ЎЗБЕКИСТОН ССР ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ

ТАНЛАНГАН АСАРЛАР

САККИЗ ТОМЛИК

ЎЗБЕКИСТОН ССР «ФАН» НАШРИЁТИ

ЎЗБЕКИСТОН ССР ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ

ИККИНЧИ ТОМ

АСОСИЙ МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КУРСИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ

ҚЎШИМЧАЛАР БИЛАН ЯНГИДАН ИШЛАНГАН 3-БОСМАСИ

ТОШКЕНТ. 1968

517
Қ60

Танланган асарларнинг ушбу иккинчи томи авторнинг уч томлик „Асосий математик анализ курси“нинг биринчи қисмидан иборат бўлиб, Тошкент шаҳридаги бир неча олий ўқув юртларида автор томонидан ўқилган лекциялар натижасида вужудга келган.

Курснинг тузилиши шундайки, уни асосан ҳар қандай олий мактабнинг программасига татбиқ қилса бўлади. Масалан, бунинг учун юлдузчалар билан белгиланган баъзи темаларни қолдириб кетиш мумкин.

2-2-3

АВТОРДАН

„Асосий математик анализ курси“нинг иккинчи босмаси 1937 йилда чоп этилган эди. Курс икки томдан иборат бўлиб, биринчи томи анализнинг умумий масалаларига, иккинчи томи дифференциал тенгламаларга бағишланган эди.

Бу курсга эҳтиёж фавқулодда катта бўлганидан Ўзбекистондаги олий мактаб ўқитувчиларининг кенгашларида ва авторга мактуб орқали қилинган илтимосларда уни қайтадан нашр этиш масаласи бир неча марта қўйилган эди. Бироқ мен бу илтимосларни ўз вақтида бажара олмадим, чунки бошқа муҳим темаларни ишлаш билан ғоят банд бўлганимдан курсни навбатдаги нашрга тайёрлашга вақт мусоид этмаган эди.

Ниҳоят саккиз томлик „Танланган асарлар“имнинг босилиши муносабати билан курсни учинчи нашрга тайёрлашга тўғри келди. Натижада биринчи томнинг ҳажми кенгайиб кетганидан уни икки томга бўлиш лозим топилди. Шундай қилиб, „Асосий математик анализ курси“ уч томдан иборат. Булардан қўлингиздаги том асосан дифференциал ҳисобга бағишланган. Лекин баъзи мулоҳазаларни назарда тутиб, бу томда аниқ ва аниқмас интеграллардан бир оз тушунча берилган, ҳолбуки, бу борада системали ва тўлиқ маълумот навбатдаги („Танланган асарлар“нинг) учинчи томида бўлади. Шунингдек, чексиз қаторларнинг умумий назарияси шу томда берилган бўлиб, функцияларни қаторларга ёйиш эса учинчи томда бўлади.

Натижада „Танланган асарлар“нинг иккинчи томи „Дифференциал ҳисоб“ учинчи томи „Интеграл ҳисоб“ ва тўртинчи томи „Дифференциал тенгламалар“дан иборат.

Курс латин алфавитида босилган эди. Табиий, уни учинчи босмага тайёрлашда энг аввал (математик ифодалардан бошқа) текстини ҳозирги алфавитда кўчиришга тўғри келди. Бу вазифани асосан М. Ҳодиев бажарди. Шунинг учун бу кишига самимий ташаккур изҳор этаман.

12 июнь 1968 йил.

Биринчи боб

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

§ 1. КИРИШ

Математиканинг асосида ҳаётнинг чексиз кўп тажрибалари билан синалган оддий тушунчалар туради. Булар устида олиб борилган ижодий меҳнат туфайли у ривожланиб келмоқда, яъни математиканинг ўсиши, ривожланиши доимо давом этиб боради ва унинг ҳозирги ҳолати эса минглаб йиллар мобайнида олиб борилган ғоят катта коллектив меҳнатининг ижодий самарасидан иборат.

Ф. Энгельснинг берган таърифига мувофиқ: **„Математика — ҳақиқий (яъни моддий) оламнинг фазовий формалари ва миқдорий нисбатлари билан шуғулланадиган фандир“**. Демак, бу таърифдаги фазовий формалар ва миқдорий нисбатлар кишиларнинг ихтиёрий ижоди бўлмай, балки улар моддий оламдаги қонуниятни акс эттиради.

„Бироқ зикр қилинган формаларни ва нисбатларни текшириш имкониятига эга бўлиш учун, — деб ёзади Ф. Энгельс, — уларни мутлақо мазмунидан ажратиб, эътиборга олмай, аҳамиятсиз қолдириш лозим; шундай қилиб, натижада ўлчовга эга бўлмаган нуқталар, йўғонлиги ва эни бўлмаган чизиқлар ҳосил бўлади...“. Масалан, бир парча симнинг узунлигини ўлчашда биз унинг йўғон-ингичкалиги ва нимадан қилинганлиги билан мутлақо ишимиз бўлмайди, чунки бу ерда уларнинг ҳеч бир аҳамияти йўқ.

Техника ва маданиятнинг асосий пойдевори бўлган табиий фанларнинг марказий вазифаси табиатнинг қонунларини ўрганишдан иборат бўлиб, бу йўлда умуман математика, айниқса математик анализ муҳим аппарат, ўткир текшириш қуролидир.

§ 2. СОН ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧА

Табиат, фан ва техника масалалари, у масалаларда қатнашган миқдорларнинг ўзаро муносабатларини текширишга олиб келади.

Миқдорни — шу жинсдан бўлган ўлчов бирлиги ёрдами билан солиштириб кўриш натижасида ёки бошқача қилиб айтганда: ўлчаш натижасида сон ҳосил бўлади. Демак, **миқдорнинг шу жинс миқдордан бирлик қабул қилинган миқдорга нисбати сон дейилади.**

Ўлчаш натижасида ҳосил бўлган сон: **бутун** бўлиши мумкин (агарда — ўлчанмоқда бўлган миқдорда қабул қилинган бирликдан бутун марта мавжуд бўлса) ёки **каср** бўлиши мумкин (агарда — ўлчанмоқда бўлган миқдор билан қабул қилинган бирлик ҳамўлчов бўлса, яъни агарда бошқа шундай бирлик мавжуд бўлсаки, у — ўлчанмоқда бўлган миқдорда ва илгари қабул қилинган бирликда бутун марта мавжуд бўлса) ёки **иррационал** бўлиши мумкин (агарда — ўлчанмоқда бўлган миқдор билан қабул қилинган ўлчов бирлиги ҳамўлчов бўлмаса). Масалан, элементар геометриядан маълумки, квадратнинг диогонали унинг томони билан ҳамўлчов эмас, яъни агарда квадратнинг диагоналини ўлчашда унинг томонини бирлик ўлчов деб қабул қилинса, бунинг натижасида ҳосил бўлган ва $\sqrt{2}$ формада ёзилган сон иррационал бўлади. Шунга ўхшаш диаметри бирлик қабул қилинган айлананинг узунлиги, яъни π ҳам иррационал сон бўлади, чунки айлана билан унинг диаметри ҳам ўлчов эмас.

Бутун ва каср, мусбат ва манфий сонлар ҳамда ноль— рационал сонлар синфини ташкил этади. Бундай сонларнинг умумий кўриниши $\frac{p}{q}$ бўлади, бунда p ва q қандайдир бутун сон (хусусий ҳолда p нолга тенг) ва q эса нолга тенг эмас. Масалан, $3, -5, \frac{4}{7}, -\frac{2}{3}$ рационал сонлардан иборат.

Рационал ва иррационал сонлар — ҳақиқий сонлар синфини ташкил этади. Масалан, $7, -3, \frac{2}{5}, \sqrt{3}, \pi$.

Агарда бу китобда ишлатилган сонлар тўғрисида алоҳида сўз бўлмаса, уларни ҳақиқий фараз қилинади.

Фан ва техникада учрайдиган миқдорлар ўзгарувчи ёки ўзгармас бўлиши мумкин. Масалан, юриб турган поезднинг босаётган йўли, иситилаётган жисмнинг температураси, эриб турган музнинг миқдори, юриб турган машинада сарф бўлаётган бензиннинг миқдори ўзгарувчи бўлади.

Бу мисоллардан юраётган поезд устида тўхтаб ўтайлик. Бу ҳолда унинг босаётган йўли, унга сарф бўлган вақтга қараб ўзгариб боради, яъни ўзгарувчи миқдор бўлади. Ҳолбуки, поезднинг тезлиги ўзгармас ёки ўзгарувчи бўлиши мумкин, чунки у: бир хил тезликда ёки борган сари тезланиб, ёки борган сари сустланиб, ёки гоҳо тезланиб ва гоҳо сустланиб юриши мумкин. Шунинг учун масалада қатнашган миқдорлардан қайси бирининг ўзгармас ёки ўзгарувчи бўлиши қўрилаётган масаланинг шартларига боғлиқдир.

Бироқ миқдорларнинг ўртасида шундайлари ҳам учрайдики, улар **ҳар бир шароитда** ўз қийматини сақлаб, ўзгармаслиги мумкин. Масалан, ҳар қандай учбурчакда учала бурчакларининг йиғиндиси ($2d$), ҳар қандай айлана узунлигининг унинг диаметрига нисбати (π) каби.

Хуллас, **бирор масалани текширишда ёки ҳар бир шароитда ўз қийматини сақлаган миқдорни ўзгармас ва турли қийматларга эга бўлган миқдорни ўзгарувчи миқдор дейилади.**

Одатда ўзгармас миқдорларни латин алфавитининг биринчи ҳарфлари билан, яъни a, b, c, d,... ҳарфлари билан ва ўзгарувчи миқдорларни унинг охирги x, y, z, t,... ҳарфлари билан белгиланади.

§ 3. МИҚДОРНИНГ АБСОЛЮТ ҚИЙМАТИ

Бирор a миқдорнинг абсолют қиймати деб унинг мусбат қилиб олинган қийматини айтилади.

Одатда a миқдорнинг абсолют қиймати

$$|a|$$

равишда ёзилади. Демак,

$$|a| = +a, \text{ агарда } a > 0 \text{ бўлса,}$$

$$|a| = -a, \quad \text{,,} \quad a < 0 \quad \text{,,}$$

Масалан, миқдорнинг абсолют қийматлари қуйидаги хоссаларга эгадир:

1. Алгебраик йиғиндининг абсолют қиймати қўшилувчиларнинг абсолют қийматлари йиғиндисидан катта эмас, яъни:

$$|a+b-c+d| \leqslant |a|+|b|+|-c|+|d|.$$

Бу хосса бевосита миқдорнинг абсолют қиймати таърифидан келиб чиқади. Масалан,

$$|5-2+7| < 5+2+7$$

$$|-5-2-7| = |-5|+|-2|+|-7|$$

$$|-14| = 5+2+7.$$

2. Кўпайтманинг абсолют қиймати кўпайтувчиларнинг абсолют қийматлари кўпайтмасига тенг, яъни:

$$|a \cdot b \cdot c \cdot d| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \cdot |d|.$$

Бу тенглик ҳам миқдорнинг абсолют қиймати таърифидан келиб чиқади. Масалан,

$$|5 \cdot -3 \cdot 6| = |5| \cdot |-3| \cdot |6|$$

Шунингдек,

$$|-90| = 5 \cdot 3 \cdot 6.$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

§ 4. ИНТЕРВАЛ ЁКИ ОРАЛИҚ. ЧЕГАРАЛАНГАН МИҚДОРЛАР

1. Кўп масалаларда ўзгарувчи миқдорнинг қийматларини чегаралашга, яъни унинг қийматларидан бирор икки аниқ сон орасидаги қийматларини эътиборга олишга тўғри келади.

Агарда ўзгарувчи x нинг ҳамма қийматлари

$$a \leqslant x \leqslant b$$

шартни қаноатлантирса, бу ҳолда x ни (a, b) оралиқда ёки интервалда ўзгаради дейилади ва бундай интервални ёпиқ интервал дейилади[1].

Агарда ўзгарувчи x нинг ҳамма қийматлари

---

[1] Гоҳо x нинг бундай ўзгаришини ab кесмада фараз қилиб, уни $[a, b]$ равишда белгилайдилар.

$$a < x < b$$

шартни қаноатлантирса, яъни x нинг (a, b) қийматларига a ва b нинг ўзлари кирмаса, бу ҳолда (a, b) ни очиқ интервал дейилади.

Агарда x нинг (a, b) интервалдаги қийматларига a кирса ва b кирмаса, яъни агарда x нинг ўзгариши

$$a \leqslant x < b$$

шартни қаноатлантирса, бу ҳолда (a, b) интервални чапдан ёпиқ дейилади.

Агарда x нинг (a, b) интервалдаги қийматларига b кирса ва a кирмаса, яъни агарда x нинг ўзгариши

$$a < x \leqslant b$$

шартни қаноатлантирса, бу ҳолда (a, b) интервални ўнгдан ёпиқ дейилади.

2. Агарда ўзгарувчи миқдор x нинг абсолют қиймати унинг бирор қийматидан бошлаб, бирорта мусбат A сондан кичик бўлиб

$$|x| < A.$$

x нинг кейинги ўзгаришларида ҳам бу тенгсизлик ўз кучини сақлаб борса, бу ҳолда бундай ўзгарувчи x ни чегараланган дейилади,

Масалан, $\sin x$ чегараланган бўлади, чунки унинг абсолют қиймати ҳеч вақт 1 дан катта бўла олмайди.

§ 5. ФУНКЦИЯ

Кўпинча фан ва техника масалаларида қатнашган ўзгарувчи миқдорлар ўзаро шундай боғлиқ бўладики, улардан бирининг ўзгаришига қараб иккинчиси ҳам маълум равишда ўзгаради. Масалан, доиранинг радиусини R ва унинг юзини S фараз қилинса,

$$S = \pi R^2 \qquad (1)$$

бўлади. Бунга қараганда S нинг қиймати R нинг қийматига боғлиқ бўлиб, R га берилган ҳар бир қийматга S нинг аниқ қиймати мос келади. Бу ҳолда „S, R нинг функцияси“ дейилади.

Функция тушунчаси математик анализнинг энг муҳим ва асосий тушунчаларидан бири саналади. Унинг мукаммалроқ таърифи қуйидагича бўлади:

Агарда иккита x ва y ўзгарувчи миқдорлардан бири, масалан, y, иккинчисига, яъни x га шундай боғлиқ бўлсаки, улардан x га берилган ҳар бир қийматга, y нинг аниқ қиймати мос келса, у ҳолда y ни x нинг функцияси ва x ни эркин ўзгарувчи ёки аргумент дейилади ва бундай боғланишни одатда

$$y = f(x) \tag{2}$$

кўринишда ёзиб: „y, x нинг *эф* функцияси“ деб ўқилади. Бундаги f ҳарфи „функция“ (functio)сўзининг биринчи ҳарфидан иборат бўлиб, зикр қилинган боғланишни умумий равишда ва қисқача ифода қилади.

Бу каби боғланишларни ифода қилиш учун ҳалиги f ҳарфидан бошқа ҳарфлар ҳам ишлатилади, масалан: F, φ, ψ,...

Яна бир мисол. Физикадан маълумки, Бойл-Мариот қонунига мувофиқ, температураси ўзгармай турган газнинг ҳажми (v) билан унинг ташқи босими (p) нинг кўпайтмаси ўзгармас миқдордан иборат. Агарда C ни ўзгармас фараз қилинса, бу қонуннинг математик ифодаси бундай бўлади;

$$pv = C. \tag{3}$$

Бунга қараганда, v берилганда p ни ва p берилганда v ни аниқлаш мумкин. Ҳақиқатда (3) дан:

$$p = \frac{C}{v}\,;\ v = \frac{C}{p}\,. \tag{4}$$

Булардан, биринчисида функция ролида бўлган p иккинчисида аргумент ролини бажармоқда. Шунинг учун масаладаги ёки формуладаги ўзгарувчи миқдорлардан қайси бирини функция ва қайси бирини аргумент қилиб олиш масаланинг шартига ва берилган формуланинг тузилишига боғлиқ.

(1) ва (3) ни ёки умумий кўринишдаги (2) ни, яъни

$$y = f(x)$$

ни „функционал боғланиш“ (ёки „функционал муносабат“) дейилади. Бундаги функционал боғланишни ифода қилиб турган f ни функциянинг характеристикаси дейилади.

Агарда бирор масалани текширишда x нинг бир неча турли функциялари билан иш кўришга тўғри келса, у ҳолда улардаги ҳар бир функционал боғланишнинг характеристикалари ҳам турлича бўлиши лозим. Масалан, ушбу

$$y = ax + b,\ z = \lg x + a,\ t = 3x^2 - 1$$

функцияларнинг ҳар бирида аргументи x бўлган ҳолда, у функцияларни тузиш учун аргумент устида бажарилган амаллар бир-бирига ўхшамайди. Шунинг учун уларнинг характеристикалари ҳам бир-бирига ўхшамаслиги керак. Масалан, уларни

$$y = f(x),\ z = F(x),\ t = \varphi(x)$$

ёки

$$y = F(x),\ z = \varphi(x),\ t = f(x)$$

каби тасвир қилишга тўғри келади.

Аксинча, агарда функционал боғланишнинг тузилиши бир хил бўлиб, лекин улардаги функция ва аргумент турли ҳарфлар билан тасвирланган бўлса-да, уларнинг характеристикаси бир хил ҳарф билан ифодаланиши керак. Масалан, агарда

$$y = ax^2 + bx + c \text{ ва } s = at^2 + bt + c$$

бўлса, буларни қисқача

$$y = \varphi(x) \text{ ва } s = \varphi(t)$$

каби ёзиш мумкин.

Юқорида келтирилган мисолларнинг ҳар бирида функциянинг аргументи биргина эди. Ҳолбуки, кўпинча масалаларда унинг бир нечта бўлуви мумкин. Масалан, учбурчакнинг томонларидан бирини a, иккинчисини b ва уларнинг орасидаги бурчагини C фараз қилинса, унинг юзи S ушбу формула билан ифода қилинади:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C. \tag{5}$$

Бу формуланинг тузилишига қараганда S нинг қиймати a, b ва C нинг қийматларига боғлиқ, яъни S уч аргументнинг функцияси. Шунга ўхшаш тўрт, беш ва умуман кўп аргументли функцияларнинг бўлуви мумкин. Бундай ҳолларда ҳам функционал боғланиш юқоридаги каби тасвир қилинади. Масалан,

$$v = f(x, y, z),$$

бунда v уч аргументнинг, яъни x, y, z нинг функцияси.

Изоҳ. Сон тўғрисида берилган таърифни эътиборга олганда: ўзгармас миқдорга — ўзгармас сон ва ўзгарувчи миқдорга — ўзгарувчи сон мос келади. Шунинг учун кўп вақт „ўзгармас миқдор" ўрнига — „ўзгармас сон" ва ўзгарувчи миқдор ўрнига — „ўзгарувчи сон" ишлатиш мумкин ҳам қулайдир.

§ 6. ФУНКЦИЯНИНГ ҚИЙМАТЛАРИ ВА УНИНГ АНИҚЛИК СОҲАСИ

1. $f(x)$, x нинг бирор функцияси бўлсин. Фараз қилайлик x га бирор a қиймат берганда, $f(x)$ функцияга аниқ қиймат мос келсин. Бу қийматни $f(x)$ функциянинг хусусий қиймати дейилади ва уни $f(a)$ билан ифода қилинади, яъни $x = a$ бўлса $f(a)$. Масалан, агарда

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

бўлса, бу ҳолда

$$f(4) = 3\cdot 4^2 + 2\cdot 4 - 5 = 51$$

$$f(-3) = 3\cdot(-3)^2 + 2\cdot(-3) - 5 = 16$$

$$f(k) = 3k^2 + 2k - 5$$

$$f(0) = -5.$$

Шунга ўхшаш, агарда

$$\varphi(x, y) = 5xy - x^2 + 1$$

бўлса, бу ҳолда

$$\varphi(0, 2) = 5\cdot 0\cdot 2 - 0^2 + 1 = 1$$

$$\varphi(2, 0) = 5\cdot 2\cdot 0 - 2^2 + 1 = -3$$

$$\varphi(3, 4) = 5\cdot 3\cdot 4 - 3^2 + 1 = 52$$

$$\varphi(a, b) = 5ab - a^2 + 1.$$

Демак, **берилган функциянинг хусусий қийматини ҳисоблаш учун аргументга берилган қийматни унинг ўрнига қўйиб, функцияни ташкил этган амалларни бажариш лозим.**

2. Юқорида келтирилган мисолларнинг ҳар бирида аргументга берилган ҳар бир қийматга қараб функциянинг маълум қиймати аниқланган эди. Бироқ ҳамма вақт шундай бўлавермайди: $f(x)$ функция аргументининг баъзи бир қийматларида функциянинг қиймати аниқланмай қолиши мумкин.

Масалан, ушбу

$$y = \frac{1}{x-a} \tag{1}$$

функциянинг аргументи x га a дан бошқа ҳар қандай қиймат берганда y га аниқ қиймат мос келади, лекин $x = a$ бўлганда бу функция ўз маъносини йўқотади ва y ни ҳисоблаб бўлмайди.

Шунга ўхшаш, аргументнинг баъзи бир қийматларида функциянинг қиймати мавҳум бўлиб қолиши мумкин. Масалан, ушбу

$$y = \sqrt{1-x^2} \tag{2}$$

функциянинг қийматлари ҳақиқий бўлсин учун

$$-1 \leq x \leq 1$$

бўлиши лозим, чунки акс ҳолда y мавҳум бўлади.

Шунинг каби

$$y = \lg x \tag{3}$$

функциянинг аргументи $x > 0$ бўлганда, яъни мусбат бўлгандагина функциянинг ўзи аниқланади (чунки манфий сонларнинг логарифми бўлмайди).

Умуман, аргументнинг функцияни аниқлайдиган ҳамма қийматларини функциянинг аниқлик соҳаси дейилади. Масалан, (1) функциянинг аниқлик соҳаси $x = a$ дан бошқа ҳамма ҳақиқий сонлардан иборат; (2) функциянинг аниқлик соҳаси $(-1, +1)$ ёпиқ интервалдаги ҳақиқий сонлардан ва (3) функциянинг аниқлик соҳаси ҳамма мусбат сонлардан иборат.

Масалалар

1. Агарда $F(x) = x(x+5)(x-2)^3$ бўлса, $F(-5) = F(0) = F(2) = 0$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

2. $f(x) = 3x^2 + 5$ ва $\varphi(x) = 5x - 3$ бўлса, $f(0)\cdot\varphi(2) = 35$ ва $f(2)\cdot\varphi(0) = -51$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

3. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ бўлса, $f(x+1) = x^2 - x - 1$ ва $\{f(0) + 3\}^2 = 16$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

4. Агарда $\varphi(x)=0$ тенгламанинг илдизларини a ва b фараз қилинса, буни қандай ёзиш мумкин?

5. Агарда $f(x, y)=x^2+3xy+y^2-2x+5y-6$ бўлса, $f(0, 1)=0$ ва $f(1, 0)=-7$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

6. $\varphi(x, y)=3xy+2x+5$ бўлса, $\varphi(0, a)-\varphi(a, 0)=-2a$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

7. $F(x, y)=x-\frac{1}{y}$ бўлса, $F(2, 1)=2F(1, 2)=1$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

8. $F(x)=ax^2+bx+c$ ва $\varphi(x)=\sin x$ фараз қилиб, $F\{\varphi(x)\}$ ва $F\{\varphi(x)-c\}^2+a$ топилсин.

9. $f(x)=x^2+1$ фараз қилиб, ушбу тенгликларнинг тўғрилиги исбот қилинсин:

$$f\{f(x)\}=27x^4+18x^2+4;\quad f\{f(0)\}=4.$$

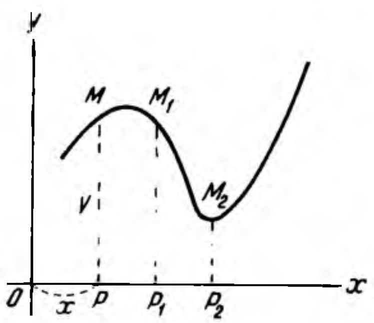
10. $F(x, y)=ax^3+bx^2y-cy^3$ бўлса,

$$F(kx, ky)=k^3F(x, y)$$

бўлади. Буни исбот қилинсин.

§ 7. ФУНКЦИЯНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАСВИРИ

Фараз қилайлик $y=f(x)$ бирор (a, b) интервалда аниқланган функция бўлсин. Демак, x нинг ҳалиги интервалдаги ҳар бир қийматига функциянинг биргина аниқ қиймати мос келади деб фараз қилинади.

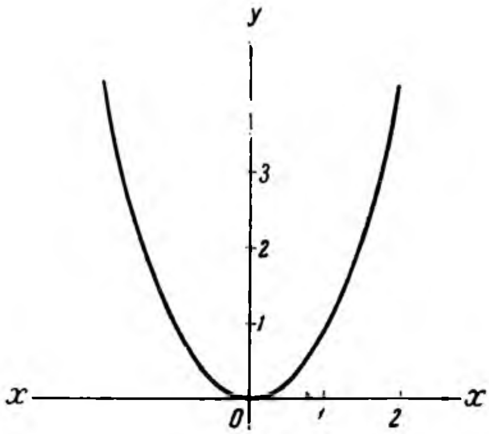


Шакл 1.

Буни назарда тутиб, бирор тўғри бурчакли xoy координаталар системасини чизиб, унинг абсцисса ўқида x га берилган қийматларни ва ордината ўқида y га мос келган қийматларни ўлчаб борамиз. Масалан, фараз қилайлик $x=0P$ бўлганда, $y=MP$ бўлсин (шакл 1).

Бунинг натижасида координаталар текислигида M нуқта аниқланади. Агарда (a, b) интервалда x ўзгариб борса, y ҳам ўзгариб боради (чунки y, x нинг функцияси). Натижада M нуқтанинг ўрни ҳам ўзгариб боради, яъни M қандайдир бирор эгри чизиқ чизади ва бу чизиқ $y=f(x)$ функциянинг геометрик тасвири ёки $y=f(x)$ функциянинг графиги дейилади. Демак, $y=f(x)$ функциянинг графиги деб шундай эгри чизиқни айтиладики, унинг нуқталари координаталари $y=f(x)$ ни қаноатлантиради.

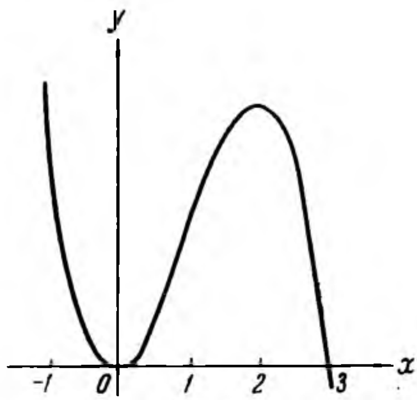
x	y
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
$\pm 1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
± 2	4
⋮	⋮



Шакл 2.

Функциянинг геометрик тасвири бўлган эгри чизиқнинг формаси берилган функциянинг тузилишига боғлиқдир. Масалан,

$$y=x^2 \tag{1}$$



Шакл 3.

функциянинг графигини чизиш учун x га бир неча қиймат бериб, уларга мос келган y нинг қийматларини ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, x га берилган қийматлар ва уларга мос келган y нинг қийматлари қуйидаги таблицадан кўринмоқда.

Натижада координаталар текислигида $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, 177 1), $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$, $(2, 4)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $\left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$,

(— 2, 4) нуқталар аниқланди. Буларни ўзаро туташтирилса, 2-шаклдаги функциянинг геометрик тасвири ҳосил бўлади. Худди шу йўл билан давом этганда, ушбу

$$y = 3x^2 - x^3$$

функциянинг графиги 3-шаклдаги эгри чизиқдан иборат бўлади.

§ 8. ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР

Математик анализнинг асосий машғулоти функционал муносабатларни текширишдан иборат бўлгани учун бизга ҳар вақт турли функциялар билан иш кўришга тўғри келади. Шунинг учун биз бу ерда функцияларнинг асосий синфларини ташкил этган ва элементар функциялар деб аталган уларнинг типлари билан таништириб ўтамиз.

1. Бутун рационал функциялар

Бутун рационал функция (ёки қисқача бутун функция) деб умумий кўриниши қуйидагича бўлган функцияни айтилади:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n, \tag{1}$$

бунда $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ коэффициентлар қандай бўлса-да, ҳақиқий ўзгармас сонлардан иборат; хусусий ҳолларда булардан баъзи бирлари нолга тенг бўлуви мумкин; n — бутун ва мусбат сон; коэффициентлардан a_0 нолга тенг бўлмаган ҳолда (1) функция n-даражали бутун рационал функция бўлади. Масалан, ушбу

$$y = 2x + 5$$

$$y = 0{,}5x^2 - 12$$

$$y = 5x^3 - 3x^2 + 15$$

функциялардан ҳар бири бутун рационал функция. Булардан биринчиси — биринчи даражали, иккинчиси — иккинчи даражали ва учинчиси — учинчи даражали.

Биринчи даражали бутун функциянинг умумуй кўриниши

$$y = ax + b \tag{2}$$

ва иккинчи даражали бутун функциянинг умумий кўриниши

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

бўлади; буларда a, b, c коэффициентлари ҳақиқий ўзгармас сонлар. Аналитик геометриядан маълумки, (2) функциянинг графиги — тўғри чизиқ ва (3) нинг графиги — парабола деб аталган эгри чизиқдан иборат. Биз (3) да $b=0$ ва $c=0$ фараз қилиб, унинг хусусий ҳоли бўлган

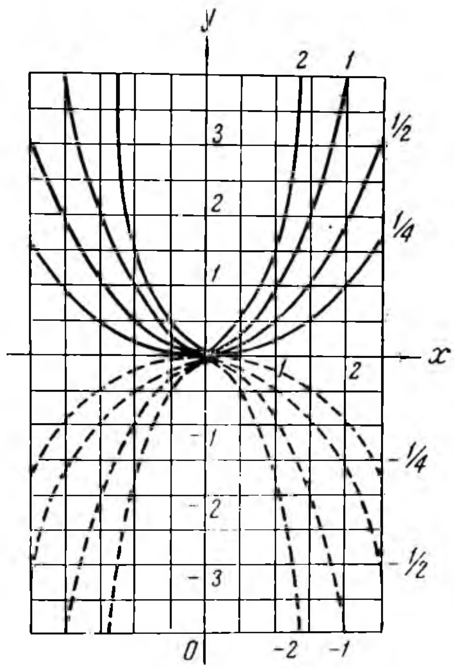
$$y = ax^2 \tag{4}$$

параболани текшириш билан чегараланамиз. Биз юқорида бунинг $a=1$ бўлган ҳолни, яъни $y=x^2$ параболанинг графигини чизган эдик (шакл 2). Энди $a \neq 1$ фараз қиламиз. 4-шаклда a ни:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, -\frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{2}, -1, -2$$

фараз қилиб, чизилган параболалар кўрсатилган. Бунга қараганда $a>0$ бўлганда парабола абсцисса ўқининг устида ва $a<0$ бўлганда унинг остида бўлади; a нинг абсолют қиймати қанча катта бўлса, парабола ординаталарининг абсолют қийматлари шунча тезлик билан ўсиб боради.



Шакл 4.

Бироқ $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги ҳам ҳалиги $y=ax^2$ функциянинг графиги каби бўлиб, фақат уларнинг координаталар системасининг ўқларига нисбатан ўринлари бошқача бўлади.

2. Касрли рационал функциялар

Икки бутун рационал функциянинг бир-бирига нисбати касирли рационал функция ёки қисқача рационал функция дейилади. Бу таърифга қараганда рационал функциянинг умумий кўриниши бундай бўлади:

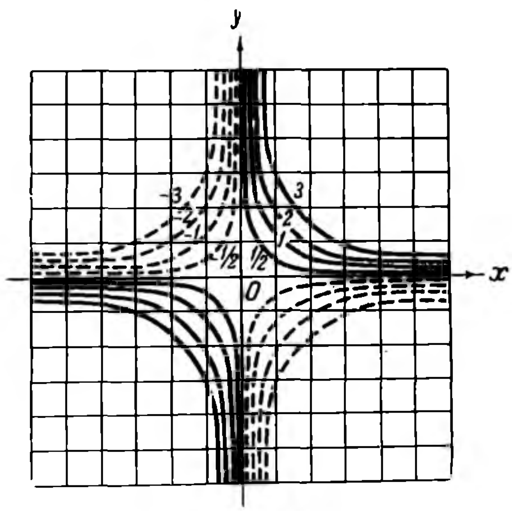
$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_2 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_n}. \qquad (5)$$

Рационал функциянинг аниқ бўлиши учун (5) касрнинг махражи нолга айланмаслиги лозим. Бошқача қилиб айтганда, (5) каср махражини нолга айлантирадиган x нинг қийматларидан бошқа ҳамма қийматларида функция аниқланган бўлади. Масалан, ушбу

$$y = \frac{2x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

$$y = \frac{3x^2 + 1}{x + 1}$$

функциялардан ҳар бири рационал функциядан иборат. Булардан биринчиси $x = 3$ ва $x = 1$ дан бошқа ва иккинчиси $x = -1$ дан бошқа x нинг ҳамма қийматларида аниқланган бўлади.



Шакл 5.

(5) нинг махражи ўзгармас сон бўлганда, y бутун функцияга айланади. Демак, бутун функция рационал функциянинг хусусий ҳолидир.

Энди ушбу функцияни оламиз:

$$y = \frac{k}{x}, \tag{6}$$

бунда k — ҳақиқий ўзгармас сон. Бу функция ҳам рационал бўлиб, x нинг нолга тенг бўлмаган ҳамма қийматларида y аниқланган бўлади.

Бу функциянинг графигини нуқталар ёрдами билан чизиш мумкин; $k > 0$ (масалан, $k = 0{,}5$, 1, 2, 3) бўлган ҳолдаги графикларни узлуксиз чизиқлар билан ва $k < 0$ (масалан, $k = -0{,}5$, -1, -2, -3) бўлган ҳолдаги графикларни нуқтали чизиқлар (пунктир) билан кўрсатилган (шакл 5).

$y = \frac{k}{x}$ функция ва унинг графигини тенг томонли гипербола дейилади. x неча марта кўпайса, y шунча марта камаяди ва аксинча x неча марта камайса, y шунча марта кўпаяди, яъни x ва y ўзаро тескари пропорционал муносабатдир. Масалан,

$$x = 1;\ 10;\ 100;\ 1000, \ldots \text{ бўлса,}$$

$$y = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001, \ldots \text{ бўлади.}$$

Хуллас, x нинг абсолют қиймати чексиз ўсган сари y нинг абсолют қиймати чексиз камайиб, гиперболанинг тармоқлари чексиз равишда абсцисса ўқига яқинлашиб боради; шунга ўхшаш, x нинг абсолют қиймати чексиз камайган сари y чексиз ўсиб, гиперболанинг тармоқлари ордината ўқига чексиз равишда яқинлашиб боради.

3. Даражали функция

Даражали функция деб, ушбу

$$y = x^m \tag{7}$$

кўринишдаги функцияни айтилади; бунда m аниқ (ўзгармас) ҳақиқий сон. Масалан, $m = 2$ бўлганда $y = x^2$ бўлади ва бу ҳолда унинг графиги 2-шаклдаги парабола бўлади.

$$m = 3 \text{ бўлганда } y = x^3 \text{ бўлади;}$$

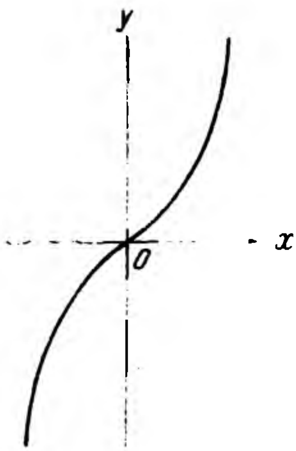
бу ҳолда функциянинг графиги 6-шаклдаги кубик парабола дейилган эгри чизиқни ифода қилади.

$$m = -1 \text{ бўлганда } y = x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ бўлади;}$$

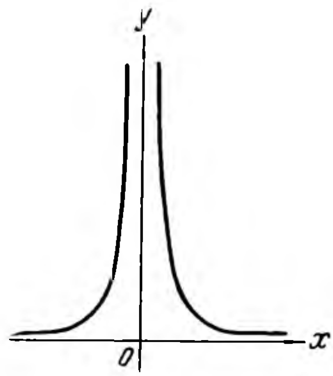
бу ҳолда функциянинг графиги тенг томонли гиперболадан иборат (шакл 5).

$$m = -2 \text{ бўлганда } y = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \text{ бўлади;}$$

бу ҳолда функциянинг графиги 7-шаклда кўрсатилган эгри чизиқни тасвир қилади.



Шакл 6.



Шакл 7.

4. Кўрсаткичли функция

Кўрсаткичли функция деб, ушбу

$$y = a^x \tag{8}$$

кўринишдаги функцияни айтилади; бунда a ўзгармас мусбат сон.

Бу функциянинг асосий хоссалари алгебрадан маълум бўлса-да, биз уларни бу ерда яна бир марта таъкидлаб ўтамиз:

1) $y = a^x$ функция x нинг ҳар бир ҳақиқий қийматида мусбат бўлади;

2) $a > 1$ бўлганда x ўсган сари a^x функциянинг ўзи ҳам ўсиб боради ва аксинча $a < 1$ бўлганда камайиб боради;

3) $a > 1$ бўлса, бу ҳолда x нинг мусбат қийматларида $a^x > 1$ ва манфий қийматларида $a^x < 1$ бўлади. Масалан, $a = 10$ бўлсин. Бу ҳолда:

$$x = 2 \text{ бўлганда } a^x = 10^2 = 100$$

$$x = -2 \text{ бўлганда } a^x = 10^{-2} = 0{,}01.$$

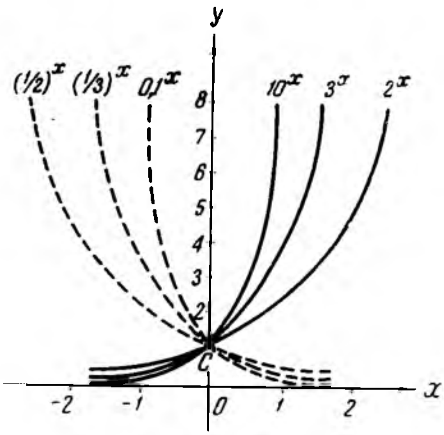
4) $a < 1$ бўлса, бу ҳолда x нинг мусбат қийматларида $a^x < 1$ ва манфий қийматларида $a^x > 1$ бўлади. Масалан, $a = \frac{1}{2}$ бўлсин. Бу ҳолда:

$x = 2$ бўлганда

$$a^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$x = -2$ бўлганда

$$a^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$$



Шакл 8.

5) $a > 1$ ёки $a < 1$ бўлса-да, ҳамма вақт $a^0 = 1$.

Хуллас, a ни 2, 3, 10 фараз қилиб,

$$y = 2^x, \quad y = 3^x, \quad y = 10^x$$

функцияларнинг графикларини чизганда, 8-шаклдаги эгри чизиқлар ҳосил бўлади. $y = a^x$ функциянинг зикр қилинган асосий хоссалари унинг графикларидан кўриниб турмоқда.

5. Логарифмик функция. Тескари функция

1. Логарифмик функция деб, ушбу

$$y = \log_a x \tag{9}$$

тенглик билан ифода қилинган функцияни айтилади. Бунда a — логарифмнинг асоси бўлиб, мусбат фараз қилинади: шунингдек, x га ҳамма вақт мусбат қиймат берилади (чунки манфий сонларнинг логарифмлари йўқдир).

Логарифмнинг таърифига мувофиқ (9) тенгликдан ушбу

$$x = a^y \tag{10}$$

тенглиги келиб чиқади. Бу эса кўрсаткичли функция бўлиб, фақат (9) га қараганда x ва y нинг роллари алмашганлигини курамиз. Бундай функцияларни, яъни (10) ва (9) ни ўзаро тескари дейилади (бири тўғри ва иккинчиси бунга нисбатан тескари).

Умуман, фараз қилайлик, y x нинг функцияси бўлсин:

$$y = f(x). \tag{11}$$

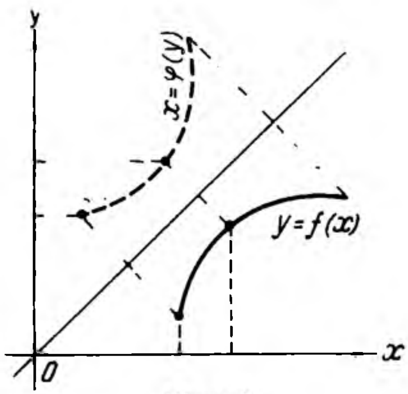
Агарда бу тенгламани x га нисбатан ечиш мумкин бўлса, у ҳолда x y нинг бирор функцияси бўлади:

$$x = \varphi(y), \tag{12}$$

мана шундай f ва φ функцияларни ўзаро тескари дейилади. Масалан,

$$y = ax + b \text{ ва } x = \frac{y-b}{a}$$

$$y = x^2 + a \text{ ва } x = \sqrt{y-a}$$



Шакл 9.

ўзаро тескари функциялардан иборат.

Ўзаро тескари бўлган функцияларнинг графиклари орасида маълум боғланиш мавжуддир. Бундай функциялардан бирининг графиги маълум бўлган ҳолда, унга тескари бўлган иккинчисининг графигини чизиш жуда қулайдир. Бунинг учун x ва y нинг ролларини ўзаро алмаштирилса кифоя қилади.

Шундай қилиб, тўғри функциянинг графигидан тескари функциянинг графигини ҳосил қилиш учун бутун шакл биринчи координаталар бурчагининг биссектрисаси атрофида $180°$га айлантирилса кифоя қилади (шакл 9).

Бу йўл билан давом этганда 8-шаклдаги кўрсаткичли функциянинг графигидан 10-шаклдаги логарифмик функцияларнинг графиклари ҳосил бўлади.

Логарифмик функциянинг бошланғич алгебрадан маълум бўлган асосий хоссалари 10-шаклдан кўриниб турмоқда. Масалан, a қандай мусбат сон бўлса-да, ҳамма вақт:

$$y = \log_a 1 = 0;$$

$a > 1$ бўлган ҳолда: $x > 1$ бўлса, $y = \log_a x > 0$ ва $x < 1$ бўлса, $y = \log_a x < 0$ бўлади; $a < 1$ бўлган ҳолда: $x > 1$ бўлса, $y = \log_a x < 0$ ва $x < 1$ бўлса, $y = \log_a x > 0$ бўлади.

Бу ҳолларнинг ҳар бирини 10-шаклдаги графиклар очиқдан-очиқ тасвир этмоқда,

Шунга ўхшаш, агарда

$$a > 1 \text{ бўлса,}$$

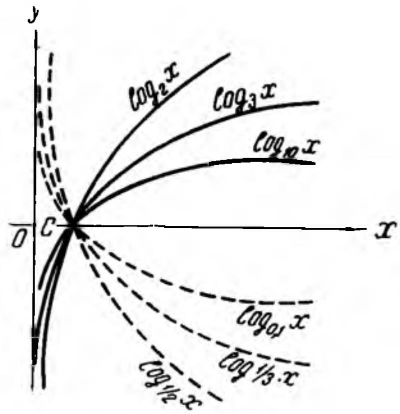
$$y = \log_a 0 = -\infty,$$

$$y = \log_a (+\infty) = +\infty,$$

$$a < 1 \text{ бўлса,}$$

$$y = \log_a 0 = +\infty,$$

$$y = \log_a (+\infty) = -\infty.$$



Шакл 10.

2. Агарда бир-бирига тескари бўлган икки функциядан: бирининг устида иккинчисининг аргумент орқали кўрсатилган амаллар бажарилса, натижада ҳамон аввалги ўзгарувчининг ўзи келиб чиқади.

Масалан,

$$y = f(x) \text{ ва } x = \varphi(y)$$

функцияларни ўзаро тескари фараз қилинса, бу ҳолда

$$f\{\varphi(y)\} = f(x) = y,$$

$$\varphi\{f(x)\} = \varphi(y) = x$$

бўлади. Масалан, ушбу

$$y = ax + b \text{ ва } x = \frac{y - b}{a}$$

функциялар бир-бирига тескари бўлгани учун

$$a \cdot \frac{y - b}{a} + b = y; \quad \frac{ax + b - b}{a} = x.$$

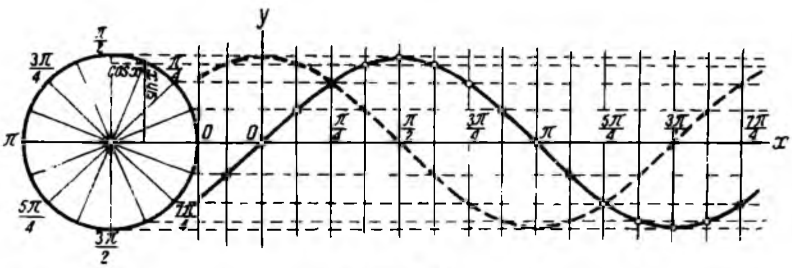
6. Тригонометрик функциялар

Тригонометриядан маълум бўлган асосий тригонометрик функциялар қуйидагилардан иборатдир:

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = \operatorname{tg} x, \; y = \operatorname{ctg} x.$$

Одатда тригонометрик функцияларнинг аргументи (x) ёй ҳисобида бўлиб, асосий ўлчов радиан саналади. Радиан деб ёйнинг узунлиги ўз радиусининг узунлигига тенг бўлган бурчакни айтилади. Радиан тақрибан 57° 17′ 45″ бўлади.

$\sin x$ ва $\cos x$ функцияларининг графиклари ва уларнинг қандай тузилиши 11-шаклда кўрсатилган.



Шакл 11.

$\sin x$ нинг графигини чизиб бўлгандан сўнг унинг ёрдами билан $\cos x$ нинг графигини чизиш мумкин. Ҳақиқатда

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

бўлгани учун $\sin x$ нинг графигини OX ўқининг усти билан чапга қараб $\frac{\pi}{2}$ миқдорича силжитилса, $\cos x$ нинг графиги ҳосил бўлади. Шаклда $\cos x$ нинг графиги нуқтали (пунктир) чизиқ билан кўрсатилган.

Шаклдаги графиклар $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларнинг асосий хоссалари бўлган, уларнинг даврийлигини ва даврининг 2π га тенглигини очиқдан-очиқ кўрсатмоқда, яъни

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,$$

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$

бу тенгликларда

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4, \ldots$$

Агарда бирор $f(x)$ функция шундай хоссага эга бўлсаки,

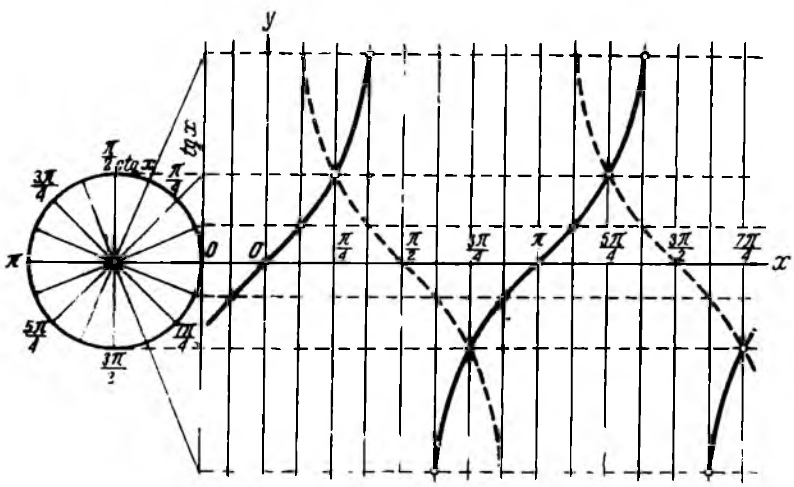
$$f(-x) = f(x)$$

бўлса, уни жуфт функция дейилади.

Шунга ўхшаш, агарда

$$f(-x) = -f(x)$$

бўлса, бундай функцияни тоқ функция дейилади. Берилган таърифга мувофиқ, $\sin x$ тоқ функция ва $\cos x$ жуфт функция бўлади, чунки:



Шакл 12.

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = +\cos x.$$

$\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графиклари ва уларнинг қандай чизилиши 12-шаклдан кўринмоқда. Тригонометриядан маълумки, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ нинг даври π га тенг, яъни

$$\operatorname{tg}(k\pi + x) = \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(k\pi + x) = \operatorname{ctg} x,$$

буларда

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$$

$\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ нинг ҳар бири тоқ функциялардан иборатдир, чунки

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

$\operatorname{tg} x$ нинг аргументи 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгарса, $\operatorname{tg} x$ 0 дан $+\infty$ гача ўзгаради ва x $\frac{\pi}{2}$ дан π гача ўзгарса, $\operatorname{tg} x$ $-\infty$ дан 0 гача ўзгаради.

Шунга ўхшаш $\operatorname{ctg} x$ нинг аргументи 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгарса, $\operatorname{ctg} x$ нинг ўзи $+\infty$ дан 0 гача ўзгаради ва у $\frac{\pi}{2}$ дан π гача ўзгарса, $\operatorname{ctg} x$ нинг ўзи 0 дан $-\infty$ гача ўзгаради.

$\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функцияларининг бу хоссаларини уларнинг графиклари тасвир этмоқдадир.

7. Тескари тригонометрик функциялар

Маълумки, ушбу

$$y = \sin x \tag{1}$$

тенгликда x ёй, y эса унинг синуси бўлиб, y x нинг функциясини ифода қилади,

Баъзи масалаларда x билан y нинг ролларини алмаштиришга, яъни x ни функция ва y ни аргумент қилишга тўғри келади. Бу ҳолда юқоридаги тенгламани

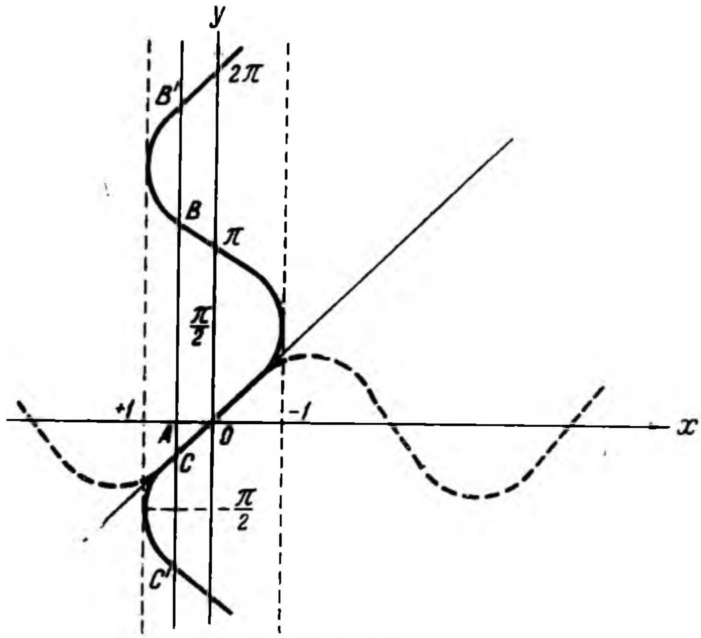
$$x = \arcsin y \tag{2}$$

ёзиб, уни „арксинус игрек“ деб ўқилади. Тенгламадаги „arc“ латинча „arcus“ (аркус), яъни ёй сўзининг қисқартма ифодасидир. Кейинги тенглик „x шундай ёйки, унинг синуси y га тенг“ деган маънони англатади.

Аргументини x ҳарфи билан ва функцияни y ҳарфи билан ифода қилиш одат бўлиб қолгани учун кейинги тенгламани

$$y = \arcsin x \tag{3}$$

қилиб ёзадилар. Шунинг билан $\arcsin x$ $\sin x$ га нисбатан тескари бўлган функциядан иборат. Шунга ўхшаш, $\cos x$ га тескари бўлган функцияни $\arccos x$, $\operatorname{tg} x$ га нисбатан тескари бўлган функцияни $\operatorname{arctg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ нисбатан тескари бўлган функцияни $\operatorname{arcctg} x$ равишда ифода қилинади.



Шакл 13.

Шунинг билан тескари тригонометрик функцияларнинг асосийлари.

$$\arcsin x, \ \arccos x, \ \operatorname{arctg} x, \ \operatorname{arcctg} x$$

функциялардан иборатдир.

Буларнинг графикларини чизиш учун умуман тескари функциянинг графигини чизиш қоидасидан фойдаланишга тўғри келади. Масалан, $\arcsin x$ нинг графигини тузиш учун (шакл 13) $\sin x$ графигининг координата ўқлари алмаштирилса ёки бутун шаклни биринчи координаталар бурчагининг биссектрисаси теварагида 180° га айлантирилса, $\arcsin x$ графиги ҳосил бўлади.

x нинг фақат (—1, +1) ёпиқ интервалдаги қийматларига $\arcsin x$ нинг ҳақиқий қийматлари тўғри келади,

$$-1 \leqslant x \leqslant +1,$$

иккинчи томондан, бу чегараларнинг ичида: x га берилган ҳар бир қийматга функция учун бир неча, балки чексиз кўп қийматлар тўғри келади. Ҳақиқатда, агарда

$$y = \arcsin x$$

функцияда $x = \frac{1}{2}$ фараз қилинса,

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right),$$

бундан

$$\sin y = \frac{1}{2}.$$

Бу тенгламани қаноатлантирадиган y нинг қийматлари чексиз кўп бўлиб, улар қуйидаги формула билан ифода қилинади:

$$y = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6},$$

$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ldots$$

Масалан, $k = 0$ бўлганда $y = \frac{\pi}{6}$; $k = 1$ бўлганда $y = \frac{5}{6}\pi, \ldots$ чунки

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \ \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

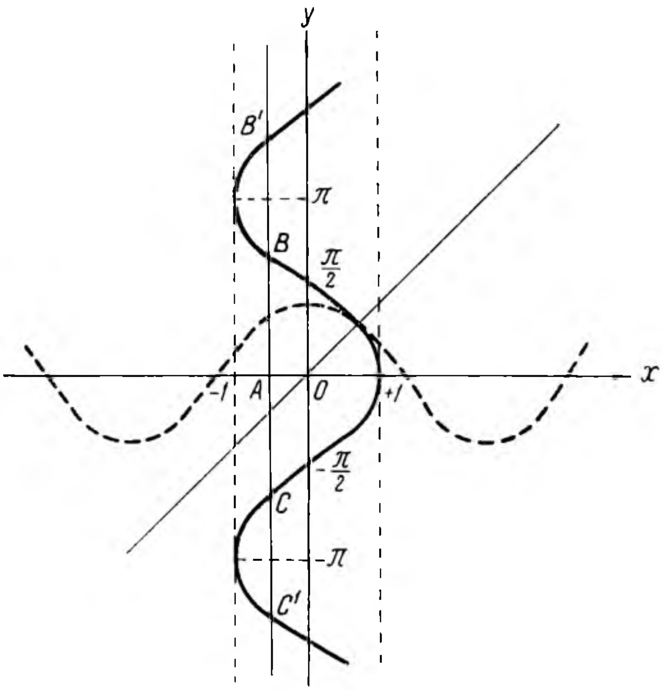
Бу натижаларни $\arcsin x$ графиги очиқ суратда тасвир этиб турмоқда.

Энди фараз қилайлик, $x = 0A$ бўлсин. Бу ҳолда (шакл 14):

$$y = AB, \ AB', \ldots \ AC, \ AC, \ldots$$

Бундай хоссага эга бўлган функцияларни кўп қийматли дейилади. Умуман,

Агарда аргументнинг ҳар бир қийматига функция учун бир неча қиймат тўғри келса, ундай функцияни кўп қийматли дейилади ва биргина қиймат тўғри келса, бир қийматли дейилади.



Шакл 14.

Ҳозиргача биз танишиб келган функцияларнинг кўплари бир қийматли эди. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳаммаси кўп қийматлидир.

Лекин қўшимча шартлар ёрдами билан ҳар бир кўп қийматли функцияни бир қийматли функцияга айлантириш мумкин. Масалан, $\arcsin x$ ни бир қийматли қилиш учун унинг $-\frac{\pi}{2}$ ва $+\frac{\pi}{2}$ орасидаги қийматлари билан чегаралanса кифоя:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant + \frac{\pi}{2}.$$

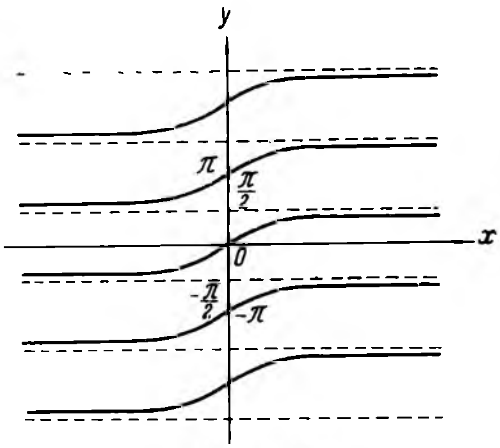
Энди $\arccos x$ ни оламиз. Бунинг ҳам графиги, юқорида кўрсатилган $\arcsin x$ нинг графиги каби, $\cos x$ нинг графигидан ҳосил бўлади (шакл 14). Бунда ҳам, x нинг фақат $(-1, +1)$ ёпиқ интервалдаги қийматларига $\arccos x$ нинг ҳақиқий қийматлари тўғри келади:

$$-1 \leqslant x \leqslant +1.$$

Иккинчи томондан, бу чегараларнинг ичида: x нинг ҳар бир қийматига функциянинг чексиз кўп қийматлари тўғри келади, яъни $\arccos x$ кўп қийматли функция бўлади. Бу функцияни бир қийматли қилиш учун одатда $\arccos x$ нинг 0 билан π орасидаги қийматлари эътиборга олинади:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

$\operatorname{arctg} x$ ва $\operatorname{arcctg} x$ нинг графиклари ҳам, $\arcsin x$ ва $\arccos x$ графиклари каби, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ нинг графикларидан ҳосил бўлади (шакл 15—16).



Шакил 15.

$\operatorname{arctg} x$ ва $\operatorname{arcctg} x$ функциялардан ҳар бирининг графиги чексиз кўп тармоқли эгри чизиқдан иборатдир. x нинг ҳар бир қиймати учун y мавжуд бўлиб, унинг қийматлари чексиз кўпдир. Лекин $\operatorname{arctg} x$ $-\frac{\pi}{2}$ билан $+\frac{\pi}{2}$ орасида, $\operatorname{arcctg} x$ эса 0 билан π орасида бир қийматли бўлади:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2},$$

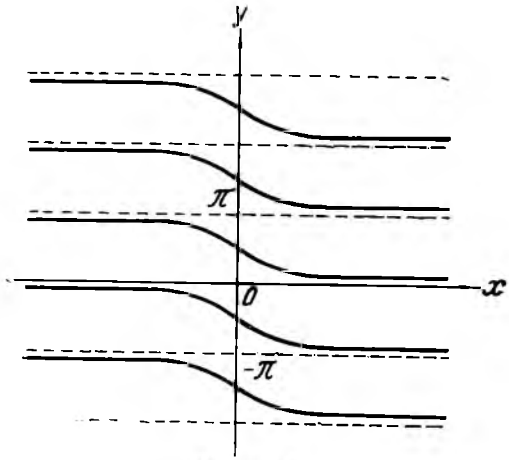
$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi;$$

x нинг ўзи эса $(-\infty, +\infty)$ да ўзгариши мумкин.

Энди, тескари тригонометрик функциялар орасидаги баъзи муносабатларни чиқарамиз. Бизга маълумки,

$$\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x,$$

бундан:



Шакл 16.

$$y = \arcsin x \text{ ва } \frac{\pi}{2} - y = \arccos x.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиш натижасида қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

3—177

8. Ошкор ва ошкормас функциялар

Агарда функциянинг қийматини ҳисоблаш учун аргумент устида қандай амаллар бажарилиши бевосита маълум бўлса, яъни агарда y, x га нисбатан

$$y = f(x) \tag{1}$$

кўринишдаги тенглик билан ифода қилинган бўлса, бу ҳолда y ни x нинг ошкор функцияси дейилади. Масалан, ушбу

$$y = ax^3,\ y = 3x^2 - 5,\ y = \log_a x,\ y = \cos x$$

функциялардан ҳар бири — ошкор функциядан иборат.

Агарда y билан x нинг орасидаги муносабат (1) кўринишда берилмаган бўлса, у ҳолда уни шу формага олиб келиш учун бирмунча амалларни бажаришга тўғри келади ёки ҳатто кўп вақт (1) кўринишга олиб келиб бўлмайди. Бундай функцияларни ошкормас дейилади ва уларни умуман

$$\varphi(x, y) = 0$$

кўринишда ёзилади. Масалан,

$$3y^2 + 5xy + 7 = 0,$$

$$e^{x+y} + \sin y = 0$$

функциялар — ошкормасдир.

Агарда булардан биринчисини y га нисбатан ечилса,

$$y = \frac{-5x \pm \sqrt{25x^2 - 84}}{6}$$

бўлиб, ошкор функцияга айланади.

9. Алгебраик ва транцендент функциялар

x нинг алгебраик функцияси деб қуйидаги тенгламани қаноатлантирадиган y ни айтилади:

$$P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \cdots + P_n = 0, \tag{1}$$

бунда $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ коэффициентлар x нинг бутун функциялари, n эса бутун мусбат сондан иборат. Функцияни аниқлаган (1) тенгламанинг ўзини алгебраик тенглама дейилади. Масалан, ушбу

$$(x+1)y^2+5y-x=0,$$
$$x^3+y^3-3axy=0,$$

тенгламалардан ҳар бирида y x нинг алгебраик функцияси бўлади.

Агарда P_0 нолга тенг бўлмаса ва $n=1$ бўлса, бу ҳолда (1) нинг кўриниши

$$P_0 y+P_1=0,$$

бундан

$$y=-\frac{P_1}{P_0}$$

бўлади, яъни бу ҳолда алгебраик функция рационал функцияга айланади. Агарда бунинг устига P_0 ўзгармас бўлса, бу ҳолда у бутун функцияга айланади. Демак, бутун ва рационал функция алгебраик функциянинг хусусий ҳолларидан иборатдир.

Рационал бўлмаган алгебраик функциялар иррационал функциялар синфини ташкил этади. Умуман, (1) да $x \geqslant 2$ бўлган ҳолда, алгебраик функция иррационал бўлиб, хусусий ҳоллардагина рационал бўлиши мумкин. Масалан, $n=2$ бўлганда

$$P_0y^2+P_1y+P_2=0$$

ва буни y га нисбатан ечганда

$$y=\frac{-P_1\pm\sqrt{P_1^2-4P_0P_2}}{2P_0}$$

бўлади. Демак, фақат

$$P_1^2=4P_0P_2$$

бўлган ҳолдагина, функция

$$y=-\frac{P_1}{2P_0}$$

бўлиб, рационал ҳолга келади.

Алгебраик бўлмаган функцияни трансцендент функция дейилади. Масалан, ушбу

$$y=\sin x,\quad y=\operatorname{tg}x,\quad y=a^x$$

функциялардан ҳар бири трансцендент функциядан иборат.

Иккинчи боб

ЛИМИТ (ЧЕК) НАЗАРИЯСИ

§ 9. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ

Математик анализнинг турли масалаларида чексиз кўп сонларнинг тўплами билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, натурал сонларнинг тўплами:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \ldots \tag{1}$$

ёки ҳамма мусбат тоқ сонларнинг тўплами:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13, \ldots \tag{2}$$

Сонлар тўпламининг муҳимларидан бири чексиз кетма-кетлик бўлиб, уни бундай таъриф қилиш мумкин:

Сонларнинг чексиз кетма-кетлиги деб шундай

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4\,,\ \ldots\ x_n\,,\ \ldots \tag{3}$$

сонлар тўплами айтиладики, агарда n нинг ҳар бир мусбат қийматига биргина аниқ x_n қиймат мос келса.

Масалан, натурал сонларнинг квадратлари ушбу чексиз кетма-кетликни ташкил этади:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49\ \ldots$$

Бу кетма-кетликнинг умумий ифодаси

$$x_n = n^2 \tag{5}$$

бўлади, чунки бунда $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ фараз қилинса, (4) кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Шунга ўхшаш ушбу

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \ldots \tag{6}$$

сонлар кетма-кетлигининг умумий ифодаси

$$x_n = \frac{2n-1}{2n} \tag{7}$$

бўлади, чунки бунда $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ фараз қилинса, (6) кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Бизда ишлатиладиган сонлар кетма-кетликлари ҳамма вақт чексиз бўлгани учун сўзни қисқа қилиб, уларни „сонлар кетма-кетлиги“ номи билан юритамиз. Шу билан бирга, „x_n кетма-кетлиги“ деб айтиш ўрнига “ўзгарувчи x_n“ айтиш мумкин. Ҳақиқатда, x_n нинг қиймати n га берилган $1, 2, 3, \ldots$ қийматларга қараб $x_1, x_2, x_3, \ldots$ бўлади. Яъни x_n нинг ўзи n нинг функциясидан иборат.

Бироқ бу функцияларнинг аргументлари юқорида зикр қилингани каби ҳамма вақт $1, 2, 3, \ldots$ қийматларга эга бўлиши шарт эмас. Булардан бошқа $0, -1, -2, -3, \ldots$, қийматларга ёки ҳамма мусбат ва манфий бутун қийматларга ҳам эга бўлиши мумкин. Лекин x_{-n} бўлган ҳолда, $x'_n = x_{-n}$ фараз қилинса,

$$x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \ldots$$

қийматларга

$$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$$

мос келади. Шунинг учун x_n да n ни бутун ва мусбат фараз қилиш мумкин.

§ 10. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИНИНГ ЛИМИТИ

Энди сонлар кетма-кетлигининг лимити деган муҳим тушунчани таъриф қиламиз. Фараз қилайлик.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

бирор сонлар кетма-кетлиги бўлсин.

1. Агарда исталганча кичик бўлган мусбат ε сон берилганда, шундай N сонни топиш мумкин бўлсаки, $n > N$ бўлганда

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{8}$$

бўлса ва бу тенгсизлик кейинча ҳам ўз кучини сақлаб борса, бу ҳолда a ни x_n нинг лимити дейилади.

Кейинги тенгсизликни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ёки

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Ўзгарувчи x_n соннинг лимити a бўлишини ифода қилиш учун одатда

$$\lim x_n = a$$

ёзадилар, Бундаги „lim" латинча „limes" ёки французча „limite" сўзининг қисқартмасидир. Лимит сўзи тақрибан бизнинг „чек" сўзига тўғри келади.

Мисол учун умумий ифодаси

$$x_n = \frac{2n+1}{3n}$$

бўлган сонлар кетма-кетлигини оламиз. Бунда $n = 1, 2, 3, 4, \ldots 100$ бўлганда кетма-кет

$$1, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{9}{12}, \ldots, \frac{201}{300}, \ldots$$

сонлар ҳосил бўлади. Бунга қараганда n ўсиб борган сари x_n нинг ўзи $\frac{2}{3}$ га интилиб бормоқда. Ҳақиқатда

$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3n};$$

$\frac{1}{3n} < \varepsilon$ бўлиши учун $n > \frac{1}{3\varepsilon}$ бўлиши керак.

Демак, бу ҳолда

$$N = \frac{1}{3\varepsilon}.$$

Масалан, агарда

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{1000}$$

бўлишини, яъни

$$\varepsilon = \frac{1}{1000}$$

бўлишини талаб қилсак, бу ҳолда

$$n > \frac{1000}{3} \text{ ёки } n > 333\frac{1}{3}$$

бўлиши керак. Демак, $n = 334$ дан бошлаб, бизнинг талаб таъмин этилади, яъни

$$x_n - \frac{2}{3}$$

нинг абсолют қиймати биз истаган 0,001 дан кичик бўлиб қолади.

2. Умуман ўзгарувчи x соннинг лимитини яна бундай таъриф қилиш мумкин:

Агарда ўзгарувчи x соннинг ўзгариб боришида унинг кетма-кет қийматлари бирор ўзгармас a сонга шундай интилиб борсаки, унинг, яъни x нинг бирор қийматидан бошлаб, $x - a$ айирманинг абсолют қиймати исталганча кичик бўлган ε мусбат сондан кичик бўлиб, сўнгра x нинг кейинги ўзгаришларида ҳамма вақт шу кичиклигини сақлаб борса, у ҳолда a ни x нинг лимити дейилади.

Мисол учун бундай ўзгарувчи сонни олайлик:

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \tag{9}$$

Ажабо, x нинг қийматлари шу қоида билан ўзгариб бораверса, уларнинг йиғиндиси бирор аниқ сонга интилиб борарми экан?

Энг аввал бу ерда шуни эслатиб ўтиш керакки, берилган x нинг кетма-кет қиймати алгебрадан маълум бўлган чексиз камаючи геометрик прогрессия ташкил этади. Бу прогрессиянинг биринчи ҳади $a = 1$ ва махражи $q = \frac{1}{2}$. Шунинг учун ҳадларининг йиғиндиси

$$S = \frac{a}{1-q} = 1 : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

Ҳақиқатда ҳам 2 билан x нинг кетма-кет қийматлари орасидаги айирма:

$$2 - 1 = 0$$

$$2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) = \frac{1}{8}$$

. . . .

доимо камайиб боради, демак, бу ҳолда у исталганча берилган кичик мусбат ε сондан кичик бўлиб, кейинча ҳам шу кичиклигини сақлаб боради. Шундай қилиб:

$$\lim x = 2.$$

Лекин бу ўринда шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, чексиз кўп қийматларга эга бўла оладиган ҳар қандай ўзгарувчи сон лимитга эга бўлавермайди. Масалан,

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2},$$

$n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ бўлганда: $0, 1, 0, 1, \ldots$ бўлиб, ҳеч қандай лимитга интилмайди. Демак, бу ҳолда x_n нинг лимити йўқдир.

§ 11. ЧЕКСИЗ КИЧИК СОН

1. Математик анализнинг энг муҳим ва асосий тушунчаси чексиз кичик сон саналади ва у қуйидагича таъриф қилинади:

Лимити ноль бўлган ўзгарувчи сонни чексиз кичик сон дейилади.

Демак, ўзгарувчи x ни чексиз кичик сон фараз қилинса, у ҳолда

$$\lim x = 0.$$

Юқоридаги таърифга мувофиқ **бирор соннинг чексиз кичик бўлиши учун: 1) ўзгарувчи бўлиши керак ва 2) лимити ноль бўлиши керак, ё бошқача қилиб айтганда: нолга интилиб бориши керак.** Шунинг учун ҳар қандай кичкина сонни чексиз кичик сон деб бўлмайди.

Лимитнинг таърифини эътиборга олганда, чексиз кичик сонни яна қуйидагича таъриф қилиш мумкин:

Агарда ўзгарувчи x соннинг ўзгариши шундай бўлсаки, унинг абсолют қиймати x нинг бирор қийматидан бошлаб исталган кичкина мусбат ε сондан кичикланиб, сўнгра x нинг кейинги ўзгаришларида ҳам ε дан кичиклигича қолса, яъни x нинг бирор қийматидан бошлаб,

$$|x| < \varepsilon$$

тенгсизлиги ўз кучини сақлаб борса, у ҳолда ўзгарувчи x ни чексиз кичик сон дейилади.

2. Чексиз кичик соннинг таърифига асосан, ўзгарувчи соннинг лимитини яна қуйидагича таъриф қилиш мумкин:

Агарда ўзгарувчи x ва ўзгармас A сонлари орасидаги айирмаси чексиз кичик сон α бўлса, у ҳолда ўзгармас сон ўзгарувчи соннинг лимити бўлади. Демак,

$$x - A = \alpha$$

ёки

$$x = A + \alpha \tag{1}$$

бўлса, бу ҳолда

$$\lim x = A. \tag{2}$$

Аксинча, (2) дан (1) келиб чиқади, яъни лимитга эга бўлган ҳар бир ўзгарувчи сон ўз лимити билан чексиз кичик соннинг йиғиндисига тенгдир.

§ 12. ЧЕКСИЗ КАТТА СОН

1. Чексиз катта сон тушунчаси алгебрадан маълум бўлса-да, бироқ бу тўғрида англашилмовчилик бўлмасин учун яна бир марта бу тушунчани эслатиб, таъкидлаб ўтишни

лозим топамиз. Одатда чексиз катта сон деб қуйидаги хоссага эга бўлган ўзгарувчи сонни айтилади:

Агарда ўзгарувчи сон, ўзгариб, абсолют қиймати ҳар қандай мусбат сондан катта бўлиб кетса ва сонниng кейинги ўзгаришларида ҳам шу хусусияти сақланиб борса, у ҳолда бундай ўзгарувчи сонни чексиз катта сон ё қисқача „чексизлик“ дейилади.

Агарда чексиз катта сон ўзининг ўзгаришида маълум вақтдан бошлаб доимо мусбатлигича қолса, у ҳолда бундай ўзгарувчини плюс чексизликка интилади дейилади ва манфийлигича қолган ҳолда — минус чексизликка интилади дейилади.

Таъриф қилинган ҳолларда, ўзгарувчи x нинг ўзгаришини қуйидагича ифода қилинади:

$$\lim x = \infty \quad \text{ёки} \quad x \to \infty$$

$$\lim x = +\infty \quad „ \quad x \to +\infty$$

$$\lim x = -\infty \quad „ \quad x \to -\infty.$$

Чексиз катта сонниng таърифига қараганда, у одатдаги тушунчадаги „катта сон“ эмас, чунки сон ҳар қанча катта бўлса-да, унинг чегараси бўлади.

Таърифдаги хоссага эга бўлган ўзгарувчи сонни „чексиз катта сон“ деб айтишдан мақсад: ўзгарувчининг қандай ўзгаришини қисқа сўз билан ифода қилишдир. Мисол учун, $\operatorname{tg} x$ ни оламиз. Агарда x биринчи квадрантда қолиб, $\frac{\pi}{2}$ га интилиб борса, $\lim \operatorname{tg} x = \infty$, агарда x иккинчи квадрантда қолиб, $\frac{\pi}{2}$ га интилиб борса $\operatorname{tg} x = -\infty$.

2. Агарда x ни чексиз катта сон фараз қилинса, у ҳолда

$$\alpha = \frac{1}{x}$$

чексиз кичик сон бўлади. Ҳақиқатда, тенгликнинг ўнг томонидаги касрнинг сурати ўзгармас бўлгани учун, унинг махражи x чегарасиз ўсган сари касрнинг ўзи, демак α чегарасиз камаяди. Демак, α чексиз кичик сон бўлади. Масалан, агарда

$$x = 10;\ 100;\ 1000;\ 10000;\ \dots \text{ бўлса}$$

$$\alpha = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \dots \text{ бўлади.}$$

Аксинча, агарда α нолга айланмайдиган чексиз кичик сон бўлса

$$x = \frac{1}{\alpha}$$

чексиз катта сон бўлади. Ҳақиқатда, касрнинг сурати ўзгармас бўлгани учун унинг махражи α чегарасиз камайган сари, касрнинг ўзи, демак x чегарасиз усиб боради.

§ 13. ЧЕКСИЗ КИЧИК СОНЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Математик анализнинг кўпгина масалаларида чексиз сонларга ва уларнинг турли хоссаларига суянишга тўғри келади. Шунинг учун бу параграфда чексиз кичик сонларнинг бир неча асосий хоссалари билан таништириб ўтишга тўғри келади. Чексиз кичик сонларнинг асосий хоссалари қуйидагилардан иборат:

Теорема 1. *Сонлари чегараланган бир неча чексиз кичик сонларнинг алгебраик йиғиндиси чексиз кичик сон бўлади.*

Буни исбот қилиш учун чексиз кичик сонларнинг сонини n ва ўзларини

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$$

фараз қиламиз. Агарда ε ни истаганча кичик бўлган мусбат сон фараз қилинса, у ҳолда маълум вақтдан бошлаб, қуйидаги тенгсизликлар мавжуд бўлади:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\gamma| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$|\lambda| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Бу тенгсизликларни ҳадлаб қўшиш натижасида ушбу тенгсизлик чиқади:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \cdots + |\lambda| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon.$$

Абсолют сонларнинг хоссасига мувофиқ;

$$|\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda| \leqslant |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \cdots + |\lambda|.$$

Шунинг учун:

$$|\alpha + \beta - \gamma + \cdots + \lambda| < \varepsilon,$$

бу эса, йиғиндининг чексиз кичиклигини, яъни теореманинг исбот бўлганини кўрсатади. Қўшилувчилардан баъзи бирларининг ишоралари –(минус) бўлган ҳолда, масалан,

$$\alpha + \beta + \gamma - \cdots + \lambda$$

каби бўлган ҳолда, уни

$$\alpha + \beta + (-\gamma) + \cdots + \lambda$$

равишда ёзиб, ҳамон аввалги натижага келиш мумкин.

Мисол учун, қуйидаги чексиз кичик сонларни оламиз:

$$\alpha = 3;\ 0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003, \ldots$$

$$\beta = 2;\ 0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002, \ldots$$

Буларни қўшганда ёки биридан иккинчисини айириб олганда кўрамизки, уларнинг йиғиндиси ва айирмаси яна чексиз кичик сон бўлади:

$$\alpha + \beta = 5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005; \ldots$$

$$\alpha - \beta = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001; \ldots$$

Теореманинг шартига қараганда, чексиз кичик сонларнинг сони ҳар қанча бўлсада, лекин у чегараланган бўлиши керак. Бунинг лозимлигини кўрсатиш учун n ни бутун мусбат сон фараз қилиб, ушбу тенгликларни тузамиз:

$$S_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$S_2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}:$$

n чексиз ўсганда, бу тенгликларнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи чексиз кичик бўлади. Лекин, иккинчи томондан, ҳар бир тенгликда, қўшилувчиларнинг сонини n фараз қилганда

$$S_1 = 1,\ S_2 = \frac{1}{n},\quad S_3 = \sqrt{n}$$

бўлиб, n чексизликка интилганда S_1 бирга, S_2 нолга ва S_3 чексизликка интилади.

Теорема 2. *Чексиз кичик сон билан чегараланган ўзгарувчи соннинг кўпайтмаси яна чексиз кичик сон бўлади.*

Буни исбот қилиш учун чексиз кичик сонни α ва чегараланган ўзгарувчи сонни x фараз қиламиз. x чегараланган бўлгани учун шундай ўзгармас мусбат сон, масалан A мавжуддирки, x нинг абсолют қиймати ундан кичикланади, яъни

$$|x| < A.$$

Агарда ε ни истаганча кичик бўлган мусбат сон фараз қилинса, у ҳолда α нинг бирор қийматидан бошлаб ушбу тенгсизлик мавжуд бўлади:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Кейинги тенгсизликларни бир-бирига кўпайтириш натижасида ушбу тенгсизлик келиб чиқади:

$$|\alpha|\cdot|x| < \frac{\varepsilon}{A}\cdot A = \varepsilon.$$

Иккинчи томондан,

$$|\alpha|\cdot|x| = |\alpha x|$$

бўлгани учун

$$|\alpha x| < \varepsilon.$$

Исбот қилинган бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

Натижа 1. **Икки (ёки бир неча) чексиз кичик сонларнинг бир-бирига кўпайтмаси яна чексиз кичик сон бўлади.**

Ҳақиқатда, ҳар қандай чексиз кичик сон чегараланган бўлади. Буни ва 1-теоремани эътиборга олинса, теоремадан ҳалиги натижа келиб чиқади.

Натижа 2. **Ўзгармас соннинг чексиз кичик сонга кўпайтмаси яна чексиз кичик сон бўлади.**

Ҳақиқатда ҳар қандай ўзгармас сон чегараланган бўлади. Буни эътиборга олинса, теоремадан ҳалиги натижа келиб чиқади.

Теорема 3. *Чексиз кичик соннинг нолга айланмайдиган ўзгарувчи сонга нисбати яна чексиз кичик сон бўлади.*

Буни исбот қилиш учун α ни чексиз кичик сон ва x ни қўйилган шартга мувофиқ бўлган ўзгарувчи сон фараз қиламиз. Бу ҳолда шундай A мусбат сон мавжуд бўладики, у сон x нинг абсолют қийматидан кичик бўлади,

$$|x| > A$$

ёки бундан

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{A},$$

яъни $\frac{1}{x}$ ҳам чегараланган бўлади. Шартга мувофиқ α чексиз кичик бўлгани учун

$$|\alpha| < A\varepsilon,$$

бунда ε ҳар қандай кичик мусбат сон. Кейинги икки тенгсизликларни бир-бирига кўпайтирилса

$$\left|\frac{1}{x}\right| \cdot |\alpha| < \varepsilon$$

ёки бундан

$$\left|\frac{\alpha}{x}\right| < \varepsilon.$$

§ 14. ЎЗГАРУВЧИ СОНЛАРНИНГ ЛИМИТЛАРИ ТЎҒРИСИДА АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАР

Ҳар бири лимитга эга бўлган бир неча ўзгарувчи сонларнинг лимитини излашда қуйидаги асосий теоремалар қўлланади:

Теорема 1. *Сонлари чегараланган бир неча ўзгарувчи сонларнинг алгебраик йиғиндиси лимити у сонлар лимитларининг алгебраик йиғиндисига тенгдир.*

Ўзгарувчи сонларни x, y, z, ... t фараз қилинса, теореманинг математик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\lim(x + y - z + \cdots + t) = \lim x + \lim y - \lim z + \cdots + \lim t.$$

Буни исбот қилиш учун x нинг лимитини A, y нинг лимитини B, z нинг лимитини $C, \dots, t$ нинг лимитини P фараз қиламиз. Лимитнинг таърифига мувофиқ

$$x = A + \alpha$$

$$y = B + \beta$$

$$z = C + \gamma$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$t = P + \lambda.$$

Бу тенгликлардаги α, β, $\gamma, \dots, \lambda$ ларнинг ҳар бири чексиз кичик сон фараз қилинади. Бу тенгликларнинг алгебраик йиғиндисини оламиз:

$$x + y - z + \cdots + t = (A + B - C + \cdots P) +$$

$$+ (\alpha + \beta - \gamma + \cdots + \lambda).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки қавсдан биринчиси ўзгармас бўлган ҳолда иккинчиси $(\alpha + \beta - \gamma + \cdots + \lambda)$ чексиз кичик сон бўлади, чунки у чексиз кичик сонларнинг алгебраик йиғиндисидан иборатдир. Шунинг учун

$$\lim (x + y - z + \cdots + t) = A + B - C + \cdots + P$$

ёки

$$\lim (x + y - z + \cdots + t) = \lim x + \lim y -$$

$$- \lim z + \cdots + \lim t,$$

чунки ўзгармас A, B, $C, \dots P$ лар қавс ичидаги ўзгарувчиларнинг лимитлари эди.

Теорема 2. *Сонлари чегараланган ўзгарувчи сонлар кўпайтмасининг лимити у сонлар лимитларининг кўпайтмасига тенгдир.*

Ўзгарувчи сонларни x, y, $z, \dots, t$ фараз қилинса, теореманинг математик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\lim (xyz \dots t) = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \dots \lim t.$$

Энг аввал бу теоремани икки ўзгарувчи учун, масалан, x ва y учун исбот қиламиз. Агарда x нинг лимити A, y нинг лимити B, α ва β ни чексиз кичик сон фараз қилинса

$$x = A + \alpha$$

$$y = B + \beta.$$

Бу тенгликларни бир-бирига кўпайтирилса

$$xy = AB + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавснинг ичидаги қўшилувчиларнинг ҳар бири чексиз кичик сон бўлади, чунки A ўзгармас ва β чексиз кичик учун $A\beta$ чексиз кичик бўлади; шунга ўхшаш $B\alpha$ ҳам чексиз кичик бўлади; α ва β чексиз кичик бўлгани учун $\alpha\beta$ ҳам чексиз кичик бўлади. Демак, қавснинг ичида учта чексиз кичик сонларнинг йиғиндиси туради. Шунинг учун бу йиғиндининг ўзи чексиз кичик бўлади. Демак,

$$\lim (xy) = AB$$

ёки

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y,$$

чунки ўзгармас A ва B, x ва y нинг лимитлари бўлади. Энди, ўзгарувчи сонларнинг сони ҳар қанча бўлгани ҳолда ҳам теоремани исбот қилиш мумкин. Масалан, уларнинг сони учта бўлсин: x, y ва z. Исбот қилинган теоремага асосан

$$\lim (xyz) = \lim \left[(xy)\cdot z\right] = \lim (xy)\cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z.$$

Ўзгарувчи сонларнинг сони 4, 5, 6, ... бўлган ҳолда ҳам шундай қилиб исбот қилиш мумкин. Демак, ўзгарувчиларнинг сони ҳар қанча бўлса-да (чегараланган бўлиш шарти билан), теорема ўз кучини сақлайди.

Натижа. **Ўзгарувчи соннинг бутун мусбат даражасининг лимити ўзгарувчи лимитининг даражасига тенгдир.**

Ҳақиқатда исбот қилинган теоремага мувофиқ

$$\lim (y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \dots y_n) = \lim y_1 \,.\, \lim y_2 \cdot \lim y_3 \dots \lim y_n .$$

Агарда

$$y_1 = y_2 = y_3 = \dots y_n = y$$

фараз қилинса, бу ҳолда:

$$\lim (y^n) = (\lim y)^n .$$

Теорема 3. *Бўлувчининг лимити ноль бўлмаган ҳолда, икки ўзгарувчи сон нисбатининг лимити уларнинг лимитлари нисбатига тенгдир.*

Ўзгарувчи сонларни x ва y фараз қилинса, теореманинг математик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim x}{\lim y},\quad \lim y\neq 0.$$

Бу теоремани исбот қилиш учун: x нинг лимитини A, y нинг лимитини B, α ва β ни чексиз кичик сон фараз қиламиз. Шунинг учун

$$x=A+\alpha$$

$$y=B+\beta.$$

Агарда биринчи тенгликни иккинчисига ҳадлаб бўлиб, сўнгра чиққан тенгликнинг иккала томонидан $\frac{A}{B}$ дан айириб олинса, қуйидаги тенглик чиқади:

$$\frac{x}{y}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги айириш амали ижро қилинса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{x}{y}-\frac{A}{B}=\frac{AB+B\alpha-AB-A\beta}{B(B+\beta)}$$

$$\frac{x}{y}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B^2+B\beta},$$

Энди сўнгги тенгликнинг ўнг томонидаги касрни текширамиз. Бу касрнинг сурати чексиз кичик бўлади, чунки $B\alpha$ ва $A\beta$ нинг ҳар бири чексиз кичик; шунга ўхшаш унинг махражидаги $B\beta$ ҳам чексиз кичик бўлади; B^2 бўлса ўзгармас сон. Демак, бу каср чексиз кичик соннинг ўзгармас сонга нисбати бўлгани учун унинг ўзи чексиз кичик сон бўлади. Шунинг учун лимит таърифига мувофиқ

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{A}{B}$$

ёки

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim x}{\lim y};\ (\lim y\neq 0)$$

Теорема 4. *Ўзгарувчи соннинг **n**-даражали илдизининг лимити у ўзгарувчи сон лимитининг **n**-даражали илдизига тенгдир.*

Агарда

$$z = \sqrt[n]{y}$$

ва z нинг лимити мавжуд фараз қилинса (n нинг бутун ва мусбат бўлган ҳоли билан чегараланиб), у ҳолда

$$z^n = y\ .$$

Иккинчи теореманинг натижасига мувофиқ

$$(\lim z)^n = \lim y$$

ва бундан: $\lim z = \sqrt[n]{\lim y}$ ёки $\lim \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\lim y}$.

Хулоса тариқасида бу параграфни қуйидаги теореманинг исботи билан тамомлаймиз:

Теорема 5. *Ўзгарувчи сон лимитга эга бўлгани ҳолда унинг лимити биргина бўлади.*

Ҳақиқатда, агарда ўзгарувчи x ни икки лимитга, масалан A ва B лимитларга эга фараз қилинса, у ҳолда лимит таърифига мувофиқ

$$x = A + \alpha$$

$$x = B + \beta,$$

буларда α ва β — чексиз кичик сонлар.

Бу тенгликлардан қуйидаги тенглик чиқади:

$$A + \alpha = B + \beta$$

ёки

$$A - B = \beta - \alpha,$$

бу эса бизни мужмал, мантиқсиз натижага олиб келди. Ҳақиқатда $A - B$ ўзгармас сон бўлган ҳолда $\beta - \alpha$ бўлса чексиз кичик сондан иборатдир, яъни ўзгармас сон чексиз кичик сонга тенг бўлмоқда: бу мумкин эмас. Шунинг учун $A = B$ бўлиши керак.

§ 15. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

1. Функциянинг аргументи бирор сонга интилиб борган ҳолда функциянинг ўзи бирор сонга интилиб бориши (ё интилмаслиги) мумкин.

Агарда $f(x)$ функциясининг аргументи бирор а сонга, қайси қонун билан бўлмасин, интилиб борган ҳолда $f(x)$ функциянинг ўзи бирор ўзгармас A сонга интилиб борса, у ҳолда A ни $f(x)$ функциянинг лимити дейилади ва буни

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

равишда ёзилади.

Бироқ функция лимитининг бундан кўра тўлароқ таърифи қуйидаги бўлади:

Агарда $f(x)$ функциянинг аргументи x қандай қонун билан бўлса-да, бирор a сонга интилиб борганда $f(x)$ функциянинг ўзи бирор ўзгармас A сонга интилиб борса ва ε ҳар қандай мусбат сон бўлса-да шундай η сонни топиш мумкин бўлсаки

$$|x - a| < \eta \qquad \textbf{бўлганда}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \textbf{бўлса,}$$

бу ҳолда A ни $f(x)$ функциянинг лимити дейилади.

Бу таърифни ва унда иштирок этган сонларнинг ролларини тасвир қилиш учун ушбу

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{A}$$

функцияни олиб, унинг аргументи x нолга интилганда, функциянинг лимити қандай бўлишини топамиз.

Бироқ x нинг ўрнига тўғридан-тўғри 0 ни қўйиб бўлмайди, чунки бу ҳолда

$$f(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

бўлиб, функция ўз маъносини йўқотади; $\frac{0}{0}$ ҳеч қандай маънога эга бўлмагани учун умуман бундай ифодани **аниқмас** ифода дейилади. Аргументнинг $x = 0$ қийматидан бошқа унинг ҳар бир қиймати учун функция аниқ қийматга эга бўлади. Лекин x нолга интилиб борган ҳолда $f(x)$ аниқ лимитга интилади.

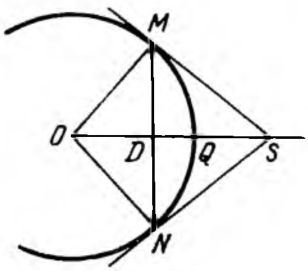
Буни исбот қилиш учун энг аввал радиуси бирор узунлик бирлигига тенг бўлган айлана чизамиз (шакл 17).

Айлананинг биринчи чорагида бирор M нуқтасидан унинг диаметрига тик чизиқ тушириб, айлананинг иккинчи N нуқтасига учрашгунча уни давом эттирамиз. Айланадаги M ва N нуқталар орасидаги MQN ёйни $2x$ фараз қиламиз. Демак,

$$\smile MQN = 2x; \quad \smile MQ = x.$$

Энди айлананинг M ва N нуқталарига уринма ўтказамиз, уларнинг бир-бирига учрашган нуқтаси S бўлсин. Шаклга мувофиқ

$$MDN < MQN < MSN$$



Шакл 17.

ёки

$$2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x,$$

ёки

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

ёки

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

ёки

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Агарда бу тенгсизликнинг ҳадлари тескари қилинса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (B)$$

x нолга интилганда

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

(B) га қараганда $\frac{\sin x}{x}$ нинг чегараларидан бири 1 эди кейинги натижага қараганда, унинг иккинчи чегараси ҳам 1 га интилиб боради. Шунинг учун:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Биз юқорида ёйни биринчи квадрантда, яъни $0 < x < \frac{\pi}{2}$ фараз қилган эдик. Бироқ $x < 0$ бўлган чоқда ҳам чиқарилган тенглик ўз кучини сақлайди, чунки $\sin(-x) = -\sin x$.

Энди, η нинг ролини кўрсатамиз. Бунинг учун (A) дан (B) тенгсизлигининг ҳар бир ҳадини айириб оламиз.

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x;$$

Иккинчи томондан, тригонометриядан маълумки,

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\ ;\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{4}.$$

Шунинг учун:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{2} < \frac{x^2}{2},$$

бунга қараганда,

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon \qquad (C)$$

бўлиши учун

$$\frac{x^2}{2} < \varepsilon \quad \text{ёки} \quad |x| < \sqrt{2\varepsilon}$$

бўлиши керак. Демак, бу ҳолда

$$\eta = \sqrt{2\varepsilon},$$

чунки исталган мусбат ε сонга, шундай $\eta = \sqrt{2\varepsilon}$ тўғри келадики, $|x| < \eta$ бўлганда (C) тенгсизлиги қаноатлантирилади.

2. Юқорида қилинган таърифга мувофиқ x бирор a қийматга интилганда $f(x)$ функциянинг лимити A бўлсин учун $f(x)$ нинг лимити x нинг a га интилиш қонунига боғлиқ бўлмаслиги керак, яъни x қандай қонун бўйича a га интилганда $f(x)$ нинг лимити ҳамма вақт A бўлиши керак. Мисол учун ушбу

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$$

функцияни олиб, x нинг 1 га интилганда лимитининг қандай бўлишини текширамиз. Биз бу ерда икки ҳолни текширамиз: 1) x ҳамма вақт 1 дан катта бўлиб, 1 га интилган ҳолини ва 2) у ҳамма вақт 1 дан кичик бўлиб, 1 га интилган ҳолини.

Биринчи ҳолда

$$x = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

фараз қилиб,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(1 + \varepsilon)$$

ёзиш мумкин. Бу ҳолда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{1 + 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} = 0,$$

чунки

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty.$$

Агарда, x ҳамма вақт 1 дан кичик бўлиб, 1 га интилса у ҳолда

$$x = 1 - \varepsilon, \ \varepsilon > 0$$

фараз қилиб

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(1 - \varepsilon)$$

ёзиш мумкин. Бу ҳолда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{1 + 2^{-\frac{1}{\varepsilon}}} = 3,$$

чунки

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2^{\frac{1}{\varepsilon}}} = 0.$$

Шунинг билан, натижада,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 + \varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \to 0} f(1 - \varepsilon).$$

Умуман, $x > 0$ бўлиб, a га интилганда $f(x)$нинг лимитини

$$f(a + 0)$$

равишда ва $x < a$ бўлиб, a га интилганда

$$f(a-0)$$

равишда ёзилади ва

$$f(a+0) = f(a-0)$$

бўлган ҳолдагина $f(x)$ функция x нинг a қийматида лимитга эга бўлади.

§ 16. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИНИ ҲИСОБЛАШ МИСОЛЛАРИ

Функцияларнинг лимитларини излашда умуман ўтган параграфларда исбот қилинган теоремалар қўлланади. Шунинг билан баробар берилган функциянинг тузилишига қараб иш кўришга тўғри келади. Қандай ҳолларда қандай иш кўришни тасвир қилиш учун қуйида бир неча характерли мисолларни ечиб кўрсатамиз:

Мисол 1. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x\to 0} (7x^2 + 2\sin x + 3).$$

Ўзгарувчи сонларнинг лимитлари тўғрисидаги биринчи теоремага мувофиқ:

$$\lim_{x\to 0} (7x^2 + 2\sin x + 3) = \lim_{x\to 0} (7x^2) + \lim_{x\to 0} (2\sin x) + 3 = 3,$$

чунки ўзгармас соннинг лимити яна ўша соннинг ўзи бўлади

Мисол 2. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}.$$

Агарда x нинг ўрнига тўғридан-тўғри 1 қўйилса

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

бўлиб, аниқмас ифода чиқади. Бироқ $x \neq 1$ фараз қилиб берилган касрни $x-1$ га қисқартирилса, у

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$$

бўлади. Шунинг учун:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Мисол. 3. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}.$$

Агарда x нинг ўрнига тўғридан-тўғри 0 қўйилса $\frac{0}{0}$ чиқади, яъни аниқмас ифода чиқади. Шунинг учун $x \neq 1$ фараз қилиб, берилган касрнинг сурат ва махражини

$$1 + \sqrt{1 - x}$$

га кўпайтирилса, уни x га қисқартириш мумкин бўлади. Шунинг учун:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x})(1 + \sqrt{1 - x})}{x (1 + \sqrt{1 - x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + x}{(1 + x\sqrt{1 - x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} = \frac{1}{2}.$$

Мисол 4. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{5x^2 + x + 1}.$$

Агарда x нинг ўрнига тўғридан-тўғри ∞ ни қўйилса $\frac{\infty}{\infty}$ бўлади. Бу ҳам аниқмас ифода саналади, чунки у ҳеч қандай маънога эга эмасдир. Бироқ берилган касрнинг сурат ва махражини x^2 бўлиб, сўнгра лимитга ўтилса, қуйидаги аниқ натижа чиқади:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{5x^2 + x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}.$$

Мисол 5. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x - x^3 + 2x^2 - 4}{x^4 + 2}.$$

Бу ҳам 4-мисолдаги типдан, чунки x чексизликка интилганда ифоданинг сурат ва махражи ҳам чексизликка интилади. Шунинг учун энг аввал касрнинг сурат ва махражини x нинг энг катта даражасига, яъни x^4 га бўлиб, сўнгра лимитга ўтамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x - x^3 + 2x^2 - 4}{x^4 + 3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^4}}{1 + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Мисол 6. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax^2}.$$

Бу лимитни топиш учун кетма-кет қуйидаги амалларни ижро қиламиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{ax^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2a},$$

чунки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

Мисол 7. Қуйидаги лимит топилсин:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}.$$

Берилган лимитни топиш учун

$$x = t^n, \quad a = b^n$$

фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{t - b}{t^n - b^n} = \frac{1}{t^{n-1} + t^{n-2} b + t^{n-3} b^2 + \cdots + b^{n-1}},$$

$x \to a$ ҳолда $t = \sqrt[n]{a}$, $b = \sqrt[n]{a}$. Шунинг учун

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \lim_{t \to \sqrt[n]{a}} \frac{1}{t^{n-1} + t^{n-2} b + t^{n-3} b^2 + \cdots + b^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Масалалар

11. $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2x + 1 \right) =$ Жавоб: 5.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + \frac{x}{3} - 2x + 5 \right) =$ Жавоб: 5.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(15 + \frac{2}{x - 1} \right) =$ Жавоб: 15.

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x + 5}{x} =$ Жавоб: 3.

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^3 - 5x^2 + 1}{2x^3} =$ Жавоб: 3,5.

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 3x^2 - 5}{5x^2} =$ Жавоб: $\frac{3}{5}$.

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 1}{3x^3 + 5} =$ Жавоб: 0.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3}{x+1}=$ Жавоб: ∞.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{x-3}=$ Жавоб: ∞.

20. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=$ Жавоб: $3a^2$.

21. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$ Жавоб: $3x^2$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+x}=$ Жавоб: 2.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=$ Жавоб: $\frac{2}{3}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=$ Жавоб: $-\frac{3}{2}$.

25. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$ Жавоб: nx^{n-1}

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=$ Жавоб: $\frac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}=$ Жавоб: $\frac{1}{5}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=$ Жавоб: $\frac{1}{2}$.

29. $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}=$ Жавоб: $\frac{1}{2\sqrt{t}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}=$ Жавоб: $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}=$ Жавоб: $\frac{1}{2}$.

32. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=$ Жавоб: $\dfrac{3}{4}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=$ Жавоб: -1.

34. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=$ Жавоб: $-\dfrac{1}{3}$.

35. $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$ Жавоб: $-\dfrac{c}{b}$.

36. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a-b)x-ab}=$ Жавоб: $\dfrac{a-b}{a+b}$.

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}=$ Жавоб: 1.

38*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=$ Жавоб: $\dfrac{1}{3}$.

39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{ax+b}=$ Жавоб: $\dfrac{1}{a}$.

40. $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=$ Жавоб: 0.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=$ Жавоб: $\dfrac{b}{a}$.

42. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-ax}=$ Жавоб: $-\sqrt{a}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=$ Жавоб: 5.

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin x}=$ Жавоб: 3.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{ax}=$ Жавоб: $\dfrac{1}{a}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$. Жавоб: $\frac{2}{3}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$ Жавоб: 0.

48. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) =$ Жавоб: $1.1 = 1$.

49. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$ Жавоб: 0.

50. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{7x} =$ Жавоб: $\frac{5}{7}$.

51. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \frac{4\sin(3x-1)}{3x-1}$ Жавоб: 4.

52. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} ax =$ Жавоб: $\frac{1}{a}$.

53. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax + \sin bx}{x}$ Жавоб: $a + b$.

54. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} =$ Жавоб: 1.

55. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} =$ Жавоб: 1.

§ 17*. ЎЗГАРУВЧИ СОННИНГ ЮҚОРИ ВА ҚУЙИ ЧЕГАРАЛАРИ

1. Математик анализнинг муҳим тушунчаларидан бири ўзгарувчи соннинг юқори ва қуйи чегаралари тушунчаси саналади. Шунинг учун бу ўринда шу тушунча билан таништириб ўтишни лозим топамиз.

Ўзгарувчи x соннинг юқори чегараси деб қуйидаги икки хоссага эга бўлган M сонни айтилади:

а) x нинг қийматларидан ҳеч қайси бири M дан катта эмас: $x \leqslant M$;

б) M дан кичик бўлган ҳар бир сон ҳеч бўлмаганда x нинг битта қийматидан кичик бўлади, яъни ε ҳар қандай кичкина мусбат сон бўлса-да, x нинг қийматлари ичида шундайи топиладики, у $M-\varepsilon$ дан катта бўлади.

Агарда ўзгарувчи соннинг қийматларидан бири (ё бир нечаси) унинг юқори чегарасига тенг бўлиб қолса, у ҳолда ўзгарувчи соннинг бундай қиймати унинг энг катта қиймати саналади.

Шунга ўхшаш, ўзгарувчи x соннинг қуйи чегараси деб ушбу икки хоссага эга бўлган m сонни айтилади:

а) x нинг қийматларидан ҳеч қайси бири m дан кичик эмас, $x \geqslant m$;

в) m дан катта бўлган ҳар бир сон ҳеч бўлмаганда x нинг битта қийматидан катта бўлади, яъни ε ҳар қандай кичкина мусбат сон бўлса-да, x нинг қийматлари ичида шундайи топиладики, у $m+\varepsilon$ дан кичик бўлади.

Агарда ўзгарувчи соннинг қийматларидан бири (ё бир нечаси) унинг қуйи чегарасига тенг бўлиб қолса, у ҳолда ўзгарувчи соннинг бундай қиймати унинг энг кичик қиймати дейилади.

2. Берилган таърифларга асосланиб ушбу теоремани исбот қиламиз:

***Теорема** Юқоридан чегараланган ўзгарувчи сон юқори чегарага ва қуйидан чегараланган ўзгарувчи сон қуйи чегарага эга бўлади.*

Бу теореманинг бир қисмини, масалан, 1-қисмини исбот қилиш кифоя қилади, чунки унинг иккала қисми ҳам бир усулда исбот қилинади. Теореманинг биринчи қисмини исбот қилиш учун рационал сонларни қуйидаги усул бўйича икки синфга бўламиз: x қийматларининг ҳеч бўлмаганда биридан катта бўлмаган ҳамма рационал сонларни биринчи синфга ва x нинг ҳар бир қийматидан катта бўлган ҳамма рационал сонларни иккинчи синфга ўтказамиз.

Бу ҳолда иккинчи синфдаги ҳар бир сон биринчи синфдаги ҳар бир сондан катта бўлади. Буни эътиборга олиб, n ни исталганча олинган бирор бутун мусбат сон фараз қиламиз ва nx кўпайтманинг ҳамма қийматларидан бутун қисмларини ажратамиз. Агарда бутун қисмларнинг энг каттасини E фараз қилинса, у ҳолда $E+1$ ҳалиги nx кўпайтманинг ҳамма қийматларидан катта бўлади:

$$E+1 > nx \text{ ёки } \frac{E+1}{n} > x. \qquad (1)$$

Иккинчи томондан, E, nx даги бутун қисмларнинг энг каттаси бўлгани учун у nx қийматларининг ҳеч бўлмаганда биридан катта бўла олмайди:

$$E \leqslant nx \text{ ёки } \frac{E}{n} \leqslant x. \tag{2}$$

(1) ва (2) ни солиштириб қараш натижасида $\frac{E}{n}$ нинг биринчи синфданлиги ва $\frac{E+1}{n}$ нинг иккинчи синфдалиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, уларнинг орасидаги

$$\frac{E+1}{n} - \frac{E}{n} = \frac{1}{n}$$

айирмани, n етарли даражада катта бўлганда, истаганча кичик қилиш мумкин. Демак, ҳамма вақт: бири биринчи синфдан ва иккинчиси — иккинчи синфдан шундай икки рационал сонни топиш мумкинки, уларнинг орасидаги айирма ҳар қандай кичкина мусбат сондан кичик бўлади.

Буни эътиборга олиб, ҳамма рационал сонларни кетма-кет ўсишига қараб, қатор қиламиз; бу ҳолда энг аввал биринчи синф сонлари давом этиб, сўнгра (бирор ердан) иккинчи синф сонлари бошланади ва иккала синф орасида ҳеч қандай чекли оралиқ бўлмайди.

Бу эса иккала синфнинг умумий чегараси бўлган бирор M соннинг борлигини кўрсатади. Мана шу M сон ўзгарувчи x нинг юқори чегараси бўлади, чунки

а) M нинг келиб чиқишига қараганда x нинг қийматларидан ҳеч қайси бири M дан катта бўла олмайди. Ҳақиқатда, агарда a ни x нинг қийматларидан бири ва $a > M$ фараз қилинса, у ҳолда a билан M нинг орасидаги ҳамма рационал сонлар биринчи синфга қарашли бўлар эди ва биринчи синф сонлари орасида (ичида) M дан катта сон бўлар эди. Бу эса мумкин эмас, чунки M биринчи синфнинг ҳамма сонларидан катта.

б) M дан кичик бўлган ҳар бир сон ҳеч бўлмаганда x нинг бирорта қийматидан кичик бўлади. Ҳақиқатда, b, M дан кичик бирор сон бўлсин: $b < M$. Лекин биринчи синфда M дан истаганча кичик ёки M га жуда яқин сонлар бор; буларнинг ичида b га қараганда M га яқинроқ сонлар бордир. Шунинг учун x нинг қийматлари ичида ҳеч бўлмаганда битта шундайи топиладики, у b дан катта бўлади.

§. 18*. ЎЗГАРУВЧИ СОННИНГ ЛИМИТГА ЭГА БЎЛИШ БЕЛГИЛАРИ

Маълумки, ҳар қандай ўзгарувчи сон лимитга эга бўлавермайди. Иккинчи томондан, ўзгарувчи соннинг лимитини ҳамма вақт топиб бўлмайди. Бироқ ўзгарувчи соннинг лимитини топиш мумкин бўлмаса-да, кўпинча унинг лимитга эгалигини билишга тўғри келади. Қуйидаги теоремалар бу масалани ечишга имкон беради.

1. Монотон ўзгарувчининг лимити

Агарда ўзгарувчи соннинг ўзгаришида унинг қийматлари ҳамма вақт ўсиб борса, яъни унинг ҳар бир кейинги қиймати аввалгисидан кичик бўлмаса, бу ҳолда бундай ўзгарувчи сонни монотон ўсувчи дейилади. Демак, агарда x нинг кетма-кет қийматларини

$$x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_n , \dots$$

фараз қилинса, бу ҳолда

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \dots , x_n \leqslant \dots$$

Шунга ўхшаш, агарда ўзгарувчи соннинг ўзгаришида унинг қийматлари ҳамма вақт камайиб борса, яъни унинг ҳар бир кейинги қиймати аввалгисидан катта бўлмаса, бу ҳолда бундай ўзгарувчи сонни монотон камаювчи дейилади. Демак, агарда x нинг кетма-кет қийматларини

$$x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_n \dots$$

фараз қилинса, бу ҳолда

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$$

Бундай ўсувчи ё камаювчи сонларни умуман монотон ўзгарувчи дейилади.

Теорема 1*. Агарда ўзгарувчи x ҳамма вақт монотон ўсиб борса, лекин шунинг билан баробар бирор ўзгармас* **A** *сондан кичиклигича қолса, бу ҳолда ўзгарувчи x лимитга эга бўлади ва у лимит A дан кичик ё A га тенг бўлади.*

Теореманинг шартига мувофиқ ўзгарувчи x юқоридан чегаралангани учун унинг юқори M чегараси бўлади. Юқори чегаранинг биринчи хоссасига мувофиқ $x \leqslant M$. Шунинг учун ε қандай мусбат сон бўлса да $x < M + \varepsilon$ бўлади.

Юқори чегаранинг иккинчи хоссасига мувофиқ, x нинг қийматлари ичида шундайи топиладики, у $M-\varepsilon$ дан катта бўлади. Демак, x нинг бирор қийматидан бошлаб унинг ҳамма қийматлари ушбу тенгсизликларни қаноатлантиради:

$$M-\varepsilon < x < M+\varepsilon.$$

Шунинг учун

$$\lim x = M.$$

Иккинчи томондан, x нинг ҳамма қийматлари A дан катта бўлмагани учун M нинг ўзи ҳам A дан катта бўла олмайди. Демак,

$$M \leqslant A.$$

Теорема 2. *Агарда монотон ўзгарувчи x камайиб борса, лекин шунинг билан баробар бирор ўзгармас B сондан катталигича қолса, бу ҳолда ўзгарувчи x лимитга эга бўлади ва у лимит B дан катта ё B га тенг бўлади.*

Бу теорема ҳам худди юқорида исбот қилинган йўл билан исбот қилинади; фақат бу ҳолда x нинг қуйи чегараси m нинг хоссаларига суянишга тўғри келади.

2. Коши белгиси

Кошининг белгиси ушбу теорема билан ифода қилинади

Теорема: *Ўзгарувчи x нинг лимитга эга бўлиши учун унинг бирор қийматидан бошлаб ҳар икки x', x'' қийматларнинг орасидаги айирмасининг абсолют қиймати исталган мусбат ε сондан кичик бўлиши, яъни x нинг бирор қийматидан бошлаб*

$$|x'-x''| < \varepsilon$$

тенгсизлигининг бажарилиши лозим ва кифоядир.

Биз бу ерлада қўйилган шартнинг лозимлигини исбот қилиш билан чегараланамиз. Бунинг учун ўзгарувчи x нинг лимитини a фараз қиламиз, $\lim x = a$. Бу ҳолда, ε қандай мусбат сон бўлса-да, x нинг бирор қийматидан бошлаб

$$|x'-a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x''-a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (A)$$

Иккинчи томондан:

$$|x''-x'| = |(x''-a)-(x'-a)| \leqslant |x''-a| + |x'-a|$$

ёки (A) га мувофиқ

$$|x'' - x'| < \varepsilon. \qquad (B)$$

Демак, ўзгарувчи сон лимитга эга бўлган ҳолда, унинг бирор қийматидан бошлаб, ҳар икки қийматлари орасидаги айирмасининг абсолют қиймати исталган мусбат сондан кичикланиб, x нинг кейинги ўзгаришларида ҳам шу кичикли-гича қолади. Аксинча, B тенгсизлиги мавжуд бўлганда ўзгарувчи x лимитга эга бўлади. Теореманинг бу қисмини исбот қилмай, шунинг билан чегараланишни лозим топамиз.

§ 19. НАТУРАЛ ЛОГАРИФМ АСОСИ

Кўпинча математик масалаларни текшириш ушбу лимитни излашга олиб келади:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Бу лимит математикада ғоят даражада катта роль ўйнайди. Уни излашга киришишдан илгари ўқувчиларни баъзи бир янглиш фикрлардан сақлашни лозим топамиз. Ифодага юзаки қараганда мана бундай ўйлаш мумкин: „n чексиз ўсиб борганда $\frac{1}{n}$ нолга яқинлашиб боради; шунинг учун қавснинг ичида ёлгиз 1 қолади ва $1^n = 1$ бўлади“.

Бундай муҳокама қилиш ярамайди: n, яъни даража кўрсаткич, ҳар қандай катта бўлса-да, у чекли бўлган ҳолдагина бундай муҳокама қилиш тўғри бўлар эди, ҳолбуки, бу ерда n чексиз ўсиб боради,

Иккинчи томондан, даража кўрсаткичи n чексиз ўсиб борган билан у „ифоданинг ўзи ҳам чексиз ўсиб боради“ деб бўлмайди, чунки бу ҳолда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ бирга яқинлашиб келади. Шунга ўхшаш у бирга яқинлашган билан „ифоданинг ўзи ҳам бирга яқинлашади“ деб бўлмайди, чунки бу ҳолда унинг даража кўрсаткичи чексиз ўсиб боради.

Айтилганларни очиқ тасвир қилиш мақсадида n га бир неча кетма-кет ўсиб борувчи қийматларни бериб, ифоданинг уларга тегишли қийматларини ҳисоблаб кўрсатамиз; n га берилган қийматлар ва чиққан натижалар қуйидаги жадвалдан кўринмоқда:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00
2	2,25
3	2,37
4	2,44
5	2,48
6	2,52
7	2,54
8	2,56
. . .	. . .
1000	2,71

Бу жадвалга қараганда: n нинг қиймати **1** дан 1000 гача ўсиб борса-да, бироқ ифоданинг қиймати **2** билан 3 нинг орасида бўлади.

Энди, масала шундаки, n ҳар қанча чексиз ўсиб борган ҳолда ҳам, ифоданинг қиймати шу чегара ичида, яъни 2 билан 3 орасида қолармикан? Қуйидаги текширишлар бу саволга мусбат жавоб беради. Текширишни уч қисмга бўламиз:

1. Энг аввал n ни бутун ва мусбат фараз қиламиз, яъни n чексиз ўсиб, ёлғиз бутун мусбат қийматларга эга бўлсин. Бу ҳолда, Ньютон биноми формуласига мувофиқ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$

$$\times\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n}.$$

Агарда бунинг 2-ҳадини n га, 3-ҳадини n^2 га, 4-ҳадини n^3 га... қисқартирилса, ифоданинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n^n}.$$

Бир томондан, бу ифоданинг ўнг томонидаги ҳар бир қавснинг ичидаги айирма мусбат бўлиб, иккинчи томондан, n ҳар қанча ўсиб борган ҳолда ҳам мусбатлигича қолгани учун

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2. \qquad (2)$$

(1) даги ҳар бир қавснинг қиймати бирдан кичик; агарда уларнинг ҳар бирининг ўрнига бир бутун ёзилса (1) нинг ўнг томони аввалгисига қараганда бирмунча ортади. Демак,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}+\cdots+\frac{1}{n^n}.$$

Агарда бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги касрларнинг махражларидаги 2,3 .... k ларнинг ҳар бирининг ўрнига ёлғиз 2 қўйилса, у тенгсизлик яна кучаяди,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n},$$

чексиз камаювчи прогрессив йиғиндисининг формуласига мувофиқ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots = 2.$$

бўлгани учун

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \qquad (3)$$

(2) ва (3) тенгсизликлардан қуйидаги натижа чиқади:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3. \qquad (4)$$

Юқорида ёзилган (1) га мувофиқ, n нинг қиймати бутун ва мусбат бўлиб, чексиз ўсиб борган ҳолда: 1) ундаги қўшилувчиларнинг сони ортиб боради, 2) ҳар бир қавснинг қиймати мусбатлигича қолади ва 3) ҳар бир қавснинг қиймати ортиб, бирга яқинлашиб боради. Демак, n нинг қиймати бутун ва мусбат бўлиб, чексиз ўсиб борганда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

нинг қиймати ўсиб боради ва ҳамма вақт 3 дан кичик ва 2 дан катта бўлади. 16-параграфда исбот қилинган теоремага мувофиқ бу ҳолда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

белгили лимитга интилади. Бу лимитни одатда e ҳарфи билан ифода қиладилар. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (5)$$

2. Энди, n ни ҳар қандай мусбат сон фараз қиламиз, яъни n чексиз ўсиб, ҳар қандай мусбат қийматларга эга бўлсин.

Агарда n нинг бутун қисмини k фараз қилинса, у ҳолда

$$k \leqslant n < k+1, \qquad (6)$$

ёки

$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n} > \frac{1}{k+1}$$

$$1+\frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{k+1}.$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^n.$$

(6) тенгсизликни эътиборга олганда буни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k. \qquad (7)$$

k бутун мусбат сон бўлгани учун (5) га мувофиқ

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\lim\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}=e\cdot 1=e.$$

Шунга ўхшаш

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k}=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}:\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\right\}=$$

$$=e:1=e.$$

Демак, (7) тенгсизликнинг четка ҳадлари e га интилади. Шунинг учун унинг ўрта ҳади ҳам e га интилади, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Демак, n чексиз ўсиб, ҳар қандай мусбат қийматларга эга бўлган ҳолда ҳам текширилмоқда бўлган ифоданинг лимити ҳамон e бўлади.

3. Энди n ни манфий фараз қиламиз, яъни n нинг абсолют қиймати чексиз ўсиб, ўзи манфий қийматларга эга бўлсин. Бу ҳолда

$$n=-p,\ p>0$$

фараз қиламиз. Шунинг учун:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-p}=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{-p}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p}=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}\cdot\left(1+\frac{1}{p-1}\right),$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\left\{\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\right\}=e\cdot 1=e.$$

Демак, n нинг абсолют қиймати чексиз ўсиб, ўзи ҳар қандай манфий қийматларга эга бўлган ҳолда ҳам

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Шунинг билан натижада n ҳар қандай қийматларга эга бўлса-да, унинг абсолют қиймати чексиз ўсганда ҳамма вақт

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.} \tag{8}$$

Геометрияда π қандай аҳамиятга эга бўлса, математик анализда e ҳам шундай катта аҳамиятга эгадир. e ҳеч қандай алгебраик тенгламанинг илдизи бўла олмайди, яъни у трансцендент сондир. Шунинг учун e нинг фақат тақрибий қийматини топиш мумкин.

Китобнинг келаси бобларининг бирида e нинг тақрибий қийматини, исталган аниқлик билан қийматини топиш учун ғоят қулай усул тақдим қилинади ва вергулдан кейин беш хона билан чегараланган ҳолда e нинг тақрибий қиймати қуйидагича бўлади:

$$e = 2{,}71828\ldots$$

Баъзи бир вақтларда e нинг ифодаси бошқа шаклда ишлатилади. Бунинг учун $\frac{1}{n}$ ни бирор ҳарф билан, масалан, α билан ифода қилинади:

$$\frac{1}{n} = \alpha \text{ ва } n = \frac{1}{\alpha}.$$

Бунга қараганда n чексизликка интилса α нолга интилади. Шунинг учун бу ҳолда ифодасининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.} \tag{9}$$

Мисол:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax}\right)^x = ?$$

Берилган ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{ax+b}{ax}\right)^x = \left(1+\frac{b}{ax}\right)^x = \left\{\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{a}}\right\}^{\frac{b}{a}}.$$

Шунинг учун

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{b}}\right\}^{\frac{b}{a}}=e^{\frac{b}{a}}=\sqrt[a]{e^b}.$$

Одатда бошланғич математикада асоси 10 бўлган логарифм ишлатилади ва у системани „ўнлик система" ёки „Бриг логарифмлари" дейилади. Ҳолбуки, математик анализда асоси e га тенг бўлган логарифм системаси ишлатилади ва у ғоят даражада ўнғайлик келтиради.

Асоси e га тенг бўлган логарифм системасини натурал система дейилади.

Бу системани, бошқа логарифм системаларидан ажратиш учун одатдаги „log" ёки „lg" ўрнига „ln" ёзилади. Масалан, бирор x нинг e асосдаги логарифмини

$$\lg_e x$$

ёзиш ўрнига

$$\ln x$$

ёзиб, „x нинг натурал логарифми" деб ўқилади.

Ҳамма вақт бир системадаги логарифмдан иккинчи бир системага ўтиш мумкин, Масалан, бирор соннинг, айтайлик, N нинг a асосли логарифми x ва e асосли логарифми y бўлсин,

$$N=a^x,\, N=e^y.$$

Демак,

$$a^x=e^y.$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан натурал логарифм олинса,

$$x\ln a=y\ln e=y,$$

чунки ҳар бир системада, у система асосининг логарифми бирга тенг бўлади. Юқорида қилинган фаразияга мувофиқ

$$x=\lg_a N,\quad y=\ln N.$$

Шунинг учун

$$\lg_a N\cdot\ln a=\ln N$$

ва бундан

$$\boxed{\lg_a N=\ln N\cdot\frac{1}{\ln a}.}$$

Демак, N **нинг** a **асосли логарифмини топиш учун: N нинг натурал логарифмини a нинг натурал логарифми тескарисига кўпайтириш керак бўлади.**

Кейинги формуладаги $M = \frac{1}{\ln a}$, a асосли логарифм системасининг модули дейилади ва $a = 10$ бўлган ҳолда унинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$M = 0,4342945\ldots$$

Масалалар

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} =$ Жавоб: e^3.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} =$ Жавоб: e^a.

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{n}} =$ Жавоб: $\sqrt[n]{e^m}$.

59. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} =$ Жавоб: $\frac{1}{e}$

60. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3} =$ Жавоб: e

61. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} =$ Жавоб: $\frac{1}{e}$

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5+n}{5}\right)^{\frac{1}{n}} =$ Жавоб: $\sqrt[5]{e}$

63. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{a\sec x} =$ Жавоб: e^a

64. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} =$ Жавоб: $\ln e = 1$

65. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{x} =$ Жавоб: e

66. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x} =$ Жавоб: e^{15}

67. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} =$ Жавоб: e.

68. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x} =$ Жавоб: e.

69. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x-3} =$ Жавоб: e^2.

70*. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n(n+1)}{n^3} =$ Жавоб: $\frac{1}{3}$

71*. $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} \left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\} =$ Жавоб: 1.

72. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right\} =$ Жавоб: $\frac{3}{4}$

73. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-1)^{\frac{1}{x-2}} =$ Жавоб: e

74*. $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{\ln(a+e^{x+1})\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} =$ Жавоб: 1.

75. $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{x\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}-\sqrt{x}\right)\right\} =$ Жавоб: $\frac{1}{2}$.

76. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} =$ Жавоб: 1

77*. $\lim \left\{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right\} =$ Жавоб: $\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}$.

§ 20. ЧЕКСИЗ КИЧИК СОНЛАР ТАРТИБИ

Ҳар бир чексиз кичик соннинг лимити ноль бўлса-да, лекин икки бир-бирига боғланган чексиз кичик сондан бири иккинчисига нисбатан „тезроқ“ „ёки“ „сустроқ“ нолга яқинлашиб бориши мумкин. Кўпинча масалаларда буни билишга тўғри келади.

Бундай ҳолларда чексиз кичик сонлардан бирини асос қилиб олиб, уни қолганлари билан солиштириб кўрилади.

Бунинг натижасида ушбу **тартиб** тушунчаси келиб чиқади:

α ва β нинг ҳар бири чексиз кичик сон ва $\frac{\beta}{\alpha}$ нинг лимити k бўлсин:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k,$$

бу ҳолда

1) агарда $k = 0$ бўлса, β ни α га нисбатан юқори тартибли дейилади.

2) Агарда $k = \infty$ бўлса, β ни α га нисбатан қуйи тартибли дейилади ва

3) агарда k нолга тенг бўлмаган чекли (сон) бўлса ($k \neq 0$, $k \neq \infty$), β ва α ни бир тартибли дейилади.

Агарда шундай ўзгармас сон, масалан n мавжуд бўлсаки,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n}$$

нолга тенг бўлмаган чекли сон бўлса, у ҳолда β ни α га нисбатан n-тартибли дейилади.

Мисол 1. Агарда $\beta = \alpha^3 + 2\alpha^2$ бўлса, у ҳолда

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2}{\alpha} = \lim (\alpha^2 + 2\alpha) = 0,$$

чунки α чексиз кичик сон бўлгани учун унинг лимити ноль бўлади. Демак, бу мисолда β α га нисбатан юқори тартибли бўлади. Буни бошқача қилиб айтганда, α га қараганда β „тезроқ“ нолга яқинлашади.

Мисол 2. Агарда $\beta = \sqrt{\alpha}$ бўлса, бу ҳолда

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} = \lim \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \infty.$$

Демак, бу мисолда β нинг тартиби α га нисбатан қуйи бўлади. Бу эса β нинг α га қараганда „сустроқ“ нолга яқинлашишини кўрсатади.

Мисол 3. Агарда $\beta = 5\alpha + \alpha^2$ бўлса, бу ҳолда

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{5\alpha + \alpha^2}{\alpha} = \lim (5 + \alpha) = 5.$$

Демак, бу мисолда β ва α бир тартибли бўлади. Бу эса β билан α нинг „бир тезлик" билан нолга яқинлашиб боришини кўрсатади.

§ 21. ЧЕКСИЗ КИЧИК СОНЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Чексиз кичик сонларнинг энг катта аҳамияти шундаки, кўпинча кўриниши жуда мураккаб бўлган чексиз кичик сонларни улардан кўра соддароқ чексиз кичик сонлар билан алмаштириш мумкин бўлади. Бундай алмаштиришларнинг қандай ҳолларда мумкинлигини ифода қилиш учун энг аввал **эквивалент чексиз кичик сонлар** тушунчаси билан танишиб ўтишимиз лозим:

Бир-бирига нисбатининг лимити бирга тенг бўлган икки чексиз кичик сонларни ўзаро эквивалент дейилади.

Масалан, бизга маълумки:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Демак, x билан $\sin x$ ўзаро эквивалент бўлади.

Энди бу тушунчанинг ёрдами билан қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

Теорема. *Икки чексиз кичик α ва β сонларнинг бир-бирига нисбатининг лимитини излашда, уларни эквивалент α' ва β' чексиз кичик сонлар билан алмаштирилса, бундан изланган лимит ўзгармайди.*

Бу теоремани исбот қилиш учун ушбу айниятни тузамиз

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta'},$$

бундан

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \frac{\beta}{\beta'}.$$

Теореманинг шартига мувофиқ

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1.$$

Демак,

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ўзаро эквивалент бўлган чексиз кичик сонларни ушбу $\backsim$ ишорат ёрдами билан ифода қилинади. Масалан, агарда α ва α' ўзаро эквивалент чексиз кичик сонлар бўлса, у ҳолда буни $\alpha \backsim \alpha'$ равишда ёзилади.

§ 22. ФУНКЦИЯНИНГ ОРТТИРМАСИ

Кўпинча масалаларда функциянинг қандай ўзгаришини билишга тўғри келади, яъни функциянинг аргументи ўзгарган ҳолда функциянинг ўзи қандай ўзгаришини билиш керак бўлади.

Бунинг учун одатда функциянинг аргументини бирмунча орттириб, бундан функциянинг қиймати қандай ўзгаришига диққат қилинади. Масалан, ушбу

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

функциянинг аргументи 3 дан 5 га ўтганда, функциянинг қиймати қанча ортишини топамиз. Бунинг учун энг аввал функциянинг бу қийматларга (3 ва 5 га) тегишли хусусий қийматларини ҳисоб қиламиз,

$$f(3) = 3 \cdot 3^2 + 2 = 29$$

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 + 2 = 77.$$

Энди функция учун белгиланган кейинги қийматдан аввалгисини айрим оламиз,

$$f(5) - f(3) = 77 - 29 = 48.$$

Шунинг билан аргументнинг қиймати 3 дан 5 га ўтганда яъни унинг орттирмаси $5-3=2$ бўлганда, функциянинг орттирмаси $77-29=48$ бўлади.

Одатда ўзгарувчи соннинг орттирмасини кўрсатиш учун y ўзгарувчининг олдига Δ ишорати қўйилади. Масалан,

Δx	x	нинг орттирмасини ифода қилади.
Δt	t	нинг " " "
Δy	y	" " " "
$\Delta f(x)$	$f(x)$	" " " "

Бизнинг олган мисолимизда

$$\Delta x = 5-3 = 2$$

$$\Delta f(x) = 77-29 = 48.$$

Энди, масалани умумийлаштириб, функциянинг орттирмасини ҳисоблаш учун умумий қоида чиқариш мумкин. Масалан y x нинг бирор функцияси бўлсин,

$$y=f(x).$$

Агарда x нинг орттирмасини Δx фараз қилинса, функциянинг янги аргументи $x+\Delta x$ бўлади. Функциянинг аргументи ўзгаргани учун унинг қиймати ўзгариб, y ҳам бирор орттирмага эга бўлади. Агарда функциянинг орттирмасини Δy билан ифода қилинса, бу ҳолда унинг янги қиймати қуйидагича бўлади:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x). \tag{2}$$

Энди, функциянинг орттирмаси бўлган Δy ни топиш учун функциянинг янги (2) қийматидан унинг эски (1) қийматини айириб ташлаш керак. Демак,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{3}$$

Бунга қараганда $y=f(x)$ функциянинг орттирмасини ҳисоблаш учун қуйидаги **қоида** келиб чиқади:

1) функциянинг аргументи бўлган x нинг ўрнига $x+\Delta x$ қўйилади; бунинг натижасида $f(x)$ функция учун янги $f(x+\Delta x)$ қиймат белгиланади;

2) функция учун белгиланган, янги $f(x+\Delta x)$ қийматидан унинг эски $f(x)$ қиймати айириб олинади. Шундан чиққан айирма функциянинг орттирмаси бўлади.

Мисол 1. Ушбу $y=3x^2+2x-5$ функциянинг орттирмаси топилсин.

Ечиш. 1) функциянинг аргументи x нинг ўрнига $x+\Delta x$ қўямиз:

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-5,$$

2) функциянинг янги қийматидан аввалги қийматини айириб ташлаймиз:

$$\Delta y=3(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-5-3x^2-2x+5.$$

Қавсларни очиб, ифодани соддалаштирилса, Δy нинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$\Delta y=6x\Delta x+2\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

Мисол 2. Ушбу $y=x^3$ функциянинг орттирмаси топилсин.

Ечиш: 1) функциянинг аргументи x нинг ўрнига $x + \Delta x$ қўямиз:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3,$$

2) функциянинг янги қийматидан аввалги қийматини айириб оламиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Масалалар

78. Ушбу $y = ax^2 + bx + c$ функциянинг орттирмаси топилсин:

Жавоб: $\Delta y = 2ax \cdot \Delta x + b\Delta x + a(\Delta x)^2$.

79. Ушбу $y = x^3 - 2x + 7$ функциянинг орттирмаси топилсин:

Жавоб: $\Delta y = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\Delta x$.

80. Ушбу $y = \sin x$ функциянинг аргументи $\frac{\pi}{6}$ дан $\frac{\pi}{2}$ га ўтганда функциянинг орттирмаси қанча бўлади?

Жавоб: 0,5.

81. Ушбу $s = \varphi(t)$ функциянинг орттирмаси умумий равишда топилсин:

82. Ушбу $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг аргументи $\frac{\pi}{4}$ дан $\frac{\pi}{3}$ га ўтганда унинг орттирмаси қанча бўлади?

Жавоб: $\sqrt{3} - 1$.

83. Ушбу $y = \frac{1}{x^2}$ функциянинг аргументи 2 дан 3 га ўтганда унинг орттирмаси қанча бўлади?

Жавоб: $-\frac{5}{36}$.

§ 23. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1. $f(x)$ бирор функция бўлсин. Ўтган мисоллардан маълумки, унинг аргументи x бирор сонга, масалан a га интилганда, $f(x)$ нинг ўзи бирор белгили сонга, масалан A ; интилиши (ё интилмаслиги) мумкин.

Кўпгина вақтларда A билан функциянинг хусусий қиймати бўлган $f(a)$ нинг бир-бирига тенг бўлиб қолиши мумкин, яъни, исталганча кичик мусбат ε сон берилганда, шундай мусбат η ни топиш мумкинки,

$$|x-a|<\eta$$

бўлганда

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

бўлади. Бундай хоссага эга бўлган $f(x)$ функцияни „ **a нуқтада узлуксиз“** дейилади. Бошқача қилиб айтганда:

Агарда $f(x)$ функциянинг аргументи $x=a$ га яқинлашганда $f(x)$ нинг лимити $f(a)$ бўлса, яъни

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \tag{1}$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функцияни „a нуқтада узлуксиз“ дейилади.

Қўйилган шартни таъмин этиш учун:

1) функциянинг хусусий қиймати бўлган $f(a)$ аниқ (чекли) сон бўлиши керак,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ аниқ (чекли) сон бўлиши керак ва

3) x a га яқинлашганда $f(x)$ нинг лимити функциянинг $f(a)$ хусусий қийматига тенг бўлиши керак.

Агарда бирор $x=a$ нуқтада бу уч шартдан бирортаси тўғри келмай қолса, у ҳолда бундай нуқтани функциянинг **узилиш нуқтаси** дейилади.

Функциянинг интервалда узлуксизлиги қуйидагича таъриф қилинади:

Агарда бирор (a, b) интервалдаги ҳар бир нуқтада функция узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу интервалда узлуксиз дейилади.

Шунинг билан баробар, агарда $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг чегарасида ҳам узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$f(a+0)=f(a), \quad f(b-0)=f(b).$$

Мисол 1. Қуйидаги функциянинг узлуксизлиги текширилсин:

$$f(x)=\frac{3}{x-2}.$$

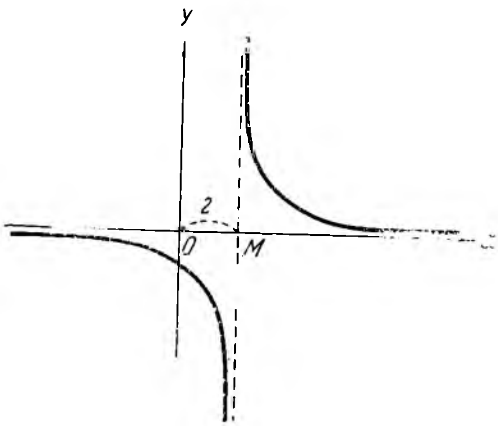
Бу функция $x=2$ нуқтадан бошқа ҳар бир нуқтада узлуксиз бўлади; $x=2$ нуқтада функция чексизликка айланади, яъни бу нуқтада узлуксизликнинг 1—шарти тўғри келмайди. Шунинг учун $x = 2$ нуқтада функциянинг узилиш нуқтаси бўлади (шакл 18).

Мисол 2. Қуйидаги функциянинг узлуксизлиги текширилсин:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Бу функциянинг иккита узилиш нуқтаси бор:

$$x = 1 \quad \text{ва} \quad x = -1.$$



Шакл 18

Булардан бошқа нуқталарда функция узлуксиз бўлади (шакл 19).

Мисол 3. Қуйидаги функциянинг $x = 0$ нуқтада узлуксизлиги текширилсин:

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} + \cdots$$

$x = 0$ бўлганда, функциянинг хусусий қиймати ноль бўлади:

$$f(0) = 0.$$

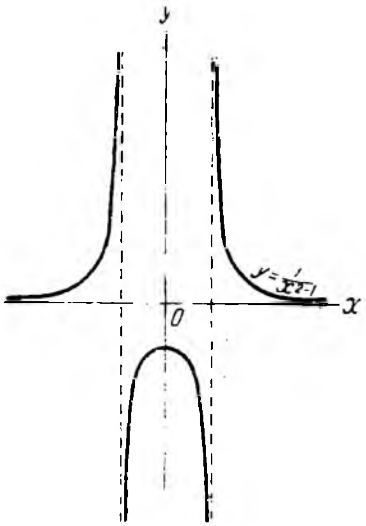
Иккинчи томондан, бу функция чексиз камаювчи геометрик прогрессиядан иборат, чунки унинг махражи $\frac{1}{1 + x^2}$,

$x \lessgtr 0$ бўлганда 1 дан кичик бўлади. Шунинг учун унинг йиғиндиси:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1 + x^2}} = \lim_{x \to 0} (1 + x^2) = 1.$$

Натижада,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$



Шакл 19.

Демак, $x = 0$ $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтада узлуксизликнинг 3-шарти тўғри келмайди.

2. Юқоридаги (1) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{h \to 0} \{f(a + h) - f(a)\} = 0. \quad (2)$$

Бу тенгликда h аргументнинг орттирмаси ва $f(a + h) - f(a)$ функциянинг орттирмасидан иборат.

Шунинг учун $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтада узлуксизлигини яна қуйидагича **таъриф** қилиш мумкин:

Агарда аргументнинг орттирмаси h чексиз кичик бўлганда функциянинг орттирмаси $f(a + h) - f(a)$ ҳам чексиз кичик бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Натижада функциянинг нуқтада узлуксизлигини текшириш қоидаси қуйидагича бўлади:

1) $f(x)$ функциянинг аргументига h орттирма бериб, $f(x + h)$ ни топамиз,

2) функция учун белгиланган $f(x + h)$ қийматдан аввалги $f(x)$ қийматини айириб, функциянинг $f(x + h) - f(x)$ орттирмасини топамиз,

3) h ни нолга яқинлаштириб $f(x + h) - f(x)$ нинг лимитини излаймиз. Агарда

$$\lim_{x \to 0} \{f(x+h) - f(x)\} = 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x нуқтада узлуксиз бўлади.

Мисол 4. Ҳар бир нуқтада $\sin x$ узлуксиз функция бўлади.

Ҳақиқатда қоидага мувофиқ

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x$$

ёки

$$f(x+h) - f(x) = 2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$\lim_{h \to 0} \{f(x+h) - f(x)\} = \lim_{h \to 0} 2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot 0\cdot \cos x = 0.$$

Демак, истаган нуқтада $\sin x$ узлуксиз функция бўлади.

§ 24. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЙИҒИНДИСИ, КЎПАЙТМАСИ ВА БЎЛИНМАСИ

1. Сонлари чегараланган бир неча узлуксиз функцияларнинг алгебраик йиғиндиси яна узлуксиз функция бўлади.

Масалан, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири бирор (a, b) интервалда узлуксиз бўлсин. У ҳолда уларнинг алгебраик йиғиндиси ҳам шу интервалда узлуксиз бўлади.

Буни исбот қилиш учун берилган функцияларнинг алгебраик йиғиндисини $f(x)$ фараз қиламиз:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x). \quad (1)$$

Агарда c ни аргументнинг (a, b) интервалдаги қийматларидан бири фараз қилинса,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f_1(x) + \lim_{x \to c} f_2(x) + \cdots + \lim_{x \to c} f_n(x) \quad (2)$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, ...$f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири узлуксиз бўлгани учун:

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = f_1(c),$$

$$\lim_{x\to c} f_2(x) = f_2(c),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = f_n(c).$$

Шунинг учун (1) тенгликни эътиборга олганда (2) тенгликнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f_1(c) + f_2(c) + \cdots + f_n(c) = f(c),$$

бу эса $x = c$ бўлганда $f(x)$ функциянинг узлуксизлигини кўрсатади.

2. Сонлари чегараланган бир неча узлуксиз функцияларнинг кўпайтмаси яна узлуксиз функция бўлади.

Масалан, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири бирор (a, b) интервалда узлуксиз бўлсин. У ҳолда буларнинг кўпайтмаси ҳам шу интервалда узлуксиз бўлади.

Буни исбот қилиш учун берилган узлуксиз функцияларнинг кўпайтмасини $f(x)$ фараз қиламиз:

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \ldots f_n(x). \tag{3}$$

Агарда c ни аргументнинг (a, b) интервалдаги қийматларидан бири фараз қилинса,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f_1(x) \cdot \lim_{x\to c} f_2(x) \ldots \lim_{x\to c} f_n(x) \tag{4}$$

$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири узлуксиз бўлгани учун:

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = f_1(c)$$

$$\lim_{x\to c} f_2(x) = f_2(c)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = f_n(c).$$

Шунинг учун (3) тенгликни эътиборга олганда (4) тенгликнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f_1(c) \cdot f_2(c) \ldots f_n(c) = f(c),$$

бу эса $x = c$ бўлганда $f(x)$ функциянинг узлуксизлигини кўрсатади.

3. Аргументнинг — бўлувчи функцияни нолга айлантирадиган қийматларидан бошқа, икки узлуксиз функциянинг бўлинмаси яна узлуксиз бўлади.

Масалан, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ҳар бири бирор (a, b) интервалда узлуксиз бўлсин; $f(x)$ нинг $\varphi(x)$ га бўлинмасини $F(x)$ фараз қиламиз:

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Агарда c ни аргументнинг (a, b) интервалдаги қийматларидан бири фараз қилинса,

$$\lim_{x \to c} F(x) = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} \varphi(x)} = \frac{f(c)}{\varphi(c)} = F(c),$$

фақат $\varphi(c) \neq 0$ шарти билан. Чиққан натижа $x = c$ бўлганда $F(x)$ нинг узлуксизлигини кўрсатади.

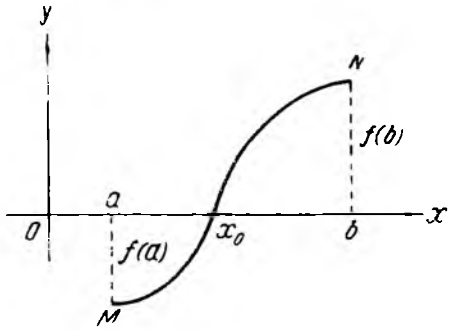
§ 25. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Теорема 1. *Агарда $f(x)$ функция (a, b) ёпиқ интервалда узлуксиз бўлиб, унинг интервал чегараларидаги $f(a)$ ва $f(b)$ қийматларининг ишоратлари ҳар хил бўлса, у ҳолда шу интервал ичида аргументнинг ҳеч бўлмаганда битта шундай x_0 қиймати бўладики, у $f(x)$ функцияни нолга айлантиради, яъни $f(x_0) = 0$ бўлади.*

А. Геометрик мулоҳаза. Теореманинг шартига мувофиқ $f(a)$ ва $f(b)$ нинг ишоралари бир-бирига тескари бўлгани учун

$$f(a) = aM < 0, \quad f(b) = bN > 0$$

фараз қиламиз. $f(x)$ функция (a, b) интервалда узлуксиз бўлгани учун унинг графиги M ва N нуқталари орасида узлуксиз чизиқ бўлади (шакл 20). Иккинчи томондан, M ва N нуқталари абсцисса ўқининг ҳар икки томонида бўлгани учун уларни туташтирувчи чизиқ албатта абсцисса ўқини ҳеч бўлмаганда x_0 нуқтада кесиб ўтади ва $f(x_0)=0$ бўлади.



Шакл 20.

В*. Аналитик исбот. Масала аниқ бўлсин учун $a<b$ фараз қилиб, (a, b) интервални тенг иккига бўламиз: интервалнинг тенг ўртасида функциянинг қиймати $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ бўлади. Агарда $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ бўлса, у ҳолда теорема исбот қилинган бўлади; агарда у нолга тенг бўлса, у ё манфий, ё мусбат бўлади.

Лекин $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ нинг ишораси қандай бўлса-да, у ҳамма вақт $f(a)$ ва $f(b)$ дан бирининг ишорасига тескари бўлади (чунки теореманинг шартига мувофиқ $f(a)$ ва $f(b)$ нинг ишоралари бир-бирига тескари). Шунинг билан баробар (a, b) интервал икки интервалга бўлинади:

$$\left(a, \frac{a+b}{2}\right) \text{ ва } \left(\frac{a+b}{2}, b\right).$$

Бу интерваллардан бирида функциянинг интервал чегарасидаги қийматларнинг ишоралари тескари бўлади. Бу чегара ларни a_1 ва b_1 фараз қиламиз, яъни

1) агарда $f(a)$ ва $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ нинг ишоралари тескари бўлса, у ҳолда

$$a_1 = a \text{ ва } b_1 = \frac{a+b}{2},$$

2) агарда $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ва $f(b)$ нинг ишоралари тескари бўлса, у ҳолда

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ ва } b_1 = b.$$

Ҳар икки ҳолда ҳам

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Иккинчи томондан.

$$a \leqslant a_1 \text{ ва } b \geqslant b_1.$$

Ҳосил бўлган (a_1, b_1) интервални олиб, шу йўл билан давом этганда ё теорема бирданига исбот бўлади (бирор интервалнинг тенг ўртасида функциянинг қиймати ноль бўлади), ёки қуйидаги чексиз икки қатор ҳосил бўлади:

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \tag{1}$$

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \tag{2}$$

Бизда

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \text{ эди.}$$

Шунга ўхшаш:

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4},$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{8},$$

. . . .

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}. \tag{3}$$

Шунинг билан баробар ҳар бир интервалда $f(a_n)$ ва $f(b_n)$ нинг ишоралари бир-бирига тескари бўлади.

(1) қатор ўсувчи (камаювчи) ва (2) қатор камаювчи (ҳар ҳолда ўсмовчи) бўлиб, n чексиз ўсганда, $b_n - a_n$ айирмаси нолга интилгани учун иккала қатор ҳам бирор умумий лимитга интилади. Бу лимитни x_0 фараз қиламиз:

$$\lim a_n = \lim b_n = x_0\,;\ a < x_0 < b.$$

Иккинчи томондан, $f(x)$ функция узлуксиз бўлгани учун

$$\lim f(a_n) = f(x_0);\quad \lim f(b_n) = f(x_0)$$

ёки

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(x_0)$$

ва шартга мувофиқ

$$f(a_n) < 0,\quad f(b_n) > 0;$$

демак,

$$\lim f(a_n) \leqslant 0,\ \lim f(b_n) \geqslant 0,$$

яъни

$$f(x_0) \leqslant 0 \quad \text{ва } f(x_0) \geqslant 0$$

демак,

$$f(x_0) = 0.$$

Натижа. $f(x)$ функция ёпиқ (a, b) интервалда узлуксиз ва

$$f(x) = A,\quad f(b) = B$$

бўлсин; агарда K, A билан B орасидаги бирор сон бўлса

$$A < K < B,$$

у ҳолда (a, b) интервалда ҳеч бўлмаганда битта шундай x_0 сон топиладики, $f(x_0) = K$ бўлади.

Буни исбот қилиш учун ушбу ёрдамчи функцияни тузамиз:

$$F(x) = f(x) - K.$$

Бу функция ҳам (a, b) интервалда узлуксиз бўлади ва

$$F(a) = f(a) - K = A - K < 0,$$

$$F(b) = f(b) - K = B - K > 0.$$

Юқорида исбот қилинган теоремага мувофиқ (a, b) интервалда ҳеч бўлмаганда битта шундай x_0 сон топиладики,

$$F(x_0) = 0.$$

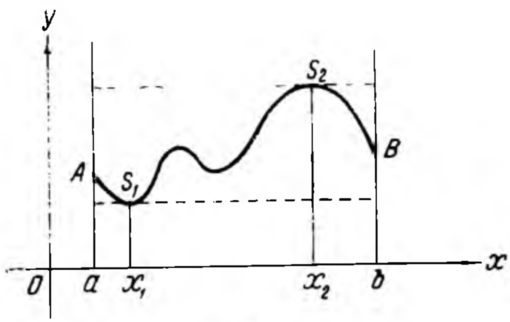
Лекин

$$F(x_0) = f(x_0) - K$$

бўлгани учун

$$f(x_0) = K.$$

Теорема 2. *Бирор ёпиқ (a, b) интервалда узлукиз бўлган $f(x)$ функциянинг қийматлари ичида ҳеч бўлмаганда битта энг каттаси ва битта энг кичиги бўлади.*



Шакл 21.

А. Геометрик мулоҳаза. Функция (a, b) интервалда узлуксиз бўлгани учун, унинг бу интервалдаги геометрик тасвири узлуксиз чизиқдан иборатдир. Шунинг учун бу интервалда у чизиқнинг ҳеч бўлмаганда битта энг катта ва битта энг кичик ординатаси бўлади. Масалан, агарда $f(x)$ функциянинг графигини AB фараз қилинса, у ҳолда (a, b) интервалда унинг энг кичик ординатаси ва энг катта ординатаси $S_1x_1 = f(x_1)$, $S_2x_2 = f(x_2)$ мавжуд бўлади (шакл 21).

В*. Аналитик исбот. Берилган интервалда функция узлуксиз бўлгани учун у интервалда функциянинг ҳамма қийматлари чекли бўлади; шу сабабдан функциянинг бу қийматлари учун унинг юқори чегараси M ва қуйи чегараси m мавжуд бўлади. Теореманинг талаби бўйича (a, b) интервалда шундай ξ ва ξ' сонлари топилиши керакки, улар учун $f(\xi) = M$ ва $f(\xi') = m$ бўлсин.

Бу тенгликлардан биринчисининг мавжудлигини исбот қилиш учун (a, b) интервални ҳамон иккига бўламиз:

$$\left(a, \frac{a+b}{2}\right);\ \left(\frac{a+b}{2}, b\right). \tag{1}$$

Бу интерваллардан ҳеч бўлмаганда бирида функция қийматларининг юқори чегараси ҳамон M бўлади, чунки у бутун интервалда M эди. Бу ҳол, ҳалиги (1) интерваллардан қайси бирида мавжуд бўлса, шу интервални олиб, унинг чегараларини a_1 ва b_1 билан ифода қиламиз. Шунинг билан баробар:

$$a \leqslant a_1, \quad b \geqslant b_1$$

Ҳосил бўлган (a_1, b_1) интервални олиб, шу йўл билан давом этганда қуйидаги чексиз икки қатор ҳосил бўлади:

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \tag{2}$$

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \tag{3}$$

Шунинг билан баробар (ўтган параграфга қаранг):

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{4}$$

(2) қатор ўсувчи (камаювчи) ва (3) қатор камаювчи (ўсмовчи) бўлиб, ҳар бир (a_n, b_n) интервалда функция қийматларининг юқори чегараси M бўлади. Иккинчи томондан, n чексиз ўсганда $b_n - a_n$ айирмаси нолга интилгани учун иккала қатор ҳам бирор умумий лимитга интилади. Бу лимитни ξ фараз қилинса,

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n.$$

Энди $f(\varepsilon) = M$ бўлишини исбот қиламиз. Ҳақиқатда, юқори чегаранинг таърифига мувофиқ

1) $f(\xi) \leqslant M$,

2) ξ қандай кичкина мусбат сон бўлса-да, (a_n, b_n) интервалда ҳеч бўлмаганда битта шундай x сон топиладики

$$f(x) > M - \varepsilon \quad \text{ёки} \quad M < f(x) + \varepsilon. \tag{5}$$

Шунга ўхшаш, n нинг қийматлари етарли даражада катта бўлганда

$$f(x) < f(\xi) + \varepsilon, \tag{6}$$

чунки бу ҳолда (яъни n етарли даражада катта бўлганда) интервал (a_n, b_n) ҳам исталганча торайди ва x билан ξ нинг иккаласи шу интервалнинг ичида бўлгани учун x исталганча ξ га яқин бўлади. Шунинг билан (5) ва (6) дан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$M < f(\xi) + 2\varepsilon.$$

Шунинг учун

$$f(\xi) \leqslant M < f(\xi) + 2\varepsilon.$$

Демак,

$$f(\xi) = M.$$

Юқоридаги, иккинчи $f(\xi') = m$ тенглик ҳам худди шу йўл билан исбот қилинади.

Теорема 3*. *Агарда $f(x)$ функция (a, b) интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда (a, b) интервални шундай хусусий интервалларга бўлиш мумкинки, уларнинг ҳар бирида функциянинг тебранишини, яъни функциянинг энг катта қиймати билан энг кичик қиймати орасидаги айирмасини исталган кичкина мусбат сондан кичик қилиш мумкин.*

Теоремани исбот қилиш учун a ва b нинг орасига ушбу $n - 1$ сонларни қўямиз:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}.$$

Агарда $a = x_0$ ва $b = x_n$ фараз қилинса, у ҳолда қуйидаги n интервалларга эга бўламиз:

$$(x_0, x_1), \ (x_1, x_2), \ldots (x_{i-1}, x_i), \ldots (x_{n-1}, x_n).$$

Бу хусусий интерваллардан исталганча, бирортасини оламиз

$$(x_{i-1}, x_i).$$

Теореманинг шарти бўйича берилган функция узлуксиз бўлгани учун бизнинг интервалда унинг юқори ва қуйи чегараси бўлади. Буни назарда тутиб, x_i' ва $x_i' + h_i$ ни аргументнинг шундай қийматлари фараз қиламизки, $f(x_i')$ функциянинг қуйи чегараси ва $f\left(x_i' + h_i\right)$ унинг юқори чегараси бўлсин:

$$f\left(x_i'\right) = m_i\,;\; f\left(x_i' + h_i\right) = M_i\,,$$

демак, функциянинг $\left(x_{i-1}, x_i\right)$ интервалдаги тебраниши қуйидагича бўлади:

$$f\left(x_i' + h_i\right) - f\left(x_i'\right) = M_i - m_i\,.$$

Функция узлуксиз бўлгани учун $\left(x_{i-1}\,, x_i\right)$ интервални исталганча кичик қилиш мумкин; шунинг учун $|h_i|$ ҳам исталганча кичик бўлади. Иккинчи томондан, функция узлуксиз бўлгани учун аргументнинг ҳар бир чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси тўғри келади; шунинг учун исталганча кичкина мусбат ε сон берилганда, шундай мусбат η сонни топиш мумкинки,

$$|h_i| < \eta \quad \text{бўлганда}$$

$$f\left(x_i' + h_i\right) - f\left(x_i'\right) < \varepsilon \quad \text{бўлади.}$$

демак, $|h_i|$ етарли даражада кичик бўлганда

$$M_i - m_i < \varepsilon.$$

§ 26. ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

Тескари функция тўғрисида 7-параграфда тушунча бериб ўтган эдик. Энди бу ўринда тескари функциянинг қай вақтда бир қийматли ва узлуксиз бўлишини текширамиз. Бу масала монотон функция тушунчасига асосланади.

Агарда $x = a$ дан $x = b$ гача интервалда $f(x)$ функциянинг аргументи доимо ўсиб (камайиб) борган ҳолда функциянинг ўзи ҳам доимо ўсиб (камайиб) борса, у ҳолда $f(x)$ функцияни ўсувчи функция дейилади.

Буни аналитик равишда ифода қилиш учун x_1 ва x_2 ни $x = a$ дан $x = b$ гача интервалдаги ихтиёрий икки сон фараз қиламиз. Агарда $x_2 > x_1$ бўлганда $f(x_2) > f(x_1)$ бўлса, $f(x)$ функция ўсувчи функция бўлади.

Масалан, $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда ўсувчи функция бўлади.

Агарда $x = a$ дан $x = b$ гача интервалда функциянинг аргументи доимо ўсиб (камайиб) борган ҳолда функциянинг ўзи доимо камайиб (ўсиб) борса, у, ҳолда $f(x)$ функцияни камаювчи функция дейилади.

Буни аналитик равишда ифода қилиш учун x_1 ва x_2 ни $x = a$ дан $x = b$ гача интервалдаги ихтиёрий икки сон фараз қиламиз. Агарда $x_2 > x_1$ бўлганда $f(x_2) < f(x_1)$ бўлса, $f(x)$ функция камаювчи функция бўлади.

Масалан, $y = \cos x$ $(0, \pi)$ интервалда камаювчи функция бўлади. $x = a$ дан $x = b$ интервалда ё ўсувчи, ё камаювчи бўлган $f(x)$ функцияни шу интервалда **монотон** функция дейилади.

Теорема. *Агарда (a, b) интервалда $y = f(x)$ x нинг монотон ва узлуксиз функцияси бўлса, бу ҳолда $[f(a), f(b)]$ интервалда (тескари) $x = \varphi(y)$ функция ҳам y нинг монотон ва узлуксиз функцияси бўлади.*

Масала аниқ бўлсин учун $f(x)$ ни (a, b) интервалда ўсувчи функция фараз қиламиз. Бу ҳолда бу интервалда $f(a)$ функциянинг энг кичик қиймати ва $f(b)$ унинг энг катта қиймати бўлади. Агарда C ни $f(a)$ билан $f(b)$ нинг орасидаги ихтиёрий сон фараз қилинса, у ҳолда узлуксиз функциянинг хоссасига мувофиқ (a, b) интервалда шундай ξ сон топиладики, $f(\xi) = C$ бўлади.

Бу каби ξ сон ёлғиз биргина бўлади, чунки уларнинг иккита, масалан ξ ва ξ' фараз қилганда

$$f(\xi) = C, \text{ ва } f(\xi') = C$$

тенгликлар функциянинг ўсиш шартига қарши бўлар эди, ҳолбуки $f(x)$ ўсувчи функция бўлгани учун

$$\xi > \xi' \text{ бўлганда } f(\xi) > f(\xi'),$$

$$\xi < \xi' \text{ бўлганда } f(\xi) < f(\xi')$$

бўлиши керак.

Демак, $f(a)$ билан $f(b)$ орасида y нинг ҳар бир қийматига x учун биргина қиймат тўғри келади. Бу эса $x = \varphi(y)$ ни y нинг бир қийматли функция бўлишини кўрсатади, чунки y нинг $[f(a), f(b)]$ интервалдаги ҳар бир қийматига x учун (a, b) интервалда биргина қиймат тўғри келади.

Энди $x = \varphi(y)$ нинг $[f(a), f(b)]$ интервалда ўсувчи функциялигини исбот қиламиз. Бунинг учун

$$x_1 = \varphi(y_1), \quad x_2 = \varphi(y_2)$$

ва

$$y_1 < y_2$$

фараз қиламиз.

Агарда $x_1 > x_2$ бўлса эди у ҳолда $f(x)$ ўсувчи функция бўлгани учун

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{ёки} \quad y_1 > y_2$$

бўлар эди. Бу эса қўйилган шартга тўғри келмайди. Шунга ўхшаш агарда $x_1 = x_2$ бўлса эди у ҳолда

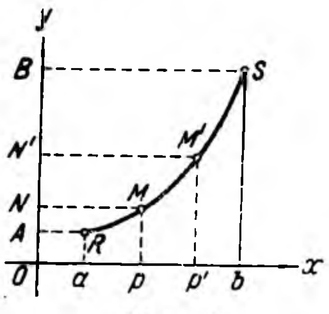
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{ёки} \quad y_1 = y_2$$

бўлар эди. Бу ҳам қўйилган шартга тўгри келмайди. Бу эса $x = \varphi(y)$ функциянинг $[f(a), f(b)]$ интервалда ўсишини кўрсатади.

Энди бу функциянинг узлуксизлигини исбот қиламиз. Бунинг учун x_1 ва y_1 ни x ва y нинг бир жуфт мос қийматлари фараз қиламиз, яъни

$$y_1 = f(x_1).$$

$f(x)$ узлуксиз функция бўлгани учун x нинг ҳар қандай исталганча кичик ўзгаришига y нинг исталганча кичик ўзгариши тўғри келади. x бир қийматли бўлгани учун, аксинча y нинг исталганча кичик ўзгаришига x нинг ҳам исталганча кичик ўзгариши тўғри келади. Бу эса $x = \varphi(y)$ функциянинг $[f(a), f(b)]$ интервалда узлуксизлигини кўрсатади.



Шакл 22.

Теореманинг геометрик тасвири учун 22-шаклдаги RS чизиқни (a, b) интервалда узлуксиз бўлган бирор ўсувчи $f(x)$ функция фараз қиламиз. Бу ҳолда унга тескари бўлган $x = \varphi(y)$ функция (A, B) интервалда бир қийматли ва узлуксиз бўлади.

Ҳақиқатда, x, OX ўқида ўнг томонга қараб a дан b гача юрганда, y, OY ўқида юқорига қараб A дан B гача юради; ab даги ҳар бир нуқтага AB да биргина нуқта тўғри келади ва аксинча AB даги ҳар бир нуқтага ab да ҳам биргина нуқта тўгри келади (масалан, P нуқтага N ва N га P). A билан B орасида $\varphi(y)$ функциянинг узлуксизлиги шаклдан кўринмоқдадир. Бу ҳол албатта функция монотон бўлган чоқдагина бўлади. Бу эса 23-шаклдан кўринмоқдадир. Ҳақиқатда, $f(x)$, (a, b) интервалда узлуксиз (монотон эмас) бирор функция ва AB унинг графиги бўлсин.

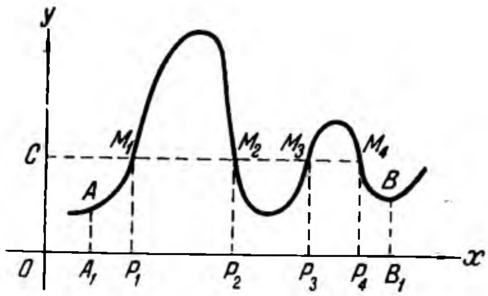
Шаклга қараганда бу функция бир қийматли бўлган ҳолда, унга тескари бўлган $\varphi(y)$ функциянинг кўп қийматли эканлигини кўрамиз.

Ҳақиқатда

$x = OP_1$ бўлса $y = P_1M_1$ бўлади

$x = OP_2$ „ $y = P_2M_2$ „

$x = OP_3$ „ $y = P_3M_3$ „



Шакл 23.

Ҳолбуки, шаклга қараганда y нинг ҳар бир қийматига x учун бир эмас, балки бир неча қиймат белгиланади. Масалан, $y = OC$ бўлса $x = CM_1$, CM_2, CM_3, CM_4 бўлади.

Шунинг билан $f(x)$ функция бир қийматли бўлган ҳолда, унга тескари бўлган $\varphi(y)$ функциянинг кўп қийматли бўлганлигини кўрамиз. Демак, тўғри функция бир қийматли бўлгани билан унга тескари бўлган функциянинг ҳам бир қийматли бўлиши шарт эмасдир.

Масалалар

84. Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлиги текширилсин:

1) $y = \sqrt{x}$, 2) $y = \lg_a x$

3) $y = \frac{5}{x^2+1}$, 4) $y = \sin^2 x$

85. Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталари белгилансин:

$$1)\ y = \operatorname{tg} x, \quad 2)\ y = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}, \qquad 3)\ y = \frac{1}{1 - \sin^2 x}.$$

Жавоб: 1) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k — бутун сон ё ноль;

2) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$; $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k — бутун сон ё ноль.

86. Бутун рационал функция

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n.$$

Истаган нуқтада узлуксиз бўлади. Буни исбот қилинсин.

87. Касрли рационал функция

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_m},$$

махражини нолга айлантирадиган аргумент қийматларидан бошқа унинг ҳамма қийматлари учун узлуксиз бўлади. Буни исбот қилинсин.

Учинчи боб

ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 27. ИККИ ТАРИХИЙ МАСАЛА

Дифференциал ҳисобнинг асосида ушбу икки масаланинг ишланиш методи туради: 1) Тенгламаси берилган эгри чизиқнинг белгили нуқтасига уринма ўтказиш, яъни уринманинг тенгламасини тузиш ва 2) Ҳаракати белгили бўлган нуқтанинг исталган моментдаги тезлигини аниқлаш.

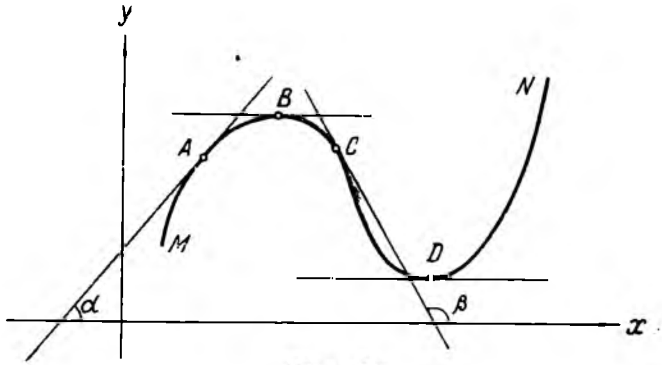
Биринчи масала устида Лейбниц ва иккинчи масала устида Ньютон ишлаган. Буларнинг ҳар бири масала устида мустақил ишлаган бўлса-да, бироқ иккаласи ҳам бир метод билан давом этиб, бир натижага келган. Дифференциал ҳисобнинг асосий методи ҳалиги масалаларни ечишда қўлланган қуйидаги методдан иборатдир.

Лейбниц масаласи

1. Лейбниц масаласини, яъни тенгламаси берилган эгри чизиқнинг белгили нуқтасига уринма ўтказиш масаласини ечишдан илгари, энг аввал, умуман функциянинг ўзгаришини текширишда уринманинг қандай роль ўйнаши ва унинг аҳамияти устида қисқача тўхтаб ўтамиз.

Бунинг учун 24-шаклдаги MN эгри чизиқни бирор $y = f(x)$ функциянинг графиги ва унинг A, B, C ва D нуқталаридан ўтган тўғри чизиқларни унинг шу нуқталарига уринма фараз қиламиз.

Шаклга диққат қилганда графикнинг ўзгариб бориши билан унга ўтказилган уринмаларнинг ўринлари орасида боғланиш борлигини кўрамиз. Ҳақиқатда, графикка ўтказилган уринмаларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчакларига диққат қилганда, кўрамизки: 1) графикнинг юқорида кўтарилган, A каби нуқтасига ўтказилган уринма, абсцисса ўқи билан ўткир (α) бурчак ташкил қилади, 2) графикнинг қуйига қараб тушган, C каби нуқтасига ўтказилган уринма абсцисса ўқи билан ўтмас (β) бурчак ташкил қилади ва 3) графикнинг кўтарилиши билан тушиши орасидаги B каби ёки D каби нуқтага ўтказилган уринма абсцисса ўқига параллел бўлади.



Шакл 24.

Демак, эгри чизиқнинг бирор нуқтасига ўтказилган уринманинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги ё, бошқача қилиб айтганда, уринманинг абсцисса ўқига оғмалиги функциянинг шу нуқтада қандай ўзгаришини ифода қилади.

2. Энди Лейбниц масаласига ўтамиз. Қўйилган масалани ечиш учун

$$y = f(x)$$

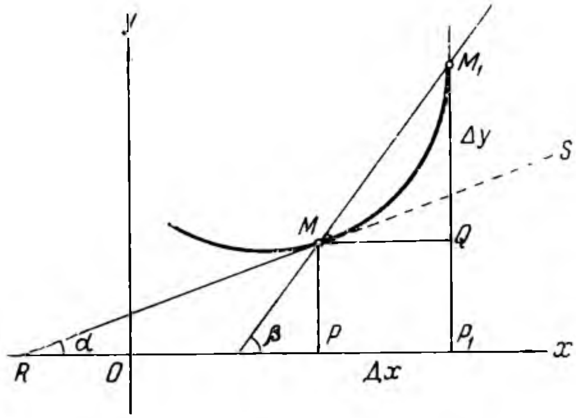
ни 25-шаклдаги эгри чизиқнинг тенгламаси фараз қиламиз. Бу эгри чизиқнинг истаганча бирор M нуқтасига уринма ўтказиш керак бўлсин. Бунинг учун у эгри чизиқда иккинчи бир M_1 нуқтани олиб, иккала нуқта устидан кесувчи чизиқ ўтказамиз. Шаклга мувофиқ

$$OP = x, \quad MP = y = f(x).$$

PP_1 ни x нинг орттирмаси фараз қилинса, у ҳолда

$$OP_1 = x + \Delta x, \; M_1P_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Энди M нуқтадан абсцисса ўқига параллел қилиб MQ ни ўтказамиз. Агарда эгри чизиқнинг M ва M_1 нуқталаридан ўтган кесувчи чизиқнинг MQ ёки OQ билан ташкил қилган бурчагини β фараз қилинса, тўғрибурчакли MM_1Q учбурчакда:



Шакл 25.

$$tg\,\beta = \frac{QM_1}{QM}\,; \qquad (1)$$

шаклга мувофиқ

$$QM_1 = P_1M_1 - P_1Q = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x); \; MQ = \Delta x.$$

Буларни (1) га қўйилса, қуйидаги тенглик чиқади:

$$tg\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Энди Δx ни нолга яқинлаштириб келамиз; бу ҳолда P_1 нуқта P нуқтага ва M_1 нуқта M нуқтага яқинлашиб келади. Бунинг натижасида ҳалиги MM_1 кесувчи M нуқта атрофида айлана бошлайди ва M_1 нуқта чексиз даражада M нуқтага яқинлашганда MM_1 ўрнининг лимити эгри чизиқнинг M нуқтасига, RS уринмага айланади.

Агарда уринманинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчагини α фараз қилинса, у β нинг лимити бўлади. Шунинг билан

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Демак, тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқнинг (x, y) нуқтасидаги уринмани аниқлаш учун (3) лимитни излашга тўғри келади; бу лимит — уринманинг абсцисса ўқи (мусбат томони) билан ташкил этган бурчагининг тангенсини ёки бошқача қилиб айтганда уринманинг бурчак коэффициентини ифода қилади.

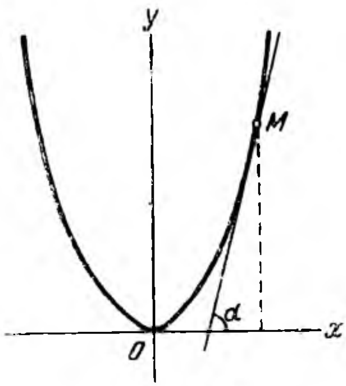
Мисол. Тенгламаси $y = x^2$ бўлган параболанинг $M(2, 4)$ нуқтасига уринма ўтказилсин.

Ечиш йўли:

Бунинг учун энг аввал уринманинг бурчак коэффициентини топамиз. Уни топиш учун ушбу

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ни излашга тўғри келади. Бунинг учун тартиб билан қуйидаги амалларни бажарамиз:



Шакл 26.

$$y = x^2$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Бундан берилган функцияни айириб оламиз:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Δy нинг Δx га нисбатини топиш учун сўнгги тенгликнинг иккала томонини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Демак,

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Шунинг билан уринманинг бурчак коэффициенти $M(2, 4)$ нуқтада

$$tg\,\alpha = 2 \cdot 2 = 4$$

бўлади.

Уринманинг ўзи бўлса, y $M(2, 4)$ нуқтадан ўтиб, бурчак коэффициенти 4 бирликка тенг бўлган тўғри чизиқдан иборатдир. Демак, уринманинг тенгламаси

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

ёки

$$4x - y - 4 = 0 \quad \text{бўлади.}$$

Ньютон масаласи

Ньютон масаласи ҳаракати белгили бўлган нуқтанинг исталган моментдаги тезлигини аниқлашдан иборатдир.

Маълумки, умуман ҳаракатда бўлган нуқтанинг юрган масофаси ўтган вақтга қараб ўзгариб боради ёки математика тилида ифода қилганда, вақтнинг функцияси бўлади. Шунинг учун белгили бошлангич нуқтадан бошлаб ҳаракатда бўлган нуқтанинг t вақтда юрган масофасини s фараз қилинса

$$s = f(t). \tag{1}$$

Ҳаракатнинг t моментдаги тезлигини аниқлаш учун нуқтанинг Δt вақтда юрган масофасини Δs фараз қиламиз:

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t) \tag{2}$$

(2) дан (1) ни айириш натижасида Δs учун ушбу ифода белгиланади:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{3}$$

Нуқтанинг ҳаракати текис бўлганда унинг юрган масофаси сарф бўлган вақтга пропорционал бўлар эди ва бу ҳолда унинг тезлиги Δs масофанинг Δt вақтга нисбати билан, яъни ушбу

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

нисбат билан ўлчанар эди.

Ҳаракат текис бўлмаган ҳолда (4) нисбат **ўрта тезликни** ифода қилади.

Табиий Δt камайган сари, ўрта тезлик текис ҳаракатнинг тезлигига яқинлашиб боради. Шунинг учун Δt нолга яқинлашганда ўрта тезликнинг лимити — ҳаракатнинг t моментдаги **ҳақиқий тезлиги** дейилади. Демак, тенгламаси $s = f(t)$ бўлган нуқта ҳаракатининг тезлигини аниқлаш учун ушбу лимитни излашга тўгри келади:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{5}$$

Мисол. Физикадан маълумки, юқоридан пастга тушган (озод) жисмнинг юрган йўлини сантиметр ҳисобида s ва унга сарф бўлган вақтни секунд ҳисобида t фараз қилинса, буларнинг орасидаги муносабат қуйидагича бўлади:

$$s = 490\, t^2 \ (\textit{см}).$$

Бу муносабатга асосланиб, жисмнинг 5-секунд охиридаги тезлиги топилсин.

Берилган мисолда:

$$s = f(t) = 490\, t^2$$

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t) = 490\,(t + \Delta t)^2$$

$$\Delta s = 490\,(t + \Delta t)^2 - 490\, t^2$$

ёки

$$\Delta s = 980\, t \cdot \Delta t + 490\,(\Delta t)^2.$$

Шунинг учун (5) ифоданинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = 980\, t.$$

Демак, ҳаракатнинг 5-секунд охиридаги тезлиги $980 \cdot 5 = 4900$ *см/сек* бўлади.

Натижада, Лейбниц масаласи ҳам, Ньютон масаласи ҳам

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

кўринишдаги лимитни излашга олиб келади. Математиканинг масалаларини текширишда кўпинча шундай лимитлар билан иш кўришга тўғри келади. Дифференциал ҳисобнинг кўп масалалари шундай лимитларни излашга олиб келади.

§ 28. ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Ўтган параграфда текширилган Лейбниц ва Ньютон масалалари бизни бир натижага олиб келган эди. Ҳақиқатда, ҳар икки масалада берилган

$$y = f(x) \tag{1}$$

функция ёрдами билан, ушбу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

нисбатни тузишга ва бу нисбатнинг Δx нолга яқинлашгандаги лимитини излашга тўғри келган эди. Бу каби лимитлар математиканинг кўпгина масалаларида, ҳар бир одимда учраб туради. Бу, яъни (2) нисбатнинг лимити, математикада ғоят даражада катта роль ўйнайди ва у мавжуд бўлган чоқда, берилган $f(x)$ функциянинг **ҳосиласи** (производная) ёки дифференциалли нисбати дейилади.

Юқоридаги (2) нисбатнинг тузилишига диққат қилганда кўрамизки, унинг сурати функциянинг ва махражи аргументнинг (эркин ўзгарувчининг) орттирмасидан иборатдир. Буни эътиборга олиб, функция ҳосиласини қуйидагича таъриф қилиш мумкин: $y=f(x)$, (a, b) интервалда узлуксиз ва бир қийматли бирор функция бўлсин. Бу ҳолда (2) нисбатнинг лимити, яъни

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатининг лимити, аргумент орттирмаси нолга интилиши шарти билан у функциянинг ҳосиласи дейилади.

Берилган $y=f(x)$ функциянинг ҳосиласи одатда:

$$y' \text{ ёки } f'(x) \text{ ёки } \frac{dy}{dx}$$

равишда ифода қилинади. Натижада ҳосиланинг математик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).} \qquad (3)$$

Ҳосиланинг **геометрик** ва **механик** маънолари бизга ўтган параграфда аниқланган бўлса-да, бу ерда яна бир марта таъкидлаб ўтамиз:

Геометрия нуқтаи назаридан функциянинг ҳосиласи, у функцияни тасвир қилган эгри чизиқнинг берилган нуқтасидан ўтган уринманинг абсцисса ўқи (мусбат томони) билан ташкил қилган бурчагининг тангенсини ифода қилади:

$$y'=f'(x)=tg\alpha.$$

Механика нуқтаи назаридан агарда x ни вақт ва y ни масофа фараз қилинса, бу ҳолда ҳосила: $y=f(x)$ қонуни бўйича ҳаракатда бўлган нуқтанинг x моментдаги тезлигини ифода қилади.

2. Шунинг билан баробар бу ерда шуни ҳам айтиб ўтиш керак: (3) лимит, Δx нинг нолга яқинлашиш қонунига боғлиқ бўлмай, балки Δx ҳам мусбат, ҳам манфий бўлиб нолга яқинлашиши мумкин:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}, \tag{5}$$

булардан биринчиси функциянинг **ўнг ҳосиласи** ва иккинчиси **сўл ҳосиласи** дейилади.

Агарда $y=f(x)$ функциянинг ўнг ва сўл ҳосилалари ўзаро тенг бўлса, яъни (3) лимит Δx нинг мусбат ёки манфий томондан нолга интилишига қарамай мавжуд бўлса, бу ҳолда $y=f(x)$ функцияни x нуқтада аниқ ҳосилага эга дейилади ёки уни x нинг ҳалиги қийматида **дифференциалланувчи функция** дейилади.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}. \tag{6}$$

Функциянинг ҳосилага эга бўлиши учун унинг узлуксизлиги зарурдир. Белгили нуқтада чекли ҳосилага эга бўлган ҳар бир функция шу нуқтада узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан, ε ни чексиз кичик фараз қилинса, (3) дан қуйидаги тенглик чиқади:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

ёки

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x \to 0}[f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x]=0.$$

Шунинг билан аргументнинг орттирмаси нолга интилганда, функциянинг орттирмаси ҳам нолга интилади. Бу эса, функциянинг x нуқтада узлуксизлигини кўрсатади.

Аксинча, функция узлуксиз бўлган билан у ҳосилага эга бўлмаслиги мумкин, яъни **функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлсин учун у функциянинг узлуксиз бўлиши зарур бўлса-да, бироқ ҳосиланинг мавжуд бўлиши учун функциянинг узлуксизлиги кифоя қилмайди.**

Мисол учун ушбу функцияни оламиз:

$$y=|x|$$

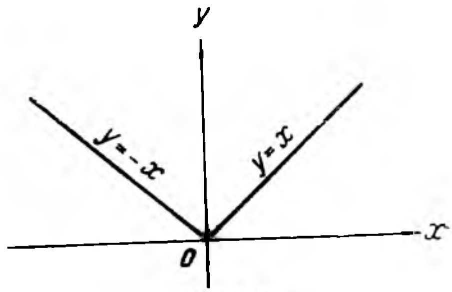
бунга қараганда: $x < 0$
бўлса, $y = -x$ ва $x > 0$
бўлса, $y = x$ бўлади (шакл 27).

Бу функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз бўлса-да, лекин бу нуқтада белгили ҳосиласи йўқдир. Буни кўрсатиш мақсади билан функциянинг ўнг ва сўл ҳосилаларини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(0 - \Delta x) - f(0)}{-\Delta x} = \lim \frac{|0 - \Delta x| - 0}{-\Delta x} = -1.$$

Функциянинг ўнг ва сўл ҳосилалари $x = 0$ нуқтада ўзаро тенг эмас; шунинг учун бу нуқтада функция ҳосилага эга эмасдир. Геометрия нуқтаи назаридан эгри чизиқ, унинг $x = 0$ нуқтасида белгили уринмага эга эмасдир. Ҳақиқатда координата бошида $y = |x|$ чизиққа икки уринма ўтказиш мумкин: улардан бири $y = x$ билан ва иккинчиси $y = -x$ билан бирлашиб кетади, ҳолбуки эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасига умуман биргина уринма ўтказиш мумкиндир.



Шакл 27.

3. Юқорида берилган таърифга ва (3) тенгликнинг тузилишига қараганда, берилган $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини излаш **қоидаси** қуйидагича бўлади:

1) функциянинг аргументи x га Δx орттирма берилади, яъни x нинг ўрнига $x + \Delta x$ қўйилади; бунинг натижасида функция учун янги қиймат белгиланади,

2) функция учун белгиланган янги қийматдан унинг аввалги қиймати айириб олинади; бунинг натижасида функциянинг Δy орттирмаси белгиланади ва

3) функция орттирмасини аргумент орттирмасига бўлиб

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

нисбатнинг Δx нолга яқинлашгандаги лимити изланади.

Мисол 1. Ушбу $y = 5x^2 + 1$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Ечиш йўли: Қоидага мувофиқ давом этамиз:

1) $y + \Delta y = 5(x + \Delta x)^2 + 1 = 5x^2 + 10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 + 1.$

2)
$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 5x^2 + 10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 + 1 \\ - \quad y = 5x^2 + 1 \\ \hline \Delta y = 10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 \end{array}.$$

3)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x,$$

Демак, $\frac{dy}{dx} = 10x$ ёки $y' = 10x.$

Мисол 2. Ушбу $y = x^3 + 2x - 3$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Ечиш йўли:

1)
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - 3 =$$
$$= x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 3.$$

2)
$$\begin{array}{r} y + \Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 3 \\ - \quad y = x^3 + 2x - 3 \\ \hline \Delta y = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x \end{array}.$$

3)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2.$$

Демак, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$

ёки ҳосилани y' билан ифода қилинса

$$y' = 3x^2 + 2.$$

Масалалар

88 $y = 3x + 5;\ y' = ?$ Жавоб: $y' = 3$

89 $y = 2x^2 - 5x + 7;\ y' = ?$ Жавоб: $y' = 4x - 5.$

90 $f(x) = \frac{a}{x};\ f'(x) = ?$ Жавоб: $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$

91 $f(x)=\sqrt{x}$; $f'(x)=?$ Жавоб: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

92 $\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$; $\varphi'(x)=?$ Жавоб: $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

93. Тенгламаси $y=2x^2+1$ бўлган параболанинг $(1;3)$ нуқтасига уринма ўтказилган. Унинг бурчак коэффициенти аниқлансин. Жавоб: $tg\alpha=4$.

94. Параболанинг тенгламаси $y=0{,}5x^2$. Унинг шаклини чизиб, $(1;0{,}5)$ нуқтасига уринма ўтказилсин.

95. Тенгламаси $y=3x^2-5x+7$ бўлган эгри чизиқнинг шундай нуқтаси топилсинки, ундан ўтган уринма абсцисса ўқининг мусбат томони билан 45° ли бурчак ташкил этсин.
Жавоб: (1,5).

96. Тенгламаси $y=x^2-5x+7$ бўлган эгри чизиқнинг шундай нуқтаси топилсинки, у нуқтадан ўтган уринма $y=3x$ тўғри чизиққа параллел бўлсин.
Жавоб: (4,3).

97. Нуқта ҳаракатининг тенгламаси $s=5t^3-3t^2+0{,}7$ (вақт бирлиги учун минут ва узунлик бирлиги учун метр қабул қилинган). Нуқта ҳаракатининг $t=4$ моментдаги тезлиги аниқлансин.
Жавоб: 216 *м/мин*.

§ 29. ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ҚОИДАЛАРИ

Берилган функциянинг ҳосиласини топиш амалини одатда дифференциаллаш дейилади. Ўтган параграфда чиқарилган қоида ёрдами билан ҳар қандай функцияни дифференциаллаш мумкин бўлса-да, бироқ кўп вақтларда (хусусан функция мураккаб бўлганда) узундан-узун бир неча амалларни ижро қилишга тўғри келади.

Шу сабабдан функцияларни синфларга бўлиб, улар учун одатда махсус дифференциаллаш формулалари чиқарилади ва дифференциаллаш чоғида тўғридан-тўғри у формулалар ишлатилади. Келаси параграфлардан мақсад, ана шу формулаларни чиқариш ва функцияларни дифференциялашда уларни ишлатишдир.

§ 30. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

$$y=x^n.$$

Биз бу ерда икки ҳолни текширамиз:

1) n — бутун ва мусбат сон ва 2) n — ҳар қандай ўзгармас сон.

1. Умумий қоидага мувофиқ

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

$$y = x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

n ни бутун ва мусбат фараз қилиб, Ньютон формуласи ёрдами билан қавсни очамиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + n(\Delta x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\Delta x)^2 x^{n-2} + \cdots + (\Delta x)^n - x^n,$$

$$\Delta y = n(\Delta x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\Delta x)^2 x^{n-2} + \cdots + (\Delta x)^n.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини Δx га бўлинса, у қуйидагича бўлади:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\Delta x)\, x^{n-2} + \cdots + \cdots (\Delta x)^{n-1}.$$

Δx нолга яқинлашганда бу ифоданинг лимити nx^{n-1} бўлади, чунки бу ҳолда унинг қолган ҳадлари нолга айланади. Демак,

$$y' = nx^{n-1},$$

шунинг билан

$$\boxed{y = x^n \text{ бўлса, } y' = nx^{n-1}.}$$

Масалан,

$$y = x^3 \text{ бўлса } y' = 3x^2 \text{ бўлади,}$$

$$y = x^5 \text{ бўлса } y' = 5x^4 \text{ бўлади,}$$

$$y = x^4 \text{ бўлса } y' = 4x^3 \text{ бўлади,}$$

$n = 1$ бўлганда $y = x^n$ функция $y = x$ бўлади, чиқарилган формулага мувофиқ бунинг ҳосиласи қуйидагича бўлади:

$$(x)' = 1\cdot x^{1-1} = 1\cdot x^0 = 1.$$

Демак, эркин ўзгарувчининг (оддий аргументнинг) ҳосиласи ҳамма вақт 1 га тенг бўлади.

2*. n — ҳар қандай ўзгармас бўлган ҳолда ҳам юқорида чиқарилган формула ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатда,

$$y = x^n \tag{1}$$

ва n исталган ўзгармас сон бўлсин. Умумий қоидага мувофиқ

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x^n}{\Delta x}. \tag{2}$$

α ни чексиз кичик фараз қилинса, Δx ни

$$\Delta x = \alpha x \tag{3}$$

равишда ифода қилиш мумкин. Бу ҳолда (2) нинг кўриниши қуйидагича бўладн:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \alpha x)^n - x^n}{\alpha x} = \frac{x^n\left[(1 + \alpha)^n - 1\right]}{\alpha x}$$

ёки:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} \cdot \frac{(1 + \alpha)^{n-1}}{\alpha}. \tag{4}$$

Агарда

$$(1 + \alpha)^n - 1 = \beta \tag{5}$$

фараз қилинса,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} \cdot \frac{\beta}{\alpha}.$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = x^{n-1} \lim \frac{\beta}{\alpha}, \tag{6}$$

(5) дан

$$1 + \beta = (1 + \alpha)^n.$$

Бунинг иккала томонини логарифмаланса:

$$\ln (1 + \beta) = n \ln (1 + \alpha)$$

ёки

$$\beta \cdot \frac{1}{\beta} \ln (1 + \beta) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} n \ln (1 + \alpha),$$

ёки

$$\beta \ln (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = \alpha n \ln (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Демак,

$$\frac{\beta}{\alpha} = n \cdot \frac{\ln (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \qquad (7)$$

(5) га мувофиқ α нолга яқинлашганда β ҳам нолга яқинлашади. Шунинг учун

$$\lim \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = n \cdot \frac{\ln e}{\ln e} = n.$$

Буни (6) га қўйилса $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи ҳамон

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = nx^{n-1}$$

ёки

$$y' = nx^{n-1} \quad \text{бўлади.}$$

3. Юқорида чиқарилган формула ёрдами билан унинг хусусий ҳоллари бўлган қуйидаги формулаларни чиқариш мумкин:

1. $$y = \sqrt{x}.$$

Бу функцияни $y = x^{\frac{1}{2}}$ шаклида ёзиб, асосий формулани ишлатамиз:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Шунинг билан

$$\boxed{y = \sqrt{x} \text{ бўлса, } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

2. $$y = \sqrt[3]{x}.$$

Бу функцияни $y = x^{\frac{1}{3}}$ шаклида ёзиш мумкин. Шунинг учун:

$$y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Шунинг билан

$$\boxed{y=\sqrt[3]{x} \text{ бўлса, } y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.}$$

Одатда радикал 2-ва 3-даражали бўлган ҳолларда тўғридан-тўғри юқоридаги формулалар ишлатилади. Акс ҳолда ҳалиги йўл билан давом этилади. Масалан,

1) $$y=\sqrt[4]{x};\ y'=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

2) $$y=\sqrt[5]{x^3};\ y'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

3) $$y=\sqrt[8]{x^5};\ y'=\left(x^{\frac{5}{8}}\right)'=\frac{5}{8}x^{-\frac{3}{8}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{8}}}=\frac{5}{8\sqrt[8]{x^3}}.$$

4) $$y=\frac{1}{x};\ y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

5) $$y=\frac{1}{x^3}\ y'=\left(x^{-3}\right)'=-\frac{3}{x^4}.$$

§ 31. $y=af(x)$ НИНГ ҲОСИЛАСИ (a—ЎЗГАРМАС)

a ўзгармас сон бўлганда $y=af(x)$ функциянинг ҳосиласи $y'=af'(x)$ бўлади. Ҳақиқатда умумий қоида бўйича

1) $$y+\Delta y=af(x+\Delta x),$$
$$y=af(x),$$

2) $$\Delta y=a\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right],$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Δx нолга интилганда $y'=af'(x)$, шунинг билан

$$\boxed{y=af(x) \text{ бўлса, } y'=af'(x).}$$

Масалан,

$$y = 4x^3;\ y' = 4\,(x^3)' = 12\,x^2$$
$$y = ax^n;\ y' = a\left(x^n\right)' = anx^{n-1}.$$

§ 32. ЎЗГАРМАС СОННИНГ ҲОСИЛАСИ

Баъзи бир вақт функциянинг аргументи ўзгарса-да, функциянинг ўзи ўзгармасдан қолиши мумкин. Масалан, ушбу

$$y = \frac{\sin^2 x - a^2 + \cos^2 x}{b + c}$$

функцияда x ўзгарса-да, y ўзгармайди, чунки x қандай бўлса-да

$$y = \frac{1 - a^2}{b + c}$$

бўлади. Бундай ҳолларда функция ўзгармас сонга айланади. Шунинг учун бизга ўзгармас соннинг ҳосиласини билишга тўғри келади. Бунинг учун ўзгармас сонни C фараз қиламиз. Демак,

$$y = C.$$

y нинг қиймати x га боғлиқ бўлмагани учун x га ҳар қанча орттирма берган билан y нинг қиймати ўзгармайди, яъни унинг Δx орттирмаси ноль бўлади.

$$\Delta y = 0.$$

Шунинг учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

ва

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 0 \quad \text{ёки} \quad y' = C' = 0.$$

Демак, **ҳар қандай ўзгармас соннинг ҳосиласи ноль бўлади.**

Масалан,

$$(5)' = 0;\ (\sqrt{2})' = 0;\ (a)' = 0.$$

§ 33. ЙИҒИНДИНИНГ ҲОСИЛАСИ

Кўпинча бир неча функцияларнинг йиғиндисидан иборат бўлган функциянинг ҳосиласини излашга тўғри келади. Бу масалани умумий равишда ечиш учун қўшилувчи функцияларани u, v, w ва уларнинг алгебраик йиғиндисини y фараз қиламиз, яъни

$$y = u + v - w. \tag{1}$$

Қўшилувчи функцияларнинг ҳар бири x нинг функцияси фараз қилинади. Масалан,

$$u = f_1(x), \quad v = f_2(x), \quad w = f_3(x). \tag{2}$$

x нинг ўзгаришига қараб, u, v ва w нинг ҳар бири ҳам ўзгаради. Фараз қилайлик x нинг орттирмаси Δx бўлганда,

u нинг орттирмаси Δu бўлсин,
v нинг орттирмаси Δv бўлсин,
w нинг орттирмаси Δw бўлсин.

Шунинг учун умумий қоида бўйича:

1) $$y = \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w$$

2) бундан (1) ни айириб олинса

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

3) бунинг иккала томони Δx га бўлинса

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Δx нолга яқинлашган ҳолда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'; \qquad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u';$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'; \qquad \frac{\Delta w}{\Delta x} \to w'.$$

Демак, лимитга ўтганда

$$\underline{y' = u' + v' - w'.}$$

Мисол 1.

$$y = 5x^3 + 2x^2 - x + 7.$$

$$y' = (5x^3)' + (2x^2)' - (x)' + 0 = 15x^2 + 4x - 1.$$

Мисол 2.

$$y = 3\sqrt{x} - 3x^5 + 2x^6 + \frac{1}{x}.$$

$$y' = (3\sqrt{x})' - (3x^5)' + (2x^6)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 15x^4 +$$

$$+12x^5 - \frac{1}{x^2}.$$

Мисол 3.

$$y = ax^2 + bx + c\sqrt[3]{x}.$$

$$y' = 2ax + b + c\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

98. $y = 3x^2 + 5x - 7;$ $\qquad y' = ?$

99. $y = ax^2 + bx + c;$ $\qquad y' = ?$

100. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 5;$ $\qquad y' = ?$

101. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;$ $\qquad y' = ?$

102. $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6;$ $\qquad y' = ?$

103. $f(x) = 3ax^4 + 0{,}5x^3 - x + 0{,}7;$ $\qquad f'(x) = ?$

104. $S = 0{,}2t^5 - 1{,}5t^3 + 0{,}3t^2 + t;$ $\qquad S' = ?$

105. $\varphi(x) = ax^3 + \frac{x^2}{b} + \frac{x}{c} + d;$ $\qquad \varphi'(x) = ?$

106. $y = \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^2}{c} + x;$ $\qquad y' = ?$

Ечиш:

$$y = \frac{1}{(a+b)}\cdot x^3 + \frac{1}{c}x^2 + x;$$

$$y' = \frac{1}{(a+b)}\cdot 3x^2 + \frac{1}{c}\cdot 2x + 1 = \frac{3x^2}{(a+b)} + \frac{2x}{c} + 1.$$

Умуман

$$y = \frac{f(x)}{a} \text{ бўлса } y' = \frac{f'(x)}{a} \text{ бўлади}$$

107. $y = \frac{5x^4 - ax^2 - bx + 1}{a+b};$ $\qquad y' = \frac{20x^3 - 2ax - b}{a+b}$

108. $f(x) = a + \frac{bx}{c} + \frac{dx^2}{e} + 0{,}1;$ $\qquad y' = \frac{b}{c} + \frac{2dx}{e}.$

109. $y=(2x^2+3)^3$; $\qquad y'=12x(2x^2+3)^2$.

110. $y=\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}+15$; $\qquad y'=-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

111. $f(x)=\sqrt[8]{x^7}$; $\qquad f'(x)=\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$.

112. $y=\sqrt[n]{x}$; $\qquad y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

113. $y=x^2\sqrt{x}$; $\qquad y'=2{,}5x\sqrt{x}$.

114. $\varphi(x)=\frac{a}{x}+\frac{x}{a}+b^2$; $\qquad \varphi'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{a}$.

115. $y=\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\sqrt[3]{x^2}$; $\qquad y'=-\frac{2}{x^3}-\frac{28}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$.

116. $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$; $\qquad f'(x)=-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}$.

117. $\varphi(x)=\frac{5x^2-2x+1}{x^3}$; $\qquad \varphi'(x)=-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}$.

118. $y=\frac{3x-5}{x^4}$; $\qquad y'=-\frac{9}{x^4}+\frac{20}{x^5}$.

119. $y=\frac{3}{x^5}+x^3\sqrt[4]{x^3}+1$; $\qquad y'=-\frac{15}{x^6}+\frac{15}{4}x^2\sqrt[4]{x^3}$.

120. $F(x)=\frac{5x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{0{,}2}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$; $\quad F'(x)=\frac{10}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{10x^2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$.

121. $f(x)=x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; $\qquad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

122. $y=x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$; $\qquad y'=\frac{13}{9}\sqrt[9]{x^4}$.

123. $f(x)=\frac{3x\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$; $\quad f'(x)=\frac{5}{4\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

§ 34. КЎПАЙТМАНИНГ ҲОСИЛАСИ

Кўпайтувчи функциялардан бири u, иккинчиси v ва буларнинг кўпайтмаси y бўлсин:

$$y = uv.$$

u ва v нинг ҳар бири x нинг бирор функцияси фараз қилинади, масалан,

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x).$$

Умумий қоида бўйича давом этганда

1) x га бирор Δx орттирма берамиз. Бунинг натижасида u нинг орттирмаси Δu, v нинг орттирмаси Δv ва y нинг орттирмаси Δy бўлсин, яъни

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

2) Бундан берилган функцияни айириб оламиз

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

ёки

$$\Delta y = uv + u\cdot\Delta v + v\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v - uv$$

$$\Delta y = u\cdot\Delta v + v\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v.$$

3) Чиққан ифоданинг иккала томонини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v.$$

Δx нолга яқинлашганда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v',$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0.$$

Шунинг билан

$$\boxed{(uv)' = uv' + vu'.}$$

Бизда $\quad u = f(x)$ ва $v = \varphi(x)$.

Шунинг учун

$$u' = f'(x) \quad \text{ва} \quad v' = \varphi'(x).$$

Буларни сўнгги формулага қўйилса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\begin{gathered} y = f(x)\cdot\varphi(x) \text{ бўлса,} \\ y' = f(x)\cdot\varphi'(x) + \varphi(x)\cdot f'(x). \end{gathered}}$$

Демак, **икки функция кўпайтмасининг ҳосиласини топиш учун биринчи функцияни иккинчи функциянинг ҳосиласига ва иккинчи функцияни биринчи функциянинг ҳосиласига кўпайтириб, чиққан натижани қўшиш керак.**

Кўпайтувчиларнинг сони иккитадан ортиқ бўлган ҳолда ҳам кўпайтманинг ҳосиласини шу йўл билан топиш мумкин. Масалан,

$$(uvw)' = [u(vw)]' = u(vw)' + u'(vw) =$$
$$= u(v'w + vw') + u'vw = uv'w + uvw' + u'vw.$$

Демак,

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Шунга ўхшаш, умуман:

$$\left(u_1 u_2 u_3 \cdots u_n\right)' = u_1' u_2 u_3 \cdots u_n + u_1 u_2' u_3 \cdots u_n +$$
$$+ \cdots + u_1 u_2 u_3 \cdots u_n'.$$

Чиқарилган формуланинг ишлатилишини тасвир қиладиган мисоллар:

1. $$y = (x^3 + a)(x^2 + b); \quad y' = ?$$

Ечиш йўли: Берилган мисолда:

$$u = f(x) = x^3 + a$$
$$v = \varphi(x) = x^2 + b.$$

Шунинг учун, формулага мувофиқ

$$y' = (x^3 + a)(x^2 + b)' + (x^2 + b)(x^3 + a)'$$
$$y' = (x^3 + a)\,2x + (x^2 + b)\,3x^2$$

ёки

$$y' = 5x^4 + 3bx^2 + 2ax.$$

2. $$y = (ax^2 + b)(cx + d); \quad y' = ?$$

Ечиш йўли:

$$y' = (ax^2 + b)(cx + d)' + (cx + d)(ax^2 + b)'$$
$$y' = (ax^2 + b)\,c + (cx + d)\,2ax$$

ёки

$$y' = 3acx^2 + 2adx + bc.$$

3. $$y=(x+\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}-3x^2\right); \quad y'=?$$

Е ч и ш й ў л и:

$$y'=(x+\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}-3x^2\right)'+$$

$$+(x+\sqrt{x})'\cdot\left(\frac{1}{x}-3x^2\right)$$

$$y'=(x+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{x^2}-6x\right)+\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}-3x^2\right).$$

§ 35. КАСРНИНГ ҲОСИЛАСИ

u ва v нинг ҳар бири x нинг бирор функцияси фараз қилинади. Умумий қоидага мувофиқ

$$y=\frac{u}{v}, \quad (v\neq 0).$$

1) $$y+\Delta y=\frac{u+\Delta v}{v+\Delta v}$$

2) $$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta x)}.$$

Энди Δx ни нолга яқинлаштириб, лимитга ўтамиз. Бу чоқда:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Натижада қуйидаги формула келиб чиқади:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.}$$

Демак, **касрнинг ҳосиласини топиш учун махражини суратининг ҳосиласига, минус суратини махражининг ҳосиласига кўпайтириб, чиққан айирмани махражининг квадратига бўлиш керак.**

Чиқарилган формуланинг қўлланиш усули қуйидаги мисоллардан кўринмоқда:

1) $$y = \frac{ax + b}{x^2}, \quad y' = ?$$

Ечиш йўли: Бу мисолда $u = ax + b$, $v = x^2$. Шунинг учун:

$$y' = \frac{x^2(ax + b)' - (ax + b)(x^2)'}{(x^2)^2},$$

$$y' = \frac{x^2 \cdot a - (ax + b)\,2x}{x^4},$$

$$y' = \frac{ax^2 - 2ax^2 - 2bx}{x^4},$$

ёки

$$y' = -\frac{ax^2 + 2bx}{x^4} = -\frac{ax + 2b}{x^3}.$$

2) $$y = \frac{\sqrt{x}}{ax + b}, \quad y' = ?$$

$$y' = \frac{(ax + b)(\sqrt{x})' - \sqrt{x}(ax + b)'}{(ax + b)^2},$$

$$y' = \frac{(ax + b)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - a\sqrt{x}}{(ax + b)^2},$$

ёки

$$y' = \frac{ax + b - 2ax}{2\sqrt{x}(ax + b)^2},$$

$$y' = \frac{b - ax}{2\sqrt{x}(ax + b)^2}$$

Дифференциаллаш учун масалалар

124. $y = (5 + 3x)(2 - 5x)$; $\quad y' = -(30x + 19)$.

125. $y = (a + bx)(c + dx)$; $\quad y' = ad + bc + 2bdx$.

126. $s = (3t^2 - 5t + 1)(2t + 3)$; $s' = 18t^2 - 2t - 13$.

127. $f(x) = (a + bx^2)(c - dx^3)$; $f'(x) = 2bcx - 3adx^2 - 5bdx^4$.

128. $y = (a^2 + x^2)\left(ax - \frac{b}{x}\right)$; $\quad y' = a^3 - b + 3ax^2 + \frac{a^2b}{x^2}$.

129. $\varphi(x) = (a + \sqrt{x})(\sqrt{x} - b)$; $\quad \varphi'(x) = 1 - \frac{a - b}{2\sqrt{x}}$.

130. $y = \left(a + \frac{1}{x}\right)(x - \sqrt{x} - 1)$; $y' = ?$

131. $f(x) = (\sqrt{x} + x + 1)(2 + \sqrt[3]{x})\left(3 + \frac{1}{x}\right)$; $f'(x) = ?$

132. $f(x) = \left(\frac{a}{x} - x\right)(x\sqrt[3]{x} + b)$; $\quad f'(x) = ?$

133. $\varphi(x) = ax^2\left(\sqrt{x} - \frac{b}{x} + 1\right)(x + x\sqrt{x})$; $\varphi'(x) = ?$

134. $y = \frac{x}{a + x}$; $\quad y' = \frac{a}{(a + x)^2}$.

135. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$; $\quad y' = -\frac{2}{(1 + x)^2}$

136. $y = \frac{a + x}{x^3}$; $\quad y' = -\frac{2x + 3a}{x^4}$.

137. $y = \frac{ax - c}{\sqrt{x}}$; $\quad y' = \frac{ax + c}{2x\sqrt{x}}$.

138. $y = \frac{ax + b}{c + dx}$; $\quad y' = \frac{ac - bd}{(c + dx)^2}$.

139. $y = \frac{a + bx}{x^2}$; $\quad y' = -\frac{2a + bx}{x^3}$.

140. $y = \frac{a + bx^2}{c - dx}$; $\quad y' = \frac{ad + 2bcx - bdx^2}{c^2 - 2cdx + d^2x^2}$.

141. $y=\frac{a+bx^n}{x^m}$; $y'=\frac{(n-m)bx^n-am}{x^{m+1}}$.

142. Тенгламаси $y=\frac{1}{x}$ бўлган эгри чизиқни (1; 1) нуқтасига ўтказилган уринма абсцисса ўқининг мусбат томони билан 135° бурчак ташкил этади. Буни исбот қилинсин.

143. Қуйидаги эгри чизиқларнинг ҳар бирида шундай нуқта аниқлансинки, у нуқтага ўтказилган уринма абсцисса ўқига параллел бўлсин:

1) $y=5x^2+3$; 2) $y=x^2-3x+1$.

Жавоб: 1) (0,3); 2) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

144. Геометриядан маълумки, доиранинг юзи ва унинг айланаси ушбу формулалар билан ифода қилинади:

$$S=\pi R^2, \quad C=2\pi R.$$

Бу формулаларга асосланиб $\frac{dS}{dR}=C$ бўлишини исбот қилинсин ва унинг геометрик маъноси текширилсин.

145. Тенгламаси $y=2x^3-9x^2+12x-3$ бўлган эгри чизиқнинг шундай нуқтаси топилсинки, у нуқтадан ўтган уринма абсцисса ўқига параллел бўлсин.

Жавоб: (2; 1) ва (1; 2) нуқталарда.

146. Нуқтанинг ҳаракат қонуни ушбу $S=\frac{1}{2}t^3-12t+\frac{3}{4}$ тенглама билан ифода қилинади (масофа бирлиги — метр, вақт бирлиги — секунд). Қанча вақтдан кейин нуқта тўхтайди?

Жавоб: 12 секунддан кейин.

147. $f(x)=\frac{x}{1+x}$ бўлса, $f'(3)$ қанча бўлади?

Жавоб: $f'(3)=\frac{1}{16}$.

148. $y=\sqrt[3]{x^2}$ функциянинг $x=0$ нуқтада ҳосиласи текширилсин.

Жавоб: $x=0$ нуқтада функциянинг ҳосиласи йўқ.

§ 36. ФУНКЦИЯДАН ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Ҳозиргача биз ишлатиб келган функциялар энг оддий функциялардан иборат эди. Ҳолбуки, фанда ва табиатда учрайдиган функционал муносабатларнинг кўпи мураккаб бўлади. Масалан,

$$y=\lg(a+\sqrt{a^2+x^2}). \tag{1}$$

Бу функцияни бир неча оддий функцияларга ажратиш мумкин. Масалан,

$$y=\lg u,\ u=a+v,\ v=\sqrt{W},\ W=a^2+x^2,$$

бунга қараганда, y u нинг функцияси, u ўз навбатида v нинг функцияси, v W нинг ва W x нинг функцияси. Шунга ўхшаш

$$y=(ax^2+b)^3 \tag{2}$$

функцияни ҳам икки оддий функцияларга ажратиш мумкин

$$y=u^3,\ u=ax^2+b.$$

(1) ва (2) каби бир неча оддий функциялардан тузилган функцияни „функциядан функция" ёки „мураккаб функция" дейилади; (1) ва (2) функциялардаги биринчи аргумент ролида бўлган u функцияни „мураккаб аргумент" дейилади. Умуман агарда

$$y=f(u) \text{ ва } u=\varphi(x) \tag{3}$$

бўлса, бу ҳолда y, x нинг мураккаб функцияси ва u унинг мураккаб аргументи бўлади.

Энди, y нинг x га нисбатан ҳосиласини топиш учун қоида чиқарамиз. Бунинг учун умумий қоидага мувофиқ x га бирор Δx орттирма берамиз ва бунинг натижасида чиққан u нинг орттирмасини Δu ва y нинг орттирмасини Δy фараз қиламиз. Бизга

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ни топиш керак. Иккинчи томондан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Δx нолга яқинлашганда, Δu ҳам нолга яқинлашади. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ҳосиланинг таърифига мувофиқ

$$y'_x = y'_u \cdot y'_x$$

ёки

$$y'_x = f'(u) \cdot u'_x. \tag{4}$$

Бу тенгликда y'_x, y дан x га нисбатан олинган ҳосилани ифода қилади. Шунинг билан агарда

$y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ бўлса,
$y'_x = f'(u) \cdot u'_x$ бўлади.

Бу формула дифференциал ҳисобнинг энг муҳим формулаларидан саналади. Унинг ёрдами билан мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш мумкин.

Демак, $y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ бўлган мураккаб $f(u)$ функциянинг x га нисбатан ҳосиласини топиш учун $f(u)$ функциянинг u га нисбатан ҳосиласини u дан x га нисбатан олинган ҳосилага кўпайтирилади.

Бошқача ифода қилинганда, аргументи мураккаб бўлган функциянинг ҳосиласи ҳам худди аргументи оддий бўлган функциянинг ҳосиласи каби олиниб бўлгандан сўнг, уни яна мураккаб аргументнинг ҳосиласига кўпайтирилади.

Масалан,

$$y = u^n$$

ва u, x нинг бирор функцияси бўлсин. Исбот қилинган теоремага мувофиқ бунинг ҳосиласи қуйидагича бўлади:

$$y' = nu^{n-1} \cdot u'.$$

Масалан, $y = (ax + b)^3$,

бунинг ҳосиласини топиш учун энг аввал $(ax + b)$ ни вақтинча оддий аргумент фараз қилиб, $3(ax + b)^2$ ёзгандан сўнг, уни $(ax + b)$ нинг x га нисбатан ҳосиласига, яъни a га кўпайтирамиз. Шунинг учун $y = (ax + b)^3$ нинг ҳосиласи

$$y' = 3(ax + b)^2 \cdot a \qquad \text{бўлади.}$$

Шунга ўхшаш:

1) $y = (ax^2 + x + 5)^4;$

$$y' = 4(ax^2 + x + 5)^3(ax^2 + x + 5)' = 4(ax^2+x+5)^3\cdot(2ax+1).$$

2) $$y = (ax^3 + bx + c)^5;$$

$$y'=5(ax^3 + bx + c)^4\cdot(ax^3 + bx + c)' = 5(ax^3+bx+c)^4(3ax^2+b).$$

3) $$y = (1 + \sqrt{x})^n;$$

$$y' = n(1+\sqrt{x})^{n-1}(1+\sqrt{x})' = n(1+\sqrt{x})^{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4) $$y' = \left(ax + \frac{1}{x}\right)^3;$$

$$y' = 3\left(ax + \frac{1}{x}\right)^2\left(ax + \frac{1}{x}\right)' = 3\left(ax + \frac{1}{x}\right)^2\left(a - \frac{1}{x^2}\right).$$

Шунинг билан, умуман

$$\boxed{y = u^n \text{ бўлса, } y' = nu^{n-1}\cdot u'.} \tag{5}$$

Илгари чиқарилган $(x^n)' = nx^{n-1}$ формула бу формуланинг хусусий ҳоли бўлади, чунки u оддий аргумент бўлган ҳолда $u'=1$ бўлади.

Шунга ўхшаш мураккаб функция формуласига мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} y = \sqrt{u} \text{ бўлса, } y' &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'. \\ y = \sqrt[3]{u} \text{ бўлса, } y' &= \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Бу формулаларнинг ишлатилиши қуйидаги мисоллардан кўринмоқдадир.

1) $y = \sqrt{ax + b}$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{ax+b}}\cdot(ax + b)' = \dfrac{1}{2\sqrt{ax+b}}\cdot a.$

2) $y = \sqrt{a + x^2}$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{a+x^2}}\cdot(a + x^2)' = \dfrac{1}{2\sqrt{a+x^2}}\cdot 2x.$

3) $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$; $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\cdot(1+x^2)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\cdot 2x.$

4) $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$; $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\cdot(1+x^3)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\cdot 3x^2.$

Дифференциаллаш учун масалалар

149. $y = (3 + 2x)^3$; $\quad y' = 6(3 + 2x)^2$.

150. $y = (x^3 + a^3)^4$; $\quad y' = 12x^2(x^3 + a^3)^3$.

151. $y = (a + \sqrt{x})^3$; $\quad y' = 3(a + \sqrt{x})^2 \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

152. $y = \left(3x + \dfrac{1}{x}\right)^2$; $\quad y' = 2\left(3x + \dfrac{1}{x}\right)\left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

153 $y = (\sqrt{x} + x + 3)^5$; $\quad y' = 5(\sqrt{x} + x + 3)^4 \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)$.

154. $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$; $\quad y' = \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

155. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$; $\quad y' = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$.

156. $y = \sqrt[3]{a + bx^2}$; $\quad y' = \dfrac{2bx}{3\sqrt[3]{(a + bx^2)^2}}$.

157. $y = \sqrt[3]{(a + bx)^2}$; $\quad y' = \dfrac{2b}{3\sqrt[3]{a + bx}}$.

158. $y = \left(\dfrac{a}{x}\right)^3$; $\quad y' = -\dfrac{3a^3}{x^4}$.

159. $y = \left(\dfrac{x}{a + x}\right)^2$; $\quad y' = \dfrac{2ax}{(a + x)^3}$.

160. $y = \dfrac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$; $\quad y' = -\dfrac{a^3}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$.

161. $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; $\quad y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

162. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$; $\quad y' = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 - 1}}$.

163. $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\quad y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

164. $y = \left(\dfrac{a + bx}{c - dx}\right)^2$; $\quad y' = \dfrac{2(bc + ad)(a + bx)}{(c - dx)^3}$.

165. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$; $\qquad y'=\dfrac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

§ 37. ЛОГАРИФМНИНГ ҲОСИЛАСИ

$$y=\lg x. \tag{1}$$

Бунинг ҳосиласини топиш учун умумий қоида бўйича давом этамиз:

1) $$y+\Delta y=\lg(x+\Delta x),$$

2) $$\Delta y=\lg(x+\Delta x)-\lg x$$

ёки

$$\Delta y=\lg\frac{x+\Delta x}{x}=\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

3) ёки бунинг иккала томонини Δx га бўлинса,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Агарда

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n}$$

фараз қилинса, бундан

$$\Delta x=\frac{x}{n}, \tag{2}$$

шунинг учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)}{x}$$

ёки

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{x}.$$

(2) га қараганда Δx нолга яқинлашса, n чексизликка интилади. Шунинг учун (логарифмнинг лимитини лимитнинг логарифмига тенг фараз қилиб):

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{x}\lg e$$

демак, логарифмнинг асоси қандай бўлса-да, унинг ҳосиласи ушбу формула билан аниқланади:

$$\boxed{y = \lg x;\ \ y' = \frac{1}{x}\lg e.}$$

Натурал логарифмни биз „ln" билан ишоралаган эдик. Натурал логарифм бўлганда $\ln e = 1$ бўлади. Шунинг учун бу ҳолда

$$y' = \frac{1}{x}. \tag{3}$$

Функция мураккаб бўлганда, масалан,

$$y = \ln u$$

ва u, x нинг бирор функцияси бўлган ҳолда, мураккаб функция формуласига мувофиқ

$$y' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{u'}{u}.$$

Бу формула дифференциаллашда жуда катта роль ўйнайди. Шунинг билан натурал логарифм бўлган ҳолда

$$\boxed{y=\ln u;\ \ y' = \frac{u'}{u}.} \tag{4}$$

Математик анализда қабул қилинган логарифм натурал логарифм бўлгани учун бундан буён асосан шу формулани ишлатишга тўғри келади. Шунинг учун уни жуда яхши билиб олиш тавсия қилинади. Бу формулани қуйидаги қоида усулида ифода қилиш мумкин:

Натурал логарифм ҳосиласини топиш учун функция ҳосиласини у функциянинг ўзига бўлинади.

Бу қоидани ишлатиш йўли қуйидаги мисоллардан кўринмоқда:

1) $y=\ln(ax + b)$; $\quad y' = \frac{(ax+b)'}{ax+b} = \frac{a}{ax+b}$.

2) $y=\ln(x^3 + a)$; $\quad y' = \frac{(x^3+a)'}{x^3+a} = \frac{3x^2}{x^3+a}$.

3) $y=\ln(x+\sqrt{x})$; $\quad y'=\frac{(x+\sqrt{x})'}{x+\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+2x}$.

4) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$; $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}$.

Баъзи бир ҳолларда, логарифмлаш мумкин бўлган ифоданинг ҳосиласини олишдан илгари, олдин логарифмлаб, сўнг ҳосиласи олинса бирмунча қулай бўлади.

Масалан,

1. $$y=\ln\sqrt[3]{ax^2+b},\quad y'=?$$

Бунинг ҳосиласини топиш қулай бўлсин учун энг аввал ифоданинг ўнг томонидаги логарифм амалини ижро қиламиз. Бу ҳолда

$$y=\frac{1}{3}\ln(ax^2+b).$$

Энди бунинг ҳосиласини топамиз:

$$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2ax}{ax^2+b}=\frac{2ax}{3(ax^2+b)}.$$

2. $$y=\ln(3x^2+2x+1)^3.$$

Энг аввал ифоданинг ўнг томонидаги логарифм амалини ижро қилиб, сўнг ҳосилани топамиз. Демак,

$$y=3\ln(3x^2+2x+1);$$

$$y'=3\cdot\frac{6x+2}{3x^2+2x+1}=\frac{6(3x+1)}{3x^2+2x+1}.$$

3. $$y=(ax+b)^3\sqrt[4]{3x^2+b}.$$

Ифоданинг иккала томонини логарифмлаб, сўнг ҳосилани топамиз:

$$\ln y=3\ln(ax+b)+\frac{1}{4}\ln(3x^2+b);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3a}{ax+b}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6x}{3x^2+b}=\frac{3a}{ax+b}+\frac{3x}{2(3x^2+b)}.$$

Демак,

$$y'=y\left\{\frac{3a}{ax+b}+\frac{3x}{2(3x^2+b)}\right\}$$

ёки

$$y'=(ax+b)^3\sqrt[4]{3x^2+b}\left\{\frac{3x}{ax+b}+\frac{3x}{2(3x^2+b)}\right\}.$$

Масалалар

166. $y=\ln(x^2+a^2)$; $\quad y'=\frac{2x}{x^2+a^2}$.

167. $y=\ln(ax^2+bx+c)$; $\quad y'=\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

168. $y=\ln\left(a+\frac{1}{x}\right)$; $\quad y'=-\frac{1}{ax^2+x}$.

169. $f(x)=\ln x^n$; $\quad y'=\frac{n}{x}$.

170. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$; $\quad y'=\frac{2}{1-x^2}$.

171. $y=(\ln x)^n$; $\quad y'=\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$.

172. $y=x\ln x$; $\quad y'=1+\ln x$.

173. $y=\frac{\ln x}{x}$; $\quad y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

174. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$; $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$.

175. $y=\ln(\ln x)$; $\quad y'=\frac{1}{x\ln x}$.

176. $y=\ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; $\quad y'=\frac{a}{a^2-x^2}$.

177. $y=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad y'=\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

178. $y=\left[\ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})\right]^2$; $\quad y'=\frac{2\ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})}{\sqrt{ax+x^2}}$.

§ 38. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

a ни мусбат ва 1 га тенг бўлмаган ўзгармас сон фараз қилиб, ушбу

$$y = a^x \tag{1}$$

кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топамиз. Бунинг учун энг аввал унинг иккала томонидан натурал логарифм оламиз:

$$\ln y = x \ln a,$$

энди иккала томонидан ҳосиласини оламиз:

$$\frac{y'}{y} = \ln a \text{ ёки } y' = y \ln a$$

ёки

$$y' = a^x \ln a$$

чунки $y = a^x$ эди. Шунинг билан

$$\boxed{y = a^x; \quad y' = a^x \ln a.}$$

Бунга қараганда, **кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топиш учун функциянинг ўзини асосининг натурал логарифмига кўпайтириш лозим**. Масалан,

$$y = 5^x, \; y' = 5^x \ln 5; \; y = (a+b)^x, \; y' = (a+b)^x \ln (a+b)$$

ва шунга ўхшаш.

$$a = e \text{ бўлган ҳолда } y = e^x \text{ ва } y' = e^x \ln e = e^x.$$

Демак, e^x нинг ҳосиласи яна e^x бўлади.

Мураккаб функциянинг қоидасига мувофиқ, чиқарилган формуланинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{y = a^u; \; y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.}$$

Бу формулани ишлатиш йўли қуйида ечилган масалалардан кўринмоқда:

1) $y = a^{3x}; \; y' = a^{3x} \cdot \ln a \cdot 3.$

2) $y = 7^{ax^2+b}; \; y' = 7^{ax^2+b} \cdot \ln 7 \cdot 2ax.$

3) $y = a^{\sqrt{x}}; \; y' = a^{\sqrt{x}} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Юқорида чиқарилган формулани яна умумлаштириш мумкин. Ҳақиқатда, кўрсаткичли функциянинг энг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y = u^v. \tag{2}$$

Бунда u ва v нинг ҳар бири x нинг функцияси фараз қилинади. Бундай функцияни **умумий кўрсаткичли функция** дейилади. Унинг ҳосиласини топиш учун энг аввал иккала томонидан натурал логарифмини оламиз

$$\ln y = v \ln u.$$

Энди буннинг иккала томонидан ҳосиласини оламиз:

$$\frac{y'}{y} = v\frac{u'}{u} + v' \ln u$$

ёки

$$y' = y\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right) = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right)$$

ёки

$$y' = v \cdot u^{v-1} u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Юқорида чиқарилган икки формула бу формуланинг хусусий ҳоллари бўлади. Шунинг билан:

$$\boxed{y = u^v;\ y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.}$$

v ўзгармас бўлганда

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

u ўзгармас бўлганда

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Шунинг учун умумий кўрсаткичли функцияни дифференциаллаш қоидаси қуйидагича:

Умумий кўрсаткичли функцияни дифференциаллаш учун: 1) бир марта даража кўрсаткичини ўзгармас фараз қилиб дифференциаллаш керак, 2) иккинчи марта асосини ўзгармас фараз қилиб дифференциаллаш керак ва 3) иккала дифференциаллашдан чиққан натижани қўшиш керак.

Масалан,

1) $$y=(ax+b)^{2x};\ y'=?$$

Ечиш: $y'=2x(ax+b)^{2x-1}\cdot a+(ax+b)^{2x}\ln(ax+b)\cdot 2.$

2) $$y=(a+\ln x)^{\sqrt{x}};\ y'=?$$

Ечиш:

$$y=\sqrt{x}\,(a+\ln x)^{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{x}+(a+\ln x)^{\sqrt{x}}\ln(a+$$

$$+\ln x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Одатда бу формула бевосита кам ишлатилади ва u^v типдаги функциялар учраган ҳолда, унинг ҳосиласи формулани чиқаришда ишлатилган метод билан топилади.

Масалан, $y=x^x$ нинг ҳосиласини формуласиз топамиз.

$$y=x^x,\ \ln y=x\ln x,$$

$$\frac{y'}{y}=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x=1+\ln x,$$

$$y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

Масалалар

179. $y=3^{2x}$; $\qquad y'=2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3.$

180. $y=a^{\ln x}$; $\qquad y'=\frac{1}{x}a^{\ln x}\cdot\ln a.$

181. $y=5^{\sqrt{x}}$; $\qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 5^{\sqrt{x}}\cdot\ln 5.$

182. $y=e^{ax^2+bx}$; $\qquad y'=a^{ax^2+bx}\cdot(2ax+b).$

183. $y=a^{e^x}$; $\qquad y'=a^{e^x}\cdot\ln a\cdot e^x.$

184. $y=e^{x\ln x}$; $\qquad y'=e^{x\ln x}(1+\ln x).$

185. $y=x^2e^{ax}$; $\qquad y'=xe^{ax}(ax+2).$

186. $y=2^x(x-1)$; $\qquad y'=2^x(x\ln 2+1-\ln 2).$

187. $y = a^{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\qquad y' = -\dfrac{xa^{\sqrt{a^2-x^2}}\ln a}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

188. $y = x^{\frac{1}{x}}$; $\qquad y' = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$.

189. $y = x^{e^x}$; $\qquad y' = e^x \cdot x^{e^x}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

190. $y = x^{\ln x}$; $\qquad y' = \ln x^2 \cdot x^{\ln x - 1}$.

191. $y = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x$; $\qquad y' = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x(\ln a - \ln x - 1)$.

192. $y = \dfrac{a^x}{x^x}$; $\qquad y' = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x\left(\ln\dfrac{a}{x} - 1\right)$.

193. $y = x^{x^x}$; $\qquad y' = x^{x^x} \cdot x^x\left(\ln x + \ln^2 x + \dfrac{1}{x}\right)$.

§ 39. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

1. $$y = \sin x.$$

Умумий қоида бўйича

1) $$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

2) $$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

ёки тригонометриянинг маълум формуласи бўйича

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3) Бунинг иккала томонини Δx га бўлинса

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

ёки

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Бу тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Δx нолга яқинлашганда, $\frac{\Delta x}{2}$ ҳам нолга яқинлашади. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ ва } \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

демак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Агарда синуснинг аргументи ўз навбатида x нинг бирор функцияси бўлса, масалан, $y = \sin u$ ва $u = \varphi(x)$ бўлса, бу ҳолда

$$\boxed{(\sin u)' = \cos u \cdot u'.}$$

Масалан, $y = \sin x^2$ бўлса,

$$y' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2.$$

2. $$y = \cos x.$$

Бунинг ҳосиласини топишнинг энг қисқа йўли мана бундайдир:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x,$$

ёки умумий ҳолда

$$\boxed{(\cos u)' = -\sin u \cdot u'}$$

3. $$y = \operatorname{tg} x.$$

Энг аввал буни каср кўринишида ёзамиз:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Шунинг учун касрнинг ҳосиласини топиш қоидаси бўйича:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

ёки

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Агарда $y = \operatorname{tg} u$ ва $u = \varphi(x)$ бўлса, бу ҳолда формуланинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.}$$

Масалан, $y = \operatorname{tg} x^3$ бўлса,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}.$$

4. $$y = \operatorname{ctg} x.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x \cdot (\cos x)' - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Шунинг билан

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Агарда $y = \operatorname{ctg} u$ ва u, x нинг функцияси бўлса, у ҳолда

$$\boxed{(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.}$$

Масалан, $y = \operatorname{ctg} \sqrt{x}$ бўлса,

$$y' = -\frac{(\sqrt{x})'}{\sin^2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}.$$

Масалалар

194. $y=\sin ax$; $\qquad y' = a\cos ax.$

195. $y=\cos\ln x$; $\qquad y' = -\frac{\sin\ln x}{x}.$

196. $y=\operatorname{tg} a\sqrt{x}$; $\qquad y' = \frac{a}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2 a\sqrt{x}}.$

197. $y=\sin^2\frac{x}{2}$; $\qquad y' = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

198. $y=\operatorname{ctg}(ax+b)$; $\qquad y' = -\frac{a}{\sin^2(ax+b)}.$

199. $y=3\sin\left(\frac{2}{x}\right)$; $\qquad y' = -\frac{6}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}\right).$

200. $y=\sin^3 x$; $\qquad y'=3\sin^2 x\cos x.$

201. $y=\cos^2 x$; $\qquad y'=-2\cos x\sin x.$

202. $y=\sin^3 x^2$; $\qquad y'=6x\sin^2 x^2\cos x^2.$

203. $y=\operatorname{tg}^3\sqrt{x}$; $\qquad y' = \frac{3\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}.$

204. $y=a\sqrt{\cos 2x}$; $\qquad y' = -\frac{a\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$

205. $y=e^x\ln\sin x$; $\qquad y' = e^x(\operatorname{ctg} x+\ln\sin x).$

206. $y=\ln\sin^2 x$; $\qquad y'=2\operatorname{ctg} x.$

207. $y=\operatorname{tg}(\ln x)$; $\qquad y' = \frac{\sec^2(\ln x)}{x}.$

208. $y=\ln(\operatorname{tg} x)$; $\qquad y' = \frac{2}{\sin 2x}.$

209. $y=e^{\sin x}x$; $\qquad y' = e^{\sin x}(1+x\cos x).$

210. $f(x)=x^{\sin x}$; $\qquad f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$

211. $\varphi(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$; $\varphi'(x)=-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

212. $y=(\sin x)^x$; $\quad y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)$.

213. $y=x^x\sin^3 x$; $\quad y'=x^x\sin^2 x\{3\cos x+\sin x(1+\ln x)\}$.

214. $y=x^{\operatorname{tg}x}$; $\quad y'=x^{\operatorname{tg}x}\left\{\frac{\operatorname{tg}x}{x}+\frac{\ln x}{\cos^2 x}\right\}$.

§ 40. ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Биз биламизки, агарда

$$y=f(x) \tag{1}$$

монотон ва узлуксиз функция бўлса, у ҳолда бу тенгламада x y нинг монотон ва узлуксиз функцияси бўлади:

$$x=\varphi(y) \tag{2}$$

ва $\varphi(y)$ одатда тескари функция дейилади. (1) ва (2) нинг иккала томонидан x га нисбатан ҳосиласи олинса,

$$y'=f'(x) \text{ ва } 1=\varphi'(y)\,y' \tag{3}$$

бўлади, чунки y x нинг функцияси. Сўнгги тенгликларни бир-бирига кўпайтирилса

$$y'=f'(x)\cdot\varphi'(y)\cdot y'$$

ёки

$$1=f'(x)\cdot\varphi'(y).$$

Бунинг иккала томонини $f'(x)$ га бўлинса, қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.}$$

Демак, **тескари функциянинг ҳосиласи тўғри функция ҳосиласининг тескарисига тенгдир.**

Бу формулани ишлатишда унинг иккала томонидаги ўзгарувчиларни бир хил қилишга тўғри келади. Масалан, (2) ва (3) га мувофиқ

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'[\varphi(y)]}.$$

Мисол учун ушбу $y=x^2$ функцияни оламиз. Бу функцияга тескари бўлган функция $x=\sqrt{y}$ бўлади. $y'=2x$ нинг ёрдами билан $(\sqrt{y})'$ ни топамиз. Формулага мувофиқ

$$(\sqrt{y})'=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

§ 41. ТЕСКАРИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

1. $$y=\arcsin x.$$

Бу функциядан тўғри функцияга ўтганда, у қуйидагича бўлади:

$$x=\sin y.$$

Ўтган параграфда чиқарилган қоидага мувофиқ

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

y нинг қийматлари $-\frac{\pi}{2}$ билан $+\frac{\pi}{2}$ оралиқда фараз қилинади; шунинг учун радикалнинг олдида $+$ қўйилади.

Агарда $y=\arcsin u$ ва $u=\varphi(x)$ бўлса, у ҳолда, функциядан функция қоидасига мувофиқ, формуланинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.}$$

Масалан, агарда $y=\arcsin x^2$ бўлса, бу ҳолда

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x.$$

Шунга ўхшаш агарда $y=\arcsin a^x$ бўлса,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-a^{2x}}}\cdot a^x\ln a.$$

2. $$y=\arccos x.$$

Бундан тўғри функцияга ўтамиз:

$$x = \cos y$$

ёки

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

демак,

$$\frac{\pi}{2} - y = \arcsin x$$

ёки

$$y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан ҳосиласи олинса

$$y' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Демак, бу ҳолда ҳам формуланинг кўриниши аввалгидай бўлиб, айирма фақат ишорадагина. Шунинг учун $y = \arccos u$ ва $u = \varphi(x)$ бўлганда

$$\boxed{(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.}$$

3. $$y = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Умумий, юқорида кўрсатилган метод билан давом қиламиз:

$$x = \operatorname{tg} y,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Шунинг билан:

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Агарда $y = \operatorname{arc\,tg} u$ ва $u = \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'.}$$

Масалан, агарда $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$ бўлса, бу ҳолда

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Шунга ўхшаш, агарда $y=\operatorname{arc\,tg}\ln x$ бўлса,

$$y' = \frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

4. $$y=\operatorname{arc\,ctg} x.$$

Юқорида кўрсатилган метод билан давом этилса

$$x=\operatorname{ctg} y \text{ ёки } x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right),$$

бундан

$$\frac{\pi}{2}-y=\operatorname{arc\,tg} x,$$

ёки

$$y=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x,$$

бундан

$$y'=-(\operatorname{arc\,tg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Умуман, агарда $y=\operatorname{arc\,tg} u$ ва $u=\varphi(x)$ бўлса, бу ҳолда функциядан функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича

$$\boxed{(\operatorname{arc\,ctg} u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'.}$$

Дифференциаллаш учун масалалар

215. $y=\arcsin ax$; $\qquad y'=\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$.

216. $y=(\operatorname{arc\,tg} x)^2$; $\qquad y'=\frac{2\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$.

217. $y=(\arccos 3x)^2$; $\qquad y'=\frac{6\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$.

218. $y=e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; $\qquad y'=\frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}$.

219. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$; $\qquad y' = \frac{1}{2}\sqrt{1+\csc x}$.

220. $y = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$; $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

221. $y = \operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)$; $\qquad y' = \frac{3}{\cos^2 x + 9\sin^2 x}$.

222. $y = a\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$; $\qquad y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

223. $y = \arccos(e^{\sin x})$; $\qquad y' = -\frac{e^{\sin x}\cos x}{\sqrt{1-e^{2\sin x}}}$.

224. $y = \arcsin(\sin x)$; $\qquad y' = 1$.

225. $y = \operatorname{arctg}\frac{x-a}{x+a}$; $\qquad y' = \frac{a}{a^2+x^2}$.

226. $y = \operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\qquad y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

227. $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - x$; $\qquad y' = -\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

228. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$; $\qquad y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$.

229. $y = x^{\arcsin x}$; $\qquad y' = x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

§ 42. ГИПЕРБОЛИК ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

1. Математик анализнинг кўпгина масалаларида e^x функциянинг турли шаклларда комбинациялари учраб туради. Буларнинг ичида кўпроқ қуйидаги икки шакл учрайди:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ ва } \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Булардан биринчисини **гиперболик синус** ва иккинчисини **гиперболик косинус** дейилади ва улар $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ равишда ифода қилинади.

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}. \qquad (1)$$

$\operatorname{sh} x$ нинг $\operatorname{ch} x$ га нисбати гиперболик тангенс дейилади ва y $\operatorname{th} x$ равишда ифода қилинади.

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}. \qquad (2)$$

e^{x} ва $e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}$ функциялари аргументнинг ҳамма қийматлари учун узлуксиз функциялардан иборатдир; шунинг учун гиперболик функциялар

$$-\infty<x<+\infty$$

оралиқда узлуксиз функциялардан иборатдир.

2. Гиперболик функцияларнинг орасида ҳам тригонометрик функцияларнинг орасидаги муносабатларга ўхшаган муносабатлар бордир.

(1) нинг ҳар икки томонларини квадратга кўтарилса;

$$\operatorname{sh}^{2} x=\frac{e^{2x}+e^{2x}-2}{4}, \quad \operatorname{ch}^{2} x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$$

бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\operatorname{ch}^{2} x-\operatorname{sh}^{2} x=1. \qquad (3)$$

(1) ни қўшиш ва айириш натижасида:

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^{x}, \quad \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x=e^{-x}. \qquad (4)$$

Шунга ўхшаш

$$1-\operatorname{th}^{2} x=1-\frac{\operatorname{sh}^{2} x}{\operatorname{ch}^{2} x}=\frac{\operatorname{ch}^{2} x-\operatorname{sh}^{2} x}{\operatorname{ch}^{2} x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^{2} x}$$

ёки

$$1-\operatorname{th}^{2} x-\frac{1}{\operatorname{ch}^{2} x}. \qquad (5)$$

3. Агарда

$$x=\operatorname{ch} \varphi \text{ ва } y=\operatorname{sh} \varphi$$

фараз қилинса, (3) формуланинг кўриниши

$$x^{2}-y^{2}=1,$$

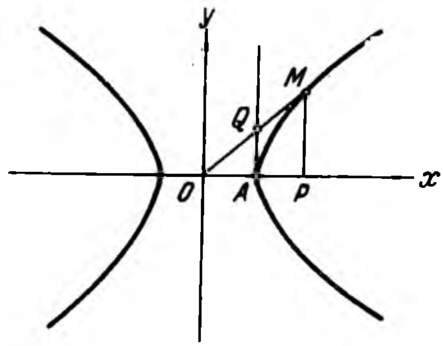
бу эса тенг томонли гиперболани ифода қилади. Буни эътиборга олганда, гиперболик функцияларни тригонометрик функциялар каби тўғри чизиқ кесмалари билан тасвир қилиш мумкин.

Бунинг учун $M(x, y)$ ни $x^2 - y^2 = 1$ тенг томонли гиперболадаги нуқта ва $x = OP$, $y = MP$ ни унинг координаталари фараз қиламиз (шакл 28).

Бу нуқтани координатанинг боши билан туташтирилса, у гиперболанинг A бошига ўтказилган уринма билан бирор Q нуқтада учрашади. Бу ҳолда гиперболик функцияларнинг тўғри чизиқ кесмалари билан тасвири қуйидагича бўлади:

$$MP = \operatorname{sh}\varphi,\ OP = \operatorname{ch}\varphi,$$

$$AQ = \operatorname{th}\varphi.$$



Шакл 28.

$M(x, y)$ нуқтани доира айланасида фараз қилиб, гиперболик функцияларнинг тасвирини тригонометрик функцияларнинг тасвири билан ўзаро солиштириб кўриш тавсия қилинади.

Гиперболик функцияларнинг қандай ўзгаришлари уларнинг 29 ва 30 шакллардаги графикларидан кўринмоқда.

4. Энди гиперболик функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

1) $$y = \operatorname{sh} x.$$

Гиперболик синуснинг таърифига мувофиқ

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Дифференциаллаш қоидаси бўйича

$$y' = (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

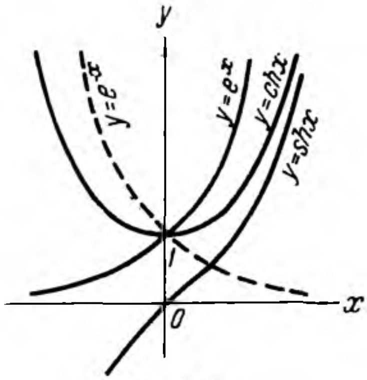
Иккинчи томондан:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

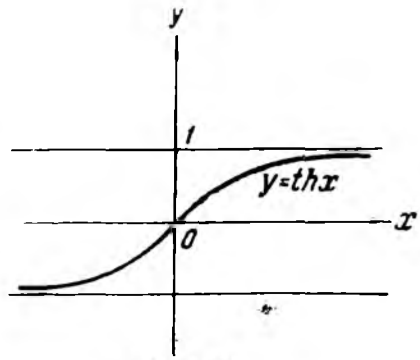
демак,

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,}$$

яъни **гиперболик синуснинг ҳосиласи гиперболик косинусга тенгдир.**



Шакл 29.



Шакл 30.

2) $$y = \operatorname{ch} x.$$

Гиперболик косинуснинг таърифига мувофиқ

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Дифференциаллаш қоидаси бўйича

$$y' = (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Шунинг билан, натижада:

$$\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,}$$

яъни **гиперболик косинуснинг ҳосиласи гиперболик синусга тенгдир.**

3) $$y = \operatorname{th} x.$$

Бунинг ҳосиласини топиш учун энг аввал уни

$$y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

кўринишда ёзиб, сўнгра каср ҳосиласини топиш қоидаси бўйича давом этамиз:

$$y' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

ёки (5) формулага мувофиқ

$$\boxed{(\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x,}$$

яъни **гиперболик тангенснинг ҳосиласи бир билан гиперболик тангенс квадратининг орасидаги айирмага тенгдир.**

5. Энди тескари гиперболик функцияларга ўтамиз. Ушбу

$$\operatorname{sh} y = x, \quad \operatorname{ch} y = x, \quad \operatorname{th} y = x$$

гиперболик функцияларнинг ҳар бири ўзига мос, тескари гиперболик функция аниқлайди ва улар одатда қуйидагича ифода қилинади:

$$y = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x, \quad y = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x, \quad y = \operatorname{ar} \operatorname{th} x.$$

Бу функцияларнинг графиклари 29- ва 30-шакллардаги $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ ва $\operatorname{th} x$ функцияларнинг графикларидан координата ўқларини алмаштириш билан ҳосил бўлади. Уларга қараганда $\operatorname{ar} \operatorname{sh} x$, $-\infty < x < +\infty$ оралигида узлуксиз, ўсувчи ва бир қийматли бўлади; шунга ўхшаш $\operatorname{ar} \operatorname{th} x$, $-1 < x < +1$ оралиқда бир қийматли, ўсувчи ва узлуксиз бўлади; $\operatorname{ar} \operatorname{ch} x$ бўлса, $1 \leq x < +\infty$ оралиқда икки қийматли функциядан иборатдир; бунинг иккала қийматларининг абсолют миқдорлари тенг ва ишоралари тескаридир.

Энди бу функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

1) $$y = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x,$$
бундан
$$x = \operatorname{sh} y.$$

Тескари функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича:

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Шунинг билан

$$\boxed{(\operatorname{ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

2) $$y = \operatorname{ar\,ch} x$$
бундан
$$x = \operatorname{ch} y.$$

Тескари функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича:

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Шунинг билан

$$\boxed{(\operatorname{ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},}$$

3) $$y = \operatorname{ar\,cth} x,$$
бундан
$$x = \operatorname{th} y.$$

Тескари функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича:

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Шунинг билан

$$\boxed{(\operatorname{ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2}.}$$

Берилган гиперболик функция мураккаб бўлган ҳолларда функциядан функцияни дифференциаллаш қоидаси ишлатилади.

Дифференциаллаш учун масалалар

230. $y = \operatorname{sh}\sqrt{x}$; $\qquad y' = \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

231. $y = a^{\operatorname{ch}^2 x}$; $\qquad y' = \operatorname{sh} 2x \cdot a^{\operatorname{sh}^2 x} \ln a$.

232. $y = \operatorname{th}^3 x^2$; $\qquad y' = 6x \cdot \operatorname{th}^2 x^2 (1 - \operatorname{th}^2 x^2)$.

233. $y=\operatorname{arsh}\frac{x}{a}$; $\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

234. $y=\ln\operatorname{ch}\left(e^{\sqrt{x}}\right)$; $\qquad y'=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{th}\left(e^{\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x}}$.

235. $y=\operatorname{arth}(\ln x^2)$; $\qquad y'=\frac{1}{x(1-\ln^2 x^2)}$.

236. $y=\operatorname{sh}x\cdot e^{\operatorname{ch}x}$; $\qquad y'=\operatorname{ch}x\cdot e^{\operatorname{ch}x}(1+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{th}x)$.

237 $y=\operatorname{arch}(\ln\sqrt{x})$; $\qquad y'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln^2\sqrt{x}-1}}$.

238. $y=e^{\operatorname{sh}x}\cdot\operatorname{arth}x$; $\qquad y'=e^{\operatorname{sh}x}\left\{\frac{1}{1-x^2}+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{arth}x\right\}$.

239. $y=\operatorname{sh}^3x\cdot\operatorname{ch}^2x$; $\qquad y'=\operatorname{sh}^2x\cdot\operatorname{ch}x(2\operatorname{sh}^2x+3\operatorname{ch}^2x)$.

240. $y=x^{\operatorname{arth}x}$; $\qquad y'=x^{\operatorname{arth}x-1}\left\{\operatorname{arth}x+\frac{x\ln x}{1-x^2}\right\}$.

§ 43. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

Биз ҳозиргача ошкор функцияларни дифференциаллаш билан шуғулланиб келдик.

Энди, бу ерда ошкормас функцияларни дифференциаллаш усули билан таништириб ўтамиз.

x нинг ошкормас y функциясини аниқлаган тенглама

$$f(x, y)=0$$

бўлсин, y ни шу тенглама билан аниқлаган x нинг функцияси фараз қилган чоқдагина унинг чап томони айнан нолга тенг бўлади.

(1) тенгламадан y нинг x га нисбатан ҳосиласини топиш учун энг аввал тенгламани y га нисбатан ечиб, сўнг ҳосиласини топиш мумкин эди. Бироқ ҳар қандай тенгламани функция фараз қилган ҳарфга нисбатан ечиб бўлмайди, кишини кўп овора қилади.

Масалан, ушбу

$$x^2+xy^5-2y^3-13=0$$

тенгламани олганда биз уни y га нисбатан ечишда катта қийинчиликка учраган бўлар эдик. Мана шундай ҳолларда ҳам, яъни тенгламани y га нисбатан ечмасдан, y нинг x га нисбатан ҳосиласини топиш мумкин.

Бунинг учун (1) тенгламадаги y ни x нинг функцияси фараз қилиб, тенгламанинг чап томонидан x га нисбатан ҳосила олгандан сўнг, натижани нолга тенглаймиз. Ҳосиланинг ифодасида албатта y' бўлади, чунки y иштирок этган ҳадларни функциядан функция қоидаси бўйича дифференциаллашга тўғри келади.

Шунинг билан айниятнинг чап томонини x га нисбатан дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган ифодада умуман x, y ва y' бўлади, яъни ифоданинг кўриниши

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

бўлади. Буни y' га нисбатан ечганда:

$$y' = \varphi(x, y). \tag{3}$$

Мисол учун юқорида ёзилган ушбу тенгламани оламиз:

$$x^2 + xy^5 - 2y^3 - 13 = 0.$$

Бундан y нинг x га нисбатан ҳосиласини топиш учун юқорида кўрсатилган йўл билан давом этамиз:

$$2x + y^5 + 5xy^4 \cdot y' - 6y^2 \cdot y' = 0.$$

Энди бу тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$(5xy^4 - 6y^2)\, y' = -(2x + y^5)$$

бундан

$$y' = -\frac{2x + y^5}{5xy^4 - 6y^2}.$$

Шунга ўхшаш яна бир мисол оламиз:

$$axy^2 - by^3 - cy + d = 0.$$

Биринчи мисолда кўрсатилган йўл билан давом этганда, қуйидаги амалларни ижро этишга тўғри келади:

$$ay^2 + 2axy \cdot y' - 3by^2 \cdot y' - cy' = 0,$$

$$(2axy - 3by^2 - c)\, y' = -ay^2,$$

бундан

$$y' = -\frac{ay^2}{2axy - 3by^2 - c}.$$

Келаси бобларнинг бирида, ошкормас функцияни дифференциаллаш учун, бундан кўра яна мукаммалроқ ва қулайроқ усул тақдим этилади.

Масалалар

Қуйидаги тенгламаларни функцияга нисбатан ечмасдан, y дан x га нисбатан ҳосила топилсин:

241. $x^3 - y^2(2a - x) = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + y^2}{2y(2a - x)}$.

242. $y^2 - 2px = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}$.

243. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

244. $2x^3 - 3ay^2 = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{ay} = \sqrt{\dfrac{3x}{2a}}$.

245. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x(x^2+y^2) - a^2x}{2y(x^2+y^2) + a^2y}$.

246. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

247. $e^y - e^x + xy = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{e^y + x}$.

248. $y\sin x - x\cos y = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos y - y\cos x}{\sin x + x\sin y}$.

249. $\sin(x-y) + \cos y - x^2 + 1 = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos(x-y) - 2x}{\cos(x-y) + \sin y}$.

250. $e^{xy} - y^2 + 1 = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{xy}}{2y - xe^{xy}}$.

251. $x^5 + 5xy^7 + y^2 = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5x^4 + 5y^7}{35xy^6 + 3y^2}$.

252. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x}{y^2 - ax}$.

§ 44. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА УНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

1. Берилган функция $y=f(x)$ бўлган ҳолда, унинг ҳосиласи

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

бўлар эди. Шунинг учун ε ни чексиз кичик сон фараз қилинса, лимит таърифи бўйича

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \text{ ёки } \Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x. \quad (1)$$

Бунга қараганда Δy икки чексиз кичик $f'(x)\Delta x$ ва $\varepsilon\Delta x$ бўлаклардан иборат. Булардан биринчиси $f'(x)$ нолга тенг бўлмаган ҳолда Δx га нисбатан биринчи тартибли чексиз кичик сон бўлади, чунки унинг Δx нисбати нолга тенг бўлмаган ўзгармас сондан иборат; улардан иккинчиси (яъни $\varepsilon\Delta x$) бўлса, у Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик сон бўлади, чунки унинг Δx га нисбати ε га, яъни нолга интилади.

$f'(x)\Delta x$ функция орттирмасининг (Δy нинг) бош қисмидан иборатдир; уни одатда **функциянинг дифференциали** дейилади ва dy равишда ёзилади, яъни

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (2)$$

Демак, **функциянинг ҳосиласини аргументнинг ихтиёрий орттирмасига кўпайтмаси у функциянинг дифференциали бўлади.**

Бу таърифга асосан

$$dx = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x,$$

яъни **оддий аргументнинг дифференциали ўзининг ихтиёрий орттирмасига тенгдир:**

$$\boxed{dx = \Delta x.} \quad (3)$$

Юқоридаги (2) тенгликдаги Δx нинг ўрнига dx қўйилса, унинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx,} \quad (4)$$

яъни **функциянинг дифференциали функциянинг ҳосиласи билан аргумент дифференциалининг кўпайтмасига тенгдир.**

Агарда (4) тенгликнинг иккала томонини dx га бўлинса, унинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{5}$$

Бу эса, бизга жуда яхши таниш бўлган ҳосиланинг ифодаларидан бири эди. Демак, **функция дифференциалининг аргумент дифференциалига нисбати функциянинг ҳосиласига тенгдир**.

Шунинг учун ҳосиланинг иккинчи бир номи „дифференциалли нисбат" эди ва унинг сабаби бизга энди очиқ бўлди. Ҳосила топиш амалини „дифференциаллаш" дейишнинг сабаби ҳам шундан иборат. Ҳақиқатда, (5) тенгликни касрдан қутқазилса у

$$dy = f'(x)\,dx$$

бўлиб, функциянинг дифференциали чиқади ва аксинча бунинг иккала томони dx га бўлинса

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

бўлиб, функциянинг ҳосиласи чиқади.

Ҳосиланинг таърифига мувофиқ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

бунда ε чексиз кичик. Бундан

$$\frac{\Delta y}{f'(x)\,\Delta x} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}$$

ёки

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}, \tag{6}$$

яъни Δx чексиз кичик бўлиб, $f'(x)$ берилган нуқтада нолга тенг бўлмаган ҳолда, Δy ва dy ўзаро эквивалент бўлади.

Биз юқоридаги (4) тенгликни чиқаришда x ни оддий аргумент фараз қилган эдик. Бироқ y бошқа ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳолда ҳам у ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатда,

$$y = f(u) \text{ ва } u = \varphi(x)$$

бўлса,

$$y'_x = f'(u) \cdot u'_x.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини dx га кўпайтирилса

$$y'_x dx = f'(u) \cdot u'_x dx$$

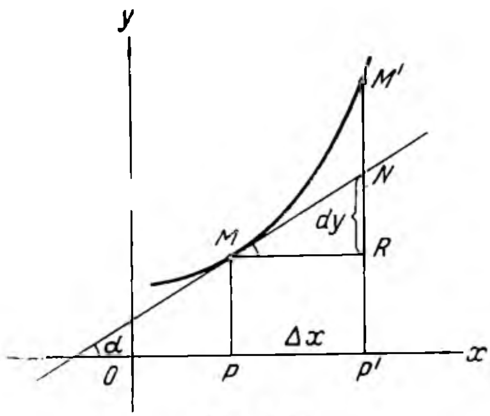
ёки

$$dy = f'(u)\, du,$$

чунки дифференциал таърифига мувофиқ

$$y'_x dx = dy \text{ ва } u'_x\, dx = du.$$

Шунинг билан u **нинг ўзи оддий аргумент бўлса-да ёки у ўз навбатида бошқа ўзгарувчининг функцияси бўлса-да, функция дифференциалининг формаси (тузилиши) ўзгармайди.**



Шакл 31.

2. Энди дифференциалнинг геометрик маъносини текширамиз. Бунинг учун 31-шаклдаги эгри чизиқни ушбу

$$y = f(x)$$

функциянинг графиги ва x, y ни унинг M нуқтасининг декарт координаталари фараз қиламиз. Эгри чизиқнинг M' нуқтасининг координаталари $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ бўлсин. Агарда M нуқтадаги уринманинг абсцисса ўқининг мусбат томони билан ташкил қилган бурчагини α фараз қилинса, бу ҳолда

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x).$$

Уринманинг $M'P'$ ордината билан учрашган нуқтаси N ва M нуқтадан, абсцисса ўқига параллел бўлиб ўтган чизиқнинг $M'P'$ билан учрашган нуқтаси R бўлсин. Тўғрибурчакли MNR учбурчакда:

$$NR = \operatorname{tg}\alpha \cdot MR = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx,$$

чунки $\Delta x = dx$ эди. Сўнгги тенгликнинг ўнг томони $y = f(x)$ нинг дифференциали бўлади. Демак,

$$dy = NR.$$

Шунинг билан, **уринманинг уриниш нуқтасининг абсциссаси орттирмасига тегишли бўлган ординатанинг уринмага нисбатан орттирмаси функциянинг дифференциалини ифода қилади.**

dy нинг Δy га тенг эмаслиги шаклдан очиқ кўринмоқда. Бироқ (6) тенгликка асосланиб, юқори тартибли чексиз кичик сонларни эътиборга олмаган ҳолда, ушбу тақрибий тенглик келиб чиқади:

$$\Delta y \approx dy.$$

Масалан, $y = x^2$ бўлса, $y' = 2x$ ва $dy = 2x dx$. Ҳолбуки,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Демак, бу мисолда функциянинг орттирмаси Δy билан унинг дифференциали dy нинг орасидаги айирма $(\Delta x)^2$ дан, яъни иккинчи тартибли чексиз кичик сондан иборатдир. Шунинг учун баъзи бир вақтларда функциянинг орттирмаси ўрнига унинг дифференциали қабул қилинади.

Текширишлардан чиққан натижаларга қараганда, функциянинг ҳосиласини топишда ишлатилган қоидаларнинг ҳар бири унинг дифференциалини топишда ҳам ўз кучини сақлайди.

функциянинг дифференциалини топиш учун энг аввал эски қоидалар бўйича унинг ҳосиласини топиб, сўнг аргументнинг дифференциалига кўпайтирилади.

Масалан,

1) $$y = 3x^2 + 5x - 7.$$

$$dy = (3x^2 + 5x - 7)'\,dx = (6x + 5)\,dx.$$

2) $$y = \sin(ax^2 + b).$$

$$dy = \cos(ax^2 + b)\, d(ax^2 + b) = \cos(ax^2 + b)\cdot 2ax dx.$$

3) $$y = \sqrt{a^x}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{a^x}}\, da^x = \frac{1}{2\sqrt{a^x}}\cdot a^x \ln a dx.$$

4) $$y = 2^x \sin ax.$$

$$dy = 2^x\, d(\sin ax) + \sin ax\, d2^x =$$

$$= 2^x \cos ax\cdot a dx + \sin ax\cdot 2^x \ln 2 dx = (a\cos ax + \ln 2 \sin ax)2^x dx$$

Ҳосила топиш учун чиқарилган ҳар бир формуланинг. иккала томонини аргументнинг дифференциалига кўпайтириш натижасида, дифференциал топиш учун ушбу жадвал келиб чиқади:

1. $d(C) = 0.$
2. $d(x) = dx.$
3. $d(Cu) = C\, du.$
4. $d(u^n) = nu^{n-1}du.$
5. $d(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}}du.$
6. $d\left(\sqrt[3]{u}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}du.$
7. $d(u+v-w) = du+dv-dw.$
8. $d(uv) = udv + vdu.$
9. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$
10. $d\left(\frac{C}{v}\right) = -\frac{Cdv}{v^2}.$
11. $d(\log_a u) = \lg_a e\cdot\frac{du}{u}.$
12. $d(\ln u) = \frac{du}{u}.$
13. $d(a^u) = a^u \ln a\, du.$
14. $d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v\cdot\ln u\cdot dv.$
15. $d(\sin u) = \cos u\, du.$
16. $d(\cos u) = -\sin u\, du.$
17. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{sc}^2 u\, du.$
18. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{csc}^2 u\, du.$
19. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot du.$
20. $d(\operatorname{arc\,tg} u) = \frac{1}{1+u^2}du.$

Дифференциаллаш учун аралаш масалалар

Берилган масалаларнинг жавобига қараб ҳосила бўлса— ҳосила, дифференциал бўлса — дифференциал топилиши лозим:

253. $y = (\ln x)^3$; $\quad dy = \frac{3(\ln x)^2 dx}{x}$.

254. $y = e^x \ln x$; $\quad dy = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)dx$.

255. $y = x^n a^{-x^2}$; $\quad dy = x^{n-1} a^{-x^2}(n - 2x^2 \ln a)\,dx$.

256. $f(x) = x^m \ln x - \frac{x^m}{m}$; $\quad f'(x) = mx^{m-1}\ln x$.

257. $\varphi(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}$; $\quad d\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}\,dx}{2(x^2+x+1)}$.

258. $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$; $\quad dy = n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left\{1 + \ln\left(\frac{x}{n}\right)\right\}dx$.

259. $y = x\sqrt{x^2+1}$; $\quad dy = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

260. $\varphi(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$; $\quad \varphi'(x) = \left(1 + x^{-\frac{1}{3}}\right)^2$.

261. $y = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; $\quad y' = \operatorname{arc\,tg} x$.

262. $y = \operatorname{tg} h^3\sqrt{x}$; $\quad dy = 3\operatorname{tg}^2 h\sqrt{x}\,(1 - th^2\sqrt{x})\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

263. $y = \ln \operatorname{arch} a^x$; $\quad dy = \frac{a^x \ln a\,dx}{\operatorname{arch} a^x \sqrt{a^{2x}-1}}$.

264. $y = \ln\frac{a + b\operatorname{tg} x}{a - b\operatorname{tg} x}$; $\quad y' = \frac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$.

265. $F(x) = \ln(a + x + \sqrt{2ax + x^2})$; $\quad dF(x) = \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

266 $y = \frac{x}{\sin x}$; $\quad dy = \frac{(1 - x\operatorname{ctg} x)\,dx}{\sin x}$.

267. $f(x) = \ln \operatorname{tg}(ax+b)$; $f'(x) = \frac{2a}{\sin 2(ax+b)}$.

268. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}}$; $dy = \frac{\sqrt{2}\,dx}{3x^2+2x+1}$.

269. $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x^n}$; $\varphi'(x) = \frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

270. $y = 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x$; $dy = 3\cos x\cos 2x$.

271. $y = 4(\sin x - 2\sin^3 x)\cos x$; $dy = 4\cos 4x\,dx$.

272. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; $dy = \arcsin x\,dx$.

273. $F(x) = x^n + n^x$; $F'(x) = nx^{n-1} + n^x \ln n$.

274. $f(x) = a^{\operatorname{tg} 2x}$; $f'(x) = 2a^{\operatorname{tg} 2x} \ln a \sec^2 2x$.

275. $y = a^x x^a$; $dy = a^x x^{a-1}(a + x\ln a)\,dx$.

276. $y = \ln \sec^2 x$; $dy = 2\operatorname{tg} x\,dx$.

277. $f(x) = e^{ax}(\sin ax - \cos ax)$; $df = 2ae^{ax}\sin ax\,dx$.

278. $y = \ln \frac{a+b\operatorname{tg} x}{a-b\operatorname{tg} x}$; $y' = \frac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$.

279. $F(x) = a^x \cdot \frac{x\ln a - 1}{\ln^2 a}$; $F'(x) = xa^x$.

280. $\varphi(x) = \{\operatorname{tg}(a^2-x^2)\}^3$; $\varphi'(x) = \frac{6x\operatorname{tg}^2(a^2-x^2)}{\cos^2(a^2-x^2)}$.

281. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2-4}$; $y' = \frac{8}{x(x^2-4)^2}$.

282. $f(x) = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; $df = \frac{dx}{\sin^3 x}$.

283. $y = \arcsin x$ эгри чизиққа ўтказилган уринма абсцисса ўқининг мусбат томони билан ўтмас бурчак ташкил қила оладими?

Жавоб: йўқ.

284. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ функциянинг $x=0$ нуқтада ўнг ва сўл ҳосилалари топилган.

Жавоб: ўнг ҳосила $=0$, сўл ҳосила $=1$.

285. $y=2x^3+x-15$. Бу функциянинг аргументи $x_1=1$ дан $x_2=1{,}02$ га ўтганда унинг орттирмасининг тақрибий қиймати қанча бўлади?

Жавоб: $\Delta y\approx 0{,}14$.

286. $xy=b^2$ ва $x^2-y^2=a^2$ эгри чизиқларнинг бир-бири билан кесишган нуқтасида ҳосил бўлган бурчаги белгилансин (икки эгри чизиқнинг кесишган нуқтасидаги бурчаги деб — у нуқтада ҳар бир эгри чизиққа уринма бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни айтилади).

Жавоб: тўғрибурчак.

287. $y=e^x$ эгри чизиқнинг ордината ўқи билан кесишган нуқтасига уринма бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти аниқлансин.

Жавоб: $\operatorname{tg}\alpha=1$; $(\alpha=45^\circ)$.

288. Алгебрадан маълумки,

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x},$$

бунда $x\neq 0$ фараз қилиб

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

йиғиндини ҳисоблаш учун умумий формула чиқарилсин.

Жавоб:

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{(1-x)^2}.$$

289. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ фараз қилиб, ушбу

$$\frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}+\frac{dy}{\sqrt{y-y^3}}=0$$

тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин.

§ 45. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАР ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР

1. Маълумки, ҳар бир функцияни дифференциаллаш натижасида умуман яна бирор функция келиб чиқади, яъни

$y=f(x)$ функциянинг ҳосиласи бўлган $y'=f'(x)$ ҳам ўз навбатида x нинг функцияси бўлади.

Бу функцияни дифференциаллаш натижасида чиққан янги функцияни аввалги $y=f(x)$ функцияга нисбатан иккинчи тартибли ҳосила дейилади ва у одатда

$$y'' \text{ ёки } f''(x) \text{ ёки } \frac{d^2 y}{dx^2}$$

каби ишораланади.

Бу функцияни, яъни иккинчи тартибли ҳосилани дифференциаллаш натижасида чиққан янги функцияни аввалги функцияга нисбатан учинчи тартибли ҳосила дейилади ва у

$$y''' \text{ ёки } f'''(x) \text{ ёки } \frac{d^3 y}{dx^3}$$

каби ишораланади ва умуман $y=f(x)$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи

$$y^{(n)} \text{ ёки } f^{(n)}(x) \text{ ёки } \frac{d^n y}{dx^n}$$

каби ишораланади. Масалан,

$$y=ax^3,\ y'=3ax^2,\ y''=6ax,\ y'''=6a,\ y^{\mathrm{V}}=0.$$

2. Маълумки, $y=f(x)$ функциянинг дифференциали

$$dy=f'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Бундаги dx, x га боглиқ бўлмагани учун (1) ни дифференциаллашда dx ўзгармас саналади. Шунинг учун dy ёлғиз x нинг функцияси бўлади.

dy нинг дифференциали, яъни $d(dy)$ одатда d^2y равишда ифода қилинади ва $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали дейилади. Шуниг билан

$$d^2 y=f''(x)\,dx^2.$$

Шунга ўхшаш

$$d^3 y=f'''(x)\,dx^3,$$

$$d^4 y=f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx^4$$

ва умуман

$$d^n y=f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Масалан,

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

$$dy=(4ax^3+3bx^2+2cx+d)\,dx,$$

$$d^2 y = (12ax^2 + 6bx + 2c)\,dx^2,$$

$$d^3 y = (24ax + 6b)\,dx^3.$$

Табиий бу ерда ҳам ҳар қандай тартибли дифференциалдан шу тартибли ҳосилага ўтиш мумкин. Масалан,

$$d^2 y = f''(x)\,dx^2 \text{ бўлса,}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x);$$

$$d^3 y = f'''(x)\,dx^3 \text{ бўлса,}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x)$$

ва умуман

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n \text{ бўлса,}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Ҳақиқатда, юқорида кўрсатилган юқори тартибли ҳосила ишораларидан бири шунинг ўзи эди.

3. Энди мураккаб функциянинг юқори тартибли ҳосиласини топамиз:

$$y = f(u)$$

ва u, x нинг функцияси бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx}.$$

$f'(u)$ ва $\frac{du}{dx}$ нинг ҳар бири x нинг функцияси бўлгани учун

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f'(u)\frac{d^2 u}{dx^2} + f''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = f'(u)\frac{d^3 u}{dx^3} + 3f''(u)\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2 u}{dx^2} + f'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3$$

ва шунга ўхшаш.

Биз биламизки,

$$dy = f'(u)\,du$$

формулада u оддий ёки мураккаб аргумент бўла олади.

Бироқ

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

бўлган ҳолда

$$d^n y \neq f^{(n)}(u)du^n.$$

Ҳақиқатда, u, x нинг бирор функцияси бўлсин. Бу ҳолда

$$dy = f'(u)du$$

тенгламада $f'(u)$ ва du нинг ҳар бири ўзгарувчи бўлади. Шунинг учун

$$d^2y = d\,[f'(u)du] = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u,$$

$$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du\,d^2u + f'(u)d^3u$$

ва шунга ўхшаш.

4. Баъзи бир функцияларнинг умуман n-тартибли ҳосиласини топиш мумкин. Бунинг учун одатда функциянинг бир неча ҳосиласини топиб, уларнинг қандай ўзгариб боришига диққат қилинади ва уларнинг тузилиш қонуни ошкор бўлган ҳамон n-ҳосиласи ёзилади. Масалан,

1) $y = x^n$ (n — ўзгармас); $y^{(k)} = ?$

ечиш:

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$$

. . . .

умуман,

$$y^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Агарда n бутун ва мусбат сон бўлса ва $k = n$ бўлса, у ҳолда

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$$

ва n дан юқори тартибли ҳосиласи нолга тенг бўлади.

Шунинг учун, агарда

$$y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n \qquad (1)$$

n-даражали бутун функция бўлса, у ҳолда

$$y^{(n)} = 1.2.3.\dots n\,A_0 \qquad (2)$$

ва

$$y^{(n+1)} = 0.$$

2) $$y = a^x; \; y^{(n)} = ?$$

Ечиш:

$$y' = a^x \ln a.$$

$$y'' = a^x \ln a \cdot \ln a = a^x (\ln a)^2$$

$$y''' = a^x \ln a \cdot (\ln a)^2 = a^x (\ln a)^3$$

. . . .

умуман

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n. \tag{3}$$

3) $$y = \sin x; \qquad y^{(n)} = ?$$

Ечиш:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

умуман

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{4}$$

$$y = \cos x; \; y^{(n)} = ?$$

Юқорида кўрсатилган йўл билан давом этилса

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \tag{5}$$

бўлади.

(2), (3) ва (4) формулаларнинг ҳар қандай (бутун) n учун тўғрилиги математик индукция методи билан исбот қилинади. Бунинг учун формуланинг тўғрилигини бирор n учун исбот қилиб, сўнгра $y^{(n+1)}$ ни тузамиз: бундан чиққан натижа формуладаги n ни $n+1$ га алмаштиришдан ҳосил бўлган натижага тенг бўлиб, формуланинг ҳар қандай n учун тўғрилиги исбот бўлади.

Лейбниц формуласи

Икки функция кўпайтмасининг n-тартибли ҳосиласини топиш учун Лейбниц формуласи мавжуддир. Бу формулани чиқариш учун u ва v ни x нинг функцияси фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Бунинг иккинчи ҳосиласини топамиз

$$(uv)'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Шунга ўхшаш:

$$(uv)''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Шу йўл билан давом этиб, чиққан ифоданинг сонли коэффициентларига диққат қилганда, уларнинг худди Ньютон биномининг коэффициентлари каби тузилганлигини кўрамиз; u ва v нинг ҳосила тартиблари бўлса, улар ҳам Ньютон биномининг даража кўрсаткичлари каби бўлиб, фақат u ва v нинг ўзлари ноль тартибли фараз қилинади.

Шунинг учун **Лейбниц формуласи** номини олган uv нинг n-тартибли ҳосиласи қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \\ &+ \cdots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.\end{aligned}} \qquad (6)$$

Бу формуланинг $n=1, 2, 3$ бўлганда тўғрилигини юқорида бевосита кўрган эдик. Энди n нинг қиймати қандай бўлса-да, унинг тўғрилигини исбот қиламиз. Бунинг учун формулани бирор n да тўғри бўлганда, унинг $n+1$ да ҳам тўғрилигини исбот қиламиз. Анализда бундай исбот қилиш методи кўп қўлланади ва уни тўлиқ индукция методи дейилади.

Шунинг билан формулани n нинг бирор қиймати учун тўғри фараз қилиб, унинг иккала томонидан ҳосиласини оламиз:

$$y^{(n+1)} = vu^{(n+1)} + v'u^{(n)} + nv''u^{(n-1)} + \cdots nu'v^{(n)} +$$

$$+ uv^{(n+1)} + nv'u^{(n)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} v''n^{(n-1)} + \cdots u'v^{(n)}$$

ёки

$$y^{(n+1)} = vu^{(n+1)} + (n+1)v'u^{(n)} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} v''u^{(n-1)} + \cdots +$$

$$+ (n+1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}.$$

Лекин юқорида чиқарилган формуладаги n нинг ўрнига $n+1$ ни қўйилса ҳам худди шу натижанинг ўзи келиб чиқади. Бу эса n нинг қиймати ҳар қандай бўлганда ҳам формуланинг тўғрилигини кўрсатади.

Мисол. Ушбу $y = x^3 e^x$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи топилсин.

Ечиш: $u = x^3$, $v = e^x$
фараз қилинса

$$u' = 3x^2,\ u'' = 6x,\ u''' = 6,\ u^{\mathrm{IV}} = 0$$

$$(e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = \cdots = (e^x)^{(n)} = e^x.$$

Буларни Лейбниц формуласига қўйилса $y^{(n)}$ нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y^{(n)} = x^3 e^x + 3nx^2 e^x + 3n(n-1)xe^x + n(n-1)(n-2)e^x =$$

$$= e^x\{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}.$$

Дифференциаллаш учун масалалар

290. $y = \ln x\sqrt{x}$; $\qquad y'' = -\frac{\ln x}{4x\sqrt{x}}$.

291. $y = x^2 + 2^x$; $\qquad y^{IV} = 2^x(\ln 2)^4$.

292. $y = \ln x$; $\qquad y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x^n}$.

293. $y = \cos x$; $\qquad y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

294. $y = x^2\ln x$; $\qquad y''' = \frac{2}{x}$.

295. $y = x\,\mathrm{arc\,tg}\,x$; $\qquad y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$.

296. $y = \operatorname{arc\,tg} x$; $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

297. $y = \ln(ax+b)$; $y^{n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)! \cdot a^n}{(ax+b)^n}$.

298. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $y'' = -\frac{8y}{(e^x + e^{-x})}$.

299. $y = \frac{x+1}{x-1}$; $y''' = \frac{-12}{(x-1)^4}$.

300. $y = e^{ax}$; $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

301. $y = \sin(ax+b)$; $y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$.

302. $y = \frac{1}{a+bx}$; $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot b^n}{(a+bx)^{n+1}}$.

303. $y = \cos^2 x$; $y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left\{2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right\}$.

304. $y = (x^3 + 3)e^{-x}$; $y^{\mathrm{VII}} = ?$

$y^{\mathrm{VII}} = -(x^3 - 21x^2 + 126x - 207)e^{-x}$.

305. $y = e^x \cos x$; $y^{\mathrm{VI}} = ?$ $y^{\mathrm{VI}} = 8e^x \sin x$.

306. $y = x \ln x$; $y^{(n)}$? $y^{(n)} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)}{x^{n-1}}$; $(n > 2)$

307. $y = x^{x-1} \ln x$; $y^{(n)} = ?$ $y^{(n)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{x}$

308. $y = (x^2 - 1)\ln(1+x)$; $y^{(n)} = ?$ $n > 3$ бўлган ҳолда

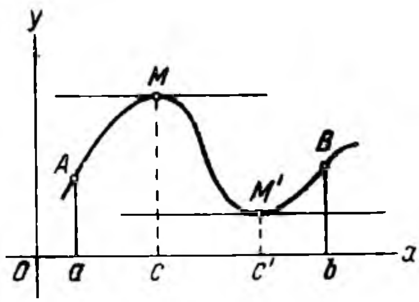
$y^{(n)} = (-1)^{n-1} 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-3)}{(1+x)^{n-1}} (x + n - 1)$.

Тўртинчи боб

ҲОСИЛАНИНГ ФУНКЦИЯ ТЕКШИРИШГА ТАТБИҚИ

§ 46. РОЛ ТЕОРЕМАСИ

Теорема. *Агарда $f(x)$ функция x нинг (a, b) интервалдаги ҳар бир қийматида белгили ҳосилага эга бўлса ва $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда шу интервалда x нинг ҳеч бўлмаганда шундай бирор c қиймати мавжудки, функциянинг бу қийматга тегишли $f'(c)$ ҳосиласи нолга айланади: $f'(c) = 0$.*



Шакл 32.

1. Геометрик мулоҳаза, $f(x)$ функциянинг графиги AB эгри чизиқ бўлсин ва $x = a$, $y = b$ нуқталарда

$$f(a) = f(b) = Aa = Bb$$

бўлсин. Теореманинг шартига мувофиқ (a, b) интервалдаги ҳар бир нуқтада функция ҳосилага эга, яъни белгили уринмага эга. Бу ҳолда (a, b) интервалда ҳеч бўлмаганда C каби битта шундай нуқтаси бўладики, у нуқтага тегишли уринма абсцисса ўқига параллел бўлади ва

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Бу каби нуқталар бир неча бўлуви мумкин. Масалан, бизнинг эгри чизиқда A ва B нинг орасида яна M' нуқта бор; бу нуқтадан ўтган уринма ҳам абсцисса ўқига параллел. Агарда M' нуқтанинг абсциссаси $x = c'$ фараз қилинса:

$$f'(c') = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

2*. **Аналитик исбот.** Теореманинг шартига мувофиқ (a, b) интервалдаги ҳар бир нуқтада функция белгили ҳосилага эга бўлгани учун шу интервалнинг ўзида функция узлуксиз бўлади. Бу ҳолда, узлуксиз функциянинг асосий хоссасига мувофиқ $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалдаги қийматлари ичида энг каттаси ва энг кичиги бўлади; булардан ҳеч бўлмаганда бири на $f(a)$ га ва на $f(b)$ га тенг бўлмайди, чунки тенг бўлган ҳолда функциянинг энг кичик қиймати унинг энг катта қийматига тенг бўлар эди, ҳолбуки бу мумкин эмас.

Функциянинг энг катта қиймати M бўлсин ва у на $f(a)$ га ва на $f(b)$ га тенг бўлмасин. Демак, бу ҳолда у (a, b) интервалдаги бирор $x = c$ га тўғри келиши керак

$$M = f(c), \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

h ни мусбат ва $c + h$ билан $c - h$ ни (a, b) интервалда фараз қилинса,

$$f(c + h) - f(c) \leqslant 0,$$

$$f(c - h) - f(c) \leqslant 0,$$

чунки $f(c)$ функциянинг энг катта қиймати эди. Демак,

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0,$$

$$\frac{f(c - h) - f(c)}{-h} \geqslant 0;$$

h нолга интилганда иккала тенгсизликнинг чап томонидаги нисбатнинг лимити $f'(c)$ бўлади. Лекин у нисбатлардан бири ≥ 0 ва иккинчиси ≤ 0 бўлгани учун

$$f'(c) = 0.$$

Масалан, агарда $f(x) = x(x-2)$ бўлса, $f(0) = f(2) = 0$ ва x нинг 0 билан 2 орасидаги ҳар бир қийматига функциянинг белгили ҳосиласи тўгри келади. Шунинг учун Рол теоремаси бўйича 0 билан 2 орасида x нинг ҳеч бўлмаганда битта шундай қиймати бўладики, функциянинг бу қийматга тегишли ҳосиласи ноль бўлади, Ҳақиқатда,

$$f'(x) = 2x - 2, \quad f'(1) = 0.$$

Агарда a ва b нинг ҳар бири $f(x)$ функциянинг илдизлари бўлса, яъни

$$f(a) = 0 \quad \text{ва} \quad f(b) = 0$$

бўлса, бу ҳолда c ҳосиланинг илдизи бўлади. Рол теоремасини бу ҳолда қуйидагича ифода қилиш мумкин:

$f(x)$ функциянинг ҳар икки илдизи орасида ҳеч бўлмаганда ҳосиланинг битта илдизи бўлади (бу оралиқда ҳосила мавжуд бўлганда, албатта).

Рол теоремасининг тўғрилиги учун берилган интервалнинг ҳар бир нуқтасида функциянинг ҳосилага эгалиги шартдир. Акс ҳолда теорема ўз кучини йўқотади. Масалан, ушбу

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 4$$

функция $x = \pm 8$ нуқтада нолга айланади: ҳолбуки унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$(-8, +8)$ интервалда нолга айланмайди. Бунинг сабаби $x = 0$ нуқтада функциянинг ҳосилага эга эмаслигидир.

§ 47. ЛАГРАНЖ ФОРМУЛАСИ

Лагранж формуласи. Агарда (a, b) интервалда x нинг ҳар бир қиймати учун $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлса, у ҳолда ҳеч бўлмаганда битта шундай $x = c$ нуқта топиладики, у нуқтада:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \tag{1}$$

$$a \leqslant c \leqslant b.$$

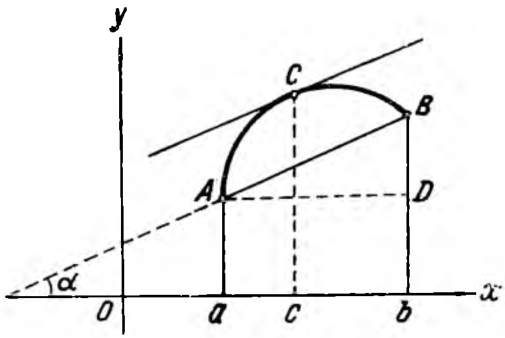
1. Геометрик мулоҳаза. A ва B нуқталари орасидаги эгри чизиқ $f(x)$ функциянинг графиги бўлсин (шакл 33); $Oa=a$ ва $Ob=b$ бўлсин. Бу ҳолда шаклга мувофиқ

$$Aa=f(a), \quad Bb=f(b);$$

$$AD=b-a, \quad BD=f(b)-f(a).$$

Агарда A ва B нуқталардан ўтган ватарнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчагини α фараз қилинса, бу ҳолда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Шакл 33

Лагранж формуласининг тузилишига қараганда $\operatorname{tg}\alpha=f'(c)$ бўлиши керак. Демак, A ва B нинг орасида эгри чизиқнинг шундай бирор C нуқтаси бўладики, бу нуқтадан ўтган уринма ҳалиги AB ватарга параллел бўлади. Шунинг учун агарда бу нуқтанинг абсциссасини c фараз қилинса, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Бу каби c нуқта (a, b) интервалда бир неча бўлуви мумкин.

2*. **Аналитик исбот.** $f(x)$ функция (a, b) интервалда ҳосилага эга бўлгани учун, у шу интервалда узлуксиз бўлади. Буни назарда тутиб, қуйидаги тенгликни тузамиз:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=P$$

ёки (2)

$$f(b)-f(a)=(b-a)P.$$

Агарда P нинг $f'(c)$ га тенглиги исбот қилинса, (1) формула исбот бўлади. Сўнгги тенгликнинг ўнг томонини чапга ўтказиб, b нинг ўрнига x ёзамиз ва буннинг натижасида ҳосил бўлган янги функцияни $F(x)$ фараз қиламиз

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)P. \tag{3}$$

(3) ва (2) га мувофиқ:

$$F(a)=0, \quad F(b)=0.$$

Шунинг учун Рол теоремасига мувофиқ (a, b) интервалда x нинг ҳеч бўлмаганда битта шундай қиймати бўладики, функциянинг у қийматга тегишли ҳосиласи ноль бўлади. Демак, агарда x нинг қийматини c фараз қилинса,

$$F'(x)=f'(x)-P,$$

$$f'(c)-P=0 \quad \text{ёки} \quad P=f'(c).$$

P учун белгиланган бу қийматни (2) тенгликка қўйиб, уни касрдан қутқазилса (1) формула келиб чиқади. Шунинг билан

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c); \quad a<c<b.$$

Лагранжнинг бу формуласи кўпинча бошқа формада ёзилади. Бунинг учун одатда у формуладаги a нинг ўрнига x ва b нинг ўрнига $x+h$ ёзадилар; a билан b нинг орасидаги c ни $x+\theta h$ равишда ёзиш мумкин, агарда θ ни тўғри ва мусбат каср фараз қилинса. Шунинг учун бу ҳолда (1) формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h); \ 0<\theta<1. \tag{4}$$

Бу формулани одатда чекли орттирма формуласи дейилади, чунки унинг чап томони $f(x)$ функциянинг орттирмасидан иборатдир.

Натижа 1. **Агарда (a, b) интервалда x нинг ҳар бир қиймати учун функциянинг ҳосиласи нолга айланса, у ҳолда функциянинг ўзи шу интервалда ўзгармас сон бўлади.**

Ҳақиқатда, x_1 ва x_2, (a, b) интервалда x нинг исталган қийматлари бўлсин. Лагранж формуласига мувофиқ

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c),$$

бунда c бўлса x_1 ва x_2 нинг орасида фараз қилинади.

Қўйилган шартга мувофиқ $f'(x)$, (a, b) интервалда x нинг исталган қиймати нолга тенг. Шунинг учун $f'(c) = 0$. Демак,

$$f(x_1) = f(x_2),$$

бу эса функциянинг ўзгармаслигини кўрсатади.

Натижа 2. **Агарда бирор интервалда $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг ҳосилалари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда шу интервалда бу функцияларнинг айирмаси ўзгармас C бўлади,**

$$F(x) - f(x) = C.$$

Ҳақиқатда, агарда айирмаси $\varphi(x)$ фараз қилинса,

$$\varphi(x) = F(x) - f(x),$$

бу ҳолда

$$\varphi'(x) = F'(x) - f'(x) = 0,$$

демак, $\varphi(x)$ ўзгармас сондан иборат.

§ 48. КОШИ ФОРМУЛАСИ

Коши формуласи. Агарда (a, b) интервалда x нинг ҳар бир қиймати учун $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ҳосиласи мавжуд бўлса ва $\varphi(x)$ нинг ҳосиласи (a, b) интервалда нолга айланмаса у ҳолда

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \qquad (1)$$

бунда c (a, b) интервалдаги бирор сон фараз қилинади.

Бу формулани Коши формуласи дейилади. Унинг тўғрилигини исбот қилиш учун (1) нинг чап томонидаги касрни P билан ифода қиламиз

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(b)} = P, \qquad (2)$$

бундан

$$f(b) - f(a) - [\varphi(b) - \varphi(a)] P = 0.$$

Бу тенглик ёрдами билан ушбу функцияни тузамиз:

$$F(x) = f(x) - f(a) - [\varphi(x) - \varphi(a)] P,$$

бу функциянинг тузилишига қараганда, (a, b) оралиғида унинг ҳосиласи бўлади.

Иккинчи томондан:

$$F(a) = 0 \quad \text{ва} \quad F(b) = 0,$$

агарда P нинг ўрнига ўз қиймати қўйилса.

Шунинг учун Рол теоремасига мувофиқ (a, b) интервалда x нинг ҳеч бўлмаганда битта шундай қиймати бўладики, $f(x)$ нинг у қийматга тегишли ҳосиласи ноль бўлади. Агарда x нинг бундай қийматини c фараз қилинса,

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) P,$$

демак,

$$F'(c) = f'(c) - \varphi'(c) P = 0,$$

бундан

$$P = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

P учун аниқланган бу ифодани (2) га қўйилса (1) формуланинг ўзи келиб чиқади.

Ўтган параграфда чиқарилган Лагранж формуласи Коши формуласининг хусусий ҳолидир. Ҳақиқатда

$$\varphi(x) = x, \quad \varphi'(x) = 1$$

бўлганда формуланинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

ёки

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Агарда a нинг ўрнига x, b нинг ўрнига $x + h$ ва c нинг ўрнига $x + \theta h$ ёзилса $(0 < \theta < 1)$, бу ҳолда Лагранж формуласи каби Коши формуласининг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}; \; 0 < \theta < 1.} \tag{3}$$

§ 49. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСИШИ ВА КАМАЙИШИ

Агарда $x=a$ дан $x=b$ гача оралиқда функциянинг аргументи ортиб борганда функциянинг ўзи ҳам ортиб борса, яъни агарда ҳалиги оралиқда $h>0$ бўлганда $f(x+h)-f(x)>0$ бўлса, бу ҳолда $f(x)$ функцияни шу оралиқда ўсувчи функция дейилади.

Агарда $x=a$ дан $x=b$ гача оралиқда $f(x)$ функциянинг аргументи ортиб борганда функциянинг ўзи камайиб борса, яъни агарда ҳалиги оралиқда $h>0$ бўлганда $f(x+h)-f(x)<0$ бўлса, бу ҳолда $f(x)$ функцияни шу оралиқда камаювчи функция дейилади.

Функцияни қай вақтда ўсиб боришини ва қай вақтда камайиб боришини билиш учун ушбу теорема қўлланади:

Теорема. *Агарда (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлиб, у мусбат бўлса, шу интервалда $f(x)$ функция ўсиб боради ва агарда у манфий бўлса камайиб боради.*

Теоремани исбот қилиш учун Лагранж формуласини оламиз,

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$$

$$0<\theta<1.$$

1) Берилган (a, b) интервалда $f'(x)$ мусбат бўлсин. Бу ҳолда, агарда $h>0$ бўлса

$$f(x+h)-f(x)>0$$

бўлади, яъни функция (a, b) интервалда ўсиб боради.

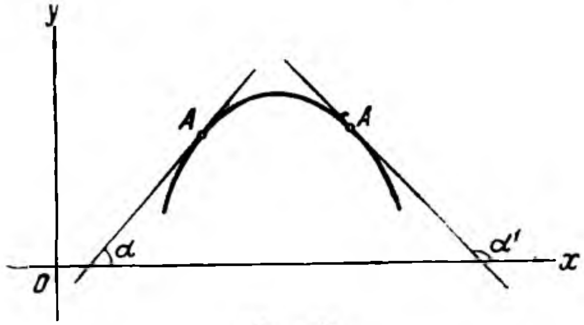
2) Берилган (a, b) интервалда $f'(x)$ манфий бўлсин. Бу ҳолда, агарда $h>0$ бўлса

$$f(x+h)-f(x)<0$$

бўлади, яъни функция (a, b) интервалда камайиб боради.

Исбот қилинган теореманинг геометрик маъноси 34-шаклдан очиқдан-очиқ кўринмоқдадир. Ҳақиқатда, функциянинг ҳосиласи у функцияни тасвир қилган эгри чизиқнинг берилган нуқтасидан ўтган уринманинг абсцисса ўқи билан (унинг мусбат томони билан) ташкил қилган бурчагининг тангенсини ифода қилади.

Агарда у бурчакни α фараз қилинса, теоремага мувофиқ, функция ўсган оралиқда $\operatorname{tg}\alpha>0$, яъни $\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлади ва функция камайган оралиқда $\operatorname{tg}\alpha < 0$, яъни $\alpha > \frac{\pi}{2}$ бўлади. Масалан, шаклга қараганда функция A нуқтада ўсади; шунинг учун $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) > 0$ ва $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Аксинча, функция



Шакл 31.

A' нуқтада камаяди; шунинг учун $\operatorname{tg}\alpha' = f'(x) < 0$ ва $\alpha' > \frac{\pi}{2}$.

Мисол учун ушбу функцияни оламиз:

$$y = 5x^3 - 2. \qquad (1)$$

Бу функциянинг ўсиш ёки камайишини текшириш учун унинг ҳосиласини оламиз:

$$y' = 15x^2.$$

x нинг қиймати қандай бўлса-да, x^2 ҳамма вақт мусбат бўлади. Демак, $y = 5x^3 - 2$ функция $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўсувчи функция бўлади.

Иккинчи мисол учун $x > 0$ бўлганда, ушбу

$$f(x) = \ln(1 + x) - x \qquad (2)$$

функциянинг ишораси қандай бўлишини текширамиз. Бунинг учун унинг ҳосиласини оламиз:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

Бунга қараганда x мусбат бўлса $f'(x)$ манфий бўлади, яъни x мусбат бўлиб, ўсиб борганда $f(x)$ ҳамма вақт камайиб боради. Иккинчи томондан,

$$f(0) = \ln 1 - 0 = 0.$$

Шунинг учун $x > 0$ бўлганда

$$f(x) < f(0) \quad \text{ёки} \quad f(x) < 0$$

бўлади. Демак, x нинг мусбат қийматлари учун функция доимо манфий бўлади, яъни

$$\ln(1 + x) - x < 0 \quad \text{ёки} \quad \ln(1 + x) < x.$$

Учинчи мисол учун ушбу функцияни оламиз:

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}. \tag{3}$$

Бунинг ўсиш ёки камайишини текшириш учун умумий қоидага мувофиқ ҳосиласини оламиз:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2}(1 - x^2)$$

ёки

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(1 + x)(1 - x);$$

x нинг қийматлари қандай бўлса-да, ҳамма вақт:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0.$$

Шунинг учун $f'(x)$ нинг ишораси $(1 + x)(1 - x)$ кўпайтманинг ишорасига боғлиқ. Бу кўпайтманинг ишораси бўлса:

$$x > 1 \quad \text{ва} \quad x < -1 \quad \text{бўлганда} \quad (1 - x)(1 + x) < 0$$

$$-1 < x < 1 \quad \text{бўлганда} \quad (1 - x)(1 + x) > 0.$$

Демак, $(-1, +1)$ интервалда $f(x)$ функция ўсади ва $(-\infty, -1)$ ва $(+1, +\infty)$ интервалларда у камаяди.

§ 50. ФУНКЦИЯНИНГ МАКСИМУМИ ВА МИНИМУМИ. 1-УСУЛ*

1. Агарда $x = a$ да $f(x)$ функциянинг $f(a)$ қиймати учун шу қийматига етарли даражада яқин бўлган ҳамма

* Максимум ва минимумнинг умумий назарияси келгусида берилади.

қўшни қийматларидан катта бўлса, бу ҳолда $f(a)$ у функциянинг максимуми (энг катта қиймати) дейилади.

Агарда $x = a$ да $f(x)$ функциянинг $f(a)$ қиймати унинг шу қийматига етарли даражада яқин бўлган ҳамма қўшни қийматларидан кичик бўлса, бу ҳолда $f(a)$ у функциянинг минимуми (энг кичик қиймати) дейилади.

Бу таърифни аналитик усулда қуйидагича ифода қилиш мумкин.

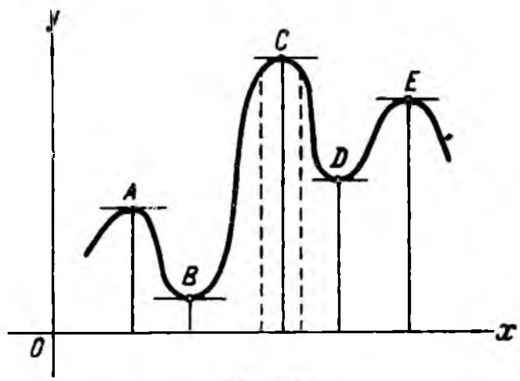
Агарда h ни етарли даражада кичик бўлган бирор (мусбат ёки манфий) сон фараз қилинса, бу ҳолда x нинг a га жуда яқин бўлган қўшни қийматини $a+h$ равишда ёзиш мумкин. Функциянинг a га қўшни бўлган қиймати бу ҳолда $f(a+h)$ бўлади. Шунинг учун агарда

$$f(a) > f(a+h) \quad \text{ёки} \quad f(a+h) - f(a) < 0$$

бўлса, бу ҳолда $f(x)$ функция $x = a$ қийматда максимумга эга бўлади ва

$$f(a) < f(a+h) \quad \text{ёки} \quad f(a+h) - f(a) > 0$$

бўлса, бу ҳолда функция $x = a$ қийматда минимумга эга бўлади.



Шакл 35.

Агарда 35-шаклдаги эгри чизиқни $f(x)$ функциянинг геометрик тасвири фараз қилинса, бу ҳолда берилган таърифга мувофиқ унинг A, C ва E нуқталаридаги қийматлари унинг максимумлари бўлади ва B, D нуқталаридаги қийматлари унинг минимумлари бўлади.

Функциянинг қийматини бирор нуқтада „максимум“ ёки „минимум“ деб айтганда: биз ёлғиз унинг шу нуқтасига етарли даражада яқин бўлган, унинг қўшни қийматларига нисбатан катта ёки кичиклигини таъкид қилиб, функциянинг бошқа қийматларини эътиборга олмаймиз.

Шунинг учун бирор оралиқда функциянинг минимуми унинг шу оралиқдаги максимумидан катта бўлиши ҳам мумкин. Масалан, 35-шаклдаги эгри чизиқнинг D нуқтасида минимум ва A нуқтасида максимум бўлган ҳолда, бу максимумнинг ҳалиги минимумдан кичиклигини кўрамиз.

2. Максимум ва минимум нуқталарда функциянинг ҳосиласи нолга айланади ёки мавжуд бўлмайди. Ҳақиқатда, бирор $x = a$ нуқтада функция максимумга ё минимумга эга бўлсин. Агарда $f'(a)$ мавжуд бўлмаса, бу ҳолда теорема ўз-ўзидан исбот бўлади. Агарда $f'(a)$ мавжуд бўлса, бу ҳолда у қуйидагича ифода қилинади:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Максимум ва минимум учун берилган таърифдан маълумки, $f(a)$ максимум ё минимум бўлган ҳолда, h мусбат бўлса-да, манфий бўлса-да, у етарли даражада кичик бўлганда

$$f(a+h) - f(a)$$

орттирма ўз ишорасини сақлайди (яъни ишораси ўзгармайди). Шунинг учун бу орттирманинг h га нисбатан:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

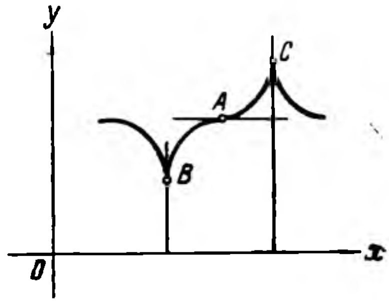
мусбат ҳам манфий бўла олади, ҳолбуки, у белгили лимитга, яъни $f'(a)$ га интилиши лозим (қўйилган шарт бўйича). Демак, бу лимит ноль бўлиши керак

$$f'(a) = 0.$$

Чиқарилган натижаларнинг геометрик маъноси шаклдан кўринмоқдадир. Ҳақиқатда, шаклга қараганда эгри чизиқнинг A, B, C, D, E каби максимум ва минимум нуқталарига ўтказилган уринмаларнинг абсцисса ўқига параллел бўлганлигини кўрамиз. Шунинг учун максимум ва минимум нуқталарида уринманинг бурчак коэффициенти, яъни функциянинг ҳосиласи нолга айланади.

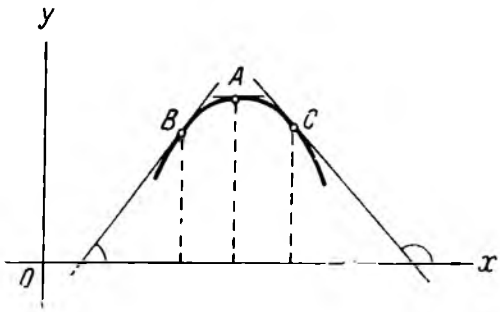
Бироқ B (минимум) ва C (максимум) каби нуқталарда (шакл 36) уринма абсцисса ўқига тик бўлгани учун $f(x)$ функциянинг ҳосиласи чексизликка айланади.

3. Бирор нуқтада функциянинг ҳосиласи нолга айланган билан функция шу нуқтада максимумга ёки минимумга эга бўла бермайди. Масалан, A каби нуқтада (шакл 36) функциянинг ҳосиласи нолга айланса-да, лекин бу нуқтада функция на максимумга ва на минимумга эга эмасдир.



Шакл 36

Шу сабабдан бундай нуқтада функциянинг максимумга ёки минимумга эга бўлишини билиш учун нуқта ёнида функция ишорасининг қандай ўзгаришига диққат қилишга тўғри келади.



Шакл 37

Масалан, A нуқтада $f(x)$ функциянинг максимум нуқтаси бўлсин (шакл 37). Бу ҳолда A дан чапда бўлган B каби нуқтада уринма абсцисса ўқи билан ўткир бурчак ташкил қилади, демак бу нуқтада $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мусбат бўлади:

$$f'(x) > 0.$$

Аксинча, A дан ўнгда бўлган C каби нуқтада уринма абсцисса ўқи билан ўтмас бурчак ташкил қилади, демак, бу нуқтада $f(x)$ функциянинг ҳосиласи манфий бўлади:

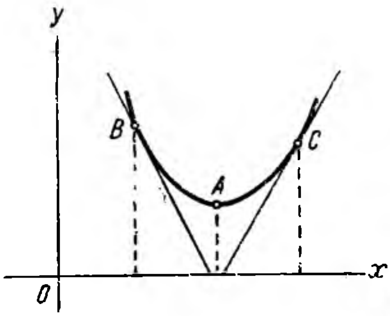
$$f'(x) < 0.$$

Шунинг билан чапдан ўнг томонга қараб юрганда максимум нуқталарда функциянинг ишораси

$$+\text{ дан } -\text{ га}$$

қараб ўзгаради.

Энди A нуқтани $f(x)$ функциянинг минимум нуқтаси фараз қиламиз (шакл 38). Бунда юқоридаги ҳолнинг тескарисини кўрамиз: A дан чапдаги B каби нуқтада уринма абсцисса ўқи билан ўтмас бурчак ва ундан ўнг томондаги C каби нуқтада ўткир бурчак ташкил қилади. Демак, B нуқтада $f(x)$ функциянинг ҳосиласи манфий



Шакл 38

$$f'(x) < 0$$

ва C нуқтада мусбат бўлади

$$f'(x) > 0.$$

Шунинг билан чап томондан ўнг томонга қараб юрганда минимум нуқталарида функциянинг ишораси

$$-\text{ дан } +\text{ га}$$

қараб ўзгаради.

Натижада функциянинг максимум ва минимумларини топиш учун ушбу **қоида** чиқади:

1) $f(x)$ функциянинг $f'(x)$ ҳосиласини топамиз,

2) x нинг ҳосилани нолга айлантирадиган ҳамма қийматларини топамиз. Бунинг учун топилган ҳосилани нолга тенглаб,

$$f'(x) = 0$$

тенгламанинг ҳақиқий илдизларини топамиз. Агарда x нинг ҳосиласини чексизликка айлантирадиган қийматлари бўлса, уларни ҳам топамиз,

3) $f'(x) = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан ёки $f'(x)$ ни чексизликка айлантирадиган қийматларидан бири a бўлсин: ε ни етарли даражада кичик бўлган бирор мусбат сон фараз қилиб, $f'(a-\varepsilon)$ ва $f'(a+\varepsilon)$ ларнинг ишораларини текширамиз. Агарда:

$f'(a-\varepsilon) > 0$ ва $f'(a+\varepsilon) < 0$ бўлса, $f(a)$ максимум.

$f'(a-\varepsilon)<0$ ва $f'(a+\varepsilon)>0$ бўлса, $f(a)$ минимум.

Агарда $f'(a-\varepsilon)$ ва $f'(a+\varepsilon)$ нинг ишоралари бир хил бўлса, у ҳолда $f(a)$ на максимум ва на минимум бўлади.

Агарда $f'(x)=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан бирини a фараз қилинса, бу ҳолда чиқарилган қоидани ушбу жадвал билан тасвир қилиш мумкин:

Агарда $f'(x)$ нинг ишораси		$f(a)$ нинг қиймати
$x<0$ бўлганда	$x>0$ бўлганда	
+	−	максимум
−	+	минимум
+	+	на максимум ва на минимум
−	−	на максимум ва на минимум

Энди чиқарилган қоидани бир неча мисолларга татбиқ қилиб кўрамиз.

Мисол 1. Ушбу функциянинг максимум ва минимум қийматлари топилсин:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+10.$$

Ечиш йўли:

1. $$f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

2. $$6x^2-6x-12=0 \text{ ёки } x^2-x-2=0$$

тенгламанинг илдизлари: $x_1=2$, $x_2=-1$ бўлади.

3. Ҳосиланинг ишорасини текшириш қулай бўлсин учун уни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$f'(x)=6(x-2)(x+1).$$

Қоидага мувофиқ

$$f'(2-\varepsilon)=6(-\varepsilon)(3-\varepsilon)<0,$$

$$f'(2+\varepsilon)=6(+\varepsilon)(3+\varepsilon)>0.$$

Демак, $x=2$ бўлганда функция минимумга эга бўлади ва

$$f(2)=-10 \text{ бўлади.}$$

Энди $x_2=1$ ни текшириб кўрамиз:

$$f'(-1-\varepsilon)=6(-3-\varepsilon)(-\varepsilon)>0,$$

$$f'(-1+\varepsilon)=6(-3+\varepsilon)(+\varepsilon)<0.$$

Демак, $x=-1$ бўлганда функция максимумга эга бўлади ва $f(-1)=17$ бўлади.

Мисол 2. Ушбу функциянинг максимум ва минимум қийматлари топилсин:

$$f(x)=x(\ln^2 x-3\ln x+3).$$

Ечиш йўли:

1. $$f'(x)=\ln^2 x-3\ln x+3+x\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{x}\right)$$

ёки

$$f'(x)=\ln^2 x-\ln x=\ln x(\ln x-1).$$

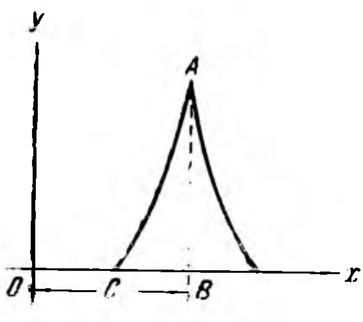
2. $\ln x(\ln x-1)=0$ ёки $\ln x=0$, $\ln x-1=0$,

бундан: $x_1=1$, $x_2=e$.

3. Аниқланган илдизларнинг ҳар бирини қоидага мувофиқ текшириб кўрамиз:

$$f'(1-\varepsilon)=\ln(1-\varepsilon)[\ln(1-\varepsilon)-1]>0.$$

$$f'(1+\varepsilon)=\ln(1+\varepsilon)[\ln(1+\varepsilon)-1]<0.$$



Шакл 39

Демак, $x=1$ бўлганда функция максимумга эга бўлади ва $f(1)=3$ бўлади.

Энди $x_2=e$ ни текшириб кўрамиз:

$$f'(e-\varepsilon)=\ln(e-\varepsilon)\times$$
$$\times[\ln(e-\varepsilon)-1]<0,$$
$$f'(e+\varepsilon)=\ln(e+\varepsilon)\times$$
$$\times[\ln(e+\varepsilon)-1]>0.$$

Демак, $x=e$ бўлганда функция минимумга эга бўлади ва $f(e)=e$ бўлади.

Мисол 3. Ушбу функциянинг максимум ва минимум қийматлари топилсин:

$$f(x)=a-\frac{b}{\sqrt[3]{(x-c)^2}}, \quad (b>0).$$

Ечиш йўли: 1. $f'(x)=-\frac{2b}{\sqrt[3]{x-c}}$.

2. Бунда ҳосилани нолга айлантирадиган x нинг қиймати йўқ, лекин $x=c$ бўлганда $f'(x)$ чексизликка айланади.

3. Қоидага мувофиқ

$$f'(c-\varepsilon)=-\frac{b}{\sqrt[3]{-\varepsilon}}>0,$$

$$f'(c+\varepsilon)=-\frac{2b}{\sqrt[3]{+\varepsilon}}<0.$$

Демак, $x=c$ бўлганда функция максимумга эга ва у $f(c)=a=AB$ бўлади (шакл 39).

§ 51. МАКСИМУМ ВА МИНИМУМНИ ТОПИШ УЧУН 2-УСУЛ

Ўтган параграфда чиқарилган қоидага мувофиқ $f(x)$ функциянинг максимум ва минимум қоидалари унинг $f'(x)$ ҳосиласининг ишораси қандай ўзгаришига боғлиқ эди. Бироқ кўпинча $f'(x)$ ҳосиланинг тузилишига қараб унинг ишорасининг қандай бўлишини текшириш ўнғайсиз бўлади.

Бундай ҳолларда ва $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлганда, унинг шу иккинчи тартибли ҳосиласига мурожаат қилинади.

Ҳақиқатда, $f'(x)$ ҳосила $f(x)$ функцияга нисбатан қандай роль ўйнаса, унинг иккинчи $f''(x)$ ҳосиласи ҳам $f'(x)$ га нисбатан шундай роль ўйнайди.

Ўтган параграфдан маълумки, $x=a$ нуқтада $f(x)$ функция максимумга эга бўлса, бу ҳолда бу нуқта ёнида $f'(x)$ ишораси $+$ дан $-$ га ўтади. Шунинг учун бу ҳолда $f'(x)$ нинг ўзи камаювчи функция бўлади ва унинг ҳосиласи, яъни $f''(x)$ манфий бўлади.

Шунга ўхшаш $x=a$ нуқтада $f(x)$ функция минимумга эга бўлса, бу ҳолда у нуқта ёнида $f'(x)$ нинг ишораси $-$ дан $+$ га ўтади. Шунинг учун бу ҳолда $f'(x)$ нинг ўзи ўсувчи функция бўлади ва унинг ҳосиласи, яъни $f''(x)$ мусбат бўлади.

Хуллас, максимум ва минимум топишнинг иккинчи усули қуйидагича бўлади:

1) Функциянинг биринчи ҳосиласини топамиз,

2) Топилган ҳосилани нолга тенглаб, унинг ҳамма ҳақиқий илдизларини топамиз,

3) Функциянинг иккинчи ҳосиласини топамиз,

4) Тенгламанинг ҳақиқий илдизларини навбат билан иккинчи ҳосилага қўямиз. Агарда натижа манфий чиқса — максимум, мусбат чиқса — минимум бўлади.

$f''(x)=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан бирини a фараз қилганда, кейинги қоидани ушбу таблица билан тасвир қилиш мумкин:

$f''(a)$ нинг ишораси	$f(a)$
$+$	минимум
$-$	максимум

Мисол 1. Ушбу функциянинг максимум ва минимум қийматлари топилсин:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2+5.$$

Ечиш йўли: 1. $f'(x)=-x^3-3x^2-2x.$

2. $-x^3-3x^2-2x=0$ ёки $-x(x^2+3x+2)=0,$

бундан:

$$x_1=0,\quad x_2=-2,\quad x_3=-1.$$

3. $$f''(x)=-3x^2-6x-2.$$

4. Тенгламанинг илдизларини навбат билан иккинчи ҳосилага қўйиб кўрамиз:

а) $f''(0)=-2<0,$

демак,

$x=0$ бўлганда $f(0)=5$ максимум бўлади.

в) $f''(-2)=-2<0$

демак,

$x=-2$ бўлганда $f(-2)=5$ максимум бўлади;

с) $f''(-1)=1>0$

демак, $x=-1$ бўлганда $f(-1)=4\frac{3}{4}$ минимум бўлади.

Мисол 2. Ушбу функциянинг максимум ва минимум қийматлари топилсин:

$$f(x) = x^x.$$

Ечиш йўли: 1. $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

2. $1 + \ln x = 0$ демак, $x = \frac{1}{e}$.

3. $f''(x) = x^{x-1} + x^x(1 + \ln x)^2$.

4. $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} > 0.$

Демак, $x = \frac{1}{e}$ бўлганда, функция минимумга эга бўлади ва у

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt[e]{\frac{1}{e}} \quad \text{бўлади.}$$

Мисоллар ва масалалар

Қуйидаги мисолларни ва масалаларни ечишда, берилган функциянинг тузилишига қараб, юқорида кўрсатилган икки усулдан бирини ишлатиш тавсия қилинади.

309. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3.$

Жавоб: $x = 5$ бўлганда $f(5) = -28$ минимум; $x = 1$ бўлганда $f(1) = 4$ максимум.

310. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20.$

Жавоб: $x = 3$ бўлганда $f(3) = -61$ минимум; $x = -2$ бўлганда $f(-2) = 64$ максимум.

311. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}.$

Жавоб: $x = 0$ бўлганда $y = \frac{1}{3}$ максимум; $x = 2$ бўлганда $y = -1$ минимум.

312. $f(x) = (x - a)^2.$

Жавоб: $x = a$ бўлганда, минимум $= 0$.

313. $y = 2x^3 + 6x^2 + 30x - 20.$

Жавоб: на максимум ва на минимум йўқ.

314. $$f(x) = x^2(x-3)^2.$$

Жавоб: $x=0$ ва $x=3$ бўлганда $f(0)=f(3)=0$ минимум; $x=1{,}5$ бўлганда $f(1{,}5)=\frac{81}{16}$ максимум.

315. $$f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}.$$

Жавоб: $x=0$ бўлганда $f(0)=1$ максимум; $x=1$ бўлганда $f(1)=0$ минимум; $x=-1$ бўлганда $f(-1)=0$ минимум.

316. $$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1.$$

Жавоб: $f(-1) = -1\frac{8}{15}$ минимум; $f(1) = 3\frac{8}{15}$ максимум; $f(2) = 2\frac{1}{5}$ минимум; $f(-2) = -\frac{1}{15}$ максимум.

317. $$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Жавоб: $f(e) = \frac{1}{e}$ максимум.

318. $$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Жавоб: $f(1) = e$ минимум.

319. $f(x) = x^2 + px + q$; $x=3$ бўлганда $f(x)$ нинг минимуми 5 бўлсин учун p ва q нинг қийматлари қандай бўлиши керак?

Жавоб: $p=-6$ ва $q=14$.

320. $$f(x) = \frac{\ln x}{x^n},\ n>0.$$

Жавоб: $x = e^{\frac{1}{n}}$ бўлганда максимум.

321. $$f(x) = \sin x \cos(\alpha - x).$$

Жавоб: $x = \frac{\alpha}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$ бўлганда максимум бўлади, агарда k жуфт бўлса, минимум бўлади, агарда k тоқ бўлса.

322. N дона бир турли электр элементларидан бир неча усуллар билан батарея тузиш мумкин. Бунинг учун ҳар группада n донадан қилиб, кетма-кет қўшгандан сўнг, ҳосил бўлган группалардан параллел қилиб қўшилади.

Агарда ҳар бир элементнинг электр юритувчи кучини E, унинг ички қаршилигини r ва ташқи қаршилигини R фараз қилинса, бундай батареянинг ток кучи қуйидаги формула билан ифода қилинади:

$$I = \frac{nNE}{NR + n^2r}.$$

Батареяни ташкил этган ҳар группадаги элементларнинг n сони нечтадан бўлганда бу батареянинг ток кучи энг катта бўлади?

Жавоб: $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ бўлганда.

323. Винтнинг фойдали иш коэффициентини ушбу формула билан ифода қилинади:

$$R = \frac{h(1 - h\mu)}{h + \mu},$$

бунда μ — ўзгармас, ишқалиш коэффициенти, h — винтнинг кўтарилиш бурчагининг тангенси. h нинг қиймати қандай бўлганда ишқалишнинг фойдали таъсир коэффициенти энг катта бўлади?

Жавоб $h = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}$.

324. Сувнинг $t(C)$ температурадаги c иссиқлик сигимини аниқлаш учун ушбу формула қўлланади:

$$c = 1 - 0{,}0006684t + 0{,}00001092t^2.$$

Қандай температурада сувнинг иссиқлик сигими энг кичик бўлади?

Жавоб: $t = 30^\circ{,}6$.

325. Чуқур сувда тўлқиннинг тарқалиб кетиш тезлиги ушбу формула билан ифода қилинади:

$$v = \sqrt{g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2a\pi}{\lambda}\right)},$$

бу формулада a — ўзгармас, λ — тўлқиннинг узунлиги. Тўлқиннинг узунлиги қандай бўлганда унинг тезлиги энг катта бўлади?

Жавоб: $\lambda = 2\pi\sqrt{a}$.

Юқоридаги масалаларда функциянинг ўзи маълум бўлиб, фақат унинг максимум ва минимум қийматларини топиш талаб қилинган эди. Ҳолбуки, кўпинча масалаларда функциянинг ўзини ҳам топишга тўғри келади. **Қуйидаги масалаларни ечишда энг аввал масаланинг шартига қараб функция тузишга ва ундан кейин тузилган функциянинг максимум ва минимумини излашга тўғри келади.**

326. Пароходнинг юришига сарф бўлган қувват унинг тезлигининг кубига пропорционал саналади. Пароходнинг юриши сувнинг оқишига қарши бўлиб, сувнинг ўз тезлиги соатига a километр бўлган ҳолда, пароходнинг тезлиги қандай бўлса, энг катта экономия бўлади?

Ечиш йўли: Пароходнинг ўз тезлиги (кўл сувда) v фараз қилинса, унга бир соатда сарф бўладиган қувват kv^3 бўлади (k — пропорционаллик коэффициенти). Пароходнинг бир соатда юрган ҳақиқий йўли $v-a$ бўлгани учун бир километр йўлга $\frac{kv^3}{v-a}$ қувват сарф бўлади. Шунинг билан изланган функция

$$f(v)=\frac{kv^3}{v-a}.$$

Бу функцияни текшириш учун умумий қоида бўйича давом этамиз:

$$f'(v)=\frac{(v-a)\,3kv^2-kv^3}{(v-a)^2};$$

$$(v-a)\,3kv^2-kv^3=0,$$

бундан

$$v=\frac{3}{2}a$$

($v=0$ тўғри келмагани учун тенгламанинг биринчи илдизи ташланади); v нинг қиймати $\frac{3}{2}a$ бўлганда функция минимумга эга бўлади. Демак, пароход сувнинг оқишига қарши юрганда, унинг ўз тезлиги сув оқиши тезлигининг $\frac{3}{2}$ сига тенг бўлса, энг катта экономия бўлди.

327. Айланаси $a=100$ метр бўлган девор билан мумкин қадар катта ерни ўраб олмоқчи бўлганлар. Ер тўғри тўртбурчак шаклида бўлган ҳолда унинг томонлари қандай бўлиши керак?

Жавоб: Ернинг ҳар бир томони $\frac{a}{4}=25$ метрдан, яъни квадрат шаклида бўлиши керак.

328. Радиуси R бўлган доиранинг ичига чизилган тўғри тўртбурчаклардан қайси бирининг юзи энг катта бўлади?

Жавоб: Квадрат бўлганда.

329. Тўғри тўрт қиррали ёғочнинг маҳкамлиги унинг эни билан баландлиги квадратининг кўпайтмасига пропорционал саналади.

Диаметри a бўлган хари ёғочни юқоридаги каби тўрт қиррали қилиб кесиш керак бўлган. Ёғочнинг мумкин қадар маҳкам бўлиши учун уни қандай қилиб кесиш керак? Ё бошқача қилиб айтганда, эни билан баландлигини қанчадан қилиб кесганда у маҳкам бўлади?

Жавоб: Ёғочнинг кўндаланг кесимида ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонлари

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ ва } a\sqrt{2/3}$$

бўлганда энг маҳкам бўлади.

330. Доиравий тўғри конуснинг ичига чизилган доиравий цилиндрлардан ҳажми энг каттаси топилсин.

Жавоб: Цилиндр асосининг радиуси — конус асоси радиусининг $\frac{2}{3}$ га тенг.

331. Доиравий тўғри конуснинг ичига чизилган доиравий цилиндрлардан ён юзи энг катта бўлгани топилсин.

Жавоб: Цилиндр асосининг радиуси — конус асоси радиусининг $\frac{1}{2}$ га тенг.

332. a сони шундай икки бўлакка бўлинсинки, уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.

Жавоб: ҳар бири $\frac{a}{2}$.

333. Радиуси R бўлган сфера ичига жойлаштирилган ва ҳажми энг катта бўлган доиравий тўғри цилиндрнинг баландлиги топилсин.

Жавоб: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

334. Доиравий тўғри конуснинг ичига жойлаштирилган доиравий цилиндрлардан шундайи топилсинки, унинг тўлиқ сирти энг катта бўлсин.

Жавоб: Цилиндр асосининг радиуси $= \frac{Rh}{2(h-R)}$.

335. Ушбу қатордаги сонлардан энг каттаси топилсин:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \ldots$$

Жавоб: $\sqrt[3]{3}$.

336. Тўғрибурчакли координаталар системасининг биринчи бурчагида $M(m, n)$ нуқта берилган. Бунинг устидан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, унинг координата ўқларининг мусбат томонларини кесишганидан ҳосил бўлган учбурчакнинг юзи энг кичик бўлсин.

Жавоб: Тўғри чизиқнинг ўқлардан кесган парчалари $a = 2m$, $b = 2n$ бўлганда.

337. Ҳажмлари бир-бирига тенг бўлган конус шаклли чодирлардан қайси бирининг баландлиги асосининг радиусидан $\sqrt{2}$ мартаба катта бўлса, унга энг кам газлама сарф бўлади. Буни исбот қилинсин.

338. Ҳажми v бўлган цилиндр шаклли (қопқоқсиз) қути ясаш керак бўлган. Бунинг баландлиги ва асосининг радиуси қандай бўлганда, унга жуда кам материал сарф бўлади?

Жавоб: Асосининг радиуси = баландлигига $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

339. Радиуси R бўлган сфера ичига жойлашадиган тўғри доиравий конуслардан шундайи топилсинки, унинг ён юзи энг катта бўлсин.

Жавоб: Конуснинг баландлиги $\frac{4}{3}R$.

340. Асоси билан баландлигининг йиғиндиси ўзгармас бўлган ҳамма учбурчаклардан қайси бирининг асоси баландлигига тенг бўлса, ўшанинг юзи энг катта бўлади. Буни исбот қилинсин.

341. Тўғри конуснинг ясовчиси l га тенг, унинг баландлиги ва асосининг радиуси қандай бўлганда ҳажми энг катта бўлади?

Жавоб. $h = \frac{1}{3} l \sqrt{3}$, $R = \frac{1}{3} l \sqrt{6}$.

342. Гипотенузалари бир-бирига тенг бўлган ҳамма учбурчаклардан қайси бири тенгёнли бўлса, ўшанинг юзи энг катта бўлади. Буни исбот қилинсин.

343. Тўғрибурчакли координаталар системасининг биринчи бурчагида $M(m, n)$ нуқта берилган. Бу нуқтанинг устидан ўтиб, координата ўқларининг мусбат томонлари кесган тўғри чизиқдан ҳосил бўлган a ва b парчалари йиғиндисининг энг ками қанча бўлади?

Жавоб: $a + b = m + 2\sqrt{mn} + n$ (минимум).

344. Асоси a га ва периметри $2p$ га тенг бўлган ҳамма учбурчаклардан юзи энг каттаси топилсин.

Жавоб: Тенгёнли учбурчак.

345. Тенгламаси $y^2 = 2x$ бўлган парабола ўқидаги нуқтанинг парабола бошидан масофаси n бўлса, параболанинг бу нуқтага энг яқин бўлган нуқтасининг абсциссаси қанча бўлади?

Жавоб: $n-1$.

346. Томони a сантиметр бўлган квадрат тунуканинг тўрттала бурчакларидан бир-бирига тенг бўлган квадрат парчаларни кесиб олиб, қолган тунукадан (усти очиқ) қути ясалмоқчи.

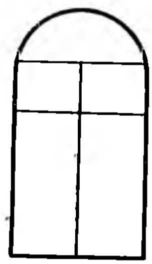
Қутининг ҳажми энг катта бўлсин учун кесилган квадратларнинг томони қанча бўлиши керак?

Жавоб: $\frac{1}{6}a$.

347. Асоси тўғри тўртбурчак шаклда бўлган деразанинг юқори томони ярим доирадан иборат (шакл 40). Деразанинг периметри 300 *см.*

Деразанинг томонлари қанчадан бўлганда, у энг кўп ёруглик ўтказади?

Жавоб: Деразанинг баландлиги ярим доиранинг радиусига тенг бўлса.



Шакл 40

348. Учбурчакнинг томонларидан бири a ва иккинчиси b. Буларнинг орасидаги бурчак қандай бўлганда учбурчакнинг юзи энг катта бўлади?

Жавоб: 90° бўлганда.

349. Тенгламаси $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ бўлган эллипсда шундай нуқта топилсинки, у нуқтадан ўтган уринманинг координата ўқлари орасидаги бурчаги энг қисқа бўлсин.

Жавоб: $x=a\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/2}$, $y=b\left(\frac{b}{a+b}\right)^{1/2}$.

§ 52. АНИҚМАС ИФОДАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТИПЛАРИ

Маълумки, баъзи бир функцияларнинг аргументига бирор қиймат берилганда, у функция бутунлай ўз маъносини йўқотиши мумкин. Бундай аниқмас ифодаларнинг баъзи бир асосий типлари билан танишиб ўтган эдик.

Бироқ аниқмас ифодаларнинг улардан бошқа типлари ҳам бўлиши мумкин. Турли текширишларда учрайдиган аниқмас ифодаларнинг одатдаги типлари қуйидагилардан иборатдир:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0.\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

Агарда бирор $f(x)$ функциянинг аргументи $x=a$ бўлганда, буларнинг бири каби аниқмас ифода чиқса, у вақтда

$f(x)$ функциянинг аргументи a га интилгандаги лимити (мавжуд бўлган ҳолда) унинг ҳақиқий қиймати саналади.

Аниқмас ифодаларнинг ҳақиқий қийматларини топиш учун биз ҳозиргача турли алмаштиришлардан фойдаланиб келдик. Энди уларни ҳосила ёрдами билан топишни кўрсатамиз.

$\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ типлар.

А.

Берилган функциянинг кўриниши

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{1}$$

бўлсин ва $x = a$ бўлганда касрнинг сурати ва махражи нолга айлансин, яъни

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0. \tag{2}$$

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни узлуксиз ва $x = a$ яқинида ҳосилага эга фараз қиламиз; шунинг билан баробар $x = a$ яқинида $\varphi'(x) \neq 0$ бўлсин. Коши формуласига ва (2) га мувофиқ

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

бунда x_1 бўлса a ва x орасида фараз қилинади.

x, a га интилган чоқда x_1 ҳам a га интилиб боради. Шунинг учун (кейинги касрнинг лимити мавжуд фараз қилинса),

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}. \tag{3}$$

Шунинг билан $\frac{0}{0}$ типдаги аниқмас ифоданинг ҳақиқий қийматини топиш (очиш) учун қуйидаги қоида келиб чиқади:

Функцияни ифода қилган каср сурати ва махражининг ҳосилаларини топиб, берилган қийматни аргумент ўрнига қўямиз. Янги касрнинг қиймати берилган касрнинг лимит қиймати бўлади (у мавжуд бўлган ҳолда).

Агарда яна

$$f'(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 0$$

чиқиб қолса, у ҳолда ҳамон $\frac{0}{0}$ тип бўлгани учун яна бир мартаба юқоридаги қоидани ишлатамиз. Демак, бу ҳолда:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Агарда $f''(a)=0$ ва $\varphi''(a)=0$ чиқиб қолса, у ҳолда қоидани яна бир мартаба ишлатамиз, яъни

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)}$$

ва шунга ўхшаш.

Чиқарилган қоида биринчи мартаба француз математиги Лопитал томонидан тақдим этилгани учун Лопитал қоидаси дейилади.

$a=\infty$ бўлган ҳолда ҳам чиқарилган қоида ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатда,

$$x=\frac{1}{y}$$

фараз қилинса,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Мисол 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=?$

Агарда x нинг ўрнига 0 қўйилса $\frac{0}{0}$ чиқади. Шунинг учун Лопитал қоидасини ишлатамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}}{1}=a.$$

Мисол 2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=?$$

Агарда x нинг ўрнига 0 қўйилса, ифоданинг кўриниши $\frac{0}{0}$ бўлади, яъни биринчи типдаги аниқмас ифода чиқади. Шунинг учун Лопитал қоидасини ишлатамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

Бироқ янги чиққан касрдаги x нинг ўрнига 0 қўйилса ҳамон $\frac{0}{0}$ чиқади. Шунинг учун Лопитал қоидасини яна бир мартаба ишлатамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

бу эса яна $\frac{0}{0}$ беради. Шунинг учун Лопитал қоидасини яна бир мартаба ишлатамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Юқорида ифода қилинган қоидани қуйидагича умумийлаштириш мумкин:

Фараз қилайлик $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар (a, b) ёпиқ интервалда аниқланган бўлсин. Агарда

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

бўлса ва шу интервалда кетма-кет

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{f(x)}$$

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{\varphi(x)}$$

ҳосилалар мавжуд ва чекли бўлиб, $x=a$ да улар нолга айланса ҳамда

$$\overset{(n)}{f(x)} \text{ ва } \overset{(n)}{\varphi(x)}$$

ҳосилалар мавжуд ва чекли бўлиб

$$\overset{(n)}{\varphi(x)}\neq 0$$

бўлса, бу ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Бироқ биз бу ерда бунинг исботи устида тўхтамаймиз.

B.

Агарда берилган ифоданинг кўриниши

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

бўлиб, $x=a$ бўлганда

$$f(a)=\infty,\quad \varphi(a)=\infty$$

бу ҳолда

$$\frac{\infty}{\infty}$$

тип ҳосил бўлади. Фараз қилайлик

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=K,\quad (K\neq 0)$$

бўлсин. Бу ҳолни биринчи типга келтириш мумкин. Бунинг учун берилган касрни бундай ёзамиз:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

$$f(a)=\infty,\quad \varphi(a)=\infty$$

бўлгани учун

$$\frac{1}{\varphi(a)}=0 \text{ ва } \frac{1}{f(a)}=0$$

бўлиб, ифоданинг кўриниши $\frac{0}{0}$ бўлади. Шунинг учун Лопитал қоидасига мувофиқ

$$K=\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim\frac{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

$$K = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2 \text{ ёки } K = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot K^2$$

$$1 = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot K,$$

ёки

$$K = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Шунинг билан

$$K = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Демак, бу ҳолда ҳам, яъни $\frac{\infty}{\infty}$ бўлганда ҳам, Лопитал қоидаси ўз кучини сақлайди.

Биз юқорида $K \neq 0$ фараз қилган эдик. Лекин $K = 0$ бўлганда ҳам чиқарилган натижа ўз кучини сақлайди, яъни агарда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \quad \text{бўлса,} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0$$

бўлади. Буни исбот қилиш учун A ни нолга тенг бўлмаган бирор сон фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$A = \lim \frac{f(x) + A\varphi(x)}{\varphi(x)}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги нисбатга кейинги қоидани ишлатиб бўлади, шунинг учун

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + A\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) + A\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + A,$$

демак,

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0.$$

Мисол 3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = ? \quad (n > 0).$

x чексизликка интилганда ифоданинг сурат ва махражи ҳам чексизликка интилади. Шунинг учун Лопитал қоидасини ишлатиш мумкин:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

Мисол 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\frac{1}{x}}=?$$

x нолга интилганда берилган касрнинг сурат ва махражи чексизликка интилади. Шунинг учун касрнинг суратини $f(x)$ билан ва махражини $\varphi(x)$ билан ифода қилиб, Лопитал қоидасини ишлатамиз:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\dfrac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{0}{0},$$

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\frac{2x}{-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{0}{0},$$

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)}=\frac{1}{+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=+1.$$

Юқоридаги қоидани чиқаришда биз фараз қилган эдикки, x a га интилганда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ ва } \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

нисбатлар белгили лимитларга интилади деб. Бироқ x бирор a га интилганда $f(x)$ нинг $\varphi(x)$ га нисбати лимитга интилиб, лекин улар ҳосилаларининг нисбати ҳеч қандай лимитга интилмаслиги мумкин.

Масалалар

350. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}.$ Жавоб: $\dfrac{4}{5}$.

351. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}.$ Жавоб: $\ln\dfrac{a}{b}$.

352. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$. Жавоб: 2.

353. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$. Жавоб: $\frac{1}{2}$.

354. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln (x - 2)}{x - 3}$. Жавоб: 1.

355. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\ln x}$. Жавоб: ∞.

356. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$. Жавоб: 0.

357. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$. Жавоб: 1.

358. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{5x}$. Жавоб: $\frac{3}{5}$.

359. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. Жавоб: 2.

360. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}{\ln (1 - x)}$. Жавоб: $-\infty$.

361. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. Жавоб: 0.

362. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x}$. Жавоб: 1.

363. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \sin^2 x}$. Жавоб: $\frac{1}{3}$.

364. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$. Жавоб: -1.

365. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\ln^2(1+x)}$. Жавоб: 1.

366. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x}$. Жавоб: $\ln a - 1$

367. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \ln\cos x}{x^2}$. Жавоб: 1.

368. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$. Жавоб: $\frac{1}{3}$.

369. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$. Жавоб: 0.

370. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x}$. Жавоб: 0.

371. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$. Жавоб: -2.

372. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{x^3}$. Жавоб: $\frac{1}{2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$, Жавоб: 1.

374. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + x^3\cos x}{x^2\sin x}$. Жавоб: 2.

2. $0\cdot\infty$ ва $\infty - \infty$ типлар

$0\cdot\infty$ ва $\infty - \infty$ типларнинг ҳар бирини аввалги икки асосий типга келтириш мумкин. Масалан,

$$f(x)\,\varphi(x)$$

ва $x = a$ бўлганда

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = \infty$$

бўлса, ифоданинг кўриниши $0\cdot\infty$ бўлади. Бу типни ҳамма вақт $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ типлардан бирига келтириш мумкин. Бунинг учун берилган ифодани қуйидагича ёзилса кифоя қилади:

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \text{ ёки } f(x)\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Қўйилган шарт бўйича биринчи касрнинг сурат ва махражи ноль ва иккинчи касрнинг сурат ва махражи чексиз бўлади. Натижада масала ҳамон Лопитал қоидаси билан ечилади.

Мисол 1. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=?$

$x=0$ бўлганда $x\ln x$ нинг кўриниши $0\cdot\infty$ бўлади. Иккинчи томондан, берилган ифодани

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

формада ёзиш мумкин. Бу ҳолда у $\frac{\infty}{\infty}$ типга айланади. Шунинг учун Лопитал қоидаси бўйича:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

2. $$f(x)-\varphi(x).$$

Агарда $x=a$ бўлганда

$$f(a)=\infty, \quad \varphi(a)=\infty$$

га айланса, ифоданинг кўриниши $\infty-\infty$ бўлади. Буни аввалги асосий типлардан бирига келтириш мумкин. Бунинг учун

$$f(x)=\frac{1}{F_1(x)}, \quad \varphi(x)=\frac{1}{F_2(x)}$$

фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$F_1(a)=0, \quad F_2(a)=0$$

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{F_1(x)}-\frac{1}{F_2(x)}=\frac{F_2(x)-F_1(x)}{F_1(x)\cdot F_2(x)},$$

бундан

$$f(a)-\varphi(a)=\frac{F_2(a)-F_1(a)}{F_1(a)\cdot F_2(a)}=\frac{0}{0},$$

бу эса Лопитал қоидаси билан топилади.

Мисол 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=?$

$\sec x-\operatorname{tg} x$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sec x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$x=\frac{\pi}{2}$ бўлганда бу $\frac{0}{0}$ бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} x=0.$$

Масалалар

375. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right]$. Жавоб: $\frac{1}{2}$.

376. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\operatorname{tg} x$. Жавоб: 0.

377. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. Жавоб: $\frac{2}{\pi}$.

378. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Жавоб: 2.

379. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$. Жавоб: $-\frac{1}{2}$.

380 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x$. Жавоб: $\ln a$.

381. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(1-x)$. Жавоб: 0.

382. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}\right]$. Жавоб: 0.

383. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x \ln \sin x$. Жавоб: 0.

384. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{2a}{x^2-a^2}\right]$. Жавоб: $\frac{1}{2a}$.

385. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x\cdot \ln x$. Жавоб: 0.

386. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]$. Жавоб: $\frac{1}{3}$.

387. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$. Жавоб: $\frac{1}{2}$.

388. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\operatorname{tg} x$. Жавоб: 2.

389. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right]$. Жавоб: $\frac{2}{3}$.

390. $\lim\limits_{x\to \infty} 2^x\cdot \sin\frac{a}{2^x}$. Жавоб: a.

391. $\lim\left[\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right]$. Жавоб: $\frac{m-n}{2}$.

3. 0^0, 1^∞, ∞^0 типлар

Бу типларнинг умумий ифодаси қуйидагича бўлади:

$$f(x)^{\varphi(x)}, \tag{1}$$

Ҳақиқатда, $x=a$ бўлганда

$f(a)=0$ ва $\varphi(a)=0$ бўлса, 0^0 бўлади,

$f(a)=1$ ва $\varphi(a)=\infty$ бўлса, 1^∞ бўлади,

$f(a)=\infty$ ва $\varphi(a)=0$ бўлса, ∞^0 бўлади.

(1) ни y фараз қилиб, сўнгра иккала томонидан логарифм оламиз:

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x).$$

Қилинган фаразия бўйича $x = a$ бўлганда

$$\ln y = 0 \cdot \infty$$

бўлади, бу эса бизга маълум тип. Фараз қилайлик

$$\lim_{x \to a} (\ln y) = k$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{x \to a} y = e^{x}.$$

Мисол 1. $\lim\limits_{x \to a} (x - a)^{x-a} = ?$

$x = a$ бўлганда ифоданинг кўриниши 0^0 бўлади. Шунинг учун (вақтинча „lim“ қолдирилса),

$$y = (x - a)^{x-a},$$

$$\ln y = (x - a) \ln (x - a),$$

$$\ln y = \frac{\ln (x - a)}{\frac{1}{x - a}} = \frac{\frac{1}{x - a}}{-\frac{1}{(x - a)^2}} = -(x - a) = 0 \quad x = a \text{ бўл-}$$

ганда).

Демак, $y = e^0 = 1$, яъни $\lim\limits_{x \to a} (x - a)^{x-a} = 1.$

Мисол 2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = ?$

$x = 0$ бўлса, ифоданинг кўриниши 1^{∞} бўлади. Шунинг учун ҳалиги йўл билан давом этамиз:

$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln (1 + x) = \frac{\ln (1 + x)}{x},$$

$x=0$ бўлган ҳолда бу ифоданинг кўриниши $\frac{0}{0}$ бўлади. Шунинг учун:

$$\ln y = \frac{[\ln(1+x)]'}{(x)'} = \frac{1}{1+x},$$

$x=0$ бўлганда $\ln y = 1$ ва $y = e$ бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Масалалар

392. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. Жавоб: 1.

393. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)^{x-1}$. Жавоб: 1.

394. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Жавоб: $\frac{1}{e}$.

395. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x}$. Жавоб: 1.

396. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{\cos x}$. Жавоб: 1.

397. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Жавоб: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^n}$ $(n>0)$. Жавоб: 1.

399. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$. Жавоб: 1.

400. $\lim\limits_{x\to 1} (1-\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Жавоб: $\frac{1}{e}$.

401. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^5 - a^5)^{\frac{1}{\ln x}}$. Жавоб: e^5.

402. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. Жавоб: $\frac{1}{e}$.

403. $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x \sin \frac{a}{2^x}$. Жавоб: a.

404. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^x$. Жавоб: 1.

405. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$. Жавоб: e^3.

406. $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$. Жавоб: e^2.

407. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Жавоб: 1.

408. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 5x)^{\frac{2}{x^2}}$. Жавоб: e^{-25}.

409. $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. Жавоб: 1.

410. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. Жавоб: 1.

411. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Жавоб: $\frac{1}{\sqrt[\pi]{e^2}}$.

Бешинчи боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ ГЕОМЕТРИЯГА ТАТБИҚИ (ТЕКИСЛИКДАГИ ЧИЗИҚЛАР)[1]

§ 53. ТЕКИСЛИКДАГИ ЧИЗИҚНИНГ АНАЛИТИК ИФОДАСИ

1. Текисликдаги эгри чизиқнинг декарт координаталарига нисбатан аналитик ифодаси унинг ўзгарувчи x ва y координаталари орасидаги

$$y = f(x) \tag{1}$$

ёки умуман

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

муносабатдан иборатдир.

Бироқ эгри чизиқнинг ўзгарувчи x ва y координаталари орасидаги муносабатни ёлгиз бир тенглама билан ифода қилишга гоҳо имконият бўлмайди ёки бўлган ҳолда ўнғайсиздир.

Бундай ҳолларда x ва y нииг ҳар бирини бирор учинчи ўзгарувчи ёрдами билан ифода қилишга тўғри келади ва бундай ёрдамчи ўзгарувчини **параметр** дейилади. Шунинг учун агарда t ни параметр фараз қилинса, бу ҳолда эгри чизиқнинг t ёрдами билан ифода қилинган тенгламаларнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Эгри чизиқнинг бу шаклдаги тенгламаларини унинг **параметрик тенгламалари** дейилади. Агарда бу тенгламалардан t ни чиқарилса, юқоридаги (2) шаклдаги тенглама келиб чиқади.

[1] Бу бобда ишлатиладиган функцияларни узлуксиз, бир қийматли ва масаланинг характерига қараб, керак бўлган тартибгача ҳосилалари мавжуд фараз қилинади.

2. Қутб координаталари r ва φ га нисбатан текисликдаги чизиқ

$$F(r, \varphi) = 0 \tag{4}$$

ёки буни r га нисбатан ечилган фараз қилинса

$$r = f(\varphi) \tag{5}$$

кўринишда ифода қилинади.

Маълумки, декарт системасининг боши қутбда бўлиб, абсцисса ўқини қутб ўқи қабул қилинса, нуқтанинг қутб ва декарт координаталари орасида ушбу муносабатлар мавжуддир:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{6}$$

Шунинг учун (5) дан (3) га ўтиш мумкин. Бунинг учун (5) дан r нинг ифодасини (6) га қўйилса кифоя қилади. Демак, бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y &= f(\varphi)\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Булар эса, берилган чизиқнинг параметрик тенгламалари бўлиб, булардаги φ (қутб бурчаги) параметр ролини ўйнайди.

Энди мисол ўрнида баъзи бир эгри чизиқларнинг параметрик тенгламалари билан таништириб ўтамиз.

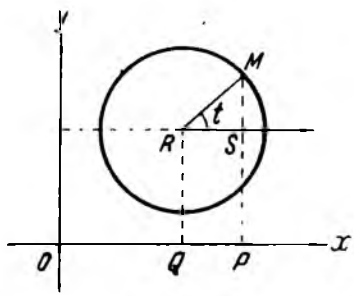
Айлана. Айлананинг радиуси R ва марказининг координаталари (x_0, y_0) бўлсин (шакл 41). Айланадаги ихтиёрий M нуқтанинг координаталари (x, y) бўлсин; RM радиусининг ўрни бу радиус билан OX нинг орасидаги t бурчак билан аниқланади. Тўғрибурчакли RMS учбурчакда:

$$RS = RM\cos t, \quad MS = RM\sin t.$$

Шаклга мувофиқ

$$RS = QP = OP - OQ = x - x_0.$$

$$MS = MP - SP = MP - RQ = y - y_0$$



Шакл 41.

$$RM = r.$$

Демак, айлананинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

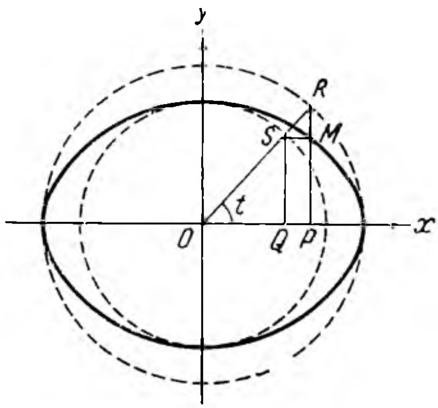
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t + x_0 \\ y &= r\sin t + y_0 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Бу тенгламалардан t ни чиқарилса, натижада ҳамон айлананинг одатдаги тенгламаси келиб чиқади. Бунинг учун (8) даги x_0 ва y_0 ларни чапга ўтказиб, ҳар бир тенгламани квадратга кўтаргандан сўнг қўшамиз:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Эллипс. Фараз қилайлик эллипснинг катта ўқи $2a$ ва кичик ўқи $2b$ бўлсин. Координаталар бошини марказ қилиб, бири a га ва иккинчиси b га тенг бўлган радиуслар билан иккита айлана чизамиз (шакл 42).

Координаталарнинг бошидан бирор тўғри чизиқ ўтказамиз; унинг кичик айлана билан кесишган нуқтаси S ва катта айлана билан кесишган нуқтаси R бўлсин. Аналитик геометриядан маълумки, агарда R нуқтадан ордината ўқига параллел қилиб RP ни, S нуқтадан абсцисса ўқига параллел қилиб SM ни ўтказилса, бу ҳолда M (x, y) нуқта эллипсда бўлади. Агарда OR билан OX орасидаги t бурчакни параметр қабул қилинса, бу ҳолда ORP учбурчакда:



Шакл 42.

$$OP = OR \cos t$$

ёки

$$x = a \cos t.$$

Шунга ўхшаш, OSQ учбурчакда

$$MP = SQ = OS \sin t \text{ ёки } y = b \sin t.$$

Шунинг билан эллипснинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Агарда булардан параметр t ни чиқарилса, натижада эллипснинг одатдаги тенгламаси келиб чиқади. Ҳақиқатда, (9) дан

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t,$$

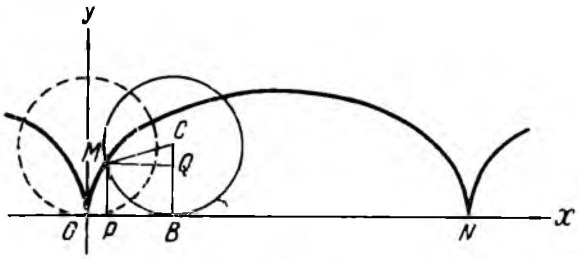
$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t,$$

булардан

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Циклоида. Циклоида деб, ўзгармас OX тўғри чизиқ бўйича сирғанмай ғиррилаб кетган доира айланасидаги бирор M нуқтанинг чизган чизиғини айтилади.

Бунинг тенгламасини тузиш учун OX ни абсцисса ўқи фараз қиламиз; доиранинг радиуси a бўлсин ва доира айланасидаги M нуқтанинг бошланғич ўрни координаталарнинг бошида бўлсин (шакл 43).



Шакл 43.

Доира бошқа ўринни ишғол этганда, у OX нинг бирор B нуқтасига уринма бўлади. Шунинг учун $\smile BM = OB$. Агарда CM ва CB орасидаги ўзгарувчи бурчакни t фараз қилинса, бу ҳолда

$$OB = \smile MB = at.$$

Доира айланасидаги M нуқтанинг ўзгарувчи координаталари x, y бўлсин. Шаклга мувофиқ

$$x = OP = OB - MQ,$$

$$y = MP = CB - CQ.$$

Тўғрибурчакли MCQ учбурчакда

$$MQ = a \sin t, \ \ CQ = a \cos t,$$

демак,

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Циклоиданинг параметрик тенгламалари шулардан иборат. Агарда бу тенгламалардан t ни чиқарилса, циклоиданинг x, y га нисбатан тенгламаси ҳосил бўлади. Бунинг учун иккинчи тенгламадан t ни y орқали ифода қиламиз:

$$t = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right),$$

буни биринчи тенгламага қўйилса,

$$x = a\left[\arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2}\,\right]. \qquad (11)$$

Бу тенглама (10) нисбатан ишлатиш учун ўнғайсиз бўлганидан одатда (10) тенгламалар ишлатади.

§ 54. ПАРАМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

Фараз қилайлик функция параметрик формада берилган бўлсин.

Масалан,

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= \varphi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

бунда y ни x нинг аниқ функцияси фараз[1] қилиб, y дан x га нисбатан

$$y',\ y'',\ y''',\ldots$$

ҳосилаларини тузамиз. Бунинг учун энг аввал (1) дан dx ва dy дифференциалларни топамиз:

$$dx = f'(t)\,dt \qquad (2)$$

$$dy = \varphi'(t)\,dt. \qquad (3)$$

Энди (3) (2) га бўлинса,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)} \qquad (4)$$

---

[1] Унинг қачон мавжудлик шарти устида биз бу ерда тўхтамаймиз.

ҳосил бўлади. Буни яна бир марта дифференциалланса,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)\varphi''(t) - \varphi'(t)f''(t)}{f'^2(t)} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ёки

$$y'' = \frac{f'(t)\varphi''(t) - \varphi'(t)f''(t)}{f'^2(t)\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)\varphi''(t) - \varphi'(t)f''(t)}{f'^3(t)}$$

бўлади.

Шу йўл билан давом этиб, исталганча $y^{(n)}$ ҳосилани тузиш мумкин.

Мисол. Параметрик формада берилган ушбу

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

функциядан x га нисбатан y' ва y'' ҳосилаларни топамиз.

Берилган тенгламаларни дифференциалланса,

$$dx = -a\sin t dt,$$

$$dy = +a\cos t dt,$$

булардан

$$y' = -\operatorname{ctg} t. \tag{5}$$

Буни яна бир марта дифференциалланса,

$$y'' = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

§ 55. ЁЙНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

А.

Декарт системасида

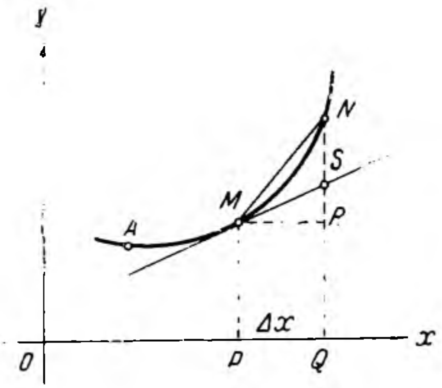
Эгри чизиқ узунлиги тушунчаси ва унинг узунлигини ҳисоблаш масаласи китобимизнинг аниқ интеграллар бобида берилади.

Ҳозирча бизга эгри чизиқ ёйининг дифференциали керак бўлиб туради. Шу сабабдан бу ерда ёй дифференциали учун формула чиқаришга тўғри келади.

Бунинг учун эгри чизиқнинг тенгламасини

$$y = f(x) \tag{1}$$

фараз қилиб унинг бирор бошлангич A нуқтасидан ёйнинг узунлигини ҳисоб қиламиз (шакл 44).



Шакл 44.

Агарда эгри чизиқда бирор $M(x, y)$ нуқта олиб, AM ёйнинг узунлигини s фараз қилинса, у ҳолда s x нинг функцияси бўлади:

$$s = \varphi(x). \tag{2}$$

Энди x га бирор Δx орттирма бериб s нинг олган орттирмасини Δs фараз қиламиз:

$$\Delta x = PQ; \ \Delta s = \smile MN. \tag{3}$$

Ҳосиланинг таърифига мувофиқ

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right). \tag{4}$$

Δx нолга яқинлашганда MN ватар ҳам нолга яқинлашади ва Δs ёйнинг MN ватарга нисбатининг лимити 1 га интилади.

Ҳақиқатда шаклга мувофиқ

$$MN < \smile MN < MS + SN \tag{5}$$

$$MN = \sqrt{(MR)^2 + (RN)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$MS = \sqrt{(MR)^2 + (RS)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + (y'\Delta x)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\cdot\Delta x.$$

SN бўлса, Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик сондан иборат (чунки RS функциянинг дифференциали бўлади). Шунинг учун $SN=\varepsilon$ фараз қилинса (5) функциянинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\Delta s<\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x+\varepsilon$$

ёки

$$1<\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}<\frac{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}. \tag{6}$$

Δx нолга интилганда тенгсизликнинг ўнг томони ҳам нолга интилади. Ҳақиқатда,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}\right)=1;$$

(6) тенгсизликнинг ўнг томонидаги қўшилувчининг нолга интилиши ўз-ўзидан кўриниб туради. Демак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)=1, \tag{7}$$

бу эса чексиз бўлган MN ватар билан MN ёйнинг бир-бирига эквивалентлигини кўрсатади. Шунинг учун 20-параграфда исбот қилинган 1-теоремага суяниб, (4) даги Δs ни $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ билан алмаштиришимиз мумкин. Натижада,

$$\frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

ёки

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Бунинг иккала томони dx га кўпайтирилса, қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx} \tag{8}$$

Агарда dx ни радикал остига киритилса, формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}} \tag{9}$$

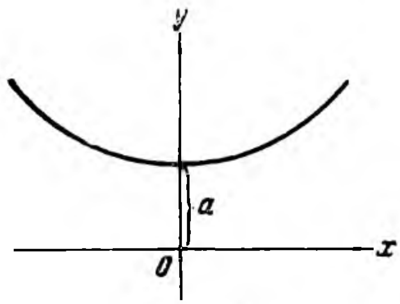
$$x = f(t),\ y = \varphi(t)$$

бўлса,

$$dx = f'(t)\,dt,\ dy = \varphi'(t)\,dt$$

бўлгани учун бу ҳолда (9) га мувофиқ қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2}\,dt} \tag{10}$$



Шакл 45

Мисол. Қуйидаги тенглама билан ифода қилинган „занжир чизиқ" (шакл 46) ёйининг дифференциали топилсин:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Ечиш йўли:

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx.$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) dx^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx^2,$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx.$$

B.

Қутб системасида

Фараз қилайлик эгри чизиқнинг қутб системасида берилган тенгламаси

$$r = f(\varphi) \tag{11}$$

ва бу тенгламада r — радиус-вектор, φ — қутб бурчаги бўлсин (шакл 46).

Агарда қутб ўқини декарт системасининг абсцисса ўқи ва қутбни координаталар боши фараз қилинса, бу чоқда

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, \quad (12)$$

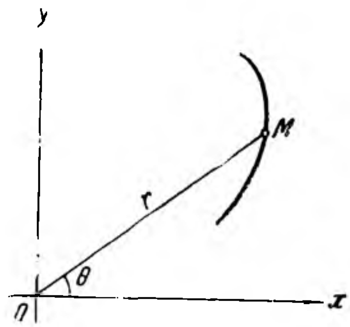
бундан

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi d\varphi,$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

Буларни юқорида чиқарилган (9) формулага қўйилса, ёйнинг қутб системасидаги дифференциали учун ушбу формула чиқади:

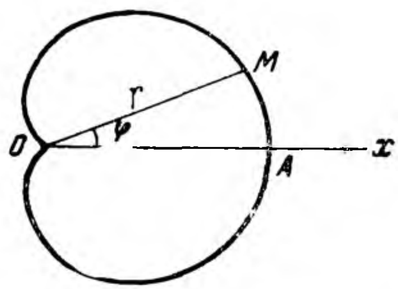
$$\boxed{ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}}\,. \quad (13)$$



Шакл 46.

Мисол. Қуйидаги тенглама билан ифода қилинган кардиоида ёйининг дифференциали топилсин (шакл. 47).

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$



Шакл 47.

Бундан r ва dr ифодаларини (13) формулага қўямиз,

$$ds = a\sqrt{\sin^2\varphi + (1+\cos\varphi)^2}d\varphi =$$

$$a = \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi$$

ёки

$$ds = 2a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Масалалар

Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган эгри чизиқлар ёйларининг дифференциаллари топилсин:

412. $y = ax^3$ (кубик парабола).

Жавоб: $ds = \sqrt{1 + 9a^2x^4}\, dx.$

413. $y^2 = 2px$ (парабола).

Жавоб: $ds = \frac{1}{y}\sqrt{p^2 + y^2}\, dx.$

414. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс).

Жавоб: $$ds=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx.$$

415. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроида).

Жавоб: $$ds=a^{1/3}x^{-1/3}dx.$$

416. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (циклоида).

Жавоб: $$ds=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

417. $y^2=ax^3$ (ярим кубик парабола).

Жавоб: $$ds=\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x}\,dx.$$

418. $r=a\sin\theta$ (доира).

Жавоб: $$ds=a\,d\theta.$$

419. $r=\frac{a}{\theta}$ (гиперболик спирал).

Жавоб: $ds=\frac{a}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta.$

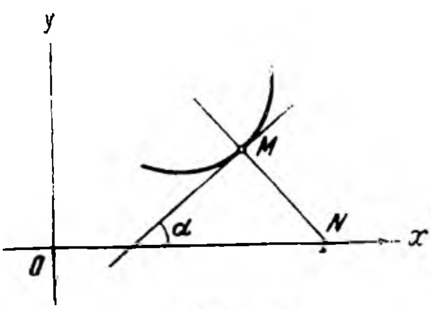
420. $r=a^\theta$ (логарифмик спирал).

Жавоб: $$ds=r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\theta.$$

§ 56. УРИНМА ВА НОРМАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1. Текисликдаги бирор эгри чизиқнинг тенгламаси

$$y=f(x) \qquad (1)$$



Шакл. 48.

ва ундаги бирор M нуқтанинг координаталари (x_1, y_1) бўлсин (шакл 48).

Маълумки, эгри чизиқнинг $M(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (2)$$

$M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтган бу чизиқ (1) чизиққа уринма бўлган ҳолда

$$k = f'(x_1) = \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{3}$$

Шуннинг учун эгри чизиқнинг $M(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \tag{4}$$

ёки

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1), \tag{5}$$

ёки

$$\frac{y - y_1}{dy_1} = \frac{x - x_1}{dx_1}. \tag{6}$$

Энди фараз қилайлик, эгри чизиқ ушбу параметрик тенгламалар формасида берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Бу ҳолда

$$dx_1 = \varphi'(t_1)\,dt_1, \quad dy_1 = \psi'(t_1)\,dt_1,$$

буларни (6) га қўйиб, сўнгра dt_1 га қисқартирилса, уринма тенгламасининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{y - y_1}{\psi'(t_1)} = \frac{x - x_1}{\varphi'(t_1)}. \tag{8}$$

Биз бу ерда $\psi'(t_1)$ ва $\varphi'(t_1)$ ҳосилалардан ҳеч бўлмаганда бири нолга айланмайди деб фараз қиламиз.

Агарда уринманинг абсцисса ўқининг мусбат томони билан ташкил этган бурчаги α фараз қилинса, умуман

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Шунинг учун

$$\sin\alpha = \frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm\frac{dy}{ds},$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm\frac{dx}{ds}.$$

Бу формулалардаги ишоралардан қайси бирини қолдириш уринманинг йўналишига боғлиқдир. Агарда уринма ёйнинг ўсган томонига қараб йўналтирилганда + олишга тўғри келади. Бу шартни қабул қилиб, кейинги формулаларни бундай ёзамиз:

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}. \tag{9}$$

2. Аналитик геометриядан маълумки, уринманинг $M(x_1, y_1)$ уриниш нуқтасидан ўтиб, уринмага перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни нормал дейилади (MN). Бунинг тенгламасини тузамиз. Маълумки, $M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = k_1(x - x_1)$$

бўлади. Нормал уринмага перпендикуляр бўлгани учун буларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро ишора ва миқдор ёқдан тескари бўлиши керак, яъни

$$k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_1)} = -\frac{dx_1}{dy_1}.$$

Шунинг учун нормалнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

ёки

$$(y - y_1)f'(x_1) + (x - x_1) = 0, \tag{10}$$

ёки

$$y - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - x_1),$$

ёки

$$(y - y_1)\,dy_1 + (x - x_1)\,dx_1 = 0. \tag{11}$$

Эгри чизиқнинг тенгламалари (7) каби параметрик шаклда бўлган ҳолда

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt$$

бўлгани учун (11) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$(y - y_1)\,\psi'(t_1) + (x - x_1)\,\varphi'(t_1) = 0. \tag{12}$$

Мисол. Мисол учун циклоиданинг (x_1, y_1) нуқтасидан ўтган уринма ва нормалнинг тенгламаларини тузамиз.

Циклоиданинг тенгламалари

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t)$$

эди. Бу тенгламалардан

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = a \sin t = 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}.$$

Шунинг учун (x_1, y_1) нуқтадан ўтган уринманинг тенгламаси

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2},$$

ёки

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t_1}{2}\right);$$

шунга ўхшаш (x_1, y_1) нуқтадан ўтган нормал тенгламаси

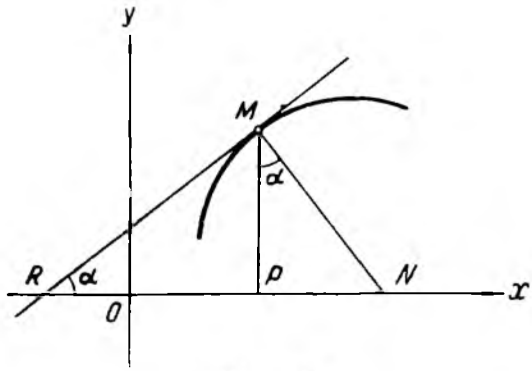
$$y - y_1 = -(x - x_1) \operatorname{tg} \frac{t_1}{2}$$

ёки

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{t_1}{2}\right).$$

§ 57. УРИНМА ВА НОРМАЛ УЗУНЛИКЛАРИ: УРИНМА-ОСТИ ВА НОРМАЛ-ОСТИ

Эгри чизиқда исталганча бирор M нуқтани олиб, у нуқтадан уринма ва нормал ўтказамиз (шакл 49).



Шакл 49.

Уринманинг абсцисса ўқи билан учрашган нуқтаси R ва нормалнинг абсцисса ўқи билан учрашган нуқтаси N бўлсин. Бу ҳолда MR — уринманинг узунлиги, MN — нормалнинг узунлиги, RP — уринма-ости ва PN — нормал-ости дейилади.

Эгри чизиқнинг тенгламасини $y = f(x)$ ва M нуқтанинг координаталарини x_1 ва y_1 фараз қилиб ҳалиги кесмаларнинг узунликларини топамиз. Бунинг учун шаклдаги RMP ва MPN учбурчакларга мурожаат қиламиз.

Тўғрибурчакли RMP учбурчакда

$$RP = MP \operatorname{ctg} \alpha = \frac{MP}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Шаклга мувофиқ

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_1) = \frac{dy_1}{dx_1}; \quad MP = y_1,$$

демак,

$$RP = y_1 \frac{dx_1}{dy_1}.$$

Бунинг ёрдами билан уринманинг узунлигини топиш мумкин. Ҳақиқатда тўғрибурчакли MRP учбурчакнинг гипотенузаси уринманинг узунлиги бўлади. Шунинг учун

$$MR^2 = MP^2 + RP^2 = y_1^2 + y_1^2 \left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2 = y_1^2 \left\{1 + \left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2\right\}$$

ёки

$$MR = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2}.$$

Агарда уринманинг узунлигини T билан ва уринма-остини t билан ифода қилинса, улар учун чиқарилган формулалар қуйидагича бўлади:

$$T = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2} \qquad (1)$$

$$t = y_1 \frac{dx_1}{dy_1}. \qquad (2)$$

Тўғрибурчакли MPN учбурчакда

$$PN = MP \operatorname{tg} \alpha = y_1 \frac{dy_1}{dx_1}$$

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y_1^2 + y_1^2 \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 = y_1^2 \left\{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right\}$$

Нормалнинг узунлигини N билан ва нормал-остини n билан ифода қиламиз. Демак,

$$N = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}. \tag{3}$$

$$n = y_1 \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{4}$$

Мисол. Тенгламаси $y^2 = 2px$ бўлган параболанинг (x_1, y_1) нуқтасидан ўтган уринма ва нормал тенгламалари, уринма ва нормал узунликлари, уринма-ости ва нормал-ости топилсин.

Ечиш йўли: Берилган тенгламани дифференциаллаш натижасида топамиз:

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

демак,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Шунинг учун изланган уринманинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

ёки

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1;$$

тенгламага мувофиқ

$$y_1^2 = 2px_1$$

бўлгани учун

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{A}$$

Нормалнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \tag{B}$$

(2) ва (1) формулаларга мувофиқ

$$t = y_1 \cdot \frac{y_1}{p} = \frac{y_1^2}{p} = \frac{2px_1}{p} = 2x_1. \tag{C}$$

$$T = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{p}\right)^2} = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^4}{p^2}} =$$

$$= \sqrt{y_1^2 + \frac{4p^2 x_1^2}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2}. \qquad (D)$$

(3) ва (4) га мувофиқ

$$N = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{y_1}\right)^2} = \sqrt{y_1^2 + p^2} \qquad (E)$$

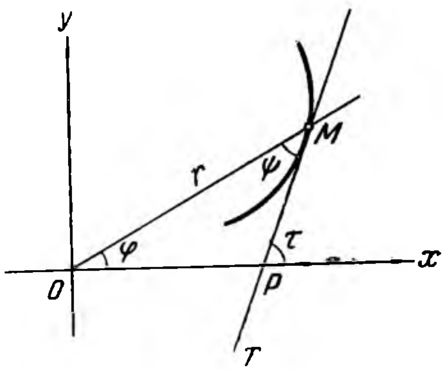
$$n = y_1 \cdot \frac{p}{y_1} = p. \qquad (F)$$

§ 58. УРИНМА ҚУТБ КООРДИНАТА СИСТЕМАСИДА

Берилган эгри чизиқнинг тенгламаси қутб координата системасида

$$r = f(\varphi) \qquad (1)$$

бўлсин (r — радиус вектор, φ — қутб бурчаги). Эгри чизиқнинг бирор $M(r, \varphi)$ нуқтасидан ўтган уринма MT бўлсин. Бу ҳолда уринманинг ўрни M нуқтанинг радиус вектори OM ва уринманинг орасидаги ψ бурчаги билан ифодаланади (шакл 50).



Шакл 50.

Уринманинг қутб ўқи билан ташкил қилган бурчагини τ фараз қиламиз. Шаклга мувофиқ OMP учбурчакда

$$\tau = \varphi + \psi \text{ ёки } \psi = \tau - \varphi$$

бундан

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\tau \cdot \operatorname{tg}\varphi}, \qquad (2)$$

қутб ўқини абсцисса ўқи ва қутбдан ўтиб, унга перпендикуляр бўлган чизиқни ордината ўқи фараз қилинса, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}. \qquad (3)$$

Шунинг учун (2) тенгликнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

ёки

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\cos\varphi\, dy - \sin\varphi\, dx}{\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy}, \qquad (4)$$

иккинчи томондан, маълумки

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

булардан:

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \qquad (5)$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi. \qquad (6)$$

Буларни (4) га қўйиб, соддалаштириш натижасида ушбу формула келиб чиқади:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r d\varphi}{dr} \qquad (7)$$

ёки

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}. \qquad (8)$$

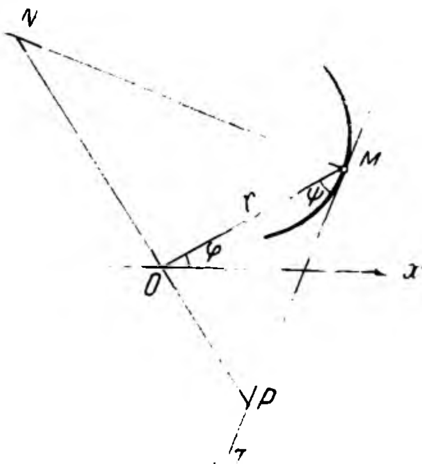
§ 59. ҚУТБ КООРДИНАТА СИСТЕМАСИДА УРИНМА ВА НОРМАЛ УЗУНЛИКЛАРИ. УРИНМА-ОСТИ ВА НОРМАЛ-ОСТИ

Берилган эгри чизиқнинг тенгламаси қутб координата системасида

$$r = f(\varphi) \qquad (1)$$

бўлсин (r — радиус вектор, φ — қутб бурчаги).

Эгри чизиқнинг бирор $M(r, \varphi)$ нуқтасидан ўтган уринма MT бўлсин. Қутбдан OM радиус-векторга перпендикуляр чизиқ ўтказиб, уни то уринманинг бирор P нуқтасида ва нормалнинг бир N нуқтасида учрашгунча давом эттирамиз (шакл 51).



Шакл 51.

Бу чоқда MP уринманинг узунлиги, MN нормалнинг узунлиги, OP уринма-ости, ON нормал-ости дейилади. Буларни қуйидагича ифода қиламиз:

$$MP = T_0,\ MN = N_0,\ OP = St,\ ON = Sn. \tag{2}$$

Тўғрибурчакли OMP учбурчакда

$$T_0 = \frac{r}{\cos\psi} = r\sec\psi = r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi} = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} =$$

$$= \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2};\quad St = r\operatorname{tg}\psi = r^2\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{r'}.$$

Шунинг билан T_0 ва S_t учун ушбу формулалар келиб чиқади:

$$T_0 = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2};\quad S_t = r^2\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{r'}. \tag{3}$$

Тўгрибурчакли MNO учбурчакда

$$N_0 = \frac{r}{\sin\psi} = \frac{r}{\sqrt{1-\cos^2\psi}} = \frac{r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}{\operatorname{tg}\psi} =$$

$$= \frac{r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}{r\frac{d\varphi}{dr}} = \frac{dr}{d\varphi}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

$$S_n = r\operatorname{ctg}\psi = r:\operatorname{tg}\psi = r:r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Натижада N_0 ва S_n учун ушбу формулалар келиб чиқади:

$$N_0 = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2};\quad S_n = \frac{dr}{d\varphi}. \tag{4}$$

Мисол учун қуйидаги тенглама билан ифода қилинган Архимед спиралини оламиз (шакл 52)

$$r = a\varphi,$$

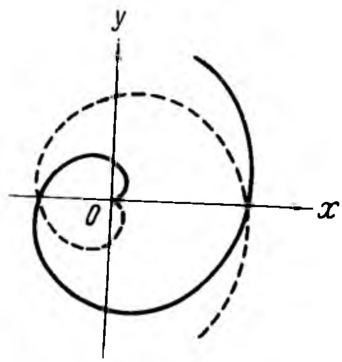
бунда $r' = \frac{dr}{d\varphi} = a$ бўлгани учун

$$T_0 = \varphi\sqrt{a^2\varphi^2+a^2} = a\varphi\sqrt{1+\varphi^2};$$

$$N_0 = \sqrt{r^2+a^2} = a\sqrt{1+\varphi^2};$$

$$S_n = r' = a;$$

$$S_t = \frac{r^2}{r'} = a\varphi^2 = r\varphi.$$



Шакл 52.

Демак, Архимед спиралининг исталган нуқтасидаги қутб нормал-ости ўзгармас миқдордан иборат; уринма- остининг $r\varphi$ га тенглиги: унинг радиусиул ва тегишли айлана ёйининг уз нлигига тенглигини кўрсатади.

Мисоллар ва масалалар

421. Тенгламаси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ бўлган эллипснинг (x_1, y_1) нуқтасидан ўтган уринма ва нормал тенгламалари, уринма ва нормал узунликлари, уринма-ости ва нормал-ости топилсин.

Жавоб:
$$\begin{cases} 1)\ b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2 \\ 2)\ y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \\ 3)\ T = \frac{y_1}{b^2x_1}\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \\ 4)\ N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2} \\ 5)\ t = \frac{a^2y_1^2}{b^2x_1} \\ 6)\ n = \frac{b^2x_1}{a^2}. \end{cases}$$

422. Тенгламаси $x^2(x + y) = a^2(x - y)$ бўлган эгри чизиқнинг (0, 0) нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламаси топилсин.

Жавоб: $y - x = 0$.

423. Тенгламаси $y = ae^{\frac{x}{c}}$ бўлган эгри чизиқнинг уринма-ости ўзгармас сондан иборат. Буни исбот қилинсин.

424. Тенгламаси $y = a^x$ бўлган эгри чизиқнинг уринма-ости $1 : \ln a$ нисбатига тенглиги исбот қилинсин.

425. Тенгламаси $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ бўлган эгри чизиқнинг $(1, -2)$ нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламаси топилсин.

Жавоб: $x + y + 1 = 0$.

426. Тенгламаси $y = x^4$ бўлган эгри чизиқнинг шундай нуқтасига уринма ўтказилсинки, у, $y = 4x$ тўғри чизиққа параллел бўлсин.

Жавоб: $y = 4x - 3$.

427. Тенгламаси $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ бўлган занжир чизиқнинг (x_1, y_1) нуқтасидан ўтган уринма ва нормал тенгламалари ва уринманинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчакларининг косинуслари топилсин.

Жавоб: уринманинг тенгламаси $y - y_1 = \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}(x - x_1)$; нормал тенгламаси $(x - x_1) + (y - y_1)\operatorname{sh}\frac{x_1}{a} = 0$;

$$\sin\alpha = \cos\beta = \operatorname{th}\frac{x_1}{a}.$$

428. Тенгламаси $y = \ln\sin x$ бўлган эгри чизиқнинг қай ерида уринма абсцисса ўқига нормал бўлади?

Жавоб: $x = \frac{\pi}{2}$ да

429. Қутб тенгламаси $r = ae^{k\varphi}$ бўлган логарифмик спиралнинг исталган нуқтасидаги уринма-ости ва нормал-ости топилсин.

Жавоб: $S_t = \frac{r}{k}$; $S_n = kr$.

430. Қутб тенгламаси $r = a(1 - \cos\varphi)$ бўлган кардиоиданинг радиус-вектори билан унинг учидан ўтган уринма орасидаги бурчак радиус-вектор билан қутб ўқининг орасидаги бурчакнинг ярмига тенг. Буни исбот қилинсин.

431. $r = \frac{a}{\varphi}$ гиперболик спиралнинг уринма-ости ўзгармас сондан иборат. Буни исбот қилинсин.

432. Тенгламалари $x = a(t - \sin t)$ ва $y = a(1 - \cos t)$ бўлган циклоиданинг уринма ва нормал узунликлари уринма-ости ва нормал-ости топилсин.

Жавоб: $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{2}$; a; a.

433. $y = \sin x$ синусоида абсцисса ўқи билан учрашган нуқталарида унинг билан 45° ёки 135° бурчак ҳосил қилади. Буни исбот қилинсин.

434. Тенгламаси $x^2y^2 = a^3(x + y)$ бўлган эгри чизиққа координата бошида уринма бўлган чизиқ абсцисса ўқи билан $\frac{3}{4}\pi$ бурчак ҳосил қилади. Буни исбот қилинсин.

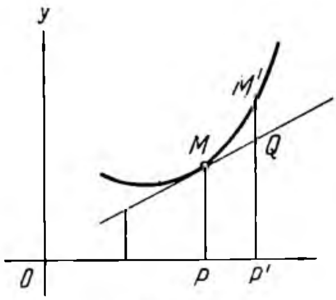
435. Тенгламаси $x^2 - a^2 = e^{\frac{4}{a}}$ бўлган эгри чизиқнинг уринма ва уринма-остининг йиғиндиси — уриниш нуқта координаталарининг кўпайтмасига пропорционаллиги исбот қилинсин.

436. Архимед спирали $r = a\varphi$ билан гиперболик спирали $r\varphi = a$ 90° бурчак ҳосил қилиб ўзаро кесишади. Буни исбот қилинсин.

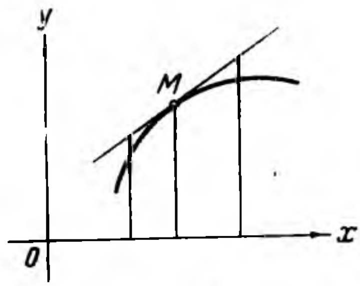
§ 60. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ БУКИЛМА ВА БУРИЛМА НУҚТАЛАРИ

Агарда эгри чизиқнинг бирор M нуқтасидан ўтган уринма y чизиқнинг остида бўлса, у ҳолда эгри чизиқ юқорига қараб, яъни **ордината ўқининг мусбат томонига қараб букилган бўлади** (шакл 53).

Агарда эгри чизиқнинг M нуқтасидан ўтган уринма y чизиқнинг устида бўлса, у ҳолда эгри чизиқ қуйнга қараб, яъни **ордината ўқининг манфий томонига қараб букилган бўлади** (шакл 54).

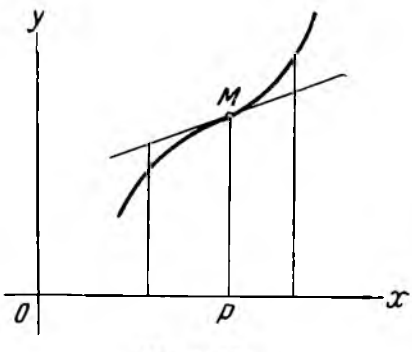


Шакл 53.



Шакл 54.

Эгри чизиқнинг юқорига қараб букилган бўлагини қуйига қараб букилган бўлагидан ажратиб турган нуқталарини эгри чизиқнинг бурилма нуқталари дейилади (шакл 55).



Шакл 55.

Бу ҳолларни аналитик равишда аниқлаш учун эгри чизиқнинг тенгламасини $y = f(x)$ ва унинг M нуқтасининг координаталарини x ва $y = f(x)$ фараз қиламиз (шакл 53). Бу ҳолда эгри чизиқнинг M нуқтага истаганча яқин бўлган M' нуқтасининг координаталари

$$OP' = x + h,$$

$$M'P' = f(x + h) \quad (1)$$

бўлади. Уринма билан $M'P'$ нинг кесишган Q нуқтасининг ординатаси η бўлсин: $QP' = \eta$. Эгри чизиқнинг букилмасини текшириш мақсади билан $M'P'$ ва QP' ординаталарининг орасидаги айирмасини топамиз. Бу айирма Δ бўлсин:

$$\Delta = M'P' - QP'. \tag{2}$$

$M'P'$ бизга маълум: у $f(x+h)$ га тенг. Шунинг учун QP' ни аниқлашга тўғри келади. Бунинг учун уринманинг ўзгарувчи координаталарини X, Y фараз қилиб, унинг тенгламасини тузамиз:

$$Y - y = y'(X - x)$$

Бу тенгламадан $QP' = \eta$ ни топиш мумкин. Бунинг учун $X = x + h$ фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$Y = \eta = y + hy'$$

ёки

$$\eta = f(x) + hf'(x). \tag{3}$$

Натижада (2) тенгликнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\Delta = f(x+h) - f(x) - hf'(x) \tag{4}$$

Лагранж формуласига мувофиқ:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h);\ 0 < \theta < 1,$$

демак,

$$\Delta = h\,[f'(x + \theta h) - f'(x)]. \tag{5}$$

Ўрта қавснинг ичидаги айирмага яна бир мартаба Лагранж формуласини татбиқ қиламиз:

$$\Delta = \theta h^2 f''(x + \theta\theta_1 h) \tag{6}$$

Энди бу айирмани текширамиз. Бунда асосан уч ҳол бўлуви мумкин:

1) Агарда $f''(x) > 0$ бўлса, $f''(x)$ узлуксиз бўлиб, h нинг абсолют қиймати етарли даражада кичик бўлганда

$$f''(x + \theta\theta_1 h) > 0$$

бўлади ва $\theta > 0$ бўлгани учун бу ҳолда

$$\Delta > 0.$$

Демак, эгри чизиқнинг M нуқтасига қўшни бўлган нуқталарнинг ординаталари уринманинг мос ординаталаридан катта бўлади. Бу эса эгри чизиқни **ордината ўқининг мусбат томонига қараб букилганлигини кўрсатади** (шакл 53).

2) Агарда $f''(x) < 0$ бўлса, бу ҳолда $\Delta < 0$.

Демак, эгри чизиқнинг M нуқтасига қўшни бўлган нуқталарининг ординаталари уринманинг мос ординаталаридан кичик бўлади. Бу эса, эгри чизиқни **ордината ўқининг манфий томонига қараб букилганлигини кўрсатади** (шакл 54)

3) Агарда $f''(x) = 0$ бўлса, бу ҳолда:

а) агарда $f''(x)$ ишорасини ўзгартиб нолга айланса, у ҳолда текширилмоқда бўлган нуқта **бурилма** нуқтаси бўлади, чунки M дан бир томонда $\Delta > 0$ ва иккинчи томонда $\Delta < 0$ бўлади (шакл 55).

в) агарда $f''(x)$ ишорасини ўзгартмай нолга айланса, у ҳолда текширилмоқда бўлган нуқтанинг ёнида ҳамма вақт мусбат ёки ҳамма вақт манфий бўлишини мумкин. Биринчи ҳолда берилган нуқта ёнида эгри чизиқ ордината ўқининг мусбат томонига қараб ва иккинчи ҳолда манфий томонига қараб букилган бўлади.

Шунинг билан тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқнинг бурилма нуқталарини ва қайси томонга қараб букилганлигини текшириш учун ушбу **қоида** келиб чиқади:

1. Берилган функциянинг иккинчи $f''(x)$ ҳосиласини топамиз.

2. Топилган $f''(x)$ ҳосилани нолга тенглаб, унинг ҳамма ҳақиқий илдизларини топамиз.

3. $f''(x) = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан бири a бўлсин; бу нуқтани текшириш учун ε ни етарли даражада кичик бўлган бирор мусбат сон фараз қилиб,

$$f''(a - \varepsilon) \text{ ва } f''(a + \varepsilon)$$

ишораларини текширамиз. Агарда бунинг натижасида $f(x)$ нинг ишораси ўзгарса, у ҳолда $x = a$ нуқта эгри чизиқнинг бурилма нуқтаси бўлади.

Агарда $f''(x) > 0$ бўлса, эгри чизиқ юқорига қараб ва $f''(x) < 0$ бўлса, қуйига қараб букилган бўлади.

Мисол. Қуйидаги тенглама билан ифода қилинган эгри чизиқнинг бурилма нуқталари ва букилмаларининг йўналиши аниқлансин:

$$f(x) = 6x^2 - 3x^3$$

Ечиш йўли: 1.

$$f'(x) = 12x - 9x^2,$$

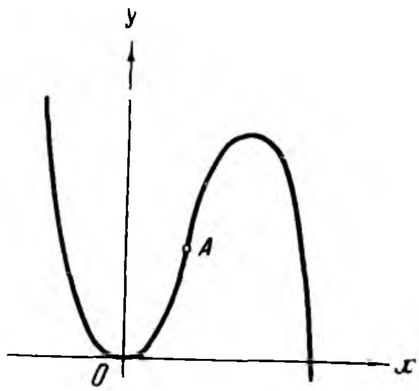
$$f''(x) = 12 - 18x.$$

$$2.\ 12-18x=0, \text{ демак, } x=\frac{2}{3}.$$

$$3.\ f''\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)>0,\ f''\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)<0.$$

Демак, $x=\frac{2}{3}$ нуқта эгри чизиқнинг бурилма нуқтаси бўлади (шакл 56 да A нуқтада).

A дан чапда эгри чизиқнинг букилмаси юқорига ва A дан ўнгда қуйига қараган.



Шакл 56.

Масалалар

Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган эгри чизиқларнинг бурилма ва букилма нуқталари текширилсин:

437. $y=x^2+x^3$

Жавоб: $x=-\frac{1}{3}$ бурилма нуқта.

438. $y=x^4-6x^3+$ $+12x^2-9x+2.$

Жавоб: Бурилма нуқталари (0,2) ва (1,0).

439. $y=x^3$.

Жавоб: (0,0) дан ўнгда юқорига ва ундан чапда қуйига букилган.

440. $y=\frac{1}{3}x^4+x^2-3x-1.$

Жавоб: Бурилма нуқтаси йўқ; юқорига қараб букилган.

441. $y=e^{-x^2}$.

Жавоб: Бурилма нуқталари $x=\pm\sqrt{0,5}$.

442. $6y=x^3-6x^2+12x-2.$

Жавоб: Бурилма нуқтаси (2,0).

443. $3y=x^4-6x^2.$

Жавоб: Бурилма нуқталари $\left(-1,-\frac{5}{3}\right)$, $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$.

444. $y=e^{-ax}$ эгри чизиғи ҳамма вақт ордината ўқининг мусбат томонига қараб букилган. Буни исбот қилинсин.

445. $y = \lg \sin x$ чизиғи ҳамма вақт ордината ўқининг манфий томонига қараб букилган. Буни исбот қилинсин $(0 < x < \pi)$.

446. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ нуқта $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$ эгри чизиқнинг бурилма нуқтаси. Исбот қилинсин.

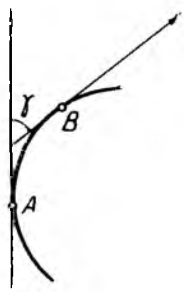
447. $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$ ва $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$ нуқталар $3y = x^4 - 6x^2$ эгри чизиқнинг бурилма нуқталари бўлади. Буни исбот қилинсин ва букилмаларнинг йўналиши аниқлансин.

448. Тенгламаси $y = xe^x$ бўлган эгри чизиқнинг бурилма нуқтаси ва букилмасининг йўналиши аниқлансин.

Жавоб: Бурилма нуқтаси $x = -2$ бўлганда; $x > -2$ бўлганда юқорига қараб букилган ва $x < -2$ бўлганда қуйига қараб букилган.

§ 61. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ЭГРИЛИГИ

Эгри чизиқнинг эгрилигини аниқлаш мақсади билан бирор эгри чизиқни олиб A ва B нуқталари орасида бурилма нуқтаси йўқ фараз қиламиз (шакл 57);



Шакл 57.

сўнгра A ва B нуқталарга уринма ўтказамиз. Бу ҳолда иккала уринма орасида ҳосил бўлган γ бурчакни AB ёйнинг қўшнилик бурчаги дейилади.

Ёлғиз γ нинг ўзи эгри чизиқнинг эгрилигини ифода қилолмайди, чунки у A ва B нуқталари орасидаги ёйнинг узунлигига боғлиқдир. Шунинг учун AB ёйнинг узунлигини ҳам эътиборга олишга тўғри келади. Буни назарда тутиб, AB ёйнинг узунлигини Δs фараз қиламиз. Бу ҳолда γ нинг Δs га нисбати

$$\frac{\gamma}{\Delta s} \tag{1}$$

AB ёйнинг **ўрта эгрилиги** дейилади.

B нуқта чексиз даражада A га яқинлашиб келганда Δs нолга интилади ва бу ҳолда ҳалиги **нисбатнинг лимити** эгри чизиқнинг A нуқтасидаги **эгрилиги** саналади. Эгри чизиқнинг маълум нуқтасидаги эгрилиги одатда K ҳарфи билан ифода қилинади. Демак,

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\gamma}{\Delta s}. \qquad (2)$$

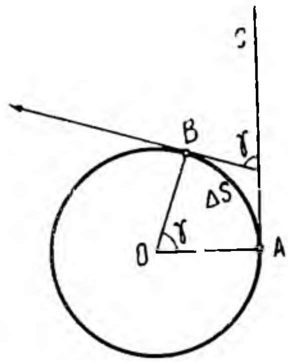
Бу таърифга асосланиб, бирорта, радиуси R бўлган айлананинг эгрилигини топамиз (шакл 58).

Айланадаги бирорта A ва B нуқталарни унинг маркази билан қўшиб, AO ва BO радиуслар орасидаги бурчакни γ билан ифода қиламиз. Бу ҳолда A ва B нуқталарга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак ҳам γ бўлади, чунки уринмалар ҳалиги радиусларга перпендикуляр бўлади. Маълумки,

$$\Delta s = R \cdot \gamma.$$

Шунинг учун ўрта эгрилик қуйидагича бўлади:

$$\frac{\gamma}{\Delta s} = \frac{\gamma}{R \cdot \gamma} = \frac{1}{R}.$$



Шакл 58.

Ўрта эгрилик ўзгармас сон бўлгани учун бу ҳолда эгриликнинг ўзи ҳам шу сонга тенг бўлади.

Демак,

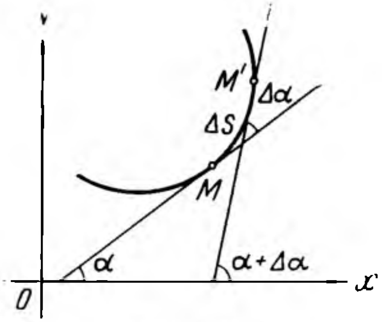
$$K = \frac{1}{R}. \qquad (3)$$

Шунинг билан айлананинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги унинг радиусининг тескарисига тенгдир.

Демак, айлананинг радиуси қанча узун бўлса, аксинча унинг эгрилиги кичик бўлади ва радиуси қанча қисқа бўлса, аксинча унинг эгрилиги катта бўлади. Бу табиий, албатта шундай натижани кутиш керак эди. Шунинг учун эгриликнинг тескариси **эгриликнинг радиуси** (R) дейилади.

$$R = \frac{1}{K}. \qquad (4)$$

Энди, бу тушунчаларга асосланиб, ҳар қандай эгри чизиқнинг эгрилиги учун формула чиқарамиз. Эгри чизиқнинг бирор $M(x, y)$ нуқтасидаги эгрилигини аниқлаш учун унинг шу нуқтасига уринма ўтказамиз (шакл 59).



Шакл 59.

Уринманинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги α бўлсин. Эгри чизиқнинг M га қўшни бўлган M'нуқтасини олиб, бу нуқтага ҳам уринма ўтказамиз. Бунинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчагини $\alpha + \Delta\alpha$ фараз қиламиз. M ва M' нуқталар орасидаги ёйнинг узунлиги Δs бўлсин. Шаклга мувофиқ иккала уринманинг орасидаги бурчаги $\Delta\alpha$ бўлади. Шунинг учун

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\gamma}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{5}$$

Ўтган параграфга мувофиқ

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

иккинчи томондан,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

бўлгани учун

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx},$$

демак,

$$d\alpha = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}\, dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$d\alpha$ ва ds учун белгиланган қийматларни (5) га қўйиш натижасида қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{K = \frac{\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|}{\left|1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right|^{\frac{3}{2}}}.} \tag{6}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ нинг абсолют қиймати олинади, чунки бунинг ишораси эгри чизиқнинг юқорига ё қуйига қараб букилганлигини кўрсатади.

Юқорида берилган таърифга мувофиқ эгриликнинг тескариси эгриликнинг радиуси бўлгани учун у ушбу формула билан аниқланади:

$$\boxed{R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}.} \tag{7}$$

Эгри чизиқнинг бурилма нуқтасида $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ бўлгани учун бу нуқтада R чексизликка айланади.

Мисол 1. Тенгламаси $y^2=2x$ бўлган параболанинг $(2;-2)$ нуқтасидаги эгрилиги топилсин.

Ечиш йўли:

$$2y\frac{dy}{dx}=2;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y^3}.$$

бундан

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=-2}=-\frac{1}{2},\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{y=-2}=\frac{1}{8},$$

демак,

$$K=\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{8}}{\left[1+\frac{1}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{5}}{25}.$$

Мисол 2. Занжир чизиқнинг абсциссаси ноль бўлган нуқтасидаги эгрилиги топилсин.

Занжир чизиқнинг тенгламасини оламиз:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Шунинг учун бундан

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

Буларни (6) формулага қўйилса,

$$K=\frac{4}{a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}$$

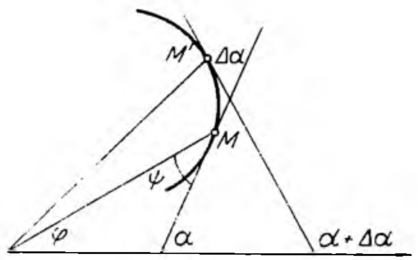
ёки $x=0$ нуқтада $K=\frac{1}{a}$ бўлади.

§ 62. ЭГРИ ЧИЗИҚ ЭГРИЛИГИНИ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ИФОДА ҚИЛИШ

Эгри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси

$$r=f(\varphi) \tag{1}$$

бўлсин (шакл 60). Агарда эгри чизиқнинг бирор $M(r, \varphi)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг қутб ўқига оғмалигини α ва M нуқтага қўшни бўлган M' нуқтага ўтказилган уринманинг қутб ўқига оғмалигини $\alpha+\Delta\alpha$ фараз қилинса, у ҳолда эгриликнинг таърифига мувофиқ



Шакл 60.

$$K=\frac{d\alpha}{ds}. \tag{2}$$

Ёйнинг узунлиги s билан уринманинг оғмалиги α нинг ҳар иккиси φ нинг функцияси бўлади. Шунинг учун (2) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$K=\frac{\frac{d\alpha}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}. \tag{3}$$

Эгри чизиқнинг M нуқтасига ўтказилган уринма билан радиус-вектор орасидаги бурчакни ψ фараз қилинса, шаклга мувофиқ

$$\alpha = \varphi + \psi,$$

бундан

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1 + \frac{d\psi}{d\varphi}. \qquad (4)$$

58-параграфда чиқарилган (8) формулага мувофиқ

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} \quad \text{демак,} \quad \psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}},$$

бундан

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}, \qquad (5)$$

буни (4) га қўйилса

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{r^2 + 2r\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}, \qquad (6)$$

иккинчи томондан,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}. \qquad (7)$$

(6) ва (7) ни (3) га қўйиб, абсолют қийматини олиш натижасида ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{K = \frac{\left|r^2 + 2r\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.} \qquad (8)$$

Асосий таъриф бўйича бунинг тескариси эгрилик радиуси бўлади. Демак,

$$\boxed{K = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|r^2 + 2r\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right|}.} \qquad (9)$$

Мисол. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоиданинт исталган нуқтасида эгрилик радиуси аниқлансин.

Ечиш йўли:

$$r=a(1+\cos\varphi);\ \frac{dr}{d\varphi}=-a\sin\varphi,\ \frac{d^2r}{d\varphi^2}=-a\ \mathrm{sos}\ \varphi,$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=2a^2(1+\cos\varphi)=2ar;$$

$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}=3a^2(1+\cos\varphi)=3ar.$$

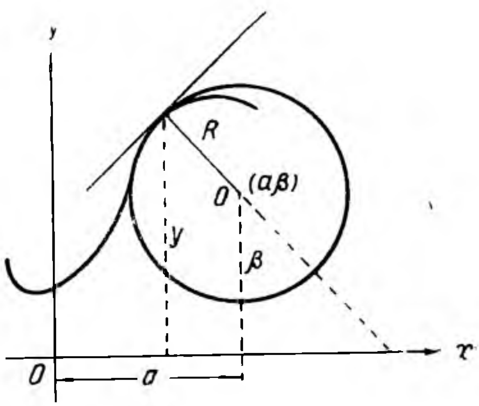
Аниқланган қийматларни (9) формулага қўямиз:

$$R=\frac{(2ar)^{\frac{3}{2}}}{3ar}\ \frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

Чиққан натижага қараганда кардиоиданинг эгрилик радиуси унинг радиус-векторининг квадрат илдизига пропорционал ўзгаради.

§ 63. ЭГРИЛИК ДОИРАСИ ВА ЭГРИЛИК МАРКАЗИ

Эгри чизиқнинг белгили нуқтасидаги эгрилигини тасвир қилиш учун уни „эгрилик доираси" номли доиранинг эгрилиги билан солиштириб қарайдилар.



Шакл 61.

$M(x, y)$ эгри чизиқнинг бирор нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда бу нуқтадаги эгрилик доираси деб, ушбу шартлар билан аниқланган доирани айтилади:

1) Доира M нуқтадан ўтса,

2) Доиранинг M нуқтасидаги уринма эгри чизиққа ҳам шу нуқтада уринма бўлса,

3) Доиранинг радиуси эгри чизиқнинг M нуқтасидаги эгрилик радиусига тенг бўлса ва

4) Доиранинг маркази эгри чизиқнинг букилган томонида бўлса.

Берилган таърифга асосланиб, эгри чизиқнинг $M(x, y)$ нуқтасига қарашли эгрилик доирасининг марказини топамиз. Доира марказининг координаталари α ва β бўлсин.

Эгри чизиқ билан доиранинг M нуқтасидаги уринмаси умумий бўлгани учун доиранинг маркази эгри чизиқнинг M нуқтасидан ўтган нормалда бўлади. Нормалнинг ўзгарувчи координаталарини x, y фараз қилинса, нормал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(X - x) + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Бу нормал (α, β) нуқтадан ўтади. Шунинг учун

$$\alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (1)$$

Юқорида қўйилган (3) шартга мувофиқ

$$OM = R.$$

Шунинг учун

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2 = \frac{\left|1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right|^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}. \qquad (2)$$

(1) дан
$$\alpha - x = -(\beta - y)\frac{dy}{dx}$$
ёки
$$(\alpha - x)^2 = (\beta - y)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

буни (2) тенгликка қўямиз:

$$(\beta - y)^2 \left(\frac{dy^2}{dx}\right)^2 + (\beta - y)^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

ёки

$$(\beta - y)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

ёки

$$(\beta - y)^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

ёки

$$\beta - y = \pm \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{3}$$

Буларда $\frac{d^2y}{dx^2}$ нолга тенг эмас деб фараз қилинади ($y'' = 0$ бурилма нуқтаси); $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ бўлганда, яъни эгри чизиқ ордината ўқининг манфий томонига қараб букилган бўлса, $\beta < y$ ва $\beta - y < 0$ бўлади; шунга ўхшаш $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ бўлганда $\beta > 0$ ва $\beta - y > 0$ бўлади. Демак, ҳар ҳолда $\frac{d^2y}{dx^2}$ билан $\beta - y$ нинг ишораси бир хил бўлади. Шунинг учун (3) даги $\pm$ ишоралардан $+$ ни олишга тўғри келади. Демак,

$$\beta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{4}$$

Буни (1) га қўйилса,

$$\alpha - x = -\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Натижада α ва β ни аниқлаш учун ушбу формула келиб чиқади:

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &= x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\\
\beta &= y + \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} \neq 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{5}
$$

Мисол. Тенгламаси $xy = 1$ бўлган тенгтомонли гиперболанинг (1, 1) нуқтасида эгрилик марказининг координаталари белгилансин.

Ечиш йўли: $xy = 1$,

бундан
$$y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{x^4} = \left(\frac{2}{x^3}\right)_{x=1} = 2.$$

Буларни формулаларга қўйилса

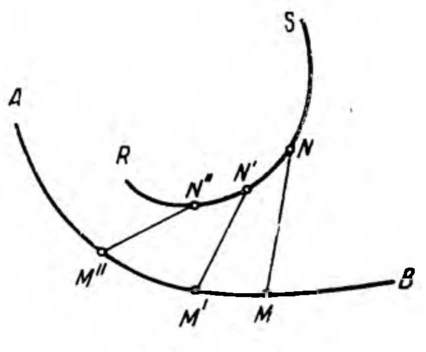
$$\alpha = 1 - \frac{-[1+(-1)^2]}{2} = 2$$

$$\beta = 1 + \frac{1+(-1)^2}{2} = 2.$$

Демак, эгрилик маркази (2, 2) нуқтада бўлади.

§ 64. ЭВОЛЮТА

Фараз қилайлик бирор AB эгри чизиқ ва унда бирор M нуқта берилган бўлсин; бу нуқтанинг эгрилик маркази N бўлсин (шакл 61а). M нуқта AB эгри чизиқ усти билан юрган чоқда N нуқта ҳам юра бошлайди ва бунинг натижасида у бирор (RS) эгри чизиқни чизади. Бу чизиқни AB нинг эволютаси дейилади. Шунинг билан **берилган эгри чизиқнинг эволютаси — унинг эгрилик марказларининг геометрик ўрнидан иборат. Эволютага нисбатан берилган эгри чизиқнинг ўзини — эволвента дейилади.**



Шакл 61 а.

Эволютанинг тенгламаси ўтган параграфда чиқарилган (5) формулалардан бевосита чиқади. Ҳақиқатда, фараз қилайлик берилган эгри чизиқнинг тенгламаси $y=f(x)$ ёки $f_1(x, y)=0$ шаклда бўлсин.

Агарда бу тенгламаларга асосланиб (5) формуланинг ўнг томонидаги

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

ни аргумент x орқали ифода қилинса, у ҳолда эгрилик марказининг α, β координаталари ёлғиз x нинг функцияси бўлади, яъни

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \varphi(x) \\ \beta &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Агарда бу системадан x ни чиқарилса α ва β ни ўзаро боғлаган биргина

$$F(\alpha, \beta)=0 \tag{2}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама изланган геометрик ўриннинг, яъни эволютанинг тенгламаси бўлади, чунки у эволютанинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари орасидаги муносабатдан иборат.

Мисол. Мисол учун параболани оламиз:

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

бундан

$$y\frac{dy}{dx} = p, \quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

демак,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}. \tag{4}$$

Буларни ўтган параграфдаги (5) га қўямиз:

$$\alpha = x + \frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)y^3}{p^2}\cdot\frac{p}{y} = x + \frac{y^2+p^2}{p} =$$

$$= \frac{px+y^2+p^2}{p} = \frac{\frac{1}{2}y^2+y^2+p^2}{p} = \frac{3y^2}{2p}+p$$

ёки

$$\alpha - p = \frac{3y^2}{2p}. \tag{5}$$

$$\beta = y - \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) y^3}{p^2} = y - \frac{y^3 + p^2 y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}. \tag{6}$$

(5) ва (6) дан y ни чиқариш мақсади билан (5) нинг иккала томонини кубга ва (6) ни квадратга кўтарамиз:

$$(\alpha - p)^3 = \frac{27y^6}{8p^3}, \tag{7}$$

$$\beta^2 = \frac{y^6}{p^4} \quad \text{ёки} \quad y^6 = \beta^2 p^4 \tag{8}$$

ёки буни (7) га қўйилса эволюта учун ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$p\beta^2 = \frac{8}{27}(\alpha - p)^3. \tag{9}$$

Бу тенглама ярим кубик параболани ифода қилади (шакл 61в).

Энди эволютанинг баъзи асосий хоссаларини текширамиз. Бунинг учун ўтган параграфда чиқарилган ушбу ифодаларни оламиз:

$$(\alpha - x) + (\beta - y)\, y' = 0 \tag{10}$$

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \tag{11}$$

Булардан (10) дифференциалланса,

$$d\alpha - dx + (\beta - y)\, y'' dx + (d\beta - y'dx)\, y' = 0,$$

ёки

$$d\alpha + y'd\beta - dx\,[1 - (\beta - 1)\, y'' + y'^2] = 0; \tag{12}$$

ўтган параграфдаги (5) га мувофиқ

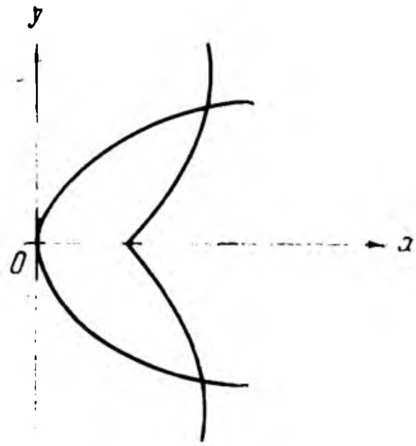
$$\beta - y = \frac{1 + y'^2}{y''};$$

буни (12) га қўйилса

$$d\alpha + y'd\beta = 0 \ \text{ёки} \ 1 + y'\frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \tag{13}$$

Бу натижа эволютанинг асосий хоссасини ифода қилади.

Бунга қараганда **эволютага ўтказилган уринма эволвентага ўтказилган уринмага перпендикуляр бўлади ёки эволютага ўтказилган уринма эволвентага нормал бўлади.**



Шакл 61в.

Эволютанинг яна бир хоссасини исбот қилиш учун (11) ни дифференциаллаймиз:

$$(\alpha - x)\,d\alpha + (\beta - y)\,d\beta - dx\left[\alpha - x + (\beta - y)\,y'\right] = RdR,$$

ёки (10) га асосан

$$(\alpha - x)\,d\alpha + (\beta - y)\,d\beta = RdR.$$

Бунинг иккала томонини квадратга чиқарилса

$$(\alpha - x)^2 d\alpha^2 + 2(\alpha - x)(\beta - y)\,d\beta d\alpha + (\beta - y)^2 d\beta^2 = R^2 dR^2,$$

ёки (11) га асосан

$$(\alpha - x)^2 = R^2 - (\beta - y)^2,$$

$$(\beta - y)^2 = R^2 - (\alpha - x)^2$$

бўлгани учун

$$R^2(d\alpha^2 + d\beta^2) - \left[(\beta - y)\,d\alpha - (\alpha - x)\,d\beta\right]^2 = R^2 dR^2 \qquad (14)$$

ёки юқорида исбот қилинганча

$$d\alpha + y'd\beta = 0 \quad \text{ёки} \quad d\alpha = -y'd\beta$$

бўлгани учун

$$(\beta - y)\,d\alpha - (\alpha - x)\,d\beta = -y'(\beta - y)\,d\beta - (\alpha - x)\,d\beta =$$
$$= -\left[\alpha - x + y'(\beta - y)\right]d\beta,$$

ёки (10) га асосан

$$(\beta - y)\,d\alpha - (\alpha - x)\,d\beta = 0;$$

шунинг учун (14) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = dR^2, \tag{15}$$

ёки эволвента ёйининг дифференциалини $d\sigma$ фараз қилинса

$$d\sigma^2 = dR^2 \quad \text{ёки} \quad d\sigma = \pm\, dR. \tag{16}$$

Бу тенглик эволютанинг иккинчи асосий хоссасини ифода қилади:

Эволюта ёйи дифференциалининг абсолют қиймати эволвентанинг эгрилик радиуси дифференциалига тенгдир.

Масалалар

449. Тенгламаси $y = x^3 - 2x^2 + 1$ бўлган эгри чизиқнинг (1, 0) нуқтасида эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $R = \sqrt{2}$.

450. Тенгламаси $3y^2 = 2x^3$ бўлган эгри чизиқнинг $x = 1$ нуқтасида эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $R = \frac{5}{3}\sqrt{15}$.

451. Тенгламаси $y^2 = 4px$ бўлган параболанинг $(p,\ 2p)$ нуқтасида эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $|R| = |4p\sqrt{2}|$.

452. Тенгламаси $y = \ln x$ бўлган эгри чизиқнинг шундай нуқтаси топилсинки, у нуқтасида унинг эгрилиги энг катта бўлсин.

Жавоб: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

453. Тенгламаси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ бўлган эллипснинг $(0,\ b)$ нуқтасида эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $|R| = \left|\frac{b^3}{a^2}\right|$.

454. Тенгламаси $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ бўлган эгри чизиқнинг эгрилик радиуси ва эгрилик маркази топилсин.

Жавоб: $|R| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}$;

$$\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{2/3},$$

$$\beta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}.$$

455. $y = \sin x$ синусоиданинг абсцисса ўқидан энг узоқда турган нуқтасининг эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $R = 1$.

456. Эгри чизиқнинг бурилма нуқтасида эгрилик радиуси чексиз катта қийматга эга бўлади. Буни исбот қилинсин.

457. Тўғри чизиқнинг „эгрилиги“ ноль бўлади. Буни исбот қилинсин.

458. $y = ae^{\frac{x}{a}}$ логарифмик спиралнинг эгрилик маркази аниқлансин.

Жавоб: $\alpha = x - a\left(1 + e^{\frac{2x}{a}}\right)$; $\beta = ae^{-\frac{x}{a}}\left(1 + 2e^{\frac{2x}{a}}\right)$.

459. Тенгламаси $xy = k^2$ бўлган тенг томонли гиперболанинг эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $|R| = \left|\frac{(x^4 + k^4)^{3/2}}{2x^3k^2}\right|$.

460. Параметрик тенгламалари

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

бўлган циклоиданинг эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $|R| = |-2a\sqrt{2 - 2\cos t}|$.

461. Тенгламаси $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ бўлган эгри чизиқнинг эгрилик радиуси топилсин.

Жавоб: $|R| = \left|\frac{(b^{2m}x^{2m-2} + a^{2m-2}y^{2m-2})^{3/2}}{(1-m)(ab)^{2m}(xy)^{m-2}}\right|$.

Қутб тенгламасида ифода қилинган қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик радиуслари аниқлансин:

462. $r = a\varphi$ (Архимед спирали).

Жавоб: $|R| = \frac{|(r^2+a^2)^{3/2}|}{r^2+2a^2}$.

463. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (Лемниската). Жавоб: $|R| = \frac{a^3}{3r}$.

464. $r = a^{\varphi}$ (Логарифмик спирал).

Жавоб: $|R| = r\sqrt{1+(\ln a)^2}$.

465. $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ (Парабола). Жавоб: $|R| = \left|2a\sec^3\frac{\varphi}{2}\right|$.

465а. Қуйидаги эгри чизиқларнинг эволюталари топилсин:

$$1)\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;\quad 2)\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2;$$

$$3)\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Жавоб: 1) $(a\alpha)^{2/3} + (\beta b)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$;

2) $(a\alpha)^{2/3} + (\beta b)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{3/2}$.

3) $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$.

Олтинчи боб

ИНТЕГРАЛЛАШ АСОСЛАРИ

(Биринчи тушунчалар)

§ 65. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Қисқача ифода қилганда умуман дифференциал ҳисобнинг асосий масаласи: берилган функциянинг ҳосиласини ёки дифференциалини топишдан иборатдир.

Бироқ кўпинча бу масаланинг тескарисини ечишга тўғри келади, яъни **бирор номаълум функциянинг ҳосиласи ёки дифференциали маълум бўлган ҳолда, у функциянинг ўзини топишга тўғри келади.**

Бу масала билан шуғулланган математиканинг бўлимини интеграл ҳисоб дейилади. Шунинг билан интеграл ҳисобнинг асосий масаласи қуйидагича бўлади:

Берилган, маълум функция $f(x)$ бўлсин; шундай функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи $f(x)$ бўлсин. Демак, номаълум функцияни $\varphi(x)$ фараз қилинса,

$$\varphi'(x) = f(x). \tag{1}$$

Агарда бу тенгликнинг иккала томонини dx га кўпайтирилса,

$$\varphi'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

ёки

$$d\varphi(x) = f(x)\,dx. \tag{2}$$

Демак, номаълум $\varphi(x)$ функция шундай бўлиши керакки, унинг дифференциали берилган дифференциалли ифодага тенг *бўлсин.*

Бошқача қилиб айтганда, **номаълум функциянинг дифференциали берилган; функциянинг ўзини топиш керак.**

Бундай хоссага эга бўлган $\varphi(x)$ функцияни $f(x)\,dx$ нинг интеграли ёки $f(x)$ учун бошланғич функция дейилади* ва одатда

$$\int f(x)\,dx$$

равишда ифода қилинади. Демак,

$$\varphi(x) = \int f(x)\,dx. \tag{3}$$

Интегрални топиш амалини интеграллаш дейилади. Берилган таърифга мувофиқ интеграллаш амали дифференциаллаш амалининг тескарисидир. Шунинг учун дифференциаллаш амали интеграллаш амалини йўқ қилади. Ҳақиқатда (3) дан:

$$d\int f(x)\,dx = d\varphi(x)$$

ёки (2) га мувофиқ

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{4}$$

Масалан, $d(x^2) = 2xdx$ бўлгани учун

$$\int 2x\,dx = x^2 \text{ бўлади.}$$

Иккинчи томондан x^2 га ҳар қандай ўзгармас сон қўшилса-да, унинг дифференциали ҳамон $2xdx$ бўлади:

$$d(x^2+3) = 2xdx$$

$$d(x^2+7) = 2xdx$$

$$d(x^2-15) = 2xdx$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d(x^2+C) = 2xdx$$

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Шунга ўхшаш, умуман

---

* Ҳар қандай узлуксиз функция бошланғич функцияга эга бўлади. Бу тўғрида сўз кейинча бўлади.

$$d\,\varphi(x) = f(x)\,dx \text{ бўлса,}$$

$$d\{\varphi(x) + C\} = f(x)\,dx \text{ бўлгани учун}$$

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C. \tag{5}$$

Бундаги ўзгармас C нинг қиймати аниқ бўлмагани учун (5) даги

$$\varphi(x) + C$$

ифодани $f(x)dx$ нинг **аниқмас интеграли** дейилади.

Шунинг билан

$$\boxed{\begin{array}{l}\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,\\ \varphi'(x) = f(x) \text{ бўлса.}\end{array}} \tag{6}$$

§ 66. Асосий интеграллаш формулалари

Аниқмас интегралнинг таърифига мувофиқ, агарда

$$d\,\varphi(x) = f(x)\,dx \text{ бўлса,} \tag{1}$$

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C \text{ бўлади.} \tag{2}$$

Шунинг (1) каби дифференциал ҳисобнинг ҳар бир асосий формуласидан (2) каби интеграл ҳисобнинг ўзига мос формуласи келиб чиқади.

$\varphi(x)$ функциясининг ўрнига маълум асосий функцияларни қўйиш натижасида интеграл ҳисобнинг қуйидаги асосий формулалари келиб чиқади:

1. Дифференциал ҳисобдан маълумки, $m \neq -1$ бўлганда

$$d\left(\frac{u^{m+1}}{m+1}\right) = u^m\,du.$$

Шунинг учун буни интеграллаш натижасида қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C.} \tag{3}$$

$m = -1$ бўлганда бу формула ўз кучини йўқотади, чунки бу ҳолда

$$\int u^{-1}\,du=\frac{u^{-1+1}}{-1+1}+C=\frac{u^0}{0}+C=\infty+C=\infty.$$

Шунинг учун $m=-1$ бўлган ҳолда бошқа формула ишлатилади.

Сўнгги формулани ишлатиш учун бир неча мисоллар:

a) $$\int x^3\,dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{1}{4}x^4+C.$$

b) $$\int x^5\,dx=\frac{1}{6}x^6+C.$$

c) $$\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

d) $$\int\sqrt[5]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+C=\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+C.$$

2. $$d\ln u=\frac{du}{u}$$

бўлгани учун бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int\frac{du}{u}=\ln u+C} \qquad (4)$$

масалан,
$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C;$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x}\,dx=\int\frac{d(x^2+x)}{x^2+x}=\ln(x^2+x)+C.$$

(4) формулани қуйидагича ифода қилиш мумкин:

Агарда интеграл остидаги касрнинг сурати махражининг дифференциали бўлса, у ҳолда интеграл каср махражининг натурал логарифми бўлади.

Масалан,

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = ?$$

Интеграл остидаги касрнинг сурати махражининг дифференциали бўлади, чунки

$$d\left(ax^2+bx+c\right) = (2ax+b)\,dx,$$

шунинг учун

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln\left(ax^2+bx+c\right)+C.$$

Шунга ўхшаш:

a) $\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a)+C.$

b) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+5} = \ln\left(x^2+5\right)+C.$

c) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln\sin x + C.$

d) $\int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{-b\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a+\cos x)+C.$

3. $$d\left(\frac{a^u}{\ln a}\right) = a^u\,du.$$

бўлгани учун бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a}+C.} \tag{5}$$

Масалан,

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C;$$

$$\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5}+C;$$

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

(5) формулада $a = e$ бўлган ҳолда у формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\int e^u\,du = e^u + C.} \tag{6}$$

4. $$d\sin u = \cos u\,du$$

бўлгани учун бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int \cos u\,du = \sin u + C.} \tag{7}$$

Масалан,

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

5. $$d(-\cos u) = \sin u du$$

бўлгани учун бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int \sin u du = -\cos u + C.} \tag{8}$$

Масалан,

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

6. $$d\,\mathrm{tg}\,u = \frac{du}{\cos^2 u}$$

бўлгани учун бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u + C.} \tag{9}$$

Масалан,

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$$

7. $$d(-\mathrm{ctg}\,u) = \frac{du}{\sin^2 u}$$

бўлгани учун бундан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.} \tag{10}$$

Масалан,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

8. $$d \arcsin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad d \arccos u = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$$

бўлгани учун булардан қуйидаги формула чиқади;

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C.} \tag{11}$$

Масалан,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$$

9. $$d \operatorname{arc\,tg} u = \frac{du}{1+u^2}, \quad d \operatorname{arc\,ctg} u = -\frac{du}{1+u^2}$$

бўлгани учун булардан қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C = -\operatorname{arc\,ctg} u + C.} \tag{12}$$

Асосий интеграллаш формулалари шу чиқарилган формулалардан иборат.

§ 67. АСОСИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ ҚОИДАЛАРИ

Интеграллашни бирмунча соддалаштирадиган асосий интеграллаш қоидалари қуйидагилардан иборатдир:

1. Интеграл остидаги ўзгармас кўпайтувчини интеграл ишорасидан чиқариш мумкин.

Ҳақиқатда,

$$d[Cf(x)] = Cdf(x)$$

бўлгани учун бундан

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

Масалан,

$$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = 5\cdot\frac{1}{4}x^4 + C = \frac{5}{4}x^4 + C.$$

$$\int \frac{3}{x+a}\,dx = 3\int\frac{dx}{x+a} = 3\ln(x+a) + C.$$

2. Қўшилувчиларнинг сони чекли бўлган бир неча функциялар йиғиндисининг интеграли ҳар бир функциядан олинган интегралларнинг йиғиндисига тенгдир.

Ҳақиқатда, маълумки,

$$d\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right] = df_1(x) + $$

$$+ df_2(x) + \cdots + df_n(x).$$

Шунинг учун

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)\,dx +$$

$$+\int f_2(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx.$$

Масалан,

$$\int (x^5 + x^2 + 1)\,dx = \int x^5\,dx + \int x^2\,dx + \int dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3 + x + C.$$

Шунга ўхшаш

a) $$\int (a+bx)^2\,dx = \int (a^2 + 2abx + b^2x^2)\,dx = \int a^2\,dx +$$

$$+\int 2abx\,dx + \int b^2x^2\,dx = a^2\int dx + 2ab\int x\,dx + b^2\int x^2\,dx =$$

$$= a^2x + abx^2 + \frac{1}{3}b^2x^3 + C.$$

b) $$\int\left(\frac{a}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = a\int\frac{dx}{x^3} - \int\frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= a\int x^{-3}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{a}{-2}x^{-2} - 2x^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

c) $$\int\left(a\sin x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=a\int\sin x\,dx+$$

$$+\int\cos x\,dx+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-a\cos x+\sin x+\operatorname{tg}x+C.$$

d) $$\int\left(3^x-\frac{2}{x}+e^x+1\right)dx=\int 3^x\,dx-2\int\frac{dx}{x}+$$

$$+\int e^x\,dx+\int dx=\frac{3^x}{\ln 3}-2\ln x+e^x+x+C.$$

e) $$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx=\int\left(x^{-3}\sqrt{x}-e^x+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^x\,dx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-e^x+\ln x+C=$$

$$=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln x+C.$$

Масалалар

466. $\int(3x^5-6x+7)\,dx=0{,}5x^6-3x^2+7x+C.$

467. $\int(ax^7+bx^5-cx^3)\,dx=\frac{a}{8}x^8+\frac{b}{6}x^6-\frac{c}{4}x^4+C.$

468. $\int(x^2+1)^2dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x+C.$

469. $\int(a\sqrt{x}+e^x+\sin x)\,dx=\frac{2}{3}a\sqrt{x^3}+e^x-\cos x+C.$

470. $\int\frac{3x^2+2x+5}{x^3}\,dx=3\ln x-\frac{2}{x}-\frac{5}{2x^2}+C.$

471. $\int \frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{x}\,dx = \ln x - 1{,}5\,x^{\frac{2}{3}} + C.$

472. $\int \left(\frac{3}{x^2+4} + 5\sec^3 x - 1\right) dx = 3\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right) +$

$$+ 5\,\mathrm{tg}\,x - x + C.$$

473. $\int \frac{(\sqrt{x}+x)^2}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x + C$

474. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{x^2}} = -\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}} + C.$

475. $\int \frac{a\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = a\,(\mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x) + C.$

476. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \frac{8}{15}\,x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + C.$

477. $\int \left(1+\sqrt[3]{\sqrt{x}}\right)^2 dx = x + \frac{12}{7}\,x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{4}\,x^{\frac{4}{3}} + C.$

478. $\int \left(\frac{5}{x^4} + \frac{3}{x} - 4\right) dx = -\frac{5}{3x^3} + 3\ln x - 4x + C$

479. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = -\mathrm{ctg}\,x - x + C.$

Ечиш йўли:

$$\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\mathrm{ctg}\,x - x + C.$$

480. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x - x + C.$

481. $\int \frac{a+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = (a+1)\,\mathrm{tg}\,x - x + C.$

482. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

483. $\int (a^2-x^2)^3 \sqrt{x}\,dx = 2x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a^6}{3} - \frac{3a^4x^2}{7} + \right.$

$$\left. + \frac{3a^2x^4}{11} - \frac{x^6}{15}\right) + C.$$

484. $\int \left(\frac{3x^2}{a^3+x^3} + \frac{1}{x} - x\right) dx =$

$$= \ln (a^3+x^3)x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

485. $\int \left(5^x - \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{5x}{\ln 5} + \ln \frac{x}{x+a} + C$

§ 68. АЛМАШТИРИШ МЕТОДИ

Юқоридаги мисолларни чиқаришда тўғридан-тўғри тегишли формула ишлатилган эди, бироқ кўпинча интегралларни тўғридан-тўғри формула ёрдами билан чиқариб бўлмайди.

Бундай ҳолларда берилган интегралнинг типига қараб иш кўришга тўғри келади. Бунинг учун бир неча интеграллаш методи қўлланилади. Булардан энг кўп ишлатиладигани алмаштириш методи саналади. Бу параграфдан мақсад шу метод билан таништиришдир.

Бу методнинг асоси ўзгарувчининг ўрнига вақтинча янги ўзгарувчи қабул қилишдан иборатдир. Лекин эски ўзгарувчи билан янги ўзгарувчининг орасида шундай муносабат бўлиши керакки, натижада алмаштирилган интегрални бирорта асосий формуланинг ёрдами билан чиқариш мумкин бўлсин.

Масалан, берилган интеграл

$$V = \int f(x)\,dx \text{ бўлсин,} \tag{1}$$

Бу интегрални соддалаштириш мақсади билан x нинг ўрнига бунинг билан белгили муносабатда бўлган янги ўзгарувчи қабул қиламиз. Янги ўзгарувчи t бўлсин ва унинг билан x нинг орасидаги муносабат

$$x = \varphi(t) \tag{2}$$

бўлсин. Бунинг иккала томонини дифференциаллаймиз:

$$dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{3}$$

(2) ва (3) ни (1) га қўйиш натижасида (1) интегралнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$V = \int f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Интегралнинг тузилишига қараб, эски ва янги ўзгарувчилар орасида (2) муносабатни яхшилаб тузилган ҳолда янги интеграл аввалгисига қараганда бирмунча содда бўлиши ва асосий формуланинг бирига тўғри келиб қолиши мумкин.

Бундай ҳолда янги интегрални ҳисоблаб бўлгандан сўнг t нинг ўрнига (2) дан ўз ифодасини қўйиб, эски ўзгарувчи x га ўтилади.

Мисол 1. $$V = \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

Бу интегрални топиш учун

$$\sin x = t$$

фараз қиламиз, бундан

$$\cos x dx = dt,$$

шунинг учун

$$V = \int e^{\sin x} \cos x\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C$$

ёки t нинг ўрнига қайтадан ўз ифодаси қўйилса,

$$V = e^{\sin x} + C.$$

Мисол 2.

$$\int (ax + b)^m\,dx,\; m \neq -1.$$

Бу интегрални топиш учун

$$ax + b = t$$

фараз қиламиз, бундан

$$adx = dt \text{ ёки } dx = \frac{1}{a}\,dt$$

ва

$$\int t^m \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{m+1}}{m+1} + C$$

ёки t нинг ўрнига ўз ифодаси қўйилса,

$$\int (ax+b)^m\, dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

Мисол 3.

$$\int \sin x \cos x dx = ?$$

$$\int \sin x \;\; d\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C, \text{ чунки}$$

$$\int udu = \frac{1}{2}u^2 + C.$$

Мисол 4.

$$\int e^{x^3} x^2\, dx = \;?$$

$$x^3 = t,\; 3x^2\, dx = dt,\; x^2\, dx = \frac{1}{3}\, dt.$$

Демак,

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int e^t\, dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Мисол 5.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}\, .$$

Агарда радикал остидаги ифодани t фараз қилинса:

$$x^2 + 1 = t,$$

бундан

$$2x\, dx = dt$$

ва

$$xdx = \frac{1}{2}\, dt.$$

Демак,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Масалалар

486. $\int \frac{5x^4 + 6x}{x^5 + 3x^2 + 7} dx = \ln(x^5 + 3x^2 + 7) + C.$

487. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \ln(1 + \sin x) + C.$

488. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$

489. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

490. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1}} = 2\sqrt{x+1} + C.$

491. $\int \frac{e^x dx}{a + e^x} = \ln(a + e^x) + C.$

492. $\int \sin(3x + 2)\, dx = -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + C.$

493. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^3} = \frac{1}{3} \ln(1 + x^3) + C.$

494. $\int \frac{x^5 dx}{1 + x^{12}} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} x^6 + C.$

495. $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} \ln(x^3 + 1) = \frac{1}{2} \ln^2(x^3 + 1) + C.$

496. $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1 + x^2} dx = \frac{1}{3} (\operatorname{arc\,tg} x)^3 + C.$

497. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C.$

498. $\int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - n} (a^2 + x^2)^{1-n} + C.$

499. $\int \frac{x\,dx}{a^2 b^2 + x^4} = \frac{1}{2ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{ab}\right) + C.$

500. $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

Ечиш йўли:

$$\cos^2 x \sin^3 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin x\,dx =$$
$$= \cos^2 x (1 - \cos^2 x)\, d(-\cos x), \quad \cos x = t,$$

501. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \arcsin x^2 + C.$

502. $\int e^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = e^{\operatorname{tg} x} + C.$

503. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx = -\frac{1}{4\sin^4 x} + C.$

504. $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

505. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C.$

506. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

507. $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x -$

$$-\frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

508. $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos^3 x + C.$

509. $\int \sin x \cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^2 x + C.$

510. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$

511. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

512. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x + C.$

§ 69. БЎЛАКЛАБ ИНТЕГРАЛЛАШ МЕТОДИ

Бу метод дифференциал ҳисобнинг ушбу формуласига асосланган:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Бунинг иккала томони интеграллапса,

$$uv = \int udv + \int vdu \text{ бўлади.}$$

Бу тенгликни биринчи интегралга нисбатан ечиш натижасида қуйидаги формула келиб чиқади:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Интеграл ҳисобида бу формулани **бўлаклаб интеграллаш формуласи** дейилади. Бунга қараганда udv ни интеграллаш масаласи vdu ни интеграллаш билан ечилади. Кўп вақтларда биринчиси иккинчисига қараганда соддароқ бўлиб, биринчисини тўғридан-тўғри формула билан интеграллаш мумкин бўлмаган ҳолда иккинчисини интеграллаш мумкин бўлиб қолади. Лекин dv билан шундай бўлакни ифода қилиш керакки, уни интеграллаш мумкин бўлсин. Шу ҳолдагина интегралдан қутулиш мумкин:

Мисол 1. $\int x^3 \ln x dx = ?$

Агарда $u = \ln x,\ dv = x^3 dx$

фараз қилинса, у ҳолда

$$du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{1}{4}x.$$

Буларни юқоридаги формулага қўямиз:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

Мисол 2.

$$\int xe^x dx = ?$$

Агарда $u = x$, $dv = e^x dx$

фараз қилинса, у ҳолда

$$du = dx, \ v = e^x$$

бўлгани учун формула бўйича

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

Мисол 3.

$$\int x \sin x dx = ?$$

$$u = x, \ dv = \sin x dx; \ du = dx, \ v = -\cos x;$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Мисол 4.

$$\int x^2 \cos x dx = ?$$

$$u = x^2, \ dv = \cos x dx; \ du = 2x dx; \ v = \sin x$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx.$$

Бундаги интегрални биз юқорида — 3-мисолда топган эдик, унда

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

бўлган эди. Шунинг учун

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Мисол 5.

$$V = \int \cos^2 x dx = ?$$

$$V = \int \cos x \cdot \cos x dx$$

бўлгани учун $u = \cos x$, $dv = \cos x dx$ фараз қиламиз, бундан

$$du = -\sin x dx, \quad v = \sin x.$$

Шунинг учун формула бўйича:

$$V = \sin x \cos x + \int \sin x \sin x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x +$$

$$+ \int dx - \int \cos^2 x \, dx.$$

Кейинги интеграл мисолда берилган интегралнинг ўзи. Шунинг учун

$$V = \sin x \cos x + x - V + C,$$

бундан

$$2V = \sin x \cos x + x + C.$$

Демак,

$$V = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C.$$

Масалалар

513. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.$

514. $\int (x^3 + 1) \ln x \, dx = \left(\frac{1}{4} x^4 + x\right) \ln x - \frac{1}{16} x^4 - x + C.$

515. $\int \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

516. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

517. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

518. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$

519. $\int e^x x^2\,dx = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x + C.$

520. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} + C.$

521. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$

522. $\int \cos x \ln\sin x\,dx = \sin x(\ln\sin x - 1) + C.$

523. $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = x\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}x^2 + \ln\cos x + C.$

524. $\int \frac{\ln(\ln\cos x)\,dx}{x} = \ln[\ln(\ln x) - 1] + C.$

Кўрсатма: $u = \ln(\ln x)$ фараз қилинсин.

525. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$

526. $\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$

527. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$

528. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\right) + C.$

529. $\int x^2 \sin x\,dx = 2(\cos x + x\sin x) - x^2\cos x + C.$

Аралаш масалалар

530. $$\int \frac{3+5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}\,dx = -\frac{6}{\sqrt{x}} + 30\sqrt[6]{x} + C.$$

531. $$\int \frac{5x^4-3x^3+7}{x^3}\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 2\ln x - \frac{1}{2x^2} + C.$$

532. $$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

533. $$\int (x^3+x)\cos(x^2+1)\,dx = 0{,}5\,[(1+x^2)\sin \times$$
$$\times (1+x^2) + \cos(1+x^2)] + C.$$

534. $$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

535. $$\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} + C.$$

536. $$\int \frac{\cos \ln x}{x}\,dx = \sin \ln x + C.$$

537. $$\int \sin(x^2-2x+7)\cdot(2x-2)\,dx = -\cos \times$$
$$\times (x^2-2x+7) + C.$$

538. $$\int \frac{x^4\,dx}{\cos^2(x^5+3)} = \frac{1}{5}\operatorname{tg}(x^5+3) + C.$$

539. $$\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}\,dx} = \frac{1}{2}\arcsin^2\frac{x}{a} + C.$$

540. $$\int \frac{\operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x} = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + C.$$

541. $$\int \frac{x^3}{e^x}\,dx = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) + C.$$

542. $\int (\mathrm{tg}^2 x + \ln x)\, dx = \mathrm{tg} x + x\ln x - 2x + C.$

543. $\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

544. $\int \left(\sin x\cos x + \frac{1}{x}\ln x\right) dx = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \ln^2 x) + C.$

545. $\int \frac{2dx}{1+e^x} = 2x - \ln(1+e^x)^2 + C.$

546. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}} = 3\sqrt[3]{\ln x} + C.$

547. $\int (\mathrm{tg}^3 x \sec^2 x - \sin^2 x)dx = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\times$

$\times \sin x\cos x + \frac{1}{2}x + C.$

548. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\mathrm{tg}\, x\right) + C.$

549. $\int x^2 \operatorname{cosec}^2 x^3\, dx = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}\, x^3 + C.$

550. $\int \frac{\ln^3 x\, dx}{x} = \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$

551. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + C.$

552. $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2} = \frac{x\ln x}{x+1} - \ln(x+1) + C$ (бўлаклаб олинсин).

553. $\int \frac{dx}{x(\ln x^n)} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + C.$

554. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arc\,tg} e^x + C.$

(Касрнинг сурат ва махражи e^x га кўпайтирилсин).

555. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln \sin x + C.$

Ечиш йўли:

$$\frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x} = \frac{(1-\sin^2 x)\,d\sin x}{\sin^3 x}.$$

556. $\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} -$

$$-\frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}.$$

§ 70. ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ БАЪЗИ ТИПЛАРИ

Бу ерда практикада кўп учрайдиган баъзи бир интеграллар билан таништириб ўтамиз.

1.
$$\int \frac{du}{u^2 - a^2},$$

a — ўзгармас.

Бу интеграл остидаги касрни иккита касрга ажратамиз:

$$\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{1}{(u-a)(u+a)} = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a}\right\}.$$

Шунинг учун берилган интегрални иккига ажратиш мумкин:

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left\{\int \frac{du}{u-a} - \int \frac{du}{u+a}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2a}\{\ln(u-a) - \ln(u+a)\} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + C.$$

Шунинг билан изланган формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C} \qquad (A)$$

Масалан,

$$\frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Интеграл остидаги касрни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Агарда

$$x + \frac{b}{2a} = t \text{ ва } dx = dt$$

фараз қилинса, у ҳолда интегралнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Бу ерда икки ҳол бўлуви мумкин. Агарда:

a) $b^2 - 4ac < 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -k^2$$

фараз қиламиз. Демак,

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{ak}\int \frac{d\left(\frac{t}{k}\right)}{1 + \left(\frac{t}{k}\right)^2} = \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C.$$

Агарда қайтадан t ва k нинг ўрнига ўз ифодалари қўйилса, у ҳолда энг кейинги натижанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C. \qquad (B)$$

б) $b^2 - 4ac > 0$ бўлган ҳолда

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = k^2$$

фараз қиламиз. Шунинг учун

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - k^2}.$$

Бу тип интеграл учун юқорида формула чиқарилган эди. У формула бўйича:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2ak} \ln \frac{t - k}{t + k} + C$$

ёки ва k нинг ўрнига ўз ифодаси қўйилса

$$\int \frac{dt}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \quad (C)$$

Бевосита (B) ва (C) формулаларидан фойдаланиш ўрнида уларнинг чиқариш методидан фойдаланиш тавсия қилинади.

Мисол 1.

$$V = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1.$$

$$V = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1}.$$

$$x + 2 = t, \ dx = dt,$$

$$V = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg}(x + 2) + C.$$

Мисол 2.

$$V=\int\frac{dx}{x^2-4x-5}.$$

$$x^2-4x-5=x^2-4x+4-4-5=(x-2)^2-9.$$

$$x-2=t,\ d=x\,dt.$$

ёки

$$V=\int\frac{dx}{x^2-4x-5}=\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{6}\ln\frac{t-3}{t+3}+C,$$

демак,

$$V=\frac{1}{6}\ln\frac{x-5}{x+1}+C.$$

3. $$V=\int\frac{mx+p}{ax^2+bx+c}dx.$$

Агарда бу интегралнинг остидаги каср махражини юқорида кўрсатилганча ёзиб, сўнгра

$$x+\frac{b}{2a}=t \text{ ва } \frac{b^2-4ac}{4a^2}=\pm k^2$$

фараз қилинса, у интегралнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$V=\int\frac{m\left(t-\frac{b}{2a}\right)+p}{t^2\pm k^2}dt=$$

$$=\frac{1}{a}\left\{mt\int\frac{tdt}{t^2\pm k^2}+\left(P-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}\right\}.$$

Бу интеграллардаи иккинчиси юқорида текширилган эди; биринчиси бўлса логарифм беради:

$$\int\frac{tdt}{t^2\pm k^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2\pm k^2)+C.$$

4. $$V=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\mp a^2}}.$$

Бу интегрални топиш учун

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} = t$$

фараз қиламиз. Бундан

$$x^2 \pm a^2 = t^2,\ 2xdx = 2tdt$$

ёки

$$\frac{dx}{t} = \frac{dt}{x} = \frac{dx+dt}{x+t}.$$

ёки

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{dx+dt}{x+t},$$

бундан $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dx+dt}{x+t} = \ln(x+t) + C$

ёки t нинг ўрнига ўз ифодаси қўйилса:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C.}$$

Масалалар

557. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C.$

558. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} + C.$

559. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{2} + C.$

560. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

561. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+5x+4}\, dx = \ln \frac{(x+4)^3}{x+1} + C.$

562. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5}\, dx = \frac{3}{2} \ln\left(x^2+4x+5\right) + C.$

563. $\int \frac{dx}{3x^2+2x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C.$

564. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{2} + C.$

565. $\int \frac{3x+7}{x^2+2x+5} = 3 \ln \sqrt{x^2+2x+5} +$

$$+ 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{2} + C.$$

566. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} = \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right) + C.$

566 *A*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}} = \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-2}\right) + C.$

566 *B*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+2}} = \ln\left(x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right) + C.$

§ 71. ИНТЕГРАЛ ЎЗГАРМАСИНИ АНИҚЛАШ

Интеграллаш натижасида келиб чиққан ўзгармас C нинг қиймати масалада қўйилган бошлангич шартларга боглиқдир. Уни аниқлаш учун умуман ўзгарувчига бирор қиймат берилганда, унга тегишли интегралнинг қиймати берилган бўлса кифоя қилади. Ҳақиқатда, ушбу

$$y = \int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

аниқмас интегралда

$$x = x_0 \text{ бўлганда, } y = y_0 \text{ бўлсин.}$$

Бу ҳолда

$$y_0 = \varphi(x_0) + C, \text{ бундан } C = y_0 - \varphi(x_0).$$

Масала. Шундай эгри чизиқнинг тенгламаси топилсинки, унинг ҳар бир нуқтасидаги уринманинг бурчак коэффициенти $4x$ бўлсин ва (1, 3) нуқтадан ўтсин.

Ечиш йўли: Эгри чизиқнинг бурчак коэффициенти унинг ҳар бир нуқтасида $\frac{dy}{dx}$ дан иборат. Масаланинг шартига мувофиқ у $4x$ бўлгани учун

$$\frac{dy}{dx} = 4x \text{ ёки } dy = 4xdx.$$

Демак,

$$y = 4\int xdx + C,$$

ёки

$$y = 2x^2 + C.$$

Масаланинг шартига мувофиқ бу чизиқ (1, 3) нуқтадан ўтиши керак.

Шунинг учун

$$3 = 2\cdot 1 + C,$$

демак,

$$C = 1.$$

Буни (1) тенгламага қўйилса

$$y = 2x^2 + 1 \text{ бўлади.}$$

Шунинг билан масаланинг шартларига тўғри келган чизиқ — парабола экан.

Масалалар

567. Шундай чизиқнинг тенгламаси тузилсинки, унинг горизонтга оғмалиги 5 бўлсин ва ордината ўқидан кесган парчаси 3 бўлсин.

Жавоб: $y = 5x - 3$.

568. Шундай функция топилсинки, унинг биринчи ҳосиласи $x^2 + 1$ бўлсин ва $x = 3$ бўлганда функциянинг қиймати 15 бўлсин.

Жавоб: $y = \frac{1}{3}x^3 + x + 3$.

569. Шундай функция топилсинки, унинг ҳосиласи ($\cos x - \sin x$) бўлсин ва $x = \frac{\pi}{3}$ бўлганда, функциянинг қиймати $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ бўлсин.

Жавоб: $y = \sin x + \cos x - 0,5$.

570. Шундай функция топилсинки, унинг ҳосиласи $\cos x - 2$ бўлсин ва $x = 0$ бўлганда, у функция нолга айлансин.

18—177

Жавоб: $y = \sin x - x^2$.

571. Поезд $v = t^2 - 4t + 3$ *км/соат* тезлик билан юрмоқда; агарда поезд бошланғич моментда станциядан 3 *км* масофада бўлса, унинг юриш тенгламаси қандай бўлади?

Жавоб: $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 3$.

572. Шундай эгри чизиқнинг тенгламаси топилсинки, унинг нормал-ости ўзгармас бўлиб, a га тенг бўлсин ва унинг ордината ўқидан кесган парчаси b бўлсин $\left(\text{Нормал-ости } y\frac{dy}{dx}\right)$.

Жавоб: $y^2 = 2ax + b^2$.

573. Қутб системасида нормал-ости ўзгармас бўлган эгри чизиқ Архимед спирали бўлади. Буни исбот қилинсин.

574. Шундай эгри чизиқнинг тенгламаси тузилсинки, унинг нормал-ости уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг бўлсин.

Жавоб: $y^2 - x^2 = C$.

575. Электр қўзғатувчи куч манбаини ажратиб олишдан t вақт ўтгандан кейин, электр оқими (i) ушбу тенглама билан ифода қилинади:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

бунда R ва L ўзгармас саналади. $t = 0$ бўлганда $i = I$ фараз қилиб i ни топилсин.

Жавоб: $i = Ie^{kt}$, бунда $k = -\frac{R}{L}$.

§ 72. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧА

Аниқмас интегралнинг таърифига мувофиқ агарда $F'(x) = f(x)$ булса, у ҳолда:

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

бунда C ҳар қандай ўзгармас сондан иборат.

Бундай ўзгармас C ни қандай аниқлашни биз ўтган параграфда кўрган эдик: бунинг учун қандай бўлса-да,бирорта қўшимча шарт бўлса кифоя қилади. Кўп масалаларда бундай қўшимча шарт учун x га бирор маълум қиймат берганда интегралнинг нолга айланиш шарти қўйилади ёки бошқача қилиб айтганда: C га шундай қиймат талаб қилинадики, $x = a$ бўлганда $y = 0$ бўлсин, яъни

$$0 = F(a) + C,$$

бундан

$$C = -F(a). \tag{2}$$

C нинг бу қийматини (1) га қўйилса, y қуйидагича бўлади:

$$y = F(x) - F(a). \tag{3}$$

Қўйилган шарт натижасида келиб чиққан (1) аниқмас интегралнинг бу хусусий ҳоли

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

равишда ифода қилиниб „a дан x гача аниқ интеграл" дейилади. Шунинг билан

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) \tag{4}$$

агарда $F'(x) = f(x)$ бўлса.

Бунга қараганда аниқ интеграл x нинг аниқ функцияси бўлади.

Бундай интегралнинг $x = b$ бўлганда хусусий қиймати „a дан b гача аниқ интеграл" дейилади. Демак, бу ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{5}$$

бундаги a аниқ интегралнинг қуйи лимити, b юқори лимити дейилади.

Интеграл ишораси остида x ни интеграллаш ўзгарувчиси дейилади; (5) га қараганда аниқ интегралнинг қиймати интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ бўлмай, балки ўз лимитларига боғлиқдир. Шунинг учун

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

(5) тенгликнинг ўнг томонидаги айирмани кўпинча $[F(x)]_a^b$ равишда ифода қиладилар, яъни

$$F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b.$$

(5) тенглик аниқ ва аниқмас интеграллар орасидаги асосий муносабатни ифода қилади. Шунинг учун

> Агарда аниқмас интеграл
>
> $$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$
>
> бўлса, у ҳолда аниқ интеграл
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \text{ бўлади.}$$

Демак, аниқ интегрални ҳисоблаш учун

1) $f(x)\,dx$ нинг аниқмас $F(x)$ интеграли топилади ва

2) аниқмас $F(x)$ интегралдаги x нинг ўрнига аниқ интегралнинг юқори ва қуйи лимитларини қўйиб, биринчисидан иккинчисини айириб олинади.

Мисол 1. $\int_1^2 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=4-\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}$.

Мисол 2. $\int_1^4 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4=\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{64-1}{3}=21$.

Мисол 3. $\int_a^b \frac{dx}{x}=\left[\ln x\right]_a^b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$.

§ 73. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Тўғрибурчакли координаталар системасининг текислигида бирор (узлуксиз) AB чизиқни олиб, унинг тенгламасини

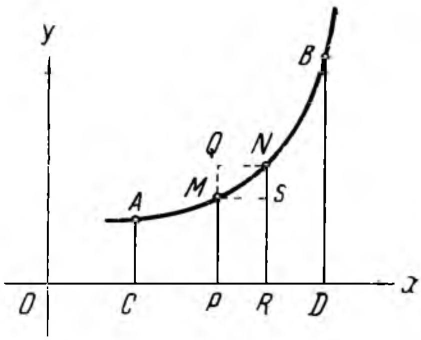
$$y=f(x) \tag{1}$$

фараз қиламиз; берилган эгри чизиқ абсцисса ўқидан юқорида бўлсин, демак, x нинг ҳар бир қийматида y мусбат бўлади. Шунинг билан бирликда ордината ўқига параллел бўлган ҳар бир тўғри чизиқни бизнинг AB эгри чизиқ билан бир нуқтада учрайди деб фараз қиламиз (шакл 62).

A нинг координаталари: $a = OC$ ва $f(a) = AC$; B нинг координаталари $b = OD$ ва $f(b) = BD$ бўлсин. Буларга асослаииб: биринчи томондан AB эгри чизиқ билан, иккинчи томондан абсцисса ўқи билан, учинчи ва тўртинчи томонлардан AC ва BD ординаталар билан чегараланган $ABDC$ нинг юзини топамиз.

Бунинг учун $y = MP$ ни ўзгарувчи ордината ва $x = OP$ ни ўзгарувчи абсцисса фараз қиламиз. Агарда эгри чизиқли $AMPC$ тўртбурчакнинг юзини S билан ифода қилинса, y x нинг функцияси бўлади, чунки S x нинг ўзгаришига қараб ўзгаради. Шунинг учун:

$$S = \varphi(x) = AMPC. \quad (2)$$



Шакл 62.

Энди x га бирор Δx орттирма бериб, бундан ҳосил бўлган y нинг орттирмасини Δy ва S нинг орттирмасини ΔS фараз қиламиз. Шаклда:

$$\Delta x = PR; \ \Delta y = SN; \ \Delta S = MNRP.$$

MP ординатасини давом эттириб, сўнгра M ва N нуқталаридан абсцисса ўқига параллел чизиқ ўтказамиз. Бунинг натижасида $MSRP$ ва $QNRP$ тўғри тўртбурчаклар ҳосил бўлади. Шаклга мувофиқ

$$MSPR < MNPR < QNPR$$

ёки

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

ёки Δx га бўлинса

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y \quad (3)$$

Δx нолга яқинлашган ҳолда Δy ҳам нолга яқинлашиб боради ва $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ нинг лимити $\frac{dS}{dx}$ бўлади. Шунинг учун

$$\frac{dS}{dx} = y \quad \text{ёки} \quad \frac{dS}{dx} = f(x)$$

$$dS = f(x)\,dx.$$

Агарда $f(x)dx$ нинг аниқмас интеграли

$$F(x) + C$$

фараз қилинса

$$S = \int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{4}$$

Шаклга мувофиқ $x = a$ бўлганда $S = 0$ бўлади. Демак, бундан

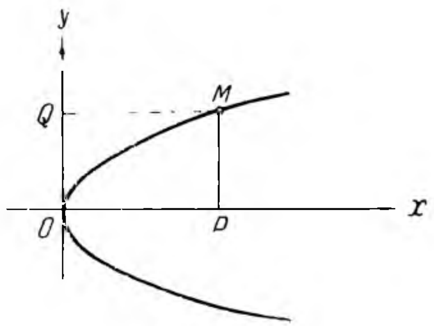
$$0 = F(a) + C \text{ ёки } C = -F(a)$$

шунинг учун (4) га мувофиқ

$$S = ACMP = F(x) - F(a);$$

$x = b$ бўлганда

$$S = ABDC = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$



Шакл 63.

Демак, $f(x)$ функциядан a дан b гача олинган аниқ интеграл: бир томондан абсцисса ўқи билан, иккинчи ва учинчи томондан $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан ва тўртинчи томондан тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини ифода қилади.

Мисол 1. Мисол учун параболани оламиз. Унинг одатдаги энг содда тенгламаси:

$$y^2 = 2px$$

Бунинг бирор $M(x, y)$ нуқтасидан ордината тушириб, ҳосил бўлган OMP секторнинг юзини топамиз. Бу мисолда (шакл 63):

$$f(x) = y = \sqrt{2px}; \; a = 0; \; b = OP.$$

Шунинг учун:

$$S = OMP \text{ секторнинг юзи} = \int_0^b \sqrt{2px}\,dx. \qquad (6)$$

Бу аниқ интегрални ҳисоблаш учун энг аввал аниқмас интегрални топамиз:

$$\int \sqrt{2px}\,dx = \int \sqrt{2p}\cdot\sqrt{x}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}.$$

Демак,

$$S = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^b = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,b\sqrt{2pb}$$

ё шаклга мувофиқ:

$$S = \frac{2}{3}\,OP\cdot MP. \qquad (7)$$

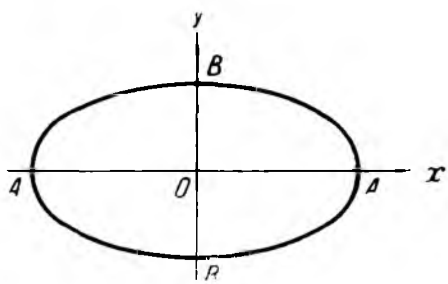
Чиққан натижага қараганда параболанинг OMP секторининг юзи: унда ясалган $OQMP$ тўғри тўртбурчак юзининг $\frac{2}{3}$ сига тенг бўлади.

Мисол 2. Иккинчи мисол учун эллипсни оламиз. Унинг энг оддий тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ва бундан

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$



Шакл 64.

Маълумки, эллипснинг ўқлари унинг юзини тўртта тенг бўлакларга бўлади. Шунинг учун улардан бирининг юзи топилса, қолганлари ҳам маълум бўлади. Буни эътиборга олиб, эллипснинг мусбат ярим ўқлари орасидаги OBA секторининг юзини топамиз. Бутун эллипснинг юзи бунинг тўрт бараварига тенг (шакл 64):

$$S = 4OBA$$

Бу ҳолда $y = f(x) > 0$ шунинг учун

$$y = f(x) = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Бу мисолда x O дан a гача ўзгаради. Демак,

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

S ни топиш учун энг аввал аниқмас интегрални топамиз:

$$V = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Бу интегрални топиш учун бўлаклаб интеграллаш методини ишлатамиз:

$$u = \sqrt{a^2 - x^2},\ dv = dx,\ \text{демак},\ v = x.$$

$$V = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$-\int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

ёки

$$V = \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

буидан:

$$2V = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$2V = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Демак,

$$V = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Шунинг учун (4) га мувофиқ

$$S = \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = 2ab\arcsin 1$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

бўлгани учун

$$\underline{S = ab\pi.}$$

Айлана бўлган ҳолда $a = b = R$ бўлади. Шунинг учун бу ҳолда

$$S = \pi R^2,$$

яъни ҳамон геометриядан маълум бўлган формула чиқади.

§ 74. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

Аниқ интегралнинг хоссалари қуйидагилардан иборат:

1.
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

яъни **интегралнинг лимитлари алмаштирилса, у интегралнинг ишораси тескари бўлади.** Ҳақиқатда,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx.$$

Масалан,

$$\int_1^3 x dx = +4 \text{ ва } \int_3^1 x dx = -4.$$

2. c қандай бўлса-да:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Бу тенгликнинг тўғрилигини исбот қилиш учун унинг ўнг томонидаги интегралларни ҳисоблаб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a); \quad \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c),$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Умуман

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

3. Агарда C ни a ва b орасидаги бирор сон фараз қилинса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(c).$$

Ҳақиқатда Лагранж формуласига мувофиқ

$$F(b) - F(a) = (b - a)\,F'(c).$$

Иккинчи томондан,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx, \; F'(c) = f(x),$$

демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(c).$$

Масалалар

576. $\int\limits_{-2}^{+2} x^4\,dx = \frac{64}{5}$.

577. $\int\limits_0^3 (2x + 3x^2)\,dx = 36$.

578. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{5}$.

579. $\int\limits_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{4a}$,

580. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = 2.$

581. $\int\limits_0^{1} xe^x\, dx = 1.$

582. $\int\limits_0^{1} x \ln x\, dx = -\frac{1}{4}.$

583. $\int\limits_0^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{3} a^3.$

584. $\int\limits_0^{a} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax^2}).$

585. $\int\limits_2^{3} \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \ln 2.$

586. $\int\limits_0^{e} x^2 \ln x\, dx = \frac{1 + 2e^3}{9}.$

587. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$

588. Тенгламаси $y = 3x + 2$ бўлган тўғри чизиқ билан, абсцисса ўқи билан, $x = 1$ ва $x = 4$ ординаталар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: $28\frac{1}{2}$.

588*a*. Ўтган масалани элементар геометрия ёрдами билан синаб кўрилсин.

589. Тенгламаси $y^2 = 9x$ бўлган парабола билан, абсцисса ўқи билан, $x = 1$ ва $x = 4$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: $4\frac{2}{3}$.

590. Бир томондан $y = \frac{a^2}{x}$ гипербола билан, иккинчи томондан абсцисса ўқи билан, учинчи ва тўртинчи томонлардан $x = 2$ ва $x = 5$ вертикаллар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: $a^2 \ln\frac{5}{2}$.

591. $y = \ln x$ эгри чизиқ билан, абсцисса ўқи билан ва $x = 5$ ордината билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.
Жавоб: $5(\ln 5 - 1) + 1$.

592. $y = \frac{1}{x^2}$ эгри чизиқ билан, абсцисса ўқи ва $x = 1$

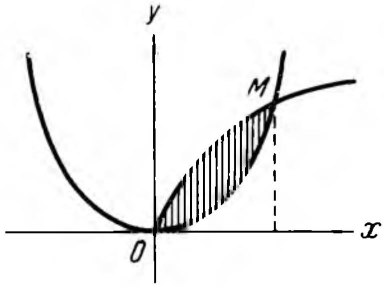
билан $x=10$ тўғри чизиқлар орасидаги шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: 0,9.

592а. Радиуси R га тенг бўлган доиранинг юзи интеграллаш ёрдами билан топилсин.

Жавоб: πR^2.

592б. Тенгламалари $y=x^2$ ва $y^2=4x$ бўлган параболалар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин (шакл 65).



Шакл 65.

Жавоб: $\frac{1}{3}$.

593. Тенгламаси

$$y=2x-x^2$$

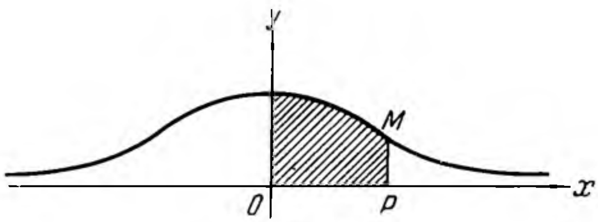
бўлган эгри чизиқ билан абсцисса ўқи орасидаги шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: $\frac{4}{3}$.

594. $y=\sin x$ синусоиданинг битта ёйи билан абсцисса ўқи орасидаги шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: 2.

595. Тенгламаси $y=ae^{\frac{x}{a}}$ бўлган эгри чизиқ билан, координата ўқлари билан ва $x=4$ тўғри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.



Шакл 66.

Жавоб: $a^2\left(e^k-1\right)$, бунда $k=\frac{4}{a}$.

596. Бир томондан $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиқ билан, иккинчи томондан абсцисса ўқи билан, учинчи ва тўртинчи томонлардан $x=x_1$ ва $x=x_2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

Жавоб: $$y=\frac{a^2}{2}\left\{\left(e^{\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_2}{a}}\right)-\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right)\right\}.$$

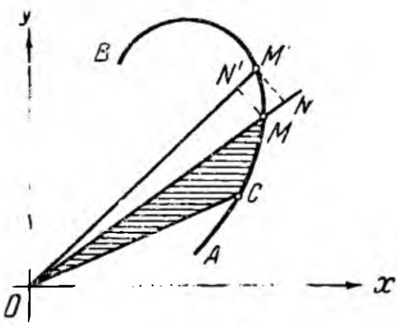
597. Бир томондан $y=\frac{1}{1+x^2}$ эгри чизиқ билан, иккинчи ва учинчи томонлардан координата ўқлари билан ва тўртинчи томондан $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин (шакл 66).

Жавоб: $\frac{1}{4}\pi$.

§ 75. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ШАКЛНИНГ ЮЗИ ҚУТБ СИСТЕМАСИДА

Берилган AB эгри чизиқнинг қутб координата системасида тенгламаси
$$r=f(\varphi) \tag{1}$$
бўлсин (шакл 67). Бунинг бирор $A(r_0,\varphi_0)$ нуқтасининг координаталарини ўзгармас фараз қилиб, эгри чизиқнинг бирор $M(r,\varphi)$ нуқтасини оламиз. Бу ҳолда COM секторининг юзи (S) φ бурчагининг функцияси бўлади.

Буни назарда тутиб, M нуқтага чексиз яқин бўлган эгри чизиқнинг $M'(r+\Delta r,\ \varphi+\Delta\varphi)$ нуқтасини оламиз. Бу чоқда OMM' секторнинг юзини OCM сектор юзининг орттирмаси фараз қилиш мумкин. $OMM'=\Delta S$ бўлсин. Энди O нуқтадан OM ва OM' радиуслар билан MN' ва $M'N$ ёйларни чизамиз. Шаклга мувофиқ:



Шакл 67.

OMN' юзи $<OMM'$ юзи $<ONM'$ юзи ёки
$$\frac{1}{2}r^2\cdot\Delta\varphi<\Delta S<\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\cdot\Delta\varphi,$$
ёки

$$\frac{1}{2}r^2 < \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2.$$

$\Delta\varphi$ нолга интилганда ΔS ва Δr ҳам нолга интилади. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2}r^2,$$

бундан

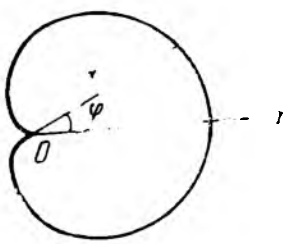
$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi\cdot$$

$\varphi = \varphi_0$ бўлганда $S = 0$ бўлади. Шунинг учун бу тенгликнинг иккала томонини интеграллаш натижасида ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi.} \tag{3}$$

Агарда M нуқтанинг декарт координаталари x ва y фараз қилинса, у ҳолда

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$



Шакл 68.

r φ нинг функцияси бўлгани учун x ва y ни ҳам φ нинг функцияси фараз қилиш мумкин. Шунинг учун:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \text{ ёки } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

бундан

$$d\varphi = \frac{xdy + ydx}{x^2+y^2}.$$

Иккинчи томондан, $x^2 + y^2 = r^2$ бўлгани учун

$$r^2 d\varphi = xdy - ydx,$$

демак,

$$dS = \frac{1}{2}(xdy - ydx). \tag{3'}$$

Бу формула CMO сектор юзининг дифференциалини M нуқтанинг декарт координаталари билан ифода қилади.

Мисол. Мисол учун $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоиданинг юзини топамиз (шакл 68).

Радиус-векторнинг бутун кардиоида чизиши учун φ O дан 2π гача ўзгариши керак. Шунинг учун чиқарилган формулага мувофиқ

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+$$
$$+\cos^2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}a^2\Big[\varphi+2\sin\varphi+$$
$$+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\varphi}{2}\Big]_0^{2\pi}=\frac{3}{2}a^2\pi.$$

Масалалар

598. Тенгламаси $r=a\cos\varphi$ бўлган доиранинг юзи топилсин.

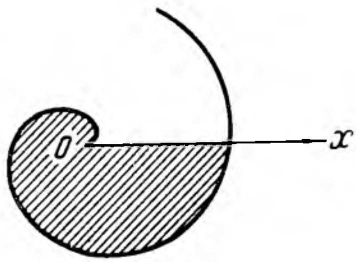
Жавоб: $\frac{1}{4}a^2\pi$.

599. Архимед спирали $r=a\varphi$ нинг биринчи ўрамининг юзи топилсин (шакл 69).

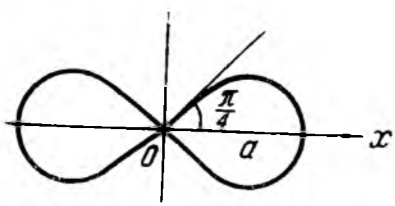
Жавоб: $\frac{4}{3}$.

600. $r^2=a^2\cos\varphi$ лемнискатанинг бутун юзи топилсин (шакл 70).

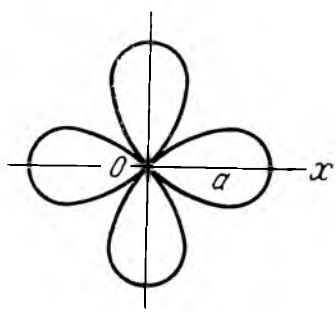
Жавоб: a^2.



Шакл 69.



Шакл 70.

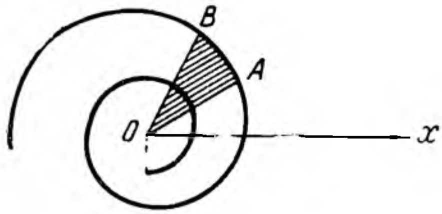


Шакл 71.

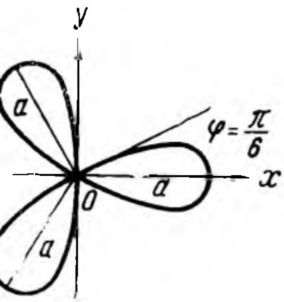
601. Тенгламаси $r=a\cos 2\varphi$ бўлган „Тўрт япроқли гул"нинг юзи топилсин (шакл 71).

Жавоб: $\frac{1}{2}a^2\pi$.

602. $r\varphi=a$ гиперболик спиралнинг иккита радиус-векторлари билан чегараланган юзи у радиус-векторларнинг орасидаги айирмасига пропорционал. Буни исбот қилинсин.



Шакл 72.



Шакл 73.

603. $r=ke^{a\varphi}$ логарифмик спиралнинг φ_1 ва φ_2 қутб бурчакларига қарашли радиус-векторларидан ҳосил бўлган секторнинг юзи топилсин.

Жавоб: $\frac{1}{4a}\left(r_2^2-r_1^2\right)$.

604. Тенгламаси $r=a\cos 3\varphi$ бўлган „Уч япроқли гул"нинг юзи топилсин (шакл 73).

Жавоб: $\frac{a^2\pi}{4}$.

Еттинчи боб

КЎП АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР

§ 76. КЎП АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1. Ҳозиргача биз фақат бир аргументли функциялар билан иш кўриб келдик. Лекин табиатда, фанда ва техникада кўпинча кўп аргументли функцияларни учратишга тўғри келади. Бу тўғрида сўз қисман 4 параграфда берилган бўлса-да, биз бу ерда яна бир мартаба таъкидлаб ўтамиз.

Агарда ўзгарувчи u бошқа x, y, z, ... t ўзгарувчиларга шундай боғлиқ бўлсаки, улардан ҳар бирининг ўзгариши бошқа ўзгарувчига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда u ни x, y, z, ... t нинг функцияси ва x, y, z, ... t ни *эркли* ўзгарувчилар ёки аргументлар деб аталади. Ўзгарувчилар орасидаги бундай муносабатни

$$u = f(x, y, z, \ldots t),$$

ёки

$$u = \varphi(x, y, z, \ldots t)$$

ва шунга ўхшаш кўринишларда ёзилиши тўғрисида ўз вақтида сўз бўлиб ўтган эди.

2. Кўп аргументли функцияларнинг узлуксизлиги ҳам худди бир аргументли функциялар узлуксизлиги каби таъриф қилинади. Масалани соддалаштириш мақсадида уч аргументли функцияни оламиз:

$$u = f(x, y, z). \qquad (1)$$

Агарда бирор $x = a$, $y = b$, $z = c$ нуқтада $x \to a$, $y \to b$, $z \to c$ га интилганда

$$\lim f(x, y, z) = f(a, b, c) \tag{2}$$

ёки

$$\lim f(x, y, z) = f(\lim x, \lim y, \lim z) \tag{3}$$

бўлса, у ҳолда (1) функцияни (a, b, c) нуқтада узлуксиз дейилади. Албатта, қўйилган шартни таъмин этиш учун:

1) $x \to a$, $y \to b$, $z \to c$ га интилганда $\lim f(x, y, z)$ мавжуд бўлиши керак,

2) функциянинг хусусий қиймати, яъни $f(a, b, c)$ мавжуд бўлиши керак ва

3) $x \to a$, $y \to b$, $z \to c$ га интилганда $f(x, y, z)$ нинг лимити функциянинг $f(a, b, c)$ хусусий қийматига тенг бўлиши керак.

Функциянинг узлуксизлигини яна бошқачароқ таъриф қилиш мумкин. Бунинг учун (1) функциянинг x, y, z аргументларига исталганча Δx, Δy, Δz орттирма берамиз; функциянинг буларга мос келган орттирмаси Δu бўлсин, яъни

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

Агарда Δx, Δy, Δz нинг ҳар бири нолга интилганда Δu ҳам нолга интилса ёки (тўлароқ) таърифи: агарда исталганча берилган η мусбат сонга шундай мусбат сон тўгри келсаки,

$$|\Delta x| < \eta, \quad |\Delta y| < \eta, \quad |\Delta z| < \eta$$

бўлганда

$$|\Delta u| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда бундай функцияни берилган (нуқтада) x, y, z қийматларининг системаси учун узлуксиз дейилади.

Агарда бирор соҳада $f(x, y, z)$ функция x, y, z қийматларининг ҳар бир системаси учун узлуксиз бўлса, у ҳолда функцияни шу соҳада узлуксиз дейилади.

§ 77. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР

1. Масалани соддалаштириш мақсадида энг аввал ушбу уч аргументли функцияни оламиз:

$$u = f(x, y, z).$$

Бунда x, y, z нинг ҳар бирини эркли ўзгарувчи фараз қиламиз. Шунинг учун булардан бири ўзгарган ҳолда, қолганлари ўзгармас ҳолида бўлади.

Агарда булардан бирортасига, масалан x га, бирор орттирма бериб, y, z ни ўзгартирмай ўз ҳолича қолдирганда, функциянинг мос орттирмаси **хусусий орттирма** дейилади ва буни одатда $\Delta_x u$ равишда ёзилади:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x,\ y,\ z) - f(x,\ y,\ z).$$

Шунга ўхшаш $f(x, y, z)$ функциянинг y га, сўнгра z га нисбатан орттирмаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta_y u = f(x,\ y + \Delta y,\ z) - f(x,\ y,\ z).$$

$$\Delta_z u = f(x,\ y,\ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z).$$

Функция хусусий орттирмасининг унга мос аргумент орттирмасига нисбатининг лимити, аргумент орттирмаси нолга интилганда, функциянинг шу аргументга нисбатан хусусий ҳосиласи дейилади.

Одатда $f(x, y, z)$ функциянинг x га нисбатан хусусий ҳосиласи

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ёки} \quad f'_x(x,\ y,\ z)$$

равишда ёзилади. Шунга ўхшаш $f(x, y, z)$ нинг y га, сўнгра z га нисбатан хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ёки} \quad f'_y(x,\ y,\ z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ёки} \quad f'_z(x,\ y,\ z)$$

равишда ёзилади. Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y,\ z) - f(x,\ x,\ z)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ёки} \quad f'_x(x,\ y,\ z),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y, + \Delta y,\ z) - f(x,\ x,\ z)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ёки} \quad f'_y(x,\ x,\ z),$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,\ y,\ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ёки} \quad f'_z(x,\ y,\ z).$$

Мисол 1. Ушбу функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин:

$$u = 3x^2 + 2xy^3 - y \ln x.$$

Ечиш: y ни ўзгармас фараз қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 2y^3 - \frac{y}{x};$$

энди x ни ўзгармас фараз қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy^2 - \ln x.$$

Мисол 2. Ушбу функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин:

$$f(x,\ y,\ z) = 3x^2z + 2y\sin x - xa^z + 5y^3.$$

Ечиш: Навбат билан олдин y ва z ни, сўнгра x ва z ни ва ундан кейин x ва y ни ўзгармас фараз қиламиз. Бу ҳолда берилган функциянинг ҳосилалари қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xz + 2y\cos x - a^z; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin x + 15y^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 - xa^z \ln a.$$

2. $u=f(x, y, z)$ функциянинг бирор аргументига нисбатан олинган хусусий ҳосиласини шу аргумент дифференциалига кўпайтмаси функциянинг хусусий дифференциали дейилади.

$u=f(x, y, z)$ функциянинг x га, y га, z га нисбатан хусусий дифференциаллари одатда

$$d_x u,\ d_y u,\ d_z u$$

равишда ёзилади. Демак,

$$d_x u = f'_x(x, y, z)\,dx, \quad d_y u = f'_y(x, y, z)\,dy,$$

$$d_z u = f'_z(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Энди функциянинг тўла орттирмасини оламиз. $u=f(x, y, z)$ функциянинг тўла орттирмаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z) =$$

$$= [f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)] +$$

$$+ [f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z)] + [f(x, y, z + \Delta z) -$$

$$- f(x,\ y, z)]$$

ёки Лагранж формуласига мувофиқ

$$\Delta u = f'_x(x + \theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)\,\Delta x + \\ + f'_y(x,\ y + \theta_2 \Delta y,\ z + \Delta z)\,\Delta y + f'_z(x,\ y,\ z + \theta_3 \Delta z)\,\Delta z.$$

Функциянинг хусусий ҳосилаларини (x, y, z) нуқтада узлуксиз фараз қилиб, кейинги тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta u = \left[f'_x(x, y, z) + \alpha\right]\Delta x + \left[f'_y(x, y, z) + \beta\right]\Delta y + \\ + \left[f'_z(x, y, z) + \gamma\right]\Delta z,$$

бунда α, β, γ — чексиз кичик сонлар.

Чиққан тенгликни:

$$\Delta u = f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z + \\ + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z)$$

равишда ёзганда кўрамизки, Δu орттирманинг бош қисми қуйидагича бўлади:

$$f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z.$$

Бир аргументли функция каби $u = f(x, y, z)$ функция орттирмасининг бош қисми бўлган кейинги ифодани u функциянинг тўла дифференциали дейилади ва у du равишда ишораланади. Иккинчи томондан, юқоридаги йиғиндининг биринчи қўшилувчиси $u = f(x, y, z)$ функциянинг x га нисбатан хусусий дифференциали, иккинчиси y га нисбатан хусусий дифференциали ва учинчиси z га нисбатан хусусий дифференциали бўлади.

Шунинг билан натижада:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

яъни **функциянинг тўла дифференциали унинг хусусий дифференциалларининг йиғиндисига тенгдир.**

Умуман, агарда

$$u = f(x, y, z, \ldots t)$$

бўлса, бу ҳолда

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Мисол 3. Ушбу функциянинг тўла дифференциали топилсин:

$$u = x^3 + y^3 - 2x^2y + 3xy^2.$$

Тўла дифференциал формуласига мувофиқ

$$du = (3x^2 - 4xy + 3y^2)\, dx + (3y^2 - 2x^2 + 6xy)\, dy.$$

Масалалар

Ушбу функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин:

605. $u = 3x^4 + 2x^3y + 5xy^3 - 3x^2y^2.$

Жавоб: $\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^3 + 6x^2y + 5y^3 - 6x^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 + 15xy^2 - 6x^2y.$

606. $u = \frac{xy}{x - y}$.

Жавоб: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{(x - y)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$.

607. $u = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Жавоб:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{xy^2}$$

608. $u = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$.

Жавоб: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2z^2}{(xy + xz + yz)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2z^2}{(xy + xz + yz)^2}$;

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{(xy + xz + yz)^2}.$$

609. $u = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ бўлса, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$ бўлади.

Буни исбот қилинсин,

610. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ бўлса, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

бўлади. Буни исбот қилинсин.

611. $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ бўлса, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} =$

$$= \frac{3}{x+y+z}$$ бўлади. Буни исбот қилинсин.

612. $u = \frac{x^2 - y^2}{y^2 - z^2}$ бўлса, $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

бўлади. Буни исбот қилинсин.

613. $u = x + \frac{x-y}{y-z}$ бўлса, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$ бўлади.

Буни исбот қилинсин.

614. $u = e^{\frac{5x+3y}{z}}$ бўлса, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ бўлади.

Буни исбот қилинсин.

615. Ушбу функцияларнинг тўла дифференциаллари топилсин:

1) $u = \ln \sin \frac{x}{y}$; 2) $u = \operatorname{ars\,tg} \frac{x+y}{x-y}$ 3) $u = xye^{x+2y}$.

Жавоб:

$$1)\ du = \frac{ydx - xdy}{y^2} \operatorname{ctg} \frac{x}{y}, \quad 2)\ du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

$$3)\ du = e^{x+2y}\{y(1+x)\,dx + x(2y+1)\,dy\}.$$

616. Ушбу функциянинг тўла дифференциаллари топилсин:

$$1)\ u = \frac{\operatorname{arc\,tg} y}{1+x^2}; \quad 2)\ u = e^{\frac{x-y}{z}}.$$

Жавоб:

$$1)\ du = -\frac{2x \operatorname{arc\,tg} y\, dx}{(1+x^2)^2} + \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

$$2)\ du = e^{\frac{x-y}{z}} \cdot \frac{z(dx-dy) - (x-y)\,dz}{z^2}.$$

617. Маълумки, агарда учбурчакнинг асосини a ва баландлигини h фараз қилинса, унинг юзи $S = \frac{1}{2}ah$ бўлади. Бундан $\frac{\partial s}{\partial a}$ ва $\frac{\partial s}{\partial h}$ ни топиб, уларнинг геометрик маънолари текширилсин.

618. Маълумки, агарда тўғри доиравий конуснинг баландлиги h ва асосининг радиусини r фараз қилинса, унинг ҳажми $v=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ бўлади. Бундан $\frac{\partial v}{\partial h}$ ва $\frac{\partial v}{\partial r}$ ни топиб, уларнинг геометрик маъноларини текширилсин.

§ 78. МУРАККАБ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1. Фараз қилайлик

$$u=f(x, y) \tag{1}$$

x ва y нинг функцияси ва x, y нинг ҳар бири ўз навбатида t нинг бирор узлуксиз функцияси бўлсин, демак, бу ҳолда u, t нинг мураккаб функцияси бўлади. Буни назарда тутиб, u нинг t га нисбатан ҳосиласини топамиз.

Бунинг учун энг аввал u нинг тўла орттирмасини топишга тўғри келади. t га бирор Δt орттирма бериб, бунинг натижасида ҳосил бўлган x, y, u нинг орттирмаларини тартиб билан Δx, Δy, Δu фараз қиламиз:
Демак,

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига $f(x,\ y+\Delta y)$ дан қўшиш ва айириш натижасида уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)+f(x, y+\Delta y)-f(x, y). \tag{2}$$

Лагранж формуласига мувофиқ:

$$f(x+\Delta x, y+y)-f(x, y+\Delta y)=\Delta x\cdot f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y),$$

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\Delta y\cdot f'_y(x, y+\theta_1\Delta y),$$

буларда θ ва θ_1 0 билан 1 орасидаги сон фараз қилинади.

Кейинги тенгликларга асосан (2) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\Delta u=\Delta x\cdot f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)+\Delta y f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y). \tag{3}$$

Бу тенгликнинг иккала томони Δt га бўлинса:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)+\frac{\Delta y}{\Delta t} f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y) \tag{4}$$

Δt нолга интилган ҳолда Δx, Δy, демак, Δu ҳам нолга интилади ва

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{du}{dt},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt},\ \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)=\frac{dy}{dt}$$

бўлади. Шунинг учун $\Delta t\to 0$ шарти билан лимитга ўтганда, (4) дан ушбу формула келиб чиқади:

$$\frac{du}{dt}=f'_x(x,y)\frac{dx}{dt}+f'_y(x,y)\frac{dy}{dt} \tag{5}$$

ёки хусусий ҳосилаларни бошқача ишора билан ифода қилганда:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{6}$$

Агарда y, t нинг функцияси бўлиб, x оддий аргумент бўлса, у ҳолда бу формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Агарда (6) тенгликнинг иккала томонини dt га кўпайтирилса, функциясининг тўла дифференциали чиқади. Демак,

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{7}$$

Ўзгарувчиларнинг сони ҳар қанча бўлса-да, чиқарилган натижаларнинг ҳар бири ўз кучини сақлайди. Масалан,

$$u=f(x,y,z)$$

ва x, y, z нинг ҳар бири t нинг узлуксиз функцияси бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

ва у функциянинг тўла дифференциали

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

бўлади. Бу формулани, илгари чиқарилган оддий аргументли функциянинг тўла дифференциали билан солиштириб қараганда, уларнинг айнан бир хил тузилганлигини кўрамиз, яъни **функциянинг аргументлари оддий бўлсин ёки бошқа ўзгарувчиларнинг функциялари бўлсин унинг тўла дифференциалининг шакли ўзгармайди.**

Мисол 1. $u = f(x, y) = ax^2 + by$, $x = \ln t$ ва $y = t^3$ фараз қилиб $\frac{du}{dt}$ топилсин.

Ечиш: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax = 2a \ln t$, $\frac{\partial f}{\partial y} = b$; $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$

Буларни (6) га қўйилса $\frac{du}{dt}$ нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2a \ln t}{t} + 3bt^2.$$

Мисол 2. $y = u^v$ фараз қилиб, dy топилсин.

Ечиш: $\frac{\partial y}{\partial u} = vu^{n-1}$, $\frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u$

(7) формулага мувофиқ:

$$dy = vu^{v-1}\, du + u^v \ln u\, dv.$$

Демак, илгари чиқарилган умумий кўрсаткичли функциянинг дифференциаллаш формуласи мураккаб функцияни дифференциаллаш формуласининг хусусий ҳолидан иборатдир.

2*. Юқорида чиқарилган мураккаб функциянинг дифференциаллаш формуласини яна ҳам умумийлаштириш мумкин. Бунинг учун $x, y, z, \ldots$ ни оддий аргумент (эркли ўзгарувчи) фараз қилиб, ушбу функцияни оламиз:

$$u = f(x, y, z, \ldots v, w, t, \ldots) \tag{8}$$

ва бундаги $v, w, t, \ldots$ ларни $x, y, z, \ldots$ нинг функцияси фараз қиламиз. Қўйилган шартларга асосан $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial z}, \ldots$ ҳосилаларни топиш талаб қилинади.

Бунинг учун x га бирор Δx орттирма берамиз. Бунинг натижасида $v, w, t, \ldots$ функциялари ҳам $\Delta v, \Delta w, \Delta t, \ldots$ орттирмаларга эга бўлади.

u функция орттирмаси Δu бўлсин. Демак,

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y, z, \dots v+\Delta v, w+\Delta w, t+\Delta t, \dots) -$$
$$- f(x, y, z, \dots v, w, t, \dots). \tag{9}$$

Айнан, юқорида кўрсатилган йўл билан давом этганда Δu нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial f}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \dots + \varepsilon \tag{10}$$

ва ε бўлса, Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик сондан иборатдир. Шунинг билан баробар

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots$$

ҳосилалар мавжуд фараз қилинади.

(10) тенгликнинг иккала томонини Δx га бўлинса:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x} + \dots + \frac{\varepsilon}{\Delta x}$$

бўлади ва Δx нолга интилганда ушбу натижа келиб чиқади:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\Delta v}\cdot\frac{\partial v}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \dots, \tag{11}$$

чунки ε, Δx га нисбатан юқори тартибли бўлгани учун $\frac{\varepsilon}{\Delta x}$ нолга интилади.

Биз фақат u нинг x га нисбатан ҳосиласини топдик. Айнан шу йўл билан давом этганда u нинг y га ва z га нисбатан ҳосилаларини топиш мумкин. Шунинг билан натижада:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \dots,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \dots,\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z} + \dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Бу тенгламаларнинг биринчисини dx га, иккинчисини dy га ва учинчисини dz га кўпайтириб, уларни қўшамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z} + \dots = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \dots$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\cdots\right)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\cdots\right)+\cdots \tag{13}$$

Тўла дифференциалнинг таърифига мувофиқ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots=du,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\cdots=dv,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\cdots=dw,$$

. . . .

Демак,

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial y}dz+\cdots+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw\cdots,$$

яъни юқорида тўла дифференциал тўғрисида айтилган фикрнинг тўғрилиги исбот бўлади.

§ 79. КЎП АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАРИ

Фараз қилайлик

$$u=f(x, y, z,\ldots t)$$

ва $x, y, z,\ldots t$ эркли ўзгарувчилар бўлсин. Бу функциянинг $x, y, z,\ldots t$ га нисбатан олинган хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z},\ldots \frac{\partial f}{\partial t}$$

умуман айтганда ҳамон $x, y, z,\ldots t$ нинг функцияси бўлади. Шунинг учун бу функциядан $x, y, z,\ldots t$ га нисбатан яна хусусий ҳосила излаш мумкин. Бундай хусусий ҳосилаларни иккинчи тартибли хусусий ҳосила дейилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларни учинчи тартибли хусусий ҳосила дейилади ва шунга ўхшаш.

Масалан, $\frac{\partial f}{\partial x}$ дан x га нисбатан олинган хусусий ҳосилани f дан икки мартаба x га нисбатан олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосила дейилади ва уни

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{ёки} \quad f''_{xx}$$

шаклда ёзилади.

Шунга ўхшаш $\frac{\partial f}{\partial x}$ дан y га нисбатан олинган хусусий ҳосилани f дан олдин x га нисбатан ва кейин y га нисбатан олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосила дейилади ва уни

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{ёки} \quad f''_{xy}$$

шаклда ёзилади: $\frac{\partial f}{\partial x}$ дан z га нисбатан олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосилани f дан олдин x га нисбатан ва кейин z га нисбатан олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосила дейилади ва уни

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \text{ёки} \quad f''_{xz}$$

шаклда ёзилади. Бунга қараганда $\frac{\partial f}{\partial y}$ дан x га, y га ва z га нисбатан олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

ёки

$$f''_{yx}, \quad f''_{yy}, \quad f''_{yz}$$

шаклда ёзилади. Шунга ўхшаш

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

f дан уч мартаба x га нисбатан олинган учинчи тартибли хусусий ҳосилани билдиради ва

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

f дан: олдин x га, кейин y га ва энг сўнг z га нисбатан олинган учинчи тартибли хусусий ҳосилани кўрсатади ва шунга ўхшаш.

Мисол: Мисол учун ушбу функцияни оламиз:

$$f(x, y, z) = 3xy^2 + 5x^2yz^3 - 2x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 + 10\,xyz^3 - 4xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 5x^2\,z^3 - 2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 15x^2\,yz^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 6y + 10xz^3 - 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 6y + 10xz^3 - 4x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 10z^3 - 4$$

ва шунга ўхшаш.

Бизнинг мисолда $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ бўлади. Бу тасодифий бўлмай, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ҳосилалари узлуксиз бўлган ҳолда ҳамма вақт шундай бўлади, яъни дифференциаллаш натижаси дифференциаллаш тартибига (олдин-кейинлигига) боғлиқ эмасдир.

Буни исбот қилиш учун $f(x, y)$ функцияни оламиз. Бундаги x га бирор h орттирма бериб, бунлан ҳосил бўлган функция орттирмасини $\varphi(x, y)$ фараз қиламиз, яъни

$$\varphi(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y). \tag{1}$$

Энди y га бирор h орттирма бериб, $\varphi(x, y)$ функциянинг орттирмасини тузамиз:

$$\varphi(x, y + k) - \varphi(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - \\ - f(x + h, y) + f(x, y). \tag{2}$$

Агарда олдин y га орттирма бериб, $f(x, y)$ нинг орттирмасини $\psi(x, y)$ фараз қилинса, яъни

$$\psi(x, y) = f(x, y + k) - f(x, y), \tag{3}$$

фараз қилинса, у ҳолда $\psi(x, y)$ нинг x га нисбатан орттирмаси қуйидагича бўлади:

$$\psi(x+h, y)-\psi(x, y)=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-$$
$$-f(x, y+k)+f(x, y). \qquad (4)$$

(2) ва (4) ни солиштириб кўриш натижасида ушбу тенглик келиб чиқади;

$$\varphi(x, y+k)-\varphi(x, y)=\psi(x+h, y)-\psi(x, y). \qquad (5)$$

Лагранж формуласига асосан:

$$k\varphi'_y(x, y+\theta k)=h\psi'_x(x+\theta_1 h). \qquad (6)$$

1) ва (3) га мувофиқ:

$$k\left[f'_y(x+h, y+\theta k)-f'_y(x, y+\theta k)\right]=h\left[f'_x(x+\theta_1 h, y+k)-\right.$$
$$\left.-f'_x(x+\theta_1 h, y)\right] \qquad (7)$$

Агарда бу тенгликнинг иккала томонига яна бир мартаба Лагранж формуласини татбиқ қилиб, сўнгра hk га қисқартирилса:

$$f''_{yx}(x+\theta' h,\ \ y+\theta k)=f''_{xy}(x+\theta_1 h,\ \ y+\theta_1 k) \qquad (8)$$

h ва k нинг ҳар бири нолга интилганда $f''_{yx}(x, y)$ ва $f''_{xy}(x, y)$ функциялардаги x ва y нинг орттирмалари ҳам нолга интилади; демак, бу функцияларни x ва y га нисбатан узлуксиз фараз қилганда (8) нинг чап томони лимити $f''_{yx}(x, y)$ ва ўнг томони лимити $f''_{xy}(x, y)$ бўлади. Демак, $f''_{yx}(x, y)=f''_{xy}(x,y)$.

Қўйилган шартга риоя қилганда, умуман ҳосиланинг

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}$$

қиймати фақат ҳар бир ўзгарувчига нисбатан олинган ҳосилаларнинг сонига боғлиқ бўлиб, дифференциаллаш тартибига боғлиқ эмасдир (албатта бу ҳосилалар узлуксиз бўлганда).

Масалалар

619. $u=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ фараз қилиб, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ тенглигининг тўғрилиги исбот қилинсин.

620. Қуйидаги мисолларда $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ тенгликнинг тўғрилиги синаб кўрилсин:

$$a)\ u = \ln(x^2 + y^2), \quad b)\ u = \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$c)\ u = \sin(2x + y) - e^x y^2, \quad d)\ u = \cos\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{\frac{x}{y}}.$$

621. $u = \sqrt{2xy + y^2}$ фараз қилиб, ушбу тенгликнинг

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{y^2(y-x)}{(2xy+y^2)^{5/2}}$$

тўғрилиги исбот қилинсин.

622. Агарда $u = e^x \cos y - e^y \sin x$ бўлса,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y - e^y \cos x$$

бўлади. Буни исбот қилинсин.

623. $u = xe^{ay+bz}$ фараз қилиб, ушбу тенгликларнинг тўғрилиги исбот қилинсин:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = a^2 e^{ay+bz}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = b^2 e^{ay+bz}.$$

624. Фараз қилиб, ушбу тенгликларнинг тўғрилиги синаб кўрилсин:

$$f(x, y, z) = x \sin y + y \sin z + z \sin x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2} \text{ ва } \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$$

625. $u = \frac{y}{y^2 - k^2 x^2}$ фараз қилиб, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ тенгликнинг тўғрилиги синаб кўрилсин.

626. Агарда $u = \ln \frac{x^2 - y^2}{xy}$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right)$$

бўлади. Буни исбот қилинсин.

627. Агарда $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

бўлади. Буни исбот қилинсин.

§ 80. КЎП АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1. Фараз қилайлик

$$u=f(x,\,y) \tag{1}$$

ва x, y нинг ҳар бири эркли ўзгарувчи бўлсин. Бу функциянинг тўла дифференциали бўлган

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2}$$

умуман айтганда ҳамон x, y нинг бирор функцияси бўлади. Шунинг учун du нинг яна тўла дифференциалини излаш мумкин. du дан олинган тўла дифференциални иккинчи тартибли тўла дифференциал дейилади ва уни d^2u равишда ёзилади; d^2u дан олинган тўла дифференциални учинчи тартибли тўла дифференциал дейилади ва d^3u равишда ёзилади ва шунга ўхшаш.

Умуман (1) функциянинг n-тартибли тўла дифференциали учун формула чиқариш мумкин. Тўла дифференциалнинг таърифига мувофиқ:

$$d\,(du)=d^2u=\frac{\partial}{\partial x}(du)\,dx+\frac{\partial}{\partial y}(du)\,dy, \tag{3}$$

dx ва dy нинг ҳар бири эркли ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирмалари бўлгани учун уларнинг ҳеч қайси бири x ё y га берилган қийматга боғлиқ эмасдир, яъни (3) даги дифференциаллашни ижро қилганда dx ва dy ўзгармас миқдор ролида бўлади. Шунинг учун

$$\frac{\partial}{\partial x}(du)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(du)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy.$$

Демак,

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \tag{4}$$

Шу йўл билан давом этганда u нинг учинчи тартибли дифференциали қуйидагича бўлади:

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3. \qquad (5)$$

(4) ва (5) формулаларнинг тузилишига диққат қилганда, уларнинг Ньютон биномининг формуласига ўхшашлигини кўрамиз. Ҳақиқатда агарда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ ни } \frac{\partial}{\partial x}\cdot u \quad \text{каби}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{"} \quad \frac{\partial}{\partial y}\cdot u \quad \text{каби}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{"} \quad \left(\frac{\partial}{dx}\right)^2\cdot u \quad \text{каби}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{"} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\cdot u \quad \text{каби}$$

ёзиб уларни вақтинча кўпайтма маъносида тушунишни шарт қилинса, у ҳолда (4) ва (5) формулаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot u,$$

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot u.$$

Буларга асосланиб, умуман ушбу формулани ёзиш мумкин:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot u. \qquad (6)$$

Бу формула шартли, символик формуладан иборатдир. Шунинг учун

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n,$$

қавсни Ньютон биноми формуласи билан очгандан кейин ҳосил бўлган ҳар бир

$$\frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}}dx^m dy^{n-m} u$$

кўринишдаги ифодани

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}} dx^m dy^{n-m}$$

билан алмаштириш лозим.

2*. Чиқарилган (6) формуланинг тўғрилигини индукция методи билан исбот қилиш мумкин. Бунинг учун уни n нинг бирор қийматида тўғри фараз қилиб, сўнгра унинг $(n+1)$ қийматида ҳам тўғрилигини исбот қиламиз.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n$$

ни бином формуласи бўйича очганда, у қуйидагича бўлади:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n = \sum_{m=0}^{m=n} P_m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-m} dx^m dy^{n-m}, \qquad (7)$$

бунда P_m маълум биномиал коэффициентлардан иборат. $d^n u$ ни оддий (символик эмас) формула бўйича ёйганда, у қуйидагича бўлади:

$$d^n u = \sum_{m=0}^{m=n} P_m \frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}} dx^m dy^{n-m} \qquad (8)$$

$$d^{n+1} u = d\left(d^n u\right).$$

Шунинг учун

$$d^{n+1} u = \sum_{m=0}^{m=n} P_m dx^m dy^{n-m} d\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right), \qquad (9)$$

чунки дифференциаллашда dx ва dy ўзгармас ҳисоб қилинади. Иккинчи томондан:

$$d\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right) = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{m+1} \partial y^{n-m}} dx + \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^m \partial y^{n-m+1}} dy.$$

Демак,

$$d^{n+1} u = \sum_{m=0}^{m=n} P_m dx^m dy^{n-m} \left(\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{m+1} \partial y^{n-m}} dx + \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^m \partial y^{n-m+1}} dy\right)$$

ёки символик шаклда:

$$d^{n+1}u = \sum_{m=0}^{m=n} P_m dx^m dy^{n-m} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) u,$$

ёки

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) \sum_{m=0}^{m=n} P_m dx^m dy^{n-m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-m} u,$$

ёки (7) га асосан:

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u$$

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} u.$$

Демак, (6) формула n нинг бирор қийматида тўғри бўлган ҳолда $(n+1)$ да ҳам ўз кучини сақлайди. Иккинчи томондан, $n = 1, 2, 3$ бўлганда унинг тўғрилиги синаб кўрилган эди. Шунинг учун n қандай бўлса-да, чиқарилган формула тўғри бўлади.

(6) формулани чиқаришда эркли ўзгарувчиларнинг сони иккита фараз қилинган эди. Агарда улар бир неча бўлиб, $x, y, z, \ldots t$ дан иборат бўлса, яъни

$$u = f(x, y, z, \ldots t)$$

бўлса, у ҳолда (6) га ўхшаш, формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial}{\partial t}dt\right)^n u. \quad (10)$$

3*. Юқорида чиқарилган формулада $x, y, z, \ldots t$ нинг ҳар бири эркли ўзгарувчи фараз қилинган эди. Энди мураккаб функцияни оламиз. Фараз қилайлик

$$u = f(p, q) \quad (11)$$

ва p, q ўз навбатида $x, y, \ldots$ нинг функцияси бўлсин. Бу функциянинг 1-тартибли дифференциали

$$du = \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq$$

бўлади. Бу ифодадан олинган тўла дифференциални берилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали дейилади. Дифференциаллашда dp ва dq нинг ўзгарувчилиги назарда тутилиши лозим, чунки p ва q нинг ҳар бири функция фараз қилинади. Шунинг учун

$$\frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \text{ва} \quad \frac{\partial f}{\partial q}dq$$

нинг ҳар бири бу ҳолда икки функциянинг кўпайтмасидан иборатдир. Демак,

$$d^2u = d\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)dp + \frac{\partial f}{\partial p}d(dp) + d\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)dq + \frac{\partial f}{\partial q}d(dq) =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}dp + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}dq\right]dq + \frac{\partial f}{\partial p}d^2p + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}dp + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}dq\right]dq + \frac{\partial f}{\partial q}d^2q.$$

Қавсларни очиб, соддалаштириш натижасида ушбу формула келиб чиқади:

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}dp^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}dpdq + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial f}{\partial p}d^2p + \frac{\partial f}{\partial q}d^2q$$

ёки

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial p}dp + \frac{\partial}{\partial q}dq\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial p}d^2p + \frac{\partial f}{\partial q}d^2q. \qquad (12)$$

Шунинг билан мураккаб функциянинг юқори тартибли тўла дифференциали оддий функциянинг шу тартибли тўла дифференциалига ўхшамайди. Бироқ p ва q функциялари x, y, ... га нисбатан биринчи даражали функция бўлгани ҳолда формуланинг кўриниши бир хил бўлади, яъни бу ҳолда ҳам (6) формула ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатда,

$$p = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$q = a_2x + b_2y + c_2z$$

бўлсин; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 ўзгармас сонлардан иборат. Бу ҳолда

$$dp = a_1dx + b_1dy + c_1dz$$

$$dq = a_2dx + d_2dy + c_2dz.$$

Бу ифодаларнинг ўнг томонлари ўзгармас сонлардан иборат бўлгани учун

$$d^2p = 0, \quad d^2q = 0$$

бўлиб, (12) формуланинг кейинги икки ҳади йўқолиб кетади.

§ 81. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

1. Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

тенглама берилган бўлсин ва унда y x нинг ошкормас функцияси бўлсин.

(1) тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин бўлган ҳолда y дан x га нисбатан y', y'', y''', ... ҳосилаларни белгили қоида бўйича топиш мумкин. Фараз қилайлик, (1) тенгламани y га нисбатан ечиш қийин бўлсин ёки мумкин бўлмасин. Бундай ҳолда, яъни (1) тенгламани y га нисбатан ечмасдан ҳам y дан x га нисбатан y', y'', y''', ... ҳосилаларни топиш мумкин.

(1) тенгламада y x нинг функцияси бўлгани учун $f(x, y)$ нинг ўзи x нинг мураккаб функцияси бўлади. Агарда (1) тенгламани y га нисбатан ечиб, y учун аниқланган ифодани қайтиб (1) тенгламага қўйилса, тенгламани айнан қаноатлантирган бўламиз. Шунинг учун агарда $f(x, y)$ функциядаги y ни $f(x, y)=0$ тенгламадан аниқланган x нинг функцияси фараз қилинса, у ҳолда $f(x, y)$ функция айнан нолга тенг бўлади, демак,унинг x га нисбатан олинган ҳосилалари ҳам ноль бўлади.

Қилинган фаразияни назарда тутиб, (1) ни дифференциаллаш натижасида ушбу ифода келиб чиқади:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y} y'=0, \tag{2}$$

бундан:

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right). \tag{3}$$

Иккинчи тартибли y'' ҳосилани топиш учун (2) ни яна бир мартаба дифференциаллаш керак. Бу ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2+\frac{\partial f}{\partial y} y''=0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2+\frac{\partial f}{\partial y} y''=0. \tag{4}$$

Бундаги y' ўрнига (3) дан қийматини қўйиб, сўнгра (4) дан y'' ни аниқлаш мумкин. Шу йўл билан давом этиб, y''', y^{IV}, ... ҳосилаларни топиш мумкин.

Мисол учун ушбу

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

функциянинг y', y'', y''' тартибли ҳосилаларини топамиз.

1-усул

Берилган мисолда

$$f(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2.$$

Шунинг учун

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2y.$$

Буларни (3) формулага қўямиз. Бу ҳолда:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y};$$

y'' ни топиш учун (5)ни яна бир мартаба дифференциаллаймиз:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2(y - xy')}{a^2y^2}$$

бундаги y' нинг ўрнига (5) дан унинг қиймати қўйилса

$$y'' = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}$$

ёки берилган тенгламага асосан:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}. \tag{6}$$

Буни дифференциаллаш натижасида

$$y''' = \frac{3b^4\cdot y^4}{a^2\cdot y^4}$$

бўлади ва бунга y' нинг қиймати қўйилса y''' қуйидагича бўлади:

$$y''' = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}. \tag{7}$$

2-усул

y ни x нинг функцияси фараз қилиб, берилган тенгламани дифференциаллаймиз:

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0 \tag{8}$$

бундан

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

(8) ни яна бир мартаба дифференциаллаймиз:

$$b^2 + a^2yy'' + a^2y'^2 = 0$$

бунга y' нинг қийматини қўямиз:

$$a^2b^2y^2 + a^4y^3y'' + b^4x^2 = 0, \tag{9}$$

бундан

$$y'' = -\frac{b^4x^2 + a^2b^2y^2}{a^4y^3} = -\frac{b^2(b^2x^2 + a^2y^2)}{a^4y^3}$$

ёки

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

y''' ни топиш учун (9) ни яна бир мартаба дифференциаллаймиз. Бу ҳолда:

$$2a^2b^2yy' + 3a^4y^2y'y'' + a^4y^3y''' + 2b^4x = 0$$

бунга y' ва y'' нинг қийматлари қўйилса

$$-2b^4xy^2 + 3b^6x + a^4y^5y''' + 2b^4xy^2 = 0$$

ёки

$$3b^6x + a^4y^5y''' = 0,$$

бундан

$$y''' = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}.$$

2*. Биз юқорида $f(x, y) = 0$ тенгламада y ни x нинг функцияси фараз қилиб, мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидаси билан

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

тенгламани тузиб, $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ фаразия билан y' ни топган эдик. Ҳолбуки, y нинг x функцияси бўлиши ва y' ҳосиланинг мавжудлиги бизга номаълумдир. Буларни маълум шартлар мавжуд бўлгандагина тасдиқлаш мумкин. Шунинг учун биз бу ерда шу тўғридаги ушбу теоремани исбот қилишни лозим топамиз:

Теорема *$f(x, y)=0$ тенглама берилган бўлсин; агарда (x_0, y_0) нуқтада 1) $f(x_0, y_0)=0$ бўлса, 2) $x=x_0$, $y=y_0$ га қўшни бўлган қийматларда $f(x, y)$ функция ва унинг $f'_x(x, y)$ ва $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлса ва 3) $f'_y(x_0, y_0)$ нолга тенг бўлмаса, у ҳолда $f(x, y)=0$ тенгламани қаноатлантирадиган биргина $y=\varphi(x)$ функция мавжуд бўлади ва $x=x_0$ бўлганда $y=y_0$ бўлади. Бу функция x нинг x_0 га етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматларида узлуксиз бўлиб, $x=x_0$ нуқтада ҳосилага эга бўлади.*

Бу теоремани исбот қилиш учун (x_0, y_0) ни $f(x, y)=0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқта фараз қиламиз: $f(x_0, y_0)=0$; h ва k шундай мусбат сонлар бўлсинки, f'_x (x_0-h, x_0+h) интервалда ва f'_y (y_0-k, y_0+k) интервалда узлуксиз бўлсин (теореманинг шартига мувофиқ бу мумкин); h ва k сонлари шундай кичик бўлсинки, ҳалиги интервалларда f'_y, $f'_x(x_0, y_0)\neq 0$ нинг ишорасини сақлай олсин (f'_y узлуксиз бўлгани учун шундай фаразияни қилиш мумкин).

Қўйилган шартларга асосан, шундай мусбат a сонни топиш мумкинки, юқорида кўрсатилган интервалларда

$$\frac{|f'_y|}{|f'_x|}>a \quad \text{ёки} \quad |f'_y|>a|f'_x|$$

h ни ҳар қандай кичик қилиб олиш мумкин; шунинг учун агарда $h<ka$ фараз қилинса, у ҳолда

$$h|f'_x|<ka|f'_x|<k|f'_y|. \tag{11}$$

Агарда ξ ва η сонларни

$$-h\leqslant\xi\leqslant+h, \quad -k\leqslant\eta\leqslant+k \tag{12}$$

фараз қилинса, бу ҳолда $x=x_0+\xi$ ва $y=y_0+\eta$ юқорида кўрсатилган интервалларда бўлади. Энди бундай айният тузамиз;

$$f(x_0+\xi, y_0+\eta)-f(x_0, y_0)=[f(x_0+\xi, y_0+\eta)-$$

$$-f(x_0, y_0 + \eta)] + [f(x_0, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0)].$$

$f(x_0, y_0) = 0$ бўлишини назарда тутиб, бу тенгликнинг ўнг томонига Лагранж формуласи татбиқ қилинса:

$$f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = \xi f'_x(x_0 + \theta\xi, y_0 + \eta) + \eta f'_y(x_0, y_0 + \theta'\eta) \quad (13)$$

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1.$$

Агарда бу формулада $\eta = \pm k$ фараз қилиб, (11) тенгсизликни эътиборга олинса, у ҳолда ξ нинг $-h$ билан $+h$ орасидаги ҳар бир қийматида (13) нинг ўнг томонидаги ифоданинг биринчи ҳадининг абсолют қиймати иккинчисининг абсолют қийматидан кичик бўлади. Шунинг учун (13)да ўнг томонининг ишораси ундаги иккинчи ҳадининг ишораси каби бўлади.

Бироқ агарда бир мартаба $\eta = +k$ ва иккинчи мартаба $\eta = -k$ фараз қилинса, у ҳолда ҳалиги иккинчи ҳадининг ишорасини ўзгартиради. Шунинг учун $f(x_0 - \xi, y_0 + \eta)$ да ξ ни ўзгартмай, уни η нинг функцияси ҳисоб қилинса, бу ҳолда теорема шартига мувофиқ у узлуксиз бўлади ва иккинчи томондан $\eta = +k$ ва $\eta = -k$ да ишоралари ўзгариб тескари бўлади. Демак, у η нинг $-k$ ва $+k$ орасидаги бирор $\eta = k'$ қийматида нолга айланади, яъни

$$f(x_0 + \xi, y_0 + k') = 0,$$

η нинг k' каби қиймати $(y_0 - k, y_0 + k)$ интервалда ёлғиз биргина бўлади, чунки бу интервалда f'_y ишорасини сақлайди, демак, $f(x_0 + \xi, y)$ ё доимо ўсувчи, ё доимо камаювчи функция бўлади.

Шунинг билан x нинг ҳар бир $x = x_0 + \xi$ қийматига y нинг биргина шундай $y = y_0 + \eta$ қиймати тўғри келадики, улар $f(x, y) = 0$ тенгламани қаноатлантиради. Бу қийматлар $f(x, y) = 0$ тенгламани айнан қаноатлантирадиган бирор $y = \varphi(x)$ функциясини ташкил қилади.

Бу функция узлуксиз бўлади, чунки $f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = 0$ тенглама ёки

$$\xi f'_x(x_0 + \theta\xi, y_0 + \eta) + \eta f'_y(x_0, y_0 + \theta'\eta) = 0 \quad (14)$$

тенгламада ξ нолга интилганда η ҳам нолга интилади, чунки

$$f'_y \neq 0.$$

Шунинг билан баробар бу функция ҳосилага эгадир. Ҳақиқатда (14) дан

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\eta}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f'_x(x_0+\theta\xi,\ y_0+\theta'\eta)}{f'_y(x_0,\ y_0+\theta'\eta)}=-\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{f'_y(x_0,\ y_0)},$$

чунки функция узлуксиз бўлгани учун ξ нолга интилганда η ҳам нолга интилади (ξ, x нинг ва η нинг орттирмаси ҳисоб қилинади).

Теореманинг шарти бўйича f'_x ва f'_y узлуксиз ва $f'_y\neq 0$ бўлгани учун y' функция ҳам узлуксиз бўлади.

3*. Юқорида исбот қилинган теоремани умумлаштириш мумкин. Агарда

$$f(x,\ y,\ z,\ \ldots u)=0$$

тенгламани ўзгарувчиларнинг x_0, y_0, z_0, $\ldots u_0$ қийматлари қаноатлантирса, бу қийматларга қўшни бўлган қийматларда $f(x,\ y,\ z,\ \ldots u)$ функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд ва узлуксиз бўлса ва $f'_u\neq 0$ бўлса, у ҳолда u x, y, z, $\ldots$ нинг функцияси бўлади ва у функция биринчи тартибли хусусий узлуксиз ҳосилаларга эга бўлади.

Бу ҳосилаларни топиш (15) тенгламани қуйидагича дифференциаллаш билан бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \ldots$$

Буларнинг исботи айнан юқоридаги йўл билан бўлади.

Мисол учун фараз қилайлик, бизга ушбу

$$f(x,\ y,\ z)=0 \tag{A}$$

тенглама берилган бўлсин ва бундан

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

ҳосилаларни топиш керак бўлсин. Қисқа бўлсин учун:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p;\ \frac{\partial z}{\partial y}=q;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t \tag{B}$$

фараз қилиб, берилган тенгламанинг иккала томонидан x га ва y га нисбатан хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0. \tag{16}$$

Булардан биринчисини x га нисбатан ва иккинчисини y га нисбатан дифференциаллашда ушбу тенгламалар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}p+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}p^2+\frac{\partial f}{\partial z}r=0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}q+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}q^2+\frac{\partial f}{\partial z}t=0.\end{aligned}\right| \tag{C}$$

(16) тенгламалардан p ва q ни аниқлаб, буларга қўйгандан сўнгра r ва t га нисбатан ечилса, улар учун қуйидаги ифодалар келиб чиқади:

$$r=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-3}\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix},\quad t=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-3}\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}.$$

Шунга ўхшаш, (16) тенгламанинг биринчисини y га нисбатан ёки иккинчисини x га нисбатан дифференциаллаш натижасида, юқоридаги каби, s ни аниқлаш мумкин.

$$s=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-3}\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}.$$

4*. Фараз қилайлик, бизга ушбу n тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t)=0,\\ &\varphi_2(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_n(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t)=0\end{aligned}\right| \tag{17}$$

ва бу тенгламалар билан t нинг n функцияси, $x, y, z, \ldots$ аниқлансин. Агарда $x, y, z, \ldots$ ларнинг ҳаммасини t орқали аниқлаб, уларнинг ифодаларини қайтиб $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ га қўйилса, у тенгламаларнинг чап томонлари айнан нолга айланади. Бу ҳолда уларнинг t га нисбатан олинган ҳосилалари ҳам нолга айланади. Шунинг учун:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\cdots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0, \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\cdots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\cdots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=0.
\end{array}\right\} \quad (18)$$

Бу тенгламалардаги $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \ldots$ ларнинг олдиларидаги коэффициентларидан тузилган ушбу детерминант

$$D=\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, & \ldots \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial z}, & \ldots
\end{vmatrix} \neq 0$$

яъни нолга тенг бўлмагани ҳолда, юқоридаги системадан

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \ldots$$

ҳосилаларни аниқлаш мумкин.

Мисол учун ушбу тенгламалар системасини олиб:

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \quad x+y+z-a=0,$$

булардан $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{dz}{dx}$ ни топамиз. Бунинг учун берилган тенгламаларнинг иккала томонидан x га нисбатан ҳосила оламиз

$$x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0;$$

булардан иккинчисининг иккала томонини z га кўпайтириб, $\frac{dz}{dx}$ ни йўқ қиламиз. Бу ҳолда:

$$x - z + (y - z)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Шунга ўхшаш

$$x - y + (z - y)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Бу тенгламалардан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - z}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}.$$

§ 82*. ФУНКЦИОНАЛ ДЕТЕРМИНАНТ ТЎҒРИСИДА

Фараз қилайлик, аргументларининг сони n бўлган $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ ушбу n функция берилган бўлсин:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n).$$

Бу функцияларнинг ҳамма аргументларига нисбатан олинган хусусий ҳосилалардан тузилган ушбу детерминантни:

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

функционал детерминант ёки якобиан дейилади ва уни одатда

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n}{x_1, x_2, \dots x_n}\right)$$

равишда ишораланади. Кўп аргументли функцияларни текширишда бу детерминант катта роль ўйнайди.

Функционал детерминант бирмунча хоссаларга эга бўлиб, уларнинг асосийлари қуйидагилардан иборатдир:

1. Аргументларининг сони n бўлган ушбу n функцияларнинг

$$\varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n), \ \varphi_2(x_1, x_2, \dots x_n), \ \dots \ \varphi_n(x_1, x_2, \dots x_n)$$

орасида айний муносабат бўлиши учун у функцияларнинг функционал детерминанти айнан нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир.

Биз бу ўринда қўйилган шартнинг лозимлигини исбот қилиш билан чегараланамиз. Фараз қилайлик берилган $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ функцияларнинг орасида ушбу айний муносабат мавжуд бўлсин:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n) = 0. \tag{1}$$

Бу айниятни $x_1, x_2, x_n \dots x_n$ га нисбатан дифференциаллаш натижасида ушбу n айният ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n}\cdot\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n}\cdot\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} = 0, \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n}\cdot\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0,
\end{array}\right\} \tag{2}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ функциялар $x_1, x_2, \dots x_n$ аргументларга боғлиқ бўлгани учун уларнинг бу аргументларга нисбатан хусусий ҳосилалари бир вақтда нолга тенг бўла олмайди, шунга ўхшаш

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \ \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}, \ \dots \ \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}$$

ҳам бир вақтда нолга тенг бўла олмайди.

Иккинчи томондан (2) система $\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}$ га нисбатан биржинсли бўлган биринчи даражали тенгламалар системасидан иборатдир. Шунинг билан $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ функциялар орасида (1) айний муносабат мавжуд бўлгани ҳолда, бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}$ лар (2) системани қаноатлантиради. Бу эса фақат

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

бўлган ҳолдагина бўлади.

2. Функционал детерминантнинг иккинчи асосий хоссасини чиқариш мақсади билан ушбу

$$\varphi_1(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n),$$
$$\varphi_2(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n),$$
$$\varphi_n(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$$

функциялар системасини олиб, булардаги $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ ларни ўз навбатида $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ларнинг функцияси фараз қиламиз. Бу ҳолда функционал детерминантнинг иккинчи асосий хоссаси ушбу тенглик билан ифода қилинади:

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) = D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n}{u_1, u_2, \ldots u_n}\right) D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right). \qquad (4)$$

Ҳақиқатда, чапдан бошлаб бу тенгликдаги функционал детерминантларнинг элементлари қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k}; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \quad (i, k = 1, 1, 2, \ldots n).$$

Иккинчи томондан, мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича:

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_k}$$

бўлади; шунинг учун детерминантларни кўпайтириш теоремасини татбиқ қилиш натижасида (4) формула келиб чиқади. Бу формула мураккаб функция ҳосиласи тўғрисидаги теоремани эсга келтиради.

3. Функционал детерминантнинг учинчи асосий хоссасини чиқариш учун (4) тенгликда:

$$x_1 = \varphi_1, \ x_2 = \varphi_2, \dots x_n = \varphi_n$$

фараз қиламиз. Бу ҳолда (4) формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n}{n_1, u_2, \dots u_n}\right) \cdot D\left(\frac{u_1, u_2, \dots u_n}{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n}\right) = 1, \tag{5}$$

яъни $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ дан $u_1, u_2, \dots u_n$ га нисбатан якобиан $u_1, u_2, \dots u_n$ дан $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_u$ га нисбатан якобианга тескари бўлади.

Бу формула тескари функция ҳосиласи тўғрисидаги теоремани эсга туширади. Албатта бу ўринда тескари функцияларнинг мавжудлиги фараз қилинади.

§ 83. БИРЖИНСЛИ ФУНКЦИЯЛАР. ЭЙЛЕР ТЕОРЕМАСИ

Агарда $f(x, y, z, \dots)$ функция шундай хоссага эга бўлсаки

$$f(tx, ty, tz, \dots) = t^m f(x, y, z, \dots) \tag{1}$$

шарт таъмин этилса, яъни функциянинг ҳар бир аргументини бирор t сонга кўпайтиришдан чиққан натижа шу соннинг бирор даражасини берилган функцияга кўпайтмасига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y, z, \dots)$ функцияни биржинсли функция дейилади ва m ни биржинсли функциянинг даражаси дейилади.

Мисол учун ушбу функцияни оламиз:

$$f(x, y, z) = ax^2 y + by^3 - \frac{z^4}{x}.$$

Бу мисолда:

$$f(tx, ty, tz) = at^3x^2y + bt^3y^3 - \frac{t^4z^4}{tx} = t^3 f(x, y, z),$$

демак, бу функция учинчи даражали биржинсли функция бўлади.

Фараз қилайлик $f(x, y, z, \ldots)$ даражаси m га тенг бўлган биржинсли функция бўлсин, яъни

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots).$$

Бунда t ҳар қандай қийматга эга бўла олади. Шунинг учун $t = \frac{1}{x}$ фараз қилинса

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = \frac{1}{x^m} f(x, y, z, \ldots),$$

бундан

$$f(x, y, z, \ldots) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Агарда

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right)$$

фараз қилинса, бу ҳолда

$$f(x, y, z, \ldots) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Бу тенглик биржинсли функциянинг асосий хоссаларидан бирини ифода қилади. Бунга қараганда: ҳар бир m-даражали биржинсли функция — ўзгарувчилардан бирининг m-даражасини, қолганларининг шу ўзгарувчига нисбатидан иборат бўлган иброр функцияга кўпайтмасига тенгдир.

Агарда (1) тенгликда

$$tx = x_1, \ ty = y_1, \ tz = z_1 \ldots \tag{2}$$

фараз қилинса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots). \tag{3}$$

Агарда бу тенгламадаги $x_1, y_1, z_1, \ldots$ нинг ўрнига (2) дан уларнинг ифодалари қўйилса, бу тенглама айниятга айланади. Шунинг учун (3) айниятнинг иккала томонидан t га нисбатан ҳосила олинса, у қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial t} + \cdots = mt^{m-1} f(x, y, z \ldots).$$

Иккинчи томондан:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x, \ \frac{\partial y_1}{\partial t} = y, \ \frac{\partial z_1}{\partial t} = z, \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x + \frac{\partial f}{\partial y_1} y + \frac{\partial f}{\partial z_1} z + \dots = mt^{m-1} f(x, \ y, z, \dots). \qquad (4)$$

Агарда $t = 1$ фараз қилинса, у ҳолда (2) га асосан:

$$x_1 = x, \ y_1 = y, \ z_1 = z, \dots$$

бўлиб, (4) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z + \dots = mf(x, \ y, z, \dots). \qquad (5)$$

Бу формула **Эйлернинг** биржинсли функция тўғрисидаги теоремасини ифода қилади. Бунга қараганда: **агарда биржинсли функциянинг тўла дифференциалида эркли ўзгарувчиларнинг дифференциалларини эркли ўзгарувчиларнинг ўзлари билан алмаштирилса, у ҳолда берилган функциянинг биржинсли даражасини биржинсли функция билан кўпайтмасига тенг.**

Бу теоремани синаш учун юқорида мисол учун кўрсатилган функцияни оламиз:

$$f(x, \ y, z) = ax^2y + by^3 - \frac{z^4}{x}.$$

Бу мисолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2axy + \frac{z^4}{x^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = ax^2 + 3by^2, \ \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4z^3}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = \left(2ax^2y + \frac{z^4}{x}\right) + (ax^2y + 3by^3) - \frac{4z^4}{x} =$$

$$= 3\left(ax^2y + by^3 - \frac{z^4}{x}\right) = 3f(x, \ y, z).$$

Масалалар

Ушбу функцияларнинг иккинчи тартибли тўла дифференциали топилсин:

628. $u = x\sin^2 y$.

Жавоб: $d^2u = 2\sin 2y\,dxdy + 2x\cos 2y\,dy^2$.

629. $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Жавоб: $d^2u = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\left[(xdx + ydy)^2 (ydx - xdy)^2\right]$.

630. $u = e^{xy} - xy$.

Жавоб: $d^2u = e^{xy}(ydx + xdy)^2 + 2\left(e^{xy} - 1\right)dxdy$.

Ушбу функцияларнинг учинчи тартибли тўла дифференциали топилсин:

631. $u = x^3 + a^{x+y}$.

Жавоб: $d^3u = 6dx^3 + a^{x+y}(\ln a)^3\,(dx + dy)^3$.

632. $u = xyz$.

Жавоб: $d^3u = 6\,dx\,dy\,dz$.

Ушбу ошкормас функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари топилсин:

633. $2ay^2 - y^2 + 2x = 0$.

Жавоб: $y' = -\frac{1}{y - 3ay^2}$; $y'' = -\frac{1-6ay}{(y-3ay^2)^3}$.

634. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Жавоб: $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$; $y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$.

635. $xe^y - y + 1 = 0$.

Жавоб: $y' = \frac{e^y}{2-y}$; $y'' = \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.

636. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Жавоб: $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; $y'' = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{3x\sqrt[3]{xy}}$.

637. $x + \operatorname{arc\,tg} y - y = 0$.

Жавоб: $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$; $y'' = -\frac{2+2y^2}{y^5}$.

638. $x + y = e^{x-y}$.

Жавоб: $y' = -\frac{1-x-y}{1+x+y}$, $y'' = \frac{4(x+y)}{(1+x+y)^3}$.

639. $z^3 + 3x^2z - axy = 0$, dz топилсин.

Ечиш йўли: $f(x, y, z) = z^3 + 3x^2 z - axy = 0$ фараз қилинса,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Берилган мисолда:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xz - ay;\ \frac{\partial f}{\partial y} = -ax;\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 = 3x^2;$$

шунинг учун:

$$(6xz - ay)dx - axdy + 3(a^2 + z^2)dz = 0,$$

бундан

$$dz = \frac{ay - 6xz}{3(x^2+z^2)}dx + \frac{ax}{3(x^2+y^2)}dy.$$

640. $x\sin z + y\cos z - e^z = 0$; dz топилсин.

Жавоб: $dz = \frac{\sin z\,dx + \cos z\,dy}{(x+y)\sin z + (y-x)\cos z}$.

641. $(2z+3)^3 = xy$; dz топилсин.

Жавоб: $dz = \frac{xdx + ydy}{2\sqrt[3]{(xy)^2}}$.

642. Ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ тенглама билан аниқланган z функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин:

Жавоб: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

643. Ушбу $z^3+3xyz=a^3$ тенглама билан аниқланган z функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

Жавоб:
$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{z^2+xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{z^2+xy};\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy^3z}{(z^2+xy)^3};\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(x^2y^2-2xyz^2-z^4}{(z^2+xy)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^3yz}{(z^2+xy)^3}.\end{cases}$$

644. Ушбу $e^z\cos x-\cos y=0$ тенглама билан аниқланган z функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин:

Жавоб: $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\operatorname{tg}y$.

645. Ушбу $\ln(x+y+z)-z=0$ тенглама билан аниқланган z функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин:

Жавоб :
$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1};\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.\end{cases}$$

646. $f(x,y,z)=0$ тенгламада z ни x ва y нинг ошкормас функцияси фараз қилиб, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалари аниқлансин.

Жавоб: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}$.

647. $xy + zu - a = 0$, $x + y - (z + u)b = 0$ тенгламалардан dz ва du топилсин.

Жавоб: $$\begin{cases} dz = \dfrac{by + z}{b(z - u)}dx + \dfrac{bx + z}{b(z - u)}dy; \\ du = -\dfrac{by + u}{b(z - u)}dx - \dfrac{bx + z}{b(z - u)}dy. \end{cases}$$

648. $xu + yv = axy$ ва $xv + yu = b$ тенгламалар системасидан $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ хусусий ҳосилалари топилсин.

Жавоб: $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2yv}{x^2 - y^2}; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{ax^2 - xv + yu}{x^2 - y^2}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{yu - xv - ay^2}{x^2 - y^2} \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{2xu}{x^2 - y^2}. \end{cases}$$

649. $x = v^2 \cos u$, $y = u \sin v$ тенгламалар системасидан $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ хусусий ҳосилалари топилсин.

Жавоб: $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-u \operatorname{ctg} v}{2v \cos u + uv^2 \sin u \operatorname{ctg} v}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2}{2 \sin v + uv \cos v \operatorname{tg} u}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{2v \cos u + uv^2 \sin u \operatorname{ctg} v}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{v \operatorname{tg} u}{2 \sin v + uv \cos v \operatorname{tg} u}. \end{cases}$$

650. $f(x, y, z) = 0$ ва $\varphi(x, y, z) = 0$ тенгламалар системасида y ва z ни x нинг функцияси фараз қилиб, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ ва $\dfrac{dz}{dx}$ ифодалари топилсин.

Жавоб: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}};$$

Жавоб: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$.

651. Ушбу тенгламалар системасидан

$$x+y+z+u=a,$$
$$x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,$$
$$x^3+y^3+z^3+u^3=c^3,$$

$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{du}{\partial x}$ ифодалари топилсин.

Жавоб: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)}$; $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)}$;

$$\frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-x)}{(z-u)(y-u)}.$$

Ушбу мисолларда Эйлернинг биржинсли функциялрa тўғрисидаги теоремаси синаб кўрилсин:

652. $u=x^3+y^3-x^2y$.

653. $u=\dfrac{x^2y+y^2z+z^2x}{x+y+z}$.

654. $u=e^{\frac{x}{y}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

655. $u=\dfrac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Саккизинчи боб

ЎЗГАРУВЧИЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Кўп вақт дифференциал ифодалардаги, яъни дифференциал ёки ҳосила қатнашган ифодалардаги ўзгарувчиларни улар билан белгили муносабатда бўлган янги ўзгарувчиларга алмаштиришга тўғри келади. Бу масалада мавжуд бўлган асосий ҳоллар қуйидагилардан иборат.

§ 84. ЭРКЛИ ЎЗГАРУВЧИНИ АЛМАШТИРИШ

Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) \tag{1}$$

кўринишда бирор математик ифода берилган бўлсин ва унда x эркли ўзгарувчи, y унинг функцияси бўлсин. Шунинг билан баробар x нинг ўрнига эркли ўзгарувчи қилиб бирор янги ўзгарувчини, масалан t ни, қабул қилиш лозим бўлсин. Албатта x билан t нинг ўзаро қандай муносабатдалиги берилиши керак. Фараз қилайлик, бу муносабат қуйидагича бўлсин:

$$x = \varphi(t) \tag{2}$$

(1) ифодага x нинг ўрнига $\varphi(t)$ қўйгандан сўнгра

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots \ \frac{d^ny}{dx^n}$$

ҳосилаларни

$$\frac{dy}{dt}, \ \frac{d^2y}{dt^2}, \ \ldots \ \frac{d^ny}{at^n}$$

ҳосилалар билан ифода қилишга тўғри келади, яъни y дан x га нисбатан олинган ҳосилаларни y дан t га нисбатан олинган ҳосилалар билан ифода қилишга тўғри келади. Изланмоқда бўлган биринчи тартибли ҳосила жуда осонлик билан топилади. Ҳақиқатда:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

чунки (2) дан

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t).$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ни аниқлаш учун (3) нинг иккала томонидан x га нисбатан ҳосила олиб, сўнгра қуйида кўрсатилганча давом қиламиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2}-\varphi''(t)\frac{dy}{dt}}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{4}$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\varphi'(t)\left(\varphi'(t)\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{dy}{pt}\varphi'''(t)\right)-3\varphi''(t)\left(\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\varphi''(t)\right)}{[\varphi'(t)]^5}. \tag{5}$$

Юқорида кўрсатилган йўл билан давом этганда y дан x га нисбатан олинган ҳар қандай тартибли ҳосилани y дан t га нисбатан олинган ҳосилалар билан ифода қилиш мумкин.

Агарда y ни эркли ўзгарувчи қабул қилиб, x ни функция қилинса, у ҳолда чиқарилган формулаларда dy ни ўзгармас фараз қилишга тўғри келади. Шунинг учун $d^2y=0$, $d^3y=0$ бўлади. Демак, бу ҳолда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};\tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\varphi''(t)\frac{dy}{dt}}{[\varphi'(t)]^3}=-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=-\frac{d^2x\,dy}{dx^3}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3};\tag{7}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\varphi'(t)\cdot\varphi'''(t)\,\frac{dy}{dt}+3\,[\varphi''(t)]^2\,\frac{dy}{dt}}{[\varphi'(t)]^5}=$$

$$=\frac{-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\cdot\frac{dy}{dt}+3\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2\frac{dy}{dt}}{[\varphi'(t)]^5}=\frac{[-dx\cdot d^3x+3(d^2x)^2]\,dy}{dx^5}=$$

$$=\frac{-\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

Шунинг билан натижада:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}+3\left(\frac{d^2x}{xy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.\tag{8}$$

Шу йўл билан давом этганда y дан x га нисбатан олинган ҳар қандай тартибли ҳосилаларни x дан y га нисбатан олинган ҳосилалар билан ифода қилиш мумкин.

Мисол. $x=e^t$ муносабатнинг ёрдами билан ушбу

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

тенгламадаги эркли ўзгарувчи x ни t га алмаштирилсин.

Берилган мисолда $\varphi(t) = e^t$ бўлгани учун

$$\varphi'(t) = \varphi''(t) = e^t$$

бўлади. Шунинг учун (3) ва (4) формулаларга мувофиқ:

$$\frac{dy}{dx} = e^t \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^t \frac{d^2y}{dt^2} - e^t \frac{dy}{dt}}{e^{3t}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{e^{2t}}.$$

Буларни берилган тенгламага қўйилса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

§ 85. ФУНКЦИЯНИ АЛМАШТИРИШ

Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$F\left((x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) \qquad (1)$$

кўринишда бирор математик ифода берилган бўлсин ва унда x эркли ўзгарувчи, y унинг функцияси бўлсин. Шунинг билан баробар y нинг ўрнига бирор янги ўзгарувчини, масалан z ни қабул қилиш лозим бўлсин:

$$y = \varphi(z). \qquad (2)$$

Берилган ифодада (2) нинг ёрдами билан функциянинг ўзи алмаштирилади. Шунинг учун масаланинг муҳим қисми (1) ифодада берилган

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n} \text{ ҳосилаларни } \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}$$

ҳосилалар билан ифода қилишдан иборатдир.

Бунинг учун бундай муҳокама қиламиз: (2) га қараганда умуман z, y нинг функцияси бўлади, иккинчи томондан y нинг ўзи x нинг функцияси бўлгани учун z нинг ўзи x нинг функцияси бўлади. Демак,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \varphi'(z)\frac{dz}{dx}. \qquad (3)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ нинг ифодасини топиш учун z ни x нинг функцияси ҳисоб қилиб, (3) ни x га нисбатан дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(z)\frac{d^2z}{dx^2} + \varphi''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \qquad (4)$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(z)\frac{d^3z}{dx^3} + 3\varphi''(z)\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \varphi'''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^3. \qquad (5)$$

Шу йўл билан давом этганда, y дан x га нисбатан олинган ҳар қандай тартибли ҳосилани z дан x га нисбатан олинган ҳосилалар билан ифода қилиш мумкин.

Мисол. $y = z^2 + 2z$ муносабатдан фойдаланиб, ушбу

$$(1+y)^2\left(\frac{d^3y}{dx^3} - 2y\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 2(1+y)\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

тенгламадаги y ни z га алмаштирилсин.

Берилган мисолда $\varphi(z) = z^2 + 2z$ бўлгани учун:

$$\varphi'(z) = 2z + 2, \quad \varphi''(z) = 2, \quad \varphi'''(z) = 0.$$

Буларни (3), (4) ва (5) формулаларга қўйилса:

$$\frac{dy}{dx} = 2(z+1)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(z+1)\frac{d^2z}{dx^2} + 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2(z+1)\frac{d^3z}{dx^3} + 6\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб, сўнгра уни соддалаштирилса, тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$(z+1)\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - z^2 - 2z = 0.$$

§ 86. ЭРКЛИ ЎЗГАРУВЧИНИ ВА ФУНКЦИЯНИ АЛМАШТИРИШ

Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) \tag{1}$$

кўринишда бирор ифода берилган бўлсин ва унда x эркли ўзгарувчи, y унинг функцияси бўлсин. Шунинг билан баробар x ва y нинг ўрнига улар билан белгили муносабатда бўлган t ва u ни қабул қилиб, t ни эркли ўзгарувчи ва u ни унинг функцияси қилиш талаб қилинади. Эски ва янги ўзгарувчиларнинг орасидаги муносабат қуйидагича бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ t,\ u) = 0 \\ \varphi(x,\ y,\ t,\ u) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Берилган тенгламалардан x ва y ни t ва u орқали аниқлаш мумкин:

$$x = f_1(t,\ u), \quad y = \varphi_1(t,\ u). \tag{3}$$

Шунинг учун қўйилган масаланинг муҳим қисми ифодада берилган $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ ҳосилаларни $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$ ҳосилалар билан ифода қилишдан иборатдир.

Агарда (2) ни t ва u га нисбатан ечилса, натижа қуйидагича бўлади (ечиш мумкин фараз қилинади):

$$t = f_2(x,\ y), \quad u = \varphi_2(x,\ y). \tag{4}$$

Қўйилган шартга мувофиқ y x нинг функцияси эди. Демак, y, t, u нинг ҳар бири (2) тенгламани айнан қаноатлантирадиган x нинг функцияси бўлади. Иккинчи томондан, шартга асосан u, t нинг функцияси эди. Буларни назарда тутиб, (2) ни x га нисбатан дифференциаллаш натижасида ушбу тенгликлар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Бу тенгламаларни $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{dt}{dx}$ га нисбатан ечамиз. Ечиш натижаси қуйидагича бўлсин (ечиш мумкин фараз қилинади):

$$\frac{dy}{dx}=F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{du}{dt}\right);\quad \frac{dt}{dx}=F_1\left(x,\ y,\ u,\ \frac{du}{dt}\right). \tag{6}$$

Бу тенгламалардаги x ва y нинг ўрнига (3) дан уларнинг қийматларини қўямиз. Бу ҳолда қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\frac{dy}{dx}=\psi\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt}\right),\quad \frac{dt}{dx}=\psi_1\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt}\right). \tag{7}$$

Бу тенгламалардан биринчиси $\frac{dy}{dx}$ ни янги ўзгарувчилар ёрдами билан ифода қилади. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни аниқлаш учун ҳалиги тенгламанинг икки томонидан x га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}+\frac{d\psi}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}+\frac{\partial\psi}{\partial\left(\frac{du}{dt}\right)}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=0. \tag{8}$$

Бундаги $\frac{dt}{dx}$ нинг ўрнига (7) дан унинг ифодаси қўйилса, $\frac{d^2y}{dx^2}$ янги ўзгарувчилар ёрдами билан аниқланади:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\omega\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt}\right). \tag{9}$$

Шу йўл билан давом этганда y дан x га нисбатан олинган ҳар қандай тартибли ҳосилани янги ўзгарувчилар ёрдами билан ифода қилиш мумкин.

Мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$2x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{y-x}\left(\frac{dy}{dx}-1\right)^2+\sqrt{y-x}=0;$$

$y=u^2+t^2$, $x=t^2$ муносабатлардан фойдаланиб, x_1 ва y ни t ва u га алмаштирилсин (t — янги эркли ўзгарувчи, u — янги функция).

Берилган мисолда (2) тенгламаларнинг кўриниши қуйидагича:

$$y=u^2+t^2,\quad x=t^2. \tag{A}$$

Юқорида кўрсатилганча, бу тенгламаларнинг ҳар бирини x га нисбатан дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx}=2u\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}+2t\frac{dt}{dx},\quad 1=2t\frac{dt}{dx}.$$

Бу тенгламаларнинг иккинчисидан:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$$

буни биринчисига қўямиз. Бу ҳолда:

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{u}{t}\cdot\frac{du}{dt}. \qquad (B)$$

Бу тенгламанинг иккала томонидан яна x га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{t\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}-u\frac{dt}{dx}}{t^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{u}{t}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{t\frac{du}{dt}-u}{dt^3}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{u}{2t^2}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}. \qquad (C)$$

(A), (B) ва (C) ифодаларини берилган тенгламага қўйиб, соддалаштирилса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$t\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}+t=0.$$

§ 87*. ЭРКЛИ ЎЗГАРУВЧИЛАР БИР НЕЧА БЎЛГАН ҲОЛ

Юқорида кўрилган алмаштириш масалаларида эркли ўзгарувчиларнинг сони биргина эди. Энди бу ўринда эркли ўзгарувчиларнинг сони бир неча бўлган ҳолни текширамиз.

Бироқ содда бўлсин учун уларнинг иккитаси билан чегараланиш мумкин, чунки эркли ўзгарувчиларнинг сони иккидан ортиқ бўлган ҳолда ҳам қуйидаги муҳокамалар ўз кучини сақлайди.

Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \ldots\right) \qquad (1)$$

ифода берилган бўлсин ва унда x, y эркли ўзгарувчи ва z уларнинг функцияси бўлсин. Шунинг билан баробар x, y нинг ўрнига эркли ўзгарувчи қилиб t, r ни ва z нинг ўрнига янги функция қилиб v ни қабул қилиш талаб қилинади.

Янги ва эски ўзгарувчиларнинг орасидаги муносабат албатта берилиши керак. Биз уларни қуйидагича фараз қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} \chi(x, y, z, r, t, v) = 0 \\ \psi(x, y, z, r, t, v) = 0 \\ \omega(x, y, z, r, t, v) = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Агарда x, y, z дан бирортаси, масалан z ўзгармасдан қолса, у ҳолда ҳалиги уч тенгламадан бири

$$v = z$$

тенглама билан алмаштирилади.

(2) системадан x, y, z ни r, t, v орқали ифода қилиш мумкин.

Фараз қилайлик, (2) системанинг x, y, z га нисбатан ечиш натижаси қуйидаги бўлсин (ечиш мумкин фараз қилинади):

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(r, t, v) \\ y = \psi_1(r, t, v) \\ z = \omega_1(r, t, v) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Шунинг учун қўйилган масаланинг энг муҳим қисми z дан x ва y га нисбатан олинган турли тартибли:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \ldots$$

хусусий ҳосилаларни янги функция v дан янги эркли ўзгарувчиларга нисбатан, яъни r ва t га нисбатан олинган хусусий ҳосилалар билан ифода қилишдан иборатдир.

Бунинг учун (2) тенгламаларни кетма-кет x ва y га нисбатан дифференциаллашга тўғри келади. Шунинг билан баробар бу ерда шуни назарда тутиш лозим: (2) дан r, t, v нинг ҳар бири x, y, z нинг функцияси бўлиб аниқланади; иккинчи томондан, z нинг ўзи x, y нинг функцияси бўлгани учун r, t, v нинг ҳар бири (2) тенгламани айнан қаноатлантирадиган x, y нинг функцияси бўлади. Демак, натижада v мураккаб функция бўлади, чунки у бир томондан r ва t нинг функцияси бўлса, иккинчи томондан, r ва t x, y нинг функциясидир. Шунинг учун:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)=0\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)=0\\
&\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)=0
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Бу тенгламаларни $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial x}$ га нисбатан ечамиз. Ечиш натижаси қуйидагича бўлсин (ечиш мумкин фараз қилинади):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=F_1\left(x,\ y,\ z,\ r,\ t,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=F_2\left(x,\ y,\ z,\ r,\ t,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=F_3\left(x,\ y,\ z,\ r,\ t,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad (7)$$

(5) тенгламадаги x, y, z нинг ўрнига (3) дан уларнинг ифодаларини қўйилса

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\left(r,\ t,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad (8)$$

бўлади, яъни $\frac{\partial z}{\partial x}$ янги ўзгарувчилар ёрдами билан ифода қилинган бўлади.

Шунга ўхшаш, (2) тенгламаларни y га нисбатан дифференциаллаб, шу йўл билан давом этилса $\frac{\partial z}{\partial y}$ аниқланади.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2\left(r,\ t,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial t}\right). \quad (9)$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ни аниқлаш учун (5) тенгламани x га нисбатан дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial F_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial F_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right).$$

Бу тенгламадаги $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ нинг ўрнига (5), (6), (7) дан уларнинг ифодалари ва x, y, z нинг ўрнига (3) дан уларнинг t, r, v орқали аниқланган ифодалари қўйилса, у ҳолда $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ янги ўзгарувчилар билан ва янги функциядан янги ўзгарувчиларга нисбатан олинган ҳосилалар билан ифодаланади.

Шу йўл билан $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, ... ифодаларини топиш мумкин. Бу ерда масаланинг умумий ечилиши кўрсатилди. Бироқ практикада кўпинча бу методни соддалаштириш мумкин бўлади.

Мисол 1. x^2+y^2 ва x^2-y^2 ни янги эркли ўзгарувчи қабул қилиб, ушбу

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{x^2}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

тенгламанинг шакли ўзгартирилсин. Берилган мисолда

$$r=x^2+y^2;\quad t=x^2-y^2;\quad v=z.$$

Буларнинг ҳар биридан x га нисбатан ҳосила олинса:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial t}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Берилган тенгламалардан:

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2(r+t)};\quad y=\frac{1}{2}\sqrt{2(r-t)}.$$

Шунинг учун юқоридаги тенгламаларнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\sqrt{2(r+t)};\quad \frac{\partial t}{\partial x}=\sqrt{2(r+t)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{2(r+t)}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial t}\right). \tag{A}$$

Берилган тенгламалардан y га нисбатан ҳосила олинса:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ёки берилган тенгламаларга асосан:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sqrt{2(r-t)}; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\sqrt{2(r-t)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{2(r-t)}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial t}\right). \qquad (B)$$

Шунга ўхшаш, (A) ни яна бир мартаба x га нисбатан ва (B) ни яна бир мартаба y га нисбатан дифференциаллаб, сўнгра $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}$ ларнинг ўрнига уларнинг янги ўзгарувчилари орқали қийматлари қўйилса, қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(r+t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) \qquad (C)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(r-t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial t}\right). \qquad (D)$$

(A), (B), (C), (D) ни ва x, y нинг янги ўзгарувчилар орқали аниқланган ифодаларни берилган тенгламага қўйиб, соддалаштирилса унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial t} = 0 \text{ ёки } \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} = 0.$$

Мисол 2. Иккинчи мисол учун ушбу

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad (1)$$

ифодадаги x, y ни

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (2)$$

муносабатлари ёрдами билан r, θ га алмаштирамиз $(V = f(x, y))$. Геометрия нуқтаи назаридан бу масала: декарт координаталарида берилган ифодани қутб координаталарида тузиш демакдир.

Бунинг учун V ни r ва θ нинг функцияси ва r, θ ни x ва y нинг функцияси фараз қилиб, мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси татбиқ қилинса

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(2) ни r ва θ га нисбатан ечмасдан $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ни топиш учун (2) дан x га нисбатан ҳосила оламиз (y — ўзгармас фараз қилинади):

$$\left.\begin{aligned}1 &= \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial r}{\partial x}\\ 0 &= \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

булардан

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}. \tag{5}$$

Шунга ўхшаш (2) дан y га нисбатан ҳосила олинса (x — ўзгармас фараз қилинади):

$$\left.\begin{aligned}0 &= \cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}\\ 1 &= \sin\theta\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

булардан

$$\frac{\partial r}{\partial y} - \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}. \tag{7}$$

(5) ва (7) ни (3) га қўйилса

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Бу тенгламалардан биринчисини x га нисбатан дифференциалланса:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos\theta\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] -$$
$$-\frac{\partial V}{\partial \theta}\left[\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right] - \frac{\sin\theta}{r}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \tag{9}$$

бундаги $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ва $\frac{\partial r}{\partial x}$ нинг ўрнига (5) дан уларнинг ифодасини қўямиз:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\cos^2\theta -$$

$$-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}. \tag{10}$$

Шунга ўхшаш (8) нинг иккинчисини y га нисбатан дифференциаллаб, сўнгра $\frac{\partial r}{\partial y}$ ва $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ нинг ўрнига (7) дан уларнинг ифодалари қўйилса, қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} - 2\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sin^2\theta +$$

$$+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}. \tag{11}$$

(10) ва (11) ни қўшсак

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{12}$$

Мисол 3. Учинчи мисол учун ушбу

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{13}$$

ифодадаги x, y, z ни

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\psi\cos\theta \\ y &= r\sin\psi\sin\theta \\ z &= r\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

муносабатлари ёрдами билан r, ψ, θ га алмаштирамиз.

$$V = f(x,\ y,\ z).$$

Геометрия нуқтаи назаридан бу масала фазодаги декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтиш демакдир.

Бу ҳолни юқорида кўрилган биринчи ҳолга келтириш мумкин. Ҳақиқатда, агарда

$$\rho = r\sin\psi \tag{15}$$

фараз қилинса, бу ҳолда

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \tag{16}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда энг аввал (16) нинг ёрдами билан x, y, z дан ρ, θ, z га ўтишга тўғри келади, сўнгра

$$z = r\cos\psi, \quad \rho = r\sin\psi \tag{17}$$

формулалари ёрдами билан ρ, θ, z дан r, ψ, θ га ўтилади.

Бунга қараганда иккала ҳолда ҳам учала ўзгарувчилардан бири ўзгармасиз қолади. Шунинг учун бевосита (12) формуладан фойдаланиш мумкин. Бу формулани (16) га татбиқ қилинса, қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}, \tag{18}$$

демак,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}. \tag{19}$$

Шунга ўхшаш (12) формулани (17) га татбиқ қилинса

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{20}$$

демак,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\psi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \psi}. \tag{21}$$

Масалалар

656. $x = t^2$ фараз қилиб, ушбу

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4x} = 0$$

тенгламадаги x ни t га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

657. $x = \cos t$ фараз қилиб, ушбу

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

тенгламадаги x ни t га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$

658. $x = \frac{1}{t}$ фараз қилиб, ушбу

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

тенгламадаги x ни t га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

659. $t = \ln x$ фараз қилиб, ушбу

$$x^2 \frac{d^2y}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

тенгламадаги x ни t га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0.$

660. $t = \ln x$ фараз қилиб, ушбу

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a+1)x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

тенгламадаги x ни t га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{dy}{dt} - y = 0.$

661. $y^3z - 1 = 0$ муносабатдан фойдаланиб, ушбу

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3} y \sin x + y^4 \sin x = 0$$

тенгламадаги y нинг ўрнига z функцияси қабул қилинсин.

Жавоб: $\frac{dz}{dx} + z\sin x - 3\sin x = 0.$

662. $y = \operatorname{tg} z$ муносабатдан фойдаланиб, ушбу

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{2(y+1)}{1+y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

тенгламадаги y функцияси z га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^2z}{dx^2} - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \cos^2 z = 0.$

663. $x = e^t$ ва $y = e^u$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^3 = 0$$

тенгламадаги x, y ни t, u га алмаштирилсин.

664. $x = \frac{1}{t}$ ва $y = t - t^2 z$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = ax^m$$

тенгламадаги x, y ни t, z га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{dz}{dt} + z^2 = at^{-m-1}$.

665. $t = x - \frac{y}{x}$ ва $u = x + \frac{y}{x}$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2}y = 0$$

тенгламадаги x, y ни t, u га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$.

666. $t = x$ ва $r = \frac{y - nz}{x - mz}$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$(x - mz)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - nz)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

тенгламадаги x, y ни z, t га алмаштирилсин (z — функция аслича қолади).

Жавоб: $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$.

667. $x = t + r$ ва $y = t - r$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$\varphi = \frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x$$

ифодадаги x, y эркли ўзгарувчиларни t, r га алмаштирилсин.

Жавоб: $\varphi = \frac{\partial z}{\partial r} t - \frac{\partial z}{\partial t} r$.

668. $y + ax$ ва $y - ax$ ни янги эркли ўзгарувчи қабул қилганда, ушбу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

Жавоб: $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} = 0.$

669. $t = x + y, \quad r = x - y, \quad v = xy - z$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

тенгламадаги x, y, z ни t, r, v га алмаштирилсин (t, r—янги эркли ўзгарувчилар, z — янги функция)

Жавоб: $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{2}.$

670. $t = x, \quad r = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

тенгламадаги x, y, z ни t, r, u га алмаштирилсин.

Жавоб: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$

671. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

ифодадаги x, y ни z, θ га алмаштирилсин.

Жавоб: $\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2.$

672. $x = r\sin\psi\cos\theta$, $y = r\sin\psi\sin\theta$, $z = r\cos\psi$ муносабатлардан фойдаланиб, ушбу

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

ифодадаги x, y, z ни r, ψ, θ га алмаштирилсин.

Жавоб: $\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2.$

Тўққизинчи боб

ЧЕКСИЗ ҚАТОРЛАР НАЗАРИЯСИ

§ 88. ЧЕКСИЗ ҚАТОРЛАР

1. Чексиз қатор деб, маълум қонун бўйича тузилган ва ҳадларининг сони чексиз бўлган ушбу

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

кўринишдаги ифодани айтилади.

Бундай қаторнинг кўриниши қуйидагича

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \text{ ёки } \sum u_n$$

ёзилади. u_n қаторнинг умумий ҳади дейилади ва n берилган чоқда u_n маълум бўлади. Масалан, ушбу

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \cdots$$

қаторнинг умумий ҳади қуйидагича бўлади:

$$u_n = \frac{n}{n+1},$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ бўлганда, қаторнинг ҳадлари ҳосил бўлади.

Қаторнинг биринчи n ҳадларининг йиғиндисини S фараз қиламиз:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n. \tag{2}$$

Агарда бу ифодада n чексиз ўсиб борса, у ҳолда қуйидаги уч ҳолни учратиш мумкин:

1) S_n бирор чекли лимитга интилади;

2) S_n нинг абсолют қиймати чексиз ортиб боради ва;

3) S_n чекли сонлигича қолса-да, лекин ҳеч қандай аниқ лимитга интилмайди.

Биринчи ҳолда (1) қаторни **яқинлашувчи** дейилади ва агарда n чексизликка интилганда S_n нинг лимити S бўлса, бу ҳолда

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{3}$$

ёзиб, S ни қаторнинг **йиғиндиси** дейилади; иккинчи ва учинчи ҳолларда (1) қаторни **узоқлашувчи** дейилади.

Таърифдаги учала ҳолни тасвир қилиш учун қуйидаги учта қаторни оламиз:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots \qquad (A)$$

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \cdots + 3^n + \cdots \qquad (B)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots \qquad (C)$$

Бу қаторлардан (A) қатори яқинлашувчи бўлади, чунки у махражи $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессиядан иборат бўлиб,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(B) ва (C) қаторлари узоқлашувчи бўлади, чунки булардан биринчисида n чексизликка интилганда S_n ҳам чексизликка интилади:

$$S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n; \ \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

ва иккинчисида

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n+1}$$

бўлиб, n жуфт бўлганда $S_n = 0$, ва n тоқ бўлганда $S_n = 1$ бўлади, яъни n чексизликка интилганда S_n ҳеч қандай аниқ лимитга интилмайди.

2. Фараз қилайлик, ушбу қатор

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

яқинлашувчи бўлсин ва унинг йиғиндиси S бўлсин; n ва p бирор мусбат ва бутун сон бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{ва} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n+p} = S,$$

демак, p қандай бўлса-да

$$\lim_{n\to\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0. \tag{5}$$

иккинчи томондан:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

$$S_{n+p} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}.$$

Шунинг учун (5) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) = 0. \tag{6}$$

Демак, **қатор яқинлашувчи бўлган ҳолда, унинг бошидан етарли даражада узоқлашган ва исталганча олинган кетма-кет ҳадларнинг йиғиндиси исталганча кичик бўлади.**

Фараз қилайлик, бу шарт бажарилган бўлсин, яъни (6) ёки (5) тенглик берилган бўлсин:

$$\lim (S_{n+p} - S_n) = 0,$$

биз бунда n ни аниқ сон ва p ни чексиз ўсувчи фараз қиламиз. Лимит таърифига мувофиқ:

$$-\varepsilon < S_{n+p} - S_n < \varepsilon$$

$$S_n - \varepsilon < S_{n+p} < \varepsilon + S_n .$$

Қилинган фаразия бўйича n аниқ сон бўлгани учун S_n ҳам аниқ сон бўлади. Демак, p чексиз ўсганда қаторнинг $(n+p)$ ҳадларининг йиғиндиси шундай икки соннинг орасида бўлиб қоладики, уларнинг ўзаро айирмаси исталганча кичикдир. Бу эса, S_{n+p} йиғиндининг лимитга интилишини, яъни қаторнинг яқинлашишини кўрсатади.

Юқоридаги (6) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{7}$$

Лимит тўғрисидаги асосий таърифни назарда тутганда қаторнинг яқинлашиш шартини тўлароқ қилиб қуйидагича ифода қилиш мумкин.

Ушбу чексиз қаторнинг:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots + \cdots$$

яқинлашиши учун ҳар қандай кичик бўлган мусбат ε сон берилганда шундай N сони топиш мумкин бўлсинки, $n > N$ бўлганда ва ҳар қандай бутун мусбат сон бўлганда

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

тенгсизлиги бажарилса зарур ва кифоядир (Кошининг умумий аломати).

Агарда (6) да $p = 1$ фараз қилинса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = 0 \quad \text{ёки} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{8}$$

бўлиши лозим, яъни яқинлашувчи қаторда n чексиз ўсганда унинг умумий ҳади бўлган u_n нолга интилиши лозим ёки бошқача қилиб айтганда, қатор яқинлашувчи бўлган ҳолда бирортасидан бошлаб қатор ҳадларининг абсолют қийматлари камайиб бориши лозим.

Қаторнинг яқинлашиши учун бу шарт лозим бўлса-да, лекин у кифоя қилмайди, яъни қаторнинг умумий ҳади нолга интилгани билан унинг ўзи узоқлашувчи бўлиши мумкин.

Буни тасвир қиладиган характерли ва классик мисол ушбу гармоник қатор бўла олади.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Бу мисолда қаторнинг умумий ҳади $u_n=\frac{1}{n}$ бўлади. Шунинг учун бу ҳолда:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

Ҳолбуки, (8) қатор узоқлашувчи бўлади.

Ҳақиқатда буни ошкор қилиш учун берилган қаторни қуйидагича ёзамиз:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

Буни ушбу қатор билан солиштириб кўрамиз:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

Бу қаторлардан биринчисининг ҳар бир ҳади иккинчисининг ўзига мос бўлган ҳадидан катта ёки тенг; иккинчи томондан кейинги қаторнинг ҳар бир ҳади, яъни ҳар бир қавснинг ичидаги йиғинди $\frac{1}{2}$ га тенг. Шунинг учун иккинчи қатор саноқсиз кўп $\frac{1}{2}$ лардан иборат бўлиб, у узоқлашувчи бўлади. Демак, биринчи қатор ҳам узоқлашувчи бўлади, чунки унинг ҳар бир ҳади иккинчи қаторнинг мос ҳадларидан каттадир.

3. Фараз қилайлик, ушбу қатор

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

яқинлашувчи бўлсин ва унинг биринчи n ҳадларининг йиғиндиси S_n ва ўзининг йиғиндиси S бўлсин:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots=S$$

$$u+u_2+u_3+\cdots+u_n=S_n.$$

Бу ҳолда S билан S_n орасидаги айирмани қаторнинг n-ҳадларидан кейинги қолдиғи дейилади ва у одатда R_n билан ифода қилинади:

$$S - S_n = R_n.$$

Демак, бу қолдиқ ўз навбатида ушбу

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

қаторнинг йиғиндиси бўлади ва у берилган қатор яқинлашувчи бўлганда — яқинлашувчи ва узоқлашувчи бўлганда — узоқлашувчи бўлади.

Шунинг билан, қаторнинг яқинлашишини текширишда унинг бошидан бошлаб, сони чекли ҳадларини эътиборга олинмаса ҳам бўлади.

4. Агарда ушбу қатор

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

яқинлашувчи бўлса ва унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда бунинг ҳар бир ҳадини бирор чекли a сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлған ушбу:

$$au_1 + au_2 + au_3 + \cdots + au_n + \cdots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси aS га тенг бўлади.

Ҳақиқатда, шартга мувофиқ:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n; \ \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

$$S'_n = au_1 + au_2 + au_3 + \cdots + au_n; \quad \lim_{n\to\infty} S'_n =$$

$$= a \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) = aS.$$

5. Яқинлашувчи қаторни ҳадлаб қўшиш ва айириш мумкин. Масалан, ушбу

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$$

қаторларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлсин ва

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) = S \qquad (A)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n) = S' \qquad (B)$$

бўлсин. Бу қаторлардан ушбу янги қаторни тузамиз:

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

Бу қаторнинг биринчи n ҳадларининг йиғиндиси S_n'' бўлсин:

$$S_n'' = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n)$$

(A) ва (B) ни эътиборга олинса

$$\lim_{n\to\infty} S_n'' = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} S_n'$$

ёки

$$S'' = S \pm S'.$$

§ 89. МУСБАТ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР УМУМИЙ МУЛОҲАЗАЛАР

1. Қаторларнинг ҳамма ҳадлари мусбат бўлган ҳолда унинг яқинлашишини текшириш бирмунча енгиллашади, чунки бу ҳолда унинг биринчи n ҳадларининг йиғиндиси бўлган S_n n чегарасиз ўсганда: ё чегарасиз ўсади ва бу ҳолда, у узоқлашувчи бўлади, ё ўсса-да, ҳамма вақт бирор ўзгармас сондан кичик бўлади ва бу ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.

Буни назарда тутиб, қуйидаги мусбат ҳадли икки қаторни оламиз:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (2)$$

n ҳар қандай бўлса-да $u_n \leqslant v_n$ бўлсин.

Бу ҳолда, **агарда (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади; агарда (1) қатор узоқлашувчи бўлса, (2) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.**

Ҳақиқатда:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$S_n' = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

булсин; қўйилган шартга мувофиқ n ҳар қандай бўлса-да $u_n \leqslant v_n$ бўлгани учун

$$S_n \leqslant S_n' . \tag{3}$$

Иккинчи томондан, (2) қатор яқинлашувчи бўлган ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} S_n' = S' \tag{4}$$

ва қаторнинг ҳамма ҳадлари мусбат бўлгани учун

$$S_n' < S' \tag{5}$$

(3) ва (5) дан ушбу тенгсизлик келиб чиқади.

$$S_n < S' . \tag{6}$$

Бунга қараганда n ҳар қанча ўсса-да, S_n ўз навбатида ўзгармас S' сондан кичиклигича қолади. Иккинчи томондан n ўсганда S_n ўсади. Шунинг учун S_n аниқ лимитга эга бўлади, яъни (1) қатор яқинлашувчи бўлади.

(1) қатор узоқлашувчи бўлган ҳолда (2) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади ва бу ҳол (3) тенгсизликдан кўриниб туради:

$$S_n' \geqslant S_n .$$

Қаторнинг яқинлашишини текширишда, унинг бошидан бошлаб сони чекли ҳадларини олиб ташлаш мумкин эди. Шунинг учун $u_n \leqslant v_n$ тенгсизлиги қатор ҳадларининг бирортасидан бошлаб мавжуд бўлса-да, исбот қилинган яқинлашиш аломати ўз кучини сақлайди.

Мисол учун ушбу қаторни оламиз:

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots$$

бу қаторни қуйидагича қилиб ёзиш мумкин:

$$1+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right)+\cdots \tag{A}$$

бу қаторда

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<4\cdot\frac{1}{4^k}=\frac{1}{2^{2(k-1)}}$$

ва шунга ўхшаш.
Булардан бундай қатор тузамиз:

$$1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2(k-1)}}+\frac{1}{2^{3(k-1)}}+\cdots \tag{B}$$

Иккинчи ҳадидан бошлаб (A) қаторнинг ҳар бир ҳади (B) қаторнинг мос ҳадларидан кичик. Шунинг учун агарда (B) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (A) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Бу эса k нинг қийматига боғлиқ.

Ҳақиқатда, агарда $k>1$ бўлса (B) қатори яқинлашувчи бўлади, чунки бу ҳолда, у махражи бирдан кичик бўлган геометрик прогрессиядан иборатдир.

Агарда $k<1$ бўлса, бу ҳолда (A) қаторнинг ҳар бир ҳади гармоник қаторнинг мос ҳадидан катта бўлади. Демак, бу ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

Агарда $k=1$ бўлса, у ҳолда (A) гармоник қаторга айланиб ҳамон узоқлашувчи бўлади.

2. $\sum u_n$ ва $\sum v_n$ нинг ҳар бири мусбат ҳадли қатор бўлсин:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{7}$$

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \tag{8}$$

ва бирор n дан бошлаб

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n} \tag{9}$$

бўлсин. Бу ҳолда, агар (8) қатор яқинлашувчи бўлса (7) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади; агарда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \tag{10}$$

бўлса ва (8) қатор узоқлашувчи бўлса (7) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Ҳақиқатда, фараз қилайлик (9) тенглик мавжуд ва (8) яқинлашувчи бўлсин. Бу ҳолда (9) дан:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}, \quad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \ldots \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{v_2}{v_1},$$

буларни ҳадлаб кўпайтирилса

$$\frac{u_n}{u_1} \leqslant \frac{v_n}{v_1} \quad \text{ёки} \quad u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_n,$$

агарда $\frac{u_1}{v_1} = k$ фараз қилинса, бу ҳолда

$$u_n \leqslant kv_n.$$

Биз биламизки $\sum v_n$ қатор яқинлашувчи бўлган ҳолда $\sum kv_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун бу ҳолда юқорида исбот қилинган теоремага мувофиқ (7) қатор яқинлашувчи бўлади. Теореманинг иккинчи қисми ҳам худди шу йўл билан исбот қилинади.

Даламбер аломати

Агарда мусбат ҳадли қаторда ҳадларининг бирортасидан бошлаб унинг ҳар бир кейинги ҳадининг аввалгисига нисбати бирдан кичик бўлган ўзгармас λ сондан кичик бўлса, яъни агарда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$$

ва $\lambda < 1$ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади, агар.. $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Ҳақиқатда, ушбу мусбат ҳадли $u + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (11)

қаторда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda \tag{12}$$

ва $\lambda < 1$ бўлсин.

Қўйилган шарт қайси бир ҳаддан бошлаб тўғри келса, у ҳадни қаторнинг биринчи ҳади фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$\frac{u_2}{u_1} < \lambda, \ u_2 < \lambda u_1$$

$$\frac{u_3}{u_2} < \lambda, \ u_3 < \lambda u_2 < \lambda^2 u_1$$

$$\frac{u_4}{u_3} < \lambda, \ u_4 < \lambda u_3 < \lambda^2 u_2 < \lambda^3 u_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda, \ u_{n+1} < \lambda u_n < \lambda^n u_1 .$$

Шунинг билан бизнинг қаторнинг

$$u_2, u_3, \ldots u_{n+1}, \ldots$$

ҳадлари, ушбу

$$\lambda u_1, \lambda^2 u_1, \ldots \lambda^n u_1, \ldots$$

геометрик прогрессиядан иборат бўлган қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлади; $\lambda < 1$ бўлганда, у чексиз камаювчи прогрессия, яъни яқинлашувчи қатор бўлади, демак, иккинчисидан бошлаб қаторнинг ҳар бир ҳади яқинлашувчи қаторнинг мос ҳадларидан кичикдир.

Агарда бирор n дан бошлаб $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ бўлса, яъни агарда $u_{n+1} > u_n$ бўлса, бу ҳолда қаторнинг ҳадлари ўсиб боради ва у узоқлашувчи бўлади.

Натижа. Агарда

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = h \tag{13}$$

ва $h < 1$ бўлса, бу ҳолда Даламбернинг асосий шарти таъмин этилган бўлади; чунки 1 билан h нинг орасига бирор λ сонни қўйганда, лимит таърифига мувофиқ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - h < \lambda - h$$

ёки

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda.$$

Шунга ўхшаш, агарда (13) мавжуд бўлиб, $h > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Агарда $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ҳамма вақт бирдан катта бўлиб, $h = 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади ва агарда $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ҳамма вақт бирдан кичик бўлиб, $h = 1$ бўлса, **шубҳали ҳол** дейилади, чунки бу ҳолда қатор ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлиб, масалани аниқлаш учун қўшимча текшириш керак бўлади.

Мисол. Мисол учун ушбу қаторларни оламиз:

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots \qquad \text{(A)}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \text{(Б)}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad \text{(С)}$$

А) Биринчи қаторда

$$u_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}}; \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1},$$

демак,

$$\lim_{n\to 8} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \lim \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

бу эса, қаторнинг яқинлашишини кўрсатади.

В) Иккинчи қаторда

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad u_{n+1} + \frac{1}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

ва $h = 1$, яъни шубҳали ҳол. Лекин иккинчи қатор узоқлашувчи қатордан иборат (гармоник).

С) Учинчи қаторда

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$$

ва $h = 1$, яъни шубҳали ҳол. Лекин бу қатор яқинлашувчи қатордан иборат (геометрик қатор, $k = 2 > 1$).

Кошининг хусусий аломати

Агарда ҳадлари мусбат бўлган ушбу

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{14}$$

қаторда, ҳадларининг бирортасидан бошлаб

$$\sqrt[n]{u_n} < \lambda, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{15}$$

бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.

Ҳақиқатда (2) дан:

$$u_n < \lambda^n.$$

Демак, шу ўриндан бошлаб қаторнинг ҳамма ҳадлари чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг мос ҳадларидан кичик бўлади, чунки $\lambda < 1$. Шунинг учун (1) қатор яқинлашувчи бўлади.

Юқорида қилинган мулоҳазага қараганда агарда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n} \tag{16}$$

мавжуд ва 1 дан кичик бўлса, қўйилган шарт таъмин этилади, яъни қатор бу ҳолда яқинлашувчи бўлади.

Агарда (16) бирдан катта бўлса қатор узоқлашувчи бўлади, чунки бу ҳолда шундан бошлаб қаторнинг ҳамма ҳадлари бирдан катта бўлади.

Агарда $\sqrt[n]{u_n} < 1$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ **бирга интилса шубҳали ҳол дейилади,** чунки бу ҳолда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлиб, масалани аниқлаш учун қўшимча текшириш керак бўлади.

Мисол. Мисол учун ушбу қаторни оламиз:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$$

Бунда

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

демак, берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

Куммер аломати

Юқорида исбот қилинган Даламбер ва Коши аломатлари практикада ишлатиш учун жуда муҳим бўлса-да, лекин кўпинча масалани аниқлаш учун кифоя қилмасдан қолади. Бундай ҳолларда бошқа аломатлар ишлатилади. Қуйидаги Куммер аломати Даламбер ва Коши аломатларига нисбатан умумиятга эгадир.

Куммер аломати. Агарда шундай $a_1, a_2, a_3, \ldots$ мусбат сонларни топиш мумкин бўлсаки, n чексизликка интилганда бирор жойдан бошлаб ушбу

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \tag{17}$$

ифода, n га боғлиқ бўлмаган бирор мусбат λ сондан катта ёки тенг бўлса, у ҳолда мусбат ҳадли $\sum u_n$ қатор яқинлашувчи бўлади ва агарда у ифода нолдан кичикланиб ушбу

$$\sum \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots \qquad (18)$$

қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad (19)$$

узоқлашувчи бўлади.

Теоремани исбот қилиш учун фараз қилайлик

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \lambda > 0$$

бўлсин. Шунинг билан баробар теореманинг шартини $n = 1$ дан бошлаб таъмин этилади деб фараз қилиш мумкин. Шунинг учун $n = 1, 2, 3, \ldots$ фараз қилинса,

$$\lambda u_2 \leqslant a_1 u_1 - a_2 u_2,$$

$$\lambda u_3 \leqslant a_2 u_2 - a_3 u_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda u_n \leqslant a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n,$$

буларни ҳадлаб қўшилса

$$\lambda (u_2 + u_3 + \cdots + u_n) \leqslant a_1 u_1 - a_n u_n < a_1 u_1$$

ёки

$$\lambda (u_2 + u_3 + \cdots + u_n) \leqslant a_1 u_1,$$

ёки

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_n \leqslant \frac{a_1 u_1}{\lambda},$$

бу эса (19) қаторнинг яқинлашувчи эканлигини кўрсатади, чунки унинг u_1 ҳадидан бошқа биринчи n ҳадларининг йиғиндиси ушбу ўзгармас

$$k = \frac{a_1 u_1}{\lambda}$$

сондан ҳамма вақт кичик ё тенг бўлиб қолмоқда.

Энди фараз қилайлик

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$$

ва (18) қатор узоқлашувчи бўлсин. Бу ҳолда:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ёки

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони (18) қатор ҳадларининг нисбатидан иборат. Шунинг билан (19) қаторда $u_{n+1} : u_n$ нисбати (18) қаторнинг мос ҳадларининг нисбатидан катта ё тенг бўлиб қолмоқда. Қилинган фаразияга мувофиқ (18) қатор узоқлашувчи эди. Демак, (19) ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

Натижа. (Раабе аломати), Куммер аломати бўйича агарда бирор n дан бошлаб

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \lambda > 0$$

бўлса, $\sum u_n$ қатор яқинлашувчи бўлар эди.

Агарда хусусий ҳолда $a_n = n$ фараз қилинса

$$n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \geqslant \lambda > 0$$

ёки

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \geqslant \lambda > 0,$$

ёки

$$n\left(\frac{u}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant k > 1, \tag{20}$$

бунда $k = \lambda + 1$;

демак, бирор n дан бошлаб (20) тенгсизлик мавжуд бўлса, қатор яқинлашувчи бўлади. Шунга ўхшаш агарда бирор n дан бошлаб

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}+1\right)\leqslant k<1$$

бўлса, бу ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

Бунга қараганда юқорида қилинган мулоҳазаларга асосан, агарда n чексизликка интилганда

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$$

ифоданинг лимити >1 бўлса — қатор яқинлашувчи ва <1 бўлса — узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Мисол учун юқорида текширилган ушбу қаторни оламиз:

Бу қаторда

$$u_n=\frac{1}{n^k}, \quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^k}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)^k}{n^k}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k, \ \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=k.$$

Раабе аломатига асосан: $k>1$ бўлганда, қатор яқинлашувчи бўлади; $k<1$ бўлганда — узоқлашувчи бўлади, $k=1$ бўлганда унинг узоқлашувчи бўлишини биз билар эдик.

Куммер теоремасидан яна кўп натижаларни чиқариш мумкин. Масалан, агарда (17) да $a_n=n\ln n$ фараз қилинса, бу ҳолда ифоданинг кўриниши

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\lg n \tag{21}$$

бўлиб, n чексизликка интилганда (21) нинг лимити бирдан катта бўлса, қатор яқинлашувчи ва кичик бўлса, узоқлашувчи бўлади. Буни исбот қилишни ўқувчига тавсия қилинади.

§ 90. ҲАДЛАРНИНГ ИШОРАЛАРИ ҲАР ХИЛ БЎЛГАН ҚАТОРЛАР

Қатор ҳадларининг ишоралари ҳар хил бўлган ҳолда унинг яқинлашишини текшириш учун ушбу теоремалар қўлланади.

Теорема 1. *Агарда ҳадларининг ишоралари ҳар хил бўлган қаторда ҳадларнинг абсолют қийматларидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган қатор яқинлашувчи бўлади.*

Буни исбот қилиш учун ушбу

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

қаторнинг ҳадларини мусбат ва манфий фараз қиламиз. (1) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган ушбу қатор яқинлашувчи бўлсин:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \tag{2}$$

Бу ҳолда, асосий шартга мувофиқ p ни исталган бутун мусбат сон фараз қилинса

$$\lim_{n\to\infty} \{|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots + |u_{n+p}|\} = 0.$$

Иккинчи томондан, йиғиндининг қиймати қўшилувчиларнинг абсолют қийматлари йиғиндисидан катта бўлмагани учун:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| .$$

Демак, p қандай мусбат бутун сон бўлса-да,

$$\lim_{n\to\infty} \{|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}|\} = 0,$$

бу эса (1) қаторнинг яқинлашишини кўрсатади.

Исбот қилинган теоремага асосан ҳадлари мусбат ва манфий бўлган яқинлашувчи қаторларни одатда икки синфга бўладилар: 1) ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлган қаторлар ва 2) ҳадларнинг абсолют қийматларидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлган қаторлар. Булардан биринчи синф қаторларини абсолют яқинлашувчи ва иккинчи синф қаторларини абсолют яқинлашувчи эмас дейилади.

Масалан, ушбу қатор

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \tag{3}$$

абсолют яқинлашади, чунки унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган ушбу

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \tag{3}$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Аксинча ушбу қатор

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \tag{4}$$

абсолют яқинлашмайди, чунки унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлади (гармоник қатор), ҳолбуки, биз уни келаси иккинчи теореманинг ёрдами билан исбот қиламиз, (4) қатор яқинлашувчи бўлади.

Абсолют яқинлашувчи қатор ҳадларининг ўринларини исталган тартибда алмаштириб, бирининг ўрнига бошқасини қўйиш ва группаларга ажратиш мумкин. Ҳолбуки, абсолют яқинлашувчи бўлмаган қаторларда ҳадларининг йиғиндиси уларнинг тартибига боғлиқдир. Мисол учун ушбу қаторни оламиз:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{A}$$

Бу қаторнинг ҳадлари ўринларини алмаштириб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{B}$$

(A) қаторнинг йиғиндисини S_1 ва (B) қаторнинг йиғиндисини S_2 фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$S_1=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

чунки $n=1, 2, 3, \ldots$ бўлиб ўсганда (1) қаторнинг ҳадлари ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш (2) қаторни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_2=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

ёки

$$S_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \right\}$$

ёки

$$S_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right),$$

ёки

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1,$$

бу эса юқоридаги фикрни очиқ тасвир қилади.

Теорема 2. *Агарда ишора ўзгартувчи қаторда ҳадларининг бирортасидан бошлаб уларнинг абсолют қийматлари доимо камайса ва нолга интилса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.*

Одатда ишора ўзгарувчи қатор деб, ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб борадиган қаторни айтилади. Теоремани исбот қилиш учун ушбу

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \tag{5}$$

қаторда $u_i > 0$, $i = 1, 2, 3 \ldots$ фараз қиламиз.

Берилган қаторда ҳадлари абсолют қийматларининг камайиб боришини қаторнинг биринчи ҳадидан фараз қилиш мумкин. Шунинг учун

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots \tag{6}$$

Қаторнинг сони жуфт ҳадлари йиғиндисини S_{2n} фараз қилганда, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \tag{7}$$

ёки

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - u_{2n}. \qquad (8)$$

(6) га асосан (7) ва (8) даги ҳар бир қавс мусбат сондан иборат. (7) га қараганда S_{2n} ҳамма вақт ўсиб боради, чунки у саноқсиз кўп мусбат сонларнинг йиғиндисидан иборат ва (6) га қараганда $S_{2n} < u_1$. Бу эса S_{2n} нинг аниқ лимитга интилишини кўрсатади. Агарда бу лимитни S фараз қилинса:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Энди қаторнинг сони тоқ бўлган ҳадларининг йиғиндисини S_{2n+1} фараз қиламиз:

$$S_{2n+1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2n} + u_{2n+1}$$

ёки (8) га асосан:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + S_{2n+1}. \qquad (9)$$

Теорема шартига асосан:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0.$$

Демак, n чексизликка интилганда

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Бу эса, қаторнинг яқинлашишини кўрсатади.

Агарда қаторнинг биринчи n ҳадларининг йиғиндиси S_n ни қаторнинг йиғиндиси S қабул қилинса, у ҳолда

$$|S - S_n| < u_{n+1},$$

чунки ташланган қатор ҳам ишора ўзгартувчи қатор бўлиб, унинг биринчи ҳади $(-1)^n u_{n+1}$ бўлади.

Мисол учун ушбу қаторни оламиз:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Бу қатор теорема шартига мувофиқ яқинлашувчи бўлади (лекин абсолют яқинлашувчи эмас, чунки унинг ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган қатор яқинлашувчи эмас (гармоник қатор).

§ 91. ҲАДЛАРИ ЎЗГАРУВЧИ ҚАТОРЛАР

Ҳозиргача биз текширган қаторларнинг ҳадлари ўзгармас фараз қилинган эди. Энди бу ерда ҳадлари ўзгарувчи қаторлар устида тўхтаб ўтамиз.

Фараз қилайлик ушбу қаторнинг ҳадлари бирор (a, b) интервалда аниқланган x нинг функциялари бўлсин:

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

Агарда, бу қатор x нинг шу (a, b) интервалдаги $(a \leqslant x \leqslant b)$ ҳамма қийматларида яқинлашса, у ҳолда (1) қаторни (a, b) интервалда яқинлашувчи дейилади.

Фараз қилайлик (1) қатор (a, b) интервалда яқинлашувчи бўлсин. Қаторнинг йиғиндиси, биринчи n ҳадларининг йиғиндиси ва қолдиғи x нинг функцияси бўлади. Буларни тартиб билан

$$S(x),\ S_n(x),\ R_n(x)$$

фараз қиламиз, яъни

$$S(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \qquad (2)$$

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x) \qquad (3)$$

$$R_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+f_{n+3}(x)+\cdots \qquad (4)$$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),\ R_n(x)=S(x)-S_n(x). \qquad (5)$$

Асосий яқинлашиш аломатига мувофиқ (1) қаторнинг яқинлашиши учун ҳар қандай кичик бўлган мусбат ε сон берилганда шундай N сонни топиш мумкин бўлсинки, $n>N$ бўлганда x нинг (a, b) интервалдаги ҳар бир қиймати учун

$$|R_n(x)|<\varepsilon \qquad (6)$$

бўлса, ёки p ҳар қандай бутун мусбат бўлганда

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon \qquad (6')$$

бўлса, зарур ва кифоядир.

Умуман айтганда N x нинг (a, b) интервалдаги қийматларига боғлиқ бўлиб, x турлича бўлганда N нинг қиймати ҳам ҳар хил бўлиши мумкин.

Бироқ, агарда шундай N ни топиш мумкин бўлсаки, унинг қиймати x га боғлиқ бўлмаса, яъни x нинг (a, b) интервалдаги ҳамма қийматлари учун қўйилган шартни таъмин этадиган битта N сонни топиш мумкин бўлса у ҳолда (1) қаторни **текис яқинлашувчи** қатор дейилади.

Мисол учун ушбу қаторни оламиз:

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots + x(1-x)^n + \cdots$$

Бу қатор, махражи $(1-x)$ бўлган геометрик прогрессиядан иборат бўлиб, x нинг $(0,1)$ интервалдаги $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ ҳамма қийматлари учун яқинлашувчи бўлади.

Ҳақиқатда $x = 0$ бўлганда қаторнинг йиғиндиси ноль бўлади ва $x > 0$ бўлганда прогрессия чексиз камаювчи бўлиб, унинг йиғиндиси 1 бўлади. Бу эса, қаторнинг йиғиндисини узиладиган функциядан иборатлигини кўрсатади, чунки x нинг қиймати 0 дан мусбатга ўтганда, унинг ўсиши ҳар қанча кичик бўлса-да, лекин қаторнинг йиғиндиси 0 дан бирданига 1 га қараб иргиб кетмоқда. Бунинг сабаби қаторнинг текис яқинлашувчи эмаслигидир. Ҳақиқатда, берилган қаторнинг қолдиқ ҳади қуйидагича бўлади:

$$R_n = x(1-x)^n + x(1-x)^{n+1} + \cdots$$

x нинг қийматлари мусбат бўлган ҳолда, бу қатор чексиз камаювчи прогрессия бўлиб, унинг йиғиндиси $(1-x)^n$ бўлади:

$$R_n = (1-x)^n.$$

$|R_n| < \varepsilon$ тенгсизлигини қаноатлантириш учун

$$(1-x)^n < \varepsilon$$

бўлиши керак ёки бундан

$$n \lg(1-x) < \lg \varepsilon$$

демак,

$$n < \frac{\lg \varepsilon}{\lg(1-x)} = N$$

бўлганда $|R_n(x)| < \varepsilon$ тенгсизлиги таъмин этилади.

Бироқ x нолга интилганда $\lg(1-x)$ ҳам нолга интилади ва N чексиз катта бўлади. Бу эса, ε берилганда x нинг 0 билан 1 орасидаги ҳамма қийматлари учун $n > N$ бўлганда $|R_n| < \varepsilon$ бўладиган N сонни топиш мумкин эмаслигини кўрсатади. Демак, берилган қатор (0, 1) интервалнинг ҳаммаси учун текис яқинлашувчи бўлмайди.

§ 92. ТЕКИС ЯҚИНЛАШИШ АЛОМАТИ

Чексиз қаторнинг қай вақтда текис яқинлашиши тўғрисида ушбу теорема мавжуддир.

Теорема. *Бирор (a, b) интервалда аниқланган функцияларнинг қатори*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{1}$$

шу (a, b) интервалда текис яқинлашувчи бўлади, агарда унинг ҳадларининг модуллари (a, b) интервалда мусбат ва ўзгармас ҳадли

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлмаса ва (2) қатор яқинлашувчи бўлса (Вейерштрас аломати).

Ҳақиқатда теореманинг шарти бўйича n қандай бўлса-да, (a, b) интервалда

$$|f_n(x)| \leqslant a_n. \tag{3}$$

Қўйилган шартга мувофиқ (2) қатор яқинлашувчи бўлгани учун исталганча ε сон берилганда, шундай N сонни топиш мумкинки, $n > N$ ва p ҳар қандай (бутун ва мусбат) бўлганда

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon. \tag{4}$$

Иккинчи томондан, (3) га мувофиқ:

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leqslant a_{n+1} +$$
$$+ a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

ёки

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

бу эса (1) қаторнинг текис яқинлашишини кўрсатади.

§ 93. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ҚАТОРНИНГ АСОСИЙ ХОССАСИ

Текис яқинлашувчи қаторнинг асосий хоссаси ушбу теорема билан ифода қилинади.

Теорема. *Агарда ушбу қаторда*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{1}$$

$f_i(x)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *функцияларнинг ҳар бири бирор* (a, b) *интервалда узлуксиз бўлса ва (1) қаторнинг ўзи текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қаторнинг* $S(x)$ *йиғиндиси ҳам* (a, b) *интервалда узлуксиз бўлади.*

Бу теоремани исбот қилиш учун (1) қаторнинг биринчи n ҳадларининг йиғиндисини $S_n(x)$ билан ва қолдиғини $R_n(x)$ билан ифода қиламиз:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x); \tag{2}$$

ёки

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \cdots \tag{3}$$

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{4}$$

Агарда x га исталганча бирор h орттирма берилса $S(x)$ нинг орттирмаси қуйидагича бўлади:

$$S(x+h) - S(x) = [S_n(x+h) - S_n(x)] + [R_n(x+h) - R_n(x)]$$

ёки (2) га асосан

$$S(x+h) - S(x) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x+h) - f_i(x)] + [R_n \times$$

$$\times (x+h) - R_n(x)]. \tag{5}$$

Ҳар бир $f_i(x)$ (a, b) интервалда узлуксиз бўлиб, қатор текис яқинлашувчи бўлгани учун ε қандай мусбат сон бўлса-да, шундай N ни топиш мумкинки, $n > N$ бўлганда

$$|R_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

бўлсин. Қўйилган шарт бўйича $S_n(x)$ узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси эди; шунинг учун h ни шундай қилиб олиш мумкинки, (n ни сайлаб олгандан сўнгра)

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

бўлсин. Иккинчи томондан,

$$|S(x+h) - S(x)| \leqslant |S_n(x+h) - S_n(x)| +$$
$$+ |R_n(x+h)| + |R_n(x)| < \varepsilon,$$

бу эса $S(x)$ нинг узлуксизлигини кўрсатади.

§ 94. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР. ЯҚИНЛАШИШ РАДИУСИ

Ҳадлари ўзгарувчи бўлган қаторларнинг ичида энг муҳими даражали қатор бўлиб, унинг умумий кўриниши қуйидагичадир.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

бунда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ коэффициентлар ўзгармас сонлардан иборатдир; n — бутун ва мусбат.

Даражали қаторлар тўғрисида биз ҳозирча ушбу теоремани исбот қилиш билан чегараланамиз.

Абелнинг 1-теоремаси. Агарда бирор $x = \xi$ қийматда (1) даражали қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда x нинг ҳар бир $|x| < |\xi|$ қиймати учун у қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Теоремани исбот қилиш учун фараз қилайлик $x = \xi$ бўлганда ушбу

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \cdots + a_n\xi^n + \cdots \tag{2}$$

қатор яқинлашувчи бўлсин, бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0 \tag{3}$$

шунинг учун ҳамма вақт шундай ўзгармас M сонни топиш мумкинки,

$$|a_n\xi^n| \leqslant M \tag{4}$$

бўлсин. Берилган қаторни қуйидагича қилиб ёзиш мумкин:

$$a_0 + a_1 \xi \left(\frac{x}{\xi}\right) + a_2 \xi^2 \left(\frac{x}{\xi}\right)^2 + \cdots + a_n \xi^n \left(\frac{x}{\xi}\right)^n + \cdots$$

Шунинг билан бизда

$$a_n x^n = a_n \xi^n \left(\frac{x}{\xi}\right)^n,$$

демак,

$$|a_n x^n| = \left|a_n \xi^n \left(\frac{x}{\xi}\right)^n\right| = |a_n \xi^n| \left\{\left|\frac{x}{\xi}\right|\right\}^n$$

ёки (4) га асосан:

$$|a_n x^n| \leqslant M \left\{\left|\frac{x}{\xi}\right|\right\}^n. \tag{5}$$

Қўйилган шарт таъмин этилганда, яъни $|x| < |\xi|$ бўлганда берилган қаторларнинг модуллари ушбу

$$\sum M \left\{\left|\frac{x}{\xi}\right|\right\}^n$$

чексиз камаювчи прогрессиянинг мос ҳадларидан катта бўлолмайди. Бу эса қаторнинг абсолют яқинлашишини кўрсатади.

Натижа 1. Агарда $x = \xi$ қийматда қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда x нинг ҳар бир $|x| > |\xi|$ қийматида ҳам қатор узоқлашувчи бўлади.

Ҳақиқатда, агарда $|x| > |\xi|$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлса эди, у ҳолда исбот қилинган теоремага мувофиқ $|\xi| < |x|$ бўлганда ҳам у яқинлашувчи бўлар эди. Ҳолбуки, бу қўйилган шартга қарши. Демак, қатор бу ҳолда узоқлашувчи бўлади.

Натижа 2. Исбот қилинган теоремани ва ундан чиқарилган 1-натижани эътиборга олганда ҳамма вақт шундай аниқ ва мусбат R сони мавжудки, $|x| < R$ бўлганда, қатор абсолют яқинлашувчи бўлади ва $|x| > R$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади. Бундай хоссага эга бўлган R сонни қаторнинг **яқинлашиш радиуси** дейилади. $(-R, +R)$ интервални қаторнинг яқинлашиш соҳаси дейилади. $x = \pm R$ бўлган ҳолда қатор баъзан яқинлашувчи, баъзан узоқлашувчи бўлиши мумкин.

Мисол учун ушбу қаторни оламиз:

$$5x + 5^4x^4 + 5^9x^9 + 5^{16}x^{16} + \cdots$$

Бу қаторда:

$$u_n = (5x)^{n^2}; \ \lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim|5x|^{2n+1} = \lambda.$$

Агарда $|5x| < 1$, яъни $|x| < \frac{1}{5}$ бўлса, n чексизликка интилганда λ нолга интилади ва $|5x| > 1$, яъни $|x| > \frac{1}{5}$ бўлса чексизликка интилади; $x = \frac{1}{5}$ ва $x = -\frac{1}{5}$ бўлганда, қаторнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots; \quad -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots,$$

демак, бу ҳолларда қатор узоқлашади. Берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $\left(-\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}\right)$ бўлади.

Масалалар

Ушбу қаторларнинг n-ҳадлари тузилсин:

673. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \cdots$ Жавоб: $u_n = \frac{n}{n+1}$.

674. $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \cdots$ Жавоб: $u_n = \frac{n+1}{n^2}$.

675. $1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{3} + \frac{3^3}{4} + \cdots$ Жавоб: $u_n = \frac{3^{n-1}}{n}$.

676. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$ Жавоб: $u_n = (n+1)x^{n+1}$.

677. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$ Жавоб: $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Ушбу қаторларнинг йиғиндиси топилсин:

678. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ Жавоб: $S = 2$.

679. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$ Жавоб: $S=1.$

Кўрсатма: $u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$

680. Соф даврий каср берилган: 0, 232323... Бунинг ҳақиқий қиймати топилсин.

Жавоб: $\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\cdots=\frac{23}{99}.$

Ушбу қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

81. $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ Жавоб: яқинлашувчи.

682. $2+\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ Жавоб: яқинлашувчи.

683. $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\cdots$

Жавоб: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, демак, қатор узоқлашувчи бўлади.

684. $\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots$ Жавоб: узоқлашувчи.

685. $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\cdots$ Жавоб: узоқлашувчи.

Кўрсатма. $u_n=\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}.$

686. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\left(\frac{4}{5}\right)^{16}+\cdots$ Жавоб: яқинлашувчи.

687. $1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4^5}}+\cdots$ Жавоб: узоқлашувчи.

Ушбу қаторларнинг абсолют яқинлашиши исбот қилинсин:

688. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$

689. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$

690. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$

691. Ушбу қаторни яқинлашиши исбот қилинсин.

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{e}{3}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{e}{4}\right)^4+\cdots$$

692. x нинг қиймати қандай бўлганда ушбу

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\frac{x^n}{n}+\cdots$$

қатор абсолют яқинлашади? Жавоб: $|x|<1$ бўлганда.

693. r қандай бўлганда ушбу

$$r\sin\alpha+r^2\sin 2\alpha+r^3\sin 3\alpha+\cdots$$

қатор абсолют яқинлашади? Жавоб: $|r|<1$ бўлганда.

694. x ҳар қандай бўлса-да ушбу

$$\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cos 3x+\frac{1}{4^2}\cos 4x+\cdots$$

қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. Буни исбот қилинсин.
Кўрсатма. $|\cos nx|\leqslant 1$.

695. $|a|<1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}e^{nx}$ қатор x нинг ҳар бир қийматида абсолют яқинлашувчи бўлади.
Буни исбот қилинсин.

696. $|x|<\frac{1}{|b|}$ бўлган ҳолда ушбу

$$x+\frac{a+b}{2!}x^2+\frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3+$$

$$+\frac{(a-b)(a-2b)(a-3b)}{4!}x^4+\cdots$$

қатор абсолют яқинлашади. Буни исбот қилинсин.

697*. Ушбу қатор берилган:

$$1+\frac{1}{2(\log 2)^k}+\frac{1}{(3\log 3)^k}+\cdots+\frac{1}{n(\log n)^k}+\cdots$$

агарда $k>1$ бўлса қатор яқинлашувчи бўлади ва $k\leqslant 1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

698. Ушбу қатор берилган

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot 2}{(x+1)(x+2)}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$

агарда $x>1$ бўлса яқинлашувчи бўлади ва $x\leqslant 1$ бўлса узоқлашувчи бўлади. Буни исбот қилинсин.

Кўрсатма. Раабе аломати ишлатилсин.

Китобдаги баъзи масалаларни ечиш усуллари

38. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2++\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

Энг аввал касрнинг суратидаги

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

йигиндининг умумий ифодасини топамиз. Бунинг учун ушбу

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

формулани оламиз. Бунга мувофиқ:

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3,$$
$$3^3=(1+2)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2^2+2^3,$$
$$4^3=(1+3)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 3+3\cdot 1\cdot 3^2+3^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3=(1+n)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot n+3\cdot 1\cdot n^2+n^3.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб, сўнгра қисқартилса, ушбу ифода келиб чиқади:

$$(n+1)^3 = (n+1) + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + \\ + 3(1 + 2 + \cdots + n)$$

ёки

$$(n+1)^3 = (n+1) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2},$$

бундан

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n-1)}{n^3} = \dfrac{1}{3}$

Энг аввал касрнинг суратидаги йиғиндининг умумий ифодасини топамиз:

$$1\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1\cdot 2,$$

$$2\cdot 3 = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3,$$

. . . .

$$k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) - \frac{1}{3}(k-1)k(k+1),$$

. . . .

$$n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1).$$

Буларни ҳадлаб қўшиб, сўнгра қисқартирилса:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

71. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}=1.$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

бўлгани учун

$$\mathrm{m}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}=$$

$$=\lim\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

74. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\ln\left(a+e^{x+1}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\ln\left(a+e^{x+1}\right)+\ln e^x-\ln e^x\right]\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[x+\ln\left(\frac{a}{e^x}+e\right)\right]\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1.$$

77. Бутун бурчак билан яримталик бурчакнинг орасидаги муносабатни оламиз:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} . \tag{1}$$

Энди берилган ифоданинг тузилишини назарда тутиб, ушбу тенгликларни тузамиз:

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2^2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2},$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2^3}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^3},$$

. . . .

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Шунинг учун

$$\frac{1}{2^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} +$$

$$+ \frac{1}{2^3} \operatorname{tg} \frac{x}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Иккинчи томондан,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x \left(\sin \frac{x}{2^n} : \frac{x}{2^n} \right) \frac{1}{\cos \frac{x}{2^n}}} = \frac{1}{x},$$

демак, берилган ифоданинг лимити $\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

697. Берилган қаторни бундай ёзиш мумкин:

$$S=\left(\frac{1}{2(\lg 2)^k}+\frac{2}{3(\lg 3)^k}\right)+\left(\frac{1}{(4(\lg 4)^k}+\cdots+\frac{1}{7(\lg 7)^k}\right)+\cdots,$$

бундан

$$S<2\cdot\frac{1}{2(\lg 2)^k}+4\cdot\frac{1}{4(\lg 4)^k}+8\cdot\frac{1}{8(\lg 8)^k}+\cdots$$

$$S<\frac{1}{(\lg 2)^k}+\frac{1}{(\lg 4)^k}+\frac{1}{(\lg 8)^k}+\cdots$$

ёки

$$S<\frac{1}{(\lg 2)^k}\left\{1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\right\};$$

биз биламизки, $k>1$ бўлганда қавснинг ичидаги қатор яқинлашувчи бўлади демак, $k>1$ бўлганда берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Иккинчи томондан, берилган қаторни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S=\frac{1}{2(\lg 2)^k}+\left(\frac{1}{3(\lg 4)^k}+\frac{1}{4(\lg 3)^k}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{(5\,lg\,5)^k}+\cdots+\frac{1}{8(\lg 8)^k}\right)+\cdots,$$

бундан

$$S>\frac{1}{2(\lg 2)^k}+2\cdot\frac{1}{4(\lg 4)^k}+4\cdot\frac{1}{8(\lg 4)^k}+\cdots$$

ёки

$$S>\frac{1}{2(\lg 2)^k}\left\{1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\right\};$$

$k\leqslant 1$ бўлганда қавснинг ичидаги қатор узоқлашувчи бўлади, демак, $k\leqslant 1$ бўлганда берилган қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

МУНДАРИЖА

Автордан . . . .

1-боб. **Асосий тушунчалар**

§ 1. Кириш 7
§ 2. Сон тўғрисида тушунча 8
§ 3. Миқдорнинг абсолют қиймати 9
§ 4. Интервал ёки оралиқ. Чегараланган миқдорлар . . 10
§ 5. Функция 11
§ 6. Функциянинг қийматлари ва унинг аниқлик соҳаси . 14
§ 7. Функциянинг геометрик тасвири 16
§ 8. Элементар функциялар 18

2-боб. **Лимит (чек) назарияси**

§ 9. Сонлар кетма-кетлиги 36
§ 10. Сонлар кетма-кетлигининг лимити 37
§ 11. Чексиз кичик сон 40
§ 12. Чексиз катта сон 41
§ 13. Чексиз кичик сонларнинг асосий хоссалари 43
§ 14. Ўзгарувчи сонларнинг лимитлари тўғрисида асосий теоремалар. 46
§ 15. Функциянинг лимити 50
§ 16. Функциянинг лимитини ҳисоблаш мисоллари 55
§ 17*. Ўзгарувчи соннинг юқори ва қуйи чегаралари 61
§ 18*. Ўзгарувчи соннинг лимитга эга бўлиш белгилари 64

§ 19. Натурал логарифм асоси 66
§ 20. Чексиз кичик сонлар тартиби 74
§ 21. Чексиз кичик сонларни алмаштириш 76
§ 22. Функциянинг орттирмаси 77
§ 23. Функциянинг узлуксизлиги 79
§ 24. Узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва бўлинмаси 83
§ 25. Узлуксиз функцияларнинг асосий хоссалари 85
§ 26. Тескари функциянинг узлуксизлиги 92

3 - б о б. Ҳосила ва дифференциал

§ 27. Икки тарихий масала 97
§ 28. Функциянинг ҳосиласи 102
§ 29. Дифференциаллаш қоидалари 105
§ 30. Даражали функциянинг хосиласи . . . 105
§ 31. $y=af(x)$ нинг ҳосиласи (a — ўзгармас) . 111
§ 32. Ўзгармас соннинг ҳосиласи 112
§ 33. Йиғиндининг ҳосиласи 112
§ 34. Кўпайтманинг ҳосиласи 115
§ 35. Касрнинг ҳосиласи 118
§ 36. Функциядан функциянинг ҳосиласи 121
§ 37. Логарифмнинг ҳосиласи 126
§ 38. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи 129
§ 39. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари . . . 133
§ 40. Тескари функциянинг ҳосиласи 137
§ 41. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари . 138
§ 42. Гиперболик функциялар ва уларни дифференциаллаш 141
§ 43. Ошкормас функцияни дифференциаллаш . . . 147
§ 44. Дифференциал ва унинг геометрик маъноси . . 150
§ 45. Юқори тартибли ҳосилалар ва дифференциаллар . 157

4 - б о б. Ҳосиланинг функция текширишга татбиқи

§ 46. Рол теоремаси 165
§ 47. Лагранж формуласи 167
§ 48. Коши формуласи 170
§ 49. Функциянинг ўсиши ва камайиши 172
§ 50. Функциянинг максимуми ва минимуми . . . 174
§ 51. Максимум ва минимумни топиш учун 2-усул . 181
§ 52. Аниқмас ифодалар ва уларнинг типлари . . 189

5 - б о б. Дифференциал ҳисобнинг геометрияга татбиқи. Текисликдаги чизиқлар[1].

§ 53. Текисликдаги чизиқнинг аналитик ифодаси . . . 204
§ 54. Параметрик функцияларни дифференциаллаш . . 208
§ 55. Ёйнинг дифференциали 209

§ 56. Уринма ва нормал тенгламалари. 214
§ 57. Уринма ва нормал узунликлари: уринма-ости ва нормал-ости. 217
§ 58. Уринма қутб координата системасида 220
§ 59. Қутб координата системасида уринма ва нормал узунликлари. Уринма ости ва нормал ости. 221
§ 60. Эгри чизиқнинг букилма ва бурилма нуқталари. 226
§ 61. Эгри чизиқнинг эгрилиги 230
§ 62. Эгри чизиқ эгрилигини қутб координаталар системасида ифода қилиш 234
§ 63. Эгрилик доираси ва эгрилик маркази 236
§ 64. Эволюта 239

6-боб. Интеграллаш асослари

(Биринчи интеграл)

§ 65. Аниқмас интеграл 246
§ 66. Асосий интеграллаш формулалари . . . 248
§ 67. Асосий интеграллаш қоидалари . . . 252
§ 68. Алмаштириш методи 256
§ 69. Бўлаклаб интеграллаш методи . . 261
§ 70. Интегралларнинг баъзи типлари . . 267
§ 71. Интеграл ўзгармасини аниқлаш . . 273
§ 72. Аниқ интеграл тўғрисида тушунча . . 274
§ 73. Аниқ интегралнинг геометрик маъноси. 276
§ 74. Аниқ интегралнинг хоссалари. . . 281
§ 75. Эгри чизиқнинг юзи қутб системасида . 285

7-боб. Кўп аргументли функциялар

§ 76. Кўп аргументли функцияларнинг узлуксизлиги 289
§ 77. Хусусий ҳосилалар 290
§ 78. Мураккаб функциянинг ҳосиласи ва дифференциали . . . 296
§ 79. Кўп аргументли функциянинг юқори тартибли ҳосилалари . . 300
§ 80. Кўп аргументли функциянинг юқори тартибли дифференциаллари 305
§ 81. Ошкормас функциянинг ҳосилалари 310
§ 82*. Функционал детерминат тўғрисида 318
§ 83. Бир жинсли функциялар. Эйлер теоремаси 322

8-боб. Ўзгарувчиларни алмаштириш

§ 84. Эркли ўзгарувчини алмаштириш. 329
§ 85. Функцияни алмаштириш 332
§ 86. Эркли ўзгарувчини ва функцияни алмаштириш . . 334
§ 87. Эркли ўзгарувчилар бир неча бўлган ҳол. . . 336

9 - б о б. **Чексиз қаторлар назарияси**

§ 88. Чексиз қаторлар 347
§ 89. Мусбат ҳадли қаторлар. Умумий мулоҳазалар . . 353
§ 90. Ҳадларининг ишоралари ҳар хил бўлган қаторлар 363
§ 91. Ҳадлари ўзгарувчи қаторлар. 368
§ 92. Текис яқинлашиш аломати. 370
§ 93. Текис яқинлашувчи қаторларининг асосий хоссаси 371
§ 94. Даражали қаторлар. Яқинлашиш радиуси . . 372
Китобдаги баъзи масалаларни ечиш усуллари . . . 377

На узбекском языке

Ташмухамед Ниязович Кары-Ниязов

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
В 8 ТОМАХ

Том второй

ОСНОВНОЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Издательство „Фан" УзССР
Ташкент · 1968

Нашриёт муҳаррири *Р. Қучқортоева*
Рассом *В. Тип*
Расмлар муҳаррири *В. Расулев*
Техмуҳаррир *Г. Колесник*
Корректор *М. Алиева*

Р15956. Теришга берилди 7/VIII-1968 й. Босишга рухсат этилди 16/XII-1968 й. Формати $60\times90^{1}/_{16}$ = 12,125 қогоз л. = 24,25 босма л. Уч. нашриёт л. 20,5. Нашриёт № 2798. Тиражи 3000
Баҳоси. 2 с. 25 т.
УзССР „ФАН" нашриётининг босмахонаси, Черданцев кўчаси, 21. Заказ 177
Нашриёт адреси: Гоголь кўчаси, 70

Қори-Ниёзий Тошмуҳаммад Ниёзович.
Танланган асарлар. 8 томлик. т. 2. Т., «Фан», 1968.
(ЎзССР. Фанлар академияси).
Т. 2. Асосий математик анализ курси. Дифференциал ҳисоб қўшимчалар билан янгидан ишланган 3-босмаси. 1968. 388 бет.
Тиражи 3000.
Кары-Ниязов Т. Н. Избранные труды в 8 томах. Том. 2.
517.2