдир. Шунинг учун ҳам ҳар қандай n учун биттагина n ўлчовли ҳақиқий чизиқли фазо мавжуд бўлгани каби, худди шу маънода биттагина n ўлчовли евклид фазоси мавжуд бўлади.

Чизиқли комплекс фазолар бўлган ҳол учун бу параграфнинг тушунчалари ва натижалари қуйидагича ўтказилади. Комплекс чизиқли фазода скаляр кўпайтириш киритилган бўлсин. Шу билан бирга, умуман айтганда (a, b) комплекс сон бўлсин. Агар II—IV аксиомалар (охирги аксиоманинг ифодаланишида шуни қайд қилмоқ зарурки, нолга тенг бўлмаган векторнинг скаляр квадрати ҳақиқий ва қатъий мусбат сондан иборатдир) бажарилиб, I аксиома эса қуйидаги

$$\text{I} \qquad (a, b) = \overline{(b, a)}$$

аксиома билан алмаштирилса (бу ерда чизиқ, одатдагидек, қўшма комплекс сонга ўтишни белгилайди), у ҳолда бундай комплекс чизиқли фазога *унитар фазо* дейилади.

Скаляр кўпайтма энди коммутатив бўлмайди Шунга қарамай, II аксиомага ўхшаш тенглик ўринлигича қолади:

$$\text{II} \qquad (a, b + c) = (a, b) + (a, c),$$

чунки

$$(a, b + c) = \overline{(b + c, a)} = \overline{(b, a) + (c, a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(c, a)} = (a, b) + (a, c).$$

Иккинчи томондан

$$\text{III} \qquad (a, \alpha b) = \bar{\alpha} (a, b),$$

чунки

$$(a, \alpha b) = \overline{(\alpha b, a)} \quad \overline{\alpha (b, a)} = \bar{\alpha}\, \overline{(b, a)} = \bar{\alpha} (a, b).$$

Векторлар системасининг ортогоналлиги ва ортонормаланганлиги тушунчалари унитар фазолар бўлган ҳол учун ҳеч қандай ўзгаришсиз ўтказилади. Чекли ўлчовли ҳар қандай унитар фазода ортонормаланган базаларнинг мавжудлиги худди юқоридаги каби исботланади. Лекин, шу билан бирга, агар

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормаланган база бўлиб, бу базада a, b векторлар (7) формула орқали ифодаланса, у ҳолда

$$(a, b) = \sum_{l=1}^{n} a_l \overline{\beta}_l.$$

Ушбу бобнинг кейинги параграфлари натижаларини ҳам евклид фазосидан унитар фазоларга ўтказиш мумкин эди. Бундай қилиб ўтирмасдан қизиқувчи ўқувчиларга чизиқли алгебра бўйича махсус китобларга мурожаат этишни тавсия қиламиз.

35-§. Ортогонал матрицалар, ортогонал алмаштиришлар

n та номаълумли ҳақиқий чизиқли алмаштириш

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

берилган бўлсин. Бу алмаштириш матрицасини Q орқали белгилаймиз. Бу алмаштириш $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар квадратлари йиғиндисини, яъни мусбат аниқланган квадратик форманинг нормал шакли бўлган $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ квадратик формани (28-§ га қаранг) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълумларнинг бирор квадратик формасига ўтказади. Бу янги ҳосил бўлган квадратик форманинг ўзи $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълумлар квадратларининг йиғиндисига тасодифан тенг бўлиб қолиши ҳам мумкин, яъни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларни (1) ифода орқали алмаштирганимиздан сўнг

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \tag{2}$$

айний тенглик ҳосил бўлиши мумкин. Бундай хоссага эга бўлган, яъни номаълумлар квадратларининг йиғиндисини инвариант ҳолда қолдирувчи (1) чизиқли алмаштиришга *номаълумларни ортогонал алмаштириш* дейилади, унинг матрицаси Q га эса *ортогонал матрица* дейилади.

Ортогонал алмаштириш ва ортогонал матрицаларнинг юқорида келтирилган таърифларига эквивалент бўлган кўпгина бошқа таърифлари мавжуд. Улардан келгусида керак бўладиган баъзиларини кўрсатиб ўтамиз.

Биз номаълумларни чизиқли алмаштиришни бажарганда квадратик форманинг матрицаси қандай қонун бўйича ўзгаришини 26-§ дан биламиз. Бу қонунни кўрилаётган мазкур ҳолга қўлласак ва барча номаълумларнинг квадратлари йиғиндисидан иборат бўлган квадратик форманинг матрицаси бирлик матрица E дан иборат эканлигини ҳисобга олсак, (2) тенглик қуйидаги

$$Q'EQ = E,$$

яъни

$$Q'Q = E \tag{3}$$

матрицавий тенгликка тенг кучли эканлиги келиб чиқади. Бу ердан

$$Q' = Q^{-1} \tag{4}$$

ва шу сабабли

$$QQ' = E \tag{5}$$

тенглик ҳам ўринли бўлади.

Шундай қилиб, (4) га кўра *ортогонал матрица Q ни шундай матрица деб таърифлаш мумкинки, унинг транспонирланган матрицаси Q' тескари матрицаси Q^{-1} га тенг.* Шунингдек, (3) ва (5) тенгликларнинг ҳар қайсисини ҳам ортогонал матрицанинг таърифи сифатида қабул қилиш мумкин.

Q' матрицанинг устунлари Q матрицанинг сатрлари бўлгани учун (5) дан қуйидаги натижа келиб чиқади: *Q квадрат матрицанинг ихтиёрий сатри элементлари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг бўлиб, исталган иккита сатри мос элементлари кўпайтмаларининг йиғиндиси эса нолга тенг бўлганда*, *ва фақат шу ҳолда*, *бу матрица ортогонал бўлади*. Шунга ўхшаш натижа (3) тенгликдан матрицанинг устунлари учун ҳам келиб чиқади.

$|Q'| = |Q|$ бўлгани учун (3) тенгликда детерминантларга ўтиб,

$$|Q|^2 = 1$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан, *ортогонал матрицанинг детерминанти ± 1 га тенг эканлиги келиб чиқади*. Шундай қилиб, номаълумларни ҳар қандай ортогонал алмаштириш хосмас алмаштиришдир. Ўз-ўзидан маълумки, тескарисини таъкидлаш мумкин эмас; яна шуни ҳам айтмоқ даркорки, детерминанти ± 1 га тенг бўлган матрица ҳар доим ортогонал бўлавермайди.

Ортогонал матрицага тескари матрица яна ортогонал матрица бўлади Ҳақиқатан ҳам, (4) да транспонирланган матрицаларга ўтсак:

$$(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}.$$

Шу билан бирга *ортогонал матрицаларнинг кўпайтмаси яна ортогоналдир*. Ҳақиқатан ҳам, Q ва R матрицалар ортогонал бўлса, (4) ни, шу билан бирга 26-§ дан (6) тенгликни ва тескари матрица учун ўринли бўлган шунга ўхшаш тенгликни қўллансак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(QR)' = R'Q' = R^{-1}Q^{-1} = (QR)^{-1}.$$

37-§ да ушбу даъводан фойдаланилади:

Евклид фазосининг ортонормаланган базасидан шу фазонинг ихтиёрий бошқа ортонормаланган базасига ўтиш матрицаси ортогоналдир.

Ҳақиқатан ҳам, E_n фазода ўтиш матрицаси $Q = (q_{ij})$ бўлган иккита ортонормаланган $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ва $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ базалар берилган бўлсин:

$$e' = Qe.$$

e база ортонормаланган бўлгани учун ихтиёрий иккита векторнинг, хусусан, e' базадаги исталган иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторларнинг e базадаги мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг бўлади. Лекин, шу билан бирга e' база ҳам ортонормаланган бўлгани учун e' даги ҳар бир векторнинг скаляр квадрати бирга тенг бўлиб, ундаги ихтиёрий иккита турли векторнинг скаляр кўпайтмаси эса нолга тенг. Бундан e' база векторларининг e базадаги координаталари сатрлари учун, бошқача айтганда, Q матрицанинг сатрлари учун ортогонал матрицани характерлаб берувчи, (5) тенгликдан юқорида келтириб чиқарилгани каби, натижаларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Евклид фазосини ортогонал алмаштиришлар. Гарчанд келгусида ишлатилмаса-да, евклид фазоларини чизиқли алмаштиришларнинг бир муҳим синфини (турини) шу ерда ўрганиш мақсадга мувофиқдир.

Агар E_n евклид фазосини φ чизиқли алмаштириш ҳар қандай векторнинг скаляр квадратини ўзгаришсиз қолдирса, яъни исталган a вектор учун ушбу

$$(a\varphi,\ a\varphi) = (a,\ a) \tag{6}$$

тенглик ўринли бўлса, бундай φ *алмаштириш евклид фазосини ортогонал алмаштириш дейилади.*

Бундан қуйидаги умумийроқ бўлган натижани (уни ҳам албатта ортогонал алмаштиришнинг таърифи сифатида қабул қилиш мумкин) келтириб чиқариш мумкин:

Евклид фазосини φ ортогонал алмаштириш ихтиёрий иккита a, b векторларнинг скаляр кўпайтмасини ўзгаришсиз қолдиради:

$$(a\varphi,\ b\varphi) = (a,\ b). \tag{7}$$

Ҳақиқатан ҳам, (6) тенгликка кўра,

$$((a+b)\varphi,\ (a+b)\varphi) = (a+b,\ a+b).$$

Лекин

$$((a+b)\varphi,\ (a+b)\varphi) = (a\varphi + b\varphi,\ a\varphi + b\varphi) =$$
$$= (a\varphi,\ a\varphi) + (a\varphi,\ b\varphi) + (b\varphi,\ a\varphi) + (b\varphi,\ b\varphi);$$
$$(a+b,\ a+b) = (a,\ a) + (a,\ b) + (b,\ a) + (b,\ b).$$

Бу ердан (6) ифодани a учун ҳам, b учун ҳам қўлласак ва скаляр кўпайтиришнинг коммутативлигини ҳисобга олсак, ушбу

$$2\,(a\varphi,\ b\varphi) = 2\,(a,b)$$

тенгликни ҳосил қиламиз Шу сабабли (7) муносабат ҳам ўринли бўлади.

Евклид фазосини ортогонал алмаштиришда исталган ортонормаланган базанинг ҳамма векторларининг образлари ўз навбатида яна ортонормаланган базани ташкил этади. Аксинча, агар евклид фазосини чизиқли алмаштириш ҳеч бўлмаганда битта ортонормаланган базани яна ортонормаланган базага ўтказса, бундай алмаштириш ортогонал бўлади.

Ҳақиқатан ҳам φ алмаштириш E_n фазони ортогонал алмаштириш бўлиб, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ эса шу фазонинг ихтиёрий ортонормаланган базаси бўлсин.

$$(e_i,\ e_i) = 1 \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$i \neq j \text{ да } (e_i\ ,e_j) = 0$$

тенгликлардан, (7) тенгликка асосан

$$(e_i\varphi,\ e_i\varphi) = 1, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

агар $i \neq j$ бўлса, $(e_i\varphi,\ e_j\varphi) = 0$ тенгликлар келиб чиқади, яъни $e_1\varphi,\ e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ векторлар системаси ортогонал ва нормаланган шунинг учун ҳам у E_n фазонинг ортонормаланган базаси бўлади.

Аксинча, E_n фазони φ чизиқли алмаштириш $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормаланган базани яна ортонормаланган базага ўтказсин, яъни $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ векторлар системаси E_n фазонинг ортонормаланган базаси бўлсин. Агар

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

E_n фазонинг ихтиёрий вектори бўлса, у ҳолда

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi)$$

бўлади, яъни $a\varphi$ вектор $e\varphi$ базада a вектор e базада қандай координаталарга эга бўлса, худди шундай координаталарга эга бўлади. Аммо бу иккала база ҳам ортонормаланган бўлгани учун ҳар қайси векторнинг скаляр квадрати унинг бу базалардан исталган биридаги координаталари квадратларининг йиғиндисига тенг. Шундай қилиб,

$$(a,\ a) = (a\varphi,\ a\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^2_i,$$

яъни (6) тенглик ҳақиқатан ҳам бажарилар экан.

Евклид фазосини исталган ортонормаланган базада ортогонал алмаштириш ортогонал матрица орқали берилади. Аксинча, агар евклид фазосини чизиқли алмаштириш ҳеч бўлмаганда битта ортонормаланган базада ортогонал матрица орқали ифодаланса, бундай алмаштириш ортогонал бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар φ алмаштириш ортогонал бўлиб, $e_1, e_2 \ldots, e_n$ база эса ортонормаланган бўлса, $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ векторлар системаси ҳам ортонормаланган база бўлади. Шунинг учун ҳам φ алмаштиришнинг e базадаги A матрицаси ортонормаланган e базадан ортонормаланган $e\varphi$ базага ўтиш матрицаси

$$e\varphi = Ae \tag{8}$$

дан иборат бўлади, яъни юқорида исботланганига асосан ортогонал матрица бўлади.

Аксинча, φ чизиқли алмаштириш $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормаланган базада A ортогонал матрица орқали берилган бўлсин; демак, (8) тенглик ўринли. e база ортонормаланган бўлгани сабабли, исталган векторларнинг скаляр кўпайтмаси, хусусан, $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ системанинг исталган векторларининг скаляр кўпайтмаси бу векторларнинг e базадаги мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг. Шунга кўра, A матрица ортогонал бўлгани учун ушбу

$$(e_i\varphi, e_i\varphi) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$i \neq j \text{ да} \qquad (e_i\varphi, e_j\varphi) = 0$$

тенгликлар ўринли, яъни $e\varphi$ системанинг ўзи ҳам E_n фазонинг ортонормаланган базасидан иборат экан. Бундан φ алмаштиришнинг ортогоналлиги келиб чиқади.

Аналитик геометрия курсидан китобхонга маълумки, текисликни координаталар бошини ўз ўрнида қолдирувчи ҳамма аффин алмаштиришлар орасида фақат буришларгина (лозим бўлса, симметрик акслантишлар билан қўшилган ҳолда) векторларнинг скаляр кўпайтмасини ўзгаришсиз қолдирувчи ягона алмаштиришлардир. Шундай қилиб, n ўлчовли евклид фазосини ортогонал алмаштиришларни бу фазони „буришлар“ деб қараш мумкин.

Евклид фазосини ортогонал алмаштиришларга, шубҳасиз, айнан алмаштиришлар ҳам киради. Шу билан бирга ортогонал алмаштириш билан ортогонал матрицалар орасида биз ўрнатган боғланиш, шунингдек, 31-§ да баён этилган чизиқли алмаштиришлар устида бажарилган амаллар билан матрицалар устидаги амаллар орасидаги боғланиш ортогонал матрицалар учун маълум бўлган хоссалардан евклид фазосини ортогонал алмаштиришларнинг бевосита ва осонгина текшириладиган қуйидаги хоссаларини келтириб чиқариш учун имкон беради:

Ҳар қандай ортогонал алмаштириш хосмас бўлиб, унга тескари бўлган алмаштириш ҳам ортогонал алмаштиришдир.

Ихтиёрий ортогонал алмаштиришларнинг кўпайтмаси ортогоналдир.

36-§. Симметрик алмаштиришлар

Агар n ўлчовли евклид фазосининг исталган a, b векторлари учун

$$(a\varphi,\ b) = (a,\ b\varphi) \tag{1}$$

тенглик ўринли бўлса, яъни алмаштириш белгисини скаляр кўпайтиришда битта кўпайтувчидан иккинчисига ўтказиш мумкин бўлса, бу фазони φ чизиқли алмаштириш *симметрик (ёки ўз-ўзига қўшма)* дейилади.

Айний алмаштириш ε ва ноль алмаштириш ω шубҳасиз, симметрик алмаштиришларга мисол бўла олади. Умумийроқ мисол сифатида ихтиёрий векторни тайинланган α сонга кўпайтиришдан иборат бўлган

$$a\varphi = \alpha a$$

чизиқли алмаштиришни қараш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳол учун

$$(a\varphi,\ b) = (\alpha a,\ b) = \alpha(a,\ b) = (a,\ \alpha b) = (a,\ b\varphi).$$

Симметрик алмаштиришларнинг аҳамияти жуда катта бўлгани учун биз уларни иложи борича муфассал ўрганишимиз лозим.

Эвклид фазосини симметрик алмаштириш исталган ортонормаланган базада симметрик матрица орқали берилади. Аксинча, агар евклид фазосини чизиқли алмаштириш бирорта ортонормаланган базада симметрик матрица орқали бериладиган бўлса, бундай алмаштириш симметрик бўлади.

Дарҳақиқат, φ симметрик алмаштириш $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормаланган базада $A = (a_{ij})$ матрица орқали берилган бўлсин. Ортонормаланган базада иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенглигини ҳисобга олиб,

$$(e_i\varphi, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k,\ e_j\right) = \alpha_{ij},$$

$$(e_i,\ e_j\varphi) = \left(e_i,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k\right) = \alpha_{ji}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, яъни (1) ифодага асосан ҳамма i ва j лар учун

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

тенглик ўринлидир. Шундай қилиб, A матрица симметрик матрица экан.

Аксинча, φ чизиқли алмаштириш $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормаланган базада $A = (\alpha_{ij})$ симметрик матрица орқали берилган бўлсин, яъни ҳамма i ва j лар учун

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{2}$$

бўлсин. Агар

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \ , \quad c = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j$$

фазонинг ихтиёрий векторлари бўлса, у ҳолда

$$b\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (e_i \varphi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \right) e_j,$$

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (e_j \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_{ji} \right) e_i$$

бўлади. e базанинг ортонормаланганлигидан фойдаланиб, ушбу

$$(b\varphi, c) = \sum_{j,i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j,$$

$$(b, c\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \alpha_{ji}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. (2) га асосан охирги тенгликларнинг ўнг томонлари ўзаро тенг ва демак,

$$(b\varphi, c) = (b, c\varphi),$$

худди шуни исботлаш талаб этилган эди.

Ҳосил бўлган натижадан симметрик алмаштиришларнинг бевосита ҳамда осонгина текшириладиган қуйидаги хоссаси келиб чиқади:

Симметрик алмаштиришларнинг йиғиндиси ва шунингдек, симметрик алмаштиришнинг сонга кўпайтмаси ҳам яна симметрик алмаштиришлардан иборат бўлади.

Энди ушбу муҳим теоремани исботлайлик:

Симметрик алмаштиришнинг барча характеристик илдизлари ҳақиқийдир.

Ихтиёрий чизиқли алмаштиришнинг характеристик илдизлари бу алмаштиришнинг исталган базадаги матрицасининг характеристик илдизларига тенг бўлгани учун, симметрик алмаштириш эса ортонормаланган базада симметрик матрица орқали берилгани учун қуйидаги теоремани исботлаш кифоя:

Симметрик матрицанинг барча характеристик илдизлари ҳақиқийдир.

Ҳақиқатан ҳам, λ_0 берилган $A=(\alpha_{ij})$ симметрик матрицанинг характеристик илдизи (комплекс бўлиши ҳам мумкин) бўлсин:

$$|A-\lambda_0 E|=0,$$

у ҳолда комплекс коэффициентли бир жинсли тенгламалар системаси

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\lambda_0 x_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

нолга тенг бўлган детерминантга эга, яъни нолга тенг бўлмаган $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n$ (умуман олганда, комплекс) ечимга эга; шундай қилиб,

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j=\lambda_0\beta_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

(3) тенгликларда ҳар қайси i-тенгликнинг иккала томонини β_i комплекс сонга қўшма бўлган $\overline{\beta}_i$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ҳамма тенгликларнинг чап ва ўнг қисмларини алоҳида йиғсак,

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i=\lambda_0\sum_{i=1}^{n}\beta_i\overline{\beta}_i \tag{4}$$

тенгликка келамиз

(4) даги λ_0 нинг коэффициенти камида биттаси қатъий мусбат бўлган бир нечта манфий бўлмаган ҳақиқий сонларнинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун нолдан фарқли ҳақиқий сондир. Шу сабабли, агар биз (4) тенгликнинг чап томонидаги ифоданинг ҳақиқий эканлигини кўрсатсак, λ_0 соннинг ҳақиқий эканлигини исботлаган бўламиз. Бунинг учун текширилаётган бу комплекс сон ўзининг қўшмасига тенг эканлигини кўрсатиш кифоя. Бу ерда A (ҳақиқий) матрицанинг симметрик эканлигидан биринчи марта фойдаланилади.

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i}=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i}=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\beta}_j\beta_i=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ji}\overline{\beta}_j\beta_i=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\beta}_i\beta_j=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i.$$

Шуни айтиш керакки, охиргидан олдинги тенглик йиғиндининг индекси учун белгилашларни содда ўзгартириш орқали ҳосил қилинган: i ўрнига j, j ўрнига i қўйилган. Бинобарин, теорема исбот бўлди.

Евклид фазосини φ чизиқли алмаштириш симметрик бўлиши учун E_n фазода бу алмаштиришнинг хос векторларидан тузилган ортонормаланган база мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу теореманинг биринчи қисми деярли равшан: агар E_n да $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормаланган база мавжуд бўлиб, шу билан бирга

$$e_i\varphi = \lambda_i e_i, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n$$

бўлса, у ҳолда e базада φ алмаштириш ушбу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

диагонал матрица орқали берилади. Бироқ диагонал матрица симметрик бўлгани учун φ алмаштириш e ортонормаланган базада симметрик матрица орқали берилади, яъни симметрик бўлади.

Биз теореманинг асосий, тескари қисмини E_n фазонинг ўлчами n бўйича индукция ёрдамида исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, $n = 1$ бўлса, E_1 фазони ҳар қандай чизиқли алмаштириш исталган векторни албатта ўзига пропорционал бўлган векторга ўтказади. Бундан нолга тенг бўлмаган ҳар қандай a вектор φ учун хос вектор бўлиши келиб чиқади. Шу билан бирга E_1 фазони ҳар қандай чизиқли алмаштириш ҳам симметрик эканлиги келиб чиқади. a векторни нормалаб, E_1 фазонинг изланаётган ортонормаланган базасини ҳосил қиламиз.

Энди теорема $n - 1$ ўлчовли евклид фазоси учун исботланган ва E_n фазода φ симметрик алмаштириш берилган бўлсин. Юқорида исботланган теоремадан φ учун ҳақиқий характеристик илдиз λ_0 нинг мавжудлиги келиб чиқади. Демак, бу сон φ чизиқли алмаштиришнинг хос қиймати бўлади. Агар a вектор φ алмаштиришнинг бу хос қийматига мос келувчи хос вектори бўлса, у ҳолда a векторга пропорционал ҳар қандай нолга тенг бўлмаган вектор ҳам φ алмаштиришнинг худди шу λ_0 хос қийматига мос келувчи хос вектори бўлади, чунки

$$(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi) = \alpha(\lambda_0 a) = \lambda_0(\alpha a).$$

Хусусан, a векторни нормалаб, шундай e_1 векторни ҳосил қиламизки,

$$e_1\varphi = \lambda_0 e_1,$$
$$(e_1,\ e_1) = 1$$

бўлади.

34-§ да исботланганига кўра, нолга тенг бўлмаган e_1 векторни E_n фазонинг ортогонал

$$e_1, e'_2, \dots, e'_n \tag{5}$$

базасига киритиш мумкин. (5) базада биринчи координаталари нолга тенг бўлган векторлар, яъни $\alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n$ кўринишдаги векторлар, шубҳасиз, E_n фазонинг $n-1$ ўлчовли чизиқли қисм фазосини ташкил этади. Бу қисм фазони L билан белгилаймиз.

L ҳатто $n-1$ ўлчовли евклид фазоси бўлади, чунки E_n фазонинг ҳамма векторлари учун аниқланган скаляр кўпайтма, хусусан L даги векторлар учун ҳам аниқланган бўлиб, шу билан бирга бу скаляр кўпайтма барча керакли хоссаларга эга бўлади.

L қисм фазо E_n фазонинг e_1 векторга ортогонал бўлган барча векторларидан ташкил топган. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha'_2 e'_2 + \dots + \alpha'_n e'_n$$

бўлса, (5) базанинг ортогоналлигидан ва e_1 векторнинг нормаланганлигидан

$$e_1, a) = \alpha_1(e_1, e_1) + \alpha'_2(e_1, e'_2) + \dots + \alpha'_n(e_1, e'_n) = \alpha_1$$

муносабат келиб чиқади, яъни $(e_1, a) = 0$ тенглик $\alpha_1 = 0$ бўлганда ва фақат шундагина ўринли бўлади.

Агар a вектор L қисм фазога тегишли бўлса, яъни $(e_1, a) = 0$ бўлса, $a\varphi$ вектор ҳам L га тегишли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, φ алмаштиришнинг симметриклигига асосан,

$$(e_1, a\varphi) = (e_1\varphi, a) = (\lambda_0 e_1, a) = \lambda_0(e_1, a) = \lambda_0 \cdot 0 = 0,$$

яъни $a\varphi$ вектор e_1 га ортогонал ва шунинг учун ҳам L га тегишли. L қисм фазонинг φ алмаштиришга нисбатан *инвариантлиги* деб аталувчи бу хоссаси φ ни - фақат L нинг векторларигагина қўлланяпти деб қаралса $(n-1)$ ўлчовли евклид фазосини чизиқли алмаштириш деб ҳисоблашга имкон беради. У ҳатто, L фазони симметрик алмаштириш ҳам бўлади, чунки E_n нинг ҳар қандай векторлари учун бажарилган (1) тенглик, хусусан, L да ётувчи векторлар учун ҳам ўринлидир.

Индуктив фаразга асосан, L фазода φ алмаштиришнинг хос векторларидан тузилган ортонормаланган база мавжуд; уни $e_2, \dots, e_n$ орқали белгилайлик. Бу векторларнинг ҳаммаси e_1 векторга ортогонал ва демак, E_n фазонинг биз излаётган ортонормаланган базаси $e_1, e_2, \dots, e_n$ шу алмаштиришнинг хос векторларидан тузилган бўлади. Теорема исботланди.

37-§. Квадратик формани бош ўқларга келтириш. Формалар жуфти

Аввалги параграфнинг сўнгги теоремасини ушбу матрицавий теореманинг исботи учун қўллаймиз.

Ҳар қандай A симметрик матрица учун шундай Q ортогонал матрица топиш мумкинки, бу матрица A матрицани диагонал шаклга келтиради, яъни A матрицани Q матрица орқали трансформациялаб ҳосил қилинган $Q^{-1}AQ$ матрица диагонал матрица бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, n-тартибли A симметрик матрица берилган бўлсин. Агар $e_1, e_2, \dots, e_n$ n ўлчовли E_n евклид фазосининг қандайдир ортонормаланган базаси бўлса, у ҳолда A матрица бу базада φ симметрик алмаштиришни беради. Исботланганга кўра E_n да φ алмаштиришнинг хос векторларидан тузилган $f_1, f_2, \dots, f_n$ ортонормаланган база мавжуд: бу базада φ диагонал матрица B орқали ифодаланади (33-§ га қаранг). У ҳолда 31-§ га асосан,

$$B = Q^{-1}AQ \qquad (1)$$

бўлади, бу ерда Q f базадан e базага ўтиш матрицаси,

$$e = Qf. \qquad (2)$$

Бу матрица бирор ортонормаланган базадан бошқа худди шундай базага ўтиш матрицаси бўлганлиги сабабли ортогонал бўлади (35-§ га қаранг). Теорема исбот бўлди. Ортогонал Q матрицанинг тескари матрицаси транспонирланганига тенг бўлгани, яъни $Q^{-1} = Q'$ бўлгани учун (1) тенгликни қайтадан ушбу

$$B = Q'AQ$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бироқ 26-§ дан маълумки, квадратик форманинг A симметрик матрицаси номаълумлар устида матрицаси Q га тенг бўлган чизиқли алмаштириш бажарилганда худди шундай ўзгаради. Номаълумларни ортогонал матрицали чизиқли алмаштириш ортогонал алмаштириш эканлигини (35-§ га қаранг) ва каноник кўринишга келтирилган квадратик форма диагонал матрицага эга эканлигини ҳисобга олиб, бундан аввалги теоремага асосланган ҳолда ҳақиқий квадратик формани бош ўқларга келтириш ҳақидаги қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз: *Ҳар қандай ҳақиқий $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ квадратик форма номаълумларни бирорта ортогонал алмаштириш орқали каноник кўринишга келтирилиши мумкин.*

Номаълумларни берилган квадратик формани каноник кўринишга келтирувчи кўпгина ҳар хил ортогонал алмаштиришлар мавжуд бўлишига қарамай, бу каноник кўринишнинг ўзи аслида бир қийматли аниқланади:

$f(x_1, x_2. \dots, x_n)$ *квадратик формани каноник кўринишга келтирувчи А матрицали ортогонал алмаштириш қандай бўлишидан қатъи назар, ҳосил бўлган каноник кўринишнинг коэффициентлари А матрицанинг (карралиликлари билан олинган) характеристик илдизларидан иборат бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, f форма бирорта ортогонал алмаштириш орқали каноник кўринишга келтирилган бўлсин:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \dots + \mu_n y_n^2.$$

Бу ортогонал алмаштириш номаълумлар квадратларининг йиғиндисини инвариантлигича қолдиради ва демак, λ—янги номаълум бўлса, у ҳолда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

бўлади. Чизиқли алмаштириш бажарилгач, квадратик форманинг детерминанти алмашитриш детерминантининг квадратига кўпайтирилишини (28-§ га қаранг), ортогонал алмаштириш детерминантининг квадрати эса бирга тенг (35-§ га қаранг) эканлигини ҳисобга олиб, бу квадратик формаларнинг детерминантларига ўтсак, ушбу

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} \mu_1-\lambda & 0 \dots & 0 \\ 0 & \mu_2-\lambda \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \mu_n-\lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda)$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликдан теореманинг исботи келиб чиқади.

Бу натижага матрицавий ифода ҳам бериш мумкин:

А симметрик матрицани диагонал шаклга келтирувчи ортогонал матрица қандай бўлишидан қатъи назар, ҳосил қилинган диагонал матрицанинг асосий диагонали А матрицанинг (карралиликлари билан олинган) характеристик илдизларидан иборат бўлади.

Квадратик формани бош ўқларга келтирувчи ортогонал алмаштиришни амалда топиш. Баъзи масалаларда ҳақиқий квадратик форманинг ортогонал алмаштириш орқали келтирилган каноник кўринишини билишгина зарур бўлиб қолмай, балки бу кўринишга келтирувчи алмаштиришнинг ўзини ҳам билиш зарур бўлади. Бу алмаштиришни бош ўқларга келтириш ҳақидаги теореманинг исботидан фойдаланиб топиш анчагина мушкул бўлгани сабабли, биз бу алмаштиришни гопишнинг бошқача усулини кўрсатмоқчимиз. Бунинг учун берилган A симметрик матрицани диагонал шаклга келтирувчи Q ортогонал матрицани ёки унинг тескари матрицаси Q^{-1} ни топишни ўрганиш кифоя. (2) га асосан бу матрица e базадан f базага ўтиш матрицаси бўлади, яъни унинг сатрлари (e базада) A матрица орқали ифодаланадиган φ симметрик алмаштиришнинг n та хос векторларидан тузилган ортонормаланган системанинг координата сатрларидан иборат. Хос векторларнинг шундай системасини топиш қолди, холос.

λ_0 A матрицанинг исталган характеристик илдизи бўлиб, унинг карралилиги k_0 га тенг бўлсин. Бизга 33-§ дан маълумки, φ алмаштиришнинг λ_0 хос қийматига мос келувчи ҳамма хос векторларининг координата сатрларидан тузилган тўплам ушбу

$$(A-\lambda_0 E)X=0 \tag{3}$$

бир жинсли тенгламалар системасининг нолдан фарқли ечимлари тўплами билан бир хилда бўлади. A матрицанинг симметрик эканлиги бу ерда A ўрнига A' ни ёзишга имкон беради. A симметрик матрицани диагонал шаклга келтирувчи ортогонал матрицанинг мавжудлиги ва бу диагонал шаклнинг ягоналиги ҳақидаги юқорида исботланган теоремалардан (3) системанинг ҳеч бўлмаганда k_0 та чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимлари мавжуд эканлиги келиб чиқади. Бундай ечимлар системасини 12-§ дан маълум бўлган усуллар ёрдамида излаймиз ва ҳосил бўлган системани 34-§ га асосан ортогоналлаймиз ва нормалаймиз.

λ_0 сифатида галма-гал A симметрик матрицанинг барча характеристик илдизларини олиб чиқсак ва илдизлар карралиликларининг йиғиндиси n га тенглигини ҳисобга олсак, у ҳолда биз φ алмаштиришнинг e базадаги координаталари орқали берилган n та хос векторларидан иборат системасини ҳосил қиламиз. Бу векторлар системаси хос векторларнинг изланаётган ортонормаланган системаси эканлигини исботлаш учун ушбу леммани исботлаш кифоя:

φ симметрик алмаштиришнинг турли хос қийматларига мос келувчи хос векторлари ўзаро ортогонал.

Ҳақиқатан ҳам,

$$b\varphi=\lambda_1 b,\quad c\varphi=\lambda_2 c,$$

шу билан бирга $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлсин.

$$(b\varphi,\ c)=(\lambda_1 b,\ c)=\lambda_1(b,\ c),$$
$$(b,\ c\varphi)=(b,\ \lambda_2 c)=\lambda_2(b,\ c)$$

бўлгани учун

$$(b\varphi,\ c)=(b,\ c\varphi)$$

тенгликдан

$$\lambda_1(b, c) = \lambda_2(b, c)$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлгани учун) исбот қилиниши керак бўлган

$$(b, c) = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Мисол Ушбу

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

квадратик формани бош ўқларга келтиринг.

Бу форманинг A матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

кўринишга эга Унинг характеристик кўпҳадини топамиз:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Шундай қилиб, A матрица уч каррали характеристик илдиз 1 га ва оддий характеристик илдиз -3 га эга. Демак, f форманинг ортогонал алмаштириш орқали келтириладиган каноник кўринишини ҳозирданоқ ёза оламиз

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3 - 3y_4^2.$$

f ни бу кўринишга келтирувчи ортогонал алмаштиришни топайлик. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси (3) $\lambda_0 = 1$ бўлганда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Бу системанинг ранги 1 га тенг ва демак, унинг чизиқли боғлиқ бўлмаган учта ечимини топиш мумкин. Масалан:

$$b_1 = (1, 1, 0, 0),$$
$$b_2 = (1, 0, 1, 0),$$
$$b_3 = (-1, 0, 0, 1)$$

векторлар худди шундай ечимлардан иборат.

Бу векторлар системасини ортогоналлаб, ушбу

$$c_1 = b_1 = (1, 1, 0, 0),$$
$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$
$$c_3 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

векторлар системасини ҳосил қиламиз.

Шунга ўхшаш, $\lambda_0 = -3$ бўлганда бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси (3) ушбу

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади. Бу системанинг ранги 3 га тенг. Унинг нолдан фарқли ечими вазифасини

$$c_4 = (1, -1, -1, 1)$$

вектор бажаради.

c_1, c_2, c_3, c_4 векторлар ортогонал системани ташкил қилади. Уни нормалаб, ортонормаланган векторларнинг

$$c_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$c_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$c_3' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

системасига келамиз Шундай қилиб, f форма

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2,$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} x_3,$$

$$y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_4,$$

$$y_4 = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_8 + \frac{1}{2} x_4$$

ортогонал алмаштириш орқали бош ўқларга келтирилади. Шуни айтиш кераки, каррали хос қийматга мос келувчи чизиқли боғлиқ бўлмаган хос векторлар системасини ҳар хил усул билан танлаш мумкин бўлгани сабабли, f формани каноник шаклга келтирувчи турли хил ортогонал алмаштиришлар мавжуд. Биз улардан биттасинигина топдик, холос.

Формалар жуфти. n та номаълумнинг $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ҳақиқий квадратик формалар жуфти* берилган бўлсин. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг бу иккала квадратик формани бир вақтнинг ўзида каноник кўринишга келтирувчи хосмас чизиқли алмаштириш мавжудми?

Умумий ҳолда бу саволнинг жавоби салбийдир. Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^2, \ g\ x_1, x_2) = x_1 x_2$$

квадратик формалар жуфтини кўрайлик. Бу иккала формани каноник шаклга келтирувчи

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2, \\ x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

хосмас чизиқли алмаштириш мавжуд бўлсин. f форма (4) алмаштириш орқали каноник кўринишга келиши учун c_{11}, c_{12} коэффициентлардан камида биттаси нолга тенг бўлиши зарур, акс ҳолда каноник кўринишда $2c_{11}c_{12}y_1y_2$ ҳад бўлар эди. Агар лозим бўлса, y_1, y_2 номаълумларнинг номерини ўзгартириб, $c_{12} = 0$ деб олиш мумкин, демак $c_{11} \neq 0$. Лекин бу ҳолда биз ушбу

$$g(x_1, x_2) = c_{11}y_1(c_{21}y_1 + c_{22}y_2) = c_{11}c_{21}y_1^2 + c_{11}c_{22}y_1y_2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. g форма ўз навбатида каноник кўринишга келтирилиши керак бўлгани учун $c_{11}c_{22} = 0$, яъни $c_{22} = 0$ бўлади. Бу $c_{12} = 0$ тенглик билан бирга, (4) чизиқли алмаштиришнинг хосмас чизиқли алмаштириш эканлигига зиддир.

Агар биз берилган формаларнинг камида биттаси, масалан, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мусбат аниқланган деб фараз қилсак[1], вазият бошқача бўлади Бошқача қилиб айтганда, қуйидаги теорема ўринли:

Агар f ва g формалар n та номаълумнинг квадратик формалар жуфти бўлиб, улардан иккинчиси мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда бир вақтнинг ўзида g формани нормал кўринишга, f формани эса каноник кўринишга келтирувчи хосмас чизиқли алмаштириш мавжуд.

Исботлаш учун аввало $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг мусбат аниқланган g формасини нормал шаклга келтирувчи

$$x = TY$$

хосмас чизиқли алмаштиришни бажарайлик:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2.$$

Бунда f форма янги номаълумларнинг қандайдир φ формаси

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi\, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

---

[1] Бу шарт албатта зарурий шарт эмас; масалан $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ва $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ формаларнинг ҳар бири каноник кўринишга эга, лекин уларнинг бирортаси ҳам мусбат аниқланган эмас.

га ўтади. Энди $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълумларнинг φ формани бош ўқларга келтирувчи ортогонал алмаштиришини бажарайлик:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2.$$

Бу алмаштириш (35-§ даги таърифга қаранг) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълумлар квадратлари йиғиндисини $z_1, z_2, \ldots, z_n$ номаълумлар квадратлари йиғиндисига ўтказади Натижада қуйидаги

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2,$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_2^2$$

ифодаларни ҳосил қиламиз, яъни

$$X = (7Q)Z$$

чизиқли алмаштириш изланаётган алмаштиришдан иборат бўлади.

ТЎҚҚИЗИНЧИ БОБ

КЎПҲАДЛАРНИНГ ИЛДИЗЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

38*- §. Иккинчи, учинчи ва тўртинчи даражали тенгламалар

23- § да исботланган алгебранинг асосий теоремаси коэффициентлари сонлардан иборат бўлган исталган n- даражали кўпҳаднинг n та комплекс илдизи мавжуд эканлигини тайинлайди. Асосий теореманинг исботлари (юқорида келтирилгани ҳам, шу даврга қадар маълум бўлган исботларнинг исталган бири ҳам) илдизларнинг соф „мавжудлик“ исботлари бўлиб, бу илдизларни топишнинг ҳеч қандай амалий методини кўрсатиб бермайди. Бундай методларни излаш, шубҳасиз, китобхонга ўрта мактаб алгебра курсидан маълум бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенгламаларни ечиш формуласига ўхшаш формулаларни келтириб чиқаришга уринишлардан бошланган. Биз аввало бу формула коэффициентлари комплекс сонлардан иборат бўлган квадрат тенгламалар учун ҳам ўринлилигича қолишини ва бирмунча мураккаб бўлса-да, шунга ўхшаш формулаларни учинчи ва тўртинчи даражали тенгламалар учун ҳам келтириб чиқариш мумкин эканлигини кўрсатамиз.

Квадрат тенгламалар. Коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлардан иборат бўлган

$$x^2+px+q=0$$

квадрат тенглама берилган бўлсин; умумийликка зарар етказмасдан юқори (x^2 олдидаги) коэффициентни бирга тенг деб олиш мумкин. Бу тенгламани қуйидаги кўринишда қайта ёзиш мумкин:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0.$$

Бизга маълумки, $\frac{p^2}{4}-q$ комплекс сондан комплекс сонлар системасидан четга чиқмай туриб ҳам квадрат илдиз чиқариш мумкин. Бу илдизнинг бир-биридан ишораси билангина фарқ қиладиган иккита қийматини $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ кўринишда ёзамиз.

Шунга кўра

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

яъни берилган тенгламанинг илдизларини одатдаги

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

формула орқали аниқлаш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$x^2-3x+(3-i)=0$$

тенгламани ечинг.

Юқорида келтирилган формулани қўллаб топамиз:

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-(3-i)}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3+4i}.$$

19-§ даги методлардан фойдаланиб, ҳисоблаймиз:

$$\sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i),$$

демак,

$$x_1=2+i,\quad x_2=1-i.$$

Куб тенгламалар. Квадрат тенгламалардан фарқли равишда, шу даврга қадар, ҳатто коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган ҳол учун ҳам куб тенгламаларни ечиш методларига эга эмас эдик. Энди квадрат тенгламалар учун келтириб чиқарилган формулага ўхшаш формулани бир йўла коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлардан иборат бўлган куб тенгламалар учун ҳам келтириб чиқарамиз.

Ихтиёрий комплекс коэффициентли

$$y^3+ay^2+by+c=0 \tag{1}$$

куб тенглама берилган бўлсин. (1) тенгламада y номаълумни y билан

$$y=x-\frac{a}{3} \tag{2}$$

тенглик орқали боғланган янги x номаълум билан алмаштириб, x номаълумга нисбатан унинг квадратини ўз ичига олмаган (бунга ишонч ҳосил қилиш осон) ушбу

$$x^3+px+q=0 \tag{3}$$

кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз. Агар (3) тенгламанинг илдизлари топилса, у ҳолда (2) га асосан (1) тенглама илдизларини ҳам ҳосил қиламиз. Демак, биз коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлардан иборат бўлган (3) „тўлиқмас" куб тенгламаларни ечишни ўрганишимиз кифоя.

(3) тенглама алгебранинг асосий теоремасига биноан учта комплекс илдизга эга. Фараз қилайлик, x_0 бу илдизларнинг

ихтиёрий биттаси бўлсин. Ёрдамчи u номаълумни киритамиз ҳамда

$$f(u) = u^2 + x_0 u - \frac{p}{3}$$

кўпҳадни қараймиз. Унинг коэффициентлари комплекс сонлардан иборат ва шунга кўра у иккита α ва β комплекс илдизга эга, шу билан бирга Виет формулаларига асосан

$$\alpha + \beta = x_0, \tag{4}$$

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}. \tag{5}$$

(3) тенгламага x_0 илдизнинг (4) ифодасини қўйиб, топамиз:

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

ёки

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Аммо (5) тенгликдан $3\alpha\beta + p = 0$ эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q. \tag{6}$$

Иккинчи томондан, (5) тенгликдан

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27} \tag{7}$$

келиб чиқади.

(6) ва (7) тенгликлар α^3 ва β^3 сонлар комплекс коэффициентли

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{8}$$

тенгламанинг илдизлари эканлигини кўрсатади.

(8) тенгламани ечиб,

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

эканини топамиз, бундан[1]

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{9}$$

Шундай қилиб, биз (3) тенглама илдизларини унинг коэффициентлари орқали квадрат ва куб радикаллар воситасида ифода қиладиган ушбу

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Кардано формуласини келтириб чиқардик.

---

[1] (8) тенгламанинг қайси илдизини α^3 ва қайсисини β^3 деб олиш унча аҳамиятга эга эмас, чунки α ва β қийматлар (6) ва (7), шунингдек x_0 илдизни ифодаловчи (4) тенгликларда симметрик равишда қатнашади.

Куб илдиз комплекс сонлар майдонида учта қийматга эга бўлгани учун (9) формуладан α ва β нинг ҳар бири учун учтадан қиймат келиб чиқади. Лекин Кардано формуласини қўллаб, α радикалнинг исталган қиймати билан β радикалнинг исталган қийматини комбинациялаш мумкин эмас: α радикалнинг танланган қиймати учун β радикалнинг (5) тенгликни қаноатлантирувчи қийматинигина олиш керак.

α_1 сон α радикалнинг учта қийматидан исталган биттаси бўлсин. У ҳолда қолган иккитасини 19- § да исботланганига асосан α_1 қийматни бирнинг учинчи даражали ε ва ε^2 илдизларига кўпайтириш орқали ҳосил қилиш мумкин:

$$\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon, \quad \alpha_3 = \alpha_1\varepsilon^2,$$

β_1 орқали β радикалнинг учта қийматидан α радикалнинг (5) тенгликка асосан α_1 қийматига мос келувчи қийматини ифодалайлик, яъни $\alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$. β радикалнинг қолган иккита қиймати

$$\beta_2 = \beta_1\varepsilon, \quad \beta_3 = \beta_1\varepsilon^2$$

бўлади. $\varepsilon^3 = 1$ га асосан

$$\alpha_2\beta_3 = \alpha_1\varepsilon \cdot \beta_1\varepsilon^2 = \alpha_1\beta_1\varepsilon^3 = \alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$$

тенгликлар ўринли бўлгани учун α радикалнинг α_2 қийматига β радикалнинг β_3 қиймати, шунингдек, α радикалнинг α_3 қийматига β радикалнинг β_2 қиймати мос келади. Шундай қилиб, (3) тенгламанинг барча илдизларини қуйидагича ёзиш мумкин

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2, \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Ҳақиқий коэффициентли куб тенгламалар. Коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган ушбу

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (11)$$

тўлиқмас куб тенглама илдизлари тўғрисида нима дейиш мумкинлигини кўрайлик. Маълум бўлишича, бу ҳолда асосий ролни Кардано формуласида квадрат илдиз остида турган $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ифоданинг ишораси ўйнар экан. Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, бу ифоданинг ишораси (11) тенгламанинг дискриминанти деб аталувчи ушбу

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

ифоданинг ишораси билан қарама-қаршидир (қуйидаги 54-§ га қаранг); келгуси баёнимизда дискриминантнинг ишораси ишлатилади.

1) $D<0$ бўлсин. Бу ҳол учун Кардано формуласида ҳар қайси квадрат радикал остида мусбат сон туради, шу сабабли ҳар қайси куб радикал ичидаги сон ҳақиқий сондан иборат бўлади. Аммо ҳақиқий сонниг куб илдизи битта ҳақиқий ва иккита қўшма комплекс қийматга эга. α_1 сон α радикалнинг ҳақиқий қиймати бўлсин; у ҳолда β радикалнинг α_1 қийматга мос келувчи β_1 қиймати ҳам (5) формулага асосан, p ҳақиқий бўлгани учун, ҳақиқий бўлади. Шундай қилиб, (11) тенгламанинг $x_1=\alpha_1+\beta_1$ илдизи ҳақиқий экан. Қолган иккита илдизни биз ушбу параграфнинг (10) формулаларида бирнинг $\varepsilon=\varepsilon_1$ ва $\varepsilon^p=\varepsilon_2$ илдизларини уларнинг 19-§ даги (7) ифодаси билан алмаштириб топамиз:

$$x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2},$$
$$x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2};$$

бу иккита илдиз, α_1 ва β_1 ҳақиқий сонлардан иборат бўлгани учун, мавҳум қисми олдидаги коэффициенти нолдан фарқли қўшма комплекс сонлардан иборат бўлади, шу билан бирга $\alpha_1\neq\beta_1$ бўлгани учун бу сонлар ҳар хил куб радикалнинг қийматларидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, *агар $D<0$ бўлса, у ҳолда* (11) *тенглама битта ҳақиқий ва иккита қўшма комплекс илдизга эга бўлади.*

2) $D=0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

α_1 сон α радикалнинг ҳақиқий қиймати бўлсин; у ҳолда (5) формулага асосан β_1 ҳам ҳақиқий сондан иборат бўлади, шу билан бирга $\alpha_1=\beta_1$. (10) формулаларда β_1 қийматни α_1 билан алмаштириб ва ўз-ўзидан кўриниб турган $\varepsilon+\varepsilon^2=-1$ тенгликдан фойдаланиб, топамиз:

$$x_1=2\alpha_1,\quad x_2=\alpha_1(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha_1,\quad x_3=\alpha_1(\varepsilon^2+\varepsilon)=-\alpha_1.$$

Шундай қилиб, *агар $D=0$ бўлса, у ҳолда* (11) *тенгламанинг ҳамма илдизлари ҳақиқий бўлиб, улардан иккитаси ўзаро тенг бўлади.*

3) ниҳоят, $D > 0$ бўлсин. Бу ҳолда Кардано формуласидаги квадрат илдиз остида манфий ҳақиқий сон тургани учун куб радикал остида қўшма комплекс сонлар туради. Шундай қилиб, α ва β радикалларнинг ҳамма қийматлари комплекс сонлардан иборат бўлади. Лекин (11) тенглама илдизлари орасида камида битта ҳақиқий илдиз бўлиши керак. Бу илдиз, масалан,

$$x_1 = \alpha_0 + \beta_0$$

бўлсин. α_0 ва β_0 сонларнинг йиғиндиси ва $-\frac{p}{3}$ га тенг бўлган кўпайтмаси ҳақиқий бўлгани учун, α_0 ва β_0 сонлар бирорта ҳақиқий коэффициентли квадрат тенгламанинг қўшма илдизларидан иборат бўлади. Шундай экан, $\alpha_0\varepsilon$ ва $\beta_0\varepsilon^2$, шунингдек, $\alpha_0\varepsilon^2$ ва $\beta_0\varepsilon$ сонлар ҳам ўзаро қўшма бўлади, бундан эса (11) тенгламанинг илдизлари

$$x_2 = \alpha_0\varepsilon + \beta_0\varepsilon^2, \quad x_3 = \alpha_0\varepsilon^2 + \beta_0\varepsilon$$

ҳам ҳақиқий сонлардан иборат эканлиги келиб чиқади.

Биз (11) тенгламанинг учала илдизи ҳам ҳақиқий эканлигини келтириб чиқардик, шу билан бирга улар орасида бирбирига тенг бўлганлари йўқ эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар тескарисини фараз қилсак, илдиз x_1 ни шундай танлашимиз мумкин эдики, натижада $x_2 = x_3$ бўлар эди. Бундан эса

$$\alpha_0(\varepsilon - \varepsilon^2) = \beta_0(\varepsilon - \varepsilon^2),$$

яъни $\alpha_0 = \beta_0$ тенглик келиб чиқар эди, бу эса, шубҳасиз, мумкин эмас.

Шундай қилиб, *агар $D>0$ бўлса, (11) тенглама учта ҳар хил ҳақиқий илдизга эга.*

Ҳозиргина кўриб чиқилган ҳол Кардано формуласининг амалий қиймати жуда ҳам катта эмаслигидан далолат беради. Ҳақиқатан ҳам, $D>0$ бўлса, ҳақиқий коэффициентли (11) тенгламанинг ҳамма илдизлари ҳақиқий бўлишига қарамай, уларни Кардано формуласи орқали ҳисоблаш комплекс сондан куб илдиз чиқаришни талаб қилади, уни эса биз бу сонларнинг тригонометрик формасига ўтибгина бажара оламиз. Шунинг учун ҳам илдизларни радикаллар орқали ифода этилиши ўзининг амалий аҳамиятини йўқотади. Китобимиз доирасидан ташқарига чиқадиган методлар ёрдами билан биз кўраётган ҳолда (11) тенгламанинг илдизлари унинг коэффициентлари ёрдамида илдиз остида ҳақиқий сонлардан иборат бўлган радикаллар орқали умуман ҳеч қандай усул билан ҳам, ифода этиб бўлмаслигини исботлашимиз мумкин эди. (11) тенгламани ечишнинг бу ҳолини *келтирилмас* (кўпҳадларнинг келтирилмаслиги билан адаштирилмасин) ҳол дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу $y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0$ тенгламани ечинг. $y=x-1$ ўрнига қўйиш бу тенгламани

$$x^3 - 6x - 9 = 0 \tag{12}$$

кўринишга келтиради. Бу ерда $p = -6$, $q = -9$, шунга кўра

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} > 0,$$

яъни (12) тенглама битта ҳақиқий ва иккита қўшма комплекс илдизга эга. (9) тенгликка асосан $\alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8}$, $\beta = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1}$. Демак, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, яъни $x_1 = 3$. Қолган иккита илдизни (10) формулаларга асосан топамиз:

$$x_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Бундан, берилган тенгламанинг илдизлари

$$y_1 = 2, \ y_2 = -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

эканлиги келиб чиқади.

2. Ушбу тенгламани ечинг: $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Бу ерда $p = -12$, $q = 16$, шунинг учун

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$

Бундан $\alpha = \sqrt[3]{-8}$, яъни $\alpha_1 = -2$ келиб чиқади. Шунга кўра

$$x_1 = -4, \quad x_2 = x_3 = 2.$$

3. Ушбу тенгламани ечинг:

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

Бу ерда $p = -19$, $q = 30$, шунинг учун

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{784}{27} < 0.$$

Шундай қилиб, агар ҳақиқий сонлар соҳасида қолсак, гарчи 2, 3 ва -5 бу тенгламанинг илдизлари бўлса-да, бу тенглама учун Кардано формуласини татбиқ этиб бўлмайди.

Тўртинчи даражали тенгламалар. Коэффициентлари ихтиёрий комплекс сонлардан иборат бўлган тўртинчи даражали

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \tag{13}$$

тенгламани ечиш бирор ёрдамчи куб тенгламани ечишга келтирилади. Бу Феррарига тегишли қуйидаги метод орқали амалга оширилади

Аввало (13) тенглама $y = x - \frac{a}{4}$ ўрнига қўйиш орқали

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{14}$$

кўринишга келтирилади. Сўнгра бу тенгламанинг чап қисми α ёрдамчи параметр орқали қуйидагича айнан ўзгартирилади:

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha x^2 - p\alpha$$

ёки

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha x^2 - qx + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0. \qquad (15)$$

Энди α параметрни шундай танлаймизки, натижада квадрат қавс ичидаги кўпҳад тўлиқ квадрат бўлсин. Бунинг учун у битта икки каррали илдизга эга бўлиши шарт, яъни ушбу тенглик бажарилиши лозим:

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0. \qquad (16)$$

(16) тенглик α номаълумга нисбатан комплекс коэффициентли куб тенглама. Бизга маълумки, бу тенглама учта комплекс илдизга эга. α_0 улардан биттаси бўлсин: у Кардано формуласига асосан радикалларда (16) тенгламанинг коэффициентлари орқали ва демак, (14) тенгламанинг коэффициентлари орқали ифодаланади.

(15) тенгликдаги квадрат қавс ичидаги кўпҳад α соннинг бу танланган қийматида $\frac{q}{4\alpha_0}$ га тенг бўлган икки каррали илдизга эга бўлади; шунга кўра (15) тенглама ушбу

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0\right)^2 - 2\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right)^2 = 0$$

кўринишга эга бўлади, яъни у иккита квадрат тенгламага ажралади:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0, \\ x^2 + x\sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + {}_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

(14) тенгламадан (17) тенгламага айнан алмаштиришлар орқали келганимиз учун. (17) тенгламанинг илдизлари бир вақтни ўзида (14) тенгламанинг илдизлари вазифасини ҳам бажаради. Шу билан бирга осонгина кўриш мумкинки, (14) тенгламанинг илдизлари коэффициентлар орқали радикаллар ёрдамида ифодаланади. Биз тегишли формулаларни, уларнинг узундан-узоқлиги ва амалда бефойдалиги сабабли ёзмаймиз, шунингдек, (14) тенглама ҳақиқий коэффициентларга эга бўлган ҳолни ҳам алоҳида текширмаймиз.

Юқори даражали тенгламалар ҳақида мулоҳазалар. Квадрат тенгламаларнинг ечиш усуллари ҳатто қадимги юнонларга ҳам маълум бўлган бир вақтда учинчи ва тўртинчи даражали тенгламалар ечишни юқорида баён қилинган усулларининг кашф этилиши XVI асрга тааллуқлидир. Бундан сўнг навбатдаги қадамни қўйиш, яъни ҳар қандай бешинчи даражали тенгламанинг (яъни ҳарфий коэффициентли бешинчи даражали тенгламанинг) илдизларини унинг коэффициентлари орқали радикаллар ёрдамида ифодалайдиган формулаларни топиш учун бефойда уринишлар деярли уч аср давом этди. Бундай уринишлар ўтган асрнинг йигирманчи йилларида Абель бундай формулалар ихтиёрий $n \geqslant 5$ да n- даражали тенгламалар учун умуман топилмаслигини исботлагандан сўнггина тугади.

Аммо Абелнинг бу натижаси коэффициентлари сонлардан иборат бўлган конкрет кўпҳаднинг илдизлари ҳар ҳолда бирорта усул билан радикалларнинг баъзи комбинациялари ёрдамида коэффициентлар орқали ифодаланиши мумкинлигини, яъни одатда айтилишича, ҳар қандай тенглама радикалларда ечилиши мумкинлигини истисно қилмас эди. Берилган тенгламанинг қандай шартлар бажарилганда радикалларда ечилишга эга эканлиги ҳақидаги масала ўтган асрнинг ўттизинчи йилларида Галуа томонидан тўлиқ текширилди. $n=5$ дан бошлаб, ҳар қандай n учун радикалларда ечилмайдиган, ҳатто бутун коэффициентли, n- даражали тенгламаларни кўрсатиш мумкин экан. Масалан, ушбу $x^5-4x-2=0$ худди шундай тенгламадир.

Галуанинг илмий асарлари алгебранинг кейинги ривожи учун муҳим таъсир кўрсатди. Аммо уларни баён қилиш бизнинг вазифамизга кирмайди.

39- §. Илдизларнинг чегаралари

Бизга маълумки, коэффициентлари сонлардан иборат бўлган кўпҳад илдизларининг аниқ қийматларини топиш методлари мавжуд эмас. Шунга қарамасдан, механика, физика ва техниканинг турли тармоқларида учрайдиган хилма-хил проблемаларни ҳал қилиш кўпҳадларнинг илдизлари ҳақидаги масалага келтирилади, шу билан бирга бу кўпҳадларнинг даражалари баъзан анча катта бўлади. Бу ҳол, коэффициентлари сонлардан иборат бўлган кўпҳадларнинг илдизлари тўғрисида, бу илдизларнинг аниқ қийматларини билмай туриб, у ёки бу мулоҳазаларни баён қилиш мақсадида олиб борилган жуда кўп текширишлар учун сабаб бўлди. Масалан, илдизларнинг комплекс текисликда жойлашиши ҳақидаги масала ўрганилди (қандай шартлар бажарилганда, барча илдизлар бирлик доира ичида ётади, яъни қачон уларнинг модуллари бирдан кичик, ёки қачон барча илдизлар чап ярим текисликда ётади, яъни ҳақиқий қисмлари манфий сонлардан иборат бўлади ва ҳ. к.) Ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар учун уларнинг ҳақиқий илдизларининг сонини аниқлаш методлари ишлаб чиқилди, бу илдиз жойлашган оралиқларнинг чегаралари излаб топилди ва ҳ. к. Ниҳоят, жуда кўп текширишлар илдизларни тақрибий ҳисоблаш методларига бағишланди; техник татбиқларда одатда илдизларнинг аввалдан берилган аниқликда тақрибий қийматини билишгина етарли бўлади, ҳатто кўпҳад илдизларини, масалан, радикалларда ифода этилган тақдирда ҳам, бу радикаллар бари бир уларнинг тақрибий қийматлари билан алмаштирилар эди.

Бу тадқиқотларнинг ҳаммаси ўз пайтида олий алгебранинг асосий мазмунини ташкил этар эди. Биз ўз курсимизга бу соҳага кирувчи натижаларнинг жуда кичик бир қисминигина киритамиз, шу билан бирга татбиқларнинг энг зарур эҳтиёжларини ҳисобга олиб, баъзан бу чегарадан бир оз четга чиқиб бўлса ҳам, ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар ва уларнинг ҳақиқий илдизларини текшириш билангина чегараланамиз. Шу билан бирга ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳадни биз ҳақиқий қийматларнигина қабул қилувчи, ҳақиқий ўзгарувчининг (узлуксиз) функцияси деб систематик равишда қараймиз ва математик анализнинг натижалари ва методларини — бу қаерда фойдали бўлса, шу ерда — қўллаймиз.

Ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизларини текширишни бу кўпҳаднинг графигини кўришдан бошлаш фойдали: кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари *бу кўпҳад графигининг x ўқи билан кесишиш нуқталарининг абсциссаларидан ва фақат шулардангина иборат эканлиги равшан.*

Мисол учун, бешинчи даражали

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

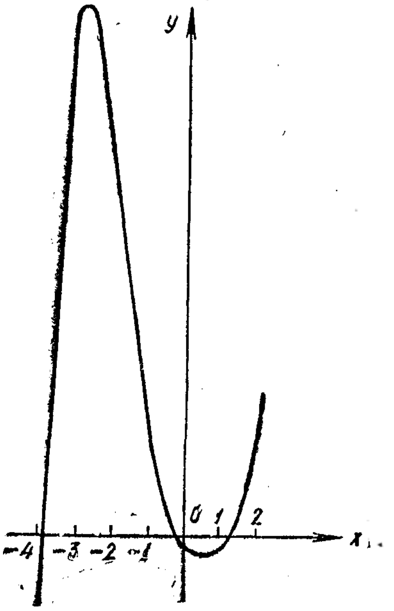
кўпҳадни кўрайлик. 24- § даги натижаларга асосан бу кўпҳаднинг илдизлари тўғрисида қуйидагиларни айтиш мумкин: унинг даражаси тоқ сондан иборат бўлгани учун $h(x)$ камида битта ҳақиқий илдизга эга, агар унинг ҳақиқий илдизлари сони бирдан катта бўлса, комплекс илдизлар ўзаро қўшма бўлгани сабабли ҳақиқий илдизлар сони ёки учга ёки бешга тенг бўлади. $h(x)$ кўпҳаднинг графигини текшириш унинг илдизлари тўғрисида кўпроқ фикрни айтишга имкон беради.

Бу графикни x нинг фақат бутун қийматларинигина олиб ва уларга мос келган $h(x)$ нинг қийматларини, масалан, Горнер схемаси орқали ҳисоблаб чизайлик (9- чизма)[1].

---

[1] Чизмада y ўқидаги масштаб x ўқидаги масштабга нисбатан ўн марта кичик қилиб олинган.

x	$h(x)$
⋮	⋮
-4	-39
-3	144
-2	83
-1	18
0	-3
1	-4
2	39
⋮	⋮



9- расм.

Биз $h(x)$ кўпҳад ҳар қалай, учта ҳақиқий илдизга—мусбат α_1 илдизга ва иккита манфий α_2 ва α_3 илдизларга эга эканлигини кўрамиз, шу билан бирга

$$1 < \alpha_1 < 2, \quad -1 < \alpha_2 < 0,$$
$$-4 < \alpha_3 < -3.$$

Кўпҳадларнинг (ҳақиқий) илдизлари ҳақида унинг графигини қарашдан чиқадиган маълумотлар амалий жиҳатдан анча қониқарли бўлади. Аммо ҳар гал барча илдизлар ҳақиқатан ҳам топилдимикин деган шубҳа қолади. Масалан, юқорида кўрилган мисолда биз $x = 2$ нуқтадан ўнгда ва $x = -4$ нуқтадан чапда кўпҳаднинг илдизлари йўқ эканлигини кўрсатганимиз йўқ. Бунинг устига биз x нинг фақат бутун қийматларинигина олганимиз учун биз чизган график $h(x)$ функциянинг ҳақиқий ҳолатини тасвирлаб бермайди, унинг хийла кичикроқ тебранишларини ҳисобга олмаганимиз сабабли, балки баъзи илдизлар бизнинг назаримиздан четда қолган бўлиши мумкин деб фараз қилишимиз мумкин.

Албатта, биз графикни чизаётганимизда x нинг фақат бутун қийматларинигина олмай, балки 0,1 ёки 0,01 аниқликдаги қийматларини ҳам олишимиз мумкин эди. Аммо бу билан $h(x)$ нинг қийматларини ҳисоблаш жуда ҳам мураккаблашиб кетишига қарамай, юқорида қайд қилинган шубҳаларимизга барҳам берилмай қолаверар эди. Иккинчи томондан, математик анализдаги методлар ёрдамида $h(x)$ функциянинг максимумини ва минимумини текшириб, шу йўл билан графигимизни функциянинг ҳақиқий ҳолати билан солиштириш мумкин эди; бироқ бу ўз навбатида $h'(x)$ ҳосиланинг илдизларини ҳисоблаш масаласига, яъни биз шуғулланаётган масалага ўхшаш масалага олиб келади.

Бундан ҳақиқий коэффициентли кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари жойлашган оралиқнинг чегараларини излаш учун ва бу илдизларнинг сонини аниқлаб бериш учун хизмат қиладиган анча мукаммал методларга эҳтиёж туғилади. Ҳозир ҳақиқий илдизларнинг (уларнинг сонини топиш масаласини кейинги параграфларга қолдириб) чегараларини топиш масаласи билан шуғулланамиз.

Юқори (бош) ҳад модули ҳақидаги лемманинг исботи (23- § га қаранг) кўпҳад илдизларининг модули учун бирорта чегарани кўрсатади. Ҳақиқатан ҳам, 23- § даги (3) тенгсизликда $k=1$ деб олсак,

$$|x| \geqslant 1+\frac{A}{|a_0|} \tag{1}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар учун (бу ерда a_0—юқори коэффициент, A—қолган барча коэффициентлар модулларининг максимуми) кўпҳаднинг юқори коэффициентининг модули қолган ҳамма ҳадлар йиғиндисининг модулидан катта эканлигини келтириб чиқарамиз ва шунинг учун ҳам x нинг (1) тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳеч қандай қиймати бу кўпҳаднинг илдизи вазифасини бажара олмайди.

Шундай қилиб, $1+\frac{A}{|a_0|}$ сон коэффициентлари ихтиёрий сонлардан иборат бўлган $f(x)$ кўпҳаднинг барча ҳақиқий ва комплекс илдизлари модулларининг юқори чегараси вазифасини бажаради. Масалан, юқорида кўрилган $h(x)$ кўпҳад учун бундай чегара вазифасини $a_0=1$, $A=8$ бўлгани сабабли 9 сони бажаради.

Аммо, бу чегара, айниқса биз фақат ҳақиқий илдизлар чегаралари билангина қизиқсак, одатда жуда ҳам юқори бўлади. Бошқа аниқроқ методларни баён қилишга ўтамиз. Шуни назарда тутиш керакки, агар кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари ётиши лозим бўлган чегаралар кўрсатилса, бундай илдизлар ҳақиқатан ҳам мавжуд деб мутлақо даъво қилинмайди.

Аввало, *исталган кўпҳад мусбат илдизларининг юқори чегарасинигина топишни билиш кифоя* эканлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, n- даражали $f(x)$ кўпҳад берилган бўлиб, N_0 унинг мусбат илдизларининг юқори чегараси бўлсин. Ушбу

$$\varphi_1(x)=x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x)=f(-x),$$

$$\varphi_3(x)=x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

кўпҳадларни кўрамиз ва буларнинг мусбат илдизларининг юқори чегараларини топамиз; улар мос равишда N_1, N_2, N_3 сонлардан иборат бўлсин. У ҳолда $\frac{1}{N_1}$ *сон* $f(x)$ *кўпҳад мусбат илдизларининг қуйи чегарасидан иборат бўлади:* агар α сон $f(x)$ нинг мусбат илдизи бўлса, $\frac{1}{\alpha}$ сон $\varphi_1(x)$ нинг мусбат илдизи бўлади ва $\frac{1}{\alpha} < N_1$ тенгсизликдан $\alpha > \frac{1}{N_1}$ келиб чиқади. Шунинг сингари $-N_2$ *ва* $-\frac{1}{N_3}$ *сонлар* $f(x)$ *кўпҳад манфий илдизларининг мос равишда қуйи ва юқори чегараларидан иборат бўлади.* Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг барча мусбат илдизлари $\frac{1}{N_1} < x < N_0$ тенгсизликларни, барча манфий илдизлари $-N_2 < x < -\frac{1}{N_3}$ тенгсизликларни қаноатлантиради.

Мусбат илдизларнинг юқори чегараларини топиш учун қуйидаги методни ишлатиш мумкин. Коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

кўпҳад берилган ва $a_0 > 0$ бўлсин. $a_k (k \geqslant 1)$ манфий коэффициентлар ичида биринчиси бўлсин; агар бундай коэффициентлар бўлмаганда эди, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад умуман мусбат илдизларга эга бўлмаган бўлар эди. Ниҳоят, манфий коэффициентларнинг абсолют қийматлари бўйича энг каттаси B бўлсин У ҳолда

$$1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

сон $f(x)$ *кўпҳад мусбат илдизларининг юқори чегараси вазифасини ўтайди.*

Ҳақиқатан ҳам, $x > 1$ деб фараз қилиб, a_1, a_2, . . . a_{k-} коэффициентларнинг ҳар бирини ноль сони билан алмаштириб, a_k, a_{k+1}, . . . , a_n ларнинг ҳар бирини эса B сон билан алмаштирсак, кўпҳаднинг қийматини фақатгина камайтиришимиз мумкин, яъни

$$f(x \geqslant a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + x + 1 =$$
$$= a_0x^n - B\,\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1},$$

яъни $x>1$ тенгсизликка асосан

$$f(x) > a_0x^n - \frac{Bx^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1) - B]. \quad (2)$$

Агар

$$x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \qquad (3)$$

бўлса, у ҳолда

$$a_0 x^{k-1}(x-1) - B \geqslant a_0(x-1)^k - B$$

бўлгани учун (2) формулада квадрат қавс ичидаги ифода мусбат бўлади, яъни (2) га асосан $f(x)$ нинг қиймати қатъий мусбат бўлади. Шундай қилиб, x нинг (3) тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлари $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари вазифасини бажара олмайди, худди шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Бу метод юқорида қурилган $h(x)$ кўпҳад мусбат илдизларининг юқори чегараси сифатида $k=2$ ва $B=7$ бўлгани сабабли $1+\sqrt{7}$ сонини олиш мумкинлигини кўрсатади. Бу чегарани унга энг яқин турувчи ҳамда катта бўлган бутун сон 4 билан алмаштириш мумкин.

Юқори чегарани излашнинг бошқа кўпгина методларидан биз Ньютон методинигина баён қиламиз. Бу метод юқорида баён қилинган методга нисбатан (ёзилиш жиҳатидан) кўполроқ бўлишига қарамай, одатда жуда яхши натижа беради.

Юқори коэффициенти a_0 мусбат сондан иборат бўлган ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин. *Агар $f(x)$ кўпҳад ва унинг барча кетма-кет $f'(x)$, $f''(x)$, . . . , $f^n(x)$ ҳосилалари $x=c$ да мусбат қийматларни қабул қилса, у ҳолда c сон мусбат илдизларнинг юқори чегараси вазифасини бажаради.*

Ҳақиқатан ҳам, Тейлор формуласига биноан (23- § га қаранг):

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)^2\frac{f''(c)}{2!} + \ldots + (x-c)^n\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Агар $x \geqslant c$ бўлса, у ҳолда ўнгда қатъий мусбат сон туради, яъни x нинг бундай қийматлари $f(x)$ нинг илдизлари вазифасини бажара олмайди.

Берилган $f(x)$ кўпҳад учун унга мос келувчи c сонни излашда қуйидагича иш тутиш фойдалидир. $f^{(n)}(x) = n!\,a_0$ ҳосила мусбат сон бўлгани учун $f^{(n-1)}(x)$ кўпҳад x нинг ўсувчи функциясидан иборат. Демак, шундай c_1 сон топиладики, $x \geqslant c_1$ бўлганда $f^{(n-1)}(x)$ ҳосила мусбат бўлади. Бундан эса $x \geqslant c_1$ бўлганда $f^{(n-2)}(x)$ ҳосила x нинг ўсувчи функциясидан иборат эканлиги келиб чиқади, шунга кўра шундай $c_2\ (c_2 \geqslant c_1)$ сон мавжудки, $x \geqslant c_2$ бўлганда $f^{(n-2)}(x)$ ҳосила ҳам ўз навбатида мусбат бўлади. Бу процессни давом эттириб, ниҳоят изланаётган c сонга етиб келамиз.

Ньютон методини юқорида кўрилган $h(x)$ кўпҳадга қўллаб, топамиз.

$$\begin{aligned}
h\ (x) &= x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,\\
h'(x) &= 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,\\
h''(x) &= 20x^3 + 24x^2 - 30x + 16,\\
h'''(x) &= 60x^2 + 48x - 30,\\
h^{IV}(x) &= 120x + 48,\\
h^{V}(x) &= 120.
\end{aligned}$$

$x=2$ бўлганда бу кўпҳадларнинг ҳаммаси ҳам мусбат эканлигини (жуда бўлмаса Горнер методи билан) осонгина текшириш мумкин. Шундай қилиб, 2 сони $h(x)$ кўпҳад мусбат илдизларининг юқори чегараси вазифасини бажарар экан. Бу натижа юқорида бошқа методлар ёрдамида олинган натижаларга нисбатан анча аниқдир.

$h\ (x)$ кўпҳад манфий илдизларининг қуйи чегарасини топиш учун $\varphi_2(x) = -h(-x)$ кўпҳадни текширамиз[1])

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3,\\
\varphi_2'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7,\\
\varphi_2''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16,\\
\varphi_2'''(x) &= 60x^2 - 48x - 30,\\
\varphi_2^{IV}(x) &= 120x - 48,\\
\varphi_2^{V}(x) &= 120
\end{aligned}$$

бўлгани сабабли ҳамда бу кўпҳадларнинг барчаси $x=4$ да мусбат эканлигидан (буни осонликча текшириш мумкин) 4 сони $h(x)$ кўпҳад мусбат илдизларининг юқори чегараси вазифасини бажаради ва шунга кўра -4 сони $h(x)$ манфий илдизларининг қуйи чегараси бўлади.

Ниҳоят,

$$\varphi_1(x) = -x^5h\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1,$$

$$\varphi_3(x) = -x^5h\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

кўпҳадларни текшириб, яна Ньютон методини қўллаб, улар учун мусбат илдизларининг юқори чегараси сифатида мос равишда 1 ва 4 сонларини олишимиз мумкин, шунга кўра $h(x)$ кўпҳад мусбат илдизларининг қуйи чегараси вазифасини $\frac{1}{1} = 1$ сони, манфий илдизларининг юқори чегараси вазифасини эса $-\frac{1}{4}$ сони ўйнайди.

Шундай қилиб, $h(x)$ кўпҳаднинг мусбат илдизлари 1 ва 2 сонлари орасида жойлашган бўлиб, манфий илдизлари эса -4 ва $-\frac{1}{4}$ сонлари орасида жойлашган. Бу натижа юқорида графикни текширишдан келтириб чиқарилган натижа билан жуда мос келади.

---

1) Биз $h(-x)$ ўрнига $-h(-x)$ни оламиз, чунки Ньютон методини қўллаш учун юқори коэффициент мусбат бўлиши керак; $\varphi_2(x)$ кўпҳаднинг илдизларига бу алмаштириш ҳеч қандай таъсир кўрсатмаслиги тушунарлидир

40-§. Штурм теоремаси

Энди ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари сонини топиш масаласига ўтамиз. Бунда ҳақиқий илдизларнинг умумий сони билан бирга алоҳида мусбат илдизларнинг сони ва алоҳида манфий илдизларнинг сони билан ҳам, умуман, аввалдан берилган a ва b чегаралар орасидаги илдизларнинг сони билан қизиқамиз. Илдизлар сонини аниқ топишнинг бир нечта методлари мавжуд, аммо уларнинг ҳаммаси ҳам жуда узундан-узоқ; улар ичида бирмунча қулай бўлгани *Штурм методидир*. Ҳозир ана шу методни баён қилишга ўтамиз.

Аввало, кейинги параграфда ҳам ишлатиладиган битта таъриф киритамиз.

Нолдан фарқли ҳақиқий сонларнинг бирорта тартибланган чекли системаси, масалан,

$$1,\ 3,\ -2,\ 1,\ -4,\ -8,\ -3,\ 4,\ 1 \tag{1}$$

берилган бўлсин. Бу сонларнинг ишораларини кетма-кет ёзиб чиқайлик:

$$+,\ +,\ -,\ +,\ -,\ -,\ -,\ +,\ +. \tag{2}$$

Биз (2) ишоралар системасида қарама-қарши ишоралар тўрт марта ёнма-ён турганини кўрамиз. Шу сабабли (1) тартибланган системада тўрт марта ишора *ўзгариши* мавжуд дейилади. Нолдан фарқли ҳақиқий сонларнинг ихтиёрий тартибланган чекли системаси учун ишора ўзгаришлар сонини топиш мумкинлиги табиийдир.

Энди ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳадни текширайлик. Бунда $f(x)$ кўпҳад каррали илдизларга эга эмас деб фараз қиламиз, чунки акс ҳолда биз уни ўзи билан ҳосиласининг энг катта умумий бўлувчисига бўлиб юборишимиз мумкин эди. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, нолдан фарқли кўпҳадларнинг тартибланган чекли

$$f(x) = f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_s(x) \tag{3}$$

системаси $f(x)$ кўпҳаднинг *Штурм системаси* дейилади.

1) (3) системанинг қўшни кўпҳадлари умумий илдизга эга эмас;
2) охирги $f_s(x)$ кўпҳад ҳақиқий илдизларга эга эмас;
3) агар α сон (3) системанинг оралиқ кўпҳадларидан бири бўлган $f_k(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизи бўлса ($1 \leqslant k \leqslant s-1$), у ҳолда $f_{k-1}(\alpha)$ ва $f_{k+1}(\alpha)$ қарама-қарши ишораларга эга бўлади.
4) агар α сон $f(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизи бўлса, у ҳолда x ўса бориб α нуқтадан ўтганда $f(x)\, f_1(x)$ кўпайтма ўз ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартиради.

Ҳар қандай кўпҳад ҳам Штурм системасига эга бўладими деган савол кейинроқ кўрилади; ҳозир эса $f(x)$ бундай системага эга деб фараз қилиб, бу система ёрдамида қандай қилиб ҳақиқий илдизларнинг сонини топиш мумкинлигини кўрайлик.

Агар c ҳақиқий сон берилган $f(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизидан иборат бўлмаса, ва (3) бу кўпҳад учун Штурм системасидан иборат бўлса, у ҳолда ҳақиқий сонларнинг

$$f(c),\ f_1(c),\ f_2(c),\ldots,f_s(c)$$

системасини оламиз, ундан барча нолга тенг бўлганларини ўчирамиз ва $W(c)$ орқали қолган системанинг ишора ўзгаришлар сонини белгилаймиз; *$W(c)$ ни $f(x)$ кўпҳаднинг* (3) *Штурм системасида $x=c$ бўлганда ишора ўзгаришлар сони дейилади*[1].

Ушбу теорема ўринли:

Штурм теоремаси. *Агар a ва b $(a<b)$ ҳақиқий сонлар каррали илдизларга эга бўлмаган $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлмаса, у ҳолда $W(a)>W(b)$ ва $W(a)-W(b)$ айирма $f(x)$ кўпҳаднинг a ва b орасида жойлашган ҳақиқий илдизлари сонига тенг бўлади.*

Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг a ва b орасида жойлашган илдизлари сонини топиш учун ($f(x)$ шартга кўра каррали илдизларга эга эмаслигини эслатайлик) бу кўпҳаднинг Штурм системасидаги ишора ўзгаришлар сони a ва b га ўтишда нечтага камайишини аниқлашимиз кифоя экан.

Теоремани исботлаш учун x ўсиши билан $W(x)$ сон қандай ўзгаришини текшириб кўрайлик. x ўса бориб ўз йўлида (3) Штурм системасининг бирорта ҳам кўпҳадининг илдизларини учратмаса, бу система кўпҳадларининг ишоралари ўзгармайди, шунга кўра $W(x)$ ҳам ўзгармай қолади. Шу сабабли, шунингдек, Штурм системаси таърифидаги (2) шартга асосан фақатгина қуйидаги иккита ҳолни кўрсак кифоя: x нинг бирорта оралиқ $f_k(x)$, $(1\leqslant k\leqslant s-1)$ кўпҳаднинг илдизларидан ўтиши ва x нинг $f(x)$ кўпҳаднинг ўзининг илдизларидан ўтиши.

α сон $f_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant s-1$ кўпҳаднинг илдизи бўлсин. У ҳолда 1) шартга кўра, $f_{k-1}(\alpha)$ ва $f_{k+1}(\alpha)$ лар нолдан фарқли. Демак, жуда кичик бўлса ҳам, шундай ε мусбат сон топиш мумкинки, $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ оралиқда $f_{k-1}(x)$ ва $f_{k+1}(x)$ кўпҳадларнинг илдизлари мавжуд эмас ва шунинг учун уларнинг ҳар қайсиси ишора сақлайди, бунинг устига 3) га асосан бу ишоралар қарама-қаршидир. Бундан, ушбу

$$f_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\ f_k(\alpha-\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha-\varepsilon) \tag{4}$$

---

[1] Ўз-ўзидан маълумки, $f(x)$ кўпҳаднинг Штурм системасидаги ишора ўзгаришлари $f(x)$ кўпҳаднинг x бу кўпҳаднинг бирорта илдизидан ўтгандаги ишора ўзгариши билан ҳеч қандай умумийликка эга эмас.

ва

$$f_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\ f_k(\alpha+\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha+\varepsilon) \qquad (5)$$

сонлар системаларининг ҳар бири $f_k(\alpha-\varepsilon)$ ва $f_k(\alpha+\varepsilon)$ сонлар қандай ишорага эга бўлишидан қатъи назар, фақат биттагина ишора ўзгаришига эга бўлиши келиб чиқади. Масалан, $f_{k-1}(x)$ биз кўраётган оралиқда манфий бўлиб, $f_{k+1}(x)$ эса мусбат бўлса ва агар $f_k(\alpha-\varepsilon)>0$, $f_k(\alpha+\varepsilon)<0$ бўлса, у ҳолда (4) ва (5) системаларга ушбу

$$-,\ +,\ +;\ -,\ -,\ +$$

ишоралар системаси мос келади. Шундай қилиб, x Штурм системасидаги бирорта оралиқ кўпҳаднинг илдизидан ўтганда бу системанинг ишора ўзгартиши фақат жойини ўзгартириши (сурилиши) мумкин бўлиб, янгидан пайдо бўлмайди ва йўқолиб ҳам кетмайди, шунинг учун ҳам $W(x)$ сон бундай ўтишда ўзгармайди.

Иккинчи томондан, α берилган $f(x)$ кўпҳаднинг ўзининг илдизи бўлсин. 1) шартга α кўра сон $f_1(x)$ учун илдиз бўлмайди. Шу сабабли, шундай мусбат ε сон топиладики, $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ оралиқ $f_1(x)$ кўпҳаднинг илдизларини ўз ичига олмайди ва шунинг учун ҳам $f_1(x)$ бу оралиқда ишора сақлайди. Агар бу ишора мусбат бўлса, у ҳолда x 4) шартга кўра α орқали ўтганда $f(x)$ кўпҳаднинг ўзи ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартиради, яъни

$$f(\alpha-\varepsilon)<0,\ f(\alpha+\varepsilon)>0.$$

Демак,

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f_1(\alpha-\varepsilon) \text{ ва } f(\alpha+\varepsilon),\ f_1(\alpha+\varepsilon) \qquad (6)$$

сонлар системасига

$$-,\ + \text{ ва } +,\ +$$

ишоралар системалари мос келади, бошқача қилиб айтганда Штурм системасида битта ишора ўзгариши йўқолади. Агар $f_1(x)$ нинг $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ оралиқдаги ишораси манфий бўлса, яна 4) шартга кўра x α дан ўтганда $f(x)$ кўпҳад ўз ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартиради, яъни $f(\alpha-\varepsilon)>0$, $f(\alpha+\varepsilon)<0$; (6) сонлар системасига энди

$$+,\ - \text{ ва } -,\ -$$

ишоралар системалари мос келади, яъни Штурм системасида яна битта ишора ўзгариши йўқолади.

Шундай қилиб, *$W(x)$ сон (x ўсиб бориб) $f(x)$ кўпҳад илдизларидан ўтганидагина ўзгаради, шу билан бирга бу ҳолда у роппа-роса биттага камаяди.*

Шу билан, равшанки, Штурм теоремаси исботланди. Бу теоремани $f(x)$ кўпҳад ҳақиқий илдизларининг умумий сонини топишга ишлатиш учун a сифатида манфий илдизларнинг қуйи чегарасини, b сифатида эса мусбат илдизларнинг юқори чегарасини олиш кифоя. Аммо қуйидагича иш тутиш қулайдир. 23-§ да исботланган леммага асосан, шундай N сон мавжудки (бу сон жуда катта бўлиши ҳам мумкин), $|x| > N$ бўлганда Штурм системасидаги барча кўпҳадларнинг ишоралари уларнинг юқори ҳадларининг ишоралари билан бир хилда бўлади. Бошқача қилиб айтганда, x номаълумнинг шундай катта мусбат қиймати мавжудки, Штурм системасидаги барча кўпҳадларнинг унга мос келувчи қийматларининг ишоралари уларнинг юқори коэффициентлари олдидаги ишорасига тўғри келади; x нинг ҳисоблаш учун ҳожати бўлмаган бу қийматини шартли равишда ∞ символи билан белгиланади. Иккинчи томондан, x нинг абсолют қиймати жиҳатидан етарлича катта бўлган шундай манфий қиймати мавжудки, Штурм системасидаги кўпҳадларнинг унга мос келувчи қийматларининг ишоралари жуфт даражали кўпҳадлар учун, уларнинг юқори коэффициентлари олдидаги ишораси билан устма-уст тушади ва тоқ даражали кўпҳадлар учун эса уларнинг юқори коэффициентлари олдидаги ишорасига қарама-қарши ишорага эга бўлади; x нинг бу қийматини $-\infty$ орқали белгилаймиз. $(-\infty, \infty)$ оралиқда Штурм системасидаги барча кўпҳадларнинг ва хусусан, $f(x)$ кўпҳаднинг барча илдизлари ётиши равшан. Бу оралиққа Штурм теоремасини қўллаб, биз бу илдизларнинг сонини аниқлаймиз. Штурм теоремасининг $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ оралиқларга татбиқи мос равишда $f(x)$ кўпҳаднинг манфий илдизлари сонини ва мусбат илдизлари сонини беради.

Энди *каррали илдизларга эга бўлмаган, ҳақиқий коэффициентли ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад Штурм системасига эга бўлишини кўрсатишимиз* қолди, холос. Бундай системани тузишда фойдаланиладиган турли методлар ичидан энг кўп ишлатиладиган қуйидаги методни баён қиламиз. $f_1(x) = f'(x)$ деб олайлик, бу Штурм системаси таърифидаги 4) шартнинг бажарилишини таъминлайди. Ҳақиқатан ҳам, агар α сон — $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $f'(\alpha) \neq 0$ бўлади. Агар $f'(\alpha) > 0$ бўлса, у ҳолда α нуқта атрофида $f'(x) > 0$ бўлади, ва шу сабабли x нинг қиймати α дан ўтганда $f(x)$ ўз ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартиради, худди шу ҳол $f_1(x) \times \times f(x)$ кўпайтма учун ҳам ўринли бўлади. Худди шу каби мулоҳазалар $f'(\alpha) < 0$ бўлганда ҳам ўринли бўлади. Шундан сўнг $f(x)$ ни $f_1(x)$ га бўламиз па бу бўлишдан қолган қолдиқни тескари ишора билан олиб, уни $f_2(x)$ деб қабул қиламиз:

$$f(x) = f_1(x)\, q_1(x) - f_2(x).$$

Умуман, агар $f_{k-1}(x)$ ва $f_k(x)$ кўпҳадлар топилган бўлса, у ҳолда $f_{k+1}(x)$ кўпҳад $f_{k-1}(x)$ ни $f_k(x)$ га бўлинганда қолган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганига тенг бўлади:

$$f_{k-1}(x) = f_k(x)\, q_k(x) - f_{k+1}(x). \qquad (7)$$

Бу ерда баён этилган методнинг $f(x)$ ва $f'(x)$ кўпҳадларга татбиқ этилган Евклид алгоритмидан фарқи фақат шундан иборатки, ҳар гал қолдиқда ишора тескарисига алмаштирилади ва кейинги бўлиш амали тескари ишорали худди шу қолдиқ билан бажарилади. Энг катта умумий бўлувчини топишда ишораларнинг бундай алмашиниши аҳамиятга эга бўлмагани учун бизнинг процессимиз $f(x)$ ва $f'(x)$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлган бирорта $f_s(x)$ да тўхтайди, шу билан бирга $f(x)$ да каррали илдизларнинг мавжуд бўлмаганлигидан, яъни $f'(x)$ билан ўзаро туб эканлигидан $f_s(x)$ нинг аслида нолдан фарқли бирорта ҳақиқий сондан иборат эканлиги келиб чиқади.

Бундан биз тузган

$$f(x) = f_0(x),\ f'(x) = f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_s(x)$$

кўпҳадлар системаси Штурм системасининг таърифидаги 2) шартни ҳам қаноатлантириши келиб чиқади. 1) шартнинг бажарилишини исботлаш учун қўшни $f_k(x)$ ва $f_{k+1}(x)$ кўпҳадлар умумий α илдизга эга дейлик. У ҳолда α (7) га асосан $f_{k-1}(x)$ кўпҳад учун ҳам илдиз бўлади.

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x)\, q_{k-1}(x) - f_k(x)$$

тенгликка ўтиб, α сон $f_{k-2}(x)$ учун ҳам илдиз эканлигини ҳосил қиламиз. Худди шу каби давом этиб, α сон $f(x)$ ва $f'(x)$ лар учун ҳам умумий илдиз эканлигини ҳосил қиламиз, бу эса фаразимизга зиддир. Ниҳоят, 3) шартнинг бажарилиши бевосита (7) тенгликдан келиб чиқади: агар $f_k(\alpha) = 0$ бўлса, у ҳолда $f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha)$ бўлади.

Штурм методини аввалги параграфда қурилган

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

кўпҳадга қўллаймиз. Бунда $f(x)$ каррали илдизларга эга эмаслигини олдиндан текшириб ўтирмаймиз, чунки Штурм системасини юқорида баён этилган тузиш методи бир вақтнинг ўзида кўпҳад билан унинг ҳосиласининг ўзаро туб эканлигини текшириш учун ҳам хизмат қилади.

Кўрсатилган методни қўллаб, $h(x)$ учун Штурм системасини топамиз. Шу билан бирга, бўлиш процессида биз Евклид алгоритмидан фарқли равишда, фақат ихтиёрий мусбат сонгагина кўпайтирамиз ва бўламиз, чунки Штурм методида қолдиқларнинг ишораси асосий роль ўйнайди. Биз ушбу

$$\begin{aligned}
h(x) &= x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,\\
h_1(x) &= 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,\\
h_2(x) &= 66x^3 - 150x^2 + 172x + 61,\\
h_3(x) &= -464x^2 + 1135x + 723,\\
h_4(x) &= -32599457x - 8486093,\\
h_5(x) &= -1
\end{aligned}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системадаги кўпҳадларнинг $x = -\infty$ ва $x = \infty$ даги ишораларини аниқлаймиз. Бунинг учун юқорида айтилганга асосан фақат юқори коэффициентларнинг ишоралари ва бу кўпҳадларнинг даражаларигагина эътибор бериш керак. Ушбу жадвални ҳосил қиламиз:

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Ишора ўзгаришлар сони
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

Шундай қилиб, x — ∞ дан ∞ га ўзгарганда Штурм системаси учта ишора ўзгаришини йўқотади, шунга кўра кўпҳад роппа-роса учта ҳақиқий илдизга эга. Бундан кўринадики, аввалги параграфда бу кўпҳаднинг графигини чизаётиб, биз битта ҳам илдизни эътибордан четда қолдирмаган эканмиз.

Штурм методини бир оз соддароқ бўлган бошқа кўпҳад учун қўллаймиз. Ушбу кўпҳад берилган бўлсин:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$$

Бу кўпҳаднинг графигини олдиндан чизмай туриб, унинг ҳақиқий илдизларининг сонини ҳамда бу илдизларнинг ҳар бири жойлашган оралиқнинг чегараларини топамиз.

Ушбу

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 1, \\ f_1(x) &= 3x^2 + 6x, \\ f_2(x) &= 2x + 1, \\ f_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

система $f(x)$ кўпҳад учун Штурм системасидан иборат бўлади. Бу системада $x = -\infty$ ва $x = \infty$ бўлганда ишора ўзгаришлар сонини топайлик.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ишора ўзгаришлар сони
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Демак, $f(x)$ кўпҳад учта ҳақиқий илдизга эга. Бу илдизларнинг ўрнини (жойлашишини) аниқроқ топиш учун олдинги жадвални давом эттирамиз:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ишора ўзгаришлар сони
$x=-3$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$x=-2$	$+$	0	$-$	$+$	2
$x=-1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$x=0$	$-$	0	$+$	$+$	1
$x=1$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг Штурм системаси x нинг -3 дан -2 га, -1 дан 0 га ва 0 дан 1 га ўтишида биттадан ишора ўзгартиш йўқотади. Шунинг учун ҳам бу кўпҳаднинг α_1, α_2 α_3 илдизлари ушбу

$$-3<\alpha_1<-2, \quad -1<\alpha_2<0, \quad 0<\alpha_3<1$$

тенгсизликларни қаноатлантиради.

41- §. Ҳақиқий илдизлар сони ҳақида бошқа теоремалар

Штурм теоремаси кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари сони ҳақидаги масалани батамом ҳал қилади. Аммо Штурм системасини тузиш жараёнида ҳисоблашларнинг узундан-узоқлиги унинг муҳим камчилигидан иборат, бунга китобхон юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисидаги барча ҳисоблашларни бажариб қаноат ҳосил қилган бўлса керак. Шу сабабли, ҳозир ҳақиқий илдизларнинг сонини аниқ бермаса ҳам, бу сонни юқоридан чегараловчи (баҳоловчи) иккита теорема исботланади. Графикдан фойдаланиб ҳақиқий илдизлар сони қуйидан чегаралангач, татбиқ қилинадиган бу теоремалар Штурм методига мурожаат этмай туриб ҳам ҳақиқий илдизларнинг аниқ сонини топишга баъзан имкон беради. n-даражали ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин, шу билан бирга у каррали илдизларга эга бўлиши ҳам мумкин дейлик. Унинг кетма-кет ҳосилалари

$$f(x)=f^{(0)}(x), \; f'(x), \; f''(x), \; \ldots, \; f^{(n-1)}(x), \; f^{(n)}(x) \qquad (1)$$

системасини кўрайлик; улардан охиргиси $f(x)$ кўпҳаднинг a_0 юқори коэффициентини $n!$ га кўпайтмасига тенг бўлгани учун ҳар доим ўзгармас ишора сақлайди. Агар c ҳақиқий сон

(1) системадаги бирорта ҳам кўпҳаднинг илдизи вазифасини бажармаса, у ҳолда $S(c)$ орқали ушбу

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c)$$

тартибланган сонлар системасидаги ишора ўзгаришлар сонини белгилаймиз. Шундай қилиб, (1) система кўпҳадларининг бирортасини ҳам нолга айлантирмайдиган барча x лар учун аниқланган бутун сонли функция $S(x)$ни қараш мумкин.

$S(x)$ сон x ўсиши билан қандай ўзгаришини кўрайлик. x (1) кўпҳадларнинг бирортасининг илдизларидан ўтмагунича $S(x)$ сон ўзгара олмайди. Шунга кўра биз икки ҳолни кўришимиз зарур: x сон $f(x)$ кўпҳаднинг илдизидан ўтиши ва x сон $f^{(k)}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ҳосилалардан бирортасининг илдизидан ўтиши. α сон $f(x)$ кўпҳаднинг l каррали илдизи бўлсин, $l \geqslant 1$, яъни

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(l-1)}(\alpha) = 0,\ f^{(l)}(\alpha) \neq 0.$$

ε шундай кичик мусбат сон бўлсинки, $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ оралиқ $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots$, $f^{(l-1)}(x)$ кўпҳадларнинг α дан ташқари ундан фарқли бирорта ҳам илдизини ўз ичига олмасин, шунингдек $f^{(l)}(x)$ кўпҳаднинг ҳам бирорта илдизини ўз ичига олмасин.

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f'(\alpha-\varepsilon),\ \ldots,\ f^{(l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ f^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$$

сонлар системасида ҳар қайси икки қўшни сон қарама қарши ишорага эга бўлгани ҳолда

$$f(\alpha+\varepsilon),\ f'(\alpha+\varepsilon),\ \ldots,\ f^{(l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ f^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$$

сонларнинг ҳаммаси ҳам бир хил ишорага эга эканлигини исботлайлик, (1) системанинг ҳар бир кўпҳади ўзидан олдинги кўпҳаднинг ҳосиласидан иборат бўлгани учун x сон $f(x)$ нинг α илдизидан ўтганда, бу илдизнинг каррасидан қатъи назар, ўтишдан олдин $f(x)$ ва $f'(x)$ лар ҳар хил ишорага эга бўлиб, ўтиб бўлгач эса уларнинг ишоралари бир хил бўлишини исботлашимиз етарлидир. Агар $f(\alpha-\varepsilon)>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha)$ оралиқда камаювчи, шунинг учун ҳам $f'(\alpha-\varepsilon)<0$; $f(\alpha-\varepsilon)<0$ бўлганда эса $f(x)$ ўсувчи ва шунинг учун ҳам $f'(\alpha-\varepsilon)>0$. Демак, ҳар икки ҳолда ҳам ишоралар турлича. Иккинчи томондан, агар $f(\alpha+\varepsilon)>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ $(\alpha,\ \alpha+\varepsilon)$ оралиқда ўсувчи ва шу сабабли $f'(\alpha+\varepsilon)>0$; шунга ўхшаш $f(\alpha+\varepsilon)<0$ дан $f'(\alpha+\varepsilon)<0$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, α илдиздан ўтгач, $f(x)$ ва $f'(x)$ ларнинг ишоралари бир хил бўлиши керак.

Исботланганга асосан x сон $f(x)$ кўпҳаднинг l каррали илдизидан ўтишида

$$f(x),\ f'(x),\ \ldots,\ f^{(l-1)}(x),\ f^{(l)}(x)$$

система l та ишора ўзгартиришини йўқотиши келиб чиқади.

Энди α

$$f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ f^{(k+l-1)}(x),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ l \geqslant 1$$

ҳосилаларнинг илдизи бўлиб, на $f^{(k-1)}(x)$ нинг ва на $f^{(k+1)}(x)$ нинг илдизи бўлмасин. Юқорида исботланганга асосан x нинг α дан ўтиши

$$f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ f^{(k+l-1)}(x),\ f^{(k+l)}(x)$$

системада l та ишора ўзгартиришини йўқолишига сабаб бўлади. Албатта, бу ўтиш $f^{(k-1)}(x)$ ва $f^{(k)}(x)$ лар орасида янги ишора ўзгаришини ҳосил қилиши ҳам мумкин, аммо $l \geqslant 1$ бўлгани учун x сон α дан ўтганда

$$f^{(k-1)}(x),\ f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ f^{(k+l-1)}(x),\ f^{(k+l)}(x)$$

системадаги ишора ўзгаришлар сони ё ўзгармайди, ёки камаяди. Шу билан бирга у $f^{(k-1)}(x)$ ва $f^{(k+1)}(x)$ кўпҳадлар x α қийматдан ўтаётганда ўз ишораларини ўзгартирмаганликлари сабабли, фақат жуфт сонгагина камайиши мумкин.

Ҳосил қилинган натижалардан, *агар a ва b $(a < b)$* (1) *системанинг бирорта ҳам кўпҳади учун илдиз бўлмаса, у ҳолда* $f(x)$ кўпҳаднинг *a ва b орасида жойлашган ва ҳар бири, унинг карраси қанча бўлса, шунча марта ҳисобланган ҳақиқий илдизларининг сони $S(a) - S(b)$ айирмага тенг ёки бу айирмадан жуфт сонга кам бўлиши келиб чиқади.*

a ва b сонларга қўйилган чекланишларни бир оз камайтириш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз. c ҳақиқий сон гарчи (1) системанинг бошқа кўпҳадлари учун илдиз вазифасини бажариши мумкин бўлса ҳам, $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлмасин.

$S_{(+)}(c)$ орқали

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c) \tag{2}$$

сонлар системасида қуйидаги усулда ҳисобланган ишора ўзгаришлар сонини белгилаймиз: агар

$$f^{(k)}(c) = f^{(k+1)}(c) = \ldots = f^{(k+l-1)}(c) = 0 \tag{3}$$

бўлиб, аммо

$$f^{(k-1)}(c) \neq 0,\ f^{(k+l)}(c) \neq 0, \tag{4}$$

бўлса, у ҳолда $f^{(k)}(c),\ f^{(k+1)}(c),\ \ldots,\ f^{(k\mp l-1)}(c)$ ларнинг ишорасини $f^{(k+l)}(c)$ нинг ишораси қандай бўлса, шундай деб ҳисоблаймиз; бу шубҳасиз, (2) системадаги ишора ўзгаришлар сонини ҳисоблашда ноллар ўчирилган деб фараз қилинишига тенг кучлидир. Иккинчи томондан, $S_{-}(c)$ орқали (2) системада қуйидаги усулда ҳисобланган ишора ўзгаришлар сонини белгилайлик: агар (3) ва (4) шартлар бажарилса, у ҳолда $f^{(k+i)}(c)$, $0 \leqslant i < l-1$ кўпҳаднинг ишорасини: агар $l-i$ айирма жуфт бўлса, $f^{(k+l)}(c)$ нинг ишораси билан бир хил, бу айирма тоқ бўлса $f^{(k+l)}(c)$ нинг ишорасига қарама-қарши деб ҳисоблаймиз.

Энди a ва b $(a<b)$ (1) системанинг қандайдир бошқа кўпҳадларининг илдизлари вазифасини бажарсалар-да, $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлмасин. $f(x)$ кўпҳаднинг a ва b $(a<b)$ лар орасида жойлашган ҳақиқий илдизлари сонини аниқламоқчи бўлсак, қуйидагича иш тутамиз. ε шундай етарлича кичик мусбат сон бўлсинки, $(a, a+2\varepsilon)$ оралиқ $f(x)$ кўпҳаднинг илдизларини ва шунингдек (1) системанинг қолган барча кўпҳадларининг a дан бошқа илдизларини ўз ичига олмасин; иккинчи томондан, η шундай етарлича кичик сон бўлсинки, $(b-2\eta, b)$ оралиқ ҳам $f(x)$ кўпҳаднинг илдизларини ва (1) системанинг b дан фарқли қолган барча илдизларини ўз ичига олмасин. У ҳолда $f(x)$ кўпҳаднинг бизни қизиқтираётган ҳақиқий илдизларининг сони, бу кўпҳаднинг $a+\varepsilon$ ва $b-\eta$ лар орасида жойлашган ҳақиқий илдизларининг сонига тенг; яъни юқорида исботланганига асосан $S(a+\varepsilon)-S(b-\eta)$ айирмага тенг ёки бу айирмадан жуфт сонга кичик бўлади. Аммо

$$S(a+\varepsilon)=S_{+}(a),\quad S(b-\eta)=S_{-}(b)$$

эканлигини осонликча кўрсатиш мумкин.

Шу билан ушбу теорема исботланди.

Бюдан — Фурье теоремаси. *Агар a ва b $(a<b)$ ҳақиқий сонлар ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлмаса, у ҳолда бу кўпҳаднинг a ва b лар орасида жойлашган ва ҳар бири унинг карраси қанча бўлса, шунча марта ҳисобланган ҳақиқий илдизларининг сони, $S_{+}(a)-S_{-}(b)$ айирмага тенг ёки бу айирмадан жуфт сонга кам бўлади.*

∞ символ орқали x номаълумнинг шундай катта қийматини белгилаймизки, (1) система барча кўпҳадларининг унга мос келувчи қийматларининг ишоралари кўпҳадларнинг юқори коэффициентлари ишоралари билан устма-уст тушади. Бу коэффициентлар ишоралари устма-уст тушадиган a_0, na_0, $n(n-1)a_0, \ldots, n!\,a_0$ сонлардан иборат бўлгани учун, $S(\infty)=S_{-}(\infty)=0$ бўлади. Иккинчи томондан,

$$f(0)=a_n,\quad f'(0)=a_{n-1},\quad f''(0)=a_{n-2}\,2!,$$
$$f'''(0)=a_{n-3}\,3!,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=a_0\cdot n!.$$

(бу ерда $a_0, a_1, \ldots, a_n - f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари) бўлгани сабабли $S_{+}(0)f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларидан тузилган системадаги ишора ўзгаришлар сони билан устма-уст тушади, бунда нолга тенг коэффициентлар ҳисобга олинмайди. Шундай қилиб, $(0, \infty)$ оралиққа Бюдан - Фурье теоремасини қўллаб, ушбу теоремага келамиз:

Декарт теоремаси. *$f(x)$ кўпҳаднинг ҳар бири унинг карраси қанча бўлса, шунча марта ҳисобланган мусбат илдизларининг сони бу кўпҳаднинг коэффициентларидан тузилган системадаги ишора ўзгаришлар сонига тенг (бунда нолга тенг бўлган коэффициентлар ҳисобга олинмайди) ёки бу сондан жуфт сонга кам бўлади.*

Шубҳасиз, $f(x)$ кўпҳаднинг манфий илдизлари сонини топиш учун Декарт теоремасини $f(-x)$ кўпҳадга қўллаш кифоядир. Шу билан бирга $f(x)$ кўпҳаднинг бирорта ҳам коэффициенти нолга тенг бўлмаса, у ҳолда $f(-x)$ кўпҳаднинг коэффициентларидан тузилган системадаги ишора ўзгаришларга, шубҳасиз, $f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларидан тузилган системадаги ишора сақланишлар мос келади ва аксинча. Шундай қилиб, *агар $f(x)$ кўпҳад нолга тенг бўлган коэффициентларга эга бўлмаса, у ҳолда унинг манфий илдизлари сони (уларни карралари билан бирга ҳисоблаганда) коэффициентлар системасидаги ишора сақланишлар сонига тенг ёки ундан жуфт сонга кам бўлади.*

Декарт теоремасининг Бюдан—Фурье теоремасига таянмайдиган яна битта исботини келтирамиз. Аввал ушбу леммани исботлайлик.

Агар $c>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад коэффициентлари системасидаги ишора ўзгаришлар сони $(x-c)f(x)$ кўпайтма коэффициентлари системасидаги ишора ўзгаришлар сонидан тоқ сонга кам бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, ёнма-ён турган бир хил ишорали ҳамма ҳадларни қавсларга йиғиб, a_0 юқори коэффициенти мусбат бўлган $f(x)$ кўпҳадни қуйидагича ёзамиз:

$$f(x) = (a_0x^n + \dots + b_1x^{k_1+1}) - (a_1x^{k_1} + \dots + b_2x^{k_2+1}) + \dots$$
$$\dots + (-1)\,(a_sx^{k_s} + \dots + b_{s+1}x^t), \qquad (5)$$

Бу ерда $a_0>0$, $a_1>0$, $\dots$, $a_s>0$, худди шу вақтда b_1, b_2, $\dots$, b_s лар мусбат ёки нолга тенг; аммо b_{s+1} ни қатъий мусбат деб ҳисоблаймиз, яъни x^t, $t \geqslant 0$ коэффициентлари нолдан фарқли $f(x)$ кўпҳадга кирган x номаълумнинг энг кичик даражасидан иборат. Бунда

$$(a_0x^n + \dots + b_1x^{k_1+1})$$

қавс тасодифан фақат биттагина қўшилувчидан иборат бўлиб қолиши мумкин, чунончи $k_1+1=n$ бўлса, худди шундай бўлади. Худди шунга ўхшаш мулоҳаза (5) формуланинг қолган қавслари учун ҳам ўринли бўлади.

Энди $(x-c)f(x)$ кўпайтмага тенг бўлган кўпҳадни ёзайлик, шу билан бирга фақат x нинг $n+1$, k_1+1, $\dots$, k_{s+1} ва t

даражалари қатнашган ҳадларнигина ажратиб ёзамиз. У ҳолда ушбу

$$(x-c)f(x)=(a_0x^{n+1}+\ldots)-(a'_1x^{k_1+1}+\ldots)+\ldots+$$
$$+(-1)^s(a'_s x_s^{k+1}+\ldots-cb_{s+1}x^t) \qquad (6)$$

ифодани ҳосил қиламиз, бунда $a'_i = a_i + cb_i$, $i = 1,2 \ldots s$ ва шунга кўра, $c > 0$ бўлгани учун барча a_i лар қатъий мусбат. Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари системасида a_0x^n ва $-a_1x^{k_1}$ ҳадлар орасида (худди шу каби $-a_1x^{k_1}$ ва $a_2x^{k_2}$ ва ҳ. к. ҳадлар орасида) битта ишора ўзгариши бўлган, $(x-c)f(x)$ кўпҳадда эса буларга мос келган a_0x^{n+1} ва $-a'_1x^{k_1+1}$ ҳадлар орасида (мос равишда $-a'_1x^{k_1+1}$ ва $a'_2x^{k_2+1}$ ҳ. к. ҳадлар орасида) ёки битта, ёки биттадан кўп, лекин у вақтда албатта жуфт сонда ишора ўзгариши бўлади. Шу билан бирга бу ишора ўзгаришларнинг аниқ ўрни бизни қизиқтирмайди; масалан, шундай бўлиши мумкинки, (6) да x^{k_1+2} олдидаги коэффициент худди $-a'_1$ коэффициент каби манфий ва шунинг учун ҳам бу иккита қўшни коэффициент орасида ишора ўзгаришлар мавжуд эмас, яъни биринчи қавсда ишора ўзгаришлар қаердадир олдинда жойлашган. Энди шуни қайд қилайликки, (5) даги охирги қавс битта ҳам ишора ўзгаришга эга эмас эди, худди шу вақтда (6) даги қавс ишора ўзгаришларга эга, шу билан бирга улар тоқ сонда; бунинг учун $f(x)$ ва $(x-c)fx$ кўпҳадларнинг охирги нолдан фарқли коэффициентлари, яъни $(-1)^sb_{s+1}$ ва $(-1)^{s+1}b_{s+1}c$ лар ҳар хил ишорага эга эканлигини эътиборга олиш кифоя. Шундай қилиб, $f(x)$ дан $(x-c)f(x)$ га ўтишда, коэффициентлар системасидаги ишора ўзгаришларнинг умумий сони албатта ортади, шу билан бирга тоқ сонга ортади (бир нечта қўшилувчининг йиғиндиси, агар улардан биттаси тоқ, қолганлари эса жуфт бўлса, албатта тоқ бўлади!). Лемма исботланди.

Декарт теоремасини исботлаш учун $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ орқали $f(x)$ кўпҳаднинг барча мусбат илдизларини белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\varphi(x),$$

бу ерда энди $\varphi(x)$ — ҳақиқий коэффициентли, мусбат ҳақиқий илдизларга эга бўлмаган кўпҳад. Бундан $\varphi(x)$ кўпҳаднинг биринчи ва охирги нолдан фарқли коэффициентлари бир хил ишорага эга эканлиги, яъни бу кўпҳаднинг коэффициентлари системаси жуфт сондаги ишора ўзгаришларга эга эканлиги келиб чиқади. Энди юқорида исботланган леммани ушбу

$$\varphi(x),\ (x-\alpha_1)\varphi(x),\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\varphi(x),\ \ldots,\ f(x)$$

кўпҳадларга кетма-кет қўллаб, коэффициентлар системасидаги ишора ўзгаришлар сони ҳар гал тоқ сонга, яъни бир плюс жуфт сонга ортишини кўрамиз ва шунга кўра $f(x)$ кўпҳад коэффициентлари системасидаги ишора ўзгаришларнинг сони k дан жуфт сонга катта.

Декарт ва Бюдан—Фурье теоремаларини юқорида кўрилган

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

кўпҳадга қўллайлик. Коэффициентлар системасидаги ишора ўзгаришлар сони учга тенг ва шунинг учун ҳам Декарт теоремасига асосан $h(x)$ учта ёки битта мусбат илдизга эга бўлиши мумкин. Бошқа томондан, $h(x)$ нолга тенг бўлган коэффициентларга эга эмас ва коэффициентлар системасида иккита ишора сақланишлар бўлгани учун $h(x)$ ёки иккита манфий илдизга, ёки бўлмаса битта ҳам манфий илдизга эга эмас. Юқорида графикдан фойдаланиб чиқарилган натижа билан солиштириб, икки сони берилган кўпҳад манфий илдизларининг аниқ сони эканлигини ҳосил қиламиз

Мусбат илдизларнинг сонини аниқ ҳисоблаш учун Бюдан—Фурье теоремасидан фойдаланамиз, шу мақсадда уни $(1, \infty)$ оралиққа қўллаймиз, чунки 39-§ да 1 сони $h(x)$ кўпҳад мусбат илдизларининг қуйи чегараси эканлиги кўрсатилган эди. $h(x)$ нинг ҳосилалари кетма кетлиги ҳам 39- § да ёзилган эди Уларнинг $x = 1$ ва $x = \infty$ лардаги ишораларини топайлик:

	$h(x)$	$h'(x)$	$h''(x)$	$h'''(x)$	$h^{IV}(x)$	$h^{V}(x)$	Ишора ўзгаришлар сони
$x = 1$	−	+	+	+	+	+	1
$x = \infty$	+	+	+	+	+	+	0

Бундан, ҳосилалар системаси x нинг 1 дан ∞ га ўтишида битта ишора ўзгариш йўқотиши келиб чиқади ва шунга кўра $h(x)$ фақат битта мусбат илдизга эга бўлади.

Бу мисолга асосланиб шуни қайд қиламизки, умуман кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари сонини излашни унинг графигини ясашдан ва Декарт ҳамда Бюдан—Фурье теоремаларини қўллашдан бошлаш керак, ҳеч илож бўлмаган тақдирдагина Штурм системасини тузишга ўтиш керак.

Кўпҳаднинг барча илдизлари ҳақиқий эканлиги аввалдан маълум бўлган хусусий ҳолда Декарт теоремасини бирмунча аниқлаштириш учун имкон туғилади Худди шундай ҳол, масалан, симметрик матрицанинг характеристик кўпҳади учун рўй беради. Чунончи:

Агар $f(x)$ кўпҳаднинг барча илдизлари ҳақиқий бўлиб, озод ҳад нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу кўпҳад мусбат илдизларининг сони k_1 унинг коэффициентлари системасидаги ишора ўзгаришлар сони s_1 га тенг, манфий илдизларининг сони k_2 эса $f(-x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари системасидаги ишора ўзгаришлар сони s_2 га тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, фаразимизга асосан

$$k_1 + k_2 = n, \tag{7}$$

бу ерда n сон $f(x)$ кўпҳаднинг даражаси ва Декарт теоремасига кўра

$$k_1 \leqslant s_1, \ k_2 \leqslant s_2. \tag{8}$$

$$s_1 + s_2 = n \tag{9}$$

эканлигини исботлайлик. Исботни n бўйича индукция орқали олиб борамиз. $n = 1$ учун $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$) бўлгани сабабли,

$$f(x) = a_0 x + a_1, \ f(-x) = -a_0 x + a_1$$

кўпҳадларнинг фақат биттасидагина ишора ўзгариш мавжуд бўлади, яъни бу ҳол учун $s_1 + s_2 = 1$. (9) формула даражалари n дан кичик бўлган кўпҳадлар учун исботланган деб фараз қилайлик. Агар

$$f(x) = a_0 x^n + a_{n-l} x^l + \ldots + a_n,$$

бу ерда $l \leqslant n-1$, $a_{n-l} \neq 0$) бўлса, у ҳолда

$$g(x) = a_{n-l} x^l + \ldots + a_n$$

белгилаш киритамиз. У вақтда

$$f(x) = a_0 x^n + g(x),$$
$$f(-x) = (-1)^n a_0 x^n + g(-x)$$

бўлади. Агар s_1' ва s_2' мос равишда $g(x)$ ва $g(-x)$ кўпҳадларнинг коэффициентлари системасидаги ишора ўзгаришлар сони бўлса, у ҳолда индуктив фаразимизга асосан ($l > 1$ эканлиги равшан)

$$s_1' + s_2' \leqslant l.$$

Агар $l = n - 1$ бўлса, у ҳолда биринчи ўриндаги, яъни $f(x$ учун a_0 ва $a_1 = a_{n-l}$ лар орасидаги ишора ўзгариши $f(x)$ ва $f(-x)$ кўпҳадларнинг фақат биттасидагина мавжуд бўлади, шунга кўра

$$s_1 + s_2 = s_1' + s_2' + 1 \leqslant l + 1 \quad n.$$

Агар $l \leqslant n - 2$ бўлса, $f(x)$ ва $f(-x)$ кўпҳадларнинг ҳар қайсисида ҳам биринчи ўринда ишора ўзгаришлар бўлиши мумкин лекин бу ҳолда ҳам

$$s_1 + s_2 \leqslant s_1' + s_2' + 2 < l + 2 \leqslant (n-2) + 2 = n$$

бўлади.

(7), (8) ва (9) ларни солиштириб

$$k_1 = s_1, \ k_2 = s_2$$

эканлигини ҳосил қиламиз, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

42-§. Илдизларни тақрибий ҳисоблаш

Олдинги параграфларда баён қилинган методлар ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизларини *ажратишга* имкон беради, яъни ҳар бир илдиз учун шундай чегараларни кўрсатадики, улар орасида фақат битта шу илдизнинг ўзи ётади. Агар бу чегаралар етарли даражада тор бўлса, у ҳолда улар орасида ётган ихтиёрий сонни изланаётган илдизнинг тақрибий қиймати деб ҳисоблаш мумкин. Шундай қилиб, (Штурм методи ёрдамида (ёки бирорта тежамлироқ усул билан) a ва b рационал сонлар орасида $f(x)$ кўпҳаднинг фақатгина битта илдизи ётиши аниқлангандан сўнг, бу чегараларни шундай торайтириш масаласи қоладики, натижада янги ҳосил бўлган a' ва b' чегаралар олдиндан берилган сондаги устма-уст тушадиган биринчи ўнли рақамларга эга бўлсин; бу билан изланаётган илдиз олдиндан берилган аниқликда ҳисобланган бўлади.

Илдизларнинг талаб қилинган аниқликда тақрибий қийматини етарли равишда тез топадиган жуда кўп методлар мавжуд. Биз улардан назарий жиҳатдан соддароқ ҳамда умумийроқ ва биргаликда қўлланилганда кўзланган мақсадга тез олиб келадиган иккитасинигина кўрсатамиз. Шуни қайд қилиш керакки, ҳозир баён қилинадиган методлар фақатгина кўпҳадлар учун эмас, балки ундан кенгроқ бўлган узлуксиз функциялар синфи учун ҳам татбиқ қилинади.

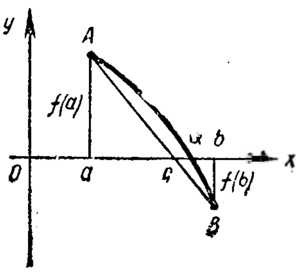
Бундан буён α ни $f(x)$ кўпҳаднинг *оддий* илдизи деб ҳисоблаймиз, чунки биз ҳар доим каррали илдизлардан қутулишимиз мумкин ва α илдиз a ва b чегаралар билан ажратилган ($a < \alpha < b$) деб фараз қиламиз; хусусан, бундан $f(a)$, $f(b)$ лар ҳар хил ишорага эга эканлиги келиб чиқади.

Чизиқли интерполяция методи (шунингдек, сохта ҳолат методи деб ҳам аталади). α илдизнинг тақрибий қиймати деб, масалан, a ва b чегараларнинг ярим йиғиндиси $\frac{a+b}{2}$ ни, яъни учлари a ва b бўлган кесманинг ўртасини ҳам олиш мумкин эди. Аммо илдиз a ва b чегаралардан кўпҳаднинг абсолют қиймати жиҳатидан кичик қийматига мос келувчи чегарага яқинроқда ётибди деб фараз қилиш табиийдир. Чизиқли интерполяция методи шундан иборатки, бунда α илдизнинг тақрибий қиймати деб, (a, b) кесмани $f(a)$ ва $f(b)$ сонларнинг абсолют қийматларига пропорционал бўлакларга бўлувчи c сон олинади, яъни

$$\frac{c-a}{b-c} = -\frac{f(a)}{f(b)};$$

ўнг томондаги минус ишора $f(a)$ ва $f(b)$ лар ҳар хил ишораларга эга бўлганликлари учун қўйилган. Бундан

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}.$$

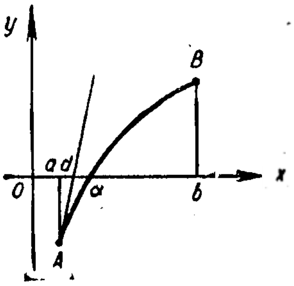


10-чизма.

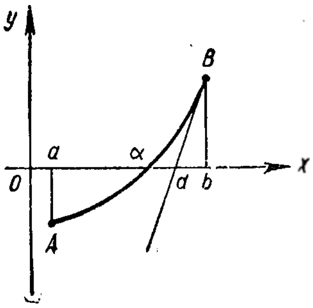
10-чизмага асосан, чизиқли интерполяция методининг геометрик маъноси шундан иборатки, (a, b) кесмада $y = f(x)$ эгри чизиқ унинг $A(a, f(a))$ ва $B(b, f(b))$ нуқталарини туташтирувчи ватар билан алмаштирилади ва бу ватарни x ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси α илдизнинг тақрибий қиймати сифатида қабул қилинади.

Ньютон методи. α сон $f(x)$ кўпҳаднинг оддий илдизи бўлгани учун $f'(\alpha) \neq 0$ бўлади. Шунингдек, $f''(\alpha) \neq 0$ деб қабул қиламиз, акс ҳолда масала даражаси $f(x)$ нинг даражасидан кичик бўлган $f''(x)$ кўпҳаднинг илдизини ҳисоблашга келтирилар эди. Сўнгра, (a, b) кесма $f(x)$ нинг α дан бошқа ҳеч қандай илдизинигина эмас, балки $f'(x)$ кўпҳаднинг ҳам бирорта илдизини, шунингдек $f''(x)$ кўпҳаднинг илдизларини ҳам ўз ичига олмайди деб қабул қиламиз.[1]

Шундай қилиб, математик анализ курсидан маълумки, $y = f(x)$ эгри чизиқ (a, b) кесмада ёки монотон ўсади, ёки монотон камаяди, шунингдек бу кесманинг барча нуқталарида у ёки юқорига қараган қавариқликка, ёки эса пастга қараган қавариқликка эга. Бинобарин, эгри чизиқнинг (a, b) кесмада жойлашишида 11—14 чизмаларда кўрсатилган тўртта ҳол рўй бериши мумкин.



11-чизма.

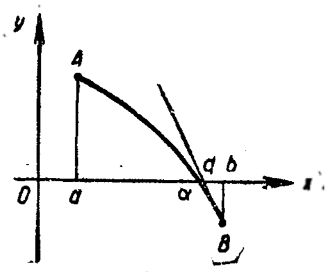


12-чизма.

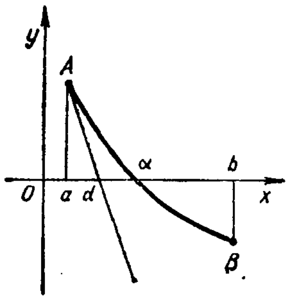
---

[1] Чегараларнинг бу шартларнинг бажарилишини таъминловчи торайишига одатда ҳеч қандай қийинчиликсиз эришилади, чунки юқорида баён қилинган методлар $f'(x)$ ва $f''(x)$ кўпҳадларнинг ихтиёрий кесмада ётган илдизларининг сонини аниқлашга имкон беради.

a ва b чегараларнинг қайси бирида $f(x)$ нинг ишораси $f''(x)$ нинг ишораси билан устма-уст тушса, ўшани a_0 орқали белгилаймиз. $f(a)$ ва $f(b)$ ҳар хил ишорага эга бўлиб, $f''(x)$ эса (a, b) кесманинг барча нуқталарида ишора сақлагани учун, бундай a_0 ни ҳақиқатан ҳам кўрсатиш мумкин. 11- ва 14-чизмаларда кўрсатилган ҳолларда $a_0 = a$, қолган иккита ҳолда эса $a_0 = b$ бўлади. $y = f(x)$ чизиқнинг a_0 абсциссага эга бўлган нуқтасида, яъни $(a_0, f(a_0))$ координаталарга эга бўлган нуқтада шу чизиққа уринма ўтказайлик ва бу уринманинг x ўқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссасини d билан белгилайлик. 11—14-чизмалар d сонни α илдизнинг тақ-

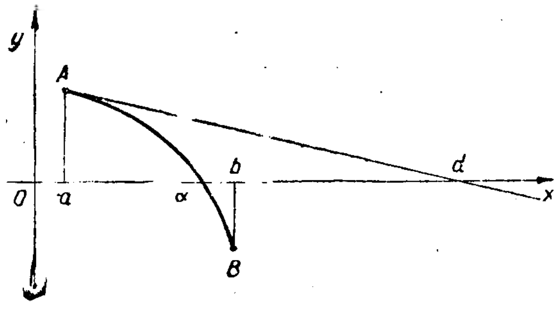


13- чизма.



14- чизма.

рибий қиймати деб олиш мумкин эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, Ньютон методи $y = f(x)$ эгри чизиқни (a, b) кесмада бу кесманинг чегараларидан бирида бу чизиққа ўтказилган уринма билан алмаштиришдан иборат. a_0 нинг танланишига қўйилган шарт жуда муҳим. 15-чизма, агар бу шарт бажарилмаса, уринманинг x ўқи билан кесишиш нуқтаси изланаётган илдизга мутлақо яқинлашмаслиги ҳам мумкин эканлигини кўрсатади.



15- чизма.

d сонни излаш учун фойдаланиладиган формулани келтириб чиқарайлик. Маълумки, $y = f(x)$ эгри чизиққа $(a_0, f(a_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини

$$y - f(a_0) = f'(a_0)(x - a_0)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда уринманинг x ўқи билан кесишиш нуқтасининг $(d, 0)$ координаталарини қўйиб,

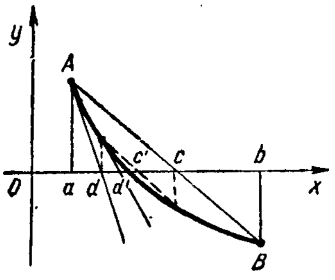
$$-f(a_0) = f'(a_0)(d - a_0)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бундан

$$d = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)} \qquad (2)$$

келиб чиқади.

Агар китобхон 11—14-чизмаларда A ва B нуқталарни ватарлар билан бирлаштирса, у *ҳолда чизиқли интерполяция ва Ньютон методлари барча ҳолларда ҳам* α *илдизнинг асл қийматига бошқа-бошқа томондан яқинлашишни беришини сезади.* Шунинг учун ҳам, агар (a, b) кесма Ньютон методида талаб қилинган шартларни қаноатлантирса, бу методларни қўшиб ишлатиш мақсадга мувофиқдир. Биз бу йўл билан α илдиз учун жуда ҳам тор бўлган c ва d чегараларни ҳосил қиламиз. Агар улар ҳали яқинлашишнинг керак бўлган аниқлигини бермаса, у ҳолда кўрсатилган методларни бу чегаралар учун яна бир марта қўллаш зарур (16-чизмага қаранг) ва ҳоказо; шу билан бирга бу процесс α илдизни ҳақиқатан ҳам исталган аниқликда ҳисоблашга имкон беришини исботлаш мумкин.



16-чизма

Бу методларни олдинги параграфларда кўрилган

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

кўпҳад учун қўллаймиз.

Бизга маълумки, бу кўпҳад $1 < \alpha_1 < 2$ чегаралар орасида жойлашган α_1 оддий илдизга эга. Олдиндан шуни айтиш мумкинки, бу чегаралар чизиқли интерполяция ва Ньютон методларини бир мартадангина қўллаб яхши натижа олиш учун жуда кенгдир. Шунга қарамай, мураккаб ҳисоблашларни талаб қилмайдиган битта мисолга эга бўлмоқ учун уларни қўллаймиз

Бундан олдинги параграфдан маълумки $h'(x)$, $h''(x)$, . . ,$h^V(x)$ ҳосилалар $x = 1$ да мусбат қийматларни қабул қилади. Бундан, 39-§ даги натижаларга асосан, $x = 1$ қиймат $h'(x)$ ва, шунингдек, $h''(x)$ учун ҳам мусбат илдизларнинг юқори чегараси вазифасини бажариши келиб чиқади. Демак $(1, 2)$ кесма бу ҳосилаларнинг илдизларини ўз ичига олмайди ва шунинг учун ҳам унга Ньютон методини қўллаш мумкин. Бундан ташқари, $h''(x)$ бу оралиқнинг ҳамма ерида мусбат ва

$$h(1) = -4, \quad h(2) = 39$$

бўлгани учун $a_0 = 2$ деб қабул қилиш керак. $h'(2) = 109$ эканлигини эътиборга олиб, биз (2) формуладан

$$d = 2 - \frac{39}{109} = \frac{179}{109} = 1,64 \ldots$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Иккинчи томондан, (1) формула

$$c = \frac{2 \cdot (-4) - 1 \cdot 39}{-4 - 39} - \frac{47}{43} = 1,09 \ldots$$

тенгликни беради ва демак, α_1 илдиз ушбу

$$1,09 < \alpha_1 < 1,65$$

чегаралар орасида жойлашган.

Биз чегараларни жуда ҳам оз торайтиришга эришдик, шунинг учун ҳам ҳосил бўлган натижани қониқарли деб бўлмайди. Албатта, янги ҳосил бўлган чегараларга яна бир марта методларимизни қўллашимиз мумкин эди Аммо олдиндан α_1 учун етарли даражада тор бўлган чегараларни, масалан, 0,1 ёки 0,01 аниқликда топиш, ундан кейин эса бу методларни қўллаш мақсадга мувофиқдир. Бу албатта, барча ҳисоблашларни бирданига жуда ҳам мураккаблаштириб юборади, аммо кўпҳадларнинг илдизларини етарлича аниқликда билиш талаб қилинадиган конкрет масалаларда бунга рози бўлишга тўғри келади.

$h(x)$ кўпҳадимизга ва унинг α_1 илдизига қайтамиз, бунда қуйида келтирилган кўпҳадларнинг барча қийматлари Горнер методи ёрдамида ҳисобланишига эътибор берайлик.

$$h(1,3) = -0,13987, \; h(1,31) = 0,0662923851$$

бўлгани учун $1,3 < \alpha_1 < 1,31$, яъни биз α_1 илдизнинг қийматини 0,01 аниқликда топдик. Бу янги чегараларга чизиқли интерполяция методини қўллайлик:

$$c = \frac{1,31 \cdot (-0,13987) - 1,3 \cdot 0,0662923851}{0,13987 - 0,0662923851} = \frac{0,26940980063}{0,2061623851} = 1,30678 \ldots$$

Худди шу чегараларнинг ўзига Ньютон методини қўллаймиз, бу ерда $a_0 = 1,31$ деб олиш керак.

$$h'(1,31) = 20,92822405$$

бўлгани учун

$$d = 1,31 - \frac{0,0662923851}{20,92822405} = \frac{27,3496811204}{20,92822405} = 1,30683 \ldots$$

Шундай қилиб,

$$1,30678 < \alpha_1 < 1,30684$$

ва шунинг учун ҳам $\alpha_1 = 1,30681$ деб олсак, 0,00003 дан кичик бўлган хатоликка йўл қўямиз.

Биз шу даврга қадар, юқорида баён қилинган методлар ҳақиқатан ҳам илдизни исталган аниқликда ҳисоблашга имкон беришини, яъни бу методларнинг яқинлашишини кўрсатганимиз йўқ. Буни ақалли Ньютон методи учун исботлайлик.

Худди юқоридаги каби $f(x)$ кўпҳаднинг оддий α илдизи Ньютон методини қаноатлантирувчи (a, b) оралиқда жойлашган бўлсин. Бундан, хусусан шундай A ва B мусбат сонларнинг мавжудлиги келиб чиқадики, (a, b) оралиқнинг барча нуқталарида

$$|f'(x)| > A, \ |f''(x)| < B \tag{3}$$

бўлади. $C = \frac{B}{2A}$ белгилашни киритайлик ва

$$C(b-a) < 1 \tag{4}$$

деб фараз қилайлик. Бу тенгсизлик бажарилиши учун балки α илдизнинг чегараларини яна ҳам торроқ чегаралар билан алмаштиришга тўғри келиши мумкин, аммо бу ҳол (3) тенгсизликларнинг ўринли бўлишига ҳеч қандай таъсир этмайди. a_0 сон a, b чегаралардан Ньютон методи қўлланилиши лозим бўлгани бўлсин. (2) формулага асосан биз α илдизнинг тақрибий қийматлари сифатида (a, b) оралиқда ётувчи ва бир-бирлари билан

$$a_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

тенгликлар орқали боғланган $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ сонларни кетма-кет ҳосил қиламиз.

$$\alpha = a_k + h_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

бўлсин. У ҳолда

$$0 = f(\alpha) = f(a_k) + h_k f'(a_k) + \frac{h_k^2}{2} f(a_k + \theta h_k)$$

бўлади, бу ерда $0 < \theta < 1$. (a, b) кесмага қўйилган шартга кўра $f'(a_k) \neq 0$ бўлгани учун (5) ва (6) ларни ҳисобга олиб, топамиз:

$$-\frac{h_k^2}{2}\frac{f''(a_k + \theta h_k)}{f'(a_k)} = h_k + \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} = \alpha - \left(a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}\right) =$$
$$= \alpha - a_{k+1} = h_{k+1}.$$

Бундан

$$|h_{k+1}| = h_k^2 \left|\frac{f''(a_k + \theta h_k)}{2f'(a_k)}\right| < h_k^2 \frac{B}{2A} = C h_k^2, \ k = 0, 1 \ 2, \ldots$$

Шундай қилиб,

$$|h_{k+1}| < C h_k^2 < C^3 h_{k-1}^4 < C^7 h_{k-2}^8 < \ldots < C^{2^{k+1}-1} h_0^{2^{k+1}}$$

ёки $|h_0| = |\alpha - a_0| < b - a$ бўлгани учун

$$|h_{k+1}| < C^{-1}[C(b-a)]^{2^{k+1}}, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Бундан (4) шартга кўра, α *илдиз билан унинг Ньютон методини кетма-кет қўллаб ҳосил қилинган* a_k *тақрибий* *қиймати орасидаги* h_k *айирма* k *ўсиши билан нолга интилиши келиб чиқади*, шуни исботлаш талаб этилган эди.

(7) формула $(k+1)$-қадам учун *хатонинг баҳосини* беради, бу эса Ньютон методи чизиқли интерполяция методи билан биргаликда эмас, балки якка ўзи қўлланилганда жуда муҳимдир.

Тақрибий ҳисоблашлар назарияси курсида китобхон юқорида баён этилган методларда, бу методларни қўллашни осонлаштириш учун ҳисоблашларни мақсадга мувофиқроқ равишда жойлаштириш усуллари билан танишиши мумкин Шу курсларнинг ўзида илдизларни тақрибий ҳисоблашнинг яна жуда кўп бошқа методларини ҳам учратиш мумкин. Булар ичида энг мукаммали (баъзан хато равишда Греффе методи деб аталувчи) *Лобачевский методидир*. Бу метод бирданига барча илдизларнинг, шулар қатори комплекс илдизларнинг ҳам тақрибий қийматларини топиш имконини беради, ундан ташқари бу метод, олдиндан, илдизларнинг ажратилишини талаб қилмайди: аммо у жуда ҳам мураккаб ҳисоблашлар билан боғлиқдир. Бу метод асосида қуйида, 11-бобда баён қилинадиган симметрик кўпҳадлар назарияси ётади.

ЎНИНЧИ БОБ

МАЙДОНЛАР ВА КЎПҲАДЛАР

43-§. Сонли ҳалқалар ва майдонлар

Курснинг олдинги жуда кўп бўлимларида биз ушбу ҳолатда иш тутган эдик: материални баён эта туриб ёки ихтиёрий комплекс сонларни, ёки бўлмаса фақат ҳақиқий сонларнигина кўриб, сўнгра ҳосил қилинган натижалар фақат ҳақиқий сонлар билангина чегараланиб қолсак ҳам ўринлилигича қолишини ёки мос равишда, улар ихтиёрий комплекс сонлар учун ҳам сўзма сўз ўтказилишини) қайд қилишга мажбур бўлган эдик. Одатда бу ҳолларнинг ҳаммасида ҳам баён этилган назария биз фақатгина рационал сонларни кўрсак ҳам батамом сақланиб қолишини қайд қилишимиз мумкин эди. Кейинги материални, унинг учун табиий бўлган умумийликда, яъни ҳамма қабул қилган алгебраик тилда баён этиш учун бу параллелизмнинг асл сабабларини китобхонга кўрсатиш вақти келди. Шу мақсадла биз майдон тушунчасини, шунингдек, янада кенгроқ, аммо бизнинг курсимизда ёрдамчи роль ўйнайдиган ҳалқа тушунчасини ҳам киритамиз.

Барча комплекс сонлар системаси, барча ҳақиқий ва барча рационал сонлар – худди шу каби барча бутун сонлар—системалари *шундай умумий хоссага эгаки, уларнинг ҳар бирида фақатгина қўшиш ва кўпайтириш амалинигина эмас, балки худди шу сонлар системасидан четга чиқмай туриб айириш амалини ҳам бажариш мумкин.* Юқорида баён этилган сонлар системаларининг бу хоссаси уларни, масалан, мусбат бутун сонлар системасидан ёки мусбат ҳақиқий сонлар системасидан ажратиб туради.

Ўзининг исталган иккита сони билан бирга уларнинг кўпайтмаси, йиғиндиси ва айирмасини ҳам ўз ичига олган ҳар қандай комплекс ёки хусусан, ҳақиқий сонлар системаси *сонли ҳалқа* дейилади. Шундай қилиб, барча бутун, рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар системалари сонли ҳалқа ташкил этади. Иккинчи томонлан, мусбат сонларнинг ҳеч қандай системаси ҳалқа бўлмайди Чунки a ва b—иккита ҳар хил мусбат сонлар бўлса, у ҳолда ёки $a - b$, ёки $b - a$ манфий бўлади Манфий сонларнинг ҳеч қандай системаси ҳам ҳалқа бўлмайди, чунки жуда бўлмаганда иккита манфий соннинг кўпайтмаси мусбат бўлади.

Сонли ҳалқалар юқорида келтирилган тўртта мисол билангина чегараланиб қолмайди. Ҳозир баъзи бошқа мисолларни кўрсатиб ўтамиз, шу билан бирга қурилаётган система ҳақиқатан ҳам ҳалқа ташкил этишини текшириш ҳар гал ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади.

Жуфт сонлар ҳалқа ташкил этади; умуман исталган натурал n учун n га қолдиқсиз бўлинадиган барча бутун сонлар тўплами ҳалқа бўлади. Тоқ сонлар ҳалқа ташкил этмайди, чунки иккита тоқ соннинг йиғиндиси жуфт сондир.

Қисқармас каср шаклида ёзилганда махражи иккининг қандайдир даражаларидан иборат бўлган барча рационал сонлар тўплами ҳалқа бўлади; бу тўпламга хусусан, барча бутун сонлар киради, чунки уларнинг қисқармас каср шаклидаги ёзувида махраж бирга, яъни иккининг нолинчи даражасига тенг бўлади. Бу мисолда икки соннинг ўрнига, албатта, ихтиёрий туб сон p ни олиш мумкин. Умуман, туб сонларнинг исталган чекли ёки чексиз тўпламини олиб ва қисқармас каср шаклда ёзилганда махражи фақат шу олинган тўпламдаги туб сонларгагина бўлинувчи барча рационал сонлар системасини кўриб, биз яна ҳалқа ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан, қисқармас каср шаклида ёзилганда махражлари ҳеч қандай туб соннинг квадратига бўлинмайдиган рационал сонлар системаси ҳалқа бўлмайди, чунки бу сонларнинг кўрсатилган хоссаси уларни кўпайтиришда сақланмайди.

Рационал сонлар ҳалқасида бутунлай ётмаган сонли ҳалқаларнинг мисолларига ўтамиз. Барча

$$a+b\sqrt{2} \tag{1}$$

кўринишдаги сонлар тўплами ҳалқа ташкил этади, бу ерда a ва b—исталган рационал сонлар; бу ҳалқага, хусусан, ҳамма рационал сонлар ($b=0$ бўлганда) ва шунингдек, $\sqrt{2}$ сонининг ўзи ҳам ($a=0$, $b=1$ бўлганда) тегишли бўлади. Агар биз фақат бутун a, b коэффициентли (1) кўринишдаги барча сонлар билан чегараланиб қолсак ҳам, ҳалқа ҳосил қилар эдик. Бу мисолларда, албатта, $\sqrt{2}$ сони ўрнига $\sqrt{3}$ ёки $\sqrt{5}$ ва ҳоказоларни ҳам олиш мумкин эди.

a, b рационал коэффициентли (ёки фақат исталган бутун коэффициентли)

$$a+b\sqrt[3]{2} \tag{2}$$

кўринишдаги барча сонлар системаси ҳалқа ташкил этмайди, чунки $\sqrt[3]{2}$ сонининг ўз-ўзига кўпайтмасини (2) кўринишда ёзиш мумкин эмаслигини осонгина текшириб кўриш мумкин[1]. Аммо исталган a, b, c рационал коэффициентли

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \tag{3}$$

кўринишдаги сонлар системаси ҳалқа бўлади, худди шу даъво коэффициентлар бутун сон бўлган ҳол билан чегараланиб қолсак ҳам ўринли бўлади.

Китобхонга яхши таниш бўлган π сонга ва қандайдир рационал сонларга бир неча марта қўшиш, кўпайтириш ва айириш амалларини қўллаб ҳосил қилиш мумкин бўлган барча ҳақиқий сонларни кўрайлик. Бу сонлар

$$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\ldots+a_n\pi^n, \tag{4}$$

кўринишда ёзилиши мумкин бўлган сонлардир, бу ерда a_0, $a_1, \ldots, a_n$ — рационал сонлар, $n \geqslant 0$. Ҳеч қандай сон (4) кўринишдаги иккита турли ифодага эга бўлиши мумкин эмас, акс ҳолда бу турли ифодаларни айириб, π сон рационал коэффициентли бирорта тенгламани қаноатлантиришини келтириб чиқарар эдик. Аммо математик анализ методлари ёрдамида π сон ҳақиқатда ҳеч қандай рационал коэффициентли тенгламани қаноатлантирмаслиги, яъни трансцендент сон эканлиги исботланади. Лекин бу натижадан фойдаланмасдан ҳам, яъни соннинг (4) кўринишдаги ёзуви бир қийматли деб фараз қилмасдан ҳам, (4) кўринишдаги сонлар ҳалқа ташкил этишини исботлаш мумкин.

π сон билан рационал сонларга қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш амалларини бир неча марта қўллаб ҳосил қилинадиган барча сонлар тўплами ҳам ҳалқа бўлади. Исботлашда кўрилаётган сонлар учун бирорта махсус яхши ифода

---

[1] Ҳақиқатан ҳам,

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2} \tag{2'}$$

бўлсин, бу ерда a ва b рационал сонлар. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $\sqrt[3]{2}$ га кўпайтириб,

$$2=a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\sqrt[3]{4}$ ўрнига унинг (2′) ифодасини қўйиб, ўз-ўзидан кўриниб турган шакл алмаштиришлардан сўнг, ушбу

$$(a+b^2)\sqrt[3]{2}=2-ab \tag{2''}$$

тенгликка келамиз. Агар $a+b^2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt[3]{2}=\frac{2-ab}{a+b^2},$$

бу эса мумкин эмас, чунки ўнг томонда рационал сон турибди. Агар $a+b^2=0$ бўлса, (2″) га асосан, $2-ab=0$ бўлади. Бу икки тенгликдан $b^3=-2$ келиб чиқади, бу эса b сон рационал бўлгани учун яна мумкин эмас.

қидириш (гарчи бундай ифодани топиш мумкин бўлса ҳам) шарт эмас: агар α ва β сонлар π сон ва қандайдир рационал сонлардан кўрсатилган амаллар орқали ҳосил қилинган бўлса, тушунарлики, худди шу ҳол $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ ва шунингдек ($\beta \neq 0$ бўлганда) $\frac{\alpha}{\beta}$ сонлар учун ҳам ўринли бўлади.

Ниҳоят, исталган рационал a, b коэффициентли $a+bi$ комплекс сонлар тўпламини олиб, ҳалқа ҳосил қиламиз; худди шу ҳол a, b коэффициентлар фақат бутун бўлганда ҳам ўринли бўлади.

Кўриб чиқилган мисоллар сонли ҳалқалар қанчалик хилма-хил бўлиши тўғрисида тўлиқ тасаввур бера олмайди. Шунга қарамай, биз мисолларимиз рўйхатини ҳозирча давом эттирмаймиз ва сонли ҳалқаларнинг махсус ва жуда муҳим синфини кўришга ўтамиз. Бизга маълумки, барча рационал, барча ҳақиқий ва барча комплекс сонлар системаларида бўлиш амалини, шубҳасиз, истаганча бажариш (ноль сонига бўлишдан ташқари) мумкин, шу билан бирга бутун сонларни бўлиш, бу сонлар системасидан ташқарига чиқади. Шу пайтга қадар биз бу фарққа жиддий эътибор бермаган эдик, ҳақиқатда эса бу фарқ жуда муҳим бўлиб, ушбу таърифга олиб келади.

Ихтиёрий иккита сонининг бўлинмасини (бўлувчи, албатта нолдан фарқли деб фараз қилинади) ўз ичига олган сонли ҳалқага *сонли майдон* дейилади. Демак, рационал сонлар майдони, ҳақиқий сонлар майдони, комплекс сонлар майдони тўғрисида гапириш мумкин, ваҳоланки, бутун сонлар ҳалқаси майдон бўлмайди.

Сонли ҳалқаларга юқорида келтирилган мисолларнинг баъзилари ҳақиқатда майдондир. Аввало, рационал сонлар майдонидан фарқли, ва бу майдонда бутунлай ётувчи майдонлар мавжуд эмас эканлигини қайд қилайлик (биргина ноль сонидан ташкил топган системани майдон деб ҳисобламаймиз). Ҳатто, бундан кўра умумийроқ ушбу даъво ҳам ўринлидир:

Рационал сонлар майдони ҳар қандай сонли майдонда бутунлай ётади.

Ҳақиқатан ҳам, бирорта сонли майдон берилган бўлсин. Бу майдонни P ҳарфи билан белгилайлик. Агар a сон P майдоннинг нолдан фарқли ихтиёрий сони бўлса, у ҳолда P майдон a нинг ўзини-ўзига бўлинмасини, яъни бирни ҳам ўз ичига олади. Бирни ўз-ўзига бир неча марта қўшиб, P майдон барча натурал сонларни ўз ичига олишини ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан, P майдонда $a-a$ айирма, яъни ноль сони бўлиши керак, шунинг учун ҳам нолдан исталган натурал соннинг айирмаси, яъни исталган манфий бутун сон ҳам P майдонга тегишли бўлади. Ниҳоят, P майдонда бутун сонларнинг бўлинмаси ҳам, яъни умуман барча рационал сонлар ётади.

Комплекс сонлар майдони жуда кўп ҳар хил майдонларни ўз ичига олади, улар ичида рационал сонлар майдони энг кичиги бўлади. Чунончи юқорида кўрилган (фақатгина бутун бўлмаган) ҳатто ихтиёрий a, b рационал коэффициентли

$$a+b\sqrt{2} \tag{5}$$

кўринишдаги сонлар ҳалқаси майдон бўлади. Дарҳақиқат, (5) кўринишдаги иккита $a+b\sqrt{2}$ ва $c+d\sqrt{2}$ сонларнинг бўлинмасини кўрайлик, шу билан бирга иккинчи сонни нолдан фарқли деб фараз қиламиз; шунга кўра $c-b\sqrt{2}$ сон ҳам нолдан фарқли ва шу сабабли

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

Биз яна (5) кўринишдаги сонни ҳосил қилдик, шу билан бирга унинг коэффициентлари рационаллигича қолди. Бу мисолда $\sqrt{2}$ сонини рационал сонлар майдонининг ўзида квадрат илдиздан чиқмайдиган ҳар қандай рационал соннинг квадрат илдизи билан алмаштириш мумкин эканлиги равшан. Чунончи, коэффициентлари a, b рационал сонлардан иборат бўлган $a+bi$ кўринишдаги сонлар майдон ташкил этади.

44-§. Ҳалқа

Математиканинг турли бўлимларида, шунингдек, математиканинг техникага ва табиатшуносликка татбиқларида алгебраик амаллар жуда кўп ҳолларда сонлар устида эмас, балки бутунлай бошқа табиатли объектлар устида олиб борилади. Китобнинг олдинги бобларидан бундай мисолларни кўплаб топиш мумкин—матрицаларни кўпайтириш ва қўшиш, векторларни қўшиш, кўпҳадлар устидаги амаллар, чизиқли алмаштиришлар устидаги амаллар шулар жумласидандир. Сонли ҳалқалардаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари ва шунингдек, юқорида келтирилган мисоллардаги амаллар учун ҳам бажариладиган *алгебраик амалнинг* умумий таърифи қуйидагичадир.

Сонлардан ёки геометрик объектлардан, умуман, тўплам *элементлари* деб аталувчи қандайлир предметлардан ташкил топган M тўплам берилган бўлсин. M тўпламнинг исталган a b элементлар жуфти учун бирорта қонунга асосан M тўпламга тегишли бўлган учинчи c элемент бир қийматли равишда мос қўйилган бўлса, у ҳолда бу *тўпламда алгебраик амал аниқланган* дейилади. Бу амал *қўшиш* деб аталиши мумкин, у ҳолда c элемент a ва b элементларнинг *йиғиндиси* дейилади ва $c=a+b$ символ билан белгиланади; бу амал *кўпайтириш* деб ҳам аталиши, яъни c элемент a ва b элементларнинг *кўпайтмаси* деб аталиши мумкин: $c = ab$; ниҳоят, M тўпламда аниқланган амал учун янги терминология ва символика ҳам киритиш мумкин.

Сонли ҳалқаларнинг ҳар қайсисида иккита боғлиқ бўлмаган амал—қўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган. Айириш ва бўлиш амалларига келсак, уларни янги амал деб қараш мумкин эмас, чунки *тескари амалнинг* қуйидаги умумий таърифини қабул қилсак, улар мос равишда қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан тескари амаллардан иборат бўлади.

M тўпламда алгебраик амал, масалан, қўшиш амали аниқланган бўлсин. Агар M тўпламнинг ихтиёрий иккита a, b элементи учун M да $b + d = a$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона d элемент мавжуд бўлса, *қўшиш амали учун тескари амал*—айириш мавжуд дейилади. Бу ҳолда d элемент a ва b элементларнинг *айирмаси* дейилади ва $d = a - b$ символ билан белгиланади.

Сонли майдонларда қўшиш ва шунингдек, кўпайтириш (кейингиси, маълумки, чекланган: бўлувчи нолдан фарқли бўлиши зарур) тескари амалга эга. Майдон ташкил этмайдиган ҳалқаларда эса (масалан, бутун сонлар ҳалқасидаги каби) фақат қўшишгина тескари амалга эга.

Шу билан бир қаторда, коэффициентлари тайинланган P сонли майдондан олинган x номаълумли барча кўпҳадлар системасида ҳам иккита амал—қўшиш ва кўпайтириш амали аниқланган, шу билан бирга қўшиш амали тескари амал—айиришга эга.

Маълумки, сонли ҳалқаларда ҳам, кўпҳадлар системасида ҳам қўшиш ва кўпайтириш амаллари ушбу хоссаларга эга (a, b, c—қурилаётган сонли ҳалқанинг ихтиёрий сонларидан ёки қурилаётган системанинг ихтиёрий кўпҳадларидан иборат):

I. Қўшиш коммутатив: $a + b = b + a$.

II. Қўшиш ассоциатив: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

III Кўпайтириш коммутатив: $ab = ba$.

IV. Кўпайтириш ассоциатив: $a(bc) = (ab)c$.

V. Қўшиш ва кўпайтириш дистрибутивлик қонуни билан боғланган: $(a + b)c = ac + bc$.

Энди биз алгебранинг жуда муҳим тушунчаларидан бири бўлган ҳалқа тушунчасининг умумий таърифини келтириш учун тайёрмиз.

Агар R тўпламда ҳар иккаласи ҳам коммутатив ва ассоциатив, шунингдек дистрибутивлик қонуни билан боғланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган бўлиб, шу билан бирга қўшиш амали тескари амал—айиришга эга бўлса, бундай тўплам *ҳалқа* дейилади.

Шундай қилиб, сонли ҳалқалар ва коэффициентлари берилган сонли майдондан ёки ҳаттоки берилган сонли ҳалқадан олинган x номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси ҳалқаларга мисол бўла олади. Ҳалқа тушунчасининг ниҳоятда кенг эканлигини ойдинлаштирадиган яна бир мисол кўрсатамиз.

Математик анализ курси x ҳақиқий ўзгарувчининг функцияси таърифидан бошланади. x нинг ҳамма ҳақиқий қийматлари учун аниқланган ва ҳақиқий қийматларни қабул қиладиган функциялар тўпламини олайлик ва бу тўпламда қуйидаги усул билан алгебраик амаллар киритайлик: $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг *йиғиндиси* деб исталган $x=x_0$ нуқтадаги қиймати берилган функциялар қийматларининг йиғиндисига, яъни $f(x_0)+g(x_0)$ га тенг бўлган функцияга айтамиз, бу функцияларнинг *кўпайтмаси* деб ҳар қандай $x = x_0$ нуқтадаги қиймати берилган функцияларнинг қийматлари кўпайтмаси $f(x_0) \cdot g(x_0$ га тенг бўлган функцияга айтамиз. Қурилаётган тўпламда ҳар қандай иккита функциянинг йиғиндиси ва кўпайтмаси шубҳасиз мавжуд. I—V хоссаларнинг ўринли эканлиги ҳеч бир қийинчиликсиз текширилади—функцияларни қўшиш ва кўпайтириш уларнинг ихтиёрий x даги қийматларини қўшиш ва кўпайтиришга, яъни I—V хоссалар ўринли бўлган ҳақиқий сонлар устидаги амалларга келтирилади. Ниҳоят, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг *айирмаси* деб, исталган $x = x_0$ нуқтадаги қиймати $f(x_0) - g(x_0)$ айирмага тенг бўлган функцияни айтсак, биз қўшишга тескари бўлган айириш амалига келамиз. Шу билан, *барча ҳақиқий x лар учун аниқланган функциялар тўплами унда юқорида баён этилган усул билан қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилгандан сўнг ҳалқага айланиши* исбот қилинди.

Функциялар ҳалқаларининг бошқа мисолларини функциялар устида юқорида келтирилган амалларнинг таърифларини ўзгаришсиз қолдириб, аммо x ўзгарувчининг, масалан, фақат мусбат қийматларидагина аниқланган функцияларни ёки x ўзгарувчининг $[0, 1]$ оралиқдаги қийматларида аниқланган функцияларни кўриб ҳосил қилиш мумкин. Умуман, берилган бирор аниқланиш соҳасига эга бўлган барча функциялар системаси ҳалқа бўлади. Шунингдек, ҳалқанинг мисолларини берилган соҳада аниқланган барча функцияларни эмас, балки математик анализда ўрганиладиган узлуксиз функцияларнигина қараб ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. Бошқа томондан, комплекс ўзгарувчили комплекс функцияларни ҳам қараш мумкин эди. Умуман функцияларнинг турли ҳалқалари турли сонли ҳалқалар каби ниҳоятда кўп.

Ҳалқаларнинг ҳалқа таърифидан бевосита келиб чиқадиган баъзи энг содда хоссаларини ўрганишга ўтамиз. Бу хоссалар сонлар учун тўла одатланилган, лекин улар I — V хоссаларнинг ва бир қийматли айириш амали мавжудлигининг натижаларигина эканлиги китобхонга баъзан кутилмаган ҳол бўлиб кўриниши мумкин.

Аввало, I — V шартларнинг аҳамияти ҳақида бир қанча мулоҳазалар келтирайлик. *Коммутативлик қонунининг* роли ҳеч қандай изоҳ талаб этмайди. *Ассоциативлик қонунининг* аҳамияти қуйидагича: алгебраик амалнинг таърифида иккитагина элементнинг йиғиндиси ёки кўпайтмаси ҳақида гапирилади. Агар биз, масалан, учта a, b, c элементнинг кўпайтмасини аниқламоқчи бўлсак, у ҳолда ушбу қийинчиликка дуч келамиз: au ва vc (бу ерда $bc = u$, $ab = v$) кўпайтма, умуман олганда, бир хил бўлмаслиги мумкин, яъни $a(bc) \neq (ab)c$. Ассоциативлик қонуни бу кўпайтмалар ҳалқанинг биттагина элементига тенг бўлишини талаб қилади: энди бу элементни ҳеч қандай қавссиз ёзиладиган abc кўпайтма сифатида қабул қилиш табиийдир. Бундан ташқари, *ассоциативлик қонуни ҳалқанинг исталган чекли сондаги элементларининг кўпайтмасини (мос равишда йиғиндисини) бир қийматли равишда аниқлашга*, яъни исталган n та элементнинг кўпайтмаси қавсларнинг бошланғич тақсимотига боглиқ бўлмаслигини исботлашга имкон беради.

Бу даъвони n сонга нисбатан индукция орқали исботлаймиз. $n=3$ учун исботланган бўлгани учун $n > 3$ деб ҳисоблаймиз, бунинг устига бизнинг даъвоимиз n дан кичик барча бутун сонлар учун ўринли деб фараз қиламиз. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементлар берилган бўлиб, бу системада кўпайтиришни қандай тартибда бажарилиши кераклигини кўрсатувчи қавслар қандайдир усул билан тақсимланган бўлсин. Биринчи k та элементнинг $a_1 a_2 \ldots a_k$ кўпайтмасини (бу ерда $1 < k < n-1$), $a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_n$ кўпайтмага кўпайтириш сўнгги қадам бўлади. Бу кўпайтмалар n дан кичик сондаги элементларнинг кўпайтмасидан иборат бўлгани учун фаразимизга кўра бир қийматли равишда аниқланган бўлади, демак, исталган k ва l лар учун

$$a_1a_2 \ldots a_k)(a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_n) = (a_1a_2 \ldots a_l)(a_{l+1}a_{l+2} \ldots a_n)$$

тенгликни исботлаш кифоя. Бунинг учун эса $l = k+1$ бўлган ҳолни кўриш етарли. Аммо бу ҳолда

$$a_1a_2 \ldots a_k = b, \quad a_{k+2}a_{k+3} \ldots a_n = c$$

деб, ассоциативлик қонунига асосан, $b(a_{k+1}c) = (ba_{k+1})c$ тенгликни ҳосил қиламиз. Шу билан даъво исботланди.

Хусусан, n та ўзаро бир-бирига тенг элементларнинг кўпайтмаси ҳақида сўз юритиш, яъни a элементнинг мусбат бутун n кўрсаткичли *даражаси* a^n тўғрисида тушунча киритиш мумкин. Осонгина текшириш мумкинки, кўрсаткичлар билан бажариладиган амалларнинг одатдаги ҳамма қоидалари исталган ҳалқада ҳам ўринлилигича қолаверади. Шунга ўхшаш қўшишнинг ассоциативлик қонуни a элементнинг бутун мусбат n коэффициентли *карраси* na ҳақидаги тушунчага олиб келади.

Дистрибутивлик қонуни, яъни қавсларни очиб ёзишнинг одатдаги қоидаси ҳалқа таърифидаги қўшиш ва кўпайтиришни боғловчи ягона шартдан иборат; фақат шу қонун туфайли, юқорида келтирилган иккала амални биргаликда ўрганиш уларни алоҳида-алоҳида ўрганишга нисбатан кўпроқ натижа беради. Дистрибутивлик қонунининг ифодасида фақатгина иккита қўшилувчининг йиғиндиси иштирок этади. Аммо ҳеч қандай қийинчиликсиз ушбу

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)b = a_1b + a_2b + \ldots + a_kb$$

тенгликни исталган k учун ўринли эканлигини, ундан кейин эса йиғиндини йиғиндига кўпайтиришнинг умумий қоидасини ҳам исботлаш мумкин.

Ҳар қандай ҳалқада дистрибутивлик қонуни айирма учун ҳам бажарилади. Ҳақиқатан ҳам, айирманинг таърифига асосан $a—b$ элемент

$$b + (a - b) = a$$

тенгликни қаноатлантиради. Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини c га кўпайтириб ва тенгликнинг чап томонига дистрибутивлик қонунини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$bc + (a - b)c = ac.$$

Демак, $a—b)c$ элемент, ac ва bc элементларнинг айирмасига тенг:

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Айириш амалининг мавжудлигидан ҳалқанинг жуда муҳим хоссалари келиб чиқади. Агар a элемент K ҳалқанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда $a—a$ айирма ҳалқанинг бирор аниқ элементи бўлади. Унинг вазифаси сонли ҳалқалардаги нолнинг вазифасига ўхшаш, лекин аниқланишига кўра $a—a$ элемент a элементнинг танланишига боғлиқ бўлиши мумкин, шунинг учун уни биз ҳозирча 0_a билан белгилаймиз.

Аслида эса 0_a элементлар барча a лар учун ўзаро тенг эканлигини исботлаймиз. Дарҳақиқат, агар b элемент K ҳалқанинг ихтиёрий бошқа элементи бўлса, у ҳолда

$$a + (b - a) = b$$

тенгликнинг ҳар иккала томонига 0_a элементни қўшиб ва $0_a + a = a$ тенгликдан фойдаланиб, топамиз:

$$o_a + b = o_a + a + (b - a) = a + (b - a) = b.$$

Шундай қилиб, $o_a = b - b = o_b$.

Биз *ҳар қандай R ҳалқа бу ҳалқанинг исталган a элементи билан йиғиндиси a га тенг бўладиган ҳамда бир* *қийматли аниқланган элементга эга* эканлигини исботладик. Бу элементни R ҳалқанинг *ноли* деб атаймиз ва уни ноль сони билан алмаштириб юбориш хавфи жиддий эмас деб ҳисоблаб, 0 символи билан белгилаймиз. Шундай қилиб, R ҳалқанинг барча a элементлари учун

$$a + 0 = a.$$

Сўнгра, *ҳар қандай ҳалқада исталган a элемент учун бир қийматли аниқланган ҳамда ушбу*

$$a + (-a) = 0,$$

тенгликни қаноатлантирувчи қарама-қарши элемент $-a$ мавжуд. Бундай элемент $0-a$ айирма бўлади. Унинг бир қийматлилиги айирманинг бир қийматлилигидан келиб чиқади. $-(-a) = a$ эканлиги равшан. Ҳалқадаги исталган иккита элементнинг $b-a$ айирмасини энди ушбу

$$b - a = b + (-a)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Дарҳақиқат,

$$[b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Ҳалқанинг исталган a элементи ва исталган бутун мусбат сон n учун

$$n(-a) = -(na)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, қўшилувчиларни группалаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$na + n(-a) = n[a + (-a)] = n \cdot 0 = 0.$$

Энди биз ҳалқанинг *манфий каррали* элементларини таърифлаш имкониятига эга бўлдик: агар $n > 0$ бўлса, у ҳолда ўзаро тенг бўлган $n(-a)$ ва $-(na)$ элементларни $(-n)a$ орқали белгилаймиз. Исталган a элемент учун *ноль каррали* $0 - a$ элемент деб қаралаётган ҳалқанинг ноль элементини ҳисоблаймиз.

Ноль элементнинг таърифи фақат қўшиш ва унга тескари амал орқали, яъни кўпайтириш амалидан фойдаланмасдан берилган эди. Аммо сонлар бўлган ҳолда ноль сони кўпайтиришга нисбатан ҳам характерли ва шу билан бирга жуда муҳим хоссага эга. Исталган ҳалқанинг ноли ҳам худди шу хоссага эга экан: *ҳар қандай ҳалқада исталган элементнинг нолга кўпайтмаси нолга тенгдир.* Бу хоссанинг исботи бевосита дистрибутивлик қонунига таянади: агар a элемент R

ҳалқанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда ёрдамчи x элемент қандай бўлишидан қатъи назар

$$a \cdot 0 = a(x - x) = ax - ax = 0$$

бўлади.

Нолнинг бу хоссасидан фойдаланиб, *ҳар қандай ҳалқада исталган a, b элементлар учун*

$$(-a)b = -ab$$

тенглик ўринли эканлигини исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0 \cdot b = 0.$$

Бундан, манфий сонларни кўпайтиришнинг бизга яхши таниш бўлса да, бироқ бирмунча сирли бўлган—„манфийни манфийга кўпайтмаси мусбатни беради“—деган қоидаси ҳалқанинг таърифидан ҳам келиб чиқади, яъни *исталган ҳалқада*

$$(-a)(-b) = ab$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-ab) = ab.$$

Энди ҳар қандай ҳалқада ҳам исталган элементнинг карралари учун (шулар қатори манфийлари учун ҳам) бирор соннинг карралари билан бажариладиган амалларнинг ҳамма қоидалари ўзгармай қолишини китобхоннинг ўзи ҳам осонликча исботлаши мумкин.

Шундай қилиб, ихтиёрий ҳалқадаги алгебраик амаллар сонлар устидаги амалларнинг биз учун одат бўлиб қолган кўпгина хоссаларига эга бўлади. Аммо сонларни қўшиш ва кўпайтиришнинг ҳар қандай хоссалари ҳар қандай ҳалқада ҳам сақланиб қолади деб ўйлаш керак эмас. Масалан, сонларнинг кўпайтмаси юқорида кўрсатилган хоссанинг тескарисига ҳам эга: агар иккита соннинг кўпайтмаси нолга тенг бўлса, у ҳолда кўпайтувчиларнинг камида биттаси нолга тенг бўлади. Бу хоссани исталган ҳалқа учун тарқатиб бўлмайди—баъзи ҳалқаларда нолдан фарқли элементларнинг шундай жуфтини кўрсатиш мумкинки, уларнинг кўпайтмаси нолга тенг бўлади, яъни $a \neq 0$, $b \neq 0$, лекин $ab = 0$; бундай хоссага эга бўлган элементларга *нолнинг бўлувчилари* дейилади.

Нолнинг бўлувчилари мавжуд бўлган ҳалқаларнинг мисолларини, табиийки, сонли ҳалқалар ичида топиш мумкин эмас. Нолнинг бўлувчиларини сон коэффициентли кўпҳадлар ҳалқаси ҳам ўз ичига олмайди. Аммо функцияларнинг кўп ҳалқалари нолнинг бўлувчиларига эга бўлади. Аввало, ҳар қандай функциялар ҳалқасининг ноли ўзгарувчининг барча қийматларида нолга тенг бўлган функция эканлигини қайд қиламиз. Энди x нинг барча ҳақиқий қийматларида аниқланган ушбу $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни тузайлик:

$$f(x)=0,\ \text{агар}\ x\leqslant 0\ \text{бўлса},\ f(x)=x,\ \text{агар}\ x>0\ \text{бўлса};$$

$$g(x)=x,\ \text{агар}\ x\leqslant 0\ \text{бўлса},\ g(x)=0,\ \text{агар}\ x>0\ \text{бўлса}.$$

Бу функцияларнинг иккаласи ҳам нолдан фарқли, чунки уларнинг қийматлари x нинг ҳамма қийматларида ҳам нолга тенг эмас; бу функцияларнинг кўпайтмаси эса нолга тенг.

Ҳалқа таърифига кирган I—V шартларнинг ҳаммаси ҳам бир хил тарзда зарур эмас. Фаннинг ривожланиши шуни кўрсатадики, қўшишнинг I ва II хоссалари ва V дистрибутивлик қонун барча татбиқларда бажарилган бўлиб, ҳалқа таърифига кўпайтиришнинг III ва IV хоссаларининг киритилиши кўпинча керагидан ортиқ тор бўлиб, ҳалқа тушунчасининг татбиқ этилиши мумкин бўлган соҳасини торайтиради. Масалан, ҳақиқий элементли n-тартибли квадрат матрицалар, матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари билан қараганда, кўпайтиришнинг коммутативлик қонунидан ташқари, ҳалқа таърифига кирган барча талабларни қаноатлантиради. Коммутатив бўлмаган кўпайтиришлар билан шунчалик кўп ва шундай муҳим ҳолларда учрашишга тўғри келадики, ҳозирги пайтда „ҳалқа" термини орқали *но коммутатив ҳалқа* (аниқроғи кўпайтиришнинг нокоммутатив бўлиши мумкинлиги маъносида коммутатив бўлиши шарт бўлмаган ҳалқа) тушунилади Ҳалқаларнинг III шарт бажариладиган хусусий ҳоллари эса *коммутатив ҳалқалар* деб аталади.

Сўнгги вақтда кўпайтиришга нисбатан ассоциатив бўлмаган ҳалқаларга ҳам қизиқиш ортиб бормоқда ва ҳозир ҳалқаларнинг умумий назарияси энди ноассоциатив (яъни ассоциатив бўлиши шарт бўлмаган) ҳалқалар назарияси сифатида яратилмоқда. Бундай ҳалқаларнинг энг содда мисоли векторларни қўшиш ва (аналитик геометрия курсидан таниш бўлган) векторларнинг вектор кўпайтмаси амалларига нисбатан уч ўлчовли евклид фазосидаги векторлар тўплами бўлади.

45-§. Майдон

Сонли ҳалқалар ичидан бўлиш амали бажариладиган (нолга бўлишдан ташқари) ҳалқалар ажратиб олиниб, сонли майдонлар деб аталгани каби, буни умумий ҳолда ҳам бажариш табиийдир. Аввало, нолнинг кўпайтиришга нисбатан юқорида исботланган хоссасига кўра, *ҳеч қандай ҳалқада нолга бўлиш мумкин эмаслигини қайд қиламиз*: a элементни нолга бўлиш $0\cdot x=a$ тенгликни қаноатлантирувчи x ни топиш демакдир, бу эса $a\neq 0$ бўлганда мумкин эмас, чунки тенгликнинг чап томони нолга тенг.

Ушбу таърифни киритамиз:

Агар P ҳалқа фақат биттагина нолдан ташкил топмаган бўлиб, шу билан бирга унда нолга бўлишдан бошқа ҳамма ҳолларда, бўлиш амали бир қийматли равишда бажарилса, яъни P дан олинган исталган a ва b (улардан b нолдан фарқли) элементлар учун P да $bq=a$ тенгликни қаноатлантирувчи, ягона q элемент мавжуд бўлса, P ҳалқа *майдон* дейилади. q элемент a ва b элементларнинг *бўлинмаси* дейилади ва $q=\frac{a}{b}$ символи билан белгиланади.[1]

Барча сонли майдонлар майдон учун мисол вазифасини бажариши тушунарлидир. Ҳақиқий коэффициентли ёки умуман коэффициентлари бирор сонли майдондан олинган x номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси майдон ташкил этмайди—кўпҳадлар учун мавжуд бўлган қолдиқли бўлиш, шубҳасиз, майдон таърифида фараз қилинадиган „қолдиқсиз“ бўлишдан фарқ қилади. Иккинчи томондан, *ҳақиқий коэффициентли барча каср рационал функциялар тўплами* (25-§ га қаранг), худди рационал сонлар майдони бутун сонлар ҳалқасини ўз ичига олгани каби, кўпҳадлар ҳалқасини ўз ичига олувчи *майдон ташкил этишини* кўрсатиш осон.

Функциялар ҳалқалари орасида майдонларнинг бошқа бир қанча мисолларини кўрсатиш мумкин эди, лекин биз уларга тўхталиб ўтирмай, бутунлай бошқа типдаги мисолларга ўтамиз.

Барча сонли ҳалқалар ва умуман, биз шу даврга қадар кўрган барча ҳалқалар чексиз кўп элементга эга эди. Аммо фақат чекли сондаги элементларга эга бўлган ҳалқалар ва ҳатто майдонлар ҳам мавжуд. Математиканинг махсус тармоғи—сонлар назариясида муҳим восита сифатида ишлатиладиган *чекли ҳалқалар* ва *чекли майдонларнинг* энг содда мисоллари қуйидаги усул билан тузилади.

1 дан фарқли исталган натурал сон n ни оламиз. Агар a ва b бутун сонларни n га бўлинганда қолдиқлар бир хил бўлса, яъни уларнинг айирмаси n га қолдиқсиз бўлинса, бу сонлар *n модуль бўйича таққосланувчи* дейилади. Бу

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$$

каби белгиланади. Барча бутун сонлар ҳалқаси n модуль бўйича ўзаро таққосланувчи n та кесишмайдиган

$$C_0,\ C_1,\ \dots,\ C_{n-1} \tag{1}$$

сонлар синфларига ажралади, бу ерда C_k $(k=0,1,\ \dots,\ n-1)$ синф n га бўлганда k қолдиқ қолувчи сонлардан ташкил топган. Бу синфларни қўшиш ва кўпайтиришни тамомила табиий усул билан аниқлаш мумкин.

---

[1] Майдонда бўлишнинг ягоналиги, худди ҳалқа таърифида фараз қилинган айиришнинг ягоналиги каби, ҳақиқатда майдон ёки мос равишда ҳалқа таърифига кирувчи бошқа шартлар ёрдамида осонгина исботланиши мумкин.

Шу мақсадда (1) системанинг исталган (шу билан бирга ҳар хил бўлиши шарт бўлмаган) C_k ва C_l синфларни оламиз. C_k синфнинг исталган сонини C_l синфнинг исталган сони билан қўшиб, биз бирорта тамомила аниқ синфнинг сонларини ҳосил қиламиз. Бу сон, агар $k+l<n$ бўлса, C_{k+l} синфда, агар $k+l\geqslant n$ бўлса, C_{k+l-n} синфда ётади. Бу мулоҳаза *синфларни қўшишнинг* ушбу таърифига олиб келади:

$$k+l<n \text{ да } C_k+C_l=C_{k+l};$$
$$k+l\geqslant n \text{ да } C_k+C_l=C_{k+l-n}. \qquad (2)$$

Иккинчи томондан, C_k синфнинг исталган сонини C_l синфнинг исталган сонига кўпайтириб, биз яна бирор тамомила аниқ синфнинг, яъни C_r синфнинг (бу ерда r сон kl кўпайтмани n га бўлишдаги қолдиқ) сонларини ҳосил қиламиз. Шунга кўра биз *синфларни кўпайтиришнинг* ушбу таърифини қабул қиламиз:

$$C_k\cdot C_l=C_r, \text{ бу ерда } kl=nq+r,\ 0\leqslant r<n. \qquad (3)$$

n модуль бўйича ўзаро таққосланувчи бутун сонлар синфларининг (1) *системаси,* (2) *ва* (3) *шартлар билан аниқланган амалларга нисбатан ҳалқа ташкил этади.* Ҳақиқатан ҳам, ҳалқа таърифидаги I—V шартларнинг ўринли бўлишини бевосита текшириш орқали осон кўрсатиш мумкин, шунингдек, I—V шартлар бу шартларнинг бутун сонлар ҳалқасида ўринли эканлиги ва бутун сонлар устидаги амаллар билан синфлар устида юқорида кўрсатилган амаллар орасидаги боғланишдан ҳам келиб чиқади. Нолнинг ролини, равшанки, n га қолдиқсиз бўлинадиган сонларнинг C_0 синфи ўйнайди. C_k, $k=1, 2, \ldots, n-1$, синф учун қарама-қарши синф $C_{n\ k}$ синф бўлади. Демак, синфларнинг (1) системасида айиришни аниқлаш мумкин, яъни бу система ҳалқа таърифига кирган ҳамма шартларни қаноатлантиради. Ҳосил бўлган ҳалқани Z_n орқали белгилашни шартлашамиз.

Агар n сон мураккаб сон бўлса, у ҳолда Z_n ҳалқа нолнинг бўлувчиларига эга, шунинг учун ҳам қуйида кўрсатилганига асосан майдон бўла олмайди. Дарҳақиқат, агар $n=kl$ бўлса (бу ерда $1<k<n$, $1<l<n$), у ҳолда C_k ва C_l синфлар нолинчи C_0 синфдан фарқли, аммо синфларни кўпайтиришнинг таърифига асосан ((3) га қаранг) $C_k\cdot C_l=C_0$.

Агар n сон туб сон бўлса, у ҳолда Z_n ҳалқа майдон бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, бизга C_k ва C_m синфлар берилган бўлсин, шу билан бирга $C_k\neq C_0$, яъни $1\leqslant k\leqslant n-1$ бўлсин. C_m ни C га бўлиш мумкин эканлигини кўрсатиш, яъни $C_k\cdot C_l=C_m$ тенгликни қаноатлантирувчи C_l синфни топиш лозим. Агар $C_m=C_0$

бўлса, у ҳолда $C_l = C_0$ бўлади. Агар $C_m \neq C_0$ бўлса, у ҳолда

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \dots,\ (n-1)k \qquad (4)$$

сонлар системасини кўздан кечирамиз. Бу сонларнинг барчаси C_0 нолинчи синфдан ташқарида ётади. Чунки туб сон n дан кичик бўлган иккита натурал соннинг кўпайтмаси n га бўлиниши мумкин эмас. Сўнгра (4) системанинг ҳеч қандай иккита сони sk ва tk (бу ерда $s < t$) битта синфда ётиши мумкин эмас, акс ҳолда уларнинг айирмаси

$$tk - sk = (t - s)k$$

n га қолдиқсиз бўлинган бўлар эди, бу эса n соннинг тублигига яна зиддир. Шундай қилиб, C_0 дан фарқли ҳар бир синфда (4) системанинг фақат битта сони ётади. Хусусан, C_m синфда lk (бу ерда $1 \leqslant l \leqslant n - 1$) сон ётади, яъни $C_l \cdot C_k = C_m$ ва демак, C_l синф C_m ни C_k га бўлгандаги изланаётган бўлинма бўлади.

Шундай қилиб, биз чексиз кўп ҳар хил чекли майдонлар ни ҳосил қилдик: фақат иккитагина элементдан иборат бўлган Z_2 майдон, ва шунингдек Z_3, Z_5, Z_7, Z_{11} ва ҳоказо майдонлар.

Майдонда бўлишнинг мавжудлигидан келиб чиқадиган баъзи хоссаларни муҳокама қилишга ўтамиз. Бу хоссалар ҳалқаларнинг айириш мавжудлигига асосланган хоссаларига ўхшаш бўлиб, худди шу каби мулоҳазалар орқали исботлангани сабабли, уларни исботлашни ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади.

Ҳар қандай P майдон бир қийматли равишда аниқланган шундай элементга эгаки, уни шу майдоннинг исталган a элементига кўпайтмаси яна a га тенг. Нолдан фарқли барча a лар учун ўзаро тенг бўлган $\frac{a}{a}$ бўлинмалар билан бир хил бўлган бу элемент P майдоннинг *бири* дейилади ва 1 символи билан белгиланади. Шундай қилиб,

P майдонга тегишли барча a лар учун $a \cdot 1 = a$.

Ҳар қандай майдонда нолдан фарқли исталган a элемент учун

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

тенгликни қаноатлантирувчи бир қийматли аниқланган тескари элемент a^{-1} мавжуд, чунончи $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Равшанки, $(a^{-1})^{-1} = a$. Энди $\frac{b}{a}$ бўлинмани

$$\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Нолдан фарқли исталган a элемент ва исталган мусбат бутун сон n учун

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

тенглик ўринли бўлади. Ўзаро бир-бирига тенг бу элементларни a^{-n} орқали белгилаб, биз майдон элементининг *манфий даражаларига* келамиз. Булар учун амалларнинг одатда қўлланиладиган қоидалари сақланиб қолади. Ниҳоят, барча a лар учун $a^0=1$ деймиз.

Бирнинг мавжудлиги майдоннинг характерли хусусияти эмас: бутун сонлар ҳалқаси, масалан, бирга эга. Шу билан бирга жуфт сонлар ҳалқаси мисоли кўрсатадики, ҳамма ҳалқалар ҳам бирга эга бўлавермайди. Иккинчи томондан, бирга эга бўлган ҳамда нолдан фарқли исталган элементнинг тескарисини ҳам ўз ичига олган ҳар қандай ҳалқа майдон бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $\frac{b}{a}$, $a\neq0$ бўлинма вазифасини $b\cdot a^{-1}$ кўпайтма бажаради. Бу бўлинманинг ягоналиги осонликча исботланади.

Ҳеч қандай майдон нолнинг бўлувчиларини ўз ичига олмаслигини қайд қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, $ab=0$, аммо $a\neq0$ бўлсин. Тенгликнинг ҳар иккала томонини a^{-1} элементга кўпайтириб, чап томонда $(a^{-1}\cdot a)\,b = 1\cdot b = b$ ни, ўнг томонда эса $a^{-1}\cdot 0 = 0$ ни, яъни $b=0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан *ҳар қандай майдонда исталган тенгликни нолдан фарқли умумий кўпайтувчига қисқартириш мумкин* эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $ac=bc$ ва $c\neq0$ бўлса, у ҳолда $(a-b)c=0$ бўлади, бундан $a-b=0$, яъни $a=b$.

$\frac{a}{b}$ бўлинманинг (бу ерда $b\neq0$) таърифидан ва уни юқорида исботланганига кўра ab^{-1} кўпайтма шаклида ёзиш мумкин эканлигидан *касрлар устидаги амалларда ишлатиладиган одатдаги барча қоидалар ҳар қандай майдонда ҳам сақланиб қолишини* қийинчиликсиз келтириб чиқариш мумкин, яъни

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

тенглик $ad=bc$ бўлганда ва фақат шу ҳолда бажарилади;

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}.$$

Майдон характеристикаси. Сонли майдонларнинг ҳамма хоссалари ҳам ихтиёрий майдон бўлган ҳолда сақланиб қолавермайди. Масалан, 1 сонини ўзини-ўзига бир неча марта қўшиб, яъни бирнинг исталган бутун мусбат карралисини олиб, биз ҳеч қачон нолни ҳосил қила олмаймиз, ва умуман, бу ҳамма карралилар, яъни барча натурал сонлар бир-биридан фарқли. Агар биз қандайдир чекли майдонда бирнинг бутун карралиларини олсак, улар орасида тенг бўлганлари албатта бўлади, чунки бу майдонда турли элементларнинг сони чекли. Агар P майдонда бирнинг ҳамма бутун карралилари P майдоннинг турли элементларидан иборат бўлса, яъни $k \neq l$ бўлганда $k \cdot 1 \neq l \cdot 1$ бўлса, у ҳолда P майдон *ноль характеристикага* эга дейилади: масалан, барча сонли майдонлар шундай майдонлардир. Агар шундай k ва l бутун сонлар мавжуд бўлиб, $k > l$ бўлса, аммо P майдонда $k \cdot 1 = l \cdot 1$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $(k-l) \cdot 1 = 0$ бўлади, яъни P да бирнинг шундай мусбат бутун карралиси мавжудки, у нолга тенг. Бу ҳолда *P чекли характеристикали* майдон дейилади. Агар p сон P майдоннинг бири билан кўпайтмаси нолга айланувчи биринчи мусбат коэффициент бўлса, бундай майдон *p характеристикали* майдон дейилади. Ҳамма чекли майдонлар чекли характеристикали майдонларга мисол бўлади; шу билан бирга чекли характеристикали чексиз майдонлар ҳам мавжуд.

Агар P майдон p характеристикага эга бўлса, у ҳолда p туб сон бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $p = st$ тенгликдан (бу ерда $s < p$, $t < p$) $(s \cdot 1)(t \cdot 1) = p \cdot 1 = 0$ тенглик келиб чиқар эди, яъни майдонда нолнинг бўлувчилари бўлмагани учун ёки $s \cdot 1 = 0$, ёки $t \cdot 1 = 0$, аммо бу характеристиканинг майдон бирини нолга айлантирувчи мусбат коэффициентлар ичида энг кичиги деб таърифланишига зиддир.

Агар P майдоннинг характеристикаси p га тенг бўлса, у ҳолда бу майдондаги исталган a элемент учун $pa = 0$ тенглик ўринли бўлади. Агар P майдоннинг характеристикаси 0 бўлса ва n бутун сон бўлиб, a—бу майдоннинг элементи бўлса, у ҳолда $a \neq 0$ ва $n \neq 0$ дан $na \neq 0$ келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, биринчи ҳолда pa элементни, яъни ҳар бири a га тенг бўлган p та қўшилувчининг йиғиндисини a ни қавсдан ташқарига чиқариб, ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$pa = a(p \cdot 1) = a \cdot 0 = 0.$$

Иккинчи ҳолда $na = 0$, яъни $a(n \cdot 1) = 0$ тенгликдан $a \neq 0$ бўлганда $n \cdot 1 = 0$ тенглик келиб чиқар эди, яъни майдоннинг характеристикаси нолга тенг бўлгани учун $n = 0$ бўлади.

Қисм майдонлар, кенгайтмалар. P майдоннинг P' тўпламни ташкил қилувчи қисми P майдонда аниқланган амалларга нисбатан яна майдон ташкил этсин, яъни P майдоннинг қисми бўлган P' тўпламнинг исталган иккита a ва b элементлари учун $a+b$, ab, $a-b$ ва $b\neq 0$ бўлганда $\frac{a}{b}$ элементлар P' га тегишли бўлсин (I—V қонунлар P да бажарилгани учун шубҳасиз P' да ҳам бажарилади).У ҳолда P' майдон P майдоннинг қисм майдони, P эса P' майдоннинг *кенгайтмаси* дейилади. P майдоннинг ноли ва бири P' да ҳам бор (P' га ҳам тегишли) бўлиб, улар P' да ҳам ноль ва бир вазифасини бажаради. Масалан, рационал сонлар майдони ҳақиқий сонлар майдонининг қисм майдони, барча сонли майдонлар комплекс сонлар майдонининг қисм майдонлари бўлади.

P майдонда P' қисм майдон ва P' майдондан ташқарида ётувчи c элемент берилган бўлсин ва биз ҳам P' ни, ҳам c ни ўз ичига олувчи минимал P'' қисм майдонни топдик дейлик. Бундай минимал қисм майдон фақат битта бўлади, чунки агар P''' худди шу хоссаларга эга бўлган яна битта қисм майдон бўлганида эди, у ҳолда P'' ва P''' қисм майдонларнинг кесишмаси (яъни бу икки қисм майдонларнинг умумий элементларидан ташкил топган тўплам) P' ни ҳам, c ни ҳам ва ўзининг исталган иккита элементи билан бирга уларнинг йиғиндисини (бу йиғинди P'' да ҳам, P''' да ҳам мавжуд бўлгани сабабли уларнинг кесишмасида ҳам мавжуд бўлади) ва шунингдек, уларнинг кўпайтмаси, айирмаси ва бўлинмаларини ҳам ўз ичига олган бўлар эди; бошқача сўз билан айтганда, бу кесишма P'' қисм майдоннинг минималлигига зид равишда қисм майдон бўлар эди. Биз *P'' майдон P' майдонга c элементни қўшиб олишдан ҳосил қилинган майдон* деб атаймиз ва $P''=P'(c)$ ёзувни ишлатамиз. $P'(c)$ майдон c элементдан ва P' майдоннинг барча элементларидан ташқари, уларни қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш амаллари орқали ҳосил бўладиган барча элементларни ҳам ўз ичига олиши тушунарлидир. Мисол сифатида 43-§ да кўрилган рационал сонлар майдонининг рационал a, b коэффициентли $a+b\sqrt{2}$ кўринишдаги сонлардан ташкил топган кенгайтмасини келтириш мумкин; бу кенгайтма рационал сонлар майдонига $\sqrt{2}$ сонини қўшиб олишдан ҳосил бўлади.

46*-§. Ҳалқаларнинг (майдонларнинг) изоморфизми. Комплекс сонлар майдонининг ягоналиги

Ҳалқалар назариясида изоморфизм тушунчаси катта роль ўйнайди. Чунончи, агар L ва L' ҳалқалар орасида шундай ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлсаки, бу мосликка асосан L нинг ихтиёрий a ва b элементлари ва L' нинг уларга мос келувчи a', b' элементлари учун $a+b$ йиғиндига

$a'+b'$ йиғинди, ab кўпайтмайтмага эса $a'b'$ кўпайтма мос келса, L ва L' ҳалқалар *изоморф* дейилади.

L ва L' ҳалқалар орасида изоморф мослик ўрнатилган бўлсин. *Бу мосликка кўра L ҳалқанинг ноли 0 га L' ҳалқанинг ноли $0'$ мос келади.* Дарҳақиқат, 0 элементга L' ҳалқанинг c' элементи мос келсин. L нинг ихтиёрий a элементи ва L' нинг унга мос келувчи a' элементини оламиз. У ҳолда $a+0$ элементга a' элемент мос келиши керак, аммо $a+0=a$ бўлганлиги сабабли $a'+c'=a'$, бундан $c'=0'$. Сўнгра, *$-a$ элементга $-a'$ элемент мос келади.* Ҳақиқатан ҳам, $-a$ элементга d' элемент мос келган бўлсин. У ҳолда $a+(-a)=0$ элементга $a'+d'$ элемент мос келиши зарур, яъни $a'+d'=0'$; бу тенгликдан $d'=-a'$ келиб чиқади. Бундан *L даги элементларнинг айирмасига L' да уларга мос келувчи элементларнинг айирмаси мос келиши келиб чиқади.* Худди шу каби мулоҳазалар билан агар L ҳалқа бирга эга бўлса, у ҳолда бу элементнинг образи (яъни қаралаётган изоморфизмга кўра L' да унга мос келувчи элемент) L' ҳалқанинг бири бўлади ва агар L нинг a элементи a^{-1} тескари элементга эга бўлса, у ҳолда a^{-1} элементнинг L' даги образи a' элементга тескари элементдан иборат эканлигини кўрсатиш мумкин.

Бундан келиб чиқадики, *майдонга изоморф бўлган ҳалқанинг ўзи ҳам майдон бўлади.* Ҳалқанинг нолни бўлувчиларига эга эмаслик хоссаси изоморф мосликда ҳам сақланишини осонликча кўриш мумкин. Умуман, изоморф ҳалқалар бирбирларидан элементларининг табиати билангина фарқ қилиши мумкин, лекин улар ўзларининг алгебраик хусусиятлари бўйича айнандирлар; агар бирор ҳалқага нисбатан исботланган ҳар қандай теореманинг исботида амалларнинг хусусиятигина ишлатилган бўлиб, бу ҳалқа элементларининг индивидуал хусусиятлари эътиборга олинмаган бўлса, у ҳолда бу теорема шу ҳалқага изоморф бўлган барча ҳалқалар учун ҳам ўринли бўлади. Шу сабабга кўра биз *изоморф ҳалқалар ёки майдонларни ҳар хил деб ҳисобламаймиз*; улар биз учун фақат битта ҳалқа ёки майдоннинг турли намуналаридан иборат бўлади

Бу тушунчани комплекс сонлар майдонини тузиш масаласига татбиқ этайлик, 17-§ да баён қилинган комплекс сонлар майдонини текислик нуқталаридан фойдаланиб тузиш комплекс сонлар майдонини тузишнинг ягона усули эмас. Текисликдаги нуқталар ўрнига координаталар бошидан чиқувчи кесмаларни (векторларни) олиб ва бу векторларни координата ўқларидаги a, b компонентлари орқали бериб, векторларни қўшиш ва кўпайтириш амалларини худди текислик нуқталари учун қилганимиз каби, 17-§ даги (2) ва (3) формулалар ёрдамида аниқлаб олиш ҳам мумкин эди. Текислик нуқталари ҳам, текисликдаги векторлар ҳам ҳақиқий сонларнинг тартибланган (a,b) жуфтлари билан берилишини эътиборга олиб, барча бундай жуфтлардан тузилган тўпламни олиш ва унда юқорида кўрсатилган параграфнинг (2) ва (3) формулалари бўйича қўшиш ва кўпайтириш амалларини киригиб, умуман геометрик материални жалб қилишдан воз кечиш ҳам мумкин эди.

Ҳақиқатда, бу майдонларнинг ҳар бири ҳам ўзларининг алгебраик хусусиятларига кўра фарқ қилиб бўлмайдиган майдонлар эканлигини ушбу теорема кўрсатади:

Ҳақиқий сонлар майдони D нинг D майдонга

$$x^2+1=0 \tag{1}$$

тенглама илдизини қўшиб олишдан ҳосил бўлган барча кенгайтмалари ўзаро изоморф майдонлардир.

Ҳақиқатан ҳам, D майдоннинг қандайдир P кенгайтмаси берилган бўлиб, у (1) тенглама илдизини қаноатлантирувчи элементни ўз ичига олган бўлсин. Бу элемент учун белгилашни танлаш бизнинг ихтиёримизда ва биз шу мақсадда i ҳарфини ишлатамиз. Шундай қилиб, $i^2+1=0$ (бундан $i=-1$) тенглик ўринли бўлади, бу ерда даражага кўтариш ва қўшиш амалларини P майдонда аниқланган амаллар маъносида тушуниш лозим. Биз ҳозир D майдонга i элементни қўшиб олишдан ҳосил бўладиган $D(i)$ майдонни, яъни P майдоннинг D майдонни ҳам, i элементни ҳам ўз ичига оладиган минимал қисм майдонини топмоқчимиз.

Шу мақсадда P майдоннинг

$$\alpha=a+bi \tag{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлган барча элементларини кўрайлик, бу ерда a ва b—ихтиёрий ҳақиқий сонлар, b соннинг i элемент билан кўпайтмасини ҳамда a соннинг бу кўпайтма билан йиғиндисини P майдонда аниқланган амаллар маъносида тушуниш керак. P майдоннинг ҳеч қандай α элементи иккита бундай кўринишдаги ҳар хил ёзувга эга эмас:

$$b\neq\overline{b} \text{ ва } \alpha=a+bi=\overline{a}+\overline{b}i$$

тенгликдан

$$i=\frac{\overline{a}-a}{b-\overline{b}}$$

келиб чиқар эди, яъни i ҳақиқий сон бўлиб қолар эди; агар $b=\overline{b}$ бўлса, у ҳолда $a=\overline{a}$ бўлади. P майдоннинг (2) кўринишда ёзиладиган элементлари қаторига, хусусан, барча ҳақиқий сонлар ($b=0$ бўлган ҳол), шунингдек, i элементнинг ўзи ҳам ($a=0$, $b=1$ бўлган ҳол) киради.

(2) *кўринишдаги барча элементлар тўплами P майдоннинг қисм майдонини ташкил этишини кўрсатамиз*; у ҳолда бу майдон изланаётган $D(i)$ майдоннинг худди ўзи бўлади. Бизга $\alpha = a + bi$ ва $\beta = c + di$ элементлар берилган бўлсин. У ҳолда P майдонда бажариладиган қўшишнинг коммутативлиги ва ассоциативлиги ҳамда дистрибутивлик қонунига таяниб,

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di)$$

ни топамиз, бундан

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i, \tag{3}$$

яъни бу йиғинди яна қаралаётган элементлар тўпламига тегишли бўлади. Сўнгра,

$$-\beta = (-c) + (-d)i,$$

у ҳолда (3) тенгликка кўра $\beta + (-\beta) = 0 + 0i = 0$ тенглик ўринли бўлади, шунга кўра

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta = (a - c) + (b - d)i, \tag{3'}$$

яъни айириш ҳам бизни қаралаётган тўпламдан четга олиб чиқмайди. P майдондаги амаллар учун ўринли бўлган I—V хоссалардан яна фойдаланиб ҳамда $i^2 = -1$ тенгликка таянган ҳолда

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

ни топамиз. Яъни

$$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i; \tag{4}$$

шундай қилиб, (2) кўринишдаги исталган иккита элементнинг кўпайтмаси яна худди шу кўринишдаги элемент бўлади. Ниҳоят, $\beta \neq 0$, яъни c, d сонлардан камида бири нолдан фарқли деб фараз қиламиз. У ҳолда $c - di \neq 0$ бўлади ва

$$(c + di)(c - di) = c^2 - (di)^2 = c^2 - d^2i^2 = c^2 + d^2,$$

шу билан бирга $c^2 + d^2 \neq 0$. Шунга кўра, ҳар қандай майдонда ҳам касрлар учун ишлатиладиган одатдаги қоидалар сақланиб қолади, деган ва олдинги параграфда қайд қилинган даъводан фойдаланиб, хусусан бу даъвога кўра, касрнинг сурати ва махражини нолдан фарқли бир хил элементга кўпайтириш билан у ўзгармай қолишини эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

яъни бу

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc -- ad}{c^2 + d^2}i \tag{4'}$$

элемент яна (2) кўринишга эга.

Энди *P майдоннинг биз ҳосил қилган $D(i)$ қисм майдони текисликнинг нуқталаридан ташкил топган ва* 17- § *да тузилган майдонга изоморф* эканлигини кўрсатайлик. $D(i)$ майдоннинг $a+bi$ элементига (a,b) нуқтани мос қўйиб, $D(i)$ майдон элементларини (2) кўринишда ягона усул билан ёзиш мумкинлиги сабабли бу майдон элементлари билан текисликдаги барча нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатамиз. Бу мосликда a ҳақиқий сонга $a = a + 0i$ тенгликка кўра $(a, 0)$ нуқта мос келади, $i = 0 + 1i$ элементга эса $(0, 1)$ нуқта мос қўйилади. Иккинчи томондан, ушбу параграфнинг (3) ва (4) формулаларини 17- § нинг (2) ва (3) формулалари билан солиштириб, $D(i)$ майдондаги α ва β элементларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасига α ва β ларга мос қўйилган нуқталарнинг мос равишда йиғиндиси ва кўпайтмаси мос келишини келтириб чиқарамиз.

Шу билан, бирор майдонга изоморф бўлган барча майдонлар ўзаро изоморф бўлганлиги сабабли, теореманинг исботи тугалланади. Бундан кўринадики, 17- § да нуқталар устидаги амаллар учун (2) ва (3) формулаларнинг танланиши тасодифий эмас ва уларни ўзгартириб бўлмайди.

Комплекс сонлар майдонини тузишнинг юқорида кўрилган усулидан бошқа яна кўпгина усуллари мавжуд. Улардан бирини, матрицаларни қўшиш ва кўпайтиришдан фойдаланиладиган усулини кўрсатайлик.

Ҳақиқий сонлар майдони устида иккинчи тартибли матрицаларнинг нокоммутатив ҳалқасини олайлик. Равшанки,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

кўринишдаги скаляр матрицалар бу ҳалқада ҳақиқий сонлар майдонига изоморф бўлган қисм майдон ташкил қилади. *Аммо ҳақиқий сонлар майдони устида иккинчи тартибли матрицалар ҳалқасида комплвкс сонлар майдонига изоморф бўлган қисм майдон ҳам топиш мумкин* экан. Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай $a+bi$ комплекс сонга

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

матрицани мос қўяйлик. Бу йўл билан комплекс сонлар майдонининг ҳаммаси ўзаро бир қийматли равишда иккинчи тартибли матрицалар ҳалқасининг бир қисмига акс эттирилади, шу билан бирга ушбу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ab+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

тенгликлардан бу акс эттириш изоморф эканлиги келиб чиқади, чунки уларнинг ўнг томонида турган матрицалар

$$(a+c)+(b+d)i = (a+bi)+(c+di) \text{ ва } (ac-bd)+(ad+bc)i = \\ = (a+bi)(c+di)$$

комплекс сонларга мос келади. Хусусан, мавҳум бирлик i нинг вазифасини

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица бажаради.

Ҳосил қилинган бу натижа комплекс сонлар майдонини тузишнинг юқорида кўрсатилган усуллар каби қониқарли бўлган янги бир усулини кўрсатади.

47-§. Ихтиёрий майдон устида чизиқли алгебра ва кўпҳадлар алгебраси

Китобнинг бундан олдинги бобларидан чизиқли алгебрага бағишланганларида асосий майдон вазифасини одатда ҳақиқий сонлар майдони бажарган эди. Аммо бу бобларнинг кўпгина натижалари ҳеч қандай қийинчиликсиз асосий майдон ихтиёрий майдондан иборат бўлган ҳол учун сўзма-сўз ўтказилишини осонгина текшириш мумкин.

Масалан, *чизиқли тенгламалар системасини ечиш учун 1- бобда баён этилган Гаусс методи, детерминантлар назарияси ва Крамер қоидаси ихтиёрий асосий майдон P учун ҳам ўринлилигича қолади.* 4- § нинг охирида келтирилган қия симметрик детерминантлар ҳақидаги мулоҳазагина P майдоннинг характеристикаси иккидан фарқли деб фараз қилишни талаб қилади. Шу билан бирга худди шу параграфдаги 4- хоссанинг исботи ҳам, бу хоссанинг ўзи ўринли бўлиб қолишига қарамай, P майдоннинг характеристикаси иккига тенг бўлса, ўз кучини йўқотади.

Шуни қайд қилиш фойдалики, 1- бобда бир неча марта такрорланган чизиқли тенгламаларнинг ноаниқ системасининг чексиз кўп ҳар хил илдизларининг мавжудлиги ҳақидаги даъво асосий P майдон исталган чексиз майдон бўлган ҳолда ҳам ўз кучини сақлаб қолади, лекин P майдон чекли бўлса, бу натижа ўринли бўлмайди.

Сўнгра, *2- бобда баён қилинган векторларнинг чизиқли боғлиқлиги назарияси, матрицанинг ранги назарияси ва чизиқли тенгламалар системаларининг умумий назарияси, шунингдек, 3- бобдаги матрицалар алгебраси ихтиёрий асосий майдон учун ҳам батамом ўтказилади.*

Квадратик формаларнинг 26- § да тузилган умумий назарияси ҳам характеристикаси иккидан фарқли бўлган ихтиёрий асосий майдон бўлган ҳолга ўтказилади. Осонгина кўрсатиш мумкинки бу параграфнинг асосий теоремаси бундай чекланишсиз ўринли бўлмайди.

Масалан, $P = Z_2$, яъни P иккита элемент: 0 ва 1 дан ташкил топган майдон бўлсин, шу билан бирга $1+1=0$ бўлгани сабабли $-1=1$ ва бу майдон устида $f=x_1x_2$ квадратик форма берилган бўлсин. Агар f ни каноник шаклга келтирувчи ушбу чизиқли алмаштириш

$$x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2,$$
$$x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2$$

мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$f = (b_{11}y_1 + b_{12}y_2)(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) = b_{11}b_{21}y_1^2 + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})\, y_1y_2 + b_{12}b_{22}y_2^2$$

тенгликда y_1y_2 кўпайтманинг олдидаги $b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}$ коэффициент нолга тенг бўлиши керак. Аммо, бу коэффициент биз олган чизиқли алмаштиришнинг детерминантига тенг, чунки $b_{12}b_{21}=1$ бўладими ёки $b_{12}b_{21}=0$ бўладими, барибир, ҳар икки ҳолда ҳам $b_{12}b_{21}=-b_{12}b_{21}$. Яъни бизнинг чизиқли алмаштиришимиз хос чизиқли алмаштириш бўлиб қолди.

6-бобнинг қолган натижалари ўз моҳиятига кўра ҳақиқий ёки комплекс коэффициентли квадратик формаларгагина алоқадордир.

Ниҳоят, *7- бобда қурилган чизиқли фазолар ва уларни чизиқли алмаштиришлар назарияси ихтиёрий асосий майдон P да ҳам тўла сақланиб қолади.* Шуниси ҳам борки, характеристик илдиз тушунчаси ихтиёрий майдон устида кўпҳадлар назарияси билан боғлиқ бўлиб, у ҳақда қуйида сўз боради. 33-§ даги характеристик илдизлар ва хос қийматлар орасидаги боғланиш ҳақидаги теорема энди ушбу тарзда ифода қилинишини қайд қиламиз: φ чизиқли алмаштиришнинг асосий майдон P да ётувчи характеристик илдизлари ва фақат шуларгина бу алмаштиришнинг хос қийматлари вазифасини бажаради.

Евклид фазоси назариясига келсак (8- боб), у ўз моҳиятига кўра ҳақиқий сонлар майдони билан боғланган.

Юқорида баён қилинган кўпҳадлар алгебрасининг баъзи бўлимларини асосий майдон P ихтиёрий бўлган ҳол учун ҳам ўтказиш мумкин. Бироқ, аввало ихтиёрий майдон устида кўпҳад тушунчасига аниқ маъно бериш лозим.

Гап шундаки, 20- § да кўпҳад тушунчасига икки хил:формал-алгебраик ва назарий-функционал нуқтаи назар билан қаралган эди. Уларнинг иккаласини асосий майдон ихтиёрий бўлган ҳол учун ўтказиш мумкин. Аммо бу тушунчалар сонли майдонлар учун тенг кучли бўлиб (24- § га қаранг) ва осонгина текшириш мумкинки, умуман, чексиз майдонлар учун ҳам тенг кучли бўла туриб, улар *чекли майдонлар учун энди тенг кучли бўлмайди.*

Мисол учун, 45- § да киритилган ва иккита: 0 ва 1 элементдан ташкил топган Z_2 майдонни кўрамиз, шу билан бирга $1+1=0$. Коэффициентлари бу майдондан олинган $x+1$ ва x^2+1 кўпҳадлар ҳар хил бўлади, улар яъни кўпҳадлар тенглигининг алгебраик таърифини қаноатлантирмайди. Шу билан бирга бу кўпҳадларнинг иккаласи ҳам $x=0$ да 1 қийматни, $x=1$ да эса 0 қийматни қабул қилади, яъни уларни Z_2 майдондан қиймат қабул қилувчи x „номаълумнинг функцияси" деб қарасак, улар ўзаро тенг деб ҳисобланиши керак. Учта элемент: 0, 1, 2 дан ташкил топган Z_8 майдонда (шу билан бирга $1+2=0$) x^3+x+1 ва $2x+1$ кўпҳадлар ҳам худди шундай ҳолатда бўлади. Бундай мисолларни умуман барча чекли майдонлар учун ҳам кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, ихтиёрий P майдонга тааллуқли бўлган назарияда кўпҳадга назарий-функционал нуқтаи назар билан қарашни қабул қилиб бўлмайди. Демак, кўпҳаднинг формал-алгебраик таърифига тўлиқ аниқлик киритиш зарур. Шу мақсадда, биз ихтиёрий P майдон устида кўпҳадлар ҳалқасини шундай тузамизки, унда энг бошиданоқ кўпҳадларнинг одатдаги x „номаълум“ орқали ёзувидан фойдаланилмайди.

P майдон элементларидан тузилган

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \tag{1}$$

кўринишдаги барча мумкин бўлган тартибланган системаларни кўрайлик, шу билан бирга n ихтиёрий ва $n \geqslant 0$, аммо $n > 0$ бўлганда $a_n \neq 0$ бўлиши лозим. (1) кўринишдаги системалар учун қўшиш ва кўпайтиришни 20-§ нинг (3) ва (4) формулаларига мос равишда аниқлаб, биз бундай системалар тўпламини коммутатив ҳалқага айлантирамиз; бунинг учун зарур бўлган хоссаларнинг исботлари 20- § да сонли кўпҳадлар учун қилинган исботларни сўзма-сўз такрорлайди.

Биз тузган ҳалқада (a) кўринишдаги системалар ($n=0$ бўлган ҳол) P майдонга изоморф бўлган қисм майдон ташкил қилади. Бу эса бундай системаларни P майдоннинг мос a элементлари билан айнан тенг деб қараш имкониятини беради, яъни

$$P \text{ майдоннинг барча } a \text{ элементлари учун } (a) = a. \tag{2}$$

Иккинчи томондан, (0, 1) системани x ҳарфи билан белгилаймиз:

$$x = (0, 1).$$

У ҳолда кўпайтиришнинг юқорида келтирилган таърифини қўллаб $x^2 = (0, 0, 1)$ эканлигини топамиз ва умуман,

$$x^k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ марта}}, 1) \tag{3}$$

Энди тартибланган системаларни қўшиш ва кўпайтириш таърифларидан ва шунингдек, (2) ва (3) тенгликлардан фойдаланиб, топамиз.

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n), = (a_0) + (0, a_1) + (0, 0, a_2) + \ldots$$
$$\ldots + (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ марта}}, a_{n-1}) + (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ марта}}, a_n) =$$
$$= (a_0) + (a_1)(0, 1) + (a_2)(0, 0, 1) + \ldots + (a_{n-1})(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ марта}}, 1) +$$
$$+ (a_n)(\underbrace{0, 0, \ldots,}_{n \text{ марта}} 0, 1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Шундай қилиб, (1) кўринишдаги ҳар қандай тартибланган системани коэффициентлари P майдондан олинган кўпҳад (x га нисбатан) шаклида ёзиш мумкин, шу билан бирга бу ёзув, равшанки, бир қийматли бўлади. Ниҳоят, қўшишнинг исбот қилинган коммутативлигига таянган ҳолда x нинг даражалари камайиб бориш тартибидаги ёзувга ҳам ўтиш мумкин.

Натижада биз коммутатив ҳалқа ясаймиз, бу ҳалқани *P майдон устида x номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси* деб аташ табиийдир. Бу ҳалқа $P[x]$ символ билан белгиланади.

$P[x]$ ҳалқада, юқорида кўрсатилганига асосан, *P майдоннинг ўзи ҳам ётади*. Сўнгра сонли майдонлар устида кўпҳадлар ҳалқаси каби (20-§ га қаранг) *$P[x]$ ҳалқа ҳам бирга эга, нолнинг бўлувчиларига эга эмас ва майдон ташкил этмайди.*

Агар P майдон катта $\overline{P}$ майдонда ётса, у ҳолда $P[x]$ ҳалқа $\overline{P}[x]$ ҳалқанинг қисм ҳалқаси бўлади: коэффициентлари P га тегишли ҳар қандай кўпҳадни табиий $\overline{P}$ майдон устида кўпҳад деб қараш мумкин, кўпҳадларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси эса фақат уларнинг коэффициентларига боғлиқ ва шунинг учун катта майдонга ўтганда ўзгармай қолади.

„P майдон устида кўпҳадлар ҳалқаси“ тушунчасининг асл ҳажми қанчалик кенг эканлигини яхшироқ тасаввур қилиш учун бу тушунчага яна бошқа томондан ҳам назар ташлайлик.

P майдон бирор L коммутатив ҳалқада қисм ҳалқа сифатида ётсин. Агар коэффициентлари P майдондан олинган шундай n- даражали ($n \geqslant 1$) тенглама мавжуд бўлсаки, L ҳалқанинг α элементи шу тенгламани қаноатлантирса, α элемент *P майдон устида алгебраик дейилади.* Агар бундай тенглама мавжуд бўлмаса, у ҳолда α элемент *P майдон устида трансцендент* дейилади. $P[x]$ ҳалқанинг x элементи P майдон устида трансцендентлиги тушунарлидир.

Ушбу теорема ўринли:

Агар L ҳалқанинг α элементи P майдон устида трансцендент бўлса, α элементни P майдонга қўшиб олишдан ҳосил бўлган L' қисм ҳалқа (яъни L ҳалқанинг P майдонни ва α элементни ўз ичига олувчи минимал қисм ҳалқаси) *$P[x]$ кўпҳадлар ҳалқасига изоморф бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, L ҳалқанинг

$$\beta = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n, \quad n \geqslant 0 \tag{4}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлган ва $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ коэффициентлари P майдондан олинган ҳар қандай β элементи L' қисм ҳалқага тегишли бўлади, β элемент (4) кўринишдаги икки хил ёзувга эга бўлиши мумкин эмас, акс ҳолда биз бу ифодаларнинг бирини иккинчисидан айириб, P майдон устида

α элемент қаноатлантирувчи тенгламанинг мавжудлигини келтириб чиқарар эдик, бу эса α элементнинг трансцендентлигига зид. (4) кўринишдаги элементларни L ҳалқадаги қўшиш қоидасига кўра йиға туриб, албатта, α нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни қўшиш мумкин, аммо бу кўпҳадларни қўшиш қоидаси билан устма-уст тушади. Бошқа томондан, (4) кўринишдаги элементларни L ҳалқадаги кўпайтириш қоидаларига асосан кўпайтириб, дистрибутивлик қонунига биноан аввал ҳадма-ҳад кўпайтиришимиз, сўнгра ўхшаш ҳадларни йиғишимиз мумкин; бу равшанки, кўпҳадларни бизга таниш бўлган кўпайтириш қоидасига олиб келади. Шу билан (4) кўринишдаги элементлар L ҳалқада P майдонни ва α элементни ўз ичига олган қисм ҳалқа ташкил этиши, яъни L' билан устма-уст тушувчи қисм ҳалқа ташкил этиши ва бу қисм ҳалқа $P[x]$ кўпҳадлар ҳалқасига изоморфлиги исботланди.

Кўриниб турибдики, кўпҳадлар устидаги амаллар учун юқоридаги таърифларни танланиши тасодифий эмас: у $P[x]$ ҳалқанинг x элементи P майдон устида трансцендент бўлиши кераклигидан батамом аниқланади.

Шуни қайд қиламизки, $P[x]$ кўпҳадлар ҳалқасини тузаётганда. биз ҳеч қаерда P майдон элементларини бўлишни ишлатганимиз йўқ ва фақат бир марта, чунончи, кўпайтманинг даражаси ҳақида айтилган даъвонинг исботида P майдонда нолнинг бўлувчилари мавжуд эмаслигига мурожаат қилган эдик. Шундай экан, ихтиёрий L коммутатив *ҳалқани олиб ва юқорида келтирилган* ясашни сўзма-сўз такрорлаб, *L ҳалқа устида $L[x]$ кўпҳадлар ҳалқасини ҳосил қилиш мумкин,* шу билан бирга агар L ҳалқа нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаса, у ҳолда кўпҳадлар кўпайтмасининг даражаси кўпайтувчилар даражаларининг йиғиндисига тенг бўлади ва шунинг учун $L[x]$ кўпҳадлар ҳалқаси ҳам нолнинг бўлувчиларига эга бўлмайди.

Коэффициетлари ихтиёрий P майдондан олинган кўпҳадларга қайтиб, шуни айтиш мумкинки, бу ҳол учун кўпҳадларнинг 20—22-§ ларда баён қилинган бўлиниш назарияси деярли бутунлай кўчирилади. Чунончи, $P[x]$ *ҳалқада қолдиқли бўлиш алгоритми ўринли бўлади*, шу билан бирга бўлинма ҳам, қолдиқ ҳам $P[x]$ ҳалқага тегишли бўлади. Сўнгра, $P[x]$ *ҳалқада бўлувчи тушунчаси маънога эга бўлиб, унинг барча асосий хоссалари сақланиб қолади.* Бунда бўлиш алгоритми асосий P майдондан четга олиб чиқмаслиги сабабли, $\varphi(x)$ *кўпҳаднинг $f(x)$ учун бўлувчи бўлиш хоссаси биз P майдонни кўраяпмизми ёки унинг ихтиёрий кенгайтмасини кўраяпмизми, бунга боғлиқ эмас.*

$P[x]$ ҳалқада энг катта умумий бўлувчи тушунчаси ва унинг барча хоссалари сақланиб қолади, шу билан бирга

Евклид алгоритми ва бу алгоритм ёрдамида 21-§ да исботланган теорема ҳам сақланиб қолади. Шуни қайд қиламизки, қолдиқли бўлиш алгоритми қандай майдон асосий деб олинганига боғлиқ бўлмагани учун *иккита кўпҳаднинг энг катта умумий бўлувчиси ҳам биз P майдонни кўраяпмизми ёки унинг ихтиёрий $\overline{P}$ кенгайтмасини кўраяпмизми, бунга боғлиқ бўлмайди.*

Ниҳоят, *P майдон устида кўпҳадлар учун илдиз тушунчаси ўз маъносини сақлаб қолади ва илдизларнинг асосий хоссалари ўзгармасдан қолади.* Каррали илдизлар назарияси ҳам сақланиб қолади; биз кейинги параграфнинг охирида бу масалага яна бир марта қайтамиз.

Бу эслатмалар бундан кейин ихтиёрий P майдон устида кўпҳадларни ўрганиш жараёнида 20—22-§ ларга мурожаат қилиш учун имкон беради.

48-§. Кўпҳадларни келтирилмас кўпайтувчиларга ёйиш

24-§ да комплекс ва ҳақиқий сонлар майдонлари учун илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги теорема асосида кўпҳадни келтирилмас кўпайтувчиларга ёйишнинг мавжудлиги ва унинг ягоналиги исботланган эди. Бу натижалар ихтиёрий P майдон устида кўпҳадларга тааллуқли бўлган умумий теоремаларнинг хусусий ҳолларидан иборат. Ушбу параграф бутун сонларни туб кўпайтувчиларга ёйиш назариясига параллел (ёндош) бўлган умумий назариянинг баёнига бағишланади.

Аввало, туб сонлар бутун сонлар ҳалқасида қандай ролни бажарса, кўпҳадлар ҳалқасида ҳам худди шундай ролни бажарувчи кўпҳадларни аниқлайлик. Олдиндан таъкидлаймизки, бу таърифда даражаси бирга тенг ёки бирдан катта бўлган кўпҳадлар тўғрисидагина гап боради; бу эса туб сонларни аниқлаш ҳамда бутун сонларни туб кўпайтувчиларга ёйишда 1 ва —1 сонларини чиқариб ташлашга бутунлай мос келади.

Коэффициентлари P майдондан олинган ва даражаси n га ($n \geqslant 1$) тенг бўлган $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин. 21-параграфдаги V хоссага асосан барча нолинчи даражали кўпҳадлар $f(x)$ кўпҳаднинг бўлувчилари вазифасини бажаради. Иккинчи томондан, VII хоссага асосан барча $cf(x)$ (бу ерда c элемент P нинг нолдан фарқли элементи) кўпҳадлар ҳам $f(x)$ нинг бўлувчиларидан иборат бўлади, шу билан бирга $f(x)$ кўпҳаднинг n даражали бўлувчилари шулар билангина тугалланади. $f(x)$ кўпҳаднинг даражаси 0 дан катта, аммо n дан кичик бўлувчиларига келсак, улар $P[x]$ ҳалқада мавжуд бўлиши ҳам, мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Биринчи ҳолда $f(x)$ кўпҳад

P майдонда (ёки P майдон устида) *келтириладиган* дейилади, иккинчи ҳолда эса бу майдонда *келтирилмас* дейилади.

Бўлувчининг таърифини эслаб шуни айтиш мумкинки, *агар n даражали $f(x)$ кўпҳад P майдон устида (яъни $P[x]$ ҳалқада) даражалари n дан кичик бўлган иккита кўпайтувчининг кўпайтмаси шаклида ёзилиши мумкин бўлса,* яъни

$$f(x) = \varphi(x)\ \psi(x) \qquad (1)$$

бўлса, $f(x)$ кўпҳад P майдонда келтириладиган дейилади; агар *$f(x)$ ни (1) кўринишдаги исталган ёйилмасида кўпайтувчилардан бири 0 даражали, иккинчиси эса n даражали кўпҳад бўлса, $f(x)$ кўпҳад P майдонда келтирилмас дейилади.*

Шунга алоҳида эътибор бериш керакки, кўпҳаднинг келтириладиган ёки келтирилмаслиги ҳақида берилган P майдонга нисбатангина гапириш мумкин, чунки бу майдонда келтирилмас кўпҳад унинг бирор $\overline{P}$ кенгайтмасида келтириладиган бўлиб қолиши мумкин. Масалан, бутун коэффициентли $x^2 - 2$ кўпҳад рационал сонлар майдонида келтирилмас—у коэффициентлари рационал сонлардан иборат бўлган биринчи даражали иккита кўпайтувчининг кўпайтмасига ажралмайди. Аммо ҳақиқий сонлар майдонида бу кўпҳад келтириладиган эканлигини ушбу

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

тенглик кўрсатади. $x^2 + 1$ кўпҳад рационал сонлар майдонидагина эмас, балки ҳақиқий сонлар майдонида ҳам келтирилмас, аммо у комплекс сонлар майдонида келтириладиган бўлади, чунки

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Келтирилмас кўпҳадларнинг баъзи асосий хоссаларини кўрсатиб ўтайлик, шу билан бирга сўз P майдонда келтирилмас кўпҳадлар устида бораётганини эсда тутамиз.

α) *ҳар қандай биринчи даражали кўпҳад келтирилмас кўпҳаддир.*

Ҳақиқатан ҳам, агар бу кўпҳад кичик даражали кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилганда эди, у ҳолда кўпайтувчилар 0 даражали кўпҳадлардан иборат бўлар эди. Аммо нолинчи даражали исталган кўпҳадларнинг кўпайтмаси биринчи даражали кўпҳад бўлмай, яна нолинчи даражали кўпҳад бўлади.

β) *агар $p(x)$ кўпҳад келтирилмас бўлса, у ҳолда ҳар қандай $cp(x)$ кўпҳад ҳам келтирилмас бўлади, бу ерда c элемент P майдоннинг нолдан фарқли элементи.*

Бу хосса 21-§ нинг I ва VII хоссаларидан келиб чиқади. У керакли ерларда, юқори коэффициенти бирга тенг бўлган келтирилмас кўпҳадларни кўриш билангина чегаралинишга имкон беради.

γ) *агар $f(x)$ — ихтиёрий, $p(x)$ эса келтирилмас кўпҳад бўлса. у ҳолда $f(x)$ кўпҳад ёки $p(x)$ га бўлинади, ёки бу кўпҳадлар ўзаро туб бўлади.*

Агар $(f(x), p(x)) = d(x)$ бўлса, у ҳолда $d(x)$ келтирилмас кўпҳад $p(x)$ нинг бўлувчиси бўлгани сабабли, ёки 0 даражага эга, ёки бўлмаса $cp(x)$, $c \neq 0$ кўринишдаги кўпҳад бўлади. Биринчи ҳолда $f(x)$ ва $p(x)$ кўпҳадлар ўзаро туб, иккинчи ҳолда эса $f(x)$ кўпҳад $p(x)$ га бўлинади.

δ) *агар $f(x)$ ва $d(x)$ кўпҳадларнинг кўпайтмаси келтирилмас кўпҳад $p(x)$ га бўлинса, у ҳолда бу кўпайтувчиларнинг камида биттаси $p(x)$ га бўлинади.*

Ҳақиқатан ҳам, агар $f(x)$ кўпҳад $p(x)$ га бўлинмаса, у ҳолда γ) га асосан $f(x)$ ва $p(x)$ ўзаро туб, у ҳолда 21-§ даги б) хоссага асосан $d(x)$ кўпҳад $p(x)$ га бўлиниши лозим.

δ) хосса ҳеч қандай қийинчиликсиз исталган чекли сондаги кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси бўлган ҳол учун умумлаштиради.

Қуйидаги иккита теорема ушбу параграфнинг асосий мазмунини ташкил қилади.

$P[x]$ ҳалқадан олинган n- даражали ($n \geqslant 1$) ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $f(x)$ кўпҳаднинг ўзи келтирилмас бўлса, у ҳолда мазкур кўпайтма биттагина кўпайтувчидан иборат бўлади. Агар у келтириладиган бўлса, у ҳолда кичик даражали кўпайтувчиларнинг кўпайтмасига ёйилади. Агар бу кўпайтувчиларнинг ичида яна келтириладиганлари бўлса, у ҳолда уларни кўпайтувчиларга ажратишни давом эттирамиз ва ҳоказо. Бу процесс чекли сондаги қадамдан кейин тўхташи керак, чунки $f(x)$ кўпҳаднинг исталган ёйилмасида кўпайтувчилар даражаларининг йиғиндиси n га тенг бўлиши зарур ва шунга кўра x га боғлиқ бўлган кўпайтувчиларнинг сони n дан катта бўла олмайди.

Бутун сонларнинг туб кўпайтувчиларга ёйилмаси, агар бутун мусбат сонлар билан чеклансак, бир қийматлидир. Аммо барча бутун сонлар ҳалқасида бир қийматлилик фақат ишора аниқлигидагина бўлади: масалан, $-6 = 2 \cdot (-3) = (-2) \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5 = (-2) \cdot (-5)$ ва ҳоказо. Шунга ўхшаш вазият кўпҳадлар ҳалқасида ҳам ўринли бўлади.

Агар

$$f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \ldots p_s(x)$$

$f(x)$ кўпҳаднинг келтирилмас кўпҳадлар кўпайтмасига ёйилмаси бўлса ва P майдондан олинган $c_1, c_2, \ldots, c_s$ элементларнинг кўпайтмаси 1 га тенг бўлса, у ҳолда

$$f(x) = [c_1 p_1(x)] \cdot [c_2 p_2(x)] \ldots [c_s p_s(x)]$$

ҳам β) га асосан $f(x)$ нинг келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилмаси бўлади. $f(x)$ нинг барча ёйилмалари шулар билан тугалланар экан:

Агар $P[x]$ ҳалқадан олинган $f(x)$ кўпҳад икки хил усул билан келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилган бўлса:

$$f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \ldots p_s(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \ldots q_t(x), \qquad (2)$$

у ҳолда $s = t$ бўлади ва тегишлича номерланганда ушбу

$$q_i(x) = c_i p_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, s \qquad (3)$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда c_i лар P майдоннинг нолдан фарқли элементларидан иборат.

Бу теорема биринчи даражали кўпҳадлар учун ўринли, чунки улар келтирилмасдир. Шунинг учун ҳам биз теореманинг исботини кўпҳаднинг даражаларига нисбатан индукция билан олиб борамиз, яъни кичик даражали кўпҳадлар учун теорема ўринли деб фараз қилиб уни $f(x)$ учун исботлаймиз.

$q_1(x)$ кўпҳад $f(x)$ нинг бўлувчиси бўлгани учун δ) хоссага ва (2) тенгликка кўра $q_1(x)$ кўпҳад $p_i(x)$ кўпҳадларнинг камида биттаси учун, масалан, $p_1(x)$ учун бўлувчи бўлади. Аммо, $p_1(x)$ кўпҳад келтирилмас бўлгани учун ва $q_1(x)$ нинг даражаси нолдан катта бўлгани учун шундай c_1 элемент мавжудки,

$$q_1(x) = c_1 p_1(x) \qquad (4)$$

бўлади, $q_1(x)$ нинг бу ифодасини (2) тенгликка қўйиб ва $p_1(x)$ га қисқартириб (бу қонуний, чунки $P[x]$ ҳалқада нолнинг бўлувчилари йўқ), биз ушбу

$$p_2(x) \cdot p_3(x) \ldots p_s(x) = [c_1 q_2(x)]\, q_3(x) \ldots q_t(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу кўпайтмаларга тенг бўлган кўпҳаднинг даражаси $f(x)$ нинг даражасидан кичик бўлгани учун $s - 1 = t - 1$ эканлиги исботланган, бундан $s = t$ ва шундай c_2', $c_3, \ldots, c_s$ элементлар мавжудки, улар учун $c_2' p_2(x) = c_1 q_2(x)$, бундан $q_2(x) = (c_1^{-1} c_2') p_2(x)$ ва $c_i p_i(x) = q_i(x)$, $i = 3, \ldots, s$ тенгликлар ўринли бўлади. $c_1^{-1} c_2' = c_2$ деб ва (4) тенгликни ҳисобга олиб, биз тўла равишда (3) тенгликни ҳосил қиламиз.

Ҳозиргина исботланган теоремани қисқароқ усул билан қуйидагича баён қилиш мумкин: ҳар қандай кўпҳад келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмасига нолинчи даражали кўпайтувчи аниқлигида бир қийматли ёйилади.

Шуниси ҳам борки, *барча кўпҳадлар учун бутунлай бир қийматли бўлган* ушбу махсус ёйилмани ҳар доим кўриш мумкин: $f(x)$ кўпҳаднинг келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмаси шаклидаги изланган ёйилмасини оламиз ва бу кўпайтувчиларнинг ҳар қайсисида қавсдан ташқарига юқори коэффициентни чиқарамиз. Натижада биз ушбу

$$f(x) = a_0 p_1(x) \cdot p_2(x) \dots p_s(x) \tag{5}$$

ёйилмани ҳосил қиламиз, бунда барча $p_i(x)$, $i = 1, \dots, s$ кўпҳадлар юқори коэффициентлари бирга тенг бўлган келтирилмас кўпҳадлардан иборат бўлади. (5) тенгликнинг ўнг томонида кўпайтиришни бажариб, a_0 кўпайтувчи $f(x)$ кўпҳаднинг юқори коэффициентига тенг эканлигини осонгина исботлаш мумкин.

(5) ёйилмага кирувчи келтирилмас кўпайтувчиларнинг ҳаммаси ҳам ҳар хил бўлиши шарт эмас. Агар $p(x)$ келтирилмас кўпҳад (5) ёйилмада бир неча марта учраса, у ҳолда $p(x)$ кўпҳад $f(x)$ учун *каррали кўпайтувчи* дейилади, *чунончи* (5 ёйилмада $p(x)$ га тенг бўлган роса k та кўпайтувчи мавжуд бўлса, $f(x)$ кўпҳад $f(x)$ учун *k каррали* (хусусан, икки каррали, уч каррали ва ҳ.к.) кўпайтувчи дейилади. Агар $p(x)$ (5) ёйилмага фақат бир марта кирса, у ҳолда $p(x)$ кўпҳад $f(x)$ кўпҳаднинг *оддий* (ёки *бир каррали*) кўпайтувчиси дейилади.

Агар (5) ёйилмада $p_1(x), \dots, p_l(x)$ кўпайтувчилар бир-биридан фарқли кўпайтувчилар бўлиб, қолганларининг ҳар бири эса улардан бирига тенг бўлса ва $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, l)$ лар $f(x)$ кўпҳаднинг k_i каррали кўпайтувчиси бўлса, у ҳолда (5) ёйилмани ушбу

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x)\, p_2^{k_2}(x) \dots p_l^{k_l}(x) \tag{6}$$

кўринишда қайтадан ёзиш мумкин. Биз бундан буён одатда худди шу ёзувдан фойдаланамиз ва кўрсаткичлар мос кўпайтувчиларнинг карраларига тенглигини, яъни $i \neq j$ бўлганда $p_i(x) \neq p_j(x)$ лигини алоҳида айтиб ўтирмаймиз.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг келтирилмас кўпайтувчиларга ёйилмалари берилган бўлса, у ҳолда бу кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси $d(x)$ ҳар иккала ёйилмага ҳам кирган кўпайтувчиларнинг кўпайтмасига тенг, шу билан бирга ҳар бир кўпайтувчининг даражаси берилган ҳар иккала ёйилмадаги унинг карраларининг кичигига тенг қилиб олинади.

Ҳақиқатан ҳам кўрсатилган кўпайтма $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг ҳар бири учун бўлувчи бўлади, демак у $d(x)$ учун ҳам бўлувчи бўлади. Агар бу кўпайтма $d(x)$ дан фарқли бўлганда эди, у ҳолда $d(x)$ нинг келтирилмас кўпайтувчиларга ёйилмасида $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлардан камида бирининг ёйилмасига кирмаган кўпайтувчи бўлар эди, бу эса мумкин эмас ёки бўлмаса кўпайтувчилардан бирортаси $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлардан бирининг ёйилмасидаги даражасидан каттароқ даражага эга бўлар эди, бу эса яна мумкин эмас.

Бу теорема бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топишнинг одатдаги қоидасига ўхшаш. Лекин у кўпҳадлар бўлган ҳолда Евклид алгоритмининг ўрнини боса олмайди. Ҳақиқатан ҳам, берилган бутун мусбат сондан кичик туб сонларнинг сони чекли бўлгани учун бутун соннинг туб кўпайтувчиларга ёйиш чекли сондаги синашлар билан бажарилади. Бу усул чексиз асосий майдон устида кўпҳадлар ҳалқасида ўз кучини йўқотади ва, умумий ҳолда, берилган кўпҳадни келтирилмас кўпҳадлар кўпайтмасига ёйишнинг амалий усулини бериб бўлмайди Бунинг устига, ҳатто $f(x)$ кўпҳад берилган P майдонда келтирилмас кўпҳад бўладими деган саволнинг жавоби ҳам умумий ҳолда жуда қийиндир. Масалан, комплекс ва ҳақиқий сонли майдонлар бўлган ҳолда барча келтирилмас кўпҳадларни тасвирлаш 24- § да илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги мазмун жиҳатдан жуда ҳам чуқур теореманинг натижаси сифатида келтириб чиқарилган эди. Рационал сонлар майдонига келсак, бу майдон устида келтирилмас кўпҳадлар ҳақида 56-§ да баъзи хусусий характердаги мулоҳазаларгина юритилади.

Биз кўпҳадлар ҳалқасида худди бутун сонлар ҳалқасидаги каби „туб" (келтирилмас) кўпайтувчиларга ёйиш ўринли бўлиб, бу туб кўпайтувчиларга ёйиш бирор маънода бир қийматли бўлишини кўрсатдик. Бу натижаларни ҳалқаларнинг янада кенгроқ синфларига ҳам ўтказиш мумкинми деган савол туғилади. Биз бунда бирга эга бўлиб, нолнинг бўлувчиларини ўз ичига олмайдиган коммутатив ҳалқалар бўлган ҳол билангина чекланамиз.

Бирнинг бўлувчиси деб ҳалқанинг шундай a элементига айтамизки, у элемент учун ҳалқада тескари a^{-1} элемент мавжуд бўлади:

$$aa^{-1} = 1.$$

Бутун сонлар ҳалқасида бу 1 ва —1 сонлари бўлади. $P[x]$ кўпҳадлар ҳалқасида нолинчи даражали барча кўпҳадлар, яъни P майдонининг нолдан фарқли барча элементлари бўлади. Агар нолдан фарқли ҳамда бирнинг бўлувчиси бўлмаган c элементни иккита кўпайтувчининг кўпайтмаси шаклидаги ҳар қандай $c = ab$ ёйилмасида бу кўпайтувчилардан албатта биттаси бирнинг бўлувчиси бўлса, у ҳолда бундай элементни ҳалқанинг туб элементи деб атаймиз. Бутун сонлар ҳалқасида туб сонлар туб элементлар бўлади, кўпҳадлар ҳалқасида эса келтирилмас кўпҳадлар туб элементлар бўлади.

Текширилаётган ҳалқанинг нолдан фарқли ва бирнинг бўлувчиси бўлмаган ҳар қандай элементи туб кўпайтувчилар кўпайтмасига ёйиладими? Агар ёйилса, бу ёйилма бир қийматли бўладими? Кейинги саволни қуйидагича тушуниш лозим: агар

$$a = p_1p_2 \dots p_k = q_1 \cdot q_2 \dots q_l$$

a элементнинг иккита туб кўпайтувчиларга ёйилмаси бўлса, у ҳолда $k = l$ ва (балки, номерлаш тартиби ўзгартирилганидан сўнг)

$$q_l = p_lc_l, \qquad l = 1, 2, \dots, k,$$

бу ерда c_l— бирнинг бўлувчиси.

Маълум бўлишича, умумий ҳолда ҳар иккала саволга ҳам салбий жавоб берилиши лозим экан. Биз битта мисол билан чекланамиз, чунончи шундай ҳалқани кўрсатамизки, унда гарчанд туб кўпайтувчиларга ёйиш мумкин бўлса ҳам у бир қийматли бўлмайди.

$$\alpha = a + b\sqrt{-3} \qquad (7)$$

кўринишдаги барча комплекс сонларни кўрайлик, бу ерда a ва b бутун сонлар. Барча шундай сонлар нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ҳамда бирни ўз ичига олган ҳалқа ташкил этади; ҳақиқатан ҳам,

$$(a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})=(ac-3bd)+(bc+ad)\sqrt{-3}. \qquad (8)$$

$\alpha=a+b\sqrt{-3}$ соннинг *нормаси* деб бутун мусбат

$$N(\alpha)=a^2+3b^2$$

сонни айтамиз.

(8) га кўра *кўпайтманинг нормаси нормаларнинг кўпайтмасига тенг*, яъни

$$N(\alpha\beta)=N(\alpha)\,N(\beta). \qquad (9)$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$(ac-3bd)^2+3(bc+ad)^2=a^2c^2+9b\,d^2+3b^2c^2+3a^2d^2=$$
$$=(a^2+3b^2)(c^2+3d^2).$$

Агар α сон бизнинг ҳалқамизда бирнинг бўлувчиси бўлса, яъни α^{-1} ҳам (7) кўринишга эга бўлса, у ҳолда (9) бўйича,

$$N(\alpha)\,N(\alpha^{-1})=N(\alpha\alpha^{-1})=N(1)=1$$

ва шунга кўра $N(\alpha)=1$, чунки (α) ва $N(\alpha^{-1})$—бутун мусбат сонлар. Агар $\alpha=a+b\sqrt{-3}$ бўлса, у ҳолда $N(\alpha)=1$ тенгликдан

$$N(\alpha)=a^2+3b^2=1$$

келиб чиқади, лекин бу тенглик $b=0$, $a=\pm 1$ бўлгандагина ўринли бўлади. Шундай қилиб, *бизнинг ҳалқамизда бутун сонлар ҳалқасидаги каби 1 ва —1 сонларигина бирнинг бўлувчилари бўлади ва фақат шу сонларгина бирга тенг бўлган нормага эга.*

Кўпайтманинг нормасига оид бўлган (9) тенглик, албатта, исталган чекли сондаги кўпайтувчилар учун ҳам ўринли бўлади. Бундан *бизнинг ҳалқамиздаги ҳар қандай α сонни чекли сондаги туб кўпайтувчилар кўпайтмасига ёйиш мумкинлигини осонгина келтириб чиқариш мумкин;* бунинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз.

Аммо туб кўпайтувчиларга ёйишнинг бир қийматлигини тасдиқлаш мумкин эмас. Масалан, ушбу

$$4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$

тенгликлар ўринли. Бизнинг ҳалқамизда бирнинг 1 ва —1 сонлардан бошқа бўлувчилари бўлмаганлиги сабабли, $1+\sqrt{-3}$ сон (худди шу каби $1-\sqrt{-3}$ сон ҳам) 2 сондан бирнинг бўлувчиси бўлган кўпайтувчилар билангина фарқ қилиши мумкин эмас. Энди *2, $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$ сонларнинг ҳар бири ҳам кўрилаётган ҳалқада туб бўлишини кўрсатишимиз кифоя.* Ҳақиқатан ҳам, бу учта соннинг ҳар бирини нормаси 4 сонига тенг. α бу сонларнинг исталгани бўлсин ва

$$\alpha=\beta\gamma$$

бўлсин. У ҳолда, (9) га асосан, ушбу учта ҳолнинг бири бўлади:

$$1)\ N(\beta)=4,\ N(\gamma)=1;\ 2)\ N(\beta)=1,\ N(\gamma)=4,\ 3)\ N(\beta)=N(\gamma)=2.$$

Биринчи ҳолда, бизга маълумки, γ сон бирнинг бўлувчиси бўлади, иккинчи ҳолда бирнинг бўлувчиси β бўлади. Учинчи ҳолга келсак, у

$$a^2+3b^2=2$$

тенглик a ва b бутун сонлар бўлганда бажарилмаганлиги сабабли умуман мумкин эмас.

Каррали кўпайтувчилар. Гарчанд биз кўпҳадларни келтирилмас кўпайтувчиларга ёйишни билмасак ҳам (бу юқорида ҳам кўрсатилган эди), берилган кўпҳад каррали кўпайтувчига эгами ёки йўқлигини билишга имкон берувчи ва бу саволга ижобий жавоб бўлганда бу кўпҳадни энди каррали кўпайтувчиларга эга бўлмаган кўпҳадни текширишга келтирувчи методлар мавжуд. Аммо бу методлар асосий майдонга баъзи шартларни қўйишни талаб қилади. Чунончи, ушбу параграфнинг келгусидаги барча мазмуни P майдон 0 характеристикага эга деган шартда баён этилади. Бу шартсиз қуйида исбот қилинадиган каррали кўпайтувчилар ҳақидаги теоремалар ўз кучини йўқотади, шу билан бирга татбиқ нуқтаи назаридан майдонларнинг характеристикаси ноль бўлган ҳол энг муҳимдир, чунки бу ҳол, хусусан, ҳамма сонли майдонларни ўз ичига олади.

Аввало шуни қайд қиламизки, қаралаётган ҳол учун 22-§ да комплекс коэффициентли кўпҳадлар учун киритилган кўпҳаднинг ҳосиласи тушунчаси ва бу тушунчанинг асосий хоссалари ҳам ўз кучини сақлайди[1]. Энди ушбу теоремани исботлайлик:

Агар $p(x)$ кўпҳад $f(x)$ кўпҳаднинг k $(k \geqslant 1)$ каррали келтирилмас кўпайтувчиси бўлса, у ҳолда $p(x)$ бу кўпҳад ҳосиласининг $(k-1)$ каррали келтирилмас кўпайтувчиси бўлади. Хусусан, кўпҳаднинг оддий кўпайтувчиси унинг ҳосиласининг ёйилмасига кирмайди.

Ҳақиқатан ҳам,

$$f(x) = p^k(x)\,g(x) \tag{10}$$

бўлсин, шу билан бирга $g(x)$ энди $p(x)$ га бўлинмайди. (10) тенгликни дифференциаллаб, топамиз:

$$f'(x) = p^k(x)\,g'(x) + kp^{k-1}(x)\,p'(x)\,g(x) =$$
$$= p^{k-1}(x)\,[p(x)\,g'(x) + kp'(x)g\,(x)].$$

Қавс ичида турган иккинчи қўшилувчи $p(x)$ га бўлинмайди; дарҳақиқат, $g(x)$ шартга кўра $p\ x)$ га бўлинмайди, $p'(x)$ кичик даражага эга, яъни у ҳам $p(x)$ га бўлинмайди, бундан эса $p(x)$ кўпҳаднинг келтирилмас эканлиги ҳамда ушбу параграфнинг δ) хоссаси ва 21-§ даги IX хоссага асосан бизнинг даъвоимиз келиб чиқади. Иккинчи томондан, квадрат қавс ичида турган йиғиндининг биринчи қўшилувчиси $p(x)$ га бўлинади ва шунга кўра, бу ҳамма йиғинди $p(x)$ га бўлина олмайди, яъни $p(x)$ кўпайтувчи $f'(x)$ га ҳақиқатан ҳам $k-1$ карра билан киради.

---

[1] Чекли характеристикали майдонлар учун n-даражали кўпҳаднинг ҳосиласи $n-1$-даражага эга бўлади деган даъво ўз кучини йўқотади.

Бизнинг теоремамиздан ва иккита кўпҳаднинг энг катта умумий бўлинувчисини топишнинг юқорида кўрсатилган усулидан, агар кўпҳаднинг келтирилмас кўпайтувчиларга ёйилмаси

$$f(x)=a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \ \dots \ p_l^{k_l}(x) \qquad (11)$$

берилган бўлса, у ҳолда $f(x)$ *кўпҳад билан уни ҳосиласининг энг катта умумий бўлувчиси келтирилмас кўпайтувчиларнинг ушбу*

$$(f(x),\ f'(x)) = p_1^{k_1-1}(x) p_2^{k_2-1}(x) \ \dots \ p_l^{k_l-1}(x), \qquad (12)$$

ёйилмасига эга эканлиги келиб чиқади, бу ерда $k_l = 1$ бўлса, $p_l^{k_l-1}(x)$ кўпайтувчини бир билан алмаштириш лозимлиги тушунарлидир. Хусусан, $f(x)$ *кўпҳад ўзининг ҳосиласи билан ўзаро туб бўлганда, ва фақат шундагина каррали кўпайтувчиларга эга бўлмайди.*

Шундай қилиб, биз берилган кўпҳаднинг каррали кўпайтувчиларининг мавжудлиги ҳақидаги саволга жавоб беришни ўргандик. Бунинг устига, кўпҳаднинг ҳосиласи ҳам, иккита кўпҳаднинг энг катта умумий бўлувчиси ҳам биз P майдонни кўраяпмизми ёки унинг исталган $\overline{P}$ кенгайтмасини кўраяпмизми, бунга боғлиқ бўлмагани учун ҳозиргина исботланган теореманинг натижаси сифатида қуйидагини ҳосил қиламиз:

Агар коэффициентлари ноль характеристикали P майдондан олинган $f(x)$ кўпҳад бу майдон устида каррали кўпайтувчиларга эга бўлмаса, у ҳолда P майдоннинг ҳеч қандай $\overline{P}$ кенгайтмаси устида ҳам унинг каррали кўпайтувчилари бўлмайди.

Хусусан, $f(x)$ кўпҳад P устида келтирилмас бўлиб, $\overline{P}$ эса P майдоннинг бирор кенгайтмаси бўлса, у ҳолда гарчанд $f(x)$ $\overline{P}$ устида энди келтириладиган бўлиши мумкин бўлса ҳам, аммо ($\overline{P}$ устида) келтирилмас кўпҳаднинг квадратига бўлинмайди.

Каррали кўпайтувчиларни ажратиш. Агар $f(x)$ кўпҳад (11) ёйилмаси билан берилган бўлиб, $d_1(x)$ орқали $f(x)$ кўпҳад билан унинг $f'(x)$ ҳосиласининг энг катта умумий бўлувчисини белгиласак, у ҳолда (12) ифода $d_1(x)$ учун ёйилма бўлади. (11) ни (12) га бўлиб,

$$v_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = a_0 p_1(x) p_2(x) \ \dots \ p_l(x),$$

ни ҳосил қиламиз, яъни каррали кўпайтувчиларга эга бўлмаган кўпҳадни ҳосил қиламиз, шу билан бирга $v_1(x)$ учун келтирилмас бўлган ҳар қандай кўпайтувчи $f(x)$ учун ҳам кўпайтувчи бўлади. Бу билан $f(x)$ учун келтирилмас кўпайтувчиларни топиш, уларни умуман айтганда кичик даражали ва ҳар ҳолда оддий кўпайтувчиларнигина ўз ичига олган $v_1(x)$ кўпҳад учун топишга келтирилади. Агар бу масала $v_1(x)$ учун ҳал қилинса, у ҳолда ҳосил қилинган келтирилмас кўпайтувчиларнинг $f(x)$ даги каррасини аниқлаш қолади холос, бунга эса бўлиш алгоритмини қўллаш билан эришилади.

Ҳозиргина баён қилинган методни мураккаблаштириб, каррали кўпайтувчиларга эга бўлмаган бир нечта кўпҳадларни текширишга бирданига ўтиш мумкин. Шу билан бирга бу кўпҳадларнинг келтирилмас кўпайтувчиларини топиш билан биз $f(x)$ учун барча келтирилмас кўпайтувчиларнигина топиб қолмай, балки уларнинг карраларини ҳам билиб оламиз.

(11) ифода $f(x)$ нинг келтирилмас кўпайтувчиларга ёйилмаси бўлсин, шу билан бирга кўпайтувчиларнинг энг юқори карраси s $(s \geqslant 1)$ бўлсин. $F_1(x)$ орқали $f(x)$ кўпҳаднинг барча бир каррали кўпайтувчиларининг кўпайтмасини белгилаймиз. $F_2(x)$ орқали барча икки каррали кўпайтувчиларнинг фақат бир мартадан олинган кўпайтмасини белгилаймиз ва ҳоказо. Ниҳоят, $F_s(x)$ орқали барча s каррали кўпайтувчиларнинг фақат бир мартадан олиналиган кўпайтмасини белгилаймиз, шу билан бирга бирорта j учун $f(x)$ да j каррали кўпайтувчилар бўлмаса, у ҳолда $F_j(x) = 1$ деб белгилаймиз. У ҳолда $f(x)$ кўпҳад $F_k(x)$, $k = 1, 2, .,., s$ кўпҳаднинг k-даражасига қолдиқсиз бўлинади ва (11) ёйилма ушбу

$$f(x) = a_0 F_1(x)\, F_2^2(x)\, F_3^3(x) \,\ldots\, F_s^s(x)$$

кўринишни олади, $d_1(x) = (f(x), f'(x))$ учун (12) ёйилма эса

$$d_1(x) = F_2(x)\, F_3^2(x) \ldots F_s^{s-1}(x)$$

кўринишда ёзиб олинади.

$d_2(x)$ орқали $d_1(x)$ кўпҳад билан унинг ҳосиласининг энг катта умумий бўлувчисини ва умуман $d_k(x)$ орқали $d_{k-1}(x)$ ва $d'_{k-1}(x)$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини белгилаб, биз юқоридаги йўл билан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d_2(x) = F_3(x)\, F_4^2(x) \,\ldots\, F_s^{s-2}(x),$$

$$d_3(x) = F_4(x)\, F_5^2(x) \,\ldots\, F_s^{s-3}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{s-1}(x) = F_s(x),$$

$$d_s(x) = 1.$$

Бу ердан

$$v_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = a_0 F_1(x)\, F_2(x)\, F_3(x) \,\ldots\, F_s(x),$$

$$v_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = F_2(x) \cdot F_3(x) \,\ldots\, F_s(x),$$

$$v_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = F_3(x) \,\ldots\, F_s(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_s(x) = \frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)} = F_s(x),$$

ва ниҳоят юқоридагига асосан

$$F_1(x) = \frac{v_1(x)}{a_0 v_2(x)},\ F_2(x) = \frac{v_2(x)}{v_3(x)}\ \ldots,\ F_s(x) = v_s(x)$$

эканини топамиз

Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг келтирилмас кўпайтувчиларини билишни талаб қилмайдиган усуллардан, чунончи ҳосила олиш, Евклид алгоритми ва бўлиш алгоритмларидан фойдаланиб, биз каррали кўпайтувчиларга эга бўлмаган $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_s(x)$ кўпҳадларни топишимиз мумкин, шу билан бирга $F_k(x)$, $k = 1, \ldots, s$ кўпҳаднинг исталган келтирилмас кўпайтувчиси $f(x)$ учун k каррали бўлади.

Бу ерда баён қилинган методни, албатта, кўпҳадни келтирилмас кўпайтувчиларга ёйиш методи деб ҳисоблаш мумкин эмас, чунки $s = 1$ бўлган ҳол учун, яъни каррали кўпайтувчиларга эга бўлмаган кўпҳадлар учун биз $f(x) = F_1(x)$ тенгликнигина ҳосил қиламиз.

49*-§. Илдизнинг мавжудлик теоремаси

Ўз-ўзидан маълумки, ҳар қандай сонли кўпҳаднинг комплекс сонлар майдонида илдизи мавжуд эканлиги ҳақида 23-§ да исботланган асосий теоремани майдон ихтиёрий бўлган ҳол учун ўтказиш мумкин эмас. Ушбу параграфда комплекс сонлар алгебрасининг юқорида қайд қилинган теоремасини майдонларнинг умумий назариясида маълум даражада ўрнини босувчи теорема исбот қилинади.

P майдон устида $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин. Ушбу саволнинг туғилиши табиий: агар $f(x)$ кўпҳад P майдонда умуман илдизларга эга бўлмаса, у ҳолда P майдоннинг шундай $\overline{P}$ кенгайтмаси топиладимики, бу $\overline{P}$ майдонда $f(x)$ учун камида битта илдиз мавжуд бўлсин? Шу билан бирга $f(x)$ кўпҳаднинг даражаси бирдан катта деб ҳисоблаш мумкин: нолинчи даражали кўпҳадлар учун бу савол маънога эга эмас, биринчи даражали ҳар қандай $ax + b$ кўпҳад эса худди шу P майдоннинг ўзида $-\frac{b}{a}$ илдизга эга. Иккинчи томондан равшанки, $f(x)$ кўпҳад келтирилмас бўлган ҳол билан чегараланиш мумкин; акс ҳолда агар у P устида келтириладиган бўлса, у ҳолда унинг исталган келтирилмас кўпайтувчисининг илдизи $f(x)$ нинг ўзи учун ҳам илдиз бўлиб хизмат қилади.

Бизни қизиқтираётган саволга илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги ушбу теорема жавоб беради:

P майдон устида келтирилмас бўлган ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад учун бу майдоннинг шундай кенгайтмаси мавжудки, бу кенгайтма $f(x)$ нинг илдизини ўз ичига олади. P майдонни ва бу кўпҳаднинг қандайдир илдизини ўз ичига олувчи барча минимал майдонлар ўзаро изоморфдир.

Аввал бу теореманинг иккинчи қисмини исботлайлик.

P майдон устида келтирилмас

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

кўпҳад берилган бўлсин, шу билан бирга $n \geqslant 2$, яъни $f(x)$ кўпҳад P майдоннинг ўзида илдизларга эга эмас. P майдоннинг $f(x)$ нинг α илдизини ўз ичига олувчи $\overline{P}$ кенгайтмаси мавжуд деб фараз қиламиз ва келажакда биз учун зарур бўлган, аммо ўзича ҳам аҳамият касб этувчи ушбу леммани исботлаймиз:

Агар P устида келтирилмас $f(x)$ кўпҳаднинг $\overline{P}$ да ётувчи α илдизи $P[x]$ ҳалқадан олинган бирор $g(x)$ учун ҳам илдиз вазифасини бажарса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $g(x)$ учун бўлувчи бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\overline{P}$ майдон устида $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар $x - \alpha$ умумий бўлувчига эга ва шунинг учун ҳам улар ўзаро туб эмас. Аммо кўпҳадларнинг ўзаро туб бўлмаслик хоссаси майдонни танлашга боғлиқ эмас, шунга кўра P майдонга ўтиш ва бундан олдинги параграфдаги (γ) хоссани қўллаш мумкин.

Энди $\overline{P}$ майдоннинг P майдонни ва α элементни ўз ичига олувчи $P(\alpha)$ минимал қисм майдонини топамиз. Бу майдонга

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{2}$$

кўринишдаги барча элементларнинг кириши очиқ-ойдин кўриниб турибди, бу ерда $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ лар P майдоннинг элементлари. $\overline{P}$ майдоннинг ҳеч қандай элементи (2) кўринишдаги иккита турли ёзувга эга эмас: агар

$$\beta = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

тенглик ҳам ўринли бўлса, шу билан бирга ҳеч бўлмаганда битта k учун $c_k \neq b_k$ бўлса, у ҳолда α

$$g(x) = (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2)x^2 + \ldots + \\ + (b_{n-1} - c_{n-1})x^{n-1}$$

кўпҳаднинг илдизи бўлади, бу эса юқорида исботланган леммага зиддир, чунки $g(x)$ нинг даражаси $f(x)$ нинг даражасидан кичик.

$\overline{P}$ майдоннинг (2) кўринишдаги элементлари қаторига P майдоннинг барча элементлари ҳам ($b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$ бўлганда), шунингдек α элементнинг ўзи ҳам ($b_1 = 1$, $b_0 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$) киради. *(2) кўринишдаги барча элементлар биз излаётган $P(\alpha)$ қисм майдонни ташкил қилишини исботлайлик.* Ҳақиқатан ҳам, агар (2) кўринишдаги ёзувга эга бўлган β ва

$$\gamma = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{n\;1}\alpha^{n-1}$$

элементлар берилган бўлса, $\overline{P}$ майдондаги амалларнинг хоссаларига асосан

$$\beta \pm \gamma = (b_0 \pm c_0) + (b_1 \pm c_1)\alpha + (b_2 \pm c_2)\alpha^2 + \ldots + \\ + (b_{n-1} \pm c_{n-1})\alpha^{n-1},$$

яъни (2) кўринишдаги элементларнинг йиғиндиси ва айирмаси яна худди шу кўринишдаги элемент бўлади.

Агар биз β ва γ ларни кўпайтирсак, α^n ни ва α нинг юқорироқ даражаларини ўз ичига олган ифодаларни ҳосил қиламиз. Аммо (1) дан ва $f(\alpha)=0$ тенгликдан α^n ни, ва шунга кўра α^{n+1}, α^{n+2} ва ҳоказоларни ҳам α элементнинг кичик даражалари орқали ифода қилиш мумкинлиги келиб чиқади. $\beta\gamma$ учун ифода излашнинг энг содда усули қуйидагидан иборат:

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1},$$

$$\psi(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1},$$

бўлсин, бундан $\varphi(\alpha) = \beta$, $\psi(\alpha) = \gamma$, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ кўпҳадларни кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган кўпайтмани $f(x)$ га бўламиз:

$$\varphi(x)\psi(x) = f(x)q(x) + r(x) \qquad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$r(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{n-1}x^{n-1}.$$

(3) тенгликнинг ҳар икки томонидан унинг $x = \alpha$ даги қийматини олиб, қуйидагини топамиз:

$$\varphi(\alpha)\psi(\alpha) = f(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha),$$

яъни $f(\alpha) = 0$ га асосан

$$\beta\gamma = d_0 + d_1\alpha + \dots + d_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Шундай қилиб, (2) кўринишдаги иккита элементнинг кўпайтмаси яна худди шу кўринишдаги элемент бўлади.

Ниҳоят,агар β (2) кўринишдаги элемент бўлиб, шу билан бирга $\beta \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\overline{P}$ майдонда мавжуд бўлган β^{-1} элементни ҳам (2) кўринишда ёзиш мумкин эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $P[x]$ ҳалқадан

$$\varphi(x) = b_0 + b_1(x) + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$$

кўпҳадни оламиз. $\varphi(x)$ нинг даражаси $f(x)$ нинг даражасидан кичик бўлиб, $f(x)$ кўпҳад P устида келтирилмас бўлгани учун $\varphi(x)$ ва $f(x)$ ўзаро туб ва шунинг учун ҳам 21- ва 47-§ ларга асосан $P[x]$ ҳалқада шундай $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадлар мавжудки,

$$\varphi(x)u(x) + f(x)v(x) = 1$$

тенглик ўринли бўлади, шу билан бирга $u(x)$ нинг даражасини n дан кичик деб ҳисоблаш мумкин:

$$u(x) = s_0 + s_1x + \dots + s_{n-1}x^{n-1}.$$

Бундан, $f(\alpha) = 0$ тенгликка асосан,

$$\varphi(\alpha)u(\alpha) = 1$$

келиб чиқади, ва шунинг учун ҳам, $\varphi(\alpha) = \beta$ тенгликка асосан,

$$\beta^{-1} = u(\alpha) = s_0 + s_1\alpha + \ldots + s_{n-1}\alpha^{n-1}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $\overline{P}$ майдоннинг (2) кўринишга эга бўлган элементлари тўплами $\overline{P}$ майдоннинг қисм майдонини ташкил қилади; худди шунинг ўзи изланаётган $P(\alpha)$ майдон бўлади. Сўнгра, биз кўрдикки, (2) кўринишдаги β ва γ элементларнинг кўпайтмасини топиш учун бу элементларнинг α нинг даражалари орқали ифодасининг коэффициентларинигина билишимиз етарли бўлгани сабабли, қуйидаги натижанинг тўғрилигини таъкидлаш мумкин: агар P майдоннинг $\overline{P}$ дан бошқа ҳамда $f(x)$ кўпҳаднинг бирор α' илдизини уз ичига олувчи $\overline{P'}$ кенгайтмаси мавжуд бўлса, ва агар $P(\alpha')$, майдон $\overline{P'}$ майдоннинг P ва α' ларни ўз ичига олувчи минимал қисм майдони бўлса, у ҳолда $P(\alpha)$ ва $P(\alpha')$ майдонлар *изоморф бўлади*, шу билан бирга улар орасида изоморф мослик ўрнатиш учун $P(\alpha)$ нинг (2) кўринишдаги β элементига $P(\alpha')$ даги худди шу коэффициентларга эга бўлган

$$\beta' = b_0 + b_1\alpha' + b_2\alpha'^2 + \ldots + b_{n-1}\alpha'^{n-1}$$

элементни мос қўйиш керак. Шу билан теореманинг иккинчи қисми исботланди.

Бу теореманинг биринчи асосий қисмини исботлашга ўтамиз, юқорида баён қилинган исбот эса бизга қандай йўл тутиш кераклигини кўрсатиб беради. Бизга P майдон устида келтирилмас $n \geqslant 2$ даражали $f(x)$ кўпҳад берилган ва биз P майдоннинг $f(x)$ нинг илдизини ўз ичига олувчи кенгайтмасини тузишимиз керак. Бунинг учун $P(x)$ кўпҳадлар ҳалқасини бутунлигича оламиз ва уни ўзаро кесишмайдиган синфларга қуйидагича ажратамиз: берилган $f(x)$ кўпҳадга бўлинганда бир хил қолдиқ берувчи барча кўпҳадларни битта синфга киритамиз. Бошқача сўз билан айтганда, агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ кўпҳадларнинг айирмалари $f(x)$ га қолдиқсиз бўлинса, улар битта синфга тегишли бўлади.

Ҳосил қилинган синфларни A, B, C ва ҳоказо билан белгилашни шартлашайлик ва синфларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини ушбу табиий усул билан аниқлайлик. Исталган иккита A ва B синфларни оламиз, A синфдан бирор $\varphi_1(x)$ кўпҳадни, B синфдан эса бирор $\psi_1(x)$ кўпҳадни танлаймиз ва $\varkappa_1(x)$ орқали бу кўпҳадларнинг йиғиндиси

$$\varkappa_1(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x),$$

ни, $\theta_1(x)$ орқали эса уларнинг кўпайтмаси

$$\theta_1(x) = \varphi_1(x) \cdot \psi_1(x)$$

ни белгилаймиз. Энди A синфдан исталган бошқа $\varphi_2(x)$ кўпҳадни, B синфдан исталган $\psi_2(x)$ кўпҳадни танлаймиз ҳамда $\varkappa_2(x)$ ва $\theta_2(x)$ орқали мос равишда уларнинг йиғиндисини ва кўпайтмасини белгилаймиз:

$$\varkappa_2(x) = \varphi_2(x) + \psi_2(x),$$
$$\theta_2(x) = \varphi_2(x) \cdot \psi_2(x).$$

Шартга кўра, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ кўпҳадлар битта A синфда ётади, ва шу сабабли уларнинг $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ айирмаси $f(x)$ га қолдиқсиз бўлинади; $\psi_1(x) - \psi_2(x)$ айирма ҳам худди шундай хоссага эга. Бундан

$$\varkappa_1(x) - \varkappa_2(x) = [\varphi_1(x) + \psi_1(x)] - [\varphi_2(x) + \psi_2(x)] =$$
$$= [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + [\psi_1(x) - \psi_2(x)] \qquad (4)$$

айирманинг ҳам $f(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлиниши келиб чиқади. Бу мулоҳаза $\theta_1(x) - \theta_2(x)$ айирма учун ҳам ўринли, чунки

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \varphi_1(x)\,\psi_1(x) - \varphi_2(x) \cdot \psi_2(x) =$$
$$= \varphi_1(x)\,\psi_1(x) - \varphi_1(x)\,\psi_2(x) + \varphi_1(x)\,\psi_2(x) - \varphi_2(x)\,\psi_2(x) =$$
$$= \varphi_1(x)\,[\psi_1(x) - \psi_2(x)] + [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]\,\psi_2(x). \qquad (5)$$

(4) тенглик $\varkappa_1(x)$ ва $\varkappa_2(x)$ кўпҳадларнинг битта синфда ётишини кўрсатади. Бошқа сўз билан айтганда, A синфдаги исталган кўпҳаднинг B синфдаги исталган кўпҳад билан йиғиндиси A ва B синфларнинг „вакиллари“ сифатида қандай кўпҳадлар олинганига боғлиқ бўлмаган, тўла аниқланган C синфга тегишли бўлади; бу синфни A ва B синфларнинг *йиғиндиси* деб атаймиз:

$$C = A + B.$$

Шунга ўхшаш, (5) га асосан, A дан олинган исталган кўпҳаднинг B даги исталган кўпҳадга кўпайтмаси ётган D синф ҳам A ва B синфлардан олинган „вакилларга“ боғлиқ бўлмайди; бу синфни A ва B синфларнинг *кўпайтмаси* деб атаймиз:

$$D = AB.$$

$P[x]$ кўпҳадлар ҳалқасини бўлишимиз туфайли ҳосил бўлган синфлар тўплами юқорида келтирилган қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилганидан сўнг майдонга айланишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, ҳар иккала амал учун ассоциативлик ва коммутативлик қонунларининг ҳамда дистрибутивлик қонунининг ўринли эканлиги бу қонунларнинг $P[x]$ ҳалқада ўринли эканлигидан келиб чиқади, чунки синфлар устидаги амаллар шу синфларда ётувчи кўпҳадлар устидаги амалларга келтирилади. Нолнинг вазифасини, шубҳасиз, $f(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинадиган кўпҳадлардан тузилган синф ўйнайди. Бу синфни *ноль* синф (нолинчи синф) деб атаймиз ва 0 символ билан белгилаймиз $f(x)$ га бўлганда $\varphi(x)$ қолдиқ берувчи кўпҳадлардан тузилган A синф учун қарама-қарши синф вазифасини, $f(x)$ га бўлганда — $\varphi(x)$ қолдиқ берувчи барча кўпҳадлардан тузилган синф ўйнайди. Бундан, синфлар тўпламида бир қийматли айиришнинг бажарилиши келиб чиқади.

Синфлар тўпламида *бўлишнинг* бажарилишини исботлаш учун бир ролини ўйнайдиган синфнинг мавжуд эканлигини кўрсатиш ва ноль синфдан фарқли ҳар қандай синф учун тескари синфнинг мавжудлигини кўрсатиш керак. $f(x)$ га бўлганда 1 қолдиқ берадиган кўпҳадлар синфи, равшанки, бирдан иборат бўлади; бу синфни *бирлик* синф деб атаймиз ва E символ билан белгилаймиз.

Энди бизга ноль синфдан фарқли A синф берилган бўлсин. Демак, A синфнинг вакили сифатида танланган $\varphi(x)$ кўпҳад $f(x)$ га қолдиқсиз бўлинмайди ва $f(x)$ кўпҳаднинг келтирилмаслиги сабабли бу иккита кўпҳад ўзаро туб. Шундай қилиб, $P[x]$ ҳалқада

$$\varphi(x)u(x)+f(x)v(x)=1$$

тенгликни қаноатлантирувчи $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадлар мавжуд, бундан

$$\varphi(x)u(x)=1-f(x)v(x) \tag{6}$$

келиб чиқади.

(6) тенгликнинг ўнг томонини $f(x)$ га бўлганда 1 қолдиқ қолади, яъни у бирлик синф E га тегишли бўлади. Агар $u(x)$ кўпҳад тегишли бўлган синфни биз B орқали белгиласак, у ҳолда (6) тенглик

$$AB=E$$

эканлигини кўрсатади, бундан $B=A^{-1}$. Шу билан ноль синфга тенг бўлмаган ҳар қандай синф учун тескари синфнинг мавжудлиги исботланди, яъни синфлар майдон ташкил этишининг исботи тугалланди.

Бу майдонни $\overline{P}$ билан белгилаймиз ва *у P майдоннинг кенгайтмаси* эканлигини кўрсатамиз. P майдоннинг ҳар қандай a элементига $f(x)$ га бўлганда a қолдиқ берувчи кўпҳадларнинг синфи мос келади; a элементнинг ўзи ҳам нолинчи даражали кўпҳад деб қаралса, шу синфга киради. Бундай махсус кўринишдаги барча синфлар $\overline{P}$ майдонда P майдонга изоморф бўлган қисм майдон ташкил этади. Дарҳақиқат, мосликнинг ўзаро бир қийматли эканлиги равшан; иккинчи томондан, бу синфларнинг вакиллари сифатида P майдоннинг элементларини танлаш мумкин, шу сабабли P даги элементларнинг йиғиндисига (кўпайтмасига) уларга мос келувчи синфларнинг йиғиндиси (кўпайтмаси) мос келади. Демак, келгусида биз P майдоннинг элементлари билан уларга мос келувчи синфларни бир-биридан фарқ қилмасликка ҳаққимиз бор.

Ниҳоят, $f(x)$ га бўлинганда x қолдиқ берувчи кўпҳадлардан ташкил топган синфни X орқали белгилаймиз. Бу синф $\overline{P}$ майдоннинг тайин бир элементидан иборат ва *у $f(x)$ кўпҳад учун илдиз бўлиб хизмат қилишини* кўрсатамиз.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

бўлсин. A_i орқали, юқорида айтилган маънода, P майдоннинг a_i элементига мос келувчи синфни белгилаймиз, $i = 0,1, \ldots, n$ ва $\overline{P}$ майдоннинг

$$A_0X^n + A_1X^{n-1} + \ldots + A_{n-1}X + A_n \qquad (7)$$

элементи нимага тенг эканлигини топамиз. A_i синфларнинг вакиллари сифатида a_i, $i = 0,1, \ldots, n$ элементларни, X синфнинг вакили сифатида x кўпҳадни ҳисоблаб ва синфларни қўшиш ва кўпайтириш таърифларидан фойдаланиб, $f(x)$ кўпҳаднинг ўзи ҳам (7) синфга тегишли эканлигини ҳосил қиламиз.

Аммо $f(x)$ нинг ўзи ўзига қолдиқсиз бўлинади ва шу сабабли (7) синф ноль синф эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, (7) да A_i синфларни P майдонда уларга мос келувчи a_i элементлар билан алмаштириб, $\overline{P}$ майдонда

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

тенглик ўринли эканлигини ҳосил қиламиз, яъни X синф ҳақиқатан ҳам $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи экан.

Шу билан илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги теореманинг исботи тугалланади. P майдон сифатида ҳақиқий сонлар майдонини олиб ва $f(x) = x^2 + 1$ деб фараз қилиб, биз комплекс сонлар майдонини тузишнинг яна битта усулини ҳосил қиламиз.

Илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан 24-§ да комплекс сонлар алгебрасининг асосий теоремасидан келтириб чиқарилган натижаларга ўхшаш натижаларни келтириб чиқариш мумкин. Аввал қуйидаги изоҳни берамиз. $f(x)$ кўпҳаднинг ҳар қандай $x - c$ чизиқли кўпайтувчиси келтирилмас бўлгани учун бу чизиқли кўпайтувчи $f(x)$ нинг келтирилмас кўпайтувчиларга ягона ёйилмасига кириши шарт.

Аммо $f(x)$ ни келтирилмас кўпайтувчиларга ёйилмасидаги чизиқли кўпайтувчиларнинг сони шу кўпҳаднинг даражасидан ортиқ бўлмайди. Биз ушбу натижага келамиз:

n-даражали $f(x)$ кўпҳад P майдонда, гарчи ҳар бир илдизни унинг карраси қанча бўлса, шунча марта ҳисоблаганда ҳам энг кўпи билан n та илдизга эга бўлиши мумкин.

P майдон устида n-даражали $f(x)$ кўпҳад учун *ёйилиш майдони* деб P майдоннинг шундай Q кенгайтмасига айтамизки, бу кенгайтмада $f(x)$ учун (каррали илдизларни, уларнинг карраси қанча бўлса, шунча марта ҳисоблаганда) n та илдиз мавжуд бўлади. Демак, Q майдон устида $f(x)$ кўпҳад чизиқли кўпайтувчиларга ёйилади, шу билан бирга Q майдоннинг кейинги ҳеч қандай кенгайтмалари $f(x)$ учун янги илдизларнинг ҳосил бўлишига олиб келмайди.

$P[x]$ ҳалқадан олинган ҳар қандай $f(x)$ кўпҳад учун P майдон устида ёйилиш майдони мавжуд.

Ҳақиқатан ҳам, агар n-даражали ($n \geqslant 1$) $f(x)$ кўпҳад P майдоннинг ўзида n та илдизга эга бўлса, у ҳолда P изланаётган ёйилиш майдонидан иборат бўлади. Агар $f(x)$ кўпҳад P устида чизиқли кўпайтувчиларга ажралмаса, у ҳолда унинг чизиқли бўлмаган келтирилмас кўпайтувчиларидан бири $\varphi(x)$ ни оламиз ва илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага асосан P ни $\varphi(x)$ нинг илдизини ўз ичига олган P' майдонгача кенгайтирамиз. Агар P' устида $f(x)$ кўпҳад чизиқли кўпайтувчиларга ҳали ҳам ажралмаса, у ҳолда P' майдонни яна кенгайтириб, чизиқли бўлмаган келтирилмас кўпайтувчилардан қолган бирортаси учун илдиз вужудга келтирамиз. Чекли сондаги қадамдан кейин, биз шубҳасиз, $f(x)$ учун ёйилиш майдонига келамиз.

Албатта, $f(x)$ жуда кўп турли ёйилиш майдонларига эга бўлиши мумкин. P майдонни ва $f(x)$ кўпҳаднинг n та илдизини ўз ичига олувчи (бу ерда n — бу кўпҳаднинг даражаси) барча минимал майдонлар ўзаро изоморф эканлигини исботлаш мумкин эди. Аммо биз бу даъводан фойдаланмаймиз ва шунинг учун унинг исботини келтирмаймиз.

Каррали илдизлар. Олдинги параграфда 0 характеристикали P майдон устида $f(x)$ кўпҳад ўзининг ҳосиласи билан ўзаро туб бўлганда ва фақат шундагина каррали илдизга эга эмаслиги исботланган эди, шу билан бирга $f(x)$ нинг P майдон устида каррали кўпайтувчиларга эга эмаслиги, ундай кўпайтувчиларнинг P майдоннинг исталган $\bar{P}$ кенгайтмасида ҳам мавжуд бўлмаслигини келтириб чиқаришини қайд қилган эдик. Буни $\bar{P}$ майдон $f(x)$ учун бирор ёйилиш майдони бўлган ҳол учун қўллаб ва каррали илдиз таърифини ёдга олиб, ушбу натижага келамиз:

Агар 0 характеристикали P майдон устида $f(x)$ кўпҳад берилган ёйилиш майдонида каррали илдизларга эга бўлмаса, у ўзининг $f'(x)$ ҳосиласи билан ўзаро туб бўлади. Аксинча, агар $f(x)$ ўзининг ҳосиласи билан ўзаро туб бўлса, у ўзининг ёйилиш майдонларининг ҳеч қайсисида каррали илдизларга эга эмас.

Бундан, хусусан, 0 *характеристикали P майдон устида келтирилмас $f(x)$ кўпҳад бу майдоннинг ҳеч қайси кенгайтмасида каррали кўпайтувчиларга эга эмаслиги келиб чиқади.* Чекли характеристикали майдонлар учун майдонларнинг умумий назариясида катта роль ўйнайдиган бу даъво ўринли бўлмайди.

Пировардида шуни таъкидлаймизки, *ихтиёрий майдон бўлган ҳол учун ҳам Виет формуласи ўринли бўлади* (24-§ га қаранг), бу ҳолда кўпҳаднинг илдизлари бу кўпҳаднинг бирор ёйилиш майдонидан олинади.

50*-§. Рационал касрлар майдони

25-§ *да баён этилган рационал касрлар назарияси ихтиёрий асосий майдон учун ҳам тўла-тўкис сақланади.* Аммо ҳақиқий сонлар майдонидан ихтиёрий P майдонга ўтишда $\frac{f(x)}{g(x)}$ ифодага x ўзгарувчининг функцияси деб қараш ярамайди, чунки бу нуқтаи назарнинг ҳатто кўпҳадлар учун ҳам ўринли эмаслиги бизга аввалдан аёндир. Олдимизда бу ифодаларга коэффициентлар ихтиёрий P майдонга тегишли бўлган ҳолда қандай маъно бериш кераклигини аниқлаш вазифаси турибди. Аниқроғи биз $P[x]$ кўпҳадлар ҳалқасини ўз ичига олувчи майдонни тузмоқчимиз, шу билан бирга бу янги майдонда аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари кўпҳадлар учун қўлланганда $P[x]$ ҳалқадаги амаллар билан уст-ма-уст тушсин: қисқаси $P[x]$ ҳалқа бу янги майдоннинг қисм ҳалқаси бўлиши лозим. Иккинчи томондан, бу янги майдоннинг ҳар қандай элементи иккита кўпҳаднинг (бу майдонда аниқланган бўлиш маъносида) бўлинмаси шаклида ифодалансин. Энди ҳар қандай P учун бундай майдонни ясаш мумкинлигини кўрсатамиз; уни $P(x)$ орқали белгиланади (номаълум кичик қавс ичига олинган!) ва P майдон устида *рационал касрлар майдони* деб аталади.

Аввало, $P[x]$ ҳалқа бирорта Q майдоннинг қисм ҳалқаси бўлсин деб фараз қиламиз. Агар $f(x)$ ва $g(x)$, $P[x]$ дан олинган ихтиёрий кўпҳадлар, шу билан бирга $g(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда Q майдонда $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг бўлинмасига тенг бўлган бир қийматли аниқланган элемент мавжуд. Бу элементни майдон бўлган ҳолдаги каби $\frac{f(x)}{g(x)}$ орқали белгилаб, бўлинманинг таърифига асосан

$$f(x)=g(x\cdot\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

тенгликни ёза оламиз, бу ерда кўпайтмани Q майдондаги кўпайтириш маъносида тушуниш лозим. Баъзан айрим $\frac{f(x)}{g(x)}$ ва $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ бўлинмалар Q майдоннинг бир хил элементларидан иборат бўлиб қолиши мумкин; бунинг шарти касрлар тенглигининг одатдаги шартидан иборат бўлади:

Агар $f(x)\ \psi(x)=\varphi(x)\ g(x)$ бўлса ва фақат шундагина $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\alpha$ бўлса, (1) га кўра

$$f(x)=g(x)\,\alpha,\ \ \varphi(x)=\psi(x)\,\alpha$$

бўлади, бундан

$$f(x)\cdot\psi(x)=g(x)\,\psi(x)\alpha=g(x)\,\varphi(x).$$

Аксинча, агар $P[x]$ ҳалқадаги кўпайтириш маъносида $f(x)\,\psi(x)=$ $=g(x)\,\varphi(x)=u(x)$ бўлса, у ҳолда Q майдонга ўтиб, биз

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{g(x)\,\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Сўнгра, осонликча кўриш мумкинки, Q нинг $P[x]$ дан олинган кўпҳадларнинг бўлинмасидан иборат бўлган исталган элементларининг йиғиндисини ва кўпайтмасини яна шундай бўлинма шаклида ёзиш мумкин, шу билан бирга касрларни қўшиш ва кўпайтиришнинг одатдаги қоидалари бу ҳолда ҳам ўринли бўлади:

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\,\psi(x)+g(x)\,\varphi(x)}{g(x)\,\psi(x)}, \tag{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}. \tag{3}$$

Дарҳақиқат, ҳар қайси тенгликнинг иккала томонини $g(x)\,\psi(x)$ кўпайтмага кўпайтириб ва (1) ни қўллаб, биз $P[x]$ ҳалқада ўринли бўлган тенгликларни ҳосил қиламиз. Энди (2) ва (3) тенгликларнинг ўринлилиги Q майдонда нолнинг бўлувчилари йўқлиги туфайли ҳосил бўлган тенгликларнинг ҳар икки томонини нолдан фарқли $g(x)\,\psi(x)$ элементга тенгликларни ўзгартирмай қисқартириш мумкин эканлигидан келиб чиқади.

Бу дастлабки мулоҳазалар бизга $P(x)$ майдонни тузишда қайси йўл билан боришимиз кераклигини кўрсатиб беради. Ихтиёрий P майдон ва унинг устида $P[x]$ кўпҳадлар ҳалқаси берилган бўлсин. Биз $f(x)$, $g(x)$ (бу ерда $g(x)\neq 0$) кўпҳадларнинг ҳар қандай тартибланган жуфтига *сурати $f(x)$ ва махражи $g(x)$ бўлган рационал каср* деб аталувчи $\frac{f(x)}{g(x)}$ символни мос қўямиз. Бу кўпҳадларнинг берилган жуфтига мос келувчи символ холос, чунки $P[x]$ ҳалқанинг ўзида кўпҳадларни бўлиш, умуман олганда, бажарилмайди, $P[x]$ ҳалқа эса ҳали ҳеч қандай майдонда ётмайди; ҳатто $g(x)$ кўпҳад $f(x)$ нинг бўлувчиси бўлган тақдирда ҳам янги $\frac{f(x)}{g(x)}$ символни $f(x)$ ни $g(x)$ га бўлишдан ҳосил бўладиган бўлинмадан иборат бўлган кўпҳаддан ҳозирча фарқ қилиш керак.

Агар $P[x]$ ҳалқада $f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)$ тенглик ўринли бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ва $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ рационал касрларни *тенг* деймиз:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}. \tag{4}$$

Шубҳасиз, ҳар қандай касрнинг ўзи ўзига тенг, шунингдек, агар бирор каср бошқасига тенг бўлса, иккинчиси ҳам биринчисига тенг бўлади. Бу тенглик тушунчасининг транзитивлигини исботлайлик. (4) ва

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{u(x)}{v(x)} \tag{5}$$

тенгликлар берилган бўлсин. $P[x]$ ҳалқада уларга тенг кучли бўлган

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x),\quad \varphi(x)v(x)=\psi(x)u(x)$$

тенгликлардан

$$f(x)v(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)v(x)=g(x)u(x)\psi(x)$$

келиб чиқади ва шу сабабли нолга тенг бўлмаган (касрлардан бирининг махражи сифатида) $\psi(x)$ кўпҳадга қисқартиргандан сўнг,

$$f(x)v(x)=g(x)u(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бундан касрларнинг тенглик таърифига асосан

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Берилган бирор касрга тенг бўлган ва тенгликнинг транзитивлигига асосан ўзаро тенг бўлган барча касрларни энди битта синфга бирлаштирамиз. Агар бирор синфда бошқа синфга тегишли бўлмаган камида битта каср мавжуд бўлса, у ҳолда тенгликнинг транзитивлигидан бу икки синфнинг бирорта ҳам умумий элементга эга эмаслиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, $P[x]$ ҳалқадан олинган кўпҳадлар ёрдамида ифодаланган барча рационал касрлар тўплами ўзаро тенг бўлган касрларнинг кесишмайдиган синфларига ажралади. Биз бу тенг касрлар синфларининг тўпламида алгебраик амалларни шундай аниқлайликки, натижада у майдон бўлсин. Бунинг учун биз рационал касрлар устида алгебраик амалларни аниқлаймиз ва ҳар гал қўшилувчиларни (ёки кўпайтувчиларни) уларга тенг бўлган касрлар билан алмаштириш йиғиндини (ёки кўпайтмани) ҳам тенг каср билан алмаштиришини текширамиз. Бу эса тенг касрлар синфларининг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳақида сўз юритишга имкон беради.

Даставвал, келгусида бир неча марта қўлланиладиган ушбу мулоҳазани келтирамиз: *агар рационал касрнинг сурат ва махражини нолдан фарқли битта кўпҳадга кўпайтирилса ёки бўлмаса исталган умумий кўпайтувчига қисқартирилса, у тенг касрга айланади.*

Дарҳақиқат,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\,h(x)},$$

чунки $P[x]$ ҳалқада

$$f(x)\,[g(x)\,h(x)] = g(x)\,[\,f(x)\,h(x)].$$

Рационал касрларни қўшишни биз (2) формула орқали аниқлаймиз; чунки $g(x) \neq 0$ ва $\psi(x) \neq 0$ дан $g(x)\psi(x) \neq 0$ келиб чиқади, у ҳолда бу формуланинг ўнг томони ҳақиқатан ҳам рационал каср бўлади. Сўнгра, агар

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0(x)}{g_0(x)}, \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}$$

берилган бўлса, яъни

$$f(x)\,g_0(x) = g(x)\,f_0(x), \quad \varphi(x)\,\psi_0(x) = \psi(x)\,\varphi_0(x) \tag{6}$$

бўлса, у ҳолда (6) тengликлардан биринчисининг иккала томонини $\psi(x)\,\psi_0(x)$ га, иккинчисининг иккала томонини $g(x)g_0(x)$ га кўпайтириб, сўнгра бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб,

$$[f(x)\,\psi(x) + g(x)\,\varphi(x)]\,g_0(x)\,\psi_0(x) =$$
$$= [f_0(x)\,\psi_0(x) + g_0(x)\,\varphi_0(x)]\,g(x)\,\psi(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу эса

$$\frac{f(x)\,\psi(x) + g(x)\,\varphi(x)}{g(x)\,\psi(x)} = \frac{f_0(x)\,\psi_0(x) + g_0(x)\,\varphi_0(x)}{g_0(x)\,\psi_0(x)}$$

тенгликка тенг кучлидир.

Шундай қилиб, агар бир-бирига ўзаро тенг бўлган касрларнинг иккита синфи берилган бўлса, у ҳолда бу синфлардан бирининг исталган касри билан иккинчи синфдаги исталган касрнинг йиғиндилари бир-бирлари билан ўзаро тенг, яъни улар тайин бир учинчи синфда ётади. Бу синф берилган икки синфнинг *йиғиндиси* дейилади.

Бу қўшишнинг коммутативлиги (2) дан бевосита келиб чиқади, ассоциативлиги эса қуйидагича исботланади:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)\psi(x)v(x)+g(x)\varphi(x)v(x)+g(x)\psi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)v(x)+\psi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}\right].$$

Касрлар тенглиги таърифидан барча $\frac{0}{g(x)}$ кўринишдаги касрларнинг, яъни сурати нолга тенг бўлган касрларнинг ўзаро тенглиги ва улар тенг касрларнинг тўла синфини ташкил этиши ҳеч қандай қийинчиликсиз келиб чиқади. Бу синфни биз ноль синф (*нолинчи* синф) деб атаймиз ва у бизнинг қўшишда ноль ролини ўйнашини исботлаймиз.. Ҳақиқатан ҳам, агар ихтиёрий $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ каср берилган бўлса у ҳолда

$$\frac{0}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{0\cdot\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Ўнг томони ноль синфга тегишли бўлган ушбу

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g^2(x)},$$

тенгликдан $\frac{-f(x)}{g(x)}$ касрга тенг касрлар синфи $\frac{f(x)}{g(x)}$ касрга тенг касрлар синфи учун *қарама-қарши* синф эканлиги келиб чиқади. Бундан, бизга маълумки, бир қийматли *айириш* амалининг бажарилиши келиб чиқади.

Рационал касрларни *кўпайтиришни* биз (3) формула орқали аниқлаймиз, шу билан бирга $g(x)\psi(x)\neq 0$ га кўра, бу формуланинг ўнг томони ҳақиқатан ҳам рационал каср бўлади. Сўнгра, агар

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)},\quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

яъни

$$f(x)g_0(x)=g(x)\cdot f_0(x),\ \varphi(x)\psi_0(x)=\psi(x)\varphi_0(x)$$

бўлса, у ҳолда бу сўнгги тенгликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб,

$$f(x)g_0(x)\varphi(x)\psi_0(x)=g(x)f_0(x)\psi(x)\varphi_0(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу эса

$$\frac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_0(x)\varphi_0(x)}{g_0(x)\psi(x)}$$

тенгликка тенг кучлидир. Шундай қилиб, синфлар йиғиндисига юқорида берилган таърифга қиёс қилиб, бир-бирига ўзаро тенг касрлар синфларининг *кўпайтмаси* ҳақида сўз юритиш мумкин.

Бу кўпайтманинг коммутативлиги ва ассоциативлиги (3) дан бевосита келиб чиқади, дистрибутивлик қонунининг ўринлилиги эса қуйидагича исботланади:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{[f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)]\,u(x)}{g(x)\psi(x)\,v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)\,u(x)+g(x)\varphi(x)\,u(x)}{g(x)\psi(x)\,v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)\psi(x)\,u(x)\,v(x)+g(x)\varphi(x)\,u(x)\,v(x)}{g(x)\psi(x)\,v^2(x)}=\frac{f(x)\,u(x)}{g(x)\,v(x)}+$$

$$+\frac{\varphi(x)\,u(x)}{\psi(x)\,v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}.$$

$\frac{f(x)}{f(x)}$ кўринишдаги касрлар, яъни сурати махражига тенг бўлган касрларнинг ҳаммаси ўзаро тенг ва улар алоҳида синфни ташкил этади. Бу синф **бирлик синф** деб аталади ва бизнинг кўпайтиришимизда бир ролини ўйнайди:

$$\frac{f(x)}{f(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\varphi(x)}{f(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Ниҳоят, агар $\frac{f(x)}{g(x)}$ каср ноль синфга тегишли бўлмаса, яъни $f(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{g(x)}{f(x)}$ каср мавжуд бўлади.

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{f(x)\,g(x)}{g(x)\,f(x)}$$

бўлгани учун ҳамда бу тенгликнинг ўнг томони бирлик синфга тегишли бўлгани сабабли, $\frac{g(x)}{f(x)}$ касрга тенг бўлган касрлар синфи $\frac{f(x)}{g(x)}$ касрга тенг бўлган касрлар синфи учун *тескари* синф бўлади. Бундан бир қийматли **бўлишнинг** бажарилиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, *коэффициентлари P майдондан олинган, бир-бирига ўзаро тенг бўлган рационал касрлар синфлари биз таърифлаган амалларга нисбатан коммутатив майдон ташкил этади.* Бу майдон изланаётган $P(x)$ майдондир. Аммо яна шу билан бирга тузилган майдонда $P[x]$ ҳалқага изоморф бўлган қисм ҳалқа мавжудлигини ва майдоннинг ҳар қандай элементи шу қисм ҳалқага тегишли бўлган икки элементнинг бўлинмаси (нисбати) шаклида ифодаланиши мумкин эканлигини исботлашимиз керак.

Агар $P[x]$ ҳалқадаги ихтиёрий $f(x)$ кўпҳадга $\frac{f(x)}{1}$ касрга тенг бўлган рационал касрлар синфини мос келтирсак (барча касрлар ичида, равшанки, махражи бирга тенг бўлган касрлар ҳам ётади), у ҳолда $P[x]$ ҳалқани биз тузган майдон ичига ўзаро бир қийматли аксланишини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{f(x)}{1}=\frac{\varphi(x)}{1}$$

тенгликдан $f(x)\cdot 1=1\cdot\varphi(x)$, яъни $f(x)=\varphi(x)$ келиб чиқар эди. Бу аксланиш ҳатто изоморф эканлигини ушбу

$$\frac{f(x)}{1}+\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 1}{1^2}=\frac{f(x)+g(x)}{1},$$

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot g(x)}{1}$$

тенгликлар кўрсатади.

Шундай қилиб, $\frac{f(x)}{1}$ *кўринишдаги касрларга тенг бўлган касрлар синфлари бизнинг майдонда* $P[x]$ *ҳалқага изоморф бўлган қисм ҳалқа ташкил этади.* Шу сабабли, $\frac{f(x)}{1}$ касрни $f(x)$ орқали белгилаб қўя қолиш мумкин. Ниҳоят, $g(x)\neq 0$ бўлганда, $\frac{1}{g(x)}$ касрга тенг бўлган касрлар синфи $\frac{g(x)}{1}$ касрга тенг бўлган касрлар синфига тескари бўлгани учун

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

тенгликдан *майдонимизнинг барча элементларини* $P[x]$ *ҳалқадаги кўпҳадларнинг* (шу майдонда аниқланган амаллар маъносида) *бўлинмаси деб қараш мумкин.*

Биз ихтиёрий P майдон устида $P(x)$ рационал касрлар майдонини туздик. Кўпҳадлар ҳалқаси ўрнига бутун сонлар ҳалқасини олиб, худди шу усул билан рационал сонлар майдонини тузиш мумкин. Бу икки ҳолни бирлаштириб ва юқоридаги каби усулни қўллаб, нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган умуман ҳар қандай коммутатив ҳалқа бирор майдоннинг қисм ҳалқаси эканлиги ҳақидаги теоремани исботлаш мумкин эди.

ЎН БИРИНЧИ БОВ

БИР НЕЧТА НОМАЪЛУМНИНГ КЎПҲАДЛАРИ

51-§. Бир нечта номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси

Кўпинча битта номаълумга эмас, балки иккита, учта, умуман бир нечта номаълумга боғлиқ бўлган кўпҳадларни кўришга тўғри келади. Масалан, китобнинг дастлабки бобларида бундай кўпҳадларнинг мисоллари сифатида чизиқли ва квадратик формалар ўрганилган эди. Умуман, *n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумнинг бирор P майдон устида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳади* деб коэффициентлари P майдондан олинган $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ кўринишдаги ҳадларнинг чекли йиғиндисига айтилади, бу ерда барча $k_i \geqslant 0$; шу билан бирга $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад ўхшаш ҳадларга эга эмас ва нолдан фарқли коэффициентли ҳадларгина иштирок этади деб фараз қилиниши табиий. Агар n та номаълумнинг иккита $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳадларининг бир хил ҳадлари олдидаги коэффициентлари тенг бўлса, улар *тенг* (ёки *айнан тенг*) деб ҳисобланади.

Агар P майдон устида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад берилган бўлса, у ҳолда унинг *x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ номаълумга нисбатан даражаси* деб бу кўпҳад ҳадларига кирган x_i нинг энг катта даража кўрсаткичига айтилади. Тасодифан бу даража 0га тенг бўлиб қолиши мумкин, бунда f кўпҳад n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумнинг кўпҳади деб ҳисобланса-да, ҳақиқатда x_i номаълум унинг ифодасига кирмайди.

Иккинчи томондан, агар биз

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

ҳаднинг даражаси деб $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ сонни, яъни номаълумлар даражаларининг йиғиндисини айтсак, у ҳолда $f(x_1, x_2 \dots, x_n)$ *кўпҳаднинг даражаси* (яъни номаълумларнинг биргаликдаги даражаси) деб уни ҳадларининг энг катта даражасига айтилади. Жумладан, бир номаълумнинг кўпҳадлари бўлган ҳолдаги каби, нолинчи даражали кўпҳадлар P майдонининг нолдан фарқли элементларидангина иборат бўлади. Иккинчи томондан, бир номаълумнинг кўпҳадлари бўлган ҳолдаги каби n номаълумнинг кўпҳадлари ичида ноль даражаси аниқланмаган ягона кўпҳаддан иборат бўлади. Кўпҳад умумий ҳолда энг юқори даражали бир нечта ҳадга эга бўлиши мумкин ва шунинг учун ҳам кўпҳаднинг (даражаси бўйича) энг юқори ҳади ҳақида гапириш мумкин эмас.

n та номаълумнинг P майдон устида кўпҳадлари учун қуйидаги усул билан қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилади. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳадларнинг *йиғиндиси* деб коэффициентлари f ва g кўпҳадлар мос коэффициентларининг йиғиндиларидан иборат бўлган кўпҳадга айтилади; шу билан бирга, агар бирор ҳад f, g кўпҳадларнинг фақат биттасига кирган бўлса, иккинчи кўпҳаднинг шу ҳади олдидаги коэффициенти нолга тенг деб олиниши тушунарлидир. Иккита „бирҳаднинг“ кўпайтмаси ушбу

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \cdot bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} = (ab)x_1^{k_1+l_1} x_2^{k_2+l_2} \dots x_n^{k_n+l_n}$$

тенглик орқали аниқланади, шундан сўнг $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳадларнинг *кўпайтмаси* ҳадма-ҳад кўпайтириш ва ҳосил бўлган ўхшаш ҳадларни ихчамлаш натижаси сифатида аниқланади.

Амалларни бундай аниқлашда n та номаълумнинг P майдон устида кўпҳадлари тўплами коммутатив ҳалқага айланади, шу билан бирга бу ҳалқа нолнинг бўлувчиларини ўз ичига олмайди. Ҳақиқатан ҳам, $n = 1$ да бизнинг таърифларимиз 20-§ да бир номаълумнинг кўпҳадлари учун берилган таърифларга мос келади. Коэффициентлари P майдондан олинган $n-1$ та $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ номаълумнинг кўпҳадлари нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ҳалқа ташкил этиши исботланган бўлсин. n та $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ номаълумнинг ҳар қандай кўпҳадини коэффициентлари $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ номаълумнинг кўпҳадлари бўлган x_n номаълумнинг кўпҳади деб ягона усул билан ифодалаш мумкин; аксинча, коэффициентлари $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ номаълумнинг P майдон устида кўпҳадлари ҳалқасидан олинган x_n нинг ихтиёрий кўпҳадини худди шу P майдон устида барча $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ номаълумлардан тузилган кўпҳад деб қарашимиз албатта мумкин. Биз ҳосил қилган n та номаълумнинг кўпҳадлари билан $n-1$ та номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси устида бир номаълумнинг кўпҳадлари орасидаги ўзаро бир қийматли мослик қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан изоморф мослик эканлиги ҳеч қандай қийинчиликсиз текширилади. Исботланаётган даъво энди $n-1$ та номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси устида бир номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқа ташкил қилиши ва у нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ҳалқа устида бир номаълумли кўпҳадлар ҳалқаси сифатида ўзи ҳам нолнинг бўлувчиларига эга эмаслигидан келиб чиқади (47-§ га қаранг).

Шундай қилиб, биз *P майдон устида n та номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси* мавжуд эканлигини исботладик; бу ҳалқа $P\,|x_1\ x_2, \dots, x_n|$ символ билан белгиланади.

Қуйидаги мулоҳазалар n та номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқасига бирмунча бошқа нуқтаи назар билан қарашга имкон беради. P майдон бирор L коммутатив ҳалқага қисм ҳалқа сифатида кирсин. L да n та $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ элементни оламиз ва L нинг бу элементларини ва P майдоннинг ҳаммасини ўз ичига олган L' минимал қисм ҳалқани, яъни P майдонга $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ элементларни *қўшиб олишдан* ҳосил бўлган қисм ҳалқани топамиз. L' қисм ҳалқа L ҳалқанинг $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ элементлари ва P майдоннинг элементлари орқали қўшиш, кўпайтириш ва айириш амаллари ёрдамида ифода этиладиган барча элементларидан ташкил топган. Бу элементлар L ҳалқанинг $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларнинг коэффициентлари P дан олинган кўпҳадлари кўринишида (L да ўринли бўлган амаллар ёрдамида) ёзилиши мумкин бўлган элементларининг худди ўзидан иборат, шу билан бирга бу элементлар L ҳалқанинг элементлари сифатида худди n та номаълумнинг кўпҳадларини юқорида кўрсатилган қўшиш ва кўпайтириш қоидалари бўйича ўзаро қўшилиши ва кўпайтирилишини осонгина кўриш мумкин. Албатта, L' қисм ҳалқанинг берилган β элементи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларнинг коэффициентлари P майдондан олинган кўпҳадлари кўринишида, умуман олганда кўпгина турли ифодага эга бўлиши мумкин Агар L' даги ҳар қандай β учун бундай ифода бир қийматли бўлса, яъни агар $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларнинг турли кўпҳадлари L' ҳалқанинг (ва демак, L ҳалқанинг турли элементларидан иборат бўлса, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ элементлар системаси P майдон устида *алгебраик эркли*[1] акс ҳолда эса *алгебраик боғлиқ* система дейилади. Бундан ушбу хулосани келтириб чиқариш мумкин.

Агар P майдон L коммутатив ҳалқанинг қисм ҳалқаси бўлса ва агар L нинг $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ элементлар системаси P устида алгебраик эркли бўлса, у ҳолда L ҳалқанинг P' майдонга $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ элементларни қўшиб олишдан вужудга келтирилган L' қисм ҳалқаси $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ кўпҳадлар ҳалқасига изоморф бўлади. n та номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқаси $P|x_1 x_2, \dots, x_n]$ нинг бошқа хоссаларидан қуйидагисини кўрсатиб ўтайлик: бу ҳалқани P майдон устида n та номаълумнинг $P|x_1, x_2, \dots, x_n|$ рационал касрлари майдонига киритиш мумкин. Бу майдоннинг ихтиёрий элементини

---

[1] $n = 1$ бўлган ҳол учун мос келувчи тушунчалар 48-§ да киритилган эди; P майдон устида ҳозиргина берилган таъриф маъносида алгебраик эркли бўлган α элемент у ерда P устида трансцендент, акс ҳолда эса P устида алгебраик деб аталган эди.

$\frac{f}{g}$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда f ва g лар $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ҳалқанинг элементлари, шу билан бирга $f\psi = g\varphi$ бўлганда ва фақат шу ҳолда $\frac{f}{g} = \frac{\varphi}{\psi}$ бўлади. Бу рационал касрларни қўшиш ва кўпайтириш шундай қоидалар ёрдамида бажариладики, бу қоидалар 45-§ да кўрсатилганига асосан ихтиёрий майдонда бўлинмалар учун ҳам ўринли бўлади. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ майдоннинг мавжудлигини исботи 50-§ да $n = 1$ бўлган ҳол учун қандай бажарилган бўлса, худди шундай бўлади.

Бир нечта номаълумнинг кўпҳадлари учун биз 5 ва 10-бобларда бир номаълумнинг кўпҳадлари учун ўрганган бўлиниш назариясини умумлаштирувчи назарияни яратишимиз мумкин. Аммо бир нечта номаълумнинг кўпҳадлари ҳалқасини синчиклаб текшириш бизнинг вазифамизга кирмаганлиги сабабли биз кўпҳадни келтирилмас кўпайтувчиларга ёйиш масаласи билангина чекланамиз.

Аввало қуйидаги тушунчани киритамиз: агар $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳаднинг барча ҳадлари бир хил s даражага эга бўлса, бундай кўпҳад *бир жинсли кўпҳад* ёки қисқача *s-даражали форма дейилади; чизиқли* ва *квадратик формалар* бизга аввалдан маълум, сўнгра ҳар бир ҳадидаги номаълумларнинг биргаликдаги даража кўрсаткичи 3 га тенг бўлган куб формаларни ҳам кўриш мумкин ва ҳоказо: n номаълумнинг ихтиёрий кўпҳади шу номаълумлардан ташкил топган бир нечта, аммо ҳар хил даражали формаларнинг йиғиндиси шаклида бир қийматли тасвирланиши мумкин: қидирилаётган тасвирни ҳосил қилиш учун бир хил даражага эга бўлган барча ҳадларни бир жойга тўплаш кифоя. Масалан, тўртинчи даражали $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2^2 - 7x_1^2x_3^2 + x_2 - 5x_1x_2x_3 + x_1^4 - 2x - 6 + x_3^3$ кўпҳад тўртинчи даражали $x^4 - 7x_1^2x_3^2$ форма, куб $3x_1x_2^2 - 5x_1x_2x_3 + x_3^3$ форма, чизиқли $x_2 - 2x_3$ форма ва озод ҳад -6 (нолинчи даражали форма) ларнинг йиғиндисидан иборат бўлади.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз:

n номаълумнинг нолдан фарқли иккита кўпҳади кўпайтмасининг даражаси бу кўпҳадлар даражаларининг йиғиндисига тенг.

Аввало, бизга s-даражали $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва t-даражали $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ формалар берилган деб фараз қиламиз. φ форманинг ихтиёрий ҳади билан ψ форманинг ихтиёрий ҳадининг кўпайтмаси, шубҳасиз $(s + t)$ даражага эга бўлади ва шунга кўра $\varphi\psi$ кўпайтма $(s + t)$-даражали форма бўлади, чунки ўхшаш ҳадларни ихчамлаш $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ҳалқада нолнинг бўлувчилари йўқлиги сабабли, бу кўпайтманинг барча коэффициентларини нолга тенглаштириши мумкин эмас.

Энди даражалари мос равишда s ва t га тенг бўлган ихтиёрий $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳадлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг ҳар бирини ҳар хил даражали формаларнинг йиғиндиси шаклида ифода этиб, ушбу

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots,$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, бу ерда φ ва ψ мос равишда s ва t-даражали формалардан иборат бўлади, кўп нуқта эса кичик даражали формалар йиғиндисининг ўрнини босади. У ҳолда

$$fg = \varphi\psi + \ldots$$

$\varphi\psi$ форма исботланганига асосан $(s+t)$-даражага *эга*, кўп нуқта билан алмаштирилган барча ҳадлар эса ундан кичик даражага эга бўлгани учун fg кўпайтманинг даражаси $s+t$ га тенг бўлади. Теорема исбот бўлди.

Агар $P[x_1, x_2, \ldots x_n]$ ҳалқада $f=\varphi\psi$ тенгликни қаноатлантирувчи ψ кўпҳад мавжуд бўлса, φ кўпҳад f кўпҳаднинг *бўлувчиси*, f эса φ га *бўлинувчи* дейилади. Бўлинувчанликнинг 21-§ даги I—IX хоссалари ҳозир кўрилаётган умумий ҳолда ҳам ўринли эканлигини осонликча кўриш мумкин Агар $k>1$ даражали f кўпҳад $P[x_1, \ldots, x_n]$ ҳалқадан олинган даражалари k дан кичик бўлган кўпҳадларнинг кўпайтмасига ажралса, у P майдон устида *келтирилувчан* дейилади, акс ҳолда эса *келтирилмас* дейилади.

$P[x_1, x_2, \ldots . x_n]$ *ҳалқадан олинган нолдан фарқли даражага эга бўлган ҳар қандай кўпҳад келтирилмас кўпайтувчиларнинг кўпайтмасига ёйилади. Бу ёйилма нолинчи даражали кўпайтувчи аниқлигида бир қийматли бўлади.*

Бу теорема 48-§ даги бир номаълумнинг кўпҳадларига оид бўлган натижаларни умумлаштиради. Унинг биринчи даъвоси кўрсатилган параграфдаги мулоҳазаларни сўзма-сўз такрорлаш билан исботланади. Иккинчи даъвонинг исботи эса анчагина қийинчилик туғдиради. Уни амалга оширишдан аввал шуни қайд қиламизки, бу теореманинг иккинчи даъвосидан ушбу натижа келиб чиқади: *агар* $P[x_1, x_2, \ldots x_n]$ *ҳалқадан олинган иккита* f *ва* g *кўпҳадларнинг кўпайтмаси келтирилмас* p *кўпҳадга бўлинса, бу кўпҳадлардан камида биттаси* p *га бўлинади.* Ҳақиқатан ҳам, акс ҳолда биз fg кўпайтманинг келтирилмас кўпайтувчиларга иккита ёйилмасини ҳосил қилар эдикки, улардан бири p ни ўз ичига олмаган, иккинчиси эса ўз ичига олган бўлади.

Энди теорема n та номаълумнинг кўпҳадлари учун исботланган бўлсин ва биз уни $n+1$ та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумнинг кўпҳадлари учун исботлайлик. Бу кўпҳадни $\varphi(x)$ шаклида ёзайлик, демак, унинг коэффициентлари $x_1, x_2, \ldots . x_n$ номаълумнинг кўпҳадларидан иборат бўлади. Бу коэффициентлар учун теорема ўринли, яъни бу коэффициентларнинг ҳар қайсиси бир қийматли усулда келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилади. Агар $\varphi(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари бирорта ҳам умумий келтирилмас кўпайтувчига эга бўлмаса, яъни улар биргаликда ўзаро туб бўлса, бундай кўпҳадни *примитив* (аниқроги $P[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ ҳалқа устида примитив) кўпҳад деймиз ва Гауссининг ушбу леммасини исботлаймиз:

Иккита примитив кўпҳад кўпайтмасининг ўзи ҳам примитив кўпҳад бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, коэффициентлари $P[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ ҳалқадан олинган

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_ix^{k-i}+\ldots+a_k,$$
$$g(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_jx^{l-j}+\ldots+b_l.$$

примитив кўпҳадлар берилган бўлсин ва

$$f(x)\,g(x)=c_0x^{k+l}+c_1x^{k+l-1}+\ldots+c_{i+j}x^{k+l-(i+j)}+\ldots+c_{k+l}$$

бўлсин Агар бу кўпайтма примитив бўлмаса, у ҳолда, $c_0, c_1, \ldots, c_{k+l}$ коэффициентлар умумий келтирилмас кўпайтувчи $p=p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ га эга бўлади. $f(x)$ примитив кўпҳаднинг барча коэффициентлари бир вақтнинг ўзида p га бўлинмагани учун уларнинг ичида p га бўлинмайдиган биринчи коэффициент a_i бўлсин; худди шу каби b_j орқали $g(x)$ кўпҳаднинг p га бўлинмайдиган биринчи коэффициентини белгилаймиз. $f(x)$ ва $g(x)$ ларни ҳадма-ҳад кўпайтириб ва $x^{k+l-(i+j)}$ ифодани ўз ичига олувчи ҳадларни йиғиб, топамиз:

$$c_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\ldots+a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\ldots$$

Бу тенгликнинг чап томони p келтирилмас кўпҳадга бўлинади. Шунингдек p га ўнг томоннинг биринчисидан бошқа барча қўшилувчилари бўлиниши аён; дарҳақиқат, i ва j ларнинг танланишига қўйилган шартга кўра, барча $a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots$ ва шунингдек $b_{j-1}, b_{j-2}, \ldots$, коэффициентлар p га бўлинади. Бундан a_ib_j кўпайтма ҳам p га бўлиниши ва шунинг учун ҳам юқорида қайд қилинганига асосан a_ib_j кўпҳадларнинг камида биттаси p га бўлиниши келиб чиқади, аммо бу мумкин эмас. Шу билан n та номаълумнинг кўпҳадлари учун асосий теорема ўринли деган фараз асосида лемманинг исботи тугалланади.

Бизга маълумки, $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ кўпҳадлар ҳалқаси $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рационал касрлар майдонида ётади, бу майдонни биз Q орқали белгилаймиз:

$$Q = P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

$Q[x]$ кўпҳадлар ҳалқасини кўрайлик. Агар $\varphi(x)$ кўпҳад бу ҳалқага тегишли бўлса, унинг ҳар бир коэффициенти $P[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ ҳалқадан олинган кўпҳадларнинг бўлинмаси кўринишида ифодаланиши мумкин. Бу бўлинмаларнинг умумий махражини, сўнгра суратлардаги умумий кўпайтувчиларни ҳам қавсдан ташқарига чиқариб, $\varphi(x)$ ни

$$\varphi(x) = \frac{a}{b} f(x)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ерда a ва b лар $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ҳалқанинг кўпҳадларидан иборат; $f(x)$ эса x нинг коэффициентлари $P[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ дан олинган кўпҳадидан иборат, шу билан бирга $f(x)$ ҳатто примитив кўпҳад ҳам бўлади, чунки унинг коэффициентлари энди умумий кўпайтувчиларга эга эмас.

Шу йўл билан $Q[x]$ ҳалқадан олинган ҳар қандай $\varphi(x)$ кўпҳадга $f(x)$ примитив кўпҳад мос қўйилди. *Берилган $\varphi(x)$ учун $f(x)$ кўпҳад P майдоннинг нолдан фарқли кўпайтувчиси аниқлигида бир қийматли аниқланган* Дарҳақиқат,

$$\varphi(x) = \frac{a}{b} f(x) = \frac{c}{d} g(x)$$

бўлсин, бунда $g(x)$ яна примитив кўпҳад. У ҳолда

$$ad\, f(x) = bc\, g(x).$$

Шундай қилиб, ad ва bc лар $P[x_1, x_2 \ldots x_n]$ ҳалқа устида биттагина кўпҳаднинг коэффициентларидан барча умумий кўпайтувчиларни қавсдан ташқарига чиқариш билан ҳосил қилинган. Бундан, бу ҳалқада ёйилманинг бир қийматлилиги ҳақидаги теореманинг (индуктив фаразга кўра) ўринли эканлиги сабабли, ad ва bc бир-биридан фақат нолинчи даражали кўпайтувчигагина фарқ қилиши мумкинлиги келиб чиқади. Демак, $f(x)$ ва $g(x)$ примитив кўпҳадлар ҳам худди шундай кўпайтувчига фарқ қилади.

$Q[x]$ ҳалқадан олинган иккита кўпҳаднинг кўпайтмасига уларга мос келувчи примитив кўпҳадларнинг кўпайтмаси тўғри келади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\varphi(x) = \frac{a}{b} f(b), \quad \psi(b) = \frac{c}{d} g(b)$$

бўлса, бу ерда $f(x)$ ва $g(x)$ примитив кўпҳадлар, у ҳолда

$$\varphi(x)\, \psi(x) = \frac{ac}{bd} f(x)\, g(x)$$

Аммо юқорида исботланганига асосан $f(x)\, g(x)$ кўпайтма примитив кўпҳад бўлади.

Сўнгра, шуни қайд қилиш лозимки, *агар $Q[x]$ ҳалқанинг $\varphi(x)$ кўпҳади Q майдон устида келтирилмас бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ га мос келувчи ва $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ нинг кўпҳади деб қаралувчи $f(x)$ примитив кўпҳад ҳам ўз навбати-*

да келтирилмас бўлади, ва аксинча. Ҳақиқатан ҳам, агар f кўпҳад келтирилувчан бўлса: $f=f_1 \cdot f_2$, у ҳолда ҳар иккала кўпайтувчи ҳам x номаълумни ўз ичига олади, чунки акс ҳолда f кўпҳад примитив бўлмас эди. Бундан, Q майдон устида $\varphi(x)$ кўпҳаднинг ёйилмаси келиб чиқади:

$$\varphi(x)=\frac{a}{b} f(x)=\left(\frac{a}{b} f_1\right) f_2.$$

Аксинча, агар $\varphi(x)$ кўпҳад Q устида келтирилувчан, яъни $\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ бўлса, у ҳолда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ кўпҳадларга мос келувчи примитив $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ кўпҳадларнинг ҳар иккаласи ҳам x ни ўз ичига олади, аммо уларнинг кўпайтмаси, юқорида исботланганига кўра $f(x)$ га (P майдондан олинган кўпайтувчи аниқлигида) тенг.

Энди f примитив кўпҳад оламиз ва уни келтирилмас кўпайтувчиларга ёямиз: $f=f_1 \cdot f_2 \dots f_k$. Бу кўпайтувчиларнинг барчаси фақат x номаълумнигина ўз ичига олмай, бундан ташқари ҳатто примитив кўпҳадлар бўлади, чунки акс ҳолда f кўпҳад примитив бўла олмас эди. *f примитив кўпҳаднинг бу ёйилмаси P майдондан олинган кўпайтувчилар аниқлигида бир қийматли бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, аввалги леммага асосан бу ёйилмага $f(x)$ нинг Q майдон устида келтирилмас кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилмаси деб қараш мумкин, аммо бирор майдон устида бир номаълумнинг кўпҳадлари учун ёйилманинг бир қийматлилиги бизга маълум; бу бир қийматлилик Q дан олинган кўпайтувчилар аниқлигида ўринли бўлади, аммо биз кўраётган ҳолда барча f_i кўпайтувчиларнинг примитивлиги туфайли у P дан олинган кўпайтувчилар аниқлигида бўлади.

Индуктив фаразга таяниб исботланган бу леммалардан сўнг, асосий теоремамизнинг исботи ҳеч қандай қийинчиликсиз амалга оширилади. Ҳақиқатан ҳам $P[x, x_1, x_2, \dots, x_n]$ ҳалқанинг ихтиёрий келтирилмас кўпҳади ё $P[x_1\ x_2, \dots, x_n]$ ҳалқадан олинган келтирилмас кўпҳад бўлади ёки бўлмаса келтирилмас примитив кўпҳад бўлади. Бундан, агар бизга $\varphi(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳаднинг келтирилмас кўпайтувчиларга бирор ёйилмаси берилган бўлса, у ҳолда кўпайтувчиларни бирлаштириб, биз φ ни

$$\varphi(x, x_1, x_2. \dots, x_n)=a(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

кўринишда ифода эта олишимиз келиб чиқади, бу ерда a кўпҳад x га боғлиқ эмас, f эса примитив кўпҳад. Бироқ бу ёйилма φ учун P дан олинган кўпайтувчилар аниқлигида бир қийматли эканлигини биламиз. Иккинчи томондан, n та номаълумнинг a кўпҳади учун келтирилмас кўпайтувчиларга ёйилманинг бир қийматлилиги индуктив фаразга асосан бажарилгани туфайли ва f примитив кўпҳад учун эса аввалги леммада исботлангани сабабли $n+1$ та номаълум бўлган ҳол учун ҳам бизнинг теорема тўла исботланди.

Юқорида исботланган леммадан яна битта қизиқ натижа келиб чиқади: *агар коэффициентлари $P[x_1, x_2, \dots x_n)$ дан олинган $\varphi(x)$ кўпҳад $Q=P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ майдон устида келтирилувчан бўлса, у кўпайтувчилари x га боғлиқ бўлган ва коэффициентлари $P[x_1, x_2, \dots, x_n)$ ҳалқадан олинган кўпҳадлардан иборат бўлган кўпайтмага ёйилиши мумкин.* Ҳақиқатан ҳам, агар $\varphi(x)$ кўпҳадга $f(x)$ примитив кўпҳад мос келса яъни $\varphi(x)=a f(x)$ бўлса, у ҳолда бизга маълумки, $\varphi(x)$ нинг ёйилувчанлигидан $f(x)$ нинг ёйилувчанлиги келиб чиқади, аммо бу ҳол $\varphi(x)$ ни $P[x_1, \dots x_n]$ ҳалқа устида ёйилишига олиб келади.

Бир номаълумнинг кўпҳадлари—улар 49-§ дан маълумки, текширила ётган асосий майдоннинг тегишли равишда танланган кенгайтмасида чизиқли кўпайтувчиларга ёйилиши мумкин—бўлган ҳоллагидан фарқли ўлароқ *ихтиёрий P майдон устида бир нечта (икки ёки ундан ортиқ) номаълумларнинг исталган даражали абсолют келтирилмас кўпҳадлари мавжуд, яъни шундай кўпҳадлар мавжудки, улар бу майдонни ихтиёрий кенгайтмасида ҳам келтирилмаслигича қолади.*

Масалан,

$$f(x,\ y) = \varphi(x) + y$$

худди шундай кўпҳаддир, бу ерда $\varphi(x)$ бир номаълумнинг P майдон устида ихтиёрий кўпҳади. Ҳақиқатан ҳам, агар P майдоннинг бирорта $\overline{P}$ кенгайтмасида

$$f(x,\ y) = g(x,\ y)\ h(x,\ y)$$

ёйилма мавжуд бўлганида эди, g ва h ларни y нинг даражалари бўйича ёзиб, масалан, ушбу

$$g(x,y) = a_0(x)\, y + a_1(x),\quad h(x,y) = b_0(x)$$

ифодани ҳосил қилар эдик, h кўпҳад y га боғлиқ эмас, сўнгра $a_0(x)\cdot b_0(x) = 1$ га кўра $b_0(x)$ кўпҳад 0 даражага эга бўлади, яъни h кўпҳад x га боғлиқ эмас

Кўпҳад ҳадларини лексикографик усулда жойлаштириш. Бир номаълумнинг кўпҳадлари учун биз уларнинг ҳадларини табиий жойлаштиришнинг иккита усулига эгамиз—номаълум даражасининг камайиши ва кўпайиши бўйича. Бир нечта номаълумларнинг кўпҳадлари учун бундай усуллар энди мавжуд эмас: агар учта номаълумнинг бешинчи даражали

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^2$$

кўпҳади берилган бўлса, уни ушбу

$$f(x_1,\ x_2, x_3) = x_1^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^2$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин эди ва бу ёзувларнинг бири иккинчисидан афзал дейишга бизда ҳеч қандай асос йўқ. Аммо бир нечта номаълумнинг кўпҳади ҳадларини батамом аниқ, лекин номаълумларни номерлашни танлашга боғлиқ бўлган жойлаштириш усули мавжуд: бир номаълумнинг кўпҳадлари учун бу усул ҳадларни номаълумларнинг даражаларини камайиши бўйича жойлаштиришга келтиради. *Лексикографик* деб аталган бу усул сўзларни луғатларда („лексиконлар"да) жойлаштиришнинг одатдаги усулига ўхшатиб олинган: ҳарфларни алфавитда қабул қилингани каби тартибланган деб фараз қилиб, биз берилган иккита сўзнинг луғатдаги вазиятини уларнинг биринчи ҳарфларидан, агар бу ҳарфлар бир хил бўлса, у ҳолда иккинчи ҳарфларидан аниқлаймиз ва ҳоказо.

$P[x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ ҳалқадан олинган $f(x_1,\ x_2,\ \ldots x_.)$ кўпҳад ва f нинг коэффициентлари P нинг нолдан фарқли элементларидан иборат бўлган

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \tag{1}$$

$$x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}, \tag{2}$$

турли ҳадлари берилган бўлсин. (1) ва (2) ҳадлар турли бўлгани учун номаълумлар даражаларининг

$$k_i - l_i,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

айирмаларидан камида биттаси нолдан фарқли. Агар бу нолдан фарқли айирмалардан биринчиси мусбат бўлса, яъни агар шундай i $(1 < i \leqslant n)$ мавжуд бўлсаки,

$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \dots,\ k_{i-1} = l_{i-1}, \quad \text{лекин } k_i > l_i$$

бўлса, у ҳолда (1) ҳад (2) ҳаддан *юқори*, (2) ҳад эса (1) ҳаддан *қуйи* деб қабул қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, агар (1) даги x_1 нинг даража кўрсаткичи (2) дагидан катта бўлса ёки агар бу даража кўрсаткичлар тенг бўлиб, аммо (1) даги x_2 нинг даража кўрсаткичи (2) дагидан катта бўлса ва ҳоказо, у ҳолда (1) ҳад (2) ҳаддан юқори бўлади. (1) ҳад (2) ҳаддан юқори эканлигидан ҳали биринчисининг барча номаълумлар бўйича даражаси иккинчисининг даражасидан катта эканлиги келиб чиқмаслигини осонликча кўриш мумкин:

$$x_1^3 x_2 x_3,\quad x_1 x_2^5 x_3^2$$

ҳадлардан биринчиси (барча номаълумлар бўйича) кичик даражага эга бўлишига қарамай, иккинчисидан (x_1 нинг даражаси бўйича) юқори.

Равшанки, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳаднинг ихтиёрий иккита турли ҳадидан бири иккинчисидан юқори бўлади. Шунингдек, агар (1) ҳад (2) ҳаддан юқори бўлиб, (2) ҳад ўз навбатида

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \tag{3}$$

ҳаддан юқори бўлса, яъни шундай j, $1 \leqslant j \leqslant n$ мавжудки,

$$l_1 = m_1,\ l_2 = m_2,\ \dots,\ l_{j-1} = m_{j-1}, \quad \text{лекин } l_j > m_j$$

бўлса, у ҳолда i индекс j дан катта, тенг ёки кичик бўлишидан қатъи назар (1) ҳад (3) ҳаддан юқори бўлишини осонгина текшириб кўриш мумкин. Шундай қилиб, иккита ҳаддан қайси бири юқори бўлса, шунисини аввал қўйиб, биз $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад ҳадларининг тўла аниқланган тартибланишини ҳосил қиламиз, бу тартиблашга **лексикографик тартиблаш** дейилади.

Масалан,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 3x_1^2 x_2^3 x_3 - x_1^2 x_2^3 x_4^2 + 5x_1 x_3 x_4^2 + \\ + 2x_2 + x_3^3 x_4 - 4$$

кўпҳад лексикографик усулда жойлаштирилган.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳадни лексикографик усулда ёзганда унинг бирор ҳади биринчи ўринда туради, яъни бошқа барча ҳадлардан юқори бўлади. Бу ҳад *кўпҳаднинг юқори ҳади* дейилади; олдинги мисолда x_1^4 ҳад юқори ҳад бўлади. Юқори ҳадлар ҳақида кейинги параграфдаги асосий теореманинг исботида ишлатиладиган ушбу леммани исботлаймиз:

Иккита кўпҳад кўпайтмасининг юқори ҳади кўпайтувчилар юқори ҳадларининг кўпайтмасига тенг.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳадлар кўпайтирилаётган бўлсин. Агар

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} \tag{4}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳаднинг юқори ҳади бўлиб,

$$a'x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_n^{s_n} \tag{5}$$

эса бу кўпҳаднинг ихтиёрий бошқа ҳади бўлса, у ҳолда шундай l, $1\leqslant l\leqslant n$ мавжудки,

$$k_1 = s_1, \dots, k_{l-1} = s_{l-1}, \ k_l > s_l$$

бўлади. Иккинчи томондан, агар

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}, \tag{6}$$

$$b'x_1^{t_1}x_2^{t_2}\dots x_n^{t_n} \tag{7}$$

$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳаднинг юқори ва ихтиёрий бошқа ҳади бўлса, у ҳолда шундай j, $1\leqslant j\leqslant n$ мавжудки,

$$l_1 = t_1, \dots, l_{j-1} = t_{j-1}, \ l_j > t_j$$

бўлади. (4) ва (6) ҳадларни, шунингдек, (5) ва (7) ҳадларни кўпайтириб ушбу

$$abx_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}\dots x_n^{k_n+l_n}. \tag{8}$$

$$a'b'x_1^{s_1+t_1}x_2^{s_2+t_2}\dots x_n^{s_n+t_n} \tag{9}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз, аммо (8) ҳад (9) ҳаддан юқори эканлигини осонгина кўриш мумкин: агар масалан, $l\leqslant j$ бўлса, у ҳолда

$$k_1+l_1 = s_1+t_1, \dots, k_{l-1}+l_{l-1} = s_{l-1}+t_{l-1}, \text{ аммо}$$
$$k_l+l_l > s_l+t_l,$$

чунки $k_l > s_l$, $l_l \geqslant t_l$ (8) ҳад (4) ва (7) ҳадларнинг кўпайтмасидан юқори, шунингдек, (5) ва (6) ҳалларнинг кўпайтмасидан ҳам юқори эканлиги худди шу каби текширилади. Шундай қилиб, (8) ҳад (f ва g кўпҳадлар юқори ҳадларининг кўпайтмаси) f ва g кўпҳадларни ҳадма-ҳад кўпайтирганда ҳосил бўлган барча қолган ҳадлардан юқори бўлади ва шунинг учун ҳам бу ҳад ўхшаш ҳадларни ихчамлашда йўқолиб кетмайди, яъни fg кўпайтманинг юқори ҳади бўлиб қолаверади.

52- §. Симметрик кўпҳадлар

Бир нечта номаълумнинг кўпҳадлари орасида номаълумларнинг ўринларини ҳар қандай алмаштирганда ҳам ўзгармайдиган кўпҳадлар ажралиб туради. Демак, бундай кўпҳадларга барча номаълумлар батамом симметрик равишда кирган ва шунинг учун ҳам бу кўпҳадлар *симметрик кўпҳадлар* (ёки *симметрик функциялар*) деб аталади. Барча номаълумларнинг $x_1+x_2+\ldots+x_n$ йиғиндиси, номаълумлар квадратларининг $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ йиғиндиси, номаълумларнинг $x_1x_2\ldots x_n$ кўпайтмаси ва ҳоказолар симметрик кўпҳадларнинг энг содда мисолларидир. n та символни ихтиёрий ўрнига қўйишни транспозициялар кўпайтмаси шаклида ифодаланишини (3-§ га қаранг) эътиборга олиб, бирор кўпҳаднинг симметрик кўпҳад эканлигини исботлашда унинг икки номаълумини ҳар қандай транспозициялашда ҳам кўпҳаднинг ўзгармаслигини кўрсатиш етарли.

Биз бундан кейин коэффициентлари бирор P майдондан олинган n та номаълумнинг симметрик кўпҳадларини кўрамиз Осонгина кўриш мумкинки, *иккита симметрик кўпҳадларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси яна симметрик кўпҳад бўлади,* яъни симметрик кўпҳадлар P майдон устида n та номаълумнинг барча кўпҳадлари ҳалқаси $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ нинг *P майдон устида номаълумнинг симметрик кўпҳадлар ҳалқаси* деб аталувчи қисм ҳалқасини ташкил этади. P нинг барча элементлари (яъни нолинчи даражали барча кўпҳадлар ва шунингдек, ноль) бу ҳалқанинг элементларидан иборат, чунки улар номаълумларни ҳар қандай ўрин алмаштиришда ҳам ўзгармайди. Ҳар қандай бошқа симметрик кўпҳад албатта барча n та номаълумни ўз ичига олади ва ҳатто улар бўйича бир хил даражага эга бўлади: агар $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрик кўпҳад x_i номаълумнинг даража кўрсаткичи k га тенг бўлган ҳадга эга бўлса, у ҳолда x_i ва x_j номаълумларни транспозициялашдан ҳосил бўлган ҳадга, яъни худди шундай k даража кўрсаткичли x_j номаълумни ўз ичига олган ҳадга ҳам эга бўлади.

Қуйидаги n та номаълумнинг n та симметрик кўпҳади ***элементар симметрик кўпҳадлар*** дейилади:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1+x_2+\ldots+x_n,\\
\sigma_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,\\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma_{n-1} &= x_1x_2\ldots x_{n-1}+x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n+\ldots+x_2x_3\ldots x_n,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n.$$

Симметрик эканлиги ўз-ўзидан равшан бўлган бу кўпҳадлар симметрик кўпҳадлар назариясида жуда катта роль ўйнайди. Улар Виет формулаларидан (24-§ га қаранг) олинган ва шунинг учун ҳам *юқори коэффициенти бирга тенг бўлган бир* *номаълумли кўпҳадларнинг коэффициентлари ишора аниқлигида унинг илдизларидан тузилган элементар симметрик кўпҳадлардан иборат бўлади.* Элементар симметрик кўпҳадларнинг Виет формулалари билан бу боғланиши симметрик кўпҳадларнинг бир номаълумнинг кўпҳадлари назариясига татбиқлари учун ниҳоятда муҳим ва шу сабабли биз уларни ҳозир ўрганяпмиз. n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумнинг P майдон устида симметрик кўпҳадлари ҳалқа ташкил этгани сабабли ушбу даъволарнинг ўринли эканлиги очиқдан-очиқ кўриниб турибди: элементар симметрик кўпҳадлардан ихтиёрийсининг ҳар қандай бутун мусбат даражаси, шунингдек бундай даражаларнинг P га тегишли ихтиёрий коэффициент билан олинган кўпайтмаси ва ниҳоят, мазкур кўпайтмаларнинг ҳар қандай йиғиндиси ҳам симметрик кўпҳадлар бўлади. Бошқача сўз билан айтганда $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ *элементар симметрик кўпҳадларнинг коэффициентлари P дан олинган ҳар қандай кўпҳади $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларнинг кўпҳади деб қаралганда симметрик бўлади.* Масалан, $n=3$ дейлик ва $\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3$ кўпҳадни олайлик, σ_1, σ_2 ва σ_3 ларни уларнинг ифодалари билан алмаштириб, қуйидагини топамиз:

$$\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+5x_1x_2x_3;$$

ўнг томонда, равшанки, x_1, x_2, x_3 ларнинг симметрик кўпҳади турибди.

Бу натижанинг тескариланиши симметрик кўпҳадлар ҳақидаги ушбу асосий теоремадан иборат.

n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумнинг P майдон устида ҳар қандай симметрик кўпҳади $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ элементар симметрик кўпҳадларнинг коэффициентлари P га тегишли бўлган кўпҳадидир.

Ҳақиқатан ҳам

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

симметрик кўпҳад берилган бўлсин ва унинг лексикографик ифодасида

$$a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} \tag{2}$$

юқори ҳад бўлсин. Бу ҳаддаги номаълумларнинг даража кўрсаткичлари

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_n \tag{3}$$

тенгсизликларни қаноатлантириши лозим. Дарҳақиқат, бирорта i да $k_i < k_{i+1}$ бўлсин. Аммо $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад симметрик бўлгани учун x_i ва x_{i+1} номаълумларни транспозициялаш орқали (2) ҳаддан ҳосил бўлган

$$a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}\dots x_n^{k_n}, \tag{4}$$

ҳадни ҳам ўз ичига олиши керак. Бу бизни қарама-қаршиликка олиб келади, чунки (4) ҳад лексикографик жойлаштириш маъносида (2) ҳаддан юқори: x_1, x_2, $\ldots$, x_{i-1} ларнинг даража кўрсаткичлари ҳар иккала ҳадда ҳам бир хил бўлиб, x_i нинг даражаси эса (4) ҳадда (2) ҳаддагидан катта.

Энди элементар симметрик кўпҳадларнинг ушбу

$$\varphi_1 = a_0\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3} \ldots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n} \tag{5}$$

кўпайтмасини оламиз [(3) тенгсизликларга асосан барча даража кўрсаткичлар манфий эмас]. Бу x_1, x_2, $\ldots$, x_n номаълумнинг симметрик кўпҳади бўлади ва унинг юқори ҳади (2) ҳадга тенг. Дарҳақиқат, σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n кўпҳадларнинг юқори ҳадлари мос равишда x_1, x_1x_2, $x_1x_2x_3$, $\ldots$, $x_1x_2 \ldots x_n$ ларга тенг ва аввалги параграфнинг охирида исботланганига кўра, кўпайтманинг юқори ҳади кўпайтувчилар юқори ҳадларининг кўпайтмасига тенглигига асосан φ_1 кўпҳаднинг юқори ҳади

$$a_0x_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}(x_1x_2x_3)^{k_3-k_4} \ldots (x_1x_2 \ldots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n} \times$$
$$\times (x_1x_2 \ldots x_n)^{k_n} = a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

ҳаддан иборат бўлади.

Бундан, f дан φ_1 ни айирганда бу кўпҳадларнинг юқори ҳадлари бир-бирлари билан қисқаради, яъни $f - \varphi_1 = f_1$ симметрик кўпҳаднинг юқори ҳади f кўпҳаднинг юқори ҳади (2) дан қуйи бўлади. Коэффициентлари, равшанки, P майдонга тегишли бўлган f_1 кўпҳад учун худди шу усулни қўллаб, биз

$$f_1 = \varphi_2 + f_2$$

тенгликка келамиз, бу ерда φ_2 P майдондан олинган бирор коэффициентли элементлар симметрик кўпҳадлар даражаларининг кўпайтмасидан иборат. f_2 эса юқори ҳади f_1 нинг юқори ҳадидан қуйи бўлган симметрик кўпҳад. Бундан

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2$$

тенглик келиб чиқади.

Бу процессни давом эттириб, биз бирорта s-да $f_s = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз ва бинобарин, f учун $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларнинг коэффициентлари P дан олинган кўпҳади шаклидаги ифодага келамиз:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Ҳақиқатан ҳам, агар бу процесс чексиз[1] бўлганда эди, у ҳолда биз симметрик кўпҳадларнинг

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_s, \ldots \tag{6}$$

чексиз кетма-кетлигини ҳосил қилар эдик, шу билан бирга уларнинг ҳар бирининг юқори ҳади ундан олдинги кўпҳаднинг юқори ҳадидан—ва демак, аввалданоқ (2) дан—қуйи бўлар эди. Аммо агар

$$bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} \tag{7}$$

f_s кўпҳаднинг юқори ҳади бўлса, бу кўпҳаднинг симметриклигидан (3) тенгсизликларга ўхшаш

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n \tag{8}$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Иккинчи томондан, (2) ҳад (7) ҳаддан юқори бўлгани учун

$$k_1 \geqslant l_1 \tag{9}$$

бўлади. Бироқ осонгина кўриш мумкинки, (8) ва (9) тенгсизликларни қаноатлантирувчи манфий бўлмаган бутун сонлар нинг $i_1, i_2, \ldots, i_n$ системасини чекли сондаги усул билангина танлаш мумкин. Дарҳақиқат, агар (8) шартдан воз кечиб, барча l_i, $i = 1, 2, \ldots n$ лар k_1 дан катта эмас деб фараз қилсак ҳам, бари бир l_i сонларни $(k_1 + 1)^n$ та усул билангина танлаш мумкин бўлар эди. Бундан, юқори ҳадлари қатъий камаювчи (6) кўпҳадлар кетма-кетлиги чексиз бўла олмаслиги келиб чиқади.

Теореманинг исботи тугалланди.

Элементар симметрик кўпҳадларнинг Виет формулалари билан юқорида қайд қилинган алоқаси симметрик кўпҳадлар ҳақидаги асосий теоремадан ушбу жуда муҳим натижани келтириб чиқаришга имкон беради:

$f(x)$ бир номаълумнинг P майдон устида юқори коэффициенти бирга тенг бўлган кўпҳади бўлсин. У ҳолда P устида $f(x)$ кўпҳаднинг ёйиш майдонидан олинган $f(x)$ илдизларининг коэффициентлари P дан олинган ҳар қандай симметрик кўпҳади, $f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларидан иборат (P дан олинган коэффициентли) *кўпҳад бўлади ва шунинг учун ҳам P майдоннинг элементидан иборат бўлади.*

---

[1] Шуни ҳисобга олиш керакки, φ_s кўпҳад, умуман олганда f_{s-1} кўпҳадда йўқ бўлган ҳадларни ҳам ўз ичига олади ва шунинг учун ҳам f_{s-} дан $f_s = f_{s-1} - \varphi_s$ га ўтиш f_{s-i} нинг баъзи ҳадларини йўқолиши билангин боғлиқ бўлмай, янги ҳадларнинг пайдо бўлиши билан ҳам боғлиқ бўлади. Б ерда $s = 1, 2, \ldots$

Юқорида баён қилинган асосий теореманинг исботи бир йўла симметрик кўпҳадларнинг элементар кўпҳадлар орқали ифодасини амалий қидириш учун ҳам йўл кўрсатиб беради. Дастлаб, ушбу белгилашни киритайлик: агар

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \tag{10}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумлар даражаларининг бирор кўпайтмаси бўлса (аммо даража кўрсаткичлари ичида нолга тенглари ҳам бўлиши мумкин), у ҳолда

$$S(ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) \tag{11}$$

орқали (10) дан номаълумларнинг мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлари орқали ҳосил бўлган барча ҳадлар йиғиндиси белгиланади. Равшанки, бу симметрик, шу билан бирга бир жинсли кўпҳад бўлади ва (10) ҳадни ўз ичига олган n та номаълумнинг ҳар қандай симметрик кўпҳади (11) кўпҳаднинг қолган барча ҳадларини ҳам ўз ичига олади. Масалан, $S(x_1) = \sigma_1$, $S(x_1 x_2) = \sigma_2$ $S(x_1^2)$ барча номаълумлар квадратларининг йиғиндиси ва ҳоказо.

Мисол. n та номаълумнинг симметрик кўпҳади $f = S(x_1^2\, x_2)$ ни элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифода этинг.

Бу ерда юқори ҳад $x_1^2 x_2$ ва шунинг учун $\varphi_1 = \sigma_1^{2-1} \sigma_2 = \sigma_1\sigma_2$, яъни

$$\varphi_1 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) =$$

$$= S(x_1^2x_2) + 3S(x_1\, x_2\, x_3),$$

бу ердан

$$f_1 = f - \varphi_1 = -3S(x_1\, x_2\, x_3) = -3\sigma_3.$$

Шунинг учун ҳам $f = \varphi_1 + f_1 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

Мураккаброқ мисолларда берилган кўпҳадни дастлаб элементар кўпҳадлар орқали ифодасига қандай ҳадлар кириши мумкин эканлигини аниқлаб, сўнгра аниқмас коэффициентлар методи ёрдамида бу ҳадларнинг коэффициентларини топиш мақсадга мувофиқдир.

Мисоллар. 1. $f = S(x_1^2x_2^2)$ симметрик кўпҳаднинг ифодасини топинг.

Бизга маълумки (асосий теореманинг исботига қаранг), изланаётган $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ кўпҳаднинг ҳадлари $f_1, f_2, \dots$, симметрик кўпҳадларнинг юқори ҳадлари орқали аниқланади, бироқ бу юқори ҳадлар берилган f кўпҳаднинг юқори ҳадидан қуйи, яъни $x_1^2x_2^2$ дан қуйи бўлади. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи барча $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ кўпайтмаларни топамиз: 1) улар $x_1^2x_2^2$ ҳаддан қуйи, 2) улар симметрик кўпҳадлар учун юқори ҳад вазифасини бажара олади, яъни $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \dots \geqslant l_n$ тенгсизликларни қаноатлантиради. 3) улар номаълумларнинг биргаликдаги даражаси бўйича 4 даражага эга (чунки, барча $f_1, f_2, \dots$ кўпҳадлар, бизга маълумки, f бир жинсли кўпҳад қандай даражага эга бўлса, худди шу даражага эга). Даража кўрсаткичларнинг мос келган комбинацияларинигина ёзиб ва унинг ёнига σ нинг улар орқали аниқланадиган даражалари кўпайтмасини кўрсатиб, биз ушбу жадвални ҳосил қиламиз:

$$22000 \dots \sigma_1^{2-2}\, \sigma_2^{2-0} = \sigma_2^2,$$

$$21100 \dots \sigma_1^{2-1}\, \sigma_2^{1-1}\, \sigma_3^{1-0} = \sigma_1\sigma_3$$

$$11110 \dots \sigma_1^{1-1}\, \sigma_2^{1-1}\, \sigma_3^{1-1}\, \sigma_4^{1-0} = \sigma_4.$$

Шундай қилиб, f кўпҳад

$$f = \sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4$$

кўринишга эга. σ_2 нинг олдидаги коэффициентни биз бирга тенг деб олдик, чунки бу ҳад f нинг юқори ҳади билан аниқланган ва асосий теореманинг исботидан маълумки, худди шундай, яъни 1 га тенг коэффициентга эга. A ва B коэффициентларни қуйидагича топамиз.

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 0$ деймиз. Номаълумларнинг бу қийматларида f кўпҳад 3 қийматни, σ_1, σ_2, σ_3, ва σ_4 кўпҳадлар эса мос равишда 3, 3, 1 ва 0 қийматларни қабул қилади. Шунга кўра

$$3 = 9 + A \cdot 3 \cdot 1 + B \cdot 0;$$

бундан $A = -2$. Энди $x_1 = x_2 = x_1 = x_4 = 1$, $x_5 = \ldots = x_n = 0$ деймиз. f, σ_1, σ_2, σ_3 ва σ_4 кўпҳадларнинг қийматлари мос равишда 6, 4, 6, 4, 1 ларга тенг бўлади. Демак,

$$6 = 36 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + B \cdot 1,$$

бундан $B = 2$. Шундай қилиб, f учун изланаётган ифода

$$f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$$

бўлади.

2. $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ кўпҳад илдизлари кубларининг йиғиндисини топинг.

Бу масалани ечиш учун $S(x_1^3)$ симметрик кўпҳадни элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифодасини топамиз Бундан олдинги мисолда қўлланилган усулни қўллаб, ушбу

$$3000 \ldots \sigma_1^3,$$
$$2100 \ldots \sigma_1\sigma_2,$$
$$1110 \ldots \sigma_3$$

жадвални ҳосил қиламиз, демак

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3.$$

Дастлаб, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \ldots = x_n = 0$, ундан кейин эса $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ $x_4 = \ldots = x_n = 0$ деб фараз қилиб, $A = -3$, $B = 3$ ни ҳосил қиламиз, яъни

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \tag{12}$$

Бизга берилган $f(x)$ кўпҳад илдизлари кубларининг йиғиндисини топиш учун Виет формуласига асосан юқорида топилган ифодада σ_1 ни x^3 олдидаги коэффициентнинг тескари ишора билан олингани орқали алмаштириш, яъни -1 билан алмаштириш, σ_2 ни x^2 олдидаги коэффициент билан, яъни 2 билан алмаштириш ва ниҳоят σ_3 ни x олдидаги коэффициентнинг тескари ишораси билан, яъни -1 билан алмаштириш керак. Шундай қилиб, бизни қизиқтираётган илдизлар кубларининг йиғиндиси

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2$$

га тенг. Китобхон $f(x)$ кўпҳад i, $-i$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ илдизларга эга эканлигини эътиборга олиб, бу натижани текшириб кўриши мумкин. Шуниси равшанки, (12) формула берилган $f(x)$ кўпҳадга боғлиқ бўлмайди ва ихтиёрий кўпҳад илдизлари кубларининг йиғиндисини топишга имкон беради.

Асосий теореманинг исботида f симметрик кўпҳадни элементар кўпҳадлар орқали ифодалаш учун ҳосил қилинган усул номаълумлари σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n лардан иборат бўлган тайин кўпҳадга келтиради. Маълум бўлишича, f учун ҳеч қандай усул билан $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ орқали бошқа ифода олиш мумкин эмас экан. Буни қуйидаги ягоналик теоремаси курсатади:

Ҳар қандай симметрик кўпҳад элементар симметрик кўпҳадларнинг кўпҳади кўринишида ягона ифодага эга.

Бу теоремани исботлаймиз. Агар P майдон устида $f(x_1, \ldots, x_n)$ симметрик кўпҳад $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ орқали икки хил турли

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

ифодага эга бўлганда эди, у ҳолда

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) - \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

айирма $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларнинг нолдан фарқли кўпҳади бўлар эди, яъни унинг барча коэффициентлари бир вақтнинг ўзида нолга тенг бўлмас эди, ваҳоланки, бу кўпҳадда $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларни уларнинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар орқали ифодаси билан алмаштириш $P[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ ҳалқанинг нолига олиб келар эди. Шунинг учун ҳам, агар $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ кўпҳад нолдан фарқли бўлса, яъни у камида битта нолдан фарқли коэффициентга эга бўлса, у ҳолда χ да $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларни уларнинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар орқали ифодаси билан алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳад:

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{13}$$

ҳам нолдан фарқли бўлишини кўрсатиш кифоя.

Агар $a\, \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \ldots \sigma_n^{k_n}$ ифода χ кўпҳаднинг ҳадларидан бири бўлиб, шу билан бирга $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда барча σ ларни уларнинг (1) ифодаси билан алмаштиргач, биз—асосий теореманинг исботидан маълумки — юқори ҳади (лексикографик жойланиш маъносида) ушбу

$$ax_1^{k_1}(x_1 x_2)^{k_2} \ldots (x_1 x_2 \ldots x_n)^{k_n} = ax_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

ҳадга тенг бўлган $x_1 x_2, \ldots, x_n$ ларнинг кўпҳадини ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\begin{aligned} l_1 &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n, \\ l_2 &= k_2 + \ldots + k_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n &= k_n. \end{aligned}$$

Бундан

$$k_i = l_i - l_{i+1}, \ k_n = l_n, \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

яъни $l_1, l_2, \ldots, l_n$ даража кўрсаткичлар бўйича χ кўпҳаднинг дастлабки ҳадининг $k_1, k_2, \ldots, k_n$ даража кўрсаткичларини тиклаш мумкин. Шундай қилиб, χ кўпҳаднинг турли ҳадлари уларни $x_1, x_2 \ldots, x_n$ номаълумларнинг кўпҳадлари деб қараганда турли юқори ҳадларга эга.

Энди χ кўпҳаднинг барча ҳадларини кўрайлик; уларнинг ҳар бири учун уни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг кўпҳади шаклидаги тасвирининг юқори ҳадини топамиз ва бу юқори ҳадлар ичидан лексикографик жойланиш маъносида энг юқорисини танлаб оламиз. Юқорида айтилганига асосан, бу ҳад χ кўпҳаднинг бошқа ҳадларидан ҳосил бўладиган юқори ҳадлари орасида ўхшашига эга бўлмайди, у шартга кўра бу ҳар қайси юқори ҳадлардан ҳам юқори бўлгани учун у χ кўпҳад ҳадларида $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ элементларнинг уларнинг (1) ифодаси билан алмаштирганда ҳосил бўладиган бошқа ҳадлардан юқори бўлади. Демак, биз $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ дан $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ га ўтиш жараёнида фақат бир марта пайдо бўладиган ва шунинг учун ҳам ҳеч нарса билан қисқариб кетмайдиган (нолдан фарқли коэффициентли) ҳадни топдик. Бундан, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳаднинг коэффициентлари ичида нолдан фарқлилари борлиги, яъни бу кўпҳад $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ҳалқанинг ноли эмаслиги келиб чиқади, худди шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Исботланган теоремани, равшанки, қуйидагича ифодалаш мумкин:

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ элементар симметрик кўпҳадлар системаси $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ кўпҳадлар ҳалқасининг элементлари сифатида қаралганда P майдон устида алгебраик эркли система бўлади.

53-§*. Симметрик кўпҳадлар ҳақида қўшимча маълумотлар

Асосий теоремага доир мулоҳазалар. Симметрик кўпҳадлар ҳақида олдинги параграфда келтирилган асосий теореманинг исботи теореманинг формулировкасига биз қуйида ишлатадиган бир нечта муҳим қўшимчаларни киритишга имкон беради. Энг аввал $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрик кўпҳаднинг элементар кўпҳадлар орқали ифодаси сифатида топилган $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ кўпҳаднинг коэффициентлари фақатгина P майдонга тегишли бўлмай, балки *ҳатто f кўпҳаднинг коэффициентлари орқали қўшиш ва айириш амаллари ёрдамида ифода этилади, яъни P майдон ичида f кўпҳад коэффициентлари томонидан вужудга келтирилган L ҳалқага тегишли бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, осонгина кўриш мумкинки, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларга нисбатан φ_1 кўпҳаднинг барча коэффициентлари (аввалги параграфнинг (5) формуласига қаранг) f кўпҳаднинг юқори ҳади олдидаги коэффициент a_0 нинг бутун карраларига тенг ва шунинг учун ҳам L ҳалқага тегишли бўлади. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ кўпҳадларнинг $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ номаълумларга нисбатан$]$ барча коэффициентлари L га тегишли эканлиги исботланган бўлсин. У ҳолда $f_l = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_l$ кўпҳаднинг коэффициентлари ҳам L га тегишли бўлади ва демак

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларга нисбатан φ_{i+1} кўпҳаднинг барча коэффициентлари ҳам L да ётади.

Иккинчи томондан, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *кўпҳаднинг* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *лар бўйича биргаликдаги даражаси* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *кўпҳаднинг ҳар бир* x *номаълумлар бўйича олинган даражасига тенг бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, аввалги параграфдаги (2) ҳад f кўпҳаднинг юқори ҳади бўлгани учун k_1 f нинг x_1 номаълум бўйича олинган даражаси ва, демак, f нинг симметриклигига асосан ихтиёрий бошқа x_i номаълум бўйича ҳам даража бўлади. Аммо φ_1 нинг σ лар бўйича биргаликдаги даражаси аввалги параграфнинг (5) формуласига асосан

$$(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + \ldots + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1$$

сонга тенг. Сўнгра f_1 кўпҳаднинг юқори ҳади f кўпҳаднинг юқори ҳадидан қуйи бўлгани учун f_1 нинг ҳар бир x_i бўйича олинган даражаси f нинг бу номаълумларнинг ҳар бири бўйича олинган даражасидан юқори бўла олмайди. Аммо φ_1 кўпҳад f учун қандай ролни бажарса φ_2 кўпҳад f_1 кўпҳад учун худди шундай ролни бажаради, шунга кўра φ_2 нинг σ лар бўйича биргаликдаги даражаси f_1 нинг ҳар бир x_i бўйича олинган даражасига тенг, яъни у k_1 дан катта эмас ва ҳоказо. Шундай қилиб, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ нинг даражаси ҳам k_1 дан катта эмас. $i > 1$ да ҳеч бир φ_i кўпҳад $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ ларни φ_1 қандай даражада ўз ичига олган бўлса, худди шундай даражада ўз ичига ола олмагани сабабли, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ нинг даражаси роппа-роса k_1 га тенг. Шу билан бизнинг даъво исботланди.

Ниҳоят, $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ ифода $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ кўпҳаднинг ҳадларидан бири бўлсин. Бу ҳаднинг *вазни* деб

$$l_1 + 2l_2 + \ldots + nl_n$$

сонга айтамиз, яъни вазнни ҳисоблаш учун даража кўрсаткичларни мос σ_i ларнинг индексларига кўпайтириб, сўнгра ҳосил бўлган сонларни қўшиш керак. Бошқача сўз билан айтганда, кўпҳадлар кўпайтмасининг даражаси ҳақида 51-§ да исботланган теоремадан келиб чиқадики, вазн биз кўраётган ҳаднинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар бўйича биргаликдаги даражаси бўлади. У ҳолда ушбу даъво ўринли бўлади.

Агар бир жинсли $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *симметрик кўпҳад номаълумларнинг биргаликдаги даражаси* s *га тенг бўлса, у ҳолда унинг* σ *орқали* $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *ифодасининг барча ҳадлари ҳам* s *га тенг бўлган бир хил вазнга эга бўлади.*

Дарҳақиқат, агар аввалги параграфдаги (2) бир жинсли f кўпҳаднинг юқори ҳади бўлса, у ҳолда

$$s = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

бўлади. Аммо φ_1 ҳаднинг вазни аввалги параграфдаги (5) га асосан

$$(k_1-k_2)+2(k_2-k_3)+\ldots+(n-1)(k_{n-1}-k_n)+nk_n=$$
$$=k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n$$

бўлади, яъни у ҳам s га тенг. Сўнгра $f_1=f-\varphi_1$ кўпҳад s-даражали иккита бир жинсли кўпҳадларнинг айирмаси сифатида ўзи ҳам s-даражали бир жинсли кўпҳад бўлади ва шунинг учун ҳам φ кўпҳаднинг φ_2 ҳади ҳам s вазнли бўлади ва ҳоказо.

Симметрик рационал касрлар. Симметрик кўпҳадлар ҳақидаги асосий теорема рационал касрлар бўлган ҳолга умумлаштирилиши мумкин. Агар n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумнинг $\frac{f}{g}$ рационал касри номаълумларни ихтиёрий ўрин алмаштиришда ҳам ўзига тенг бўлиб қолса, бундай рационал касрга *симметрик* каср деймиз. *Бу таъриф биз* $\frac{f}{g}$ *касрни оламизми ёки унга тенг бўлган* $\frac{f_0}{g_0}$ *касрни оламизми, бунга боғлиқ эмаслигини* осонгина кўрсатиш мумкин. Дарҳақиқат, агар ω — номаълумларни бирор ўрин алмаштириш бўлиб, φ эса бу номаълумларнинг ихтиёрий кўпҳади бўлса, у ҳолда φ^ω орқали ω ўрин алмаштириш бажарилганда φ кўпҳад ўтадиган кўпҳадни белгилашни келишайлик. Фаразимизга асосан ихтиёрий ω учун

$$\frac{f}{g}=\frac{f^\omega}{g^\omega},$$

яъни $fg^\omega=gf^\omega$. Иккинчи томондан,

$$\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}$$

тенгликдан $fg_0=gf_0$ келиб чиқади, бундан $f^\omega g_0^\omega=g^\omega f_0^\omega$. Охирги тенгликнинг иккала томонини f га кўпайтириб, топамиз:

$$ff^\omega g_0^\omega=fg^\omega f_0^\omega=gf^\omega f_0^\omega,$$

бундан f^ω га қисқартиргандан сўнг, $fg_0^\omega=gf_0^\omega$ келиб чиқади, яъни

$$\frac{f_0^\omega}{g_0^\omega}=\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}.$$

Ушбу теорема ўринли:

Коэффициентлари P майдондан олинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг ҳар қандай симметрик рационал касри $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ элементар симметрик кўпҳадларнинг коэффициентлари яна P га тегишли бўлган рационал касри шаклида ифода этилади.

Дарҳақиқат,

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

симметрик рационал каср берилган бўлсин. Уни қисқармайдиган деб фараз қилиб, f ҳам, g ҳам симметрик кўпҳадлардан иборат бўлишини исботлаш мумкин эди. Аммо қуйидаги йўл бир оз соддароқдир. Агар g кўпҳад симметрик бўлмаса, у ҳолда сурат ва махражни g дан номаълумларнинг айнан бўлмаган ўрнига қўйишлари орқали келиб чиқадиган барча $n!-1$ та кўпҳадларнинг кўпайтмасига кўпайтирамиз. Энди махраж симметрик кўпҳад бўлишини осонгина кўриш мумкин. Бундан касрнинг ўзи симметрик эканлиги сабабли, суратнинг ҳам симметриклиги келиб чиқади, ва демак, теореманинг исботи учун сурат ва махражни элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифодалашгина қолди.

Даражали йиғиндилар. Татбиқларда

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k, \; k = 1, 2 \ldots$$

симметрик кўпҳадлар, яъни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар k-даражаларининг йиғиндилари кўп учрайди. *Даражали йиғиндилар* деб аталувчи бу симметрик кўпҳадлар асосий теоремага кўра элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифода этилиши керак. Аммо катта k лар учун бу ифодаларни излаб топиш жуда қийин ва шунинг учун ҳам $s_1, s_2, \ldots$ ва $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ лар орасидаги ҳозир келтириб чиқариладиган боғланиш диққатга сазовордир.

Аввало, $s_1 = \sigma_1$. Сўнгра, агар $k \leqslant n$ бўлса, ушбу тенгликларни осонгина текшириб кўриш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l}
s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k_1-1}x_2)^{1)}, \\
s_{k-2}\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_8), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_{k-l}\sigma_l = S(x_1^{k-l+1}x_2 \ldots x_l) + S(x_1^{k-l}x_2 \ldots x_l x_{l+1}), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \leqslant i \leqslant k-2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_1\sigma_{k-1} = S(x_1^2 x_2 \ldots x_{k-1}) + k\sigma k.
\end{array}\right| \qquad (1)$$

Бу тенгликларнинг альтернацияланган йиғиндисини (яъни ишоралари навбати билан алмашиб турувчи йиғиндисини) олиб, сўнгра барча ҳадларни тенгликнинг бир томонига ўтказиб, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0$$
$$(k \leqslant n). \qquad (2)$$

---

[1] Аввалги параграфдаги (11, га қаранг.

Агар $k > n$ бўлса, у ҳолда (1 тенгликлар системаси

$$\begin{aligned}
&s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2),\\
&s_{k-2}\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_8),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{k-l}\sigma_l = S(x_1^{k-l+1}x_2\ldots x_l) + S(x_1^{k-l}x_2\ldots x_lx_{l+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \leqslant l < n-1,\\
&s_{k-n}\sigma_n = S(x_1^{k-n+1}x_2\ldots x_n)
\end{aligned}$$

кўринишга эга бўлади, бундан ушбу

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0, \ (k > n) \qquad (3)$$

формула келиб чиқади.

(2) ва (3) формулалар *Ньютон формулалари* дейилади. Улар даражали йиғиндиларни элементар симметрик кўпҳадлар билан боғлайди ва $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ларнинг $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ лар орқали ифодасини кетма-кет топиш имконини беради. Дарҳақиқат, бизга маълумки, $s_1 = \sigma_1$, бу (2) формуладан ҳам келиб чиқади. Сўнгра, агар $k = 2 \leqslant n$ бўлса, (2) дан $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2$ ни ҳосил қиламиз, бундан

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Сўнгра, $k = 3 \leqslant n$ бўлганда $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$ бўлади, бундан, s_1 ва s_2 ларнинг топилган ифодаларидан фойдаланиб,

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

ни ҳосил қиламиз, бу эса бизга таниш ифода (аввалги параграфдаги (12) га қаранг). Агар $k = 3$ бўлиб, $n = 2$ бўлса, у ҳолда (3) га асосан $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0$, бундан $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. Ньютон формулаларидан фойдаланиб, s_k ни $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ лар орқали ифода қилувчи умумий формулаларни ҳам ҳосил қилиш мумкин. Аммо бу формула жуда узундан-узоқ бўлиб, биз уни келтириб ўтирмаймиз.

Агар асосий P майдон 0 характеристикага эга бўлса ва шунинг учун ҳам, ихтиёрий натурал сон n га бўлиш бу майдонда маънога эга[1] бўлса, у ҳолда (2) формула $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ элементар симметрик кўпҳадларни биринчи n та $s_1, s_2, \ldots, s_n$ даражали йиғиндилар орқали ифодалаш имконини беради. Дарҳақиқат, $\sigma_1 = s_1$, шу сабабли,

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1\sigma_1 - s_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - 2s_2),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2) = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3),$$

---

[1] p характеристикали майдонда $\frac{a}{p}$ ифода $a \neq 0$ да маънога эга эмас чунки бу майдонда ихтиёрий x учун $px = 0$ бўлади.

ва ҳоказо. Бундан ва асосий теоремадан ушбу натижа келиб чиқади:

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумнинг 0 характеристикали P майдон устида ихтиёрий кўпҳади $s_1, s_2, \ldots, s_n$ даражали йиғиндиларнинг коэффициентлари P майдонга тегишли бўлган кўпҳади шаклида тасвирланиши мумкин.

Номаълумларнинг иккита системаси бўйича симметрик кўпҳадлар. Кейинги параграфда ва шунингдек, 58-§ да симметрик кўпҳад тушунчасининг қуйидаги умумлашмаси ишлатилади. Номаълумларнинг иккита $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n$ системаси берилган бўлсин, шу билан бирга уларнинг

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ y_1, y_2, \ldots, y_r \tag{4}$$

бирлашмаси P майдон устида алгебраик эркли бўлсин. Агар P майдон устида $f(x_1\ x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ кўпҳад $x_1, x_2, \ldots x_n$ номаълумларни ўзаро ихтиёрий ўрин алмаштиришда ва $y_1, y_2, \ldots, y_r$ номаълумларни ўзаро ихтиёрий ўрин алмаштиришда ўзгармай қолса, у *номаълумларнинг иккита системаси бўйича симметрик* дейилади. Агар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг элементар симметрик кўпҳадлари учун $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ белгилашни сақласак, $y_1, y_2, \ldots, y_r$ ларнинг элементар симметрик кўпҳадларини эса $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ лар орқали белгиласак, асосий теорема қуйидагича умумлашади:

P майдон устида номаълумларнинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_r$ системалари бўйича симметрик бўлган ихтиёрий $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ кўпҳад бу иккита номаълумлар системаси бўйича элементар симметрик кўпҳадларнинг коэффициентлари P дан олинган кўпҳади шаклида тасвирланиши мумкин:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ y_1, y_2, \ldots, y_r) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r).$$

Ҳақиқатан ҳам, f кўпҳадни коэффициентлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг кўпҳадларидан иборат бўлган $\bar{f}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ кўпҳад деб қараш мумкин. f кўпҳад $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларни ўрин алмаштиришда ўзгармай қолгани учун $\bar{f}$ кўпҳаднинг коэффициентлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг симметрик кўпҳадларидир ва шунинг учун ҳам, уларни асосий теоремага асосан $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларнинг коэффициентлари P дан олинган кўпҳади шаклида ифода этиш мумкин. Иккинчи томондан, $\bar{f}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ кўпҳад $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ майдон устида қаралганда $y_1, y_2, \ldots, y_r$ ларга нисбатан симметрик бўлади, демак, уни $\varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ кўпҳад шаклида тасвирлаш мумкин. Ушбу параграфнинг бошида кўрсатилганича, φ кўпҳаднинг коэффициентлари $\bar{f}$ кўпҳаднинг коэффициентлари орқали қўшиш ва айириш амаллари ёрдамида ифодаланади, шунга кўра улар ҳам $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларнинг кўпҳади бўлади. Равшанки, бу f учун $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, $\tau_1, \ldots, \tau_r$ орқали изланаётган ифодага олиб келади.

Мисол.

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1x_2x_3 - x_1x_2y_1 - x_1x_2y_2 - x_1x_3y_1 -$$
$$- x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 - x_2x_3y_2 + x_1y_1y_2 + x_2y_1y_2 + x_3y_1y_2$$

кўпҳад x_1, x_2, x_3 номаълумлар бўйича ҳам, y_1, y_2 номаълумлар бўйича ҳам симметрик, аммо бешта номаълумнинг ҳаммаси бўйича (биргаликда) симметрик эмас. Буни ақалли x_1 ва y_1 номаълумларни транспозициялаш орқали кўрсатиш мумкин. f нинг σ_1, σ_2, σ_3, τ_1, τ_2 лар орқали ифодасини топамиз:

$$f = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, y_1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, y_2 +$$
$$+ (x_1 + x_2 + x_3)\, y_1y_2 = \sigma_3 - \sigma_2y_1 - \sigma_2y_2 + \sigma_1y_1y_2 = \sigma_3 - \sigma_2\tau_1 + \sigma_1\tau_2.$$

Ҳозир исботланган теорема, шубҳасиз, номаълумларнинг учта ҳамда кўп сондаги системаси учун ҳам умумлаштирилади.

Номаълумларнинг иккита системаси бўйича симметрик кўпҳадлар учун уларни элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифодалашнинг ягоналиги ҳақидағи теорема ҳам ўринли. Бошқача айтганда, ушбу теорема ўринли:

Номаълумларнинг берилган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ва* $y_1, y_2, \ldots, y_r$ *системаларининг* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ *элементар симметрик кўпҳадларининг бирлашган системаси P майдон устида алгебраик эркли бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, P майдон устида барча коэффициентлари бир вақтда нолга тенг бўлмаса-да, ўзи нолга тенг бўлган

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$$

кўпҳад берилган бўлсин. Бу кўпҳадни коэффициентлари σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларнинг кўпҳадларидан иборат бўлган $\psi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ кўпҳад деб қараш мумкин. Демак, ψ ни $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ ларнинг $Q = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$рационал касрлар майдони устида кўпҳади деб ҳисоблаш мумкин. $y_1, y_2 \ldots, y_n$ система Q майдон устида ҳам алгебраик эркли системалигича қолади: агар бу система учун коэффициентлари Q дан олинган алгебраик боғлиқлик мавжуд бўлганда эди, у ҳолда махражлардан қутулиб, биз (4) системада фаразимизга зид ўлароқ, алгебраик боглиқликни ҳосил қилар эдик. Аввалги параграфдаги ягоналилик теоремасига таяниб, энди $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ система ҳам Q майдон устида алгебраик эркли бўлишини келтириб чиқарамиз ва шунинг учун ҳам ψ кўпҳаднинг барча коэффициентлари нолга тенг. Аммо бу коэффициентлар $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ларнинг кўпҳадларидан иборат, демак, яна номаълумларнинг битта системаси учун ягоналилик теоремасига асосан (бу гал $x_1, x_2, \ldots, x_n$ система учун) бу кейинги кўпҳадларнинг барча коэффициентларининг ўзлари ҳам нолга тенг. Шу билан фаразимизга зид равишда φ кўпҳаднинг барча коэффициентлари нолга тенг эканлиги исботланди.

54*-§. Результант. Номаълумни йўқотиш. Дискриминант.

Агар $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ҳалқадан олинган $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад берилган бўлса, у ҳолда унинг *ечими* деб P майдондан ёки унинг бирорта $\overline{P}$ кенгайтмасидан олинган шундай

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \ \dots, \ x_n = \alpha_n,$$

номаълумлар системасига айтиладики, у система f кўпҳадни нолга айлантиради:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Даражаси нолдан катта бўлган ҳар қандай f кўпҳад ечимга эга: агар x_1 бу кўпҳаднинг ифодасига кирган бўлса, $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ сифатида, моҳиятига кўра, P майдоннинг ихтиёрий элементларини олиш мумкин, фақат $f(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ кўпҳаднинг даражаси қатъий мусбат бўлиб қолаверса бас, ундан кейин эса илдизнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан (49-§) фойдаланиб, P майдоннинг шундай $\overline{P}$ кенгайтмасини олиш керакки, унда битта x_1 номаълумнинг $f(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ кўпҳади α_1 илдизга эга бўлсин. Шу билан бирга бир номаълумнинг n-даражали кўпҳади ҳар қандай майдонда n тадан ортиқ илдизга эга бўлмаслик хоссаси бир нечта номаълумнинг кўпҳадлари учун ўринли бўлмай қолишини кўрамиз.

Агар n та номаълумнинг бир нечта кўпҳади берилган бўлса, у ҳолда бу кўпҳадларнинг барчаси учун умумий бўлган ечимларни, яъни берилган кўпҳадларни нолга тенглаш натижасида ҳосил бўлган тенгламалар системасининг ечимларини излаш масаласини қўйиш мумкин. Бу масаланинг хусусий ҳоли, чунончи чизиқли тенгламалар системаси иккинчи бобда батафсил муҳокама қилинган эди. Аммо қарама-қарши хусусий ҳол —бир номаълумли битта, лекин ихтиёрий даражали тенглама учун биз илдизлар тўғрисида улар асосий майдоннинг бирор кенгайтмасида мавжуд эканлигидан бошқа ҳеч нарса билмаймиз. Албатта, бир нечта номаълумли чизиқли бўлмаган ихтиёрий тенгламалар системасининг ечимларини излаш ва ўрганиш янада қийинроқ, шу билан бирга курсимиз чегарасидан четга чиқувчи ва алоҳида математик фан—алгебраик геометриянинг мавзуини ташкил этувчи масаладир. Биз эса бу ерда иккита номаълумнинг ихтиёрий даражали иккита тенгламаси системаси бўлган ҳол билангина чекланамиз ва бу ҳол бир номаълумнинг битта тенгламаси бўлган ҳолга келтирилиши мумкинлигини кўрсатамиз.

Аввал бир номаълумнинг иккита кўпҳадининг умумий илдизи мавжудлиги ҳақидаги масала билан шуғулланамиз. P майдон устида

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \\ g(x) &= b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_{s-1} x + b_s \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

кўпҳадлар берилган бўлсин, шу билан бирга $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Аввалги бобнинг натижаларидан, *$f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар ўзаро туб бўлмаганда ва фақат шундагина улар P майдоннинг бирор кенгайтмасида умумий илдизга эга* эканлиги қийинчиликсиз келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган кўпҳадларнинг умумий илдизлари мавжудлиги ҳақидаги масала, уларга Евклид алгоритмини қўллаш билан ҳал қилиниши мумкин экан.

Ҳозир биз бу саволга жавоб олиш учун бошқа усул кўрсатамиз. $\overline{P}$ майдон P майдоннинг шундай кенгайтмаси бўлсинки, унда $f(x)$ кўпҳад n та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ илдизга, $g(x)$ эса s та $\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_s$ илдизга эга бўлсин; $\overline{P}$ сифатида $f(x)\,g(x)$ кўпайтманинг ёйилиш майдонини олиш мумкин. $\overline{P}$ майдоннинг

$$R(f,g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j) \tag{2}$$

элементи $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг *результанти* дейилади. Равшанки, *$f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар $R(f,g)=0$ бўлганда ва фақат шундагина $\overline{P}$да умумий илдизга эга.*

$$g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (x - \beta_j)$$

бўлгани учун ва шу сабабли

$$g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j)$$

бўлганидан, $R(f,g)$ результант ушбу

$$R(f,g) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \tag{3}$$

кўринишда ҳам ёзилиши мумкин.

$f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар результантнинг таърифида симметрик равишда қатнашмайди. Дарҳақиқат,

$$R(g,f) = b_0^n a_0^s \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{ns} R(f,g). \tag{4}$$

(3) га мувофиқ $R(g,f)$ ни

$$R(g,f) = b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j) \tag{5}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Результант учун келтирилган (2) ифода $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг илдизларини билишни талаб қилади ва- шунинг учун ҳам бу иккита кўпҳадларнинг умумий илдизи мавжудлиги ҳақидаги саволни ҳал қилиш учун амалий жиҳатдан фойдасиз. Аммо $R(f, g)$ *результантни* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *кўпҳадларнинг* $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots b_s$ *коэффициентларининг кўпҳади шаклида тасвирлаш мумкин.*

Бундай тасвирлашнинг мумкинлиги аввалги параграфнинг натижаларидан осонгина келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, (2) формула кўрсатадики, $R(f,g)$ результант номаълумларнинг икки системаси: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ системанинг ва $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ системанинг симметрик кўпҳадидан иборат. Шунинг учун ҳам у аввалги параграфнинг сўнгида исботланганига асосан номаълумларнинг бу икки системаси бўйича элементар симметрик кўпҳад шаклида, яъни Виет формулаларига асосан, $\frac{a_i}{a_0}$, $i = 1,2, \dots, n$ ва $\frac{b_j}{b_0}$, $j = 1,2 \dots, s$ касрларнинг кўпҳади шаклида тасвирланади; (2) га кирган $a_0^s b_0^n$ кўпайтма ҳосил қилинган ифодани махраждаги a_0 ва b_0 дан қутқаради. Аммо результантнинг коэффициентлар орқали ифодасини аввалги параграфда баён қилинган усуллар орқали излаш қийин бўлур эди ва биз бошқа усулдан фойдаланамиз.

(1) кўпҳадларнинг результанти учун биз топмоқчи бўлган ифода бундай кўпҳадларнинг ихтиёрий жуфти учун яроқли бўлади. Аниқроқ айтганда, (1) кўпҳадларнинг

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2 \dots, \beta_s \quad (6)$$

илдизлар системасини $n+s$ та эркли номаълумлар системаси, яъни (51-§ даги маънода) P майдон устида алгебраик эркли бўлган $n+s$ та элемент системасидан иборат деб ҳособлаймиз.

Биз результант учун (6) номаълумларнинг кўпҳади деб қаралганда (Виет формулаларига асосан коэффициентларни илдизлар орқали алмаштиргандан сўнг) (2) тенгликнинг ўнг томонига тенг бўладиган ифода ҳосил қиламиз. (2) нинг ўзи ҳам (6) номаълумларнинг кўпҳади деб қаралади.

Тенгликни (6) номаълумлар системасига нисбатан шундай айний тенглик маъносида тушуниб, биз (*1*) *кўпҳадларнинг* $R(f,g)$ *результанти* $(n+s)$*- тартибли ушбу*

$$D=\left|\begin{array}{l} a_0a_1\ \dots\ a_n \\ \quad a_0a_1\ \dots\ a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad a_0a_1\ \dots\ a_n \\ b_0b_1\ \dots\ b_s \\ \quad b_0b_1\ \dots\ b_s \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad b_0b_1\ \dots\ b_s \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} s \text{ та сатр} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}b\\b\\b\\b\end{array}}\right\} n \text{ та сатр} \end{array} \qquad (7)$$

детерминантга тенг эканлигини исботлаймиз (бўш ўринларда ноллар турибди). Бу детерминантнинг тузилиши тушунарли; биз унинг бош диагоналида s марта a_0 коэффициент ва сўнгра n марта b_s коэффициент турганлигинигина қайд қиламиз.

Даъвони исботлаш учун биз $a_0^s\, b_0^n\, DM$ кўпайтмани икки хил усул билан ҳисоблаймиз, бу ерда M ушбу

$$M=\begin{vmatrix} \beta_1^{n+s-1} & \beta_2^{n+s-1} & \dots & \beta_s^{n+s-1} & \alpha_1^{n+s-1} & \alpha_2^{n+s-1} & \dots & \alpha_n^{n+s-1} \\ \beta_1^{n+s-2} & \beta_2^{n+s-2} & \dots & \beta_s^{n+s-2} & \alpha_1^{n+s-2} & \alpha_2^{n+s-2} & \dots & \alpha_n^{n+s-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_s^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$(n+s)$-тартибли ёрдамчи детерминантдир. M — Вандермонд детерминантидир ва шунинг учун ҳам, 6-§ да кўрсатилганига асосан, у охирги сатрдан олдинги сатр элементлари айирмаларининг кўпайтмасига тенг, шу билан бирга ҳар қандай олдинги элементдан кейинги турган исталган элемент айирилади. Шундай қилиб,

$$M=\prod_{1<i<j<s}(\beta_i-\beta_j)\cdot\prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\beta_j-\alpha_i)\cdot\prod_{1<i<j<n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

ва шу сабабли, (4) га кўра

$$a_0^s b_0^n DM=D\cdot R(g,f)\cdot\prod_{1<i<j<s}(\beta_i-\beta_j)\cdot\prod_{1<i<j<n}(\alpha_i-\alpha_j). \qquad (8)$$

Иккинчи томондан DM кўпайтмани матрицалар кўпайтмасининг детерминанти ҳақидаги теоремага асосланиб ҳисоблаймиз. Мос матрицаларни кўпайтириб ва барча α лар $f(x)$ нинг илдизлари, барча β лар эса $g(x)$ нинг илдизлари эканлигини эътиборга олиб,

$$DM=$$

$$=\begin{vmatrix} \beta_1^{s-1}f(\beta_1) & \beta_2^{s-1}f(\beta_2) & \dots & \beta_s^{s-1}f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1^{s-2}f(\beta_1) & \beta_2^{s-2}f(\beta_2) & \dots & \beta_s^{s-2}f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1 f(\beta_1) & \beta_2 f(\beta_2) & \dots & \beta_s f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f(\beta_1) & f(\beta_2) & \dots & f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{n-1}g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1}g(\alpha_2) & \dots & \alpha_n^{n-1}g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{n-2}g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-2}g(\alpha_2) & \dots & \alpha_n^{n-2}g(\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 g(\alpha_1) & \alpha_2 g(\alpha_2) & \dots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & \dots & g(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз. Лаплас теоремасини қўллаб, сўнгра детерминантларнинг устунларидан умумий кўпайтувчиларни чиқариб ва ҳосил бўлган детерминантларни Вандермонд детерминантлари сифатида ҳисоблаб,

$$a_0^s b_0^n DM = a_0^s b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j) \cdot \prod_{1<i<j<s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \cdot \prod_{1<i<j<n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

ни ёки (3) ва (5) дан фойдаланиб,

$$a_0^s b_0^n DM = R(f\ g)\, R(g, f) \cdot \prod_{1<i<j<s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{1<i<j<n} (\alpha_i - \alpha_j) \quad (9)$$

ни ҳосил қиламиз.

(8) ва (9) тенгликларнинг ўнг томонлари (6) номаълумларнинг кўпҳади деб қаралганда ўзаро тенг эканлигини ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган тенгликнинг ҳар иккала томонини айнан нолга тенг бўлмаган умумий кўпайтувчиларга қисқартириш мумкин. $R(g,f)$ умумий кўпайтувчи нолга тенг эмас: шартга кўра $a_0 \neq 0$ ва $b_0 \neq 0$ бўлгани сабабли, (4) дан $R(g,f)$ кўпҳаднинг нолдан фарқли қийматини ҳосил қилиш учун (6) номаълумларнинг ўзаро бир-бирларига тенг бўлмаган қийматларини (асосий майдонда ёки унинг бирор кенгайтмасида) танлаш етарли. Қолган иккита умумий кўпайтувчини ҳам нолдан фарқли эканлиги худди шундай исботланади. (9) ни барча нолдан фарқли бу умумий кўпайтувчиларга қисқартириб, биз

$$R(f, g) = D \quad (10)$$

тенгликка келамиз, худди шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энди (1) кўпҳадларнинг юқори коэффициентлари нолдан фарқли бўлсин деган шартдан воз кечамиз[1]. Демак, бу кўпҳадларнинг асли даражалари ҳақида, бу даражалар уларнинг „формал" даражалари n ва, мос равишда, s дан катта эмас деб даъво қилишгина мумкин. Результант учун (2) ифода энди маънога эга эмас, чунки муҳокама қилинаётган кўпҳадлар n ёки s дан кам илдизга эга бўлиши мумкин. Иккинчи томондан, (7) детерминант бу ҳолда ҳам ёзилиши мумкин ва бу детерминант $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ бўлганда исботланганига асосан, результантга тенг бўлгани учун бизнинг умумий ҳолда ҳам уни $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг *результанти* деб атаймиз ва $R(f, g)$ орқали белгилаймиз.

---

[1] Бундан кейинги татбиқлар, юқори коэффициент ҳақидаги биз шу давргача риоя қилаётган шартдан, бу вақтинча воз кечиш учун сабаб бўлади: биз икки номаълумнинг кўпҳадлари системасини кўрмоқчимиз ва бу номаълумлардан бирини коэффициентлар қаторига киритамиз. Демак, бу номаълумнинг хусусий қийматларида юқори коэффициент нолга айланиши мумкин.

Аммо энди результантнинг нолга тенг бўлиши кўпҳадларимизда умумий илдизнинг мавжудлигига тенг кучли эканлигига умид боғлаш мумкин эмас. Дарҳақиқат, агар $a_0 = 0$ ва $b_0 = 0$ бўлса, у ҳолда f ва g кўпҳадлар умумий илдизга эгами ёки йўқмилигидан қатьи назар $R(f,g) = 0$ бўлади. Аммо бу ҳол результантнинг нолга тенглигидан берилган кўпҳадларнинг умумий илдизи мавжудлиги ҳақида хулоса чиқариш мумкин бўлмаган ягона ҳол экан[1]. Чунончи, ушбу теорема ўринли:

Агар ихтиёрий юқори коэффициентларга эга бўлган (*1*) *кўпҳадлар берилган бўлса, у ҳолда бу кўпҳадларнинг* (*7*) *результанти бу кўпҳадлар умумий илдизга эга бўлса, ёки уларнинг юқори коэффициентларининг ҳар иккаласи ҳам нолга тенг бўлганда ва фақат шундагина нолга тенг бўлади.*

Исботи. $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ бўлган ҳол юқорида текширилган эди, $a_0 = b_0 = 0$ бўлган ҳол эса теореманинг айтилишида назарга олинган. Биз (1) кўпҳадларнинг юқори коэффициентларидан бири, масалан, a_0 нолдан фарқли, b_0 эса нолга тенг бўлган ҳолни кўриб чиқишимиз керак.

Агар барча $i = 0, 1, \ldots, s$ лар учун $b_i = 0$ бўлса, у ҳолда $R(f,g) = 0$ бўлади, чунки (7) детерминант ноллардан иборат бўлган сатрларни ўз ичига олади. Аммо бу ҳолда $g(x)$ кўпҳад айнан нолга тенг ва шунинг учун ҳам $f(x)$ билан умумий илдизларга эга.

Агар $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-1} = 0$ бўлиб, лекин $b_k \neq 0$, $k \leqslant s$ бўлса ва агар

$$\bar{g}(x) = b_k x^{s-k} + b_{k+1} x^{s-k-1} + \ldots + b_{s-1} x + b_s$$

бўлса, у ҳолда (7) детерминантда $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ элементларни ноллар билан алмаштириб ва Лаплас теоремасини қўлланиб, равшанки,

$$R(f,g) = a_0^k R(f,\bar{g}) \tag{11}$$

тенгликка келамиз. Аммо f ва $\bar{g}$ кўпҳадларнинг юқори коэффициентлари нолдан фарқли бўлгани учун, юқорида исботлангaнга кўра, $R(f,\bar{g}) = 0$ тенглик f ва $\bar{g}$ кўпҳадларнинг умумий илдизи мавжуд бўлиши учун зарур ва етарлидир. Иккинчи томондан, (11) га асосан $R(f,\bar{g}) = 0$ ва $R(f,g) = 0$ тенгликлар тенг кучлидир, g ва $\bar{g}$ кўпҳадлар эса, албатта, бир хил илдизларга эга бўлгани учун бу кўрилаётган ҳолда ҳам $R(f,g)$

---

[1] (7) детерминант $a_n = b_s = 0$ бўлганда ҳам, албатта, нолга тенг. Аммо бу ҳолда (1) кўпҳадлар умумий *0* илдизга эга.

результантнинг нолга тенглик шарти $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадларнинг умумий илдизи мавжудлигига тенг кучли эканлигини ҳосил қиламиз. Шу билан теорема исботланди.

Қуйидаги

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

квадрат кўпҳадларнинг результантини топамиз. (7) га асосан

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

ёки детерминантни биринчи ва учинчи йўллари бўйича ёйиш орқали ҳисобласак,

$$R(f,g) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{12}$$

Масалан, агар

$$f(x) = x^2 - 6x + 2, \quad g(x) = x^2 + x + 5$$

кўпҳадлар берилган бўлса, у ҳолда (12) га асосан $R(f,g) = 233$ ва шунинг учун ҳам бу кўпҳадлар умумий илдизга эга эмас. Агар

$$f(x) = x^2 - 4x - 5, \quad g(x) = x^2 - 7x + 10$$

кўпҳадлар берилган бўлса, у ҳолда $R(f,g) = 0$ бўлади, яъни бу кўпҳадлар умумий илдизга эга: бу илдиз 5 сони бўлади.

Икки номаълумли иккита тенглама системасида номаълумни йўқотиш. x ва y номаълумнинг коэффициентлари бирор P майдондан олинган иккита f ва g кўпҳади берилган бўлсин. Биз бу кўпҳадларни x номаълум даражаларининг камайиши бўйича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}(y)x + a_k(y), \\ g(x,y) &= b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}(y)x + b_l(y); \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

коэффициентлар $P[y]$ ҳалқанинг кўпҳадларидан иборат бўлади. f ва g кўпҳадларни x номаълумнинг кўпҳади деб қараб, уларнинг результантини топамиз ва уни $R_x(f,g)$ орқали белгилаймиз; у (7) га кўра, битта „y“ номаълумнинг коэффициентлари P майдондан олинган кўпҳади бўлади:

$$R_x(f,g) = F(y). \tag{14}$$

(13) кўпҳадлар системаси P майдоннинг бирор кенгайтмасида $x = \alpha$, $y = \beta$ умумий ечимга эга бўлсин. (13) да y нинг ўрнига β қийматни қўйиб, биз битта x номаълумнинг иккита $f(x,\beta)$ ва $g(x,\beta)$ кўпҳадини ҳосил қиламиз. Бу кўпҳадлар α умумий илдизга эга ва шунинг учун ҳам уларнинг (14) га асосан $F(\beta)$ га тенг бўлган результанти нолга тенг бўлиши лозим, яъни β қиймат $R_x(f,g)$ *результантнинг илдизидан иборат бўлиши керак.* Аксинча, агар (13) кўпҳадларнинг $R_x(f,g)$ ре-

зультанти β илдизга эга бўлса, у ҳолда $f(x, \beta)$ ва $g(x, \beta)$ кўпҳадларнинг результанти нолга тенг, яъни *ё бу кўпҳадлар умумий илдизга эга, ёки бўлмаса уларнинг ҳар иккаласини юқори коэффициенти нолга тенг:*

$$a_0(\beta) = b_0(\beta) = 0.$$

Бу йўл билан (13) кўпҳадлар системасининг умумий ечимлари излаш битта номаълумнинг битта (14) кўпҳадининг илдизларини излашга келтирилди, яъни одатда айтилишича, *x номаълум (13) кўпҳадлар системасидан йўқотилди.*

Икки номаълумли иккита тенглама системасидан номаълумни йўқотгандан сўнг ҳосил бўлган кўпҳаднинг даражаси ҳақидаги саволга ушбу теорема жавоб беради:

Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ кўпҳадлар номаълумларнинг биргаликдаги даражаси бўйича, мос равишда n ва s даражаларга эга бўлса, у ҳолда $R_x(f, g)$ кўпҳаднинг y номаълум бўйича даражаси (бу кўпҳад айнан нолга тенг бўлмаса, албатта) ns кўпайтмадан катта эмас.

Даставвал, агар биз бир номаълумнинг юқори коэффициентлари бирга тенг бўлган иккита кўпҳадни текшираётган бўлсак, у ҳолда (2) га асосан уларнинг $R(f, g)$ результанти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_s$ ларнинг ns-даражали бир жинсли кўпҳадидан иборат бўлади. Бундан, агар результантнинг $a_1, a_2 \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_s$ коэффициентлар орқали ифодасига

$$a_1^{k_1}\ a_2^{k_2} \ldots\ a_n^{k_n}\ b_1^{l_1}\ b_2^{l_2} \ldots b_s^{l_s}$$

ҳад кирса, ва агар бу ҳаднинг *вазни* деб

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n + l_1 + 2l_2 + \ldots + sl_s$$

сонга айтилса, у ҳолда $R(f, g)$ нинг *коэффициентлар орқали ифодасини барча ҳадлари ns га тенг бўлган бир хил вазнга эга бўлади.* Агар $a_0^{k_0}\ a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}\ b_0^{l_0}\ b^{l_1} \ldots b_s^{l_s}$ ҳаднинг вазни деб,

$$0 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 + \ldots + nk_n + 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \ldots + sl_s \tag{15}$$

сонга айтилса, бу даъво (7) результант ҳадлари учун умумий ҳолда ҳам ўринли. Дарҳақиқат, (7) детерминант ҳадларида a_0 ва b_0 кўпайтувчиларини 1 билан алмаштириб биз бундан аввал кўрилган ҳолга келамиз, аммо бу кўпайтувчиларнинг даража кўрсаткичлари (15) ифодага 0 коэффициент билан киради.

Энди f ва g кўпҳадларни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_n(y),$$
$$g(x, y) = b_0(y)x^s + b_1(y)x^{s-1} + \ldots + b_s(y).$$

$f(x, y)$ кўпҳад номаълумларининг биргаликдаги даражаси n бўлгани учун $a_r(y)$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ коэффициентнинг даражаси унинг r индексидан катта бўла олмайди, бу $b_r(y)$ учун ҳам ўринлидир. Бундан, $R_x(f, g)$ результантнинг ҳар қайси ҳадининг даражаси бу ҳаднинг вазнидан катта эмаслиги келиб чиқади, яъни у ns сонидан катта эмас. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Мисоллар.

1. Ушбу
$$f(x, y) = x^2y + 3xy + 2y + 3,$$
$$g(x, y) = 2xy - 2x + 2y + 8$$

кўпҳадлар системасининг умумий ечимларини топинг.

Бу системадан x номаълумни йўқотамиз, бунинг учун уни ушбу

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= y\cdot x^2+(3y)\cdot x+(2y+3), \\ g(x,y) &= (2y-2)x+(2y+3) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

кўринишда қайтадан ёзамиз, у ҳолда

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix}=2y^2+11y+12.$$

Результантнинг илдизлари $\beta_1=-4$, $\beta_2=-\frac{3}{2}$ сонлар бўлади. y номаълумнинг бу қийматларида (16) кўпҳадларнинг юқори коэффициентлари нолга айланмайди, шунинг учун ҳам уларнинг ҳар қайсиси x нинг бирор қиймати билан биргаликда берилган кўпҳадлар системасининг ечимини ташкил қилади.

$$f(x,-4)=-4x^2-12x-5,$$
$$g(x,-4)=-10x-5$$

кўпҳадлар $\alpha_1=-\frac{1}{2}$ умумий илдизга эга.

$$f\left(x,-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x,$$
$$g\left(x,-\frac{3}{2}\right)=-5x$$

кўпҳадлар эса $\alpha_2=0$ умумий илдизга эга. Шундай қилиб, берилган кўпҳадлар системаси иккита ечимга эга:

$$\alpha_1=-\frac{1}{2},\ \beta_1=-4 \text{ ва } \alpha_2=0,\ \beta_2=-\frac{3}{2}.$$

2. Ушбу $f(x,y)=2x^3y-xy^2+x+5$,
$g(x,y)=x^2y^2+2xy^2-5y+1$

кўпҳадлар системасидан битта номаълумни йўқотинг.

Иккала кўпҳад ҳам y номаълум бўйича 2 даражага эга, ваҳоланки, улардан бири x номаълум бўйича 3 даражага эга бўлгани учун y ни йўқотиш мақсадга мувофиқдир. Системани

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= (-x)\cdot y^2+(2x^3)\cdot y+(x+5), \\ g(x,y) &= (x^2+2x)y^2-5y+1 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

кўринишда қайтадан ёзамиз ва (12) формулани қўллаб, унинг результантини топамиз:

$$R_y(f,g)=[(-x)\cdot 1-(x+5)(x^2+2x)]^2-[(-x)(-5)-2x^3(x^2+2x)]\times$$
$$\times[2x^3\cdot 1-(x+5)(-5)]=4x^8+8x^7+11x^6+84x^5+161x^4+154x^3+96x^2-125x.$$

Результантнинг илдизларидан бири 0 бўлади. Аммо x номаълумнинг бу қийматида (17) кўпҳадларнинг иккала юқори коэффициенти ҳам нолга айланади, шу билан бирга осонгина кўриш мумкинки, $f(0, y)$ ва $g(0, y)$ кўпҳадлар умумий илдизга эга эмас. Бизда результантнинг қолган илдизларини топиш усули мавжуд эмас. Фақат шуни таъкидлаш мумкинки, агар биз уларни топсак (масалан, $R_y(f,g)$ нинг ёйилиш майдонида), у ҳолда улардан ҳеч қайсиси (17) кўпҳадларнинг иккала юқори коэффициентини бирданига нолга айлантирмас эди ва шунинг учун ҳам бу илдизларнинг ҳар бири y нинг (битта ёки ҳатто бир нечта) бирор қиймати билан бирга берилган кўпҳадлар системасининг ечимини ташкил этар эди.

Ихтиёрий сондаги номаълумлар ва кўнҳадлар системасидан ҳам номаълумларни кетма-кет йўқотиш имконини берадиган усуллар мавжуд. Аммо бу усуллар узундан-узоқ бўлиб, шунинг учун уларни курсимизга киритиб бўлмайди.

Дискриминант. Бизни результант тушунчасига олиб келган саволга қиёс қилиб, $P[x]$ ҳалқадан олинган n-даражали $f(x)$ кўпҳад қандай шартлар бажарилганда каррали илдизларга эга деган саволни қўйиш мумкин.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0$$

бўлсин ва P майдоннинг бирор кенгайтмасида бу кўпҳад α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ илдизларга эга бўлсин. Равшанки, ушбу

$$\begin{gathered}\Delta=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ \dots\ (\alpha_n-\alpha_1)\times\\ \times(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)\ \dots\ (\alpha_n-\alpha_2)\times\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \times(\alpha_n-\alpha_{n-1})=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)\end{gathered}$$

кўпайтма нолга тенг бўлганда ёки бари бир, $f(x)$ кўпҳаднинг дискриминанти деб аталувчи

$$D=a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

кўпайтма нолга тенг бўлганда ва фақат шундагина бу илдизлар ичида тенглари бўлади.

Илдизларнинг ўрни алмаштирилганда ишора ўзгартиши мумкин бўлган Δ кўпайтмадан фарқли·ўлароқ, D дискриминант $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларга нисбатан симметрик ва шунинг учун ҳам уни $f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари орқали ифодалаш мумкин. Бу ифодани P майдон ноль характеристикага эга деган фаразда излаш учун $f(x)$ кўпҳаднинг дискриминанти билан шу кўпҳаднинг результанти ҳамда унинг ҳосиласи орасидаги боғланишдан фойдаланиш мумкин. Бундай боғланиш мавжудлигини кутиш табиийдир: 49-§ дан маълумки, кўпҳад ва $f'(x)$ ҳосила умумий илдизга эга бўлганда ва фақат шундагина, у кўпҳад каррали илдизга эга ва шунинг учун ҳам, $R(f_1f')=0$ бўлганда ва фақат шундагина $D=0$ бўлади

Ушбу параграфнинг (3) формуласига асосан,

$$R(f_1f')=a_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n}f'(\alpha_i)$$

бўлади.

$$f(x)=a_0\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$$

тенгликни дифференциаллаб,

$$f'(x) = a_0 \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} (x - \alpha_k)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда x ўрнига α_i ни қўйсак, i-дан бошқа барча қўшилувчилар нолга айланади ва шунинг учун ҳам

$$f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j),$$

бу ердан

$$R(f, f') = a_0^{n-1} \cdot a_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Бу кўпайтмага ихтиёрий i ва j лар учун ($i > j$) иккита кўпайтувчи: $\alpha_i - \alpha_j$ ва $\alpha_j - \alpha_i$ киради. Уларнинг кўпайтмаси $(-1) \times \times (\alpha_i - \alpha_j)^2$ га тенг ва $n \geqslant i > j \geqslant 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\frac{n(n-1)}{2}$ та жуфт i, j индекслар мавжуд бўлгани учун

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-1} \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D.$$

Мисол. Ушбу

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

квадрат учҳаднинг дискриминантини топамиз. $f'(x) = 2ax + b$ бўлгани учун

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = a(-b^2 + 4ac).$$

Бизнинг ҳолда $\frac{n(n-1)}{2} = 1$ ва шунинг учун ҳам

$$D = -a^{-1} R(f, f') = b^2 - 4ac.$$

Бу мактаб алгебрасида одатда квадрат тенгламанинг дискриминанти деб аталувчи тушунча билан мос келади.

Дискриминантни излашнинг бошқа усули қуйидагидан иборат. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ илдизларнинг даражаларидан Вандермонд детерминантини тузамиз. 6 § да исботланганга асосан,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_j) = \Delta,$$

ва шунинг учун ҳам дискриминант бу детерминант квадратининг a_0^{2n-2} га кўпайтирилганига тенг. Бу детерминантни унинг транспонирланганига матрицаларни кўпайтириш қонунига асосан кўпайтириб ва олдинги параграфда таърифланган даражали йиғиндиларни эсга олиб, топамиз:

$$D=a_0^{2n-2}\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

бу ерда s_k сон $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ илдизларнинг k-даражалари йиғиндисидан иборат.

Мисол. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ куб кўпҳаднинг дискриминантини топамиз. (18) га кўра

$$D=\begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Аввалги параграфдан маълумки,

$$s_1=\sigma_1=-a,$$
$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=a^2-2b,$$
$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=-a^3+3ab-3c.$$

Шунингдек, $\sigma_4=0$ бўлгани учун, Ньютон формулаларидан фойдаланиб

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2=a^4-4a^2b+4ac+2b^2$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$D=3s_2s_4+2s_1s_2s_3-s_2^3-s_1^2s_4-3s_3^2=$$
$$=a^2b^2-4b^3-4a^3c+18abc-27c^2. \tag{19}$$

Хусусан, $a=0$ бўлганда, яъни тўлиқмас кўпҳад учун 38-§ да айтилган билан бутунлай мос келувчи

$$D=-4ab^3-27c^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

55*-§. Комплекс сонлар алгебраси асосий теоремасининг иккинчи исботи

Асосий теореманинг 23-§ да келтирилган исботи мутлақо ноалгебраик эди. Биз ҳозир улкан алгебраик аппаратдан фойдаланувчи бошқа исботни баён этмоқчимиз—унда, масалан, симметрик кўпҳадлар ҳақидаги асосий теоремадан (52-§) ва шунингдек, ҳар қандай кўпҳад учун ёйилиш майдони мавжуд эканлиги ҳақидаги теоремадан (49-§) жиддий фойдаланилади—шу билан бир вақтда бу исботнинг ноалгебраик қисми минимал бўлиб, битта жуда содда даъвога келтирилган.

Аввало шуни таъкидлаймизки, 23-§ да кўпҳад юқори ҳадининг модули ҳақида лемма исботланган. $f(x)$ кўпҳад коэффициентларини ҳақиқий деб ҳисоблаб ва $k = 1$ деб, биз бу леммадан ушбу натижани ҳосил қиламиз:

x нинг абсолют қиймати бўйича етарли катта ҳақиқий қийматларида ҳақиқий коэффициентли $f(x)$ кўпҳаднинг ишораси унинг юқори ҳадини ишораси билан устма-уст тушади.

Бундан ушбу натижа келиб чиқади:

Тоқ даражали ҳақиқий коэффициентли кўпҳад камида битта ҳақиқий илдизга эга.

Ҳақиқатан ҳам,

$$f\ x) = a_0x^n + a_1^{n-} + \ldots + a_n$$

бўлсин, шу билан бирга барча коэффициентлар ҳақиқий. n тоқ бўлгани сабабли a_0x^n юқори ҳад x нинг мусбат ва манфий қийматларида турли ишорага эга ва шунинг учун ҳам, юқорида исботланганига асосан, x нинг абсолют қиймат бўйича етарли катта мусбат ва манфий қийматларида $f(x)$ ҳам турли ишорага эга бўлади. Демак, x нинг масалан, шундай a ва b ҳақиқий қийматлари мавжудки,

$$f(a) < 0, \ f(b) > 0$$

бўлади. Аммо анализ курсидан маълумки, $f(x)$ кўпҳад (яъни бутун рационал функция) узлуксиз функциядир ва шунинг учун ҳам, узлуксиз функцияларнинг асосий хоссаларидан бирига асосан, x нинг a ва b оралиғида ётувчи бирор ҳақиқий қийматларида $f(x)$ кўпҳад $f(a)$ ва $f(b)$ лар орасида берилган ихтиёрий оралиқ қийматларни қабул қилади. Жумладан, a ва b орасида ётадиган шундай α мавжудки, $f(\alpha) = 0$ бўлади.

Бу натижага таяниб, энди ушбу даъвони исботлаймиз:

Ҳақиқий коэффициентли ихтиёрий даражали ҳар қандай кўпҳад камида битта комплекс илдизга эга.

Ҳақиқатан ҳам, $n = 2^kq$ даражага эга бўлган $f(x)$ кўпҳад берилган бўлсин, бу ерда q—тоқ сон. $k = 0$ бўлган ҳол юқорида текширилгани учун $k > 0$ деб фараз қиламиз, яъни n ни жуфт сон деб ҳисоблаймиз ва даражаси 2^{k-1} га бўлиниб, аммо 2^kга[1] бўлинмайдиган ҳақиқий коэффициентли барча кўпҳадлар учун даъво исботланган деб фараз қилиб, исботни k бўйича индукция билан олиб борамиз.

P—комплекс сонлар майдони устида $f(x)$ кўпҳад учун ёйилиш майдони (49-§ га қаранг) ва $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар

---

[1] Демак, бу даража ҳатто n дан катта бўлиши мумкин.

$f(x)$ нинг P майдонда ётувчи илдизлари бўлсин. Ихтиёрий c ҳақиқий сонни танлаймиз ва P майдоннинг

$$\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j),\ i < j \tag{1}$$

кўринишдаги элементларини оламиз. β_{ij} элементларнинг сони равшанки,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k q(2^k q - 1)}{2} = 2^{k-1}q(2^k q - 1) = 2^{k-1}q' \tag{2}$$

га тенг, бу ерда q' — тоқ сон.

$P[x]$ ҳалқанинг, бу барча β_{ij} элементлар ва фақат шуларгина илдизи бўлган $g(x)$ кўпҳадини тузайлик:

$$g(x) = \prod_{i,\, j,\, i<j} (x - \beta_{ij}).$$

Бу кўпҳаднинг коэффициентлари β_{ij} ларнинг элементар симметрик кўпҳадларидан иборатдир. Демак, улар (1) га кўра, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ларнинг ҳақиқий коэффициентли (c ҳақиқий сон бўлгани учун), шу билан бирга ҳатто симметрик кўпҳади бўлади. Ҳақиқатан ҳам, исталган иккита α нинг, масалан, α_k ва α_l ларнинг транспозицияси барча β_{ij} лар системасида ўрин алмаштиришга сабаб бўлади; ҳар қандай β_{kj} (бу ерда j индекс k дан ва l дан фарқли) β_{lj} га алмашади ва аксинча, шу билан бир вақтда β_{kl} ва барча β_{ij} лар, агар i ва j лар k ва l лардан фарқли бўлса, ўз ўрнида қолади. Аммо $g(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари унинг илдизларини ўрин алмаштиришда ўзгармайди.

Бундан, симметрик кўпҳадлар ҳақидаги асосий теоремага кўра $g(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари берилган $f(x)$ кўпҳад коэффициентларининг (ҳақиқий коэффициентли) кўпҳадлари бўлади ва шунинг учун ҳам улар ҳақиқий сонлар бўлади. Бу кўпҳаднинг даражаси β_{ij} илдизлар сонига тенг бўлиб, у (2) га кўра, 2^{k-1} га бўлинади, аммо 2^k га бўлинмайди. Шунинг учун ҳам, индуктив фаразга кўра $g(x)$ кўпҳаднинг β_{ij} илдизларидан камида биттаси комплекс сондан иборат бўлиши керак.

Шундай қилиб, c ҳақиқий сонни ҳар қандай танлашда ҳам i, j индексларнинг шундай жуфтини кўрсатиш мумкинки (бу ерда $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$) $\alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j)$ элемент комплекс сондан иборат бўлади. P майдон комплекс сонлар майдонини қисм майдон сифатида ўз ичига олишини эслатамиз. Албатта, c сонни бошқача танлашда унга кўрсатилган маънода, индексларнинг бошқа жуфти мос келади. Аммо чексиз кўп турли ҳақиқий c сонлар мавжуд, айни вақтда бизнинг ихтиёримизда фақат чекли сондаги турли i, j жуфтлар топилади. Бу ердан, шундай иккига турли c_1 ва c_2 ($c_1 \neq c_2$) ҳақиқий сонларни танлаш мумкинлиги келиб чиқадики, уларга i, j индексларнинг ягона жуфти мос келиб, улар учун

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j) = a, \\ \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j) = b \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

комплекс сонлар бўлади.

(3) тенгликлардан

$$(c_1 - c_2)(\alpha_i + \alpha_j) = a - b,$$

бундан эса

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{a-b}{c_1 - c_2}$$

эканлиги келиб чиқади, яъни бу йиғинди комплекс сон экан. Бу ердан ва (3) тенгликларнинг ҳеч бўлмаганда биринчисидан $\alpha_i\alpha_j$ кўпайтма ҳам комплекс сон эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, α_i ва α_j элементлар комплекс коэффициентли

$$x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = 0$$

квадрат тенгламанинг илдизларидан иборат ва шунинг учун ҳам комплекс коэффициентли квадрат тенгламанинг ечими учун 38-§ да чиқарилган формуладан, уларнинг ўзлари ҳам комплекс сонлардан иборат эканлиги келиб чиқади. Демак, биз $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари орасидан, ҳатто иккита комплекс илдизни топдик ва шу билан даъвони исботладик.

Асосий теоремани тўлиқ исботлаш учун ихтиёрий комплекс коэффициентли кўпҳадни текшириш қолди, холос.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

шундай кўпҳад бўлсин. $f(x)$ нинг барча коэффициентларини қўшма комплекс сонлар билан алмаштириш орқали ҳосил бўлган

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0x^n + \bar{a}_1x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n$$

кўпҳадни оламиз ва

$$F(x) = f(x)\bar{f}(x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + \ldots + b_kx^{2n-k} + \ldots + b_{2n}$$

кўпайтмани кўрамиз, бу ерда, равшанки,

$$b_k = \sum_{i+j=k} a_i\bar{a}_j, \quad k=0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Бизга қўшма комплекс сонларнинг 18-§ дан маълум бўлган хоссаларига таяниб,

$$\bar{b}_k = \sum_{i+j=k} \bar{a}_i a_j = b_k$$

эканлигини топамиз, яъни $F(x)$ кўпҳаднинг барча коэффициентлари ҳақиқий экан.

Бу ердан юқорида исботланганга кўра $F(x)$ кўпҳад камида битта β комплекс илдизга эга эканлиги келиб чиқади:

$$F(\beta) = f(\beta)\bar{f}(\beta) = 0,$$

яъни ё $f(\beta) = 0$, ёки бўлмаса $\bar{f}(\beta) = 0$. Биринчи ҳолда теорема исботланди Агар иккинчи ҳол ўринли бўлса, яъни

$$\bar{a}_0\beta^n + \bar{a}_1\beta^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = 0$$

бўлса, у ҳолда бунга кирган барча комплекс сонларни уларнинг қўшмалари билан алмаштириб (бу эса, маълумки, тенгликни бузмайди), ушбу

$$f(\bar{\beta}) = a_0\bar{\beta}^n + a_1\bar{\beta}^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $f(x)$ кўпҳад $\bar{\beta}$ комплекс илдизга эга. Асосий теореманинг исботи тугалланди.

ЎН ИККИНЧИ БОБ

РАЦИОНАЛ КОЭФФИЦИЕНТЛИ КЎПҲАДЛАР

56*-§. Рационал сонлар майдони устида кўпҳадларнинг келтирилувчанлиги

Ҳақиқий ва комплекс сонлар майдонлари билан бир қаторда биз учун алоҳида қизиқиш уйғотадиган учинчи сонли майдон рационал сонлар майдонидан иборат; уни R орқали белгилаймиз. У сонли майдонлар ичида энг кичигидир: 43-§ да исботланганига кўра R майдон ҳар қандай сонли майдонда бутунлай ётади. Биз ҳозир рационал сонлар майдони устида кўпҳадларнинг келтирилувчанлиги ҳақидаги масала билан қизиқамиз, кейинги параграфда эса рационал коэффициентли кўпҳадларнинг рационал (бутун ёки каср) илдизлари ҳақидаги масала билан шуғулланамиз. Бу иккита турли масала эканлигини яна бир марта таъкидлаймиз: ушбу

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

кўпҳад, гарчи битта ҳам рационал илдизга эга бўлмаса-да, рационал сонлар майдони устида келтирилган.

R майдон устида кўпҳадларнинг келтирилувчанлиги ҳақида нима дейиш мумкин? Энг аввал шуни қайд қилайликки, агар коэффициентлари рационал, аммо ҳаммаси ҳам бутун бўлмаган $f(x)$ кўпҳад берилган бўлса, коэффициентларни умумий махражга келтириб ва $f(x)$ ни, масалан, k га тенг бўлган шу махражга кўпайтириб, биз энди барча коэффициентлари бутун бўлган $kf(x)$ кўпҳадни ҳосил қиламиз. $f(x)$ ва $kf(x)$ кўпҳадлар, шубҳасиз, бир хил илдизларга эга бўлади; иккинчи томондан, улар бир вақтнинг ўзида R майдон устида келтириладиган ёки келтирилмас бўлади.

Аммо биз бундан буён бутун коэффициентли кўпҳадларни текшириш билангина чегараланиш ҳуқуқига ҳозирча эга эмасмиз. Ҳақиқатан ҳам, бутун сонли $g(x)$ кўпҳад (яъни бутун коэффициентли кўпҳад) рационал сонлар майдонида келтириладиган, яъни кичик даражали рационал (умуман олганда, каср) коэффициентли кўпайтувчиларга ёйилувчан бўлсин. Бундан $g(x)$ нинг бутун коэффициентли кўпайтувчиларга ёйилувчанлиги келиб чиқадими? Бошқача қилиб айтганда, рационал сонлар майдони устида келтириладиган бутун коэффициентли кўпҳад бутун сонлар ҳалқасида келтирилмас бўлиб қолиши мумкинми?

Бу саволларга 51-§ да олиб борилганига ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида жавоб топиш мумкин. Агар бутун коэффициентли $f(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари биргаликда ўзаро туб бўлса, яъни 1 ва —1 дан фарқли умумий бўлувчиларга эга бўлмаса, у ҳолда уни *примитив* деб атаймиз. Агар рационал коэффициентли ихтиёрий $\varphi(x)$ кўпҳад берилган бўлса, уни қисқармас каср билан бирор примитив кўпҳаднинг кўпайтмаси шаклида, шу билан бирга бир қийматли равишда ифодалаш мумкин:

$$\varphi(x) = \frac{a}{b} f(x); \tag{1}$$

бунинг учун $\varphi(x)$ кўпҳад барча коэффициентларининг умумий махражини ва сўнгра бу коэффициентлар суратларининг умумий кўпайтувчиларини қавсдан ташқарига чиқариш керак; $f(x)$ нинг даражаси $\varphi(x)$ нинг даражасига тенг эканлигини қайд қиламиз. (1) ифоданинг бир қийматлилиги (ишора аниқлигида) қуйидагича исботланади:

$$\varphi(x) = \frac{a}{b} f(x) = \frac{c}{d} g(x)$$

бўлсин, бу ерда $g\ x$ —яна примитив кўпҳад. У ҳолда

$$ad\, f(x) = bcg(x).$$

Шундай қилиб, ad ва bc бутун сонли ягона кўпҳаднинг коэффициентларидан барча умумий кўпайтирувчиларни қавс ташқарисига чиқариш натижасида ҳосил қилинган ва шунинг учун ҳам улар бир-бирларидан фақат ишора билангина фарқ қилиши мумкин. Бундан, $f(x)$ ва $g(x)$ примитив кўпҳадлар ҳам бир-биридан фақат ишора билан фарқ қилиши мумкинлиги келиб чиқади.

Гаусс леммаси бутун сонли примитив кўпҳадлар учун ҳам ўринлилигича қолади:

Иккита бутун сонли примитив кўпҳаднинг кўпайтмаси яна примитив кўпҳаддир.

Ҳақиқатан ҳам, қуйидаги

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_ix^{k-i} + \ldots + a_k,$$
$$g(x) = b_0x^l + b_1x^{l-1} + \ldots + b_jx^{l-j} + \ldots + b_l$$

бутун сонли примитив кўпҳадлар берилган бўлсин ва

$$f(x)\cdot g(x) = c_0x^{k+l} + c_1x^{k+l-1} + \ldots + c_{i+j}x^{(k+l)-(i+j)} + \ldots + C_{k+1}$$

бўлсин. Агар бу кўпайтма примитив бўлмаса, у ҳолда шундай p туб сон мавжудки, у барча $c_0, b_1, \ldots, c_{k+l}$ коэффициентлар учун умумий бўлувчи вазифасини бажаради. $f(x)$ примитив кўпҳаднинг ҳамма коэффициентлари ҳам p га бўлинавермайди, масалан, a_i коэффициент p га бўлинмайдиган биринчи коэффициент бўлсин; шу каби b_j орқали биз $g(x)$ кўпҳаднинг p га бўлинмайдиган биринчи коэффициентини белгилаймиз. $f(x)$ ва $g(x)$ ларни ҳадма-ҳад кўпайтириб ва $x^{(k+l)-(i+j)}$ ни ўз ичига олувчи ҳадларни йиғиб, топамиз:

$$c_{i+j} = a_i b_j + a_{i-1}b_{j+1} + a_{i-2}b_{j+2} + \dots + a_{i+1}b_{j-1} + a_{i+2}b_{j-2} + \dots$$

Бу тенгликнинг чап томони p га бўлинади, p га ўнг томоннинг биринчи ҳадидан бошқа барча қўшилувчиларининг ҳам бўлиниши аён; дарҳақиқат, i ва j ларнинг танланишига қўйилган шартларга кўра, барча a_{i-1}, a_{i-2}, ... ва, шунингдек, b_{j-1}, b_{j-2}... коэффициентлар p га бўлинади. Бундан, $a_i b_j$ кўпайтма ҳам p га бўлиниши келиб чиқади, бинобарин p соннинг тублигига асосан a_i, b_j коэффициентлардан камида биттаси p га бўлиниши керак, аммо бу мумкин эмас. Шу билан лемманинг исботи тугалланди.

Юқорида қўйилган саволларнинг жавобига ўтайлик. Бутун коэффициентли n-даражали $g(x)$ кўпҳад рационал сонлар майдони устида келтириладиган бўлсин:

$$g(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x),$$

бу ерда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ — рационал коэффициентли кўпҳадлар ва уларнинг даражаси n дан кичик. У ҳолда

$$\varphi_i(x) = \frac{a_i}{b_i} f_i(x), \quad i = 1,\ 2,$$

бу ерда $\frac{a_i}{b_i}$ — қисқармас каср, $f_i(x)$ — примитив кўпҳад. Вундан

$$g(x) = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}\,[f_1(x) f_2(x)].$$

Бу тенгликнинг чап томони бутун сонли кўпҳад, шунинг учун ҳам ўнг томондаги $b_1 b_2$ махраж қисқариши керак. Аммо квадрат қавс ичида турган кўпҳад Гаусс леммасига асосан примитив бўлади, шунинг учун ҳам $b_1 b_2$ нинг ҳар бир туб кўпайтувчиси $a_1 a_2$ дан олинган қандайдир туб кўпайтувчи билангина қисқариши мумкин, a_i ва b_i $(i = 1{,}2)$ ўзаро туб бўлгани учун a_2 сон b_1 га, a_1 эса b_2 га қолдиқсиз бўлиниши керак;

$$a_2 = b_1 a_2', \quad a_1 = b_2 a_1'.$$

Бундан

$$g(x) = a_1' a_2' f_1(x) f_2(x).$$

$a'_1a'_2$ коэффициентни $f_1(x)$, $f_2(x)$ кўпайтувчилардан ихтиёрий бирига „қўшиб“ (масалан, $a'_1a'_2f_1(x)$ ни битта кўпайтувчи деб қараб) $g(x)$ кўпҳадни бутун коэффициентли кичик даражали кўпайтувчиларга ёйилмасини ҳосил қиламиз. Шу билан ушбу теорема исботланди:

Бутун сонлар ҳалқаси устида келтирилмас бўлган бутун коэффициентли кўпҳад рационал сонлар майдони устида ҳам келтирилмас бўлади.

Ниҳоят, энди кўпҳадларнинг рационал сонлар майдони устида келтирилувчанлигига тааллуқли масалаларда биз бутун сонли кўпҳадларни барча коэффициентлари яна бутун бўлган кўпайтувчиларга ёйилмаларини ўрганиш билан чегараланиш ҳуқуқига эга бўлдик.

Бизга маълумки, даражаси бирдан катта бўлган ҳар қандай кўпҳад комплекс сонлар майдони устида, даражаси иккидан катта бўлган ҳар қандай (ҳақиқий коэффициентли) кўпҳад эса ҳақиқий сонлар майдони устида келтирилувчан бўлади. Рационал сонлар майдони бўлган ҳолда аҳвол бутунлай бошқача: *исталган n учун рационал сонлар майдони устида келтирилмас рационал (ҳатто, бутун) коэффициентли n-даражали кўпҳадни кўрсатиш мумкин.* Бу даъвонинг исботи кўпҳадларни R майдон устида келтирилмаслигининг **Эйзенштейн аломати** деб аталувчи ушбу етарли аломатига асосланган:

Бутун коэффициентли

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳад берилган бўлсин. Агар ҳеч бўлмаганда битта усул билан қуйидаги учта шартни қаноатлантирувчи p туб сонни танлаш мумкин бўлса:

1) a_0 *юқори коэффициент p га бўлинмайди,*

2) *қолган барча коэффициентлар p га бўлинади,*

3) *озод ҳад p га бўлиниб, p^2 га бўлинмайди, у ҳолда $f(x$ кўпҳад рационал сонлар майдони устида келтирилмасдир.*

Ҳақиқатан ҳам, агар $f(x)$ кўпҳад R майдон устида келтириладиган бўлса, у иккита кичик даражали бутун коэффициентли кўпайтувчиларга ажраларди:

$$f(x) = (b_0x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k)(c_0x^l + c_1x^{l-1} + \dots + c_l)$$

бу ерда $k < n$, $l < n$, $k + l = n$. Бундан, шу тенгликнинг ҳар икки томонидаги коэффициентларни солиштириб, топамиз:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= b_kc_l, \\ a_{n-1} &= b_kc_{l-1} + b_{k-1}c_l, \\ a_{n-2} &= b_kc_{l-2} + b_{k-1}c_{l-1} + b_{k-2}c_l, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 &= b_0c_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) тенгликларнинг биринчисидан, a_n озод ҳад p га бўлингани ва p нинг тублиги учун b_k, c_l кўпайтувчилардан бири. p га бўлиниши кераклиги келиб чиқади. Уларнинг иккаласи ҳам бир вақтда p га бўлина олмайди, чунки a_n, шартга кўра, p^2 га бўлинмайди. Масалан, b_k сон p га бўлинсин, у ҳолда c_l ва p ўзаро туб. Энди (2) тенгликларнинг иккинчисига ўтамиз. Унинг чап қисми ва шунингдек, ўнг қисмидаги биринчи қўшилувчиси p га бўлинади, демак, $b_{k-1}c_l$ кўпайтма ҳам p га бўлинади; аммо c_l сон p га бўлинмагани учун b_{k-1} сон p га бўлади. Шунга ўхшаш, (2) тенгликларнинг учинчисидан b_{k-2} нинг p га бўлинишини топамиз ва ҳоказо. Ниҳоят, $(k+1)$- тенгликдан, b_0 ни p га бўлиниши келиб чиқади; лекин, у ҳолда (2) тенгликларнинг сўнгисидан a_0 нинг p га бўлиниши келиб чиқади, бу эса фаразга зид.

Исталган n учун Эйзенштейн аломатини қаноатлантирувчи, ва демак, рационал сонлар майдони устида келтирилмас n- даражали бутун сонли кўпҳадларни ёзиш анча осон. Масалан, x^n+2 шундай кўпҳаддир; унга $p=2$ да Эйзенштейн аломатини татбиқ қилиб бўлади.

Эйзенштейн аломати R майдон устида келтирилмасликнинг етарли аломатидан иборат бўлиб, аммо мутлақо зарурий эмас; агар берилган $f(x)$ кўпҳад учун Эйзенштейн аломатини қаноатлантирувчи p туб сонни топиш мумкин бўлмаса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад x^2-5x+6 каби келтириладиган бўлиши ҳам, x^2+1 каби келтирилмас бўлиши ҳам мумкин. R майдон устида келтирилмасликнинг Эйзенштейн аломатидан ташқари, камроқ аҳамиятга эга бўлган бошқа кўп етарли аломатлари мавжуд. Шунингдек, исталган бутун коэффициентли кўпҳад ҳақида у R майдон устида келтириладиганми ёки йўқлигини айтишга имкон берадиган — Кронекерга тегишли — усул ҳам мавжуд. Аммо бу жуда узундан-узоқ ва амалда деярли қўллаб бўлмайдиган усулдир.

Мисол.

$$f_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$$

кўпҳадни кўрайлик; бу ерда p—туб сон. Бу кўпҳаднинг илдизлари вазифасини бирнинг ўзидан бошқа бирнинг p- даражали илдизлари бажаради; бу илдизлар 1 билан бирга комплекс текисликнинг бирлик доирасини p та тенг бўлакка бўлгани сабабли, $f_p(x)$ кўпҳад *доирани бўлиш кўпҳади* дейилади.

Бу кўпҳадга Эйзенштейн аломатини бевосита қўллаш мумкин эмас. Аммо $x=y+1$ деб номаълумни алмаштирамиз. У ҳолда биз қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$g(y)=f_p(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}=$$

$$=\frac{1}{y}\left[y^p+py^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-2}+\ldots+py\right]=$$

$$=y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3}+\ldots+p.$$

$g(y)$ кўпҳаднинг коэффициентлари биномиал коэффициентлардан иборат бўлади, ва шунинг учун ҳам, юқори коэффициентдан бошқа барчаси p га бўлинади, аммо озод ҳад p^2 га бўлинмайди. Шундай қилиб, $g(y)$ кўпҳад Эйзенштейн критерийсига кўра R майдон устида келтирилмас. Бундан *доирани бўлиш кўпҳади* $f_p(x)$ *нинг* R *майдон устида келтирилмаслиги* келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$f_p(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$g(y) = \varphi(y+1)\psi(y+1).$$

57*-§. Бутун сонли кўпҳадларнинг рационал илдизлари

Берилган кўпҳадни рационал сонлар майдони устида келтирилмас кўпайтувчиларга ёйиш ҳақидаги масала озгина бўлса ҳам амалий жиҳатдан қониқарли ечилишга эга эмаслиги юқорида кўрсатилган эди. Аммо бу масаланинг рационал коэффициентли кўпҳаднинг чизиқли кўпайтувчиларини ажратишга, яъни унинг рационал илдизларини қидиришга тегишли бўлган хусусий ҳоли энди анча содда ва катта ҳисоблашларсиз ечилади. Ўз-ўзидан маълумки, рационал коэффициентли кўпҳадларнинг рационал илдизларини қидириш масаласи бу кўпҳадларнинг ҳақиқий илдизлари ҳақидаги умумий масалани мутлақо ҳал қилмайди, яъни тўққизинчи бобда баён этилган усуллар ва натижалар ўз аҳамиятини рационал коэффициентли кўпҳадлар учун ҳам батамом сақлайди.

Рационал коэффициентли кўпҳадларнинг рационал илдизларини қидириш ҳақидаги масалага кириша туриб, шуни қайд қиламизки, аввалги параграфда кўрсатилгани каби бутун коэффициентли кўпҳадларни кўриш билангина чегараланиш мумкин; шу билан бирга илдизлар бутун ва каср бўлган ҳолни алоҳида текширамиз.

Агар α *бутун сон бутун коэффициентли* $f(x)$ *кўпҳаднинг илдизи вазифасини бажарса, у ҳолда* α *бу кўпҳад озод ҳадининг бўлувчиси бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

бўлсин. $f(x)$ ни $x-\alpha$ га бўламиз:

$$f(x) = (x-\alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}).$$

Бўлишни 22-§ да баён этилган Горнер методи билан бажариб, *бўлинманинг барча коэффициентлари, улар қатори-*

да b_{n-1} *ҳам, бутун сонлардан иборат эканлигини* ҳосил қиламиз ва

$$a_n = -\alpha b_{n-1} = \alpha(-b_{n-1})$$

бўлгани учун бизнинг даъвоимиз исботланди¹).

Шундай қилиб, агар бутун сонли $f(x)$ кўпҳад бутун илдизларга эга бўлса, у ҳолда улар озод ҳаднинг бўлувчилари орасидан топилади. Демак, озод ҳаднинг мумкин бўлган барча бўлувчиларини: мусбатларини ҳам, манфийларини ҳам синаш зарур; агар улардан бирортаси ҳам кўпҳаднинг илдизи бўлмаса, у ҳолда бизнинг кўпҳад бутун илдизларга умуман эга эмас.

Озод ҳаднинг барча бўлувчиларини синаш кўпҳаднинг қийматини бўлувчилардан ҳар бирини номаълум ўрнига бевосита қўйиш билан эмас, балки Горнер методи билан ҳисоблаганда ҳам жуда узундан-узоқ бўлиб қолиши мумкин. Қуйидаги мулоҳазалар бу ҳисоблашларни бирмунча соддалаштиришга имкон беради. Аввало, 1 ва −1 ҳар доим озод ҳаднинг бўлувчиларидан иборат булгани учун $f(1)$ ва $f(-1)$ ни ҳисоблаймиз, бу эса қийинчилик туғдирмайди. Сўнгра, агар α бутун сон $f(x)$ учун илдиз бўлса,

$$f(x) = (x-\alpha)\,q(x)$$

бўлиб, у ҳолда юқорида кўрсатилганига кўра $q(x)$ бўлинманинг барча коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлади ва шунинг учун

$$\frac{f(1)}{\alpha-1} = -q(1),\ \frac{f(-1)}{\alpha+1} = -q(-1)$$

бўлинмалар бутун сонлар бўлиши лозим. Шундай қилиб, *озод ҳаднинг (1 ва −1 сонлардан ташқари) шундай* α *бўлувчиларинигина текшириш керакки, улар учун* $\frac{f(1)}{\alpha-1}$, $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ *бўлинмаларнинг ҳар бири ҳам бутун сон бўлсин.*

Мисоллар. 1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топинг.

Озод ҳаднинг бўлувчилари вазифасини ±1, ±2, ±3, ±6 сонлар бажаради. $f(1) = -8$, $f(-1) = -8$ бўлгани учун 1 ва −1 илдизлар эмас. Сўнгра

$$\frac{-8}{2+1},\ \frac{-8}{-2-1},\ \frac{-8}{6-1},\ \frac{-8}{-6-1}$$

---

¹) Бу теоремани a_n озод ҳад (ишора аниқлигида) $f(x)$ кўпҳад барча илдизларининг кўпайтмасидан иборат эканлигига мурожаат этиш орқали исботлаш хато бўлар эди, бу илдизлар ичида касрлари ҳам, иррационаллари ҳам, комплекслари ҳам учраши мумкин ва шунинг учун ҳам бу илдизларнинг α дан бошқа барчасининг кўпайтмаси бутун бўлишини аввалдан айтиш мумкин эмас

каср сонлардир, ва шунга кўра 2, —2, 6, —6 бўлувчилар ташлаб юборилиши керак, ваҳоланки,

$$\frac{-8}{3-1}, \ \frac{-8}{3+1}, \ \frac{-8}{-3-1}, \ \frac{-8}{-6+1}$$

бутун сонлардир ва шунинг учун ҳам 3 ва —3 бўлувчилар ҳали синаб кўрилиши керак Горнер методини қўллаймиз:

$$-3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline 1 & -5 & 14 & -48 \end{array} \right.,$$

яъни $f(-3) = -48$, ва шунинг учун ҳам —3 бўлувчи $f(x)$ учун илдиз бўлмайди. Ниҳоят

$$3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right.,$$

яъни $f(3) = 0$; 3 сони $f(x)$ учун илдиз вазифасини бажаради. Бир йўла $f(x)$ ни $x-3$ га бўлгандаги бўлинманинг коэффициентларини ҳам топдик:

$$f(x) = (x-3)(x^2+x+2).$$

Равшанки, x^2+x+2 бўлинма учун 3 сони илдиз бўла олмайди, яъни бу сон $f(x)$ учун каррали илдиз эмас.

2. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топинг.

Бу ерда озод ҳаднинг бўлувчилари ± 1 ва ± 2 дан иборатдир. Сўнгра, $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$, яъни 1 ва —1 илдиз вазифасини бажармайди. Ниҳоят,

$$\frac{1}{2+1} \text{ ва } \frac{-1}{-2-1}$$

сонлар каср бўлгани учун 2 ва —2 ҳам илдиз бўлмайди ва, демак, $f(x)$ умуман бутун илдизга эга эмас

Каср илдизлар ҳақидаги масалага ўтамиз.

Агар юқори коэффициенти бирга тенг бўлган бутун сонли кўпҳад рационал илдизга эга бўлса, у ҳолда бу илдиз бутун сон бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, коэффициентлари бутун сонлар бўлган

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_n$$

кўпҳад $\frac{b}{c}$ қисқармас каср илдизга эга бўлсин, яъни

$$\frac{b^n}{c^n} + a_1 \cdot \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}} + a_2 \frac{b^{n-2}}{c^{n-2}} + \ldots, + a_n = 0.$$

Бундан

$$\frac{b^n}{c} = -a_1b^{n-1} - a_2b^{n-2}c - \ldots - a_nc^{n-1},$$

яъни қисқармас каср бутун сонга тенг, бу мумкин эмас.

Бутун сонли

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳаднинг барча рационал (каср ва бугун) илдизларини ҳосил қилиш учун

$$\varphi(y) = y^n + a_1y^{n-1} + a_0a_2y^{n-2} + \ldots + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n$$

кўпҳаднинг барча бутун илдизларини топиб, сўнгра уларни a_0 га бўлиш керак.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ни a_0^{n-1} га кўпайтирамиз, сўнгра $y=a_0x$ деб номаълумни алмаштирамиз. Равшанки,

$$\varphi(y) = \varphi(a_0x) = a_0^n\,{}^1f(x).$$

Бундан $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари $\varphi(y)$ кўпҳад илдизларини a_0 га бўлгандаги бўлинмага тенг эканлиги келиб чиқади. Хусусан, $f(x)$ нинг рационал илдизларига $\varphi(y)$ нинг ҳам рационал илдизлари мос келади; аммо $\varphi(y)$ нинг юқори коэффициенти бирга тенг бўлгани учун бу илдизлар фақат бутун бўлиши мумкин, биз эса уларни қидириш усулига эгамиз.

Мисол. $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$ кўпҳаднинг рационал илдизларини топинг.

$f(x)$ ни 3^3 га кўпайтириб ва $y = 3x$ деб топамиз:

$$\varphi(y) = y^4 + 5y^3 + 3y^2 + 45y - 54.$$

$\varphi(y)$ кўпҳаднинг бутун илдизларини қидирамиз $\varphi(1)$ ни Горнер методи ёрдамида топамиз:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & 3 & 45 & -54 \\ \hline 1 & 1 & 6 & 9 & 54 & 0 \end{array}$$

Шундай қилиб, $\varphi(1) = 0$, яъни 1 сони $\varphi(x)$ учун илдиз, шу билан бирга

$$\varphi(y) = (y-1)\,q(y),$$

бу ерда

$$q(y) = y^3 + 6y^2 + 9y + 54.$$

$q(v)$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топамиз. Озод ҳаднинг бўлувчилари вазифасини ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18, ± 27, ± 54 сонлари бажаради. Бу ерда

$$q(1) = 70, \ q(-1) = 50.$$

Ҳар бир α бўлувчи учун $\frac{q(1)}{\alpha - 1}$ ва $\frac{q(-1)}{\alpha + 1}$ ни ҳисоблаб, $\alpha = -6$ дан бошқа барча бўлувчилар ташлаб юборилиши кераклигини топамиз. Бу бўлувчини синаймиз:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ \hline -6 & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

Шундай қилиб, $q(-6) = 0$, яъни -6 бўлувчи $q(x)$ учун, ва демак, $\varphi(y)$ учун ҳам илдиз вазифасини бажаради.

Демак, $\varphi(y)$ кўпҳад 1 ва -6 бутун илдизларга эга. Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг рационал илдизлари $\frac{1}{3}$ ва -2 сонлар ва фақат шуларгина бўлади.

Яна бир марта таъкидлаймизки, юқорида баён қилинган усуллар фақат бутун коэффициентли кўпҳадлар учун ва уларнинг фақат рационал илдизларини қидириш учунгина қўлланилиши мумкин.

58-§*. Алгебраик сонлар

Рационал коэффициентли n-даражали ҳар қандай кўпҳад комплекс сонлар майдонида n та илдизга эга, улардан баъзилари (ёки ҳатто барчаси) рационал сонлар майдонидан ташқарида ётиши мумкин. Аммо ҳар қандай комплекс ёки ҳақиқий сон ҳам рационал коэффициентли бирор кўпҳадининг илдизи вазифасини бажаравермайди. Бундай кўпҳадларнинг илдизларидан иборат бўлган комплекс (хусусан, ҳақиқий) сонлар *трансцендент* сонларга қарама-қарши ўлароқ *алгебраик* сонлар деб аталади. Барча рационал сонлар биринчи даражали рационал коэффициентли кўпҳадларнинг илдизлари сифатида ва, шунингдек, $\sqrt[n]{a}$ кўринишдаги ҳар қандай радикал $x^n - a$ иккиҳаднинг илдизи сифатида алгебраик сонлар жумласига тегишлидир. Иккинчи томондан, математик анализнинг катта курсларида e соннинг—натурал логарифмлар системаси асосининг, ва шунингдек, элементар геометриядан маълум бўлган π соннинг трансцендентлиги исботланади

Агар α сон алгебраик бўлса, у ҳатто бутун коэффициентли бирор кўпҳаднинг илдизи ва демак, бу кўпҳаднинг бутун коэффициентли келтирилмас бўлувчиларидан бирининг илдизи бўлади. Агар α илдизи бўлган бутун сонли келтирилмас кўпҳад ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида бир қийматли аниқланган, яъни агар бу кўпҳаднинг коэффициентлари биргаликда ўзаро туб бўлсин деб талаб қўйилса (яъни кўпҳад примитив бўлса), у тўла бир қийматли аниқланган бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар α келтирилмас $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар учун илдиз вазифасини бажарса, у ҳолда бу кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси бирдан фарқли ва шунинг учун ҳам бу кўпҳадлар, уларнинг келтирилмаслиги сабабли бир-бирларидан нолинчи даражали кўпайтувчигагина фарқ қилиши мумкин.

Биргина келтирилмас (R майдон устида) кўпҳаднинг илдизларидан иборат бўлган алгебраик сонлар ўзаро *қўшма*[1] дейилади. Демак, барча алгебраик сонлар тўплами ўзаро қўшма бўлган сонларнинг кесишмайдиган чекли синфларига ажралади. Ҳар қандай рационал сон биринчи даражали кўпҳаднинг илдизи сифатида ўзидан фарқли қўшма сонларга эга эмас, ва бу хосса рационал сонлар учун характерлидир: рационал бўлмаган ҳар қандай алгебраик сон даражаси бирдан катта бўлган келтирилмас кўпҳаднинг илдизидан иборат ва шу сабабли, унинг учун ўзидан фарқли қўшма сонлар мавжуд

Барча алгебраик сонлар тўплами комплекс сонлар майдонининг қисм майдонидир. Бошқача сўз билан айтганда,

---

[1] Бу тушунчани комплекс сонларнинг қўшмалиги билан аралаштириб юбормаслик керак.

алгебраик сонларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмаси ҳам алгебраик сонлардир.

Ҳақиқатдан ҳам, α ва β алгебраик сонлар берилган бўлсин. $\alpha_1=\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ орқали α билан қўшма бўлган барча сонларни, $\beta_1=\beta, \beta_2, \ldots, \beta_s$ орқали β билан қўшма сонларни, $f(x)$ ва $g(x)$ орқали мос равишда α ва β илдизларга эга бўлган келтирилмас кўпҳадларни белгилаймиз. Илдизлари мумкин бўлган барча $\alpha_i+\beta_j$ йиғиндилардан иборат бўлган кўпҳадни ёзамиз. У

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i+\beta_j)]$$

бўлади. Бу кўпҳаднинг коэффициентлари, равшанки, барча α_i ларнинг ўринларини ўзаро алмаштирганда ва, шунингдек, барча β_j ларнинг ўринларини ўзаро алмаштирганда ўзгармайди. Демак, улар номаълумларнинг икки системаси бўйича симметрик кўпҳадлар ҳақидаги теоремага асосан (53-§ нинг охирига қаранг) $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар коэффициентларининг кўпҳадларидан иборат. Бошқача сўз билан айтганда, $\varphi(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари рационал сонлардан иборат, ва шунинг учун ҳам унинг илдизларидан бири бўлган $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$ сон алгебраикдир. Худди шу равишда

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i-\beta_j)]$$

ва

$$\varkappa(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_i\beta_j)$$

кўпҳадлар ёрдамида $\alpha-\beta$ ва $\alpha\beta$ сонларнинг алгебраиклиги исботланади.

Бўлинманинг алгебраиклигини кўрсатиш учун, агар α—нолдан фарқли алгебраик сон бўлса, у ҳолда α^{-1} ҳам алгебраик сон бўлишини кўрсатиш кифоя, α рационал коэффициентли

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

кўпҳаднинг илдизи вазифасини бажарсин. У ҳолда, равшанки, α^{-1} сон рационал коэффициентли

$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

кўпҳаднинг илдизи бўлади, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Ҳозир исботланган теоремадан рационал сон билан радикалнинг исталган йиғиндиси, масалан, $1+\sqrt[3]{2}$ ва шунингдек, радикалларнинг исталган йиғиндиси, масалан, $\sqrt{3}+\sqrt[7]{5}$ алгебраик сонлар бўлади. Аммо биз ҳозирча „икки қаватли" радикаллар шаклида ёзилган сонларнинг, масалан, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ сонининг алгебраиклигини айта олмаймиз. Бу фақат ушбу теоремадан келиб чиқади:

Агар ω *коэффициентлари алгебраик сонлардан иборат бўлган*

$$\varphi(x) = x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \lambda x + \mu$$

кўпҳаднинг илдизи вазифасини бажарса, у ҳолда ω *ҳам алгебраик сон бўлади.*

$\alpha_i, \beta_j, \ldots, \lambda_s, \mu_t$ лар мос равишда $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ лар билан қўшма бўлган сонларни бирин-кетин қабул қилсин, шу билан бирга $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta, \ldots, \lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$ бўлсин.

$$\varphi_{i,j, \ldots, s,t}(x) = x^n + \alpha_i x^{n\ 1} + \beta_j x^{n-2} + \ldots + \lambda_s x + \mu_t$$

кўринишдаги мумкин бўлган барча кўпҳадларни оламиз, демак,

$$\varphi_{1,1,\ldots 1,1}(x) = \varphi(x)$$

ва барча бундай кўпҳадларнинг

$$F(x) = \prod_{i, j, \ldots, s, t} \varphi_{i,j,\ldots,s,t}(x)$$

кўпайтмасини оламиз. $F(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари, равшанки, $\alpha_i, \beta_j, \ldots, \lambda_s, \mu_t$ системаларнинг ҳар бири бўйича симметрик ва шу сабабли (яна 53-§ даги теоремага асосан) бу коэффициентлар илдизлари вазифасини мос равишда $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$ лар бажарган рационал коэффициентли келтирилмас кўпҳадлар коэффициентларининг кўпҳадларидир, яъни ўзлари ҳам рационал сонлардир. ω сон $\varphi(x)$ учун илдиз бўла туриб, шу билан бирга рационал коэффициентли $F(x)$ кўпҳаднинг ҳам илдизи бўлади, яъни алгебраик сон бўлади.

Бу теоремани $\omega = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ сонга қўллаймиз. $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ сон аввалги теоремага асосан алгебраик ва шунинг учун ҳам ω алгебраик коэффициентли $x^2 - \alpha$ кўпҳаднинг илдизидир, яъни ўзи ҳам алгебраик. Умуман, ҳозир исботланган теоремаларнинг иккаласини бир неча марта қўллаб, китобхон ҳеч қандай қийинчиликсиз ушбу натижага келади:

Рационал сонлар майдони устида радикалларда ёзилган (яъни радикалларнинг исталганча мураккаб, умумий ҳолда „кўп қаватли“ комбинациялари орқали ифодаланувчи) ҳар қандай сон алгебраик сон бўлади.

Радикалларда ёзилувчи алгебраик сонлар майдон ташкил этиши равшан. Аммо шуни эсда тутиш керакки, 38-§ охирида (исботсиз) келтирилган фикрдан, бу майдон барча алгебраик сонлар майдонининг бир қисмидангина иборат эканлиги келиб чиқади.

Юқорида иккита сон: e ва π сонларнинг трансцендентлиги қайд қилинган эди. Аммо ҳақиқатда трансцендент сонлар чексиз кўп. Бунинг устига тўпламлар назариясига тегишли бўлган тушунчалар ва методлардан фойдаланиб, трансцендент сонлар ҳатто алгебраик сонлардан кўп эканлигини кўрсатамиз; бу фикрнинг асл мазмуни қуйида ойдинлаштирилади.

Агар M чексиз тўплам билан натурал сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, яъни унинг элементларини барча натурал сонлар ёрдамида номерлаш мумкин бўлса, бундай тўплам *саноқли*, акс ҳолда *саноқсиз* дейилади.

1-лемма. *Ҳар қандай M чексиз тўплам саноқли қисм тўпламга эга.*

Ҳақиқатан ҳам, M дан ихтиёрий a_1 элемент оламиз. Сўнгра, a_1 дан фарқли a_2 элемент танлаймиз. Умуман, M дан n та турли $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элемент танланган бўлсин. M тўплам чексиз бўлганлиги сабабли, бу элементларнинг олиниши билан унинг тугалланиши мумкин эмас, у ҳолда булардан фарқли a_{n+1} элементни кўрсатиш мумкин. Бу процессни давом эттириб, биз M да

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

элементлардан ташкил топган чексиз қисм тўпламни топамиз; бу қисм тўпламнинг саноқлилиги аён.

2-лемма. *A саноқли тўпламнинг ҳар қандай B чексиз қисм тўплами саноқлидир.*

A тупламни, уни саноқли эканлигидан,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин a_{k_1} (1) кетма-кетликнинг B га тегишли биринчи элементи бўлсин, a_k —худди шу хоссага эга бўлган иккинчи элементи ва ҳоказо бўлсин. $a_{k_n} = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ деб B қисм тўпламнинг элементлари

$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

кетма-кетликни ташкил этишини ҳосил қиламиз, яъни B қисм тўплам саноқли тўпламдир.

3-лемма. *Жуфт-жуфти билан умумий элементларга эга бўлмаган чекли тўпламларнинг саноқли сондаги бирлашмаси саноқли тўпламдир.*

Ҳақиқатан ҳам,

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

чекли тўпламлар берилган бўлсин. B уларнинг бирлашмаси бўлсин. Агар чекли A_1 тўпламнинг элементларини ихтиёрий равишда номерлаб, сўнгра A_2 тўплам элементларига ўтиб номерлашни давом эттирсак ва ҳоказо, у ҳолда, равшанки, B тўпламнинг барча элементларини номерлаб чиқамиз.

4-лемма. *Умумий элементларга эга бўлмаган иккита саноқли тўпламнинг бирлашмаси саноқли тўпламдир.*

Элементлари

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

бўлган A саноқли тўплам ва элементлари бўлган B саноқли тўплам берилган

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

бўлиб, C бу тўпламларнинг бирлашмаси бўлсин. Агар

$$a_n = c_{2n-1}, \quad b_n = c_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

десак, у ҳолда C тўпламнинг барча элементлари

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}, c_{2n}, \ldots$$

кетма-кетлик кўринишида ифода этилади, бу эса C тўпламнинг саноқли эканлигини исботлайди.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз:

Барча алгебраик сонлар тўплами саноқли тўпламдир.

Аввал бир номаълумли бутун коэффициентли барча кўпҳадлар тўплами саноқли эканлигини исботлаймиз. Агар

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

шундай кўпҳад бўлиб, шу билан бирга бу кўпҳад нолдан фарқли бўлса, у ҳолда

$$h_f = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

натурал сонни бу кўпҳаднинг *баландлиги* деб атаймиз. Берилган h баландликка эга бўлган бутун сонли кўпҳадлар сони чекли сондангина иборатлиги равшан. Бу тўпламни M_h орқали белгилаймиз. Бундан ташқари, M_0 орқали битта нолдан ташкил топган тўпламни белгилаймиз. Бутун сонли барча кўпҳадлар тўплами $M_0, M_1, M_2, \ldots M_h, \ldots$ чекли тўпламларнинг саноқли сондаги бирлашмасидан иборат, яъни 3-лемма бўйича у саноқли.

Бундан, 2-леммага асосан, бутун сонли барча *примитив келтирилмас кўпҳадларнинг тўплами ҳам саноқли* эканлиги келиб чиқади. Шу билан бирга, биз биламизки ҳар қандай алгебраик сон ягона примитив келтирилмас кўпҳаднинг илдизидан иборат. Демак, барча бундай кўпҳадларнинг илдизларини тўплаб, яъни чекли тўпламларнинг саноқли сондаги бирлашмасини олиб, биз барча алгебраик сонлар тўпламини ҳосил қиламиз, шундай қилиб, 3-леммага кўра бу тўплам саноқли тўпламдир.

Ниҳоят, ушбу теоремани исботлаймиз:

Барча трансцендент сонлар тўплами саноқсиз.

Аввал, ноль ва бир орасида ётган ($0 < x < 1$) барча x ҳақиқий сонлар тўплами F ни кўрамиз ва *бу тўпламнинг саноқсиз тўплам эканлигини* исботлаймиз. Маълумки, мазкур x сонларнинг ҳар бирини тўғри чексиз ўнли каср

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

шаклида ифодалаш мумкин ва агар бирор $n = N$ дан бошлаб, барча n лар учун $a_n = 9$ бўлган касрлар қаралмаса, бу ифода бир қийматли бўлади; аксинча, кўрсатилган шаклдаги ҳар қандай каср F тўпламнинг бирор x сонига тенг. Энди F ни саноқли тўплам дейлик, яъни барча x сонларни

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \tag{2}$$

кетма-кетлик шаклида ёзиш мумкин бўлсин.

$$x_k = 0, \alpha_{k1} \alpha_{k2} \ldots \alpha_{kn} \ldots$$

x_k соннинг чексиз ўнли каср шаклидаги ифодаси бўлсин. Энди β_1 ни x_1 касрнинг биринчи ўнли рақамидан фарқли, яъни $\beta_1 \neq \alpha_{11}$, β_2 ни x_2 касрнинг иккинчи ўнли рақамидан фарқли, яъни $\beta_2 \neq \alpha_{22}$, ва умуман, $\beta_n \neq \alpha_{nn}$ деб

$$0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots \tag{3}$$

чексиз ўнли касрни ёзамиз. Бундан ташқари, β_n рақамлар ичида 9 рақамидан фарқлилари чексиз кўп деб фараз қиламиз. Бу барча шартларни қаноатлантирувчи (3) касрнинг мавжудлиги аён. Демак, у F тўпламдан олинган сондир, аммо ўзининг тузилиши бўйича (2) кетма-кетликнинг барча сонларидан фарқли. Бу қарама-қаршилик F тўпламнинг саноқсизлигини исботлайди.

Бундан *барча комплекс сонлар тўпламининг саноқсизлиги* келиб чиқади; агар комплекс сонлар тўплами саноқли бўлганда эди, у ҳолда 2-леммага асосан у F саноқсиз қисм тўплам F ни ўз ичига ола олмаган бўлар эди. Барча трансцендент сонлар тўпламининг барча алгебраик сонларнинг саноқли тўплами билан бирлашмаси барча комплекс сонлар тўпламидан иборатлиги, яъни саноқсиз бўлганлиги учун, 4-леммага асосан, барча трансцендент сонлар тўпламининг саноқсизлиги равшандир.

Биз исботлаган икки теорема, 1-леммага асосан, трансцендент сонлар тўплами алгебраик сонлар тўпламига қараганда ҳақиқатан ҳам элементларга анчагина бой эканлигини, яъни „қувватлироқ“ эканлигини кўрсатади.

ЎН УЧИНЧИ БОБ

МАТРИЦАНИНГ НОРМАЛ ФОРМАСИ

59-§. λ-матрицаларнинг эквивалентлиги

Биз чизиқли алгебрага алоқадор бўлган масалаларга яна бир карра қайтамиз. Китобхон 7- бобни ўрганиш давридаёқ, матрицаларнинг ўхшашлиги қандай муҳим роль ўйнашига ишонч ҳосил қилган эди. Чунончи, иккита n-тартибли квадрат матрица n ўлчовли чизиқли фазонинг (турли базаларда) ягона чизиқли алмаштиришини берганда ва фақат шундагина, улар ўхшашдир. Аммо, биз ҳозирча, берилган иккита конкрет матрица ўхшашми ёки йўқми деган саволга жавоб бера олмаймиз. Иккинчи томондан, биз ҳозирча берилган A матрицага ўхшаш барча матрицалар орасида, у ёки бу маънода энг содда кўринишга эга бўлган матрицани топишни билмаймиз ва ҳатто, A матрицани диагонал матрицага ўхшашлигини таъминловчи шартлар ҳақидаги масала ҳам 33-§ да битта хусусий ҳолдагина кўрилган эди. Ушбу бобда худди шу масалалар бирданига асосий P майдон ихтиёрий бўлган ҳол учун қаралади.

Аввало, шундай n-тартибли квадрат матрицаларни ўрганиш билан шуғулланамизки, уларнинг элементлари вазифасини бир номаълум λ нинг коэффициентлари P майдондан олинган ихтиёрий даражали кўпҳадлари бажаради. Бундай матрицалар *кўпҳадли матрицалар, полиномиал матрицалар,* ёки қисқача, λ-*матрицалар* дейилади. Элементлари P майдондан олинган ихтиёрий A квадрат матрицанинг $A-\lambda F$ характеристик матрицаси λ-матрицанинг мисоли бўлиб хизмат қилади; бу матрицанинг бош диагоналида биринчи даражали кўпҳадлар, бош диагоналидан ташқарида эса нолинчи даражали кўпҳадлар ёки ноллар туради. Элементлари P майдондан олинган ҳар қандай матрица ҳам (қисқалик учун бундай матрицаларни *сонли матрицалар* деб атаймиз) λ- матрицаларнинг хусусий ҳолидан иборат бўлади: унинг элементлари нолинчи даражали кўпҳадлар ёки ноллардан иборатдир.

Ушбу

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda)\ldots a_{1n}(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(\lambda)\ldots a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

λ-матрица берилган бўлсин. Бу матрицани *элементар алмаштиришлар* деб қуйидаги тўртта турдаги алмаштиришларни айтамиз:

1) A (λ) матрицанинг ихтиёрий сатрини P майдондан олинган нолдан фарқли ихтиёрий α сонга кўпайтириш;

2) A (λ) матрицанинг ихтиёрий устунини P майдондан олинган нолдан фарқли ихтиёрий α сонга кўпайтириш;

3) A (λ) матрицанинг ихтиёрий j-сатри элементларини P $[\lambda]$ ҳалқадан олинган ихтиёрий φ (λ) кўпҳадга кўпайтириб, A (λ) нинг ихтиёрий i-сатрига $(i \neq j)$ қўшиш.

4) A (λ) матрицанинг ихтиёрий j-устун элементларини $P[\lambda]$ ҳалқадан олинган ихтиёрий φ (λ) кўпҳадга кўпайтириб, A (λ) нинг ихтиёрий i-устунига $(i \neq j)$ қўшиш.

λ-матрицани элементар алмаштиришларнинг ҳар бири учун тескари элементар алмаштириш мавжуд эканлигини кўриш осон. Масалан, 1) алмаштириш учун тескари алмаштириш ўша сатрни $\alpha \neq 0$ шартга асосан мавжуд бўлган α^{-1} сонга кўпайтиришдан иборат бўлган алмаштиришдир; i-сатрга j-сатрни $-\varphi$ (λ)га кўпайтириб қўшишдан иборат бўлган алмаштириш 3) алмаштиришга тескари алмаштиришдир.

A (λ) матрицада бир нечта алмаштириш ёрдамида исталган иккита сатр ёки иккита устуннинг ўрнини алмаштириш мумкин.

A (λ)матрицада, масалан, i-ва j-сатрларнинг ўрнини алмаштириш керак бўлсин. Буни тўртта элементар алмаштириш ёрдамида бажариш мумкинлигини қуйидаги схема кўрсатади:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} i+j \\ -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

Бу ерда қуйидаги алмаштиришлар кетма кет бажарилган: а) i-сатрга j-сатр қўшилган; б) j-сатрдан янги i-сатр айирилган; в) янги i-сатрга янги j-сатр қўшилган; г) янги j-сатр -1 га кўпайтирилган.

Агар $A(\lambda)$ матрицадан $B(\lambda)$ матрицага чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали ўтиш мумкин бўлса, у ҳолда $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ матрицаларни *эквивалент* λ- матрицалар деймиз ва буни $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ каби ифодалаймиз. Ҳар қандай элементар алмаштириш учун тескари элементар алмаштириш мавжудлиги сабабли, бу эквивалентлилик муносабати, шубҳасиз, рефлексив ва транзитив, ва шунингдек, ҳар бир элементар алмаштириш учун тескари алмаштиришнинг мавжудлигига кўра симметрик ҳамдир. Бошқача қилиб айтганда, *P майдон устида барча n-тартибли квадрат λ- матрицалар эквивалент матрицаларнинг кесишмайдиган синфларига ажралади.*

Бизнинг яқин орадаги мақсадимиз берилган $A(\lambda)$ матрицага эквивалент бўлган барча λ- матрицалар ичида мумкин қадар содда кўринишга эга бўлган матрицани излашдан иборат.

Бунинг учун ушбу тушунчани киритамиз. Қуйидаги учта хоссага эга бўлган λ-матрицани *каноник λ-матрица* дейилади:

а) бу матрица диагонал, яъни

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

кўринишга эга;

б) ҳар қандай $e_i(\lambda)$, $i = 2, 3, \ldots, n$ кўпҳад $e_{i-1}(\lambda)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинади;

в) ҳар қайси $e_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ кўпҳаднинг юқори коэффициенти, агар бу кўпҳад нолдан фарқли бўлса, бирга тенг.

Шуни қайд қиламизки, агар (1) каноник λ-матрицанинг бош диагоналида турувчи $e_i(\lambda)$ кўпҳадлар ичида нолга тенглари учраса, у ҳолда улар б) хоссага асосан бош диагоналда албатта охирги ўринларни эгаллайди. Иккинчи томондан, агар $e_i(\lambda)$ кўпҳадлар ичида нолинчи даражали кўпҳадлар учраса, у ҳолда в) хоссага асосан уларнинг ҳаммаси 1 га тенг ва б) хоссага биноан, улар (1) матрицанинг бош диагоналида биринчи ўринларни эгаллайди.

Хусусан, каноник λ-матрицалар қаторига баъзи сонли матрицалар, шу жумладан, бирлик ва ноль матрицалар киради.

Ҳар қандай λ-матрица бирор каноник λ-матрицага эквивалент, яъни бошқача қилиб айтганда, у элементар алмаштиришлар орқали каноник кўринишга келтирилади.

Бу теоремани қаралаётган λ-матрицаларнинг тартиби n бўйича индукция орқали исботлаймиз. Дарҳақиқат, $n = 1$ да

$$A(\lambda) = (a(\lambda))$$

бўлади. Агар $a(\lambda) = 0$ бўлса, у ҳолда матрицамиз каноникдир. Агар $a(\lambda) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $a(\lambda)$ кўпҳадни унинг юқори коэффициентига бўлиш кифоя—бу матрицани элементар алмаштириш бўлади ва биз каноник матрицани ҳосил қиламиз.

Теорема $(n-1)$-тартибли λ-матрицалар учун исботланган бўлсин. n-тартибли ихтиёрий λ-матрица $A(\lambda)$ ни қараймиз. Агар у ноль матрица бўлса, у ҳолда бу матрица аввалданоқ каноник бўлади ва исботнинг ҳожати йўқ. Шунинг учун ҳам, $A(\lambda)$ матрица элементлари орасида нолдан фарқлилари мавжуд деб ҳисоблаймиз.

Агар керак бўлса, $A(\lambda)$ матрицанинг сатрлари ва устунларининг ўринларини алмаштириб, нолдан фарқли элементлардан бирортасини чапки юқори бурчакка келтириш мумкин. Шундай қилиб, $A(\lambda)$ матрицага эквивалент бўлган λ-матрицалар ичида чапки юқори бурчагида нолдан фарқли кўпҳад турган матрицалар ҳам мавжуд. Барча шундай матрицаларни кўрамиз.

Бу матрицаларнинг чапки юқори бурчагида турувчи кўпҳадлар турли даражаларга эга бўлиши мумкин. Аммо кўпҳаднинг даражаси натурал сондир, натурал сонларнинг бўш бўлмаган ҳар қандай тўпламида эса энг кичик сон мавжуд. Демак, $A(\lambda)$ матрицага эквивалент бўлган ва чапки юқори бурчагида нолдан фарқли элементга эга бўлган барча λ-матрицалар ичида чапки юқори бурчагида мумкин бўлган энг кичик даражага эга бўлган кўпҳад турган бундай матрицалардан бирини топиш мумкин. Ниҳоят, бу матрицанинг биринчи сатрини мазкур кўпҳаднинг юқори коэффициентига бўлиб, биз $A(\lambda)$ матрицага эквивалент бўлган

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & b_{12}(\lambda) \dots b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) \dots b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots \\ b_{n1}(\lambda) \dots & b_{2n}(\lambda) \dots b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

шундай λ-матрицани ҳосил қиламизки, бу матрицада $e_1(\lambda) \neq 0$ ва бу кўпҳаднинг юқори коэффициенти 1 га тенг ва бу ҳосил қилинган матрицадан элементар алмаштиришларнинг ҳеч қандай комбинацияси орқали чапки юқори бурчагида кичик даражали нолдан фарқли кўпҳад турган матрицага ўтиш мумкин эмас.

Ҳосил қилинган матрицанинг биринчи сатр ва биринчи устун элементларининг барчаси $e_1(\lambda)$ га қолдиқсиз бўлинишини исботлаймиз. Масалан, $2 \leqslant j \leqslant n$ учун

$$b_{1j}(\lambda) = e_1(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda)$$

бўлсин, бу ерда, агар $r(\lambda)$ нолдан фарқли бўлса, у ҳолда унинг даражаси $e_1(\lambda)$ нинг даражасидан кичик. У ҳолда матрицамизнинг j-устунидан унинг $q(\lambda)$ га кўпайтирилган биринчи устунини айириб, сўнгра биринчи ва j-устунларнинг ўрнини алмаштириб, биз $A(\lambda)$ матрицага эквивалент бўлган шундай матрицага келамизки, унинг чапки юқори бурчагида $r(\lambda)$ кўпҳад, яъни даражаси $e_1(\lambda)$ нинг даражасидан кичик бўлган кўпҳад туради, бу эса $e_1(\lambda)$ кўпҳаднинг танланишига зид. Бундан $r(\lambda) = 0$ эканлиги келиб чиқади, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энди матрицамизнинг j-устунидан унинг $q(\lambda)$ га кўпайтирилган биринчи устунини айириб, биз $b_{1j}(\lambda)$ элементни ноль билан алмаштирамиз. Бундай алмаштиришларни $j=2, 3, \dots, n$ учун бажариб, биз барча $b_{1j}(\lambda)$ элементларни ноллар билан алмаштирамиз. Шунга ўхшаш усул билан барча $b_{l1}(\lambda)$, $l = 2, 3, \dots, n$ элементлар ҳам ноллар билан алмаштирилади. Демак, биз $A(\lambda)$ *матрицага эквивалент бўлган шундай матрицага* *келамизки, унинг чап юқори бурчагида $e_1(\lambda)$ кўпҳад туради, биринчи сатр ва биринчи устуннинг қолган барча элементлари эса нолга тенг:*

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Индуктив фаразга асосан, биз ҳосил қилган (2) матрицанинг ўнг қуйи бурчагида турган (n — 1)-тартибли матрица элементар алмаштиришлар орқали каноник шаклга келтирилади:

$$\begin{pmatrix} c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_2(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Худди шу алмаштиришларни (2) матрицанинг мос йўл ва устунлари устида бажариб (бунда бу матрицанинг биринчи сатри ва биринчи устуни, равшанки, ўзгармай қолади),

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

(3) матрицанинг каноник эканлигини исботлаш учун $e_2(\lambda)$ кўпҳад $e_1(\lambda)$ га қолдиқсиз бўлинишини кўрсатиш кифоя.

$$e_2(\lambda) = e_1(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda)$$

бўлсин, бу ерда $r(\lambda) \neq 0$ ва $r(\lambda)$ нинг даражаси $e_1(\lambda)$ нинг даражасидан кичик. Аммо (3) матрицанинг биринчи устунини $q(\lambda)$ га кўпайтириб, унинг иккинчи устунига қўшсак, сўнгра иккинчи сатрдан биринчи сатрни айирсак, биз $e_2(\lambda)$ элементни $r(\lambda)$ элемент билан алмаштирамиз. Сўнгра биринчи иккита сатр ва иккита устуннинг ўринларини алмаштириб, биз $r(\lambda)$ кўпҳадни матрицанинг чап юқори бурчагига кўчирамиз, аммо бу $e_1(\lambda)$ кўпҳаднинг танланишига зид. λ-матрицани каноник шаклга келтириш ҳақидаги теорема исботланди. Бу теорема ушбу ягоналик теоремаси билан тўлдирилмоғи лозим:

Ҳар қандай λ-матрица биттагина каноник матрицага эквивалентдир.

Ҳақиқатан ҳам, n-тартибли ихтиёрий λ-матрица $A(\lambda)$ берилган бўлсин. Бирор натурал сон k, $1 \leqslant k \leqslant n$ ни тайинлаймиз ва $A(\lambda)$ матрицанинг барча k-тартибли минорларини қараймиз. Бу минорларни ҳисоблаб, λ кўпҳадларининг чекли системасини ҳосил қиламиз; бу кўпҳадлар системасининг юқори коэффициенти 1 га тенг қилиб олинган энг катта умумий бўлувчисини $d_k(\lambda)$ орқали белгилаймиз.

Демак, биз $A(\lambda)$ матрица орқали бир қийматли аниқланган

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \ldots,\ d_n(\lambda) \tag{4}$$

кўпҳадларга эгамиз. Шу билан бирга $d_1(\lambda)$ кўпҳад $A\ \lambda)$ матрица барча элементларининг коэффициенти 1 га тенг қилиб олинган энг катта умумий бўлувчиси, $d_n(\lambda)$ эса $A(\lambda)$ матрица детерминантини унинг юқори коэффициентига бўлинганига тенг. Шунингдек, агар $A(\lambda)$ матрицанинг ранги r бўлса, у ҳолда

$$d_{r+1}(\lambda) = \ldots = d_n(\lambda) = 0$$

бўлиб, худди шу вақтнинг ўзида (4) системанинг қолган барча кўпҳадлари нолдан фарқли.

λ-матрица $A(\lambda)$ нинг k-тартибли ($k = 1, 2, \ldots n$) барча минорларининг $d_k(\lambda)$ энг катта умумий бўлувчиси $A(\lambda)$ матрицада элементар алмаштиришлар бажарганда ўзгармайди.

Бу даъво $A(\lambda)$ матрицада 1) ва 2) тур элементар алмаштиришлар бажарилган ҳол учун деярли равшан. Масалан, агар матрицанинг i-сатри P майдондан олинган α сонга ($\alpha \neq 0$) кўпайтирилса, у ҳолда i-сатр элементлари турган k-тартибли минорлар α га кўпайтирилади, қолган барча k-тартибли минорлар эса ўзгармай қолади. Аммо бир нечта кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини излашда бу кўпҳадларнинг исталганини P майдондан олинган нолдан фарқли сонларга бемалол кўпайтириш мумкин.

Энди 3) ёки 4) турдаги элементар алмаштиришларни кўрайлик. Масалан, $A(\lambda)$ матрицанинг j-сатрини $\varphi(\lambda)$ га кўпайтириб, унинг i-сатрига қўшилган бўлсин, $i \neq j$, бу алмаштиришдан сўнг ҳосил бўлган матрицани $\overline{A}(\lambda)$ орқали, унинг барча k-тартибли минорларининг юқори коэффициенти 1 га тенг қилиб олинган энг катта умумий бўлувчисини эса $\overline{d}_k(\lambda)$ орқали белгилаймиз. Мазкур алмаштиришда $A(\lambda)$ матрицанинг k-тартибли минорлари билан нималар содир бўлишини кўрамиз. i-сатр ўтмайдиган минорлар ўзгармай қолиши равшан. Ҳам i-сатр, ҳам j-сатр ўтувчи минорлар ҳам ўзгармайди, чунки детерминантнинг бирорта сатрига бошқа сатрнинг каррасини (бирор сонга кўпайтмасини қўшганда) детерминант ўзгармайди. Ниҳоят, i-сатр ўтиб, лекин j-сатр ўтмайдиган k-тартибли минорлардан исталган бирортасини оламиз; уни M орқали белгилаймиз. $\overline{A}(\lambda)$ матрицанинг мос минорини, равшанки, M минор билан $\varphi(\lambda)$ га кўпайтирилган M' минорнинг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин. $A(\lambda)$ матрицанинг M' минори M минордан $A(\lambda)$ матрицанинг i-сатрини унинг j-сатрини мос элементлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. M ва M' лар $d_k(\lambda)$ га бўлингани учун $M+\varphi(\lambda)M'$ ҳам $d_k(\lambda)$ га бўлинади.

Айтилганлардан, $\overline{A}(\lambda)$ матрицанинг барча k-тартибли минорлари $d_k(\lambda)$ га қолдиқсиз бўлиниши, шу сабабли $\overline{d}_k(\lambda)$ ҳам $d_k(\lambda)$ га бўлиниши келиб чиқади. Аммо кўрилаётган элементар алмаштириш учун худди шу типдаги тескари элементар алмаштириш мавжуд бўлгани учун $d_k(\lambda)$ ҳам $\overline{d}_k(\lambda)$ га бўлинади. Агар бу ҳар иккала кўпҳаднинг юқори коэффициентлари 1 га тенглигини ҳисобга олсак, у ҳолда $\overline{d}_k(\lambda)=d_k(\lambda)$ бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Шундай қилиб, $A(\lambda)$ *матрицага эквивалент бўлган барча* λ-*матрицаларга (4) кўпҳадларнинг ягона тўплами мос келади.* Бу, хусусан, $A(\lambda)$ га эквивалент бўлган ихтиёрий (агар улар бир нечта бўлса) каноник матрицаларга тегишлидир (3) бундай матрицалардан бири бўлсин.

(3) матрицадан фойдаланиб, $d_k(\lambda)$, $k=1, 2, \ldots, n$. кўпҳадни ҳисоблаймиз. Равшанки, бу матрицанинг чапки юқори бурчагида турувчи k-тартибли минор

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda)\ \ldots\ e_k(\lambda) \tag{5}$$

кўпайтмага тенг. Сўнгра, агар (3) матрицада $i_1, i_2, \ldots, i_k$ номерли сатрларда (бу ерда $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$) ва худди шу номерли устунларда турувчи k-тартибли минорни олсак, у ҳолда бу минор (5) га бўлинувчи $e_{i_1}(\lambda)e_{i_2}(\lambda)\ \ldots\ e_{i_k}(\lambda)$ кўпайтмага тенг. Дарҳақиқат, $1 \leqslant i_1$ ва шу сабабли $e_{i_1}(\lambda)$ кўпҳад $e_1(\lambda)$ га бўлинади, $2 \leqslant i_2$ ва шунинг учун ҳам $e_{i_2}(\lambda)$ кўпҳад $e_2(\lambda$ га бўлинади ва ҳоказо. Ниҳоят, агар (3) матрицада камида битта i учун бу матрицанинг i-сатри ўтиб, аммо унинг i-устуни ўтмаган k-тартибли минор олинса, у ҳолда бу минор ноллардан иборат сатрни ўз ичига олади ва шунинг учун ҳам нолга тенг.

Айтилганлардан (5) кўпайтма (3) матрицанинг k-тартибли барча минорларининг, ва шу сабабли, дастлабки $A(\lambda)$ матрицанинг ҳам энг катта умумий бўлувчиси эканлиги келиб чиқади:

$$d_k(\lambda)=e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ \ldots\ e_k(\lambda),\ k=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Энди $e_k(\lambda)$, $k=1, 2, \ldots, n$ *кўпҳадлар* $A(\lambda)$ *матрица орқали бир қийматли равишда аниқланишини* кўрсатиш осон. Бу матрицанинг ранги r га тенг бўлсин. У ҳолда бизга маълумки $d_r(\lambda)\neq 0$, аммо $d_{r+1}(\lambda)=0$, ва шунинг учун ҳам (6) га кўра $e_{r+1}(\lambda)=0$ бўлади. Бундан, агар $A(\lambda)$ матрицанинг ранги r унинг тартиби n дан кичик бўлса, у ҳолда каноник матрицанинг хоссасига асосан, умуман

$$e_{r+1}(\lambda)=e_{r+2}(\lambda)=\ \ldots\ =e_n(\lambda)=0 \tag{7}$$

эканлиги келиб чиқади.

Иккинчи томондан, $k \leqslant r$ учун (6) дан, $d_{k-1}(\lambda) \neq 0$ га кўра

$$e_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)} \tag{8}$$

келиб чиқади.

Шу билан λ-матрицанинг каноник кўриниши ягоналигининг исботи тугалланади. Биз бир йўла $A(\lambda)$ матрицанинг *инвариант кўпайтувчилари* деб аталувчи $e_k(\lambda)$ кўпҳадларни бевосита излаш усулини ҳосил қилдик.

Мисол. Ушбу

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$$

λ-матрицани каноник шаклга келтиринг.

Бир неча элементар алмаштиришларни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda^3 - \lambda & \frac{2}{3}\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{10}{3}\lambda^2 - \lambda & 0 \\ \lambda^2 + 5\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{10}{3}\lambda^2 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Иккинчи томондан $A(\lambda)$ матрицанинг инвариант кўпайтувчиларини бевосита ҳисоблаш мумкин эди. Чунончи, бу матрица элементларининг энг катта умумий бўлувчисини ҳисоблаб,

$$d_1(\lambda) = e_1(\lambda) = \lambda$$

эканлигини топамиз. $A(\lambda)$ матрицанинг детерминантини ҳисоблаб ва унинг юқори коэффициенти 1 га тенглигини эътиборга олиб,

$$d_2(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 - 3\lambda^2$$

ни ҳосил қиламиз ва шунинг учун ҳам

$$e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda.$$

60-§. Унимодуляр λ-матрицалар. Сонли матрицаларнинг ўхшашлиги билан уларнинг характеристик матрицаларининг эквивалентлиги орасида боғланиш

Аввалги параграфнинг натижаларидан λ-матрицалар эквивалентлигининг битта аломати келиб чиқади. Унга қуйидаги иккита деярли айнан ифодани бериш мумкин.

Агар иккита λ-матрица ягона бир хил каноник шаклга келтирилса, ва фақат шундагина, улар эквивалентдир.

Агар иккита λ-матрица бир хил инвариант кўпайтувчиларга эга бўлса ва фақат шундагина, улар эквивалентдир.

Бошқа характерга эга бўлган яна битта аломатни келтириб чиқарайлик.

Маълумки, E бирлик матрица каноник λ-матрицалар қаторига киради. Агар λ-матрица $U(\lambda)$ бирлик матрица E дан иборат каноник шаклга эга бўлса, яъни унинг барча инвариант кўпайтувчилари бирга тенг бўлса, $U(\lambda)$ ни *унимодуляр* матрица деймиз.

Агар λ-матрица $U(\lambda)$ нинг детерминанти нолдан фарқли бўлиб, лекин λ га боғлиқ бўлмаса, яъни асосий P майдоннинг нолдан фарқли сонига тенг бўлса ва фақат шундагина, у унимодуляр матрицадир.

Дарҳақиқат, агар $U(\lambda) \sim E$ бўлса, у ҳолда бу икки матрицага ягона $d_n(\lambda)$ кўпҳад мос келади. Аммо бирлик матрица учун $d_n(\lambda) = 1$. Бу ердан $U(\lambda)$ матрицанинг $d_n(\lambda)$ дан нолдан фарқли сонли кўпайтувчигагина фарқ қилувчи детерминанти P майдоннинг нолдан фарқли сонидан иборат бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар $U(\lambda)$ матрицанинг детерминанти нолдан фарқли ва λ га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай матрица учун $d_n(\lambda)$ кўпҳад 1 га тенг бўлади ва шунинг учун ҳам аввалги параграфдаги (6) га кўра $U(\lambda)$ матрицанинг барча $e_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ инвариант кўпайтувчилари бирга тенг.

Бу ердан, *ҳар қандай хосмас сонли матрица унимодуляр λ-матрицадан иборат* эканлиги келиб чиқади. Аммо унимодуляр λ-матрица жуда мураккаб кўринишга эга бўлиши мумкин. Масалан, ушбу

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 + 5 \\ \lambda^2 - \lambda - 4 & \lambda^4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 5 \end{pmatrix}$$

λ-матрица унимодулярдир, чунки унинг детерминанти 20 га тенг, яъни нолдан фарқли ва λ га боғлиқ эмас.

Юқорида исботланган теоремадан *унимодуляр λ-матрицаларнинг кўпайтмаси яна унимодуляр* эканлиги келиб чиқади — матрицаларни кўпайтиришда уларнинг детерминантлари кўпайтирилишини эслаш кифоя.

λ-матрица $U(\lambda)$ нинг тескари матрицаси ҳам λ-матрица бўлганда ва фақат шундагина, у унимодулярдир.

Дарҳақиқат, агар хосмас λ-матрица берилган бўлса, у ҳолда тескари матрицани одатдаги йўл билан излашда, берилган матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини бу матрицанинг детерминантига, яъни λ нинг бирор кўпҳадига бўлишимиз керак. Шунинг учун ҳам, умумий ҳолда тескари матрицанинг элементлари λ нинг кўпҳади бўлмай, балки λ нинг рационал касрларидан иборат бўлади, яъни бу матрица λ-матрица бўлмайди. Агар унимодуляр матрица берилган бўлса, у ҳолда алгебраик тўлдирувчиларни P майдоннинг нолдан фарқли сонигагина бўлишга тўғри келади, яъни тескари матрицанинг элементлари λ нинг кўпҳадларидан иборат бўлади ва шу сабабли, тескари матрицанинг ўзи ҳам λ-матрица бўлади. Аксинча, агар λ- матрица $U(\lambda)$ тескари λ- матрица $U^{-1}(\lambda)$ га эга бўлса, у ҳолда бу ҳар иккала матрицанинг детерминантлари λ нинг кўпҳадларидан иборат бўлади. уларнинг кўпайтмаси 1 га тенг ва шу сабабли, ҳар иккала детерминант ҳам нолинчи даражали кўпҳадлар бўлиши керак.

Сўнгги мулоҳазадан ҳозир исботланган теоремага қуйидаги қўшимча келиб чиқади:

Унимодуляр λ-матрицага тескари бўлган λ- матрицанинг ўзи ҳам унимодулярдир.

Унимодуляр λ- матрица тушунчаси λ- матрицалар эквивалентлигининг қуйидаги янги аломатида ишлатилади:

Агар n- тартибли $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ λ- матрицалар учун

$$B(\lambda) = U(\lambda)\,A(\lambda)\,V(\lambda) \tag{1}$$

тенгликни қаноатлантирувчи n-тартибли $U(\lambda)$ ва $V(\lambda)$ унимодуляр λ- матрицалар мавжуд бўлса ва фақат шундагина $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ матрицалар эквивалент бўлади.

Бу аломатнинг исботи жараёнида ишлатиладиган ушбу тушунчани киритамиз. Бирлик матрицадан бош диагоналининг бирор i- ўрнида $(1 \leqslant i \leqslant n)$ P майдондан олинган нолдан фарқли α сон туриши билан фарқ қилувчи

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} (i) \tag{2}$$

сонли (ва демак, λ-) матрицага *элементар матрица* деймиз. Иккинчи томондан, бирлик матрицадан фақат i- сатри ва j- устунининг $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n$, шу билан бирга $i \neq j)$ кесишган жойида $P[\lambda]$ ҳалқадан олинган ихтиёрий $\varphi\lambda)$ кўпҳад туриши билан фарқ қилувчи

$$\begin{vmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & 1 & \cdots\varphi(\lambda) & \cdots & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & (j) & & & 1 \end{vmatrix} (i) \tag{3}$$

λ- матрицани ҳам *элементар матрица* деймиз.

Ҳар қандай элементар матрица унимодулярдир. Ҳақиқатан ҳам, (2) матрицанинг детерминанти α га тенг, аммо шартга кўра $\alpha \neq 0$; (3) матрицанинг детерминанти эса 1 га тенг.

λ- матрица $A(\lambda)$ да ихтиёрий элементар алмаштириш бажариш бу матрицани чапдан ёки ўнгдан бирор элементар матрицага кўпайтиришга эквивалентдир.

Дарҳақиқат, китобхон қуйидаги тўртта даъвонинг тўғрилигини ҳеч бир қийинчиликсиз текшира олади: 1) $A(\lambda)$ матрицани чапдан (2) матрицага кўпайтириш $A(\lambda)$ матрицанинг i- сатрини α сонга кўпайтиришга тенг кучли; 2) $A(\lambda)$ матрицани ўнгдан (2) матрицага кўпайтириш $A(\lambda)$ матрицанинг l- устунини α сонга кўпайтиришга тенг кучли; 3) $A(\lambda)$ матрицани чапдан (3) матрицага кўпайтириш $A(\lambda)$ матрицанинг i- сатрига $\varphi(\lambda)$ га кўпайтирилган j - сатрини қўшишга тенг кучли; 4) $A(\lambda)$ матрицани ўнгдан (3) матрицага кўпайтириш $A(\lambda)$ матрицанинг j- устунига $\varphi(\lambda)$ га кўпайтирилган i- устунини қўшишга тенг кучли.

λ-матрицаларнинг эквивалентлиги ҳақидаги аломатнинг исботига ўтамиз. Агар $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ бўлса, у ҳолда $A(\lambda)$ дан $B(\lambda)$ га чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали ўтиш мумкин. Бу элементар алмаштиришларнинг ҳар қайсисини чапдан ёки ўнгдан элементар матрицаларга кўпайтириш билан алмаштириб, ушбу

$$B(\lambda) = U_1(\lambda) \ldots U_k(\lambda)\, A(\lambda)\, V_1(\lambda) \ldots V_l(\lambda) \qquad (4)$$

тенгликка келамиз, бу ерда барча $U_1(\lambda), \ldots, U_k(\lambda), V_1(\lambda), \ldots, V_l(\lambda)$ матрицалар элементар, ва демак, унимодулярдир. Шунинг учун ҳам, унимодуляр матрицаларнинг кўпайтмаларидан иборат бўлган

$$U(\lambda) = U_1(\lambda) \ldots U_k(\lambda), \quad V(\lambda) = V_1(\lambda) \ldots V_l(\lambda) \qquad (5)$$

матрицалар ҳам унимодуляр бўлади, (4) тенглик эса (1) кўринишда қайтадан ёзилади. Шуни қайд қиламизки, агар масалан, $k = 0$ бўлса, яъни элементар алмаштиришлар устунлар устидагина бажарилган бўлса, у ҳолда $U(\lambda) = E$ деймиз.

Исботнинг биз ўтказган қисми бир йўла ушбу даъвони баён қилиш учун имкон беради:

λ- матрица элементар матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида тасвирланувчи бўлганда ва фақат шундагина, у унимодулярдир.

Ҳақиқатан ҳам, биз элементар матрицаларнинг кўпайтмаси унимодуляр эканлигидан аввал ҳам фойдаланган эдик. Аксинча, агар ихтиёрий $W(\lambda)$ унимодуляр матрица берилган бўлса, у ҳолда у E бирлик матрицага эквивалент бўлади. Юқорида келтирилган исботни $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ матрицалар ўрнига E ва $W(\lambda)$ матрицаларга қўллаб, биз (4) дан

$$W(\lambda) = U_1(\lambda) \, \dots \, U_k(\lambda) V_1(\lambda) \, \dots \, V_l(\lambda)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $W(\lambda)$ матрица элементар матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида тасвирланар экан.

Энди аломатимизнинг тескари даъвосини ҳам осонгина исботлаш мумкин. $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ матрицалар учун шундай $U(\lambda)$ ва $V(\lambda)$ унимодуляр матрицалар мавжудки, (1) тенглик ўринли бўлсин. Исботланганига асосан, $U(\lambda)$ ва $V(\lambda)$ матрицаларни элементар матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкин; бу (5) ифодалардан иборат бўлсин. Энди (1) тенглик (4) кўринишда қайтадан ёзилади ва элементар матрицага ҳар бир кўпайтиришни унга мос келувчи элементар алмаштириш билан алмаштириб, биз ниҳоят $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ ни ҳосил қиламиз.

Матрицавий кўпҳадлар. λ-матрица тушунчасига бутунлай бошқа томондан қараш мумкин. *P майдон устида n-тартибли матрицавий λ-кўпҳад* деб коэффициентлари вазифасини элементлари P майдондан олинган бир хил n-тартибли квадрат матрицалар ўйнайдиган λ нинг кўпҳадига айтамиз: унинг умумий кўриниши

$$A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \dots + A_{k-1}\lambda + A_k \tag{6}$$

дан иборат бўлади.

A_i матрицани λ^{k-i}, $i=0,1, \dots, k$ га кўпайтиришни, 15-§ га мувофиқ, A_i матрицанинг барча элементларини λ^{k-i} га кўпайтириш каби тушуниб, сўнгра матрицаларни қўшишни яна шу 15-§ га мувофиқ бажариб, *ҳар қандай n-тартибли матрицавий λ-кўпҳадни n-тартибли λ-матрица шаклида ёзиш мумкинлигини* ҳосил қиламиз. Масалан,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda^3+\lambda & -3\lambda^2+2\lambda+1 \\ -\lambda^8 & \lambda^8+\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}.$$

Аксинча, *n-тартибли ҳар қандай λ-матрица n-тартибли матрицавий кўпҳад шаклида ёзилиши мумкин.* Масалан,

$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5 & \lambda+1 \\ \lambda^4+2 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda^4 + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

λ-матрицалар ва матрицавий λ-кўпҳадлар орасидаги мослик 46-§ маъносида ўзаро бир қийматли ва изоморфдир. Дарҳақиқат, (6) кўринишдаги λ-кўпҳадларнинг матрица сифатидаги тенглиги λ нинг бир хил даражалари олдидаги матрицавий коэффициентларининг тенглиги билан тенг кучли, матрицани λ га кўпайтириш эса уни бош диагоналида λ турган скаляр матрицага кўпайтириш билан тенг кучлидир.

λ-матрица $A(\lambda)$ берилган, шу билан бирга

$$A(\lambda) = A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \dots + A_{k-1}\lambda + A_k$$

бўлсин, бу ерда A_0 матрица ноль матрица эмас. k сонни λ-матрица $A(\lambda)$ нинг *даражаси* деймиз; бу, шубҳасиз, $A(\lambda)$ матрица элементларининг (λ бўйича) энг юқори даражаси бўлади.

λ-матрицаларга матрицавий кўпҳад деб қараш, λ-матрицалар учун сонли кўпҳадларга доир бўлиниш назариясига ўхшаш, лекин матрицаларни кўпайтиришнинг нокоммутативлиги ва нолнинг бўлувчилари мавжудлиги сабабли мураккаблашган бўлиниш назариясини ривожлантириш имконини беради. Биз **қолдиқли бўлиш алгоритми** масаласи билангина чекланамиз.

P майдон устида ушбу

$$A(\lambda) = A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \dots + A_{k-1}\lambda + A_k,$$
$$B(\lambda) = B_0\lambda^l + B_1\lambda^{l-1} + \dots + B_{l-1}\lambda + B_l$$

n-тартибли λ-матрицалар берилган бўлсин, шу билан бирга B_0 матрица хосмас, яъни B_0^{-1} матрица мавжуд деб фараз қиламиз. У ҳолда P майдон устида худди шу n тартибли шундай $Q_1(\lambda)$ ва $R_1(\lambda)$ матрицаларни топиш мумкинки,

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda) \qquad (7)$$

бўлади, шу билан бирга $R_1(\lambda)$ нинг даражаси $B(\lambda)$ нинг даражасидан кичик ёки бўлмаса $R_1(\lambda) = 0$. Иккинчи томондан, P майдон устида шундай n-тартибли $Q_2(\lambda)$ ва $R_2(\lambda)$ матрицаларни топиш мумкинки,

$$A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda) \qquad (8)$$

бўлади, шу билан бирга $R_2(\lambda)$ нинг даражаси $B(\lambda)$ нинг даражасидан кичик ёки бўлмаса $R_2(\lambda) = 0$. Бу шартларни қаноатлантирувчи $Q_1(\lambda)$ ва $R_1(\lambda)$, шунингдек $Q_2(\lambda)$ ва $R_2(\lambda)$ матрицалар бир қийматли аниқланади.

Бу теореманинг исботи сонли кўпҳадлар учун мос теореманинг исботи каби олиб борилади (20-§ га қаранг). Масалан, (7) шартни $\bar{Q}_1(\lambda)$ ва $\bar{R}_1(\lambda)$ матрицалар ҳам қаноатлантирсин, шу билан $\bar{R}_1(\lambda)$ нинг даражаси $B(\lambda)$ нинг даражасидан кичик бўлсин. У ҳолда

$$B(\lambda)[Q_1(\lambda) - \bar{Q}_1(\lambda)] = \bar{R}_1(\lambda) - R_1(\lambda).$$

Ўнг томоннинг даражаси l дан кичик, чап томоннинг даражаси эса, агар квадрат қавс нолдан фарқли бўлса, l дан катта ёки тенг, чунки B_0 матрица хосмас. Бундан $Q_1(\lambda)$ ва $R_1(\lambda)$ матрицаларнинг ягоналиги келиб чиқади.

Бу матрицаларнинг мавжудлигини исботлаш учун $k \geqslant l$ да

$$A(\lambda)-B(\lambda)\cdot B_0^{-1}A_0\lambda^{k-l}$$

айирманинг даражаси k дан қатъий кичиклигини қайд қиламиз; шунинг учун ҳам, $B_0^{-1}A_0\lambda^{k-l}$ ифода $Q_1(\lambda)$ матрицавий λ-кўпҳаднинг юқори ҳади бўлади. Кейинги мулоҳазалар худди 20-§ даги каби давом эттирилади. Иккинчи томондан,

$$A(\lambda)-A_0B_0^{-1}\lambda^{k-l}\cdot B(\lambda)$$

айирманинг даражаси ҳам k дан қатъий кичик, яъни $A_0B_0^{-1}\lambda^{k-l}$ ифода $Q_2(\lambda)$ матрицавий λ-кўпҳаднинг юқори ҳади бўлади Кўриб турибмизки, теореманинг шартларини қаноатлантирувчи $Q_1(\lambda)$ ва $Q_2(\lambda)$ (шунингдек, $R_1(\lambda)$ ва $R_2(\lambda)$) λ-матрицалар ҳақиқатан ҳам умумий ҳолда ҳар хил бўлади.

Матрицаларнинг ўхшашлиги ҳақидаги асосий теорема. Олдин қайд қилинганидек, берилган A ва B сонли матрицалар (яъни элементлари асосий P майдондан олинган матрицалар) ўхшашми деган саволни ечиш усули бизда ҳозирча йўқ. Иккинчи томондан, уларнинг $A-\lambda E$ ва $B-\lambda E$ характеристик матрицалари λ-матрицалардан иборат ва бу матрицаларнинг эквивалентлиги ҳақидаги масала жуда самарали ечилади. Шунинг учун ҳам ушбу теореманинг аҳамияти қанчалик катта эканлигини тушуниш осон.

Элементлари P майдондан олинган A ва B матрицаларнинг $A-\lambda E$ ва $B-\lambda E$ характеристик матрицалари эквивалент бўлганда ва фақат шундагина, улар ўхшашдир.

Ҳақиқатан ҳам A ва B матрицалар ўхшаш бўлсин, яъни P майдон устида шундай C хосмас матрица мавжудки,

$$B=C^{-1}AC$$

бўлади. У ҳолда

$$C^{-1}(A-\lambda E)C=C^{-1}AC-\lambda(C^{-1}EC)=B-\lambda E.$$

Аммо C^{-1} ва C хосмас сонли матрицалар унимодуляр λ-матрицалардир. Кўриб турибмизки $B-\lambda E$ матрица $A-\lambda E$ матрицани чапдан ва ўнгдан унимодуляр матрицаларга кўпайтиришдан ҳосил бўлган, яъни $A-\lambda E\sim B-\lambda E$.

Тескари даъвонинг исботи бирмунча мураккаб.

$$A-\lambda E\sim B-\lambda E$$

бўлсин. У ҳолда шундай $U(\lambda)$ ва $V(\lambda)$ унимодуляр матрицалар мавжудки,

$$U(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)=B-\lambda E \tag{9}$$

бўлади. Унимодуляр матрицалар учун тескари матрицалар мавжудлиги ва улар λ-матрицалар эканлигини ҳисобга олиб, (9) дан қуйироқда фойдаланиладиган ушбу

$$\left.\begin{aligned} U(\lambda)(A-\lambda E) &= (B-\lambda E)V^{-1}(\lambda), \\ (A-\lambda E)V(\lambda) &= U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

тенгликларни келтириб чиқарамиз.

$B-\lambda E$ λ- матрица λ га нисбатан 1 даражага эга бўлгани, шу билан бирга мос матрицавий кўпҳаднинг юқори коэффициенти вазифасини хосмас матрица — E ўйнагани сабабли, $U(\lambda)$ ва $B-\lambda E$ матрицаларга қолдиқли бўлиш алгоритмини қўлланиш мумкин: шундай $Q_1(\lambda)$ ва R_1 матрицалар мавжудки — агар R_1 нолдан фарқли бўлса, у ҳолда у λ бўйича 0 даражага эга бўлиши шарт, яъни λ га боғлиқ эмас — улар учун

$$U(\lambda) = (B-\lambda E)Q_1(\lambda) + R_1 \qquad (11)$$

бўлади. Шунга ўхшаш

$$V(\lambda) = Q_2(\lambda)(B-\lambda E) + R_2. \qquad (12)$$

(11) ва (12) лардан фойдаланиб, (9) дан ушбу

$$\begin{aligned} R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E) - U(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) - \\ -(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda) + \\ +(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) \end{aligned}$$

муносабатни ҳосил қиламиз ёки (10) га кўра

$$\begin{aligned} R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E) - (B-\lambda E)V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) - \\ -(B-\lambda E)Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E) + \\ +(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) = (B-\lambda E)\times \\ \times\{E-[V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda) - Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)](B-\lambda E)\}. \end{aligned}$$

Ўнг томонда турган квадрат қавс ҳақиқатда нолга тенг: акс ҳолда у λ-матрица бўла туриб (чунки $V^{-1}(\lambda)$ ва $U^{-1}(\lambda)$ лар λ-матрицалардир), жуда бўлмаганда 0 даражага эга бўлар эди, у ҳолда катта қавснинг даражаси 1 дан кичик бўлмас эди ва демак, барча ўнг томоннинг даражаси 2 дан кичик бўлмас эди. Аммо бу мумкин эмас, чунки чап томонда 1 даражали λ-матрица турибди. Шундай қилиб,

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = B-\lambda E,$$

бу ердан λ нинг бир хил даражалари олдидаги матрицавий коэффициентларни тенглаб,

$$R_1AR_2 = B, \qquad (13)$$

$$R_1R_2 = E \qquad (14)$$

ларни ҳосил қиламиз, (14) тенглик R_2 сонли матрица нолдан фарқли бўлибгина қолмай, балки унинг ҳатто хосмас эканлигини кўрсатади, шу билан бирга

$$R_2^{-1} = R_1,$$

у ҳолда (13) тенглик

$$R_2^{-1}AR_2 = B$$

кўринишни олади, бу эса A ва B матрицаларнинг ўхшашлигини исботлайди.

Биз бир йўла A матрицани B матрицага трансформациялайдиган ўша R_2 хосмас матрицани топишни ўргандик. Чунончи, агар $A - \lambda E$ ва $B - \lambda E$ матрицалар эквивалент бўлса, у ҳолда биринчиси чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали иккинчисига ўтказилади. Бу алмаштиришлардан устунларга алоқадор бўлганларини оламиз ва мос элементар матрицаларнинг худди шу тартибда олинган кўпайтмасини $V(\lambda)$ орқали белгилаймиз. Сўнгра $V(\lambda)$ ни $B-\lambda E$ га шундай бўламизки, бўлинма бўлувчидан чапда турсин [(8) га қаранг]. Бу бўлишдан чиққан қолдиқ эса R_2 матрицадан иборат бўлади.

Аслида, кўрсатилган бўлишни бажармай, 62-§ да ҳам қўлланиладиган ушбу леммадан фойдаланиш мумкин:

Лемма.

$$V(\lambda) = V_0\lambda^s + V_1\lambda^{s-1} + \dots + V_{s-1}\lambda + V_s,\ V_0 \neq 0 \tag{15}$$

бўлсин. Агар

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= (\lambda E-B)Q_1(\lambda) + R_1, \\ V(\lambda) &= Q_2(\lambda)(\lambda E - B) + R_2 \end{aligned} \tag{16}$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} R_1 &= B^sV_0 + B^{s-1}V_1 + \dots + BV_{s-1} + V_s, \\ R_2 &= V_0B^s + V_1B^{s-1} + \dots + V_{s-1}B + V_s \end{aligned} \tag{17}$$

бўлади.

Бу лемманинг, жуда бўлмаганда, биринчи даъвосини исботлаш кифоя—иккинчиси биринчисига батамом ўхшаш исботланади. Исбот (16) тенгликнинг ўринли эканлигини бевосита текширишдан иборат, агар $V(\lambda)$ кўпҳадни унинг (15) ифодаси билан алмаштирилса, R_1 ўрнига (17) қўйилади. $Q_1(\lambda)$ сифатида эса

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda) = V_0\lambda^{s-1} + (BV_0 + V_1)\lambda^{s-2} + (B^2V_0 + BV_1 + V_2)\lambda^{s-3} + \dots \\ \dots + (B^{s-1}V_0 + B^{s-2}V_1 + \dots + V_{s-1}) \end{aligned}$$

кўпҳад олинади. Буни текшириш китобхонга ҳавола қилинади.

Мисол.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-10 & -4\\ 26 & 11\end{pmatrix}$$

матрицалар берилган бўлсин. Уларнинг характеристик матрицалари эквивалент, чунки улар ушбу

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda-6\end{pmatrix}$$

ягона каноник кўринишга келтирилади, шунинг учун ҳам, A ва B матрицалар ўхшаш.

A ни B га трансформациялайдиган R_2 матрицани излаш учун $A-\lambda E$ ни $B-\lambda E$ га ўтказувчи элементар алмаштиришларнинг бирон-бир қаторини топамиз. Масалан,

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ -16-8\lambda & 11-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}8+4\lambda & -4\\ -16-8\lambda & 11-\lambda\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}40+4\lambda & -4\\ -104 & 11-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-10-\lambda & -4\\ 26 & 11-\lambda\end{pmatrix}=B-\lambda E.$$

Сўнгги икки алмаштириш устунларга алоқадор: биринчи устунга иккинчисини -8 га кўпайтириб қўшилади, кейин эса биринчи устун $-\frac{1}{4}$ га кўпайтирилади. Мос элементар матрицаларнинг кўпайтмаси

$$V(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

бўлади. Бу матрица λ га боғлиқ эмас ва шунинг учун ҳам у изланаётган R_2 матрица бўлади.

Албатта, A ни B га трансформациялайдиган матрица, умуман, бир қийматли аниқланмайди. Масалан,

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

ҳам шундай матрицадир.

61-§. Жордан нормал формаси

Ҳозир элементлари P майдондан олинган n-тартибли квадрат матрицаларни кўрамиз. Бундай матрицаларнинг жордан матрицалари деб аталадиган битта махсус типи ажратилади ва бу матрицалар матрицаларнинг жуда кенг синфи учун нормал форма бўлиб хизмат қилиши кўрсатилади. Чунончи, *барча характеристик илдизлари асосий P майдонда ётувчи матрицалар (ва фақат шундай матрицалар) бирор жордан матрицаларига ўхшаш, яъни одатда айтилишича, улар жордан нормал формасига келтирилади.* Бу ердан, агар P майдон сифатида комплекс сонлар майдони олинган бўлса, у ҳолда *ҳар қандай комплекс элементли матрицалар комплекс сонлар майдонида жордан нормал формасига келтирилиши* келиб чиқади.

Керакли таърифларни киритамиз. λ_0 сонга тегишли k-тартибли *жордан катаги* деб

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

кўринишга эга бўлган k-тартибли ($1 \leqslant k \leqslant n$) матрицани айтилади, бошқа сўз билан айтганда, унинг бош диагоналида P майдондаги λ_0 сон туради; бош диагоналга энг яқин турган юқори параллелни эса бошдан-оёқ 1 сони эгаллаган; матрицанинг қолган барча элементлари нолга тенг. Масалан,

$$(\lambda_0), \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

биринчи, иккинчи ва учинчи тартибли жордан катакларига мос келади.

n-тартибли *жордан матрицаси* деб ушбу

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлган n-тартибли матрицани айтилади; бу ерда бош диагонал бўйлаб P майдоннинг турли бўлиши шарт бўлмаган баъзи сонларига тегишли турли бўлиши шарт бўлмаган J_1, J_2, ..., J_s жордан катаклари жойлашган; бу катаклардан ташқаридаги барча ўринларни ноллар эгаллаган. Шу билан бирга $s \geqslant 1$, яъни n-тартибли битта жордан катаги шу тартибдаги жордан матрицалари қаторига киради ва албатта, $s \leqslant n$.

Шуни қайд қиламизки, жордан матрицасининг тузилишини, гарчи бу кейин ишлатилмаса ҳам, жордан катаги тушунчасига таянмай туриб ҳам баён этиш мумкин эди. Чунончи, J матрица ушбу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \varepsilon_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

кўринишга эга бўлганда (бу ерда λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ лар P майдоннинг ихтиёрий сонлари, ε_j, $j=1, 2, \ldots, n-1$ ларнинг ҳар қайсиси бирга ёки нолга тенг, шу билан бирга, агар $\varepsilon_j=1$ бўлса, у ҳолда $\lambda_j=\lambda_{j+1}$ бўлади) ва фақат шундагина у жордан матрицаси бўлиши равшан.

Диагонал матрицалар жордан матрицаларининг хусусий ҳолидан иборат: бу барча жордан катаклари 1-тартибга эга бўлган жордан матрицаларидан иборат бўлади.

Бизнинг энг аввалги мақсадимиз n-тартибли ихтиёрий J жордан матрицасининг $J-\lambda E$ характеристик матрицаси учун каноник кўринишни излашдан иборат. Аввал k-тартибли битта жордан катагининг характеристик матрицаси

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda_0-\lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \qquad (3)$$

учун каноник кўринишни топамиз. Бу матрицанинг детерминантини ҳисоблаб ва $d_k(\lambda)$ кўпҳаднинг юқори коэффициенти 1 га тенг эканлигини эслаб,

$$d_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k$$

ни келтириб чиқарамиз. Иккинчи томондан, (3) матрицанинг $(k-1)$-тартибли минорлари ичида 1 га тенг бўлган минор, чунончи бу матрицанинг биринчи устуни ва охирги сатрини ўчириб ташлашдан сўнг ҳосил бўлган минор мавжуд. Шунинг учун ҳам

$$d_{k-1}(\lambda)=1.$$

Бундан *ушбу*

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & (\lambda-\lambda_0)k \end{pmatrix} \qquad (4)$$

k-тартибли λ-матрица (3) матрица учун каноник кўриниш бўлиб хизмат қилиши келиб чиқади.

Энди ушбу леммани исботлаймиз:

Агар $P[\lambda]$ ҳалқадан олинган $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, , . . . , $\varphi_t(\lambda)$ кўпҳадлар жуфт-жуфти билан ўзаро туб бўлса, у ҳолда ушбу эквивалентлик ўринли бўлади;

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & 0 \\ & \varphi_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_t(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \prod\limits_{i=1}^{t} \varphi_i(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$t=2$ ҳолни кўриб чиқиш етарли эканлиги равшан. $\varphi_1(\lambda)$ ва $\varphi_2(\lambda)$ кўпҳадлар ўзаро туб бўлгани учун $P[\lambda]$ ҳалқада шундай $u_1(\lambda)$ ва $u_2(\lambda)$ кўпҳадлар мавжудки,

$$\varphi_1(\lambda)u_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)u_2(\lambda) = 1$$

бўлади. Шунинг учун ҳам

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)u_2(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1\lambda & 1 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энди (2) кўринишдаги J жордан матрицаси учун

$$J-\lambda E = \begin{vmatrix} \boxed{J_1-\lambda E_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2-\lambda E_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_s-\lambda E_s} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

характеристик матрицани текширишга ўтамиз; бу ерда E_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ тартиби J_i катакнинг тартиби каби бўлган бирлик матрица. J матрицанинг жордан катаклари ушбу $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ турли сонларга тегишли бўлсин, бу ерда $t \leqslant s$. Сўнгра, $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots t)$ сонга q_i та $(q_i \geqslant 1)$ жордан катаги тегишли бўлсин ва бу катакларнинг тартиблари ўсмайдиган тартибда жойлашган, яъни

$$k_{i1} \geqslant k_{i2} \geqslant \ldots \geqslant k_{iq_i} \qquad (6)$$

бўлсин. Гарчи, биз бундан фойдаланмасак ҳам,

$$\sum_{i=1}^{t} q_i = s,$$

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{q_i} k_{ij} = n$$

эканлигини қайд қилайлик.

(5) матрицанинг $J_i - \lambda E_i$ катакдан ўтувчи сатр ва устунларига элементар алмаштиришларни қўллаб, шубҳасиз, бошқа диагонал катакларга таъсир этмаймиз. Бундан, (5) матрицада элементар алмаштиришлар ёрдамида ҳар бир $J_i - \lambda E_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ катакни (4) кўринишидаги мос катак билан алмаштириш мумкин эканлиги келиб чиқади. Бошқача айтганда, *$J - \lambda E$ матрица диагоналида бир қанча бирлардан ташқари, шунингдек, J матрицанинг барча жордан катакларига мос келувчи ушбу*

$$\left.\begin{matrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}, & (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}} \\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}, & (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}}, & (\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_t)^{k_{tq_t}}. \end{matrix}\right| \qquad (7)$$

кўпҳадлар турган диагонал матрицага эквивалентдир. Шу билан бирга биз диагоналнинг (7) кўпҳадлар турган ўринларини кўрсатмаймиз, чунки ихтиёрий диагонал λ-матрицада диагонал элементларнинг ўринларини сатрларни ва бир хил исмли устунларни алмаштириш ёрдамида ихтиёрий равишда алмаштириш мумкин. Бу мулоҳазани бундан буён ҳам назарда тутиш зарур.

q сон q_i, $i=1, 2, \ldots, t$ сонлар ичида энг каттаси бўлсин. (7) жадвалнинг j-устунида ($j=1, 2, \ldots, q$) турган кўпҳадларнинг кўпайтмасини $e_{n-j+1}(\lambda)$ орқали белгилаймиз, яъни

$$e_{n-j+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{t} (\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}; \qquad (8)$$

шу билан бирга, агар j-устунда бўш ўринлар бўлса—баъзи i лар учун $q_i < j$ бўлиб қолиши мумкин—у ҳолда (8) даги мос кўпайтувчиларни бирга тенг деб ҳисоблаймиз. Шартга кўра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ сонлар турли бўлгани учун (7) жадвалнинг j-устунида турган чизиқли иккиҳадларнинг даражалари жуфт-жуфти билан ўзаро тубдир. Шунинг учун ҳам, юқорида исботланган леммага асосан, текширилаётган диагонал матрицада бу иккиҳадлар элементар алмаштиришлар ёрдамида уларнинг $e_{n-j+1}(\lambda)$ кўпайтмаси ва баъзи сондаги бирлар билан алмаштирилиши мумкин.

Буни $j=1, 2, \ldots, q$, учун бажариб, биз

$$J-\lambda E\sim\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & e_{n-1}(\lambda) & \\ 0 & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix} \tag{9}$$

эканлигини ҳосил қиламиз. *Бу $J-\lambda E$ матрицанинг изланаётган каноник кўринишининг худди ўзидир*. Дарҳақиқат, (9) да бош диагоналда турган барча кўпҳадларнинг юқори коэффициентлари бирга тенг ва (6) шартга кўра бу кўпҳадларнинг ҳар бири ундан аввалгисига қолдиқсиз бўлинади.

Мисол.

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{matrix}} & & & & 0 \\ & \boxed{2} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}5&1\\0&5\end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}5&1\\0&5\end{matrix}} & \\ 0 & & & & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

бўлсин. Бу 9-тартибли жордан матрицаси учун (7) кўпҳадлар жадвали ушбу

$$(\lambda-2)^3,\ \lambda-2,\ \lambda-2,$$
$$(\lambda-5)^2,\ (\lambda-5)^2$$

кўринишга эга. Шунинг учун ҳам

$$e_9(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-5)^2,$$
$$e_8(\lambda)=(\lambda-2)\,(\lambda-5)^2,$$
$$e_7(\lambda)=\lambda-2$$

лар J матрицанинг инвариант кўпайтувчиларидан иборат бўлади, худди шу вақтда $e_6(\lambda)=\ldots=e_1(\lambda)=1$.

Энди берилган жордан матрицаси шаклидан бирданига унинг характеристик матрицасининг каноник кўринишини ёзишни ўрганганимиздан сўнг, ушбу теорема исботланиши мумкин:

Икки жордан матрицаси бир хил жордан катакларидан ташкил топган бўлса, яъни улар бу катакларнинг бош диагонал бўйлаб жойлашиши билангина бир-бирларидан фарқ қилганда ва фақат шундагина улар ўхшашдир.

Ҳақиқатан ҳам, (7) кўпҳадлар жадвали J жордан матрицасининг жордан катаклари тўплами билан тўлиқ аниқланган ва унда жордан катакларининг бу матрица бош диагонали бўйича жойлашиши мутлақо акс этмаган эди. Бундан, агар J ва J' жордан матрицалари жордан катакларининг бир хил тўпламига эга бўлса, у ҳолда уларга ягона (7) кўпҳадлар жадвали ва шунинг учун ҳам, ягона (8) кўпҳадлар мос келиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $J-\lambda E$ ва $J'-\lambda E$ характеристик матрицалар бир хил инвариант кўпайтувчиларга эга, яъни улар эквивалент ва шунга кўра J ва J' матрицаларнинг ўзлари ўхшаш.

Аксинча, агар J ва J' жордан матрицалари ўхшаш бўлса, у ҳолда уларнинг характеристик матрицалари бир хил инвариант кўпайтувчиларга эга. $j=1, 2, \ldots, q$ учун (8) кўпҳадлар бундай инвариант кўпайтувчиларнинг бирдан фарқлилари бўлсин. Аммо (8) кўпҳадлар орқали (7) кўпҳадлар жадвали тикланади. Чунончи, (8) кўпҳадлар чизиқли кўпайтувчилар даражаларининг кўпайтмасига ажралади, чунки исботланганга асосан, ихтиёрий жордан матрицаси учун характеристик матрицанинг инвариант кўпайтувчилари бундай хоссага эга. (7) жадвал худди шу (8) кўпҳадлар ёйиладиган чизиқли кўпайтувчилар даражаларининг барча максимал даражаларидан ташкил топган. Ниҳоят, (7) жадвалдан дастлабки жордан матрицаларининг жордан катаклари тикланади: (7) жадвалнинг ҳар қайси $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ кўпҳадига λ_i сонга тегишли k_{ij}-тартибли жордан катаги мос келади. Бу билан J ва J' матрицалар бир хил жордан катакларидан тузилган бўлиб, улар бир-биридан бу катакларнинг жойлашиши билангина фарқ қилиши мумкинлиги исботланди.

Бу теоремадан хусусан *диагонал матрицага ўхшаш бўлган жордан матрицасининг ўзи диагонал матрица эканлиги ва икки диагонал матрица бир-биридан бош диагоналида турган сонларнинг ўринларини алмаштириш билан ҳосил бўлганда ва фақат шундагина ўхшаш эканлиги* келиб чиқади.

Матрицани жордан нормал формасига келтириш. Агар элементлари P майдондан олинган A матрица *жордан нормал* *формасига келтирилса,* яъни жордан матрицасига ўхшаш бўлса, у ҳолда юқорида исботланган теоремадан *A матрица учун жордан нормал формаси бош диагоналда жордан катакларининг жойланиш аниқлигида бир қийматли аниқланиши* келиб чиқади. A матрица бундай келтиришга йўл қўйиши учун зарур шартни—агар бундай жордан матрицаси мавжуд бўлса—ушбу теоремада кўрсатилади. Бу теореманинг исботи бир йўла A матрицага ўхшаш жордан матрицасини амалда излаш усулини ҳам беради. Бунда P майдонда келтирилувчанлик трансформацияловчи матрицанинг барча элементлари P майдонга тегишли эканлигини билдиришини қайд қилиб ўтамиз.

Элементлари P майдонидан олинган A матрицанинг барча характеристик илдизлари асосий P майдоннинг ўзида ётганда ва фақат шундагина A матрица P майдонда жордан нормал формасига келтирилади.

Ҳақиқатан ҳам, агар A матрица J жордан матрицасига ўхшаш бўлса, у ҳолда бу иккала матрица бир хил характеристик илдизларга эга бўлади. Аммо J матрицанинг характеристик илдизлари ҳеч бир қийинчиликсиз топилади: $J-\lambda E$ матрицанинг детерминанти унинг бош диагоналида турувчи элементларининг кўпайтмасига тенг бўлгани сабабли $|J-\lambda E|$ кўпҳад P майдон устида чизиқли кўпайтувчиларга ажралади ва J матрицанинг бош диагоналида турган сонлар ва фақат шуларгина унинг илдизлари бўлиб хизмат қилади.

Аксинча, A матрицанинг барча характеристик илдизлари P майдоннинг ўзида ётсин. Агар

$$e_{n-q+1}(\lambda), \ \ldots, \ e_{n-1}(\lambda), \ e_n(\lambda) \qquad (10)$$

кўпҳадлар $A-\lambda E$ матрицанинг 1 дан фарқли инвариант кўпайтувчилари бўлса, у ҳолда

$$|A-\lambda E| = (-1)^n e_{n-q+1}(\lambda) \ \ldots \ e_{n-1}(\lambda)\, e_n(\lambda).$$

Дарҳақиқат $A-\lambda E$ матрица ва унинг каноник матрицасининг детерминантлари бир-биридан фақат ўзгармас кўпайтувчигагина фарқ қилиши мумкин. Бу кўпайтувчи аслида $(-1)^n$ га тенг, чунки $|A-\lambda E|$ характеристик кўпҳаднинг юқори коэффициенти шундайдир. Шундай қилиб, (10) кўпҳадлар ичида нолга тенглари йўқ, бу кўпҳадлар даражаларининг йиғиндиси n га тенг ва уларнинг ҳаммаси P майдон устида чизиқли кўпайтувчиларга ажралади—сўнггиси, шартга кўра $|A-\lambda E|$ кўпҳад бундай ёйилмага эга бўлгани сабабли ўринлидир.

(8) кўпҳадлар (10) кўпҳадларнинг чизиқли кўпайтувчилар даражаларининг кўпайтмасига ёйилмаси бўлсин. e_{n-j+1}, $j = 1, 2, \dots, q$, *кўпҳаднинг элементар бўлувчилари* деб унинг (8) ёйилмасига кирган турли чизиқли иккиҳадларнинг бирдан фарқли даражалари, яъни

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_{1j}}, \ (\lambda - \lambda_2)^{k_{2j}} \ , \dots, (\lambda - \lambda_t)^{k_{tj}}$$

га айтамиз. Барча (10) кўпҳадларнинг элементар бўлувчиларини *A матрицанинг элементар бўлувчилари* деймиз ва уларни (7) жадвал шаклида ёзамиз.

Энди қуйидагича аниқланган жордан катакларидан ташкил топган n-тартибли J жордан матрицасини оламиз: A матрицанинг ҳар бир $(\lambda - \lambda_i)^{k_{ij}}$ элементар бўлувчисига λ_i сонга тегишли k_{ij}-тартибли жордан катагини мос қўямиз. Равшанки, (10) кўпҳадлар ва фақат шуларгина $J - \lambda E$ матрицанинг 1 дан фарқли инвариант кўпайтувчилари бўлади. Шунинг учун ҳам, $A - \lambda E$ ва $J - \lambda E$ матрицалар эквивалент ва демак, A матрица J жордан матрицасига ўхшаш.

Мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. $A - \lambda E$ матрицани одатдаги усул билан каноник кўринишга келтириб, бу матрицанинг бирдан фарқли инвариант кўпайтувчилари ушбу

$$e_4(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2),$$
$$e_3(\lambda) = \lambda - 1$$

кўпҳадлардан иборат эканлигини ҳосил қиламиз. Биз кўрамизки, A матрица ҳатто рационал сонлар майдонида ҳам жордан нормал формасига келтирилади. Унинг элементар бўлувчилари $(\lambda - 1)^2$, $\lambda - 1$ ва $\lambda + 2$ кўпҳадлар бўлади ва шунинг учун ҳам

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A матрицанинг жордан нормал формаси бўлиб хизмат қилади.

Агар биз A матрицани J матрицага трансформациялайдиган хосмас матрицани топмоқчи бўлсак, у ҳолда аввалги параграфнинг охирида баён қилинган кўрсатмалардан фойдаланишимиз керак.

Ниҳоят, аввалги натижалар асосида матрицани диагонал шаклга келтиришнинг қуйидаги зарурий ва етарли шартини исботлаш мумкин. Бу шартдан диагонал шаклга келтиришнинг 33-§ да исботланган етарли аломати дарҳол келиб чиқади.

Элементлари P майдондан олинган n-тартибли A матрица характеристик матрицасининг охирги $e_n(\lambda)$ инвариант кўпайтувчисининг барча илдизлари P майдонда ётганда, шу билан бирга бу илдизлар ичида карралилари мавжуд бўлмаганда ва фақат шундагина бундай матрица диагонал кўринишга келтирилади.

Ҳақиқатан ҳам, матрицани диагонал кўринишига келтириш уни барча жордан катаклари 1 тартибга эга бўлган жордан кўринишга келтириш билан тенг кучлидир. Бошқача айтганда, A матрицанинг барча элементар бўлувчилари биринчи тартибли кўпҳадлар бўлиши керак. Аммо $A - \lambda E$ матрицанинг барча инвариант кўпайтувчилари $e_n(\lambda)$ кўпҳаднинг бўлувчиларидан иборат бўлгани учун сўнгги шарт $e_n(\lambda)$ кўпҳаднинг барча элементар бўлувчилари 1 даражага эга эканлиги билан тенг кучлидир, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

62-§. Минимал кўпҳад

Элементлари P майдондан олинган n-тартибли A квадрат матрица берилган бўлсин. Агар

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}\lambda + \alpha_k$$

$P[\lambda]$ ҳалқанинг ихтиёрий кўпҳади бўлса, у ҳолда

$$f(A) = \alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}A + \alpha_k E$$

матрица $f(\lambda)$ кўпҳаднинг $\lambda = A$ даги *қиймати* дейилади; шу билан бирга $f(\lambda)$ кўпҳаднинг озод ҳади A матрицанинг нолинчи даражасига, яъни E бирлик матрицага кўпайтирилаётганига диққатни жалб қиламиз.

Агар

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) \text{ ёки } f(\lambda) = u(\lambda)v(\lambda)$$

бўлса, у ҳолда $f(A) = \varphi(A) + \psi(A)$
ва мос равишда

$$f(A) = u(A)v(A)$$

бўлиши осонгина текширилади.

Агар $f(\lambda)$ кўпҳад A матрица орқали ўчирилса, яъни

$$f(A) = 0$$

бўлса, у ҳолда A матрицани $f(\lambda)$ кўпҳаднинг *матрицавий илдизи* ёки бу англашилмовчиликка олиб келмайдиган ерларда соддагина қилиб *илдизи* деб айтамиз.

Ҳар қандай A матрица нолдан фарқли бирор кўпҳаднинг илдизи бўлиб хизмат қилади.

Ҳақиқатан ҳам, маълумки, барча n-тартибли квадрат матрицалар P майдон устида n^2 ўлчовли вектор фазо ташкил этади. Бундан ушбу

$$A^{n^2},\ A^{n^2-1},\ \ldots,\ A, E$$

n^2+1 та матрица системаси P майдон устида чизиқли эркли эканлиги келиб чиқади, яъни P да ҳаммаси нолга тенг бўлмаган шундай $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n^2, \alpha_{n+1}^2$ элементлар мавжудки,

$$\alpha_0 A^{n^2} + \alpha_1 A^{n^2-1} + \ldots + \alpha_{n^2} A + \alpha_{n^2+1} E = 0$$

бўлади. Шундай қилиб, A матрица даражаси n^2 дан катта бўлмаган нолдан фарқли

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 \lambda^{n^2} + \alpha_1 \lambda^{n^2-1} + \ldots + \alpha_{n^2}\lambda + \alpha_{n^2+1}$$

кўпҳаднинг илдизи экан.

A матрица шундай кўпҳадларнинг ҳам илдизи бўлиб хизмат қиладики, уларнинг юқори коэффициентлари бирга тенг, бунинг учун A матрица ўчирадиган ихтиёрий нолдан фарқли кўпҳадни олиб, бу кўпҳадни унинг юқори коэффициентига бўлиш кифоя. A матрица ўчирадиган ҳамда юқори коэффициенти 1 га тенг бўлган энг кичик даражали кўпҳад *A матрицанинг минимал кўпҳади* дейилади. *A матрицанинг минимал кўпҳади бир қийматли аниқланган,* чунки иккита бундай кўпҳаднинг айирмаси, уларнинг ҳар иккаласига нисбатан ҳам кичик даражага эга бўлиб, аммо у ҳам A матрица орқали ўчирилар эди.

A матрица орқали ўчириладиган ҳар қандай $f(\lambda)$ кўпҳад бу матрицанинг минимал кўпҳади $m(\lambda)$ га қолдиқсиз бўлинади.

Ҳақиқатан ҳам, агар

$$f(\lambda) = m(\lambda)\,q(\lambda) + r(\lambda)$$

бўлса (бу ерда $r(\lambda)$ нинг даражаси $m(\lambda)$ нинг даражасидан кичик), у ҳолда

$$f(A) = m(A)\,q(A) + r(A)$$

ва $f(A) = m(A) = 0$ дан $r(A) = 0$ келиб чиқади, бу эса минимал кўпҳаднинг таърифига зид.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз:

A матрицанинг минимал кўпҳади $A-\lambda E$ характеристик матрицанинг сўнгги $e_n(\lambda)$ инвариант кўпайтувчиси билан устма-уст тушади.

Исботи. Белгилашларни сақлаб ва 59-§ нинг натижаларидан фойдаланиб,

$$(-1)^n |A-\lambda E| = d_{n-1}(\lambda)\, e_n(\lambda) \tag{1}$$

тенгликни ёзиш мумкин. Бу ердан, хусусан, $e_n(\lambda)$ ва $d_{n-1}(\lambda)$ноль кўпҳадлар бўлмаслиги келиб чиқади. Сўнгра, $B(\lambda)$ орқали $A-\lambda E$ матрицага бириктирилган матрицани (14-§ га қаранг) белгилаймиз,

$$B(\lambda) = (A-\lambda E)^*.$$

14-§ нинг (3) тенглигидан

$$(A-\lambda E)\, B(\lambda) = |A-\lambda E|\, E \tag{2}$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, $B(\lambda)$ матрицанинг элементлари вазифасини $A-\lambda E$ матрицанинг мусбат ёки манфий ишора билан олинган $(n-1)$-тартибли минорлари ва фақат шуларгина бажаргани, $d_{n-1}(\lambda)$ кўпҳад эса барча бундай минорларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлгани учун

$$B(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)\, C(\lambda) \tag{3}$$

бўлади, шу билан бирга $C(\lambda)$ матрица элементларининг энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг.

(2), (3) ва (1) тенгликлардан

$$(A-\lambda E)\, d_{n-1}(\lambda)\, C(\lambda) = (-1)^n d_{n-1}(\lambda)\, e_n(\lambda)\, E$$

тенглик келиб чиқади.

Бу тенгликни ушбу умумий мулоҳазадан келиб чиқишича нолдан фарқли $d_{n-1}(\lambda)$ кўпайтувчига қисқартириш мумкин: агар $\varphi(\lambda)$ нолдан фарқли кўпҳад, $D(\lambda) = (d_{ij}(\lambda)$ нолдан фарқли λ-матрица бўлиб, шу билан бирга $d_{st}(\lambda) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\varphi(\lambda)\, D(\lambda)$ матрицада (s,t) ўринда нолдан фарқли $\varphi(\lambda)\, d_{st}(\lambda)$ элемент туради. Шундай қилиб,

$$(A-\lambda E)\, C(\lambda) = (-1)^n e_n(\lambda)\, E,$$

бу ердан

$$e_n(\lambda)\, E = (\lambda E - A)[(-1)^{n+1} C(\lambda)]. \tag{4}$$

Бу тенглик чап томонда турган λ-матрицани $\lambda E - A$ иккиҳадга „чапдан“ бўлиш натижасида чиққан қолдиқ нолга тенг эканлигини кўрсатади. Аммо 60-§ нинг сўнггида исботланган леммадан бу қолдиқ $e_n(A)E = e_n(A)$ матрицага тенг эканлиги келиб чиқади. Дарҳақиқат, $e_n(\lambda)E$ матрица коэффициентлари скаляр, яъни A матрица билан ўрин алмашувчи матрицалардан иборат бўлган матрицавий λ-кўпҳад шаклида ёзилиши мумкин Шундай қилиб,

$$e_n(A) = 0,$$

яъни $e_n(\lambda)$ ҳақиқатан ҳам A матрица **орқали ўчирилади**.

Бу ердан $e_n(\lambda)$ кўпҳад A матрицанинг минимал $m(\lambda)$ кўпҳадига қолдиқсиз бўлиниши келиб чиқади, яъни

$$e_n(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda). \tag{5}$$

Равшанки, $q(\lambda)$ кўпҳаднинг юқори коэффициенти бирга тенг.

$m(A) = 0$ бўлгани учун, яна 60-§ даги ўша леммага асосан, λ-матрица $m(\lambda)E$ ни $\lambda E - A$ иккиҳадга чапдан бўлиш натижасида ҳосил бўлган қолдиқ нолга тенг, яъни

$$m(\lambda)E = (\lambda E - A)\,Q(\lambda). \tag{6}$$

(5), (4) ва (6) тенгликлар

$$(\lambda E - A)[(-1)^{n+1}C(\lambda)] = (\lambda E - A)[Q(\lambda)\,q(\lambda)]$$

тенгликка келтиради.

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $\lambda E - A$ умумий кўпайтувчига қисқартириш мумкин, чунки бу матрицавий λ-кўпҳаднинг юқори коэффициенти E хосмас матрицадир. Шундай қилиб,

$$C(\lambda) = (-1)^{n+1}Q(\lambda)\,q(\lambda).$$

Аммо, бизга маълумки, $C(\lambda)$ матрица элементларининг энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг. Шунинг учун ҳам, $q(\lambda)$ кўпҳад нолинчи даражага эга бўлиши шарт, унинг юқори коэффициенти 1 га тенглигидан эса $q(\lambda) = 1$. Шундай қилиб, (5) га кўра

$$e_n(\lambda) = m(\lambda),$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

A матрицанинг характеристик кўпҳади (1) га асосан $e_n(\lambda)$ га қолдиқсиз бўлингани сабабли ҳозиргина исботланган теоремадан ушбу теорема келиб чиқади.

Гамильтон — Кэли теоремаси. *Ҳар қандай матрица ўз характеристик кўпҳадининг илдизидир.*

Чизиқли алмаштиришнинг минимал кўпҳади. Аввал ушбу даъвони исботлаймиз:

Агар A ва B матрицалар ўхшаш бўлса ва агар $f(\lambda)$ кўпҳад A матрица орқали ўчирилса, у ҳолда у B матрица орқали ҳам ўчирилади.

Дарҳақиқат,

$$B = C^{-1}AC$$

бўлсин. Агар

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}\lambda + \alpha_k$$

бўлса, у ҳолда

$$\alpha_0A^k + \alpha_1A^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}A + \alpha_kE = 0.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини C матрица билан трансформациялаб, топамиз:

$$\begin{aligned} C^{-1}(\alpha_0A^k + \alpha_1A^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}A + \alpha_kE)C = \\ = \gamma_0(C^{-1}AC)^k + \alpha_1(C^{-1}AC)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}(C^{-1}AC) + \\ + \alpha_kE = \alpha_0B^k + \alpha_1B^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}B + \alpha_kE = 0, \end{aligned}$$

яъни $f(B) = 0$.

Бу ердан *ўхшаш матрицалар ягона минимал кўпҳадга эга* эканлиги келиб чиқади.

Энди φ алмаштириш P майдон устида n ўлчовли чизиқли фазонинг чизиқли алмаштириши бўлсин. Бу алмаштиришни фазонинг турли базаларида берадиган матрицалар ўзаро ўхшаш. Бу матрицаларнинг умумий минимал кўпҳади φ *чизиқли алмаштиришнинг минимал кўпҳади* дейилади.

Чизиқли алмаштиришлар устида 32-§ да киритилган амаллардан фойдаланиб $P[\lambda]$ ҳалқадан олинган

$$f(\lambda = \alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}\lambda + \alpha_k$$

кўпҳаднинг λ номаълум φ чизиқли алмаштиришга тенг бўлгандаги *қиймати* тушунчасини киритиш мумкин: бу

$$f(\varphi) = \alpha_0\varphi^k + \alpha_1\varphi^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}\varphi + \alpha_k\varepsilon$$

чизиқли алмаштириш бўлади, бу ерда ε — айнан алмаштириш.

Сўнгра, агар

$$f(\varphi) = \omega$$

бўлса (бу ерда ω — ноль алмаштириш), у ҳолда $f(\lambda)$ кўпҳад φ чизиқли алмаштириш орқали *ўчирилади* деймиз.

Китобхон чизиқли алмаштиришлар ва матрицалар устидаги амаллар орасидаги боғланишни ҳисобга олиб, φ *чизиқли алмаштиришнинг минимал кўпҳади φ алмаштириш билан ўчириладиган, юқори коэффициенти 1 га тенг, бир қийматли аниқланган энг кичик даражали кўпҳаддан иборат эканлигини қийинчиликсиз исботлайди.* Бундан сўнг, юқорида ҳосил қилинган натижалар, хусусан Гамильтон—Кэли теоремаси чизиқли алмаштиришлар тилида қайтадан ифодаланиши мумкин.

ЎН ТЎРТИНЧИ БОБ

ГРУППАЛАР

63-§. Группаларнинг таърифи ва мисоллари

Аввалги бобларда катта роль ўйнаган ҳалқалар ва майдонлар иккита боғлиқ бўлмаган амалли—қўшиш ва кўпайтириш амалли—алгебраик системалардир. Аммо математиканинг турли бўлимларида ва унинг татбиқларида шундай алгебраик системалар ҳам жуда кўп учрайдики, уларда фақат битта алгебраик амал аниқланган. Масалан, ҳозирча китобимизда илгарироқ учраган мисоллар билан чекланиб, шуни қайд қиламизки, n-тартибли ўрнига қўйишлар тўпламида (3-§ га қаранг) биз битта амал—кўпайтириш амалинигина аниқлаган эдик. Иккинчи томондан, вектор фазо таърифига векторларни қўшиш киради, ваҳоланки биз векторларнинг кўпайтмасини аниқламаган эдик (векторни сонга кўпайтириш алгебраик амалнинг 44-§ да берилган таърифини қаноатлантирмаслигини қайд қилиб ўтамиз)

Бир амалли алгебраик системаларнинг энг муҳими группалардир. Бу тушунча жуда ҳам кенг татбиқ соҳаларига эга бўлиб, катта мустақил фан—группалар назариясининг мавзуи бўлиб хизмат қилади. Ушбу боб группалар назариясига кириш сифатида қаралиши мумкин—унда группалар ҳақида, улар билан ҳар бир математик танишиб чиқиши шарт бўлган элементар маълумотлар баён қилинади; боб битта унча элементар бўлмаган теорема билан тугалланади.

Группаларнинг умумий назариясида қабул қилинганидек, қаралаётган алгебраик амални *кўпайтириш* деб аташни ва тегишли символикани ишлатишни шартлашамиз. Алгебраик амал ҳамиша бажариладиган ва бир қийматли деб фараз қилинади—қаралаётган тўпламнинг ихтиёрий a ва b элементи учун ab кўпайтма мавжуд ва у бу тўпламнинг бир қийматли аниқланган элементидан иборат эканлигини эслатамиз (44-§ га қаранг).

Группа деб ассоциатив бўлган (аммо коммутатив бўлиши шарт бўлмаган) битта алгебраик амалли G тўпламга айтилади, шу билан бирга бу амал учун тескари амал ҳам мавжуд бўлиши шарт.

Шу билан бирга группавий амал нокоммутатив бўлиши мумкинлиги сабабли тескари амалнинг бажарилиши қуйидагини билдиради: G дан олинган ихтиёрий иккита a ва b элементлар учун G да бир қийматли аниқланган шундай x элемент ва бир қийматли аниқланган шундай y элемент мавжудки,

$$ax = b, \quad ya = b$$

бўлади.

Агар G группа чекли сондаги элементлардан ташкил топган бўлса, у ҳолда у *чекли группа*, ундаги элементларнинг сони эса группанинг *тартиби* дейилади. Агар G группада аниқланган амал коммутатив бўлса, у ҳолда G *коммутатив* ёки *Абель* группаси дейилади.

Группа таърифидан келиб чиқадиган энг содда натижаларни кўрсатамиз. 44-§ даёқ келтирилган мулоҳазалар асосида ассоциативлик қонуни *группанинг ихтиёрий чекли сондаги элементларини* (группавий амалнинг нокоммутатив бўлиши мумкинлиги сабабли) маълум тартибдаги *кўпайтмаси* ҳақида бир қийматли гапиришга имкон беради.

Тескари амалнинг мавжудлигидан келиб чиқадиган натижаларга ўтамиз.

G группада ихтиёрий a элемент берилган бўлсин. Группа таърифидан G да бир қийматли аниқланган шундай e_a элементнинг мавжудлиги келиб чиқадики, $ae_a = a$ бўлади, демак, бу элемент уни a элементга ўнгдан кўпайтирганда бир вазифасини бажаради. Агар b элемент G группанинг ихтиёрий бошқа элементи бўлса ва агар y группанинг $ya = b$ тенгликни қаноатлантирувчи элементи бўлса—унинг мавжудлиги группанинг таърифидан келиб чиқади—у ҳолда

$$b = ya = y(ae_a) = (ya)e_a = be_a$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, e_a элемент фақат аввалги a элементга нисбатан эмас, балки G группанинг барча элементларига нисбатан ҳам ўнгги бир вазифасини ўтайди; шунинг учун уни биз e' орқали белгилаймиз. Тескари амалнинг таърифидаги бир қийматлиликдан бу элементнинг ягоналиги келиб чиқади.

Худди шу йўл билан G группада G дан олинган барча a лар учун $e''a = a$ шартни қаноатлантирувчи e'' элементнинг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш мумкин. Аслида e' ва e'' элементлар устма-уст тушади, чунки $e''e' = e''$ ва $e''e' = e'$ тенгликлардан $e'' = e'$ эканлиги келиб чиқади. Бу билан *ҳар қандай G группада G дан олинган барча a лар учун*

$$ae = ea = a$$

шартни қаноатлантирувчи, бир қийматли аниқланган e *элементнинг мавжудлиги* исботланди. Бу G группанинг *бири* дейилади ва одатда 1 символи билан белгиланади.

Группанинг таърифидан берилган a элемент учун шундай a' ва a'' элементларнинг мавжудлиги ва ягоналиги келиб чиқадики,

$$aa' = 1, \quad a''a = 1$$

бўлади. Аслида a' ва a'' элементлар устма-уст тушади:

$$a''aa' = a''(aa') = a'' \cdot 1 = a'',$$
$$a''aa' = (a''a)a' = 1 \cdot a' = a'$$

тенгликлардан $a'' = a'$ келиб чиқади. Бу элемент a элементга *тескари* дейилади ва a^{-1} билан белгиланади, яъни

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Шундай қилиб, *группанинг ҳар қандай элементи бир қийматли аниқланган тескари элементга эга.*

Сўнгги тенгликлардан a^{-1} учун тескари элемент вазифасини a элементнинг ўзи бажариши келиб чиқади. Сўнгра осонгина кўриш мумкинки, кўпайтувчиларга тескари бўлган элементларнинг тескари тартибда олинган кўпайтмаси бир нечта элемент кўпайтмаси учун тескари элемент бўлади:

$$(a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1} \ldots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

Ниҳоят, бир учун бирнинг ўзи тескари элемент бўлади.

Берилган битта амалли тўпламнинг группа эканлигини текшириш группа таърифидаги тескари амалнинг бажарилиш шартини, бир ҳамда тескари элементларнинг—шу билан бирга фақат бир томондан (масалан, ўнгдан), уларнинг ягоналигини фараз қилмай—мавжудлиги ҳақидаги талаб билан алмаштириш мумкин эканлигидан жуда осонлашади. Бу ушбу теоремадан келиб чиқади:

Агар битта ассоциатив амалга эга бўлган G *тўпламда* G *нинг барча* a *лари учун* $ae = a$ *хоссага эга бўлган камида битта* e *элемент мавжуд бўлса ва агар бу ўнгги бирлар ичида камида битта шундай* e_0 *элемент мавжуд бўлсаки, унга нисбатан* G *нинг ҳар қандай* a *элементи камида битта ўнг тескари* a^{-1} *элементга эга,* яъни

$$aa^{-1} = e_0$$

бўлса, у ҳолда G *группа бўлади.*

Исботи. a^{-1} элемент a учун ўнг тескари элементлардан бири бўлсин. У ҳолда

$$aa^{-1} = e_0 = e_0e_0 = e_0aa^{-1},$$

яъни $aa^{-1} = e_0aa^{-1}$. Бу тенгликнинг иккала томонини a^{-1} учун ўнг тескари элементлардан бирига ўнгдан кўпайтириб, $ae_0 = e_0ae_0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $a=e_0a$, чунки e_0 элемент G учун ўнгги бирдир. Шундай қилиб, e_0 элемент G учун чапки бир ҳам экан. Агар энди e_1 — ихтиёрий ўнгги бир, e_2 — ихтиёрий чапки бир бўлса, у ҳолда

$$e_2e_1 = e_1 \text{ ва } e_2e_1 = e_2$$

тенгликлардан $e_1 = e_2$ келиб чиқади, яъни ихтиёрий ўнги бир ихтиёрий чапки бирга тенг. Шу билан G тўпламда бирлик элементнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланди, уни юқоридагидек, 1 орқали белгилаймиз.

Сўнгра

$$a^{-1} = a^{-1}\cdot 1 = a^{-1}aa^{-1},$$

яъни $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$, бу ерда a^{-1} элемент a учун ўнг тескари элементлардан бири. Сўнгги тенгликнинг иккала томонини a^{-1} учун ўнг тескари элементлардан бирига ўнгдан кўпайтириб, $1 = a^{-1}a$ ни ҳосил қиламиз, яъни a^{-1} элемент a учун чап тескари элемент бўлиб ҳам хизмат қилади. Агар энди a элемент учун a_1^{-1} ихтиёрий ўнг тескари, a_2^{-1} элемент эса ихтиёрий чап тескари элемент бўлса, у ҳолда

$$a_2^{-1}aa_1^{-1} = (a_2^{-1}a)a_1^{-1} = a_1^{-1},$$

$$a_2^{-1}aa_1^{-1} = a_2^{-1}(aa_1^{-1}) = a_2^{-1}$$

тенгликлардан $a_1^{-1} = a_2^{-1}$ келиб чиқади, яъни G нинг ҳар қандай a элементи учун a^{-1} тескари элементнинг мавжудлиги ва ягоналиги келиб чиқади.

Энди G тўплам группа эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин. Дарҳақиқат, осонгина кўриш мумкинки, $ax = b$, $ya = b$ тенгламаларни

$$x = a^{-1}b, \ y = ba^{-1}$$

элементлар қаноатлантиради. Бу ечимларнинг ягоналиги қуйидагидан келиб чиқади. Агар, масалан, $ax_1 = ax_2$ бўлса у ҳолда бу тенгликнинг иккала томонини чапдан a^{-1} га кўпайтириб, $x_1 = x_2$ ни ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

Биз бир неча марта — ҳалқалар учун, чизиқли фазолар учун, евклид фазолари учун — изоморфизм тушунчасига дуч келдик. Бу тушунча группалар учун ҳам аниқланиши мумкин ва у группалар назариясида ҳам ҳалқалар назариясидаги каби жуда катта роль ўйнайди. Агар G ва G' группалар орасида шундай ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлсаки, бу мосликда G нинг ҳар қандай a, b элементлари ва G' нинг уларга мос келувчи a', b' элементлари учун ab кўпайтмага

$a'b'$ кўпайтма мос келса, у ҳолда бундай группалар *изоморф* дейилади. 46-§ даги (ҳалқадаги ноль ва қарама-қарши элемент учун) каби кўрсатиш мумкинки, G ва G' группалар орасидаги изоморф мосликда G группанинг бирига G' группанинг бири мос келади ва G нинг a элементига G' нинг a' элементи мос келса, у ҳолда a^{-1} элементга a'^{-1} элемент мос келади.

Группаларнинг мисолларига ўтаётиб, шуни қайд қиламизки, агар G группадаги амални *қўшиш* деб аталса, у ҳолда группанинг бири *ноль* деб аталар ва 0 символи билан белгиланар эди, тескари элемент ўрнига биз *қарама-қарши элемент* ҳақида сўз юритар ва уни $-a$ орқали белгилар эдик.

Группанинг биринчи мисоли сифатида *ҳар қандай ҳалқа (жумладан, майдон ҳам) қўшишга нисбатан группа, шу билан бирга Абель группаси* эканлигини кўрсатамиз; бу *ҳалқанинг аддитив группаси* деб аталадиган группадир. Бу изоҳ группанинг кўп миқдордаги конкрет мисолларини бир йўла беради, жумладан — бутун сонларнинг аддитив группаси, жуфт сонларнинг аддитив группаси, рационал сонлар, ҳақиқий сонлар, комплекс сонларнинг аддитив группалари ва ҳоказо. *Бутун сонлар ва жуфт сонларнинг аддитив группалари* иккинчиси биринчисининг қисми бўлишига қарамай *ўзаро изоморф*; ҳар қандай k бутун сонга $2k$ жуфт сонни мос қўювчи акслантириш ўзаро бир қийматли ва осонгина текшириш мумкинки, қайд қилинган группалардан биринчисини иккинчисига ҳатто изоморф акслантиришдир.

Ҳеч қандай ҳалқа кўпайтиришга нисбатан группа эмас, чунки тескари амал — бўлиш ҳамма вақт бажарилавермайди. Ихтиёрий ҳалқадан майдонга ўтилганда ҳам вазият ўзгармайди, чунки майдонда нолга бўлиш бажарилмай қолаверади. Майдоннинг барча нолдан фарқли элементлари тўпламини қараймиз. Майдон нолнинг бўлувчиларига эга бўлмагани учун, яъни иккита нолдан фарқли элемент кўпайтмасининг ўзи ҳам нолдан фарқли бўлгани учун, кўпайтириш қурилаётган тўплам учун алгебраик амал, шу билан бирга ассоциатив ва коммутатив амал бўлади, энди бўлиш ҳар доим бажарилади ва у тўплам чегарасидан ташқарига чиқармайди. Шундай қилиб, *ҳар қандай майдоннинг нолдан фарқли элементлари тўплами Абель группасидир,* бу группа *майдоннинг мультипликатив группаси* дейилади. Рационал сонлар, ҳақиқий сонлар, комплекс сонларнинг мультипликатив группалари бунга тегишли мисоллардир.

Барча мусбат ҳақиқий сонлар, шубҳасиз, кўпайтиришга нисбатан группа ташкил этади. *Бу группа барча ҳақиқий сонларнинг аддитив группасига изоморф*: ҳар қандай a мусбат сонга $\ln a$ ҳақиқий сонни мос қўйиб, биз биринчи группанинг иккинчи группага ўзаро бир қийматли акслантиришини ҳосил қиламиз, бу мослик

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

тенгликка кўра изоморфизм бўлади.

Сўнгра, комплекс сонлар майдонида бирнинг n-даражали илдизлари тўпламини оламиз. 19-§ да бирнинг иккита n-даражали илдизининг кўпайтмаси, ва шунингдек, бирнинг n-даражали илдизига тескари сон яна шу қаралаётган тўпламга тегишли эканлиги исботланган эди. Бир ҳам, албатта, бу тўпламга тегишли бўлгани ва ихтиёрий иккита комплекс соннинг кўпайтмаси ассоциатив ва коммутатив бўлгани сабабли, *бирнинг n-даражали илдизлари кўпайтиришга нисбатан чекли n-тартибли Абель группасини ташкил этишини* ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, *ихтиёрий n натурал сон учун чекли n-тартибли группалар мавжуд.*

Бирнинг n-даражали илдизлари (кўпайтиришга нисбатан) группаси 45-§ да тузилган Z_n ҳалқанинг аддитив группасига изоморф. Дарҳақиқат агар ε бирнинг n-даражали бошланғич илдизи бўлса, у ҳолда айтилган группалардан биринчисининг барча элементлари ε^k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ кўринишга эга. Агар ҳар қандай ε^k сонга Z_n ҳалқанинг C_k элементини, яъни n га бўлинганда k қолдиқ берувчи бутун сонлар синфини мос қўйсак, у ҳолда қаралаётган группалар орасида изоморф мослик ҳосил қиламиз: агар $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$ бўлиб, $k + l = nq + r$ бўлса (бу ерда $0 \leqslant r \leqslant n-1$ бўлиб, q эса 0 ёки 1 га тенг), у ҳолда $\varepsilon^k \cdot \varepsilon^l = \varepsilon^r$ ва шу билан бирга $C_k + C_l = C_r$.

Бу ерда сонли тўпламларнинг группа бўлмаган баъзи мисолларини кўрсатиб ўтиш ўринлидир. Масалан, барча бутун сонлар тўплами кўпайтиришга нисбатан группа бўлмайди, барча мусбат ҳақиқий сонлар тўплами қўшишга нисбатан группа бўлмайди, барча тоқ сонлар тўплами қўшишга нисбатан группа бўлмайди, барча манфий ҳақиқий сонлар тўплами кўпайтиришга нисбатан группа бўлмайди. Бу даъволарни текшириш қийинчилик туғдирмайди.

Юқорида кўрилган барча сонли группалар, албатта, Абель группаларидир. Чизиқли фазолар сонлардан тузилмаган Абель группаларининг мисоллари бўлиб хизмат қилади: уларнинг таърифидан (29, 47-§ ларга қаранг) келиб чиқишича, *ихтиёрий P майдон устида ҳар қандай чизиқли фазо қўшиш амалига нисбатан Абель группаси бўлади.*

Нокоммутатив группаларнинг мисолларига ўтамиз.

P майдон устида барча n-тартибли матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан группа бўлмайди, чунки тескари элементнинг мавжудлиги ҳақидаги талаб бузилади. Аммо биз фақат хосмас матрицалар билан чегаралансак, у ҳолда энди группани ҳосил қиламиз. Дарҳақиқат, иккита хосмас матрицанинг кўпайтмаси, маълумки, хосмас бўлади, бирлик матрица хосмасдир, ҳар қандай хосмас матрица яна хосмас тескари матрицага эга ва ниҳоят, ассоциативлик қонуни барча матрицалар учун бажарилиб, хусусан хосмас матрицалар учун ҳам ўринлидир. Демак, матрицалар кўпайтмасини группавий амал сифатида қарасак, P майдон устида *n-тартибли хосмас матрицалар группаси ҳақида* гапириш мумкин. Бу группа $n \geqslant 2$ да нокоммутативдир.

Ўрнига қўйишларнинг 3-§ да киритилган кўпайтмаси чекли нокоммутатив группаларнинг жуда муҳим мисолларига келтиради. Маълумки, барча n-тартибли ўрнига қўйишларда кўпайтириш алгебраик, шу билан бирга у ассоциатив, аммо $n \geqslant 3$ да нокоммутатив амал бўлади, E айнан ўрнига қўйиш бу кўпайтиришнинг бири вазифасини бажаради ва ҳар қандай ўрнига қўйиш учун тескари ўрнига қўйиш мавжуд. Шундай қилиб, *n-тартибли ўрнига қўйишлар тўплами кўпайтиришга нисбатан чекли n!-тартибли группа ташкил этади.* Бу группа *n-тартибли симметрик группа* дейилади; у $n \geqslant 3$ бўлганда нокоммутативдир.

Энди n-тартибли барча ўрнига қўйишлар ўрнига, фақат жуфт ўрнига қўйишлар тўпламини олайлик. Маълумки, у $\frac{1}{2}n!$ та элементдан ташкил топган. Ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги бу ўрнига қўйишнинг транспозициялар кўпайтмаси кўринишидаги бирорта ёйилмасига кирган транспозициялар сонининг жуфт-тоқлиги билан бир хил бўлиши ҳақида 3-§ да исботланган теоремадан фойдаланиб, *иккита жуфт ўрнига қўйишнинг кўпайтмаси яна жуфт* ўрнига қўйиш бўлишини ҳосил қиламиз; ҳақиқатан ҳам, AB нинг транспозициялар кўпайтмаси шаклидаги ифодасини A ва B ларга мос келувчи ёйилмаларни бирин-кетин ёзиб ҳосил қиламиз. Сўнгра, ўрнига қўйишлар кўпайтмасининг ассоциативлиги бизга маълум, айнан ўрнига қўйишнинг жуфтлиги равшан. Ниҳоят, A жуфт ўрнига қўйиш бўлганда A^{-1} ўрнига қўйишнинг жуфтлиги, масалан, бу ўрнига қўйишларни бирининг ёзувини иккинчисининг ёзувидан юқори ва пастки сатрларнинг ўринларини алмаштириб ҳосил қилиш мумкинлигидан, яъни улар тенг сондаги инверсияларга эга эканлигидан келиб чиқади. Шундай қилиб, *n-тартибли жуфт ўрнига қўйишлар тўплами кўпайтиришга нисбатан чекли $\frac{1}{2}n!$- тартибли группа бўлади.* Бу группа *n-тартибли ўзгарувчан ишорали группа* дейилади; у $n = 3$ да коммутатив бўлса-да, $n \geqslant 4$ да коммутатив эмаслиги осон текширилади.

Симметрик ва ўзгарувчан ишорали группалар чекли группалар назариясида, ва шунингдек, Галуа назариясида жуда катта роль ўйнайди. Шуни қайд қиламизки, ўзгарувчан ишорали группага қиёс қилиб, тоқ ўрнига қўйишлардан кўпайтиришга нисбатан группа тузиш мумкин бўлмас эди, чунки иккита тоқ ўрнига қўйишнинг кўпайтмаси ҳамма вақт жуфт ўрнига қўйишдир.

Геометриянинг турли тармоқлари группаларнинг кўп сондаги хилма-хил мисолларини беради. Бу хилдаги мисоллардан энг соддасини кўрсатайлик: шарнинг, унинг марказ атрофида барча айланишлари тўплами, агар иккита айланишнинг кўпайтмаси деб, уларнинг кетма-кет бажарилишидан ҳосил бўлган натижани айтсак, нокоммутатив группа бўлади.

64-§. Қисм группалар

Агар G группанинг A қисм тўплами шу группада аниқланган амалга нисбатан группа бўлса, у G группанинг қисм *группаси* дейилади.

G группанинг A қисм тўплами бу группанинг қисм группаси бўлишини текширишда: 1) A даги ихтиёрий икки элементнинг кўпайтмаси A да ётишини; 2) A ўзининг ҳар қандай элементи билан бирга унинг тескарисини ҳам ўз ичига олишини текшириш кифоя. Дарҳақиқат, G группада ассоциативлик қонунининг ўринли эканлигидан, бу қонуннинг A даги элементлар учун ўринли эканлиги келиб чиқади, G группанинг бири A га тегишли эканлиги эса 1) ва 2) дан келиб чиқади.

Аввалги параграфда келтирилган группаларнинг кўпчилиги ўша ерда келтирилган бошқа группаларнинг қисм группаларидан иборат. Масалан, жуфт сонларнинг аддитив группаси барча бутун сонларнинг аддитив группасининг қисм группаси, кейингиси эса ўз навбатида рационал сонлар аддитив группасининг қисм группасидир. Бу группаларнинг барчаси, умуман сонларнинг аддитив группалари каби, комплекс сонлар аддитив группасининг қисм группасидан иборат. Мусбат ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группаси нолдан фарқли барча ҳақиқий сонлар мультипликатив группасининг қисм группасидан иборат. n-тартибли ўзгарувчан ишорали группа худди шу тартибли симметрик группанинг қисм группасидир.

Қисм группанинг таърифида G группанинг A қисм тўпламига қўйилган шарт — G группада аниқланган группавий амалга нисбатан группа бўлиш шарти — муҳимдир. Масалан, мусбат ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группаси барча ҳақиқий сонлар аддитив группасининг, гарчи биринчи тўплам иккинчи тўпламга қисм тўплам сифатида кирган бўлса ҳам, қисм группаси бўлмайди.

Агар G группада A ва B қисм группалар олинган бўлса, у ҳолда уларнинг $A \cap B$ *кесишмаси, яъни* A *да ҳам,* B *да ҳам ётувчи элементлар тўплами* G *группанинг яна қисм группаси бўлади.*

Дарҳақиқат, агар x ва y элементлар $A \cap B$ кесишмада бўлса, улар A қисм группада ётади, шунинг учун xy кўпайтма ҳам, x^{-1} тескари элемент ҳам A га тегишли бўлади. Худди шу мулоҳазаларга кўра xy ва x^{-1} элементлар B қисм группага ҳам тегишли, ва шунга кўра улар $A \cap B$ га ҳам киради.

Ҳосил қилинган натижа, осонгина кўриш мумкинки, фақат иккита қисм группа учун эмас, балки ихтиёрий чекли сондаги ёки ҳатто чексиз сондаги қисм группалар учун ҳам ўринли.

G группанинг фақат 1 элементдан ташкил топган қисм тўплами, равшанки, бу группанинг қисм группаси бўлади; G группанинг ихтиёрий бошқа қисм группасида ётган бу қисм группа G группанинг *бирлик қисм группаси* дейилади. Иккинчи томондан, G группанинг ўзи ўзининг қисм группаларидан биридир.

Қисм группаларнинг қизиқарли мисоли бўлиб, циклик қисм группалар деб аталувчи қисм группалар хизмат қилади. Аввал, G группа a элементининг даражаси тушунчасини киритамиз. Агар n — исталган натурал сон бўлса, у ҳолда ҳар бири a элементга тенг бўлган n та элементнинг кўпайтмасини a элементнинг *n-даражаси* дейилади ва a^n билан белгиланади. a элементнинг *манфий даражаларини* ё G группанинг бу элементини мусбат даражаларига тескари элементлари сифатида, ёки бўлмаса, ҳар бири a^{-1} элементга тенг бўлган бир неча кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси сифатида аниқлаш мумкин. Ҳақиқатда бу таърифлар устма-уст тушади,

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n, \; n > 0. \tag{1}$$

Исботлаш учун биринчи n таси a га, қолганлари эса a^{-1} га тенг бўлган $2n$ та кўпайтувчининг кўпайтмасини олиш ва барча қисқартишларни бажариш етарлидир. (1) тенгликнинг ҳам чап қисмига, ҳам ўнг қисмига тенг бўлган элемент a^{-n} орқали белгиланади. Ниҳоят, a элементнинг *нолинчи даражаси* a^0 деб 1 элементни тушунишни шартлашамиз.

Шуни қайд қиламизки, агар G группадаги амал қўшиш деб аталса, у ҳолда a элементнинг даражаси ўрнига бу элементнинг *карраси* ҳақида сўз юритилади ва уларни ka орқали ёзилади.

Ихтиёрий G группада ихтиёрий a элементнинг даражалари учун m ва n даража кўрсаткичлар мусбат, манфий ва ноль бўлганда ҳам

$$a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \tag{2}$$

$$(a^n)^m = a^{mn} \tag{3}$$

тенгликларнинг ўринли бўлиши қийинчиликсиз текширилади. $\{a\}$ орқали G нинг a элементининг барча даражаларидан тузилган қисм тўпламини белгилаймиз; унга ўзининг биринчи даражаси бўлган a элементнинг ўзи ҳам киради. $\{a\}$ *қисм тўплам G группанинг қисм группаси бўлади*: $\{a\}$ даги элементларнинг кўпайтмаси (2) га кўра $\{a\}$ да ётади, $\{a\}$ га a^0 га тенг бўлган 1 элемент киради ва, ниҳоят, $\{a\}$ ўзининг ҳар қандай элементи билан бирга унинг тескари элементини ҳам ўз ичига олади, чунки (3) дан

$$(a^n)^{-1} = a^{-n},$$

тенглик келиб чиқади.

$\{a\}$ қисм группа *G группанинг a элемент вужудга келтирган циклик қисм группаси* дейилади. (2) тенгликдан, ҳатто G группанинг ўзи коммутатив бўлмаса ҳам, $\{a\}$ нинг ҳар доим коммутатив эканлиги келиб чиқади.

Юқорида ҳеч қаерда a элементнинг барча даражалари группанинг турли элементларидан иборат деб даъво қилинмаганлигини қайд қиламиз. Агар бу ҳақиқатан ҳам шундай бўлса, у ҳолда *a чексиз тартибли элемент* дейилади. Аммо a элементнинг даражалари орасида тенглари бўлсин, масалан $k \neq l$ бўлганда $a^k = a^l$ бўлсин; бу чекли группалар бўлган ҳол учун ҳар доим бажарилади, лекин чексиз группада ҳам бўлиши мумкин. Агар $k > l$ бўлса, у ҳолда

$$a^{k-l} = 1$$

бўлади, яъни a элементнинг 1 га тенг бўлган мусбат даражалари мавжуд. n сон a элементнинг 1 га тенг бўлган энг кичик мусбат даражаси бўлсин, яъни

1) $a^n = 1$, $n > 0$,

2) агар $a^k = 1$, $k > 0$ бўлса, у ҳолда $k \geqslant n$.

Бу ҳолда *a ни чекли тартибли*, чунончи n-тартибли *элемент* деб айтилади.

Агар a элемент чекли n-тартибга эга бўлса, у ҳолда барча

$$1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

элементлар, осонгина кўриш мумкинки, турлича бўлади. *a элементнинг ҳар қандай бошқа мусбат ёки манфий даражаси (4) элементлардан бирига тенг.* Дарҳақиқат, агар k — ихтиёрий бутун сон бўлса, у ҳолда k ни n га бўлиб,

$$k = nq + r, \quad 0 \leqslant r < n$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва шунинг учун ҳам, (2) ва (3) га кўра

$$a^k = (a^n)^q \cdot a^r = a^r, \qquad (5)$$

Бундан *агар a элемент чекли тартиб n га эга ва* $a^k = 1$ *бўлса, у ҳолда k нинг n га қолдиқсиз бўлиниши келиб чиқади.* Иккинчи томондан,

$$-1 = n(-1) + (n-1)$$

бўлгани учун, *чекли n-тартибли a элемент учун*

$$a^{-1} = a^{n-1}.$$

(4) система n та элементни ўз ичига олгани учун юқорида ҳосил қилинган натижалардан, *чекли n-тартибга эга бўлган a элементнинг тартиби* $\{a\}$ *циклик қисм группанинг тартиби билан (яъни, элементларнинг сони билан) устма-уст тушиши* келиб чиқади.

Ниҳоят, ҳар қандай группа биргина биринчи тартибли элементга эга — бу 1 элементдир. $\{1\}$ циклик қисм группа, равшанки, бирлик қисм группа билан устма-уст тушади.

Циклик группалар. Агар G группа ўзининг элементларидан бири a нинг даражаларидан ташкил топган бўлса, яъни у ўзининг циклик қисм группаларидан бири $\{a\}$ билан устма-уст тушса, у ҳолда G группа *циклик* группа дейилади; бу ҳолда a элемент G группанинг *ясовчи элементи* дейилади. Ҳар қандай циклик группа, равшанки, Абель группасидир.

Бутун сонларнинг аддитив группаси чексиз циклик группанинг мисоли бўлиб хизмат қилади — ҳар қандай бутун сон 1 сонига карралидир; яъни бу сон қаралаётган группанинг ясовчи элементи бўлиб хизмат қилади; ясовчи элемент сифатида -1 сонини олиш ҳам мумкин эди.

Бирнинг n-даражали илдизларининг мультипликатив группаси чекли n-тартибли группанинг мисоли бўлиб хизмат қилади — 19-§ да бу илдизларнинг барчаси улардан бирининг, чунончи бошланғич илдизнинг даражаларидан иборат эканлиги кўрсатилган.

Барча циклик группалар аслида бу мисоллар билан тугалланишини ушбу теорема кўрсатади:

Барча чексиз циклик группалар ўзаро изоморф; шунингдек, берилган n-тартибли барча чекли циклик группалар ҳам ўзаро изоморф.

Дарҳақиқат, агар ясовчи элементи a бўлган чексиз циклик группанинг ҳар қандай a^k элементига k сон мос қўйилса, у ҳолда бу группа бутун сонларнинг аддитив группасига ўзаро бир қийматли акслантирилади; бу акслантириш a элементнинг даражалари кўпайтирилганда даража кўрсаткичлар (2) га кўра қўшилгани сабабли, изоморф бўлади. Агар ясовчи элементи a бўлган чекли n-тартибли G циклик группа берилган бўлса, у ҳолда ε орқали бирнинг n-даражали бошланғич илдизини белгилаймиз ва G группанинг ҳар қандай a^k, $0 \leqslant k < n$ элементига ε^k сонни мос қўямиз. Бу G группани 1 нинг n-даражали илдизларининг мультипликатив группасига ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади. Бу акслантиришнинг изоморфлиги (2) ва (5) дан келиб чиқади.

Бу теорема, шунчаки *чексиз циклик группа* ёки *n-тартибли циклик группа ҳақида гапиришга имкон беради.*

Сўнгра, ушбу теоремани исботлаймиз:

Циклик группанинг ҳар қандай қисм группаси цикликдир.

Ҳақиқатан ҳам $G = \{a\}$ ясовчи элементи a бўлган чекли ёки чексиз циклик группа бўлсин, A эса G группанинг қисм группаси бўлсин. A ни бирлик қисм группадан фарқли деб ҳисоблаш мумкин, чунки акс ҳолда исботлайдиган нарсанинг ўзи бўлмас эди. a^k элемент a элементнинг A га кирган энг кичик мусбат даражаси бўлсин; бундай даража мавжуд, чунки агар A қисм группа 1 дан фарқли a^{-s}, $s > 0$ элементни ўз ичига олса, у ҳолда унга тескари a^s элементни ҳам ўз ичига олади. a^l, $l \neq 0$ элемент ҳам A да ётади деб фараз қилайлик, шу билан бирга l сон k га бўлинмасин. Унда, агар d, $d > 0$ сон k ва l сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда

$$ku + lv = d$$

тенгликни қаноатлантирувчи u ва v бутун сонлар мавжуд ва шунинг учун ҳам

$$(a^k)^u \cdot (a^l)^v = a^d$$

элемент A қисм группада ётиши керак. Аммо бизнинг фаразларимизга кўра $d < k$ бўлгани учун биз a^k элементнинг танланишига зид бўлган хулосага келамиз. Бу билан $A = \{a^k\}$ эканлиги исботланди.

Группани қисм группа бўйича ёйиш. Агар G группада M ва N қисм тўпламлар олинган бўлса, у ҳолда *бу қисм тўпламларнинг MN кўпайтмаси орқали* G группанинг M дан олинган бирор элементнинг N дан олинган бирор элементга кўпайтмаси шаклида ҳеч бўлмаганда битта усул билан ифода этиладиган элементлари тўплами тушунилади. Группавий амалнинг ассоциативлигидан *группа қисм тўпламлари кўпайтмасининг ассоциативлиги* келиб чиқади, яъни

$$(MN)P = M(NP).$$

M, N тўпламлардан бири a элементдангина иборат бўлиб қолиши мумкинлиги тушунарли, албатта. Бу ҳолда биз *элементнинг тўпламга кўпайтмаси aN ни ёки бўлмаса тўпламнинг элементга кўпайтмаси Ma ни* ҳосил қиламиз.

G группада ихтиёрий A қисм группа берилган бўлсин. Агар x элемент G нинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда xA *кўпайтма G группанинг A қисм группа бўйича x элемент томонидан вужудга келтирилган чапки қўшни синфи* дейилади. Албатта, *x элемент xA қўшни синфда ётади,* чунки A қисм группа бирни ўз ичига олади, аммо $x \cdot 1 = x$.

Ҳар қандай чапки қўшни синф ўзининг ихтиёрий элементи томонидан вужудга келтирилади, яъни агар y элемент xA қўшни синфга тегишли бўлса, у ҳолда

$$yA = xA, \tag{6}$$

бўлади. Дарҳақиқат, y ни $y = xa$ шаклда ифода этиш мумкин, бу ерда a элемент A қисм группанинг элементи. Шу сабабдан A нинг ихтиёрий a' ва a'' элементлари учун

$$ya' = x(aa'),$$
$$xa'' = y(a^{-1}a'')$$

бўлади, шунга кўра (6) тенглик исботланади.

Бундан, *G группанинг A қисм группа бўйича ихтиёрий иккита чапки қўшни синфи ёки бир-бири билан устма-уст тушиши ёки битта ҳам умумий элементга эга эмаслиги* келиб чиқади. Дарҳақиқат, агар xA ва yA қўшни синфлар z умумий элементга эга бўлса, у ҳолда

$$xA = zA = yA$$

бўлади. Шундай қилиб, барча G группа A қисм группа бўйича кесишмайдиган чапки қўшни синфларга ёйилади. Бу ёйилма *G группанинг A қисм группа бўйича чап томонлама ёйилмаси* дейилади.

Бу ёйилманинг чапки қўшни синфларидан бири A қисм группанинг ўзи эканлигини эслатиб ўтамиз; бу қўшни синф 1 элемент томонидан ёки, умуман, A нинг ихтиёрий элементи a томонидан вужудга келтирилади, чунки

$$aA = A.$$

Албатта, **Ax** кўпайтмани *G группанинг A қисм группа бўйича x элемент томонидан вужудга келтирилган ўнгги қўшни синфи* деб атаб, шунга ўхшаш йўл билан *G группанинг A қисм группа бўйича ўнг томонлама ёйилмасини* ҳосил қилур эдик. Абель группаси учун унинг ихтиёрий қисм группа бўйича чап томонлама ва ўнг томонлама ёйилмалари, тушунарлики, устма-уст тушади, яъни соддагина қилиб *группанинг қисм группа бўйича ёйилмаси* ҳақида гапириш мумкин

Масалан, бутун сонлар аддитив группасининг k сонга каррали сонлардан иборат қисм группа бўйича ёйилмаси мос равишда 0, 1, 2, . . ., $k-1$ сонлар томонидан вужудга келтирилган k та турли қўшни синфдан иборат. Шу билан бирга l, $0 \leqslant l \leqslant k-1$ сон томонидан вужудга келтирилган синфда k га бўлинганда l қолдиқ берадиган барча сонлар тўпланган.

Коммутатив бўлмаган ҳолда группанинг бирор қисм группа бўйича ёйилмалари турли бўлиб қолиши мумкин.

Масалан, 3-тартибли симметрик группа S_3 ни кўрамиз ва 3-§ га мувофиқ унинг элементларини цикллар орқали ёзамиз. A қисм группа сифатида (12) элементнинг циклик қисм группасини оламиз; у айнан ўрнига қўйиш ҳамда (12) ўрнига қўйишнинг ўзидан ташкил топган. Қолган чапки қўшни синфлар: (13) ва (132) ўрнига қўйишлардан иборат бўлган $(13)\cdot A$ синф ҳамда (23) ва (123) ўрнига қўйишлардан иборат бўлган $(23)\cdot A$ синф бўлади. Иккинчи томондан, A қисм группанинг ўзи, (13) ва (123) ўрнига қўйишлардан иборат бўлган $A\cdot(13)$ синф ҳамда (23) ва (132) ўрнига қўйишлардан иборат бўлган $A\cdot(23)$ синф S_3 группанинг A қисм группа бўйича ўнгги қўшни синфларидан иборат бўлади. Кўрилаётган ҳолда ўнг томонлама ёйилма чап томонлама ёйилмадан фарқ қилади.

Чекли группалар бўлган ҳолда группанинг қисм группа бўйича ёйилмасининг мавжудлиги ушбу муҳим теоремага олиб келади:

Лагранж теоремаси. *Ҳар қандай чекли группада ихтиёрий қисм группанинг тартиби группа тартибининг бўлувчисидир.*

Ҳақиқатан ҳам, чекли n-тартибли G группада k-тартибли A қисм группа берилган бўлсин. G группанинг A қисм группа бўйича чап томонлама ёйилмасини кўрамиз. У j та синфдан ташкил топган бўлсин. j сон G группада A қисм группанинг *индекси* дейилади. Ҳар бир xA чапки қўшни синф роппа-роса k та элементдан ташкил топган, чунки агар

$$xa_1 = xa_2$$

бўлса, бу ерда a_1 ва a_2 – A нинг элементлари, у ҳолда $a_1 = a_2$ бўлади, шундай қилиб,

$$n = kj, \tag{7}$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Элементнинг тартиби унинг циклик қисм группасининг тартиби билан устма-уст тушгани учун Лагранж теоремасидан *чекли группанинг ҳар қандай элементининг тартиби группа тартибининг бўлувчиси* эканлиги келиб чиқади.

Шунингдек, Лагранж теоремасидан *тартиби туб сон бўлган ҳар қандай чекли группанинг циклик* эканлиги келиб чиқади. Дарҳақиқат, бу группа унинг 1 дан фарқли ихтиёрий элементи томонидан вужудга келтирилган қисм группаси билан устма-уст тушиши керак. Бундан, циклик группаларнинг юқорида ҳосил қилинган тасвирига асосан, *ҳар қандай р туб сон учун изоморфизм аниқлигида чекли р-тартибли ягона группа мавжуд* эканлиги келиб чиқади.

65-§. Нормал бўлувчилар, фактор-группалар, гомоморфизмлар

Агар G группанинг A қисм группа бўйича чап томонлама ёйилмаси ўнг томонлама ёйилмаси билан устма-уст тушса, у ҳолда G группанинг A қисм группаси бу группанинг *нормал бўлувчиси* (ёки *инвариант қисм группаси)* дейилади.

Шундай қилиб, абель группасининг барча қисм группалари унда нормал бўлувчилардир. Иккинчи томондан, ҳар қандай G группада бирлик қисм группа ҳам, бу группанинг ўзи ҳам нормал бўлувчилар бўлади: G группанинг бирлик қисм группа бўйича иккала ёйилмаси ҳам группанинг алоҳида элементларга ёйилмаси билан устма-уст тушади, G группанинг бу группанинг ўзи бўйича иккала ёйилмаси битта G синфдан иборатдир.

Нокоммутатив группаларда нормал бўлувчиларнинг қизиқроқ мисолларини кўрсатамиз. 3-тартибли симметрик группа S_3 да (123) элементнинг айнан ўрнига қўйиш, (123) ва (132) ўрнига қўйишлардан иборат бўлган циклик қисм группаси нормал бўлувчи бўлади: S_3 группанинг бу қисм группа бўйича ёйилмаларининг ҳар иккаласида ҳам иккинчи қўшни синф (12), (13) ва (23) ўрнига қўйишлардан иборат бўлади.

Умуман, n-тартибли симметрик группа S_n да, n-тартибли ўзгарувчан ишорали A_n группа нормал бўлувчи бўлади. Дарҳақиқат, A_n группа $\frac{1}{2}n!$ тартибга эга, шунинг учун ҳам S_n группанинг A_n қисм группа бўйича ҳар қандай қўшни синфи худди шунча элементлардан иборат бўлиши керак, ва демак, яна фақат битта шундай синф, чунончи тоқ ўрнига қўйишлар синфи мавжуд.

Элементлари P майдондан олинган n-тартибли хосмас квадрат матрицаларнинг мультипликатив группасида детерминанти 1 га тенг бўлган матрицалар, равшанки, қисм группани ташкил қилади. Бу ҳатто нормал бўлувчидир, чунки детерминанти M матрицанинг детерминантига тенг бўлган барча матрицалар синфи бу қисм группа бўйича M матрица томонидан вужудга келтирилган ва бир вақтнинг ўзида ҳам чапки, ҳам ўнгги қўшни синфдир — матрицаларни кўпайтиришда уларнинг детерминантлари кўпайтирилишини эслаш етарли.

Нормал бўлувчининг юқорида келтирилган таърифига бундай шакл бериш мумкин:

Агар G нинг ҳар қандай x элементи ва A қисм группаси учун

$$xA = Ax \tag{1}$$

бўлса, яъни G нинг ҳар қандай x элементи ва A нинг a элементи учун A да шундай a' ва a'' элементларни танлаш мумкин бўлсаки,

$$xa = a'x, \quad ax = xa'' \tag{2}$$

бўлса, у ҳолда A қисм группа G группанинг нормал бўлувчиси дейилади.

Нормал бўлувчининг дастлабки таърифига тенг кучли бўлган бошқа таърифларини ҳам келтириш мумкин. Масалан, агар G да

$$b = x^{-1}ax \tag{3}$$

тенгликни қаноатлантирувчи камида битта x элемент мавжуд бўлса, яъни одатда айтилишича, b элемент a элементдан x элемент ёрдамида *трансформациялаш* орқали ҳосил қилинса, у ҳолда G группанинг a ва b элементларини *қўшма* деймиз. (3) дан, равшанки,

$$a = xbx^{-1} = (x^{-1})^{-1}bx^{-1},$$

тенглик келиб чиқади.

G группанинг A қисм группаси ўзининг ҳар қандай a элементи билан бирга, G да a билан қўшма бўлган барча элементларни ҳам ўз ичига олганда ва фақат шундагина G да нормал бўлувчи бўлади.

Дарҳақиқат, агар A қисм группа G да нормал бўлувчи бўлса, у ҳолда (2) га кўра A даги биз танлаган a элемент ҳамда G нинг ихтиёрий x элементи учун A да шундай a'' элементни танлаб олиш мумкинки,

$$ax = xa''$$

бўлади. Бу ердан

$$x^{-1}ax = a'',$$

яъни a билан қўшма бўлган ҳар қандай элемент A да ётади. Аксинча, агар A қисм группа ўзининг ҳар қандай a элементи билан бирга a га қўшма барча элементларни ҳам ўз ичига олса, у ҳолда, хусусан,

$$x^{-1}ax = a''$$

элемент A да ётади, бундан (2) тенгликларнинг иккинчиси келиб чиқади. Худди шу сабабга кўра

$$(x^{-1})^{-1}ax^{-1} = xax^{-1} = a'$$

элемент ҳам A да ётади, бундан (2) тенгликларнинг биринчиси келиб чиқади.

Бу хулосадан фойдаланиб, осонгина исботлаш мумкинки, *G группанинг ихтиёрий нормал бўлувчиларининг кесишмаси ҳам бу группанинг нормал бўлувчиси бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, агар A ва B қисм группалар G группанинг нормал бўлувчилари бўлса, у ҳолда аввалги параграфда кўрсатилганича, $A \cap B$ кесишма G группанинг қисм группаси бўлади. c элемент $A \cap B$ нинг ихтиёрий элементи, x эса G группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. У ҳолда $x^{-1}cx$ элемент A да ҳам, B да ҳам ётиши керак, чунки бу нормал бўлувчиларнинг иккаласи ҳам c элементни ўз ичига олади. Бу ердан $x^{-1}cx$ элемент $A \cap B$ кесишмага тегишли эканлиги келиб чиқади.

Фактор-группа. Нормал бўлувчи тушунчасининг аҳамияти шунга асосланганки, нормал бўлувчи бўйича қўшни синфлардан — (1) га биноан, бу ҳолда чапки ва ўнгги қўшни синфларни бир-биридан фарқламаслик мумкин — жуда табиий бўлган бирор усул билан янги группа ясаш мумкин.

Аввало шуни қайд қиламизки, агар A G группанинг ихтиёрий қисм группаси бўлса, у ҳолда

$$AA = A \tag{4}$$

бўлади, чунки A қисм группадан олинган ихтиёрий иккита элементнинг кўпайтмаси A га тегишли ва шунинг билан бирга A нинг барча элементларини 1 га кўпайтириб, биз A қисм группани (тўлалигича) ҳосил қиламиз.

Энди A қисм группа G группанинг нормал бўлувчиси бўлсин. *Бу ҳолда G нинг A бўйича ихтиёрий иккита қўшни синфларининг* (G группанинг қисм тўпламларини кўпайтириш маъносидаги) *кўпайтмаси яна A бўйича қўшни синф бўлади.* Дарҳақиқат, группа қисм тўпламларини кўпайтиришнинг ассоциативлиги, (4) тенглик ва

$$yA = Ay$$

тенгликдан фойдаланиб [(1) билан солиштиринг], G группанинг исталган x ва y элементлари учун

$$xA \cdot yA = xyAA = xy \cdot A \tag{5}$$

ни ҳосил қиламиз:

(5) тенглик кўрсатадики, G группанинг A нормал бўлувчи бўйича берилган иккита қўшни синфларининг кўпайтмасини топиш учун бу қўшни синфлардан ихтиёрий равишда биттадан **вакил** танлаш (ҳар қандай қўшни синф ўзининг ихтиёрий элементи томонидан вужудга келтирилганлигини эслатайлик) ва бу вакилларнинг кўпайтмаси ётган қўшни синфни олиш керак.

Шундай қилиб, G группанинг A нормал бўлувчи бўйича барча қўшни синфлари тўпламида кўпайтириш амали аниқланган. Шу билан бирга *группа таърифига кирувчи барча шартларнинг бажарилишини кўрсатайлик.* Ҳақиқатан ҳам, қўшни синфларни кўпайтиришнинг ассоциативлиги группа қисм тўпламларини кўпайтиришнинг ассоциативлигидан келиб чиқади. Бир ролини G нинг A бўйича ёйилмасининг қўшни синфларидан бири бўлган A нормал бўлувчининг ўзи ўйнайди: чунончи, (4) ва (1) га кўра G даги ихтиёрий x учун

$$xA \cdot A = xA,\ A \cdot xA = xAA \quad xA$$

бўлади. Ниҳоят,

$$xA \cdot x^{-1}A = 1 \cdot A = A$$

бўлгани учун xA қўшни синфга тескари қўшни синф $x^{-1}A$ бўлади.

Биз ясаган группа G группанинг A нормал бўлувчи бўйича *фактор-группаси* дейилади ва G/A орқали белгиланади.

Биз кўриб турибмизки, ҳар қандай группа билан бир қатор янги группалар—ҳар турли нормал бўлувчилар бўйича унинг фактор-группалари боғланган. Шу билан бирга G группанинг бирлик қисм группа бўйича фактор-группаси, тушунарлики, G группанинг ўзи билан изоморф бўлади.

G Абель группасининг ҳар қандай G/A фактор-группаси яна абель группасидир, чунки $xy = yx$ дан

$$xA \cdot yA = xyA = yxA = yA \cdot xA$$

келиб чиқади.

G циклик группанинг ҳар қандай G/A фактор-группаси цикликдир, чунки, агар G группа g элемент томонидан вужудга келтирилган бўлса, $G = \{g\}$ ҳамда ихтиёрий xA қўшни синф берилган бўлса, у ҳолда шундай k бутун сон мавжудки,

$$x = g^k$$

бўлади. Шунинг учун ҳам

$$xA = (gA)^k$$

бўлади.

Чекли G группанинг ихтиёрий G/A фактор-группасининг тартиби G группа тартибининг бўлувчиси бўлади. Дарҳақиқат, G/A фактор-группанинг тартиби A нормал бўлувчининг G группадаги индексига тенг ва шунинг учун ҳам аввалги параграфдаги (7) тенгликдан фойдаланиш мумкин.

Фактор-группаларнинг баъзи мисолларини келтирайлик. Бутун сонларнинг аддитив группасида k натурал сонга каррали сонларнинг қисм группаси, аввалги параграфда кўрсатилганидек, k индексга эга бўлгани учун группамизнинг бу қисм группа бўйича фактор-группаси k-тартибли чекли, шу билан бирга кўрилаётган группа циклик бўлгани учун циклик группа бўлади.

n-тартибли симметрик группа S_n нинг n-тартибли, ўзгарувчи ишорали A_n группа бўйича фактор-группаси 2-тартибли группа, шу билан бирга 2 сонининг тублиги сабабли циклик группа бўлади (аввалги параграфнинг охирига қаранг).

Юқорида, элементлари P майдондан олинган n-тартибли хосмас матрицалар мультипликатив группасининг детерминанти 1 га тенг бўлган матрицалардан тузилган нормал бўлувчи бўйича қўшни синфларининг тасвири келтирилган. Бу тасвирдан келиб чиқадики, тегишли фактор-группа P майдоннинг нолдан фарқли сонларининг мультипликатив группасига изоморфдир.

Гомоморфизмлар. Нормал бўлувчи ва фактор-группа тушунчалари изоморфизм тушунчасининг қуйидаги умумлашмаси билан чамбарчас боғлиқдир.

G группанинг ҳар қандай a элементига G' группанинг бир қийматли аниқланган $a' = a\varphi$ элементини мос қўювчи φ аксланиш (G ни G' га) берилган бўлсин. Агар бу аксланишда G' нинг ҳар қандай a' элементи G нинг бирор a элементининг образи вазифасини бажарса, $a' = a\varphi$ ва агар G группанинг ихтиёрий a, b элементлари учун

$$(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$$

бўлса, у ҳолда φ аксланиш G нинг G' га *гомоморф аксланиши* (ёки содда қилиб, *гомоморфизми*) дейилади.

φ аксланишдан қўшимча равишда ўзаро бир қийматлиликни талаб қилиб, равшанки, бизга таниш бўлган изоморфизм таърифини ҳосил қилган бўлур эдик.

Агар φ аксланиш G группанинг G' группага гомоморфизми ва 1 ҳамда a мос равишда G группанинг бири ҳамда ихтиёрий элементи, $1'$ эса G' группанинг бири бўлса, у ҳолда

$$1\varphi = 1',$$
$$(a^{-1})\varphi = (a\varphi)^{-1}$$

бўлади.

Дарҳақиқат, агар $1\varphi = e'$ ва x' G' группанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда G да шундай x элемент мавжудки, $x\varphi = x'$ бўлади. Бу ердан

$$x' = x\varphi = (x \cdot 1)\varphi = x\varphi \cdot 1\varphi = x' \cdot e'.$$

Шунга ўхшаш

$$x' = e'x',$$

демак, $e' = 1'$.

Иккинчи томондан, агар $(a^{-1}\varphi) = b'$ бўлса, у ҳолда

$$1' = 1\varphi = (aa^{-1})\varphi = a\varphi \cdot (a^{-1})\varphi = a\varphi \cdot b'$$

ва шунга ўхшаш

$$1' = b' \cdot a\varphi.$$

бу ердан $b' = (a\varphi)^{-1}$.

G группанинг G' группага φ гомоморфизмининг *ядроси* деб φ да G группанинг G' группанинг $1'$ элементига аксланувчи элементлари тўпламига айтамиз.

G группанинг ҳар қандай φ гомоморфизмининг ядроси G группанинг нормал бўлувчисидир.

Дарҳақиқат, агар G группанинг a, b элементлари φ гомоморфизм ядросига кирса, яъни

$$a\varphi = b\varphi = 1'$$

бўлса, у ҳолда

$$(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = 1' \cdot 1' = 1',$$

яъни ab кўпайтма ҳам φ гомоморфизм ядросида ётади. Иккинчи томондан, агар $a\varphi = 1'$ бўлса, у ҳолда

$$(a^{-1})\varphi = (a\varphi)^{-1} = 1'^{-1} = 1';$$

яъни a^{-1} ҳам φ гомоморфизм ядросига киради. Ниҳоят, агар $a\varphi = 1'$ бўлиб, x эса G группанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда

$$(x^{-1}ax)\varphi = (x^{-1})\varphi \cdot a\varphi \cdot x\varphi = (x\varphi)^{-1} \cdot 1' \cdot x\varphi = 1'.$$

Текширилаётган гомоморфизм ядроси G группанинг қисм группаси экан, у ўзининг ҳар қандай элементи билан бирга шу элемент билан қўшма бўлган барча элементларни ҳам ўз ичига олади, демак, у нормал бўлувчи бўлади.

Энди A қисм группа G группанинг ихтиёрий нормал бўлувчиси бўлсин. G группанинг ҳар қандай x элементига бу элемент ётган A нормал бўлувчи бўйича xA қўшни синфни мос қўйиб, биз G группанинг G/A фактор-группага аксланишини ҳосил қиламиз. G/A группада кўпайтиришнинг таърифидан [(5) га қаранг] бу аксланишнинг гомоморф аксланиш бўлиши келиб чиқади.

Ҳосил қилинган гомоморфизм G группанинг G/A фактор-группага *табиий гомоморфизми* деб аталади. A нормал бўлувчининг ўзи, равшанки, бу гомоморфизмнинг ядроси бўлиб хизмат қилади.

Бундан *G группанинг нормал бўлувчилари ва фақат шуларгина, бу группа гомоморфизмларининг ядролари бўлиб хизмат қилиши келиб* чиқади. Бу натижага нормал бўлувчининг яна битта таърифи сифатида қараш мумкин.

Маълум бўлишича, G группа гомоморф аксланиши мумкин бўлган барча группалар аслида бу группанинг фактор-группалари билан, G группанинг барча гомоморфизмлари эса унинг ўзини фактор-группаларига табиий гомоморфизмлари билан тугалланар экан. Аниқроғи, гомоморфизмлар ҳақида ушбу теорема ўринли:

Гомоморфизмлар ҳақида теорема. *G группанинг G' группага φ гомоморфизми берилган бўлсин ва A бу го-*

моморфизмнинг ядроси бўлсин. У ҳолда G' группа G/A фактор-группага изоморф, шу билан бирга бу группалардан биринчисининг иккинчисига шундай σ изоморф аксланишт мавжудки, φ ва σ аксланишларнинг кетма-кет бажарилишининг натижаси G группанинг G/A фактор-группага табиий гомоморфизми билан устма-уст тушади.

Ҳақиқатан ҳам, x' элемент G' группанинг ихтиёрий элементи, x эса G группанинг шундай элементики, $x\varphi = x'$ бўлсин. φ гомоморфизм A ядросининг ихтиёрий a элементи учун $a\varphi=1'$ тенглик ўринли бўлгани сабабли

$$(xa)\varphi = x\varphi\cdot a\varphi = x'\cdot 1' = x'$$

бўлади, яъни φ аксланишда xA қўшни синфнинг барча элементлари x' элементга аксланади.

Иккинчи томондан, агар z элемент G группанинг $z\varphi = x'$ тенгликни қаноатлантирувчи исталган элементи бўлса, у ҳолда

$$(x^{\ 1}z)\varphi = x^{-1}\varphi\cdot z\varphi = (x\varphi)^{-1}\cdot z\varphi = x'^{-1}\cdot x' = 1'$$

бўлади, яъни $x^{-1}z$ элемент φ гомоморфизмнинг A ядросида ётади. Агар $x^{-1}z = a$ десак, у ҳолда $z = xa$, яъни z элемент xA қўшни синфда ётади. Шундай қилиб, G группанинг φ гомоморфизмда G' группанинг тайинланган x' элементига аксланувчи барча элементларини йиғиб, биз айнан xA қўшни синфни ҳосил қиламиз.

G' нинг ҳар бир x' элементига G группанинг A нормал бўлувчи бўйича G группанинг φ аксланишда ўзининг x' образига эга бўлган барча элементларидан ташкил топган қўшни синфини мос қўювчи σ мослик G' группанинг G/A группага ўзаро бир қийматли аксланиши бўлади. Бу σ аксланиш изоморфизм бўлади, чунки агар

$$x'\sigma = xA, \qquad y'\sigma = yA,$$

яъни

$$x\varphi = x', \qquad y\varphi = y'$$

бўлса, у ҳолда

$$(xy)\varphi = x\varphi\cdot y\varphi = x'y'$$

бўлади, шунинг учун ҳам

$$(x'y')\sigma = xyA = xA\cdot yA = x'\sigma\cdot y'\sigma.$$

Ниҳоят, агар xG нинг ихтиёрий элементи ва $x\varphi = x'$ бўлса, у ҳолда

$$(x\varphi)\sigma = x'\sigma = xA$$

бўлади, яъни φ гомоморфизмни ва σ изоморфизмни кетма-кет бажарилиши аслида x элементни x томонидан вужудга келтирилган xA қўшни синфга аксланттиради. Теорема исботланди.

66-§. Абель группаларининг тўғри йиғиндилари

Бу бобни группаларнинг юқорида баён қилинган элементар хоссаларидан кўра чуқурроқ бўлган назарий-группавий бир теорема билан тугатмоқчимиз. Чунончи циклик группаларнинг бизга 64-§ дан маълум бўлган тавсифига таяниб, кейинги параграфда чекли Абель группаларининг тўлиқ тавсифини ҳосил қиламиз.

Абель группалари назариясида қабул қилинганига кўра, группавий амал учун аддитив ёзув ишлатилади: биз a ва b элементларнинг $a+b$ йиғиндиси ҳақида, 0 ноль қисм группа ҳақида, бирор a элементнинг ka карралари ҳақида ва ҳоказолар ҳақида гапирамиз.

Бу параграфда биз бир конструкцияни — уни бир йўла ихтиёрий (яъни коммутатив бўлиши шарт бўлмаган) группалар учун киритиш мумкин бўлса ҳам — Абель группаларига татбиқан баён қилиб ўрганамиз. Бу конструкциянинг моҳиятини ушбу мисоллар кўрсатиб беради. Икки ўлчовли ҳақиқий чизиқли фазо деб қаралган текислик векторларни қўшишга нисбатан Абель группасидир. Бу текисликда координаталар бошидан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ мазкур группанинг қисм группаси бўлади. Агар A_1 ва A_2 — иккита (турли) шундай тўғри чизиқдан иборат бўлса, у ҳолда, маълумки, текисликда координаталар бошидан чиқувчи ҳар қандай вектор ўзининг A_1 ва A_2 тўғри чизиқлардаги проекцияларининг йиғиндиси шаклида бир қийматли равишда ифодаланади. Шунга ўхшаш, агар A_1, A_2, A_3 тўғри чизиқлар бир текисликда ётмаса, у ҳолда уч ўлчовли чизиқли фазонинг ҳар қандай вектори бир қийматли равишда бу учта берилган тўғри чизиққа тегишли бўлган учта векторнинг бир қийматли йиғиндиси шаклида ёзилади.

Агар G Абель группасининг ҳар қандай x элементи мос равишда $A_1, A_2, \ldots, A_k$ қисм группалардан олинган $a_1, a_2, \ldots, a_k$ элементларнинг

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \tag{1}$$

йиғиндиси шаклида ягона усул билан ифодаланса, у ҳолда G группа ўзининг $A_1, A_2, \ldots, A_k$ қисм группаларининг *тўғри*

$$G = A_1 + A_2 + \ldots + A_k \tag{2}$$

йиғиндиси дейилади.

(2) ёзув G группанинг *тўғри ёйилмаси*, A_l, $l = 1, 2, \ldots, k$-қисм группалар бу ёйилманинг *тўғри қўшилувчилари*, (1) даги a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ элемент эса x элементнинг (1) ёйилмани A_i тўғри қўшилувчисидаги *компонентаси* дейилади.

Агар G группанинг (2) тўғри ёйилмаси берилган бўлса ва бу ёйилманинг A_i тўғри қўшилувчиларининг барчаси ёки баъзиларининг ўзлари ҳам тўғри йиғиндига ёйилган бўлса,

$$A_i = A_{i1} + A_{i2} + \ldots + A_{ik_i}, \quad k_i \geqslant 1, \tag{3}$$

у ҳолда G группа ўзининг барча

$$A_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots, k_i, \; i = 1, 2, \ldots, k$$

қисм группаларининг тўғри йиғиндиси бўлади.

Дарҳақиқат, G группанинг ихтиёрий x элементи учун (2) тўғри ёйилмага нисбатан (1) ифода, ҳар қайси a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ компоненталар учун эса A_i группанинг (3) тўғри ёйилмасига нисбатан

$$a_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{ik_i} \tag{4}$$

ифода мавжуд, x барча $a_{ij}, j = 1, 2, \ldots, k_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ элементларнинг йиғиндиси эканлиги равшан. Бу ифоданинг ягоналиги x элементнинг A_{ij} қисм группалардан биттадан олинган элементларнинг йиғиндиси шаклидаги ифодасини олиб, сўнгра A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ қисм группага тегишли қўшилувчиларни йиғиб, биз (1) тенгликнинг худди ўзини ҳосил қилишимиз кераклигидан келиб чиқади; иккинчи томондан, ҳар қайси a_i элемент (4) шаклдаги фақат битта ифодага эга.

Тўғри йиғиндининг таърифига бошқача тус бериш ҳам мумкин. Аввал яна битта тушунча киритамиз. Агар Абель группаси G да бирор $B_1, B_2, \ldots, B_l$ қисм группалар берилган бўлса, у ҳолда $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ орқали G группанинг камида битта усул билан, мос равишда, $B_1, B_2, \ldots, B_l$ қисм группалардан олинган $b_1, b_2, \ldots, b_l$ элементларнинг

$$y = b_1 + b_2 + \ldots + b_l \tag{5}$$

йиғиндиси шаклида ифодаланувчи y элементлари тўпламини белгилаймиз.

$\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ тўплам G группанинг қисм группаси бўлади. Бу $B_1, B_2, \ldots, B_l$ қисм группалар томонидан *вужудга келтирилган* қисм группа дейилади.

Исботлаш учун $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ дан (5) ифодага эга бўлган y элемент ва шунингдек, (5) га ўхшаш ифода

$$y' = b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_l$$

га эга бўлган y' элемент оламиз, бу ерда b'_i элемент B_i нинг элементи, $i = 1, 2, \ldots, l$. У ҳолда

$$y + y' = (b_1 + b'_1) \pm (b_2 + b'_2) + \ldots + (b_l + b'_l),$$
$$-y = (-b_1) + (-b_2) + \ldots + (-b_l),$$

яъни $y+y'$ ва $-y$ элементлар ҳам (5) шаклдаги камида битта ифодага эга, ва демак, улар $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ тўпламга тегишли, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

$\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ *қисм группа* B_i, $i=1, 2, \ldots, l$ *қисм группаларнинг ҳар қайсисини ўз ичига олади.* Дарҳақиқат, G группанинг ҳар қандай қисм группаси бу группанинг нолини ўз ичига олади; шунинг учун ҳам, масалан, B_1 қисм группадан ихтиёрий b_1 элемент, $B_2, B_3, \ldots, B_l$ қисм группалардан эса 0 элементни олиб, биз b_1 элемент учун (5) шаклдаги ушбу

$$b_1 = b_1 + 0 + 0 + \ldots + 0$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Агар G Абель группаси $A_1, A_2, \ldots, A_k$ қисм группалари томонидан вужудга келтирилса:

$$G = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \tag{6}$$

ва агар ҳар қайси A_i, $i=2, \ldots, k$ қисм группанинг барча аввалги қисм группалар $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ томонидан вужудга келтирилган қисм группа билан кесишмаси фақат нолни ўз ичига олса:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}\} \cap A_i = 0, \; i = 2, \ldots, k \tag{7}$$

ва фақат шундагина, бундай G группа ўзининг $A_1, A_2, \ldots, A_k$ қисм группаларининг тўғри йиғиндиси бўлади.

Дарҳақиқат, агар G группа (2) тўғри ёйилмага эга бўлса, у ҳолда G нинг ҳар қандай x элементи учун (1) ифода мавжуд ва шунинг учун ҳам (6) тенглик ўринли. (7) тенгликнинг ўринли эканлиги ихтиёрий x элемент учун (1) ифоданинг ягоналигидан келиб чиқади: агар бирорта i учун $\{A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}\} \cap A_i$ кесишма нолдан фарқли x элементни ўз ичига олганда эди, у ҳолда, бир томондан, x ни A_i нинг a_i элементи сифатида ифодалаш мумкин, яъни $x = a_i$ ва шу сабабли

$$x = 0 + \ldots + 0 + a_i + 0 + \ldots + 0; \tag{8}$$

иккинчи томондан, x элемент $\{A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}\}$ қисм группанинг элементи сифатида

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1},$$

яъни

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + 0 + \ldots + 0 \tag{9}$$

шаклдаги ифодага эга. (8) ва (9), равшанки, x элемент учун (2) шаклдаги иккита турли ифода бўлади.

Аксинча, (6) ва (7) тенгликлар бажарилсин. (6) дан келиб чиқадики, G группанинг ихтиёрий x элементи (2) шаклдаги камида битта ифодага эга. Аммо бирор x элемент учун (2) шаклдаги иккита ифода мавжуд бўлсин

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k. \qquad (10)$$

У ҳолда шундай l, $l \leqslant k$ топиш мумкинки,

$$a_k = a'_k,\ a_{k-1} = a'_{k-1}, \ldots, a_{i+1} = a'_{l+1} \qquad (11)$$

бўлади, лекин

$$a_l \neq a'_l,$$

яъни

$$a_l - a'_l \neq 0. \qquad (12)$$

Аммо (10) ва (11) дан, (12) га кўра, (7) тенгликка зид бўлган

$$a_l - a'_l = (a'_1 - a_1) + (a'_2 - a_2) + \ldots + (a'_{l-1} - a_{l-1})$$

тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Тўғри йиғинди тушунчасига бутунлай бошқа томондан қараш ҳам мумкин. Ораларида изоморфлари ҳам бўлиши мумкин бўлган k та ихтиёрий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ Абель группалари берилган бўлсин. G орқали $A_1, A_2, \ldots, A_k$ группаларнинг ҳар қайсисидан биттадан олиб тузилган

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \qquad (13)$$

шаклдаги ҳар турли системалар тўпламини белгилаймиз. Агар (13) шаклдаги системаларнинг *йиғиндиси* ушбу

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) + (a'_1, a'_2, \ldots, a'_k) =$$
$$= (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \ldots, a_k + a'_k) \qquad (14)$$

қоида билан аниқланса, яъни берилган $A_1, A_2, \ldots A_k$ группаларнинг ҳар қайсисидан олинган элементлар алоҳида қўшилса, у ҳолда G тўплам Абель группасига айланади. Дарҳақиқат, бу қўшишнинг ассоциативлиги ва коммутативлиги бу хоссаларнинг берилган группаларнинг ҳар бирида ўринли эканлигидан келиб чиқади: ноль ролини

$$(0_1, 0_2, \ldots, 0_k)$$

система ўйнайди, бу ерда 0_l орқали A_l, $l = 1, 2, \ldots, k$ группанинг ноль элементи белгиланган;

$$(-a_1, -a_2, \ldots, -a_k)$$

система (13) система учун қарама қарши система бўлади.

Тузилган G абель группаси $A_1, A_2, \ldots, A_k$ группаларнинг *тўғри йиғиндиси* дейилади ва юқоридаги каби

$$G = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$$

орқали ифодаланади. $A_1, A_2, \dots, A_k$ *группаларнинг ҳозиргина таърифланган маънода тўғри йиғиндисидан иборат бўлган* G *группа мос равишда* $A_1, A_2, \dots, A_k$ *группаларга изоморф бўлган ўзининг* $A'_1, A'_2, \dots, A'_k$ *қисм группаларининг тўғри йиғиндисига ёйилиши мумкинлиги* бундай ном учун далил бўлиб хизмат қилади.

Чунончи A'_i, $i = 1, 2, \dots, k$ орқали G группанинг, i-ўринда A_i группанинг ихтиёрий a_i элементи турган ва барча қолган ўринлар мос группаларнинг ноллари билан тўлдирилган элементлари тўпламини, яъни (13) шаклдаги системаларни белгилаймиз; демак, бу

$$(0_1, \dots, 0_{i-1}, a_i, 0_{i+1}, \dots, 0_k) \tag{15}$$

шаклдаги система бўлади. Қўшишнинг (14) таърифи A'_i тўплам G группанинг қисм группаси эканлигини кўрсатади; ҳар бир (15) системага A_i группанинг a_i элементини мос келтириб, биз бу қисм группани A_i группа билан изоморфлигини ҳосил қиламиз.

G группа $A'_1, A'_2, \dots, A'_k$ қисм группаларнинг тўғри йиғиндиси эканлигини исботлаш қолди. Ҳақиқатан ҳам, G группанинг ихтиёрий (13) элементини кўрсатилган қисм группалар элементларининг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, 0_2, \dots, 0_k) +$$
$$+ (0_1, a_2, 0_3 \dots, 0_k) + \dots + (0_1, 0_2, \dots, 0_{k-1}, a_k).$$

Бу ифоданинг ягоналиги (13) шаклдаги турли системалар G группанинг турли элементларидан иборат эканлигидан келиб чиқади.

Агар Абель группаларининг икки системаси $A_1, A_2, \dots, A_k$ *ва* $B_1, B_2, \dots, B_k$ *берилган бўлиб, шу билан бирга* A_i *ва* B_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ *группалар изоморф бўлса, у ҳолда*

$$G = A_1 + A_2 + \dots + A_k$$

ва

$$H = B_1 + B_2 + \dots + B_k$$

группалар ҳам изоморф бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $i = 1, 2, \dots, k$ учун A_i ва B_i группалар орасида A_i нинг ҳар қандай a_i элементига B_i нинг $a_i\varphi_i$ элементини мос келтирувчи φ_i изоморфизм тайинланган бўлса, у ҳолда G группанинг ҳар бир $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ элементига H группанинг

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)\varphi = (a_1\varphi_1, a_2\varphi_2, \dots a_k\varphi_k)$$

тенглик орқали аниқланган элементини мос қўювчи φ акслантириш, равшанки, G группанинг H группага изоморф акслантириш бўлади.

орқали ифодаланади. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *группаларнинг ҳозиргина таърифланган маънода тўғри йиғиндисидан иборат бўлган G группа мос равишда $A_1, A_2, \ldots, A_k$ группаларга изоморф бўлган ўзининг $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ қисм группаларининг тўғри йиғиндисига ёйилиши мумкинлиги* бундай ном учун далил бўлиб хизмат қилади.

Чунончи A'_l, $l = 1, 2, \ldots, k$ орқали G группанинг, l-ўринда A_l группанинг ихтиёрий a_l элементи турган ва барча қолган ўринлар мос группаларнинг ноллари билан тўлдирилган элементлари тўпламини, яъни (13) шаклдаги системаларни белгилаймиз; демак, бу

$$(0_1, \ldots, 0_{l-1}, a_l, 0_{l+1}, \ldots, 0_k) \tag{15}$$

шаклдаги система бўлади. Қўшишнинг (14) таърифи A'_l тўплам G группанинг қисм группаси эканлигини кўрсатади; ҳар бир (15) системага A_l группанинг a_l элементини мос келтириб, биз бу қисм группани A_l группа билан изоморфлигини ҳосил қиламиз.

G группа $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ қисм группаларнинг тўғри йиғиндиси эканлигини исботлаш қолди. Ҳақиқатан ҳам, G группанинг ихтиёрий (13) элементини кўрсатилган қисм группалар элементларининг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, 0_2, \ldots, 0_k) +$$
$$+ (0_1, a_2, 0_3 \ldots, 0_k) + \ldots + (0_1, 0_2, \ldots, 0_{k-1}, a_k).$$

Бу ифоданинг ягоналиги (13) шаклдаги турли системалар G группанинг турли элементларидан иборат эканлигидан келиб чиқади.

Агар Абель группаларининг икки системаси $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ва $B_1, B_2, \ldots, B_k$ берилган бўлиб, шу билан бирга A_l ва B_l ($l = 1, 2, \ldots, k$) группалар изоморф бўлса, у ҳолда

$$G = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$$

ва

$$H = B_1 + B_2 + \ldots + B_k$$

группалар ҳам изоморф бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $l = 1, 2, \ldots, k$ учун A_l ва B_l группалар орасида A_l нинг ҳар қандай a_l элементига B_l нинг $a_l\varphi_i$ элементини мос келтирувчи φ_l изоморфизм тайинланган бўлса, у ҳолда G группанинг ҳар бир $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ элементига H группанинг

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)\varphi = (a_1\varphi_1, a_2\varphi_2, \ldots a_k\varphi_k)$$

тенглик орқали аниқланган элементини мос қўювчи φ акслантириш, равшанки, G группанинг H группага изоморф акслантириш бўлади.

Агар мос равишда $n_1, n_2, \dots n_k$ тартибга эга бўлган A_1, $A_2, \dots A_k$ чекли Абель группалари берилган бўлса, у ҳолда бу группаларнинг тўғри йиғиндиси G ҳам чекли группа бўлади ва унинг тартиби n тўғри қўшилувчилар тартибларининг

$$n = n_1 n_2 \dots n_k \tag{16}$$

кўпайтмасидан иборат бўлади.

Дарҳақиқат, a_1 элементи n_1 та турли қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган, a_2 элементи эса n_2 та турли қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган ва ҳоказо, (13) шаклдаги турли системаларнинг сони (16) тенглик орқали аниқланади.

Баъзи мисолларни кўрамиз.

Агар чекли $\{a\}$ циклик группанинг тартиби n иккита ўзаро туб бўлган натурал сонларнинг кўпайтмасига ажралса, яъни

$$n = st, \qquad (s, t) = 1$$

бўлса, у ҳолда $\{a\}$ группа мос равишда s ва t тартибга эга бўлган иккита циклик группанинг тўғри йиғиндисига ёйилади.

$\{a\}$ группа учун аддитив ёзувни қўллаймиз. Агар $b = ta$ десак, у ҳолда

$$sb = (st)a = na = 0$$

бўлади, аммо $0 < k < s$ учун

$$kb = (kt)\,a \neq 0,$$

яъни $\{b\}$ циклик қисм группа s тартибга эга. Шунга ўхшаш, $c = sa$ элементнинг $\{c\}$ циклик қисм группаси t тартибга эга. $\{b\} \cap \{c\}$ кесишма фақат нолни ўз ичига олади, чунки $0 < k < s$, $0 < l < t$ бўлганда $kb = lc$ бўлса, у ҳолда

$$(kt)a = (ls)a,$$

бу ердан, kt ва ls сонлар n дан кичик бўлгани учун

$$kt = ls,$$

бу эса s ва t сонларнинг ўзаро тублиги сабабли мумкин эмас. Ниҳоят, шундай u ва v сонлар мавжудки,

$$su + tv = 1,$$

ва шунинг учун ҳам

$$a = v(ta) + u(sa) = vb + uc$$

бўлади, демак, $\{a\}$ группанинг ҳар қандай элементини $\{b\}$ ва $\{c\}$ қисм группалар элементларининг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкин.

Агар G Абель группасини унинг нолдан фарқли иккита ёки бир нечта қисм группаларининг тўғри йиғиндисига ёйиш мумкин бўлмаса, G ни *ёйилмас* деб атаймиз. Тартиби p туб соннинг бирор даражасидан иборат бўлган чекли циклик группа p туб сонга тааллуқли *примар* циклик группа дейилади. Юқорида исботланган даъвони бир неча марта қўллаб, *ҳар қандай чекли циклик группа турли туб сонларга тааллуқли примар циклик группаларнинг тўғри йиғиндисига ёйилади,* деган хулосага келамиз. Аниқроғи,

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_S{}^{k_s}$$

тартибли циклик группа (бу ерда $p_1, p_2, \dots, p_s$ *турли туб сонлар) мос равишда* $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s}$ *тартибларга эга бўлган* s *та циклик группанинг тўғри йиғиндисига ёйилади.*

Ҳар қандай примар циклик группа ёйилмасдир.

Ҳақиқатан ҳам, p^k тартибли чекли циклик группа $\{a\}$ берилган бўлсин, бу ерда p туб сон. Агар бу группа ёйиладиган бўлганда эди, у ҳолда бу группа (7) га кўра кесишмаси нолга тенг, ўзлари ноль бўлмаган қисм группаларга эга бўлар эди. Аммо ҳақиқатда группамизнинг ҳар қандай ноль бўлмаган қисм группаси нолдан фарқли

$$b = p^{k-1}a$$

элементни ўз ичига олади.

Исботлаш учун группамизнинг ноль бўлмаган ихтиёрий x элементини оламиз.

$$x = sa, \qquad 0 < s < p^k.$$

s сонни

$$s = p^l s', \qquad 0 \leqslant l < k$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда s' энди p га бўлинмайди, ва демак, у билан ўзаро туб, шунинг учун ҳам шундай u ва v сонлар мавжудки,

$$s'u + pv = 1$$

бўлади. У ҳолда

$$(p^{k-l-}u)x = (p^{k-l-1}us)a = p^{k-1}us')a =$$
$$= p^{k-1}(1 - pv)a = (p^{k-1} - p^k v)a = p^{k-1}a - v(p^k a) = p^{k-1}a = b,$$

яъни b элемент $\{x\}$ циклик қисм группага киради.

Бутун сонларнинг аддитив группаси (яъни чексиз циклик группа) ва, шунингдек, барча рационал сонларнинг аддитив группаси ёйилмас группалардир.

Ҳар иккала кўрсатилган группанинг ёйилмаслиги бу группаларнинг ҳар бирида ихтиёрий иккита ноль бўлмаган элементлар учун ноль бўлмаган умумий бўлувчининг мавжудлигидан, яъни ихтиёрий иккита ноль бўлмаган циклик қисм группалар ноль бўлмаган кесишмага эга эканлигидан келиб чиқади.

Агар G **абель** группасидаги амал кўпайтириш деб аталса, у ҳолда тўғри йиғинди эмас, балки *тўғри кўпайтма* ҳақида гапириш лозимлигини эслатиб ўтамиз.

Нолдан фарқли ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группаси мусбат ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группаси билан 1 ва—1 сонларидан кўпайтириш бўйича тузилган группанинг тўғри кўпайтмасига ёйилади.

Дарҳақиқат, группамизнинг кўрсатилган иккита қисм группасининг кесишмасида фақат 1 сони—бу группанинг бирлик элементи ётади. Иккинчи томондан, ҳар қандай мусбат сон ўзини 1 сонига кўпайтмасидан, ҳар қандай манфий сон эса ўзининг абсолют қийматини—1 сонига кўпайтмасидан иборатдир.

67-§. Чекли Абель группалари

Агар биз примар циклик группаларнинг - улардан баъзилари биргина туб сонга тааллуқли бўлиши, ёки ҳатто бир хил тартибга эга бўлиши, яъни изоморф бўлиши мумкин—ихтиёрий чекли тўпламини олсак, у ҳолда бу группаларнинг тўғри йиғиндиси чекли Абель группасидан иборат бўлади. Маълум бўлишича, бу билан барча чекли абель группалари тугалланар экан.

Чекли абель группалари ҳақида асосий теорема. *Ноль группа бўлмаган ҳар қандай G чекли абель группаси примар қисм группаларнинг тўғри йиғиндисига ёйилади.*

Бу теореманинг исботини *G группада тартиби туб сонларнинг даражаларидан иборат бўлган ноль бўлмаган элементлар албатта топилади* деган изоҳдан бошлаймиз. Дарҳақиқат, агар G группанинг бирор ноль бўлмаган x элементи l тартибга эга бўлса, $lx = 0$ ва агар p^k, $k > 0$ сон l сон бўлинадиган p туб соннинг даражаси, яъни

$$l = p^k m,$$

бўлса, у ҳолда mx элемент нолдан фарқли ва p^k тартибга эга.

$$p_1, p_2, \dots, p_s \tag{1}$$

сонлар уларнинг бирор даражалари G группанинг бирор элементларининг тартиби бўлиб хизмат қилувчи барча турли туб сонлар бўлсин. p орқали бу сонларнинг исталганини, P орқали эса G группанинг тартиби p нинг даражаларидан иборат бўлган элементлари тўпламини белгилаймиз.

P тўплам G группанинг қисм группасидир. Дарҳақиқат, P га 0 элемент киради, чунки унинг тартиби $1=p^0$ дан иборат.

Сўнгра, агар $p^k x = 0$ бўлса, у ҳолда $p^k(-x) = 0$ бўлади. Ниҳоят, агар $p^k x = 0$, $p^l y = 0$ ва агар, масалан, $k \geqslant l$ бўлса, у ҳолда

$$p^k(x + y) = 0$$

бўлади, яъни $x + y$ элементнинг тартиби вазифасини ёки p^k сон, ёки бу соннинг бўлувчиси, яъни ҳар ҳолда p соннинг бирор даражаси ўйнайди.

p сифатида галма-гал (1) нинг ҳар бир сонини олиб, биз s та ноль бўлмаган

$$P_1, P_2, \ldots, P_s \tag{2}$$

қисм группаларни ҳосил қиламиз. *G группа бу қисм группаларнинг тўғри йиғиндисидан иборат,*

$$G = P_1 + P_2 + \ldots + P_s. \tag{3}$$

Дарҳақиқат, агар x G группанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда унинг l тартиби (1) системанинг баъзи туб сонларигагина бўлиниши мумкин, яъни

$$l = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s},$$

бу ерда $k_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Шунинг учун ҳам, аввалги параграф охирида кўрсатилганидек, $\{x\}$ циклик қисм группа мос равишда $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_s{}^{k_s}$ тартибларга эга бўлган примар циклик қисм группаларнинг тўғри йиғиндисига ёйилади. Бу примар циклик қисм группалар мос (2) қисм группаларда ётади ва демак, x элемент (2) қисм группаларнинг барчасидан ёки баъзиларидан биттадан олинган элементларнинг йиғиндиси шаклида ифодаланади. Бу билан аввалги параграфдаги (6) тенгликка ўхшаш бўлган ушбу

$$G = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$$

тенглик исботланди.

Худди шу параграфнинг (7) тенглигига ўхшаш тенгликни исботлаш учун ихтиёрий i, $2 \leqslant i \leqslant s$ ни оламиз. У ҳолда $\{P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}\}$ қисм группанинг ихтиёрий y элементи

$$y = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1}$$

кўринишга эга, бу ерда a_j, $j = 1, 2, \ldots, i-1$ элемент P_j қисм группада ётади, яъни $p_j^{k_j}$ тартибга эга. У ҳолда

$$(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{i-1}^{k_{i-1}}) y = 0$$

бўлади, яъни $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{l-1}^{k_{l-1}}$ соннинг бирор бўлувчиси y элементнинг тартиби бўлиб хизмат қилади ва демак, агар y элемент нолдан фарқли бўлса, y P_l қисм группада ётиши мумкин эмас. Бу билан

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{l-1}\} \cap P_l = 0$$

эканлиги исботланди, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Шуни қайд қиламизки, барча элементларининг тартиби биргина p туб соннинг даражаларидан иборат бўлган абель группаси p сонга нисбатан *примар* дейилади. Примар циклик группалар примар группаларнинг хусусий ҳолидир. Шундай қилиб, (2) қисм группалар примардирлар. Улар G группанинг *примар компоненталари*, (3) тўғри ёйилма эса *бу группанинг примар компоненталарга ёйилмаси* дейилади. (2) қисм группалар G группада бир қийматли равишда аниқлангани учун *G группанинг примар компоненталарга ёйилмаси ҳам бир қийматли аниқланган.*

Ҳар қандай чекли Абель группасини примар группаларнинг тўғри йиғиндисига ёйилиши, албатта, асосий теореманинг исботини бирор p туб сонга тааллуқли P чекли примар абель группаси ҳолига келтиради. Бу ҳолни кўриб чиқамиз.

a_1 элемент P группанинг энг юқори тартибга эга бўлган элементларидан бири бўлсин. Сўнгра, агар P группада нолдан фарқли шундай элементлар мавжуд бўлсаки, улар циклик қисм группаларининг $\{a_1\}$ циклик қисм группа билан кесишмаси нолдангина иборат бўлса, у ҳолда a_2 орқали бундай хоссага эга бўлган элементлар орасидаги энг юқори тартибли элементлардан бирини белгилаймиз; шундай қилиб,

$$\{a_1\} \cap \{a_2\} = 0.$$

Шундай қилиб, $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ элементлар танлаб бўлинган бўлсин.

P группанинг бу элементларнинг циклик қисм группалари томонидан вужудга келтирилган қисм группасини $\{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$ орқали белгилаймиз:

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{l-1}\}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}, \tag{4}$$

Бу қисм группа, равшанки, P группанинг $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ элементларга каррали бўлган элементларининг йиғиндиси шаклида ифодаланиши мумкин бўлган барча элементларидан ташкил топган; бу қисм группа $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ элементлар томонидан *вужудга келтирилган* деб айтамиз. a_l орқали P группанинг циклик қисм группалари $\{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$ қисм группа билан нолга тенг кесишмага эга бўлган энг юқори тартибли элементларидан бирини белгилаймиз: шундай қилиб,

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}\Pi\{a_l\} = 0. \quad (5)$$

Бу процесс P группанинг чеклилиги сабабли тўхташи керак; бу $a_1, a_2, \dots, a_s$ элементлар танлангандан сўнг юз берсин дейлик. Агар P' орқали бу элементлар томонидан вужудга келтирилган

$$P' = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$$

қисм группани белгиласак, яъни

$$P' = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_s\}\} \quad (6)$$

бўлса, у ҳолда p группанинг ноль бўлмаган ихтиёрий элементининг циклик қисм группаси P' қисм группа билан ноль бўлмаган кесишмага эга.

(6) тенглик ва $l = 2, 3, \dots, s$ учун ўринли бўлган (5) тенглик (4) га кўра P' қисм группа $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_s\}$ циклик қисм группаларнинг тўғри йиғиндиси эканлигини кўрсатади:

$$P' = \{a_1\} + \{a_2\} + \dots + \{a_s\} \quad (7)$$

P' қисм группа аслида P группа билан устма-уст тушишини исботлаш қолди, холос.

x P группанинг p тартибга эга бўлган ихтиёрий элементи бўлсин.

$$P^1\Pi\{x\} \neq 0$$

бўлгани учун ҳамда $\{x\}$ қисм группа ўзидан бошқа ноль бўлмаган қисм группаларга эга бўлмагани сабабли—қисм группанинг тартиби группа тартибининг бўлувчиси ҳамда p туб сон эканлигини эслатамиз—$\{x\}$ қисм группа ҳақиқатда P' қисм группада ётади ва x демак, P' га тегишли. Шундай қилиб, P группанинг p-тартибли барча элементлари P' қисм группага киради.

P группанинг тартиби p^{k-1} сондан катта бўлмаган барча элементлари P^1 қисм группага кириши исботланган бўлсин x эса P нинг p^k тартибга эга бўлган ихтиёрий элементи бўлсин. $a_1, a_2, \dots, a_s$ элементларнинг танланиши уларнинг тартиблари ўсмай боришини кўрсатади, ва шунинг учун ҳам шундай $i, 1 \leqslant i - 1 \leqslant s$ сонни кўрсатиш мумкинки, $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ элементларнинг тартиблари p^k дан катта ёки тенг, $l - 1 < s$ да эса a_l элементнинг тартиби бу сондан қатъий кичик, яъни

x элементнинг тартибидан кичик. Бундан a_l элементни танлаш шартларига кўра, агар

$$Q = \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$$

бўлса, у ҳолда

$$Q \cap \{x\} \neq 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Аммо аввалги параграфда p^k-тартибли $\{x\}$ примар циклик группанинг ноль бўлмаган ҳар қандай қисм группаси

$$y = p^{k-1}x \tag{8}$$

элементни ўз ичига олиши исботланган эди. Демак, y элемент $Q \cap \{x\}$ кесишмага ва шунга кўра Q қисм группага ҳам киради. Бу y ни $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ элементларга каррали бўлган элементларнинг

$$y = l_1a_1 + l_2a_2 + \dots + l_{l-1}\, a_{l-1} \tag{9}$$

йиғиндиси шаклида ифодалашга имкон беради.

(8) дан y элемент p тартибга эга эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам,

$$(p^{l_1})a_1 + (p^{l_2})a_2 + \dots + (p^{l}{}_{l-1})a_{l-1} = 0,$$

яъни (7) тўғри ёйилманинг мавжудлигига кўра

$$(p^{l}{}_j)a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l-1.$$

Демак, $p^{l}{}_j$ сон a_j элементнинг тартибига ва шунга кўра p^k сонга ҳам бўлиниши керак, бундан l_j сон p^{k-1} га бўлиниши келиб чиқади:

$$l_j = p^{k-1}m_j;\ j = 1, 2, \dots, i-1. \tag{10}$$

$$z = m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_{l-1}\, a_{l-1}$$

бўлсин. Бу Q қисм группанинг ва, демак, P' қисм группанинг ҳам элементи бўлади, шу билан бирга (9) ва (10) га биноан

$$y = p^{k-1}z$$

(8) ва (11) дан

$$p^{k-1}(x - z) = 0$$

тенглик келиб чиқади, яъни

$$t = x - z$$

элементнинг тартиби p^{k-1} дан катта эмас ва, демак, индуктив фаразга кўра t элемент P' қисм группада ётади. Шунга кўра x элемент ҳам P' дан олинган иккита элементнинг йиғиндиси $x = z + t$ сифатида P' қисм группага тегишлидир. Бу билан P группанинг барча p^k тартибли элементлари P' да ётиши исботланди.

Демак, бизнинг индуктив исботимиз P группанинг барча элементлари P' қисм группага киради, яъни $P = P'$ деб даъво қилишга имкон беради. Асосий теореманинг исботи тугалланди.

Қўшимча маълумот сифатида *чекли абель группасининг тартиби p туб соннинг даражасидан иборат бўлганда, ва фақат шундагина, бу группа p туб сонга нисбатан примар бўлишини ҳосил қиламиз.* Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай P чекли (p бўйича) примар абель группаси (p бўйича) примар циклик группаларнинг тўғри йиғиндисига ёйилиши кўрсатилган эди ва шунга кўра P группанинг тартиби бу циклик группа тартибларининг кўпайтмасига тенг, яъни у p соннинг даражаси бўлади. Аксинча, агар чекли Абель группаси p^k тартибга эга бўлса (бу ерда p— туб сон), у ҳолда, бу группанинг ихтиёрий элементининг тартиби бу соннинг бўлувчиси, яъни p соннинг қандайдир даражаси бўлади ва шунинг учун ҳам группа p га нисбатан примар бўлар экан.

Асосий теорема чекли Абель группаларининг тўла-тўкис тавсифлаш ҳақидаги масалани ҳали тугалламайди, чунки баъзи туб сонлар бўйича примар циклик группаларнинг иккита турли тўғри йиғиндилари изоморф группалар бўлиб қолиши мумкин. Ҳақиқатда бундай эмаслигини ушбу теорема кўрсатади:

Агар G чекли абель группаси икки хил усул билан примар циклик қисм группаларнинг тўғри йиғиндисига ёйилган бўлса,

$$G = \{a_1\} + \ldots + \{a_s\} = \{b_1\} + \ldots + \{b_t\} \tag{12}$$

у ҳолда ҳар иккала ёйилма бир хил сондаги тўғри қўшилувчиларга эга ($s = t$) ва бу ёйилмаларнинг тўғри қўшилувчилари орасида шундай ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкинки, бунда мос қўшилувчилар бир хил тартибли циклик, яъни изоморф группалардан иборат бўлади.

Аввал шуни қайд қиламизки, агар (12) тўғри ёйилмаларнинг, масалан биринчисида, берилган p туб сонга тааллуқли тўғри қўшилувчиларни тўпласак, у ҳолда уларнинг тўғри йиғиндиси G группанинг (p бўйича) примар қисм группаси ва ҳатто бу группанинг примар компонентаси бўлади, чунки унинг тартиби G группанинг тартиби бўлинадиган p соннинг энг юқори даражасига тенг. (12) ёйилманинг ҳар бирида бу усул билан тўғри қўшилувчиларни бирлаштириб, биз ҳар иккала ҳолда ҳам, G группанинг примар компоненталарга—ягоналиги юқорида қайд қилинган—ёйилмасини ҳосил қиламиз.

Бу теоремамизни G группанинг ўзи p туб сонга нисбатан примар деган фаразда исботлашга имкон беради. (12) ёйилмаларнинг ҳар бирида тўғри қўшилувчиларни номерлаш шундай танланган бўлсинки, бу қўшилувчиларнинг тартиби ўсмай борсин, яъни a_1, $a_2, \ldots, a_s$ элементлар, мос равишда

$$p^{k_1},\ p^{k_2},\ \ldots,p^{k_s}$$

тартибга эга, шу билан бирга $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_s$ бўлсин, b_1, $b_2, \ldots, b_t$ элементлар эса

$$p^{l_1},\ p^{l_2},\ \ldots,\ p^{l_t}$$

тартибга эга, шу билан бирга $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_t$ бўлсин. Агар теоремамизнинг даъвоси ўринли бўлмаганда эди, у ҳолда шундай i, $i \geqslant 1$ топилар эдики,

$$k_1 = l_1,\ \ldots,\ k_{l-1} = l_{l-1} \tag{13}$$

бўлиб, аммо

$$k_l \neq l_l$$

бўлар эди. Табиийки, $l \leqslant \min(s,t)$, чунки (12) ёйилманинг ҳар бири учун барча тўғри қўшилувчилар тартибларининг кўпайтмаси G группанинг тартибига тенг. Фаразимиз қарама-қаршиликка келтиришини кўрсатамиз.

Мисол учун

$$k_l < l_l \tag{14}$$

бўлсин. H орқали G группанинг тартиби p^{k_l} дан ошмайдиган элементлари тўпламини белгилаймиз. Бу G группанинг қисм группаси бўлади, чунки агар x ва y H нинг элементлари бўлса, у ҳолда $x+y$ ҳам, $-x$ ҳам p^{k_l} сондан ошиб кетмайдиган тартибга эга бўлади.

Жумладан, H қисм группага ушбу

$$p^{k_1-k_l}a_1,\ p^{k_2-k_l}a_2, \ldots,\ p^{k_{l-1}-k_l}a_{l-1},\ a_l,\ a_{l+1}, \ldots,\ a_s$$

элементлар тегишли. Иккинчи томондан, агар $1 \leqslant j \leqslant l-1$ бўлса, у ҳолда $p^{k_j-k_l-1}a_j$ элемент p^{k_l+1} тартибга эга ва шунинг учун ҳам H га кирмайди. Бундан $a_j + H$ қўшни синф (биз аддитив ёзувдан фойдаланяпмиз) G/H фактор-группанинг элементи сифатида $p^{k_j-k_l}$ тартибга эга; унинг $\{a_j + H\}$ циклик қисм группасининг тартиби ҳам худди шундай. G/H группа $\{a_j + H\}$, $j = 1, 2, \ldots, l-1$ циклик қисм группаларнинг тўғри йиғиндисидан иборат:

$$G/H = \{a_1 + H\} + \{a_2 + H\} + \ldots + \{a_{l-1} + H\} \tag{15}$$

ва шунинг учун ҳам унинг тартиби

$$p^{(k_1-k_l)+(k_2-k_l)+\ldots+(k_{l-1}-k_l)} \tag{16}$$

сонга тенг эканлигини исботлаймиз.

Агар x G группанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда

$$x = m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_sa_s$$

ёзув мавжуд. $j = 1, 2, \ldots, i - 1$ учун

$$m_j = p^{k_j - k_i}q_j + n_j$$

бўлсин, бу ерда

$$0 \leqslant n_j < p^{k_j - k_i}, \qquad (17)$$

у ҳолда

$$m_ja_j = q_j(p^{k_j - k_i}\, a_j) + n_ja_j$$

ҳамда ўнг томондаги биринчи қўшилувчи H да ётгани учун,

$$m_ja_j + H = n_ja_j + H.$$

Иккинчи томондан,

$$m_ia_i + H = H, \ldots, m_sa_s + H = H.$$

Шунинг учун ҳам

$$\begin{aligned} x + H &= (m_1a_1 + H) + (m_2a_2 + H) + \ldots + (m_sa_s + H) = \\ &= (n_1a_1 + H) + (n_2a_2 + H) + \ldots + (n_{i-1}a_{i-1} + H). \end{aligned} \qquad (18)$$

Яна битта шундай ёзув мавжуд бўлсин:

$$x + H = (n'_1a_1 + H) + (n'_2a_2 + H) + \ldots + (n'_{i-1}\, a_{i-1} + H), \qquad (19)$$

бу ерда

$$0 \leqslant n'_j < p^{k_j - k_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, i - 1. \qquad (20)$$

У ҳолда

$$n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_{i-1}\, a_{i-1}$$

ва

$$n'_1a_1 + n'_2a_2 + \ldots + n'_{i-1}\, a_{i-1}$$

элементлар H бўйича битта қўшни синфда ётади, яъни уларнинг айирмаси H га теғишли ва шунинг учун ҳам

$$p^{k_i}[(n_1 - n'_1)a_1 + (n_2 - n'_2)a_2 + \ldots + (n_{i-1} - n'_{i-1})a_{i-1}] = 0.$$

Бундан

$$p^{k_i}(n_j - n'_j)a_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, i - 1$$

эканлиги келиб чиқади [чунки (12) ёйилмалардан биринчиси тўғри ёйилма] ва шунга кўра $p^{k_i}(n_j - n'_j)$ сон a_j элементнинг p^{k_j} тартибига бўлиниши керак ва, демак, $n_j - n'_j$ айирма $p^{k_j - k_i}$ сонга бўлинади. Бундан (17) ва (20) га биноан

$$n_j = n'_j, \; j = 1, 2, \ldots, i - 1$$

эканлиги келиб чиқади, яъни (18) ва (19) айнан бир хил ифодалардир. Бу билан (15) тўғри ёйилманинг мавжудлиги исботланди.

(12) ёйилмалардан иккинчиси учун ўтказилган шунга ўхшаш мулоҳазалар худди шу G/H фактор-группа

$$G/H = \{b_1 + H\} + \{b_2 + H\} + \ldots + \{b_{l-1} + H\} + \{b_l + H\} + \ldots$$

тўғри ёйилмага эга эканлигини кўрсатади, яъни (13) ва (14) га кўра унинг тартиби (16) сондан қатъий катта. Бу қарама-қаршилик теоремани исботлайди.

Энди чекли Абель группаларининг тўлиқ тавсифини ҳосил қилдик. Чунончи *1 дан фарқли, аммо турли бўлиши шарт бўлмаган натурал сонларнинг ҳар турли чекли*

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

тўпламларини оламиз, шу билан бирга, бу сонларнинг ҳар бири бирор туб соннинг даражасидан иборат бўлиши керак. Ҳар бир бундай тўпламга бу тўпламнинг сонлари тартиб бўлиб хизмат қилувчи циклик группаларнинг тўғри йиғиндисини мос қўямиз. Бундай йўл билан ҳосил қилинган барча чекли абель группалари жуфт-жуфти билан изоморф эмас, ихтиёрий бошқа чекли абель группаси эса бу группаларнинг бирортасига изоморфдир.

АДАБИЕТ

Бу ерда кейинги ўттиз беш йил ичида алгебранинг турли бўлимлари бўйича рус тилида босилиб чиққан китоблар рўйхати келтирилган. Бу китобларнинг баъзилари университет ёки педагогика олий ўқув юртларининг алгебра курслари бўйича дарслик ёки ўқув қўлланмалари бўлиб, қолганлари яхши тайёргарликка эга бўлган китобхонга мўлжалланган эркин материал ҳамда айрим масалалар бўйича монографиялардир.

ОЛИЙ АЛГЕБРА

Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, изд. 4, Гостехиздат, 1941.
Окунев Л. Я., Высшая алгебра, изд. 2, „Просвещение", 1966.
Шапиро Г. М., Высшая алгебра, изд. 4, Учпедгиз, 1938.
Ляпин Е. С., Курс высшей алгебры, изд. 2, Учпедгиз, 1955.
Фаддеев Д. К. и Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, изд. 9, „Наука", 1968.
Виноградов С. П., Основания теории детерминантов, изд. 4, ОНТИ, 1935.

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 3, „Наука", 1966.
Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, изд. 3, „Наука", 1970.
Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, изд. 2, Гостехиздат, 1956.
Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, изд. 4, „Наука", 1970.
Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, изд. 3, „Наука", 1967.
Бохер М., Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1934.
Шрейер О. и Шпернер Е., Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, т. I, ОНТИ, 1934.
Шрейер О. и Шпернер Е., Теория матриц, ОНТИ, 1936.
Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.
Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.
Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, Гостехиздат, 1948.

ГРУППАЛАР, ҲАЛҚАЛАР ВА СТРУКТУРАЛАР НАЗАРИЯСИ

Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. 1 и 2, Гостехиздат, 1947.
Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, изд. 2, ОНТИ, 1933. (См. также Шмидт О. Ю., Избранные труды, Математика, Изд. АН СССР, 1959.)
Курош А. Г., Теория групп, изд. 3, „Наука" 1967.

Александров П. С., Введение в теорию групп, изд. 2, Учпедгиз, 1951.
Джекобсон Н., Теория колец, ИЛ, 194[illegible].
Чеботарев Н. Г., Введение в теорию алгебр, Гостехиздат, 1949.
Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, ГНТИ Украины, 1937.
Окунев Л. Я., Основы современной алгебры, Учпедгиз. 1941.
Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, 1955.
Ляпин Е. С., Полугруппы, Физматгиз, 1960.
Картан А. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.
Джекобсон Н., Строение колец, ИЛ, 1961.
Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.

МАЙДОНЛАР НАЗАРИЯСИ

Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1, ОНТИ, 1934.
Чеботарев Н. Г., Теория Галуа, ОНТИ, 1936.
Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, 1940.
Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, ИЛ, 1947.
Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.
Ходж В. и Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, тт. 1 и 2, ИЛ 1954; т. 3. ИЛ, 1955.
Граве Д. А., Трактат по алгебраическому анализу, тт. 1 и 2, Изд. АН УССР, 1938–1939.

УЗЛУКСИЗ ГРУППАЛАР

Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, 1954.
Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.
Шевалле К., Теория групп Ли, ч. 1, ИЛ, 1948, ч. 2, 3, ИЛ, 1958.
Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ 1947.
Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, ИЛ, 1950.

На узбекском языке

АЛЕКСАНДР ГЕННАДИЕВИЧ КУРОШ

КУРС ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Учебник для университетов

Перевод с русского 10-го издания изд-ва „Наука", М., 1971

Издательство „Ўқитувчи"
Ташкент—1976

Таржимонлар: *Х. Алимов* (I—VII боблар)
Т. Зуфаров (VIII—XIV боблар)
Махсус редактор физика-математика фанлари
кандидати *М. Мирзаҳмедов*
Редактор *Ў. Ҳусанов*
Техн. редактор *Т. Ананина*
Бадиий редактор *Е. Соин*
Корректор *Д. Умарова*

Теришга берилди 2/IX—1975 й. Босишга рухсат этилди 28/I—1976 й. Қоғоз № 3. Формати $60\times90^{1}/_{16}$. Физ. б. л. 29,0. Нашр л. 31,4. Тиражи 10000.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 65-74. Баҳоси 88 т. Муқоваси 10 т.

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Область бошқармасининг Морозов номли босмахонаси. Самарқанд шаҳри Кузнецкая кўчаси, 82. 1976. Заказ № 3919.

Типография имени Морозова областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Самарканд, ул. Кузнецкая, 82.