



MATHEMATICAL HANDBOOK FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS

**DEFINITIONS, THEOREMS AND FORMULAS
FOR REFERENCE AND REVIEW**

**GRANINO A. KORN, PH. D.
PROFESSOR OF ELECTRICAL ENGINEERING
UNIVERSITY OF ARIZONA
THERESA M. KORN, M. S.**

**McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.
NEW YORK TORONTO LONDON 1961**

510.
К67

51
К-67

Г. КОРН и Т. КОРН

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ И ИНЖЕНЕРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕМЫ, ФОРМУЛЫ

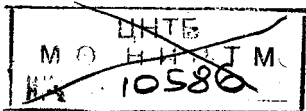
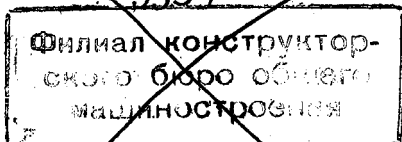
Перевод с английского
И. Г. АРАМАНОВИЧА, А. М. БЕРЕЗМАНА,
И. А. ВАЙНШТЕЙНА, Л. Э. РУМШИСКОГО и Л. Я. ЦЛАФА

Под общей редакцией
И. Г. АРАМАНОВИЧА



11.01.2010

20109-49



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

51 (03)

К 67

УДК 510

АННОТАЦИЯ

«Справочник» содержит сведения по большинству областей математики, которые могут понадобиться научному работнику и инженеру-исследователю. Опустив все доказательства и широко используя табличную форму изложения, авторы смогли сосредоточить в одной книге большой фактический материал по следующим разделам: высшая алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, математический анализ (включая интегралы Лебега и Стильеса), векторный и тензорный анализ, криволинейные координаты, функции комплексного переменного, операционное исчисление, дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными, вариационное исчисление, абстрактная алгебра, матрицы, линейные векторные пространства, операторы и теория представлений, интегральные уравнения, краевые задачи, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы анализа, специальные функции.

Г. Корн, Т. Корн

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ для научных работников и инженеров

М., 1968 г., 720 стр., с илл.

Редакторы *И. Г. Араманович, Л. Я. Цлаф*

Технич. редактор *С. Я. Шмалр*

Корректоры *Т. С. Вайсберг, В. П. Сорокина*

Сдано в набор 23/VIII 1967 г.

Подписано к печати 12/VII 1968 г.

Бумага

60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 45.

Условн. печ. л. 45.

Уч.-изд. л. 53,42.

Тираж 100000 экз.

Цена книги 3р. 03

к. Заказ № 11008.

Издательство «Наука».

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

г. Будапешт, типография Франклин

2-2-3
188-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень таблиц	23
Предисловие переводчиков	27
Из предисловия авторов	29

Глава 1

Действительные и комплексные числа. Элементарная алгебра

1.1. Введение. Система действительных чисел	31
1.1-1. Вводные замечания (31). 1.1-2. Действительные числа (31). 1.1-3. Отношение равенства (32). 1.1-4. Отношение тождества (32). 1.1-5. Неравенства (32). 1.1-6. Абсолютные величины (32).	
1.2. Степени, корни, логарифмы и факториалы. Обозначения сумм и произведений	33
1.2-1. Степени и корни (33). 1.2-2. Формулы для уничтожения иррациональности в знаменателе дроби (33). 1.2-3. Логарифмы (34). 1.2-4. Факториалы (34). 1.2-5. Обозначения сумм и произведений (34). 1.2-6. Арифметическая прогрессия (34). 1.2-7. Геометрическая прогрессия (35).	
1.3. Комплексные числа	35
1.3-1. Вводные замечания (35). 1.3-2. Изображение комплексных чисел точками или радиусами-векторами. Тригонометрическая форма комплексного числа (36). 1.3-3. Представление суммы, произведения и частного. Степени и корни (36).	
1.4. Различные формулы	37
1.4-1. Бином Ньютона и родственные формулы (37). 1.4-2. Пропорции (38). 1.4-3. Многочлены. Симметрические функции (38).	
1.5. Определители	39
1.5-1. Определение (39). 1.5-2. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или по столбцу (39). 1.5-3. Примеры: определители второго и третьего порядка (39). 1.5-4. Дополнительные миноры. Разложение Ламбласа (40). 1.5-5. Различные теоремы (40). 1.5-6. Умножение определителей (41). 1.5-7. Изменение порядка определителей (41).	
1.6. Алгебраические уравнения: общие теоремы	41
1.6-1. Вводные замечания (41). 1.6-2. Решение уравнения. Корни (41). 1.6-3. Алгебраические уравнения (41). 1.6-4. Соотношения между корнями и коэффициентами (42). 1.6-5. Дискриминант алгебраического уравнения (42). 1.6-6. Действительные алгебраические уравнения и их корни (42).	
1.7. Разложение многочленов на множители и деление многочленов. Элементарные дроби	44

1.7-1. Разложение многочленов на множители (44).	1.7-2. Деление многочленов. Остаток. (45).	1.7-3. Общие делители и общие корни двух многочленов (45).	1.7-4. Разложение на элементарные дроби (46).	
1.8. Линейные, квадратные, кубические уравнения и уравнения четвертой степени				47
1.8-1. Решение линейных уравнений (47).	1.8-2. Решение квадратных уравнений (47).	1.8-3. Кубические уравнения: решение Кардано (47).	1.8-4. Кубические уравнения: тригонометрическое решение (48).	
	1.8-5. Уравнения четвертой степени: решение Декарта—Эйлера (48).	1.8-6. Уравнения четвертой степени: решение Феррари (48).		
1.9. Системы уравнений				49
1.9-1. Системы уравнений (49).	1.9-2. Системы линейных уравнений: правило Крамера (49).	1.9-3. Линейная независимость (50).	1.9-4. Системы линейных уравнений: общая теория (50).	
	1.9-5. Системы линейных уравнений: n однородных уравнений с n неизвестными (51).			

Глава 2

Аналитическая геометрия на плоскости

2.1. Введение и основные понятия				52
2.1-1. Вводные замечания (52).	2.1-2. Декартова система координат (52).	2.1-3. Правая декартова прямоугольная система координат (53).	2.1-4. Основные формулы в декартовых прямоугольных координатах (53).	
	2.1-5. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей (54).	2.1-6. Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей (54).	2.1-7. Одновременный перенос и поворот координатных осей (55).	
	2.1-8. Полярные координаты (55).	2.1-9. Способы задания кривых (56).		
2.2. Прямая линия				56
2.2-1. Уравнение прямой линии (56).	2.2-2. Другие способы задания прямой (57).			
2.3. Взаимное расположение точек и прямых				58
2.3-1. Точки и прямые (58).	2.3-2. Две или несколько прямых (58).	2.3-3. Тангенциальные координаты (59).		
2.4. Кривые второго порядка (конические сечения)				60
2.4-1. Общее уравнение второй степени (60).	2.4-2. Инварианты (60).	2.4-3. Классификация конических сечений (60).	2.4-4. Условие лободия невырожденных конических сечений (60).	
	2.4-5. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение (60).	2.4-6. Центры и диаметры конических сечений (61).	2.4-7. Главные оси (62).	
	2.4-8. Приведение уравнения кривой второго порядка к стандартному (каноническому) виду (62).	2.4-9. Геометрическое определение невырожденной кривой второго порядка (63).	2.4-10. Касательные и нормали конического сечения. Полусы и полюсы (64).	
	2.4-11. Другие способы задания конических сечений (64).			
2.5. Свойства окружностей, эллипсов, гипербол и парабол				66
2.5-1. Окружность: формулы и теоремы (66).	2.5-2. Эллипс и гипербола: формулы и теоремы (67).	2.5-3. Построение эллипсов и гипербол, их касательных и нормалей (69).	2.5-4. Построение параболы, ее касательных и нормалей (69).	
2.6. Уравнения некоторых плоских кривых				69
2.6-1. Примеры алгебраических кривых (69).	2.6-2. Примеры трансцендентных кривых (70).			

Глава 3

Аналитическая геометрия в пространстве

3.1. Введение и основные понятия				72
3.1-1. Вводные замечания (72).	3.1-2. Декартова система координат (72).	3.1-3. Правая система осей (72).	3.1-4. Правая декартова прямоугольная система координат (72).	
	3.1-5. Радиус-вектор (73).	3.1-6. Цилиндрическая и сферическая системы координат (73).	3.1-7. Основ-	

ные формулы в декартовых прямоугольных координатах и в векторной форме (73), 3.1-8. Направляющие косинусы (74), 3.1-9. Проекция (75), 3.1-10. Вектор площади (75), 3.1-11. Вычисление объемов (76), 3.1-12. Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе и повороте осей (76), 3.1-13. Аналитическое задание кривых (77), 3.1-14. Способы задания поверхностей (78), 3.1-15. Специальные типы поверхностей (78), 3.1-16. Поверхности и кривые (78).	
3.2. Плоскость	79
3.2-1. Уравнение плоскости (79), 3.2-2. Параметрическое задание плоскости (80).	
3.3. Прямая линия	81
3.3-1. Уравнения прямой (81), 3.3-2. Параметрические уравнения прямой (82).	
3.4. Взаимное расположение точек, плоскостей и прямых	82
3.4-1. Углы (82), 3.4-2. Расстояния (83), 3.4-3. Специальные случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей (84), 3.4-4. Тангенциальные координаты плоскости и принцип двойственности (85), 3.4-5. Некоторые дополнительные соотношения (85).	
3.5. Поверхности второго порядка	85
3.5-1. Общее уравнение второй степени (85), 3.5-2. Инварианты (86), 3.5-3. Классификация поверхностей второго порядка (86), 3.5-4. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение (86), 3.5-5. Диаметральные плоскости, диаметры и центры поверхностей второго порядка (88), 3.5-6. Главные плоскости и главные оси (89), 3.5-7. Приведение уравнения поверхности второго порядка к стандартному (каноническому) виду (89), 3.5-8. Касательные плоскости и нормали поверхности второго порядка. Полосы и поляры (93), 3.5-9. Некоторые дополнительные формулы и теоремы (94), 3.5-10. Параметрическое задание поверхностей второго порядка (94).	

Глава 4

Функции и пределы. Дифференциальное и интегральное исчисление

4.1. Введение	95
4.2. Функции	95
4.2-1. Функции и переменные (95), 4.2-2. Функции со специальными свойствами (96).	
4.3. Точечные множества, интервалы и области	96
4.3-1. Вводные замечания (96), 4.3-2. Свойства множеств (97), 4.3-3. Границы (97), 4.3-4. Интервалы (98), 4.3-5. Определение окрестностей (98), 4.3-6. Открытые и замкнутые множества и области (99).	
4.4. Пределы, непрерывные функции и смежные вопросы	99
4.4-1. Пределы функций и последовательностей (99), 4.4-2. Операции над пределами (100), 4.4-3. Асимптотические соотношения между двумя функциями (100), 4.4-4. Равномерная сходимости (101), 4.4-5. Пределы по совокупности переменных и повторные пределы (101), 4.4-6. Непрерывные функции (102), 4.4-7. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность (103), 4.4-8. Монотонные функции и функции ограниченной вариации (103).	
4.5. Дифференциальное исчисление	104
4.5-1. Производные и дифференцирование (104), 4.5-2. Частные производные (106), 4.5-3. Дифференциалы (106), 4.5-4. Правила дифференцирования (108), 4.5-5. Однородные функции (108), 4.5-6. Якобианы и функциональная зависимость (108), 4.5-7. Неявные функции (110).	
4.6. Интегралы и интегрирование	111
4.6-1. Определенные интегралы (интеграл Римана) (111), 4.6-2. Неопределенные интегралы (113), 4.6-3. Среднее значение (115), 4.6-4. Неопределенные интегралы (115), 4.6-5. Основная теорема интегрального исчисления (115), 4.6-6. Методы интегрирования (115), 4.6-7. Эллиптические интегралы (117), 4.6-8. Кратные интегралы (117), 4.6-9. Длина дуги спрямляемой кривой (118), 4.6-10. Криволинейные интегралы (119).	

4.6-11. Площади и объемы (119).	4.6-12. Интегралы по поверхности и по объему (120).	4.6-13. Замена переменных в интегралах по объему и по поверхности (121).	4.6-14. Мера Лебега. Измеримые функции (122).	4.6-15. Интеграл Лебега (123).	4.6-16. Теоремы о сходимости (125).	4.6-17. Интеграл Стильбеса (125).	4.6-18. Свертки (126).	4.6-19. Неравенства Минковского и Гельдера (127).	
4.7. Теоремы о среднем значении. Раскрытие неопределенностей. Теоремы Вейерштрасса о приближении									127
4.7-1. Теоремы о среднем значении (127).	4.7-2. Раскрытие неопределенностей (128).	4.7-3. Теоремы Вейерштрасса о приближении (129).							
4.8. Бесконечные ряды, бесконечные произведения и непрерывные дроби									130
4.8-1. Бесконечные ряды. Сходимость (130).	4.8-2. Ряды функций. Равномерная сходимость (131).	4.8-3. Операции над сходящимися рядами (131).	4.8-4. Операции над бесконечными рядами функций (132).	4.8-5. Улучшение сходимости и суммирование рядов (133).	4.8-6. Расходящиеся бесконечные ряды (134).	4.8-7. Бесконечные произведения (135).	4.8-8. Непрерывные дроби (136).		
4.9. Признаки сходимости и равномерной сходимости бесконечных рядов и несобственных интегралов									136
4.9-1. Признаки сходимости бесконечных рядов (136).	4.9-2. Признаки равномерной сходимости бесконечных рядов (137).	4.9-3. Признаки сходимости несобственных интегралов (138).	4.9-4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов (139).						
4.10. Разложение функций в бесконечный ряд и представление их интегралом. Степенные ряды и ряд Тейлора									140
4.10-1. Разложение функций в бесконечный ряд и представление их интегралом (140).	4.10-2. Степенные ряды (140).	4.10-3. Теоремы Абеля и Таубера (141).	4.10-4. Ряд Тейлора (141).	4.10-5. Кратный ряд Тейлора (142).					
4.11. Ряды Фурье и интегралы Фурье									143
4.11-1. Вводные замечания (143).	4.11-2. Ряды Фурье (143).	4.11-3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье (144).	4.11-4. Функции, разложимые в ряд Фурье и представимые интегралом Фурье. Гармонический анализ (145).	4.11-5. Некоторые свойства коэффициентов Фурье и преобразования Фурье (148).	4.11-6. Интегралы Дирихле и Фейера (152).	4.11-7. Суммирование средними арифметическими (155).	4.11-8. Кратные ряды и интегралы Фурье (155).		

Глава 5

Векторный анализ

5.1. Векторы в евклидовом пространстве									157	
5.2. Векторная алгебра									157	
5.2-1. Сложение векторов и умножение вектора на (действительный) скаляр (157).	5.2-2. Разложение векторов по базисным векторам (158).	5.2-3. Декартовы прямоугольные координаты вектора (158).	5.2-4. Векторы и физические размерности (159).	5.2-5. Модуль вектора (159).	5.2-6. Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов (159).	5.2-7. Векторное произведение двух векторов (159).	5.2-8. Смешанное (векторно-скалярное) произведение (160).	5.2-9. Другие произведения, содержащие более двух векторов (160).	5.2-10. Разложение вектора α по направлению единичного вектора u и ϵ ему перпендикулярному (161).	5.2-11. Решение уравнений (161).
5.3. Векторные функции скалярного аргумента									161	
5.3-1. Векторные функции и их пределы (161).	5.3-2. Дифференцирование (161).	5.3-3. Интегрирование и обыкновенные дифференциальные уравнения (162).								
5.4. Скалярные и векторные поля									163	
5.4-1. Вводные замечания (163).	5.4-2. Скалярные поля (163).	5.4-3. Векторные поля (163).	5.4-4. Векторный элемент линии и длина дуги (163).	5.4-5. Криволинейные (линейные) интегралы (164).	5.4-6. Поверхностные интегралы (164).	5.4-7. Объемные интегралы (165).				

5.5. Дифференциальные операторы	166
5.5-1. Градиент, дивергенция и ротор; инвариантные определения (166). 5.5-2. Оператор ∇ (166). 5.5-3. Полный дифференциал, полная производная и производная по направлению (168). 5.5-4. Производные высших порядков по направлению. Ряд Тейлора (168). 5.5-5. Оператор Лапласа (169). 5.5-6. Операции второго порядка (169). 5.5-7. Операции над простейшими функциями от r (169). 5.5-8. Функции от двух и более радиусов-векторов (170).	
5.6. Интегральные теоремы	170
5.6-1. Теорема о дивергенции и связанные с ней теоремы (170). 5.6-2. Теорема о роторе и связанные с ней теоремы (171). 5.6-3. Поля с разрывами на поверхностях (172).	
5.7. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции	172
5.7-1. Безвихревое векторное поле (172). 5.7-2. Соленоидальные (трубчатые) векторные поля (173). 5.7-3. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции (173).	

Глава 6

Системы криволинейных координат

6.1. Вводные замечания	175
6.2. Системы криволинейных координат	175
6.2-1. Криволинейные координаты (175). 6.2-2. Координатные поверхности и координатные линии (175). 6.2-3. Элементы длины дуги и объема (176).	
6.3. Криволинейные координаты вектора	177
6.3-1. Координаты вектора и локальный (местный) базис (177). 6.3-2. Физические координаты вектора (177). 6.3-3. Контравариантные и ковариантные координаты вектора (177). 6.3-4. Запись векторных соотношений в криволинейных координатах (179).	
6.4. Системы ортогональных координат. Векторные соотношения в ортогональных координатах	179
6.4-1. Ортогональные координаты (179). 6.4-2. Векторные соотношения (179). 6.4-3. Криволинейный интеграл, поверхностный интеграл и объемный интеграл (180).	
6.5. Формулы для специальных систем ортогональных координат ...	181

Глава 7

Функции комплексного переменного

7.1. Вводные замечания	193
7.2. Функции комплексного переменного. Области в комплексной плоскости	193
7.2-1. Функции комплексного переменного (193). 7.2-2. z -плоскость и w -плоскость. Окрестности. Бесконечно удаленные точки (193). 7.2-3. Кривые и контуры (195). 7.2-4. Границы и области (196). 7.2-5. Комплексные контурные интегралы (196).	
7.3. Аналитические (регулярные, голоморфные) функции	197
7.3-1. Производная функция (197). 7.3-2. Уравнения Коши—Римана (197). 7.3-3. Аналитические функции (197). 7.3-4. Свойства аналитических функций (197). 7.3-5. Теорема о максимуме модуля (198).	
7.4. Многозначные функции	198
7.4-1. Ветви (198). 7.4-2. Точки разветвления и разрезы (198). 7.4-3. Римановы поверхности (199).	
7.5. Интегральные теоремы и разложения в ряды	200
7.5-1. Интегральные теоремы (200). 7.5-2. Разложение в ряд Тейлора (201). 7.5-3. Разложение в ряд Лорана (201).	
7.6. Нули и изолированные особые точки	202
7.6-1. Нули (202). 7.6-2. Особые точки (особенности) (202). 7.6-3. Нули и особенности в бесконечности (204). 7.6-4. Теоремы Вейерштрасса и	

Пикара (204). 7.6-5. Целые функции (204). 7.6-6. Разложение целой функции в произведении (204). 7.6-7. Мероморфные функции (205). 7.6-8. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (205). 7.6-9. Нули и полюсы мероморфных функций (205).	
7.7. Вычеты и контурные интегралы	206
7.7-1. Вычеты (206). 7.7-2. Теорема о вычетах (206). 7.7-3. Вычисление определенных интегралов (207). 7.7-4. Применение вычетов к суммированию рядов (208).	
7.8. Аналитическое продолжение	208
7.8-1. Аналитическое продолжение и моногенные аналитические функции (208). 7.8-2. Методы аналитического продолжения (209).	
7.9. Конформное отображение	209
7.9-1. Конформное отображение (209). 7.9-2. Дробно-линейное отображение (преобразование) (210). 7.9-3. Отображение $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ (211). 7.9-4. Интеграл Шварца—Кристоффеля (211). 7.9-5. Таблица отображений (212). 7.9-6. Функции, отображающие специальные области на единичный круг (220).	

Глава 8

Преобразование Лапласа и другие интегральные преобразования

8.1. Вводные замечания	222
8.2. Преобразование Лапласа	222
8.2-1. Определение (222). 8.2-2. Абсолютная сходимость (222). 8.2-3. Область определения (223). 8.2-4. Достаточные условия существования преобразования Лапласа (223). 8.2-5. Обратное преобразование Лапласа (223). 8.2-6. Теорема обращения (223). 8.2-7. Существование обратного преобразования Лапласа (224). 8.2-8. Единственность преобразования Лапласа и его обращения (224).	
8.3. Соответствие между операциями над оригиналами и изображениями	224
8.3-1. Таблица соответствия операций (224). 8.3-2. Преобразование Лапласа периодических функций и произведений оригиналов на синус или косинус (224). 8.3-3. Преобразование произведения (теорема о свертке) (226). 8.3-4. Предельные теоремы (227).	
8.4. Таблицы преобразования Лапласа и вычисление обратных преобразований Лапласа	227
8.4-1. Таблицы преобразования Лапласа (227). 8.4-2. Вычисление обратных преобразований Лапласа (243). 8.4-3. Применение контурного интегрирования (243). 8.4-4. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение Хевисайда (243). 8.4-5. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение на простейшие дроби (244). 8.4-6. Разложения в ряды (244). 8.4-7. Разложения по степеням t (245). 8.4-8. Разложения по многочленам Лагерра (245). 8.4-9. Разложения в асимптотические ряды (245).	
8.5. Формальное преобразование Лапласа импульсных функций	246
8.6. Некоторые другие функциональные преобразования	247
8.6-1. Вводные замечания (247). 8.6-2. Двустороннее преобразование Лапласа (247). 8.6-3. Преобразование Лапласа в форме интеграла Стильгеса (249). 8.6-4. Преобразования Ганкеля и Фурье—Бесселя (249). 8.6-5. Ряды как функциональные преобразования. Производящие функции (251).	

Глава 9

Обыкновенные дифференциальные уравнения

9.1. Введение	252
9.1-1. Вводные замечания (252). 9.1-2. Обыкновенные дифференциальные уравнения (252). 9.1-3. Системы дифференциальных уравнений (253). 9.1-4. Существование решений (253). 9.1-5. Общие указания (253).	

9.2. Уравнения первого порядка	254
9.2-1. Существование и единственность решений (254). 9.2-2. Геометрическое толкование. Особые интегралы (254). 9.2-3. Преобразование переменных (255). 9.2-4. Решение специальных типов уравнений первого порядка (256). 9.2-5. Общие методы интегрирования (257).	
9.3. Линейные дифференциальные уравнения	258
9.3-1. Линейные дифференциальные уравнения. Принцип наложения (258). 9.3-2. Линейная независимость и фундаментальные системы решений (259). 9.3-3. Решение методом вариации постоянных. Функции Грина (259). 9.3-4. Приведение двухточечных краевых задач к задачам Коши (261). 9.3-5. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области. Тейлоровские разложения решения и влияние особенностей (261). 9.3-6. Решение однородных уравнений путем разложения в ряд в окрестности правильной особой точки (263). 9.3-7. Методы интегральных преобразований (264). 9.3-8. Линейные уравнения второго порядка (264). 9.3-9. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение Гаусса и P-уравнение Римана (266). 9.3-10. Вырожденные гипергеометрические функции (267). 9.3-11. Обобщенные гипергеометрические ряды (268).	
9.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	268
9.4-1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (268). 9.4-2. Неоднородные уравнения (270). 9.4-3. Свертки и функции Грина (270). 9.4-4. Устойчивость (272). 9.4-5. Операторный метод решения (272). 9.4-6. Периодические внешние нагрузки и решения (273). 9.4-7. Передаточные функции и частотные характеристики (274). 9.4-8. Нормальные координаты и собственные колебания (275).	
9.5. Нелинейные уравнения второго порядка	276
9.5-1. Вводные замечания (276). 9.5-2. Представление на фазовой плоскости. Графический метод решения (276). 9.5-3. Особые точки и предельные циклы (277). 9.5-4. Устойчивость решений по Ляпунову (279). 9.5-5. Приближенный метод Крылова и Боголюбова (280). 9.5-6. Интеграл живых сил (281).	
9.6. Дифференциальные уравнения Пфаффа	282
9.6-1. Дифференциальные уравнения Пфаффа (282). 9.6-2. Вполне интегрируемый случай (282).	

Глава 10

Дифференциальные уравнения с частными производными

10.1. Введение и обзор	283
10.1-1. Вводные замечания (283). 10.1-2. Дифференциальные уравнения с частными производными (283). 10.1-3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными; разделение переменных (284).	
10.2. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка	285
10.2-1. Уравнения с двумя независимыми переменными. Геометрическая интерпретация (285). 10.2-2. Задача с начальными условиями (задача Коши) (286). 10.2-3. Полные интегралы. Общие, частные, особые интегралы; решения характеристических уравнений (287). 10.2-4. Уравнения с n независимыми переменными (288). 10.2-5. Преобразования сопряжения (290). 10.2-6. Канонические уравнения и канонические преобразования (291). 10.2-7. Уравнение Гамильтона—Якоби. Решение канонических уравнений (294).	
10.3. Гиперболические, параболические и эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными. Характеристики	296
10.3-1. Квазилинейные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристики (296). р 10.3-2. Решение гиперболических уравнений методом характеристик (297). 10.3-3. Преобразование гиперболических, параболических и эллиптических уравнений к каноническому виду (298). 10.3-4. Типичные краевые задачи для уравнений второго порядка (299). 10.3-5. Одномерное волновое уравнение (300). 10.3-6. Метод Римана — Вольтера для линейных гиперболических уравнений (302). 10.3-7. Уравнения с тремя и более независимыми переменными (302).	

10.4. Линейные уравнения математической физики. Частные решения	303
10.4-1. Физические основы и обзор (303). 10.4-2. Линейные краевые задачи (305). 10.4-3. Частные решения уравнения Лапласа: трехмерный случай (306). 10.4-4. Частные решения для трехмерного уравнения Гельмгольца (308). 10.4-5. Частные решения двумерных проблем (309). 10.4-6. Уравнение Шредингера (310). 10.4-7. Частные решения для уравнения диффузии (310). 10.4-8. Частные решения для волнового уравнения. Синусоидальные волны (311). 10.4-9. Решение краевой задачи разложением в ортогональные ряды. Примеры (312).	
10.5. Метод интегральных преобразований	314
10.5-1. Общая теория (314). 10.5-2. Преобразование Лапласа по временной переменной (315). 10.5-3. Решение краевых задач методом интегральных преобразований. Примеры (315). 10.5-4. Формулы Дюамеля (316).	

Глава 11

Максимумы и минимумы

11.1. Вводные замечания	318
11.2. Максимумы и минимумы (экстремальные значения) функций одного действительного переменного	318
11.2-1. Локальные максимумы и минимумы (318). 11.2-2. Условия существования внутренних максимумов и минимумов (319).	
11.3. Максимумы и минимумы (экстремальные значения) функций двух и большего числа действительных переменных	319
11.3-1. Локальные максимумы и минимумы (319). 11.3-2. Формула для приращения функции (319). 11.3-3. Условия существования внутренних максимумов и минимумов (320). 11.3-4. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа (320). 11.3-5. Граничные максимумы и минимумы. Задачи линейного программирования (321).	
11.4. Вариационное исчисление. Максимумы и минимумы определенных интегралов	321
11.4-1. Вариации (321). 11.4-2. Максимумы и минимумы определенных интегралов (322). 11.4-3. Решение вариационных задач (323).	
11.5. Решение вариационных задач с помощью дифференциальных уравнений	323
11.5-1. Необходимые условия максимумов и минимумов (323). 11.5-2. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа (325). 11.5-3. Изопериметрические задачи (325). 11.5-4. Вариационные задачи с неизвестными граничными значениями и неизвестными пределами интегрирования (326). 11.5-5. Решение вариационных задач в случае, когда подынтегральная функция содержит производные высших порядков (326). 11.5-6. Канонические уравнения (326). 11.5-7. Вариационные задачи в случае нескольких независимых переменных: максимумы и минимумы кратных интегралов (327).	
11.6. Решение вариационных задач прямыми методами	328
11.6-1. Прямые методы (328). 11.6-2. Метод Релея—Ритца (329). 11.6-3. Приближение $y(x)$ полигональными функциями (329).	

Глава 12

Определение математических моделей: современная (абстрактная) алгебра и абстрактные пространства

12.1. Введение	330
12.1-1. Математические модели (330). 12.1-2. Обзор (331). 12.1-3. «Равенство» и отношения эквивалентности (331). 12.1-4. Преобразования, функции, операции (331). 12.1-5. Инвариантность (332). 12.1-6. Представление одной модели другой: гомоморфизмы и изоморфизмы (332).	

12.2. Алгебра моделей с одной определяющей операцией: группы	333
12.2-1. Определение и основные свойства группы (333). 12.2-2. Подгруппы (334). 12.2-3. Циклические группы. Порядок элемента группы (334). 12.2-4. Произведения подмножеств. Смежные классы (334). 12.2-5. Сопряженные элементы и подгруппы. Нормальные делители. Фактор-группы (334). 12.2-6. Нормальный ряд. Композиционный ряд (335). 12.2-7. Центр. Нормализаторы (335). 12.2-8. Группы преобразований или операторов (335). 12.2-9. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Представление групп (335). 12.2-10. Аддитивные группы. Классы вычетов и сравнимость (336).	
12.3. Алгебра моделей с двумя определяющими операциями: кольца, поля и области целостности	336
12.3-1. Определения и основные теоремы (336). 12.3-2. Подкольца и подполя. Идеалы (337). 12.3-3. Расширения (337).	
12.4. Модели, включающие в себя более одного класса математических объектов: линейные векторные пространства и линейные алгебры	338
12.4-1. Линейные векторные пространства (338). 12.4-2. Линейные алгебры (338).	
12.5. Модели, допускающие определение предельных процессов: топологические пространства	339
12.5-1. Топологические пространства (339). 12.5-2. Метрические пространства (340). 12.5-3. Топология, окрестности и сходимость в метрическом пространстве (340). 12.5-4. Метрические пространства со специальными свойствами. Теория точечных множеств (341).	
12.6. Порядок	342
12.6-1. Частично упорядоченные множества (342). 12.6-2. Линейно упорядоченные множества (342). 12.6-3. Упорядоченные поля (342).	
12.7. Комбинации моделей: прямое произведение, топологическое произведение и прямая сумма	343
12.7-1. Декартово произведение (343). 12.7-2. Прямое произведение групп (343). 12.7-3. Прямое произведение действительных векторных пространств (343). 12.7-4. Топологическое произведение (343). 12.7-5. Прямая сумма (343).	
12.8. Булевы алгебры	344
12.8-1. Булевы алгебры (344). 12.8-2. Булевы функции. Приведение к каноническому виду (345). 12.8-3. Отношение включения (345). 12.8-4. Полная аддитивность. Алгебры меры (346). 12.8-5. Примеры и приложения (346). 12.8-6. Изоморфизмы булевых алгебр (346).	

Глава 13

Матрицы, квадратичные и эрмитовы формы

13.1. Вводные замечания	347
13.2. Алгебра матриц и матричное исчисление	347
13.2-1. Прямоугольные матрицы (347). 13.2-2. Основные операции (348). 13.2-3. Нулевая и единичная матрицы; обратные матрицы (349). 13.2-4. Целочисленные степени квадратных матриц (350). 13.2-5. Матрицы как строительные блоки математических моделей (350). 13.2-6. Умножение на матрицы специального вида. Матрицы перестановки (350). 13.2-7. Ранг, след и определитель матрицы (350). 13.2-8. Разбиение матриц (351). 13.2-9. Клеточные матрицы. Прямые суммы (351). 13.2-10. Прямое произведение (внешнее произведение) матриц (351). 13.2-11. Сходимость и дифференцирование (351). 13.2-12. Функции матриц (352).	
13.3. Матрицы со специальными свойствами симметрии	352
13.3-1. Транспонированная и эрмитова сопряженная матрица (352). 13.3-2. Матрицы со специальными свойствами симметрии (352). 13.3-3. Правила комбинирования (353). 13.3-4. Теоремы о разложении. Нормальные матрицы (353).	
13.4. Эквивалентные матрицы. Собственные значения, приведение к диагональному виду и смежные вопросы	354

13.4-1. Эквивалентные и подобные матрицы (354).	13.4-2. Собственные значения и спектры квадратных матриц (354).	13.4-3. Приведение квадратной матрицы к треугольному виду. Алгебраическая кратность собственного значения (355).	13.4-4. Приведение матриц к диагональному виду (355).	13.4-5. Собственные значения и характеристическое уравнение матрицы (356).	13.4-6. Собственные значения клеточных матриц (прямых сумм) (356).	13.4-7. Теорема Кэли—Гамильтона и смежные вопросы (357).	
13.5. Квадратичные и эрмитовы формы							357
13.5-1. Билинейные формы (357).	13.5-2. Квадратичные формы (357).	13.5-3. Эрмитовы формы (358).	13.5-4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм. Приведение к сумме квадратов (358).	13.5-5. Одновременное приведение двух квадратичных или эрмитовых форм к сумме квадратов (360).	13.5-6. Признаки положительной определенности, неотрицательности и т. д. (360).		

Глава 14

Линейные векторные пространства и линейные преобразования (линейные операторы).

Представление математических моделей матрицами

14.1. Введение. Системы отсчета и преобразования координат							362
14.1-1. Вводные замечания (362).	14.1-2. Числовое описание математических моделей: системы отсчета (362).	14.1-3. Преобразования координат (362).	14.1-4. Инвариантность (363).	14.1-5. Системы мер (363).			
14.2. Линейные векторные пространства							363
14.2-1. Определяющие свойства (363).	14.2-2. Линейные многообразия и подпространства в U (364).	14.2-3. Линейно независимые и линейно зависимые векторы (364).	14.2-4. Размерность линейного многообразия или векторного пространства. Базисы и системы координат (системы отсчета) (365).	14.2-5. Нормированные векторные пространства (365).	14.2-6. Унитарные векторные пространства (365).	14.2-7. Норма, метрика и сходимость в унитарных векторных пространствах. Гильбертовы пространства (366).	
14.3. Линейные преобразования (линейные операторы)							367
14.3-1. Линейное преобразование векторного пространства. Линейные операторы (367).	14.3-2. Множество значений, ядро и ранг линейного преобразования (оператора) (367).	14.3-3. Сложение и умножение на скаляры. Нулевое преобразование (367).	14.3-4. Произведение двух линейных преобразований (операторов). Тожественное преобразование (368).	14.3-5. Невырожденные линейные преобразования (операторы). Обратные преобразования (операторы) (368).	14.3-6. Целые степени операторов (368).		
14.4. Линейные операторы в нормированном или гильбертовом пространстве. Эрмитовы и унитарные операторы							368
14.4-1. Ограниченные линейные преобразования (368).	14.4-2. Ограниченные линейные операторы в нормированном векторном пространстве (369).	14.4-3. Сопряженный оператор (369).	14.4-4. Эрмитовы операторы (369).	14.4-5. Унитарные операторы (370).	14.4-6. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в действительных унитарных векторных пространствах (370).	14.4-7. Правила комбинирования (371).	14.4-8. Теоремы о разложении. Нормальные операторы (371).
14.4-9. Бесконечно малые линейные преобразования (371).							
14.5. Матричное представление векторов и линейных преобразований (операторов)							372
14.5-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «активная» точка зрения (372).	14.5-2. Матричное представление векторов и линейных преобразований (операторов) (372).	14.5-3. Матричные обозначения для неоднородных линейных уравнений (373).	14.5-4. Диадическое представление линейных операторов (373).				
14.6. Замена системы координат							373
14.6-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «пассивная» точка зрения (373).	14.6-2. Представление линейного оператора в различных базисах (374).						
14.7. Представление скалярного произведения. Ортонормированные базисы							375

14.7-1. Представление скалярного произведения (375).	14.7-2. Замена системы координат (375).	14.7-3. Ортогональные векторы и ортонормированные системы векторов (375).	14.7-4. Ортонормированные базисы (полные ортонормированные системы) (376).	14.7-5. Матрицы, соответствующие сопряженным операторам (377).	14.7-6. Взаимные базисы (377).	14.7-7. Сравнение обозначений (378).			
14.8. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов							379		
14.8-1. Вводные замечания (379).	14.8-2. Инвариантные многообразия. Разложимые линейные преобразования (линейные операторы) и матрицы (379).	14.8-3. Собственные векторы, собственные значения и спектр (379).	14.8-4. Собственные векторы и собственные значения нормальных и эрмитовых операторов (381).	14.8-5. Определение собственных значений и собственных векторов: конечномерный случай (382).	14.8-6. Приведение и диагонализация матриц. Преобразование к главным осям (383).	14.8-7. «Обобщенная» задача о собственных значениях (384).	14.8-8. Задачи о собственных значениях как задачи о стационарных значениях (385).	14.8-9. Границы для собственных значений линейных операторов (386).	14.8-10. Неоднородные линейные векторные уравнения (388).
14.9. Представления групп и смежные вопросы							388		
14.9-1. Представления групп (388).	14.9-2. Приведение представлений (389).	14.9-3. Непроводимые представления группы (390).	14.9-4. Характер представления (390).	14.9-5. Соотношения ортогональности (391).	14.9-6. Прямые произведения представлений (391).	14.9-7. Представления колец, полей и линейных алгебр (392).			
14.10. Математическое описание вращений							392		
14.10-1. Вращения в трехмерном евклидовом векторном пространстве (392).	14.10-2. Угол поворота. Ось вращения (393).	14.10-3. Вращения вокруг осей координат (393).	14.10-4. Углы Эйлера (393).	14.10-5. Бесконечно малые вращения, непрерывное вращение и угловая скорость (394).	14.10-6. Представление векторов и вращений комплексными матрицами размера 2×2 . Параметры Кэли—Клейна (395).	14.10-7. Группа трехмерных вращений и ее представления (396).			

Глава 15

Линейные интегральные уравнения, краевые задачи и задачи о собственных значениях

15.1. Введение		398
15.1-1. Вводные замечания (398).	15.1-2. Обозначения (398).	
15.2. Функции как векторы. Разложения по ортогональным функциям		399
15.2-1. Квадратично интегрируемые функции как векторы. Скалярное произведение и нормирование (399).	15.2-2. Метрика и сходимость в L_2 . Сходимость в среднем (400).	15.2-3. Ортогональные функции и ортонормированные последовательности функций (401).
15.2-4. Полные ортонормированные последовательности функций (401).	15.2-5. Ортогонализация и нормирование последовательности функций (402).	15.2-6. Аппроксимации и разложения в ряды по ортогональным функциям (402).
15.2-7. Линейные операции над функциями (403).		
15.3. Линейные интегральные преобразования и линейные интегральные уравнения		403
15.3-1. Линейные интегральные преобразования (403).	15.3-2. Линейные интегральные уравнения. Обзор (404).	15.3-3. Однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Собственные функции и собственные значения (405).
15.3-4. Теоремы разложения (405).	15.3-5. Интегрируемые ядра (406).	15.3-6. Эрмитовы интегральные формы. Задача о собственных значениях как вариационная задача (407).
15.3-7. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода (407).	15.3-8. Решение линейного интегрального уравнения (16) (409).	15.3-9. Решение линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (410).
15.3-10. Интегральные уравнения Вольтерра (411).		
15.4. Линейные краевые задачи и задачи о собственных значениях для дифференциальных уравнений		412

15.4-1. Линейные краевые задачи. Постановка задачи и обозначения (412).	
15.4-2. Дополнительное дифференциальное уравнение и краевые условия для линейной краевой задачи. Теоремы о суперпозиции (412). 15.4-3. Эрмитово сопряженные и сопряженные краевые задачи. Эрмитовы операторы (413). 15.4-4. Теорема Фредгольма об альтернативе (415). 15.4-5. Задачи о собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений (415). 15.4-6. Собственные значения и собственные функции эрмитовой задачи о собственных значениях. Полные ортонормированные множества собственных функций (416). 15.4-7. Эрмитова задача о собственных значениях как вариационная задача (417). 15.4-8. Одномерная задача Штурма—Лиувилля о собственных значениях (418). 15.4-9. Задача Штурма—Лиувилля для уравнений с частными производными второго порядка (419). 15.4-10. Теоремы сравнения (419). 15.4-11. Решение дискретных задач о собственных значениях методами возмущений (420). 15.4-12. Решение краевых задач посредством разложений в ряды по собственным функциям (421).	
15.5. Функции Грина. Связь краевых задач и задач о собственных значениях с интегральными уравнениями	422
15.5-1. Функции Грина для краевой задачи с однородными краевыми условиями (422). 15.5-2. Связь краевых задач и задач о собственных значениях с интегральными уравнениями. Резольвента Грина (423). 15.5-3. Приложение метода функций Грина к задаче с начальными условиями: обобщенное уравнение диффузии (424). 15.5-4. Метод функций Грина для неоднородных краевых условий (425).	
15.6. Теория потенциала	426
15.6-1. Введение. Дифференциальные уравнения Лапласа и Пуассона (426). 15.6-2. Трехмерная теория потенциала. Классические краевые условия задачи (427). 15.6-3. Теорема Кельвина об инверсии (427). 15.6-4. Свойства гармонических функций (428). 15.6-5. Решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы (428). 15.6-6. Решение трехмерных краевых задач посредством функций Грина (430). 15.6-7. Двумерная теория потенциала. Логарифмический потенциал (432). 15.6-8. Двумерная теория потенциала; сопряженные гармонические функции (433). 15.6-9. Решение двумерных краевых задач. Функция Грина и конформные отображения (434). 15.6-10. Распространение теории на более общие дифференциальные уравнения. Западающий и опережающий потенциалы (435).	
Глава 16	
Представления математических моделей. Тензорная алгебра и тензорный анализ	
16.1. Введение	437
16.1-1. Вводные замечания (437). 16.1-2. Системы координат и допустимые преобразования (437). 16.1-3. Компоненты объектов. Индексные обозначения (438). 16.1-4. Системы отсчета и индустрированные преобразования. Геометрические объекты (438).	
16.2. Абсолютные (истинные) тензоры и относительные тензоры (псевдотензоры)	439
16.2-1. Определение абсолютных и относительных тензоров, основанное на законе преобразования их компонент (439). 16.2-2. Инфинитезимальное перемещение. Градиент скалярного поля (441).	
16.3. Тензорная алгебра: определение основных операций	441
16.3-1. Равенство тензоров (441). 16.3-2. Нуль-тензор (442). 16.3-3. Сложение тензоров (442). 16.3-4. Умножение тензора на абсолютный скаляр (442). 16.3-5. Свертывание смешанного тензора (442). 16.3-6. Произведение (внешнее) двух тензоров (442). 16.3-7. Внутреннее произведение (443). 16.3-8. Признак тензора (443).	
16.4. Тензорная алгебра. Инвариантность тензорных уравнений	444
16.4-1. Инвариантность тензорных уравнений (444).	
16.5. Симметричные и антисимметричные тензоры	444
16.5-1. Симметричные и антисимметричные объекты (444). 16.5-2. Символы Кронекера (445). 16.5-3. ϵ -объекты (символы Леви-Чивита) (445). 16.5-4. Альтернированное произведение двух векторов (446).	

16.6. Локальная система базисных векторов (локальный базис) 446
 16.6-1. Выражение векторов и тензоров через векторы локального базиса (446). 16.6-2. Преобразование локального базиса при преобразовании координат (447).

16.7. Тензоры в римановых пространствах. Ассоциированные тензоры 447
 16.7-1. Риманово пространство и фундаментальные тензоры (447). 16.7-2. Ассоциированные тензоры (448). 16.7-3. Эквивалентность ассоциированных тензоров (449). 16.7-4. Операции над тензорами в римановых пространствах (449).

16.8. Скалярное произведение векторов и связанные с ним понятия ... 449
 16.8-1. Скалярное произведение (внутреннее произведение) двух векторов в римановом пространстве (449). 16.8-2. Скалярные произведения локальных базисных векторов. Ортогональная система координат (450). 16.8-3. Физические компоненты тензора (450). 16.8-4. Векторное произведение и смешанное произведение (450).

16.9. Тензоры ранга 2 (диадки) в римановом пространстве 451
 16.9-1. Диадки (451). 16.9-2. Умножение диадок и векторов и связанная с ним система обозначений (452). 16.9-3. Собственные векторы и собственные значения (452).

16.10. Абсолютное дифференциальное исчисление. Ковариантное дифференцирование 452
 16.10-1. Абсолютные дифференциалы (452). 16.10-2. Абсолютный дифференциал относительного тензора (454). 16.10-3. Символы Кристоффеля (454). 16.10-4. Ковариантное дифференцирование (455). 16.10-5. Правила ковариантного дифференцирования (455). 16.10-6. Ковариантные производные высших порядков (456). 16.10-7. Дифференциальные операторы и дифференциальные инварианты (456). 16.10-8. Абсолютные (внутренние) производные и производные по направлению (458). 16.10-9. Тензоры, постоянные вдоль кривой. Уравнения параллелизма (458). 16.10-10. Интегрирование тензорных величин. Элемент объема (458). 16.10-11. Дифференциальные инварианты диадок; интегральные теоремы (459).

Глава 17

Дифференциальная геометрия

17.1. Кривые на евклидовой плоскости 460
 17.1-1. Касательная к плоской кривой (460). 17.1-2. Нормаль к плоской кривой (461). 17.1-3. Особые точки (461). 17.1-4. Кривизна плоской кривой (461). 17.1-5. Порядок касания плоских кривых (462). 17.1-6. Асимптоты (462). 17.1-7. Огибающая семейства плоских кривых (462). 17.1-8. Изогональные траектории (463).

17.2. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве 463
 17.2-1. Вводные замечания (463). 17.2-2. Подвижной трехгранник (463). 17.2-3. Формулы Френе — Серре. Кривизна и кручение пространственной кривой (464). 17.2-4. Уравнения касательной, нормали и бинормали; уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей (465). 17.2-5. Дополнительные замечания (466). 17.2-6. Порядок касания (466).

17.3. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве 466
 17.3-1. Вводные замечания (466). 17.3-2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (467). 17.3-3. Первая основная квадратичная форма поверхности. Дифференциал длины дуги и элемент площади (467). 17.3-4. Геодезическая и нормальная кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье (468). 17.3-5. Вторая основная квадратичная форма. Главные кривизны, гауссова кривизна и средняя кривизна (469). 17.3-6. Некоторые направления и кривые на поверхности. Минимальные поверхности (470). 17.3-7. Поверхности как римановы пространства. Трехиндексные символы Кристоффеля и параметры Бельтрами (471). 17.3-8. Уравнения в частных производных, связывающие коэффициенты основных квадратичных форм. Теорема Egregium Гаусса (472). 17.3-9. Определение поверхности коэффициентами ее основных квадратичных форм (472). 17.3-10. Отображения (473). 17.3-11. Огибающие (473). 17.3-12. Геодезические линии поверхности (474). 17.3-13. Геодезические нормальные координаты. Геометрия на поверхности (474). 17.3-14. Теорема Гаусса—Бонне (475).

2 — Г. Корн и Т. Корн

3334
Филмная конструктор-
ского бюро общего
машиностроения

УЧЕБ
М О Н И М
10586

17.4. Пространства с кривизной	475
17.4-1. Вводные замечания (475). 17.4-2. Кривые, длины и направления в римановом пространстве (475). 17.4-3. Геодезические линии в римановом пространстве (476). 17.4-4. Римановы пространства с неопределенной метрикой. Изотропные направления и геодезические нулевой длины (477). 17.4-5. Тензор кривизны риманова пространства (477). 17.4-6. Геометрическое истолкование тензора кривизны. Плоские пространства и евклидовы пространства (478). 17.4-7. Специальные координатные системы (480).	

Глава 18

Теория вероятностей и случайные процессы

18.1. Введение	481
18.1-1. Вводные замечания (481).	
18.2. Определение и представление вероятностных моделей	481
18.2-1. Алгебра событий, связанных с данным испытанием (481). 18.2-2. Определение вероятности. Условные вероятности (482). 18.2-3. Независимость случайных событий (482). 18.2-4. Сложные испытания. Независимые испытания и повторные независимые испытания (483). 18.2-5. Правила сочетаний (483). 18.2-6. Теоремы Байеса (484). 18.2-7. Представление событий как множеств в пространстве выборов (484). 18.2-8. Случайные величины (484). 18.2-9. Описание вероятностных моделей на языке случайных величин и их функций распределения (484).	
18.3. Одномерные распределения вероятностей	485
18.3-1. Дискретные одномерные распределения вероятностей (485). 18.3-2. Непрерывные одномерные распределения вероятностей (486). 18.3-3. Математическое ожидание и дисперсия. Числовые характеристики одномерного распределения вероятностей (486). 18.3-4. Нормирование (488). 18.3-5. Неравенство Чебышева и связанные с ним формулы (488). 18.3-6. Единое описание распределений вероятностей с помощью интеграла Стильтеса (488). 18.3-7. Моменты одномерного распределения вероятностей (489). 18.3-8. Характеристические и производящие функции (489). 18.3-9. Семинварианты (491). 18.3-10. Вычисление моментов и семинвариантов через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ и $\gamma_x(s)$. Соотношения между моментами и семинвариантами (491).	
18.4. Многомерные распределения вероятностей	491
18.4-1. Многомерные случайные величины (491). 18.4-2. Двумерные распределения вероятностей. Распределения координат случайной величины (492). 18.4-3. Дискретные и непрерывные двумерные распределения вероятностей (492). 18.4-4. Математическое ожидание, моменты, ковариация и коэффициент корреляции (493). 18.4-5. Условные распределения вероятностей, связанные с двумя случайными величинами (493). 18.4-6. Регрессии (495). 18.4-7. n -мерные распределения вероятностей (495). 18.4-8. Математические ожидания и моменты (497). 18.4-9. Регрессия. Коэффициенты корреляции (498). 18.4-10. Характеристические функции (499). 18.4-11. Независимость случайных величин (499). 18.4-12. Энтропия распределения вероятностей (500).	
18.5. Функции от случайных величин. Замена переменных	501
18.5-1. Вводные замечания (501). 18.5-2. Функции (или преобразования) одномерной случайной величины (501). 18.5-3. Линейные преобразования одномерной случайной величины (501). 18.5-4. Функции (или преобразования) многомерных случайных величин (502). 18.5-5. Линейные преобразования (503). 18.5-6. Среднее значение и дисперсия суммы случайных величин (503). 18.5-7. Суммы независимых случайных величин (504). 18.5-8. Распределение суммы случайного количества случайных величин (504).	
18.6. Сходимость по вероятности и предельные теоремы	505
18.6-1. Последовательность распределений вероятностей. Сходимость по вероятности (505). 18.6-2. Пределы функций распределения, характеристических и производящих функций. Теоремы непрерывности (505). 18.6-3. Сходимость в среднем (505). 18.6-4. Асимптотические нормальные распределения вероятностей (505). 18.6-5. Предельные теоремы (506).	
18.7. Специальные методы решения вероятностных задач	507
18.7-1. Вводные замечания (507). 18.7-2. Задачи с дискретным распределением вероятностей: подсчет событий и комбинаторный анализ (507).	

18.7-3. Задачи с дискретным распределением вероятностей: успехи и неудачи в составляющих испытаниях (509).	
18.8. Специальные распределения вероятностей	509
18.8-1. Дискретные одномерные распределения вероятностей (509). 18.8-2. Дискретные многомерные распределения вероятностей (513). 18.8-3. Непрерывные распределения вероятностей: нормальное распределение (Гаусса) (513). 18.8-4. Нормальные случайные величины: распределение отклонений от центра (516). 18.8-5. Различные непрерывные одномерные распределения вероятностей (519). 18.8-6. Двумерные нормальные распределения (520). 18.8-7. Круговое нормальное распределение (521). 18.8-8. n -мерные нормальные распределения (521). 18.8-9. Теоремы сложения (521).	
18.9. Теория случайных процессов	522
18.9-1. Случайные процессы (522). 18.9-2. Описание случайных процессов. Средние по множеству наблюдений (522). 18.9-3. Специальные классы случайных процессов (524). 18.9-4. Средние по времени (526). 18.9-5. Стационарные и эргодические случайные процессы (526).	
18.10. Спектральные разложения стационарных процессов. Корреляционные функции и спектры	527
18.10-1. Вводные замечания (527). 18.10-2. Корреляционные функции (528). 18.10-3. Спектральные плотности (529). 18.10-4. Влияние линейного преобразования на корреляционные функции и спектральные плотности (530). 18.10-5. Спектры и корреляционные функции по множеству наблюдений (531). 18.10-6. Теорема о выборке (532).	
18.11. Примеры случайных процессов	532
18.11-1. (532). 18.11-2. Синусоидальный случайный процесс (532). 18.11-3. Случайная телеграфная волна (533). 18.11-4. Модель термоэлектронного тока (533). 18.11-5. Пробовой эффект (534).	
Глава 19	
Математическая статистика	
19.1. Введение в статистические методы	535
19.1-1. Статистики (535). 19.1-2. Классическая вероятностная модель: статистики случайной выборки. Понятие о генеральной совокупности (535). 19.1-3. Связь вероятностной модели с опытом: оценка и проверка (536).	
19.2. Статистическое описание. Определение и вычисление статистик случайной выборки	537
19.2-1. Относительные частоты (537). 19.2-2. Распределение выборки. Группированные данные (537). 19.2-3. Выборочные средние (538). 19.2-4. Выборочные дисперсии и моменты (539). 19.2-5. Упрощенное вычисление выборочных средних и дисперсий. Поправка на группировку (540). 19.2-6. Размах выборки (541).	
19.3. Типовые распределения вероятностей	541
19.3-1. Вводные замечания (541). 19.3-2. Класс распределений Кэптейна (541). 19.3-3. Ряды Грама — Шарлье и Эджворта (542). 19.3-4. Усеченные нормальные распределения и распределение Парето (542). 19.3-5. Типы распределений Пирсона (543).	
19.4. Оценка параметров	543
19.4-1. Свойства оценок (543). 19.4-2. Некоторые свойства статистик, применяемых в качестве оценок (544). 19.4-3. Нахождение оценок. Метод моментов (545). 19.4-4. Метод наибольшего правдоподобия (545). 19.4-5. Другие методы нахождения оценок (546).	
19.5. Выборочные распределения	546
19.5-1. Вводные замечания (546). 19.5-2. Асимптотические нормальные выборочные распределения (546). 19.5-3. Выборки из нормальной совокупности. Распределения χ^2 , t и v^2 (546). 19.5-4. Распределение размаха выборки (556). 19.5-5. Выбор из конечной совокупности (556).	
19.6. Проверка статистических гипотез	557
19.6-1. Статистические гипотезы (557). 19.6-2. Критерии с фиксированной выборкой; определения (557). 19.6-3. Уровень значимости. Правило Неймана — Пирсона отбора критериев для простых гипотез (558). 19.6-4.	

Критерии значимости (559). 19.6-5. Доверительная область (559). 19.6-6. Критерии сравнения нормальных совокупностей. Дисперсионный анализ (562). 19.6-7. Критерий согласия χ^2 (564). 19.6-8. Непараметрическое сравнение двух совокупностей: критерий знаков (565). 19.6-9. Обобщения (565).

- 19.7. Некоторые статистики, выборочные распределения и критерии для многомерных распределений 565
- 19.7-1. Вводные замечания (565). 19.7-2. Статистики, получаемые на основе многомерных выборок (566). 19.7-3. Оценка параметров (567). 19.7-4. Выборочные распределения в случае нормальной совокупности (567). 19.7-5. Выборочная средняя квадратическая сопряженность признаков. Критерий независимости двух случайных величин, основанный на таблице сопряженности признаков (569). 19.7-6. Ранговая корреляция по Спирмену. Непараметрический критерий независимости (570). 19.7-7. Проверка и оценка стохастических связей (570).

Глава 20

Численные методы и конечные разности

- 20.1. Введение 571
- 20.1-1. Вводные замечания (571). 20.1-2. Ошибки (571).
- 20.2. Численное решение уравнений 571
- 20.2-1. Вводные замечания (571). 20.2-2. Итерационные методы (572). 20.2-3. Специальные методы численного решения алгебраических уравнений (573). 20.2-4. Система уравнений и экстремальные задачи: итерационные методы (575).
- 20.3. Системы линейных уравнений и обращение матриц. Собственные значения и собственные векторы матриц 576
- 20.3-1. Методы исключения (576). 20.3-2. Итерационные методы (577). 20.3-3. Обращение матриц (579). 20.3-4. Решение системы линейных уравнений и обращение матриц при помощи разбиения на клетки (580). 20.3-5. Собственные значения и собственные векторы матриц (581).
- 20.4. Конечные разности и разностные уравнения 582
- 20.4-1. Конечные разности и центральные средние (582). 20.4-2. Операторные обозначения (583). 20.4-3. Разностные уравнения (584). 20.4-4. Линейные обыкновенные разностные уравнения (585). 20.4-5. Линейные обыкновенные разностные уравнения с постоянными коэффициентами (585).
- 20.5. Параболическая интерполяция, численный гармонический анализ и другие методы аппроксимации 589
- 20.5-1. Вводные замечания (589). 20.5-2. Общие формулы параболической интерполяции (значения аргумента могут быть и неравноотстоящими) (589). 20.5-3. Интерполяционные формулы для равноотстоящих значений аргумента. Ромбовидные диаграммы (591). 20.5-4. Обратная интерполяция (591). 20.5-5. Интерполяция с оптимальным выбором узлов (596). 20.5-6. Интерполирование функций нескольких переменных (596). 20.5-7. Обратные разности и интерполирование рациональными дробями (597). 20.5-8. Численный гармонический анализ и тригонометрическое интерполирование (597).
- 20.6. Численное дифференцирование и интегрирование 598
- 20.6-1. Численное дифференцирование (598). 20.6-2. Численное интегрирование для равноотстоящих узлов (600). 20.6-3. Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева (601). 20.6-4. Вычисление кратких интегралов (603).
- 20.7. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений 603
- 20.7-1. Вводные замечания (603). 20.7-2. Одношаговый метод решения начальной задачи. Метод Рунге — Кутты (604). 20.7-3. Разностные схемы решения задачи Коши (604). 20.7-4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений (606). 20.7-5. Специальные формулы для уравнений второго порядка (606).
- 20.8. Численное интегрирование уравнений с частными производными, краевые задачи; интегральные уравнения 607

20.8-1. Вводные замечания (607). 20.8-2. Двухточечная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений (608). 20.8-3. Разностные методы численного решения уравнений с частными производными (608). 20.8-4. Методы аппроксимирующих функций для численного решения краевых задач (613). 20.8-5. Численное решение интегральных уравнений (614).

Глава 21

Специальные функции

21.1. Введение	616
21.1-1. Вводные замечания (616).	
21.2. Элементарные трансцендентные функции	616
21.2-1. Тригонометрические функции (616). 21.2-2. Соотношения между тригонометрическими функциями (618). 21.2-3. Теоремы сложения и формулы для кратных углов (618). 21.2-4. Обратные тригонометрические функции (620). 21.2-5. Гиперболические функции (621). 21.2-6. Соотношения между гиперболическими функциями (621). 21.2-7. Формулы сложения для гиперболических функций (622). 21.2-8. Обратные гиперболические функции (623). 21.2-9. Соотношения между показательной, тригонометрическими и гиперболическими функциями (623). 21.2-10. Определение логарифма (623). 21.2-11. Соотношения между обратными тригонометрическими, обратными гиперболическими и логарифмической функциями (623). 21.2-12. Разложения в степенные ряды (624). 21.2-13. Разложения в бесконечные произведения (625). •	
21.3. Некоторые интегральные функции	625
21.3-1. Интегральные синус, косинус, логарифм и показательная функция (625). 21.3-2. Интегралы Френеля и интеграл вероятностей (628).	
21.4. Гамма-функция и связанные с ней функции	633
21.4-1. Гамма-функция (633). 21.4-2. Асимптотическое разложение Стирлинга для $\Gamma(z)$ и $n!$ (637). 21.4-3. Логарифмическая производная гамма-функции (637). 21.4-4. Бета-функция (638). 21.4-5. Неполные гамма- и бета-функции (638).	
21.5. Биномиальные коэффициенты и факториальные многочлены. Многочлены и числа Бернулли	638
21.5-1. Биномиальные коэффициенты и факториальные многочлены (638). 21.5-2. Многочлены и числа Бернулли (640). 21.5-3. Формулы, связывающие многочлены и факториальные многочлены (641). 21.5-4. Приближенные формулы для $\binom{N}{n}$ (644).	
21.6. Эллиптические функции, эллиптические интегралы и связанные с ними функции	642
21.6-1. Эллиптические функции; общие свойства (642). 21.6-2. η -функция Вейерштрасса (642). 21.6-3. ζ - и σ -функции Вейерштрасса (643). 21.6-4. Эллиптические интегралы (644). 21.6-5. Приведение эллиптических интегралов (645). 21.6-6. Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (649). 21.6-7. Эллиптические функции Якоби (654). 21.6-8. Тета-функции Якоби (658). 21.6-9. Соотношения между эллиптическими функциями Якоби, Вейерштрасса и тета-функциями (659).	
21.7. Ортогональные многочлены	660
21.7-1. Введение (660). 21.7-2. Действительные нули ортогональных многочленов (663). 21.7-3. Функции Лежандра (663). 21.7-4. Многочлены Чебышева первого и второго рода (663). 21.7-5. Присоединенные многочлены и функции Лагерра (663). 21.7-6. Функции Эрмита (664). 21.7-7. Некоторые интегральные формулы (664). 21.7-8. Многочлены Якоби и Гегенбауэра (665).	
21.8. Цилиндрические функции, присоединенные функции Лежандра и сферические гармоники	665
21.8-1. Функции Бесселя и другие цилиндрические функции (665). 21.8-2. Интегральные формулы (667). 21.8-3. Нули цилиндрических функций (668). 21.8-4. Функции Бесселя целого порядка (669). 21.8-5. Решение дифференциальных уравнений при помощи функций Бесселя и связанных с ними функций (670). 21.8-6. Модифицированные функции Бесселя и Гангеля (670). 21.8-7. Функции ber_{mz} , bei_{mz} , ker_{mz} , kei_{mz} (670). 21.8-8. Сферические функции Бесселя (671). 21.8-9. Асимптотиче-	

ские разложения цилиндрических функций и сферических функций Бесселя для больших значений $ z $ (671). 21.8-10. Присоединенные функции и многочлены Лежандра (672). 21.8-11. Интегральные свойства присоединенных функций Лежандра (673). 21.8-12. Сферические гармоники. Ортогональность (673). 21.8-13. Теоремы сложения (675).	
21.9. Ступенчатые функции и символические импульсные функции ...	676
21.9-1. Ступенчатые функции (676). 21.9-2. Символическая дельта-функция Дирака (678). 21.9-3. Производные ступенчатых и импульсных функций (679). 21.9-4. Аппроксимация импульсных функций (679). 21.9-5. Представления интегралом Фурье (681). 21.9-6. Асимметричные импульсные функции (681). 21.9-7. Многомерные дельта-функции (681).	
Литература	682
Указатель важнейших обозначений	685
Предметный указатель	688

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

Глава 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.4-1.	Классификация конических сечений	61
2.4-2.	Касательные, нормали, поляры и полюсы конических сечений ...	65
2.5-1.	Эллипс, гипербола и парабола. Канонические уравнения и основные формулы	68

Глава 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.5-1.	Классификация поверхностей второго порядка	87
3.5-2.	Стандартные (канонические) уравнения и основные свойства невырожденных конических сечений	90

Глава 4

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.5-1.	Производные часто встречающихся функций	105
4.5-2.	Правила дифференцирования	109
4.6-1.	Свойства интегралов	112
4.7-1.	Некоторые часто встречающиеся пределы	130
4.11-1.	Коэффициенты Фурье и среднеквадратические значения периодических функций	149
4.11-2.	Свойства преобразования Фурье	150
4.11-3.	Преобразования Фурье	151
4.11-4.	Косинус-преобразования Фурье	153
4.11-5.	Синус-преобразования Фурье	154

Глава 5

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

5.2-1.	Свойства скалярного произведения	159
5.2-2.	Свойства векторного произведения	160
5.3-1.	Дифференцирование векторной функции скалярного аргумента	162
5.5-1.	Правила действий с оператором ∇	167
5.5-2.	Операции над скалярными функциями	169
5.5-3.	Операции над векторными функциями	170
5.6-1.	Теоремы, связывающие объемные и поверхностные интегралы	171

Глава 6

СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

6.3-1.	Соотношения между базисными векторами и координатами векторов в различных локальных системах отсчета	178
6.4-1.	Векторные соотношения в ортогональных координатах	180
6.5-1.	Векторные формулы в сферических и цилиндрических координатах	182
6.5-2.	Общие эллипсоидальные координаты λ, μ, ν	184
6.5-3.	Координаты σ, τ, φ вытянутого эллипсоида вращения	185
6.5-4.	Координаты σ, τ, φ сплюснутого эллипсоида вращения	186
6.5-5.	Координаты σ, τ, z эллиптического цилиндра	186
6.5-6.	Конические координаты u, v, w	187
6.5-7.	Параболидаальные координаты λ, μ, ν	187
6.5-8.	Параболические координаты σ, τ, φ	188
6.5-9.	Координаты σ, τ, z параболического цилиндра	188
6.5-10.	Бивелинарные координаты σ, τ, z	190
6.5-11.	Тороидальные координаты σ, τ, φ	191
6.5-12.	Биполярные координаты σ, τ, φ	191

Глава 7

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7.2-1.	Действительная и мнимая части, нули и особенности для наиболее часто встречающихся функций комплексного переменного	194
7.9-1.	Свойства отображения $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	212
7.9-2.	Таблица конформных отображений	213
7.9-3.	Конформные отображения некоторых областей на единичный круг	220

Глава 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ДРУГИЕ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.3-1.	Теорема соответствия операций над оригиналами и изображениями	225
8.4-1.	Таблица преобразований Лапласа	227
8.4-2.	Таблица преобразований Лапласа для рациональных изображений	234
8.6-1.	Некоторые ливейные интегральные преобразования, связанные с преобразованием Лапласа	248
8.6-2.	Преобразования Ганкеля	250

Глава 9

ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.3-1.	Функции Грина для линейных краевых задач	262
--------	--	-----

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

10.2-1.	Полные интегралы для некоторых специальных типов уравнений с частными производными первого порядка	288
10.4-1.	Важнейшие линейные дифференциальные уравнения математической физики	304

Глава 14

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ).
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МАТРИЦАМИ

14.7-1.	Сравнение различных обозначений скаляров, векторов и линейных операторов	378
---------	--	-----

Глава 16

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.
ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

16.2-1.	Определения тензорных величин наиболее распространенного типа, основанные на законе преобразования их компонент	440
16.10-1.	Дифференциальные инварианты, определенные в римановых пространствах	457

Глава 18

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

18.2-1.	Вероятности логически связанных событий	483
18.3-1.	Числовые характеристики одномерных распределений вероятностей	487
18.7-1.	Перестановки и разбиения	508
18.7-2.	Сочетания и выборки	508
18.7-3.	Размещения в ячейках или расположения	509
18.8-1.	Вырожденное (причинное) распределение	509
18.8-2.	Гипергеометрическое распределение	510
18.8-3.	Биномиальное распределение	510
18.8-4.	Распределение Пуассона	512
18.8-5.	Геометрическое распределение	512
18.8-6.	Распределение Паскаля	513
18.8-7.	Распределение Пуаля	513
18.8-8.	Плотность нормального распределения (стандартизованного)	515
18.8-9.	Интеграл вероятностей	516
18.8-10.	Функция ошибок	517
18.8-11.	Непрерывные одномерные распределения вероятностей	518

Глава 19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

19.5-1.	χ^2 -распределение с m степенями свободы	548
19.5-2.	t -распределение Стьюдента с m степенями свободы	549
19.5-3.	Распределение отношений дисперсий (v^2 -распределение) и связанные с ним распределения	550
19.5-4.	χ^2 -распределение	551
19.5-5.	t -распределение Стьюдента	552
19.5-6.	F -распределение	553
19.6-1.	Некоторые критерии значимости, относящиеся к параметрам ξ , σ^2 нормальной совокупности	560
19.6-2.	Доверительные границы для нормальной совокупности	562
19.6-3.	Критерии значимости для сравнения нормальных совокупностей	564

Глава 20

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

20.4-1.	Краткая таблица преобразований Лапласа от ступенчатых функций и z -преобразований	588
20.5-1.	Интерполяционные формулы с центральными разностями	594

20.5-2.	Коэффициенты интерполяционных формул	593
20.5-3.	Схема гармонического анализа на 12 ординат	599
20.6-1.	Квадратные формулы Ньютона—Котеса, замкнутый тип	601
20.6-2.	Абсциссы и веса для квадратурных формул	602

Глава 21

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

21.3-1.	Интегральный синус	626
21.3-2.	$Si(x)$ и интегральный косинус $Si(x)$	627
21.3-3.	Интегральная показательная функция	629
21.4-1.	Гамма-функция	635
21.5-1.	Определение и свойства биномиальных коэффициентов	639
21.6-1.	Преобразование к нормальной форме Лежандра	647
21.6-2.	Преобразования эллиптических интегралов	651
21.6-3.	Преобразования полных эллиптических интегралов	652
21.6-4.	Полные эллиптические интегралы K и E	653
21.6-5.	Периоды, нули, полюсы и вычеты эллиптических функций Якоби	654
21.6-6.	Специальные значения эллиптических функций Якоби	656
21.6-7.	Изменение переменной на четверть и половину периода	657
21.6-8.	Преобразования первого порядка эллиптических функций Якоби	658
21.7-1.	Ортогональные многочлены Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита	661

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Книгу Г. Корна и Т. Корн «Справочник по математике для научных работников и инженеров» отличает весьма широкий охват материала. В ней освещаются почти все вопросы как общего курса математики, так и большинства специальных разделов, изучаемых во втузах с повышенной программой по математике (векторный и тензорный анализ, криволинейные координаты, уравнения математической физики, функции комплексного переменного и операционное исчисление, вариационное исчисление, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика и т. д.). Кроме того, в книгу включены главы, посвященные современной алгебре, теории интегралов Лебега и Стильтьеса, римановой геометрии, интегральным уравнениям, специальным функциям, а также целому ряду других вопросов, далеко выходящих за рамки математической подготовки инженеров, но постепенно становящихся необходимым орудием для научных работников и инженеро-исследователей, работающих в самых разных областях. Много внимания уделено связи рассматриваемых математических проблем с прикладными дисциплинами (методы расчета и синтеза электрических цепей, линейные и нелинейные колебания и др.).

Конечно, можно иметь различные точки зрения на то, какой материал следует включать в такого рода справочник; кроме того, в одной книге невозможно изложить все разделы с одинаковой степенью полноты. Однако, как нам кажется, ответы на вопросы, не нашедшие отражения в книге, следует искать уже либо в монографиях, либо в специализированных справочных руководствах (типа отдельных выпусков серии «Справочная математическая библиотека», выпускаемой издательством «Наука»).

В книге принята следующая рубрикация: глава, параграф, пункт; названия всех пунктов указаны в содержании. Сплошная нумерация формул (и таблиц) ведется в пределах одного параграфа; соответственно этому, если в тексте нужно сослаться на формулу этого же параграфа, то указывается только ее номер. При перекрестных ссылках указывается полностью номер главы, параграфа и пункта. В конце книги приводится подробный предметный указатель, а также указатель важнейших обозначений; во всех случаях читатель отсылается к соответствующему пункту.

В процессе перевода был обнаружен ряд дефектов и неточностей; кроме того, в некоторых случаях изложение не соответствовало принятому в нашей

отечественной литературе. Переводчики учитывали справочный характер книги, и для удобства читателя большинство исправлений, замен и дополнений вносилось прямо в текст. Принадлежащие переводчикам дополнения и подстрочные примечания отмечены звездочками. Пункты, подвергшиеся значительной переработке, также отмечены звездочками.

Нам пришлось почти полностью заменить цитируемую литературу; в большинстве случаев ссылки делались на неизвестные читателю учебные руководства. Приведенный в конце книги краткий список литературы (ссылки на него помещены в квадратные скобки) меньше всего претендует хотя бы на относительную полноту; в него лишь включены наиболее известные и доступные издания (при этом мы сочли возможным не указывать обычные втузовские курсы математики).

Значительной переработке подверглись дополнения в книге, включающие разного рода таблицы. Ради уменьшения объема книги ряд широко распространенных таблиц был изъят.

Мы будем весьма признательны всем читателям, которые обратят наше внимание на возможные недочеты книги.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

Эту книгу можно рассматривать, во-первых, как достаточно полное собрание математических определений, теорем и формул для научных работников, инженеров и студентов. Ею могут пользоваться читатели, стоящие на разных уровнях математического развития. Отсутствие доказательств и сжатость табличного представления родственных формул сделало возможным объединение весьма большого по объему справочного материала в одном томе.

Книга, однако, предназначена не только для наведения справок; в ней мы пытались дать связанное обозрение математических методов, применяемых в различных приложениях. Каждая глава озаглавлена так, чтобы читатель мог быстро ориентироваться в данном разделе математики. Такое изложение делает текст удобным для пользования благодаря отсутствию доказательств; многочисленные ссылки открывают доступ к более детальному изучению материала книги.

Особое внимание уделяется выявлению взаимосвязи различных разделов и их роли в научных и инженерных приложениях; это достигается при помощи соответствующих вводных замечаний и перекрестных ссылок.

Авторы пытались удовлетворить запросы разных кругов читателей, разделив материал книги на три группы:

1. Наиболее важные определения и формулы, специально выделенные для наиболее быстрого их обозрения.

2. Основной текст, состоящий из сжатого и связанного обзора основных результатов.

3. Более детальное обсуждение дополнительных вопросов, выделенное мелким шрифтом. При таком построении включение этого материала не нарушает структуры основного изложения.

Главы с 1 по 5 дают обзор основного курса колледжа *) по алгебре, аналитической геометрии и анализу; глава 4 содержит также изложение интегралов Лебега и Стильбеса и рядов и интегралов Фурье, а глава 5 — векторный анализ.

Главы 6, 7 и 8 посвящены криволинейным координатам, функциям комплексного переменного и преобразованиям Лапласа.

*) Это примерно соответствует курсу математики, изучаемому в наших втузах (Прим. ред.)

В главах 9 и 10 излагаются *обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными*, включая *методы интегральных преобразований, метод характеристик и теорию потенциала*; проблемы собственных значений трактуются в главе 15. Глава 11 посвящена *теории экстремума и вариационному исчислению*.

В главе 12 вводятся элементы современного абстрактного языка и описывается конструкция математических моделей таких, как *группы, кольца, поля, векторные пространства, булевы алгебры и метрические пространства*. Разделы, имеющие дело с более специальными темами, не претендуют на полноту; их цель заключается в том, чтобы познакомить читателя с сущностью определений и побудить его к чтению современной специальной литературы.

В главе 13 рассмотрены *матрицы*, а в главе 14 — *линейные векторные пространства, линейные преобразования (линейные операторы), задачи о собственных значениях* и описывается применение *матриц для представления математических моделей*.

Глава 15 содержит изложение разделов, связанных с *проблемой собственных значений*, включая *задачу Штурма — Лиувилля, краевые задачи для двумерных и трехмерных областей и линейные интегральные уравнения*.

Главы 16 и 17 соответственно касаются *тензорного анализа и дифференциальной геометрии* и включают описание *плоских и пространственных линий, поверхностей и кривизны пространства*.

В связи с возрастающей ролью статистических методов глава 18 представляет довольно детальное изложение *теории вероятностей* и включает введение в *теорию случайных процессов, корреляционных функций и спектров*. Глава 19 касается важнейших *методов математической статистики* и включает подробные таблицы формул, описывающих специальные выборочные распределения.

Глава 20 содержит *конечноразностные методы* и основные *методы численного анализа*. Глава 21 представляет по существу собрание формул, описывающих свойства *высших трансцендентных функций*.

Авторы надеются и верят, что эта книга даст читателю удобный повод детально познакомиться с математическими методами и таким образом расширить свой кругозор и взглянуть на свои специальные знания с более общей точки зрения.

ГЛАВА 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1.1-1. Вводные замечания. Эта глава посвящена алгебре¹⁾ действительных и комплексных чисел, т. е. изучению тех соотношений между действительными и комплексными числами, в которые входит конечное число сложений и умножений. Уравнения, основанные на таких соотношениях, рассматриваются здесь даже и в том случае, если при фактическом их точном числовом решении нельзя обойтись конечным числом сложений и/или умножений. Определения и соотношения, изложенные в этой главе, служат основным орудием во многих более общих математических моделях (см. также п. 12.1-1).

1.1-2.* Действительные числа. Сложение и умножение действительных чисел обладают следующими свойствами.

$$\left. \begin{aligned} &\text{Если } a \text{ и } b \text{ — действительные числа (алгебраические,} \\ &\text{рациональные, целые, положительные целые), то тако-} \\ &\text{выми же являются } a+b \text{ и } ab \text{ (замкнутость),} \\ &a+b = b+a, ab = ba \text{ (коммутативность),} \\ &a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c, \\ &a(bc) = (ab)c = abc \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c, \\ &a(bc) = (ab)c = abc \end{aligned}} \right\} \text{(ассоциативность),} \\ &a \cdot 1 = a \text{ (единица),} \\ &a(b+c) = ab+ac \text{ (дистрибутивность),} \\ &\text{из } a+c = b+c \text{ следует } a = b, \\ &\text{из } ca = cb, c \neq 0, \text{ следует } a = b \text{ (сокращение).} \end{aligned} \right\} \quad (1.1-1)$$

Действительное число 0 (нуль) обладает свойствами

$$\begin{aligned} a+0 &= a, \\ a \cdot 0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1-2)$$

для каждого действительного числа a .

(Единственное) **противоположное число** $-a$ и (единственное) **обратное число** $a^{-1} = 1/a$ для действительного числа a определяются соответственно

$$a+(-a) = a-a = 0, \quad aa^{-1} = 1 \quad (a \neq 0). \quad (1.1-3)$$

Делить на нуль нельзя.

¹⁾ См. также сноску к п. 12.1-2.

Помимо «алгебраических» свойств (1), класс положительных целых, или натуральных, чисел $1, 2, \dots$ обладает свойством упорядоченности (п. 12.6-2; n «больше, чем» m , или $n > m$, если $n = m + x$, где x — некоторое натуральное число) и полной упорядоченности (каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент). Множество натуральных чисел, содержащее число 1 и для каждого из своих элементов n следующий за ним элемент $n+1$, содержит все натуральные числа (принцип полной индукции).

Свойства натуральных чисел могут быть выведены из пяти аксиом Пеано: 1) 1 есть натуральное число; 2) для каждого натурального числа n существует единственное следующее за ним натуральное число $S(n)$; 3) $S(n) \neq 1$; 4) из $S(n) = S(m)$ следует $n = m$; 5) имеет место принцип полной индукции. (При его формулировке элемент, следующий за n , обозначается через $S(n)$.) Сложение и умножение, подчиняющиеся правилам (1.1-1), определяются «рекуррентными» соотношениями

$$\begin{aligned} n+1 &= S(n), \\ n+S(m) &= S(n+m), \\ n \cdot 1 &= n, \\ n \cdot S(m) &= n \cdot m + n. \end{aligned}$$

Целыми числами называются числа вида n , $-n$ и 0 , где n — натуральное число, а рациональными — числа вида p/q , где p и q — целые числа и $q \neq 0$.

Действительные числа можно ввести, исходя из множества рациональных чисел, с помощью предельного процесса (см., например, [4.2]). Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Действительными алгебраическими числами называются действительные корни алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами (п.1.6-3), а действительными трансцендентными числами — остальные действительные числа.

Класс всех рациональных чисел содержит корни всех линейных уравнений (п.1.8-1) с рациональными коэффициентами и включает в себя все целые числа. Класс всех действительных алгебраических чисел содержит действительные корни всех алгебраических уравнений (п.1.6-3) с алгебраическими коэффициентами и включает в себя все рациональные числа.

Действительное число a больше действительного числа b ($a > b$, $b < a$), если $a = b + x$, где x — некоторое положительное число (см. также пп.1.1-5 и 12.6-2).

1.1-3. Отношение равенства (см. также п.12.1-3). Из $a = b$ следует $b = a$ (симметрия отношения равенства), $a + c = b + c$ и $ac = bc$ (вообще $f(a) = f(b)$, если $f(a)$ обозначает некоторую операцию, приводящую к единственному результату). Из $a = b$ и $b = c$ следует $a = c$ (транзитивность отношения равенства). Из $ab \neq 0$ следует $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

1.1-4. Отношение тождества. Вообще говоря, уравнение относительно какой-либо величины x или нескольких величин x_1, x_2, \dots будет удовлетворяться только при некоторых специальных значениях x или специальных множествах значений x_1, x_2, \dots (см. также п.1.6-2). Если хотят подчеркнуть тот факт, что какое-нибудь уравнение удовлетворяется при всех значениях x или x_1, x_2, \dots в известных представляющих интерес пределах, то вместо символа $=$ иногда пользуются символом тождества \equiv (при мер: $(x-1)(x+1) \equiv x^2-1$), а пределы изменения рассматриваемых переменных иногда указывают справа от уравнения. Символ \equiv употребляется также в смысле: « a по определению равно b ».

1.1-5. Неравенства (см. также пп. 12.6-2 и 12.6-3). Из $a > b$ следует $b < a$, $a + c > b + c$, $ac > bc$ ($c > 0$), $-a < -b$, $1/a < 1/b$ ($ab > 0$). Действительное число a положительно ($a > 0$), отрицательно ($a < 0$) или равно нулю ($a = 0$). Сумма и произведение положительных чисел положительны. Из $a \leq A$ и $b \leq B$ следует $a + b \leq A + B$.

1.1-6. Абсолютные величины (см. также пп. 1.3-2 и 14.2-5). Абсолютная величина $|a|$ действительного числа a по определению есть число, равное a , если $a \geq 0$, и равное $-a$, если $a < 0$. Отметим:

$$\left. \begin{aligned} |a| &\geq 0; \text{ из } |a| = 0 \text{ следует } a = 0, \\ ||a| - |b|| &\leq |a + b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|; \end{aligned} \right\} \quad (1.1-4)$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0). \quad (1.1-5)$$

Из $|a| \leq A$ и $|b| \leq B$ следует $|a + b| \leq A + B$ и $|ab| \leq AB$. (1.1-6)

1.2. СТЕПЕНИ, КОРНИ, ЛОГАРИФМЫ И ФАКТОРИАЛЫ.
ОБОЗНАЧЕНИЯ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

1.2-1*. Степени и корни. В случае, когда показатель степени n есть натуральное число, n -я степень произвольного действительного числа a (основания степени) есть произведение n множителей, равных a . При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$. Если $a > 0$ и n — любое натуральное число, то арифметический корень n -й степени из a есть единственное положительное решение уравнения $x^n = a$; он обозначается символом $a^{1/n} \equiv \sqrt[n]{a}$. При $a = 0$, $0^{1/n} \equiv \sqrt[n]{0} = 0$. Если же $a < 0$, то корень n -й степени из a определяется лишь при нечетном n . Именно, $a^{1/n} \equiv \sqrt[n]{a}$ есть в этом случае единственное действительное (на самом деле отрицательное) решение уравнения $x^n = a$. Пусть теперь $a \geq 0$. Если $p = \frac{n}{m}$, где n и m — натуральные числа, то по определению

$$a^p = (a^{1/m})^n = (a^n)^{1/m} \quad \text{и} \quad a^{-p} = 1/a^p \quad (a \neq 0).$$

При любых натуральных n и m

$$\left. \begin{aligned} a^{n/m} &= \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n, & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a}, \\ \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.2-1)$$

Степени с иррациональными показателями могут быть введены с помощью некоторого предельного процесса (см. также п. 21.2-12). Соотношения

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (a > 0), \quad (1.2-2)$$

верные для рациональных показателей, остаются справедливыми и для любых действительных p и q . Далее, для любых действительных p и q ($a > 0$ и $b > 0$)

$$\left. \begin{aligned} a^{-p} &= \frac{1}{a^p}, & \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q}, \\ (ab)^p &= a^p b^p, & \left(\frac{a}{b}\right)^p &= \frac{a^p}{b^p}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2-3)$$

З а м е ч а н и е. \sqrt{a} (квадратный корень из числа $a \geq 0$) обычно обозначается символом \sqrt{a} . О степенях комплексных чисел и корнях из них см. п. 1.3-3.

1.2-2. Формулы для уничтожения иррациональности в знаменателе дроби.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b} \sqrt{b}, \quad \frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b} \sqrt[n]{b^{n-1}}, \quad (1.2-4)$$

$$\frac{a}{\sqrt{b \pm \sqrt{c}}} = \frac{a}{b-c} (\sqrt{b} \mp \sqrt{c}), \quad \frac{a}{\sqrt{b + \sqrt{c}}} = \frac{a}{b^2 - c} \sqrt{(b^2 - c)(b - \sqrt{c})}, \quad (1.2-5)$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}}} = \frac{a}{b \pm c} \left(\sqrt[3]{b^2 \mp \sqrt{bc} + \sqrt{c^2}} \right). \quad (1.2-6)$$

1.2-3. Логарифмы. Логарифм $x = \log_c a$ числа $a > 0$ при основании $c > 0$ ($c \neq 1$) можно определить как решение уравнения

$$c^x = a. \quad (1.2-7)$$

В табл. 7.2-1 и в п. 21.2-10 приведены некоторые более общие сведения о логарифмах. $\log_c a$ может быть трансцендентным числом (п. 1.1-2). Отметим:

$$\left. \begin{aligned} c^{\log_c a} &= a, \quad \log_c c = 1, \quad \log_c c^p = p, \quad \log_c 1 = 0, \\ \log_c(ab) &= \log_c a + \log_c b \quad (\text{основное свойство логарифмов}), \\ \log_c\left(\frac{a}{b}\right) &= \log_c a - \log_c b, \\ \log_c a^p &= p \log_c a, \quad \log_c(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log_c a; \end{aligned} \right\} (1.2-8)$$

$$\log_c a = \log_c a \cdot \log_c c = \frac{\log_e a}{\log_e c}, \quad \log_c c = \frac{1}{\log_e c} \quad (\text{замена основания}). \quad (1.2-9)$$

Особый интерес представляют десятичные логарифмы с основанием 10 и натуральные (неперовы) логарифмы с основанием

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\dots \quad (1.2-10)$$

e — трансцендентное число. Логарифм $\log_c a$ обозначается символом $\ln a$, а $\log_{10} a$ — символом $\lg a$. Отметим:

$$\left. \begin{aligned} \ln a &= \frac{\lg a}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg a = (2,30259\dots) \lg a, \\ \lg a &= \frac{\ln a}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln a = (0,43429\dots) \ln a. \end{aligned} \right\} (1.2-11)$$

1.2-4. Факториалы. Факториал $n!$ произвольного целого числа $n \geq 0$ определяется формулами:

$$0! = 1, \quad n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad (n > 0). \quad (1.2-12)$$

В п. 21.4-2 приведены приближенные формулы для вычисления факториалов $n!$ при больших n .

1.2-5. Обозначения сумм и произведений. Для любых двух целых чисел (положительных, отрицательных или равных нулю) n и $m \geq n$

$$\sum_{j=n}^m a_j \equiv a_n + a_{n+1} + \dots + a_{m-1} + a_m \quad (m - n + 1 \text{ слагаемых}), \quad (1.2-13)$$

$$\prod_{j=n}^m a_j \equiv a_n a_{n+1} \dots a_{m-1} a_m \quad (m - n + 1 \text{ множителей}). \quad (1.2-14)$$

Отметим:

$$\sum_{i=n}^m \sum_{k=n'}^{m'} a_{ik} = \sum_{k=n'}^{m'} \sum_{i=n}^m a_{ik}, \quad \prod_{i=n}^m \prod_{k=n'}^{m'} a_{ik} = \prod_{k=n'}^{m'} \prod_{i=n}^m a_{ik}, \quad (1.2-15)$$

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (1.2-16)$$

Бесконечные ряды см. в гл. 4.

1.2-6. Арифметическая прогрессия. Если a_0 — первый член, а d — постоянная разность между следующим и предыдущим членами,

называемая разностью прогрессии, то

$$a_j = a_0 + jd \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j = \frac{n+1}{2} (2a_0 + nd) = \frac{n+1}{2} (a_0 + a_n). \quad (1.2-17)$$

1.2-7. Геометрическая прогрессия. Если a_0 — первый член, а r — постоянное отношение следующего члена к предыдущему, называемое *знаменателем прогрессии*, то

$$a_j = a_0 r^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad s_n = \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_0 r^j = a_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a_0 - a_n r}{1-r} \quad (r \neq 1). \quad (1.2-18)$$

О бесконечной геометрической прогрессии см. п. 4.10-2.

1.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.3-1. Вводные замечания (см. также п. 7.1-1). **Комплексные числа** (иногда называемые *мнимыми числами*) не являются числами в элементарном смысле слова, применяемыми при подсчетах и измерениях. Они составляют новый класс математических объектов, определяемый описанными ниже свойствами (см. также п. 12.1-1).

Каждому комплексному числу c можно поставить в соответствие единственную пару (a, b) действительных чисел a и b , и обратно. Сумма и произведение двух комплексных чисел $c_1 \leftrightarrow (a_1, b_1)$ и $c_2 \leftrightarrow (a_2, b_2)$ определяются соответственно следующим образом: $c_1 + c_2 \leftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и $c_1 c_2 \leftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Действительные числа a содержатся в классе комплексных чисел в качестве пар $(a, 0)$. **Мнимая единица** i , определяемая условием $i \leftrightarrow (0, 1)$, удовлетворяет соотношению

$$i^2 = -1. \quad (1.3-1)$$

Каждое комплексное число $c \leftrightarrow (a, b)$ может быть записано в виде суммы $c = a + ib$ действительного числа $a \leftrightarrow (a, 0)$ и чисто мнимого числа $ib \leftrightarrow (0, b)$. Действительные числа $a = \operatorname{Re} c$ и $b = \operatorname{Im} c$ соответственно называются **действительной частью** и **мнимой частью** числа c . Два комплексных числа $c = a + ib$ и $\bar{c} = a - ib$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называются **сопряженными комплексными числами**.

Два комплексных числа $c_1 = a_1 + ib_1$ и $c_2 = a_2 + ib_2$ равны в том и только в том случае, если соответственно равны их действительные и мнимые части, т. е. $c_1 = c_2$, лишь если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Из $c = a + ib = 0$ следует $a = b = 0$. Сложение и умножение комплексных чисел удовлетворяют правилам пп. 1.1-2 и 1.2-1, причем

$$\left. \begin{aligned} i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \\ i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \right\} \quad (1.3-2)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 \pm c_2 &= (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2), \\ c_1 c_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \\ \frac{c_1}{c_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \quad (c_2 \neq 0), \\ \overline{c_1 + c_2} &= \bar{c}_1 + \bar{c}_2, \quad \overline{c_1 c_2} = \bar{c}_1 \bar{c}_2, \quad \overline{(c_1/c_2)} = \bar{c}_1/\bar{c}_2 \quad (c_2 \neq 0), \quad \bar{\bar{c}} = c, \\ a &= \operatorname{Re} c = \frac{c + \bar{c}}{2}, \quad b = \operatorname{Im} c = \frac{c - \bar{c}}{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3-3)$$

Класс всех комплексных чисел содержит корни всех алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами и включает в себя действительные числа.

1.3-2. Изображение комплексных чисел точками или радиусами-векторами. Тригонометрическая форма комплексного числа (см. также п. 7.2-2). Комплексное число $z = x + iy$ удобно изображать точкой $(z) \equiv (x, y)$ или соответствующим радиусом-вектором (пп. 2.1-2 и 3.1-5) на **комплексной плоскости** (рис. 1.3-1). Оси Ox и Oy (в прямоугольной декартовой системе координат) называются соответственно **действительной** и **мнимой** осью. Абсцисса и ордината каждой точки (z) изображают соответственно действительную часть x и мнимую часть y числа z .

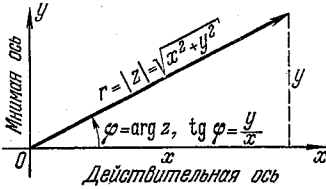


Рис. 1.3-1. Изображение комплексных чисел точками или радиусами-векторами. Оси Ox и Oy называются соответственно действительной и мнимой осью.

$$\left. \begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|, \\ \varphi &= \text{Arg } z, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{aligned} \right\} (1.3-4)$$

называются **модулем** и **аргументом** комплексного числа z . Отметим:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ z &= x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned} \right\} (1.3-5)$$

Модули комплексных чисел удовлетворяют соотношениям (1.1-4)–(1.1-6): Если z —

действительное число, то его модуль $|z|$ равен его абсолютной величине (п. 1.1-6).

* Аргумент комплексного числа z определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число.

В качестве *главного значения* $\text{Arg } z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$. Главное значение аргумента z обозначают через $\text{arg } z$. При принятом условии $\text{arg } \bar{z} = -\text{arg } z$. *

Для любых двух множеств (действительных или) комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 \quad (\text{неравенство Коши} - \text{Буняковского}) \quad (1.3-6)$$

(см. также пп. 14.2-6 и 14.2-6, а).

1.3-3. Представление суммы, произведения и частного. Степени и корни. Сумме комплексных чисел соответствует сумма соответствующих радиусов-векторов (см. также пп. 3.1-5 и 5.2-2). Если даны $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то

$$\left. \begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (z_2 \neq 0), \\ z^n &= r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \end{aligned} \right\} (1.3-7)$$

(n — целое число) (формула Муавра).

Случай, когда показатели степени комплексны, см. в п. 21.2-9.

Если n — натуральное число и c — комплексное число, то $\sqrt[n]{c}$ (корень n -й степени из c) есть решение уравнения $z^n = c$. При $c \neq 0$ существует ровно n различных корней n -й степени из c . Они определяются формулами

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $\sqrt[n]{|c|}$ — арифметический корень из положительного числа $|c|$ (п.1.2-1), $\varphi = \arg c$ и $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Отметим,

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{1} &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \\ \sqrt[n]{-1} &= \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3-8)$$

$$(n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots, n-1).$$

В частности,

$$\sqrt{1} = \pm 1, \quad \sqrt{-1} = \pm i, \quad (1.3-9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{1} &= \begin{cases} 1, \\ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \\ \sqrt[3]{-1} &= \begin{cases} -1, \\ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.3-10)$$

1.4. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛЫ

1.4-1. Бином Ньютона и родственные формулы. Если a, b и c — действительные или комплексные числа, то

$$\left. \begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\ (a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4, \\ &\dots \dots \dots \\ (a+b)^n &= \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} b^j \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (1.4-1)$$

где

$$C_n^j = \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (j = 0, 1, 2, \dots \leq n = 0, 1, 2, \dots).$$

(Бином Ньютона для целочисленных показателей n ; см. также п.2.1.2-12.) Биномиальные коэффициенты C_n^j *) подробно рассматриваются в п.2.1.5-1

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc; \quad (1.4-2)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b), \\ a^2 + b^2 &= (a+ib)(a-ib). \end{aligned} \right\} \quad (1.4-3)$$

*) Используется также другое обозначение биномиальных коэффициентов: $\binom{n}{j} = C_n^j$.

Если n — любое натуральное число, то

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (1.4-4)$$

Если n — четное положительное число, то

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}). \quad (1.4-5)$$

Если n — нечетное положительное число, то

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Отметим также:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2). \quad (1.4-6)$$

1.4-2. Пропорции. Из $a : b = c : d$ или $a/b = c/d$ следует:

$$\frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd} \quad (\text{производные пропорции}). \quad (1.4-7)$$

В частности,

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a - b}{a + b} = \frac{c - d}{c + d}. \quad (1.4-8)$$

1.4-3. Многочлены. Симметрические функции.

(а) Многочлен (целая рациональная функция) относительно x_1, x_2, \dots, x_n есть сумма конечного числа членов вида $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где каждое k_i есть отрицательное целое число. Наибольшее значение суммы $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, встречающееся в каком-либо из членов, называется **степенью** многочлена. Многочлен называется **однородным**, если все его члены имеют одну и ту же степень (см. также п.4.5-5).

(б) Многочлен относительно x_1, x_2, \dots, x_n называется **симметрическим**, если для любого множества значений x_1, x_2, \dots, x_n значение этого многочлена не изменяется при какой угодно перестановке x_1, x_2, \dots, x_n (это определение распространяется и на любые функции от x_1, x_2, \dots, x_n). Элементарными симметрическими функциями от x_1, x_2, \dots, x_n называются многочлены S_1, S_2, \dots, S_n , определяемые следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &\equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n, & S_2 &\equiv x_1x_2 + x_1x_3 + \dots, \\ S_3 &\equiv x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots, & S_n &\equiv x_1x_2\dots x_n, \end{aligned} \right\} \quad (1.4-9)$$

где S_k — есть сумма всех $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ произведений, каждое из которых содержит k сомножителей x_i с несовпадающими индексами. Каждый симметрический многочлен относительно x_1, x_2, \dots, x_n может быть единственным образом записан, как многочлен относительно S_1, S_2, \dots, S_n ; коэффициенты этого нового многочлена являются алгебраическими суммами целочисленных кратных заданных коэффициентов.

Каждый симметрический многочлен относительно x_1, x_2, \dots, x_n может также быть выражен как многочлен относительно конечного числа симметрических функций

$$s_0 \equiv n, \quad s_1 \equiv \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_2 \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2, \dots, \quad s_k \equiv \sum_{i=1}^n x_i^k, \dots \quad (1.4-10)$$

Симметрические функции (9) и (10) связаны формулами Ньютона

$$\left. \begin{aligned} s_k - s_{k-1}s_1 + s_{k-2}s_2 - \dots + (-1)^{k-1}s_1s_{k-1} + (-1)^k s_k &= 0 \quad (k < n), \\ s_k - s_{k-1}s_1 + s_{k-2}s_2 - \dots + (-1)^n s_{k-n}s_n &= 0 \quad (k > n) \end{aligned} \right\} \quad (1.4-11)$$

(см. также п.1.6-4). Заметим, что в соотношениях (11) в явном виде не входит n .

1.5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.5-1. Определение. Определитель (детерминант)

$$D = \det [a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5-1)$$

квадратной таблицы (матрицы, п.13.2-1) с n^2 (действительными или комплексными) числами (элементами) a_{ik} есть сумма $n!$ членов $(-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из $n!$ различных упорядоченных множеств k_1, k_2, \dots, k_n , полученных r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $1, 2, \dots, n$. Число n есть **порядок** определителя (1).

Фактическое вычисление определителя по его элементам упрощается с помощью пп.1.5-2 и 1.5-5,а. Отметим, что

$$|D|^2 < \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \quad (\text{неравенство Адамара}). \quad (1.5-2)$$

1.5-2. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или по столбцу. (Дополнительный) минор D_{ik} элемента a_{ik} в определителе n -го порядка (1) есть определитель $(n-1)$ -го порядка, получающийся из определителя (1), если из него вычеркнуть i -ю строку и k -й столбец. **Алгебраическое дополнение** A_{ik} элемента a_{ik} есть коэффициент при a_{ik} в разложении определителя D , или

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} = \frac{\partial D}{\partial a_{ik}}. \quad (1.5-3)$$

Определитель D можно следующим образом выразить через элементы произвольной его строки или столбца и их алгебраические дополнения:

$$D = \det [a_{ik}] = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} \quad (1.5-4)$$

($j = 1, 2, \dots, n$) (разложение по столбцу или по строке).

Отметим также, что

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{il} = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{ik} = 0 \quad (j \neq l). \quad (1.5-5)$$

1.5-3. Примеры. Определители второго и третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \quad (1.5-6)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} =$$

$$= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{21}(a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31}(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) =$$

$$= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \quad \text{и т. д.} \quad (1.5-7)$$

1.5-4. Дополнительные миноры. Разложение Лапласа. Определитель m -го порядка M , получающийся из определителя n -го порядка D ($m < n$), если из него вычеркнуть какие-либо $n-m$ строк и какие-либо $n-m$ столбцов, называется **минором m -го порядка** определителя D . Минор m -го порядка M и минор $(n-m)$ -го порядка M' определителя D , получающийся, если из D вычеркнуть строки и столбцы, сохранившиеся в M , называются **дополнительными минорами**: в частном случае $m = n$, $M' = 1$. **Алгебраическое дополнение M''** минора M в D по определению равно $(-1)^{i_1+k_1+i_2+k_2+\dots+i_m+k_m} M'$, где i_1, i_2, \dots, i_m — номера строк, а k_1, k_2, \dots, k_m — номера столбцов, входящих в M . Пусть заданы любые m строк (или столбцов) определителя D . Тогда D равен сумме произведений $M M''$ всевозможных миноров m -го порядка M , расположенных в этих строках (или столбцах) на их алгебраические дополнения M'' (разложение Лапласа по нескольким строкам или столбцам).

Определитель n -го порядка D имеет C_n^m главных миноров, диагональные элементы которых являются и диагональными элементами D .

1.5-5. Различные теоремы.

(а) Величина D определителя (1) не меняется при любой из следующих операций:

- 1) замены строк столбцами и столбцов строками (перемене местами индексов i и k в равенстве (1));
- 2) четном числе перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов;
- 3) прибавлении к элементам любой строки (или столбца) соответствующих элементов какой-либо другой строки (или соответственно столбца), умноженных на одно и то же число α .

Примеры:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \alpha a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + \alpha a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5-8)$$

(б) Нечетное число перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов равносильно умножению определителя на -1 .

(в) Умножение всех элементов какой-либо строки или столбца на множитель α равносильно умножению определителя на α .

(д) Если элементы j -й строки (или столбца) определителя n -го порядка

D представлены в виде сумм $\sum_{r=1}^m c_{r1}$, $\sum_{r=1}^m c_{r2}$, ..., $\sum_{r=1}^m c_{rn}$, то определитель D равен

сумме $\sum_{r=1}^m D_r$, определителей n -го порядка. Все элементы каждого из определителей D_r , кроме элементов j -й строки (столбца) совпадают с соответствующими элементами определителя D , а в j -й строке определителя D_r стоят элементы c_{r1} , c_{r2} , ..., c_{rn} .

Пример.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5-9)$$

(е) Определитель равен нулю, если

- 1) все элементы какой-либо его строки или столбца равны нулю,
- 2) соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны или же пропорциональны.

1.5-6. Умножение определителей (см. также п. 13.2-2). Произведение двух определителей n -го порядка $\det [a_{ik}]$ и $\det [b_{jk}]$ равно

$$\begin{aligned} \det [a_{ik}] \det [b_{jk}] &= \det \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right] = \det \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{kj} \right] = \\ &= \det \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{kj} \right] = \det \left[\sum_{j=1}^n a_{ji} b_{jk} \right]. \end{aligned} \quad (1.5-10)$$

1.5-7. Изменение порядка определителей. Данный определитель можно следующим образом записать в виде определителя более высокого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (1.5-11)$$

где числа α_i произвольны. Этот процесс можно повторять сколько угодно раз.

Порядок данного определителя иногда можно повысить с помощью соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.5-12)$$

1.6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ: ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

1.6-1. Вводные замечания. Решение алгебраических уравнений имеет особо важное значение в связи с тем, что к этому виду относятся характеристические уравнения систем линейных дифференциальных уравнений (см. также пп. 9.4-1, 9.4-4 и 14.8-5). Общая задача отделения корней (возникающая, например, при исследовании устойчивости) может быть изучена методами п. 1.6-6 и/или п. 7.6-9. Приближенное решение уравнений рассматривается в пп. 20.2-1—20.2-3.

1.6-2. Решение уравнения. Корни. Решить уравнение (см. также п. 1.1-4)

$$f(x) = 0 \quad (1.6-1)$$

с неизвестным x значит найти значения x (корни уравнения (1), нули функции $f(x)$), удовлетворяющие этому уравнению. Решение можно проверить подстановкой.

1.6-3. Алгебраические уравнения. Уравнение (1) вида

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0), \quad (1.6-2)$$

где коэффициенты a_i — действительные или комплексные числа, называется алгебраическим уравнением степени n с неизвестным x ; $f(x)$ — многочлен степени n относительно x (целая рациональная функция; см. также пп. 4.2-2, d и 7.6-5). Коэффициент a_n — свободный член многочлена (2).

Значение $x = x_1$ есть корень кратности (порядка) m (кратный корень, если $m > 1$) уравнения (2) (нуль порядка m функции $f(x)$; см. также п. 7.6-1), если $f(x) = g(x)(x - x_1)^m$, где $g(x)$ — многочлен и $g(x_1) \neq 0$. Алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, если корень кратности m считать m раз (основная теорема алгебры многочленов). Полное решение уравнения (2) указывает все корни вместе с их кратностями.

Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами, называются алгебраическими числами (вобщее говоря, комплексными); если коэффициенты — алгебраические числа, то корни все еще остаются алгебраическими (см. также п.1.1-2). Общие формулы, выражающие корни алгебраических уравнений через их коэффициенты и содержащие только конечное число сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корня, существуют только для уравнений следующих степеней: первой (линейные уравнения, п.1.8-1), второй (квадратные уравнения, п.1.8-2), третьей (кубические уравнения, пп.1.8-3 и 1.8-4) и четвертой (уравнения четвертой степени, пп.1.8-5 и 1.8-6).

1.6-4. Соотношения между корнями и коэффициентами. Симметрические функции S_k и s_k (п.1.4-3) корней x_1, x_2, \dots, x_n алгебраического уравнения (2) связаны с его коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_n следующим образом:

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k S_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (1.6-3)$$

$$k a_k + a_{k-1} s_1 + a_{k-2} s_2 + \dots + a_0 s_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6-4)$$

где по определению $a_k = 0$ при $k > n$ и $k = 0$. Равенства (1.6-4) представляют собой другой вариант формул Ньютона (1.4-11). Отметим также

$$\frac{a_k}{a_0} = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_1 \end{vmatrix},$$

$$s_k = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^k \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k a_k & a_{k-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.6-5)$$

1.6-5. Дискриминант алгебраического уравнения. Дискриминант Δ алгебраического уравнения (2) есть произведение a_0^{n-2} и квадратов всех разностей $(x_i - x_k)$ ($i > k$) корней x_i уравнения (кратные корни порядка t рассматриваются как t равных корней с разными индексами):

$$\Delta = a_0^{2n-2} \prod_{i>k} (x_i - x_k)^2 = a_0^{2n-2} [W(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{a_0} R(f, f'), \quad (1.6-6)$$

где

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k} (x_i - x_k)$$

(этот определитель называется *определителем Вандермонда*). s_k — суммы k -х степеней корней многочлена $f(x)$ ($s_0 = n$) и $R(f, f')$ — *результант* (п.1.7-3) многочлена $f(x)$ и его производной (п.4.5-4) $f'(x)$. Дискриминант Δ есть симметрическая функция корней x_1, x_2, \dots, x_n , обращающаяся в нуль в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет по крайней мере один кратный корень (необходимо являющийся общим корнем $f(x)$ и $f'(x)$; см. также п.1.6-6, г).

1.6-6. Действительные алгебраические уравнения и их корни. Алгебраическое уравнение (2) называется **действительным**, если все его коэффициенты a_i — действительные числа. Соответствующий действительный многочлен $f(x)$ при всех действительных значениях x принимает действительные значения. Для отделения корней (действие, которое предшествует приближенному решению уравнений, п.20.2-1; см. также пп.9.4-4 и 14.8-5) полезны нижеследующие теоремы. В теоремах (b) — (f) корень кратности t рассматривается как t корней.

(a) **Комплексные корни.** Комплексные корни действительного алгебраического уравнения появляются парами комплексных сопряженных

чисел (п.1.3-1). Действительное алгебраическое уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

* Все корни уравнения (2) по модулю не превосходят числа $N = 1 + \frac{A}{|a_0|}$, где A — наибольшее из чисел $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$; это правило справедливо и для уравнений с комплексными коэффициентами.*

(б) Критерий Рауса—Гурвица. Число корней с положительной действительной частью действительного алгебраического уравнения (2) равно числу перемен знака в любой из последовательностей (в предположении, что T_i отличны от нуля)

$$\left. \begin{aligned} T_0, T_1, \frac{T_2}{T_1}, \frac{T_3}{T_2}, \dots, \frac{T_n}{T_{n-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.6-7)$$

или

$$T_0, T_1, T_1 T_2, T_2 T_3, \dots, T_{n-2} T_{n-1}, a_n,$$

где

$$T_0 = a_0 > 0, T_1 = a_1, T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, T_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \dots \quad (1.6-8)$$

(элементы a_i , отсутствующие в уравнении (2), полагаем равными нулю).

Если среди T_i есть равные нулю, то подсчет усложняется (см. [1, 2]).

Все корни имеют отрицательную действительную часть в том и только в том случае, если все числа $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ положительны.

Альтернативная формулировка. Все корни действительного уравнения (2) n -й степени имеют отрицательную действительную часть в том и только в том случае, если это верно для уравнения $(n-1)$ -й степени

$$a_0' x^{n-1} + a_1' x^{n-2} + a_2' x^{n-3} + a_3' x^{n-4} + \dots \equiv$$

$$\equiv a_1 x^{n-1} + \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 \right) x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \left(a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5 \right) x^{n-4} + \dots = 0.$$

Эта теорема может применяться повторно и дает простую рекуррентную схему, полезную, например, при исследовании устойчивости. Если один из коэффициентов $a_i^{(j)}$ равен нулю, то метод усложняется.

(в) Отделение действительных корней: правило знаков Декарта. Число положительных корней действительного алгебраического уравнения (2) либо равно числу N перемен знака в последовательности a_0, a_1, \dots, a_n коэффициентов, причем коэффициенты, равные нулю, не учитываются, либо меньше числа N на четное число.

Если перемен знака нет, то уравнение (2) положительных корней не имеет; если есть одна перемен знака, то имеется в точности один положительный корень. Применяя эту теорему к $f(-x)$, получаем аналогичную теорему для отрицательных корней.

(д) Отделение действительных корней: верхняя граница действительных корней (пп.4.3-3). 1) Если первые k коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_{k-1} действительного алгебраического уравнения (2) неотрицательны (a_k — первый отрицательный коэффициент), то все

положительные корни уравнения (2) (если они есть) меньше чем $1 + \sqrt[k]{q/a_0}$,

где q — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов.

Применяя эту теорему к $f(-x)$, можно таким же образом получить нижнюю границу отрицательных корней.

2) Если при $x=c$ многочлен $f(x)$ и его производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ (п.4.5-1) принимают положительные значения, то c является верхней границей действительных корней уравнения (2).

(е) Отделение действительных корней: теорема Ролля (см. также п.4.7-10). Производная (п.4.5-1) $f'(x)$ действительного многочлена $f(x)$ имеет нечетное число действительных корней между двумя соседними действительными корнями многочлена $f(x)$.

Пусть a и b —два соседних действительных корня уравнения $f'(x) = 0$, и пусть $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$. Уравнение $f(x)=0$ между a и b либо вовсе не имеет действительных корней, либо имеет один действительный корень в зависимости от того, будут ли числа $f(a)$ и $f(b)$ одинаковых или противоположных знаков. Лишь один действительный корень уравнения $f(x)=0$ может оказаться больше наибольшего корня или меньше наименьшего корня уравнения $f'(x)=0$.

(f) Отделение действительных корней: теорема Бюдана — Фурье. Пусть $N(x)$ — число перемен знака в последовательности значений $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ для любого действительного алгебраического уравнения (2). Тогда число действительных корней уравнения (2), заключенных между двумя действительными числами a и $b > a$, не являющимися корнями уравнения (2), либо равно $N(a) - N(b)$, либо меньше $N(a) - N(b)$ на четное число. При подсчете $N(a)$ члены последовательности, равные нулю, вычеркиваются. Если при подсчете $N(b)$ окажется, что $f^{(k)}(b) = 0$ для $k+1 \leq i \leq l-1$, а $f^{(i)}(b) \neq 0$ и $f^{(l)}(b) \neq 0$, то $f^{(i)}(b)$ заменяются на $(-1)^{i-l} \operatorname{sgn} f^{(l)}(b)$.

Число действительных корней уравнения (2), заключенных между a и b , нечетно или четно в зависимости от того, будут ли $f(a)$ и $f(b)$ противоположных или одинаковых знаков.

(g) Отделение действительных корней: метод Штурма. Пусть для данного действительного алгебраического уравнения (2) без кратных корней (п.1.6-2) $N(x)$ есть число перемен знака в последовательности значений многочленов (члены, обращающиеся в нуль, не учитываются):

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= f(x) = g_0(x)f_1(x) - f_2(x), & f_1(x) &= f'(x) = g_1(x)f_2(x) - f_3(x), \\ f_2(x) &= g_2(x)f_3(x) - f_4(x), & \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.6-9)$$

где при $i > 1$ каждый многочлен $f_i(x)$ есть взятый с коэффициентом -1 остаток (п.1.7-2), получаемый при делении $f_{i-2}(x)$ на $f_{i-1}(x)$; многочлен $f_n(x) \neq 0$ есть постоянная. Тогда число действительных корней уравнения (2), заключенных между двумя действительными числами a и $b > a$, не являющимися корнями уравнения (2), равно $N(a) - N(b)$.

Метод Штурма применим и в том случае, если для удобства вычислений какой-либо из многочленов $f_i(x)$ в описанном выше процессе заменить многочленом $F_i(x) = f_i(x)/k(x)$, где $k(x)$ — положительная постоянная или многочлен относительно x , положительный при $a < x < b$, а оставшиеся многочлены получить, исходя из $F_i(x)$, а не из $f_i(x)$. Подобную же операцию можно вновь проводить над любым из многочленов $F_i(x)$ и т. д.

Если уравнение $f(x) = 0$ имеет кратные корни, то $f(x)$ и $f'(x)$ имеют общий делитель (п.1.7-3). В этом случае многочлен $f_n(x)$ не является постоянной, и $N(a) - N(b)$ есть число корней между a и b , причем каждый кратный корень считается только один раз.

1.7. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ И ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДРОБИ

1.7-1. Разложение многочленов на множители (см. также п.7.6-6). Если многочлен $F(x)$ может быть представлен в виде произведения многочленов $f_1(x), f_2(x), \dots, f_t(x)$, то эти многочлены называются **множителями** (делителями) многочлена $F(x)$. Если $x = x_1$ — корень кратности m произвольного множителя $f_i(x)$, то он является и корнем кратности $M \geq m$ многочлена $F(x)$.

Каждый (действительный или комплексный) многочлен $f(x)$ степени n относительно x может быть единственным способом представлен в виде произведения постоянной и n линейных множителей $(x - \alpha_k)$, именно

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 \prod_{k=1}^n (x - x_k), \quad (1.7-1)$$

где x_k — корни многочлена $f(x)$; корню x_k кратности t_k (п.1.6-2) соответствует t_k множителей $(x - x_k)$ (теорема о разложении многочлена на множители). Каждая пара множителей $[x - (a_k + i\omega_k)]$ и $[x - (a_k - i\omega_k)]$, соответствующая паре комплексных сопряженных корней $x_k = a_k + i\omega_k$ и $\bar{x}_k = a_k - i\omega_k$ (см. также п.1.6-6а) может быть объединена в действительный квадратный множитель $[(x - a_k)^2 + \omega_k^2]$.

1.7-2. Деление многочленов. Остаток. Частное $F(x)/f(x)$ от деления многочлена $F(x)$ степени N на многочлен $f(x)$ степени $n < N$ может быть представлено в виде

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0 x^N + A_1 x^{N-1} + \dots + A_N}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n} \equiv (b_0 x^{N-n} + b_1 x^{N-n-1} + \dots + b_{N-n}) + \frac{r_1(x)}{f(x)}, \quad (1.7-2)$$

где остаток $r_1(x)$ есть многочлен степени, меньшей чем n . Коэффициенты b_k и остаток $r_1(x)$ определяются однозначно, например с помощью процесса деления углом (алгоритма деления).

Остаток $r_1(x)$ отсутствует в том и только в том случае, когда многочлен $f(x)$ является делителем (п.1.7-1) многочлена $F(x)$.

Остаток, получаемый при делении любого многочлена $f(x)$ на $(x - c)$, равен $f(c)$ (теорема Безу).

1.7-3. Общие делители и общие корни двух многочленов. Если многочлен $g(x)$ является общим делителем (множителем) многочленов $F(x)$ и $f(x)$, то его корни являются общими корнями этих многочленов. Отношение (2), как и числовую дробь, можно сокращать на любой общий множитель числителя и знаменателя.

Многочлены

$$F(x) = A_0 x^N + A_1 x^{N-1} + \dots + A_N$$

и

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

имеют по крайней мере один общий корень (и, таким образом, общий делитель ненулевой степени) в том и только в том случае, если определитель порядка $N+1$

$R(F, f) =$

$$= \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \dots & \dots & A_{N-1} & A_N & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{N-1} & A_N & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \dots & \dots & A_{N-1} & A_N \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \quad (1.7-3)$$

(результат многочленов $F(x)$ и $f(x)$) равен нулю. В противном случае $F(x)$ и $f(x)$ взаимно просты.

* Имеет место формула

$$R(F, f) = (-1)^{Nn} R(f, F) = A_0^n a_0^N \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j),$$

где α_i и β_j — соответственно корни $F(x)$ и $f(x)$. *

Наибольший общий делитель (общий множитель наибольшей степени) многочленов $F(x)$ и $f(x)$ определен однозначно с точностью до постоянного множителя и может быть найден следующим образом. Делим $f(x)$ на $r_1(x)$, где $r_1(x)$ определен формулой (1.7-2); получаем остаток $r_2(x)$. Затем делим $r_1(x)$ на получившийся остаток $r_2(x)$ и продолжаем этот процесс до тех пор, пока некоторый остаток, скажем $r_k(x)$, не окажется равным нулю. Тогда остаток $r_{k-1}(x)$, умноженный на произвольный постоянный множитель, и будет искомым наибольшим общим делителем. Если $r_1(x) = 0$, то наибольшим общим делителем будет сам многочлен $f(x)$.

1.7-4. Разложение на элементарные дроби. Любое отношение $g(x)/f(x)$ многочлена $g(x)$ степени m и многочлена $f(x)$ степени $n > m$ без общих корней (п.1.7-3) может быть следующим образом представлено в виде суммы n элементарных дробей, соответствующих корням x_k (кратности m_k) многочлена $f(x)$:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} \frac{b_{kj}}{(x-x_k)^j} = \sum_k \left[\frac{b_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{b_{k2}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{b_{km_k}}{(x-x_k)^{m_k}} \right]. \quad (1.7-4)$$

Коэффициенты b_{kj} можно найти одним из следующих методов или же комбинацией этих методов:

1. Если $m_k = 1$ (x_k — простой корень), то $b_{k1} = g(x_k)/f'(x_k)$.
2. Умножая обе части равенства (4) на $f(x)$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства.
3. Умножая обе части равенства (4) на $f(x)$ и последовательно дифференцируя полученное равенство. Пусть $\varphi_k(x) = f(x)/(x-x_k)^{m_k}$. Тогда $b_{km_k}, b_{km_k-1}, \dots$ последовательно находятся из соотношений

$$\begin{aligned} g(x_k) &= b_{km_k} \varphi_k(x_k), \\ g'(x_k) &= b_{km_k} \varphi_k'(x_k) + b_{km_k-1} \varphi_k(x_k), \\ g''(x_k) &= b_{km_k} \varphi_k''(x_k) + 2b_{km_k-1} \varphi_k'(x_k) + 2b_{km_k-2} \varphi_k(x_k), \\ &\dots \dots \dots \\ g^{(m_k-1)}(x_k) &= b_{km_k} \varphi_k^{(m_k-1)}(x_k) + m_k b_{km_k-1} \varphi_k^{(m_k-2)}(x_k) + \\ &\quad + m_k(m_k-1) b_{km_k-2} \varphi_k^{(m_k-3)}(x_k) + \dots + m_k! b_{k1} \varphi_k(x_k). \end{aligned}$$

Элементарные дроби, соответствующие произвольной паре комплексных сопряженных корней $a_k + i\omega_k$ и $a_k - i\omega_k$ кратности m_k , обычно соединяются в

$$c_{k1} \frac{x+d_{k1}}{[(x-a_k)^2 + \omega_k^2]} + c_{k2} \frac{x+d_{k2}}{[(x-a_k)^2 + \omega_k^2]^2} + \dots + c_{km_k} \frac{x+d_{km_k}}{[(x-a_k)^2 + \omega_k^2]^{m_k}}. \quad (1.7-5)$$

Коэффициенты c_{kj} и d_{kj} могут быть определены непосредственно описанным выше методом 2. Если $g(x)$ и $f(x)$ — действительные многочлены (п.1.6-6), то все коэффициенты b_{kj}, c_{kj}, d_{kj} в окончательном разложении на элементарные дроби действительны.

Каждая рациональная функция от x (п.4.2-2,с) может быть представлена в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей (см. также п.7.6-8). Разложение на элементарные дроби играет важную роль в связи с интегрированием (п.4.6-6,с) и интегральными преобразованиями (п.8.4-5).

1.8. ЛИНЕЙНЫЕ, КВАДРАТНЫЕ, КУБИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

1.8-1. Решение линейных уравнений. Общее уравнение первой степени (линейное уравнение)

$$ax = b \quad \text{или} \quad ax - b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1.8-1)$$

имеет решение

$$x = \frac{b}{a}. \quad (1.8-2)$$

1.8-2. Решение квадратных уравнений. Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1.8-3)$$

имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1.8-4)$$

где в случае, когда a , b и c — любые комплексные числа, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ есть одно из значений квадратного корня.

Если уравнение (3) действительно, то его корни x_1 и x_2 либо действительные различные, либо действительные равные, либо комплексные сопряженные в зависимости от того, будет ли (п.1.6-5) $D = b^2 - 4ac$ соответственно положительным, равен нулю или отрицательным. Отметим, что

$$x_1 + x_2 = -b/a \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = c/a.$$

1.8-3. Кубические уравнения: решение Кардано. Кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.8-5)$$

подстановкой $x = y - a/3$ приводится к «неполному» виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c. \quad (1.8-6)$$

Корни y_1, y_2, y_3 «неполного» кубического уравнения (6) равны

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3},$$

где

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad (1.8-7)$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

причем в качестве A и B берутся любые значения кубических корней из соответствующих комплексных чисел, удовлетворяющие соотношению $AB = -p/3$. Если уравнение (6) действительно, то (в тех случаях, когда это возможно) следует брать действительные значения этих корней. Если кубическое уравнение (6) действительно, то оно имеет или один действительный корень и два сопряженных комплексных корня, или три действительных корня, по крайней мере два из которых равны, или три различных действительных корня в зависимости от того, будет ли Q соответственно положительно, равно нулю, или отрицательно. В последнем случае («неприводимый» случай) можно воспользоваться методом п.1.8-4а. Отметим, что дискриминанты (п.1.6-5) уравнений (5) и (6) равны $-108Q$.

1.8-4. Кубические уравнения: тригонометрическое решение. Пусть «неполное» кубическое уравнение (6) действительно.

(а) Если $Q < 0$ («неприводимый» случай), то $p < 0$ и

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{-p/3} \cos \frac{\alpha}{3}, \\ y_{2,3} &= -2\sqrt{-p/3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \\ \cos \alpha &= -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8-8)$$

где

(б) Если $Q > 0, p > 0$, то

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -2\sqrt{p/3} \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad y_{2,3} = \sqrt{p/3} (\operatorname{ctg} 2\alpha \pm i\sqrt{3} \operatorname{cosec} 2\alpha), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \quad (|\alpha| < \frac{\pi}{4}), \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2}{q} \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (|\beta| < \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \right\} \quad (1.8-9a)$$

где

(в) Если $Q > 0, p < 0$, то

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\alpha, \quad y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}} (\operatorname{cosec} 2\alpha \pm i\sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\alpha), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \quad (|\alpha| < \frac{\pi}{4}), \quad \sin \beta = \frac{2}{q} \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} \quad (|\beta| < \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \right\} \quad (1.8-9b)$$

где

Во всех случаях берется действительное значение кубического корня.

1.8-5. Уравнения четвертой степени: решение Декарта—Эйлера. Уравнение четвертой степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1.8-10)$$

подстановкой $x = y - a/4$ приводится к «неполному» виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \quad (1.8-11)$$

Корни y_1, y_2, y_3, y_4 «неполного» уравнения четвертой степени (11) равны одному из выражений

$$\pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}, \quad (1.8-12)$$

в которых сочетания знаков выбираются так, чтобы удовлетворялось условие

$$\sqrt{z_1} \sqrt{z_2} \sqrt{z_3} = -\frac{q}{8}, \quad (1.8-13)$$

причем z_1, z_2 и z_3 — корни кубического уравнения

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0. \quad (1.8-14)$$

1.8-6. Уравнения четвертой степени: решение Феррари. Если y_1 — произвольный корень кубического уравнения

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \quad (1.8-15)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение (п. 1.5-2) элемента a_{ik} в определителе D (см. также пп. 13.2-3 и 14.5-3).

1.9-3. Линейная независимость (см. также пп. 9.3-2, 14.2-3 и 15.2-1,а).

(а) m уравнений $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$)

или m функций $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных при всех значениях $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n$ **линейно независимы**, если

$$\left. \begin{aligned} \text{из того, что } \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \text{ при всех} \\ \text{значениях } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ следует, что } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9-6)$$

В противном случае эти m уравнений или функций **линейно зависимы**, т. е. по крайней мере одно из них может быть представлено в виде линейной комбинации остальных. Это всегда имеет место в тривиальном частном случае, когда одно или более из уравнений $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ есть тождество.

n однородных линейных функций $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$) **линейно независимы** в том и только в том случае, если $\det [a_{ik}] \neq 0$ (см. также п. 1.9-5)

Более общее утверждение: m однородных линейных функций $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ($i = 1, 2, \dots, m$) **линейно независимы** в том и только в том случае, если $(m \times n)$ -матрица $[a_{ik}]$ имеет ранг m (п. 13.2-7).

(б) m множеств, каждое из которых состоит из n чисел $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$; \dots ; $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}$ (например, решения системы уравнений, или наборы компонент m штук n -мерных векторов) **линейно независимы**, если

$$\text{из } \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j^{(i)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ следует } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0. \quad (1.9-7)$$

Это выполняется в том и только в том случае, если $(m \times n)$ -матрица $[x_j^{(i)}]$ имеет ранг m (п. 13.2-7).

1.9-4. Системы линейных уравнений: общая теория (см. также п. 14.8-10). Система m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.9-8)$$

имеет решение в том и только в том случае, если матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad (1.9-9)$$

(матрица системы и расширенная матрица системы) имеют один и тот же ранг (п. 13.2-7). В противном случае уравнения несовместны.

Единственное решение, о котором говорилось в п. 1.9-2, существует, если $r = m = n$. Если обе матрицы (9) имеют ранг $r \leq m$, то уравнения (8) **линейно независимы** при $r = m$ и **линейно зависимы** при $r < m$ (п. 1.9-3,а). В

случае $r < m$ некоторые $m - r$ уравнений можно выразить в виде линейных комбинаций остальных r уравнений (независимых), и им удовлетворяют решения этих r уравнений. Линейно независимые уравнения определяют некоторые $r \leq m$ неизвестных как линейные функции остальных $n - r$ неизвестных, остающихся произвольными.

1.9-5. Системы линейных уравнений: n однородных уравнений с n неизвестными. В частности, система n однородных линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.9-10)$$

имеет решение, отличное от тривиального (нулевого) решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, в том и только в том случае, если $D = \det [a_{ik}] = 0$ (см. также п.1.9-3).

В этом случае существует точно $n - r$ линейно независимых решений $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}; \dots; x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \dots, x_n^{(n-r)}$, где r — ранг матрицы системы (п.1.9-4). Наиболее общим решением тогда является

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-r} c_j x_i^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.9-11)$$

где c_j — произвольные постоянные (см. также п.1.4.8-10).

В важном частном случае, когда $r = n - 1$,

$$x_1 = cA_{k1}, \quad x_2 = cA_{k2}, \quad \dots, \quad x_n = cA_{kn}, \quad (1.9-12)$$

где A_{kj} — алгебраическое дополнение (п. 1.5-2) элемента a_{kj} в определителе D , причем k выбрано так, что хотя бы одно из A_{kj} ($j = 1, 2, \dots, n$) отлично от нуля, есть решение при любой произвольной постоянной c . Это значит, что все отношения x_i/x_k определены однозначно; решения (12), получающиеся при различных таких значениях k , тождественны (см. также п.1.4.8-6).

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

2.1-1. Вводные замечания (см. также п.12.1-1). *Геометрия* занимается изучением объектов, которые могут быть в том или ином смысле отождествлены с точками, и представляет собой математическую модель, воспроизводящую отношения между этими объектами. В основе каждой геометрической системы лежат определенные *аксиомы*. Они могут быть выбраны таким образом, чтобы соответствующая модель отражала свойства реального физического пространства. Однако задачей геометрии является также логическое построение самых разнообразных аксиоматических систем, в том числе и таких, которые не всегда отвечают наглядным представлениям. В *аналитической геометрии* точка определяется системой чисел (ее **координат**), и, следовательно, геометрические факты записываются в виде соотношений между координатами.

Главы 2 (аналитическая геометрия на плоскости) и 3 (аналитическая геометрия в пространстве) следуют тому способу изложения, который принят в большинстве элементарных курсов: основные понятия геометрии предполагаются известными и просто переводятся на язык алгебры, становящейся вследствие этого средством исследования геометрических форм.

В главе 17 кратко изложен и использован более глубокий метод, состоящий в построении различных геометрических систем на основании заданных аксиом. В пп.17.1-1—17.1-6 содержатся краткие сведения из дифференциальной геометрии плоских кривых, включая определение касательной, нормали и кривизны.

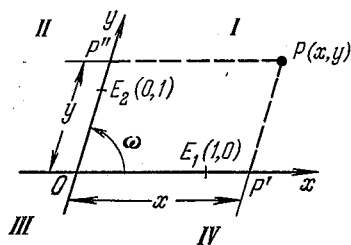


Рис. 2.1-1. Правая декартова координатная система координат. Отрезки OE_1 и OE_2 — единицы масштаба на осях.

2.1-2. Декартова система координат. Декартова система координат (см. также п.17.4-6, b) связывает с каждой точкой P плоскости, на которой выбраны две направленные прямые (оси координат) Ox и Oy , пересекающиеся в начале координат O (рис. 2.1-1), определенную пару действительных чисел, абсциссу x и ординату y ; при этом пишут $P(x, y)$. Прямая, проходящая через точку P параллельно оси Oy , пересекает ось Ox в точке P' . Ана-

логично прямая, проходящая через точку P параллельно Ox , пересекает Oy в точке P'' . Величина направленного отрезка $OP' = x$ (положительная, если направление $\overline{OP'}$ совпадает с направлением оси Ox и отрицательная в противном случае) и определенная аналогичным способом величина $OP'' = y$ называются **декартовыми координатами** точки P .

В общей (косугольной) декартовой системе координат угол ω между осями Ox и Oy может принимать значения $0 < \omega < \pi$ (правая система) или $-\pi < \omega < 0$ (левая система). Если для измерения отрезков OP' и OP'' используются различные единицы длины, то система координат называется общей декартовой или аффинной.

Оси координат делят плоскость на четыре квадранта (рис. 2.1-1). Абсцисса x положительна для точек (x, y) , расположенных в квадрантах I и IV, отрицательна в квадрантах II и III, равна нулю для точек оси Oy ; ордината y положительна для точек в квадрантах I и II, отрицательна для точек в квадрантах III и IV, равна нулю для точек оси Ox . Началом координат служит точка $(0, 0)$.

З а м е ч а н и е. Аналитическая геометрия на евклидовой плоскости постулирует взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами («координатная» аксиома, аксиома непрерывности, см. также п.4.3-1).

2.1-3. Правая декартова прямоугольная система координат. В правой декартовой прямоугольной системе координат направления осей выбираются так, что поворот оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении, т. е. в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, совмещает полуось положительных x с полуосью положительных y . При этом условии координаты x, y равны соответственно расстояниям от координатных осей Ox и Oy до данной точки P , определенным по величине и знаку (рис. 2.1-2).

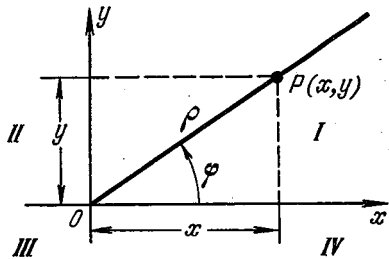


Рис. 2.1-2. Системы координат: правая декартова прямоугольная и полярная.

В этой главе, если не оговорено противное, всегда применяется правая декартова прямоугольная система координат.

2.1-4. Основные формулы в декартовых прямоугольных координатах.

1. Расстояние d между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.1-1)$$

2. Угол γ между двумя направленными отрезками $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_3P_4}$

$$\cos \gamma = \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}}. \quad (2.1-2)$$

Направляющими косинусами направленного отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$ называются косинусы углов α_x и $\alpha_y = \frac{\pi}{2} - \alpha_x$, образованных этим отрезком с положительными направлениями координатных осей:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_x &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \\ \cos \alpha_y &= \sin \alpha_x = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-3)$$

3. Координаты x, y точки P , делящей направленный отрезок $\overrightarrow{P_1P_2}$ между точками $P_1(x_1, x_2)$ и $P_2(x_2, y_2)$ в отношении $P_1P:PP_2 = m:n = \lambda:1$, определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-4)$$

Координаты середины отрезка P_1P_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (2.1-5)$$

* При $0 < \lambda < \infty$ точка P лежит внутри отрезка P_1P_2 , а при $-1 < \lambda < 0$ и $-\infty < \lambda < -1$ — вне его. При $\lambda = 0$ точка P совпадает с точкой P_1 , а при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ точка P стремится к точке P_2 .

Формулы (4) сохраняют смысл при $\lambda = -1$, если прямая дополнена несобственной или «бесконечно удаленной» точкой, которая делит любой отрезок этой прямой в отношении, равном -1 .*

4. Площадь S треугольника с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \quad (2.1-6)$$

В частности, если $x_3 = y_3 = 0$, то

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (2.1-7)$$

Значение S положительно, если направление обхода $P_1P_2P_3$ совпадает с положительным (против часовой стрелки) направлением вращения.

2.1-5. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей. Пусть x, y — координаты произвольной точки P относительно декартовой системы координат; пусть \bar{x}, \bar{y} — координаты этой же точки P относительно другой декартовой системы координат, оси которой соответственно параллельны осям первой системы и направлены так же, как они, и начало которой имеет относительно системы Oxy координаты x_0, y_0 . Если на осях этих систем выбраны одинаковые единицы масштаба, то координаты \bar{x}, \bar{y} связаны с x, y следующими формулами преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - x_0, & \bar{y} &= y - y_0 \\ \text{или} & & & \\ x &= \bar{x} + x_0, & y &= \bar{y} + y_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-8)$$

Уравнения (8) допускают еще одно истолкование. Если рассматривать \bar{x} и \bar{y} как координаты относительно первоначальной системы координат (т.е. системы Oxy), то точка (\bar{x}, \bar{y}) может быть получена из точки (x, y) при помощи переноса на $-x_0$ в направлении оси Ox и на $-y_0$ в направлении оси Oy . Применение этого преобразования к каждой точке некоторой плоской кривой можно рассматривать как преобразование переноса кривой.

2.1-6. Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей. Пусть x, y — координаты некоторой точки относительно декартовой прямоугольной системы координат. Пусть \bar{x}, \bar{y} — координаты этой же точки относительно новой правой прямоугольной системы координат с тем же началом, расположенной относительно системы Oxy таким образом, что угол $xO\bar{x}$ между осью Ox и осью $O\bar{x}$ равен θ ; угол отсчитывается в положительном направлении. При одинаковых единицах масштаба на осях координаты \bar{x}, \bar{y} связаны с координатами x, y следующими формулами преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \theta + y \sin \theta, & \bar{y} &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ \text{или} & & & \\ x &= \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta, & y &= \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-9)$$

Если рассматривать x, y и \bar{x}, \bar{y} как координаты двух различных точек относительно одной и той же системы координат, то формулы (9) определяют преобразование поворота на угол $-\theta$ вокруг начала координат, переводящее точку (x, y) в точку (\bar{x}, \bar{y}) .

2.1-7. Одновременный перенос и поворот координатных осей. Если начало координат системы $O\bar{x}\bar{y}$ из п.2.1-6 не совпадает с началом системы Oxy и имеет относительно последней координаты x_0, y_0 , то уравнения преобразования принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta, \\ \bar{y} &= -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta, \\ x &= x_0 + \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta, \\ y &= y_0 + \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-10)$$

Формулы (10) позволяют найти зависимость между координатами точки в любых двух правых декартовых прямоугольных системах координат с одинаковыми единицами масштаба на осях.

Формулы (10) определяют также преобразования переноса и вращения, переводящие точку (x, y) в точку (\bar{x}, \bar{y}) , где обе точки рассматриваются в одной и той же системе координат.

З а м е ч а н и е. Преобразования (8), (9) и (10) не изменяют расстояния (1) между двумя точками или величину угла, определяемую формулой (2). Соотношения, составляющие содержание евклидовой геометрии, не изменяются при преобразовании переноса и поворота, т.е. инвариантны относительно этих преобразований (см. также пп.12.1-5, 14.1-4, 14.4-5).

2.1-8. Полярные координаты. Полярная система координат на плоскости задается точкой O (полюс) и направленной прямой Ox (полярная ось). С каждой точкой P плоскости, на которой задана полярная система координат, можно связать определенную пару чисел ρ, φ (полярные координаты). Полярный радиус ρ есть длина отрезка OP , а полярный угол φ — радианная мера угла xOP , отчитанная в направлении, противоположном вращению часовой стрелки (см. рис. 2.1-2). Угол φ определен с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число. Точка (ρ, φ) по определению совпадает с точкой $(-\rho, \varphi \pm \pi)$; это условие связывает определенную точку плоскости с каждой парой чисел (ρ, φ) не только при положительных, но и при отрицательных значениях ρ . Для полюса O величина φ не определена.

З а м е ч а н и е. В отличие от декартовой системы, полярная система координат не устанавливает взаимно однозначного соответствия между парами чисел (ρ, φ) и точками плоскости. Однако в большинстве приложений возникающая в результате этого неопределенность может быть устранена.

Если полюс и полярная ось совпадают соответственно с началом O и осью Ox прямоугольной системы координат (см. рис. 2.1-2), то при условии, что для измерения r, x и y использованы равные единицы масштаба, декартовы и полярные координаты связаны следующими формулами преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, & x &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-11)$$

Имеют место следующие формулы (ρ, φ — полярные координаты):

1. Расстояние d между точками (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) :

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (2.1-12)$$

2. Площадь треугольника с вершинами $P_1(\rho_1, \varphi_1), P_2(\rho_2, \varphi_2), P_3(\rho_3, \varphi_3)$:

$$S = \frac{1}{2} [\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \rho_2\rho_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \rho_3\rho_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)]. \quad (2.1-13)$$

В частности, если $\rho_3 = 0$, то

$$S = \frac{1}{2} [\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (2.1-14)$$

О знаке S см. п.2.1-4,4.

О других криволинейных системах координат см. в гл. 6.

2.1-9. Способы задания кривых (см. также пп.3.1-13 и 17.1-1).

(а) Уравнение кривой. Уравнение вида

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad y = f(x) \quad (2.1-15)$$

удовлетворяется координатами точек, принадлежащих определенному точечному множеству. В большинстве случаев, представляющих интерес, это точечное множество образует кривую (см. также п.3.1-13). Обратно, заданную кривую можно определить уравнением (15), которое должно удовлетворяться координатами всех точек кривой и только этих точек. Возможен случай, когда кривая имеет более одной ветви.

Кривые, определяемые уравнениями

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda\varphi(x, y) = 0,$$

где λ — отличная от нуля постоянная, совпадают.

(б) Параметрическое задание кривых. Плоская кривая может быть задана также двумя уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (2.1-16)$$

где t — переменный параметр.(с) Пересечение двух кривых. Значения координат x и y , которые одновременно удовлетворяют уравнениям двух кривых

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(x, y) = 0, \quad (2.1-17)$$

определяют *точку пересечения* этих кривых. В частности, если уравнение $\varphi(x, 0) = 0$ имеет действительные корни, то они служат абсциссами точек пересечения кривой $\varphi(x, y) = 0$ с осью Ox .

Если $\varphi(x, y)$ — полином степени n (п.1.4-3), то кривая $\varphi(x, y) = 0$ пересекает ось Ox (как и любую прямую линию, п.2.2-1) в n точках (*кривая n -го порядка*); однако некоторые из этих точек пересечения могут совпадать и/или быть мнимыми.

Для любого действительного λ уравнение

$$\varphi_1(x, y) + \lambda\varphi_2(x, y) = 0 \quad (2.1-18)$$

определяет кривую, проходящую через точки пересечения (действительные или мнимые) двух кривых (17).

(д) Уравнение

$$\varphi_1(x, y) \cdot \varphi_2(x, y) = 0 \quad (2.1-19)$$

удовлетворяется координатами точек, принадлежащих любой из кривых (17), и не удовлетворяется координатами других точек.

2.2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ**2.2-1. Уравнение прямой линии.** Каждое уравнение, линейное относительно декартовых координат x и y , т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.2-1)$$

где A и B не равны нулю одновременно, определяет прямую линию (рис.2.2-1). Обратно, каждая прямая линия может быть определена линейным уравнением (1). При $C = 0$ прямая проходит через начало координат.

Особенно важное значение имеют следующие виды уравнения прямой.

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Прямая, образующая угол φ с положительным направлением оси Ox (рис. 2.2-1) и пересекающая ось Oy в точке $(0, b)$:

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой.

2. Уравнение прямой в отрезках. Прямая линия, пересекающая ось Ox в точке $(a, 0)$ и ось Oy в точке $(0, b)$ (см. рис. 2.2-1):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

3. Нормальное уравнение прямой. Пусть p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а θ — угол (измеренный в положительном направлении) между положительным направлением оси Ox и направлением перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (см. рис. 2.2-1).

Тогда уравнение прямой имеет вид

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

4. Уравнение пучка прямых с центром в точке (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные (несовпадающие) точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

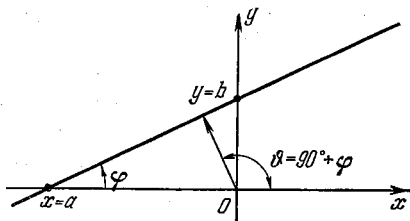


Рис. 2.2-1. Уравнение прямой.

Если прямая задана общим уравнением (1), то отрезки a и b , отсекаемые ею на осях, угловой коэффициент k , расстояние прямой от начала координат p , $\cos \theta$ и $\sin \theta$ выражаются через коэффициенты A , B и C следующим образом:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}, \quad k = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}, \quad \varphi = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad (2.2-2)$$

$$p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \theta = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \theta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.2-3)$$

Во избежание неопределенности знак перед радикалом выбирается так, чтобы соблюдалось условие $p > 0$.

В этом случае $\cos \theta$ и $\sin \theta$ являются направляющими косинусами положительной нормали прямой — перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (см. п. 1.7.1-2). Если $C = 0$, то выбор положительного направления на нормали произволен.

2.2-2. Другие способы задания прямой. Параметрические уравнения прямой могут быть записаны в виде

$$x = a_x t + x_0, \quad y = a_y t + y_0 \quad (t - \text{переменный параметр}); \quad (2.2-4)$$

при этом

$$k = \frac{a_y}{a_x}, \quad a = \frac{a_y x_0 - a_x y_0}{a_y}, \quad b = \frac{a_x y_0 - a_y x_0}{a_x}, \quad (2.2-5)$$

$$p = \frac{a_x y_0 - a_y x_0}{\pm \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{a_y}{\pm \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}}, \quad \sin \theta = -\frac{a_x}{\pm \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}}. \quad (2.2-6)$$

Если знак корня выбран так, что $p > 0$, то начало координат будет лежать справа от направления, в котором точка (x, y) перемещается по прямой при возрастании t .

Уравнение прямой в полярных координатах:

$$\rho(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + C = 0 \quad (2.2-7)$$

или

$$\rho \cos(\varphi - \theta) = p, \quad (2.2-8)$$

где A, B, C, p и θ имеют тот же смысл, что и в п.2.2-1; ρ, φ — полярные координаты.

2.3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ

2.3-1. Точки и прямые. Расстояние δ от точки $P_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, определенное по величине и знаку, может быть найдено по формуле

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (2.3-1)$$

где знак перед радикалом противоположен знаку C . Иногда δ называют отклонением точки от прямой; отклонение положительно, если начало координат и точка $P_0(x_0, y_0)$ лежат по разные стороны от прямой, и отрицательно, если по одну сторону.

Три точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) лежат на одной прямой в том и только в том случае, если (см. также п.2.2-1)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3-2)$$

2.3-2. Две или несколько прямых.

(а) Две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_1x + b_1 \quad (2.3-3a)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_2x + b_2 \quad (2.3-3b)$$

пересекаются в точке

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{k_2b_1 - k_1b_2}{k_2 - k_1}. \quad (2.3-4)$$

(б) Угол γ_{12} между двумя пересекающимися прямыми (3a) и (3b) определяется формулой

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (2.3-5)$$

*Под углом γ_{12} при этом понимается угол, на который нужно повернуть прямую (3a) вокруг точки пересечения прямых против часовой стрелки до первого совмещения с прямой (3b). Поменяв местами k_1 и k_2 , получим тангенс смежного угла $\gamma_{21} = \pi - \gamma_{12}$. *

(с) Прямые (3a) и (3b) параллельны, если

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \quad \text{или} \quad k_2 = k_1, \quad (2.3-6)$$

и перпендикулярны, если

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (2.3-7)$$

(d) Уравнения прямых, проходящих через точку (x_1, y_1) под углом γ к прямой (3a):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{B_1 \operatorname{tg} \gamma - A_1}{A_1 \operatorname{tg} \gamma + B_1} (x - x_1); \\ y - y_1 &= \frac{B_1 \operatorname{tg} \gamma + A_1}{A_1 \operatorname{tg} \gamma - B_1} (x - x_1). \end{aligned} \quad (2.3-8)$$

В частности, *нормаль* к прямой (3a), проходящая через точку (x_1, y_1) , определяется уравнением

$$y - y_1 = \frac{B_1}{A_1} (x - x_1) \quad \text{или} \quad y - y_1 = -\frac{1}{k_1} (x - x_1). \quad (2.3-9)$$

(e) Уравнение любой прямой, *параллельной* (3a):

$$A_1 x + B_1 y + C = 0. \quad (2.3-10)$$

Расстояние δ между параллельными прямыми (3a) и (10):

$$\delta = \frac{C_1 - C}{\pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \quad (2.3-11)$$

Если в (11) знак перед радикалом противоположен знаку C_1 , то δ будет положительным, когда начало координат и прямая (10) лежат по разные стороны от прямой (3a).

(f) Уравнение *любой прямой, проходящей через точку пересечения прямых (3a) и (3b)*, имеет вид

$$(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0, \quad (2.3-12)$$

где λ — постоянная (см. также п.2.1-9,с). Обратно, каждое уравнение вида (12) определяет прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых. Если (3a) и (3b) параллельны, то (12) определяет прямую, которая в свою очередь им параллельна. Совокупность прямых, определяемых уравнением (12) при различных значениях параметра λ , называется *пучком прямых*, а точка их пересечения — *центром пучка*. Если базисные прямые (3a) и (3b) пучка заданы нормальными уравнениями (п.2.2-1), то $(-\lambda)$ равно отношению расстояний от любой точки прямой (12) до базисных прямых; при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$ полученная прямая служит *биссектрисой* угла между базисными прямыми пучка.

(g) *Для того чтобы три прямые*

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \quad (2.3-13)$$

пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3-14)$$

т. е. чтобы левые части уравнений (13) были *линейно зависимы* (п.1.9-3,а).

2.3-3. Тангенциальные координаты. Уравнение

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \quad (2.3-15)$$

определяет прямую линию (ξ, η) . Числа ξ и η называются ее тангенциальными (линейными, плоскокеровыми) координатами. Если точечные координаты x, y фиксированы, а ξ, η рассматриваются как переменные, то (15) становится уравнением точки (x, y) , т.е. точки пересечения всех прямых (15). Симметрия уравнения (15) относительно точечных и тангенциальных координат влечет за собой соответствие (двойственность) между теоремами, относящимися к взаимному расположению точек и прямых (пп. 2.3-1 и 2.3-2). Уравнение $F(\xi, \eta) = 0$ определяет семейство прямых, которое, вообще говоря, имеет огибающую, зависящую от вида функции $F(\xi, \eta)$ (п.17.1-7).

2.4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА (КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ)

2.4-1. Общее уравнение второй степени. Кривые второго порядка (конические сечения) определяются уравнениями второй степени относительно декартовых прямоугольных координат. Общее уравнение второй степени относительно x, y имеет вид

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ \text{или} & (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0, \\ \text{где} & a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ & (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0, \\ & a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned}} \right\} (2.4-1)$$

2.4-2. Инварианты. Для любого уравнения (1) три величины

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad D = A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.4-2)$$

являются *инвариантами* относительно переноса и поворота осей (2.1-8), (2.1-9) и (2.1-10). Эти инварианты определяют свойства кривой второго порядка, не зависящие от ее положения на плоскости.

Инвариант A , а так же иногда $\Delta = 8A$ называют *дискриминантом уравнения* (1).

2.4-3. Классификация конических сечений. Табл. 2.4-1 содержит классификацию конических сечений, основанную на их инвариантах (2.4-2). в этой таблице

$$A' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.4-3)$$

2.4-4. Условие подобия невырожденных конических сечений. Два невырожденных конических сечения ($A \neq 0$), заданных уравнениями вида (1), подобны, если $D = 0$ для каждого из уравнений (т.е. если обе кривые — параболы) или если $D \neq 0$ для каждого из уравнений и отношения $a_{11} : a_{12} : a_{22}$ для этих уравнений совпадают.

2.4-5. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение. Многие важные свойства кривых второго порядка могут быть изучены при помощи характеристической квадратичной формы

$$F_0(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad (2.4-4)$$

соответствующей уравнению (1). В частности, невырожденная кривая второго порядка ($A \neq 0$) оказывается действительным эллипсом, мнимым эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, будет ли $F_0(x, y)$ положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной или полуопределенной квадратичной формой, что устанавливается по корням λ_1, λ_2 ее *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - I\lambda + D = 0. \quad (2.4-5)$$

Корни λ_1, λ_2 являются *собственными значениями* действительной симметрической матрицы $\{a_{ik}\}$ (пп.13.4-5, 13.5-2) и, как следствие этого, всегда действительны.

Таблица 2.4-1

Классификация конических сечений

		Невырожденные конические сечения $A \neq 0$	Вырожденные (распадающиеся) конические сечения $A = 0$	
Центральные конические сечения $D \neq 0$	$D > 0$	$\frac{A}{I} < 0$ Действительный эллипс (окружность, если $I^2 = 4D$ или $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$)		
		$\frac{A}{I} > 0$ Мнимый эллипс (ни одной действительной точки)		
		$\frac{A}{I} = 0$ Действительная точка пересечения двух мнимых прямых (эллипс, выродившийся в точку)		
	$D < 0$	Гипербола	Пара действительных пересекающихся прямых (выродившаяся гипербола)	
Конические сечения без центра или с неопределенным центром $D = 0$		$A' > 0$	Парабола	
		$A' < 0$		Пара действительных параллельных прямых
		$A' = 0$		Одна действительная прямая (пара совпавших прямых)

* Заметим, что инварианты I и D кривой второго порядка следующим образом выражаются через корни характеристического уравнения (5):

$$I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad D = \lambda_1 \lambda_2.$$

Отсюда следует, что если один из корней λ_1, λ_2 равен нулю, то $D = 0$ (см. табл. 2.4-1).*

2.4-6. Центры и диаметры конических сечений.

(а) Диаметр конического сечения называется прямая, являющаяся геометрическим местом середин параллельных хорд. Говорят, что диаметр сопряжен хордам (а также направлению хорд), которые он делит пополам. Диаметр, сопряженный хордам, образующим угол θ с положительным направлением оси Ox , определяется уравнением

$$(a_{11}x + a_{12}y_1 + a_{12})\cos\theta + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\sin\theta = 0. \quad (2.4-6)$$

(б) При $D \neq 0$ все диаметры кривой второго порядка пересекаются в одной точке — центре кривой (другое определение см. в п.2.4-10). При $D = 0$ все диаметры параллельны или совпадают. В случае $D \neq 0$ кривая второго порядка называется центральной.

Координаты центра (x_0, y_0) определяются уравнениями

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \quad a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \quad (2.4-7)$$

откуда следует, что

$$x_0 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad y_0 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (D \neq 0). \quad (2.4-8)$$

Если кривая центральная, то перенос (2.1-8) начала координат в ее центр (8) приводит уравнение кривой к виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{D} = 0, \quad (2.4-9)$$

где x, y — координаты относительно новой системы.

(е) Каждый из двух **сопряженных диаметров** центральной кривой второго порядка делит пополам хорды, параллельные другому диаметру (см. также п.2.5-2,е).

2.4-7. Главные оси. Диаметр, перпендикулярный к сопряженным ему хордам, называется **главной осью** кривой второго порядка и является осью симметрии кривой. Каждая центральная кривая второго порядка ($D \neq 0$) либо имеет две взаимно перпендикулярные главные оси, либо каждый диаметр является главной осью; в последнем случае кривая является окружностью. При $D = 0$ кривая имеет одну главную ось (см. табл. 2.4-1). Точки пересечения кривой второго порядка с ее главными осями называются **вершинами** этой кривой.

Главные оси имеют направление собственных векторов матрицы $[a_{ik}]$ ($i, k = 1, 2$) (см п.14.8-6). Иначе говоря, направляющие косинусы $\cos \theta, \sin \theta$ нормалей к главным осям (п.2.2-1) удовлетворяют уравнениям

$$(a_{11} - \lambda) \cos \theta + a_{12} \sin \theta = 0, \quad a_{21} \cos \theta + (a_{22} - \lambda) \sin \theta = 0, \quad (2.4-10)$$

где λ — отличный от нуля корень уравнения (5). Направления главных осей и сопряженных им хорд называются **главными направлениями** кривой второго порядка. Угол между положительным направлением оси Ox и каждым из двух главных направлений кривой определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}; \quad (2.4-11)$$

только окружность имеет неопределенные главные направления.

2.4-8. Приведение уравнения кривой второго порядка к стандартному (каноническому) виду. Если ввести новую систему координат, совершив поворот осей на угол, удовлетворяющий уравнению (11), и подходящий перенос начала (п.2.1-7), то уравнение (1) любой невырожденной кривой второго порядка может быть приведено к следующему стандартному (или каноническому) виду (параметры a^2, b^2 и p , встречающиеся в канонических уравнениях, весьма просто выражаются через корни $\lambda_1 \geq \lambda_2$ характеристического уравнения (5) и инварианты A, D, I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \text{ (эллипс),} \\ a^2 &= -\frac{1}{\lambda_2} \frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1 \lambda_2^2}, \quad b^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1^2 \lambda_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4-12a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \text{ (гипербола),} \\ a^2 &= -\frac{1}{\lambda_1} \frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1^2 \lambda_2}, \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{A}{D} = \frac{A}{\lambda_1 \lambda_2^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.4-12b)$$

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 2px \text{ (парабола),} \\ p &= \frac{1}{I} \sqrt{-\frac{A}{I}} = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{-\frac{A}{\lambda_1}} > 0, \quad \lambda_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4-12c)$$

Уравнения вырожденных (распадающихся) кривых второго порядка аналогичным способом приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 0 \quad (\text{точка}), \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 0 \quad (\text{пересекающиеся прямые}), \\ \frac{x^2}{a^2} &= 1 \quad (\text{параллельные прямые}), \\ x^2 &= 0 \quad (\text{одна действительная прямая}). \end{aligned} \right\} \quad (2.4-13)$$

З а м е ч а н и е. Поворот координатных осей (2.1-9) на угол, удовлетворяющий уравнению (11), приводит к диагональному виду матрицу $[a_{ik}]$ характеристической квадратичной формы (4) (см. также п. 1.4.8-6). Изменение θ на угол, кратный $\pi/2$, соответствует некоторой перестановке переменных $x, y, -x$ и $-y$. Канонические уравнения (12a), (12b), (12c) соответствуют такому выбору θ , при котором фокусы (п. 2.4-9) конических сечений лежат на оси Ox .

2.4-9. Геометрическое определение невырожденной кривой второго порядка. Каноническое уравнение любой невырожденной кривой второго порядка (12) может быть при помощи подходящего преобразования начала (п. 2.1-5) приведено к виду

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2 \quad (p > 0). \quad (2.4-14)$$

В этом случае кривая проходит через начало координат новой системы; ось Ox является осью симметрии кривой. Уравнение (14) выражает тот факт, что невырожденное коническое сечение является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых $\varepsilon \geq 0$ (эксцентриситет) от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы) постоянно. Коническое сечение есть эллипс при $\varepsilon < 1$ и, в частности, окружность при $\varepsilon = 0$, гипербола при $\varepsilon > 1$ и парабола при $\varepsilon = 1$.

Уравнение директрисы конического сечения (14):

$$x = -\frac{p}{\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \quad (2.4-15)$$

Координаты фокуса:

$$x = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad y = 0. \quad (2.4-16)$$

Директриса перпендикулярна к оси симметрии, проходящей через фокус и вершину кривой (фокальная ось). Расстояние между фокусом и директрисой равно p/ε . Если кривая второго порядка центральная (эллипс или гипербола), то прямая

$$x = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = a \quad (2.4-17)$$

является осью симметрии кривой и, следовательно, кривая имеет два фокуса и две директрисы.

Фокальным параметром невырожденной кривой второго порядка называется половина длины ее хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к фокальной оси (фокальная хорда); фокальный параметр равен p .

З а м е ч а н и е. Все типы кривых второго порядка, вырожденных и невырожденных, могут быть получены как плоские сечения прямого кругового конуса при различных положениях секущей плоскости относительно конуса. Если кривая распадается на пару параллельных прямых, то следует считать, что конус вырождается в цилиндр.

2.4-10. Касательные и нормали конического сечения. Полюсы и поляры.

Уравнение касательной (п.17.1-1) к кривой второго порядка (1) в ее точке (x_1, y_1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} & a_{11}x_1x + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{13}(x_1 + x) + a_{23}(y_1 + y) + a_{33} = 0 \\ \text{или} & (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})x + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})y + (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}) = 0. \end{aligned} \right\} (2.4-18)$$

Уравнение нормали (п.17.1-2) к кривой второго порядка (1) в точке (x_1, y_1) имеет вид

$$\frac{x - x_1}{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}} = \frac{y - y_1}{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}. \quad (2.4-19)$$

Уравнение (18) определяет прямую, называемую **полярю** точки (x_1, y_1) относительно кривой второго порядка (1), независимо от того, лежит ли точка (x_1, y_1) на кривой или нет; точка (x_1, y_1) называется **полюсом** прямой (18). Поляра точки кривой есть касательная к кривой в этой точке.

Уравнения касательных, поляр и нормалей для конических сечений, заданных каноническими уравнениями (п.2.4-8), приведены в табл. 2.4-2.

З а м е ч а н и е (теоремы о полюсах и полярах).

1. Если прямая, проведенная через полюс P , пересекает полярю в точке Q , а коническое сечение — в точках R_1 и R_2 , то точки P и Q гармонически разделяют R_1 и R_2 , т.е. $\frac{R_1P}{PR_2} = -\frac{R_1Q}{QR_2}$ (новое определение поляры).

2. Если точка лежит на некоторой прямой, то ее поляра проходит через полюс этой прямой. Если прямая проходит через некоторую точку, то ее полюс лежит на полярке этой точки.

3. Диаметр кривой второго порядка есть поляра бесконечно удаленной точки, через которую проходят сопряженные ему хорды; центр кривой второго порядка есть полюс бесконечно удаленной прямой (новое определение диаметра и центра).

4. Фокус кривой второго порядка есть центр пучка, обладающего тем свойством, что полюс любой его прямой принадлежит перпендикулярной к ней прямой пучка. Директриса есть поляра фокуса (новое определение фокуса и директрисы).

Из 1—4 следует, в частности, что:

- (а) Если через точку можно провести две касательные к коническому сечению, то поляра этой точки проходит через точки касания.
- (б) Касательные к кривой в концах диаметра параллельны сопряженным ему хордам.
- (в) Точка пересечения касательных к кривой в концах любой ее хорды, проходящей через фокус, лежит на директрисе.
- (г) Каждая хорда, проходящая через фокус, перпендикулярна к прямой, проведенной через фокус и точку пересечения касательных в концах хорды.

2.4-11. Другие способы задания конических сечений.

(а) Коническое сечение вполне определяется пятью своими точками, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой (п.2.3-1). Уравнение конического сечения, проходящего через пять точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , (x_5, y_5) :

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4-20)$$

Коническое сечение вырождается в том и только в том случае, когда три из заданных точек лежат на одной прямой.

З а м е ч а н и е. Построение конического сечения, проходящего через пять данных точек, осуществляется при помощи теоремы Паскаля: точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой (или являются бесконечно удаленными).

Насегаельные, нормали, поляры и полюсы конеческих сечений

Кривая	Окружность радиуса R с центром в начале координат	Парабола с фокусом $(\frac{p}{2}, 0)$ и директрисой $x = -\frac{p}{2}$	Эллипс с центром в начале координат; большая ось 2a на оси Ox, малая ось 2b ось Oy, меньшая ось 2b	Гипербола с центром в начале координат; действительная ось 2a на оси Ox, мнимая ось 2b
Уравнение кривой	$x^2 + y^2 = R^2$	$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Уравнения касательных к кривой, проходящих через точку (x_1, y_1)	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm R\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2}}{R^2 - x_1^2}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x_1^2}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm \sqrt{-b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 + a^2 b^2}}{a^2 - x_1^2}$
Уравнения касательных к кривой, имеющих данный угловой коэффициент k	$y = kx \pm R\sqrt{1 + k^2}$	$y = kx + \frac{p}{2k}$	$y = kx \pm \sqrt{k^2 a^2 + b^2}$	$y = kx \pm \sqrt{k^2 a^2 - b^2}$
Уравнение нормали точки (x_1, y_1) или уравнение касательной к кривой в точке (x_1, y_1)	$x_1 x + y_1 y = R^2$	$y_1 y = p(x + x_1)$	$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
Координаты x_1, y_1 полюса прямой Ax + By + C = 0 относительно кривой	$x_1 = -\frac{AR^2}{C}$ $y_1 = -\frac{BR^2}{C}$	$x_1 = \frac{C}{A}$ $y_1 = -\frac{Bp}{A}$	$x_1 = -\frac{a^2 A}{C}$ $y_1 = \frac{b^2 B}{-C}$	$x_1 = -\frac{a^2 A}{C}$ $y_1 = \frac{b^2 B}{C}$
Уравнение нормали к кривой в точке (x_1, y_1)	$y = \frac{y_1}{x_1} x$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{y_1}{p}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$
Уравнение, которому удовлетворяют линейные координаты ξ, η любой касательной к кривой	$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{R^2}$	$\eta^2 = \frac{2}{p} \xi$	$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = 1$	$a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 = 1$

Коническое сечение также вполне определяется пятью касательными, если никакие четыре из них не пересекаются в одной точке. Построение касательных к этому сечению производится при помощи теоремы Бриансона: диагонали, проходящие через противоположные вершины шестигольника, описанного около конического сечения, пересекаются в одной точке (или параллельны).

(b) Если фокус невырожденного конического сечения принят за полюс, а ось симметрии — за полярную ось, то уравнение конического сечения в полярных координатах ρ, φ будет иметь вид

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (2.4-21)$$

2.5. СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ, ЭЛЛИПСОВ, ГИПЕРБОЛ И ПАРАБОЛ

2.5-1. Окружность: формулы и теоремы (см. также табл. 2.4-2).

(a) Общее уравнение окружности в декартовых прямоугольных координатах:

$$\left. \begin{aligned} &x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \\ \text{или} &(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \\ \text{где} &2x_0 = -A, \quad 2y_0 = -B, \quad 2R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5-1)$$

Точка (x_0, y_0) — центр окружности, R — ее радиус. Окружность (1) касается оси Ox , если $4C = A^2$, и оси Oy , если $4C = B^2$.

Уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.5-2)$$

(b) Уравнение окружности, проходящей через три точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5-3)$$

(c) Длина L каждой из касательных, проведенных из точки (x_1, y_1) к окружности (1):

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - R^2}. \quad (2.5-4)$$

(d) Две окружности

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2.5-5)$$

являются концентрическими в том и только в том случае, когда $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$. Необходимое и достаточное условие ортогональности окружностей имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 2(C_1 + C_2).$$

(e) Все окружности, проходящие через действительные или мнимые точки пересечения двух окружностей (5), определяются уравнением

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (2.5-6)$$

где λ — параметр. Кривая (6) существует и в том случае, когда окружности (5) не имеют действительных точек пересечения.

(f) При $\lambda = -1$ уравнение (6) превращается в уравнение прямой

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0, \quad (2.5-7)$$

которая называется радикальной осью двух окружностей (5). Радикальная ось является геометрическим местом точек, из которых могут быть проведены касательные равной длины к двум данным окружностям. Если две окружности пересекаются (касаются), то радикальная ось является их общей хордой (касательной к окружностям в общей точке). Радикальной осью двух концентрических окружностей служит бесконечно удаленная прямая. Три

радикальные оси, связанные с тремя попарно взятыми окружностями, пересекаются в одной точке (радикальный центр). Этот факт используется при построении радикальной оси двух непересекающихся окружностей. Если центры трех окружностей лежат на одной прямой, то их радикальным центром служит бесконечно удаленная точка.

(г) Уравнение окружности радиуса R с центром (e_0, φ_0) в полярных координатах:

$$e^2 - 2e e_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + e_0^2 = R^2. \quad (2.5-8)$$

2.5-2. Эллипс и гипербола: формулы и теоремы (см. рис. 2.5-1, а также п.2 5-3, табл. 2.4-2 и 2.5-1).

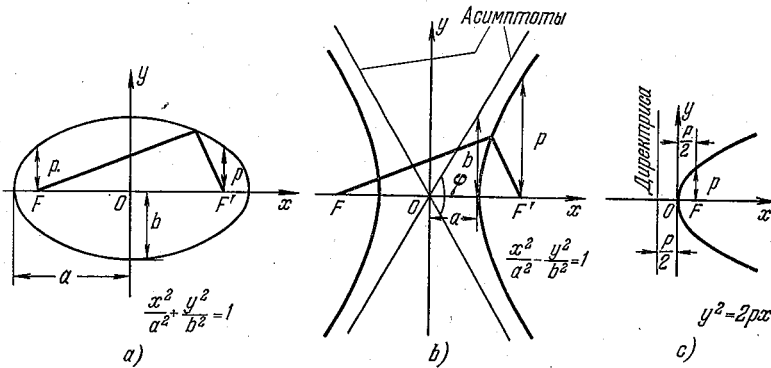


Рис. 2.5-1. а) эллипс, б) гипербола, в) парабола; каждая из кривых задана каноническим уравнением относительно изображенной на рисунке системы координат. Показаны фокусы, оси и фокальный параметр.

(а) Длины большой и малой осей эллипса (2.4-12а), т. е. отрезков, отсекаемых эллипсом на его осях симметрии, равны соответственно $2a$ и $2b$. Сумма фокальных радиусов r_1 и r_2 (табл. 2.5-1,6) постоянна (и равна $2a$) для каждой точки эллипса.

(б) Гипербола имеет две асимптоты (п.17.1-6), пересекающиеся в ее центре. Для гиперболы (2.4-12б) уравнения асимптот:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (2.5-9)$$

Угол φ между асимптотами гиперболы определяется из уравнения $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$; если $a = b$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (равносторонняя гипербола).

(в) Длина действительной оси гиперболы, т. е. расстояние между ее вершинами (рис. 2.5-1,б), равна $2a$. Мнимой осью называется главная ось, перпендикулярная к действительной оси. Касательная к гиперболе в ее вершине пересекает асимптоты в точках, расстояние между которыми равно $2b$ (рис. 2.5-1,б). Разность между фокальными радиусами r_1 и r_2 гиперболы (табл. 2.5-1,6) постоянна: она равна $2a$ для правой ветви и $-2a$ для левой.

(д) Если d_1 и d_2 — длины любых двух сопряженных диаметров (п.2.4-6,с) эллипса или гиперболы, то

$$d_1 d_2 \sin(\operatorname{arctg} k_2 - \operatorname{arctg} k_1) = 4ab, \quad (2.5-10)$$

где k_1, k_2 — угловые коэффициенты диаметров.

(е) Для пересечения гиперболы (2.4-12б) со своим диаметром $y = kx$ необходимо и достаточно выполнение условия $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$. Асимптоту можно рассматривать как хорду.

Таблица 2.5-1

**Эллипс, гипербола и парабола. Канонические уравнения
и основные формулы**

(см. также пп.2.4-9, 2.5-2 и рис. 2.5-1)

		Эллипс	Гипербола	Парабола
1	Стандартное (каноническое) уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.5-1,а)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.5-1,б)	$y^2 = 2px$ (рис. 2.5-1,с)
2	Эксцентриситет	$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$	$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$	$\epsilon = 1$
3	Фокусы	$(a\epsilon, 0),$ $(-a\epsilon, 0)$	$(a\epsilon, 0),$ $(-a\epsilon, 0)$	$(\frac{p}{2}, 0)$
4	Уравнения директрис	$x = \frac{a}{\epsilon}, x = -\frac{a}{\epsilon}$	$x = \frac{a}{\epsilon}, x = -\frac{a}{\epsilon}$	$x = -\frac{p}{2}$
5	Фокальный параметр (см. п.2.4-9)	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
6	Фокальные радиусы (расстояния от фокусов до произвольной точки кривой (x, y))	$r_1 = a + \epsilon x,$ $r_2 = a - \epsilon x$	$r_1 = a + \epsilon x$ $r_2 = -a + \epsilon x$	$r = x + \frac{p}{2}$
7	Уравнение диаметра, сопряженного хордам с угловым коэффициентом k	$y = -\frac{b^2}{a^2 k} x$	$y = \frac{b^2}{a^2 k} x$	$y = \frac{p}{k}$
8	Площадь сегмента между дугой, выпуклой влево, и хордой, проходящей через точки (x_1, y_1) и $(x_1, -y_1)$	$\frac{1}{2} \pi ab +$ $+\frac{b}{a} (x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} +$ $+ a^2 \arcsin \frac{x_1}{a})$	$x_1 y_1 - ab \ln \left(\frac{x_1 + y_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right)$	$\frac{4}{3} x_1 y_1$
9	Уравнение в полярных координатах (ср. с уравнением (2.4-21))	$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}$	$\rho^2 = \frac{-b^2}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}$	$\rho = \frac{2p \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi}$

встречающую гиперболу в бесконечно удаленной точке и совпадающую с сопряженным ей диаметром (а так же как полюсу бесконечно удаленной точки кривой).

(f) Отрезки секущей, заключенные между гиперболой и ее асимптотами, равны между собой. Точка касания делит отрезок касательной, заключенный между асимптотами, пополам. Произведение расстояний от точки гиперболы до асимптот постоянно.

(g) Площадь треугольника с вершинами в центре эллипса и в концах любой пары его сопряженных диаметров постоянна. Площадь треугольника, заключенного между асимптотами гиперболы и любой ее касательной, постоянна.

2.5-3. Построение эллипсов и гипербол, их касательных и нормалей.

(а) *Построение эллипса по его осям* $2a$ и $2b$.

1. Пусть O — точка пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых. На одной из них строим отрезок $P'OP = 2a$, а на другой — отрезок $Q'OQ = 2b$. Тем самым уже построены 4 вершины эллипса: P, P', Q, Q' . Проводим через точку O произвольную наклонную, откладываем на ней отрезки $OR = b$ и $OS = a$, затем проводим через точку R прямую, параллельную $P'R$, а через точку S прямую, параллельную $Q'Q$. В пересечении получим точку искомого эллипса.

2. Из точки Q как из центра раствором циркуля, равным $OP = a$, делаем на отрезке $P'OP$ засечки F' и F (фокусы эллипса). На отрезке $P'P$ выберем произвольную точку T . Окружности радиусов $P'T$ и PT с центрами соответственно F' и F пересекутся в двух точках искомого эллипса.

Построение гиперболы. Пусть $P'O P$ — действительная ось гиперболы, F и F' — ее фокусы. На действительной оси выберем произвольную точку T так, чтобы соблюдалось условие $OT > OP$. Окружности радиусов $P'T$ и PT с центрами F и F' пересекутся в точках гиперболы (см. табл. 2.5-1, соотношения между $OF = OF', a$ и b).

(б) *Для построения касательных и нормалей к эллипсам и гиперболам оказываются полезными следующие свойства этих кривых:*

1. Касательные к эллипсу (2.4-12а) в произвольной его точке (x_1, y_1) пересекают ось Ox в той же точке, что и касательные к окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в точках $(x_1, \pm\sqrt{a^2 - x_1^2})$.

2. Касательная и нормаль к эллипсу в любой его точке делят пополам углы между прямыми, соединяющими эту точку с фокусами («фокальное свойство» эллипса); аналогичным свойством обладает гипербола.

3. Произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу или гиперболе постоянно и равно b^2 . Основания перпендикуляров, опущенных на касательные, лежат на окружности, построенной на большой оси (на действительной оси) как на диаметре; эта теорема может быть использована для построения эллипса или гиперболы, как отбрасывающей касательных к этим кривым.

(в) *Эллипс или гипербола могут быть приближенно построены при помощи соприкасающихся окружностей в их вершинах* (п.17.1-4).¹ Центры кривизны эллипса или гиперболы, соответствующие вершинам, лежащим на фокальной оси, также лежат на этой оси; радиусы кривизны в этих точках равны b^2/a . Центры кривизны для вершин, лежащих на малой оси эллипса, также лежат на малой оси, радиус кривизны в каждой из этих точек равен a^2/b .

2.5-4. Построение параболы, ее касательных и нормалей.

(а) Если заданы ось параболы, ее фокус и расстояние p между фокусом и директрисой, то для построения параболы могут быть использованы следующие ее свойства:

1. Расстояние между фокусом и любой точкой P параболы равно расстоянию между директрисой и той же точкой P (см. также п.2.4-9).

2. Прямая, перпендикулярная к оси параболы и делящая пополам отрезок перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, касается параболы в ее вершине. Перпендикуляр, восстановленный в любой точке Q этой прямой и отрезку, соединяющему Q с фокусом, касается параболы. Обратное, любая касательная и перпендикуляр к ней, проведенный через фокус, пересекаются в точке, лежащей на касательной к параболе в ее вершине.

(б) Для построения касательных и нормалей к параболе оказываются полезными следующие ее свойства:

1. Расстояние между любой точкой P параболы и фокусом равно расстоянию между фокусом и точкой пересечения оси параболы с касательной в P .

2. Касательная и нормаль к параболе в любой ее точке P делят пополам углы между проходящим через P диаметром параболы и прямой, соединяющей P с фокусом; заметим, что все диаметры параболы параллельны ее оси. Эта теорема заключает в себе фокальное свойство параболы.

3. Нормаль к параболе в любой ее точке P и перпендикуляр, опущенный из P на ось, пересекают последнюю в точках, расстояние между которыми постоянно и равно p .

4. Директриса параболы есть геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных.

(с) Для уточнения формы параболы можно использовать соприкасающуюся окружность кривой (п.17.1-4) в ее вершине. Центр этой соприкасающейся окружности лежит на оси, радиус равен p .

2.6. УРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

2.6-1. Примеры алгебраических кривых (см. также п.2.1-9,с):

(а) Парабола Нейля (полукубическая парабола): $y = ax^{3/2}$.

(б) Локон Аньези: $x^2y = 4a^2(2a - y)$.

(с) Конхоида Никомеда: $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = x^2b^2$.

(d) Циссоида Диоклеса

$$y^2(a-x) = x^3 \quad \text{или} \quad \rho = a \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right).$$

(e) Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad \text{или} \quad \rho^2 - a^2 \cos 2\varphi = 0.$$

(f) Овалы Кассини: $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^4$ (геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до точек $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ равно c^2).(g) Строфоида: $x^3 + x(a^2 + y^2) = 2a(y^2 + x^2)$.

(h) «Крест» (Cuspidiform):

$$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad \rho = \frac{2a}{\sin 2\varphi}.$$

(i) Кардиоида:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad \rho = a(1 + \cos \varphi).$$

(j) Трисектриса:

$$y^2 = \frac{x^3(3a-x)}{a+x} \quad \text{или} \quad \rho = a \left(\frac{4}{3} \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right).$$

(k) Астроида:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{или} \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

(l) Декартов лист:

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad \text{или} \quad x = \frac{3at}{t^3+1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3+1} \quad (-\infty \leq t \leq +\infty).$$

(m) Улитка Паскаля: $\rho = b - a \cos \varphi$.**2.6-2. Примеры трансцендентных кривых.**(a) Цепная линия: $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.(b) Спираль Архимеда: $\rho = a\varphi$.(c) Параболическая спираль: $\rho^2 = 2r\varphi$.(d) Логарифмическая спираль: $\rho = ae^{b\varphi}$.(e) Циклоида (кривая, описанная точкой, отстоящей на расстоянии a_1 от центра круга радиуса a , катящегося без скольжения по оси абсцисс):

$$x = at - a_1 \sin t, \quad y = a - a_1 \cos t. \quad (2.6-1)$$

Замечание. При $a_1 < a$ циклоида называется *укороченной*, при $a_1 > a$ — *удлиненной*. Если $a_1 = a$, то получается обычная циклоида.(f) Эпициклоида (кривая, описанная точкой, отстоящей на расстоянии a_1 от центра круга радиуса a , катящегося без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ и находящегося вне этой окружности):

$$\left. \begin{aligned} x &= (a+b) \sin \frac{a}{b} t - a_1 \sin \frac{a+b}{b} t, \\ y &= (a+b) \cos \frac{a}{b} t - a_1 \cos \frac{a+b}{b} t \end{aligned} \right\} \quad (2.6-2)$$

(см. замечание (e)).

(g) **Гипоциклоида** (кривая, описанная точкой, отстоящей на расстоянии a_1 от центра круга радиуса a , катящегося без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ и остающегося внутри нее):

$$\left. \begin{aligned} x &= (b-a) \sin \frac{a}{b} t - a_1 \sin \frac{b-a}{b} t, \\ y &= (b-a) \cos \frac{a}{b} t + a_1 \cos \frac{b-a}{b} t \end{aligned} \right\} \quad (2.6-3)$$

(см. замечание к (e)).

(h) **Трактриса:**

$$x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \quad y = a \sin t. \quad (2.6-4)$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

3.1-1. Вводные замечания (см. также п.2.1-1). Глава 3 посвящена аналитической геометрии трехмерного евклидова пространства. Точки задаются радиусами-векторами или системами действительных чисел (своими координатами).

3.1-2. Декартова система координат (см. также п.2.1-2). Декартова система координат позволяет связать с каждой точкой P пространства, в котором выбраны три не лежащие в одной плоскости направленные прямые Ox, Oy, Oz (оси координат), пересекающиеся в начале O , три вполне определенных действительных числа (декартовы координаты) x, y, z ; при этом пишут $P(x, y, z)$.

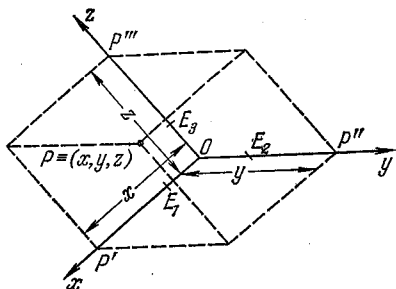


Рис. 3.1-1. Правая декартова косоугольная система координат. Отрезки OE_1, OE_2 и OE_3 — единицы масштаба на осях.

сительно данной системы координат, образованной осями Ox, Oy, Oz и выбранными на осях единицами масштаба.

3.1-3. Правая система осей. Оси Ox, Oy, Oz могут образовывать правую или левую систему. Для правой системы (см. рис. 3.1-1) поворот от оси Ox к оси Oy на угол, меньший π , совершается в направлении против часовой стрелки, если смотреть на плоскость Oxy из какой-либо точки положительной полуоси Oz (положительная сторона плоскости Oxy).

3.1-4. Правая декартова прямоугольная система координат. В прямоугольной системе координат оси взаимно перпендикулярны (рис. 3.1-2). Координаты x, y, z точки P равны направленным расстояниям от начала координат O до плоскостей, проведенных через точку P параллельно координатным плоскостям Oyz, Oxz, Oxy .

В настоящем справочнике, если не оговорено противное, всегда применяется правая декартова прямоугольная система координат, причем для измерения x, y, z применяется одна и та же единица масштаба.

Пусть задана (в общем случае косоугольная) система осей Ox, Oy, Oz (рис. 3.1-1); тогда плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости Oyz , пересекает ось Ox в точке P' . Аналогично плоскости, проходящие через P и параллельные соответственно Oxz и Oxy , пересекают ось Oy в точке P'' и ось Oz в P''' . Длине каждого из направленных отрезков $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$ и $\overline{OP'''}$ приписывается знак плюс, если направление отрезка совпадает с направлением соответствующей оси, и знак минус в противном случае. Числа $x = \overline{OP'}$, $y = \overline{OP''}$, $z = \overline{OP'''}$ называются декартовыми координатами точки $P(x, y, z)$ отно-

3.1-5. Радиус-вектор. Каждая точка $P(x, y, z) \equiv P(\mathbf{r})$ может быть задана своим радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \equiv \{x, y, z\}; \quad (3.1-1)$$

этот вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ определяет преобразование переноса, переводящее точку из начала координат O в точку P . *Базисные векторы* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ суть единичные векторы, направление которых совпадает соответственно с направлением осей Ox, Oy и Oz данной декартовой прямоугольной системы координат (см. также 5.1 и п.5.2-2).

3.1-6. Цилиндрическая и сферическая системы координат. На рис. 3.1-2 показаны также цилиндрические координаты ρ, φ, z и сферические координаты r, θ, φ (полярный радиус, широта и долгота), связанные с декартовыми прямоугольными координатами следующими формулами преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= \rho \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}; & y &= \rho \sin \varphi, \\ & & z &= z; \end{aligned} \right\} (3.1-2)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}; & z &= r \cos \theta. \end{aligned} \right\} (3.1-3)$$

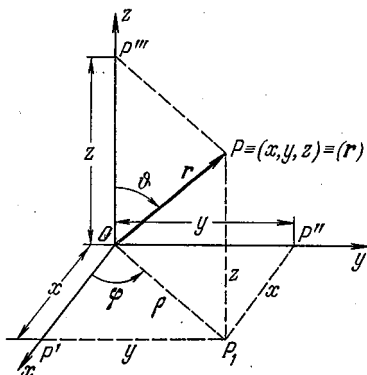


Рис. 3.1-2. Системы координат: правая декартова прямоугольная, цилиндрическая и сферическая.

Дальнейшие сведения об этих, а также о других криволинейных координатах см. в гл. 6.

3.1-7. Основные формулы в декартовых прямоугольных координатах и в векторной форме. Имеют место следующие формулы (операции над векторами см. в гл. 5).

1. Расстояние d между точками

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\mathbf{r}_1)$$

и

$$P_2(x_2, y_2, z_2) \equiv P_2(\mathbf{r}_2):$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \quad (3.1-4)$$

2. Угол γ между прямыми P_1P_2 и P_3P_4 , направление которых определяется векторами $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_3P_4}$:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}} = \\ &= \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|}. \end{aligned} \quad (3.1-5)$$

3. Координаты x, y, z и радиус-вектор \mathbf{r} точки P , делящей направленный отрезок $\overrightarrow{P_1P_2}$ в отношении $\overrightarrow{P_1P}:\overrightarrow{PP_2}=m:n = \lambda:1$, определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z &= \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1-6)$$

или

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_1}{m+n} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}.$$

См. замечание к аналогичным формулам для геометрии на плоскости в п.2.1-4,3.

Координаты и радиус-вектор *середины* отрезка P_1P_2 :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \\ \mathbf{r} &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1-7)$$

3.1-8. Направляющие косинусы.

(а) **Направляющими косинусами** $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ **направленного отрезка** $\overrightarrow{P_1P_2}$ называются косинусы углов между $\overrightarrow{P_1P_2}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz , соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_x &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \cos \alpha_y &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \cos \alpha_z &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (3.1-8)$$

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1. \quad (3.1-9)$$

Направляющие косинусы направленного отрезка $\overrightarrow{P_2P_1}$ суть $-\cos \alpha_x, -\cos \alpha_y, -\cos \alpha_z$.

(б) Направление прямой может быть также определено любыми тремя числами a_x, a_y, a_z , пропорциональными направляющим косинусам $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$; в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_x &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \alpha_y &= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \alpha_z &= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1-10)$$

Знак перед корнем должен быть одинаковым во всех трех равенствах; его выбор определяет положительное направление на прямой. Роль этих чисел могут играть координаты любого вектора \mathbf{a} (п.5.2-2), совпадающего по направлению с $\overrightarrow{P_1P_2}$ или $\overrightarrow{P_2P_1}$. (Пример. $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$.) Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора, совпадающего по направлению с $\overrightarrow{P_1P_2}$ (п.5.2-5).

(с) Угол γ между двумя направленными отрезками, направляющие косинусы которых равны соответственно $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ и $\cos \alpha'_x, \cos \alpha'_y, \cos \alpha'_z$, или направления которых определяются тройками чисел a_x, a_y, a_z и a'_x, a'_y, a'_z , находится по формуле

$$\cos \gamma = \cos \alpha_x \cos \alpha'_x + \cos \alpha_y \cos \alpha'_y + \cos \alpha_z \cos \alpha'_z = \frac{a_x a'_x + a_y a'_y + a_z a'_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z}}. \quad (3.1-11)$$

3.1-9. Проекция. Проекция направленного отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$ на оси Ox, Oy и Oz равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} d_x = x_2 - x_1 = d \cos \alpha_x, \quad d_y = y_2 - y_1 = d \cos \alpha_y, \quad d_z = z_2 - z_1 = d \cos \alpha_z, \\ d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = d^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.1-12)$$

где $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ — направляющие косинусы (8), d — длина отрезка (4).

Проекция $\overrightarrow{P_1P_2}$ на прямую с направляющими косинусами $\cos \alpha'_x, \cos \alpha'_y, \cos \alpha'_z$ (п.3.2-1, b) равна $d \cos \gamma$, где $\cos \gamma$ определяется формулой (11). Проекция $\overrightarrow{P_1P_2}$ на плоскости Oyz, Oxz и Oxy равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} d_1 = d \sin \alpha_x, \quad d_2 = d \sin \alpha_y, \quad d_3 = d \sin \alpha_z, \\ d^2 = \frac{1}{2} (d_2^2 + d_3^2 + d_1^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.1-13)$$

Проекция $\overrightarrow{P_1P_2}$ на плоскость, нормаль которой имеет направляющие косинусы $\cos \alpha'_x, \cos \alpha'_y, \cos \alpha'_z$ (п.3.2-1, b), равна $d \sin \gamma$, где $\cos \gamma$ определен формулой (11).

3.1-10. Вектор площади. Площадь плоской фигуры в трехмерном пространстве может быть задана вектором \mathbf{A} , модуль которого равен площади A фигуры а направление совпадает с направлением положительной нормали (п.17.3-2) к плоскости фигуры:

$$\mathbf{A} = AN, \quad (3.1-14)$$

где N — единичный вектор положительной нормали. Каждая из декартовых прямоугольных координат вектора \mathbf{A} равна площади проекции фигуры на соответствующую плоскость, перпендикулярную к соответствующей оси. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , может быть задана вектором $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (см. также п.5.2-7).

Площадь A треугольника с вершинами P_1, P_2, P_3 определяется формулой

$$A^2 = \frac{1}{4} \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\} \quad (3.1-15)$$

или

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2p} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2p} [r_1 r_2 r_3], \quad (3.1-16)$$

где p — расстояние от начала координат до плоскости треугольника (п.3.2-16). Площадь A положительна, если вращение правого винта в направлении $\overrightarrow{P_1P_2P_3}$ сообщает винту поступательное движение в направлении положительной нормали к плоскости треугольника (п.3.2-1, b).

3.1-11. Вычисление объемов (см. также п.5.2-8).

(а) Объем V тетраэдра с вершинами P_1, P_2, P_3, P_4

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)]. \quad (3.1-17)$$

Знак V зависит от того, в каком порядке рассматриваются вершины тетраэдра.

(б) Объем V параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c}

$$V = [\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]. \quad (3.1-18)$$

Иногда объем считают только положительным; тогда $V = |[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]|$.

3.1-12. Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе и повороте осей.

(а) **Перенос осей.** Пусть x, y, z — координаты произвольной точки P относительно декартовой прямоугольной системы координат; пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты той же точки P относительно другой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси первой системы, и начало которой имеет относительно системы $Oxyz$ координаты x_0, y_0, z_0 . Если единицы масштаба на осях этих систем совпадают, то координаты $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ связаны с x, y, z следующими формулами преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - x_0, & x &= \bar{x} + x_0, \\ \bar{y} &= y - y_0, & y &= \bar{y} + y_0, \\ \bar{z} &= z - z_0, & z &= \bar{z} + z_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1-19)$$

(б) **Поворот осей.** Пусть x, y, z и $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты одной и той же точки P относительно двух различных правых декартовых прямоугольных систем координат с общим началом O ; пусть вторая из них расположена относительно системы $Oxyz$ таким образом, что

ось $O\bar{x}$ имеет направляющие косинусы t_{11}, t_{21}, t_{31} ,
 ось $O\bar{y}$ имеет направляющие косинусы t_{12}, t_{22}, t_{32} ,
 ось $O\bar{z}$ имеет направляющие косинусы t_{13}, t_{23}, t_{33} .

Тогда относительно системы $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

ось Ox имеет направляющие косинусы t_{11}, t_{12}, t_{13} ,
 ось Oy имеет направляющие косинусы t_{21}, t_{22}, t_{23} ,
 ось Oz имеет направляющие косинусы t_{31}, t_{32}, t_{33} .

Если для измерения $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ применяются одинаковые единицы масштаба, то формулы преобразования, связывающие координаты x, y, z с координатами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= t_{11}x + t_{21}y + t_{31}z, & x &= t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{13}\bar{z}, \\ \bar{y} &= t_{12}x + t_{22}y + t_{32}z, & y &= t_{21}\bar{x} + t_{22}\bar{y} + t_{23}\bar{z}, \\ \bar{z} &= t_{13}x + t_{23}y + t_{33}z, & z &= t_{31}\bar{x} + t_{32}\bar{y} + t_{33}\bar{z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1-20)$$

З а м е ч а н и е. Преобразования (20) называют *ортогональными* (пп.13.3-2 и 14.4-5); каждое t_{ik} равно своему алгебраическому дополнению в определителе

$$\det [t_{ik}] = 1 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3.1-21)$$

(п.1.5-2); при этом

$$\sum_{j=1}^3 t_{ij} t_{kj} = \sum_{j=1}^3 t_{ji} t_{jk} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases} \quad (3.1-22)$$

(е) Одновременный перенос и поворот осей. Если начало системы координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ не совпадает с началом системы $Oxyz$ и имеет относительно последней координаты x_0, y_0, z_0 , то формулы преобразования принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= t_{11}(x-x_0) + t_{21}(y-y_0) + t_{31}(z-z_0), \\ \bar{y} &= t_{12}(x-x_0) + t_{22}(y-y_0) + t_{32}(z-z_0), \\ \bar{z} &= t_{13}(x-x_0) + t_{23}(y-y_0) + t_{33}(z-z_0), \end{aligned} \right\} \quad (3.1-23)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{13}\bar{z} + x_0, \\ y &= t_{21}\bar{x} + t_{22}\bar{y} + t_{23}\bar{z} + y_0, \\ z &= t_{31}\bar{x} + t_{32}\bar{y} + t_{33}\bar{z} + z_0, \end{aligned} \right\}$$

где направляющие косинусы t_{ik} удовлетворяют соотношениям (21) и (22). Уравнения (23) связывают координаты относительно любых двух правых декартовых прямоугольных систем с одинаковыми единицами масштаба на осях. Более общие преобразования координат рассмотрены в гл. 6.

(д) Другое истолкование формул преобразования (19) и (20)) могут быть истолкованы еще как соотношения, определяющие новую точку \bar{P} с координатами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ относительно той же самой системы координат $Oxyz$. Преобразование, в котором точка \bar{P} соответствует точке P с координатами x, y, z , состоит в последовательном выполнении параллельного переноса и поворота пространства (см. также пп.14.1-3 и 15.5-1).

З а м е ч а н и е. Расстояния между точками, углы между направленными отрезками и, следовательно, все соотношения между векторами, составляющие содержание евклидовой геометрии, сохраняются при повороте и параллельном переносе (23), т.е. они *инвариантны* относительно этих преобразований (пп.12.1-5 и 12.1-4).

3.1-13. Аналитическое задание кривых (см. также пп. с 17.2-1 по 17.2-6). **Непрерывной кривой** трехмерного пространства называется множество точек $P(x, y, z) \equiv P(\tau)$, координаты которых удовлетворяют системе параметрических уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \\ z &= z(t) \quad (-\infty \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq \infty), \end{aligned} \right\} \quad (3.1-24)$$

где $x(t), y(t), z(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ (**параметрическое задание кривой**). С другой стороны, кривая может быть определена равносильной системой уравнений

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0. \quad (3.1-25)$$

Кривая может иметь более чем одну ветвь.

Кривая (24) называется **простой кривой** (простой дугой, простым отрезком кривой) или, точнее, **простой кривой** в смысле Жордана, если функции $x(t), y(t), z(t)$ однозначны, непрерывны, и в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ нет таких двух *различных* значений τ_1 и τ_2 , для которых справедливы все три равенства:

$$x(\tau_1) = x(\tau_2), \quad y(\tau_1) = y(\tau_2), \quad z(\tau_1) = z(\tau_2). \quad (3.1-26)$$

Заметим, что термин **простая дуга** часто употребляется для обозначения геометрического места точек, координаты которых x, y, z в некоторой декартовой прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнениям $y = f(x), z = g(x), a < x < b$, где функции $f(x), g(x)$ однозначны и имеют непрерывные производные в интервале $[a, b]$. Простая жорданова кривая состоит из одной ветви и не имеет кратных точек, т.е. точек самопересечения. Простой замкнутой кривой называется непрерывная кривая, единственными кратными точками которой являются ее начальная и конечная точки; это значит, что единственным решением

уравнений (26) в интервале $[t_1, t_2]$ служит $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = t_2$. Кривая (24) называется **регулярной дугой**, если при некотором параметрическом задании этой кривой функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют в каждой точке кривой однозначные непрерывные производные первого порядка (п. 4.5-1) по параметру t , по меньшей мере одна из которых отлична от нуля; точка кривой (24) с координатами $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$ называется ее **регулярной (обыкновенной) точкой**, если для значений t , достаточно близких к t_0 , кривая представляет собой регулярную дугу. **Регулярная кривая** есть простая кривая или простая замкнутая кривая, составленная из конечного числа регулярных дуг.

Все эти определения переносятся на кривые в двумерных пространствах (пп.2.1-9 и 7.2-1), а также на кривые в пространствах, размерность которых больше трех (п.17.4-2).

3.1-14. Способы задания поверхностей (см. также пп.17.3-1—17.3-13).

Множество точек $P(x, y, z) \equiv P(\mathbf{r})$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (3.1-27)$$

при подходящих значениях действительных параметров u , v , называется **непрерывной поверхностью**, если правые части уравнений (27) являются непрерывными функциями параметров. Поверхность может быть определена также уравнением

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{или} \quad z = f(x, y). \quad (3.1-28)$$

Поверхность может иметь более чем одну полость.

Поверхности, определяемые уравнениями

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda \varphi(x, y, z) = 0 \quad (3.1-29)$$

совпадают, если только постоянная λ отлична от нуля.

Простой поверхностью называется непрерывная поверхность, состоящая из одной полости и не имеющая самопересечений (кратных точек). При этом подразумевается, что простые поверхности являются двусторонними (односторонние поверхности такие, как лист Мёбиуса, исключаются).

Точка поверхности (27) называется **регулярной точкой**, если при некотором параметрическом задании поверхности функции (27) имеют в достаточной близости к рассматриваемой точке непрерывные частные производные первого порядка и по меньшей мере один из определителей

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.1-30)$$

отличен от нуля. Простой кусок поверхности, ограниченный регулярной замкнутой кривой, называется **регулярным**, если все его внутренние точки регулярны. Регулярной поверхностью называется двусторонняя простая (замкнутая или незамкнутая) поверхность, составленная из конечного числа регулярных кусков с общими регулярными дугами и точками.

3.1-15. Специальные типы поверхностей. **Линейчатой поверхностью** называется поверхность, образованная движением прямой линии (ее образующей) **цилиндр** есть поверхность, образованная движением прямой, остающейся параллельной некоторой данной прямой и пересекающей данную линию (*направляющую*). В частности, уравнения вида $f(x, y) = 0$, $f(x, z) = 0$, $f(y, z) = 0$ определяют цилиндры, образующие которых параллельны соответственно осям Oz , Oy , Ox . **Конус** есть поверхность, образованная движением прямой, проходящей через данную точку (**вершину конуса**) и пересекающей данную линию (его *направляющую*). **Поверхностью вращения** называется поверхность, образованная вращением плоской кривой вокруг неподвижной оси, лежащей в плоскости кривой. Так, уравнение $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ определяет поверхность, описанную вращением кривой $\begin{cases} z = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz .

3.1-16. Поверхности и кривые.

(а) **Линия пересечения двух поверхностей**

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0 \quad (3.1-31)$$

представляет собой кривую, точки которой (x, y, z) удовлетворяют каждому из уравнений (31) (см. также п.3.1-13). Линия пересечения может иметь

более одной ветви. Уравнения (31) могут также определять лишь одну или несколько изолированных точек, принадлежащих обоим поверхностям, или не определять ни одной точки.

Кривые

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(0, y, z) = 0, \\ x = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0, z) = 0, \\ y = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, 0) = 0, \\ z = 0 \end{array} \right.$$

представляют собой линии пересечения (если они существуют) поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ с плоскостями Oyz , Oxz и Oxy соответственно.

(b) Для любого действительного значения λ , уравнение

$$\varphi_1(x, y, z) + \lambda\varphi_2(x, y, z) = 0 \quad (3.1-32)$$

соответствует поверхности, проходящей через линию пересечения поверхностей (31), если последняя существует.

(c) Уравнение

$$\varphi_1(x, y, z) \cdot \varphi_2(x, y, z) = 0$$

соответствует поверхности, образованной точками обеих поверхностей (31) и не содержащей никаких других точек.

(d) Уравнение проекции кривой (31) на плоскость Oyz (или Oxz , Oxy) может быть получено исключением из уравнений (31) переменной x (соответственно y , z).

(e) Координаты x , y , z точек пересечения кривой (31) с поверхностью (28) должны удовлетворять всем трем уравнениям (31), (28). Для любых действительных λ_1 , λ_2 уравнения

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z) = 0 \quad (3.1-33)$$

определяют кривую, проходящую через все эти точки пересечения.

(f) Кривая однопараметрического семейства

$$\varphi_1(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \lambda) = 0 \quad (3.1-34)$$

описывает поверхность, уравнение которой может быть получено путем исключения параметра λ из (34).

3.2. ПЛОСКОСТЬ

3.2-1. Уравнение плоскости.

(a) Уравнение, *линейное* относительно декартовых прямоугольных координат, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + D = 0, \quad (3.2-1)$$

где A , B и C не равны нулю одновременно, определяет **плоскость**; обратно, каждую плоскость можно определить уравнением первой степени относительно декартовых прямоугольных координат.

Коэффициенты A , B , C равны проекциям вектора $\mathbf{A} \equiv \{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости, на оси Ox , Oy , Oz соответственно (п.3.1-8,b); вектор \mathbf{A} имеет направление положительной или отрицательной нормали к плоскости (см. ниже) и называется *нормальным вектором плоскости*. При $D = 0$ плоскость проходит через начало координат.

(b) Особенно важное значение имеют следующие виды уравнений плоскости:

1. Уравнение плоскости в отрезках. Плоскость, пересекающая ось Ox в точке $(a, 0, 0)$, ось Oy в точке $(0, b, 0)$ и ось Oz в точке $(0, 0, c)$, имеет уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

2. Нормальное уравнение плоскости. Пусть $p > 0$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость; пусть $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ — направляющие косинусы (п.3.1-8) этого направленного перпендикуляра, началом которого служит начало координат, а концом точка плоскости (положительная нормаль к плоскости). Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$x \cos \alpha_x + y \cos \alpha_y + z \cos \alpha_z - p = 0.$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Если плоскость проходит через точку $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\mathbf{r}_1)$, а направление нормали к плоскости задано проекциями A, B, C вектора нормали \mathbf{A} на оси декартовой прямоугольной системы координат, то уравнение плоскости имеет вид

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0.$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P(\mathbf{r}_1), P_2(x_2, y_2, z_2) \equiv P(\mathbf{r}_2), P_3(x_3, y_3, z_3) \equiv P(\mathbf{r}_3)$, не лежащие на одной прямой (п.3.4-3,а), имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)] = 0,$$

ИЛИ

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(е) Если плоскость задана уравнением общего вида (1), то введенные выше величины $a, b, c, p, \cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ выражаются через A, B, C, D следующим образом:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}; \quad (3.2-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_x &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \alpha_y &= \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \alpha_z &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \right\} p = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (3.2-3)$$

где знак перед корнем выбирается так, чтобы соблюдалось условие $p > 0$. Если $D = 0$, то выбор положительного направления на нормали к плоскости произволен.

3.2-2. Параметрическое задание плоскости. Любая плоскость может быть задана следующими параметрическими уравнениями (п.3.1-14):

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad x &= x_1 + a_x u + b_x v, \quad y = y_1 + a_y u + b_y v, \quad z = z_1 + a_z u + b_z v, \\ &\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2-4)$$

3.3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

3.3-1. Уравнения прямой.

(а) Два независимых линейных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3-1)$$

или

$$A_1 \cdot r + D_1 = 0, \quad A_2 \cdot r + D_2 = 0$$

($A_1 \times A_2 \neq 0$; см. также пп.1.9-3, а, 5.2-2 и 5.2-7) определяют **прямую**, как пересечение двух плоскостей (п.3.1-16,а). Обратно, каждая прямая может быть определена уравнениями вида (1). При $D_1 = D_2 = 0$ (и только в этом случае) прямая проходит через начало координат.

(б) Особенно важное значение имеют следующие виды уравнений прямой:

1. Уравнения прямой, проходящей через две точки

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \text{ и } P_2(x_2, y_2, z_2):$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2. Уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (канонические уравнения прямой). Если прямая проходит через точку $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P(r_1)$ и параллельна вектору $\mathbf{a} \equiv \{a_x, a_y, a_z\}$ (направляющий вектор прямой; см. также п.3.3-2), то ее уравнения могут быть приведены к виду

$$\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}, \text{ или } r - r_1 = at.$$

(с) Вектор $\mathbf{a} = A_1 \times A_2$ является направляющим вектором прямой (п.3.1-3,б), заданной как линия пересечения двух плоскостей (уравнения(1)); его проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат равны соответственно

$$a_x = B_1C_2 - B_2C_1, \quad a_y = C_1A_2 - C_2A_1, \quad a_z = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (3.3-2)$$

Направляющие косинусы прямой и, следовательно, углы $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ между прямой и осями Ox, Oy и Oz определяются по формулам

$$\cos \alpha_x = \frac{1}{M} (B_1C_2 - B_2C_1), \quad \cos \alpha_y = \frac{1}{M} (C_1A_2 - C_2A_1),$$

$$\cos \alpha_z = \frac{1}{M} (A_1B_2 - A_2B_1);$$

$$M = [(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (C_1A_2 - C_2A_1)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2]^{1/2}. \quad (3.3-3)$$

Тот или иной выбор знака перед корнем определяет положительное направление на прямой.

Уравнения (2) и (3) являются условиями того, что прямая с направляющими косинусами $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ или с направляющим вектором \mathbf{A} перпендикулярна к двум векторам A_1 и A_2 , заданным своими проекциями A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 на оси декартовой прямоугольной системы координат.

(d) Уравнения плоскостей, проектирующих прямую (1) на плоскости Oxy , Oxz и Oyz соответственно (т.е. плоскостей, проходящих через прямую и перпендикулярных к соответствующим координатным плоскостям), таковы:

$$\left. \begin{aligned} (C_1A_2 - C_2A_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1)y + (C_1D_2 - C_2D_1) &= 0, \\ (B_1A_2 - B_2A_1)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y + (B_1D_2 - B_2D_1) &= 0, \\ (A_1B_2 - A_2B_1)x + (A_1C_2 - A_2C_1)y + (A_1D_2 - A_2D_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3-4)$$

Любые два из уравнений (4) определяют прямую (1).

3.3-2. Параметрические уравнения прямой. Декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) произвольной точки прямой удовлетворяют параметрическим уравнениям (п.3.1-13):

$$x = x_1 + a_x t, \quad y = y_1 + a_y t, \quad z = z_1 + a_z t, \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \quad (3.3-5)$$

где \mathbf{a} — направляющий вектор, $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\mathbf{r}_1)$ — некоторая фиксированная точка прямой.

3.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК, ПЛОСКОСТЕЙ И ПРЯМЫХ

3.4-1. Углы.

(а) Угол γ_1 между двумя прямыми с направляющими косинусами $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$, $\cos \alpha_z$ и $\cos \alpha'_x$, $\cos \alpha'_y$, $\cos \alpha'_z$ определяется по формулам (см. также п.3.1-8,с):

$$\cos \gamma_1 = \cos \alpha_x \cos \alpha'_x + \cos \alpha_y \cos \alpha'_y + \cos \alpha_z \cos \alpha'_z, \quad (3.4-1)$$

$$\sin^2 \gamma_1 = (\cos \alpha_y \cos \alpha'_z - \cos \alpha_z \cos \alpha'_y)^2 + (\cos \alpha_x \cos \alpha'_z - \cos \alpha_z \cos \alpha'_x)^2 + (\cos \alpha_x \cos \alpha'_y - \cos \alpha_y \cos \alpha'_x)^2. \quad (3.4-2)$$

Если прямые заданы параметрическими уравнениями (п.3.3-2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 + t'\mathbf{a}'$, то

$$\cos \gamma_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}'}{|\mathbf{a}| |\mathbf{a}'|}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{a}'|}. \quad (3.4-3)$$

Прямые параллельны, если $\cos \gamma_1 = 1$ и взаимно перпендикулярны, если $\cos \gamma_1 = 0$.

(б) Угол γ_2 между двумя плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, или $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + D = 0$ и $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{r} + D' = 0$ (угол между их нормальными) определяется по формуле

$$\cos \gamma_2 = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'}{|\mathbf{A}| |\mathbf{A}'|}. \quad (3.4-4)$$

Если плоскости заданы параметрическими уравнениями (п.3.2-2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 + u'\mathbf{a}' + v'\mathbf{b}'$, то

$$\cos \gamma_2 = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|}. \quad (3.4-5)$$

(с) Угол γ_3 между прямой

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ (угол между прямой и ее проекцией на плоскость) определяется по формуле

$$\sin \gamma_3 = \frac{Aa_x + Ba_y + Ca_z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (3.4-6)$$

В частности, прямая параллельна плоскости, если $\sin \gamma_3 = 0$ (лежит на плоскости, если, кроме того, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$); прямая перпендикулярна к плоскости, если $\sin \gamma_3 = 1$. Угол между прямой и нормалью к плоскости равен $\frac{\pi}{2} - \gamma_3$.

* (d) 1. Условия параллельности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}, \text{ или } \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a},$$

и

$$\frac{x-x'_1}{a'_x} = \frac{y-y'_1}{a'_y} = \frac{z-z'_1}{a'_z}, \text{ или } \mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 + t\mathbf{a}',$$

имеют вид

$$\frac{a'_x}{a_x} = \frac{a'_y}{a_y} = \frac{a'_z}{a_z}, \text{ или } \mathbf{a}' = \lambda\mathbf{a}, \text{ или } \mathbf{a} \times \mathbf{a}' = 0.$$

Если, кроме того, прямые имеют общую точку, то они совпадают.

2. Прямая $\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}$, или $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$, и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, или $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + D = 0$, взаимно перпендикулярны, если прямая параллельна нормали к плоскости (и сама служит нормалью), т. е. если

$$\frac{a_x}{A} = \frac{a_y}{B} = \frac{a_z}{C}, \text{ или } \mathbf{a} = \lambda\mathbf{A}, \text{ или } \mathbf{a} \times \mathbf{A} = 0.$$

3. Две плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ или } \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + D = 0,$$

и

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \text{ или } \mathbf{A}' \cdot \mathbf{r} + D' = 0,$$

параллельны, если параллельны их нормали, т. е. если

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \text{ или } \mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}', \text{ или } \mathbf{A} \times \mathbf{A}' = 0.$$

Если плоскости, кроме того, имеют общую точку, то они совпадают. *

3.4-2. Расстояния.

(а) Расстояние δ от точки $P_0(x_0, y_0, z_0) \equiv P_0(\mathbf{r}_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, или $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + D = 0$ (определенное по величине и знаку):

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0 + D}{\pm |\mathbf{A}|}; \quad (3.4-7)$$

знак перед корнем противоположен знаку D . Иногда δ называют отклонением точки от плоскости. Отклонение положительно, если начало координат и точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ лежат по разные стороны от плоскости, и отрицательно, если по одну сторону.

Если плоскость задана параметрическим уравнением (п.3.2-2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, то

$$\delta = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}. \quad (3.4-8)$$

(б) Расстояние d от точки $P_0(x_0, y_0, z_0) \equiv P_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой $\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}$, или $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$:

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)|}{|\mathbf{a}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (3.4-9)$$

(с) *Кратчайшее расстояние d_1 между прямыми*

$$\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z} \quad \text{и} \quad \frac{x-x'_1}{a'_x} = \frac{y-y'_1}{a'_y} = \frac{z-z'_1}{a'_z}, \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 + t'\mathbf{a}' :$$

$$d_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z} \sin \gamma_1} \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 & y_1 - y'_1 & z_1 - z'_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ a'_x & a'_y & a'_z \end{vmatrix} \quad (3.4-10)$$

или $d_1 = \frac{|[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \mathbf{a} \mathbf{a}']|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'|}$, где $\sin \gamma_1$ определяется равенством (2).

Если прямые параллельны ($\sin \gamma_1 = 0$), то d_1 определяется равенством (9).

З а м е ч а н и е. Если в определителе, стоящем в правой части равенства (10), заменить x, y, z переменными x, y, z и приравнять его нулю, то полученное уравнение определит плоскость, проходящую через вторую прямую параллельно первой. Если прямые пересекаются, то плоскость проходит через обе эти прямые.

(d) *Расстояние d_2 между параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$:*

$$d_2 = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D - D'|}{|A|}. \quad (3.4-11)$$

(е) *Расстояние d_3 от плоскости до параллельной ей прямой определяется по формуле (7).*

3.4-3. Специальные случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей.

(а) **Т о ч к и.** 1. Три точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $P_3(x_3, y_3, z_3)$ лежат на одной прямой, если (необходимое и достаточное условие)

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (3.4-12)$$

или (см. также равенство (3.1-15))

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4-13)$$

или

$$(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (3.4-14)$$

2. *Четыре точки лежат в одной плоскости, если (необходимое и достаточное условие)*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1)] = 0. \quad (3.4-15)$$

(b) **П л о с к о с т и.** 1. Если три плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ проходят через одну и ту же прямую, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4-16)$$

2. Если четыре плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$, $A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0$ проходят через одну и ту же точку, то

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4-17)$$

е. левые части их уравнений линейно зависимы (п.1. 9-3, а).

(е) **Прямые.** Две прямые лежат в одной плоскости (т. е. пересекаются или параллельны), если (необходимое и достаточное условие) четыре определяющие их плоскости удовлетворяют условию (17). Если прямые заданы параметрическими уравнениями $r = r_1 + ta$, $r = r_2 + ta'$, то условие (17) принимает вид

$$[(r_1 - r_2) \wedge a \wedge a'] = 0. \tag{3.4-17a}$$

3.4-4. Тангенциальные координаты плоскости и принцип двойственности. Уравнение

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0 \tag{3.4-18}$$

определяет плоскость (ξ, η, ζ) . Числа ξ, η, ζ называются ее тангенциальными (линейными, пюккеровыми) координатами. Если точечные координаты x, y, z фиксированы, а ξ, η, ζ рассматриваются как переменные, то (18) становится уравнением точки (x, y, z) , т. е. точки пересечения всех плоскостей (18).

Симметрия уравнения (18) относительно точечных и тангенциальных координат приводит к следующему принципу двойственности (см. также п.2.3-3): *наряду с каждой теоремой о взаимном положении точек, прямых и плоскостей справедлива другая теорема, которая получается, если в формулировке первой теоремы поменять местами термины «точка» и «плоскость».*

3.4-5. Некоторые дополнительные соотношения

(а) Если $\varphi_1(x, y, z) = 0$ и $\varphi_2(x, y, z) = 0$ — уравнения двух плоскостей, то уравнение

$$\varphi_1(x, y, z) + \lambda \varphi_2(x, y, z) = 0 \tag{3.4-19}$$

определяет плоскость, проходящую через линию пересечения данных плоскостей (или параллельную им обеим, если они параллельны). Уравнение (19) называется **уравнением пучка плоскостей**. Если обе плоскости заданы нормальными уравнениями (п.3.2-1,2), то $(-\lambda)$ равно отношению расстояний от любой точки плоскости (19) до заданных (базисных) плоскостей; при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$ полученные плоскости являются биссекторными плоскостями двугранных углов между данными плоскостями.

Если плоскости $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ параллельны, то все плоскости (19) также им параллельны.

(б) Уравнения прямой, *перпендикулярной* к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и проходящей через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \tag{3.4-20}$$

(с) Направляющий вектор и направляющие косинусы линии пересечения двух плоскостей определяются по формулам (3.3-2) и (3.3-3).

(д) Точка пересечения трех плоскостей $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ и $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ имеет следующие координаты:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} D & B & C \\ D' & B' & C' \\ D'' & B'' & C'' \end{vmatrix}, & y &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A & D & C \\ A' & D' & C' \\ A'' & D'' & C'' \end{vmatrix}, \\ z &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}, & \Delta &= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \tag{3.4-21}$$

3.5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.5-1. Общее уравнение второй степени. Поверхности второго порядка (квадрики) определяются уравнениями второй степени относительно декартовых прямоугольных координат. Общее уравнение второй степени относительно переменных x, y, z имеет вид

$$\underline{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z} + a_{44} = 0$$

ИЛИ

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})z + a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0, \quad (3.5-1)$$

где $a_{ik} = a_{ki}$; $i, k = 1, 2, 3, 4$.

Уравнение (1) можно записать в векторной форме

$$(\mathbf{A}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + a_{44} = 0, \quad (3.5-2)$$

где \mathbf{A} — аффинор с координатами $A_k^i = a_{ik}$, \mathbf{a} — вектор с координатами $a_i = a_{4i}$ (см. также п.16.9-2).**3.5-2. Инварианты.** Для любого уравнения (1) четыре величины

$$\left. \begin{aligned} I &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, & J &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \\ D &= A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.5-3)$$

являются *инвариантами* относительно параллельного переноса и поворота осей (3.1-19), (3.1-20), (3.1-23). Эти инварианты определяют свойства поверхности, не зависящие от ее положения в пространстве. Детерминант A называется **дискриминантом** уравнения (1).**3.5-3. Классификация поверхностей второго порядка.** Табл. 3.5-1 содержит классификацию поверхностей второго порядка, основанную на их инвариантах, определенных в п.3.5-2. В этой таблице

$$\left. \begin{aligned} A' &= A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} \\ A_{ik} &\text{ обозначает алгебраическое дополнение элемента } a_{ik} \text{ в определителе } A = \det |a_{ik}|, \text{ см. п.1.5-2,} \\ A'' &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \\ A''' &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5-4)$$

3.5-4. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение. При помощи характеристической квадратичной формы

$$F_0(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz, \quad (3.5-5)$$

соответствующей уравнению (1), могут быть изучены важные свойства поверхностей второго порядка. В частности, невырожденная центральная поверхность второго порядка ($A \neq 0, D \neq 0$) оказывается действительным эллипсоидом, мнимым эллипсоидом или гиперболоидом в зависимости от того, будет ли $F_0(x, y, z)$ соответственно положительно определенной, отрицательно определенной или неопределенной квадратичной формой, что устанавливается по корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ее характеристического уравнения (п.13.4-5,а)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - D = 0, \quad (3.5-6)$$

Таблица 3.5-1

Классификация поверхностей второго порядка

		Новыежденные поверхности $A \neq 0$		Вырожденные поверхности $A = 0$	
		$A > 0$		Конусы и цилиндры $A' \neq 0$	
		$A' I > 0$ $J > 0$	$A' I < 0$ и (или) $J < 0$	$A' I > 0$ и (или) $J < 0$	$A' < 0$ $A'' > 0$ $A'' < 0$ $A''' = 0$ $A''' \neq 0$
Центральные поверхности $D \neq 0$	$D I > 0$ $J > 0$	Мнимый эллипсоид (ни одной действительной точки)	Действительный эллипсоид	Точка (действительная вершина мнимого конуса; эллипсоид, выродившийся в точку)	
	$D I < 0$ и (или) $J < 0$	Однополостный гиперболоид	Двуполостный гиперболоид	... Действительный конус	
Нецентральные поверхности $D = 0$	$J > 0$		Эллипсоид (параболоид вращения, если $I^2 = 4J$)	Мнимый эллипсоид (или одно действительной точки)	Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по прямой
	$J < 0$	Гиперболический параболоид		Гиперболический цилиндр, если $I^2 = 4J$	Пара пересекающихся действительных плоскостей
Ранг квадратной матрицы (стр. 2-7) порядка (п.13.2-7)	$J = 0$ $I \neq 0$			Параболический цилиндр	Пара действительных параллельных плоскостей
					Пара совпадающих действительных плоскостей (одна плоскость)
		4		3	
				2	
				1	

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются собственными значениями действительной симметрической матрицы $[a_{ik}]$ (п.13.4-2) и, как следствие этого, всегда действительны. Имеем:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1,$$

$$D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

3.5-5. Диаметральные плоскости, диаметры и центры поверхностей второго порядка.

(а) Для любой поверхности второго порядка (вырожденной или невырожденной) геометрическим местом середин параллельных хорд служит плоскость, которая называется **диаметральной плоскостью** поверхности, сопряженной этим хордам (или направлению этих хорд). Диаметральная плоскость поверхности (1), сопряженная хордам с направляющими косинусами $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$, определяется уравнением

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) \cos \alpha_x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) \cos \alpha_y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) \cos \alpha_z = 0. \quad (3.5-7)$$

(б) Прямая, по которой пересекаются две диаметральные плоскости, называется **диаметром**, сопряженным семейству плоскостей, параллельных, ных сопряженным хордам этих диаметральных плоскостей. С другой стороны, диаметр является геометрическим местом центров кривых второго порядка, по которым пересекают поверхность параллельные между собой плоскости семейства. Уравнения диаметра, сопряженного семейству плоскостей с заданными направляющими косинусами нормали $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$:

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{\cos \alpha_x} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{\cos \alpha_y} = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{\cos \alpha_z}. \quad (3.5-8)$$

(в) При $D \neq 0$ все диаметры поверхности второго порядка пересекаются в одной точке, *центре* поверхности (другое определение см. в п.3.5-8). При $D = 0$ все диаметры параллельны или лежат в одной плоскости. В первом случае, т. е. при $D \neq 0$, поверхность называется **центральной**.

Координаты x_0, y_0, z_0 центра определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.5-9)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ y_0 &= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ z_0 &= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5-10)$$

Если поверхность центральная, то перенос (3.1-19) начала координат в ее центр (10) приводит уравнение поверхности к виду

$$a_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + a_{33}\bar{z}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + 2a_{13}\bar{x}\bar{z} + 2a_{23}\bar{y}\bar{z} + \frac{A}{D} = 0, \quad (3.5-11)$$

где \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} — координаты относительно новой системы.

(д) Три диаметра центральной поверхности второго порядка называются **сопряженными диаметрами**, если каждый из них сопряжен плоскости двух других диаметров.

3.5-6. Главные плоскости и главные оси.

(а) Диаметральная плоскость, перпендикулярная к сопряженным ей хордам, называется **главной плоскостью** поверхности второго порядка и является ее плоскостью симметрии. Каждая поверхность второго порядка имеет по меньшей мере одну главную плоскость и по меньшей мере две плоскости симметрии. (П р и м е р: параболический цилиндр имеет одну главную плоскость.) Только цилиндры имеют плоскости симметрии (перпендикулярные к образующим), которые не являются главными плоскостями. Каждая невырожденная поверхность второго порядка имеет по меньшей мере две взаимно перпендикулярные главные плоскости. Каждая центральная поверхность (п.3.5-5) имеет по меньшей мере три главные плоскости (ровно три, если она не является поверхностью вращения), среди которых всегда существуют три взаимно перпендикулярные.

(б) Диаметр, являющийся линией пересечения двух главных плоскостей, называется **главной осью** поверхности и является ее осью симметрии. Если поверхность имеет две главные оси, то она имеет и третью, перпендикулярную к ним обеим. Каждая невырожденная поверхность имеет по меньшей мере одну главную ось. Центральная поверхность имеет по меньшей мере три (ровно три, если она не является поверхностью вращения) взаимно перпендикулярные главные оси, представляющие собой нормальные к ее главным плоскостям диаметры (сопряженные как этим плоскостям, так и между собой, см. п.3.5-4,а); среди главных осей центральной поверхности всегда имеются три взаимно перпендикулярные.

Нормали к главным плоскостям имеют направления собственных векторов матрицы $[a_{ik}]$, $i, k = 1, 2, 3$ (см. п.14.8-6). Направляющие косинусы этих нормалей $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$, $\cos \alpha_z$ определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha_x + a_{12} \cos \alpha_y + a_{13} \cos \alpha_z &= 0, \\ a_{21} \cos \alpha_x + (a_{22} - \lambda) \cos \alpha_y + a_{23} \cos \alpha_z &= 0, \\ a_{31} \cos \alpha_x + a_{32} \cos \alpha_y + (a_{33} - \lambda) \cos \alpha_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.5-12)$$

где λ — отличный от нуля (заведомо действительный) корень характеристического уравнения (6). *Если все корни λ_1 , λ_2 , λ_3 уравнения (6) отличны от нуля, то система (12) определяет для каждого из этих корней направляющие косинусы главной оси. В том случае, когда $\lambda = 0$ является простым корнем характеристического уравнения (6), ему соответствуют направляющие косинусы единственной главной оси. Если же $\lambda = 0$ — кратный корень, то поверхность является параболическим цилиндром или парой параллельных плоскостей. В этом случае система (3.5-12) содержит только одно независимое уравнение. Если дополнить ее уравнением

$$a_{41} \cos \alpha_x + a_{42} \cos \alpha_y + a_{43} \cos \alpha_z = 0,$$

то новая система определит направление образующих цилиндра.*

3.5-7. Приведение уравнения поверхности второго порядка к стандартному (каноническому) виду. Если ввести новую систему координат, осуществив

1) *поворот* координатных осей (п.3.1-12,б), в результате которого нормаль к каждой из взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии

поверхности станет параллельной одной из новых осей (преобразование к главным осям, см. п.14.8-6);

2) подходящий перенос начала (п.3.1-12,а), то уравнение (1) любой невырожденной поверхности второго порядка может быть преобразовано к

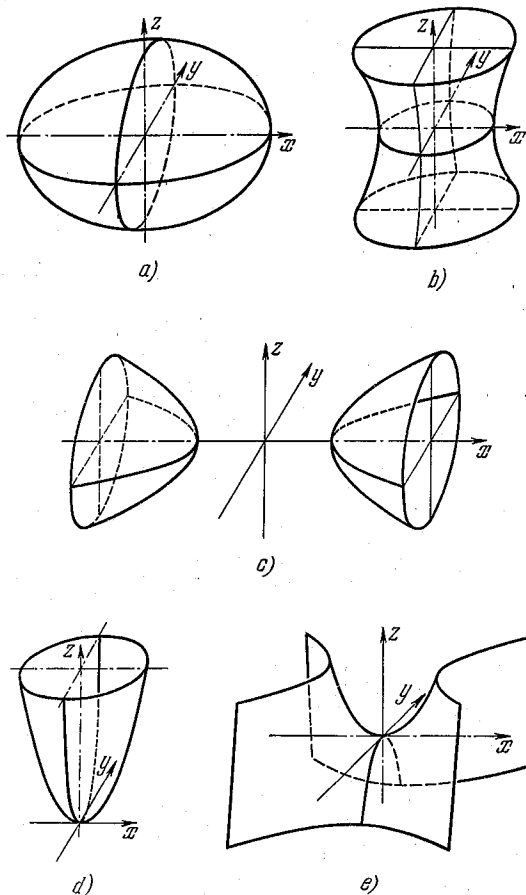


Рис. 3.5-1. Невырожденные поверхности второго порядка. а) эллипсоид, б) однополостный гиперболоид, в) двуполостный гиперболоид, д) эллиптический параболоид, е) гиперболический параболоид.

одному из видов, перечисленных в табл. 3.5-2. Эти поверхности изображены на рис. 3.5-1. Каждое из полученных уравнений называется *стандартным* (или *каноническим*) уравнением соответствующей поверхности. В табл. 3.5-2 приведены также основные свойства поверхностей и соотношения, позволяющие определить параметры a^2 , b^2 , c^2 , p и q по инвариантам A , D , J и I уравнения (1).

Таблица 3.5-2
Стандартные (канонические) уравнения и основные свойства невырожденных конических сечений
 (см. также табл. 3.5-1; уравнения касательных и полярных плоскостей см. в п. 3.5-8)

Поверхность (см. также рис. 3.5-1)	Стандартное (каноническое) уравнение	Сечение плоскостью	Замечания	Параметры a, b, c , выраженные через инварианты A, D и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
<p>Действительный эллипсоид (эллипсоид вращения (сфероид)), если два главных диаметра равны и либо (а) меньше, чем третий (втянутый сфероид), либо (б) больше, чем третий (сплюснутый сфероид); сфера, если $a^2 = b^2 = c^2$</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 3.5-1, а)	<p>Действительный или мнимый эллипс; точка (касательная плоскость)</p>	<p>Вершины в точках $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$; длины главных диаметров равны соответственно $2a$, $2b$, $2c$.</p>	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_3 D}, \quad b^2 = -\frac{1}{\lambda_2 D},$ $c^2 = -\frac{1}{\lambda_1 D},$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0;$ $D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
<p>Однополостный гиперболоид вращения, если $a^2 = b^2$</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 3.5-1, б)	<p>Гипербола, парабола или эллипс в зависимости от того, параллельна секущая плоскость двум, одной или ни одной прямой основной образующей асимптотического конуса; пара пересекающихся прямых (касательная плоскость)</p>	<p>Линейчатая поверхность с двумя семействами линейных образующих</p> $\left. \begin{aligned} x + z &= \lambda \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \frac{a}{a} + \frac{z}{c} &= 1 - \frac{y}{b} \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} \lambda \left(\frac{x-z}{a} - \frac{z}{c} \right) &= 1 - \frac{y}{b} \\ \text{и } \frac{x+z}{a} + \frac{z}{c} &= \mu \left(1 - \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\}$ $\mu \left(\frac{x-z}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 + \frac{y}{b}.$ <p>Геометрическое место прямых, пересекающих три данные прямые. Асимптотический конус (внутри поверхности):</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_2 D},$ $b^2 = -\frac{1}{\lambda_1 D},$ $c^2 = \frac{1}{\lambda_3 D},$ $\lambda_1 > \lambda_2 > 0 > \lambda_3;$ $D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Таблица 3.5-2 (продолжение)

Поверхность (см. также рис. 3.5-1)	Стандартное (каноническое) уравнение	Сечение плоскостью	Замечания	Параметры a, b, c, p, q , выраженные через инварианты A, D и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
Двухосный гипербо- лоид (гиперболоид вращения, если $b^2 = c^2$)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 3.5-1, c)	То же, что и для однопо- лостного гиперболоида	Вершины в точках $(\pm a, 0, 0)$; расстояние между вершинами равно $2a$. Асимптотический конус (вне поверхности): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{A}{D}, b^2 = \frac{1}{\lambda_3} \frac{A}{D},$ $c^2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{A}{D},$ $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3, D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
Эллиптический парабо- лоид (параболоид вра- щения, если $p = q$)	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (рис. 3.5-1, d) ($p > 0, q > 0$)	Парабола (диаметральная плоскость действитель- ный или мнимый эллипс; точка (касательная пло- скость)	Вершина в начале коорди- нат	$p = \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{A}{J}}, q = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{A}{J}},$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = 0, J = \lambda_1 \lambda_2$
Гиперболический пара- болоид	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0, q > 0$) (рис. 3.5-1, e)	Парабола (диаметральная плоскость); гипербола; пара пересечения с прямыми (касательная плоскость)	Седловая точка в начале координат. Линейчатая поверхность с двумя се- мействами прямолиней- ных образующих $\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \lambda, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{\lambda} \end{aligned} \right\}$ и $\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \mu, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{\mu} \end{aligned} \right\}$	$p = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{A}{J}},$ $q = -\frac{1}{\lambda_3} \sqrt{\frac{A}{J}},$ $\lambda_1 > \lambda_2 = 0 > \lambda_3, J = \lambda_1 \lambda_3$

Уравнения вырожденных поверхностей (см. табл. 3.5-1) аналогичным образом приводятся к следующему стандартному виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0 \quad (\text{точка}), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \quad (\text{действительный конус; круговой,} \\ &\quad \text{если } a^2 = b^2), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad (\text{эллиптический цилиндр; круговой,} \\ &\quad \text{если } a^2 = b^2), \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad (\text{гиперболический цилиндр}), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 0 \quad (\text{прямая}), \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 0 \quad (\text{пара пересекающихся плоскостей}), \\ y^2 &= 2px \quad (\text{параболический цилиндр}), \\ \frac{x^2}{a^2} &= 1 \quad (\text{пара параллельных плоскостей}), \\ x^2 &= 0 \quad (\text{одна действительная плоскость}). \end{aligned} \right\} \quad (3.5-13)$$

Направления новых осей Ox , Oy , Oz определяются уравнениями (12) с точностью до поворота на угол, кратный $\pi/2$, вокруг любой из новых осей; этому преобразованию соответствует перестановка переменных x , $-x$, y , $-y$, z , $-z$ в канонических уравнениях табл. 3.5-2.

3.5-8. Касательные плоскости и нормали поверхности второго порядка.

Полюсы и полюры.

(а) Определения касательных плоскостей и нормалей поверхности, а также условия их существования приведены в п.17.3-2. Уравнение касательной плоскости к поверхности (1) в точке $P_1(x_1, y_1, z_1)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1x + a_{22}y_1y + a_{33}z_1z + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{13}(z_1x + x_1z) + \\ + a_{23}(y_1z + z_1y) + a_{14}(x_1 + x) + a_{24}(y_1 + y) + a_{34}(z_1 + z) + a_{44} &= 0 \\ \text{или} \\ (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14})x + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + a_{24})y + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + a_{34})z + (a_{41}x_1 + a_{42}y_1 + a_{43}z_1 + a_{44}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5-14)$$

(б) Уравнения нормали к поверхности (1) в точке (x_1, y_1, z_1) (см. также п.3.3-16, б):

$$\frac{x - x_1}{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14}} = \frac{y - y_1}{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + a_{24}} = \frac{z - z_1}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + a_{34}}. \quad (3.5-15)$$

(в) Уравнение (14) определяет плоскость, которая называется **полярной плоскостью точки** (x_1, y_1, z_1) относительно поверхности второго порядка (1) независимо от того, лежит ли точка (x_1, y_1, z_1) на поверхности или нет; точка (x_1, y_1, z_1) называется **полюсом** плоскости (14). Полярная плоскость точки, принадлежащей поверхности второго порядка, есть касательная плоскость поверхности в этой точке.

(д) Полярная плоскость β любой точки B данной плоскости α проходит через полюс A этой плоскости α .

(е) Центр поверхности второго порядка есть полюс бесконечно удаленной плоскости. Диаметральная плоскость есть полярная плоскость бесконечно удаленной точки, через которую проходят хорды, сопряженные этой диаметральной плоскости.

(ф) Полярные плоскости всех точек данной прямой пересекаются по одной прямой; эта последняя прямая содержит полюсы всех плоскостей, проходящих через данную прямую. Две полученные прямые называют **парой полярно сопряженных прямых**.

(г) Диаметр поверхности второго порядка есть прямая, полярно сопряженная бесконечно удаленной прямой пространства.

(h) Полярная плоскость допускает геометрическое определение, аналогичное определению поляры (см. п. 2.4-10).

3.5-9. Некоторые дополнительные формулы и теоремы.

(а) Уравнение сферы радиуса r с центром в точке $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(x_1)$:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = r^2 \quad \text{или} \quad |r-r_1| = r. \quad (3.5-16)$$

(b) Общий вид уравнения сферы:

$$A(x^2+y^2+z^2) + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0, \quad A \neq 0. \quad (3.5-17)$$

(с) Пусть P_1 и P_2 — точки пересечения сферы с прямой (секущей), проходящей через данную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда произведение величин направленных отрезков $\overline{P_0P_1}$ и $\overline{P_0P_2}$ постоянно для всех секущих, проходящих через P_0 , причем

$$\overline{P_0P_1} \cdot \overline{P_0P_2} = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2. \quad (3.5-18)$$

Теорема остается справедливой и в том случае, когда P_1 и P_2 совпадают (если рассматривать вместо секущей ее предельное положение — касательную к сфере в точке $P_1 \equiv P_2$, проходящую через точку P_0).

(d) Для половин трех сопряженных диаметров эллипсоида (п. 3.5-5):

1. Сумма квадратов равна $a^2 + b^2 + c^2$.
2. Объем построенного на них параллелепипеда равен abc .

(е) Диаметральная плоскость поверхности второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.5-19)$$

(эллипсоид, однополостный гиперболоид или двуполостный гиперболоид, см. также табл. 3.5-2), сопряженная диаметру с направляющими косинусами $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$, определяется уравнением

$$x \cos \alpha_x \pm \frac{y \cos \alpha_y}{b^2} \pm \frac{z \cos \alpha_z}{c^2} = 0. \quad (3.5-20)$$

Направляющие косинусы трех сопряженных диаметров $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$; $\cos \beta_x, \cos \beta_y, \cos \beta_z$; $\cos \gamma_x, \cos \gamma_y, \cos \gamma_z$ удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \alpha_x \cos \beta_x}{a^2} \pm \frac{\cos \alpha_y \cos \beta_y}{b^2} \pm \frac{\cos \alpha_z \cos \beta_z}{c^2} &= 0, \\ \frac{\cos \alpha_x \cos \gamma_x}{a^2} \pm \frac{\cos \alpha_y \cos \gamma_y}{b^2} \pm \frac{\cos \alpha_z \cos \gamma_z}{c^2} &= 0, \\ \frac{\cos \beta_x \cos \gamma_x}{a^2} \pm \frac{\cos \beta_y \cos \gamma_y}{b^2} \pm \frac{\cos \beta_z \cos \gamma_z}{c^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5-21)$$

Знаки в уравнениях (20) и (21) должны совпадать со знаком соответствующих членов в уравнениях (19).

* (f) Уравнение диаметра поверхности (3.5-19), сопряженного плоскости с направляющими косинусами нормали $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$, имеет вид

$$\frac{x}{\pm a^2 \cos \alpha_x} = \frac{y}{\pm b^2 \cos \alpha_y} = \frac{z}{\pm c^2 \cos \alpha_z} \cdot *$$

3.5-10. Параметрическое задание поверхностей второго порядка (см. также шп. 3.1-14 и 6.5-1):

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos u \quad (\text{эллипсоид}), \quad (3.5-22)$$

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u \quad (\text{однополостный гиперболоид}), \quad (3.5-23)$$

$$x = \pm a \operatorname{ch} u, \quad y = b \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u \cos v \quad (\text{двуполостный гиперболоид}), \quad (3.5-24)$$

(знаки + и - соответствуют двум полостям)

$$x = \sqrt{p} u \cos v, \quad y = \sqrt{q} u \sin v, \quad z = \frac{1}{2} u^2 \quad (\text{эллиптический параболоид}), \quad (3.5-25)$$

$$x = \sqrt{p} u \operatorname{ch} v, \quad y = \sqrt{q} u \operatorname{sh} v, \quad z = \frac{1}{2} u^2 \quad (\text{гиперболический параболоид}), \quad (3.5-26)$$

$$x = a u \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cu \quad (\text{действительный конус}). \quad (3.5-27)$$

Возможны также многие другие параметрические задания этих поверхностей.

ГЛАВА 4

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена главным образом числовым функциям действительных переменных. Введение пределов функций (пп. 4.4-1—4.4-7) позволяет определить новые математические операции (предельные процессы) такие, как сложение и умножение бесконечного числа членов, дифференцирование и интегрирование.

Дифференциальное исчисление (пп. 4.5-1—4.5-7) описывает отношения между малыми приращениями соответствующих переменных. Интегральное исчисление (пп. 4.6-1—4.6-19, 4.9-3 и 4.9-4) позволяет количественно выразить свойства множества объектов в целом или в среднем и обеспечивает аппарат для сложения большого числа малых приращений. В пп. 4.8-1—4.9-2 перечисляются свойства бесконечных рядов, а в пп. 4.10-1—4.11-8 говорится о разложении функций в степенной ряд и в ряд Фурье и о представлении их интегралом Фурье.

Определения и теоремы, изложенные в этой главе, применимы как к действительным, так и к комплексным функциям, и переменным, если специально не оговорено, что речь идет лишь о действительных величинах. Аналитические функции комплексного переменного рассматриваются в гл. 7.

4.2. ФУНКЦИИ

4.2-1. Функции и переменные (см. также п.12.1-4).

(а) Если дано правило соответствия, относящее каждому данному действительному или комплексному числу x из множества S_x действительное или комплексное число

$$y = f(x), \quad (4.2-1)$$

то y называется (числовой) функцией

$$y = y(x) = f(x)$$

аргумента x . Равенство (1) указывает значение (или значения) $y = Y = f(X)$ переменной y , соответствующее каждому допустимому значению $x = X$ переменной x ; при этом x называется независимым переменным, а y — зависимым переменным.

Термин «переменное x » в сущности отсылает к множеству значений X , а равенство (1) символизирует множество соответствий, связывающих значения X переменного x и значения $Y = f(X)$ переменного y . В согласии с обозначениями, применяемыми в большинстве учебников, символом x мы будем обозначать и переменное x и значение этого переменного, если только это не сможет привести к путанице.

Если x и y рассматривать как декартовы координаты на плоскости (п.2.1-2), то действительная функция $y = f(x)$ действительного переменного x часто изображается кривой (графиком функции y от x , см. также п.2.1-9).

(б) Подобным же образом функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2-2)$$

n переменных x_1, x_2, \dots, x_n относится упорядоченному множеству значений (независимых) переменных x_1, x_2, \dots, x_n значения (зависимого) переменного y .

Функция может быть определена *таблицей своих значений* или *правилом вычисления* такой таблицы с помощью известных операций (*конструктивные определения*). Функция может также быть определена *явно* (п.4.5-7) или с помощью *определяющих свойств*, описываемых функциональными, дифференциальными или интегральными уравнениями, экстремальными свойствами (п.1.4-2), поведением при некоторых значениях аргумента и т. д. Каждое неконструктивное определение нуждается в *доказательстве существования*, устанавливаемом, что функция, обладающая указанными свойствами, существует.

(е) В большинстве приложений переменные x , y или x_1, x_2, \dots, x_n, y обозначают физические объекты или величины, так что *соответствующие соотношения* (1) или (2) *описывают физические закономерности*. (Пример. $y = x_1 x_2$, если x_1, x_2 и y соответственно обозначают напряжение, силу тока и мощность в простом электрическом контуре.)

(д) Множество S_x значений x (или множество значений x_1, x_2, \dots, x_n), для которых определены соотношения (1) или (2), есть *область определения* функции $f(x)$ или $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Соответствующее множество S_y значений y есть *множество значений* функции.

(е) *Последовательность* действительных или комплексных чисел s_0, s_1, s_2, \dots представляет функцию $s_n = s(n)$, определенную на множестве неотрицательных целых чисел n .

4.2-2. Функции со специальными свойствами (см. также пп.1.4-3, 7.3-3, 7.6-5 и 7.6-7).

(а) Функция *однозначна*, если каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции. Функция *многозначна*, если хотя бы одному значению аргумента соответствует два или более значений функции. *В дальнейшем всюду в этой главе рассматриваются только однозначные функции, и это всякий раз специально не оговаривается.* Функция $y(x)$ имеет *обратную функцию* $x(y)$, если из $y = y(x)$ следует $x = x(y)$.

(б) Функция $f(x)$ действительного или комплексного переменного x *четна*, если $f(-x) \equiv f(x)$; *нечетна*, если $f(-x) \equiv -f(x)$; является *периодической* с периодом T , если $f(t+T) \equiv f(t)$.

Каждая функция $f(x)$, область определения S_x которой вместе с каждым входящим в него числом x содержит и число $-x$, может быть представлена в виде суммы четной функции $(1/2)[f(x)+f(-x)]$ и нечетной функции $(1/2)[f(x)-f(-x)]$. Периодическая функция $f(t)$ с периодом T называется *антипериодической*, если $f(t+T/2) = -f(t)$. Каждая периодическая функция $f(t)$ с периодом T может быть представлена в виде суммы антипериодической функции $(1/2)[f(t)-f(t+T/2)]$ и функции $(1/2)[f(t)+f(t+T/2)]$ периодической с периодом $T/2$.

(с) $y = f(x)$ есть *алгебраическая функция* от x , если x и y удовлетворяют соотношению вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен относительно x и y (п.1.4-3). В частности, $y = f(x)$ есть *рациональная (рациональная алгебраическая) функция* от x , если $f(x)$ есть многочлен (целая рациональная функция) или частное двух многочленов (дробная рациональная функция). y есть *линейная функция* от x , если $y = ax + b$.

4.3. ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА, ИНТЕРВАЛЫ И ОБЛАСТИ

4.3-1. Вводные замечания. При рассмотрении свойств функции $f(x)$ действительного переменного x часто требуется указать *множество значений* x , для которых значение $f(x)$ определено и удовлетворяет данным условиям. Заметим, что подобным образом могут быть описаны и функции и множества. Обычно о значениях¹⁾ действительного переменного x (или объ-

¹⁾ См. также п.4.2-1.

ектов, которым соответствуют значения x говорят как о *точках* (x) прямой, а о множествах таких действительных чисел — как о *линейных точечных множествах*.

Свойства функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ действительных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , подобным же образом связывают с множествами «точек» (x_1, x_2, \dots, x_n) в n -мерном «пространстве», включающем все рассматриваемые точки (x_1, x_2, \dots, x_n) (п. 14.1-2).

Использование геометрического языка подсказывается *аксиомой непрерывности Кантора—Дедекинда*, постулирующей существование взаимно однозначного соответствия между действительными числами и точками прямой. Эта «координатная аксиома» (п. 2.1-2) совместима как со свойствами действительных чисел, так и с постулатами, определяющими евклидову и другие геометрии.

В пп. 4.3-2—4.3-6 рассматриваются главным образом те свойства точечных множеств, которые непосредственно применяются в теории функций действительных переменных. В пп. 7.2-2—7.2-4 рассматриваются области на комплексной числовой плоскости. В более общей постановке о любом множестве (классе) объектов (в частности, объектов, соответствующих значениям действительного переменного или переменных) можно говорить как о точечном множестве. Свойства таких множеств рассматриваются ниже, в пп. 12.5-1—12.5-4.

4.3-2. Свойства множеств.

(а) **Алгебра множеств (классов).** Объект (точка) P , содержащийся в множестве (классе) S , есть элемент множества S ($P \in S$). Множество S_1 является подмножеством другого множества S_2 (S_1 содержится в S_2 , $S_1 \subset S_2$), если каждый элемент множества S_1 является элементом и множества S_2 . Множества S_1 и S_2 равны ($S_1 = S_2$), если они содержат одни и те же элементы, т. е. если $S_1 \subset S_2$ и $S_2 \subset S_1$. **Пустое множество** \emptyset по определению есть подмножество каждого множества S . **Собственное подмножество (собственная часть)** множества S есть непустое подмножество S , не равное S . **Объединение (логическая сумма)** $S \cup S_2$ (или $S_1 + S_2$) есть множество всех элементов, содержащихся либо в S_1 , либо в S_2 , либо и в S_1 и в S_2 . **Пересечение (общая часть, логическое произведение)** $S_1 \cap S_2$ (или $S_1 S_2$) — множество S_1 и S_2 есть множество всех элементов, содержащихся и в S_1 и в S_2 . **Дополнение** множества S до множества I , содержащего S , есть множество всех элементов из I , не содержащихся в S . **Подмножества любого множества (класса) I с операциями логического сложения и умножения составляют булеву алгебру** (п. 12.8-1).

(б) **Кардинальные числа и счетность.** Два множества S_1 и S_2 имеют одну и ту же **мощность (кардинальное число)**, если существует взаимно однозначное соответствие между этими множествами. S есть **бесконечное множество**, если оно имеет ту же мощность, что и хотя бы одно из его собственных подмножеств; в противном случае S — **конечное множество**.

Бесконечное множество S **счетно**, если можно установить взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел. Каждое кардинальное число конечного множества тождественно с числом его элементов. *Каждое бесконечное подмножество счетного множества счетно.* Объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Кардинальные числа, соответствующие бесконечным множествам, называются **бесконечными кардинальными числами**. Кардинальное число каждого счетного множества совпадает с кардинальным числом множества натуральных чисел и обозначается символом \aleph_0 . Множество всех действительных чисел (или множество точек непрерывной прямой, п. 4.3-1) несчетно; соответствующее кардинальное число обозначается символом \aleph .

4.3-3. Границы.

(а) Действительное число M есть **верхняя граница** или **нижняя граница** множества S , действительных чисел y , если для всех $y \in S$, соответственно $y \leq M$ или $y \geq M$. Множество действительных или комплексных

чисел **ограничено** (имеет **абсолютную границу**), если верхнюю границу имеет множество абсолютных величин (модулей) этих чисел; в противном случае множество **не ограничено**.

Каждое (непустое) множество S_y действительных чисел y , имеющее верхнюю границу, имеет **точную верхнюю границу** (наименьшую верхнюю границу) $\sup y$, а каждое (непустое) множество действительных чисел y , имеющее нижнюю границу, имеет **точную нижнюю границу** (наибольшую нижнюю границу) $\inf y$. Если множество S_y конечно, то его точная верхняя граница $\sup y$ необходимо равна **наибольшему значению** (максимуму) $\max y$, фактически принимаемому числом y в S_y , а точная нижняя граница $\inf y$ равна **минимуму** $\min y$.

Пример. Множество всех действительных чисел, меньших 1, имеет точную верхнюю границу 1, но не имеет максимума.

(b) Действительная или комплексная функция $y = f(x)$ или $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **ограничена** на множестве S «точек» (x) или (x_1, x_2, \dots, x_n) , если ограничено соответствующее множество S_y значений функции y . Точно так же действительная функция $y = f(x)$ или $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет **верхнюю границу**, **нижнюю границу**, **точную верхнюю границу**, **точную нижнюю границу**, (абсолютный) **максимум** и/или (абсолютный) **минимум** на множестве S «точек» (x) или (x_1, x_2, \dots, x_n) , если это верно для соответствующего множества S_y значений функции y .

(c) Действительная или комплексная функция $f(x, y)$ или $f(x_1, x_2, \dots, x_n; y)$ **равномерно ограничена** на множестве S «точек» (x) или (x_1, x_2, \dots, x_n) , если абсолютная величина (модуль) функции f как функция от y имеет верхнюю границу, не зависящую от x или от x_1, x_2, \dots, x_n на S . **Равномерные верхние границы** и **равномерные нижние границы** определяются аналогично.

4.3-4. Интервалы (см. также пп. 4.3-3 и 4.3-5). Пусть x — действительное переменное. Множество всех значений x (точек), удовлетворяющих условиям:

1. $a < x < b$ есть **ограниченный открытый интервал** (a, b) .
2. $a < x$ есть **неограниченный открытый интервал** $(a, +\infty)$.
3. $x < a$ есть **неограниченный открытый интервал** $(-\infty, a)$.
4. $a \leq x \leq b$ есть **ограниченный замкнутый интервал** $[a, b]$.

Замкнутый интервал называют также или *отрезком*, или *сегментом*, или *замкнутым промежутком*. Множества точек (x) , удовлетворяющих условиям $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x$, $x \leq a$ можно называть **полукотрытыми интервалами**. Каждый интервал I_1 , содержащийся в другом интервале I_2 есть **частичный интервал** интервала I_2 .

4.3-5. Определение окрестностей.

(a) Пусть a — любое действительное число. (Открытая) **окрестность точки** (a) в **пространстве действительных чисел** есть любой открытый интервал вида $(a - \delta, a + \delta)$, содержащий точку $x = a$, иными словами, множество всех точек (x) , для некоторого положительного числа δ удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$.

(b) Множество $(M, +\infty)$ всех точек (x) , для некоторого действительного числа M удовлетворяющих условию $x > M$, есть (открытая) **окрестность «точки» плюс бесконечность** $(+\infty)$ в **пространстве действительных чисел**; множество $(-\infty, N)$ всех точек (x) , для некоторого действительного числа N удовлетворяющих условию $x < N$, есть (открытая) **окрестность «точки» минус бесконечность** $(-\infty)$ в **пространстве действительных чисел**.

(c) В пространстве, «точки» которого суть (описываются как) упорядоченные множества (x_1, x_2, \dots, x_n) действительных чисел, (открытую) окрестность точки (a_1, a_2, \dots, a_n) , где a_1, a_2, \dots, a_n конечны, можно определить как мно-

жество всех точек (x_1, x_2, \dots, x_n) ; для некоторого положительного числа δ удовлетворяющих условиям $|x_1 - a_1| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta$.

З а м е ч а н и е. Определения окрестностей, подобные тем, которые были даны выше, нельзя считать самоочевидными; они подчиняются постулатам, определяющим топологические свойства рассматриваемого пространства (см. также п.12.5-1). В частности, для неограниченных значений переменных (как выше в (b)) окрестности можно определять различными способами (так, $+\infty$ и $-\infty$ можно рассматривать как одну и ту же точку или же как две разные точки; см. также п.7.2-2). В прикладной математике выбор таких определений будет зависеть от характера тех объектов, которые «изображаются» точками (x) или (x_1, x_2, \dots, x_n) . Окрестности специального вида, определенные выше в (a) и (c), называются δ -окрестностями. Определение окрестностей тесно связано с определением открытых множеств (п.4.3-6), областей (п.4.3-6) и пределов функций на рассматриваемом пространстве (п.4.4-1; см. также п.12.5-3).

4.3-6.* Открытые и замкнутые множества и области. Все нижеследующие определения зависят от того, каким образом определены окрестности в пространстве, содержащем рассматриваемые множества и области (от топологии этого пространства, см. также пп.12.5-1 — 12.5-4).

(a) Точка P есть **предельная точка (точка конденсации, точка накопления)** точечного множества S , если каждая окрестность точки P содержит точки множества S , отличные от P . Точка P есть **внутренняя точка** множества S , если P имеет окрестность, целиком содержащуюся в S . Предельная точка P множества S , не являющаяся его внутренней точкой, есть **граничная точка** множества S . Точка P множества S есть **изолированная точка** этого множества, если у нее есть окрестность, не содержащая других точек множества S .

Точечное множество S есть:

открытое множество, если оно состоит только из внутренних точек;

замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки; конечное множество замкнуто;

дискретное (изолированное) множество, если оно содержит только изолированные точки; дискретное множество на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве конечно или счетно; конечное множество дискретно;

связное множество, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого. (См. также п.12.5-4).

(b) Множество на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве **ограничено**, если ограничено множество декартовых координат всех его точек. **Область (открытая)** есть открытое связное множество. Объединение открытой области и ее граничных точек (**границы области**) есть **замкнутая область**.

Область D на евклидовой плоскости называется **односвязной**, если любая простая замкнутая кривая (п.3.1-13), целиком принадлежащая D , может быть стянута в точку с помощью непрерывной деформации, не выходя из области D . Область не односвязная называется **многосвязной**.

Область V в евклидовом трехмерном пространстве называется:

поверхностно-односвязной, если любую простую замкнутую кривую, лежащую в V , можно с помощью непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя из V ;

пространственно-односвязной, если любую простую замкнутую поверхность, лежащую в V , можно с помощью непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя из V .

Например, шар односвязен с точки зрения обоих определений, шаровое кольцо — только с точки зрения первого определения, а тор («баранка») — только с точки зрения второго.

4.4. ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

4.4-1. Пределы функций и последовательностей (см. также пп.4.8-1 и 12.5-3; см. примеры в табл. 4.7-1).

(a) Функция $f(x)$ имеет (*необходимо единственный*) предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ при x , стремящемся к конечному значению $x = a$ (предел в точке a ; $f(x) \rightarrow L$ при $x \rightarrow a$), если для каждого положительного числа ε существует такое

положительное число δ , что при $0 < |x - a| < \delta$ функция $f(x)$ определена и $|f(x) - L| < \epsilon$.

Функция $f(x)$ действительного переменного x имеет (необходимо единственный) предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ при x , стремящемся к плюс бесконечности

(когда x неограниченно возрастает; $f(x) \rightarrow L$ при $x \rightarrow +\infty$), если для каждого положительного числа ϵ существует такое действительное число N , что при $x > N$ функция $f(x)$ определена и $|f(x) - L| < \epsilon$.

Если функция $f(x)$ имеет предел L , то говорят, что она стремится к L .

(b) **Последовательность** чисел (п.4.2-1) s_0, s_1, s_2, \dots ($\equiv s(n)$) имеет (необходимо единственный) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ (сходится к S), если для каждого

положительного числа ϵ существует такой номер N , что при $n > N$ выполняется неравенство $|s_n - S| < \epsilon$. Критерий сходимости последовательности см. в п.4.9-1, где рассматриваются признаки сходимости бесконечных рядов.

(с) Действительная функция $f(x)$ неограниченно возрастает (стремится к плюс бесконечности):

1. При x , стремящемся к конечному значению $x = a$ ($f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$; некоторые авторы пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$), если для каждого действительного числа M существует

такое положительное число δ , что при $0 < |x - a| < \delta$ функция $f(x)$ определена и $f(x) > M$.

2. При x , стремящемся к плюс бесконечности ($f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; некоторые авторы пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$), если для каждого действительного числа M существует такое

действительное число N , что при $x > N$ функция $f(x)$ определена и $f(x) > M$.

Аналогичное определение дается в случае последовательности. Действительное переменное x или $f(x)$ стремится к минус бесконечности ($x \rightarrow -\infty$ или $f(x) \rightarrow -\infty$), если соответственно $-x \rightarrow +\infty$ или $-f(x) \rightarrow +\infty$. В (b) и (с) устанавливается математический смысл символов $+\infty$ и $-\infty$ в системе действительных чисел (см. также пп.4.3-5 и 7.2-2).

Если $f(x) \rightarrow +\infty$ или $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow a$ (при $x \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow -\infty$), то говорят, что функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \rightarrow a$ (соответственно при $x \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow -\infty$). Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (при $x \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow -\infty$), то функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ (соответственно при $x \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow -\infty$).

4.4-2. Операции над пределами (см. также пп.4.4-6,с и 4.8-4). Если пределы в правой части нижеследующих равенств существуют, то существуют пределы и в левой части равенств и

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x)] &= \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad [\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0], \end{aligned} \right\} \quad (4.4-1)$$

где a может быть как конечным, так и бесконечным; эти правила применимы и к пределам последовательностей (п.4.4-1), а также к пределам функций нескольких переменных (п.4.4-5).

4.4-3. Асимптотические соотношения между двумя функциями (см. также п.4.8-6). Если даны две действительные или комплексные функции $f(x)$, $g(x)$ действительного или комплексного переменного x , то пишут

$$1. \quad f(x) = O[g(x)] \quad (f(x) \text{ есть } O[g(x)]);$$

$f(x)$ есть функция, не высшего порядка малости чем $g(x)$ при $x \rightarrow a$, если существует окрестность точки a , в которой при $x \neq a$ отношение $f(x)/g(x)$ ограничено.

2. $f(x) = O^*[g(x)]$; $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же порядок (функция $f(x)$ асимптотически пропорциональна $g(x)$) при $x \rightarrow a$, если предел $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ существует и отличен от нуля.

3. $f(x) \sim g(x)$; $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны (функция $f(x)$ асимптотически равна $g(x)$) при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = 1$; отсюда следует, что отношение разности $f(x) - g(x)$ к $g(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow a$.

4. $f(x) = o[g(x)]$ ($f(x)$ есть $o[g(x)]$); $f(x)$ есть функция более высокого порядка малости, чем $[g(x)]$ при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = 0$. Это иногда читают и так: «функция $f(x)$ пренебрежимо мала по сравнению с $g(x)$ » при $x \rightarrow a$.

В каждом из этих определений a может быть как конечным, так и бесконечным. Бесконечно малыми порядка 1, 2, ... при $x \rightarrow 0$ называются функции того же порядка, что и функции x, x^2, \dots при $x \rightarrow 0$. Бесконечно большими порядками 1, 2, ... эквивалентного порядка при $x \rightarrow +\infty$ называются функции того же порядка, что и функции x, x^2, \dots, e^x при $x \rightarrow +\infty$.

Асимптотические соотношения часто позволяют оценивать или приближать функцию $f(x)$ с помощью $g(x)$ в некоторой окрестности точки $x = a$. Отметим, что из $f(x) \sim g(x)$ следует, что и отношение $[f(x) - g(x)]/f(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow a$. Пишут

$$f(x) = \varphi(x) + O[g(x)], \quad \text{если} \quad f(x) - \varphi(x) = O[g(x)]$$

$$f(x) = \varphi(x) + o[g(x)], \quad \text{если} \quad f(x) - \varphi(x) = o[g(x)].$$

4.4-4. Равномерная сходимость.

(а) Функция $f(x_1, x_2)$ сходится равномерно на множестве S значений x_2 :

1. К функции $\lim_{x_1 \rightarrow a} f(x_1, x_2) = L(x_2)$, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что при $0 < |x_1 - a| < \delta$ и при всех $x_2 \in S$ функция $f(x_1, x_2)$ определена и выполняется неравенство $|f(x_1, x_2) - L(x_2)| < \varepsilon$ (δ не зависит от x_2).

2. К функции $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} f(x_1, x_2) = L(x_2)$, если для каждого положительного числа ε существует такое действительное число N , что при $x_1 > N$ и при всех $x_2 \in S$ функция $f(x_1, x_2)$ определена и выполняется неравенство $|f(x_1, x_2) - L(x_2)| < \varepsilon$.

(б) Последовательность функций $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots$ равномерно сходится на множестве S значений x к функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x),$$

если для каждого положительного числа ε существует такой номер N , что при $n > N$ и при всех $x \in S$ выполняется неравенство $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ (см. также пп. 4.6-2 и 4.8-2).

4.4-5. Пределы по совокупности переменных и повторные пределы.

(а) Если термин «окрестность» понимать в смысле, указанном в п. 4.3-5, с, то функция $f(x_1, x_2)$ имеет (необходимо единственный) предел $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2) = L$, если для каждого положительного числа ε существует такая окрестность D точки (a_1, a_2) , что для всех точек $(x_1, x_2) \in D$, исключая, быть может, точку (a_1, a_2) , функция $f(x_1, x_2)$ определена и $|f(x_1, x_2) - L| < \varepsilon$. При этом a_1 и a_2 могут быть как конечными, так и бесконечными.

Двойная последовательность s_{00}, s_{10}, \dots имеет предел $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{mn} = s$ (сходится к s), если

для каждого положительного числа ε существуют такие два номера M и N , что при $m > M$ и $n > N$ выполняется неравенство $|s_{mn} - s| < \varepsilon$. Пределы функций более чем двух переменных определяются аналогично.

(b) Если существует такое положительное число δ , что

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2) = f(a_1, x_2) \quad \text{при} \quad 0 < |x_2 - a_2| < \delta, \\ \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) = f(x_1, a_2) \quad \text{при} \quad 0 < |x_1 - a_1| < \delta \end{aligned} \right\} \quad (4.4-2)$$

и по крайней мере в одном из этих предельных процессов сходимость на указанном множестве равномерна, то все три предела

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2), \quad \lim_{x_1 \rightarrow a_1} [\lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)]$$

и

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2} [\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)]$$

существуют и равны друг другу. Аналогичные теоремы справедливы и в случае, когда a_1 и/или a_2 бесконечны.

4.4-6. Непрерывные функции.

(а) Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, непрерывна при $x = a$ (в точке a), если предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует и равен $f(a)$, т. е. если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что при $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Точно так же функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности точки (a_1, a_2, \dots, a_n) , непрерывна в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) , если

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) по x_1 , если функция $f(x_1, a_2, \dots, a_n)$ непрерывна в точке $x_1 = a_1$. Функция, непрерывная в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) по каждой из переменных x_1, x_2, \dots, x_n в отдельности, может не быть непрерывной в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) .

(b) Функция непрерывна на множестве точек (например, в интервале или в области), если она непрерывна в каждой точке этого множества. Действительная функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$, ограничена на $[a, b]$ и хотя бы по одному разу принимает каждое значение, заключенное между ее точной верхней и точной нижней границами на $[a, b]$ (п. 4.3-3), включая и эти границы. Аналогичная теорема верна и для действительной функции двух и большего числа переменных, непрерывной в ограниченной замкнутой области.

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве S , если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что для всех $x \in S$ и $X \in S$ при $|x - X| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(X)| < \varepsilon$. Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$.

(c) Если две функции f и g непрерывны в данной точке x или (x_1, x_2, \dots, x_n) , то непрерывны в этой точке и функции $f + g$, $f - g$ и fg ; если функция f не обращается в этой точке в нуль, то в этой точке непрерывна и функция f/g . Если дано, что $\lim_{x \rightarrow a} y_i(x) = A_i$ ($i = 1, 2, \dots$) и что функция $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывна в точке (A_1, A_2, \dots, A_n) , то

$$\lim_{x \rightarrow a} F(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = F(A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (4.4-3)$$

(см. также п. 4.4-2). В частности, если каждая из функций $y_i(x)$ непрерывна при $x = a$, то это верно и для $F(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$.

Предельная функция равномерно сходящейся на множестве S значений x последовательности функций $y_0(x), y_1(x), \dots$, непрерывных на S , есть функция, непрерывная на S .

4.4-7. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность.

(а) Функция $f(x)$ действительного переменного x имеет (необходимо единственный) предел

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \equiv f(a+0) = L_+$$

в точке a справа, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что при $0 < x - a < \delta$ функция $f(x)$ определена и выполняется неравенство $|f(x) - L_+| < \varepsilon$. Функция $f(x)$ имеет в точке a предел слева

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \equiv f(a-0) = L_-$$

если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что при $0 < a - x < \delta$ функция $f(x)$ определена и выполняется неравенство $|f(x) - L_-| < \varepsilon$. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, то пределы

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ существуют и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Обратно, если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, то предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует.

(б) Функция $f(x)$ непрерывна в точке a справа или слева, если соответственно $f(a+0) = f(a)$ или $f(a-0) = f(a)$. Точка разрыва первого рода действительной функции $f(x)$ есть точка a , в которой функция $f(x)$ разрывна (т. е. не непрерывна) и существуют пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$; наибольшая разность между двумя из чисел $f(a)$, $f(a+0)$ и $f(a-0)$ есть скачок функции $f(x)$ в такой точке разрыва. Точки разрыва первого рода функции $f(x)$ образуют конечное или счетное множество (п.4.3-6а).

(в) Функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на интервале I , если она непрерывна в I всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кусочно-непрерывна в области V n -мерного пространства, если она непрерывна в V всюду, за исключением, быть может, некоторого множества регулярных гиперповерхностей (регулярных кривых при $n=2$, регулярных поверхностей при $n=3$, пп.3.1-13 и 3.1-14), разбивающих V на конечное число подобластей, в каждой из которых функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет единственный односторонний предел при приближении к любой граничной точке подобласти изнутри этой подобласти.

4.4-8. Монотонные функции и функции ограниченной вариации.

(а) Действительная функция $f(x)$ действительного переменного x строго монотонна на интервале I , если она на нем определена и если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала I либо из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) < f(x_2)$ (возрастающая функция), либо же из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) > f(x_2)$ (убывающая функция). Функция $f(x)$ нестрого монотонна на I , если она определена на I и если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала I либо из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ (неубывающая функция), либо же из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) \geq f(x_2)$ (невозрастающая функция). Аналогичные определения даются для монотонных последовательностей (п.4.2-1).

(б) Действительная функция $f(x)$ действительного переменного x есть функция ограниченной вариации на интервале $[a, b]$, если существует такое положительное число M , что для всех разбиений $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ интервала $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < M.$$

Функция $f(x)$ есть функция ограниченной вариации на $[a, b]$ в том и только в том случае, если она может быть представлена в виде $f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — ограничены и не убывают на $[a, b]$ (альтернативное определение). Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, то и $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$. Функция $f(x)$ есть функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале $[a, b]$, на котором она ограничена и имеет конечное число относительных максимумов и минимумов (п.11.2-1) и точек разрыва первого рода (условия Дирихле).

Функция ограниченной вариации на $[a, b]$ ограничена на $[a, b]$ и имеет только точки разрыва первого рода (п.4.4-7).

В физических приложениях условие, чтобы $f(x)$ была функцией ограниченной вариации на каждом ограниченном промежутке, выражает тот факт, что функция $f(x)$ ограничена и что компоненты очень высокой частоты не могут существенно влиять на ее интенсивность (п.18.10-1).

4.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.5-1. Производные и дифференцирование.

(а) Пусть $y = f(x)$ — действительная функция действительного переменного x , определенная в некоторой окрестности точки x . Первая производная (производная первого порядка) функции $f(x)$ по x в точке x есть предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) \equiv y'. \quad (4.5-1)$$

В каждой точке x , в которой предел (1) существует, производная $\frac{dy}{dx} \equiv f'(x)$ есть мера скорости изменения y относительно x . Производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной (п. 17.1-1) к графику функции $y = f(x)$ (см. п.4.2-1,а) в точке x .

Соответствующие односторонние пределы (п.4.4-7,а) называются левой производной $f'_-(x)$ и правой производной $f'_+(x)$ функции $f(x)$ в точке x .

(б) Вторая, третья, ..., n -я производные (производные второго, третьего, ..., n -го порядка) функции $y = f(x)$ по x в точке x определяются соответственно формулами

$$\frac{d}{dx} f'(x) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} \equiv f''(x), \quad \frac{d}{dx} f''(x) \equiv \frac{d^3 y}{dx^3} \equiv f'''(x), \dots, \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} \equiv f^{(n)}(x), \quad (4.5-2)$$

если соответствующие пределы существуют.

(с) Операция отыскания производной $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называется дифференцированием функции $f(x)$ по x . Функция $f(x)$ дифференцируема при тех значениях x или на том множестве значений x , при которых существует производная $f'(x)$. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна. Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на промежутке I , если функция $f(x)$ непрерывна на I , а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна (п.4.4-7,с) на I . Дифференцируемая функция непрерывна.

Производные большого числа часто встречающихся функций приведены в табл. 4.5-1. Производные от комбинаций этих функций могут быть найдены с помощью правил дифференцирования из п.4.5-4.

Таблица 4.5-1

Производные часто встречающихся функций

(см. также в гл. 21 производные некоторых специальных функций)

(a)

$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(r)}(x)$
x^a	ax^{a-1}	$a(a-1)(a-2)\dots(a-r+1)x^{a-r}$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$	$a^x (\ln a)^r$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{x^r}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{x^r \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin\left(x + r \frac{\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos\left(x + r \frac{\pi}{2}\right)$

(b)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
		x^2	$x^2(1 + \ln x)$

4.5-2. Частные производные.

(а) Пусть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — действительная функция переменных x_1, x_2, \dots, x_n , определенная в некоторой окрестности точки (x_1, x_2, \dots, x_n) . **Частная производная (первого порядка) функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по x_1 в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) есть предел**

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} f \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.5-3)$$

Производная $\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{x_1, x_2, \dots, x_n} \equiv f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в каждой точке (x_1, x_2, \dots, x_n) , в которой существует предел (3), есть мера скорости изменения y относительно x_1 при фиксированных значениях остальных независимых переменных. Частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ определяются аналогично. Каждая частная производная $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ может быть найдена посредством дифференцирования функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по x_k , если остальные $n-1$ независимых переменных рассматривать как постоянные параметры.

(б) Частные производные более высокого порядка функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ определяются формулами

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2} \equiv f''_{x_k x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial y}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} \equiv f''_{x_i x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial y}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \equiv f'''_{x_i x_j x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{и т. д.,}$$

если соответствующие пределы существуют. В каждом случае число введенных дифференцирований есть порядок соответствующей частной производной. Отметим, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_i} \quad (i \neq k), \quad (4.5-4)$$

если: 1) производная $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k}$ существует в некоторой окрестности точки (x_1, x_2, \dots, x_n) и непрерывна в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) и 2) производная $\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_i}$ существует в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) .

4.5-3. Дифференциалы.

(а)* Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x , и пусть dx — приращение независимого переменного x (дифференциал независимого переменного x). Функция $y = f(x)$ имеет в точке x (первый) дифференциал, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y \equiv f(x + dx) - f(x) = A dx + o(dx),$$

где A не зависит от dx . В этом случае (первым) дифференциалом функции $y = f(x)$ называется **главная линейная часть** приращения функции $dy = A dx$. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференциал в том и только в том случае, если она имеет в этой точке (первую) производную; ее дифференциал равен $dy \equiv df = \frac{dy}{dx} dx \equiv f'(x) dx$. Так что

$$\Delta y \equiv f(x + dx) - f(x) = f'(x) dx + o(dx) = dy + o(dx).$$

Подобным же образом пусть функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переменных x_1, x_2, \dots, x_n определена в некоторой окрестности точки (x_1, x_2, \dots, x_n) , и пусть dx_1, dx_2, \dots, dx_n — приращения независимых переменных (дифференциалы независимых переменных) x_1, x_2, \dots, x_n . Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) (первый) дифференциал (полный дифференциал), если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta y &\equiv f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n + o(\rho), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}$ и A_1, A_2, \dots, A_n не зависят от dx_1, dx_2, \dots, dx_n . В этом случае (первым) дифференциалом (полным дифференциалом) функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется главная линейная часть приращения функции

$$dy = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n.$$

Отметим: 1) Если функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) дифференциал, то она имеет в этой точке все частные производные первого порядка. 2) Если функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) все непрерывные частные производные первого порядка, то она имеет в этой точке (первый) дифференциал. (Из одного факта существования всех частных производных еще не следует существования полного дифференциала.) Дифференциал функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если он существует, имеет вид

$$dy \equiv df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (4.5-5)$$

где производные берутся в рассматриваемой точке.

Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) , если она имеет в этой точке (первый) дифференциал. В этом случае

$$\begin{aligned} \Delta y &\equiv f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + o(\rho) = dy + o(\rho). \end{aligned}$$

Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема на множестве точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывно дифференцируема на некотором множестве, если на этом множестве все частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ существуют и непрерывны. Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется кусочно-гладкой в области V , если она непрерывна в V , а ее частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ кусочно-непрерывны в V (п.4.4-7,с).

(b) Дифференциал каждого независимого переменного рассматривается как постоянная, так что $d^2x \equiv d(dx) \equiv d^2x \equiv d(d^2x) \equiv \dots \equiv 0$. Дифференциал зависимого переменного есть функция от независимого переменного или переменных. Второй, третий, ... дифференциалы нужное число раз дифференцируемой функции находятся последовательным дифференцированием первого дифференциала, например:

$$d^2f(x) \equiv d(df) \equiv d\left(\frac{dy}{dx} dx\right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} dx^2, \quad (4.5-6)$$

$$d^2f(x_1, x_2) \equiv d(df) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2, \quad (4.5-7)$$

$$d^k f(x_1, x_2) \equiv \sum_{r=0}^k C_r^k \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{r-k} \partial x_2^k} dx_1^{r-k} dx_2^k. \quad (4.5-8)$$

Отметим также

$$\begin{aligned} d^2f[u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)] &\equiv d(df) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} dx^2 \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^n \left(d \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right) du_k + \frac{\partial f}{\partial u_k} d^2u_k \right) \equiv \\ &\equiv \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} \frac{du_i}{dx} \frac{du_k}{dx} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{d^2u_k}{dx^2} \right) dx^2. \end{aligned} \quad (4.5-9)$$

(е) Любая функция от dx_1, dx_2, \dots, dx_n того же порядка, что и $dx_1^{r_1} dx_2^{r_2} \dots dx_n^{r_n}$ при $dx_1 \rightarrow 0, dx_2 \rightarrow 0, \dots, dx_n \rightarrow 0$ есть бесконечно малая порядка $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ (п. 4.4-3). В частности, r -й дифференциал $d^r f$ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если он существует и не равен нулю в данной точке, есть бесконечно малая порядка r .

4.5-4. Правила дифференцирования.

(а) В табл. 4.5-2 перечислены наиболее важные правила дифференцирования. Формулы из табл. 4.5-2, а и б применимы и при вычислениях частных производных, если в каждом случае вместо $\frac{d}{dx}$ писать $\frac{\partial}{\partial x}$. Так, если $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$),

то

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5-10)$$

Умножая каждую формулу из табл. 4.5-2, а и б на dx или на dx^2 , получаем аналогичные правила для вычисления полных дифференциалов (см. также п. 4.5-3); так

$$d(u+v) = du+dv, \quad d(uv) = v du + u dv. \quad (4.5-11)$$

Правила дифференцирования интегралов указаны в табл. 4.6-1, а дифференцирования бесконечных рядов — в п. 4.8-4, с.

4.5-5. Однородные функции. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть однородная функция степени r относительно аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , если $f(ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \equiv a^r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (см. также п. 1.4-3, а). Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая однородная функция степени r , то

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = r f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.5-12)$$

(теорема Эйлера об однородных функциях).

4.5-6. Якобианы и функциональная зависимость (см. также пп. 4.6-12, 6.2-3, б и 16.1-2). Если функции

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5-13)$$

непрерывно дифференцируемы в некоторой области n -мерного пространства и если якобиан или функциональный определитель

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right] \quad (4.5-14)$$

отличен в ней от нуля, то уравнения преобразования (13) (см. также п. 14.1-3) в достаточно малой окрестности каждой точки этой области определяют взаимно однозначное соответствие этой окрестности и множества точек (y_1, y_2, \dots, y_n) , образованных значениями функций (13), принимаемыми в этой

Правила дифференцирования

Таблица 4.5-2

(п. 4.5-4; в каждом случае существование соответствующих производных предполагается)

(а) Основные правила *):

$$\frac{d}{dx} f[u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)] = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{du_m}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} f[u(x)] = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f[u(x)] = \frac{u^2 f}{du^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

(б) Сумма, произведение и частное. Логарифмическое дифференцирование:

$$\frac{d}{dx} [u(x) + v(x)] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d}{dx} [zu(x)] = \alpha \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] = \frac{1}{v^2} \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \quad [v(x) \neq 0],$$

$$\frac{d}{dx} \ln y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

З а м е ч а н и е. Чтобы продифференцировать функцию вида $y = \frac{u_1(x)u_2(x)\dots}{v_1(x)v_2(x)\dots}$, может оказаться полезным найти сначала ее логарифмическую производную.

$$\frac{dr}{dx^r} (\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{dr u}{dx^r} + \beta \frac{dr v}{dx^r}, \quad \frac{dr}{dx^r} (uv) = \sum_{k=0}^r C_r^k \frac{dr-k u}{dx^{r-k}} \frac{dk v}{dx^k}.$$

(с) Обратная функция. Если функция $y = y(x)$ имеет обратную функцию $x = x(y)$ **) и $\frac{dy}{dx} \equiv y_x \neq 0$, то

$$\frac{dx}{dy} \equiv x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad x''_y = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3}.$$

(д) Неявная функция (см. также п.4.5-7). Если функция задана неявно должным образом дифференцируемым соотношением $F(x, y) = 0$, где $F'_y \neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{F'^3_y} (F''_{xx} F'^2_y - 2F''_{xy} F'_x F'_y + F''_{yy} F'^2_x).$$

(е) Функция, заданная с помощью параметра t . Если даны $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} \neq 0$, $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy}{dt}$, $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$, $\ddot{y}(t) \equiv \frac{d^2 y}{dt^2}$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{[\dot{x}(t)]^3}.$$

*) В первой формуле (а) при $m > 1$ следует предполагать дифференцируемость функции $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ в соответствующей точке, для чего достаточно непрерывности в этой точке всех ее первых частных производных: см. п.4.5-3.

**) Если функция $y(x)$ на интервале $a < x < b$ строго монотонна и непрерывна, то на замкнутом интервале с концами $y(a)$ и $y(b)$ она имеет обратную функцию $x(y)$ также непрерывную. Если, кроме того, функция $y(x)$ в точке x_0 , где $a < x_0 < b$, имеет производную $y'(x_0) \neq 0$, то функция $x(y)$ в соответствующей точке $y_0 = y(x_0)$ также имеет производную и справедлива первая из нижеследующих формул. Если функция $y(x)$ имеет вторую производную, то имеет место и вторая из этих формул.

окрестности. Если дифференциалы

$$dy_i \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5-15)$$

линейно зависимы в данной области (п.1.9-3), то якобиан (14) в этой области тождественно равен нулю. Если в V нет точки, в которой все элементы якобиана (14) одновременно обращаются в нуль, то якобиан (14) тождественно равен нулю в области V в том и только в том случае, когда у каждой точки этой области существует такая окрестность, в которой функции y_i связаны некоторым непрерывно дифференцируемым соотношением.

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0,$$

где производные $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ не все одновременно равны нулю. В этом случае говорят, что функции (13) функционально зависимы в этой окрестности (см. также п.4.5-7,с).

4.5-7. Неявные функции.

(а) Если функция $y = y(x)$ задана неявно должным образом дифференцируемым соотношением $F(x, y) = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{F'^3_y} (F''_{xy} F'^2_y - 2F''_{xy} F'_x F'_y + F''_{yy} F'^2_x) \quad (F'_y \neq 0). \quad (4.5-16)$$

(б) Если m функций $y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots$, $y_m = y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n заданы неявно m соотношениями

$$F_i(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4.5-17)$$

где F_i — непрерывно дифференцируемые функции в рассматриваемой области, то

1. Дифференциалы dy_i и dx_i связаны m линейными уравнениями $dF_i = 0$.

2. Для каждого значения $k = 1, 2, \dots, n$ m производных $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ могут быть получены по правилу Крамера (п.1.9-2) из m линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4.5-18)$$

если только

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \equiv \det \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right] \neq 0 \quad (4.5-19)$$

для рассматриваемых значений x_1, x_2, \dots, x_n . Дифференцируя уравнения (18), получаем соотношения, дающие производные более высокого порядка функций y_j .

В частности, два непрерывно дифференцируемых соотношения $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ дают

$$dx : dy : dz = \left| \begin{array}{cc} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{array} \right|, \quad (4.5-20)$$

*Если, например, первый из определителей справа отличен от нуля, то данные соотношения определяют y и z как функции от x (см. (с)) и уравнения (20) позволяют найти производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. *

(е) Теорема существования неявных функций (см. также п.4.2-1, б). Пусть дана точка $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m)$, в которой выполняются соотношения (17) и (19). Если все F_i и $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ непрерывны в некоторой окрестности D точки P , то соотношений (17) в некоторой окрестности точки (x_1, x_2, \dots, x_n) определяют y_j как непрерывные функции от x_1, x_2, \dots, x_n . Если, кроме того, в D непрерывны и все производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, то в указанной окрестности точки (x_1, x_2, \dots, x_n) существуют и непрерывны производные $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$. Если якобиан (19) в D тождественно равен нулю, то левые части соотношений (17) в некоторой окрестности точки P функционально зависимы (п.4.5-6), так что y_j не определены однозначно.

4.6. ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

4.6-1.* Определенные интегралы (интеграл Римана).

(а) Пусть действительная функция $f(x)$ определена и ограничена на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$. Разобьем этот интервал на n частичных интервалов точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Выберем в каждом из частичных интервалов по произвольной точке

$$\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i) \text{ и составим сумму (интегральная сумма)} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Если существует предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала разбиения: $\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой в смысле Римана на интервале $[a, b]$. Предел этой суммы

$$I = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx, \quad (4.6-1)$$

называется определенным интегралом от $f(x)$ по интервалу $[a, b]$ в смысле Римана (интеграл Римана). Это определение означает, что для любого положительного числа ε существует такое число $\delta > 0$, что при любом разбиении интервала $[a, b]$ на частичные интервалы, длины которых меньше δ :

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$$

и при любом выборе промежуточных точек ξ_i , выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а a и b — *пределами интегрирования*. В табл. 4.6-1 перечислены важнейшие свойства определенных интегралов.

Если функция $y = f(x)$ на интервале $[a, b]$ неотрицательна, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ выра-

жает площадь, ограниченную кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$. Если $f(x) < 0$, то этот интеграл выражает эту площадь, взятую со знаком минус.

(б) Функция $f(x)$, ограниченная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$, интегрируема на нем в смысле Римана в том и только в том случае, если она непрерывна почти всюду на $[a, b]$ (п.4.6-14, б). Это, в частности, верно: 1) если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) если функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ конечное или счетное множество точек разрыва; 3) если функция $f(x)$ монотонна на $[a, b]$; 4) если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации на $[a, b]$ (см. также п.4.4-8). Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема и на каждом интервале, содержащемся в $[a, b]$.

Таблица 4.6-1

Свойства интегралов

(а) Элементарные свойства. Если интегралы существуют, то

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx^*), \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b [u(x) + v(x)] dx = \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx, \quad \int_a^b \alpha u(x) dx = \alpha \int_a^b u(x) dx.$$

(б) Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на интервале $a < x < b$, то

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx,$$

или

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

(в)* Замена переменного (интегрирование подстановкой). Если функция $x=x(u)$ непрерывно дифференцируема на интервале $a < u < \beta$, а функция $f(x)$ непрерывна на интервале $m < x < M$, где m — точная нижняя, а M — точная верхняя грань функции $x(u)$ на интервале $\alpha < u < \beta$, то

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)] \frac{dx}{du} du.$$

(д)* Дифференцирование по параметру. Если функция $f(x, \lambda)$ и ее частная производная $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda)$ непрерывны на множестве $a < x < b$, $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$, а функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ дифференцируемы на интервале $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ и удовлетворяют на нем условиям $a < u(\lambda) < b$, $a < v(\lambda) < b$, то при $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx,$$

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x, \lambda) dx = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx + f(v(\lambda), \lambda) \frac{dv}{d\lambda} - f(u(\lambda), \lambda) \frac{du}{d\lambda}$$

(правило Лейбница).

Первая формула остается в силе и для несобственных интегралов, если предположить, что интеграл $\int_a^b f(x, \lambda) dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx$ равномерно сходится на интервале $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$. (При этом функция $f(x, \lambda)$ и ее производная $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda)$ предполагаются непрерывными лишь на множестве $a < x < b$, $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ или на множестве $a < x < b$, $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$.)

* Это равенство следует рассматривать как определение интеграла $\int_a^b f(x) dx$ при $b < a$. Из него также вытекает, что $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Т а б л и ц а 4.6-1 (продолжение)

Второй случай часто можно свести к первому подходящей заменой переменных. Отметим также

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^\lambda f(x, \lambda) dx = \frac{1}{\lambda - a} \int_a^\lambda \left[f(x, \lambda) + (\lambda - a) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx.$$

(е) Неравенства (см. также п.4.6-19). Если интегралы существуют, то (при $a < b$) из $f(x) < g(x)$ на $[a, b]$ следует

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$$

Если $|f(x)| < M$ на ограниченном интервале $[a, b]$, то из существования интеграла $\int_a^b f(x) dx$ вытекает и существование интеграла $\int_a^b |f(x)| dx$ и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx < M(b-a).$$

4.6-2. Несобственные интегралы.

(а) Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом ограниченном интервале, содержащемся в (a, b) , то понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ (п.4.6-1) можно расширить так, что оно станет применимым и когда

1. Функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности одного из пределов интегрирования a или b (см. также п.4.6-2, б).

2. Интервал (a, b) не ограничен. Так, если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом конечном интервале $[a, X]$, где $a < X < b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{X \rightarrow b-0} \int_a^X f(x) dx. \quad (4.6-2a)$$

и, в частности, при $b = \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx. \quad (4.6-2b)$$

Точно так же

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{X \rightarrow a+0} \int_X^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^b f(x) dx. \quad (4.6-2c)$$

Каждый несобственный интеграл, определенный таким образом, существует или **сходится**, если существует предел в правой части равенства.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ сходится абсолютно, если сходится соответствующий несобственный интеграл от $|f(x)|$. Из абсолютной сходимости следует сходимость (см. также пп. 4.6-15, е и 4.9-3). Несобственный интеграл, который сходится, но не абсолютно, называется условно сходящимся.

(б)* Правила интегрирования из табл. 4.6-1 применимы к должным образом сходящимся несобственным интегралам. Если функция $f(x)$ определена в ограниченном или неограниченном интервале (a, b) или $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq b$, не ограничена в любой окрестности u_i каждой точки $x = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) а вне объединения окрестностей u_1, u_2, \dots, u_n ограничена, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ можно определить как сумму несобственных интегралов вида (2).

Например, если $c_1 = a$ и $c_2 = b$ и пределы в правой части равенства существуют, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \int_{x_1}^d f(x) dx + \lim_{x_2 \rightarrow b-0} \int_d^{x_2} f(x) dx, \quad (4.6-3)$$

где d — произвольная точка интервала (a, b) .

Если $a = -\infty$ и $b = +\infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \int_{x_1}^d f(x) dx + \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \int_d^{x_2} f(x) dx. \quad (4.6-4)$$

Если $f(x)$ не ограничена в окрестности точки c , лежащей внутри интервала (a, b) то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x_1 \rightarrow c-0} \int_a^{x_1} f(x) dx + \lim_{x_2 \rightarrow c+0} \int_{x_2}^b f(x) dx \quad (a < c < b). \quad (4.6-5)$$

В случае, если интегралы (4) и (5) не существуют, могут все же существовать соответствующие главные значения интеграла по Коши

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right]; \quad (4.6-6)$$

если какой-либо из интегралов (4) и (5) существует, он necessarily равен своему главному значению.

(в) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ равномерно сходится на множестве S значений y , если соответствующий определенный интеграл сходится к своему пределу (пп. 4.6-2, а и б) равномерно на S (п. 4.4-4). Если $\int_a^b f(x, y) dx$ при каждом y из интервала $y_0 < y < y_1$ есть интеграл вида (2а) и если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $a \leq x < b, y_0 < y < y_1$, а интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ равномерно сходится в интервале $y_0 < y < y_1$, то $\int_a^b f(x, y) dx$ есть непрерывная функция от y в этом интервале (теорема о непрерывности). Аналогичные теоремы верны и для интегралов вида (2б) и (2с).

(d) Признаки сходимости и равномерной сходимости перечислены в пп. 4.9-3 и 4.9-4.

4.6-3. Среднее значение. Среднее значение функции $f(x)$ на интервалах $[a, b]$, $[0, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$ по определению соответственно равно

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^x f(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^x f(x) dx, \quad (4.6-7)$$

если эти величины существуют.

4.6-4. Неопределенные интегралы. Функция $f(x)$ имеет в интервале $[a, b]$ неопределенный интеграл $\int f(x) dx$, если существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$. В этом случае функция $F(x)$ однозначно определена в $[a, b]$ с точностью по произвольной аддитивной постоянной C (постоянной интегрирования; см. также п.9.1-2); любая такая функция $F(x)$ называется первообразной (примитивной) функции $f(x)$ на $[a, b]$. Полагают

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (a \leq x \leq b). \quad (4.6-8)$$

Заметим, что разность $F(x) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^x$ при $a \leq x \leq b$ определена однозначно.

Отметим также, что

$$\int [\alpha u(x) + \beta v(x)] dx \equiv \alpha \int u(x) dx + \beta \int v(x) dx, \quad (4.6-9)$$

$$\int u(x) v'(x) dx \equiv u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx, \quad (4.6-10)$$

если эти неопределенные интегралы существуют (см. также табл. 4.5-2 и 4.6-1).

4.6-5. Основная теорема интегрального исчисления. Если $f(x)$ — функция, ограниченная и интегрируемая на интервале $[a, b]$ и если существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^x f(\xi) d\xi = F(x) \Big|_a^x = F(x) - F(a) \quad (a \leq x \leq b). \quad (4.6-11)$$

В частности, это верно, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. При этом

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (4.6-12)$$

Более общее утверждение: если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^x f(\xi) d\xi$ является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, и для почти всех x из $[a, b]$ (п.4.6-14, б) имеет место равенство (12).

З а м е ч а н и е. Основная теорема интегрального исчисления дает возможность вычислять определенные интегралы, обращая процесс дифференцирования.

4.6-6. Методы интегрирования

(а) **Интегрирование** есть операция отыскания (определенного или неопределенного) интеграла от данной подынтегральной функции $f(x)$. Определенные интегралы можно вычислять непосредственно как пределы интегральных сумм (численное интегрирование, пп. 20.6-2 и 20.6-3) или путем вычисления

вычетов (п.7.7-3). Чаще пытаются найти неопределенный интеграл и затем пользуются формулой (11). Чтобы найти неопределенный интеграл, данную подынтегральную функцию $f(x)$ нужно с помощью «правил интегрирования», перечисленных в табл. 4.6-1, а, б, с, представить в виде суммы известных производных.

В дальнейшем перечисляются методы интегрирования, применимые к некоторым специальным типам подынтегральных функций. Существуют раз-ной степени полноты таблицы определенных и неопределенных интегралов (см., например, [4.6])

(b) Интегрирование многочленов:

$$\int (a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \dots + a_0x^n) dx = \\ = a_n x + \frac{1}{2} a_{n-1}x^2 + \frac{1}{3} a_{n-2}x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} a_0x^{n+1} + C. \quad (4.6-13)$$

(с) Интегрирование рациональных функций. Методы, описанные в пп.1.7-2 и 1.7-4, сводят интегрирование каждой рациональной функции к интегрированию суммы многочлена (п.4.6-6, б) и некоторого числа элементарных дробей (1.7-5) и/или (1.7-6). Элементарные дроби последовательно интегрируются с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-x_1)^m} &= \begin{cases} -\frac{1}{(m-1)(x-x_1)^{m-1}} + C & (m \neq 1), \\ \ln|x-x_1| + C & (m = 1); \end{cases} \\ \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + \omega^2]} &= \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\omega} + C; \\ \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + \omega^2]^{m+1}} &= \frac{x-a}{2m\omega^2[(x-a)^2 + \omega^2]^m} + \frac{2m-1}{2m\omega^2} \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + \omega^2]^m}; \\ \int \frac{x dx}{[(x-a)^2 + \omega^2]^{m+1}} &= \frac{a(x-a) - \omega^2}{2m\omega^2[(x-a)^2 + \omega^2]^m} + \frac{(2m-1)a}{2m\omega^2} \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + \omega^2]^m}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6-14)$$

(d) Функции, интегрирование которых с помощью замены переменных сводится к интегрированию рациональных функций (табл. 4.6-1, с).

1. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, то полагают $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, так что

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}. \quad (4.6-15)$$

2. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, то полагают $u = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, так что

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2}. \quad (4.6-16)$$

З а м е ч а н и е. Если $f(x)$ — рациональная функция от $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ и $\operatorname{tg} x$ (или от соответствующих гиперболических функций), то вычисления упростятся, если сделать замену $u = \operatorname{tg} x$ (или $u = \operatorname{th} x$).

3. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и либо от $\sqrt{1-x^2}$, либо от $\sqrt{x^2-1}$, то задача сведется к случаю 1 или 2, если соответственно сделать подстановку $x = \cos v$ или $x = \operatorname{ch} v$.

4. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и от $\sqrt{x^2+1}$, то полагают $u = x + \sqrt{x^2+1}$, так что

$$x = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right), \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \quad dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du, \quad (4.6-17)$$

5. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2+bx+c}$, то задача сведется либо к случаю 3 ($b^2-4ac < 0$), либо к случаю 4 ($b^2-4ac > 0$), если сделать подстановку

$$v = \frac{2ax+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}}, \quad x = \frac{v \sqrt{|ac-b^2|} - b}{2a}. \quad (4.6-18)$$

6. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и от $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, причем $ad-bc \neq 0$, то в качестве новой переменной берут u .

7. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x , $\sqrt{ax+b}$ и $\sqrt{cx+d}$, где $a \neq 0$, то в качестве новой переменной берут $u = \sqrt{ax+b}$.

В различных специальных случаях применяют многочисленные другие подстановки

(е) Интегралы от функций вида

$$\begin{aligned} x^n e^{ax}, \quad x^n \ln x, \quad x^n \sin x, \quad x^n \cos x \quad (n \neq -1); \\ \sin^n x \cos^m x \quad (n+m \neq 0), \quad e^{ax} \sin^n x, \quad e^{ax} \cos^n x \end{aligned}$$

вычисляют с помощью интегрирования по частям (табл. 4.6-1, б), применяя его, если нужно, несколько раз.

(ф) Многие интегралы нельзя выразить в виде конечных сумм, содержащих только алгебраические, показательные и тригонометрические функции и функции, им обратные. В этом случае подынтегральную функцию можно разложить в бесконечный ряд (пп. 4.10-4, 4.11-4, 15.2-8) или же прибегнуть к численному интегрированию. В гл. 21 можно найти

примеры «новых» функций от x , определяемых как интегралы вида $\int_a^x f(\xi) d\xi$ или $\int_a^x f(x, \eta) d\eta$.

4.6-7. Эллиптические интегралы. Если $f(x)$ — рациональная функция от x и от $\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}$, то $\int_a^b f(x) dx$ называется эллиптическим интегралом; можно исключить тривиальный случай, когда уравнение

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

имеет кратные корни. Каждый эллиптический интеграл можно выразить через элементарные функции и нормальные эллиптические интегралы (п. 21.6-5); значения последних приведены в таблицах.

4.6-8. Кратные интегралы (см. также пп. 4.6-11, 4.6-12 и 4.6-13).

(а) Пусть функция $f(x, y)$ кусочно-непрерывна (п. 4.4-7) в ограниченной замкнутой области D , определяемой как условиями $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$,

так и условиями $\alpha \leq y \leq \beta$, $\gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y)$, где $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\gamma_1(y)$, $\gamma_2(y)$ — кусочно-непрерывные функции в указанных интервалах. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y) dx &\equiv \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \\ &= \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.6-19)$$

Аналогичные теоремы справедливы для тройных, четырехкратных и т. д. интегралов.

Пример. Если D — область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$, и функция $f(x, y) = c$ есть постоянная, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} c dy = 4c \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi c.$$

(б) Если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $a < x < +\infty$, $z < y < \beta$, и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ равномерно сходится на интервале $\alpha < y < \beta$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy. \quad (4.6-20)$$

Аналогичные теоремы верны для несобственных интегралов других типов.

4.6-9.* Длина дуги спрямляемой кривой (см. также пп. 6.2-3, 6.4-3 и 17.2-1). Пусть C — дуга непрерывной кривой, лежащая в конечной части плоскости или пространства. *Длиной $S(C)$ этой дуги называется предел длины ломаной, вписанной в эту дугу, при условии, что длина наибольшего звена этой ломаной стремится к нулю. Если указанный предел существует, то дуга называется спрямляемой.*

Для регулярной кривой на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве, описываемой в прямоугольных декартовых координатах уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} \text{или} \\ x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{на плоскости} \\ x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad \text{в пространстве} \end{array} \right\} \quad (4.6-21)$$

(п. 3.1-13), длина бесконечно малой дуги, соответствующей промежутку $[t, t + dt]$, есть элемент дуги

$$ds \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{dx^2 + dy^2} \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \equiv \frac{ds}{dt} dt \\ \text{на плоскости,} \\ \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \equiv \frac{ds}{dt} dt \\ \text{в пространстве.} \end{array} \right. \quad (4.6-22)$$

Знак корня выбирается обычно так, чтобы производная $s'(t)$ была ≥ 0 . Длина

дуги $s(C)$ кривой, соответствующей конечному интервалу $[t_0, t]$, равна

$$s = s(C) = \int_0^t ds = \int_0^t \frac{ds}{dt} dt = s(t). \quad (4.6-23)$$

Длина дуги $s(C)$ есть геометрический объект, не зависящий от системы координат и от выбранного для описания кривой параметра t . В пп.6.2-3 и 6.4-3 приведены формулы, выражающие ds (а значит, и $s'(t)$) в криволинейных координатах.

Длина дуги $s(C)$ существует, если функции (21) являются на $[t_0, t]$ функциями ограниченной вариации; в этом случае элемент ds определен почти всюду (п.4.6-14, б) на C . Если C — регулярная кривая спрямляема.

4.6-10. Криволинейные интегралы (см. также пп.5.4-5, 6.2-3 и 6.4-3, где введены векторные обозначения и используются криволинейные координаты). Для данной спрямляемой дуги C , описываемой при $a \leq t \leq b$ уравнениями (21), **криволинейный интеграл** $\int_0^m f(x, y, z) ds$ от ограниченной функции $f(x, y, z)$ по определению равен

$$\int_0^m f(x, y, z) ds = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] \Delta s_i,$$

где

$$\Delta s_i = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}$$

$$(a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b; t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, i = 1, 2, \dots, m), \quad (4.6-24a)$$

если предел существует (см. также п.4.6-1). Криволинейный интеграл (24a) можно вычислить (или непосредственно определить) как интеграл по t :

$$\int_0^m f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt, \quad (4.6-24b)$$

где элемент дуги ds находится из (22). Опуская в (24) члены, относящиеся к z , получаем криволинейный интеграл для кривой, расположенной на плоскости Oxy . Несобственные криволинейные интегралы определяются по способу п.4-6-2.

4.6-11. Площади и объемы (см. также пп.5.4-6, 5.4-7, 6.2-3, 6.4-3 и 17.3-3, где введены векторные обозначения и используются криволинейные координаты).

(а) Пусть S — ограниченная замкнутая область на евклидовой плоскости. Если точная верхняя граница множества площадей всех многоугольников, содержащихся в S , и точная нижняя граница множества площадей всех многоугольников, содержащих S , равны, то область называется **квადрируемой** (измеримой по Жордану), а общее значение этих границ называется **площадью A** области S . В частности, область S , ограниченная простой замкнутой регулярной кривой, **квадрируема**. Объем U ограниченной замкнутой области V в трехмерном евклидовом пространстве определяется аналогично.

Площадь A ограниченной регулярной поверхности S (п.3.1-14) определяется следующим образом. Разобьем S на конечное число частей; в каждой части выберем произвольную точку и ортогонально спроектируем эту часть на касательную плоскость к поверхности в выбранной

точке (п.17.3-2). Площадь поверхности A есть предел (если он существует) суммы площадей полученных таким образом проекций, когда диаметр наибольшей из рассматриваемых частей стремится к нулю.

* **Диаметром** множества E в метрическом пространстве C (п.12.5-2), в частности в евклидовом пространстве, называется точная верхняя граница расстояний между любыми двумя точками множества E . *

(b) Площади и объемы можно вычислять (или даже непосредственно определять) как двойные или тройные интегралы в соответствующих координатах:

$$A = \int_S dA = \iint_S dx dy \text{ в евклидовой плоскости,} \quad (4.6-25)$$

$$U = \int_V dv = \iiint_V dx dy dz \text{ в евклидовом пространстве.} \quad (4.6-26)$$

Площади и объемы не зависят от выбора системы координат. В криволинейных координатах x^1, x^2, x^3 (п.6.2-1) ¹⁾

$$U = \int_V [dV = \iiint_V \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3] \quad (4.6-27)$$

(см. также пп.4.6-13, 6.2-3 и 6.4-3).

В криволинейных координатах u, v на плоскости или поверхности (п.3.1-14)

$$A = \int_S dA = \iint_S \sqrt{a(u, v)} du dv, \quad (4.6-28)$$

где $a(u, v)$ — функция, определяемая в п.17.3-3, с.

(c) Простые частные случаи. Площадь плоской области, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$, и двумя кривыми $y = g_1(x)$ и $y = g_2(x)$, причем $g_1(x) <$

$< g_2(x)$ при $a < x < b$, равна $\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx$ ($A > 0$). Площадь плоской области, ограниченной простой замкнутой кривой C , описываемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ или уравнением $r = r(\varphi)$ (п.2.1-8), где функции удовлетворяют должным условиям, равна

$$A = \frac{1}{2} \oint_C \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \text{ или } A = \frac{1}{2} \oint_C r^2(\varphi) d\varphi, \quad (4.6-29)$$

где символ \oint указывает, что интегрирование производится по замкнутой кривой. $A > 0$, если обход кривой C совершается против часовой стрелки.

Площадь поверхности A , образованной вращением кривой $y = f(x) > 0$ ($a < x < b$) вокруг оси Ox и объем U , ограниченный этой поверхностью, равны

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad U = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (4.6-30)$$

4.6-12. Интегралы по поверхности и по объему (см. также пп.5.4-6, 5.4-7, 6.2-3 и 6.4-3, где введены векторные обозначения и рассматриваются криволинейные координаты). Интегралы по поверхности и интегралы по объему можно определить как пределы сумм по способу пп.4.6-1 и 4.6-10. Их можно также ввести непосредственно как двойные и тройные интегралы с помощью элементов площади и объема, определенных в п.4.6-11.

Интеграл по поверхности от кусочно-непрерывной функции $f(u, v)$ по удовлетворяющей должным условиям поверхности S с криволинейными

¹⁾ Здесь 1, 2, 3 — не показатели степени, а индексы.

координатами u, v равен

$$\int_S f(u, v) dA = \iint_S f(u, v) \sqrt{a(u, v)} du dv. \quad (4.6-31)$$

Сюда в качестве частных случаев входят и интегралы по плоским областям (где, в частности, возможен и случай $u = x, v = y, \sqrt{a(u, v)} \equiv 1$).

Интеграл по объему от кусочно-непрерывной функции

$$f(x, y, z) = f[x(x^1, x^2, x^3), y(x^1, x^2, x^3), z(x^1, x^2, x^3)]$$

по ограниченной области V равен

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_V f[x(x^1, x^2, x^3), y(x^1, x^2, x^3), z(x^1, x^2, x^3)] \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (4.6-32)$$

Несобственные интегралы по поверхности или по объему (неограниченные функции или области) определяются по способу п.4.6-2. **Формулы, связывающие интегралы по поверхности и интегралы по объему**, рассматриваются в пп.5.6-1 и 5.6-2. Отметим частные случаи этих формул, связывающие криволинейные интегралы и интегралы по плоской области (C — граница области S ; обход C совершается против часовой стрелки):

$$\left. \begin{aligned} \int_S \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dA &= \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &\quad \text{(формула Грина),} \\ \int_S (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dA &= \oint_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &\quad \text{(двумерная 2-я формула Грина),} \end{aligned} \right\} \quad (4.6-33)$$

где

$$\nabla^2 v(x, y) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} ds \equiv \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx.$$

4.6-13. Замена переменных в интегралах по объему и по поверхности. Если с помощью непрерывно дифференцируемого преобразования координат

$$x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), x^3 = x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3),$$

$$\left[\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)} \neq 0 \right]$$

внести новые координаты $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ (см. также п.6.2-1), то интеграл по объему (32) можно переписать в новых координатах:

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \iiint_V \varphi(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \iiint_V \varphi(x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)) \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)} d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3. \end{aligned} \quad (4.6-34)$$

Интегралы по поверхности преобразуются аналогично (см. также п.17.3-3).

4.6-14. Мера Лебега. Измеримые функции.

(а) Мера точечного множества. Внешняя мера Лебега $m_e[S]$ произвольного ограниченного точечного множества S на прямой есть точная нижняя граница (п.4.3-3) суммы длин конечного или счетного множества интервалов, покрывающих S . Внутренняя мера Лебега $m_i[S]$ множества S есть разность между длиной $b-a$ любого ограниченного интервала $[a, b]$, содержащего S , и внешней мерой дополнения множества S до $[a, b]$ (п.4.3-2,а). S есть измеримое множество с мерой Лебега $m[S]$, если $m_e[S] = m_i[S] = m[S]$ (конструктивное определение меры Лебега). Неограниченное множество S на прямой измеримо, если для всех $X > 0$ измеримо пересечение $(-X, X) \cap S$. При этих предположениях по определению полагают

$$m[S] = \lim_{X \rightarrow +\infty} m[(-X, X) \cap S];$$

мера $m[S]$ может быть как конечной, так и бесконечной.

Рассматривают и более общее определение: мера $M[S]$, определенная на подходящем классе (вполне аддитивной булевой алгебре, п.12.8-4) точечных множеств S , есть функция множества со свойствами

$$M[S] > 0, \quad M[\emptyset] = 0 \quad (4.6-35)$$

и для каждого конечного или счетного множества попарно непересекающихся точечных множеств S_1, S_2, \dots

$$M[S_1 \cup S_2 \cup \dots] = M[S_1] + M[S_2] + \dots \quad (4.6-36)$$

Мера Лебега $m[S]$ точечного множества на прямой обладает дополнительным свойством

$$m(a, b) = b - a \quad (4.6-37)$$

для каждого ограниченного интервала (a, b) ; таким образом, мера Лебега является обобщением длины интервала (аксиоматическое определение меры Лебега; см. также пп.12.1-1, 12.8-4 и 13.2-2).

Мера Лебега точечных множеств в пространствах двух, трех, ... измерений определяется (либо конструктивно, либо аксиоматически) с помощью аналогичных обобщений площади и объема.

(б) Каждое ограниченное открытое множество (п.4.3-6,а) измеримо. Можно высказать более общие утверждения. Борелевское множество на прямой есть множество, полученное посредством конечной или счетной последовательности объединений, пересечений и/или взятия дополнений интервалов и получающихся в результате комбинаций. Класс борелевских множеств есть вполне аддитивная булева алгебра измеримых множеств. Каждое измеримое множество есть объединение некоторого борелевского множества и множества лебеговой меры нуль. Каждое конечное или счетное множество измеримо и имеет лебегову меру нуль. Аналогичные теоремы справедливы и в многомерном случае.

Если какое-либо свойство выполняется для каждой точки данного интервала, области или множества, исключая, быть может, лишь множество лебеговой меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется на данном интервале, области или множестве почти всюду (или почти во всех точках этого интервала и т. д.).

(в) Измеримые функции. Функция $f(x)$, определенная на интервале $[a, b]^1$, измерима на $[a, b]$, если для каждого действительного числа c множество точек x интервала $[a, b]$, в которых $f(x) \leq c$, измеримо.

В этом определении условие $f(x) < c$ можно заменить любым из условий $f(x) < c$, $f(x) > c$, $f(x) = c$.

Функция, непрерывная на $[a, b]$, измерима на $[a, b]$. Если на $[a, b]$ измеримы функции $f_1(x), f_2(x), \dots$, то на $[a, b]$ измеримы и функции $f_1(x) + f_2(x), \alpha f_1(x), f_1(x)f_2(x)$, а также и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, если этот предел на $[a, b]$ существует (и даже если этот предел существует на $[a, b]$ лишь почти всюду).

Аналогичные определения и теоремы справедливы и для измеримых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на пространстве точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , допускающем определение меры Лебега.

¹⁾ Функция $f(x)$ может быть определена на $[a, b]$ не всюду, а лишь почти всюду.

4.6-15. Интеграл Лебега (см. также пп.4.6-1 и 4.6-2).

(а) Интеграл Лебега от ограниченной функции. Пусть действительная функция $y = f(x)$ измерима и ограничена на ограниченном интервале $[a, b]$ и A и B — соответственно ее нижняя и верхняя точные границы. Разобьем интервал $[A, B]$, содержащий множество значений функции $f(x)$ на n частей:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = B, \quad (4.6-38)$$

и обозначим через S_i множество точек x интервала $[a, b]$, в которых $y_{i-1} < f(x) \leq y_i$. Составим две суммы (интегральные суммы Лебега):

$$\sum_{i=1}^n y_{i-1} m[S_i] \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n y_i m[S_i].$$

Обе интегральные суммы стремятся к одному и тому же пределу, не зависящему от выбора значений y_i , если только наибольшая из разностей $y_i - y_{i-1}$ стремится к нулю. Число

$$I = \lim_{\max(y_i - y_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i m[S_i] = \int_a^b f(x) dx \quad (4.6-39)$$

есть определенный интеграл от функции $f(x)$ по интервалу $[a, b]$ в смысле Лебега (интеграл Лебега).

Это определение означает, что, каково бы ни было положительное число ε , можно указать такое число $\delta > 0$, что при любом разбиении интервала $[A, B]$ на части такие, что $\max(y_i - y_{i-1}) < \delta$, будут справедливы неравенства

$$\left| I - \sum_{i=1}^n y_{i-1} m[S_i] \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left| I - \sum_{i=1}^n y_i m[S_i] \right| < \varepsilon,$$

а значит, и неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n \eta_i m[S_i] \right| < \varepsilon,$$

где $y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i$ (интеграл Лебега можно определить и как предел суммы $\sum_{i=1}^n \eta_i m[S_i]$).

(б) Интеграл Лебега от неограниченной функции. Если функция $f(x)$ измерима и не ограничена на ограниченном интервале $[a, b]$, то интеграл Лебега определяется как

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^b f_A(x) dx + \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_a^b f_B(x) dx, \quad (4.6-40)$$

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \leq 0, \\ f(x), & \text{если } 0 < f(x) \leq A, \\ A, & \text{если } f(x) > A; \end{cases}$$

$$f_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geq 0, \\ f(x), & \text{если } 0 > f(x) \geq B, \\ B, & \text{если } f(x) < B. \end{cases}$$

Если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует, то функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу (суммируема) на интервале $[a, b]$.

(с) Интеграл Лебега по неограниченным интервалам. Если для всех $X > a$ существует интеграл $\int_a^X f(x) dx$, то интеграл Лебега $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ определяется условием

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X_1 \rightarrow +\infty} \int_a^{X_1} f_1(x) dx + \lim_{X_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{X_2} f_2(x) dx, \quad (4.6-41)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \leq 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) > 0, \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geq 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

Интеграл $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ определяется аналогично, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ — равенством (4).

(д) Интеграл Лебега по точечному множеству. Кратные интегралы Лебега. Интеграл Лебега $\int_S f(x) dx$ по произвольному измеримому множеству точек S определяется без изменения так же, как и в пп.4.6-15, а и в. Кратный интеграл Лебега по области или измеримому множеству точек (x_1, x_2, \dots, x_n) определяется аналогично.

(е) Существование и свойства интеграла Лебега. Сравнение интеграла Лебега и интеграла Римана. Каждая ограниченная измеримая функция на любом ограниченном измеримом множестве суммируема. Функция, суммируемая на измеримом множестве S , суммируема и на каждом измеримом его подмножестве.

Из определений пп.4.6-15, а, б, с и д следует, что интеграл Лебега $\int_S f(x) dx$ существует в том и только в том случае, если существует интеграл Лебега $\int_S |f(x)| dx$. Если любой собственный или несобственный, простой или кратный интеграл Римана существует в смысле абсолютной сходимости (п.4.6-2, а)¹⁾, то соответствующий интеграл Лебега существует и равен интегралу Римана.

Теоремы из табл. 4.6-1 и пп.4.6-5 и 4.7-1, с, д справедливы и для интеграла Лебега.

Для каждого конечного или счетного множества попарно непересекающихся измеримых множеств S_1, S_2, \dots

$$\int_{S_1 \cup S_2 \cup \dots} f(x) dx = \int_{S_1} f(x) dx + \int_{S_2} f(x) dx + \dots, \quad (4.6-42)$$

¹⁾ Отметим, что функция

$$f(x) \equiv \frac{d}{dx} \left(x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right) \equiv 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

не суммируема на интервале $(0, 1)$, несмотря на то, что несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +0} \int_x^1 f(x) dx = \sin 1$$

существует.

если интегралы существуют. Интеграл Лебега по любому множеству (лебеговой) меры нullo равен нулю.

З а м е ч а н и е. Лебеговское интегрирование применимо к более общему классу функций, чем римановское интегрирование, и упрощает формулировки многих теорем. Многие теоремы, высказанные в терминах интеграла Лебега, непосредственно применимы к абсолютно сходящимся несобственным интегралам Римана (см. также пп. 4.6-16 и 4.8-4, б).

4.6-16. Теоремы о сходимости (теоремы о непрерывности; см. также п.12.5-1).

(а) Если последовательность функций $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots$, каждая из которых ограничена и интегрируема в смысле Римана на ограниченном интервале $[a, b]$, равномерно сходится

на $[a, b]$ к функции $s(x)$, то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx$ существует и равен интегралу $\int_a^b s(x) dx$.

(б) Следующая более общая теорема формулируется специально для интеграла Лебега: пусть $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots$ и неотрицательная функция сравнения $A(x)$ суммируемы на измеримом множестве S , и пусть $|s_n(x)| < A(x)$ при всех n и при почти всех $x \in S$ (п.4.6-14, б). Тогда из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ для почти всех $x \in S$, следует, что предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S s_n(x) dx$ существует и равен $\int_S s(x) dx$ (теорема Лебега о сходимости; см. также п.4.8-4, б).

4.6-17. Интеграл Стильтеса.

(а) Интеграл Римана—Стильтеса. Интеграл Римана—Стильтеса от функции $f(x)$ с интегрирующей функцией $g(x)$ по ограниченному интервалу $[a, b]$ по определению есть

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})], \quad (4.6-43)$$

где

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

и $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (об определении предела см. п.4.6-1). Если $g(x)$ — функция ограниченной вариации (п.4.4-8, б), а $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, то предел (43) существует.

Несобственные интегралы Римана—Стильтеса определяются, как и в п.4.6-2.

(б) Интеграл Лебега—Стильтеса. Каждая функция $g(x)$, неубывающая и непрерывная справа (п.4.4-7, б) на ограниченном интервале $[a, b]$, с помощью соотношений (35), (36) и

$$M[\alpha < x < \beta] = g(\beta) - g(\alpha) \quad (\alpha < \alpha < \beta < b), \quad (4.6-44)$$

где в квадратных скобках указано множество значений x , определяет меру (меру Лебега—Стильтеса) $M[S]$ каждого борелевского множества (п.4.6-14, б) на интервале $[a, b]$. Отметим

$$\left. \begin{aligned} M[\alpha < x < \beta] &= g(\beta) - g(\alpha - 0), & M[\alpha < x < \beta] &= g(\beta - 0) - g(\alpha), \\ M[\alpha < x < \beta] &= g(\beta - 0) - g(\alpha - 0), & M[x = \alpha] &= g(\alpha) - g(\alpha - 0) \quad (\alpha < \alpha < \beta < b). \end{aligned} \right\} \quad (4.6-45)$$

Отправляясь от меры Лебега—Стильтеса ограниченных интервалов по способу п.4.6-14, а, вводят меру $M[S]$ Лебега—Стильтеса произвольного измеримого множества, как общее значение внутренней и внешней меры.

Если задана функция $y = f(x)$, ограниченная и измеримая на интервале $[a, b]$, то интеграл Лебега—Стильтеса от функции $f(x)$ с интегрирующей функцией $g(x)$ по $[a, b]$ по определению есть

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\max(y_i - y_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \eta_i M[S_i] \quad (4.6-46)$$

для произвольного разбиения (38) интервала, содержащего множество значений функции $f(x)$; S_i и здесь есть множество значений x , в которых $y_{i-1} < f(x) < y_i$ (об определении предела см. п.4.6-15, а).

Интеграл Лебега—Стильтеса от ограниченной или неограниченной функции $f(x)$ по любому измеримому множеству можно теперь определить по способу пп.4.6-15, б, с и д, предполагая, что функция $g(x)$ ограничена на каждом рассматриваемом ограниченном множестве. В многомерном случае функция $g(x)$ заменяется функцией, неубывающей по каждому аргументу. Можно далее, применяя равенство (48) к сумме двух монотонных функций

(п.4.4-8, б), определять интеграл Лебега—Стильтеса $\int_a^b f(x) dg(x)$ с любой интегрирующей

щей функцией $g(x)$ ограниченной вариации. Если интеграл Римана—Стилтьеса существует в смысле абсолютной сходимости, то соответствующий интеграл Лебега—Стилтьеса ему равен.

(с) Свойства интеграла Стилтьеса (см. также табл. 4.6-1). Если (a, b) — ограниченный или неограниченный интервал, для которого существуют рассматриваемые интегралы, то

$$\int_a^b f dg = - \int_b^a f dg, \quad \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg, \quad (4.6-47)$$

$$\int_a^b (f_1 + f_2) dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg, \quad \int_a^b f d(g_1 + g_2) = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2, \quad (4.6-48)$$

$$\int_a^b (\alpha f) dg = \int_a^b f d(\alpha g) = \alpha \int_a^b f dg, \quad (4.6-49)$$

$$\int_a^b f dg = fg \Big|_a^b - \int_a^b g df. \quad (4.6-50)$$

Если $g(x)$ — неубывающая функция на (a, b) , то

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg \quad (a \leq b). \quad (4.6-51)$$

Если $g(x)$ — неубывающая функция и $f(x) \leq F(x)$ на (a, b) , то

$$\int_a^b f dg \leq \int_a^b F dg \quad (a \leq b). \quad (4.6-52)$$

Интегралы Стилтьеса часто имеют «наглядный» смысл (криволинейные интегралы, интегралы по поверхности, по объему; интегралы по распределению массы, заряда и вероятности, п.18.3-6). Заметим, что интеграл Стилтьеса в качестве частных случаев включает в себя обычные интегралы и суммы:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad (4.6-53)$$

если функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на (a, b) , и

$$\sum_k f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d \sum_k u_-(x-k) \quad \left[u_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \right]. \quad (4.6-54)$$

4.6-18. Свертка. Свертка Стилтьеса двух функций $f(x)$ и $g(x)$ по интервалу (a, b) есть по определению функция

$$\psi(t) \equiv \int_a^b f(t-x) dg(x) \equiv \int_a^b g(t-x) df(x) \quad (4.6-55)$$

для всех значений t , для которых эти два интеграла существуют и равны. Классическая свертка $f(x)$ и $g(x)$ по (a, b) подобным же образом определяется как

$$\psi(t) \equiv \int_a^b f(t-x)g(x) dx \equiv \int_a^b g(t-x)f(x) dx. \quad (4.6-56)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 112.

В литературе и (55) и (56) часто просто называют *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$ по (a, b) , и любую из этих функций (55) и (56) обозначают символом $f * g$ или $f * g$; точный смысл обычно очевиден из контекста (см. также пп. 4.11-5, 8.3-1, 8.3-3 и 18.5-7).

Если имеют место равенства (55) и (56), то

$$g * f \equiv f * g, \quad f * (g * h) \equiv (f * g) * h \equiv f * g * h, \quad f * (g + h) \equiv f * g + f * h. \quad (4.6-57)$$

При $a = -\infty$ и/или $b = +\infty$, если интегралы существуют, то равенства (57) справедливы. Свертка двух конечных или бесконечных последовательностей $a(0), a(1), a(2), \dots$ и $b(0), b(1), b(2), \dots$ есть последовательность

$$a * b = \sum_k a(t-k)b(k) \quad (t = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.6-58)$$

4.6-19. Неравенства Минковского и Гельдера.

(а) Если (a, b) — ограниченный или неограниченный интервал, для которого интегралы в правой части существуют, то

$$\left[\int_a^b |f_1 + f_2|^p dg \right]^{1/p} \leq \left[\int_a^b |f_1|^p dg \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |f_2|^p dg \right]^{1/p} \quad (1 < p < +\infty) \quad (\text{неравенство Минковского}), \quad (4.6-59)$$

$$\left| \int_a^b f_1 f_2 dg \right| \leq \left[\int_a^b |f_1|^p dg \right]^{1/p} \left[\int_a^b |f_2|^{p/(p-1)} dg \right]^{(p-1)/p} \quad (1 < p < +\infty) \quad (\text{неравенство Гельдера}). \quad (4.6-60)$$

Эти неравенства справедливы, в частности, для обычных интегралов Римана и Лебега и, более общо, для многомерных интегралов. При $p = \frac{p}{p-1} = 2$ неравенство (60) превращается в *неравенство Коши—Шварца* (15.2-3)*).

(б) Из неравенств (59) и (60) вытекают соответствующие неравенства для сумм и для сходящихся бесконечных рядов. Если суммы справа существуют, то

$$\left[\sum_k |a_k + b_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_k |a_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_k |b_k|^p \right]^{1/p} \quad (1 < p < +\infty) \quad (\text{неравенство Минковского}), \quad (4.6-61)$$

$$\left| \sum_k a_k b_k \right| \leq \left[\sum_k |a_k|^p \right]^{1/p} \left[\sum_k |b_k|^{p/(p-1)} \right]^{(p-1)/p} \quad (1 < p < +\infty) \quad (\text{неравенство Гельдера}). \quad (4.6-62)$$

При $p = \frac{p}{p-1} = 2$; неравенство (62) превращается в *неравенство Коши—Буняковского* (см. также п.1.3-2).

4.7. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА О ПРИБЛИЖЕНИИ

4.7-1. Теоремы о среднем значении (см. также п.4.10-4). Нижеследующие теоремы полезны для оценки значений и пределов действительных функций, производных и интегралов.

(а) Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$f(b) - f(a) = f'(X)(b - a) \quad (4.7-1)$$

* В отечественной литературе это неравенство называют неравенством Коши—Буняковского.

(теорема Лагранжа; теорема о конечном приращении). Число X часто записывают в виде $X = a + \theta(b - a)$ ($0 < \theta < 1$). При $f(a) = f(b)$ эта теорема называется теоремой Ролля (см. также п.1.6-6,е).

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна при $a_i < x_i < b_i$ и дифференцируема при $a_i < x_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то существует набор таких чисел X_1, X_2, \dots, X_n , что $a_i < X_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} (b_i - a_i). \quad (4.7-2)$$

(б) Если 1) функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на $[a, b]$, 2) $v(b) \neq v(a)$ и 3) производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют в интервале (a, b) и одновременно не обращаются в нуль, то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$\frac{u(b) - u(a)}{v(b) - v(a)} = \frac{u'(X)}{v'(X)} \quad (4.7-3)$$

(теорема Коши).

(в) Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(X)(b - a). \quad (4.7-4)$$

(г) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$ (или $g(x) \leq 0$ на $[a, b]$), то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(X) \int_a^b g(x) dx. \quad (4.7-5)$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и функция $g(x)$ в этом интервале не возрастает (или не убывает), то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^X f(x) dx + g(b) \int_X^b f(x) dx. \quad (4.7-6)$$

Если, кроме того, $g(x) > 0$ на (a, b) , то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \begin{cases} g(a) \int_a^X f(x) dx, & \text{если } g(x) \text{ не возрастает,} \\ g(b) \int_X^b f(x) dx, & \text{если } g(x) \text{ не убывает.} \end{cases} \quad (4.7-7)$$

4.7-2. Раскрытие неопределенностей (примеры см. в табл. 4.7-1).

(а) Пусть функция $f(x)$ вида $\frac{u(x)}{v(x)}$, $u(x)v(x)$, $[u(x)]^{v(x)}$, или $u(x) - v(x)$ в точке $x = a$ не определена и принимает вид $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ или $\infty - \infty$.

Это значит, что $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$ в первом случае;

$(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$ во втором; $f(x) = u(x)v(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$ в третьем, и т. д. Термин «раскрытие неопределенностей» означает, что отыскивается предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Если этот предел

существует, то часто по определению полагают $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

(b) Случаи $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$. Если существует окрестность точки $x = a$, в которой при $x \neq a$: 1) $v(x) \neq 0$ и 2) производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют и $v'(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}, \quad (4.7-8)$$

если предел в правой части равенства существует (правило Лопиталля).

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$. Если существует окрестность точки $x = a$, в которой при $x \neq a$ производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют и $v'(x) \neq 0$, то равенство (8) справедливо, если предел в правой части этого равенства существует (эта теорема также называется правилом Лопиталля).

Если само отношение $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ представляет собой неопределенность, то указанный метод может быть в свою очередь применен и к $\frac{u'(x)}{v'(x)}$, так что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u''(x)}{v''(x)}; \quad (4.7-9)$$

этот процесс, если необходимо, может быть продолжен и дальше.

(c) Случаи $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ и $\infty - \infty$. Выражения $u(x)$, $v(x)$, $[u(x)]^{v(x)}$ и $u(x) - v(x)$ с помощью какого-либо из соотношений

$$\left. \begin{aligned} u(x)v(x) &\equiv \frac{u(x)}{1/v(x)} \equiv \frac{v(x)}{1/u(x)}, \\ [u(x)]^{v(x)} &\equiv e^{v(x)} \left[g(x) \equiv \frac{\ln u(x)}{1/v(x)} \equiv \frac{v(x)}{1/\ln u(x)} \right], \\ u(x) - v(x) &\equiv \frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}} - \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}} \equiv \ln g(x) \left[g(x) \equiv \frac{e^{u(x)}}{e^{v(x)}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.7-10)$$

часто можно привести к виду $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, и тогда к ним становятся применимыми методы п.4.7-2, б.

(d) При вычислении пределов иногда бывает полезно воспользоваться формулой Тейлора (п.4.10-1).

(e) Методы пп.4.7-2, а, б, с и d применимы и для отыскания односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (п.4.4-7). Пользуясь тем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +0} f(1/y)$, находят $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4.7-8. Теоремы Вейерштрасса о приближении (см. также пп. 4.10-4, 4.11-7 и 12.5-4).

1) Пусть $f(x)$ — действительная функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$. Тогда для каждого заданного положительного числа ε (максимум погрешности приближения) существует такой действительный многочлен $P(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k x^k$, что $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$.

Таблица 4.7-1

Некоторые часто встречающиеся пределы (п.4.7-2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^x - 1}{x} = \ln c, \quad c > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \omega \quad (-\infty < \omega < +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-a} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x} = 0 \quad (a > 0)$$

2)* Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию $f(b) = f(a)$ и $\omega = \frac{2\pi}{b-a}$. Тогда найдется такой действительный **тригонометрический многочлен**

$$T(x) \equiv \sum_{k=0}^m (\alpha_k \cos k\omega x + \beta_k \sin k\omega x),$$

что $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$.

Аналогичные теоремы справедливы и для функций двух и большего числа переменных. Теоремы Вейерштрасса о приближении позволяют различныи свойства непрерывных функций выводить из соответствующих свойств многочленов или тригонометрических многочленов.

4.8. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

4.8-1. Бесконечные ряды. Сходимость (см. также п.4.4-1). **Бесконечный ряд** $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ действительных или комплексных чисел (членов) a_0, a_1, a_2, \dots **сходится**, если последовательность s_0, s_1, s_2, \dots его **частичных сумм** $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ имеет предел. В этом случае число $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ называется **суммой** ряда, и разрешается писать

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s. \quad (4.8-1)$$

Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ (необходимо сходящийся) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots$. Если ряд не сходится, то он называется **расходящимся** (он **расходится**; см. также п.4.8-6). В пп.4.9-1 и 4.9-2 приводятся некоторые признаки, позволяющие исследовать сходимость заданного бесконечного ряда.

4.8-2. Ряды функций. Равномерная сходимость (см. также п.4.4-4).

Ряд функций $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \dots$ сходится к функции (сумме) $s(x)$ при каждом значении x , при котором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k(x) = s(x).$$

Ряд **равномерно сходится** к $s(x)$ на множестве S значений x , если на множестве S к функции $s(x)$ равномерно сходится последовательность его частичных сумм $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x)$. В п.4.9-2 приведены некоторые признаки равномерной сходимости.

4.8-3. Операции над сходящимися рядами.

(а) Сложение и умножение на число. Если $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ — сходящиеся ряды с действительными или комплексными членами и α — действительное или комплексное число, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \quad \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k. \quad (4.8-2)$$

В каждом из этих случаев из сходимости или абсолютной сходимости рядов в левой части вытекает сходимость или соответственно абсолютная сходимость ряда в правой части.

(б) Перестановка членов. Коммутативно сходящийся ряд есть ряд, который сходится и имеет одну и ту же сумму при любой перестановке его членов; это имеет место в том и только в том случае, если ряд абсолютно сходится. Каждый ряд, получающийся из такого ряда, если из него выбросить какие угодно члены, также абсолютно сходится.

Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется условно сходящимся. Члены каждого условно сходящегося ряда с действительными членами можно переставить так, что: 1) последовательность его частичных сумм станет сходить к данному пределу, 2) последовательность его частичных сумм станет неограниченно возрастать, 3) последовательность его частичных сумм станет неограниченно убывать и 4) последовательность его частичных сумм станет колебаться между двумя любыми данными числами (теорема Римана).

(с) Двойные ряды. Двойной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}$ сходится к s (имеет сумму s), если

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} = s$$

(п.4.4-5). Отметим, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} \right), \quad (4.8-3)$$

если все три ряда сходятся (теорема Прингсгейма о суммировании по столбцам и по строкам). В частности, если двойной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}$ сходится абсолютно, т. е. если сходится ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}|$, то этот ряд имеет одну и ту же сумму при любом порядке суммирования.

(d) Произведение двух бесконечных рядов. Если $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ — абсолютно сходящиеся ряды с действительными или комплексными членами, то двойной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_i b_k$ есть абсолютно сходящийся ряд с суммой $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$. Более общо:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (\text{правило Коши}), \quad (4.8-4)$$

если эти три ряда сходятся.

4.8-4. Операции над бесконечными рядами функций.

(a) Сложение и умножение на ограниченную функцию. Если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ сходятся равномерно (п.4.8-2) на множестве S значений x , то равномерно на множестве S сходятся и ряды $\sum_{k=0}^{\infty} [a_k(x) + b_k(x)]$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x) a_k(x)$, где $\varphi(x)$ — произвольная ограниченная на S функция.

(b) Пределы, непрерывность и интегрирование (см. также п.4.4-5). Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на ограниченном открытом интервале (a, b) , $x = x_0$ и $x = x_1$ — две любые точки этого интервала. Тогда

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_k(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0+0} a_k(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0-0} a_k(x),$$

если при $k=0, 1, 2, \dots$ существуют соответствующие пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a_k(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} a_k(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} a_k(x).$$

2. Сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если в этой точке непрерывен каждый член ряда $a_k(x)$.

3. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на замкнутом интервале $[x_0, x_1]$ и

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} a_k(x) dx,$$

если каждый член $a_k(x)$ непрерывен на $[x_0, x_1]$. Из сделанных предположений вытекает сходимость ряда в правой части каждого из этих равенств.

Нижеследующая теорема формулируется специально для интеграла Лебега. Она может применяться и к должным образом сходящимся несобственным интегралам Римана (см. также п.4.6-15). Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ функций, суммируемых на (ограниченном или неограниченном) измеримом множестве (в частности, на интервале) S , сходится на S почти всюду, то

$$\int_S \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_S a_k(x) dx, \quad (4.8-5)$$

если существует такое действительное число A (или функция $A(x)$, суммируемая на S , п.4.6-16), что $\left| \sum_{k=0}^n a_k(x) \right| < A$ для всех n и почти для всех $x \in S$. Заметим, что равномерная сходимость не предполагается.

(с)* Дифференцирование. Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ сходится по крайней мере в одной точке $c \in (a, b)$. Тогда, если производные $a'_0(x), a'_1(x), a'_2(x), \dots$ существуют и непрерывны на (a, b) и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится в интервале (a, b) , то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ сходится в (a, b) и

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x) \quad (a < x < b). \quad (4.8-6)$$

4.8-5. Улучшение сходимости и суммирование рядов (см. также пп.7.7-4 и 20.4-3 .
(а) Преобразование Эйлер а. Если ряд в левой части равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}}, \quad (4.8-7)$$

где разности $\Delta^k a_0$ определяются как в п.20.4-1, а, сходится, то это равенство справедливо. Ряд в правой части равенства часто сходится быстрее, чем ряд слева.

(b) Преобразование Куммера. Если для сходящихся рядов $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $S = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ существует предел $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) \neq 0$, то

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \gamma S + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \gamma \frac{b_k}{a_k}\right) a_k. \quad (4.8-8)$$

Если сумма S известна, то преобразование Куммера может оказаться полезным при числовых выкладках.

(с) Формула суммирования Пуассона. Если ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi k + t)$ равномерно сходится на интервале $0 < t < 2\pi$ к функции, разлагающейся в ряд Фурье (см. п.4.11-4), то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau, \quad (4.8-9)$$

если интеграл в правой части равенства существует.

(д) Формула суммирования Эйлера — Маклорена. Если производная $f^{(2m+2)}(x)$ существует и непрерывна при $0 < x < n$, то

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(t) dt + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + \frac{n B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\theta_n)$$

$$(m, n = 1, 2, \dots; \quad 0 < \theta_n < 1), \quad (4.8-10)$$

где B_k — числа Бернулли, определяемые в п. 2.15-2.

Формула (10) часто позволяет дать замкнутое выражение для приближенного представления конечной суммы $\sum_{k=0}^n f(k)$ или представить ее в виде сходящегося или полусходящегося (п. 4.8-6, а) ряда. Эта формула применяется также для численного интегрирования (п. 2.0.6-2, б). Отметим также следующие формулы для сумм специального вида:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad (4.8-11)$$

$$\sum_{k=0}^n k^N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N C_{N+1}^k n^{N+1-k} B_k \quad (N=1, 2, \dots), \quad (4.8-12)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2N}} = \frac{(-1)^{N+1} (2\pi)^{2N}}{2(2N)!} B_{2N} \quad (N=1, 2, \dots) \quad (4.8-13)$$

(см. также пп. 1.2-6 и 1.2-7).

(е) Лемма А б е л я. Следующая лемма иногда оказывается полезной для оценки частичных сумм. Пусть последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ положительных действительных

чисел удовлетворяет условиям $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq \dots$. Тогда $\alpha_0 S < \sum_{k=0}^n \alpha_k a_k < \alpha_0 S'$,

где S и S' соответственно наименьшая и наибольшая величина из последовательности сумм

$$\sum_{k=0}^r a_k \text{ при } r = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует, что если для любого n справедливы неравенства $M < \sum_{k=0}^n a_k < M'$, то $\alpha_0 M < \sum_{k=0}^n \alpha_k a_k < \alpha_0 M'$ также для любого n .

4.8-6. Расходящиеся бесконечные ряды.

(а) П о л у с х о д и м о с т ь. Расходящийся ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ может быть полезен для приближения величины s , если абсолютная погрешность $|s - s_n| = \left| s - \sum_{k=0}^n a_k \right|$, прежде чем вновь начнет возрастать, убывает до некоторого достаточно малого минимума, достигаемого при определенном значении n_0 номера n (полусходящийся ряд).

(б) А с и м п т о т и ч е с к и е р я д ы. Расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ есть асимптотический ряд, описывающий поведение функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ ($f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ при $x \rightarrow x_0$), если существует такой номер N , что при любом

фиксированном $n > N$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^n} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x) \right] = 0. \quad (4.8-14)$$

Расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ есть **асимптотический ряд**, описывающий поведение функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ при $x \rightarrow +\infty$), если существует такой номер N , что при любом фиксированном $n > N$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x) \right] = 0. \quad (4.8-15)$$

Асимптотический ряд дает полусходящиеся приближения функции $f(x)$, причем при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow +\infty$ номер $n_0 \rightarrow \infty$ (см. также пп.4.4-3 и 8.4-9).

(с) Суммирование средними арифметическими. Сходящийся или расходящийся ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ суммируем средними арифметическими (суммируем по методу Цезаро средними первого порядка, суммируем C_1 , суммируем $(C, 1)$ и C_1 -сумме S_1 , если последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ средних арифметических $\sigma_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k$ (где $s_k = \sum_{j=0}^k a_j$) сходится к S_1 . Каждый сходящийся ряд суммируем средними арифметическими и $S_1 = s$. Ряд с положительными членами суммируем средними арифметическими в том и только в том случае, если он сходится (см. также п.4.11-7).

4.8-7. Бесконечные произведения.

(а) Бесконечное произведение

$$(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\dots = \prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k)$$

действительных или комплексных множителей $1+a_k \neq 0$ сходится к числу $p = \prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k) \neq 0$ (значению бесконечного произведения), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1+a_k) = p.$$

Это имеет место в том и только в том случае, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(1+a_k)$ сходится к одному из значений $\ln p$ (см. также п.21.2-10). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1+a_k) = 0$, то говорят, что бесконечное произведение **расходится к нулю**.

(б) Бесконечное произведение $\prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k)$ (необходимо сходящееся) сходится абсолютно, если сходится произведение $\prod_{k=0}^{\infty} (1+|a_k|)$; для этого необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Бесконечное произведение сходится коммутативно (т. е. его значение не зависит от порядка множителей) в том и только в том случае, если оно сходится абсолютно (см. также п.4.8-3, б).

(с) Бесконечное произведение $\prod_{k=0}^{\infty} [1+a_k(x)]$ равномерно сходится на множестве S значений x , для которых при всех k выполняется условие $1+a_k(x) \neq 0$, если последовательность функций $\prod_{k=0}^n [1+a_k(x)]$ равномерно сходится на S к функции, не принимающей на S значения, равного нулю. Это, в частности, имеет место, если на S равномерно сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)|$.

4.8-8. Непрерывные дроби. Последовательность вида

$$s_0 = b_0, \quad s_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad s_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}},$$

$$s_3 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}} \dots \dots \quad (4.8-16)$$

называется последовательностью, определяющей данную непрерывную дробь; n -й знаменатель равен $b_{n-1} + a_n/b_n$. Разложение некоторых функций в непрерывную дробь сходится быстрее, чем соответствующее разложение в степенной ряд, и оказывается полезным в некоторых приложениях (расчет электрических сетей; см. также п.20.5-7).

4.9. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

4.9-1. Признаки сходимости бесконечных рядов (п.4.8-1).

(а) Необходимое и достаточное условие сходимости. Последовательность действительных или комплексных чисел s_0, s_1, s_2, \dots (например, последовательность частичных сумм некоторого ряда, п.4.8-1) сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа ε существует такой номер N , что из $m > N$ и $n > N$ следует $|s_m - s_n| < \varepsilon$ (критерий Коши сходимости последовательностей или рядов).

(б) Признаки сходимости рядов с положительными членами (эти признаки полезны и как признаки абсолютной сходимости рядов с произвольными действительными или комплексными членами, пп.4.8-1 и 4.8-3). Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ с положительными членами сходится, если существует такой номер N , что при $n > N$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. $a_n \leq M_n$ и/или $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{M_{n+1}}{M_n}$, где $M_0 + M_1 + M_2 + \dots$ — сходящийся ряд сравнения с положительными членами (признак сравнения).

2. По крайней мере одна из величин

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \sqrt[n]{a_n}, \quad n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) + 2, \\ & \left[n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) + 1 \right] \ln n + 2 \end{aligned} \right\} \quad (4.9-1)$$

имеет точную верхнюю границу $A < 1$.

Четвертый из этих четырех признаков сильнее третьего (признака Раабе), который в свою очередь сильнее двух первых (признака Даламбера и радикального признака Коши).

3. $a_n \leq f(n)$, где $f(x)$ — положительная невозрастающая функция, для которой сходится (несобственный) интеграл $\int_{N+1}^{+\infty} f(x) dx$ (интегральный признак сходимости Коши; см. также п.4.9-3,б).

Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ расходится, если существует такой номер N , что при $n > N$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. $a_n > d_n$ и/или $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{d_{n+1}}{d_n}$, где $d_0 + d_1 + d_2 + \dots$ — расходящийся ряд сравнения с положительными членами (признаки сравнения для расходимости).

2. По крайней мере одна из величин условия 1 имеет точную нижнюю границу $A > 1$.

3. $a_n > f(n)$, где $f(x)$ — положительная невозрастающая функция, для которой интеграл $\int_{N+1}^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Замечание. В качестве ряда сравнения часто бывает полезен ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\lambda}$, который при действительном λ сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leq 1$.

(е) Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ с действительными членами сходится:

1. Если соседние его члены имеют разный знак (знакопередающий ряд), его общий член a_n не возрастает по абсолютной величине и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (признак Лейбница).

2. Если последовательность s_0, s_1, s_2, \dots его частичных сумм ограничена и монотонна; эта последовательность монотонна, лишь если члены ряда имеют один и тот же знак. См. в этом случае признаки из (б).

(д) Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Ряд $\alpha_1 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots$ сходится:

1. Если сходится ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ (признак Абеля; см. также п.4.8-5,е).

2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ и сумма $\sum_{k=0}^n a_k$ как функция от n ограничена (признак Дирихле).

4.9-2. Признаки равномерной сходимости бесконечных рядов (п. 4.8-2).

(а) Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Последовательность $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots$ действительных или комплексных функций (например, последовательность частичных сумм некоторого ряда функций, п.4.8-2), определенных на множестве S значений x , равномерно сходится на множестве S в том и только в том случае, если для каждого положительного числа ϵ существует такой номер N , не зависящий от x , что из $m > N$ и $n > N$ для всех $x \in S$ следует $|s_m(x) - s_n(x)| < \epsilon$ (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей или рядов).

(б) Ряд $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \dots$ действительных или комплексных функций равномерно и абсолютно сходится на каждом множестве S значений x , на котором функции $a_n(x)$ определены, и при всех n выполняется неравенство $|a_n(x)| \leq M_n$, где $M_0 + M_1 + M_2 + \dots$ — сходящийся ряд сравнения с положительными членами (признак Вейерштрасса). Сходимость ряда сравнения может быть исследована с помощью признаков п.4.9-1,б.

(с) Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Ряд $\alpha_0\alpha_0(x) + \alpha_1\alpha_1(x) + \alpha_2\alpha_2(x) + \dots$ равномерно сходится на множестве S значений x :

1. Если ряд $\alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots$ равномерно сходится на S (признак Абеля, см. также п.4.9-1, d).

2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ и существует такое число A , что $\left| \sum_{k=0}^n \alpha_k(x) \right| \leq A$ при всех n и при всех $x \in S$ (признак Дирихле).

* Признаки Абеля и Дирихле часто полезно применять и в более общей форме, рассматривая вместо последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ последовательность функций. См., например [4.2] г. II, стр. 451. *

4.9-3. Признаки сходимости несобственных интегралов (см. также п. 4.6-2). В пп.4.9-3 и 4.9-4 приводятся признаки сходимости несобственных интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(x) dx$. Несобственные интегралы других типов сводятся к интегралам этого вида (п.4.6-2).

Предполагается, что действительная функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом ограниченном интервале $[a, X]$, не содержащем верхний предел интеграла.

(а) Необходимое и достаточное условие сходимости (критерий Коши). Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа ε существует такое число $M > a$, что из $X_2 > X_1 > M$ следует $\left| \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Аналогично интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа ε существует такое число δ ($0 < \delta < b - a$), что из $b - \delta < X_1 < X_2 < b$ следует $\left| \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

(б) Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (эти признаки полезны и как признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов от произвольных действительных или комплексных функций; заметим, что из абсолютной сходимости следует сходимость). Если функция $f(x) \geq 0$ в интервале интегрирования, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ или $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(x) dx$ сходится в том и только в том случае, если интеграл $\int_a^x f(x) dx$ как функция от X ограничен в интервале интегрирования. В частности, если интервал интегрирования содержит такое число M , что при $x > M$ (соответственно при $M < x < b$) выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, где $g(x)$ — функция сравнения, для которой сходится интеграл $\int_M^{+\infty} g(x) dx$ (или соответственно

$\int_M^{\infty} g(x) dx$), то первоначальный интеграл сходится (признак сравнения).

Аналогично, если $g(x) > 0$ и интеграл $\int_M^{+\infty} g(x) dx$ или $\int_M^b g(x) dx$ расходится, то из $f(x) \geq g(x)$ следует, что расходится и соответствующий интеграл от $f(x)$.

З а м е ч а н и е. Интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, где $a > 0$, сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$, а интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda > 1$. Если $f(x) = O(1/x^\lambda)$ ($\lambda > 1$) при $x \rightarrow +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно. Если $f(x) = O[1/(b-x)^\lambda]$ ($\lambda < 1$) при $x \rightarrow b-0$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно (см. также п.4.4-3).

(б) Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ или $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно, а $\alpha(x)$ — функция, ограниченная на интервале интегрирования и интегрируемая на каждом конечном интервале $[a, X]$, не содержащем верхнего предела интеграла, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \alpha(x) f(x) dx$ или соответственно $\int_a^b \alpha(x) f(x) dx$ сходится.

(д) Пусть функция $\alpha(x)$ ограничена и монотонна на интервале $a \leq x < +\infty$. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \alpha(x) f(x) dx$ сходится:

1. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится (аналог признака Абеля, п.4.9-1, д) или

2. Если интеграл $\int_a^x f(x) dx$ как функция от X ограничен на интервале $a \leq X < +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ (аналог признака Дирихле, п.4.9-1, д).

(е) В п.8.2-4 см. ряд приложений.

4.9-4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов (см. также п.4.6-2, с).

(а) Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Критерий сходимости Коши из п.4.9-3, а превращается в критерий равномерной сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ или $\int_a^b f(x, y) dx$ на множестве S значений y , если дополнительно указать, что число M или δ , найденное по этому критерию при каждом $y \in S$ для любого положительного числа ε , не зависит от y (см. также п.4.9-2, а).

(b) Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ или $\int_a^b f(x, y) dx$ равномерно и абсолютно сходится на каждом множестве S значений y таком, что при любом $y \in S$ и любом x из интервала интегрирования выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq g(x)$, где $g(x)$ — функция сравнения, интеграл от которой $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ (или соответственно $\int_a^b g(x) dx$) сходится (аналог признака Вейерштрасса, п.4.9-2, б).

(c) Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \alpha(x, y) f(x, y) dx$ равномерно сходится на множестве S значений y , если при любом $y \in S$ функция $\alpha(x, y)$ не возрастает на интервале $a \leq x < +\infty$ и равномерно стремится на S к нулю при $x \rightarrow +\infty$ и если при $x \geq a$ и $y \in S$ абсолютная величина $\left| \int_a^x f(x, y) dx \right|$ ограничена константой A , не зависящей ни от x , ни от y (аналог признака Дирихле, п.4.9-2, c).

4.10. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИХ ИНТЕГРАЛОМ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И РЯД ТЕЙЛОРА

4.10-1. Разложение функций в бесконечный ряд и представление их интегралом. Функцию $f(x)$ часто разлагают в соответствующий бесконечный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ ввиду того, что

1. Последовательность частичных сумм (или средних арифметических, пп.4.8-6, с и 4.11-7) этого ряда может давать полезные для вычислений приближения функции $f(x)$.

2. Операции над функцией $f(x)$ может оказаться возможным описать в терминах более простых операций над функциями $\varphi_k(x)$ или над коэффициентами α_k (методы преобразований см. также пп.4.11-5, б и 8.6-5). Функции $\varphi_k(x)$ и коэффициенты α_k могут иметь какой-либо наглядный (физический) смысл (п.4.11-4, б).

Подобные же преимущества может давать представление функций в виде (обычно несобственного) интеграла $\int_a^b \alpha(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\lambda$ (см. также пп.4.11-4, с, 4.11-5, с и гл. 8).

Возможность реализации одного или обоих преимуществ, перечисленных выше, часто нуждается в сходимости или же равномерной сходимости ряда или интеграла (отсюда — важность признаков сходимости из пп.4.9-1—4.9-4), но это относится не ко всем случаям (пп.4.8-6, 4.11-5 и 4.11-7).

4.10-2. Степенные ряды.

(а) Степенной ряд относительно (действительного или комплексного) переменного x есть ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{или} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{при } a=0, \quad (4.10-1)$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots — действительные или комплексные числа. Для любого степенного ряда (1) существует такое действительное число $r_c (0 \leq r_c \leq +\infty)$, что этот ряд сходится абсолютно при $|x| < r_c$ и расхо-

дится при $|x| > r$. Число r , называется **радиусом сходимости** данного степенного ряда. Каково бы ни было число q , удовлетворяющее условию $0 < q < r$, степенной ряд (1) равномерно сходится при $|x| \leq q$ (на интервале, если x — действительное переменное, и в круге, если x — комплексное переменное).

Из сходимости степенного ряда (1) при $x = x_0$ вытекает его сходимостью и при $|x| < |x_0|$, а из его расходимости при $x = x_0$ вытекает его расходимостью и при $|x| > |x_0|$.

(b) Сходящиеся степенные ряды можно складывать в соответствии с равенством (4.8-2) и перемножать в соответствии с правилом Коши (4.8-4). При $|x| < r$, сумма степенного ряда (1) есть непрерывная и сколько угодно раз дифференцируемая функция x . Степенной ряд (1) можно почленно дифференцировать при $|x| < r$, и интегрировать на любом замкнутом интервале, содержащемся в интервале $(-r, r)$. Получающиеся в результате почленного дифференцирования или почленного интегрирования от 0 до x ряды имеют тот же радиус сходимости r .

(c) Если существует такое положительное число r , что при всех x , удовлетворяющих условию $|x| < r$, два степенных ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ имеют одну и ту же сумму $f(x)$, то $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$ (теорема единственности).

Пример. Бесконечная геометрическая прогрессия

$$a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + \dots = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^k = a_0 \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \quad (4.10-2)$$

(см. также пп. 1.2-7 и 1.7-2) сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Для любого q , удовлетворяющего условию $0 < q < 1$, прогрессия равномерно сходится при $|x| < q$.

4.10-3.* Теоремы Абеля и Таубера.

(a) Пусть r — положительное число. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ сходится и имеет сумму s , то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ в замкнутом интервале $[0, r]$ сходится равномерно и $\lim_{x \rightarrow r-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$ (теорема Абеля).

(b) Пусть r — положительное число. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится в интервале $(0, r)$, причем $\lim_{x \rightarrow r-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k r^k = 0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ сходится и его сумма равна s (теорема Таубера).

З а м е ч а н и е. Особый интерес представляет случай $r = r_c$.

4.10-4. Ряд Тейлора (см. также п. 7.5-2).

(a) Пусть $f(x)$ — действительная функция, имеющая в интервале $a \leq x < b$ n -ю производную $f^{(n)}(x)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x) \quad (a \leq x < b), \quad (4.10-3)$$

где $|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{a \leq \xi < x} |f^{(n)}(\xi)|$ (формула Тейлора). $R_n(x)$ называется

остаточным членом формулы Тейлора.

Более точно, существует такое число $X = a + \theta(x - a)$, что $a < X < x$ (или $0 < \theta < 1$) и

$$R_n(x) = \underbrace{\int_a^x d\xi \int_a^\xi \dots \int_a^{\xi} f^{(n)}(\xi) d\xi}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(X)(x - a)^n \quad (a \leq x < b). \quad (4.10-4)$$

(остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа). X и θ зависят от a , x и n (см. также п.4.7-1). Формулы (3) и (4) остаются справедливыми и если функция $f(x)$ имеет n -ю производную в интервале $b < x \leq a$, причем здесь $b < x < X < a$.

(б) Пусть функция $f(x)$ имеет в интервале $(a - r, a + r)$ все производные, и пусть для нее в этом интервале $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x - a)^k, \quad |x - a| < r \quad (4.10-5)$$

и ряд равномерно сходится к $f(x)$ на любом промежутке $|x - a| \leq q$, где $q < r$ (разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a). Здесь по определению положено $0! = 1$ и $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Если в (5) вместо a написать x , а вместо $x - a$ написать Δx , то соотношение (5) можно переписать в виде $f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Delta x^k$ (пп.4.5-3 и 11.2-1). При $a = 0$ ряд Тейлора $(5) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k$ называется рядом Маклорена.

(в) Каждое разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням $(x - a)$, сходящийся при $a - r < x < a + r$, необходимо тождественно с (5) (п.4.10-2, с). Если $f(x)$ — рациональная функция, то ее разложение по степеням x , или по степеням $1/x$ часто получают, неограниченно продолжая процесс деления (п.1.7-2, см. также равенство (2)). Примеры разложений в степенной ряд см. в п.21.2-12.

Разложение в степенной ряд допускают почленное дифференцирование и интегрирование (см.4.10-2, в) и таким образом, оказываются полезными для интегрирования функции $f(x)$ и для решения дифференциальных уравнений (п.9.2-5). Заметим, однако, что n -я частичная

сумма $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x - a)^k$ ряда Тейлора не обязательно будет наилучшим приближением функции $f(x)$, являющимся многочленом n -й степени (см. также п.20.5-1).

Функция $f(x)$, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки a , называется аналитической в этой окрестности (см. также п.7.3-3).

4.10-5. Кратный ряд Тейлора.

(а) Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные порядка $\leq m$ в некоторой окрестности D точки a . Тогда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} (x_i - a_i) + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots + R_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n) \in D) \quad (\text{формула Тейлора}). \quad (4.10-6)$$

Остаточный член $R_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет соотношению, аналогичному равенству (4) Формулу (6) можно записать при помощи дифференциалов

$$f(a_1 + dx_1, a_2 + dx_2, a_n + dx_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = df + \frac{1}{2!} d^2f + \dots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1}f + R_m, \quad (4.10-7)$$

где все дифференциалы вычисляются в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) , а

$$R_m = \frac{1}{m!} d^m f \Big|_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} (X_i = a_i + \theta dx_i, \quad 0 < \theta < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.10-8)$$

(b) Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в D все непрерывные частные производные и $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в D , то равенство (6) приводит к разложению функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в кратный степенной ряд (кратный ряд Тейлора). Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки (a_1, a_2, \dots, a_n) , называется аналитической в этой окрестности.

4.11. РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

4.11-1. Вводные замечания. Ряды Фурье и интегралы Фурье используются для представления и/или приближения функций (п.4.10-1) во многих важных приложениях. Разложение в ряд Фурье есть частный случай разложения в ряд по ортогональным функциям (см. пп.15.2-3—15.2-6).

4.11-2. Ряды Фурье. (a) Если задан интервал разложения $-\pi < t < \pi$, то ряд Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой

существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau)| d\tau$, есть бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad (4.11-1a)$$

коэффициенты которого определяются по формулам Эйлера — Фурье

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos k\tau d\tau, & b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin k\tau d\tau, \\ c_k &= \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.11-1b)$$

Здесь a_k и b_k — действительные, а c_k — вообще говоря, комплексные числа (п.4.11-2, d).

(b) Если задан интервал разложения $-T/2 < t < T/2$, то ряд Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой существует интеграл

$\int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)| d\tau$, есть бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right), \quad (4.11-2a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos k\omega_0 \tau d\tau, & b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin k\omega_0 \tau d\tau, \\ c_k &= \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega_0 \tau} d\tau \end{aligned} \right\} (4.11-2b)$$

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right).$$

¹⁾ Во многих приложениях достаточно рассматривать интегралы в этом параграфе как интегралы Римана (п.4.6-1), но использование интеграла Лебега (п.4.6-15) делает теорию значительно шире применимой. См. в пп.15.2-3—15.2-6. ряд теорем, формулируемых специально для интеграла Лебега.

В частном случае, когда $T = 2\pi$, равенства (2) превращаются в равенства (1). Если в качестве интервала разложения выбрать интервал $(a, a + T)$, то интегралы в (2b) следует брать не между $-T/2$ и $T/2$, а между a и $a + T$.

(с)* Если существует интеграл $\int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau)]^2 d\tau$, то средняя квадратическая погрешность

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau) - P_n(\tau)]^2 d\tau,$$

где $P_n(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos k \frac{2\pi t}{T} + \beta_k \sin \frac{2\pi t}{T} \right)$ — произвольный тригонометрический многочлен, при каждом n принимает наименьшее значение, когда в качестве коэффициентов α_k, β_k многочлена $P_n(t)$ берутся соответствующие коэффициенты Фурье (2b) a_k и b_k функции $f(t)$, т. е. когда тригонометрический многочлен $P_n(t)$ есть частичная сумма

$$s_n(t) \equiv \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos k \frac{2\pi t}{T} + b_k \sin k \frac{2\pi t}{T} \right)$$

ряда Фурье функции $f(t)$ (см. также п.15.2-6).

Если тригонометрический ряд (2a) сходится к $f(t)$ в интервале $(-T/2, T/2)$ равномерно, то его коэффициенты необходимо являются коэффициентами Фурье (2b) функции $f(t)$ (теорема Эйлера).

(д)* Если абсолютная величина $|f(t)|$ интегрируема на интервале разложения, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю (теорема Римана—Лебега). Если функция $f(t)$ на всем замкнутом интервале разложения имеет непрерывные производные до $(m-1)$ -го порядка включительно, причем каждая из этих производных в концах этого интервала имеет одно и то же значение, и если m -я производная кусочно-непрерывна, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$ при $k \rightarrow \infty$ убывают не медленнее, чем m^{-k} , т. е.

$$|a_k| < \frac{C}{m^k}, \quad |b_k| < \frac{C}{m^k},$$

где C — постоянная.

(е) Действительные коэффициенты a_k и b_k и комплексные коэффициенты c_k связаны формулами

$$\left. \begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}, & b_k &= i(c_k - c_{-k}), \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{aligned} \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (4.11-3)$$

где $b_0 = 0$. Ряд Фурье (2) четной или же нечетной функции $f(t)$ (п.4.2-2, б) сводится соответственно к ряду Фурье по косинусам и к ряду Фурье по синусам.

4.11-3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье (примеры см. в табл. 4.11-3 — 4.11-5).

(а) Интеграл Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина $|f(t)|$ которой интегрируема на интервале $-\infty < t < +\infty$ (интервал разложения)¹⁾, по определению есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} c(v) e^{2\pi i vt} dv \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (4.11-4a)$$

¹⁾ См. сноску к п.4.11-2.

где

$$\left. \begin{aligned} c(\nu) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau, \\ C(\omega) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \\ \Omega(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \equiv c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (\omega = 2\pi\nu). \end{aligned} \right\} \quad (4.11-4b)$$

Функция $c(\nu)$ называется **преобразованием Фурье** $c(\nu) = \mathcal{F}[f(t)]$ функции $f(t)$. Заметим, что преобразованием Фурье функции $f(t)$ называют не только $c(\nu)$, но и $C(\omega)$ или же $\Omega(\omega)$.

(б) **Косинус- и синус-интегралы Фурье**, порожденные действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина $|f(t)|$ которой интегрируема на интервале разложения $0 < t < +\infty$, определяются соответственно как

$$\left. \begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} c_c(\omega) \cos 2\pi\nu t d\nu &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} C_c(\omega) \cos \omega t d\omega, \\ 2 \int_0^{+\infty} c_s(\nu) \sin 2\pi\nu t d\nu &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} C_s(\omega) \sin \omega t d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.11-5a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_c(\nu) &\equiv 2 \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos 2\pi\nu\tau d\tau, \\ C_c(\omega) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_c(\nu), \\ c_s(\nu) &\equiv 2 \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin 2\pi\nu\tau d\tau, \\ C_s(\omega) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_s(\nu) \quad (\omega = 2\pi\nu). \end{aligned} \right\} \quad (4.11-5b)$$

Действительные функции $c_c(\nu) \equiv \mathcal{F}_c[f(t)]$ и $c_s(\nu) \equiv \mathcal{F}_s[f(t)]$ называются соответственно **косинус-преобразованием Фурье** и **синус-преобразованием Фурье** функции $f(t)$. Часто косинус- и синус-преобразованием Фурье называют вместо этого $C_c(\omega)$ и $C_s(\omega)$.

4.11-4. Функции, разложимые в ряд Фурье и представимые интегралом Фурье. Гармонический анализ (примеры см. в табл. 4.11-1).

(а) **Ряд Фурье или интеграл Фурье**, порожденный действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина которой интегрируема на соответствующем интервале разложения I ,

1) сходится к $\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$ на каждом открытом интервале, где функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ кусочно-непрерывны (п.4.4-7, с); при этом на каждом замкнутом интервале, в котором функция непрерывна, ряд Фурье равномерно сходится к $f(t)$;

2) сходится равномерно к $f(t)$ на каждом таком интервале $(a, b) \subset (a - \delta, b + \delta) \subset I$, где $\delta > 0$, что на $(a - \delta, b + \delta)$ функция $f(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию (п.4.4-8, б);

3) сходится к $\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$ на каждом открытом интервале, содержащемся в I , на котором функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию (признак Жордана; см. также п.4.4-8, б).

Напомним, что функция $f(t)$, ограниченная и имеющая конечное число относительных максимумов, относительных минимумов и точек разрыва первого рода на некотором конечном интервале (условия Дирихле, п.4.4-8, б), является на этом интервале функцией ограниченной вариации.

(б) Гармонический анализ периодических функций. Пусть $f(t)$ — действительная периодическая функция с периодом T (п.4.2-2, б), для которой существует интеграл $\int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)| d\tau$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} = \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg c_k), \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos k\omega_0 \tau d\tau, \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, k=0, 1, 2, \dots \right) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin k\omega_0 \tau d\tau, \\ c_k &= \bar{c}_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega_0 \tau} d\tau \end{aligned} \right\} (4.11-6)$$

на каждом открытом промежутке, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, если в каждой точке разрыва $f(t)$ по определению положить

$$f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$$

(см. также п.4.4-8, б). Таким образом, функция $f(t)$ представлена в виде суммы

1) постоянного члена $(a_0/2) = c_0$ (среднего значения функции $f(t)$, см. также пп.4.6-3 и 18.9-4) и

2) некоторого множества синусоидальных членов (синусоидальных компонент) с частотами $\nu_0 = 1/T$ (основной частоты), $2\nu_0 = 2/T$ (2-й гармонической частоты), $3\nu_0 = 3/T$ (3-й гармонической частоты), ...

k -я гармоническая компонента $2|c_k| \cos\left(k \frac{2\pi t}{T} + \arg c_k\right)$ имеет частоту $k\nu_0 = k/T$, круговую частоту $k\omega_0 = 2\pi k\nu_0 = 2\pi k/T$, амплитуду $2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и «фазу» $\arg c_k = -\operatorname{arctg}(b_k/a_k)$.

Нечетные гармонические члены в разложении (6) описывают антипериодическую часть функции $f(t)$ (п.4.2-2). Отметим, что

$$\langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau)]^2 d\tau = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad (4.11-7)$$

если интеграл в левой части равенства существует (теорема Парсеваля, см. также п.15.2-4). В табл. 4.11-1 приведены коэффициенты Фурье и средние значения квадрата (7) некоторых периодических функций. По поводу численного гармонического анализа см. п.20.5-8.

• (с) Функции, представимые интегралом Фурье. Пусть $f(t)$ — действительная функция, для которой существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ c(\nu) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau, \\ C(\omega) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \\ \Omega(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \equiv c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (\omega = 2\pi\nu) \end{aligned} \right\} \quad (4.11-8)$$

на каждом открытом интервале, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, если в каждой точке разрыва $f(t)$ по определению положить

$$f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}.$$

Функция $f(t)$, имеющая преобразование Фурье $c(\nu)$, называется обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}[c(\nu)]$ функции $c(\nu)$; при данных предположениях, если функция $f(t)$ непрерывна, равенство (8) определяет $\mathcal{F}^{-1}[c(\nu)]$ однозначно.

Равенство (8) можно переписать в различных формах, например

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} |C(\omega)| \cos[\omega t + \arg C(\omega)] d\omega = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} [A(\nu) \cos 2\pi \nu t + B(\nu) \sin 2\pi \nu t] d\nu \quad (\omega = 2\pi\nu). \end{aligned} \quad (4.11-9)$$

Действительные функции $A(\nu)$ и $B(\nu)$ в (9) соответственно являются косинус-преобразованием четной части (п.4.2-2) функции $f(t)$ и синус-преобразованием нечетной части

функции $f(t)$:

$$\left. \begin{aligned} A(\nu) &= \frac{c(\nu) + c(-\nu)}{2} = \mathcal{F}_c \left[\frac{f(t) + f(-t)}{2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos 2\pi\nu\tau \, d\tau, \\ -B(\nu) &= \frac{c(\nu) - c(-\nu)}{2i} = \mathcal{F}_c \left[\frac{f(t) - f(-t)}{2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin 2\pi\nu\tau \, d\tau, \\ c(\nu) &= \overline{c(-\nu)} = A(\nu) - iB(\nu). \end{aligned} \right\} (\nu > 0) \quad (4.11-10)$$

$A(\nu) \equiv 0$, если функция $f(t)$ нечетна, а $B(\nu) \equiv 0$, если функция $f(t)$ четна (см. также п.4.11-3, б).

Представление интегралом Фурье описывает функцию $f(t)$ как сумму бесконечно малых синусоидальных компонент с частотой ν или круговой частотой $\omega = 2\pi\nu$ ($\nu > 0$); функции $2|c(\nu)|$ и $\arg c(\nu)$ соответственно определяют амплитуду и фазу этих синусоидальных компонент. Отметим, что $c(-\nu) \equiv \overline{c(\nu)}$, $C(-\omega) \equiv \overline{C(\omega)}$ и что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau)]^2 \, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |c(\nu)|^2 \, d\nu \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |C(\omega)|^2 \, d\omega, \quad (4.11-11)$$

если интеграл в левой части равенства существует (теорема Парсеваля; см. также табл. 4.11-2).

(д) Функции более общего типа могут быть представлены в виде суммы функции (8) и некоторого множества периодических функций (6), так что у них существуют как «дискретный спектр», так и «непрерывный спектр» (см. также п.18.10-1).

4.11-5. Некоторые свойства коэффициентов Фурье и преобразования Фурье (см. также пп.4.10-1 и 8.3-1).

(а) Теорема единственности. Должным образом интегрируемая функция $f(t)$ однозначно определяет свои коэффициенты Фурье (2б) или свое преобразование Фурье. Обратное, полный набор коэффициентов Фурье или преобразование Фурье однозначно определяет соответствующую функцию $f(t)$ почти всюду (п.4.6-11, б) в интервале разложения; в частности, функция $f(t)$ однозначно определена в каждой точке непрерывности в интервале разложения. Эта теорема единственности сохраняет силу даже в том случае, если ряд Фурье или интеграл Фурье не сходятся (см. также п.4.11-7).

Заметим, что не каждый тригонометрический ряд (даже не каждый сходящийся тригонометрический ряд) является рядом Фурье и не каждая функция $c(\nu)$ является преобразованием Фурье (см. также п.4.11-2, с).

(б) Операции над рядами Фурье. Пусть $f(t)$ — функция с коэффициентами Фурье a_k, b_k, c_k и $\varphi(t)$ — функция с коэффициентами Фурье $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ для одного и того же интервала разложения, и пусть λ и μ — действительные числа. Тогда функция $\lambda f(t) + \mu \varphi(t)$ имеет коэффициенты Фурье $\lambda a_k + \mu \alpha_k, \lambda b_k + \mu \beta_k, \lambda c_k + \mu \gamma_k$ (почленное сложение и умножение на число).

Почленное интегрирование ряда Фурье (2) по интервалу (t_0, t) , содержащемуся в интервале разложения, дает ряд, сходящийся к $\int_{t_0}^t f(\tau) \, d\tau$. Если $f(t)$ —

периодическая функция с периодом T , то эта теорема справедлива для любых значений t_0 и t .

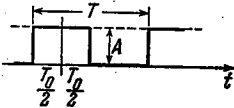
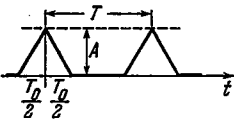
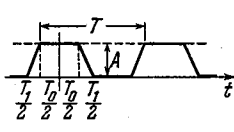
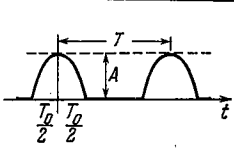
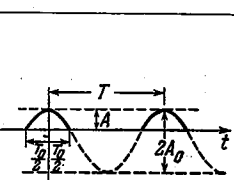
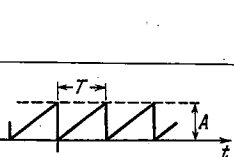
Заметим, что эти теоремы не требуют сходимости данных рядов Фурье. По поводу дифференцирования бесконечных рядов см. п.4.8-4.

(с) Свойства преобразования Фурье. Наиболее важные свойства преобразования Фурье перечислены в табл. 4.11-2 (см. также п.8.3-1). Примеры преобразований Фурье приведены в табл. 4.11-3 — 4.11-5. Значительно более подробная таблица преобразований приведена в [8.3].

Таблица 4.11-1

Коэффициенты Фурье и среднеквадратические значения периодических функций

$$[s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}]$$

	Периодическая функция, $f(t) = f(t+T)$	Коэффициенты Фурье	Среднее значение, $\langle f \rangle = \frac{a_0}{2}$	Среднеквадратическое значение, $\langle f^2 \rangle$
1	Прямоугольный импульс 	$a_n = 2A \frac{T_0}{T} s\left(\frac{nT_0}{T}\right)$ $b_n = 0$	$A \frac{T_0}{T}$	$A^2 \frac{T_0}{T}$
2	Симметричный треугольный импульс 	$a_n = A \frac{T_0}{T} s^2\left(\frac{nT_0}{2T}\right)$ $b_n = 0$	$A \frac{T_0}{2T}$	$A^2 \frac{T_0}{3T}$
3	Симметричный трапециевидный импульс 	$a_n = A \frac{T_0 + T_1}{T} \times$ $\times s\left[\frac{n(T_0 - T_1)}{2T}\right] \times$ $\times s\left[\frac{n(T_0 + T_1)}{2T}\right]$ $b_n = 0$	$A \frac{T_0 + T_1}{T}$	$A^2 \frac{2T_0 + T_1}{3T}$
4	Полусинусоидальный импульс ¹⁾ 	$a_n = A \frac{T_0}{T} \times$ $\times \left\{ s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2nT_0}{T} - 1\right)\right] + \right.$ $\left. + s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2nT_0}{T} + 1\right)\right] \right\}$ $b_n = 0$	$\frac{2}{\pi} A \frac{T_0}{T}$	$A^2 \frac{T_0}{2T}$
5	Срезанная синусоида $A = A_0 \times$ $\times \left(1 - \cos \frac{\pi T_0}{T}\right)$ 	$a_n = \frac{A_0 T_0}{T} \times$ $\times \left\{ s\left[(n-1) \frac{T_0}{T}\right] + \right.$ $\left. + s\left[(n+1) \frac{T_0}{T}\right] - \right.$ $\left. - 2 \cos \frac{\pi T_0}{T} \times \right.$ $\left. \times s\left(\frac{nT_0}{T}\right) \right\}$	$\frac{1}{\pi} A_0 \left(\sin \frac{\pi T_0}{T} \cos \frac{\pi T_0}{T} \right)$	$\frac{1}{2\pi} A_0 \left(\frac{\pi T_0}{T} \frac{3}{2} \sin \frac{2\pi T_0}{T} + \frac{\pi T_0}{T} \cos^2 \frac{\pi T_0}{T} \right)$
6	Треугольная форма сигнала 	$a_n = 0$ $b_n = -\frac{A}{n\pi} \left. \right\} n=1, 2, \dots$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A^2}{3}$

¹⁾ При $T_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, $f(t) = \frac{2}{\pi} A \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

«дететрированная» синусоида.

При $T_0 = T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f(t) = \frac{4}{\pi} A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

«выпрямленная» синусоида.

Таблица 4.11-2

Свойства преобразования Фурье

(см. также п. 4.11-3 и табл. 8.3-1)

Пусть

$$\mathcal{F}[f(t)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = c(\nu) = \sqrt{2\pi} C(2\pi\nu),$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos 2\pi \nu t dt = c_c(\nu),$$

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin 2\pi \nu t dt = c_s(\nu).$$

и предположим, что рассматриваемые преобразования Фурье существуют.

(а) $\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(t)] + \beta \mathcal{F}[f_2(t)]$ (линейность),

$$\mathcal{F}[f(t)] = \overline{c(-\nu)},$$

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} c\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (\text{теорема масштаба, теорема подобия}),$$

$$\mathcal{F}[f(t+\tau)] = e^{2\pi i \nu \tau} c(\nu) \quad (\text{теорема о сдвиге}).$$

(б) Если функция $f(t)$ непрерывна, то из $\mathcal{F}[f(t, \alpha)] \rightarrow \mathcal{F}[f(t)]$ при $\alpha \rightarrow a$ следует $f(t, \alpha) \rightarrow f(t)$ (теорема непрерывности). Аналогичные теоремы справедливы и для косинус- и синус-преобразований Фурье.(в) $\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t)] \mathcal{F}[f_2(t)] &= \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)], \\ \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] &= \mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)] \end{aligned} \right\}$ (теорема Бореля о свертке),

где

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

и

$$c_1(\nu) * c_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_1(\lambda) c_2(\nu-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} c_1(\nu-\lambda) c_2(\lambda) d\lambda$$

(п. 4.6-18).

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) e^{2\pi i \nu_0 t}] &= c(\nu - \nu_0), \\ \mathcal{F}[f(t) \cos 2\pi \nu_0 t] &= \frac{1}{2} [c(\nu - \nu_0) + c(\nu + \nu_0)], \\ \mathcal{F}[f(t) \sin 2\pi \nu_0 t] &= \frac{1}{2} [c(\nu - \nu_0) - c(\nu + \nu_0)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{теорема о модуляции}),$$

(д) $\mathcal{F}[f^{(r)}(t)] = (2\pi i \nu)^r \mathcal{F}[f(t)]$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) (теорема о дифференцировании),§ если предположить, что производная $f^{(r)}(t)$ существует при всех t и что все производные меньшего порядка при $|t| \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю.(е) Если интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2 dt$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2 dt$ существуют, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}[f_1(t)]} \mathcal{F}[f_2(t)] d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t) dt \quad (\text{теорема Парсеваля}).$$

Таблица 4.11-3

Преобразования Фурье

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$	$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
$f(t)$	$C(\omega)$
$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}, \quad \omega < a$ $0, \quad \omega > a$
$e^{i\alpha t}, \quad p < t < q$ $0, \quad t < p, \quad t > q$	$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{i q(\alpha - \omega)} - e^{i p(\alpha - \omega)}}{\omega - \alpha}, \quad \omega \neq \alpha$ $\frac{q - p}{(2\pi)^{1/2}}, \quad \omega = \alpha$
$e^{-ct + i\alpha t}, \quad t > 0$ $0, \quad t < 0 \quad (c > 0)$	$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}(\alpha - \omega + ic)}$
e^{-pt^2} $e^{-t^2/2} \quad (\text{Re } p > 0)$	$(2p)^{-1/2} e^{-\omega^2/4p}$ $e^{-\omega^2/2}$
$e^{i\alpha t^2}$ $\cos \alpha t^2 \quad (\alpha > 0)$ $\sin \alpha t^2$	$(2\alpha)^{-1/2} e^{-i\left(\frac{\omega^2}{4\alpha} - \frac{\pi}{4}\right)}$ $(2\alpha)^{-1/2} \cos\left(\frac{\omega^2}{4\alpha} - \frac{\pi}{4}\right)$ $(2\alpha)^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{4\alpha}\right)$
$ t ^{-s} \quad (0 < \text{Re } s < 1)$ $ t ^{-1/2}$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \omega ^{s-1}$ $ \omega ^{-1/2}$
$\frac{e^{-a t }}{ t ^{1/2}} \quad (a > 0)$	$\frac{[(a^2 + \omega^2)^{1/2} + a]^{1/2}}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}}$
$\frac{\text{ch } at}{\text{ch } \pi t} \quad (-\pi < a < \pi)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\cos(a/2) \text{ch}(\omega/2)}{\text{ch } \omega + \cos a}$
$\frac{\text{sh } at}{\text{sh } \pi t} \quad (-\pi < a < \pi)$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin a}{\text{ch } \omega + \cos a}$
$\frac{\text{ch } at}{\text{sh } \pi t} \quad (-\pi < a < \pi)$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\text{sh } \omega}{i(\text{ch } \omega + \cos a)}$
$\frac{\text{sh } at}{\text{ch } \pi t} \quad (-\pi < a < \pi)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(a/2) \text{ch}(\omega/2)}{i(\text{ch } \omega + \cos a)}$
$(a^2 - t^2)^{-1/2}, \quad t < a$ $0, \quad t > a$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(a\omega)$
$\frac{\sin[b(a^2 + t^2)^{1/2}]}{(a^2 + t^2)^{1/2}}$	$0, \quad \omega > b$ $(\pi/2)^{1/2} J_0(a\sqrt{b^2 - \omega^2}), \quad \omega < b$

Т а б л и ц а 4.11-3 (прод.)

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$	$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
$f(t)$	$C(\omega)$
$\frac{\cos(b\sqrt{a^2-t^2})}{(a^2-t^2)^{1/2}}, \quad t < a$ $0, \quad t > a$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(a\sqrt{\omega^2+b^2})$
$\frac{\operatorname{ch}(b\sqrt{a^2-t^2})}{(a^2-t^2)^{1/2}}, \quad t < a$ $0, \quad t > a$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(a\sqrt{\omega^2-b^2})$
$P_n(t), \quad t < 1$ $0, \quad t > 1$	$i^n \pi^{-1/2} J_{n+1/2}(\omega)$

Отметим также

$$\mathcal{F}_c[f(t) \cos 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2} [c_0(\nu + \nu_0) + c_0(\nu - \nu_0)],$$

$$\mathcal{F}_s[f(t) \sin 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2} [c_0(\nu + \nu_0) - c_0(\nu - \nu_0)],$$

$$\mathcal{F}_s[f(t) \cos 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2} [c_0(\nu + \nu_0) + c_0(\nu - \nu_0)],$$

$$\mathcal{F}_c[f(t) \sin 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2} [c_0(\nu - \nu_0) - c_0(\nu + \nu_0)],$$

$$\mathcal{F}_c[f^{(2r)}(t)] = (-1)^r (2\pi\nu)^{2r} \mathcal{F}_c[f(t)] - 2 \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j (2\pi\nu)^{2j} f^{(2r-2j-1)}(+0),$$

$$\mathcal{F}_c[f^{(2r+1)}(t)] = (-1)^r (2\pi\nu)^{2r+1} \mathcal{F}_s[f(t)] - 2 \sum_{j=0}^r (-1)^j (2\pi\nu)^{2j} f^{(2r-2j)}(+0),$$

$$\mathcal{F}_s[f^{(r)}(t)] = 2\pi\nu \mathcal{F}_c[f^{(r-1)}(t)]$$

при $r = 0, 1, 2, \dots$, предполагая, что производные в левых частях равенств существуют при $0 < t < +\infty$ и что все производные меньшего порядка при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю.

4.11-6. Интегралы Дирихле и Фейера (см. также п.4.11-7). Частичные суммы

$$s_n(t) = \frac{1}{2} a_0, \quad s_n(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos k \frac{2\pi t}{T} + b_k \sin k \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4.11-12)$$

и соответствующие средние арифметические $\sigma_{n-1}(t) \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(t)$ (п.4.8-6, с) ряда Фурье

Таблица 4.11-4

Косинус-преобразования Фурье

$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C_c(\omega) \cos \omega t d\omega$	$C_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$
$f(t)$	$C_c(\omega)$
$1, 0 \leq t < a$ $0, t > a$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin \omega a}{\omega}$
$t^{-s} (0 < \operatorname{Re} s < 1)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \omega^{s-1}$
$\cos t, 0 < t < a$ $0, t > a$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega} + \frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega} \right]$
e^{-t}	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{1+\omega^2}$
e^{-t^2}	$\frac{1}{2} e^{-\omega^2/4}$
$\cos\left(\frac{1}{2} t^2\right)$	$\cos\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\left(\frac{1}{2} t^2\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{2}\right)$
$(1-t^2)^\nu, 0 < t < 1$ $0, t > 1$ ($\operatorname{Re} \nu > -1$)	$2^\nu \Gamma(\nu+1) \omega^{-\nu-1/2} J_{\nu+1/2}(\omega)$

Примечания.

- 1) Если $C_c(\omega)$ — косинус-преобразование Фурье для $f(t)$, то $f(\omega)$ — косинус-преобразование для $C_c(t)$.
- 2) Если $f(t)$ — четная функция в интервале $(-\infty, \infty)$, то косинус-преобразование Фурье для $f(t)$ ($0 \leq t \leq \infty$) есть $C(\omega)$.
- 3) Косинус-преобразование Фурье для $f(t/a)$ есть $aC_c(a\omega)$.

Таблица 4.11-5

Синус-преобразования Фурье

$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega$	$C_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$
$f(t)$	$C_s(\omega)$
$1, 0 < t < a$ $0, t > a$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}$
$t^{-s} (0 < \text{Re } s < 2)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(1-s) \cos\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \omega^{s-1}$
e^{-t}	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\omega}{1 + \omega^2}$
$t^{n-1} e^{-at} \quad (a > 0)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (n-1)! (a^2 + \omega^2)^{-n/2} \sin(n \arctg \omega/a)$
$te^{-1/2 t^2}$	$\omega e^{-\omega^2/2}$
$\frac{\sin t}{t}$	$(2\pi)^{-1/2} \ln \left \frac{1+\omega}{1-\omega} \right $
$0, 0 < t < a$ $(t^2 - a^2)^{1/2}, t > a$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} J_0(a\omega)$
$t(1-t^2)^{\nu}, 0 < t < 1$ $0, t > 1 \quad (\text{Re } \nu > -1)$	$2^{\nu} \Gamma(\nu+1) \omega^{-\nu-1/2} J_{\nu+3/2}(\omega)$

Примечания.

1) Если $C_s(\omega)$ — синус-преобразование Фурье для $f(t)$, то $f(\omega)$ — синус-преобразование для $C_s(t)$.

2) Если $f(t)$ есть нечетная функция в интервале $(-\infty, \infty)$, то синус-преобразование Фурье для $f(t)$ ($0 < t < \infty$) есть $i C(\omega)$.

3) Синус-преобразование Фурье для $f(t/a)$ есть $a C_s(a\omega)$.

(2) можно записать в виде

$$s_n(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau) \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}} d\tau = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{f(t-\tau) + f(t+\tau)}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}} d\tau$$

$$\left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}; n=0, 1, 2, \dots\right), \quad (4.11-13)$$

$$\sigma_{n-1}(t) = \frac{1}{nT} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau) \left(\frac{\sin n\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}}\right)^2 d\tau = \frac{2}{nT} \int_0^{T/2} \frac{f(t-\tau) + f(t+\tau)}{2} \left(\frac{\sin n\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}}\right)^2 d\tau$$

$$\left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}; n=1, 2, \dots\right) \quad (4.11-14)$$

(см. также интегральную формулу Дирихле, п.21.9-А, б).

4.11-7. Суммирование средними арифметическими.

(а) Частичные суммы ряда Фурье функции $f(t)$ могут не представлять собой полезных приближений функции $f(t)$. Это, в частности, может случиться, если ряд расходится или если эти частичные суммы «отходят» от функции $f(t)$ вблизи ее точки разрыва (неравномерная сходимость вблизи точки разрыва, явление Гиббса). В этом случае можно прибегнуть к суммированию средними арифметическими (п.4.8-6, с).

Каждый ряд Фурье (2) суммируем средними арифметическими к функции $f(t)$ при всех t в интервале $(-T/2, T/2)$, для которых функция $f(t)$ непрерывна; в точках разрыва первого рода средние арифметические сходятся к $\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$ (теорема Фейера). Средние арифметические сходятся к $f(t)$

почти всюду в интервале разложения; они сходятся к $f(t)$ равномерно на каждом таком интервале $(a, b) \subset (a-\delta, b+\delta) \subset (-T/2, T/2)$, где $\delta > 0$, что функция $f(t)$ на $(a-\delta, b+\delta)$ непрерывна.

(б) Точно так же, если существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau$ и функция $f(t)$

непрерывна всюду, то средние арифметические

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \int_0^\lambda d\xi \int_{-\xi}^\xi C(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) \left(\frac{\sin\frac{\lambda\tau}{2}}{\frac{\lambda\tau}{2}}\right)^2 d\tau \quad (4.11-15)$$

равномерно сходятся при $\lambda \rightarrow +\infty$ к функции $f(t)$ на каждом ограниченном интервале. Если функция $f(t)$ равномерно непрерывна на всем интервале $(-\infty, +\infty)$, то и равномерная сходимость распространяется на интервал $(-\infty, +\infty)$.

4.11-8. Кратные ряды и интегралы Фурье.

(а) Если задана n -мерная область разложения, определяемая неравенствами $a_j < t_j < a_j + T_j$; $j = 1, 2, \dots, n$, то кратный ряд Фурье, порожденный функцией $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, для которой существует интеграл

$$\int_{a_1}^{a_1+T_1} \int_{a_2}^{a_2+T_2} \dots \int_{a_n}^{a_n+T_n} |f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)| d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n,$$

по определению есть

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1 k_2 \dots k_n} \exp \left[2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \frac{t_j}{T_j} \right], \\ c_{k_1 k_2 \dots k_n} &= \frac{1}{T_1 T_2 \dots T_n} \int_{a_1}^{a_1+T_1} \int_{a_2}^{a_2+T_2} \cdots \int_{a_n}^{a_n+T_n} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \times \\ & \times \exp \left[-2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \frac{t_j}{T_j} \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \end{aligned} \right\} (4.11-16)$$

(b) *Кратный интеграл Фурье*, порожденный функцией $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, для которой существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)| d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n,$$

по определению есть

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \exp \left[i \sum_{j=1}^n \omega_j t_j \right] \times \\ & \times d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n, \\ C(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) & \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \times \\ & \times \exp \left[-i \sum_{j=1}^n \omega_j \tau_j \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \end{aligned} \right\} (4.11-17)$$

Как и в равенстве (4), можно ввести $\nu_j = \omega_j / 2\pi$. Для областей интегрирования, определяемых неравенствами $0 < t_j < +\infty$ или $-\infty < t_j < 0$, по аналогии с п.4.11-3 получают кратные синус- и косинус-интегралы Фурье.

(c) Если задана область разложения $-\infty < t_1 < +\infty$, $a_2 < t_2 < a_2 + T_2$, то для функции $f(t_1, t_2)$ можно получить «смешанное» разложение Фурье:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(\omega_1) e^{i(\omega_1 t_1 + k \frac{2\pi t_2}{T_2})} d\omega_1, \\ C_k(\omega_1) & \equiv \frac{1}{T_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a_2}^{a_2+T_2} f(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1 \tau_1 + k \frac{2\pi \tau_2}{T_2})} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \right\} (4.11-18)$$

Аналогично можно скомбинировать интегралы Фурье и ряды Фурье (а также синус- и косинус-интегралы Фурье) и в случае более чем двух измерений.

(d) Показательные функции в (16), (17) и (18) с помощью равенств (21.2-28) могут быть представлены в виде суммы синусов и косинусов. Все теоремы пп.4.11-2 — 4.11-7 могут быть обобщены на случай кратных рядов и интегралов Фурье.

ГЛАВА 5

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

5.1. ВЕКТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В каждом классе векторов (например, перемещений, скоростей, сил, напряженностей магнитного поля) можно определить операции, известные как *сложение векторов* и *умножение их на (действительные) скаляры* (п.5.2-1), а также *скалярное умножение векторов* (п.5.2-6). Все классы векторов, обычно встречающиеся в геометрии и физике, связаны с двух- или трехмерным евклидовым пространством.

1. Векторы любого класса допускают однозначное представление в виде *перемещений* (т. е. *направленных отрезков*) в геометрическом пространстве. Это представление сохраняет соответствие между суммами векторов, произведениями их на скаляры и скалярными произведениями векторов (см. также пп.12.1-6 и 14.2-1 — 14.2-7).

2. В большинстве приложений векторы появляются как *функции точки* в геометрическом пространстве (*вектор-функции точки*, п.5.4-1).

Такие векторы, как скорости и силы, обычно впервые определяются на геометрическом языке как «величины, обладающие длиной и направлением», или, несколько точнее, как величины, которые могут быть представлены в виде направленных отрезков, складывающихся по «правилу параллелограмма». Такой геометрический подход, общий для большинства элементарных курсов, использован в пп.5.2-1 и 5.2-8 при введении основных операций над векторами. Рассмотрение векторов с более общей точки зрения дано в п.12.4-1 и в гл. 14.

Векторный анализ изучает векторные (и скалярные) функции. Любой вектор может быть задан набором числовых функций (*координат вектора*) в соответствующей базисной системе (пп.5.2-2, 5.2-3, 5.4-1 и 6.3-1).

З а м е ч а н и е. Описание физического состояния векторными величинами следует рассматривать не только как способ сокращенной записи системы координатных уравнений одним уравнением, но и как пример математической модели, существенные элементы которой не ограничиваются числами. Заметим также, что класс объектов, допускающих взаимно однозначное соответствие с классом направленных отрезков, может и не являться векторным пространством, если у него нет описанных выше алгебраических свойств (п р и м е р: конечные вращения).

5.2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

5.2-1. Сложение векторов и умножение вектора на (действительный) скаляр. Векторная сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} одного класса есть вектор, соответствующий геометрической сумме соответственных направленных отрезков (*правило параллелограмма*). Произведение вектора \mathbf{a} на действительное число (скаляр) α есть вектор, соответствующий направленному отрезку, в $|\alpha|$ раз более длинному, чем отрезок, соответствующий вектору \mathbf{a} , и

направленному в случае отрицательного α в сторону, противоположную вектору \mathbf{a} . Нулевой вектор $\mathbf{0}$ каждого класса векторов соответствует перемещению нулевой длины, и $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Определенные таким образом сложение векторов и умножение их на скаляры удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}; & \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}; \\ \alpha(\beta\mathbf{a}) &= (\alpha\beta)\mathbf{a}; & (\alpha + \beta)\mathbf{a} &= \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}; & \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}; \\ 1\mathbf{a} &= \mathbf{a}; & (-1)\cdot\mathbf{a} &= -\mathbf{a}; & 0\mathbf{a} &= \mathbf{0}; & \mathbf{a} - \mathbf{a} &= \mathbf{0}; & \mathbf{a} + \mathbf{0} &= \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2-1)$$

Обобщение векторной алгебры см. пп.14.2-1—14.2-4.

5.2-2. Разложение векторов по базисным векторам. m векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ линейно независимы, если из

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

следует

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

В противном случае эти векторы линейно зависимы (см. также пп.1.9-3 и 14.2-3). Любой вектор \mathbf{a} трехмерного векторного пространства может быть разложен по трем линейно независимым векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е. представлен в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3. \quad (5.2-2)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются **координатами** вектора \mathbf{a} по отношению к **базису**, определенному **базисными векторами** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (см. также п.14.2-4).

Если базисная система задана, то векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ представляются упорядоченными тройками $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \dots$ их координат; при этом $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{a}$ представляются соответственно тройками $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$ и $(\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3)$. Соотношения между векторами могут быть выражены через соответствующие системы соотношений между их координатами.

Векторы, принадлежащие двумерному векторному пространству (например, плоские перемещения), представляются подобным образом упорядоченными парами координат.

Для разложения векторов, определенных в данной точке пространства (п.5.4-1), обычно выбирают базис, связанный с используемой координатной системой. В гл. 6 специально рассматривается разложение векторов по векторам локального базиса, направленным по координатным линиям криволинейной системы координат в каждой точке, и перпендикулярно к ним; величины и направления векторов локального базиса, вообще говоря, различны в различных точках. Формулы преобразования координат вектора, заданных в различных базисах, даны в табл. 6.3-1 и в п.14.6-1.

5.2-3. Декартовы прямоугольные координаты вектора. Если в пространстве задана правая прямоугольная система декартовых координат (п.3.1-4), то единичные векторы (п.5.2-5) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ осей Ox, Oy и Oz соответственно образуют удобную систему базисных векторов. Координаты a_x, a_y, a_z вектора

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (5.2-3)$$

называются **декартовыми прямоугольными координатами вектора \mathbf{a}** .

Заметим, что эти координаты

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}$$

(п.5.2-6) являются проекциями вектора \mathbf{a} ; координаты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ любого единичного вектора и являются его направляющими косинусами (п.3.1-8).

5.2-4. Векторы и физические размерности. Векторы можно умножать не только на безразмерные скаляры (например, постоянный вектор скорости умножают на интервал времени, чтобы получить вектор перемещения). Если физическая величина есть вектор (2) или (3), то ее физическую размерность целесообразно приписать координатам вектора, а не базисным векторам. При этом последние рассматриваются как безразмерные величины и могут быть использованы в качестве общей базисной системы для различных классов векторов, имеющих различные физические размерности (например, перемещения, скорости, силы и т.п.; см. также п. 16.1-4).

5.2-5. Модуль (норма, абсолютная величина, длина) вектора. Модуль $|\mathbf{a}|$ вектора \mathbf{a} в евклидовом пространстве есть скаляр, пропорциональный длине перемещения, соответствующего вектору \mathbf{a} (п.5.1-1; абстрактное определение см. пп.14.2-5 и 14.2-7). Модуль вектора удовлетворяет соотношениям (1.1-4). Вектор, модуль которого равен 1, называется **единичным вектором** или **ортом**. (Попарно перпендикулярные) базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (п.5.2-3) являются единичными, так что

$$\left. \begin{aligned} |a_x \mathbf{i}| &= |a_x|, & |a_y \mathbf{j}| &= |a_y|, & |a_z \mathbf{k}| &= |a_z|, \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2-4)$$

5.2-6. Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов. Скалярное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ [другое обозначение (\mathbf{a}, \mathbf{b})] двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} есть скаляр

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \gamma, \quad (5.2-5)$$

где γ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} (абстрактное определение см. пп.14.2-6 и 14.2-7).

Если \mathbf{a} и \mathbf{b} — физические величины, то физическая размерность скалярного произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ должна быть указана (см. также п.5.2-4). В табл. 5.2-1 приведены основные соотношения для скалярного произведения. Два ненулевых вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Т а б л и ц а 5.2-1

Свойства скалярного произведения

(а) Основные соотношения

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}; \quad (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b});$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = |\mathbf{a}|^2 > 0; \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|; \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{a^2 b^2}}.$$

(б) Выражение в прямоугольных декартовых координатах (п.5.2-3)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

5.2-7. Векторное произведение двух векторов. Векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (другое обозначение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$) двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} есть вектор, модуль которого равен

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma; \quad (5.2-6)$$

его направление перпендикулярно к обоим векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от \mathbf{a} к \mathbf{b} на угол меньший π . Два вектора линейно зависимы (п.5.2-2) тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю. В табл. 5.2-2 приведены основные соотношения для векторного произведения. Более общее определение векторного произведения см. п.16.8-4; в пп.3.1-10 и 17.3-3 даны представления площади области как вектора.

Таблица 5.2-2

Свойства векторного произведения

(а) Основные соотношения

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}; \quad (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

(б) Выражение в любом базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 & \alpha_1 \beta_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 & \alpha_2 \beta_2 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 & \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix}.$$

(с) Выражение в прямоугольных декартовых координатах

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j};$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

5.2-8. Смешанное (векторно-скалярное) произведение.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv [\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}], \quad (5.2-7)$$

$$[\mathbf{abc}]^2 = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 - \mathbf{b}^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})^2 - \mathbf{c}^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 +$$

$$+ 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} \quad (\text{определитель Грама, см. п.14.2-6}) \quad (5.2-8)$$

$$[\mathbf{abc}][\mathbf{def}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix}. \quad (5.2-9)$$

В любом базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (п.5.2-2, см. также пп.5.2-3 и 6.3-4)

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]. \quad (5.2-10)$$

В правой системе декартовых прямоугольных координат

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \quad (> 0, \text{ если векторы } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ образуют правую тройку}). \quad (5.2-11)$$

5.2-9. Другие произведения, содержащие более двух векторов.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} \quad (\text{двойное векторное произведение}), \quad (5.2-12)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}, \quad (5.2-13)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \quad (5.2-14)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{acd}] \mathbf{b} - [\mathbf{bcd}] \mathbf{a} = [\mathbf{abd}] \mathbf{c} - [\mathbf{abc}] \mathbf{d}. \quad (5.2-15)$$

5.2-10. Разложение вектора \mathbf{a} по направлению единичного вектора \mathbf{u} и ему перпендикулярному:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u}). \quad (5.2-16)$$

5.2-11. Решение уравнений ($[\mathbf{abc}] \neq 0$).

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = p, \\ \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}, \end{array} \right\} \mathbf{x} = \mathbf{a} \frac{p}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}; \quad (5.2-17)$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = p, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = q, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = r, \end{array} \right\} \mathbf{x} = \frac{p(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + q(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + r(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{[\mathbf{abc}]}; \quad (5.2-18)$$

$$(c) \quad \mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz} + \mathbf{d} = 0, \\ \mathbf{x} = -\frac{[\mathbf{dbc}]}{[\mathbf{abc}]}; \quad \mathbf{y} = -\frac{[\mathbf{adc}]}{[\mathbf{abc}]}; \quad \mathbf{z} = -\frac{[\mathbf{abd}]}{[\mathbf{abc}]}; \quad (5.2-19)$$

$$(d) \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{x} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{y} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{z} + \mathbf{d} = 0, \\ \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}}{[\mathbf{abc}]}; \quad \mathbf{y} = -\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}}{[\mathbf{abc}]}; \quad \mathbf{z} = -\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]} \quad (5.2-20)$$

5.3. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

5.3-1. Векторные функции и их пределы. Векторная функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ скалярного аргумента t ставит в соответствие каждому значению аргумента t из области определения (см. также п.4.2-1) одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) «значений» вектора \mathbf{v} . В прямоугольных декартовых координатах

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{j} + v_z(t) \mathbf{k}. \quad (5.3-1)$$

Вектор-функция $\mathbf{v}(t)$ **ограничена**, если ограничен ее модуль $|\mathbf{v}(t)|$. Она имеет предел $\mathbf{v}_1 = \lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{v}(t)$, если для каждого положительного числа ε существует такое число δ , что из $0 < |t - t_1| < \delta$ следует $|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_1| < \varepsilon$ (см. также пп.4.4-1 и 12.5-3). Если $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{v}(t)$ существует, то

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{v}(t) = \mathbf{i} \lim_{t \rightarrow t_1} v_x(t) + \mathbf{j} \lim_{t \rightarrow t_1} v_y(t) + \mathbf{k} \lim_{t \rightarrow t_1} v_z(t). \quad (5.3-2)$$

Предел суммы векторов, скалярного и векторного произведений находится по формулам, аналогичным формулам п.4.4-2.

Вектор-функция $\mathbf{v}(t)$ **непрерывна** при $t = t_1$, если $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_1)$ (см. также пп.4.4-6 и 12.5-3).

5.3-2. Дифференцирование. Векторная функция $\mathbf{v}(t)$ дифференцируема при данном значении t , если существует конечная производная (см. также п.4.5-1):

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \quad (5.3-3)$$

Если производная $\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}$ от $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ существует, она называется **второй производной** от $\mathbf{v}(t)$ и т. д. Табл. 5.3-1 содержит основные правила дифференцирования.

Аналогичные правила применимы к вычислению *частных производных* $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_1} \equiv \mathbf{v}_1, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_2} \equiv \mathbf{v}_2, \dots$ векторной функции $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_1, t_2, \dots)$ от двух или более скалярных аргументов t_1, t_2, \dots

Таблица 5.3-1

Дифференцирование векторной функции скалярного аргумента

(а) Основные правила

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [v(t) \pm w(t)] &= \frac{dv}{dt} \pm \frac{dw}{dt}; & \frac{d}{dt} [\alpha v(t)] &= \alpha \frac{dv}{dt} \quad (\alpha = \text{const}) \\ \frac{d}{dt} [f(t)v(t)] &= \frac{df}{dt} v(t) + f(t) \frac{dv}{dt}; & \frac{d}{dt} [v(t) \cdot w(t)] &= \frac{dv}{dt} \cdot w + v \cdot \frac{dw}{dt}; \\ \frac{d}{dt} [v(t) \times w(t)] &= \frac{dv}{dt} \times w + v \times \frac{dw}{dt}; & \frac{d}{dt} v[f(t)] &= \frac{dv}{df} \frac{df}{dt}; \\ \frac{d}{dt} [v(t) w(t) u(t)] &= \left[\frac{dv}{dt} w u \right] + \left[v \frac{dw}{dt} u \right] + \left[v w \frac{du}{dt} \right]. \end{aligned}$$

(б) В прямоугольных декартовых координатах

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \mathbf{k}.$$

(в) Если базисные векторы $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ — функции от t и $v(t) = \alpha_1(t) e_1(t) + \alpha_2(t) e_2(t) + \alpha_3(t) e_3(t)$, то

$$\frac{dv(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} e_1 + \frac{d\alpha_2}{dt} e_2 + \frac{d\alpha_3}{dt} e_3 \right) + \left(\alpha_1 \frac{de_1}{dt} + \alpha_2 \frac{de_2}{dt} + \alpha_3 \frac{de_3}{dt} \right).$$

З а м е ч а н и е. Если $v^0(t)$ — орт вектора $v(t)$:

$$v(t) = |v(t)| v^0(t),$$

то

$$\frac{dv^0}{dt} = \omega \times v^0 \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d|v|}{dt} v^0 + |v| \frac{dv^0}{dt} = \frac{d|v|}{dt} v^0 + \omega \times v, \quad (5.3-4)$$

где вектор ω направлен (по правилу правого винта) вдоль оси, вокруг которой поворачивается вектор $v(t)$, и имеет длину, равную *угловой скорости поворота вектора $v(t)$ по отношению к t* . (Пр и м е р: вектор *угловой скорости* в физике; см. также п.1.7.2-3). В формуле (4) первое слагаемое характеризует изменение длины вектора $v(t)$, а второе слагаемое — изменение его направления. Если $|v(t)| = \text{const}$, то векторы $v(t)$ и $\frac{dv}{dt}$ перпендикулярны.

5.3-3. Интегрирование и обыкновенные дифференциальные уравнения. Неопределенный интеграл $V(t) = \int v(t) dt$ от векторной функции $v(t)$ определяется как решение векторного дифференциального уравнения (см. также п.9.1-1):

$$\frac{d}{dt} V(t) = v(t), \quad (5.3-5)$$

которое можно заменить системой дифференциальных уравнений для координат вектора $V(t)$. Другие обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие производные от векторной функции скалярного аргумента, трактуются подобным же образом.

Определенный интеграл

$$\left. \int_a^b v(t) dt = \lim_{\max |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) (t_i - t_{i-1}), \right\} \quad (5.3-6)$$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

$$t_{i-1} < \tau_i < t_i$$

где

и

(см. также п.4.6-1), может быть выражен через координаты

$$\int_a^b v(t) dt = \mathbf{i} \int_a^b v_x(t) dt + \mathbf{j} \int_a^b v_y(t) dt + \mathbf{k} \int_a^b v_z(t) dt. \quad (5.3-7)$$

5.4. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

5.4-1. Вводные замечания. Конец этой главы посвящен скалярным и векторным функциям точки в евклидовом трехмерном пространстве. Если не оговорено противное, скалярные и векторные функции предполагаются однозначными, непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз. Соотношения между скалярными и векторными функциями устанавливаются:

- 1) в инвариантной форме (независимо от системы координат) и
- 2) в координатной форме по отношению к правой прямоугольной декартовой системе координат (п.5.2-3), так что¹⁾

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{F}(x, y, z) \equiv F_x(x, y, z) \mathbf{i} + F_y(x, y, z) \mathbf{j} + F_z(x, y, z) \mathbf{k}. \quad (5.4-1)$$

Соотношения в пп.5.4-2 – 5.7-3 не зависят от выбора системы координат в пространстве. Запись векторных соотношений в локальных базисах систем криволинейных координат рассматривается в гл. 6.

5.4-2. Скалярные поля. Скалярное поле есть скалярная функция точки $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(x, y, z)$ вместе с областью ее определения. Поверхности

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(x, y, z) = \text{const} \quad (5.4-2)$$

(п.3.1-14) называются **поверхностями уровня** поля; они позволяют представить поле геометрически.

5.4-3. Векторные поля. Векторное поле есть векторная функция точки $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ вместе с областью ее определения. Векторные линии (линии тока) в каждой точке (\mathbf{r}) имеют направление вектора поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и определяются дифференциальными уравнениями

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \quad (5.4-3)$$

Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ может быть представлено геометрически своими векторными линиями, относительная плотность которых в каждой точке (\mathbf{r}) пропорциональна модулю $|\mathbf{F}(\mathbf{r})|$.

5.4-4. Векторный элемент линии и длина дуги (см. также п.4.6-9).

(а) **Векторный элемент линии** (дифференциал радиуса-вектора) $d\mathbf{r}$ вдоль кривой C , описываемой уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (5.4-4)$$

определяется в каждой точке ($\mathbf{r}) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$ формулой

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) dt = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt. \quad (5.4-5)$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к кривой C в каждой регулярной точке (см. также п.17.2-2).

(б) **Длина дуги** s спрямляемой кривой (4) (п.4.6-9) выражается формулой

$$s = \int_{t_0}^t ds,$$

¹⁾ Всюду в гл. 5 и 6 индексы в обозначениях F_x, F_y, F_z, \dots не указывают на дифференцирование по x, y, z, \dots

где

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} dt \end{aligned} \quad (5.4-6)$$

в каждой регулярной точке $(\mathbf{r}) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$ кривой C .

5.4-5. Криволинейные (линейные) интегралы (см. также п.4.6-10). Для спрямляемой дуги C , заданной уравнением (4), скалярные интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_C \Phi(\mathbf{r}) ds &= \int_C \Phi(x, y, z) ds = \int_C \Phi[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt, \\ \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_C \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (5.4-7)$$

можно определить непосредственно как пределы сумм тем же способом, что и в п. 4.6-10; однако более удобно подставить функции $x(t), y(t), z(t); \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ из формул (4) в формулу (7) и интегрировать по t .

Подобным же образом определяются и векторные криволинейные интегралы

$$\begin{aligned} \int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \mathbf{i} \int_C \phi(x, y, z) dx + \mathbf{j} \int_C \phi(x, y, z) dy + \mathbf{k} \int_C \phi(x, y, z) dz = \\ &= \int_C \phi(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_C \left[\phi(x, y, z) \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \phi(x, y, z) \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \phi(x, y, z) \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right] dt, \quad (5.4-8) \\ \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \\ &= \mathbf{i} \int_C (F_y dz - F_z dy) + \mathbf{j} \int_C (F_z dx - F_x dz) + \mathbf{k} \int_C (F_x dy - F_y dx) = \\ &= \int_C \left[\left(F_y \frac{dz}{dt} - F_z \frac{dy}{dt} \right) \mathbf{i} + \left(F_z \frac{dx}{dt} - F_x \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{j} + \left(F_x \frac{dy}{dt} - F_y \frac{dx}{dt} \right) \mathbf{k} \right] dt. \quad (5.4-9) \end{aligned}$$

Значение скалярного или векторного криволинейного интеграла зависит от пути интегрирования C , если только не выполнены специальные условия п.5.7-1.

Применение криволинейных координат см. пп.6.2-3 и 6.4-3.

З а м е ч а н и е. Часто оказывается полезным в качестве нового параметра в выражениях (7), (8), (9) ввести длину дуги s с помощью формулы (6).

5.4-6. Поверхностные интегралы (см. также пп.4.6-12 и 17.3-3, с).

(а) В каждой регулярной точке двусторонней поверхности, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ (п.3.1-14), можно определить **векторный элемент**

поверхности (вектор площадки)

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \mathbf{k} \right] du dv. \quad (5.4-10)$$

В случае замкнутой поверхности координаты u, v на поверхности обычно упорядочивают так, чтобы направление вектора $d\mathbf{S}$ (направление положительной нормали к поверхности, п.17.3-2) было *внешним по отношению к телу, ограниченному данной поверхностью*.

Элемент площади поверхности в точке (u, v) определяется так:

$$dS = |d\mathbf{S}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (5.4-11)$$

В частности, при $u=x, v=y, z=z(x, y)$

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy, \quad dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} dx dy. \quad (5.4-12)$$

(b) В дальнейшем предполагается, что площадь $\int_S dS$ (п.4.6-11) рассматриваемой поверхности S существует; в этом случае формула (10) определяет элемент $d\mathbf{S}$ почти всюду на S (п.4.6-14, b). Скалярные поверхностные интегралы

$$\int_S \Phi(\mathbf{r}) dS \quad \text{и} \quad \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.4-13)$$

и векторные поверхностные интегралы

$$\int_S \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{S} \quad \text{и} \quad \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} \quad (5.4-14)$$

от функций $\Phi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, заданных на поверхности, могут быть определены непосредственно как пределы сумм так же, как в пп.4.6-1, 4.6-10 и 5.3-3. Однако удобнее применить формулу (10), чтобы выразить каждый поверхностный интеграл через двойной интеграл по координатам u, v (см. также п.6.4-3, b). Иногда в формулах (13) и (14) вместо одного знака интеграла пишут два, например $\iint_S \Phi(\mathbf{r}) dS$. Скалярный поверхностный интеграл $\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ называется

поток вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ через поверхность S . Заметим, что

$$\int_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S F_x[x(y, z), y, z] dy dz + \iint_S F_y[x(y, z), y, z] dx dz + \iint_S F_z[x, y, z(x, y)] dx dy. \quad (5.4-15)$$

В первом интеграле независимые переменные $u=y, v=z$, во втором интеграле $u=z, v=x$ и т. д. (см. также формулу (12)).

Формально к такому же результату приводит запись $d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}$, но она требует специальных оговорок относительно смысла dx, dy, dz .

5.4-7. Объемные интегралы (см. также п.4.6-12). Если дана область V в трехмерном евклидовом пространстве, то скалярный объемный интеграл

$$\int_V \Phi(\mathbf{r}) dV = \iiint_V \Phi(x, y, z) dx dy dz \quad (5.4-16)$$

и векторный объемный интеграл

$$\int_V \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \iiint_V [F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k}] dx dy dz \quad (5.4-17)$$

могут быть определены как пределы сумм тем же способом, что и в п.4.6-1; они могут быть также выражены непосредственно через тройные интегралы по x, y, z . О применении криволинейных координат см. пп.6.2-3, б и 6.4-3, с.

5.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.5-1. Градиент, дивергенция и ротор; инвариантные определения. Градиент скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(x, y, z)$ есть векторная функция точки, определяемая формулой

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla \Phi \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{S_1} \Phi(\mathbf{r}_1) dS}{\int_{V_1} dV}, \quad (5.5-1)$$

где V_1 — область, содержащая точку (\mathbf{r}) , S_1 — замкнутая поверхность, ограничивающая область V_1 , δ — наибольшее расстояние от точки (\mathbf{r}) до точек поверхности S_1 .

Дивергенция векторной функции точки $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть скалярная функция точки, определяемая формулой

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{S_1} dS \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)}{\int_{V_1} dV}. \quad (5.5-2)$$

Ротор векторной функции точки $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть векторная функция точки, определяемая формулой

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{S_1} dS \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)}{\int_{V_1} dV}. \quad (5.5-3)$$

З а м е ч а н и е. В каждой точке, где существует вектор $\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \neq 0$, его модуль

$$|\nabla \Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} \quad (5.5-4)$$

равен наибольшей производной по направлению $\frac{d\Phi}{ds}$ в этой точке, а его направление совпадает с направлением, в котором эта наибольшая производная достигается (п.5.5-3, с). Векторные линии поля $\text{grad } \Phi$ определяются уравнениями

$$d\mathbf{r} \times \nabla \Phi = 0 \quad \text{или} \quad dx : dy : dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (5.5-5)$$

Линии градиента, определяемые этими уравнениями, перпендикулярны к поверхностям уровня (5.4-2).

5.5-2. Оператор ∇ . В прямоугольных декартовых координатах линейный оператор ∇ (набла) определяется формулой

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (5.5-6)$$

Его применение к скалярным и векторным функциям точки формально соответствует некоммутативной операции умножения на вектор с декартовыми координатами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(x, y, z) &\equiv \text{grad } \Phi(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k}, \\ \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &\equiv \text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \\ \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &\equiv \text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (5.5-7)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \cdot \nabla) \Phi &= G_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + G_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + G_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} &= G_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \\ &= (\mathbf{G} \cdot \nabla F_x) \mathbf{i} + (\mathbf{G} \cdot \nabla F_y) \mathbf{j} + (\mathbf{G} \cdot \nabla F_z) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

В таблице 5.5-1 приведены правила действий с оператором ∇ .

Таблица 5.5-1

Правила действий с оператором ∇

(а) Линейность ($\alpha = \text{const}$)

$$\begin{aligned} \nabla(\phi + \psi) &= \nabla\phi + \nabla\psi; & \nabla(\alpha\phi) &= \alpha\nabla\phi; \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}; & \nabla \cdot (\alpha\mathbf{F}) &= \alpha\nabla \cdot \mathbf{F}; \\ \nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}; & \nabla \times (\alpha\mathbf{F}) &= \alpha\nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

(б) Действия с произведениями

$$\begin{aligned} \nabla(\phi\psi) &= \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi; \\ \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}); \\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) &= \phi\nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F}; \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}; \\ (\mathbf{G} \cdot \nabla)\phi\mathbf{F} &= \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \nabla\phi) + \phi(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}; \\ \nabla \times (\phi\mathbf{F}) &= \phi\nabla \times \mathbf{F} + \nabla\phi \times \mathbf{F}; \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}); \\ (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} &= \frac{1}{2} [\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \\ &\quad - \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})]. \end{aligned}$$

Заметим, что векторные соотношения, содержащие $\nabla\phi$, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и $\nabla \times \mathbf{F}$, не зависят от выбора системы координат. Выражение операций $\nabla\phi$, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и $\nabla \times \mathbf{F}$ в различных системах координат см. в гл. 6 и п.16.10.7.

5.5-3. Полный дифференциал, полная производная и производ по направлению.

(а) **Полный дифференциал** $d\Phi$ скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r})$, соответствующий перемещению точки $d\mathbf{r} \equiv dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, есть

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \Phi = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \Phi \quad (5.5-8)$$

(см. также п.4.5-3, а)

(б) **Полная производная** $\frac{d\Phi}{dt}$ функции $\Phi(\mathbf{r})$ вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ есть скорость изменения функции $\Phi(\mathbf{r})$ по отношению к параметру t , когда \mathbf{r} изменяется как функция от t (см. также табл. 4.5-2, а):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \Phi, \quad (5.5-9)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

З а м е ч а н и е. Если функция Φ явно зависит от t , т.е. $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (5.5-10)$$

(с) **Производная по направлению** $\frac{d\Phi}{ds}$ от скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r})$ есть скорость изменения функции по отношению к величине перемещения s точки (\mathbf{r}) вдоль выбранного направления. Если направление задано единичным вектором $\mathbf{u} \equiv \cos \alpha_x \mathbf{i} + \cos \alpha_y \mathbf{j} + \cos \alpha_z \mathbf{k}$ с направляющими косинусами $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$, $\cos \alpha_z$ (п.3.1-8, а), то производная по этому направлению равна

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cos \alpha_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cos \alpha_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \cos \alpha_z = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi; \quad (5.5-11)$$

$\frac{d\Phi}{ds}$ есть полная производная от функции $\Phi(\mathbf{r})$ по длине дуги s кривой, касающейся вектора $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$.

(д) **Полный дифференциал, полная производная и производная по направлению** от векторной функции точки $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определяются аналогично:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{F} &= (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) F_x \mathbf{i} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) F_y \mathbf{j} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) F_z \mathbf{k} = dF_x \mathbf{i} + dF_y \mathbf{j} + dF_z \mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) F_x \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) F_y \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) F_z \mathbf{k} = \frac{dF_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dF_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dF_z}{dt} \mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{F}}{ds} &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{F} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) F_x \mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F_y \mathbf{j} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F_z \mathbf{k} = \frac{dF_x}{ds} \mathbf{i} + \frac{dF_y}{ds} \mathbf{j} + \frac{dF_z}{ds} \mathbf{k} \quad \left(\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.5-12)$$

5.5-4. Производные высших порядков по направлению. Ряд Тейлора. Производные порядка n от функций Φ и \mathbf{F} по направлению единичного вектора \mathbf{u} определяются формулами

$$\frac{d^n}{ds^n} \Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)^n \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \frac{d^n}{ds^n} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)^n \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (5.5-13)$$

Если рассматриваемые ниже ряды сходятся, то (см. также п.4.10-5)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) &= \Phi(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 \Phi(\mathbf{r}) + \dots = \\ &= e^{(\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)} \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{r} \cdot \frac{d}{ds} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\Delta\mathbf{r})^2 \frac{d^2}{ds^2} \Phi(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (5.5-14a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots = e^{(\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{r} \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\Delta\mathbf{r})^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.5-14b)$$

где все производные по направлению берутся в точке (\mathbf{r}) в направлении $\Delta\mathbf{r}$.

5.5-5. Оператор Лапласа. Оператор Лапласа (лапласиан) $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ (обозначаемый иногда через Δ) выражается в декартовых прямоугольных координатах формулой

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.5-15)$$

(другие выражения см. гл. 6 и п.16.10-7). Этот оператор может быть применен к скалярным и векторным функциям точки с помощью некоммутативного «умножения»:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(x, y, z), \\ \nabla^2 \mathbf{F} &\equiv \nabla^2 F_x \mathbf{i} + \nabla^2 F_y \mathbf{j} + \nabla^2 F_z \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5-16)$$

Заметим, что

$$\nabla^2(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla^2\Phi + \beta\nabla^2\Psi \quad (\text{линейность}), \quad (5.5-17)$$

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Psi\nabla^2\Phi + 2(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Psi) + \Phi\nabla^2\Psi. \quad (5.5-18)$$

5.5-6. Операции второго порядка. Отметим следующие правила повторного применения оператора ∇ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi &= \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla^2\mathbf{F} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}), \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi &= \nabla \times (\nabla\Phi) = 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5-19)$$

5.5-7. Операции над простейшими функциями от r . В табл. 5.5-2 и 5.5-3 приведены результаты применения дифференциальных операций к некоторым простейшим скалярным и векторным функциям от радиуса-вектора \mathbf{r} . Дополнительные формулы могут быть получены с помощью табл. 5.5-1. Отметим еще формулы

$$\{\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\} \mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (5.5-20)$$

$$\nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{при} \quad \mathbf{a} = \text{const.} \quad (5.5-21)$$

Т а б л и ц а 5.5-2

Операции над скалярными функциями

($r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{a} = \text{const}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Φ	$\nabla\Phi$	$\nabla^2\Phi$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$	\mathbf{a}	0
r^n	$nr^{n-2}\mathbf{r}$	$n(n+1)r^{n-2}$
$\ln r$	$\frac{\mathbf{r}}{r^2}$	$\frac{1}{r^2}$

Т а б л и ц а 5.5-3

Операции над векторными функциями

F	$\nabla \cdot F$	$\nabla \times F$	$(G \cdot \nabla)F$	$\nabla^2 F$	$\nabla(\nabla \cdot F)$
r	3	0	G	0	0
$a \times r$	0	2a	$a \times G$	0	0
ar^n	$nr^{n-2}(r \cdot a)$	$nr^{n-2}(r \times a)$	$nr^{n-2}(r \cdot G)a$	$n(n+1)r^{n-2}a$	$nr^{n-2}a + n(n-2)r^{n-4}(r \cdot a)r$
rr^n	$(n+3)r^n$	0	$r^n G + nr^{n-2}(r \cdot G)r$	$n(n+3)r^{n-2}r$	$n(n+3)r^{n-2}r$
$a \ln r$	$\frac{r \cdot a}{r^2}$	$\frac{r \times a}{r^2}$	$\frac{(G \cdot r)a}{r^2}$	$\frac{a}{r^2}$	$\frac{a}{r^2} - \frac{2(r \cdot a)r}{r^4}$

5.5-8. Функции от двух и более радиусов-векторов. В типичном случае двух радиусов-векторов $r \equiv (x, y, z)$ и $\rho \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ к функциям вида $\Phi(r, \rho) \equiv \Phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$, $F(r, \rho) \equiv F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ могут быть применены два различных оператора ∇ :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k; \quad \nabla_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} i + \frac{\partial}{\partial \eta} j + \frac{\partial}{\partial \zeta} k.$$

В частности, имеем

$$\left. \begin{aligned} \nabla \Phi(r-\rho) &= -\nabla_\rho \Phi(r-\rho), \\ \nabla \cdot F(r-\rho) &= -\nabla_\rho \cdot F(r-\rho), \\ \nabla \times F(r-\rho) &= -\nabla_\rho \times F(r-\rho). \end{aligned} \right\} \quad (5.5-22)$$

5.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

5.6-1. Теорема о дивергенции *) и связанные с ней теоремы.

(а) В табл. 5.6-1 собраны важнейшие теоремы, связывающие объемные интегралы по области V и поверхностные интегралы по границе S этой области. Область V предполагается ограниченной и пространственно-односвязной (п.4.3-6), поверхность S — замкнутой и регулярной (п.3.1-14), функции — однозначными и непрерывными в V и на S , причем все частные производные, встречающиеся в объемных или поверхностных интегралах, предполагаются непрерывными соответственно в V или на S . Все теоремы остаются справедливыми и для неограниченной области, если подынтегральные функции в поверхностных интегралах имеют порядок $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ при $r \rightarrow \infty$ (п.4.4-3). Формулы

для поверхностных и объемных интегралов в системах криволинейных координат см. гл. 6 и п.17.3-3; приложения см. пп.15.6-5 и 15.6-10.

Словесная формулировка теоремы о дивергенции (теоремы Гаусса—Остроградского) такова. Поток вектора через замкнутую поверхность (п.5.4-6) равен интегралу от дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью.

(б) Замечание о нормальной производной. Нормальная производная от скалярной функции $\Phi(r)$ в регулярной точке поверхности S есть производная по направлению положительной нормали, т. е. dS (если поверхность замкнута, то обычно берут внешнюю нормаль, п.17.3-2).

*) Эта теорема в отечественной литературе называется теоремой Гаусса—Остроградского.

Таблица 5.6-1

Теоремы, связывающие объемные и поверхностные интегралы

1. Теорема о дивергенции	$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$
2. Теорема о роторе	$\int_V \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$
3. Теорема о градиенте	$\int_V \nabla \phi(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \phi(\mathbf{r})$
4. Теоремы Грина	$\int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi dV + \int_V \psi \nabla^2 \phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\psi \nabla \phi) =$ $= \int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS,$ $\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) =$ $= \int_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$
5. Частные случаи	$\int_V \nabla^2 \phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \phi = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (\text{теорема Гаусса}),$ $\int_V \nabla \phi ^2 dV + \int_V \phi \nabla^2 \phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\phi \nabla \phi) = \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$

Нормальная производная обозначается обычно через $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, так что

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} dS \equiv (d\mathbf{S} \cdot \nabla) \phi.$$

5.6-2. Теорема о роторе и связанные с ней теоремы. Если векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ однозначна и имеет непрерывные частные производные всюду в конечной поверхностно-односвязной области V , и если лежащая в области V поверхность S односвязна, регулярна и ограничена регулярной замкнутой кривой C , то

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (\text{теорема Стокса}), \quad (5.6-1)$$

т. е. *криволинейный интеграл от $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по замкнутому контуру C равен потоку ротора $\nabla \times \mathbf{F}$ через поверхность, натянутую на контур C* . Ориентация вектора площадки $d\mathbf{S}$ должна быть согласована с ориентацией контура C по правилу правого винта. (Точнее, такая ориентация производится у края поверхности, а затем продолжается по непрерывности.)

При тех же условиях, что и выше,

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (5.6-2)$$

и для любой однозначной скалярной функции $\Phi(\mathbf{r})$ с непрерывными частными производными в области V

$$\int_S dS \times \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \oint_0 d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}). \quad (5.6-3)$$

Формулы (1), (2), (3) остаются справедливыми и для неограниченной области V , если подынтегральная функция в криволинейном интеграле справа имеет порядок $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ при $r \rightarrow \infty$ (п.4.4-3).

5.6-3. Поля с разрывами на поверхностях (см. также п.15.6-5,b). Пусть скалярная функция $\Phi(\mathbf{r})$ или координаты векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируемы по обе стороны от регулярной поверхности S_1 , но разрывны на S_1 , причем существуют предельные значения как на одной (положительной) стороне поверхности

$$\Phi_+(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_+(\mathbf{r}),$$

так и на другой (отрицательной) стороне поверхности

$$\Phi_-(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_-(\mathbf{r}).$$

В каждой точке (\mathbf{r}) поверхности S_1 определим функции

$$\left. \begin{aligned} n^0(\mathbf{r})[\Phi_+(\mathbf{r}) - \Phi_-(\mathbf{r})] & \quad (\text{поверхностный градиент}), \\ n^0(\mathbf{r})[\mathbf{F}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{F}_-(\mathbf{r})] & \quad (\text{поверхностная дивергенция}), \\ n^0(\mathbf{r}) \times [\mathbf{F}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{F}_-(\mathbf{r})] & \quad (\text{поверхностный ротор}), \end{aligned} \right\} \quad (5.6-4)$$

где n^0 — орт положительной нормали к поверхности S_1 в точке (\mathbf{r}) (п.17.3-2). Тогда интегральные теоремы табл. 5.6-1 останутся в силе и для таких функций, если в точках поверхности S_1 заменить в объемных интегралах градиент, дивергенцию и ротор на их поверхностные аналоги.

5.7. ОТЫСКАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЕГО РОТОРУ И ДИВЕРГЕНЦИИ

5.7-1. Безвихревое векторное поле. Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ называется безвихревым в области V , если в каждой точке этой области

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0,$$

т.е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7-1)$$

Поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ является безвихревым тогда и только тогда, когда $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть градиент $\nabla\Phi(\mathbf{r})$ некоторой скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r})$ в каждой точке области V (см. также формулу (5.5-19)); в этом случае выражение

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \equiv F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz \equiv -d\mathbf{r} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{r}) \equiv -d\Phi \quad (5.7-2)$$

есть полный дифференциал (п.4.5-3, а). Функцию $\Phi(\mathbf{r})$ часто называют скалярным потенциалом безвихревого векторного поля.

Если область V поверхностно-односвязна (п.4.3-6,b), то $\Phi(\mathbf{r})$ — однозначная функция, определяемая по $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ с точностью до аддитивной постоянной, и криволинейный интеграл от $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по кривой C , лежащей в области V , не зависит от пути интегрирования:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -[\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{a})]. \quad (5.7-3)$$

В этом случае указывают только нижний и верхний пределы интегрирования.

Криволинейный интеграл $\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ по любому замкнутому пути C (циркуляция вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ вдоль C) в области V равен нулю. Если область V многосвязна, то функция $\Phi(\mathbf{r})$ может быть многозначной.

В частности, условие

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad (5.7-4)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_C F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy$$

не зависел от пути интегрирования, т.е. чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом¹⁾.

5.7-2. Соленоидальные (трубчатые) векторные поля. Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ называется соленоидальным в области V , если в каждой точке этой области

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0. \quad (5.7-5)$$

Векторное поле является соленоидальным тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть ротор $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ некоторой векторной функции точки $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (см. также формулы (5.5-19)), которая называется **векторным потенциалом** векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

5.7-3. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции.

(а) Пусть V — конечная открытая область пространства, ограниченная регулярной поверхностью S (п.3.1-14), положительная нормаль которой однозначно определена и непрерывна в каждой точке поверхности.

Если дивергенция и ротор поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определены в каждой точке (\mathbf{r}) области V , то всюду в V функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде суммы безвихревого поля $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ и соленоидального поля $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) &= 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7-6)$$

(теорема разложения Гельмгольца).

Функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определяется однозначно при дополнительном условии задания нормальной составляющей $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}$ функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в каждой точке поверхности S (теорема единственности).

Эффективное отыскание функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по этим данным сводится к решению дифференциальных уравнений с частными производными при некоторых краевых условиях. Важный частный случай, в котором

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0,$$

и, значит, всюду в V

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}), \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0,$$

рассматривается в теории потенциала (п.15.6-4—15.6-10).

(б) Если в каждой точке (\mathbf{r}) пространства заданы функции

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi Q(\mathbf{r}); \quad \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi \mathbf{I}(\mathbf{r}), \quad (5.7-7)$$

то формулы (6) определяют $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$, а следовательно и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, однозначно с точностью до такого слагаемого $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$, для которого $\nabla^2 \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) = 0$. Имеют место

¹⁾ См. сноску к п.5.4-1.

следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}), \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{Q(\boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} dV, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int \frac{\mathbf{I}(\boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} dV, \end{aligned} \right\} \quad (5.7-8)$$

где интегралы справа (*скалярный и векторный потенциалы*) предполагаются существующими (см. также п.15.6-5); интегрирование производится по всем точкам ($\boldsymbol{\rho}$) пространства.

ГЛАВА 6

СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

6.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В главе 6 дается описание скалярных и векторных функций точки (см. также пп.5.4-1—5.7-3) в *криволинейных координатах* (п.6.2-1). Векторы будут разложены по направлениям координатных линий или перпендикулярно к ним (пп.6.3-1—6.3-3). Применение криволинейных координат упрощает многие задачи; например, можно выбрать такую систему координат, чтобы на координатной поверхности рассматриваемая функция была постоянной (пп.6.4-3 и 10.4-1,с).

Основное внимание в гл. 6 уделяется *ортогональным системам координат* (пп.6.4-1—6.5-1), как наиболее важным для физических приложений. Представление векторных соотношений в неортогональных координатах рассмотрено более подробно в тензорном анализе (гл. 16).

6.2. СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

6.2-1. Криволинейные координаты. Система криволинейных координат, заданная в области V трехмерного евклидова пространства, ставит в соответствие каждой точке (x, y, z) упорядоченную тройку действительных чисел x^1, x^2, x^3 . **Криволинейные координаты** x^1, x^2, x^3 точки $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ связаны с ее прямоугольными декартовыми координатами x, y, z тремя формулами

$$x^1 = x^1(x, y, z), \quad x^2 = x^2(x, y, z), \quad x^3 = x^3(x, y, z), \quad (6.2-1)$$

где функции (1) всюду в V однозначны и непрерывно дифференцируемы, причем якобиан $\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$ (*допустимые преобразования*, см. также пп.4.5-6 и 16.1-2).

Система координат x^1, x^2, x^3 будет *декартовой* (п.3.1-2; но, вообще говоря, не прямоугольной) в том и только в том случае, когда все уравнения (1) линейны.

6.2-2. Координатные поверхности и координатные линии. Условие $x^i = x^i(x, y, z) = \text{const}$ определяет **координатную поверхность**. Координатные поверхности, соответствующие различным значениям одной и той же координаты x^i , не пересекаются в V . Две координатные поверхности, соответствующие различным координатам x^i, x^j , пересекаются по **координатной линии**, соответствующей третьей координате x^k . Каждая точка $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ из V может быть представлена как точка пересечения трех координатных поверхностей или трех координатных линий.

¹ Значки 1, 2, 3 в обозначениях x^1, x^2, x^3 не являются показателями степени; см. также пп.16.1-2 и 16.1-3.

6.2-3. Элементы длины дуги и объема (рис. 6.2-1; см. также пп.6.4-3 и 17.3-3).

(а) **Элемент длины дуги** ds между двумя «соседними» точками $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ и $(x + dx, y + dy, z + dz) \equiv (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ задается *квадратичной дифференциальной формой*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k, \quad (6.2-2)$$

где

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = \left[\frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^k} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^k} \right] (x^1, x^2, x^3) = g_{ki}(x^1, x^2, x^3) \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Функции $g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ — компоненты метрического тензора (п.16.7-1).

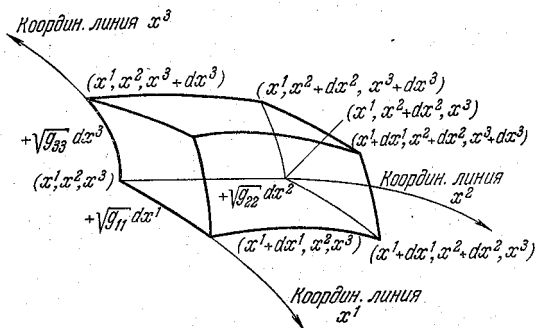


Рис. 6.2-1. Элементы координатных линий, поверхностей и объема в системе криволинейных координат.

(б) Шесть координатных поверхностей, соответствующих точкам (x^1, x^2, x^3) и $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ (рис. 6.2-1), ограничивают элемент объема (параллелепипеда)

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (6.2-3)$$

где

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \right]^2 \equiv \det [g_{ik}(x^1, x^2, x^3)] \equiv g$$

(см. также пп.5.4-7, 6.4-3, с. 16.10-10). Система координат называется **правой** в области V , если касательные векторы к координатным линиям x^1, x^2, x^3 , ориентированные в сторону возрастания соответствующих координат (что определяет **положительные направления** координатных линий), образуют правую тройку (как и орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ правой декартовой системы координат). Для правой системы координат якобиан

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \sqrt{g} > 0.$$

Описание векторных элементов линий и поверхностей в криволинейных координатах см. пп.6.4-3, 17.3-3 и 17.4-2.

6.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

6.3-1. Координаты вектора и локальный (местный) базис. В гл. 5 векторные функции точки были разложены по базису i, j, k системы декартовых координат; модуль и направление каждого вектора этого базиса одни и те же в каждой точке. Если векторная функция $F(r)$ описывается в криволинейных координатах x^1, x^2, x^3 , то удобнее применять локальный базис из векторов, касательных к координатным линиям в каждой точке (x^1, x^2, x^3) или перпендикулярных к ним. Такие базисные векторы сами являются векторными функциями точки. В каждой системе криволинейных координат можно указать три способа выбора локального базиса (пп. 6.3-2 и 6.3-3).

6.3-2. Физические координаты вектора. В качестве векторов локального базиса в каждой точке $(x^1, x^2, x^3) \equiv (r)$ выберем единичные векторы $i_1(x^1, x^2, x^3), i_2(x^1, x^2, x^3), i_3(x^1, x^2, x^3)$, касательные к координатным линиям x^1, x^2, x^3 (см. также п.16.8-3). Каждая векторная функция $F(r) \equiv F(x^1, x^2, x^3)$ может быть однозначно представлена в виде

$$F(r) = F(x^1, x^2, x^3) = \hat{F}_1 i_1 + \hat{F}_2 i_2 + \hat{F}_3 i_3 \tag{6.3-1}$$

в каждой точке $(r) = (x^1, x^2, x^3)$.

Физические координаты

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_1 &\equiv \hat{F}_1(x^1, x^2, x^3), \\ \hat{F}_2 &\equiv \hat{F}_2(x^1, x^2, x^3), \\ \hat{F}_3 &\equiv \hat{F}_3(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \right\} \tag{6.3-2}$$

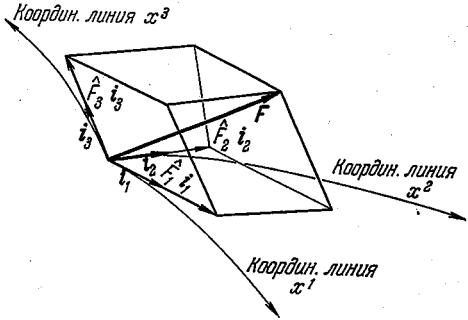


Рис. 6.3-1. Разложение вектора F по единичным векторам i_1, i_2, i_3 ; физические координаты $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3$ вектора.

вектора F и локальные базисные векторы $i_1(x^1, x^2, x^3), i_2(x^1, x^2, x^3), i_3(x^1, x^2, x^3)$ могут быть выражены непосредственно через координаты F_x, F_y, F_z того же вектора и орты i, j, k прямоугольной декартовой системы координат (см. табл. 6.3-1).

Заметим, что функции $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial x}{\partial x^i}$, $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y}{\partial x^i}, \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial z}{\partial x^i}$ являются направляющими косинусами орта i_i (т. е. i -й координатной линии) по отношению к осям Ox, Oy, Oz (см. также рис. 6.3-1).

6.3-3. Контравариантные и ковариантные координаты вектора. В качестве локального базиса можно также выбрать либо тройку векторов

$$e_1(x^1, x^2, x^3) \equiv \sqrt{g_{11}} i_1; \quad e_2(x^1, x^2, x^3) \equiv \sqrt{g_{22}} i_2; \quad e_3(x^1, x^2, x^3) \equiv \sqrt{g_{33}} i_3, \tag{6.3-3}$$

направленных по координатным линиям, либо тройку векторов

$$e^1(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{e_2 \times e_3}{[e_1 \ e_2 \ e_3]}; \quad e^2(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{e_3 \times e_1}{[e_1 \ e_2 \ e_3]}; \quad e^3(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{e_1 \times e_2}{[e_1 \ e_2 \ e_3]}, \tag{6.3-4}$$

направленных перпендикулярно к координатным поверхностям. Каждый вектор $F(r)$ может быть представлен в одной из следующих форм:

$$F(r) = F(x^1, x^2, x^3) = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3 = F_1 e^1 + F_2 e^2 + F_3 e^3 \tag{6.3-5}$$

в каждой точке $(r) \equiv (x^1, x^2, x^3)$. Как модули, так и направления базисных векторов e_i и e^i меняются от точки к точке, за исключением того случая, когда x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты (п.16.6-1, а).

Контравариантные координаты $F^i \equiv F^i(x^1, x^2, x^3) \equiv F \cdot e^i$ и ковариантные координаты $F_i \equiv F_i(x^1, x^2, x^3) \equiv F \cdot e_i$ ($i = 1, 2, 3$) в системе координат x^1, x^2, x^3 и соответствующие базисные векторы e_i и e^i могут быть выражены непосредственно через F_x, F_y, F_z и орты

Таблица 6.3-1

**Соотношения между базисными векторами и координатами векторов
в различных локальных системах отсчета**

(а) Соотношения между $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и векторами локальных базисов $\mathbf{i}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i$ системы криволинейных координат x^1, x^2, x^3 .

$$\mathbf{i}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial x^i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \mathbf{k}; \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \mathbf{k} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\mathbf{i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x} \sqrt{g_{ii}} \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial x^i} \mathbf{e}^i,$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial y} \sqrt{g_{ii}} \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial y} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial x^i} \mathbf{e}^i,$$

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z} \sqrt{g_{ii}} \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x^i} \mathbf{e}^i.$$

(б) Соотношения между F_x, F_y, F_z , физическими координатами \hat{F}_i , контравариантными координатами F^i и ковариантными координатами F_i в системе криволинейных координат x^1, x^2, x^3 .

$$\hat{F}_i = \sqrt{g_{ii}} F^i; \quad F^i = \frac{\partial x^i}{\partial x} F_x + \frac{\partial x^i}{\partial y} F_y + \frac{\partial x^i}{\partial z} F_z; \quad F_i = \frac{\partial x}{\partial x^i} F_x + \frac{\partial y}{\partial x^i} F_y + \frac{\partial z}{\partial x^i} F_z \quad (i=1, 2, 3),$$

$$F_x = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\hat{F}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial x^i} F^i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x} F_i,$$

$$F_y = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\hat{F}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial x^i} F^i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial y} F_i,$$

$$F_z = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\hat{F}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x^i} F^i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z} F_i.$$

(в) Соотношения между векторами локальных базисов и координатами векторов в двух системах криволинейных координат (базисные векторы и координаты векторов для системы x^1, x^2, x^3 отмечены чертой сверху, см. также п.16.2-1).

$$\bar{\mathbf{i}}_k = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \bar{\mathbf{e}}_k; \quad \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i; \quad \bar{\mathbf{e}}^k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \quad (k=1, 2, 3),$$

$$\hat{\bar{F}}_k = \sqrt{g_{kk}} \bar{F}^k; \quad \bar{F}^k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial x^i} F^i; \quad \bar{F}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^k} F_i \quad (k=1, 2, 3),$$

$$\bar{g}_{ik} = \sum_{j=1}^3 \sum_{h=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^h}{\partial x^k} g_{jh} \quad (i, k=1, 2, 3).$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ прямоугольной декартовой системы координат (табл. 6.3-1). Отметим еще формулы (см. также пп.16.6-1 и 16.8-4):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{[\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{[\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]}; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{[\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]}; \quad (6.3-6)$$

$$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]^{-1} = [1_1 1_2 1_3] \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} = \pm \sqrt{g}; \quad (6.3-7)$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = g_{ik}; \quad |\mathbf{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (6.3-8)$$

В частном случае прямоугольных декартовых координат $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ имеем:

$$e_1 = e^1 = i_1 = i; \quad e_2 = e^2 = i_2 = j; \quad e_3 = e^3 = i_3 = k. \quad (6.3-9)$$

Главное преимущество представления векторов в контравариантных и ковариантных координатах заключается в относительной простоте соотношений, связывающих эти координаты в различных системах координат (табл. 6.3-1; см. также п.6.3-4).

6.3-4. Запись векторных соотношений в криволинейных координатах. Каждое векторное соотношение, записанное в гл. 5 в прямоугольных декартовых координатах, может быть записано в криволинейных координатах с помощью табл. 6.3-1. Если рассматриваемое соотношение содержит производные или интегралы, то *следует учитывать, что базисные векторы в системе криволинейных координат сами являются функциями точки.*

Многие практически важные задачи допускают применение системы ортогональных координат (п.6.4-1). В этом случае формулы пп.6.4-1 — 6.4-3 и табл. 6.4-1 — 6.5-11 дают сравнительно простое выражение для векторных соотношений непосредственно в физических координатах. В тех случаях, когда такие специальные методы непригодны, целесообразнее применять не физические координаты векторов, а контравариантные и ковариантные координаты; формулировка соотношений векторного анализа в контравариантных и ковариантных координатах изложена подробно в гл. 16 как частный случай более общих соотношений тензорного анализа.

В частности, применение формул пп.16.8-1 — 16.8-4 для вычисления скалярного и векторного произведений и прямой метод ковариантного дифференцирования (пп.16.10-1 — 16.10-3) дают выражения для дифференциальных операторов типа $\nabla \cdot F$, $\nabla \cdot F$, $\nabla \times F$.

6.4. СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ. ВЕКТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

6.4-1. Ортогональные координаты. Система криволинейных координат x^1, x^2, x^3 (п.6.2-1) называется ортогональной, если функции $g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{при } i \neq k \quad (6.4-1)$$

в каждой точке (x^1, x^2, x^3) . Координатные линии, а значит и векторы локального базиса i_1, i_2, i_3 , будут при этом перпендикулярными друг к другу в каждой точке; каждая координатная линия перпендикулярна ко всем координатным поверхностям, соответствующим постоянным значениям рассматриваемой координаты.

6.4-2. Векторные соотношения.

(а) В табл. 6.4-1 приведены наиболее важные векторные соотношения в ортогональных координатах. Функции $g_{ik} = g_{ik}(x^1, x^2, x^3) \equiv |e_i|^2$ для каждой системы ортогональных координат получают из формулы (6.2-2). В этих формулах знаки плюс и минус относятся к правой и левой системам координат.

(б) Для любой системы ортогональных координат:

$$i_i \cdot i_k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k; \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} i_1 \times i_2 = \pm i_3, \quad i_2 \times i_3 = \pm i_1, \quad i_3 \times i_1 = \pm i_2, \\ i_1 \times i_1 = i_2 \times i_2 = i_3 \times i_3 = 0; \\ [i_1 i_2 i_3] = \pm 1; \end{array} \right\} \quad (6.4-2)$$

$$i_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} e_i = \pm \sqrt{g_{ii}} e^i; \quad \hat{F}_i = \sqrt{g_{ii}} F^i = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} F_i \quad (i=1, 2, 3); \quad (6.4-3)$$

$$[e_1 e_2 e_3] = [e^1 e^2 e^3]^{-1} = [i_1 i_2 i_3] \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} = \pm \sqrt{g}; \quad (6.4-4)$$

$$\nabla = e^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + e^3 \frac{\partial}{\partial x^3} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} i_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} i_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} i_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (6.4-5)$$

Таблица 6.4-1

Векторные соотношения в ортогональных координатах

(Знаки плюс и минус относятся к правой и левой системам ортогональных координат.)

(а) Скалярное и векторное произведения

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = \hat{F}_1 \hat{G}_1 + \hat{F}_2 \hat{G}_2 + \hat{F}_3 \hat{G}_3; |\mathbf{F}| = \sqrt{\hat{F}_1^2 + \hat{F}_2^2 + \hat{F}_3^2}.$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 & \hat{F}_1 & \hat{G}_1 \\ \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 & \hat{F}_2 & \hat{G}_2 \\ \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 & \hat{F}_3 & \hat{G}_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \hat{F}_1 & \hat{F}_2 & \hat{F}_3 \\ \hat{G}_1 & \hat{G}_2 & \hat{G}_3 \end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{H}] = \begin{vmatrix} \hat{F}_1 & \hat{G}_1 & \hat{H}_1 \\ \hat{F}_2 & \hat{G}_2 & \hat{H}_2 \\ \hat{F}_3 & \hat{G}_3 & \hat{H}_3 \end{vmatrix} [\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3] = \pm \begin{vmatrix} \hat{F}_1 & \hat{G}_1 & \hat{H}_1 \\ \hat{F}_2 & \hat{G}_2 & \hat{H}_2 \\ \hat{F}_3 & \hat{G}_3 & \hat{H}_3 \end{vmatrix}.$$

(б) Дифференциальные операторы ¹⁾ ($g \equiv g_{11}g_{22}g_{33}$)

$$\nabla \phi \equiv \pm \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \mathbf{i}_3 \right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\hat{F}_1 \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\hat{F}_2 \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\hat{F}_3 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) \right],$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \sqrt{g_{11}} \mathbf{i}_1 & \sqrt{g_{22}} \mathbf{i}_2 & \sqrt{g_{33}} \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \hat{F}_1 \sqrt{g_{11}} & \hat{F}_2 \sqrt{g_{22}} & \hat{F}_3 \sqrt{g_{33}} \end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla) \phi \equiv \pm \left(\frac{\hat{F}_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \frac{\hat{F}_2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\hat{F}_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right),$$

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right) \right].$$

¹⁾ Выражение для $\nabla^2 \mathbf{F}$ получают из формулы $\nabla^2 \mathbf{F} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ или из правил п.16.10-7. Выражение для $(\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$ получают из табл. 5.5-1 или из правил п. 16.10-7.

Примечание. Формулы для $\nabla \phi$, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и $\nabla \times \mathbf{F}$ могут быть получены и непосредственно из инвариантных определений п.5.5-1, примененных к элементарному объему, изображенному на рис. 6.2-1.

6.4-3. Криволинейный интеграл, поверхностный интеграл и объемный интеграл (см. также рис. 6.2-1).

(а) Если дана спрямляемая кривая C (п.5.4-4), то *векторный элемент линии* $d\mathbf{r}$ имеет физические координаты $ds_1 = \sqrt{g_{11}} dx^1$, $ds_2 = \sqrt{g_{22}} dx^2$, $ds_3 = \sqrt{g_{33}} dx^3$, т. е.

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} = ds_1 \mathbf{i}_1 + ds_2 \mathbf{i}_2 + ds_3 \mathbf{i}_3 = \\ &= \sqrt{g_{11}} dx^1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{g_{22}} dx^2 \mathbf{i}_2 + \sqrt{g_{33}} dx^3 \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (6.4-6)$$

Подходящее выражение (6) для dr должно быть подставлено в криволинейный интеграл, определенный в п.5.4-5. Для ортогональных координат x^1, x^2, x^3

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \hat{F}_1 ds_1 + \hat{F}_2 ds_2 + \hat{F}_3 ds_3 = \int_C \left(\hat{F}_1 \frac{ds_1}{dt} + \hat{F}_2 \frac{ds_2}{dt} + \hat{F}_3 \frac{ds_3}{dt} \right) dt. \quad (6.4-7)$$

Заметим, что для любой системы криволинейных координат

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \mathbf{e}_3 dx^3$$

(см. также п.17.2-1); для ортогональных координат x^1, x^2, x^3

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx^1 + F_2 dx^2 + F_3 dx^3 = \int_C g_{11} F^1 dx^1 + g_{22} F^2 dx^2 + g_{33} F^3 dx^3.$$

(b) Описание площади поверхности S и векторного элемента поверхности $d\mathbf{S}$ в координатах на поверхности дано в пп.5.4-6 и 17.3-1. В частности, если система ортогональных координат выбрана так, что поверхность S есть часть координатной поверхности $x^k = \text{const}$, то координаты x^i и x^j образуют на этой поверхности систему ортогональных поверхностных координат, и

$$d\mathbf{S} = \sqrt{g_{ii}g_{jj}} \mathbf{i}_k dx^i dx^j = ds_i ds_j \mathbf{i}_k = \frac{\sqrt{g}}{g_{kk}} dx^i dx^j \mathbf{e}_k$$

$$(i \neq j \neq k \neq i; \quad k = 1, 2, 3). \quad (6.4-8)$$

Относительная простота получающихся отсюда выражений для поверхностных интегралов (5.4-13) и (5.4-14) часто служит основным поводом для введения системы криволинейных координат (см. также п.10.4-1, с). Знак квадратного корня в формуле (8) определяется выбором положительного направления нормали (п.17.3-2): знак + соответствует правой системе координат.

(с) Элемент объема dV , появляющийся в выражениях (5.4-16) и (5.4-17) для объемного интеграла, дается формулой (6.2-3) или

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3 = \pm \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 =$$

$$= \pm \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} dx^1 dx^2 dx^3 = \pm ds_1 ds_2 ds_3. \quad (6.4-9)$$

Если система координат правая (п.6.2-3, b), то в формуле (9) берется знак плюс.

6.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В табл. 6.5-1 – 6.5-11 даны формулы для некоторых специальных систем ортогональных координат. В частности, для каждой такой системы табулированы функции $g_{ii}(x^1, x^2, x^3) = |\mathbf{e}_i|^2$.

Примечание. Семейство координатных поверхностей

$$x^1 = x^1(x, y, z) = \text{const}, \quad x^2 = x^2(x, y, z) = \text{const}, \quad x^3 = x^3(x, y, z) = \text{const}$$

является в то же время семейством координатных поверхностей и для всех систем координат

$$x^1 = x^1(x^1), \quad x^2 = x^2(x^2), \quad x^3 = x^3(x^3).$$

Векторные формулы в сферических и цилиндрических координатах
(см. также рис. 2.1-2 и 3.1-2). Формулы для цилиндрических координат применимы также к полярным координатам на плоскости Oxy (п. 2.1-8)

	Сферические координаты r, θ, φ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi$)	Цилиндрические координаты ρ, φ, z ($\rho \geq 0$)
Координатные поверхности	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$ $z = r \cos \theta$ $y = x \operatorname{tg} \varphi$	$x^2 + y^2 = \rho^2$ $y = x \operatorname{tg} \varphi$ $z = z$
Преобразование координат (x, y, z — прямоугольные декартовы координаты)	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arccos \frac{z}{r}$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \left(\sin \varphi = \frac{y}{r \sin \theta} \right)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \left(\sin \varphi = \frac{y}{\rho} \right)$ $z = z$
Преобразование дифференциалов координат	$dx = \sin \theta \cos \varphi dr - r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi$ $dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi$ $dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$	$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi$ $dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi$ $dz = dz$
Квадрат элемента длины $ds^2 = (dr)^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ $g_{rr} = 1; \quad g_{\theta\theta} = r^2; \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$		$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ $g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{zz} = 1$
$g_{ik} = e_i ^2$		$\sqrt{g} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$
$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$		$\sqrt{g} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho$
Трёхбуквенные символы Кристоффеля (п. 16.10-3; символы, не приведенные в таблице, тождественно равны нулю)	$[\theta\theta; r] = -r; \quad [\varphi\varphi; r] = -r \sin^2 \theta; \quad [\varphi\varphi; \theta] = -r^2 \sin \theta \cos \theta$ $[r\theta; \theta] = r; \quad [r\varphi; \varphi] = r \sin^2 \theta; \quad [\theta\varphi; \varphi] = r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left\{ \begin{matrix} r \\ \theta\theta \end{matrix} \right\} = -r; \quad \left\{ \begin{matrix} r \\ \varphi\varphi \end{matrix} \right\} = -r \sin^2 \theta; \quad \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi\varphi \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta$ $\left\{ \begin{matrix} \theta \\ r\theta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ r\varphi \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta\varphi \end{matrix} \right\} = \operatorname{ctg} \theta$	$[\varphi\varphi; \rho] = -\rho; \quad [e\varphi; \varphi] = \rho$ $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \varphi\varphi \end{matrix} \right\} = -\rho; \quad \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \rho\varphi \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\rho}$

Таблица 6.5-1 (продолжение)

	Сферические координаты r, θ, φ ($r > 0, 0 < \theta < \pi$)	Цилиндрические координаты ρ, φ, z ($\rho > 0$)
<p>Преобразование физических координат вектора</p>	$\hat{F}_r = F_x \sin \theta \cos \varphi + F_y \sin \theta \sin \varphi + F_z \cos \theta$ $\hat{F}_\theta = F_x \cos \theta \cos \varphi + F_y \cos \theta \sin \varphi - F_z \sin \theta$ $\hat{F}_\varphi = -F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi$ $F_x = \hat{F}_r \sin \theta \cos \varphi + \hat{F}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \hat{F}_\varphi \sin \varphi$ $F_y = \hat{F}_r \sin \theta \sin \varphi + \hat{F}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \hat{F}_\varphi \cos \varphi$ $F_z = \hat{F}_r \cos \theta - \hat{F}_\theta \sin \theta$	$\hat{F}_\rho = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi$ $\hat{F}_\varphi = -F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi$ $\hat{F}_z = F_z$ $F_x = \hat{F}_\rho \cos \varphi - \hat{F}_\varphi \sin \varphi$ $F_y = \hat{F}_\rho \sin \varphi + \hat{F}_\varphi \cos \varphi$ $F_z = \hat{F}_z$
<p>Градиент в физических координатах</p> $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$	$\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi$	$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{i}_z$
<p>Дивергенция в физических координатах</p> $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{F}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{F}_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial \varphi}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \hat{F}_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial z}$
<p>Ротор в физических координатах</p> $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{F}_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial \hat{F}_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \hat{F}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \hat{F}_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \hat{F}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{i}_\varphi$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{i}_\rho + \left(\frac{\partial \hat{F}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho \hat{F}_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \hat{F}_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_z$
<p>Лапласиан скалярной функции ¹⁾</p> $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

¹⁾ Лапласиан векторной функции находят по формуле $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ или по формуле (6.4-5) и по табл. 16.10-1.

Общие эллипсоидальные координаты λ, μ, ν (а) Координатные поверхности ($\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$)

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (\text{эллипсоиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1 \quad (\text{однополостные гиперboloиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1 \quad (\text{двуполостные гиперboloиды}).$$

(б) Преобразование к эллипсоидальным координатам

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)};$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)};$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

(с) Специальная система эллипсоидальных координат u, v, w вводится формулами

$$\lambda = 4\wp(u) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

$$\mu = 4\wp(v) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

$$\nu = 4\wp(w) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

так что (см. п.21.6-2)

$$du = \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad dv = \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, \quad dw = \frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}},$$

где $f(t) = (a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)$.

$$(d) \quad g_{\lambda\lambda} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4f(\lambda)}, \quad g_{\mu\mu} = \frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{4f(\mu)}, \quad g_{\nu\nu} = \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{4f(\nu)};$$

$$g_{\mu\lambda} = 4[\wp(u) - \wp(v)][\wp(u) - \wp(w)], \quad g_{\nu\nu} = 4[\wp(v) - \wp(w)][\wp(v) - \wp(u)],$$

$$g_{wv} = 4[\wp(w) - \wp(u)][\wp(w) - \wp(v)].$$

(е) Лапласиан скалярной функции

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{4\sqrt{f(\lambda)}}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sqrt{f(\lambda)} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right] + \frac{4f(\mu)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sqrt{f(\mu)} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right] + \frac{4f(\nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\sqrt{f(\nu)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{[\wp(u) - \wp(v)][\wp(u) - \wp(w)]} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{1}{[\wp(v) - \wp(w)][\wp(v) - \wp(u)]} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[\wp(w) - \wp(u)][\wp(w) - \wp(v)]} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} \right\}. \end{aligned}$$

Таблица 6.5-3

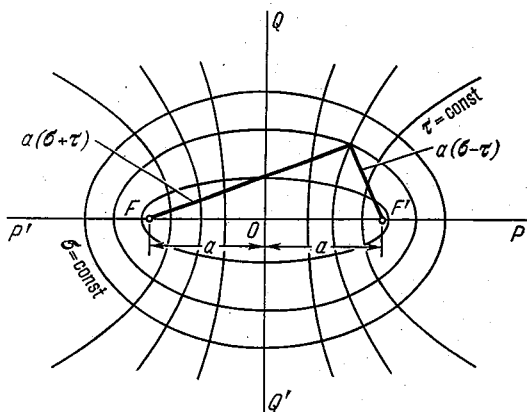
Координаты σ , τ , φ вытянутого эллипсоида вращения(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-1)

Рис. 6.5-1. Ортогональная система софокусных эллипсов и гипербол с фокусами F , F' . Эти кривые определяют систему эллиптических координат на плоскости и порождают координатные поверхности в следующих системах координат:

- 1) вытянутого эллипсоида вращения (если эти кривые вращаются вокруг оси $P'OP$; табл. 6.5-3);
- 2) сплюснутого эллипсоида вращения (если эти кривые вращаются вокруг оси $Q'OQ$; табл. 6.5-4);
- 3) эллиптического цилиндра (если эти кривые смещаются перпендикулярно к плоскости рисунка; табл. 6.5-5).

(а) Координатные поверхности ($\sigma > 1 > \tau > -1$)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(\sigma^2 - 1)} + \frac{z^2}{a^2\sigma^2} = 1 \quad (\text{вытянутые эллипсоиды вращения}),$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(\tau^2 - 1)} + \frac{z^2}{a^2\tau^2} = 1 \quad (\text{двулопастные гиперболоиды вращения}),$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{полуплоскости, проходящие через ось } Oz).$$

Все эллипсоиды и гиперболоиды имеют общие фокусы $(0, 0, a)$ и $(0, 0, -a)$; сумма и разность фокальных радиусов в любой точке (x, y, z) равны соответственно $2a\sigma$ и $2a\tau$.

(б) Преобразование к координатам вытянутого эллипсоида вращения

$$x^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\cos^2 \varphi, \quad y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\sin^2 \varphi, \quad z = a\sigma\tau.$$

(с) Специальная система u , v , φ вводится формулами

$$\sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi \quad (0 < u < \infty, \quad 0 < v < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi),$$

при этом

$$x = a \operatorname{sh} u \sin v \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \sin \varphi, \quad z = a \operatorname{ch} u \cos v$$

$$(d) \quad g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2);$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v.$$

(е) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(\sigma^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + \frac{\sigma^2 - \tau^2}{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Таблица 6.5-4

Координаты σ , τ , φ сплюснутого эллипсоида вращения
(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-1)

- (a) Координатные поверхности (
- $\sigma > 0$
- ;
- $-1 < \tau < 1$
-)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + \sigma^2)} + \frac{z^2}{a^2\sigma^2} = 1 \quad (\text{сплюснутые эллипсоиды вращения}),$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - \tau^2)} - \frac{z^2}{a^2\tau^2} = 1 \quad (\text{однополостные гиперboloиды вращения}),$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{полуплоскости, проходящие через ось } Oz).$$

- (b) Преобразование к координатам сплюснутого эллипсоида вращения

$$x^2 = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)\cos^2 \varphi, \quad y^2 = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)\sin^2 \varphi; \quad z' = a\sigma\tau.$$

- (c) Специальная система
- u
- ,
- v
- ,
- φ
- вводится формулами

$$\sigma = \operatorname{sh} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi \quad (0 < u < \infty, \quad 0 < v < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi);$$

при этом

$$x = a \operatorname{ch} u \sin v \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v \sin \varphi, \quad z = a \operatorname{sh} u \cos v.$$

$$(d) \quad g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 + \sigma^2}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2);$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v.$$

- (e) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2(\sigma^2 + \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(1 + \sigma^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Таблица 6.5-5

Координаты σ , τ , z эллиптического цилиндра
(применяются также как (софокусные) эллиптические координаты на плоскости Oxy ; см. также рис. 6.5-1)

- (a) Координатные поверхности (
- $\sigma > 1$
- ;
- $-1 < \tau < 1$
-)

$$\frac{x^2}{a^2\sigma^2} + \frac{y^2}{a^2(\sigma^2 - 1)} = 1 \quad (\text{эллиптические цилиндры}),$$

$$\frac{x^2}{a^2\tau^2} + \frac{y^2}{a^2(\tau^2 - 1)} = 1 \quad (\text{гиперболические цилиндры}),$$

$$z = z \quad (\text{плоскости, параллельные плоскости } Oxy).$$

- (b) Преобразование к координатам эллиптического цилиндра

$$x = a\sigma\tau, \quad y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2), \quad z = z.$$

- (c) Специальная система
- u
- ,
- v
- ,
- z
- вводится формулами

$$\sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v \quad (0 < u < \infty; \quad 0 < v < \pi);$$

при этом

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = z.$$

$$(d) \quad g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{zz} = 1;$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{zz} = 1.$$

- (e) Лапласиан скалярной функции

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \left[\sqrt{\sigma^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sqrt{\sigma^2 - 1} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) + \sqrt{1 - \tau^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{1 - \tau^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right) \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Таблица 6.5-6

Конические координаты u, v, w (а) Координатные поверхности ($c^2 > v^2 > b^2 > w^2$)

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \quad (\text{сферы}),$$

$$\frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2 - b^2} + \frac{z^2}{v^2 - c^2} = 0 \quad (\text{конусы, ось которых совпадает с осью } Oz),$$

$$\frac{x^2}{w^2} + \frac{y^2}{w^2 - b^2} + \frac{z^2}{w^2 - c^2} = 0 \quad (\text{конусы, ось которых совпадает с осью } Ox).$$

(б) Преобразование к коническим координатам

$$x = \pm \frac{uvw}{bc}, \quad y^2 = \frac{u^2}{b^2} \frac{(v^2 - b^2)(w^2 - b^2)}{b^2 - c^2}, \quad z^2 = \frac{u^2}{c^2} \frac{(v^2 - c^2)(w^2 - c^2)}{c^2 - b^2}.$$

$$(c) \quad g_{uu} = 1, \quad g_{vv} = -\frac{u^2(v^2 - w^2)}{(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)}, \quad g_{ww} = \frac{u^2(v^2 - w^2)}{(w^2 - b^2)(w^2 - c^2)}$$

Таблица 6.5-7

Параболоидальные координаты λ, μ, ν (а) Координатные поверхности ($\lambda < B < \mu < A < \nu$)

$$\frac{x^2}{\lambda - A} + \frac{y^2}{\lambda - B} = 2z + \lambda \quad (\text{эллиптические параболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{\mu - A} + \frac{y^2}{\mu - B} = 2z + \mu \quad (\text{гиперболические параболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{\nu - A} + \frac{y^2}{\nu - B} = 2z + \nu \quad (\text{эллиптические параболоиды}).$$

(б) Преобразование к параболоидальным координатам

$$x^2 = \frac{(A - \lambda)(A - \mu)(A - \nu)}{B - A}, \quad y^2 = \frac{(B - \lambda)(B - \mu)(B - \nu)}{A - B}, \quad z = \frac{1}{2} (A + B - \lambda - \mu - \nu).$$

$$(c) \quad g_{\lambda\lambda} = \frac{1}{4} \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(A - \lambda)(B - \lambda)}, \quad g_{\mu\mu} = \frac{1}{4} \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(A - \mu)(B - \mu)},$$

$$g_{\nu\nu} = \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(A - \nu)(B - \nu)}$$

Таблица 6.5-8

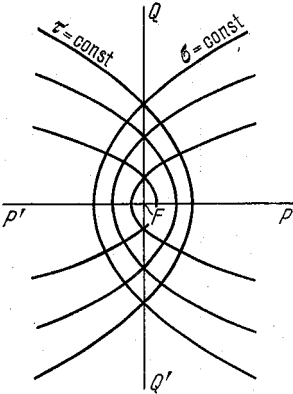
Параболические координаты σ, τ, φ (ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-2)

Рис. 6.5-2. Ортогональная система софокусных парабол с фокусом F . Эти кривые определяют систему параболических координат на плоскости и порождают координатные поверхности в следующих системах координат:

- 1) параболических (если эти кривые вращаются вокруг оси $P'FP$; табл. 6.5-8);
- 2) параболического цилиндра (если эти кривые смещаются перпендикулярно к плоскости рисунка; табл. 6.5-9).

(а) Координатные поверхности

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} &= 2z + \sigma^2, \\ \frac{x^2 + y^2}{\tau^2} &= -2z + \tau^2 \end{aligned} \right\} \text{(софокусные параболоиды вращения; фокусы в начале координат),}$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad \text{(полуплоскости, проходящие через ось } Oz\text{).}$$

(б) Преобразование к параболическим координатам

$$x = \sigma\tau \cos \varphi, \quad y = \sigma\tau \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2).$$

$$(c) \quad g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \sigma^2 + \tau^2, \quad g_{\varphi\varphi} = \sigma^2\tau^2.$$

(д) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right) + \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]$$

Таблица 6.5-9

Координаты σ, τ, z параболического цилиндра

(применяются также как *параболические координаты* на плоскости Oxy ; см. также рис. 6.5-2)

(а) Координатные поверхности

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\sigma^2} &= 2y + \sigma^2, \\ \frac{x^2}{\tau^2} &= -2y + \tau^2 \end{aligned} \right\} \text{(софокусные прямые параболические цилиндры),}$$

$$z = z \quad \text{(плоскости, параллельные плоскости } Oxy\text{).}$$

(б) Преобразование к координатам параболического цилиндра

$$x = \sigma\tau, \quad y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad z = z.$$

$$(c) \quad g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \sigma^2 + \tau^2, \quad g_{zz} = 1.$$

(д) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Таблица 6.5-10

Биглиндрические координаты σ, τ, z

(применяются также как биполярные координаты на плоскости Oxy ;
см. также рис. 6.5-3)

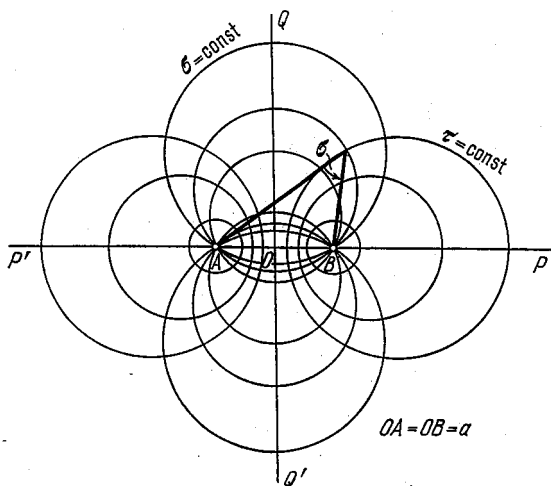


Рис. 6.5-3. Семейство окружностей с двумя полюсами A, B и семейство окружностей, ортогональных к ним. Эти кривые определяют биполярную систему координат на плоскости и порождают координатные поверхности в следующих системах координат:
1) биглиндрических (если эти кривые смещаются перпендикулярно к плоскости рисунка; табл. 6.5-10);
2) тороядальных (если эти кривые вращаются вокруг оси $Q'OQ$; табл. 6.5-11);
3) биполярных (если эти кривые вращаются вокруг оси $P'OP$; табл. 6.5-12).

(а) Координатные поверхности

$$\begin{aligned} x^2 + (y - a \operatorname{ctg} \sigma)^2 &= a^2(\operatorname{ctg}^2 \sigma + 1) && \text{(прямые круглые цилиндры),} \\ (x - a \operatorname{cth} \tau)^2 + y^2 &= a^2(\operatorname{cth}^2 \tau - 1) && \text{(прямые круглые цилиндры),} \\ z &= z && \text{(плоскости, параллельные плоскости } Oxy\text{).} \end{aligned}$$

Для каждой точки (x, y) плоскости Oxy σ есть угол, образованный лучами, идущими из полюсов $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$ в точку (x, y) ; e^τ — отношение полярных радиусов точки (x, y) .

(б) Преобразования

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, & \sigma &= \frac{i}{2} \ln \frac{x^2 + (y - ia)^2}{x^2 + (y + ia)^2} \\ y &= \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, & \tau &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}, & z &= z. \end{aligned}$$

$$(c) g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2}, \quad g_{zz} = 1.$$

$$(d) \nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Таблица 6.5-11

Торoidalные координаты σ , τ , φ
(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-3)

(а) Координатные поверхности

$$x^2 + y^2 + (z - a \operatorname{ctg} \sigma)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \sigma} \quad (\text{сферы}),$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{cth} \tau)^2 + z^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 \tau} \quad (\text{торы}),$$

$y = x \operatorname{tg} \varphi$ (полуплоскости, проходящие через ось Oz).

(б) Преобразования

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

$$\sigma = \frac{i}{2} \ln \frac{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}{x^2 + y^2 + (z + ia)^2},$$

$$\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} + a)^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

$$-\pi < \sigma < \pi, \quad 0 < \tau < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

(с)

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2},$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 \operatorname{sh}^2 \tau}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2}.$$

(d) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^3}{a^2 \operatorname{sh} \tau} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \tau (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]$$

Таблица 6.5-12

Биполярные координаты σ, τ, φ

(ось Oz — ось вращения; координаты σ, τ, φ будут соответствовать рис. 6.5-3, если σ и τ поменять местами).

(а) Координатные поверхности

$$x^2 + y^2 + (z - a \operatorname{cth} \sigma)^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 \sigma} \quad (\text{сферы}),$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{ctg} \tau)^2 + z^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \tau} \quad (\text{поверхности, полученные при вращении дуг окружностей } (y - a \operatorname{ctg} \tau)^2 + z^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \tau} \text{ вокруг оси } Oz; \text{ так как } |\operatorname{ctg} \tau| < \frac{1}{|\sin \tau|}, \text{ то окружности пересекают ось } Oz)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{полуплоскости, проходящие через ось } Oz).$$

(б) Преобразования

$$x = \frac{a \sin \tau \cos \varphi}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau},$$

$$y = \frac{a \sin \tau \sin \varphi}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau},$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau},$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2 + (z + a)^2}{x^2 + y^2 + (z - a)^2},$$

$$\tau = \frac{i}{2} \ln \frac{[\sqrt{x^2 + y^2 - ia}]^2 + z^2}{[\sqrt{x^2 + y^2 + ia}]^2 + z^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

$$-\infty < \sigma < \infty, \quad 0 < \tau < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

(с)
$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau)^2},$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 \sin^2 \tau}{(\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau)^2}.$$

(д) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau)^3}{a^2 \sin \tau} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sin \tau (\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]$$

* В таблицах 6.5-2—6.5-12 не приведены выражения для дифференциальных операторов $\nabla\Phi$, $\nabla\cdot\mathbf{F}$ и $\nabla\times\mathbf{F}$ в соответствующих системах координат. Их легко получить, пользуясь общими формулами табл. 6.4-1 (b), так как для всех систем координат даны выражения для функций g_{ii} .

Полные таблицы выражений для дифференциальных операторов приведены в [4.5] и [5.2]. Следует отметить, что применяются различные обозначения для координат; поэтому необходима осторожность при пользовании разными источниками.

Формулы п. 6.4-3 позволяют получать выражения для векторных элементов линии $d\mathbf{r}$ и поверхности $d\mathbf{S}$ и элемента объема dV .

Различные дополнительные формулы (например, символы Кристоффеля) могут быть получены с помощью соотношений, приведенных в пп. 16.10-1—16.10-8.*

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теория аналитических функций комплексного переменного доставляет инженерам и исследователям много полезных математических моделей. Многие математические теоремы упрощаются, если рассматривать действительные переменные как частный случай комплексных переменных. Комплексные переменные употребляют для описания двумерных векторов в физике; аналитические функции комплексного переменного описывают двумерные скалярные и векторные поля (п.15.6-8 и п.15.6-9). Наконец, аналитические функции комплексного переменного реализуют конформные отображения одной плоскости на другую (пп.7.9-1 – 7.9-5).

7.2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОБЛАСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

7.2-1. Функции комплексного переменного (см. также п.1.3-2 и п.4.2-1 и табл. 7.2-1; отсылаем к гл. 21 для дополнительных примеров). Комплексная функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = |w| e^{i\theta} \quad (7.2-1)$$
$$(z = x + iy = |z| e^{i\varphi})$$

каждому значению независимой комплексной переменной z из некоторой области определения ставит в соответствие одно или несколько значений зависимой комплексной переменной w .

Однозначные, многозначные и ограниченные функции комплексного переменного определены в пп.4.2-2,а и 4.3-2,в. Пределы комплексных функций и последовательностей и непрерывность комплексных функций, а также сходимость, абсолютная сходимость и равномерная сходимость комплексных рядов и несобственных интегралов были определены в гл. 4; теоремы гл. 4 применимы к комплексным функциям и переменным, если они не сформулированы специально для действительных количеств.

В частности, каждый комплексный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ имеет действительный радиус сходимости r_c ($0 \leq r_c \leq \infty$) такой, что ряд сходится равномерно и абсолютно при $|z-a| < r_c$ и расходится при $|z-a| > r_c$ (п.4.10-2,а).

7.2-2. z -плоскость и w -плоскость. Окрестности. Бесконечно удаленные точки (см. также п.4.3-5). Значения независимой переменной

$$z = x + iy$$

ставятся в соответствие единственной точке (x, y) комплексной плоскости z

Таблица 7.2-1

Действительная и мнимая части, нули и особенности для наиболее часто встречающихся функций

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$

(см. также п.1.3-2 и пп.21.2-9 - 21.2-11)

$|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$; если $\arg f(z) = \theta$, то $\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{u}$

Функция $f(z)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$	Нули (m — порядок)	Изолированные особенности
z	x	y	$z = 0$ $m = 1$	Полнос ($m=1$) при $z = \infty$
z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$	$z = 0$ $m = 2$	Полнос ($m=2$) при $z = \infty$
$\frac{1}{z}$	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$-\frac{y}{x^2 + y^2}$	$z = \infty$ $m = 1$	Полнос ($m=1$) при $z = 0$
$\frac{1}{z^2}$	$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$	$-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$	$z = \infty$ $m = 2$	Полнос ($m=2$) при $z = 0$
$\frac{1}{z - (a + ib)}$ (a, b действительны)	$\frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$	$-\frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$	$z = \infty$ $m = 1$	Полнос ($m=1$) при $z = a + ib$
\sqrt{z}	$\pm \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^{1/2}$	$\pm \left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^{1/2}$	Нуль порядка 1 при $z = 0$ (точка разветвления)	Точка разветвления ($m=1$) при $z = 0$ Точка разветвления ($m=1$) при $z = \infty$
e^z	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$		Существенно особая точка при $z = \infty$
$\sin z$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\cos x \operatorname{sh} y$	$z = k\pi$ $m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	Существенно особая точка при $z = \infty$
$\cos z$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$-\sin x \operatorname{sh} y$	$z = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi$ $m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	Существенно особая точка при $z = \infty$

sh z	ch x sin y	$z = k\pi i$ $m=1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	Существенно особая точка при $z = \infty$
ch z	sh x sin y	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ $m=1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	Существенно особая точка при $z = \infty$
tg z	$\frac{\text{sh } 2x}{\cos 2x + \text{ch } 2y}$	$z = k\pi$ $m=1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	Существенно особая точка при $z = \infty$ Плюсы ($m=1$) при $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
th z	$\frac{\sin 2y}{\text{ch } 2x + \cos 2y}$	$z = k\pi i$ $m=1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	Существенно особая точка при $z = \infty$ Плюсы ($m=1$) при $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
ln z	$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$	$z = 1$ $m=1$ (для ветви, соответствующей $k=0$)	Точки разветвления бесконечного порядка при $z=0, z=\infty$; обе существенно особые точки

Значения $w = u + iv$ таким же образом ставятся в соответствие точкам (u, v) плоскости w .

Окрестность (открытая) точки $z = a$, лежащей в конечной части плоскости, определяется как совокупность точек z таких, что $|z - a| < \delta$, где $\delta > 0$.

Бесконечно удаленная точка ($z = \infty$) определяется как точка \bar{z} , соответствующая началу координат ($z = 0$) при преобразовании $\bar{z} = \frac{1}{z}$. **Окрестностью** точки $z = \infty$ является внешность любого круга.

7.2-3. Кривые и контуры (см. также п.2.1-9 и п.3.1-13). **Непрерывная кривая** в z -плоскости есть последовательность точек $z = x + iy$ таких, что

$$z = z(t) \text{ или } x = x(t), y = y(t) \\ (-\infty \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq \infty), (7.2-2)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t . Непрерывная кривая (или ее часть) есть **простая кривая** (**жорданова дуга**), если она состоит из единой ветви и не содержит кратных точек; это значит, что функции $x(t)$ и $y(t)$ однозначны и в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ нет таких двух *различных* значений t_1 и t_2 , для которых справедливы оба равенства

$$x(t_1) = x(t_2) \text{ и } y(t_1) = y(t_2).$$

Простая замкнутая кривая (**замкнутая жорданова кривая**) есть непрерывная кривая, состоящая из единой ветви без кратных точек, кроме совпадающих начальной и конечной точек.

Простая кривая или **простая замкнутая кривая** называется **простым контуром**, если она спрямляема (п.4.6-9)¹⁾. Элемент расстояния между соответствующими точками z и $z + dz$ контура (2) есть

$$ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

¹⁾ Некоторые авторы применяют термин контур только к регулярным кривым (п.3.1-13).

7.2-4. Границы и области (см. также пп. 4.3-6, 7.9-16 и 12.5-1). Геометрия комплексной плоскости (включая определение расстояния и угла) тождественна с геометрией евклидовой плоскости точек (x, y) или векторов $\mathbf{r} = xi + yj$ для конечных значений x и y , кроме определения точки $z = \infty$ (п.7.2-2)*). Точки комплексной плоскости z представляют гомотопное (п.12.5-1) отображение точек сферы с долготой $\arg z$ и широтой $\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{|z|}{2}$ (стереографическая проекция); при этом точки $z = 0$ и $z = \infty$ соответствуют противоположным полюсам. Точки каждой простой замкнутой кривой C разделяют плоскость на две связанные открытые области: каждая непрерывная кривая, содержащая точки обеих областей содержит точку их общей границы (теорема Жордана).

Если C не содержит точку $z = \infty$, то одна из двух областей ограничена (т.е. находится целиком в конечной части плоскости, где $|z|$ ограничен), а другая не ограничена; если C содержит точку $z = \infty$, то обе области не ограничены.

В более общем случае граница C области D может быть множеством непересекающихся простых кривых (многообразная область, см. также п.4.3-6). В этом случае положительное направление (положительный обход) граничной кривой определяется как оставляющее область D (внутренность граничной кривой) слева (против часовой стрелки для наружной компоненты границы, см. также ниже рис. 7.5-1). Открытое множество точек по одну сторону от граничной кривой C есть открытая область; добавляя к этому множеству точки, лежащие на самой границе, получаем замкнутую область.

В дальнейшем, если область D дополняется ее граничными точками, то получившуюся замкнутую область будем обозначать \bar{D} .

7.2-5.* Комплексные контурные интегралы (см. также п.4.6-1 и 4.6-10). По определению

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max |z_i - z_{i-1}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}), \quad (7.2-3a)$$

где точки z_0, z_1, \dots, z_n расположены одна за другой вдоль контура C ; $a = z_0$ — начальная точка контура, $b = z_n$ — конечная. Каждая из точек ζ_i лежит на участке кривой $[z_{i-1}, z_i]$ и может совпадать с одним из его концов.

Из определения интеграла (3a) следует, что

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy, \quad (7.2-3b)$$

где действительные криволинейные интегралы берутся по тому же контуру, что и комплексный интеграл. Свойства интегралов табл. 4.6-1 переносятся на рассматриваемые интегралы; в частности, изменение направления интегрирования на контуре C изменяет знак интеграла.

Если вдоль контура C функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны (т.е. непрерывны функции $u[x(t), y(t)]$ и $v[x(t), y(t)]$, где $x(t), y(t)$ — параметрические уравнения контура (см. (7.2-3)), то интеграл (3a) существует.

Если при этом длина контура C равна L и на контуре

$$|f(z)| \leq M,$$

то

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML. \quad (7.2-4)$$

Если контур C содержит точку $z = \infty$ или если $f(z)$ не ограничена на C , то интеграл (3) может быть определен как несобственный интеграл в смысле п.4.6-2.

*) В комплексной плоскости вводится только одна бесконечно удаленная точка. В проективной плоскости, т.е. в евклидовой плоскости, дополненной несобственными элементами (бесконечно удаленными точками) любая совокупность параллельных прямых определяет свою бесконечно удаленную точку; эти точки образуют бесконечно удаленную прямую.

7.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ (РЕГУЛЯРНЫЕ, ГОЛОМОРФНЫЕ) ФУНКЦИИ

7.3-1. Производная функции (см. также п.4.5-1). Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z = a$, если предел

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (7.3-1)$$

(производная $f(z)$ по z) существует при $z = a$ и не зависит от способа стремления Δz к нулю. Функция может быть дифференцируема в точке (например, $|z|^2$ при $z = 0$), на кривой и во всей области.

7.3-2. Уравнения Коши – Римана. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, определенная в некоторой области, была дифференцируемой в точке z этой области, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы* в той же точке и чтобы, кроме того, выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{уравнения Коши – Римана}). \quad (7.3-2)$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7.3-3)$$

7.3-3. Аналитические функции.

(а) Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической (регулярной, голоморфной)** в точке $z = a$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки a .

$f(z)$ **аналитическая в точке a** тогда и только тогда, когда она представляема степенным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$, сходящимся в некоторой окрестности точки $z = a$ (равносильное определение).

Функция называется **аналитической в открытой области D** , если она аналитическая в каждой точке этой области.

Отсылаем к пп.7.4-1 – 7.4-3 для расширения этого определения применительно к многозначным функциям.

(б) $f(z)$ называется **аналитической в бесконечности**, если функция $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитическая в точке $z = 0$. По определению $f'(\infty) = -z^2 \frac{dF}{dz} \Big|_{z=0}$.

Функция $f(z)$ **аналитическая в бесконечности** тогда и только тогда, когда она может быть представлена сходящимся рядом по отрицательным степеням $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$ для достаточно больших значений $|z|$ (см. также п.7.5-8).

Термины дифференцируемая, аналитическая, регулярная и голоморфная применялись в одном и том же смысле разными авторами.

7.3-4. Свойства аналитических функций. Пусть $f(z)$ – аналитическая в открытой области D . Тогда во всей области D :

1) уравнения Коши – Римана (2) удовлетворяются (верно и обратное утверждение);

* То есть имели полные дифференциалы; для этого достаточно, чтобы частные производные u'_x, u'_y, v'_x, v'_y были непрерывны в рассматриваемой точке (см. п.4.5-3).

2) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — сопряженные гармонические функции (п.15.6-8);
 3) все производные функции $f(z)$ существуют и являются аналитическими функциями (см. также п.7.5-1);

4) в односвязной области D интеграл $\int_a^z f(\zeta) d\zeta$ не зависит от контура интегрирования, если только этот контур имеет конечную длину и целиком лежит в области D ; производная интеграла есть $f(z)$ (см. также п.7.5-1);
 5) значения $f(z)$ на линии или в подобласти, целиком лежащих в области D , определяют $f(z)$ единственным образом всюду в D .

Все обычные правила дифференцирования и интегрирования (пп.4.5-4 и 4.6-1) применимы к аналитическим функциям комплексного переменного.

Если функция $w=f(z)$ аналитична в точке $z=a$ и $f'(a) \neq 0$, то $f(z)$ имеет аналитическую обратную функцию $z(w)$ (п.4.2-2, а), определенную в окрестности точки $w=f(a)$.

Если $W = F(w)$ и $w=f(z)$ — обе аналитические, то W есть аналитическая функция от z .

Если последовательность (или ряд, п.4.8-1) функций $f_k(z)$, аналитических в открытой области D , сходится равномерно к пределу $f(z)$ всюду в D , то $f(z)$ — аналитическая функция и последовательность (или ряд) производных $f'_k(z)$ сходится равномерно к $f'(z)$ всюду в D .

Последовательность (или ряд) контурных интегралов $\int_C f_k(z) dz$ при условии, что контур C конечной длины и лежит в D , сходится равномерно к $\int_C f(z) dz$.

7.3-5. Теорема о максимуме модуля. Абсолютное значение $|f(z)|$ функции $f(z)$, аналитической в открытой ограниченной области D , не может достигать максимума ни в одной точке области D , если только $f(z)$ не константа. Если, кроме того, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области \bar{D} и $|f(z)| \leq M$ на границе, то $|f(z)| < M$ всюду внутри D при условии, что $f(z) \neq \text{const}$.

* Если функция $f(z)$ при приведенных условиях не обращается в нуль в области D , то и минимум $|f(z)|$ не может достигаться внутри области.*

7.4. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

7.4-1. Ветви. Обобщением теории аналитических функций является рассмотрение ветвей $f_1(z), f_2(z), \dots$ функции $f(z)$, которые определяются как однозначные непрерывные функции в области их определения. Каждая ветвь принимает некоторое множество значений функции $f(z)$ (см. также п.7.8-1).

7.4-2. Точки разветвления и разрезы.

(а) Пусть имеется некоторое число ветвей функции $f(z)$, аналитических всюду в окрестности D точки $z=a$, исключая, быть может, саму точку a . Тогда точка $z=a$ называется **точкой разветвления**, включающей данные ветви $f(z)$, если функция $f(z)$ переходит от одной своей ветви к другой, когда переменная точка z описывает в окрестности D замкнутую кривую вокруг точки a *). Если после $(m+1)$ -кратного обхода этой кривой в одном и том же направлении мы снова впервые вернемся к первоначальной ветви, то число m

*) Заметим, что функция $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ может иметь другие ветви (как аналитические, так и не аналитические), не совпадающие с данными. Например, функция $w = \sqrt{1-\sqrt{z}}$ имеет четыре ветви; для двух из них, определяемых условием $\sqrt{1} = 1$, точка $z=1$ является точкой разветвления. Две другие ветви, определяемые условием $\sqrt{1} = -1$ в окрестности точки $z=1$ (и в самой этой точке), аналитические.

называется **порядком** точки разветвления. Если $f(z)$ определена в точке разветвления, то значение $f(a)$ есть общее для всех ветвей, «присоединенных» к точке a . (Пример. $\sqrt[3]{z}$ имеет точку разветвления порядка 2 при $z=0$; все три ветви равны нулю в точке разветвления.)

* Если $z=a$ — точка разветвления порядка $m-1$, то функция $\Phi(\zeta) = f(\zeta^m + a)$ однозначна в окрестности точки $\zeta=0$; если эту окрестность разбить на m секторов лучами $\arg \zeta = \frac{2\pi k}{m}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), то значения функции $\Phi(\zeta)$ в каждом из таких секторов совпадают с соответствующими значениями одной из ветвей $f(z)$.

Если, описывая кривую вокруг точки $z=a$ сколько угодно раз в одном и том же направлении, мы каждый раз будем получать новые ветви, то точка a называется **точкой разветвления бесконечного порядка** или **логарифмической точкой разветвления**. (Пример. $w = \ln z$ при $z = 0$.) *

Точка $z = \infty$ есть точка разветвления функции $f(z)$, если начало координат есть точка разветвления для функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$ (см. также п.7.6-3).

Пусть для функции $f(z)$ обратная функция $\Phi(w)$ существует и однозначна всюду в окрестности $w = f(a)$. Тогда точка $z = a \neq \infty$ является точкой разветвления порядка m для $f(z)$, если $\Phi'(w)$ имеет нуль порядка m (п.7.6-1) или полюс порядка $m+2$ (п.7.6-2) при $w = f(a)$.
(Пример. $w = \sqrt{z}$ и $w = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $a = 0$.)

Подобным образом, если $\Phi(w)$ существует и однозначна всюду в окрестности точки $w = f(\infty)$, то точка $z = \infty$ является точкой разветвления порядка m функции $f(z)$, если $\Phi'(w)$ имеет нуль порядка $m+2$ или полюс порядка m при $w = f(\infty)$. (Пример. $w = \sqrt{z}$ и $w = \frac{1}{\sqrt{z}}$.)

(б) Отдельные однозначные ветви функции $f(z)$ определены в областях, ограниченных **разрезами**, которые являются простыми кривыми, выбранными так, что ни одна замкнутая кривая, окружающая точку разветвления, не лежит в области определения каждой однозначной ветви. Выбор ветвей и разрезов для заданной функции $f(z)$ не единствен, однако точки разветвления и число ветвей определяются единственным образом. (Пример. Для функции $w = \sqrt{z}$ разрезом может служить любая простая кривая, соединяющая точки $z = 0$ и $z = \infty$.)

Все ветви *моногенной аналитической функции* могут быть последовательно получены аналитическим продолжением ее элемента (п.7.8-1).

7.4-3. Римановы поверхности. Часто бывает полезно представить многозначную функцию как однозначную, определенную на римановой поверхности. Такая поверхность состоит из некоторого числа z -плоскостей, или «листов», соответствующих ветвям функции $f(z)$ и соединенных вдоль соответствующим образом выбранных разрезов. О способах построения римановых поверхностей см. [7.2] и [7.4]. Заметим, что конструкция римановых поверхностей для произвольных функций может быть весьма сложной и требовать большой изобретательности при построении.

Если функция $w = f(z)$ и ей обратная обе многозначны, то z -плоскость и w -плоскость можно заменить соответствующими римановыми поверхностями; при этом функция $w = f(z)$ будет определять взаимно однозначное соответствие между точками обеих римановых поверхностей, исключая точки разветвления.

З а м е ч а н и е. Риманова поверхность для моногенной аналитической функции (полученной аналитическим продолжением, п.7.8-1) будет связанной; таким образом, многозначная функция $f(z) = \pm 1$, несмотря на аналитичность каждой ветви, не является моногенной аналитической функцией.

* Более сложный пример представляет многозначная функция $w = \ln e^z$, распадающаяся на бесконечное множество различных однозначных ветвей $w = z + 2\pi ki$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Эта функция не имеет точек разветвления. *

Всюду в этой книге, исключая специальные утверждения, применимые к многозначным функциям, речь идет только об однозначных аналитических функциях или об однозначных ветвях многозначных аналитических функций (см. п.7.8-1).

7.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

7.5-1. Интегральные теоремы. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области, C — замкнутый контур, принадлежащий этой области вместе со своей внутренностью D , и z — любая точка из D . Тогда

$$\int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (\text{интегральная теорема Коши}), \quad (7.5-1)$$

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\text{интегральная формула Коши}), \\ f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \\ f''(z) &= \frac{2!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta, \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (7.5-2)$$

Рис. 7.5-1 иллюстрирует применение интегральной теоремы Коши к многосвязной области (см. также п.7.7-1).

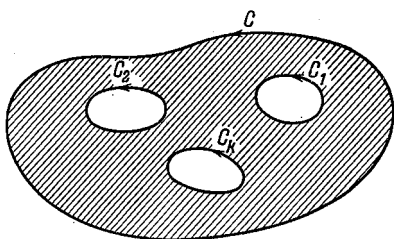


Рис. 7.5-1. Теорема Коши для многосвязной области (п. 7.2-4 и 7.5-1). Область D ограничена внешним контуром C и внутренними контурами C_1, C_2, \dots, C_n ; направления обхода контуров указаны на рисунке:

$$\int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} f(\zeta) d\zeta.$$

любой области, не содержащей точек контура C . О свойствах и приложениях интегралов типа Коши см. [7.1], гл. III, § 3.*

Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и равенство (1) имеет место для любого замкнутого контура C , лежащего в D , то $f(z)$ аналитическая в этой области (теорема Морера).

Равенства (2) выражают функцию $f(z)$ и ее производные через граничные значения $f(z)$. В частности,

$$\int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i. \quad (7.5-3)$$

Интегральная теорема Коши обобщается на тот случай, когда на контуре C функция $f(z)$ перестает быть аналитической, оставаясь непрерывной: если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области \bar{D} , то интеграл (1), взятый по ее границе C , равен нулю.

* Если относительно $f(z)$ известно только, что она непрерывна на контуре C , то функция $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ (интеграл

типа Коши) будет аналитической в

7.5-2. Разложение в ряд Тейлора (см. также п.4.10-4).

(а) Если $f(z)$ аналитична внутри окружности K радиуса r с центром в точке $z=a$ ($a \neq \infty$), то существует единственный ряд по степеням $(z-a)$, равномерно сходящийся к $f(z)$ при $|z-a| \leq r' < r$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k, \quad (7.5-4)$$

где

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta$$

и K' — окружность $|z-a| = r'$.

Наибольший круг K_c ($|z-a| \leq r_c$), все внутренние точки которого лежат внутри области, в которой $f(z)$ аналитична, является **кругом сходимости** степенного ряда (4). r_c есть **радиус сходимости** (п.4.10-2,а). Наиболее важные разложения функций в степенные ряды приведены в п.21.2-12.

(б) Если $M(r')$ — верхняя граница $|f(z)|$ на K' , то

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M(r')}{r'^n} \quad (\text{неравенство Коши}). \quad (7.5-5)$$

(с) Если в ряде Тейлора (4) отбросить все члены, стоящие за $a_{n-1}(z-a)^{n-1}$, то **остаточный член** $R_n(z)$ равен

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}, \quad |R_n(z)| \leq \left(\frac{|z-a|}{r'}\right)^n \frac{r' M(r')}{r' - |z-a|}. \quad (7.5-6)$$

(Если положить $|z-a| = kr'$, где $k < 1$, то $R_n(z) \leq \frac{k^n M(r')}{1-k}$.)

7.5-3. Разложение в ряд Лорана.

(а) Если $f(z)$ аналитична в кольце между двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 с центрами в точке $z=a$ ($a \neq \infty$) и радиусами r_1 и $r_2 < r_1$, то существует единственное разложение в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-a)^{-k} \quad (r_2 < |z-a| < r_1), \quad (7.5-7)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K'_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}, \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K'_2} (\zeta-a)^{k-1} f(\zeta) d\zeta,$$

K'_1 — окружность $|z-a| = r'_1 < r_1$ и K'_2 — окружность $|z-a| = r'_2 > r_2$.

Первая сумма в равенстве (7) равномерно сходится для $|z-a| \leq r'_1$ и аналитична внутри K_1 ; вторая сумма (главная часть разложения для $f(z)$) равномерно сходится для $|z-a| \geq r'_2$ и аналитична во внешности окружности K_2 .

З а м е ч а н и е. Случай $a = \infty$ приводится к предыдущему при помощи преобразования $\tilde{z} = \frac{1}{z}$, переводящего $z = \infty$ в начало координат.

*Ряд (7.5-7) можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta,$$

где Γ — любая окружность, расположенная между K_1 и K_2 . *

(b) Если в первой сумме равенства (7) ограничиться членами по $a_{n-1}(z-a)^{n-1}$ включительно, то остаточный член $R_n(z)$ будет равен

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{K'_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^n (\zeta-z)}, \quad |R_n(z)| \leq \left(\frac{|z-a|}{r'_1} \right)^n \frac{r'_1 M(r'_1)}{r'_1 - |z-a|}. \quad (7.5-8)$$

Если во второй сумме равенства (7) последним слагаемым взять $b_{n-1}(z-a)^{-(n-1)}$, то остаточный член $R_n^*(z)$ будет равен

$$R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i (z-a)^n} \int_{K'_2} \frac{(\zeta-a)^n f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad |R_n^*(z)| \leq \left(\frac{r'_2}{|z-a|} \right)^n \frac{r'_2 M(r'_2)}{|z-a| - r'_2}. \quad (7.5-9)$$

$M(r'_1)$ и $M(r'_2)$ — верхние границы для $|f(z)|$ на K'_1 и K'_2 соответственно.

7.6. НУЛИ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

7.6-1. Нули (см. также п.1.6-2). Точки z , для которых $f(z) = 0$, называются **нулями** функции $f(z)$ (корнями уравнения $f(z) = 0$). Функция $f(z)$, аналитическая в точке $z = a$, имеет **нуль порядка m** , где m — целое положительное число, если в точке $z = a$ первые m коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора (7.5-4) равны нулю. При этом $f(z)(z-a)^{-m}$ аналитична и отлична от нуля в точке a .

Нули функции $f(z)$, аналитической в области D , все изолированы друг от друга (т. е. каждый нуль имеет окрестность, внутри которой $f(z) \neq 0$, исключая сам нуль), или $f(z)$ тождественно равна нулю в области D .

* Иначе говоря, нули функции $f(z)$, не равной тождественно нулю, не могут иметь предельной точки в области D . В то же время они могут иметь предельную точку на границе области D . Например, пусть D — круг $|z| < 1$ и $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$. Нули $z = 1 - \frac{1}{k\pi}$ имеют предельную точку $z = 1$.*

Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические в односвязной ограниченной области D и на ее контуре C и если $|f_2(z)| < |f_1(z)| \neq 0$ на C , то функции $f_1(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$ имеют одинаковое число нулей в области D (теорема Руше).

Каждый многочлен степени n имеет n нулей с учетом их кратности (основная теорема алгебры, см. также п.1.6-3).

7.6-2. Особые точки (особенности). Особой точкой или особенностью функции $f(z)$ называется точка, в которой $f(z)$ не аналитична. Точка $z = a$ называется **изолированной особенностью** $f(z)$, если существует действительное число $\delta > 0$ такое, что $f(z)$ аналитична при $0 < |z-a| < \delta$, но не в самой точке $z = a$. Изолированные особенности для $z = a \neq \infty$ могут быть такими:

1. Устранимая особенность, если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности $z = a$, исключая возможно саму точку a , т. е. когда все коэффициенты b_k разложения в ряд Лорана (7.5-7) функции $f(z)$ в точке a равны нулю.

Пример $w = \frac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особенность при $z = 0$.

В дальнейшем устранимые особые точки обычно не считаются особыми.

2. Полюс порядка m ($m = 1, 2, \dots$), если $(z-a)^m f(z)$, но не $(z-a)^{m-1} f(z)$, аналитична в точке $z = a$, т. е. если

$$b_m \neq 0, \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$$

в разложении Лорана (7.5-7) функции $f(z)$ в точке $z=a$. В этом случае $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ при любом стремлении z к a . При этом функция

$F(z) = \frac{1}{f(z)}$ будет аналитична в некоторой окрестности точки a (если положить $F(a) = 0$) и иметь в этой точке нуль порядка m .

Примеры. $w = \frac{1}{(z-2)^3}$ имеет полюс 3-го порядка при $z=2$;

$w = \operatorname{tg} z$ имеет полюсы 1-го порядка в точках $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

3. Изолированная существенно особая точка, если в разложении Лорана (7.5-7) функции $f(z)$ в точке a имеется бесконечное число членов, содержащих отрицательные степени $(z-a)$; при этом не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при z стремящемся к a ¹⁾.

Примеры. Функции $\sin \frac{1}{z}$ и $e^{\frac{1}{z}}$ имеют существенно особую точку при $z=0$.

4. Точка разветвления, если функция $f(z)$ многозначная и точка a удовлетворяет условиям п.7.4-2.

Если m ветвей функции $f(z)$ присоединены к точке разветвления $z=a$, то последняя рассматривается как точка непрерывности, нуль, устранимая особая точка, полюс или существенно особая точка «комплекса» из m ветвей, в зависимости от того, будет ли однозначная функция (см. п.7.4-2)

$$\Phi(\zeta) = f(\zeta^m + a) \quad (7.6-1)$$

при $\zeta=0$ иметь соответственно точку непрерывности, нуль, устранимую особую точку, полюс или существенно особую точку.

Если точка $\zeta=0$ для функции $\Phi(\zeta)$ правильная (т.е. не особая) или полюс, то точка разветвления $z=a$ называется алгебраической точкой разветвления; если точка $\zeta=0$ существенно особая, то точка $z=a$ называется трансцендентной точкой разветвления конечного порядка $(m-1)$. Определение точки разветвления бесконечного порядка (логарифмической точки разветвления) см. в п.7.4-2.

Заметим, что $f(z)$ может иметь другие ветви при $z=a$, которые могут быть присоединены или не присоединены к точке a и поведение которых может отличаться от поведения рассмотренных выше m ветвей. Поведение каждой группы ветвей, присоединенных к точке разветвления $z=a$, а также ветвей, для которых a не является точкой разветвления, нужно рассматривать независимо друг от друга; для каждой такой группы строится своя функция $\Phi(\zeta)$. Для данной точки a многозначная функция $f(z)$ может иметь не более счетного множества различных групп ветвей.

Примеры. Функция \sqrt{z} имеет точку разветвления порядка 1 при $z=0$; эта точка разветвления есть нуль для обеих ветвей. Для функции $\frac{1}{\sqrt{z}}$ точка разветвления $z=0$ является полюсом. * Функция $\sin \frac{1}{\sqrt{z}}$ имеет при $z=0$ трансцендентную точку разветвления

второго порядка. Функция $w = \sqrt{1-\sqrt{z}}$ имеет в окрестности точки $z=1$ четыре ветви (см. сноску на стр. 198). Две из них (для которых $|\sqrt{z}|_{z=1} = 1$) присоединены к точке разветвления $z=1$. Значения однозначной функции

$$\Phi(\zeta) = \sqrt{1-\sqrt{1+\zeta^2}}$$

определяются условием $(\sqrt{\zeta^2+1})_{\zeta=0} = 1$. В окрестности точки $\zeta=0$ (при $|\zeta| < 1$) функция

$$\Phi(\zeta) = \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \zeta^2 - \frac{1}{8} \zeta^4 + \dots \right) \right]^{1/2} = \frac{i\zeta}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{8} + \dots \right)$$

(см. п.2.1.2-12, формула (2.1.2-39) при $p = \frac{1}{2}$); таким образом, $z=1$ для обеих ветвей

¹⁾ Последним свойством обладает также точка, являющаяся предельной для полюсов.

является нулем. Две остальные ветви $(\sqrt{z})|_{z=1} = -1$ в точке 1 — аналитические функции; для одной из них $w(1) = \sqrt{2}$, а для другой $w(1) = -\sqrt{2}$. Если положить $z = 1 + \zeta$, то для первой ветви $\varphi(\zeta) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{8} \zeta - \dots\right)$; для второй ветви функция $\varphi(\zeta)$ отличается только знаком.*

7.6-3. Нули и особенности в бесконечности. Функция $f(z)$ аналитична в бесконечности, если $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитическая в начале координат (п.7.3-3, б). Точка $z = \infty$ есть нуль или особенность одного из типов, указанных в п.7.6-2, если $f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет соответственный характер в начале координат. Поведение $f(z)$ в бесконечности может быть исследовано с помощью разложения $f\left(\frac{1}{z}\right)$ в ряд Лорана в окрестности $z = 0$.

7.6-4. Теоремы Вейерштрасса и Пикара. Пусть $f(z)$ — однозначная функция, имеющая изолированную существенно особую точку при $z = a$. Тогда

1) для любого комплексного числа A (включая $A = \infty$) существует последовательность точек $z_k \rightarrow a$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$ (теорема Вейерштрасса *);

2) каждая окрестность точки $z = a$ содержит бесконечное множество точек z таких, что $f(z) = A$ для любого комплексного числа $A \neq \infty$, за исключением, быть может, одного исключительного значения A (теорема Пикара).

7.6-5. Целые функции. Целой функцией $f(z)$ называется однозначная аналитическая функция, не имеющая особых точек в конечной части плоскости. Таким образом, целая функция может иметь единственную особую точку при $z = \infty$. Если эта особенность есть полюс порядка m , то $f(z)$ — многочлен (целая рациональная функция) степени m . Если $z = \infty$ — существенно особая точка, то $f(z)$ называется целой трансцендентной функцией. Если, наконец, $z = \infty$ — правильная точка (т. е. $f(z)$ — аналитическая для всех значений z), то $f(z)$ есть константа (теорема Лиувилля).

Целая функция, не являющаяся постоянной, принимает любое значение w , исключая, возможно, одно значение, по крайней мере в одной точке z , а если $f(z)$ не многочлен, то в бесчисленном множестве точек z **).

7.6-6. Разложение целой функции в произведение. Для каждой последовательности точек z_0, z_1, z_2, \dots , не имеющих предельной точки (п.4.3-6, а) в конечной части плоскости (т. е. имеющих $z = \infty$ своей единственной предельной точкой), существует целая функция $f(z)$, которая своими единственными нулями имеет нули порядка m_k в точках $z = z_k$. Пусть $z_0 = 0$, $z_k \neq 0$ ($k > 0$); если $z_0 = 0$ не является нулем, то $m_0 = 0$. Функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = z^{m_0} e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left[\frac{z}{z_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{r_k} \left(\frac{z}{z_k}\right)^{r_k} \right] \right\}^{m_k} \quad (7.6-2)$$

где $g(z)$ — произвольная целая функция, а целые числа r_k выбираются так,

*) Эта теорема была ранее доказана русским математиком Ю. Сохоцким и итальянским математиком С. Насоратти.

**) Если $f(z)$ — многочлен степени m , то он принимает любое значение A уже без всяких исключений.

чтобы бесконечное произведение равномерно сходилось в любой ограниченной области (теорема Вейерштрасса; примеры см. в п.21.2-13).

Если последовательность z_1, z_2, \dots такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^p}$ сходится для некоторого целого положительного числа p , то все числа r_k можно положить равными $p-1$. Если последовательность $\{z_k\}$ произвольная, то можно взять $r_k = [\ln k]$ (целая часть $\ln k$).

7.6-7. Мероморфные функции. Однозначная функция $f(z)$ называется мероморфной в области D , если ее единственными особенностями в D являются полюсы. Число этих полюсов в каждой конечной замкнутой части D обязательно конечно. Полюсы могут иметь предельную точку на границе области D .

В частности, D может совпадать со всей конечной комплексной плоскостью (исключая $z = \infty$); тогда в любой конечной части плоскости имеется только конечное число полюсов, и единственной предельной точкой для полюсов может быть бесконечно удаленная точка.

Каждую функцию, мероморфную в конечной плоскости можно представить в виде отношения двух целых функций, не имеющих общих нулей, и, следовательно, в виде отношения двух произведений вида (7.6-2).

Функция, мероморфная в конечной плоскости и имеющая в бесконечности правильную точку или полюс, есть рациональная алгебраическая функция, представляемая в виде отношения двух многочленов (см. также п.4.2-2,с).

7.6-8. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (см. также п.1.7-4). Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в конечной плоскости и имеющая полюсы с заданными

главными частями (п.7.5-3) $\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj}(z-z_k)^{-j}$ в точках $z = z_k$, число которых конечно или бесконечно и которые не имеют предельных точек в конечной части плоскости. Тогда можно найти такие многочлены $p_1(z), p_2(z), \dots$ и целую функцию $g(z)$, что

$$f(z) = \sum_k \left[\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj}(z-z_k)^{-j} - p_k(z) \right] + g(z). \quad (7.6-3)$$

Ряд равномерно сходится в каждой ограниченной области, в которой $f(z)$ аналитична (теорема Миттаг-Леффлера).

7.6-9. Нули и полюсы мероморфных функций. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в некоторой области G и C — замкнутый контур, принадлежащий вместе со своей внутренностью области G и не проходящий ни через нули, ни через полюсы функции $f(z)$. Пусть N — число нулей и P — число полюсов $f(z)$, лежащих внутри G , причем нуль или полюс порядка t считается t раз. Тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}, \quad (7.6-4)$$

если $P = 0$, то формула (4) дает число нулей

$$N = \frac{\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}, \quad (7.6-5)$$

где $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ обозначает изменение аргумента $f(z)$ при обходе точкой z контура C в положительном направлении (принцип аргумента).

Формула (5) означает, что $w = f(z)$ отображает движущуюся точку z , описывающую один раз контур C , на движущуюся точку w , окружающую в w -плоскости начало координат столько раз, сколько нулей имеет функция $f(z)$ внутри контура C в z -плоскости.

Формулы (4) и (5) играют важную роль для определения положения нулей и полюсов $f(z)$ и лежат в основе геометрических критериев устойчивости (см. [7.1]).

7.7. ВЫЧЕТЫ И КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.7-1. Вычеты. Пусть в точке $z=a$ функция $f(z)$ или аналитична или имеет изолированную особенность. Тогда **вычетом** $\text{Res } f(a)$ ¹⁾ функции $f(z)$ в точке a называется коэффициент при $(z-a)^{-1}$ в разложении Лорана (7.5-7), или

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta, \quad (7.7-1a)$$

где C — контур, окружающий точку a и не содержащий внутри себя особенностей $f(z)$, отличных от a .

Вычет $\text{Res } f(\infty)$ функции $f(z)$ при $z=\infty$ определяется как

$$\text{Res } f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} f(\zeta) d\zeta, \quad (7.7-1b)$$

где интегрирование производится в *отрицательном* направлении по контуру C (в этом случае внешность контура C остается слева), заключающему внутри себя все особые точки $f(z)$, лежащие в конечной части плоскости.

$\text{Res } f(\infty)$ равен взятому со знаком минус коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Отметим, что

$$\text{Res } f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)], \quad (7.7-2)$$

если этот предел существует.

Если $f(z)$ или аналитична, или имеет устранимую особенность при $z = a \neq \infty$, то $\text{Res } f(a) = 0$ (см. также формулу (7.5-1)). Если $z = a \neq \infty$ есть полюс порядка m , то

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \quad (7.7-3)$$

В частности, пусть $z = a \neq \infty$ — простой полюс и $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, где $p(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции в точке a и $p(a) \neq 0$. Тогда $q'(a) \neq 0$ и

$$\text{Res } f(a) = \frac{p(a)}{q'(a)}. \quad (7.7-4)$$

* Если бесконечность — правильная точка для функции $f(z)$, то вычет $\text{Res } f(\infty)$ может и не равняться нулю. Например, если $f(z) = \frac{1}{z}$, то $z = \infty$ есть нуль, а $\text{Res } f(\infty) = -1$.*

7.7-2. Теорема о вычетах (см. также п.7.5-1). Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в области D , за исключением изолированных особых точек, а замкнутый контур C принадлежит вместе со своей внутренностью области D , содержит внутри себя конечное число z_1, z_2, \dots, z_n особых точек и не проходит ни через одну из них. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k) \quad (\text{теорема о вычетах}). \quad (7.7-5)$$

С особой осторожностью нужно следить, чтобы контур C не пересекал разрывы для $f(z)$ (см. также п.7.4-2).

1) Вычеты обозначаются также $\text{Res } [f(z); a]$ или $\text{Res } f(z)$.
z=a

Если функция $f(z)$ однозначна и аналитична во всей комплексной плоскости (включая $z = \infty$), за исключением только изолированных особых точек (необходимо конечного числа, так как иначе существовала бы конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества особых точек), то сумма всех ее вычетов (включая вычет $\text{Res } f(\infty)$) равна нулю.

7.7-3. Вычисление определенных интегралов.

(а) Часто можно вычислять действительный определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, рассматривая его как часть комплексного контурного интеграла $\int_C f(z) dz$: при условии, что контур C включает интервал (a, b) действительной оси. Теорема о вычетах (5) может помогать в таких вычислениях и может, в частности, сводить неизвестные интегралы к уже известным.

(б) Для вычисления некоторых интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ следует применить формулу (5) к контуру C , состоящему из интервала $(-R, R)$ действительной оси и дуги C_R окружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости. Следующие леммы часто позволяют отбросить интегралы по дуге C_R при $R \rightarrow \infty$:

1. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, если интеграл существует для всех конечных значений R и $zf(z)$ стремится равномерно к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, когда $y \geq 0$.

2. Лемма Жордана. Если $F(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, исключая возможно конечное число полюсов, и стремится равномерно к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, когда $y \geq 0$, то для любого действительного положительного числа t

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(\zeta) e^{t\zeta} d\zeta = 0.$$

Метод контурного интегрирования может давать главное значение интеграла по

Коши (см. п. 4.6-2) для $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, когда сам интеграл в обычном смысле не существует.

Лемма Жордана бывает особенно полезна для вычисления несобственных интегралов:

вида $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} dx$ и, согласно формуле Эйлера, интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos mx dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin mx dx$$

(эти интегралы встречаются при преобразовании Фурье п. 4.11-3 и в формуле обращения для преобразования Лапласа, п. 8.2-6).

(в) Если s — какая-либо полуокружность круга $|z-a| = \epsilon$, где точка $z = a$ — простой полюс функции $f(z)$, то

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_s f(\zeta) d\zeta = \pi i \text{Res } f(a).$$

Это используется, во-первых, при вычислении интегралов по контурам, когда приходится «огнуть» простой полюс (например, при вычислении $\int \frac{e^{iz}}{z} dz$ по контуру, состоящему из отрезка $(-R, R)$ действительной оси и полуокружностей $|z|=R$ и $|z|=r$ при $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$), и, во-вторых, для вычисления главного значения по Коши некоторых несобственных интегралов.

(д) Теорему о вычетах можно применять к интегралам вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi,$$

где R — рациональная функция от $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, если совершить подстановку

$$\left. \begin{aligned} z &= e^{i\varphi}, & d\varphi &= \frac{1}{iz} dz, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), & \sin \varphi &= \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.7-6)$$

7.7-4. Применение вычетов к суммированию рядов. Пусть контур C окружает точки $z = m, z = m+1, z = m+2, \dots, z = n$, где m — целое число, и пусть $f(z)$ аналитична внутри C , за исключением, быть может, конечного числа полюсов a_1, a_2, \dots, a_N , из которых ни один не совпадает с точками $z = m, z = m+1, z = m+2, \dots, z = n$. Тогда

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz - \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} g(a_j), \quad (7.7-7)$$

где $\operatorname{Res} g(a_j)$ — вычет функции $g(z) = \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ в точке $z = a_j$;

$$\sum_{k=m}^n (-1)^k f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z \, dz - \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} g_1(a_j), \quad (7.7-8)$$

где $g_1(z) = \pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z$. Иногда бывает возможно выбрать контур C так, что интеграл в правой части формул (7) или (8) исчезает.

7.8. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

7.8-1. Аналитическое продолжение и моногенные аналитические функции (см. также пп. 7.4-1 — 7.4-3).

(а) Пусть однозначная функция $f_1(z)$ определена и аналитична всюду в области D_1 ; функция $f_2(z)$, определенная и аналитическая в области D_2 , есть **аналитическое продолжение** $f_1(z)$, если существует пересечение областей D_1 и D_2 , содержащее открытую область D_0 , в которой функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают.

Аналитическое продолжение $f_2(z)$ определяется единственным образом по значениям $f_1(z)$ в D_0 (см. также п. 7.3-3). Сверх того, аналитические продолжения $f_1(z)$ удовлетворяют каждому функциональному уравнению и, в частности, каждому дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет $f_1(z)$ (принцип консерватизма функциональных уравнений). Можно также воспользоваться функцией $f_2(z)$ для расширения области определения $f_1(z)$ и обратно: рассматривать $f_1(z)$ и $f_2(z)$ как элементы единой аналитической функции $f(z)$, определенной всюду в D_1 и D_2 .

$f_1(z)$ и/или $f_2(z)$ могут допускать дальнейшее аналитическое продолжение, ведущее к другим элементам функции $f(z)$.

(б) Многозначные функции. Заметим, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ не обязательно совпадают во всем пересечении областей их определения. $f_2(z)$ может иметь аналитическое продолжение $f_3(z)$, определенное в D_1 , но не совпадающее с $f_1(z)$. Аналитическое продолжение может производить элементы, принадлежащие к различным ветвям многозначной аналитической функции $f(z)$; два значения $f(z_0)$, полученные при аналитическом продолжении $f_1(z)$ вдоль двух различных путей C и C_1 , совпадают, если C и C_1 не окружают точку разветвления $f(z)$.

(в) Возможные аналитические продолжения данного элемента образуют **моногенную аналитическую функцию** $f(z)$, определенную, исключая изолированные особенности, во всей плоскости или в связной области с **естественными границами**. В то время как выбор последовательности элементов, определяющих $f(z)$, не является фиксированным, принцип консерватизма функциональных уравнений применим ко всем элементам и каждый такой один элемент единственным образом определяет все ветви, изолированные особенности и естественную границу $f(z)$.

7.8-2.* Методы аналитического продолжения.

(а) Стандартный метод аналитического продолжения отправляется от функции $f(z)$, определенной степенным рядом (7.5-4), сходящимся в круге $|z-a| < r$. Для каждой точки $z=b$ внутри круга значения $f(b), f'(b), \dots$ известны и определяют разложение в ряд Тейлора в окрестности $z=b$. Новый степенной ряд сходится внутри круга $|z-b| < r'$, который может иметь часть, расположенную вне первого круга. Тогда мы получаем аналитическое продолжение функции $f(z)$ в часть круга с центром в точке b , лежащую вне круга с центром в точке a . Этот процесс может быть продолжен вплоть до естественных границ функции; каждый степенной ряд есть элемент $f(z)$.

З а м е ч а н и е. Функция, определенная степенным рядом с конечным радиусом сходимости, имеет по крайней мере одну особую точку на границе круга сходимости.

(б) Пусть даны две односвязные области D_1 и D_2 без общих точек такие, что их границы имеют один общий кусок γ . Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические соответственно в областях D_1 и D_2 , непрерывны в $D_1 + \gamma$ и $D_2 + \gamma$ (т. е. вплоть до линии γ) и совпадают во всех точках кривой γ , то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга.

(в) П р и н ц и п с и м м е т р и и. Пусть $f(z)$ определена и аналитична в области D , граница которой содержит отрезок γ оси Ox , непрерывна в $D + \gamma$ и принимает на γ действительные значения. Тогда функция $f^*(z)$, определенная в области D^* , симметричной с областью D относительно действительной оси, соотношением

$$f^*(\bar{z}) = \overline{f(z)}, \quad (7.8-1)$$

является аналитическим продолжением $f(z)$ в области D^* . Более общо, пусть $f(z)$ определена и аналитична в области D , граница которой содержит дугу окружности или прямолинейный отрезок S_1 , на котором $f(z)$ непрерывна и принимает значения, лежащие на некоторой дуге окружности или прямолинейном отрезке S_2 в плоскости w . Тогда функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена в область D^* , симметричную с областью D относительно S_1 , причем ее значения в точках, симметричных относительно S_1 , будут симметричны относительно S_2 .

7.9. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ**7.9-1. Конформное отображение.**

(а) Функция $w=f(z)$ отображает точки z -плоскости (или римановой поверхности, п.7.4-3) в соответствующие точки w -плоскости (или римановой поверхности). В каждой точке z такой, что $f(z)$ аналитична и $f'(z) \neq 0$, отображение $w=f(z)$ конформно, т. е. угол между двумя кривыми, проходящими через точку z , переходит в равный по величине и по направлению отсчета угол между соответствующими кривыми в плоскости w .

Бесконечно малый треугольник около такой точки z отображается в подобный бесконечно малый треугольник w -плоскости; каждая сторона треугольника «растягивается» в отношении $|f'(z)|:1$ и поворачивается на угол $\arg f'(z)$. Коэффициент искажения (локальное отношение малых площадей) при отображении $w=f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равен

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (7.9-1)$$

в каждой точке z , где отображение конформно. Конформное отображение преобразует линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ в семейство ортогональных траекторий в w -плоскости. Обратные линии $u(x, y) = \text{const}$, $v(x, y) = \text{const}$ соответствуют ортогональным траекториям в z -плоскости (см. также табл. 7.2-1).

Область z -плоскости, отображающаяся на всю w -плоскость функцией $f(z)$, называется фундаментальной областью функции $f(z)$. Точки, где $f'(z) = 0$, называются критическими

точками отображения $w = f(z)$ ¹⁾. Отображение, которое сохраняет величину, но не направление отсчета угла между двумя кривыми, называется *изогональным* или *конформным* отображением второго рода (пример изогонального, но не конформного отображения: $w = \bar{z}$).

(b) Отображение $w = f(z)$ **конформно в бесконечно удаленной точке**, если функция $w = f\left(\frac{1}{z}\right) = F(z)$ отображает начало $z = 0$ конформно в w -плоскость.

Две кривые пересекаются под углом γ в точке $z = \infty$, если преобразование $\tilde{z} = \frac{1}{z}$ переводит их в две кривые, пересекающиеся под углом γ в точке $\tilde{z} = 0$. Аналогично $w = f(z)$ отображает точку $z = a$ конформно в точку $w = \infty$, если $\tilde{w} = \frac{1}{f(z)}$ отображает $z = a$ конформно в точку $\tilde{w} = 0$ (см. также п.7.2-3).

7.9-2. Дробно-линейное отображение (преобразование).

(a) Дробно-линейное отображение

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (bc-ad) \neq 0 \quad (7.9-2)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками z -плоскости и точками w -плоскости. Оно имеет две **инвариантные точки**

$$z = \frac{1}{2c} [(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}] \quad (7.9-3)$$

(которые могут и совпадать), отображающиеся сами в себя. Отображение конформно всюду, исключая точку $z = -\frac{d}{c}$, которой соответствует $w = \infty$.

Прямым и окружностям z -плоскости соответствуют прямые или окружности w -плоскости и обратно; в этой связи можно прямые рассматривать как окружности с бесконечным радиусом, проходящие через бесконечно удаленную точку. Для каждого дробно-линейного отображения, отображающего четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 , соответственно в w_1, w_2, w_3, w_4

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} = \frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} : \frac{w_1 - w_3}{w_3 - w_2} \quad (7.9-4)$$

(**инвариантное двойное отношение или ангармоническое отношение**²⁾). Равенство (4) определяет единственное дробно-линейное отображение, переводящее три данные точки z_1, z_2, z_3 соответственно в три данные точки w_1, w_2, w_3 . Существует дробно-линейное отображение, которое преобразует заданную окружность или прямую в z -плоскости в заданную окружность или прямую в w -плоскости (см. также табл. 7.9-2 и п.7.10-1).

Частные случаи. Отображение

$$w = Az + B, \quad (7.9-5)$$

где A и B — произвольные комплексные числа, соответствует *вращению* на угол $\arg A$, *растяжению* в $|A|$ раз и *параллельному сдвигу* на вектор B . *Линейное отображение* (5) есть самое общее конформное отображение, которое сохраняет подобие геометрических фигур.

Отображение

$$w = \frac{1}{z} \quad (7.9-6)$$

представляет геометрически *инверсию* точки z относительно единичной окружности с центром в начале координат с последующим симметричным отображением относительно действительной оси. Отображение (6) преобразует:

¹⁾ Некоторые авторы называют особые точки, где $\frac{1}{f'(z)} = 0$, также критическими точками $f(z)$.

²⁾ Двойное отношение (4) действительно, если точки z_1, z_2, z_3, z_4 (и следовательно, точки w_1, w_2, w_3, w_4) лежат на окружности или прямой.

- 1) прямые, проходящие через начало координат, в прямые, также проходящие через начало координат;
 2) окружности, проходящие через начало координат, в прямые, не проходящие через начало координат, и наоборот (прямые, не проходящие через начало координат, в окружности, проходящие через начало);
 3) окружности, которые не проходят через начало координат, в окружности, также не проходящие через начало координат.

(b) Дробно-линейные отображения (2) образуют группу; обратные преобразования и произведения дробно-линейных отображений также являются дробно-линейными (п.12.2-7). Каждое дробно-линейное отображение (2) может быть представлено как результат (произведение) трех последовательных простейших дробно-линейных отображений (см. также п.7.9-2,а):

$$z' = z + \frac{d}{c} \quad (\text{параллельный перенос}), \quad (7.9-7a)$$

$$z'' = \frac{1}{z'} \quad (\text{инверсия и симметрия}), \quad (7.9-7b)$$

$$w = \frac{bc - ad}{c^2} z'' + \frac{a}{c} \quad (\text{вращение и растяжение с последующим параллельным переносом}). \quad (7.9-7c)$$

7.9-8. Отображение $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ *. Отображение

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7.9-8a)$$

эквивалентно следующим:

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 \quad \text{или} \quad z = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (7.9-8b)$$

или

$$u = \frac{1}{2} \left(|z| + \frac{1}{|z|} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(|z| - \frac{1}{|z|} \right) \sin \varphi. \quad (7.9-8c)$$

Преобразование (8) конформно, за исключением критических точек $z=1$ и $z=-1$. И внешность и внутренность единичной окружности $|z|=1$ отображаются на всю плоскость w , из которой удален прямолинейный отрезок $-1 \leq u \leq 1$, соответствующий единичной окружности $|z|=1$. Некоторые важные свойства преобразования (7.9-8,а) приведены в табл. 7.9-1.

7.9-4. Интеграл Шварца – Кристоффеля. *Интеграл Шварца – Кристоффеля*

$$\left. \begin{aligned} w &= A \int_{z_0}^z (z-x_1)^{\alpha_1-1} (z-x_2)^{\alpha_2-1} \dots (z-x_n)^{\alpha_n-1} dz + B, \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j &= n-2 \end{aligned} \right\} \quad (7.9-9)$$

отображает верхнюю полуплоскость $y > 0$ конформно во внутренность многоугольника в w -плоскости; контур многоугольника соответствует действительной оси, вершины w_1, w_2, \dots, w_n соответствуют различным точкам x_1, x_2, \dots, x_n оси Ox и внутренний угол многоугольника в вершине w_j равен $\alpha_j \pi$ ($j=1, 2, \dots, n$). Для каждого данного многоугольника в вершине w_j из точек x_j могут быть выбраны произвольно; остальные точки x_j и параметры A и B определяются единственным образом.

* Это отображение обычно называют отображением Жуковского.

Таблица 7.9-1

Свойства отображения

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

(см. также табл. 7.9-2 и 7.10-1)

$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi}; \quad w = u + iv = re^{i\theta}$$

Точка, кривая (ые) или область в z -плоскости	Точка кривая (ые), или область в w -плоскости	Замечания
Окружности с центром в 0 $ z = e^\psi = \text{const} \neq 1$	Эллипсы с фокусами ± 1 $\frac{u^2}{\text{ch}^2 \psi} + \frac{v^2}{\text{sh}^2 \psi} = 1$	Если ψ возрастает, то θ возрастает для $ z > 1$ и убывает для $ z < 1$
Прямолинейные лучи, выходящие из начала координат $\varphi = \text{const} \neq 0$	Гиперболы с фокусами ± 1 $\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$	
Единичная полуокружность $ z = 1, \quad y > 0$	Прямолинейный отрезок $-1 < u < 1$	Если ψ возрастает, то u убывает
Единичная полуокружность $ z = 1, \quad y < 0$	Прямолинейный отрезок $-1 < u < 1$	Если ψ возрастает, то u возрастает
Прямолинейные отрезки действительной оси $y=0$, соответствующие интервалам $-\infty < x < -1,$ $1 < x < 0,$ $0 < x < 1,$ $1 < x < \infty$	Прямолинейные отрезки действительной оси $v=0$ $-\infty < u < -1,$ $-1 > u > -\infty,$ $\infty > u > 1,$ $1 < u < \infty$	
Линии тока для течения, обтекающего единичный круг со скоростью $1/2$ в ∞	$v = \text{const}$	
Соответствующие линии постоянного потенциала скоростей	$u = \text{const}$	

Если одной из вершин многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка, например $x_n = \infty$, то формула (9) приводится к виду

$$w = A' \int_{z_0}^z (z-x'_1)^{\alpha_1-1} (z-x'_2)^{\alpha_2-1} \dots (z-x'_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dz + B', \quad (7.9-10)$$

A' и B' — постоянные параметры и $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ — новые точки оси Ox .

Фактическое определение точек x ; или x' ; весьма сложно, за исключением некоторых вырванных случаев и когда один или несколько углов α_j обращаются в нуль (см. [7.6]).

Приложения формулы Шварца—Кристоффеля к отображению параллелограммов и прямоугольников в w -плоскости приводят к эллиптическим функциям (п.21.6-1).
Отображения 26—30 в табл. 7.9-2 суть частные случаи формулы Шварца—Кристоффеля.

7.9-5. Таблица отображений. Табл. 7.9-2 иллюстрирует некоторые отображения, часто встречающиеся в различных приложениях.

Таблица 7.9-2

Таблица конформных отображений

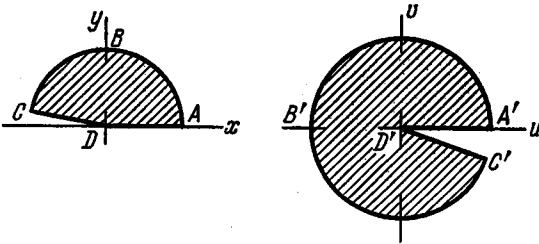
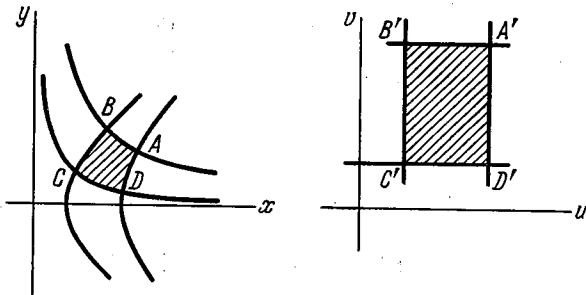
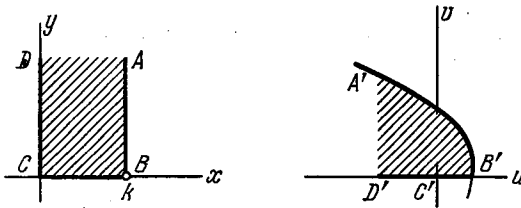
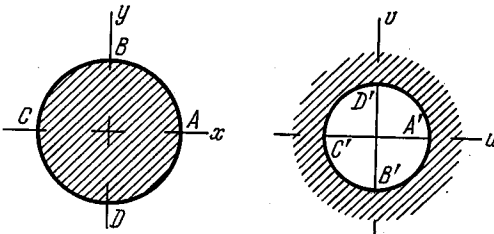
Рис. 1. $w = z^2$.Рис. 2. $w = z^2$.Рис. 3. $w = z^2$.Рис. 4. $w = \frac{1}{z}$.

Таблица 7.9-2 (продолжение)

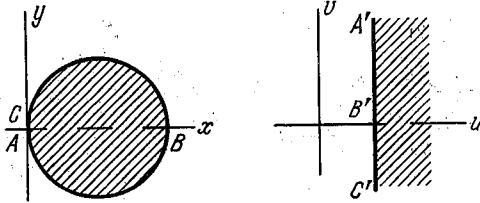


Рис. 5. $w = \frac{1}{z}$.

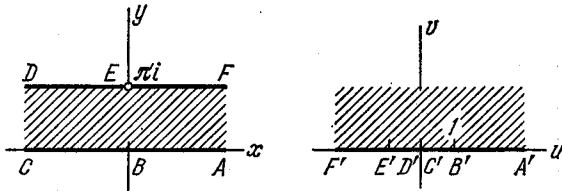


Рис. 6. $w = e^z$.

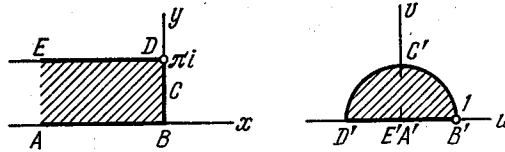


Рис. 7. $w = e^z$.

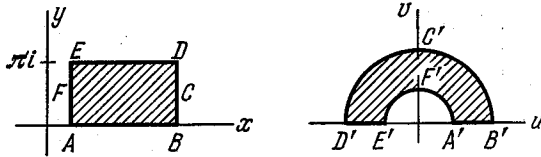


Рис. 8. $w = e^z$.

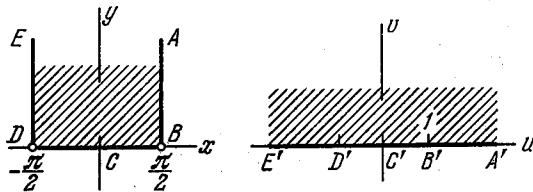


Рис. 9. $w = \sin z$.

Таблица 7.9-2 (продолжение)

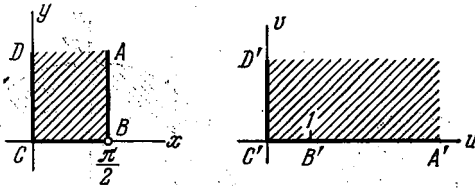
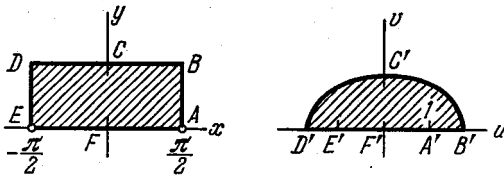
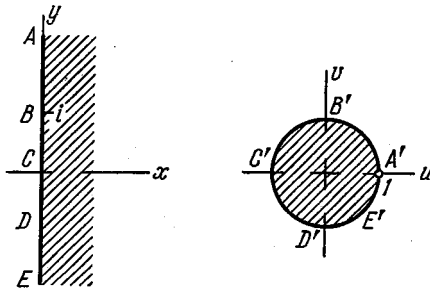
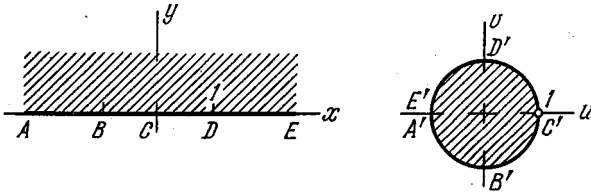
Рис. 10. $w = \sin z$.Рис. 11. $w = \sin z$; $B'CD'$ есть полуэллипс $\left(\frac{u}{\operatorname{ch} h}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} h}\right)^2 = 1$.Рис. 12. $w = \frac{z-1}{z+1}$.Рис. 13. $w = \frac{i-z}{i+z}$.

Таблица 7.9-2 (продолжение)

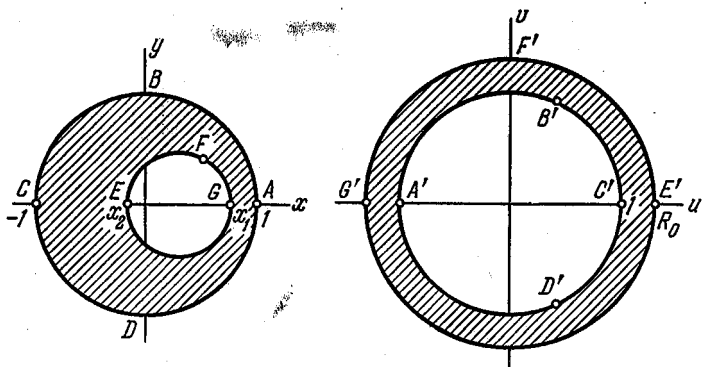


Рис. 14. $w = \frac{z-a}{az-1}$; $a = \frac{1+x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}$;

$R_0 = \frac{1-x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2}$ ($a > 1$ и $R_0 > 1$, если $-1 < x_2 < x_1 < 1$).

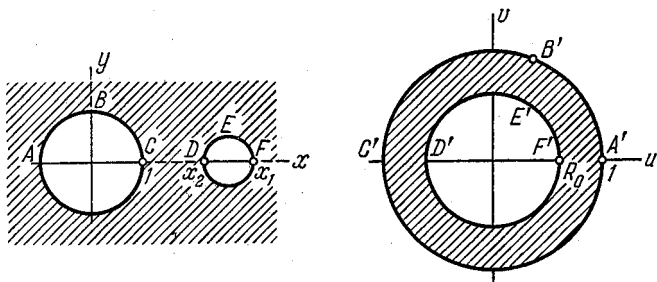


Рис. 15. $w = \frac{z-a}{az-1}$; $a = \frac{1+x_1x_2 + \sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}$;

$R_0 = \frac{x_1x_2-1 - \sqrt{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}}{x_1-x_2}$ ($x_2 < a < x_1$ и $0 < R_0 < 1$, если $1 < x_2 < x_1$).

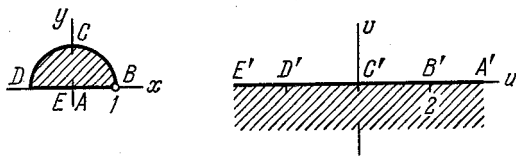


Рис. 16. $w = z + \frac{1}{z}$.

Таблица 7.9-2 (продолжение)

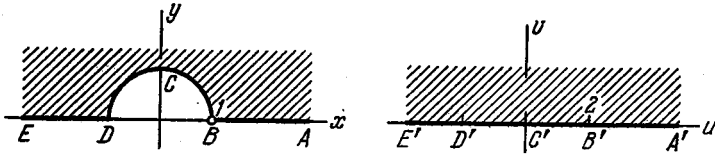


Рис. 17. $w = z + \frac{1}{z}$.

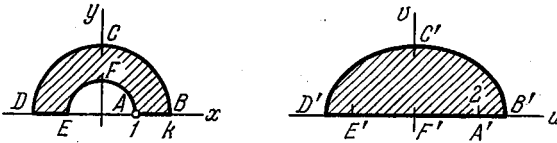


Рис. 18. $w = z + \frac{1}{z}$; $B'C'D'$ есть полуэллипс $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1$.

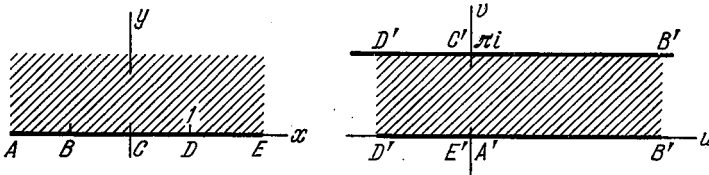


Рис. 19. $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$; $z = -\operatorname{cth} \frac{w}{2}$.

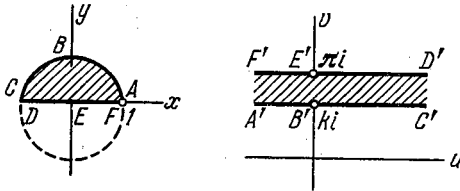


Рис. 20. $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$; ABC есть дуга окружности $x^2 + y^2 - 2y \operatorname{ctg} k = 1$.

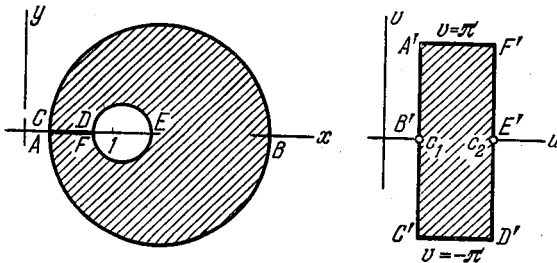


Рис. 21. $w = \ln \frac{z+1}{z-1}$; центры окружностей в точках $z = \operatorname{cth} c_n$, радиусы $\frac{1}{\operatorname{sh} c_n}$ ($n = 1, 2$).

Таблица 7.9-2 (продолжение)

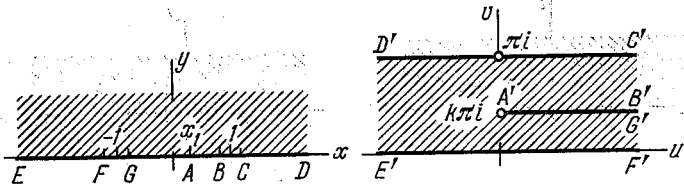


Рис. 22. $w = k \ln \frac{k}{1-k} + \ln 2(1-k) + \pi i - k \ln(z+1) - (1-k) \ln(z-1)$; $x_1 = 2k-1$.

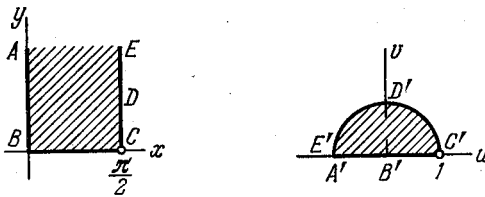


Рис. 23. $w = \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{1-\cos z}{1+\cos z}$.

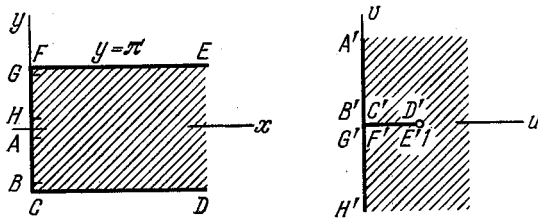


Рис. 24. $w = \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \frac{e^z+1}{e^z-1}$.

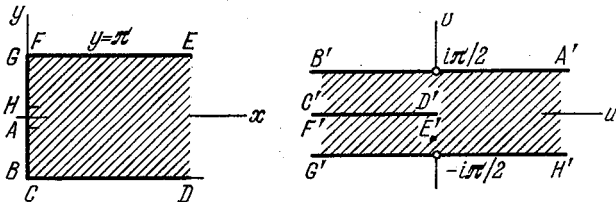


Рис. 25. $w = \ln \operatorname{cth} \frac{z}{2}$.

Таблица 7.9-2 (продолжение)

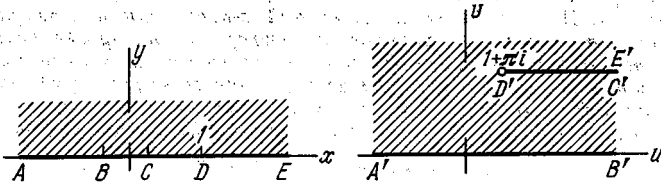


Рис. 26. $w = \pi i + z - \ln z$.

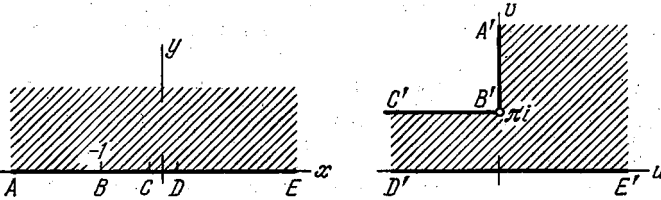


Рис. 27. $w = 2(z+1)^{1/2} + \ln \frac{(z+1)^{1/2}-1}{(z+1)^{1/2}+1}$.

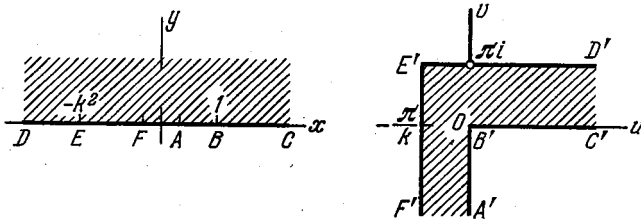


Рис. 28. $w = \frac{i}{k} \ln \frac{1+ikt}{1-ikt} + \ln \frac{1+t}{1-t}; t = \left(\frac{z-1}{z+k^2}\right)^{1/2}$.

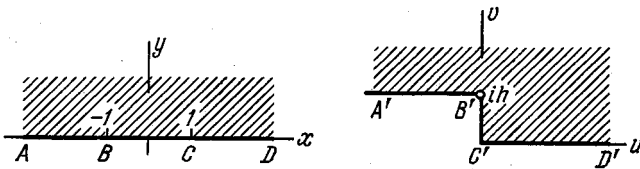


Рис. 29. $w = \frac{h}{\pi} [(z^2-1)^{1/2} + \text{Arch } z]$.

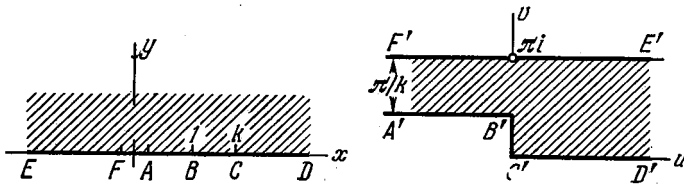


Рис. 30. $w = \text{Arch} \left(\frac{2z-k-1}{k-1} \right) - \frac{1}{k} \text{Arch} \left[\frac{(k+1)z-2k}{(k-1)z} \right]$.

7.9-6. Функции, отображающие специальные области на единичный круг.

(а) Теорема Римана об отображении. Для каждой односвязной области D в z -плоскости, кроме всей z -плоскости и z -плоскости, из которой удалена одна точка, существует конформное отображение $w = f(z)$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками области D и внутренними точками единичного круга $|w| < 1$. Аналитическая функция $f(z)$ определена единственным образом, если задан образ точки a области D и угол поворота любой кривой, проходящей через эту точку, т. е.

$$f(a) = w_0 \quad \text{и} \quad \arg f'(a) = \alpha,$$

где w_0 и α — заданные величины.

Если D ограничена регулярной кривой (п.3.1-13) C , то функция $f(z)$ непрерывна на C и устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками C и точками единичной окружности $|w| = 1$.

З а м е ч а н и я. 1) Отображение задается определенной аналитической функцией $f(z)$; 2) за исключением отмеченных выше тривиальных случаев, каждую область D , ограниченную простым контуром, можно отобразить конформно на другую область D' , также ограниченную простым контуром.

Проблема конформного отображения области D на единичный круг тесно связана с решением краевой задачи Дирихле для области D (п.15.6-9). Часто требуемое конформное отображение может быть получено последовательным применением простых преобразований.

(б) В табл. 7.9-3 приведены некоторые конформные отображения заданных областей D на единичный круг.

Т а б л и ц а 7.9-3

Конформные отображения некоторых областей D на единичный круг

$$(|w| < 1)$$

$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi}, \quad w = u + iv = |w|e^{i\theta}$$

	Область D в z -плоскости	Преобразование	Замечания
1	Верхняя полуплоскость $y > 0$	$w = e^{i\lambda} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ (λ действительно)	$z = a$ преобразуется в точку $w = 0$
2	Правая полуплоскость $x > 0$	$w = e^{i\lambda} \frac{z-a}{z+\bar{a}}$ (λ действительно)	
3	Единичный круг $ z < 1$	$w = e^{i\lambda} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ (λ действительно)	$z=a$ преобразуется в точку $w=0$
4	Полоса шириной π $0 < x < \pi,$ $-\infty < y < \infty$	$\frac{w-1}{w+1} = ie^{iz}$	Частный случай преобразования Шварца-Кристоффеля (7.9-9)
5	Сектор единичного круга $ z < 1$ $0 < \varphi < \pi\alpha$	$w = \frac{(1+z^{1/\alpha})^2 - i(1-z^{1/\alpha})^2}{(1+z^{1/\alpha})^2 + i(1-z^{1/\alpha})^2}$	

Таблица 7.9-3 (продолжение)

	Область D в z -плоскости	Преобразование	Замечания
6	z -плоскость с разрезом от $z=0$ до $z=\infty$ вдоль положительной части действительной оси	$w = \frac{\sqrt{z-i}}{\sqrt{z+i}}$	
7	Внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$z = \frac{1}{2} \left[(a-b)w + \frac{a+b}{w} \right]$	См. также п.7.9-3
8	Внешность параболы $ z \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1$	$z = \left(\frac{2}{w+1} \right)^2$	
9	Внутренность параболы $ z \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1$	$w = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{z} \right)$	
10	Полукруг $ z < R, \quad x > 0$	$w = i \frac{z^2 + 2Rz - R^2}{z^2 - 2Rz - R^2}$	
11	Область, ограниченная прямыми линиями (многоугольник)	Комбинация отображения Шварца-Кристоффеля (п.7.9-4) с отображением 1	

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ДРУГИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Преобразование Лапласа (п.8.2-1) связывает однозначную функцию $F(s)$ комплексной переменной s (изображение) с соответствующей функцией $f(t)$ действительной переменной t (оригинал). Это соответствие по существу взаимно однозначное для большинства практических целей (п.8.2-8); соответствующие пары $f(t)$ и $F(s)$ часто определяются при помощи таблиц. Преобразование Лапласа характерно тем, что многим соотношениям и операциям над оригиналами $f(t)$ соответствуют более простые соотношения и операции над их изображениями $F(s)$ (пп.8.3-1 — 8.3-4). Оно применяется, в частности, для решения дифференциальных и интегральных уравнений; метод решения заключается в преобразовании данной проблемы, включающей оригиналы $f(t)$ в эквивалентную проблему, сформулированную в терминах, соответствующих изображениям Лапласа $F(s)$ (Операционное исчисление, основанное на преобразовании Лапласа, пп.9.3-7, 9.4-5 и 10.5-2.)

8.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

8.2-1. Определение. Преобразование Лапласа (одностороннее)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8.2-1)$$

ставит в соответствие каждой однозначной функции (оригиналу) $f(t)$ (t действительно), для которой несобственный интеграл (1) сходится, единственную функцию $F(s)$ (изображение) комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$. $F(s)$ называется преобразованием Лапласа (односторонним) $f(t)$. Часто употребляются записи

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t), s]$$

или

$$F(s) \doteq f(t).$$

8.2-2. Абсолютная сходимость. Преобразование Лапласа (1) существует для $\sigma \geq \sigma_0$, несобственный интеграл сходится абсолютно и равномерно (п.4.6-2, а) и изображение $F(s)$ — аналитическая функция (п.7.3-3) для $\sigma > \sigma_0$, если интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b |f(t)| e^{-\sigma t} dt \quad (8.2-2)$$

сходится для $\sigma = \sigma_0$. Точная нижняя грань σ_a действительных чисел σ_0 , для которых это условие соблюдается, называется абсциссой абсолютной сходимости преобразования Лапласа $\mathcal{L}[f(t)]$.

Хотя некоторые теоремы, относящиеся к преобразованию Лапласа, нуждаются только в существовании преобразования (простой сходимости), существование абсциссы абсолютной сходимости будет предполагаться во всем дальнейшем изложении. Там, где необходимо специально отмечать область абсолютной сходимости, связанную с соотношением, включающим преобразование Лапласа, будем писать $\sigma > \sigma_a$ справа от исследуемого соотношения, как в формуле (3).

8.2-3. Область определения. Область определения аналитической функции

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (\sigma > \sigma_a) \quad (8.2-3)$$

обычно расширяется при помощи аналитического продолжения (пп.7.8-1 и 7.8-2) до полной s -плоскости, за исключением особых точек (см. п.7.6-2), расположенных слева от абсциссы абсолютной сходимости.

Такое расширение области определения всегда подразумевается.

8.2-4. Достаточные условия существования преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа $\mathcal{L}[f(t)]$, определенное формулой (1), существует в смысле абсолютной сходимости (п.8.2-2; см. также п.4.9-3):

$$1) \text{ для } \sigma \geq 0, \text{ если } \int_0^{\infty} |f(t)| dt \text{ существует;}$$

$$2) \text{ для } \sigma > \sigma_a, \text{ если интеграл (возможно, несобственный)}$$

$$I = \int_0^{t_1} |f(t)| dt$$

существует для каждого конечного $t_1 > 0$ и $|f(t)|e^{-\sigma t}$ равномерно ограничено для $t > t_2 \geq 0$ ($f(t)$ имеет экспоненциальный порядок или $f(t) = O(e^{\sigma_a t})$ при $t \rightarrow \infty$, п.4.4-3);

3) для $\sigma > 0$ или $\sigma > \sigma_a$ (какая из границ больше), если $\mathcal{L}[f'(t)]$ существует (не обязательно в смысле абсолютной сходимости) для $\sigma > \sigma_a$.

8.2-5. Обратное преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ функции $F(s)$ комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$ есть функция $f(t)$, для которой преобразование Лапласа (1) есть $F(s)$. Не каждая функция $F(s)$ имеет обратное преобразование Лапласа.

8.2-6. Теорема обращения. Пусть $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $\sigma > \sigma_a$; тогда в каждом открытом интервале, где $f(t)$ ограничена и имеет конечное число точек максимума, минимума и точек разрыва (или, более общо, $f(t)$ имеет ограниченную вариацию (п.4.4-8, b))

$$f_I(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - iR}^{\sigma_1 + iR} F(s) e^{st} ds = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] & \text{для } t > 0, \\ \frac{1}{2} f(0+0) & \text{для } t = 0, \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases} \quad (\sigma_1 > \sigma_a). \quad (8.2-4a)$$

В частности, для каждого $t > 0$, где $f(t)$ непрерывна,

$$f_I(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - iR}^{\sigma_1 + iR} F(s) e^{st} ds = f(t) \quad (\sigma_1 > \sigma_a). \quad (8.2-4b)$$

Путь интегрирования в формулах (4) лежит справа от всех особых точек $F(s)$. Интеграл $f_I(t)$ приводится к интегралу $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - t\infty}^{\sigma_1 + t\infty} F(s)e^{st} ds$, если последний существует; в противном случае $f_I(t)$ есть главное значение интеграла по Коши (п.4.6-2, б).

8.2-7. Существование обратного преобразования Лапласа. Особо следует обратить внимание на то, что существование предела (4) еще не достаточно для того, чтобы $F(s)$ имело обратное преобразование Лапласа. (П р и м е р: $F(s) = e^{s^2}$.) Существование $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ должно быть проверено для каждого применения теоремы обращения. Следующие теоремы дают достаточные (но не необходимые) условия для существования $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

1. Если $F(s)$ аналитична для $\sigma > \sigma_a$ и имеет порядок < -1 (п.4.4-3); то $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ существует; оно непрерывно для всех t и $f(t) = O(e^{\sigma_a t})$ при $t \rightarrow \infty$ и соответствующая абсцисса абсолютной сходимости есть σ_a . Заметим, что при этих условиях формула (4б) справедлива и $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 0$ для $t < 0$.

2. Пусть $F(s) = \varphi[F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)]$, так что $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ аналитична относительно каждого z_k и равна нулю для $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$, и

$$F_k(s) = \mathcal{L}[f_k(t)] \quad (\sigma > \sigma_{a_k}; \quad k = 1, 2, \dots, n);$$

тогда $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ существует и соответствующее преобразование Лапласа имеет абсциссу абсолютной сходимости.

8.2-8. Единственность преобразования Лапласа и его обращения. Преобразование Лапласа (1) единственно для каждой функции $f(t)$, имеющей такое преобразование. Обратное, две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают для всех $t > 0$, за исключением, возможно, множества меры нуль (п.4.6-14); $f_1(t) = f_2(t)$ для всех $t > 0$, где обе функции непрерывны (теорема Лерха). $f(t)$ определяется единственным образом по преобразованию Лапласа для почти всех $t > 0$ (п.4.6-14, б); данная функция $F(s)$ не может иметь более одного обратного преобразования Лапласа, непрерывного для всех $t > 0$.

Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа. В частности, единичная функция (см. также п.21.9-1) $f(t) = 0$ для $t < 0$ и $f(t) = 1$ для $t > 0$ имеет преобразование Лапласа $1/s$ независимо от значения, принимаемого $f(t)$ при $t = 0$.

8.3. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ОПЕРАЦИЯМИ НАД ОРИГИНАЛАМИ И ИЗБРАЖЕНИЯМИ

8.3-1. Таблица соответствия операций. Табл. 8.3-1 содержит некоторые теоремы, устанавливающие соответствие между операциями над оригиналами $f(t)$ и операциями над их изображениями $F(s)$ и обратно. Эти теоремы составляют основу применения преобразования Лапласа (операционного исчисления, основанного на употреблении преобразования Лапласа).

8.3-2. Преобразования Лапласа периодических функций и произведений оригиналов на синус или косинус.

(а) Если $f(t)$ — периодическая функция с периодом T (п.4.2-2, б) и

$\int_0^T |f(t)| dt$ существует, то

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \quad (\sigma > 0). \quad (8.3-1)$$

З а м е ч а н и е. Интеграл в правой части равенства есть целая функция (п.7.6-5), так что $\mathcal{L}[f(t)]$ не имеет особенностей для конечных t , за исключением, быть может, простых полюсов на мнимой оси.

Теоремы соответствия операций над оригиналами и изображениями
 Следующие теоремы все справедливы, если преобразование Лапласа существует
 в смысле абсолютной сходимости (см. также пп.8.3-2 и 20.4-5)

Таблица 8.3-1

Номер теоремы	Операция	Оригинал	Изображение
1	Линейность (α, β — постоянные)		$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
2a	Дифференцирование оригинала ¹⁾ если $f(t)$ существует при всех $t > 0$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
2b	если $f(t)$ существует при всех $t > 0$	$f^{(r)}(t)$ ($r = 1, 2, \dots$)	$s^r F(s) - s^{r-1}f(0+) - s^{r-2}f'(0+) - \dots - f^{(r-1)}(0+)$
2c	если $f(t)$ ограничен при $t > 0$ и $f(t)$ существует при $t > 0$, исключая точки $t = t_1, t_2, \dots$, где $f(t)$ имеет односторонние пределы	$f(t)$	$sF(s) - f(0+) - 2e^{-t_1 s} \times \times [f(t_1+0) - f(t_1-0)]$
3	Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau) d\tau + C$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{C}{s}$
4	Изменение масштаба	$f(at)$ ($a > 0$)	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	Сдвиг аргумента у оригинала если $f(t) = 0$ для $t < 0$	$f(t-b)$ ($b > 0$)	$e^{-bs} F(s)$
6	Свертка оригиналов ¹⁾	$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ ($f_2 = f_2 * f_1$)	$F_1(s) F_2(s)$
7	Соответствие пределов оригиналов и изображений (теорема непрерывности; α не зависит от t и s)	$\lim_{\alpha \rightarrow a} f(t, \alpha)$	$\lim_{\alpha \rightarrow a} F(s, \alpha)$
8	Дифференцирование и интегрирование по параметру α , не зависящему от t и s	а) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$, б) $\int_{a_1}^{a_2} f(t, z) dz$	а) $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(s, \alpha)$, б) $\int_{a_1}^{a_2} F(s, z) dz$
8a	Дифференцирование изображения		$\frac{F'(s)}{F'(r'(s))}$
8b			$\int_0^{\infty} F(s) ds$
10	Интегрирование изображения если $\int_0^{\infty} F(s) ds$ сходится (путь интегрирования расположен справа от абсциссы абсолютной сходимости)	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_0^{\infty} F(s) ds$
11	Сдвиг аргумента у изображения	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$

¹⁾ Абсцисса абсолютной сходимости для $\mathcal{L}\{f(t)\}$ равна 0 или σ_a в зависимости от того, что больше.
²⁾ Существование $f_1 * f_2$ предполагается; абсолютная сходимость $\mathcal{L}\{f_1(t)\}$ и $\mathcal{L}\{f_2(t)\}$ есть достаточное условие для абсолютной сходимости $\mathcal{L}\{f_1 * f_2\}$. См. также п.8.3-3.

(б) Если $f(t)$ — антипериодическая функция (п.4.2-2,б) с периодом T , т.е. $f(t+T/2) = -f(t)$ *) и $\int_0^{T/2} |f(t)| dt$ существует, то

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 + e^{-sT/2}} \int_0^{T/2} f(t)e^{-st} dt \quad (\sigma > 0). \quad (8.3-2)$$

(в) Если $f(t)$ — антипериодическая функция, положительная для $0 < t < T/2$, и функция $\varphi_1(t)$ получена в результате ее детектирования, т.е.

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } f(t) > 0, \\ 0 & \text{при } f(t) \leq 0, \end{cases}$$

то

$$\mathcal{L}[\varphi_1(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT/2}} \mathcal{L}[f(t)] \quad (\sigma > 0). \quad (8.3-3)$$

(д) Если $f(t)$ — антипериодическая функция, положительная для $0 < t < T/2$ и функция $\varphi_2(t)$ получена в результате ее выпрямления, т.е.

$$[\varphi_2(t)] = \begin{cases} f(t) & \text{при } f(t) > 0, \\ -f(t) & \text{при } f(t) < 0, \end{cases}$$

то

$$\mathcal{L}[\varphi_2(t)] = \operatorname{cth} \frac{sT}{4} \mathcal{L}[f(t)] \quad (\sigma > 0). \quad (8.3-4)$$

(е) Преобразование произведений оригиналов на синус или косинус. Если $F(s)$ — преобразование Лапласа для $f(t)$, то

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[f(t) \sin \omega t] &= \frac{1}{2i} [F(s - i\omega) - F(s + i\omega)], \\ \mathcal{L}[f(t) \cos \omega t] &= \frac{1}{2} [F(s - i\omega) + F(s + i\omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.3-5)$$

8.3-3*. Преобразование произведения (теорема о свертке). Пусть

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \quad (\sigma > \sigma_1), \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (\sigma > \sigma_2).$$

Тогда

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F_1(z)F_2(s-z) dz & (\lambda > \sigma_1), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F_2(z)F_1(s-z) dz & (\lambda > \sigma_2). \end{cases} \quad (8.3-6)$$

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F_2(z)F_1(s-z) dz & (\lambda > \sigma_2). \end{cases} \quad (8.3-7)$$

В обеих формулах следует считать, что $\operatorname{Re} s > \sigma_1 + \sigma_2$; это значит, что изображение произведения $f_1(t)f_2(t)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_1 + \sigma_2$.

*) Такую функцию называют еще «функцией с зеркально сдвинутыми полуволнами».

8.3-4. Предельные теоремы. Если $F(s)$ — преобразование Лапласа для $f(t)$ и $\mathcal{L}[f'(t)]$ существует, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0+0), \quad (8.3-8)$$

если предел справа существует.

Если в дополнении к первым двум условиям существует предел $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (8.3-9)$$

8.4. ТАБЛИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

8.4-1. Таблицы преобразования Лапласа. Таблицы преобразования Лапласа имеются во многих справочниках, например [8.2], [8.3]. В табл. 8.4-1 и 8.4-2 приведены наиболее часто встречающиеся преобразования.

Т а б л и ц а 8.4-1

Таблица преобразований Лапласа
(a, b и c — различные постоянные)

	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$s^{-3/2}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$s^{-(n+1/2)} \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}$
7	$\frac{\Gamma(k)}{s^k} \quad (k > 0)$	t^{k-1}
8	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
10	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
11	$\frac{\Gamma(k)}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$t^{k-1} e^{at}$
12	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
13	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
14	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$-\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Т а б л и ц а 8.4-1 (продолжение)

	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$
15	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
16	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
17	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at$
18	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
19	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3} (at - \sin at)$
21	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$
22	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at)$
24	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
25	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$
26	$\frac{1}{(s - a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{at} \sin bt$
27	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
28	$\frac{3a^2}{s^2 + a^2}$	$e^{-at} - e^{at/2} \left(\cos \frac{at\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{at\sqrt{3}}{2} \right)$
29	$\frac{4a^3}{s^4 + 4a^4}$	$\sin at \operatorname{ch} at - \cos at \operatorname{sh} at$
30	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a^2} \sin at \operatorname{sh} at$
31	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\operatorname{sh} at - \sin at)$
32	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$
33	$\frac{8a^2 s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$(1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at$
34	$\frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n$	$\frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \frac{1}{n!} L_n(t)$
35	$\frac{s}{(s - a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
36	$\sqrt{s - a} - \sqrt{s - b}$	$-\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
37	$\frac{1}{\sqrt{s + a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2 t} \operatorname{erfc} (a\sqrt{t})$

Таблица 8.4-1 (продолжение)

	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$
38	$\frac{\sqrt{s}}{s-a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + ae^{a^2 t} \operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
39	$\frac{\sqrt{s}}{s+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t} \int_0^{a\sqrt{t}} e^{\lambda^2} d\lambda$
40	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)}$	$\frac{1}{a} e^{a^2 t} \operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
41	$\frac{1}{\sqrt{s}(s+a^2)}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t} \int_0^{a\sqrt{t}} e^{\lambda^2} d\lambda$
42	$\frac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$	$e^{a^2 t} [b - a \operatorname{erf}(a\sqrt{t})] - be^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
43	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)}$	$e^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
44	$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{-at} \operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$
45	$\frac{b^2-a^2}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$	$e^{a^2 t} \left[\frac{b}{a} \operatorname{erf}(a\sqrt{t}) - 1 \right] + e^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
46	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$	$\frac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}} H_{2n}(\sqrt{t})$
47	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+3/2}}$	$\frac{n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} H_{2n+1}(\sqrt{t})$
48	$\frac{\sqrt{s+2a}}{\sqrt{s}} - 1$	$ae^{-at} [I_1(at) + I_0(at)]$
49	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-1/2(a+b)t} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
50	$\frac{\Gamma(k)}{(s+a)^k(s+b)^k} \quad (k > 0)$	$\sqrt{\pi} \left(\frac{t}{a-b}\right)^{k-1/2} e^{-1/2(a+b)t} I_{k-1/2}\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
51	$\frac{1}{(s+a)^{1/2}(s+b)^{3/2}}$	$te^{-1/2(a+b)t} \left[I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right) + I_1\left(\frac{a-b}{2}t\right) \right]$
52	$\frac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$	$\frac{1}{t} e^{-at} I_1(at)$
53	$\frac{(a-b)^k}{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b})^{2k}} \quad (k > 0)$	$\frac{k}{t} e^{-1/2(a+b)t} I_k\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
54	$\frac{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s})^{-2\nu}}{\sqrt{s}\sqrt{s+a}} \quad (\nu > -1)$	$\frac{1}{a^\nu} e^{-1/2at} I_\nu\left(\frac{1}{2}at\right)$
55	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
56	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad (\nu > -1)$	$a^\nu J_\nu(at)$

Таблица 8.4-1 (продолжение)

	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$
57	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^k} \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-1/2} J_{k-1/2}(at)$
58	$(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^k \quad (k > 0)$	$\frac{ka^k}{t} J_k(at)$
59	$\frac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^\nu}{\sqrt{s^2 - a^2}} \quad (\nu > -1)$	$a^\nu I_\nu(at)$
60	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k} \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$
61	$\frac{e^{-ks}}{s}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ 1, & \text{если } t > k \end{cases}$
62	$\frac{e^{-ks}}{s^2}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ t - k, & \text{если } t > k \end{cases}$
63	$\frac{e^{-ks}}{s^\mu} \quad (\mu > 0)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ \frac{(t-k)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & \text{если } t > k \end{cases}$
64	$\frac{1 - e^{-ks}}{s}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < k, \\ 0, & \text{если } t > k \end{cases}$
65	$\frac{1}{s(1 - e^{-ks})} = \frac{1 + \operatorname{cth} \frac{1}{2} ks}{2s}$	$1 + [t/k] = n, \text{ если } (n-1)k < t < nk$ ($n = 1, 2, \dots$) (рис. 8.4-1, a)
66	$\frac{1}{s(e^{ks} - a)}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}, & \text{если } nk < t < (n+1)k \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$
67	$\frac{1}{s} \operatorname{th} ks$	$M(2k, t) = (-1)^{n-1},$ если $2k(n-1) < t < 2kn$ ($n = 1, 2, \dots$) (рис. 8.4-1, b)
68	$\frac{1}{s(1 + e^{-ks})}$	$\frac{1}{2} M(k, t) + \frac{1}{2} = \frac{1 - (-1)^n}{2},$ если $(n-1)k < t < nk$
69	$\frac{1}{s^2} \operatorname{th} ks$	$H(2k, t)$ (рис. 8.4-1, c)
70	$\frac{1}{s \operatorname{sh} ks}$	$F(t) = 2(n-1),$ если $(2n-3)k < t < (2n-1)k$ ($t > 0$)
71	$\frac{1}{s \operatorname{ch} ks}$	$M(2k, t + 3k) + 1 = 1 + (-1)^n,$ если $(2n-3)k < t < (2n-1)k$ ($t > 0$)
72	$\frac{1}{s} \operatorname{cth} ks$	$F(t) = 2n-1,$ если $2k(n-1) < t < 2kn$
73	$\frac{k}{s^2 + k^2} \operatorname{cth} \frac{\pi s}{2k}$	$ \sin kt $
74	$\frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}$	$\begin{cases} \sin t, & \text{если } (2n-2)\pi < t < (2n-1)\pi, \\ 0, & \text{если } (2n-1)\pi < t < 2n\pi \end{cases}$
75	$\frac{1}{s} e^{-(k/s)}$	$J_0(2\sqrt{kt})$

Таблица 8.4-1 (продолжение)

	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$
76	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-(k/s)}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$
77	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch} 2\sqrt{kt}$
78	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-(k/s)}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sin 2\sqrt{kt}$
79	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \operatorname{sh} 2\sqrt{kt}$
80	$\frac{1}{s^\mu} e^{-(k/s)} \quad (\mu > 0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} J_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
81	$\frac{1}{s^\mu} e^{k/s} \quad (\mu > 0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} I_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
82	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
83	$\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
84	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\rho\left(-\frac{k^2}{4t}\right)}$
85	$s^{-3/2} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) - k \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
86	$\frac{ae^{-k\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})} \quad (k > 0)$	$-e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
87	$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})} \quad (k > 0)$	$e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
88	$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ e^{-1/2 at} I_0\left(\frac{1}{2} a\sqrt{t^2 - k^2}\right), & \text{если } t > k \end{cases}$
89	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ J_0(a\sqrt{t^2 - k^2}), & \text{если } t > k \end{cases}$
90	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ I_0(a\sqrt{t^2 - k^2}), & \text{если } t > k \end{cases}$
91	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+s^2-s}}}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad (k > 0)$	$J_0(a\sqrt{t^2+2kt})$

Т а б л и ц а 8.4-1 (продолжение)

	$F(s)$	$f(t) (t > 0)$
92	$e^{-ks} - e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ \frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} J_1(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t > k \end{cases}$
93	$e^{-k\sqrt{s^2-a^2}} e^{-ks}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ \frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} I_1(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t > k \end{cases}$
94	$\frac{a^\nu e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}(\sqrt{s^2+a^2}+s)^\nu} (\nu > -1)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ \left(\frac{t-k}{t+k}\right)^{1/\nu} J_\nu(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t > k. \end{cases}$
95	$\frac{1}{s} \ln s$	$\Gamma'(1) - \ln \Gamma(1) = -0,5772$
96	$\frac{1}{s^k} \ln s (k > 0)$	$t^{k-1} \left\{ \frac{\Gamma'(k)}{[\Gamma(k)]^2} - \frac{\ln t}{\Gamma(k)} \right\}$
97	$\frac{\ln s}{s-a} (a > 0)$	$e^{at}[\ln a - \text{Ei}(-at)]$
98	$\frac{\ln s}{s^2+1}$	$\cos t \text{ Si } t - \sin t \text{ Ci } t$
99	$\frac{s \ln s}{s^2+1}$	$-\sin t \text{ Si } t - \cos t \text{ Ci } t$
100	$\frac{1}{s} \ln(1+ks) (k > 0)$	$-\text{Ei}\left(-\frac{t}{k}\right)$
101	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
102	$\frac{1}{s} \ln(1+k^2s^2)$	$-2 \text{ Ci}\left(\frac{t}{k}\right)$
103	$\frac{1}{s} \ln(s^2+a^2) (a > 0)$	$2 \ln a - 2 \text{Ci}(at)$
104	$\frac{1}{s^2} \ln(s^2+a^2) (a > 0)$	$\frac{2}{a} [at \ln a + \sin at - at \text{Ci}(at)]$
105	$\ln \frac{s^2+a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cos at)$
106	$\ln \frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \text{ch } at)$
107	$\text{arctg } \frac{k}{s}$	$\frac{1}{t} \sin kt$
108	$\frac{1}{s} \text{arctg } \frac{k}{s}$	$\text{Si}(kt)$
109	$e^{k^2s^2} \text{erfc}(ks) (k > 0)$	$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{4k^2}\right)$
110	$\frac{1}{s} e^{k^2s^2} \text{erfc}(ks) (k > 0)$	$\text{erf}\left(\frac{t}{2k}\right)$
111	$e^{ks} \text{erfc}\sqrt{ks} (k > 0)$	$\frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{t(t+k)}}$

Т а б л и ц а 8.4-1 (продолжение)

	$F(s)$	$f(t) (t > 0)$
112	$\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{erfc}(\sqrt{ks})$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ (\pi t)^{-1/2}, & \text{если } t > k \end{cases}$
113	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{ks} \operatorname{erfc}(\sqrt{ks}) \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+k)}}$
114	$\operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\pi t} \sin(2k\sqrt{t})$
115	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{k^2/s} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2k\sqrt{t}}$
116	$K_0(ks)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < k, \\ (t^2 - k^2)^{-1/2}, & \text{если } t > k \end{cases}$
117	$K_0(k\sqrt{s})$	$\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
118	$\frac{1}{s} e^{ks} K_1(ks)$	$\frac{1}{k} \sqrt{t(t+2k)}$
119	$\frac{1}{\sqrt{s}} K_1(k\sqrt{s})$	$\frac{1}{k} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
120	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{k/s} K_0\left(\frac{k}{s}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi t}} K_0(2\sqrt{2kt})$

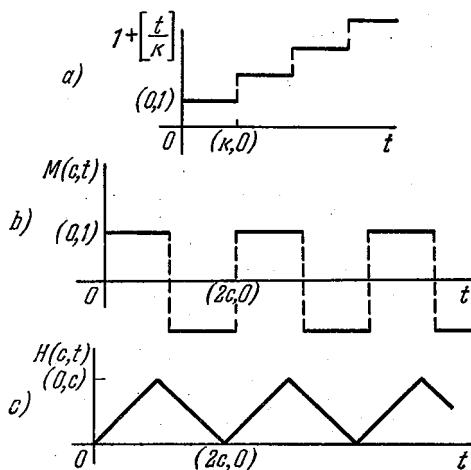


Рис. 8.4-1.

Таблица преобразований Лапласа для рациональных изображений

$$F(s) = \frac{D_1(s)}{D(s)}$$

Каждая формула справедлива для многочленов $D_1(s)$ и $D(s)$ как с комплексными, так и с действительными коэффициентами. Наибольший практический интерес представляет последний случай; при этом корни многочленов действительны и/или комплексно сопряженные, а функции $f(t)$ действительные.

Заметим, что $(s-a)^2 + \omega_1^2 = [s-(a+i\omega_1)][s-(a-i\omega_1)]$ и $K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \sin(\omega t + \alpha)$, где $\alpha = \arctg K_2/K_1$

№	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$	
1.1	$\frac{1}{s}$	1	
1.2	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	
1.3	$\frac{1}{s(s-a)}$	$Ae^{at} + K$	$A = \frac{1}{a}, \quad K = -\frac{1}{a}$
1.4	$\frac{s+d}{s(s-a)}$		$A = \left(1 + \frac{d}{a}\right), \quad K = -\frac{d}{a}$
1.5	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{1}{a-b}, \quad B = \frac{1}{b-a}$
1.6	$\frac{s+d}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{a+d}{a-b}, \quad B = \frac{b+d}{b-a}$
1.7	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + K$	$A = \frac{1}{a(a-b)}, \quad B = \frac{1}{b(b-a)}, \quad K = \frac{1}{ab}$

1.8	$\frac{s+d}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{st} + Be^{bt} + K$	$A = \frac{a+d}{a(a-b)}, \quad B = \frac{b+d}{b(b-a)}, \quad K = \frac{d}{ab}$
1.9	$\frac{s^2+gs+d}{s(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{a^2+ga+d}{a(a-b)}, \quad B = \frac{b^2+gb+d}{b(b-a)}, \quad K = \frac{d}{ab}$
1.10	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$		$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)}, \quad B = \frac{1}{(b-a)(b-c)}, \quad C = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
1.11	$\frac{s+d}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$Ae^{st} + Be^{bt} + Ce^{ct}$	$A = \frac{a+d}{(a-b)(a-c)}, \quad B = \frac{b+d}{(b-a)(b-c)}, \quad C = \frac{c+d}{(c-a)(c-b)}$
1.12	$\frac{s^2+gs+d}{(s-a)(s-b)(s-c)}$		$A = \frac{a^2+ga+d}{(a-b)(a-c)}, \quad B = \frac{b^2+gb+d}{(b-a)(b-c)}, \quad C = \frac{c^2+cg+d}{(c-a)(c-b)}$
2.1	$\frac{1}{(s-a)^2 + \omega_1^2}$		$A = \frac{1}{\omega_1}, \quad \alpha = 0$
2.2	$\frac{s+d}{(s-a)^2 + \omega_1^2}$	$Ae^{st} \sin(\omega_1 t + \alpha)$	$A = \frac{1}{\omega_1} [(a+d)^2 + \omega_1^2]^{-1/2}, \quad \alpha = \arctg \frac{\omega_1}{a+d}$
2.3	$\frac{1}{s[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{(a^2 + \omega_1^2)^{1/2}}, \quad K = \frac{1}{a^2 + \omega_1^2}, \quad \alpha = -\arctg \frac{\omega_1}{a}$
2.4	$\frac{s+d}{s[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$Ae^{st} \sin(\omega_1 t + \alpha) + K$	$A = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{(a+d)^2 + \omega_1^2}{a^2 + \omega_1^2} \right]^{1/2}, \quad K = \frac{d}{a^2 + \omega_1^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{\omega_1}{a+d} - \arctg \frac{\omega_1}{a}$
2.5	$\frac{s^2+gs+d}{s[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{(a^2 - \omega_1^2 + ag + d)^2 + \omega_1^2(2a+g)^2}{a^2 + \omega_1^2} \right]^{1/2}, \quad K = \frac{d}{a^2 + \omega_1^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{\omega_1(2a+g)}{a^2 - \omega_1^2 + ag + d} - \arctg \frac{\omega_1}{a}$

Таблица 8.4-2 (продолжение)

№	$F(s)$	$f(t) (t > 0)$	
2.6	$\frac{1}{(s-b)[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{[(a-b)^2 + \omega_1^2]^{1/2}}, \quad B = \frac{1}{(a-b)^2 + \omega_1^2},$ $\alpha = -\arctg \frac{\omega_1}{a-b}$
2.7	$\frac{s+d}{(s-b)[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$Ae^{\alpha t} \sin(\omega_1 t + \alpha) + Be^{bt}$	$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{[(a+d)^2 + \omega_1^2]^{1/2}}{[(a-b)^2 + \omega_1^2]}, \quad B = \frac{b+d}{(a-b)^2 + \omega_1^2},$ $\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{a+d} - \arctg \frac{\omega_1}{a-b}$
2.8	$\frac{s^2 + gs + d}{(s-b)[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{[(a^2 - \omega_1^2 + ag + a^2)^2 + \omega_1^2(2a+g)^2]^{1/2}}{(a-b)^2 + \omega_1^2}, \quad B = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2 + \omega_1^2},$ $\alpha = \arctg \frac{\omega_1(2a+g)}{a^2 - \omega_1^2 + ag + d} - \arctg \frac{\omega_1}{a-b}$
2.9	$\frac{1}{s(s-b)[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{(a^2 + \omega_1^2)^{1/2} [(a-b)^2 + \omega_1^2]^{1/2}},$ $B = \frac{1}{b[(b-a)^2 + \omega_1^2]}, \quad K = -\frac{1}{b(a^2 + \omega_1^2)},$ $\alpha = -\arctg \frac{\omega_1}{a-b} - \arctg \frac{\omega_1}{a}$
2.10	$\frac{s+d}{s(s-b)[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$Ae^{\alpha t} \sin(\omega_1 t + \alpha) + Be^{bt} + K$	$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{[(d+a)^2 + \omega_1^2]^{1/2}}{(a^2 + \omega_1^2)^{1/2} [(a-b)^2 + \omega_1^2]},$ $B = \frac{b+d}{b[(b-a)^2 + \omega_1^2]}, \quad K = -\frac{d}{b(a^2 + \omega_1^2)},$ $\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{a+d} - \arctg \frac{\omega_1}{a-b} - \arctg \frac{\omega_1}{a}$

2.11	$\frac{s^2 + \beta s + d}{s(s-a)[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$Ae^{\alpha t} \sin(\omega_1 t + \alpha) + B e^{\beta t} + K$	$A = \frac{1}{\omega_1} \left\{ \frac{(a^2 - \omega_1^2 + \alpha a + d)^2 + \omega_1^2(2a + \alpha)^2}{(a^2 + \omega_1^2)[(a-b)^2 + \omega_1^2]} \right\}^{1/2},$ $B = \frac{b^2 + \beta a + d}{b[(b-a)^2 + \omega_1^2]}, \quad K = -\frac{d}{b(a^2 + \omega_1^2)},$ $\alpha = \arctg \frac{\omega_1(2a + \alpha)}{a^2 - \omega_1^2 + \alpha a + d} - \arctg \frac{\omega_1}{a-b} - \arctg \frac{\omega_1}{a}$
2.12	$\frac{1}{[(s-a)^2 + \omega_1^2][(s^2 + \omega_2^2)]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{[(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2]}^{1/2}, \quad \alpha = -\arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2},$ $B = \frac{1}{\omega_2} \frac{1}{[(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2]}^{1/2}, \quad \beta = \arctg \frac{2a\omega_2}{a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$
2.13	$\frac{s + d}{[(s-a)^2 + \omega_1^2][(s^2 + \omega_2^2)]}$	$Ae^{\alpha t} \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \sin(\omega_2 t + \beta)$	$A = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{(a+d)^2 + \omega_1^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2}, \quad \alpha = \arctg \frac{\omega_1}{a+d} - \arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2},$ $B = \frac{1}{\omega_2} \left[\frac{d^2 + \omega_2^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2}, \quad \beta = \arctg \frac{\omega_2}{d} + \arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$
2.14	$\frac{s^2 + \beta s + d}{[(s-a)^2 + \omega_1^2][(s^2 + \omega_2^2)]}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{(a^2 - \omega_1^2 + \alpha a + d)^2 + \omega_1^2(2a + \alpha)^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2},$ $\alpha = \arctg \frac{\omega_1(2a + \alpha)}{a^2 - \omega_1^2 + \alpha a + d} - \arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2},$ $B = \frac{1}{\omega_2} \left[\frac{(d - \omega_2^2)^2 + \beta^2\omega_2^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2},$ $\beta = \arctg \frac{\beta\omega_2}{d - \omega_2^2} + \arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$

Таблица 8.4-2 (продолжение)

№	$F(s)$	$f(t) \ (t > 0)$	
3.1	$\frac{1}{s^2}$	t	
3.2	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at}$	$A = 0, \quad A_1 = 1$
3.3	$\frac{s+d}{(s-a)^2}$		$A = 1, \quad A_1 = a+d$
3.4	$\frac{1}{s^2(s-a)}$		$A = \frac{1}{a^2}, \quad K = -A, \quad K_1 = -\frac{1}{a}$
3.5	$\frac{s+d}{s^2(s-a)}$	$Ae^{at} + K + K_1 t$	$A = \frac{a+d}{a^2}, \quad K = -A, \quad K_1 = -\frac{d}{a}$
3.6	$\frac{s^2+gs+d}{s^2(s-a)}$		$A = \frac{a^2+ag+d}{a^2}, \quad K = 1-A, \quad K_1 = -\frac{d}{a}$
3.7	$\frac{1}{s(s-a)^2}$		$A = -\frac{1}{a^2}, \quad A_1 = \frac{1}{a}, \quad K = -A$
3.8	$\frac{s+d}{s(s-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + K$	$A = -\frac{d}{a^2}, \quad A_1 = \frac{a+d}{a}, \quad K = -A$
3.9	$\frac{s^2+gs+d}{s(s-a)^2}$		$A = \frac{a^2-d}{a^2}, \quad A_1 = \frac{a^2+ag+d}{a}, \quad K = 1-A$
3.10	$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)}$	$(A + A_1 t)e^{at} + Be^{bt}$	$A = -\frac{1}{(a-b)^2}, \quad A_1 = \frac{1}{a-b}, \quad B = -A$

3.11	$\frac{s+d}{(s-a)^2(s-b)}$	$(A+A_1)e^{at}+Be^{bt}$	$A = -\frac{b+d}{(a-b)^2}, \quad A_1 = \frac{a+d}{a-b}, \quad B = -A$
3.12	$\frac{s^2+gs+d}{(s-a)^2(s-b)}$		$A = \frac{a^2-2ab-bg-d}{(a-b)^2}, \quad A_1 = \frac{a^2+ag+d}{a-b}, \quad B = \frac{b^2+bg+d}{(a-b)^2}$
3.13	$\frac{1}{s^2(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{1}{a^2(a-b)}, \quad B = \frac{1}{b^2(b-a)},$ $K = \frac{a+b}{a^2b^2}, \quad K_1 = \frac{1}{ab}$
3.14	$\frac{s+d}{s^2(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at}+Be^{bt}+K+K_1t$	$A = \frac{a+d}{a^2(a-b)}, \quad B = \frac{b+d}{b^2(b-a)},$ $K = \frac{a+b+d}{ab+d(a+b)}, \quad K_1 = \frac{d}{ab}$
3.15	$\frac{s^2+gs+d}{s^2(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{a^2+ag+d}{a^2(a-b)}, \quad B = \frac{b^2+bg+d}{b^2(b-a)},$ $K = \frac{abg+d(a+b)}{a^2b^2}, \quad K_1 = \frac{d}{ab}$
3.16	$\frac{1}{s(s-a)^2(s-b)}$		$A = \frac{b-2a}{a^2(a-b)^2}, \quad A_1 = \frac{1}{a(a-b)},$ $B = \frac{1}{b(a-b)^2}, \quad K = -\frac{1}{a^2b}$
3.17	$\frac{s+d}{s(s-a)^2(s-b)}$	$(A+A_1)e^{at}+Be^{bt}+K$	$A = -\frac{a^2+2ad-bd}{a^2(a-b)^2}, \quad A_1 = \frac{a+d}{a(a-b)},$ $B = \frac{b+d}{b(a-b)^2}, \quad K = -\frac{d}{a^2b}$
3.18	$\frac{s^2+gs+d}{s(s-a)^2(s-b)}$		$A = -\frac{a^2(b+g)+d(2a-b)}{a^2(a-b)^2}, \quad A_1 = \frac{a^2+ag+d}{a(a-b)},$ $B = \frac{b^2+bg+d}{b(a-b)^2}, \quad K = -\frac{d}{a^2b}$

Таблица 8.4-2 (продолжение)

№	$F(s)$	$f(t) (t > 0)$	
3.19	$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)(s-c)}$	$(A + A_1 t)e^{at} + B e^{bt} + C e^{ct}$	$A = \frac{(b+c)-2a}{(a-b)^2(a-c)^2}, \quad A_1 = \frac{1}{(a-b)(a-c)},$ $B = \frac{1}{(b-a)^2(b-c)}, \quad C = \frac{1}{(c-a)^2(c-b)}$
3.20	$\frac{s+d}{(s-a)^2(s-b)(s-c)}$		$A = -\frac{a^2+2ad-d(b+c)-bc}{(a-b)^2(a-c)^2}, \quad A_1 = \frac{a+d}{(a-b)(a-c)},$ $B = \frac{b+d}{(b-a)^2(b-c)}, \quad C = \frac{c+d}{(c-a)^2(c-b)}$
3.21	$\frac{1}{s^2(s-a)^2}$		$A = -\frac{2}{a^3}, \quad A_1 = \frac{1}{a^2},$ $K = -A, \quad K_1 = \frac{1}{a^2}$
3.22	$\frac{s+d}{s^2(s-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + K + K_1 t$	$A = -\frac{a+d}{a^3}, \quad A_1 = \frac{a+d}{a^2},$ $K = -A, \quad K_1 = \frac{d}{a^2}$
3.23	$\frac{s^2+fs+d}{s^2(s-a)^2}$		$A = -\frac{ag+2d}{a^3}, \quad A_1 = \frac{a^2+ag+d}{a^3},$ $K = -A, \quad K_1 = \frac{d}{a^2}$
3.24	$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)^2}$		$A = -\frac{2}{(a-b)^3}, \quad A_1 = \frac{1}{(a-b)^2},$ $B = -A, \quad B_1 = \frac{1}{(a-b)^2}$
3.25	$\frac{s+d}{(s-a)^2(s-b)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + (B + B_1 t)e^{bt}$	$A = -\frac{a+b+2d}{(a-b)^3}, \quad A_1 = \frac{a+d}{(a-b)^2},$ $B = -A, \quad B_1 = \frac{b+d}{(a-b)^2}$

3.26	$\frac{s^2 + gs + d}{(s-a)^2(s-b)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + (B + B_1 t)e^{bt}$	$A = -\frac{(a+b)g + 2(ab+d)}{(a-b)^3}, \quad A_1 = \frac{a^2 + ag + d}{(a-b)^2},$ $B = -A, \quad B_1 = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2}$
3.27	$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)}$	$(A + A_1 t + A_2 t^2)e^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{1}{(a-b)^3}, \quad A_1 = -\frac{1}{(a-b)^2}, \quad A_2 = \frac{1}{2(a-b)}, \quad B = -A$
3.28	$\frac{s+d}{(s-a)^2(s-b)}$		$A = \frac{b+d}{(a-b)^3}, \quad A_1 = -\frac{b+d}{(a-b)^2}, \quad A_2 = \frac{a+d}{2(a-b)}, \quad B = -A$
3.29	$\frac{s^2 + gs + d}{s^2(s-a)^3}$	$(A + A_1 t + A_2 t^2)e^{at} + K + K_1 t$	$A = \frac{ag + 3d}{a^4}, \quad A_1 = -\frac{ag + 2d}{a^3}, \quad A_2 = \frac{a^2 + ag + d}{2a^2},$ $K = -A, \quad K_1 = -\frac{d}{a^3}$
4.1	$\frac{1}{s^2[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = -\frac{1}{\omega_1(a^2 + \omega_1^2)}, \quad \alpha = -2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a},$ $K = \frac{2a}{(a^2 + \omega_1^2)^2}, \quad K_1 = \frac{1}{a^2 + \omega_1^2}$
4.2	$\frac{s+d}{s^2[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$A e^{\alpha t}(\omega_1 t + \alpha) + K + K_1 t$	$A = -\frac{[(a+d)^2 + \omega_1^2]^{1/2}}{\omega_1(a^2 + \omega_1^2)}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a+d} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a},$ $K = \frac{a^2 + \omega_1^2 + 2ad}{(a^2 + \omega_1^2)^2}, \quad K_1 = \frac{d}{a^2 + \omega_1^2}$
4.3	$\frac{s^2 + gs + d}{s^2[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$		$A = \frac{[(a^2 - \omega_1^2 + ag + d)^2 + \omega_1^2(2a+g)^2]^{1/2}}{\omega_1(a^2 + \omega_1^2)},$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1(2a+g)}{a^2 - \omega_1^2 + ag + d} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a},$ $K = \frac{(a^2 + \omega_1^2)g + 2ad}{(a^2 + \omega_1^2)^2}, \quad K_1 = \frac{d}{a^2 + \omega_1^2}$

Таблица 8.4-2 (продолжение)

№	$F(s)$	$f(t) \quad (t > 0)$
4.4	$\frac{1}{(s-b)^2[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$A = \frac{1}{\omega_1[(a-b)^2 + \omega_1^2]}, \quad \alpha = -2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a-b},$ $B = \frac{2(a-b)}{[(a-b)^2 + \omega_1^2]^2}, \quad B_1 = \frac{1}{(a-b)^2 + \omega_1^2}$
4.5	$\frac{s+d}{(s-b)^2[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$A = \frac{[(a+d)^2 + \omega_1^2]^{1/2}}{\omega_1[(a-b)^2 + \omega_1^2]}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a+d} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a-b},$ $B = \frac{(a-b)^2 + \omega_1^2 + 2(a-b)(b+d)}{[(a-b)^2 + \omega_1^2]^2}, \quad B_1 = \frac{b+d}{(a-b)^2 + \omega_1^2}$
4.6	$\frac{s^2 + gs + d}{(s-b)^2[(s-a)^2 + \omega_1^2]}$	$A = \frac{[(a^2 - \omega_1^2 + ag + d)^2 + \omega_1^2(2a+d)^2]^{1/2}}{\omega_1[(a-b)^2 + \omega_1^2]},$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1(2a+d)}{a^2 - \omega_1^2 + ag + d} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{a-b},$ $B = \frac{[(a-b)^2 + \omega_1^2](2b+g) + 2(a-b)(b^2 + bg + d)}{[(a-b)^2 + \omega_1^2]^2},$ $B_1 = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2 + \omega_1^2}$
4.7	$\frac{1}{[(s-a)^2 + \omega_1^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega_1^2} \cos \omega_1 t - \omega_1 t \cos \omega_1 t$
4.8	$\frac{s-a}{[(s-a)^2 + \omega_1^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega_1} t \cos \omega_1 t \sin \omega_1 t$
4.9	$\frac{(s-a)^2 - \omega_1^2}{[(s-a)^2 + \omega_1^2]^2}$	$t \cos \omega_1 t$

8.4-2. Вычисление обратных преобразований Лапласа. В пп. 8.4-3 — 8.4-9 описываются различные приемы отыскания оригинала $f(t)$, соответствующего заданному изображению $F(s)$ (см. также пп. 9.3-7, 9.4-5 и 10.5-2).

З а м е ч а н и е. Если существование $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ заранее неизвестно, то результаты, полученные применением теоремы обращения (8.2-4), должны быть проверены с помощью формулы (8.2-4).

Особая осторожность рекомендуется при применении разложения в ряды для получения $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$; по-видимому, непосредственное асимптотическое или даже сходящееся разложение могут не привести к справедливому результату, если $F(s)$ и $f(t)$ не удовлетворяют специальным ограничительным условиям.

Некоторые достаточные (но не необходимые) условия для справедливости разложения в ряд $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ приведены в пп. 8.4-6—8.4-9. Во многих случаях, где функция $f(t)$ поддается как $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, это может быть проверено подстановкой в исходное дифференциальное уравнение; поэтому эвристический метод отыскания $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ может оказаться весьма полезным.

8.4-3. Применение контурного интегрирования. Значение контурного интеграла (8.2-4) часто удается получить при помощи теоремы о вычетах (пп. 7.7-1 — 7.7-3) и леммы Жордана (п. 7.7-3, б).

Если $F(s)$ — многозначная функция, то контуры не должны, конечно, пересекать разрезы для $F(s)$ (п. 7.4-2).

8.4-4. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение Хевисайда.

(а) Если $F(s)$ — рациональная алгебраическая функция, выраженная отношением двух многочленов

$$F(s) = \frac{D_1(s)}{D(s)}. \quad (8.4-1)$$

причем степень многочлена $D(s)$ выше степени многочлена $D_1(s)$, то $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ равно сумме вычетов (п. 7.7-1) функции $F(s)e^{st}$ по всем особым точкам (полюсам) $F(s)$. Для вычисления обратного преобразования Лапласа $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ сначала находим корни s_k уравнения $D(s) = 0$ (которые определяют полюсы $F(s)$) методами, описанными в пп. 1.8-1 — 1.8-6 или 20.2-2 — 20.2-3; тогда:

1. Если $D(s) = a_0(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)$ (все корни уравнения $D(s) = 0$ простые), то

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{D(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{D_1(s_k)}{D'(s_k)} e^{s_k t} \quad (t > 0). \quad (8.4-2a)$$

2. Если $D(s) = a_0(s-s_1)^{m_1}(s-s_2)^{m_2}\dots(s-s_n)^{m_n}$,

то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{D(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{(s-s_k)^{m_k} D_1(s) e^{st}}{D(s)} \right]_{s=s_k}^{(m_k-1)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} H_{kj} t^{m_k-j} e^{s_k t} \quad (t > 0), \end{aligned} \quad (8.4-2b)$$

где

$$H_{kj} = \frac{1}{(j-1)!(m_k-j)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[\frac{(s-s_k)^{m_k} D_1(s)}{D(s)} \right]_{s=s_k}.$$

(б) Иногда удобно получать обратное преобразование Лапласа в случае кратных корней уравнения $D(s) = 0$ прямо предельным переходом, ведущим к совпадению различных простых корней (см. также табл. 8.3-1, 7). П р и м е р:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a-h)(s-a)}\right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [e^{(a+h)t} - e^{at}] = te^{at} \quad (t > 0)$$

и, более общий случай:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-a)^m} \right] = \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{at} \quad (t > 0).$$

(с) Комплексные корни. В формулах (2) пары членов, соответствующих комплексно сопряженным корням $s = a \pm i\omega$, можно преобразовать следующим образом (см. также п.8.4-5):

$$\left. \begin{aligned} (A + iB)t^m e^{(a+i\omega)t} + (A - iB)t^m e^{(a-i\omega)t} &= 2At^m e^{at} \cos \omega t + 2Bt^m e^{at} \sin \omega t = \\ &= Rt^m e^{at} \sin(\omega t + \alpha) = Rt^m e^{at} \cos(\omega t + \alpha'), \end{aligned} \right\} \quad (8.4-3)$$

$$R = 2\sqrt{A^2 + B^2}, \quad \alpha = -\operatorname{arctg} \frac{A}{B}, \quad \alpha' = \operatorname{arctg} \frac{B}{A};$$

A, B, R, α и α' все действительны, если коэффициенты многочленов $D_1(s)$ и $D(s)$ действительны; $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ есть тогда действительная функция от t .

(d) Если один из корней s_k уравнения $D(s) = 0$ будет также корнем уравнения $D_1(s) = 0$, то один или несколько членов разложения (2) исчезают. Вообще же в случае общих корней многочлены $D(s)$ и $D_1(s)$ имеют общие множители, на которые их следует сократить.

8.4-5. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение на простейшие дроби. Вместо применения формул разложения Хевисайда (2) можно воспользоваться разложением $F(s) = D_1(s)/D(s)$ на сумму простейших дробей, методом, описанным в п.1.7-4.

Если $D(s)$ и $D_1(s)$ не имеют совпадающих корней, то каждому действительному корню $s_k = a$ уравнения $D(s) = 0$ отвечает m_k простых дробей вида

$$\frac{b_1}{s-a}, \quad \frac{b_2}{(s-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{b_{m_k}}{(s-a)^{m_k}},$$

где m_k — кратность корня $s_k = a$. Каждой паре комплексно сопряженных корней $s_k = a \pm i\omega$ отвечает m_k простых дробей вида

$$c_1 \frac{s+d_1}{(s-a)^2 + \omega^2}, \quad c_2 \frac{s+d_2}{[(s-a)^2 + \omega^2]^2}, \quad \dots, \quad c_{m_k} \frac{s+d_{m_k}}{[(s-a)^2 + \omega^2]^{m_k}},$$

где m_k — кратность корней $s_k = a \pm i\omega$. $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ находится как сумма обратных преобразований Лапласа таких слагаемых (табл. 8.4-2).

8.4-6. Разложения в ряды. Если функция $F(s)$ сложная или если $F(s)$ задана неявно, например как решение дифференциального уравнения (п.9.4-5), то иногда возможно находить $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, раскладывая $F(s)$ в сходящиеся ряды и беря обратное преобразование Лапласа последовательных членов ряда. Этот процесс можно также применять для аппроксимации $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Часто метод разложения в ряды опирается на следующую теорему.

Пусть функцию $F(s)$ можно представить в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq \sigma$ в виде ряда

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(s),$$

где

$$F_k(s) = \mathcal{L}[f_k(t)] \quad (\sigma > \sigma_a; k=0, 1, 2, \dots).$$

Пусть далее все интегралы $\int_0^{\infty} |f_k(t)| e^{-\sigma_a t} dt$ существуют и сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_k(t)| e^{-\sigma_a t} dt$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ сходится абсолютно к функции $f(t)$ почти для всех t (п.4.6-14,б) и

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_k(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(s) = F(s) \quad (\sigma > \sigma_a) \quad (8.4-4.)$$

8.4-7. Разложения по степеням t . Если изображение $F(s)$ может быть разложено в ряд по убывающим степеням s

$$F(s) = \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \dots, \quad (8.4-5)$$

сходящийся при $|s| > r > 0$, то при всех $t > 0$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = b_1 + b_2 t + \frac{b_3}{2!} t^2 + \dots + \frac{b_k}{(k-1)!} t^{k-1} + \dots \quad (8.4-6)$$

(Ряд справа сходится при всех значениях t .)

Разложение (8.4-5) часто можно получать как разложение Лорана (п.7.5-3) в окрестности точки $s = \infty$ или, в случае рациональных алгебраических функций типа рассмотренного в п.8.4-4, простым делением.

Если $F(s)$ при $|s| > r$ представляется сходящимся рядом

$$F(s) = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{s^k} \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0), \quad (8.4-7)$$

то

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(k+\alpha)} t^k \quad (t > 0). \quad (8.4-8)$$

В частности, если ряд слева сходится, то

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{s^k} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[c_0 + \frac{c_1}{1} (2t) + \frac{c_2}{1 \cdot 3} (2t)^2 + \frac{c_3}{1 \cdot 3 \cdot 5} (2t)^3 + \dots \right] \quad (t > 0). \quad (8.4-9)$$

8.4-8. Разложения многочленам Лагерра. Каждая функция

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (\sigma > \sigma_a),$$

аналитическая в точке $s = \infty$, может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд по степеням

$$z = \frac{s - \sigma_a - 1/2}{s - \sigma_a + 1/2} \quad (8.4-10)$$

для $\sigma > \sigma_a$; соответствующий ряд Тейлора сходится для $|z| < 1$. В частности, для $\sigma_a = 0$ изображение $F(s)$ можно представить в виде

$$F(s) = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{s+1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{s-1/2}{s+1/2} \right)^k \quad (\sigma > \sigma_a), \quad (8.4-11)$$

где

$$c_k = \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{1}{j!} F^{(j)} \left(\frac{1}{2} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Если условия п.8.4-6 выполняются, то для почти всех $t > 0$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k L_k(t)}{k!}, \quad (8.4-12)$$

где $L_k(t)$ — полиномы Лагерра, определенные в п.21.7-1.

8.4-9. Разложения в асимптотические ряды. Аппроксимацию $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ можно часто получить при помощи асимптотических рядов (п.4.8-6, б). Следующий тип асимптотических разложений важен в связи с решением некоторых дифференциальных уравнений с частными производными (п.10.5-2).

Если

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (\sigma > \sigma_a)$$

можно разложить в сходящийся ряд вида

$$F(s) = \frac{1}{s} (a_0 + a_1 s^{1/2} + a_2 s + a_3 s^{3/2} + \dots) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^{k/2} \quad (8.4-13)$$

в окрестности точки $s=0$, то $f(t)$ можно представить асимптотическим рядом

$$f(t) \sim a_0 + \frac{1}{\pi \sqrt{t}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{2j+1} \frac{\Gamma(j+1/2)}{t^j} \quad (8.4-14)$$

при $t \rightarrow \infty$, если только соблюдается одно из следующих условий (см. п.8.5-1):

1. $f(t)$ дифференцируема при $t > 0$, непрерывна при $t=0$ и $\mathcal{L}[f'(t)]$ существует; существует также положительное число K такое, что

$$\frac{d}{dt} \{t^j [f(t) - a_0 - S_{j-1}(t)]\} \leq -K t^{-1/2} \quad (t > 0, j = 1, 2, \dots), \quad (8.4-15)$$

где $S_{j-1}(t)$ есть $(j-1)$ -я — частичная сумма ряда (14).

2. $f(t)$ непрерывна при $t > t_1 > 0$ и $\sigma_a \leq 0$; $F(s)$ аналитична для $\sigma > 0$, за исключением, быть может, $s=0$. Существует также число $\sigma_1 > 0$ такое, что для $\sigma \geq \sigma_1 > 0$

$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(s) = 0$ равномерно относительно σ ,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F^{(k)}(i\omega) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^j(i\omega)| d\omega \text{ существует } (j = 2, 3, \dots)$$

$$u \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_1 + i\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ равномерно сходится для } t > t_1 > 0.$$

Эти довольно ограничительные условия доставляют строгие основания для некоторых асимптотических разложений $\mathcal{L}^{-1}[\phi(\sqrt{s})]$, первоначально полученных с помощью эвристических рассуждений.

8.5. ФОРМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ИМПУЛЬСНЫХ ФУНКЦИЙ

(а) Заметим, что в формуле (8.4-13) и в аналогичных разложениях в ряды обратное преобразование Лапласа отдельных слагаемых, равных a , $as^{1/2}$, as , $as^{3/2}$, ..., строго говоря, не существует, так как эти функции не стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$. Во многих приложениях члены такого вида могут появляться под знаком суммы или интеграла, несмотря на то, что сама сумма или интеграл имеют обратное преобразование Лапласа.

(б) Если применить преобразование Лапласа (8.2-1) к определениям импульсных функций $\delta(t)$ и $\delta_+(t)$ и их «производных» (пп.9.4-3 и 21.9), то получим формальные результаты:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= 1/2, & \mathcal{L}[\delta_+(t)] &= 1, & \mathcal{L}[\delta'_+(t)] &= s, & \mathcal{L}[\delta''_+(t)] &= s^2, \\ \mathcal{L}[\delta(t-a)] &= \mathcal{L}[\delta_+(t-a)] = e^{-as} & (a > 0), \\ \mathcal{L}[\delta^{(k)}(t-a)] &= \mathcal{L}[\delta_+^{(k)}(t-a)] = e^{-as} s^k & (a > 0, k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8.5-1)$$

¹ Односторонняя импульсная функция $\delta_+(t)$ более подходит для употребления в связи с односторонним преобразованием Лапласа, чем симметричная импульсная функция $\delta(t)$.

и, если $f(t)$ непрерывна для $t = a \geq 0$,

$$\mathcal{L}[\delta_+(t-a)f(t)] = e^{-as}f(a). \quad (8.5-2)$$

Равенства (1) и (2) употребляются во многих приложениях, хотя нельзя забывать, что эти соотношения не имеют строгого математического смысла. Новые результаты, полученные применением равенств (1) и (2), должны всегда проверяться с точки зрения законности математических действий *) (см. также п.8.2-7 и 21.9-2,а).

8.6. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.6-1. Вводные замечания. Преобразование Лапласа (8.2-1) есть функциональное преобразование, связывающее «точки» $F(s)$ в пространстве изображений с «точками» $f(t)$ в пространстве оригиналов (см. также пп.12.1-4 и 15.2-7). Табл. 8.6-1 и пп.8.6-2 – 8.6-4 знакомят с некоторыми другими функциональными преобразованиями (см. также п.4.11-5).

8.6-2. Двустороннее преобразование Лапласа.

(а) Двустороннее преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}_B[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t); s] + \mathcal{L}[f(-t); -s] \quad (8.6-1)$$

есть заманчивое обобщение преобразования Лапласа, применимое, подобно преобразованию Фурье (пп.4.11-3 – 4.11-7), к проблемам, где участвуют значения $f(t)$ для $t < 0$. $\mathcal{L}_B[f(t); s]$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда оба интеграла $\mathcal{L}_B[f(t); s]$ и $\mathcal{L}[f(-t); -s]$ абсолютно сходятся, так что область абсолютной сходимости, если она существует, есть полоса в s -плоскости, определенная двумя абсциссами абсолютной сходимости. Многие свойства двустороннего преобразования Лапласа просто получаются из соответствующих свойств одностороннего преобразования Лапласа. В частности

$$\mathcal{L}_B[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)], \quad \text{если } f(t) = 0 \text{ для } t \leq 0, \quad (8.6-2)$$

$$\mathcal{L}_B[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)] - c/s, \quad \text{если } f(t) = c \text{ для } t \leq 0. \quad (8.6-3)$$

(b) Значения обратного преобразования $\mathcal{L}_B^{-1}[F(s)]$ не обязательно равны нулю для $t < 0$, так что $\mathcal{L}_B^{-1}[F(s)]$ существует для более широкого класса функций $F(s)$, чем $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Если дано изображение

$$F(s) = \mathcal{L}_B[f(t)] \quad (\sigma_{a_1} < \sigma < \sigma_{a_2}),$$

то для каждого значения t , имеющего окрестность, в которой $f(t)$ – функция ограниченной вариации,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - iB}^{\sigma_1 + iB} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] \quad (8.6-4)$$

(теорема обращения).

Теорема обращения для одностороннего преобразования Лапласа (п.8.2-6) может рассматриваться как частный случай формулы (4).

*) В настоящее время большое развитие получила теория «обобщенных» функций включающая в себя затронутые здесь вопросы (см. [13.6]).

Некоторые линейные интегральные преобразования, связанные с преобразованием Лапласа
(см. также пп. 4.11-3-4.11-5, 8.6-1-8.6-5, 10.5-1, 15.2-7, 15.3-1, 18.3-8 и 20.4-5)

№	Преобразование	Определение	Формула обращения	Связь с односторонним преобразованием Лапласа ¹⁾	Примечание
1	Преобразование Лапласа-Карсона	$s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{1}{s} F(s) e^{st} ds$	$s \mathcal{L}\{f(t); s\}$	
2	Двустороннее преобразование Лапласа	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(s) e^{st} ds$	$\mathcal{L}_B\{f(t); s\} =$ $= \mathcal{L}\{f(t); s\} + \mathcal{L}\{f(-t); -s\}$	п. 8.6-2
3	Преобразование Фурье	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \nu} dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu$	$\mathcal{L}_B\{f(t); 2\pi i \nu\}$	пп. 4.11-3-4.11-5
4	Преобразование Меллина	$\int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt$	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(s) t^{-s} ds \quad (t > 0)$	$\mathcal{L}_B\{f(e^t); -s\}$	п. 20.4-5
5	Преобразование Гильберта (уточняется полное значение интеграла)	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{s-t} dt$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)}{t-s} ds$	$\frac{1}{\pi} \mathcal{L}\{\mathcal{L}\{f(-t); s\}; s\} -$ $- \frac{1}{\pi} \mathcal{L}\{\mathcal{L}\{f(t); s\}; -s\}$	$f(t) \text{ и } F(s)$ таковы, что если $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t +$ то $+ b(\omega) \sin \omega t] d\omega,$ $F(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [b(\omega) \cos \omega t -$ $- a(\omega) \sin \omega t] d\omega.$

1) Предполагается, что преобразование существует.

Двустороннее преобразование Лапласа и его приложения детально рассматриваются в [8.4].

8.6-3. Преобразование Лапласа в форме интеграла Стильтьеса. Преобразование Лапласа в форме интеграла Стильтьеса

$$\mathcal{L}_s[\varphi(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} d\varphi(t) \quad (8.6-5)$$

дает возможность сформулировать в более общем виде многие теоремы обыкновенного преобразования Лапласа (см. также п.4.6-17).

Другие функциональные преобразования, приведенные в табл. 8.6-1, также могут быть записаны в форме интегралов Стильтьеса.

Заметим, что $F(s) = se^{-bs}$ можно представить в форме (5), не употребляя импульсных функций (п.8.5-1). Преобразование Лапласа—Карсона (табл. 8.6-1,1) иногда употребляется для подобных целей.

8.6-4. Преобразования Ганкеля и Фурье—Бесселя.

(а) Определение и теоремы обращения. Интегральное преобразование

$$\bar{f}(s) = \mathcal{X}_m[f(t)] = \mathcal{X}_m[f(t); s] = \int_0^{\infty} f(t)J_m(st)dt \quad (8.6-6a)$$

(преобразование Ганкеля порядка m),

где $f(t)$ — действительная функция и $J_m(z)$ — функция Бесселя порядка m (п.21.8-1), существует в смысле абсолютной сходимости, когда $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$

существует. Если в дополнение $f(t)$ — функция ограниченной вариации в окрестности точки t , то имеет место формула обращения

$$f_t(t) = \int_0^{\infty} \bar{f}(s)J_m(st) ds = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \quad (8.6-6b)$$

($m \geq -1/2$) (теорема обращения Ганкеля), которая определяет обратное преобразование единственным образом в точках непрерывности.

(б) Свойства преобразований Ганкеля. Отметим следующие соотношения:

$$\mathcal{X}_m[f(at); s] = \frac{1}{a^2} \mathcal{X}_m\left[f(t); \frac{s}{a}\right], \quad (8.6-7)$$

$$\mathcal{X}_m\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \frac{s}{2m} \left\{ \mathcal{X}_{m-1}[f(t)] + \mathcal{X}_{m+1}[f(t)] \right\}, \quad (8.6-8)$$

$$\mathcal{X}_m[f'(t)] = \frac{s}{2m} \left\{ (m-1)\mathcal{X}_{m+1}[f(t)] - (m+1)\mathcal{X}_{m-1}[f(t)] \right\}, \quad (8.6-9)$$

$$\mathcal{X}_m\left[f''(t) + \frac{1}{t} f'(t) - \frac{m^2}{t^2} f(t)\right] = -s^2 \mathcal{X}_m[f(t)], \quad (8.6-10)$$

$$\int_0^{\infty} s \mathcal{X}_m[f(t)] \mathcal{X}_m[g(t)] ds = \int_0^{\infty} t f(t) g(t) dt \quad (m \geq -1/2) \quad (8.6-11)$$

(теорема Парсеваля для преобразования Ганкеля). Примеры преобразований Ганкеля см. в табл. 8.6-2.

Таблица 8.6-2

Преобразования Ганкеля

$$f(t) = \int_0^{\infty} \bar{f}(s) J_m(st) ds$$

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} t f(t) J_m(st) dt$$

$f(t)$	m	$\bar{f}(s)$
$t^m, \quad 0 < t < a$ $0, \quad t > a$	> -1	$\frac{a^{m+1}}{s} J_{m+1}(sa)$
$1, \quad 0 < t < a$ $0, \quad t > a$	0	$\frac{a}{s} J_1(as)$
$(a^2 - t^2), \quad 0 < t < a$ $0, \quad t > a$	0	$\frac{4a}{s^2} J_1(sa) - \frac{2a^2}{s^2} J_0(sa)$
$t^{\mu-2} e^{-pt^2}$	> -1	$\frac{s^\nu \Gamma(m/2 + \mu/2)}{2^{m+1} p^{\mu/2 + m/2} \Gamma(1+m)} {}_1F_1\left(m/2 + \mu/2, m+1, -\frac{s^2}{4p}\right)$
$t^m e^{-pt^2}$	> -1	$\frac{s}{(2p)^{m+1}} e^{-s^2/4p}$
$t^{\mu-1} e^{-pt}$	> -1	$\frac{2^\mu s^m \Gamma(\mu/2 + m/2 + 1/2) \Gamma(1 + \mu/2 + m/2)}{(s^2 + p^2)^{\mu/2 + m/2 + 1/2} \Gamma(m+1) \Gamma(1/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\mu/2 + m/2 + 1/2, m/2 - \mu/2, 1+m, \frac{s^2}{s^2 + p^2}\right)$
$t^{\mu-1}$	> -1	$\frac{2^\mu \Gamma(1/2 + \mu/2 + m/2)}{s^{\mu+1} \Gamma(1/2 - \mu/2 + m/2)}$
$\frac{e^{-pt}}{t}$	0	$(s^2 + p^2)^{-1/2}$
e^{-pt}	0	$p(s^2 + p^2)^{-3/2}$
$t^2 e^{-pt}$	1	$\frac{(s^2 + p^2)^{1/2} - p}{s}$
$\frac{e^{-pt}}{t}$	1	$\frac{1}{s} - \frac{p}{s(s^2 + p^2)^{1/2}}$
e^{-pt}	1	$s(s^2 + p^2)^{-3/2}$
$\frac{a}{(a^2 + t^2)^{3/2}}$	0	e^{-as}
$\frac{\sin at}{t}$	0	$(a^2 - s^2)^{-1/2}, \quad 0 < s < a$ $0, \quad s > a$
$\frac{\sin at}{t}$	1	$0, \quad s < a$ $\frac{a}{s(s^2 - a^2)^{1/2}}, \quad s > a$
$\frac{\sin t}{t^2}$	0	$\pi/2, \quad s < 1$ $\arcsin \frac{1}{s}, \quad s > 1$

(е) Преобразования Фурье—Бесселя (см. также пп.21.8-1 и 21.8-2). Следующие парные интегральные преобразования связаны с интегральным преобразованием Ганцеля (6):

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^{\infty} f(t) J_m(st) dt, \\ f_I(t) &= \int_0^{\infty} \bar{f}(s) s J_m(st) ds = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] \end{aligned} \right\} \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (8.6-12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{st}} J_{m-1/2}(st) t^2 dt, \\ f_I(t) &= \int_0^{\infty} \bar{f}(s) \frac{1}{\sqrt{st}} J_{m+1/2}(st) s^2 ds = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] \end{aligned} \right\} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (8.6-13)$$

Оба интегральных преобразования относятся к парным преобразованиям Фурье—Бесселя; для $m=0$ формулы (13) сводятся к синус-преобразованию Фурье.

8.6-5. Ряды как функциональные преобразования. Производящие функции. Конечная сумма или сходящийся ряд

$$F(s) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t \psi(t, s) \quad (8.6-14)$$

представляет функциональное преобразование функции $a_t \equiv a(t)$, определенной на дискретном множестве значений $t = 0, 1, 2, \dots$; заметим, что для некоторых a и $\psi(t, s)$ этот ряд можно записать в форме интеграла Стильбеса

$$F(s) = \int_0^{\infty} \psi(t, s) d\varphi(t)$$

(см. также п.4.6-17 и 4.10-1). Формулы, подобные (4.10-5), (4.11-6), (7.5-4) и (7.5-7), которые определяют коэффициенты a_t по функции $F(s)$, есть теоремы обращения для соответствующих функциональных преобразований (14).

Если функциональное преобразование (14) имеет вид конечной суммы или сходящегося степенного ряда

$$\gamma(s) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t s^t \quad \text{или} \quad \gamma(s) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t \frac{s^t}{t!},$$

то $\gamma(s)$ часто называют производящей функцией для коэффициентов a_t (см. также п.18.3-8). Заметим аналогию между степенными рядами и преобразованием Меллина (табл. 8.6-1) и

между рядами Дирихле $\sum_{t=0}^{\infty} a_t e^{-st}$ и преобразованиями Лапласа (см. также п.20.4-5).

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. ВВЕДЕНИЕ

9.1-1. Вводные замечания. Дифференциальные уравнения позволяют выразить соотношения между изменениями физических величин, и потому они имеют большое значение в приложениях. В §§ 9.1, 9.2 и 9.3 дано классическое введение в теорию. В § 9.4 рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, причем упор делается на решение их методом преобразования Лапласа. В § 9.5 речь идет о нелинейных уравнениях второго порядка. В § 9.6 приведены дифференциальные уравнения Пфаффа, хотя они и не являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Некоторые вопросы, относящиеся к дифференциальным уравнениям, рассматриваются в других главах: преобразование Лапласа — в гл. 8, краевые задачи и задачи о собственных значениях — в гл. 15, дифференциальные уравнения, определяющие специальные функции, — в гл. 21.

Применяемые далее обозначения выбраны так, чтобы облегчить ссылки на общие учебники. Поэтому действительные переменные обозначаются через x , $y = y(x)$; комплексные переменные, встречающиеся в общей теории линейных дифференциальных уравнений, обозначаются через z , $w = w(z)$. Независимое переменное в §§ 9.4 и 9.5, обычно представляющее время, обозначено через t .

9.1-2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка r называется уравнение

$$F[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(r)}(x)] = 0, \quad (9.1-1)$$

которое связывает независимое переменное x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), \dots, y^{(r)}(x)$. **Решение (интегрирование)** дифференциального уравнения (1) заключается в отыскании функций (решений, интегралов) $y(x)$, которые удовлетворяют этому уравнению для всех значений x в определенном конечном или бесконечном интервале (a, b) . Заметим, что *решения могут быть проверены подстановкой в уравнение.*

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения порядка r имеет вид

$$y = y(x; C_1, C_2, \dots, C_r), \quad (9.1-2)$$

где C_1, C_2, \dots, C_r — произвольные постоянные (постоянные интегрирования, см. также п.4.6-4). Каждый частный выбор этих постоянных дает **частное решение**. В задаче Коши (начальной задаче) требуется найти частное решение, удовлетворяющее r начальным условиям

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \dots, y^{(r-1)}(x_0) = y_0^{(r-1)}, \end{aligned} \quad (9.1-3)$$

по которым определяются r постоянных C_1, C_2, \dots, C_r . В краевой задаче на

$y(x)$ и ее производные накладываются r **краевых условий** в точках $x=a$ и $x=b$ (см. также п.9.3-4) ¹⁾.

График каждого частного решения называется **интегральной кривой**: совокупность всех таких графиков образует r -параметрическое **семейство интегральных кривых**.

Обратно, если дано r -параметрическое семейство достаточное число раз дифференцируемых функций (2), то, исключая постоянные C_1, C_2, \dots, C_r из $r+1$ уравнений

$$y^{(j)} = y^{(j)}(x; C_1, C_2, \dots, C_r) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r),$$

получим дифференциальное уравнение r -го порядка, описывающее это семейство.

Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения имеют еще дополнительные решения — **особые интегралы**, которые не включаются в общее решение (2) (см. также п.9.2-2, б).

9.1-3. Системы дифференциальных уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_i(x; y_1, y_2, \dots; y_1', y_2', \dots) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (9.1-4)$$

связывает одно независимое переменное x и несколько искомых функций $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots$ и их производных. **Порядком** r_i каждого уравнения (4) называется наивысший порядок входящей в него производной. Вообще говоря, требуется n уравнений (4) для отыскания n искомых функций $y_k(x)$; общее решение

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \dots$$

должно содержать $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ произвольных постоянных.

Интегрирование системы (4) часто можно свести к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения порядка r путем исключения $n-1$ переменных y_k и их производных. Гораздо важнее, что *каждую систему (4) можно свести к равносильной ей системе r уравнений первого порядка* путем замены высших производных вспомогательными неизвестными функциями.

9.1-4. Существование решений. Для корректности постановки начальной или краевой задачи требуется **доказательство существования** решения, указывающее иногда и путь его построения. Существование физического явления, описываемого данным дифференциальным уравнением, может лишь подсказать, но не доказать существование решения; доказательство существования проверяет *состоятельность математической модели* (см. также пп. 4.2-1, б и 12.1-1; примеры теорем существования см. пп.9.2-1 и 9.3-5).

Правильно построенная математическая модель должна допускать решения в виде непрерывных функций от параметров, начальных значений и т.п.

9.1-5. Общие указания.

(а) Подстановка ряда Тейлора (п.4.10-4) или других рядов для $y(x)$ в данное дифференциальное уравнение может дать уравнения для неизвестных коэффициентов (см. также пп.9.2-5, б и 9.3-5). Некоторые дифференциальные уравнения могут быть упрощены заменой переменных (пп.9.1-5, б, 9.2-3, 9.3-3, с). Каждое дифференциальное уравнение или система таких уравнений могут быть сведены к системе уравнений первого порядка, к которым применимы методы п.9.2-5.

(б) *Следующие типы неполных дифференциальных уравнений легко сводятся к уравнениям низших порядков* (см. также пп.9.2-3, 9.5-6):

$$F(x, y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots, y^{(n+m)}) = 0 \quad (\text{подстановка } \eta = y^{(n)}),$$

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(r)}) = 0 \quad (\text{подстановка } \bar{x} = y, \bar{y} = y').$$

Если дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(r)}) = 0$ однородно по аргументам $y, y', \dots, y^{(r)}$ в смысле п.4.5-5, то вводят $\eta = \frac{y'}{y}$.

¹⁾ Строго говоря, начальные и краевые условия относятся к односторонним производным (п.4.5-1).

9.2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

9.2-1. Существование и единственность решений.

(а) Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (9.2-1)$$

имеет решение $y=y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, если $f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Более определенно, если $f(x, y)$ непрерывна в открытой области D и удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x, \eta)| \leq M |y - \eta|, \quad (9.2-2)$$

где M — некоторая положительная постоянная, то дифференциальное уравнение (1) при любом начальном условии $y(x_0) = y_0$, где точка (x_0, y_0) принадлежит области D , имеет единственное решение $y=y(x)$. Каждое решение может быть продолжено до границы области D .

Геометрическая формулировка теоремы такова: через каждую точку области D проходит единственная интегральная кривая.

Условие Липшица (2) удовлетворяется, в частности, если $f(x, y)$ имеет в D ограниченную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(б) (см. также п.9.1-3). Аналогичная теорема существования справедлива и для систем дифференциальных уравнений первого порядка в нормальном виде:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (9.2-3)$$

если условие Липшица (2) заменить на

$$|f_i(x; y_1, \dots, y_n) - f_i(x; \eta_1, \dots, \eta_n)| < M \sum_{k=1}^n |y_k - \eta_k|. \quad (9.2-4)$$

Условие (4) соблюдается, в частности, если все $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ограничены.

9.2-2. Геометрическое толкование. Особые интегралы (см. также пп. с 17.1-1 по 17.1-7).

(а) Если x, y — декартовы прямоугольные координаты точки, то дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, p) = 0 \quad \left(p \equiv \frac{dy}{dx} \right) \quad (9.2-5)$$

описывает поле направлений или поле линейных элементов (x, y, p) , проходящих через точку (x, y) с угловым коэффициентом $p = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Каждый линейный элемент касателен к некоторой интегральной кривой однопараметрического семейства решений

$$y = y(x, \lambda) \quad \text{или} \quad \varphi(x, y, \lambda) = 0. \quad (9.2-6)$$

Поле направлений позволяет приближенно графически построить интегральные кривые; общий характер семейства интегральных кривых может быть исследован методом п.9.5-2. При построении интегральных кривых могут оказаться полезными изоклины $F(x, y, p_1) = 0$ или $f(x, y) = p_1$, на которых интегральные кривые имеют фиксированный угловой коэффициент p_1 . Кривая $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0$ дает геометрическое место точек возможного перегиба.

(б) **О с о б ы е и н т е г р а л ы** (см. также п.9.1-2). Пусть $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируема. Исключение p из уравнений

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad (9.2-7)$$

дает **дискриминантную кривую** данного дифференциального уравнения (геометрическое место особых линейных элементов). Кривая, определяемая уравнениями (7), есть особая интегральная кривая, если на этой кривой $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} p = 0$, причем обе производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ не обращаются в нуль одновременно. *Огибающая семейства интегральных кривых* (6) всегда является особой интегральной кривой; она может быть найдена по общему интегралу методом п.17.1-7.

9.2-3*. Преобразование переменных (примеры см. в п. 9.2-4).

(а) Замена переменных (точечное преобразование)

$$\left. \begin{aligned} x &= X(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = Y(\bar{x}, \bar{y}) \quad \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} \neq 0 \right], \\ p &\equiv \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} \bar{p}}{\frac{\partial X}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial X}{\partial \bar{y}} \bar{p}} \quad \left(\bar{p} \equiv \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.2-8)$$

преобразует данное уравнение (1) или (5) в новое дифференциальное уравнение относительно \bar{x} и \bar{y} , которое может оказаться проще исходного. Найдя решение $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$, мы получаем искомое решение в параметрическом виде: $x = X(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$, $y = Y(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$. Если решение преобразованного уравнения получено в неявном виде $u(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то искомая связь между y и x может быть найдена исключением \bar{x} и \bar{y} из трех уравнений: $x = X(\bar{x}, \bar{y})$, $y = Y(\bar{x}, \bar{y})$ и $u(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

(б) Контактные преобразования (см. также пп.10.2-5, 10.2-7 и 11.5-6). Замена переменных

$$x = \pi(x, y, p), \quad y = \vartheta(x, y, p) \quad \left(p = \frac{dy}{dx} \right) \quad (9.2-9a)$$

при условии

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + p \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) = \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} + p \frac{\partial \pi}{\partial y} \right) \quad (9.2-9b)$$

определяет **контактное преобразование**, сопоставляющее линейные элементы x, y, p и

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{p} = \frac{d\vartheta}{d\pi} = \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} p}{\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial y} p} = \frac{d\vartheta}{d\pi} \quad \text{таким образом, что линейные элементы, образующие}$$

гладкую дугу, отображаются на гладкую дугу и касание дуг сохраняется. Контактное преобразование может быть задано формулами

$$\bar{x} = \pi(x, y, p), \quad \bar{y} = \vartheta(x, y, p), \quad \bar{p} = \bar{p}(x, y, p) \quad \left[\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})}{\partial(x, y, p)} \neq 0 \right], \quad (9.2-9c)$$

при условии

$$d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} = g(x, y, p) (dy - p dx) \quad [g(x, y, p) \neq 0]. \quad (9.2-9d)$$

При этом условии формулы $\bar{p} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$ и $\bar{p} = \frac{d\vartheta}{d\pi}$ эквивалентны.

В частности, $g(x, y, p) \equiv -1$ дает легко обратимое контактное преобразование **Лежандра**

$$\bar{x} = p, \quad \bar{y} = px - y, \quad \bar{p} = x, \quad (9.2-10)$$

которое преобразует данное дифференциальное уравнение (5) в

$$F(\bar{p}, \bar{p}\bar{x} - \bar{y}, \bar{x}) = 0. \quad (9.2-11)$$

Уравнение (11) может оказаться более простым, чем исходное. Если его решение будет найдено, то решение исходного уравнения получится обращением формул (9.2-9c).

9.2-4. Решение специальных типов уравнений первого порядка.

(а) Следующие уравнения интегрируются в квадратурах:

1. Уравнение с разделяющимися переменными: $y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$. Общий интеграл $\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C$.

2. «Однородное» уравнение первого порядка: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Замена $\bar{y} = \frac{y}{x}$ приводит уравнение к типу 1: $\bar{y}' = \frac{f(\bar{y}) - \bar{y}}{x}$.

3. Уравнение в полных дифференциалах есть уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (9.2-12)$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал df ; это значит, что выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ (п.5.7-1). Общий интеграл

$$\varphi(x, y) \equiv \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C. \quad (9.2-13)$$

Если левая часть уравнения (12) не является полным дифференциалом $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, что можно найти интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y)$ такой, что произведение $\mu(P dx + Q dy)$ будет полным дифференциалом. Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}. \quad (9.2-14)$$

4. Линейное уравнение первого порядка $y' + a(x)y = f(x)$ (см. также пп.9.3-1 и 9.3-3) допускает интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) = e^{\int a(x) dx}$$

Общее решение

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int f(x)\mu(x) dx + C \right]. \quad (9.2-15)$$

Некоторые уравнения первого порядка можно привести к одному из указанных типов заменой переменных (п.9.2-3). В частности,

$$y' = f(ax + by) \text{ приводится к типу 1 заменой } \bar{y} = ax + by.$$

Уравнение $y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$ при $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ приводится к типу 2 заменой $\bar{y} = x - x_0$,

$\bar{y} = y - y_0$ (параллельный перенос осей координат), где x_0, y_0 — точка пересечения прямых $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ и $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$. Если же $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$, то это уравнение приводится к типу 1 заменой $\bar{y} = \alpha_1 x + \beta_1 y$.

$y' = f_1(x)y + f_2(x)y^n$ (уравнение Бернулли) приводится к типу 4 заменой $\bar{y} = y^{1-n}$ ($n \neq 1$).

(б) * Если уравнение первого порядка дано в виде

$$y = h(x, y'), \quad (9.2-16)$$

то иногда оказывается удобным продифференцировать обе его части по x и получить дифференциальное уравнение относительно $y'(x)$:

$$y' = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}. \quad (9.2-17)$$

Если последнее уравнение удается решить и найти $y' = y'(x)$, то подстановка этого результата в данное уравнение (16) позволяет найти искомую функцию $y(x)$. Если решение уравнения (17) получается в виде $u(x, y') = 0$, то соотношение между x и y дается в параметрической форме через параметр $p = y'$:

$$u(x, p) = 0, \quad y = h(x, p).$$

Аналогично уравнение $x = h(y, y')$ дифференцированием по y приводится к уравнению $\frac{1}{y'} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{dy'}{dy}$ с независимой переменной y и искомой функцией $y'(y)$.

Примеры. Дифференциальное уравнение Клеро $y = y'x + f(y')$ имеет общее решение $y = Cx + f(C)$ и особый интеграл (в параметрической форме) $x = -f'(p)$, $y = -pf'(p) + f(p)$. Дифференциальное уравнение Лагранжа $y = xf(y') + g(y')$ приводится к уравнению

$y' = f(y') + [xf'(y') + g'(y')] \frac{dy'}{dx}$; записав последнее в виде $[f(y') - y'] \frac{dx}{dy} + f'(y')x + g'(y') = 0$, получаем линейное дифференциальное уравнение относительно $x(y)$.

(е) Уравнение Риккати. Общее уравнение Риккати

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (9.2-18)$$

иногда упрощается подстановкой $y = 1/\bar{y}$. Замена

$$x = \bar{x}, \quad y = -\frac{\bar{y}'}{a(x)\bar{y}}$$

приводит к однородному линейному уравнению второго порядка относительно $\bar{y} = \bar{y}(x)$:

$$\bar{y}'' - \left[\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x) \right] \bar{y}' + a(x)c(x)\bar{y} = 0. \quad (9.2-19)$$

Если известно одно частное решение $y_1(x)$ уравнения (18), то подстановка

$$y = y_1(x) + \frac{1}{\bar{y}}$$

приводит к линейному дифференциальному уравнению. Если известны два частных решения y_1, y_2 или три частных решения y_1, y_2, y_3 , то имеем соответственно

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{1 + C \exp \int a(x)(y_2 - y_1) dx}, \quad y = \frac{y_1(y_2 - y_3) + Cy_2(y_1 - y_3)}{(y_2 - y_3) + C(y_1 - y_3)}. \quad (9.2-20)$$

Для любых четырех частных решений y_1, y_2, y_3, y_4 двойное (ангармоническое) отношение $\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} \cdot \frac{y_4 - y_3}{y_4 - y_2}$ постоянно.

Специальное уравнение Риккати

$$y' + ay^2 = bx^m \quad (9.2-21)$$

при $m = 0$ относится к типу 1, а при $m = \frac{4k}{1-2k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) приводится к этому типу путем k -кратного повторения одной из указанных ниже подстановок. При $k > 0$ подстановка

$$x = \bar{x}^{\frac{1}{m+3}}, \quad y = \frac{1}{x^{2\bar{y}} + \frac{1}{ax}}$$

даст

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + a\bar{y}^2 = b\bar{x}^{\bar{m}}, \quad (9.2-22a)$$

где

$$\bar{a} = \frac{b}{m+3}; \quad \bar{b} = \frac{a}{m+3}; \quad \bar{m} = -\frac{m+4}{m+3}. \quad (9.2-22b)$$

При $k < 0$ подстановка

$$x = \bar{x}^{-\frac{1}{m+1}}, \quad y = \frac{b}{\bar{x}(b\bar{x}\bar{y} + m + 1)}$$

даст уравнение (22a) с

$$\bar{a} = -\frac{b}{m+1}, \quad \bar{b} = -\frac{a}{m+1}, \quad \bar{m} = -\frac{3m+4}{m+1}. \quad (9.2-22c)$$

* Наконец, при $m = -2$ уравнение (21) приводится к типу 2 подстановкой $y = \frac{1}{\bar{y}}$.

Многочисленные примеры специальных типов дифференциальных уравнений приведены в [9.4].*

9.2-5. Общие методы интегрирования.

(а) Метод последовательных приближений Пикара. Для интегрирования дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при данном начальном условии $y(x_0) = y_0$ выбирают некоторую начальную функцию

$y^{[0]}(x)$ и вычисляют последовательные приближения искомого решения:

$$y^{[j+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y^{[j]}(x)] dx \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.2-23)$$

Этот процесс сходится при выполнении условий п.9.2-1. Метод Пикара особенно удобен, если интегралы в формуле (23) могут быть вычислены в замкнутой форме, хотя в принципе можно применять и численное интегрирование.

Вполне аналогичный метод применяется к системам (3) дифференциальных уравнений первого порядка.

(b) Разложение решения в ряд Тейлора (см. также п.4.10-4). Если данная функция $f(x, y)$ дифференцируема достаточное число раз, то коэффициенты $\frac{y^{(m)}(x_0)}{m!}$ ряда Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} y''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (9.2-24)$$

можно получить последовательным дифференцированием данного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y), \\ y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y), \\ &\dots \end{aligned}$$

и последующей подстановкой $x = x_0, y = y(x_0) = y_0$.

Аналогичный метод применяется к системам дифференциальных уравнений первого порядка.

9.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.3-1. Линейные дифференциальные уравнения. Принцип наложения (см. также пп.10.4-2, 14.3-1 и 15.4-2). Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение порядка r , связывающее действительные или комплексные переменные z и $w = w(z)$, имеет вид

$$Lw \equiv a_0(z) \frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) w = f(z). \quad (9.3-1)$$

Общее решение уравнения (1) есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения

$$Lw \equiv a_0(z) \frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) w = 0. \quad (9.3-2)$$

По отношению к неоднородному уравнению (1) уравнение (2) называется **приведенным**.

Если $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — частные решения линейного дифференциального уравнения (1) для правой частей $f(z) \equiv f_1(z)$ и $f(z) \equiv f_2(z)$ соответственно, то $\alpha w_1(z) + \beta w_2(z)$ будет частным решением уравнения (1) для правой части $f(z) \equiv \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)$ (принцип наложения, суперпозиции). В частности, каждая линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения (2) также является его решением.

* Очевидное решение $w \equiv 0$ уравнения (2) называется **нулевым** или **тривиальным**.

В дальнейшем предполагается, что все функции $a_0(z), a_1(z), \dots, a_r(z)$ и $f(z)$ непрерывны в некоторой области D изменения независимого переменного,

причем в точках этой области коэффициент $a_0(z)$ не равен нулю. Точки, в которых $a_0(z) = 0$, являются особыми для уравнения (1).*

9.3-2. Линейная независимость и фундаментальные системы решений (см. также пп.1.9-3, 14.2-3 и 15.2-1).

(а) Пусть $w_1(z), w_2(z), \dots, w_r(z)$ суть $r-1$ раз непрерывно дифференцируемые решения линейного однородного дифференциального уравнения (2).

r решений $w_k(z)$ называются **линейно независимыми** в D , если $\sum_{k=1}^r \lambda_k w_k(z) \equiv 0$ в D только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ (п.1.9-3). Это имеет место тогда и только тогда, когда определитель Вронского (вронскиан)

$$W[w_1, w_2, \dots, w_r] \equiv \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) & \dots & w_r(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) & \dots & w_r'(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(r-1)}(z) & w_2^{(r-1)}(z) & \dots & w_r^{(r-1)}(z) \end{vmatrix} \quad (9.3-3)$$

отличен от нуля всюду в D . Равенство $W=0$ в какой-либо точке z из D влечет за собой тождество $W \equiv 0$ для всех z из D ¹⁾.

(б) **Однородное линейное дифференциальное уравнение (2) порядка r имеет не больше r линейно независимых решений.** Любые r линейно независимых решений $w_1(z), w_2(z), \dots, w_r(z)$ составляют **фундаментальную систему**

решений, линейные комбинации которых $\sum_{k=1}^r \alpha_k w_k(z)$ дают все частные решения уравнения (2).

(в) *Использование известных частных решений для понижения порядка. Если известно одно нетривиальное решение w_1 однородного уравнения (2), то преобразование $w = w_1 \int v dz$ приводит это уравнение к однородному линейному дифференциальному уравнению порядка $r-1$, т.е. понижает его порядок на единицу. Указанное преобразование эквивалентно двум последовательным преобразованиям $w = w_1 u$ и $u' = v$.

Если известно m линейно независимых решений w_1, w_2, \dots, w_m уравнения (2), то можно понизить его порядок до $r-m$ последовательным применением следующего процесса. Преобразование $w = w_m \int v dz$ приводит к уравнению порядка $r-1$ с известными линейно независимыми решениями

$$v_1 = \left(\frac{w_1}{w_m}\right)', \quad v_2 = \left(\frac{w_2}{w_m}\right)', \quad \dots, \quad v_{m-1} = \left(\frac{w_{m-1}}{w_m}\right)'.$$

Повторяя этот процесс m раз, приходим к линейному однородному уравнению порядка $r-m$.

9.3-3. Решение методом вариации постоянных. Функции Грина.

(а) Если функции $w_1(z), w_2(z), \dots, w_r(z)$ представляют r линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения (2), то общее решение неоднородного уравнения (1) есть

$$w = C_1(z) w_1(z) + C_2(z) w_2(z) + \dots + C_r(z) w_r(z), \quad (9.3-4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r C_k'(z) w_k^{(j)}(z) &= 0 \quad (j = 0, 1, \dots, r-2), \\ \sum_{k=1}^r C_k'(z) w_k^{(r-1)}(z) &= \frac{f(z)}{a_0(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3-5)$$

¹⁾ Заметим, что эта теорема неприменима к любому множеству $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $w_k(z)$; они должны быть решениями подходящего дифференциального уравнения (2), коэффициенты которого удовлетворяют условиям, сформулированным в п.9.3-1.

Решив систему r уравнений (5) относительно неизвестных производных $C'_k(x)$, простым интегрированием находим затем

$$C_k(x) = \int C'_k(x) dx + K_k.$$

В принципе этот метод сводит решение любого линейного дифференциального уравнения к решению однородного линейного дифференциального уравнения.

(б) В случае действительных переменных $x \equiv x$ и $w \equiv w(x)$ частное решение неоднородного уравнения (1) часто бывает удобнее представить в виде

$$w = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (a < x < b), \quad (9.3-6)$$

где $G(x, \xi)$ есть функция Грина (п.9.4-3), дающая «фундаментальное» решение. При этом общее решение уравнения (1) есть

$$w = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^r A_k w_k(x), \quad (9.3-7)$$

где $w_k(x)$ — линейно независимые решения уравнения (2), а A_k — произвольные постоянные, определяемые по начальным или крайевым условиям.

Функцию Грина $G(x, \xi)$ можно выразить через любые r линейно независимых решений $w_k(x)$ однородного уравнения (2):

$$G(x, \xi) = \frac{1}{f(\xi)} \sum_{k=1}^r C'_k(\xi) w_k(x) U(x - \xi), \quad (9.3-8)$$

где $C'_k(x)$ получаются из уравнений (5), а $U(t)$ — единичная функция, определенная в п.21.9-1 $\left(U(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \right)$

Для линейных дифференциальных уравнений порядка $r = 2$ общее решение дается формулой (4) или (7), где

$$\left. \begin{aligned} C'_1(x) &= -\frac{f(x)}{a_0(x)} \frac{w_2(x)}{w_1(x)w'_2(x) - w_2(x)w'_1(x)}, \\ C'_2(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)} \frac{w_1(x)}{w_1(x)w'_2(x) - w_2(x)w'_1(x)}, \\ G(x, \xi) &= -\frac{1}{a_0(\xi)} \frac{w_1(x)w_2(\xi) - w_2(x)w_1(\xi)}{w_1(\xi)w'_2(\xi) - w_2(\xi)w'_1(\xi)} U(x - \xi). \end{aligned} \right\} \quad (9.3-9)$$

(с)* В то время как общее решение (7), получающееся с помощью функции Грина (8), есть только другой способ записи формулы (4), часто оказывается возможным построить функцию Грина $G(x, \xi)$ так, чтобы частное решение (6) удовлетворяло определенным начальным или крайевым условиям. Если крайевые условия линейны и однородны относительно $w(x)$ и ее производных, то искомая функция Грина $G(x, \xi)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. $G(x, \xi)$ при фиксированном значении ξ является непрерывной функцией от x и удовлетворяет заданным однородным крайевым условиям.

2. Производные до r -го порядка включительно от $G(x, \xi)$ по x непрерывны для $x \in [a, b]$, за исключением точки $x = \xi$; в этой точке непрерывны производные до $(r-2)$ -го порядка, а $(r-1)$ -я производная имеет разрыв первого рода со скачком

$$\frac{\partial^{r-1} G}{\partial x^{r-1}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{r-1} G}{\partial x^{r-1}} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{a_0(\xi)} \quad (a < \xi < b). \quad (9.3-10)$$

3. $G(x, \xi)$, как функция от x , всюду в $[a, b]$, за исключением точки $x = \xi$, удовлетворяет уравнению

$$LG(x, \xi) = 0 \quad (x \neq \xi). \quad (9.3-11)$$

Функцию Грина $G(x, \xi)$ можно определить условием $LG(x, \xi) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, определенная в п.21.9-2. Отсюда следует, что

$$LG(x, \xi) = 0 \quad (x \neq \xi) \quad \text{и} \quad \int_a^b LG(x, \xi) d\xi = 1. \quad (9.3-11a)$$

Существование и свойства таких функций Грина рассматриваются с более общей точки зрения в п.15.5-1; см. также п.9.4-3. В табл. 9.3-1 приведены функции Грина для некоторых краевых задач.

9.3-4. Приведение двухточечных краевых задач к задачам Коши. Общая теория краевых задач и задач о собственных значениях, включающая и обыкновенные дифференциальные уравнения, рассмотрена в пп. с 15.4-1 по 15.5-2 (см. также п.9.3-3). В связи с методами численного решения часто бывает полезен следующий прием.

Если дано линейное дифференциальное уравнение r -го порядка $Lw = f(z)$ с r краевыми условиями, наложенными на $w(z)$ и ее производные в двух точках $z = a, z = b$, то решение задачи записывается в виде

$$w = w_0(z) + \sum_{k=1}^r \alpha_k w_k(z), \quad (9.3-12a)$$

где функции $w_k(z)$ находятся из $(r+1)$ -й задачи Коши:

$$\left. \begin{aligned} Lw_0(z) = f(z) \quad \text{при} \quad w_0^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, r-1), \\ Lw_k(z) = 0 \quad \text{при} \quad w_k^{(j)}(a) = \begin{cases} 0 & (j \neq k-1) \\ 1 & (j = k-1) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} (j = 0, 1, \dots, r-1; \\ k = 1, 2, \dots, r). \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.3-12b)$$

Подставляя заданные краевые условия в общее решение (12a), получают систему r уравнений с r неизвестными коэффициентами α_k .

П р и м е ч а н и е. Если краевая задача не линейна, например

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = f(z, w, w') \quad \text{при} \quad w(a) = w_a, \quad w(b) = w_b, \quad (9.3-13)$$

то часто можно вычислить значения $w(b)$ для двух или трех выбранных значений неизвестного начального условия $w'(a)$ и затем исправить значение $w'(a)$ с помощью интерполяции.

9.3-5. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области. Тейлоровские разложения решения и влияние особенностей.

(а) *Линейное дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) w = f(z)$$

имеет аналитическое решение $w = w(z)$ в каждой регулярной точке z , где функции $a_k(z)$ и $f(z)$ аналитичны. Если эти функции однозначны и если область D односвязна и состоит только из регулярных точек, то заданные начальные значения $w(z_0), w'(z_0), \dots, w^{(r-1)}(z_0)$ в любой точке $z_0 \in D$ определяют единственное решение $w(z)$ в D .

Чтобы получить это решение в виде ряда Тейлора (см. также п.4.10-4), надо подставить

$$w(z) = w(z_0) + w'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} w''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \quad (9.3-14)$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots,$$

$$a_k(z) = a_k(z_0) + a_k'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} a_k''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \quad (k = 0, 1, \dots, r)$$

Таблица 9.3-1

Функции Грина для линейных краевых задач

Каждая приведенная ниже краевая задача имеет решение $w(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$.

Формула (9.3-7) позволяет получить решение при других начальных или краевых условиях (см. также пп. 9.3-3, 9.4-3, 10.4-2, 15.4-8, 15.5-1). Решения для других интервалов (a, b) получаются из табличных с помощью линейного преобразования координат.

№ п/п	Дифференциальное уравнение	Интервал (a, b)	Краевые условия	$G(x, \xi)$ ($x < \xi$) $G(\xi, x)$ ($x > \xi$)
1a	$\frac{d^2 w}{dx^2} = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w(1) = 0$	$-(1-\xi)x$
1b			$w(0) = 0$ $w'(1) = 0$	$-x$
1c			$w(0) = -w(1)$ $w'(0) = -w'(1)$	$-\frac{1}{2}(x-\xi) - \frac{1}{4}$
1d		$a = -1$ $b = 1$	$w(-1) = w(1) = 0$	$-\frac{1}{2}(x-\xi-x\xi+1)$
1e			$w(-1) = w(1)$ $w'(-1) = w'(1)$	$-\frac{1}{4}(x-\xi)^2 - \frac{1}{2}(x-\xi) - \frac{1}{6}$
2	$\frac{d^2 w}{dx^2} - w = f(x)$	$a = -\infty$ $b = \infty$	w конечна $B(-\infty, \infty)$	$-\frac{1}{2}e^{x-\xi}$
3a	$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w(1) = 0$	$-\frac{\sin kx \sin k(1-\xi)}{k \sin k}$
3b		$a = -1$ $b = 1$	$w(-1) = w(1)$ $w'(-1) = w'(1)$	$\frac{\cos k(x-\xi+1)}{2k \sin k}$
4a	$\frac{d^2 w}{dx^2} - k^2 w = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w(1) = 0$	$-\frac{\operatorname{sh} kx \operatorname{sh} k(1-\xi)}{k \operatorname{sh} k}$
4b		$a = -1$ $b = 1$	$w(-1) = w(1)$ $w'(-1) = w'(1)$	$\frac{\operatorname{ch} k(x-\xi+1)}{2k \operatorname{sh} k}$
5	$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right) - \frac{m^2}{x} w = f(x)$ (неоднородное уравнение Бесселя)	$a = 0$ $b = 1$	$w(0)$ конечно $w(1) = 0$	$\frac{\ln \xi (m=0)}{2m} \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^m - (x\xi)^m \right]$ ($m=1, 2, \dots$)
6	$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dw}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2} w = f(x)$ (неоднородное уравнение Лежандра)	$a = -1$ $b = 1$	$w(-1), w(1)$ конечны	$\frac{1}{2} \ln(1-x)(1+\xi) - \ln 2 + \frac{1}{2} (m=0)^2$ $-\frac{1}{2m} \left(\frac{1+x}{1-x} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{m/2}$ ($m=1, 2, \dots$)
7	$\frac{d^4 w}{dx^4} = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0$	$-\frac{x^2(\xi-1)^2}{6} (2x\xi+x-3\xi)$

¹⁾ Это есть обобщенная функция Грина в смысле п.15.5-1, b; она не удовлетворяет уравнению (9.3-10).

в данное дифференциальное уравнение; сравнение коэффициентов получающихся степенных рядов даст *рекуррентные соотношения* для неизвестных коэффициентов $\frac{1}{k!} w^{(k)}(z_0)$ ($k = r, r+1, \dots$). (Значения производных $w^{(k)}(z_0)$ для $k = 0, 1, \dots, r-1$ заданы в виде начальных условий.) Ряды (14) сходятся абсолютно и равномерно в каждом круге $|z - z_0| < R$, лежащем в D .

(б) Аналитическое продолжение любого решения $w(z)$ линейного дифференциального уравнения вокруг особых точек одного или нескольких коэффициентов $a_k(z)$ даст, вообще говоря, различные ветви некоторого многозначного решения (см. также пп. 7.4-2, 7.6-2, 7.8-1).

В частности, полный обход вокруг особой точки преобразует фундаментальную систему решений $w_1(z), w_2(z), \dots, w_r(z)$ однородного линейного дифференциального уравнения в новую фундаментальную систему $\bar{w}_1(z), \bar{w}_2(z), \dots, \bar{w}_r(z)$. Эти две фундаментальные системы обязательно связаны невырожденным линейным преобразованием

$$\bar{w}_i(z) = \sum_{k=1}^r a_{ik} w_k(z) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Собственные значения матрицы (a_{ik}) (п. 13.4-2) не зависят от частного выбора фундаментальной системы $w_1(z), w_2(z), \dots, w_r(z)$.

9.3-6*. Решение однородных уравнений путем разложения в ряд в окрестности правильной особой точки.

(а) Особая точка $z = z_1$ одного или нескольких коэффициентов $a_k(z)$ называется *изолированной особой точкой* однородного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) w = 0, \quad (9.3-15)$$

если в некоторой ее окрестности нет других особых точек. Изолированная особая точка $z = z_1$ называется *правильной (слабо особой)*, если все коэффициенты $a_k(z)$ имеют в этой точке полюсы порядка не выше k , т. е. $a_k(z) = \frac{p_k(z)}{(z - z_1)^k}$, где все $p_k(z)$ аналитичны в некоторой окрестности D_1 точки z_1^1 . В этом случае уравнение (15) можно записать в виде

$$(z - z_1)^r \frac{d^r w}{dz^r} + (z - z_1)^{r-1} p_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \dots + (z - z_1) p_{r-1}(z) \frac{dw}{dz} + p_r(z) w = 0. \quad (9.3-16)$$

Остальные изолированные особые точки называются *существенно особыми*. Если $z = z_1$ есть *правильная особая точка (или регулярная точка)*, то *однородное линейное дифференциальное уравнение (15) допускает решение вида*

$$w = (z - z_1)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_1)^k. \quad (9.3-17)$$

Если μ не целое число, то $(z - z_1)^\mu$ означает какую-либо однозначную ветвь многозначной функции, регулярную в комплексной плоскости с разрезом вдоль некоторого луча, выходящего из точки z_1 (см. п. 7.4-2). Показатель μ должен удовлетворять алгебраическому уравнению степени r — *определяющему уравнению*

$$\mu(\mu - 1) \dots (\mu - r + 1) + \mu(\mu - 1) \dots (\mu - r + 2) p_1(z_1) + \dots + \mu p_{r-1}(z_1) + p_r(z_1) = 0. \quad (9.3-18)$$

¹ Если некоторые $p_k(z)$ имеют нули в точке z_1 , то соответствующие коэффициенты $a_k(z)$ будут иметь полюсы порядка меньшего чем k ; они могут даже быть регулярными функциями в окрестности точки z_1 .

Коэффициент $a_0 \neq 0$ может быть выбран произвольно, остальные коэффициенты a_k определяются последовательно из рекуррентных соотношений, получающихся при подстановке ряда (17) в уравнение (15) или (16). Ряды в (17) сходятся абсолютно и равномерно в каждом круге $|z - z_1| < R$, лежащем в D_1 .

Различные корни $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ определяющего уравнения (18) дают линейно независимые решения (17) данного дифференциального уравнения, за исключением тех случаев, когда некоторые из них отличаются на целое число. В таких случаях, а также в случае равных корней определяющего уравнения можно использовать известные решения для понижения порядка данного дифференциального уравнения (п.9.3-2, с) или отыскивать решения по методу Фробениуса (см. также п.9.3-8, а).

Показатели μ_k связаны с собственными значениями λ_k матрицы преобразования (a_{ik}) п.9.3-5, б для одного обхода правильной особой точки z_1 соотношением $\lambda_k = e^{2\pi i \mu_k}$.

(б) Правильные особые точки на бесконечности (см. также пп.7.2-1 и 7.6-3). $z = \infty$ называется *правильной особой точкой* уравнения (15), если преобразование

$$z = \frac{1}{\bar{z}}, \quad w(z) = w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{w}(\bar{z}),$$

$$\frac{dw}{dz} = -\bar{z}^2 \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}, \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \bar{z}^4 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{z}^2} + 2\bar{z}^3 \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}, \dots \quad (9.3-19)$$

приводит к дифференциальному уравнению с правильной особой точкой $\bar{z} = 0$. В этом случае решение преобразованного уравнения можно получить как показано выше.

(в) **Обобщение.** Если $z = z_1$ не является правильной особой точкой, причем функции $p_k(z)$ имеют полюсы в $z = z_1$, то все же можно искать решение в виде, аналогичном (17), заменяя степенной ряд рядом Лорана (п.7.5-3) по положительным и отрицательным степеням $(z - z_1)$.

9.3-7. Методы интегральных преобразований. Если в линейном дифференциальном уравнении (1) коэффициентами служат *многочлены* $a_k(z) = \sum_h a_{kh} z^h$, то его интегрирование

при начальных условиях $w^{(j)}(0) = w_0^{(j)}$ часто упрощается применением преобразования Лапласа, как в п.9.4-5. Применяя формулу

$$\mathcal{L}[z^h w^{(k)}(z), s] = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} \left\{ s^k \mathcal{L}[w(z); s] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} w^{(j)}(0+0) \right\}, \quad (9.3-20)$$

можно получить новое и, может быть, более простое дифференциальное уравнение для изображения $\mathcal{L}[w(z); s]$ решения.

Более общие интегральные преобразования (табл. 8.6-1) могут быть подобным образом применены в различных специальных случаях (см. также п.10.5-1 и [10.4]).

9.3-8. Линейные уравнения второго порядка (см. также пп. 15.4-3, с и 15.5-4).

(а) Результаты общей теории применимы, в частности, к линейным уравнениям второго порядка. Главный интерес представляет здесь однородное уравнение

$$Lw \equiv \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1(z) \frac{dw}{dz} + a_2(z)w = 0. \quad (9.3-21)$$

Уравнение (21) равносильно уравнению

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dw}{dz} \right] + q(z)w &= 0, \\ p(z) &= \exp \int a_1(z) dz, \quad q(z) = a_2(z)p(z). \end{aligned} \right\} \quad (9.3-22)$$

Если известно одно решение $w_1(z)$ уравнения (21) или (22), то общее решение есть

$$w(z) = w_1(z) \left[C_1 + C_2 \int \frac{dz}{w_1^2(z)p(z)} \right]. \quad (9.3-23)$$

(b) Разложение решения в ряд (см. также пп. 9.3-5, 9.3-6, 9.3-9 и 9.3-10). В важном частном случае уравнения второго порядка, представимого в виде

$$(z - z_1)^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + (z - z_1) p_1(z) \frac{dw}{dz} + p_2(z) w = 0, \quad (9.3-24)$$

где $p_1(z)$ и $p_2(z)$ аналитичны в $z = z_1$, определяющее уравнение (18) сводится к

$$\mu^2 + \mu[p_1(z_1) - 1] + p_2(z_1) = 0. \quad (9.3-25)$$

Это уравнение имеет два корня. Корень $\mu = \mu_1$ с большей действительной частью приводит к решению вида

$$w = w_1(z) \equiv (z - z_1)^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_1)^k. \quad (9.3-26)$$

Второй корень μ_2 приводит к линейно независимому от $w_1(z)$ решению подобного вида, если μ_2 не совпадает с μ_1 или не отличается от него на целое число. В противном случае линейно независимое от $w_1(z)$ решение может быть записано в виде

$$w = A w_1(z) \ln(z - z_1) + (z - z_1)^{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k. \quad (9.3-27)$$

Подставляя каждое из решений (26) или (27) в данное дифференциальное уравнение (24), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов.

(c) Преобразование переменных. Следующие преобразования могут иногда упростить данное дифференциальное уравнение (21) или привести его к дифференциальному уравнению с известным решением.

1. Подстановка $w = \bar{w} \exp \int \varphi(z) dz$ дает

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} + [a_1(z) + 2\varphi(z)] \frac{d\bar{w}}{dz} + [a_2(z) + a_1(z)\varphi(z) + \varphi'(z) + \varphi^2(z)] \bar{w} = 0. \quad (9.3-28)$$

Надо попробовать выбрать $\varphi(z)$ так, чтобы получить более простое новое дифференциальное уравнение; в частности, выбор $\varphi(z) = -\frac{1}{2} a_1(z)$ исключает коэффициент при $\frac{d\bar{w}}{dz}$. Подходящая подстановка $z = z(\bar{z})$ также может дать некоторое упрощение дифференциального уравнения.

2. Подстановка

$$w = A e^{\int \bar{w}(s) ds}; \quad \bar{w} = \frac{w'}{w} \quad (9.3-29)$$

преобразует уравнение (21) в дифференциальное уравнение первого порядка типа Риккати (п. 9.2-4, с).

(d) Существование решения и его нули при действительном аргументе. Пусть x — действительное переменное. Однородное линейное дифференциальное уравнение

$$Lw \equiv \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1(x) \frac{dw}{dx} + a_2(x) w = 0 \quad (9.3-30)$$

имеет решение $w = w(x)$ в каждом интервале $[a, b]$, где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ действительны и непрерывны; решение однозначно определяется начальными значениями $w(x_0)$, $w'(x_0)$ для любого значения $x_0 \in [a, b]$. $w(x)$ имеет самое большое конечное число нулей в любом конечном интервале $[a, b]$, в котором $w(x) \neq 0$; нули двух линейно независимых решений перемежаются в $[a, b]$.

9.3-9. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение Гаусса и P -уравнение Римана (см. также пп.9.3-5 и 9.3-6).

(а)* *Гипергеометрическое дифференциальное уравнение*

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0 \quad (9.3-31)$$

имеет правильные особые точки $z = \infty$ (с показателями $\mu = a, \mu = b$), $z = 1$ (с показателями $\mu = 0, \mu = c - a - b$) и $z = 0$ (с показателями $\mu = 0, \mu = 1 - c$), и не имеет других особых точек. Решения уравнения (31) содержат в качестве частных случаев многие элементарные функции и специальные функции, рассмотренные в главе 21.

Разложение в ряд вблизи $z = z_1 = 0$ дает гипергеометрическую функцию вида (17) при $\mu = 0$ и $\mu = 1 - c$

$$a_{z+1} = \frac{(a + \mu + k)(b + \mu + k)}{(c + \mu + k)(1 + \mu + k)} a_k.$$

При $\mu = 0$ получаем специальную гипергеометрическую функцию — гипергеометрический ряд

$$w = F(a, b; c; z) \equiv 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{1}{2!} \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} z^2 + \dots \quad (9.3-32)$$

(c не должно равняться нулю или целому отрицательному числу). Этот ряд сходится абсолютно и равномерно при $|z| < 1$; сходимость распространяется и на единичную окружность, если $\operatorname{Re}(a+b-c) < 0$ ¹⁾. Ряд сводится к геометрическому ряду (п.4.10-2) при $a = 1, b = c$, и к многочлену Якоби (п.21.7-8), если a (или b) равно целому отрицательному числу. Ясно, что $F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z)$.

Второе (линейно независимое) решение уравнения (31) может быть получено способом, указанным в п.9.3-8, б; в частности, гипергеометрическая функция второго рода

$$\phi(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-c)} z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) \quad (9.3-33)$$

является решением уравнения, если c отлично от целого числа.

Отметим следующие соотношения ($|z| < 1$):

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \zeta^{a-1}(1-\zeta)^{c-a-1}(1-z\zeta)^{-b} d\zeta \quad [\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0], \quad (9.3-34)$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z); \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{ab}{c} \phi(a+1, b+1; c+1; z), \quad (9.3-35)$$

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad [\operatorname{Re}(a+b-c) < 0], \quad (9.3-36)$$

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z).$$

Приведем некоторые линейные преобразования $F(a, b; c; z)$ (полный перечень таких преобразований приведен в [21.3]):

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b} F\left(b, c-a; c; \frac{z}{z-1}\right). \quad (9.3-37)$$

Формулы (37) позволяют аналитически продолжить $F(a, b; c; z)$ в полуплоскость $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$, т.е. $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$.

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \quad (9.3-38)$$

$$[|\arg(1-z)| < \pi; a+b-c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots].$$

¹⁾ При $0 < \operatorname{Re}(a+b-c) < 1$ ряд условно сходится во всех точках единичной окружности, кроме точки $z = 1$.

С помощью формулы (38) гипергеометрическую функцию можно продолжить в круг $|z-1| < 1$ с разрезом по отрезку $[1, 2]$, а также выявить характер ее особенности в точке $z = 1$.

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}\right) \quad (9.3-39)$$

$$[\arg(-z)] < \pi; a-b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots]$$

Формула (39) позволяет продолжить $F(a, b; c; z)$ во внешность единичной окружности $|z| > 1$, с разрезом по лучу $[1, \infty)$.

(b) Р-уравнение Римана. Уравнение (31) является частным случаем Р-уравнения Римана

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-z_1} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-z_2} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-z_3} \right) \frac{dw}{dz} + \left[\frac{\alpha\alpha'(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1} + \frac{\beta\beta'(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{z-z_2} + \frac{\gamma\gamma'(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z-z_3} \right] \frac{w}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = 0, \quad (9.3-40)$$

которое имеет три различные правильные особые точки: $z = z_1$ (с показателями α, α'), $z = z_2$ (с показателями β, β') и $z = z_3$ (с показателями γ, γ'); здесь

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Решение уравнения (40) обозначается так:

$$w(z) = P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix} z.$$

Одним из решений служит функция

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_2} \right)^\alpha \left(\frac{z-z_2}{z-z_3} \right)^\gamma F\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma; 1+\alpha-\alpha'; \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}\right). \quad (9.3-41)$$

Это решение сводится к (32) при $z_1 = 0, z_2 = \infty, z_3 = 1$ и $\alpha = 0, \beta = a, \gamma = 0; \alpha' = 1-c, \beta' = b, \gamma' = c-a-b$.

9.3-10. Вырожденные гипергеометрические функции. Особую точку $z=1$ гипергеометрического дифференциального уравнения (31) можно передвинуть в $z=b$ заменой z на z/b ; тогда при $b \rightarrow \infty$ особая точка $z=b$ будет стремиться к уже имеющейся особой точке $z=\infty$ (вырождение особой точки). Это приводит к дифференциальному уравнению вырожденной гипергеометрической функции (Куммера)

$$z \frac{d^2w}{dz^2} + (c-z) \frac{dw}{dz} - aw = 0, \quad (9.3-42)$$

которое имеет одну правильную особую точку $z=0$ и одну существенно особую точку $z=\infty$. Многие специальные функции являются решением уравнения (42) при частном выборе значений a и c (гл. 21).

Разложение решения в ряд в точке $z=0$ дается формулой (17) при $\mu=0$ и $\mu=1-c$, где

$$a_{k+1} = \frac{a+\mu+k}{(c+\mu+k)(1+\mu+k)} a_k.$$

При $\mu=0$ получаем вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера – вырожденный гипергеометрический ряд (см. п.21.7-5):

$$w = F(a, c; z) \equiv 1 + \frac{a}{c} z + \frac{1}{2!} \frac{a(a+1)}{c(c+1)} z^2 + \dots (|z| < \infty). \quad (9.3-43)$$

Второе (линейно независимое) решение можно получить тем же способом, что и в п.9.3-8, b; в частности, вырожденная гипергеометрическая функция второго рода

$$\phi(a, c; z) \equiv \frac{\Gamma(a-c+1) \Gamma(c-1)}{\Gamma(a) \Gamma(1-c)} z^{1-c} F(a-c+1, 2-c; z) \quad (9.3-44)$$

является решением, если только c не целое.

Отметим следующие соотношения:

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \zeta^{a-1} (1-\zeta)^{c-a-1} e^{\zeta z} d\zeta; \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0; \quad (9.3-45)$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{a}{c} F(a+1, c+1; z); \quad \frac{d\Phi}{dz} = \frac{a}{c} \Phi(a+1, c+1; z); \quad (9.3-46)$$

$$F(a, c; z) = e^z F(c-a, c; -z). \quad (9.3-47)$$

9.3-11. Обобщенные гипергеометрические ряды. Степенные ряды (32) и (43) являются частными случаями рядов

$${}_m F_n(a_1, a_2, \dots, a_m; c_1, c_2, \dots, c_n; z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_m)_k}{(c_1)_k (c_2)_k \dots (c_n)_k} z^k$$

$$(m, n = 1, 2, \dots), \quad (9.3-48)$$

где $(x)_k \equiv x(x+1)\dots(x+k-1)$. В этих обозначениях гипергеометрические ряды (32) и (43) запишутся соответственно как ${}_2F_1(a, b; c; z)$ и ${}_1F_1(a, c; z)$.

9.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

9.4-1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (см. также п.9.3-4).

(а) Уравнение первого порядка

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (9.4-1)$$

имеет решение

$$y = C e^{-\frac{a_1}{a_0} t}, \quad [C = y(0)]. \quad (9.4-2)$$

При $\frac{a_0}{a_1} > 0$ ($\frac{a_0}{a_1}$ называется иногда постоянной времени)

$$y\left(\frac{a_0}{a_1}\right) = y(0) e^{-1} \approx 0,37y(0), \quad y\left(4 \frac{a_0}{a_1}\right) \approx 0,02y(0).$$

(б) Уравнение второго порядка

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (9.4-3)$$

имеет решение

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \\ s_{1,2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} \end{aligned} \right\} \quad (a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0); \quad (9.4-4a)$$

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{a_1}{2a_0} t}, \quad (a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0). \quad (9.4-4b)$$

Если a_0, a_1, a_2 действительны, то при $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$ корни s_1, s_2 будут комплексными; в этом случае формулу (4a) удобнее представить в виде

$$y = e^{\sigma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \operatorname{Re} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha), \quad (9.4-4c)$$

где величины

$$\sigma_1 = -\frac{a_1}{2a_0}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_0} \quad (9.4-4d)$$

называются соответственно **постоянной затухания** и **собственной круговой частотой**. Постоянные $C_1, C_2, A, B, R, \alpha$ определяются по начальным или краевым условиям (см. также п.9.4-5, а).

Если $a_0 a_2 > 0$, то величина $\zeta = \frac{a_1}{\sqrt{4a_0 a_2}}$ называется коэффициентом затухания; при $\zeta > 1$, $\zeta = 1$, $0 < \zeta < 1$ получаем соответственно *апериодическое затухание* (4a), *критическое затухание* (4b), *затухающие колебания* (4c). В последнем случае логарифмический декремент $\frac{2\pi\sigma_1}{\omega}$ есть натуральный логарифм отношения последовательных максимумов решения $y(t)$.

Уравнение (3) записывают иногда в *безразмерном виде*

$$\frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{\zeta}{\omega_1} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$s_{1,2} = -\omega_1 \zeta \pm \omega_1 \sqrt{\zeta^2 - 1};$$

при слабом затухании ($\zeta^2 \ll 1$) имеем $\omega_1 = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \approx \omega$.

(с) Для интегрирования уравнения порядка r

$$L y \equiv a_0 \frac{d^r y}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \dots + a_r y = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (9.4-5)$$

надо найти корни **характеристического уравнения** — алгебраического уравнения степени r :

$$a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_{r-1} s + a_r = 0. \quad (9.4-6)$$

Если все корни s_1, s_2, \dots, s_r этого уравнения различны, то общее решение дифференциального уравнения (5) есть

$$y = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_r e^{s_r t}. \quad (9.4-7a)$$

Если некоторый корень s_k имеет кратность m_k , то соответствующие члены в (7a) надо заменить на

$$(C_k + C_{k1} t + C_{k2} t^2 + \dots + C_{k(m_k-1)} t^{m_k-1}) e^{s_k t}. \quad (9.4-7b)$$

Различные члены в решении (7) называются **собственными колебаниями**. r постоянных C_k и C_{kj} определяются по начальным или краевым условиям (см. также п.9.4-5, а).

Если коэффициенты уравнения (5) действительны, то комплексные корни характеристического уравнения встречаются сопряженными парами $\sigma \pm i\omega$. Соответствующие пары членов в решении также будут комплексно сопряжены и могут быть заменены действительными членами:

$$i^m C e^{(\sigma + i\omega)t} + i^m \bar{C} e^{(\sigma - i\omega)t} = i^m e^{\sigma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = R t^m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha), \quad (9.4-7c)$$

где A и B или R и α — новые (действительные) постоянные интегрирования.

(d) Если дана система n однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\varphi_{1j} \left(\frac{d}{dt} \right) y_1 + \varphi_{2j} \left(\frac{d}{dt} \right) y_2 + \dots + \varphi_{jn} \left(\frac{d}{dt} \right) y_n = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9.4-8)$$

где $\varphi_{jk} \left(\frac{d}{dt} \right)$ — многочлены от $\frac{d}{dt}$, то каждая из n функций, составляющих решение $y_k = y_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), имеет вид (7); показатели s_k будут теперь

корнями *характеристического уравнения системы*

$$D(s) \equiv \det [\varphi_{jk}(s)] = 0. \quad (9.4-9)$$

Подставляя выражения вида (7) в уравнения (8), мы получаем соотношения между коэффициентами; коэффициенты, оставшиеся произвольными (постоянные интегрирования) определяются по начальным или краевым условиям (см. также п.9.4-5,b).

9.4-2. Неоднородные уравнения (см. также п.9.3-1).

(а) Методы, изложенные в пп.9.3-1 – 9.3-4, применимы ко всем линейным дифференциальным уравнениям. Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$Ly \equiv a_0 \frac{d^r y}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \dots + a_n y = f(t) \quad (9.4-10)$$

можно представить в виде суммы общего решения (7) приведенного уравнения (5) и какого-либо частного решения уравнения (10).

Если, как это часто бывает в приложениях, $f(t) = 0$ при $t \leq 0$ ¹⁾, то частное решение $y = y_N(t)$ уравнения (10) такое, что $y_N = y'_N = \dots = y_N^{(r-1)} = 0$ при $t \leq 0$, называется *нормальной реакцией на внешнюю нагрузку $f(t)$* . Решение уравнения (10) при заданных начальных значениях величин $y, y', \dots, y^{(r-1)}$, есть сумма решения соответствующей начальной задачи для однородного уравнения (5) и нормальной реакции $y_N(t)$.

Во многих приложениях (устойчивые электрические цепи, колебания) все корни характеристического уравнения (6) имеют отрицательные действительные части и общее решение уравнения (5) исчезает более или менее быстро (устойчивый «переходный процесс»). В таких случаях главный интерес представляет обычно «установившийся процесс» $y = y_{st}(t)$ — частное решение, вызванное данной нагрузкой $f(t)$. В других случаях $y_{st}(t)$ определяется не только данным дифференциальным уравнением, но и начальными условиями. Нормальная реакция $y_N(t)$ может как содержать, так и не содержать переходные члены.

(б) Всякое решение $y_k = y_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi_{11} \left(\frac{d}{dt} \right) y_1 + \varphi_{12} \left(\frac{d}{dt} \right) y_2 + \dots + \varphi_{1n} \left(\frac{d}{dt} \right) y_n = f_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9.4-11)$$

есть сумма частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы (8). **Нормальная реакция системы (11) на множество внешних нагрузок $f_j(t)$, равных нулю при $t \leq 0$, есть частное решение, в котором при $t \leq 0$ все функции y_k вместе со своими соответствующими производными равны нулю.**

(в) Если правая часть содержит периодический член, частота которого совпадает с частотой незатухающего синусоидального члена в общем решении соответствующего однородного уравнения или системы, то данное уравнение или система не будет иметь ограниченного решения (резонанс).

9.4-3. Свертки и функции Грина (см. также пп.9.3-3, 9.4-7 и 15.5-1).

(а) Физически реализуемые задачи Коши. Применение метода функции Грина (п.9.3-3,b) к дифференциальному уравнению (10) позволяет представить нормальную реакцию на внешнюю нагрузку $f(t)$ в виде интеграла Дюамеля или свертки

$$y = y_N(t) = \int_0^t h_+(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t h_+(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad (9.4-12)$$

если предположить, что $f(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $h_+(t-\tau) = 0$ при $t \leq \tau$, так что «будущие» значения $f(t)$ не могут воздействовать на «более ранние» значения $y(t)$

¹⁾ Это означает, что рассматриваются правые части только вида $f(t) = f(t)U_+(t)$, где $U_+(t)$ — единичная функция, определенная в п.21.9-1.

и «мгновенные» влияния исключаются (*физически реализуемые системы*). При этом

$$y_N^{(m)}(t) = \int_0^t \frac{\partial^m}{\partial t^m} h_+(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (m = 0, 1, 2, \dots, r), \quad (9.4-13)$$

если существуют производные в правой части. Функция $h_+(t-\tau)$ есть частный случай функции Грина и определяется условиями

$$Lh_+(t-\tau) = 0 \quad (t > \tau); \quad \int_0^\infty Lh_+(t-\tau) d\tau = 1 \quad (t > 0), \quad (9.4-14a)$$

$$h_+(t-\tau) = h'_+(t-\tau) = \dots = h_+^{(r-1)}(t-\tau) = 0 \quad (t \leq \tau). \quad (9.4-14b)$$

$h_+(t-\tau)$ есть *нормальная реакция на единичный импульс* $\delta_+(t-\tau)$ (п.21.9-6); уравнение (14a) можно записать в символической форме

$$Lh_+(t-\tau) = \delta_+(t-\tau). \quad (9.4-14c)$$

Заметим, что $\int_0^t h_+(t-\tau) d\tau$ есть *нормальная реакция на единичную нагрузку*

$U_+(t-\tau)$ (п.21.9-1), т. е. $h_+(t-\tau)$ есть *производная от нормальной реакции на единичную нагрузку*. Символическое дифференциальное уравнение (14c) часто легко решается операторным методом п.9.4-5; другой путь нахождения $h_+(t)$ заключается в интегрировании *однородного* дифференциального уравнения

$$Lh_+(t) = 0 \quad (t > 0)] \quad (9.4-14d)$$

при начальных условиях

$$\left. \begin{aligned} h_+(0+0) = h'_+(0+0) = \dots = h_+^{(r-2)}(0+0) = 0, \\ h_+^{(r-1)}(0+0) = \frac{1}{a_0}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4-14e)$$

Пример. Для $Ly \equiv a \frac{dy}{dt} + y$ имеем: $h_+(t) = \frac{1}{a} e^{-at}$ ($t > 0$).

(b) При аналогичных условиях нормальная реакция *системы* линейных дифференциальных уравнений (11) может быть представлена в виде

$$y_k = \sum_{j=1}^n \int_0^t (h_+)_{kj}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (9.4-15)$$

где $(h_+)_{kj}(t-\tau)$ — решения системы (11), соответствующие правым частям $f_j(t) = 0$ ($j \neq k$), $f_k(t) = \delta_+(t-\tau)$. Матрица функций $[(h_+)_{kj}(t-\tau)]$ есть частный случай матрицы Грина.

(c) Свертка (12) дает нормальные реакции также и в том случае, когда $f(t)$ и $y(t)$ связаны дифференциальными уравнением вида

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 \frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}} + \dots + a_r y = b_0 \frac{d^l f}{dt^l} + b_1 \frac{d^{l-1} f}{dt^{l-1}} + \dots + b_l f. \quad (9.4-16)$$

Такие соотношения могут получиться, в частности, когда система (11) приводится к одному уравнению путем исключения $(n-1)$ искомым функций.

Некоторые $(h_+)_{kj}(t)$, а значит, и $h_+(t)$ в случае соотношений типа (16) могут содержать особенности типа дельта-функции (обобщенные функции Грина, п.15.5-1, б). Если при этом

$$h_+(t) = c_1 \delta_+(t-t_1) + c_2 \delta_+(t-t_2) + \dots + h_0(t),$$

то формула (12) сводится к

$$y = y_N(t) = c_1 f(t-t_1) + c_2 f(t-t_2) + \dots + \int h_0(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (t > 0).$$

(d) Более общие задачи. «Симметрические» и «асимметрические» функции Грина. В случае, когда правая часть при $t \leq 0$ отлична от нуля, можно ввести «симметрическую» функцию $h(t-\tau)$, определяемую уравнением (см. п.21.9-2)

$$Lh(t-\tau) = \delta(t-\tau) \quad (9.4-17)$$

и подходящими начальными или краевыми условиями. Решение

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (9.4-18)$$

будет, в частности, удовлетворять уравнению (10) при $t \geq 0$ и

$$y(0-0) = y'(0-0) = \dots = y^{(r-1)}(0-0) = 0,$$

если $f(t) \equiv f(t)U(t)$ (п.21.9-1) и если

$$h(t-\tau) = h'(t-\tau) = \dots = h^{(r-1)}(t-\tau) = 0 \quad (t < \tau). \quad (9.4-19a)$$

«Асимметрические» функции $h_+(t)$ удобнее применять вместе с преобразованием Лапласа, а «симметрические» $h(t)$ — с преобразованием Фурье. В обычных физических приложениях сохраняют условия (19a), так как «будущие» значения функции не могут влиять на решение; при этом $h_+(t)$ и $h(t)$ совпадают в точках непрерывности. Часто внешняя нагрузка не может оказать мгновенного действия на решение, так что $h(t-\tau)$ удовлетворяет более сильным условиям

$$h(t-\tau) = h'(t-\tau) = \dots = h^{(r-1)}(t-\tau) = 0 \quad (t \leq \tau) \quad (9.4-19b)$$

и $h(t)$ совпадает с $h_+(t)$.

9.4-4. Устойчивость (см. п.9.4-2,с). Линейное дифференциальное уравнение (10) или система (11) **устойчивы**, если все корни соответствующего характеристического уравнения (6) или (9) имеют отрицательные действительные значения (более общее определение устойчивости см. п.9.5-4, а). Данное условие может быть исследовано методами пп.1.6-6 и 7.6-9 (критерии для электрических цепей и систем управления). Дифференциальное уравнение (10) **устойчиво тогда и только тогда, когда существует**

(или соответственно $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$). Аналогичные условия для каж-

дого системы (11) (п.9.4-3,б) являются необходимыми и достаточными для устойчивости этой системы.

Вспомогательный метод решения (см. также п.8.1-1, 8.4-1—8.4-5, 9.3-7)

при интегрировании линейного дифференциального уравнения (10) с начальными значениями $y(0+0), y'(0+0), \dots, y^{(r-1)}(0+0)$ применяют преобразование Лапласа (8.2-1) к обеим частям уравнения, полагая $\mathcal{L}[y(t)] \equiv \bar{Y}(s)$ и т.д. Получающееся линейное алгебраическое уравнение (вспомогательное)

$$\left. \begin{aligned} (a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r) \bar{Y}(s) &= F(s) + G(s), \\ G(s) &\equiv y(0+0)(a_0 s^{r-1} + a_1 s^{r-2} + \dots + a_{r-1}) + \\ &+ y'(0+0)(a_0 s^{r-2} + a_1 s^{r-3} + \dots + a_{r-2}) + \\ &+ \dots + \\ &+ y^{(r-2)}(0+0)(a_0 s + a_1) + a_0 y^{(r-1)}(0+0) \end{aligned} \right\} \quad (9.4-20)$$

Уведомление по форме 5,
выполнен бухгалтерской и налоговой
форме 5 и 3

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 z = D_3$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \textcircled{A}$$

$$\begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{vmatrix} = D$$

$$\text{INV}(A) \times D = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

легко разрешимо относительно изображения искомого решения:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r} + \frac{G(s)}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r}. \quad (9.4-21)$$

Здесь первый член есть *изображение* $Y_N(s)$ *нормальной реакции* $y_N(t)$ (п.9.4-2,а), а второй член представляет влияние ненулевых начальных значений функции $y(t)$ и ее производных. Решения $y(t)$ и $y_N(t)$ находятся по своим изображениям с помощью табл. 8.4-1 или 8.4-2 или по правилам пп.8.4-2-8.4-9. В частности, каждый из r членов разложения функции $\frac{G(s)}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r}$ на простейшие дроби (п.8.4-5) дает соответствующий член в решении (7).

Этот метод решения применяется без существенных изменений и к дифференциальным уравнениям вида (16).

(b) Применение преобразования Лапласа к системе дифференциальных уравнений (11) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_{j1}(s)Y_1(s) + \varphi_{j2}(s)Y_2(s) + \dots + \varphi_{jn}(s)Y_n(s) = F_j(s) + G_j(s) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9.4-22)$$

где функции $G_j(s)$ зависят от начальных условий. Решая полученную систему по правилу Крамера (1.9-4), находят изображения искомого решения

$$Y_k(s) = \sum_{j=1}^n \frac{A_{jk}(s)}{D(s)} F_j(s) + \sum_{j=1}^n \frac{A_{jk}(s)}{D(s)} G_j(s) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (9.4-23)$$

где $A_{jk}(s)$ — алгебраические дополнения элементов $\varphi_{jk}(s)$ в определителе системы $D(s) \equiv \det [\varphi_{jk}(s)]$ (см. также п.1.9-2). Первая сумма в формуле (23) есть изображение нормальной реакции, а вторая представляет влияние начальных условий.

Искомое решение $y_k(t)$ находится путем обращения преобразования Лапласа.

9.4-6. Периодические внешние нагрузки и решения.

(а) Синусоидальные внешние нагрузки и решения. Синусоидальные установившиеся решения. Любая система линейных дифференциальных уравнений (11) с действительными коэффициентами и синусоидальными внешними нагрузками одной частоты

$$f_j(t) \equiv B_j \sin(\omega t + \beta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9.4-24a)$$

допускает единственное частное решение вида

$$y_k(t) \equiv A_k \sin(\omega t + \alpha_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.4-24b)$$

(если нет резонанса, т. е. если ωi не является корнем характеристического уравнения). В частности, если все корни характеристического уравнения (9) имеют отрицательные действительные части (устойчивая система, п.9.4-4), то синусоидальное решение (24) будет единственным установившимся решением (п.9.4-2).

(b) Метод комплексных амплитуд. Синусоидальные внешние нагрузки и решения (24) можно поставить во взаимно однозначное соответствие комплексным числам (комплексным амплитудам)

$$\left. \begin{aligned} F_j &= \frac{B_j}{\sqrt{2}} e^{i\beta_j} = \frac{B_j}{\sqrt{2}} / \beta_j & (j = 1, 2, \dots, n), \\ Y_k &= \frac{A_k}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_k} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} / \alpha_k & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (9.4-25)$$

Абсолютная величина каждой комплексной амплитуды равна среднему квадратическому значению соответствующей синусоиды, а ее аргумент равен начальной фазе синусоиды. *Комплексные амплитуды (25) связаны (комплексными) линейными алгебраическими уравнениями*

$$\varphi_{j1}(i\omega)Y_1 + \varphi_{j2}(i\omega)Y_2 + \dots + \varphi_{jn}(i\omega)Y_n = F_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9.4-26)$$

которые отвечают системе (11) и могут быть решены относительно неизвестных комплексных амплитуд (ср. п.9.4-5, б):

$$Y_k = \sum_{j=1}^n \frac{A_{jk}(i\omega)}{D(i\omega)} F_j \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (9.4-27)$$

В случае резонанса (п.9.4-2,с) выражение (27) может не иметь смысла.

(в) *Синусоидальные величины (24) удовлетворяют данной системе дифференциальных уравнений (11) тогда и только тогда, когда этим же свойством обладают комплексные гармонические функции*

$$\left. \begin{aligned} f_j(t) &\equiv B_j e^{t(\omega i + \beta_j)} \equiv F_j e^{t\omega i \sqrt{2}} & (j = 1, 2, \dots, n), \\ y_k(t) &\equiv A_k e^{t(\omega i + \alpha_k)} \equiv Y_k e^{t\omega i \sqrt{2}} & (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (9.4-28)$$

которые часто более удобны в расчетах, чем сами синусоиды (24).

(д) Более общие периодические внешние нагрузки (см. также пп.4.11-4, 4.11-5 и 9.4-5,с). Если дана устойчивая система (11) с периодическими внешними нагрузками вида

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos h\omega t + b_h \sin h\omega t), \quad (9.4-29)$$

то метод комплексных амплитуд можно применить к каждому синусоидальному члену отдельно и затем путем наложения получить установившееся периодическое решение. Этот метод может оказаться более удобным, чем метод преобразования Лапласа, если в решении надо найти только небольшое число гармоник.

9.4-7. Передаточные функции и частотные характеристики.

(а) **Передаточные функции.** **Передаточной функцией** называется функция

$$H(s) \equiv \frac{1}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r} = \frac{Y_N(s)}{F(s)} \quad (9.4-30)$$

(см. формулу (21)). Передаточная функция представляет некоторый линейный оператор (п.15.2-7), который преобразует внешнюю нагрузку на входе в нормальную реакцию на выходе (рис. 9.4-1).

Более общо, каждая функция $\frac{A_{jk}(s)}{D(s)}$ в формуле (23) есть передаточная функция, относящая нормальную реакцию $y_k(t)$ системы (11) на выходе внешней нагрузке $f_j(t)$ на входе, когда все остальные внешние нагрузки отсутствуют. Эти передаточные функции образуют **передаточную матрицу**.

Передаточная функция для уравнения (16) есть

$$H(s) \equiv \frac{b_0 s^q + b_1 s^{q-1} + \dots + b_q}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r}. \quad (9.4-31)$$

(б) **Частотные характеристики** (см. также п.9.4-6,а). Частотные характеристики $H(i\omega)$ и $\frac{A_{jk}(i\omega)}{D(i\omega)}$ связывают комплексные ам-

плитуды, представляющие синусоидальные внешние нагрузки, и установившиеся решения с одной и той же частотой ω . В частности, абсолютная величина и аргумент частотной характеристики связывают амплитуды и фазы синусоид на входе и выходе: если $f(t) = B \sin(\omega t + \beta)$, $y(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$, то

$$|H(i\omega)| = \frac{A}{B}, \quad \arg H(i\omega) = \alpha - \beta. \quad (9.4-32)$$

Для схемы, представленной на рис. 9.4-1, амплитудные характеристики $|H(i\omega)|$ перемножаются, а фазовые характеристики $\arg H(i\omega)$ складываются.

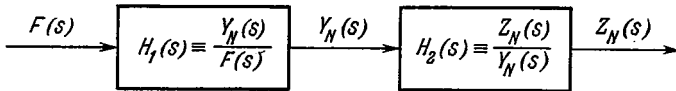


Рис. 9.4-1. Представление линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью передаточных функций. Если $y_N(t)$ становится внешней нагрузкой для второго дифференциального уравнения с нормальной реакцией $z_N(t)$, то две передаточные функции перемножаются, т.е.

$$\frac{Z_N(s)}{F(s)} = H_1(s)H_2(s).$$

(е) Соотношения между передаточными функциями, частотными характеристиками и функциями Грина (см. также п.9.4-3 и теоремы о свертках в табл. 8.3-1). Передаточная функция $H(s)$ есть преобразование Лапласа от асимметрической функции $h_+(t)$:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h_+(t) e^{-st} dt. \quad (9.4-33)$$

Частотная характеристика $H(i\omega)$ есть преобразование Фурье от симметрической функции $h(t)$:

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (9.4-34)$$

Формулы (33) и (34) указывают возможность получения функций $h_+(t)$ и $h(t)$ как обращений преобразований Лапласа или Фурье для рациональных функций.

9.4-8. Нормальные координаты и собственные колебания.

(а) Свободные колебания. Малые незатухающие колебания механических или электрических систем часто описываются системой n линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^n \left(b_{jk} \frac{d^2}{dt^2} + a_{jk} \right) y_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9.4-35)$$

в которой обе матрицы (a_{jk}) и (b_{jk}) симметричны, положительно определены (п.13.5-2) и таковы, что характеристическое уравнение (9) имеет $2n$ различных ненулевых чисто мнимых корней $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_n$. n пар таких корней соответствуют свободным синусоидальным колебаниям с n собственными

частотами $\frac{\omega_1}{2\pi}, \frac{\omega_2}{2\pi}, \dots, \frac{\omega_n}{2\pi}$.

Для данной системы (35) можно ввести нормальные координаты $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ с помощью линейного преобразования

$$y_k = \sum_{h=1}^n t_{kh} \bar{y}_h \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.4-36)$$

с такими коэффициентами t_{kh} , чтобы привести одновременно обе матрицы (a_{jk}) и (b_{jk}) к диагональному виду (пп.13.5-5 и 14.8-7); преобразованная система будет иметь простой вид:

$$\frac{d^2 \bar{y}_h}{dt^2} + \omega_h^2 \bar{y}_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (9.4-37)$$

Получающиеся здесь свободные синусоидальные (собственные) колебания

$$\bar{y}_h = \bar{A}_h \sin(\omega_h t + \bar{\alpha}_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (9.4-38)$$

не влияют одно на другое (разъединены). Нормальные координаты могут иметь непосредственное физическое истолкование.

Пример. Для системы

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\omega_0^2 y_1 - \alpha^2 (y_1 - y_2); \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\omega_0^2 y_2 - \alpha^2 (y_2 - y_1)$$

нормальными координатами являются $\bar{y}_1 = y_1 + y_2, \bar{y}_2 = y_1 - y_2$. При начальных условиях

$y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0$ при $t = 0$ уравнения для нормальных координат

$$\frac{d^2 \bar{y}_1}{dt^2} = -\omega_0^2 \bar{y}_1; \quad \frac{d^2 \bar{y}_2}{dt^2} = -(\omega_0^2 + 2\alpha^2) \bar{y}_2$$

дают

$$\bar{y}_1 = \cos \omega_0 t; \quad \bar{y}_2 = \cos \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha^2} t,$$

и следовательно,

$$y_1 = \frac{1}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \cos \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha^2} - \omega_0}{2} t \cos \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha^2} + \omega_0}{2} t,$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \sin \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha^2} - \omega_0}{2} t \sin \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha^2} + \omega_0}{2} t.$$

При $\alpha^2 \ll \omega_0^2$ (слабая связь) эти решения описывают так называемое явление резонанса.

(б) Вынужденные колебания. Соответствующая задача о вынужденных колебаниях

$$\sum_{k=1}^n \left(b_{jk} \frac{d^2}{dt^2} + a_{jk} \right) y_k = f_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9.4-39)$$

может быть решена в принципе методом п.14.8-10 путем разложения внешней нагрузки $f_j(t)$ по собственным функциям. Обычно более удобен операторный метод п.9.4-5.

9.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.5-1. Вводные замечания. В пп.9.5-2—9.5-5 вводится общая терминология и наиболее простой метод приближенного решения из теории нелинейных колебаний. Для дальнейшего изучения рекомендуется [9.6], [9.7]. Многие методы решения тесно связаны со специфическими приложениями.

Метод возмущений из п.10.2-7, с часто применяется для упрощения нелинейных задач, особенно в небесной механике. Численные методы решения см. пп.20.7-4 и 20.7-5.

9.5-2. Представление на фазовой плоскости. Графический метод решения (см. также п.9.2-2). Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (9.5-1)$$

равносильно системе уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = f(t, y, \dot{y}). \quad (9.5-2)$$

Общее решение $y = y(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$ уравнений (1) или (2) может быть представлено геометрически семейством ориентированных **фазовых траекторий** на **фазовой плоскости** $Oy\dot{y}$. Такое представление полезнее всего в том случае, когда данная функция $f(t, y, \dot{y})$ не содержит явно независимого переменного t . В этом случае система (2) относится к системам вида

$$\frac{dy}{dt} = P(y, \dot{y}); \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = Q(y, \dot{y}) \quad (9.5-3)$$

(автономная система) и фазовые траектории удовлетворяют дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = \frac{Q(y, \dot{y})}{P(y, \dot{y})}, \quad (9.5-4)$$

которое каждой точке (y, \dot{y}) ставит в соответствие наклон проходящей через нее интегральной кривой. Получающееся поле направлений («изображение» дифференциального уравнения на фазовой плоскости) позволяет сделать набросок $\dot{y}(y)$ и отсюда $y(t)$ по заданным начальным значениям y и \dot{y} ; можно начать с построения геометрического места точек постоянного наклона $\frac{d\dot{y}}{dy} = m$ (изоэлин).

9.5-3. Особые точки и предельные циклы (см. также п.9.5-4).

(а) Обыкновенные и особые точки фазовой плоскости. Точка (y, \dot{y}) фазовой плоскости системы (3) называется **обыкновенной точкой**, если $P(y, \dot{y})$ и $Q(y, \dot{y})$ дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль; *через каждую обыкновенную точку проходит единственная фазовая траектория*. Точка (y_0, \dot{y}_0) называется **особой точкой**, если

$$P(y_0, \dot{y}_0) = 0; \quad Q(y_0, \dot{y}_0) = 0. \quad (9.5-5)$$

Особые точки классифицируются по характеру фазовых траекторий в их окрестности; наиболее важные типы особых точек изображены на рис. 9.5-1. Физически особые точки есть *точки покоя* (равновесия), допускающие устойчивые или неустойчивые положения равновесия $y = y_0$ (п.9.5-4).

(б) Периодические решения и предельные циклы. Периодические решения $y = y(t)$ соответствуют замкнутым фазовым траекториям, и обратно. Замкнутая фазовая траектория C называется **предельным циклом**, если она имеет окрестность из обыкновенных точек, в которой все фазовые траектории спиралевидно приближаются к C (**устойчивый предельный цикл**) или удаляются от C (**неустойчивый предельный цикл**) или приближаются к C с одной стороны и удаляются от нее с другой (**полустойчивый предельный цикл**). Примеры см. пп.9.5-4, с и 9.5-5 (см. также рис. 9.5-2).

(с) Индекс Пуанкаре и теоремы Бендиксона. Во многих приложениях представляет интерес существование предельных циклов (устойчивых колебаний). В дополнение к аналитическому критерию п.9.5-4 полезна иногда следующая теория.

Индексом замкнутой кривой C , состоящей из обыкновенных точек фазовой плоскости, называется число полных оборотов вектора, задающего направление поля, при обходе точкой (y, \dot{y}) контура C . **Индексом изолированной особой точки** P называется индекс любой замкнутой кривой, охватывающей точку P и не содержащей других особых точек. При этом:

1. Индекс замкнутой кривой C равен сумме индексов всех (изолированных) особых точек, лежащих внутри C ; если внутри C все точки обыкновенные, то ее индекс равен нулю.

2. Индекс узла, фокуса или центра равен 1; индекс седла равен -1 (см. рис. 9.5 1).

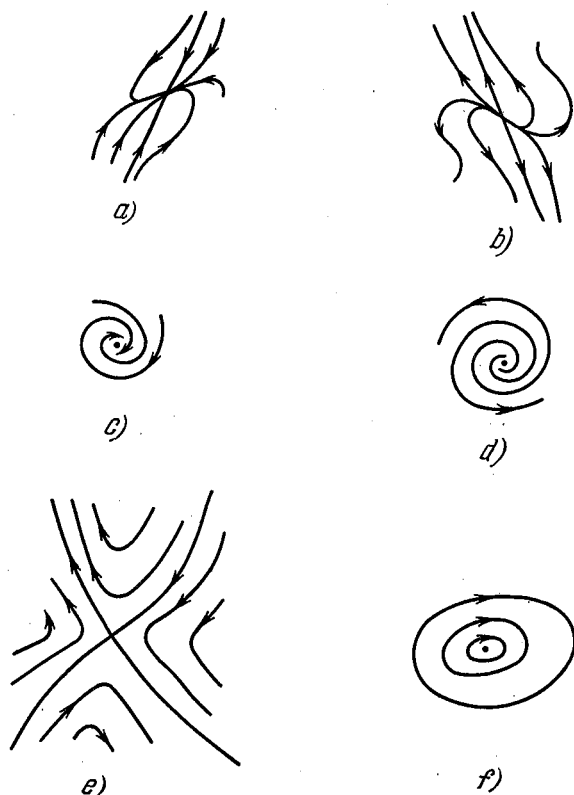


Рис. 9.5-1. Фазовые траектории в окрестности особых точек шести типов (гл. 9.5-3 и 9.5-4).
 а) Устойчивый узел, б) неустойчивый узел, с) устойчивый фокус, d) неустойчивый фокус, е) седло, f) центр.

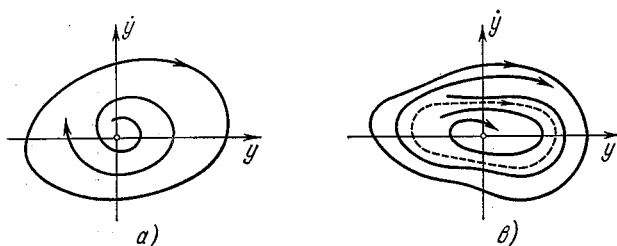


Рис. 9.5-2. а) Устойчивый предельный цикл, заключающий неустойчивую особую точку в начале. «Мягкое» самовозбуждение колебаний при произвольно малых начальных значениях y и \dot{y} .
 б) Устойчивый предельный цикл, заключающий устойчивую особую точку в начале и неустойчивый предельный цикл (показанный пунктиром). «Жесткое» самовозбуждение колебаний при начальных значениях вне неустойчивого цикла.

3. Индекс любой фазовой траектории равен 1; следовательно, предельный цикл должен содержать по крайней мере одну особую точку помимо седла (рис 9.5-2).

Внутри любой области фазовой плоскости, где $\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}}$ сохраняет знак, существуют незамкнутые фазовые траектории (первая теорема Бендиксона). Траектория, которая остается внутри ограниченной области и не приближается ни к какой особой точке при $0 < t < \infty$, либо является замкнутой, либо асимптотически приближается к некоторой замкнутой траектории (вторая теорема Бендиксона).

9.5-4. Устойчивость решений по Ляпунову (см. также пп.9.1-4 и 11.3-3)

(а) Решение $y_i = y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t; y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.5-6)$$

называется **устойчивым по Ляпунову**, если каждая функция $y_i(t)$ есть равномерно непрерывная функция от всех начальных значений $y_i(0) = y_{i0}$ ($i=1, 2, \dots, n$) в интервале $0 \leq t < \infty$ (п.4.4-6, б), так что малое изменение начальных условий не может вызвать больших изменений решения*). В частности, система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами устойчива тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части (пп.9.4-4—9.4-7); характер корней может быть исследован с помощью пп.1.6-6 и 7.6-9. (Устойчивость электрических цепей и систем управления.)

(б) Устойчивость равновесия. «Равновесное решение»

$$y_i(t) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

соответствующее точке покоя $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ такой, что

$$f_i(t; y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.5-7)$$

является устойчивым, если оно является таковым для линеаризованной системы

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} (y_k - y_{k0}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9.5-8)$$

где частные производные берутся при $y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0}$. Это имеет место тогда, когда все корни s характеристического уравнения

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k} - s \delta_k \right) = 0 \quad (9.5-9)$$

имеют отрицательные действительные части. Равновесие будет неустойчивым, если уравнение (9) имеет хоть один корень с положительной действительной частью; если нет корней с положительной действительной частью, но среди корней есть чисто мнимые, то требуется дополнительное исследование.

В частности, для системы (3), а значит и для дифференциального уравнения второго порядка (1), характеристическое уравнение есть

$$s^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}} \right) s + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0, \quad (9.5-10)$$

где все производные берутся в точке покоя (y_0, \dot{y}_0) . Точка покоя есть

— **устойчивый или неустойчивый узел**, если оба корня s_1 и s_2 уравнения (10) действительны и отрицательны или положительны соответственно, причем $s_1 \neq s_2$,

* Теория устойчивости по Ляпунову изложена во многих руководствах, см., например, [9.1], [9.3].

- седло, если s_1 и s_2 действительны и имеют разные знаки,
- устойчивый или неустойчивый фокус, если s_1 и s_2 комплексно сопряжены с отрицательной или положительной действительной частью соответственно (см. также п.9.5-3, а и рис. 9.5-1).

(е) Устойчивость периодических решений. Устойчивость периодического решения $y = y_p(t) \neq 0$, $\dot{y} = \dot{y}_p(t)$ системы (3) зависит от устойчивости такого же решения линеаризованной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta y}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}, \\ \frac{d\delta \dot{y}}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \delta y + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}, \end{aligned} \right\} \quad (9.5-11)$$

которой удовлетворяют малые вариации (п.11.4-1) δy , $\delta \dot{y}$ периодического решения. (Здесь все частные производные берутся в точке $(y_p(t), \dot{y}_p(t))$.) Это — система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, имеющими тот же период T , что и данное решение; уравнения (11) допускают два линейно независимых решения вида

$$\delta y = h_{11}(t), \quad \delta \dot{y} = \dot{h}_{12}(t); \quad \delta y = e^{\lambda t} h_{21}(t), \quad \delta \dot{y} = e^{\lambda t} \dot{h}_{22}(t), \quad (9.5-12)$$

где $h_{ik}(t)$ — периодические функции, а

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}} \right) \Big|_{y=y_p(t), \dot{y}=\dot{y}_p(t)} dt. \quad (9.5-13)$$

Периодическое решение устойчиво при $\lambda < 0$ и неустойчиво при $\lambda > 0$; случай $\lambda = 0$ требует дополнительного исследования.

Пример. Дифференциальное уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (\mu > 0) \quad (9.5-14)$$

имеет устойчивый предельный цикл в окрестности приближенно периодического решения $y = y_p(t) \approx 2 \cos t$; $\dot{y} = \dot{y}_p(t) \approx -2 \sin t$ и $\lambda = -\mu[1 + O(\mu)]$ (см. также п.9.5-5).

9.5-5. Приближенный метод Крылова и Боголюбова.

(а) Первое приближение. Эквивалентная регуляризация. Решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y + \mu f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0, \quad (9.5-15)$$

где μ — малая постоянная, так что последний член представляет малое нелинейное возмущение, ищут в виде

$$y = r(t) \cos \varphi(t). \quad (9.5-16)$$

Пренебрегая ошибкой порядка μ^2 , находим «амплитуду» $r(t)$ и «полную фазу» $\varphi(t)$ из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(r \cos \lambda, -r\omega \sin \lambda) \sin \lambda d\lambda = -\frac{r}{2} a_1(r), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \frac{\mu}{2\pi r\omega} \int_0^{2\pi} f(r \cos \lambda, -r\omega \sin \lambda) \cos \lambda d\lambda = \sqrt{a_2(r)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5-17)$$

При данном начальном значении $r(0) = r_0$ решение эквивалентного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(r_0) \frac{dy}{dt} + a_2(r_0) y = 0 \quad (9.5-18)$$

аппроксимирует решение данного дифференциального уравнения (15) с ошибкой порядка μ^2 . Для периодического решения типа предельного цикла

(п.9.5-3, б) приближенная амплитуда r_L находится из $a_1(r_L) = 0$, а круговая частота приближенно равна $\sqrt{a_2(r_L)}$. Этот предельный цикл устойчив, если $\left. \frac{da_1}{dr} \right|_{r=r_L} > 0$, и неустойчив, если $\left. \frac{da_1}{dr} \right|_{r=r_L} < 0$. Для самовозбуждения из состояния покоя должно быть $a_1(0) < 0$.

Указанное первое приближение представляет интерес в связи с периодическими нелинейными колебаниями. В таких случаях эквивалентное линейное дифференциальное уравнение (18) дает то же накопление и рассеяние энергии по циклу, что и данное нелинейное уравнение (15). Поэтому эквивалентное линейное уравнение может применяться в исследованиях явления нелинейного резонанса.

(б) Улучшенное первое приближение. Улучшенное приближение первого порядка дается формулой

$$y = r(t) \cos \varphi(t) + \frac{\mu}{\omega^2} \left\{ \frac{\alpha_0(r)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} [\alpha_k(r) \cos k\varphi(t) + \beta_k(r) \sin k\varphi(t)] \right\}, \quad (9.5-19)$$

где $r(t)$ и $\varphi(t)$ определяются из уравнений (17), а

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k(r) &= \frac{1}{\pi(k^2-1)} \int_0^{2\pi} f(r \cos \lambda, -r\omega \sin \lambda) \cos k\lambda \, d\lambda \quad (k = 0, 2, 3, \dots), \\ \beta_k(r) &= \frac{1}{\pi(k^2-1)} \int_0^{2\pi} f(r \cos \lambda, -r\omega \sin \lambda) \sin k\lambda \, d\lambda \quad (k = 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (9.5-20)$$

Пример. В случае дифференциального уравнения Ван дер Поля (14) уравнения (17) дают

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4} \right); \quad r(t) = \frac{r_0 e^{\frac{\mu}{2} t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} r_0^2 (e^{\mu t} - 1)}}. \quad (9.5-21)$$

При $r = r_L = 2$ имеется устойчивый предельный цикл. Все коэффициенты (20) исчезают, за исключением β_2 ; улучшенное первое приближение есть

$$y = r(t) \cos(t + \varphi_0) - \mu \frac{r^3(t)}{32} \sin 3(t + \varphi_0). \quad (9.5-22)$$

Приближение Крылова — Боголюбова (19) есть улучшение более простого метода Ван дер Поля, который строил приближения вида

$$y = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t.$$

Метод Крылова — Боголюбова может быть распространен на случай периодической внешней нагрузки в правой части дифференциального уравнения (15) (нелинейные вынужденные колебания, субгармонический резонанс).

9.5-6. Интеграл живых сил. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(y), \quad (9.5-23)$$

представляющее значительный интерес в динамике, может быть приведено к уравнению первого порядка умножением на $\frac{dy}{dt}$ и интегрированием:

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2 \int f(y) dy + C_1, \quad (9.5-24)$$

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} + C_2. \quad (9.5-25)$$

9.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

9.6-1. Дифференциальные уравнения Пфаффа (см. также пп. 3.1-16 и 17.2-2). Дифференциальное уравнение Пфаффа

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0 \quad (9.6-1)$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами P, Q, R может быть истолковано геометрически как условие ортогональности интегральных кривых (с касательным вектором (dx, dy, dz)) заданному полю направлений (P, Q, R) . Чтобы найти интегральную кривую, лежащую на произвольной (регулярной) поверхности

$$f(x, y, z) = 0, \quad (9.6-2)$$

надо решить обыкновенное дифференциальное уравнение, получающееся при исключении z и dz из уравнения (1) и $df(x, y, z) = 0$. При этом **интегральные кривые** будут описываться двумя уравнениями $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z, C) = 0$, где C — постоянная интегрирования.

9.6-2. Вполне интегрируемый случай (см. также п.9.2-4). Дифференциальное уравнение Пфаффа (1) **вполне интегрируемо**, если существует **интегрирующий множитель** $\mu = \mu(x, y, z)$ такой, что $\mu(P dx + Q dy + R dz)$ есть полный дифференциал $d\varphi(x, y, z)$; это имеет место тогда и только тогда, когда

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \equiv 0. \quad (9.6-3)$$

В этом случае каждая линия на **интегральной поверхности**

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad (9.6-4)$$

ортогональной семейству кривых, описываемых системой

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \quad (9.6-5)$$

является интегральной кривой. Отсюда следует, что решения, найденные методом п.9.6-1 по подходящим образом выбранному *семейству* поверхностей (обычно плоскостей)

$$f(x, y, z) \equiv f(x, y, z; \lambda) = 0, \quad (9.6-6)$$

лежат на некоторой интегральной поверхности(4), получающейся путем исключения λ из решения $f(x, y, z; \lambda) = 0, g(x, y, z, C; \lambda)$ (*метод Майера*).

Другой метод нахождения интегральной поверхности (4): *считая z постоянным*, находят решение обыкновенного дифференциального уравнения $P dx + Q dy = 0$ в виде $u(x, y, z) - K = 0$. Тогда интегральная поверхность описывается уравнением

$$\varphi(x, y, z) \equiv u(x, y, z) - \psi(z) = C, \quad (9.6-7)$$

где $\psi(z)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения, получающегося путем исключения x и y из

$$\frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{d\psi}{dz} \right). \quad (9.6-8)$$

Заметим, что общее значение отношения в (8) есть упомянутый интегрирующий множитель $\mu(x, y, z)$.

Применения в термодинамике: адиабатическое условие $dq = 0$ имеет вид (1), интегрирующим множителем служит $1/T$, где T — абсолютная температура, dq/T — (полный) дифференциал *энтропии*.

ГЛАВА 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

10.1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР

10.1-1. Вводные замечания. Пункты 10.2-1 – 10.2-7 посвящены дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка и их геометрической интерпретации и включают элементы теории Гамильтона – Якоби канонических уравнений.

В пп.10.3-1 – 10.3-4 изучаются характеристики и краевые задачи для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений второго порядка.

В пп.10.4-1 – 10.5-4 представлены решения наиболее важных линейных дифференциальных уравнений математической физики (уравнение теплопроводности, волновое уравнение и т. д.) с эвристической точки зрения и простейшие применения метода интегральных преобразований. Более усложненная теория линейных краевых задач и проблемы собственных значений описываются в гл. 15.

10.1-2. Дифференциальные уравнения с частными производными (см. также п.9.1-2).

(а) Дифференциальное уравнение с частными производными r -го порядка есть функциональное уравнение вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \Phi; \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \dots) = 0, \quad (10.1-1)$$

включающее по меньшей мере одну частную производную r -го порядка от неизвестной функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ двух или более независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая данному уравнению (1) в некоторой области точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , называется **решением** или **интегралом** дифференциального уравнения с частными производными.

Общее решение (общий интеграл) данного уравнения r -го порядка (1) содержит, как правило, *произвольные функции*. Выделение **частных интегралов** производится путем задания соответствующих дополнительных условий, т. е. условий, налагаемых на функцию Φ или на функцию Φ и ее производные, на кривой, поверхности и т. д. в пространстве точек (x_1, x_2, \dots, x_n) (*краевые условия, начальные условия*).

Многие дифференциальные уравнения с частными производными допускают дополнительные решения (**особые интегралы**), которые не могут быть получены из общего интеграла ни при каком выборе произвольных функций (п.10.2-1, с).

(б) Дифференциальное уравнение с частными производными называется **однородным**, если произведение $\alpha\Phi$ любой постоянной α на решение Φ также является решением.

Дифференциальное уравнение (1) называется **линейным**, если F – линейная функция от Φ и ее производных (см. также пп.10.4-1 и 10.4-2).

(с) Системы дифференциальных уравнений с частными производными. Условия совместности. Система дифференциальных уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \Phi_1, \Phi_2, \dots; \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}, \dots) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (10.1-2)$$

содержит несколько неизвестных функций $\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ... и их частные производные.

Каждое дифференциальное уравнение (1) или систему дифференциальных уравнений (2) можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, принимая подходящие производные за новые неизвестные функции (см. также п.9.1-3).

Система дифференциальных уравнений (2) допускает решение Φ_1, Φ_2, \dots только тогда, когда заданные функции F_i и их производные удовлетворяют условиям совместности (условиям интегрируемости), которые гарантируют, что дифференцирование двух или более уравнений (2) приводит к совпадению производных высшего порядка от функций Φ_i .

Условия совместности получаются исключением функций Φ_i и их производных из последовательности уравнений, полученных дифференцированием данных дифференциальных уравнений системы (2).

П р и м е р. Дана система

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_1(x_1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

так что данная система уравнений совместна, если $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$.

(д) Существование решений. Как для обыкновенных дифференциальных уравнений (п.9.1-4), фактическое существование и единственность решений для данного дифференциального уравнения с частными производными или системы таких уравнений требуют доказательства в каждом случае, даже если условия совместности соблюдаются. См. [10.5], где приведены некоторые теоремы существования.

10.1-3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными; разделение переменных (см. также пп.10.4-2 — 10.4-9). Во многих важных случаях попытка найти решение в виде

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \varphi_0(x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (10.1-3)$$

позволяет записать данное дифференциальное уравнение (1) в разделенной форме

$$F_1(x_1, \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}, \dots) = F_0(x_2, x_3, \dots, x_n; \varphi_0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3}, \dots).$$

Неизвестные функции $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_0(x_2, x_3, \dots, x_n)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$F_1(x_1, \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}, \dots) = C, \quad (10.1-4a)$$

$$F_0(x_2, x_3, \dots, x_n; \varphi_0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3}, \dots) = C, \quad (10.1-4b)$$

где C — константа разделения, которая определяется в соответствии с заданными краевыми условиями или другими присоединенными условиями. Заметим, что уравнение (4a) — обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi_1(x_1)$; для уравнения (4b) иногда возможно повторение процесса разделения.

Разделение переменных с успехом применяется при решении многих линейных однородных уравнений с частными производными математической физики; иногда разделение становится возможным после соответствующей замены переменных (в качестве примеров см. пп.10.4-3 — 10.4-9).

10.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

10.2-1*. Уравнения с двумя независимыми переменными. Геометрическая интерпретация (см. также пп.9.2-2 и 17.3-11).

(а) Возьмем дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, F_p^2 + F_q^2 \neq 0 \right) \quad (10.2-1)$$

для неизвестной функции $z = z(x, y)$, где данная функция F дважды непрерывно дифференцируема, и рассмотрим x, y, z как декартовы прямоугольные координаты. Тогда каждое решение $z = z(x, y)$ уравнения (1) представляет поверхность (интегральную поверхность). Для любой интегральной поверхности, проходящей через фиксированную точку $M(x, y, z)$, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

где p и q связаны уравнением (1), в котором x, y и z рассматриваются как постоянные. Обгибающей семейства касательных плоскостей является конус (конус Монжа). Касательная плоскость к любой интегральной поверхности касается также конуса Монжа вдоль одной из его образующих. Линии на интегральной поверхности, касающиеся в каждой своей точке соответствующей образующей, называются **характеристическими линиями** или **характеристиками**. Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q}.$$

Последовательность значений (x, y, z, p, q), как говорят, описывает **плоский элемент**, связывающий угловые коэффициенты p и q касательной плоскости с точкой (x, y, z) . Данное уравнение (1) отбирает поле плоских элементов (x, y, z, p, q), касательных к конусам Монжа (рис. 10.2-1).

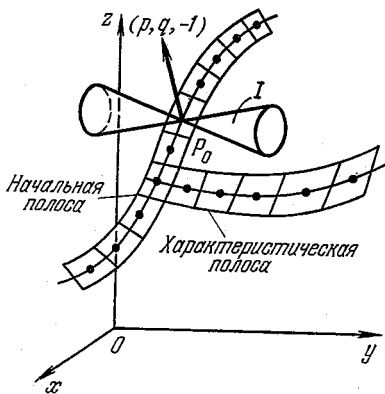


Рис. 10.2-1. Начальная полоса и одна характеристическая полоса на интегральной поверхности. I — конус Монжа в точке P_0 .

Если F_p и F_q явно не зависят от p и q (квазилинейное уравнение первого порядка), то каждый конус Монжа вырождается в прямую (ось Монжа).

(б) Полосы и уравнения характеристик. Совокупность дифференцируемых функций

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad p = p(t), \quad q = q(t) \quad (10.2-2)$$

представляет плоские элементы (точки и касательные плоскости) вдоль **полосы** регулярной поверхности, если функции (2) удовлетворяют *условию полосы*

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}.$$

Для данного уравнения с частными производными (1) каждая совокупность функций (2), удовлетворяющая системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}, & \frac{dx}{dt} &= F_p, & \frac{dy}{dt} &= F_q, \\ \frac{dp}{dt} &= -(pF_x + F_z), & \frac{dq}{dt} &= -(qF_x + F_z) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{характеристи-} \\ \text{ческие уравнения,} \\ \text{связанные с урав-} \\ \text{нением (1)}, \end{array} \quad (10.2-3)$$

описывает вместе с уравнением (1) **характеристическую полосу**. Характеристическая полоса касается конуса Монжа в каждой точке (x, y, z) ; соответствующая кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

лежит на интегральной поверхности и является **характеристикой**. *Интегральные поверхности могут касаться друг друга только вдоль характеристик.*

(е) Особые интегралы (см. также пп. 9.2-2, б, 10.1-2, а и 10.2-3, с). Решения $z = z(x, y)$ уравнения (1), полученные исключением p и q из уравнений

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad (10.2-4)$$

являются **особыми интегралами**. Они не удовлетворяют условию $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$ и не могут быть получены из общего интеграла уравнения (1).

10.2-2. Задача с начальными условиями (задача Коши). Требуется найти решение $z = z(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее *начальным условиям (граничным условиям типа Коши)*

$$x = x_0(\tau), \quad y = y_0(\tau), \quad z = z_0(\tau), \quad p = p_0(\tau), \quad q = q_0(\tau), \quad (10.2-5a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F[x_0(\tau), y_0(\tau), z_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)] &= 0, \\ \frac{dz_0}{d\tau} &= p_0 \frac{dx_0}{d\tau} + q_0 \frac{dy_0}{d\tau}; \end{aligned} \right\} \quad (10.2-5b)$$

эти условия задают начальную полосу, т. е. точки и касательные плоскости к искомой интегральной поверхности вдоль регулярной кривой C_0 ; проекция C_0 на плоскость Oxy есть простая кривая (п.3.1-13). Чтобы решить начальную задачу, надо *найти решение*

$$x = x(t, \tau), \quad y = y(t, \tau), \quad z = z(t, \tau), \quad p = p(t, \tau), \quad q = q(t, \tau) \quad (10.2-6)$$

системы характеристических уравнений (3), удовлетворяющее начальными условиями (5) при $t=0$. Результирующие функции (6) удовлетворяют уравнению (1); решение $z = z(x, y)$ или в неявном виде $\varphi(x, y, z) = 0$ находим, исключая параметры t и τ .

Задача с начальными условиями имеет единственное решение, если из данных начальных условий (5) следует

$$F_x \frac{dy}{d\tau} - F_q \frac{dx}{d\tau} \neq 0 \quad \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)} \Big|_{t=0} \neq 0 \right]. \quad (10.2-7)$$

В противном случае задача имеет решение только тогда, когда данные начальные условия (5) описывают характеристическую полосу; в этом случае имеется бесчисленное множество решений.

* При постановке задачи можно было бы сначала считать заданной только начальную кривую C_0 , а величины p_0 и q_0 определить из двух соотношений (5б). Если эти уравнения имеют несколько решений, то кривая C_0 может принадлежать различным начальным полосам, для каждой из которых задача Коши решается отдельно.

Пример. Дано уравнение $pq - z = 0$ и кривая $C_0: x_0 = \tau, y_0 = \tau^2, z_0 = \tau^3$. Уравнения (5б) принимают вид $p_0 q_0 = \tau^3$ и $p_0 + 2\tau q_0 = 3\tau^2$ и имеют решения $p_0' = \tau^2, q_0' = \tau$ и $p_0'' = 2\tau^2, q_0'' = \frac{\tau}{2}$. *

З а м е ч а н и е. Если функции (5а) произвольны и подчиняются условиям (5б) и (7), то полученное выше решение образует *общий интеграл* данного уравнения с частными производными (1).

*** П р и м е р.** Найти решение уравнения $pq - z = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 1, y_0 = \tau, z_0 = \tau^2$ (т.е. найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую). Система уравнений (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = q, \quad \frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{dz}{dt} = 2pq = 2z, \quad \frac{dp}{dt} = p, \quad \frac{dq}{dt} = q.$$

Ее решение, принимающее при $t = 0$ значения $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$:

$$p = p_0 e^t, \quad q = q_0 e^t, \quad z = z_0 e^{2t}, \quad x = q_0 e^t + x_0 - q_0, \quad y = p_0 e^t + y_0 - p_0.$$

Начальные значения p_0 и q_0 связаны условиями $p_0 q_0 = \tau^2$ и $q_0 = 2\tau$, откуда $q_0 = 2\tau, p_0 = \frac{\tau}{2}$. Следовательно,

$$x = 2\tau(e^t - 1) + 1, \quad y = \frac{\tau}{2}(e^t - 1) + \tau, \quad z = \tau^2 e^{2t}.$$

Здесь $\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)} \Big|_{t=0} = 2\tau \neq 0$. Исключая параметры t и τ , получаем единственное решение $z = \frac{(4y + x - 1)^2}{16}$. *

10.2-3. Полные интегралы. Общие, частные, особые интегралы; решения характеристических уравнений.

(а) **Полный интеграл** уравнения с частными производными первого порядка (1) есть двупараметрическое семейство решений

$$z = \Phi(x, y, \lambda, \mu) \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \mu} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \mu} \neq 0 \right), \quad (10.2-8)$$

причем функция Φ и ее производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p(x, y, \lambda, \mu) = p, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = q(x, y, \lambda, \mu) = q$$

в некоторой области пространства x, y, λ, μ должны иметь непрерывные частные производные по x, y, λ, μ . Данная последовательность значений (x, y, z, p, q) , удовлетворяющая уравнению (1), должна определять единственные значения параметров λ, μ . Полный интеграл (8) производит *общий интеграл*, если ввести произвольную функцию $\mu = \mu(\lambda)$ и исключить λ из уравнений

$$z - \Phi[x, y, \lambda, \mu(\lambda)] = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 0 \quad (10.2-9)$$

(огнивающая однопараметрического семейства интегральных поверхностей, п.17.3-11).

(б) **Получение частных интегралов из общего.** Для получения *частного интеграла, соответствующего заданным начальным условиям* (5), надо найти соответствующую функцию $\mu(\lambda)$, входящую в общий интеграл, определенный в п.10.2-3, а.

Функцию $\mu(\lambda)$ находим, исключая x, y и τ из соотношений

$$\frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial x} = p_0(\tau), \quad \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial y} = q_0(\tau), \quad x = x_0(\tau), \quad y = y_0(\tau). \quad (10.2-10)$$

(в) **Отыскание особых интегралов.** Исключая λ и μ из уравнений

$$z - \Phi(x, y, \lambda, \mu) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0, \quad (10.2-11)$$

можно получить *особый интеграл* (огнивающую двупараметрического семейства интегральных поверхностей).

(д) Решение характеристических уравнений. Каждый полный интеграл (8) уравнения с частными производными первого порядка (1) производит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ получаются из соотношений

$$\frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = t, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial \mu} = \beta t, \quad (10.2-12)$$

где λ , μ и β — произвольные постоянные интегрирования; $z=z(t)$, $p=p(t)$, $q=q(t)$ получаются подстановкой $x=x(t, \lambda, \mu, \beta)$ и $y=y(t, \lambda, \mu, \beta)$ в равенства

$$z = \Phi(x, y, \lambda, \mu), \quad p = \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda, \mu)}{\partial y}. \quad (10.2-13)$$

(е) Специальные случаи. Табл. 10.2-1 содержит полные интегралы для некоторых часто встречающихся типов уравнений с частными производными первого порядка и позволяет применять методы п.10.2-3 ко многим задачам.

Таблица 10.2-1

Полные интегралы для некоторых специальных типов уравнений с частными производными первого порядка *)

№	Тип уравнения		Полный интеграл $z = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$
1	x, y, z явно не содержатся в уравнении	$F(p, q) = 0$	$z = \lambda x + \lambda' y + \mu$, где $F(\lambda, \lambda') = 0$
2a	Содержится только одна из переменных x, y, z	$p = f(x, q)$ $q = f(y, p)$	$z = \int f(x, \lambda) dx + \lambda y + \mu$ $z = \int f(y, \lambda) dy + \lambda x + \mu$
2b		$p = f(z, q)$	$x + \lambda y = \int \frac{dz}{\varphi(z, \lambda)} + \mu$, где $\varphi(z, \lambda)$ есть решение уравнения $p = f(z, \lambda p)$
2c		$p = f(z)$	$x + \lambda y = \int \frac{dz}{f(z)} + \mu$
3	Переменные разделены	$F_1(x, p) = F_2(y, q)$ (= λ , п. 10.1-3) или $p = f_1(x, \lambda)$ $q = f_2(y, \lambda)$	$z = \int f_1(x, \lambda) dx + \int f_2(y, \lambda) dy + \mu$
4	Обобщенное уравнение Клеро (см. также п. 9.2-4)	$z = px + qy + f(p, q)$	$z = \lambda x + \mu y + f(\lambda, \mu)$

*) Многие другие специальные типы уравнений приведены в [10.8].

10.2-4. Уравнения с n независимыми переменными.

(а) Задача с начальными условиями (см. также пп.10.2-1 и 10.2-2). Требуется найти решение

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

уравнения с частными производными первого порядка

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \\ \left[p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right)^2 \neq 0 \right], \end{aligned} \right\} \quad (10.2-14)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} z = z_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}), \quad x_i = x_{i0}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}), \\ p_i = p_{i0}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (10.2-15a)$$

где система уравнений $x_i = x_{i0}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ представляет гиперповерхность, не имеющую кратных точек, и

$$\begin{aligned} F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; z_0; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) = 0, \\ \frac{\partial z_0}{\partial \tau_j} = \sum_{k=1}^n p_{k0} \frac{\partial x_{k0}}{\partial \tau_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (10.2-15b)$$

Чтобы получить соответствие между x_1, x_2, \dots, x_n и z , надо найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{dx_k}{dt}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial z} \quad (10.2-16)$$

($i=1, 2, \dots, n$) (характеристические уравнения), удовлетворяющее начальным условиям (15) при $t=0$, и исключить n параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ и t .

Задача с начальными условиями имеет единственное решение, если данные начальные условия (15) приводят к тому, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \left[\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})} \neq 0 \right]. \quad (10.2-17)$$

(b) Полные интегралы и решение характеристических уравнений (см. также п.10.2-3). Полный интеграл дифференциального уравнения (14) есть n -параметрическое семейство решений

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \left\{ \det \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial \alpha_k} \right] \neq 0 \right\}, \quad (10.2-18)$$

причем функция Φ и ее производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = p_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

должны иметь непрерывные частные производные по всем x_i и α_i . Данная последовательность значений $(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n)$, удовлетворяющая уравнению (14), должна определять единственные значения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Полный интеграл (18) производит *общий интеграл*, если ввести n произвольных функций $\alpha_k = \alpha_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ ($k=1, 2, \dots, n$) и исключить $n-1$

параметров λ_j из n уравнений

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}), \\ &\alpha_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}), \dots, \alpha_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]), \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \lambda_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (10.2-19)$$

Каждый полный интеграл (18) производит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16). Функции $x_i = x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) получим из соотношений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = \beta_k t \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} = t, \quad (10.2-20)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} - (2n-1)$ произвольных постоянных интегрирования; функции $z = z(t)$ и $p_i = p_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) найдем, подставляя $x_i = x_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ в выражения

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(с) Особый интеграл (см. также пп. 10.2-1 и 10.2-3, с). Особый интеграл дифференциального уравнения (14) есть решение $z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получающееся исключением p_i из $n+1$ уравнения

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (10.2-21)$$

Из данного полного интеграла особый интеграл получается, если исключить параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из $n+1$ уравнения

$$\left. \begin{aligned} z - \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (10.2-22)$$

10.2-5. Преобразования сопряжения (см. также п. 9.2-3, б). Некоторые задачи, содержащие уравнения с частными производными первого порядка, могут быть упрощены введением двойки дифференцируемого преобразования

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_i &= \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n), \\ p_i &= \bar{p}_i(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n), \\ \bar{z} &= \bar{z}(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.2-23)$$

$$\text{где} \quad \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{z}; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n)} \neq 0,$$

выбранного таким образом, что

$$\bar{d}z - \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \bar{d}x_k = g(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n) \left(dz - \sum_{k=1}^n p_k dx_k \right) \\ [g(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0]. \quad (10.2-24)$$

При этом условии полный дифференциал $dz = \sum_{k=1}^n p_k dx_k$ преобразуется также

в полный дифференциал $\bar{d}z = \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \bar{d}x_k$, где $\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Такое преобразование называется **преобразованием соприкосновения**; преобразование соприкосновения необходимо сохраняет каждое условие полосы и будет также сохранять касание регулярных элементов поверхности для $n=2$ (см. также п.10.2-1).

Преобразование соприкосновения (23) преобразует данное дифференциальное уравнение (14) в новое дифференциальное уравнение

$$\bar{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{z}; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; z; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

$$\left(\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right) \quad (10.2-25)$$

с решениями $\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Иногда случается, что новое уравнение (25) не содержит \bar{p}_i и не является тогда дифференциальным уравнением.

Пример. n -мерное преобразование Лежандра (см. также п.9.2-3 и 11.5-6).

$$\left. \begin{aligned} x_i &= p_i, \quad \bar{p}_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \bar{z} &= \sum_{k=1}^n p_k x_k - z + C. \end{aligned} \right\} \quad (10.2-26)$$

10.2-6. Канонические уравнения и канонические преобразования.

(а) Канонические уравнения. Для уравнения с частными производными первого порядка

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right), \quad (10.2-27)$$

которое явно не содержит искомую функцию z , характеристические уравнения (16) имеют особенно простой вид

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{dx_k}{dt}, \quad (10.2-28)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.2-29)$$

(канонические уравнения).

Замечание. Решение каждого данного дифференциального уравнения (14) может быть сведено к решению дифференциального уравнения простого вида (27) относительно $n+1$ независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n, z ; каждое решение

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n; z)$$

дифференциального уравнения

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n; z; -\frac{\partial u}{\partial x_1}, -\frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (10.2-30)$$

производит соответствующее решение $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ данного уравнения (14), такое что $u(x_1, x_2, \dots, x_n; z) = 0$.

(б)* Канонические преобразования (см. также п.11.5-6). Дважды непрерывно дифференцируемое преобразование

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_i &= \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n), \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_i(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)} \neq 0, \quad (10.2-31)$$

называется **каноническим преобразованием**, если оно преобразует канонические уравнения (29) в новые канонические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \bar{p}_i} \bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n), \\ \frac{d\bar{p}_i}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.2-32)$$

Это должно иметь место для произвольной дважды дифференцируемой функции $G(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Преобразование (29) будет каноническим, если выражение $\sum_{k=1}^n (p_k dx_k - \bar{p}_k d\bar{x}_k)$ будет полным дифференциалом для **производящей функции** $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$, т. е.

$$\sum_{k=1}^n (p_k dx_k - \bar{p}_k d\bar{x}_k) = d\Omega^* \quad (10.2-33)$$

(имеется в виду, что \bar{p}_k и \bar{x}_k выражены по формулам (31)).

При соблюдении условия (33) функция $\bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$ получается из функции G путем подстановки вместо x_i и p_i их выражений через \bar{x}_i и \bar{p}_i .

Каноническое преобразование может быть выражено в терминах производящей функции $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$; последняя часто задается как функция x_i и \bar{x}_i или p_i и \bar{p}_i . В частности, каждая дважды дифференцируемая функция $\Omega = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ определяет каноническое преобразование такое, что

$$\sum_{k=1}^n (p_k dx_k - \bar{p}_k d\bar{x}_k) = d\Psi \quad \text{или} \quad p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (10.2-34)$$

чтобы получить формулу (31) нужно от независимых переменных x_i и \bar{x}_i перейти к x_i и p_i .

Из формулы (34) следует, что $\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p_k}{\partial \bar{x}_i}$. Если записать соотношение (34) в виде

$$\sum_{k=1}^n (p_k dx_k + \bar{x}_k d\bar{p}_k) = d(\Psi + \sum \bar{x}_k \bar{p}_k),$$

то получаются формулы $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_i}$. Аналогично получаются еще две группы формул

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial x_k}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Отметим, что для рассматриваемого канонического преобразования определитель матрицы Якоби $\Delta \equiv 1$.

*) Иногда такие канонические преобразования называют *унивалентными*; в дальнейшем речь идет только о них. Более общие канонические преобразования рассмотрены в книге [10.9].

Канонические преобразования (31) образуют группу (см. также п.12.2-8).
Заданное дифференциальное уравнение первого порядка (27) с каноническими уравнениями (29), новыми каноническими уравнениями (32) связано с дифференциальным уравнением

$$\bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right). \quad (10.2-35)$$

Решение $\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ преобразованного уравнения (35) связано с решением $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ исходного уравнения (27) соотношением

$$\bar{z} = z - \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (10.2-36)$$

Уравнения (31) и (36) совместно составляют преобразование прикосновения (п.10.2-5).

(с)* Скобки Пуассона. Данная пара дважды непрерывно дифференцируемых функций $g(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$, $h(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ определяет скобку Пуассона

$$[g, h] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (10.2-37)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами:

$$[h, g] = -[g, h], \quad [g, g] = 0, \quad [g, \text{const}] = 0, \quad (10.2-38)$$

$$[g_1 + g_2, h] = [g_1, h] + [g_2, h], \quad [g_1 g_2, h] = g_2 [g_1, h] + g_1 [g_2, h], \quad (10.2-39)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [f, h]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (\text{тождество Пуассона}). \quad (10.2-40)$$

Заметим, что из $[f, g] = 0$, $[f, h] = 0$ следует, что $[g, h] = 0$.

Дано преобразование (31), и пусть

$$\bar{g}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n),$$

$$\bar{h}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad \text{и}$$

$$[\bar{g}, \bar{h}] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{p}_k} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{p}_k} \right). \quad (10.2-41)$$

(Первые два равенства означают, что функции \bar{g} и \bar{h} получены из функций g и h путем замены переменных x_i, p_i через \bar{x}_i, \bar{p}_i с помощью преобразования, обратного к преобразованию (31).)

Данное преобразование (31) есть каноническое преобразование тогда и только тогда, когда оно сохраняет скобки Пуассона, т.е. если $[\bar{g}, \bar{h}] = [g, h]$ для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций g, h .

Любое каноническое преобразование (31) удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} [\bar{x}_i, \bar{x}_k] &= 0, & [\bar{p}_i, \bar{p}_k] &= 0, \\ [\bar{x}_i, \bar{p}_k] &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (10.2-42)$$

Условия (42) необходимы и достаточны для того, чтобы преобразование (31) было каноническим.

Если $[g, h] = 1$, то функции g и h называются канонически сопряженными; в частности, из (42) следует, что любая пара функций \bar{x}_k, \bar{p}_k ($k=1, 2, \dots, n$) является канонически сопряженной.

Часто приходится рассматривать преобразование вида (31), зависящее от параметра t :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_i &= \bar{x}_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n), \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n). \end{aligned} \right\} \quad (10.2-43)$$

Это преобразование будет каноническим (т.е. сохраняющим канонические уравнения (29)), если соотношения (42) выполняются для любого значения t (см. п.10.2-7, с).

Отметим, что если x_i и p_i являются функциями параметра t , так что совокупность канонических уравнений (29) удовлетворяется, то для каждой дифференцируемой функции $f(t; x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ имеет место равенство

$$\frac{df}{dt} = [f, G] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (10.2-44)$$

В частности, из $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ и $[f, G] = 0$ следует, что $f = \text{const}$.

10.2-7. Уравнение Гамильтона — Якоби. Решение канонических уравнений.

(а) Важным приложением теории уравнений с частными производными первого порядка является решение системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений, которые могут быть записаны как канонические уравнения, связанные с дифференциальным уравнением специального вида

$$p + H(x, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}; p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}; i = 1, 2, \dots, n \right) \quad (10.2-45)$$

(уравнение Гамильтона — Якоби).

Заметим, что уравнение содержит $n+1$ независимых переменных x и x_i .

Из уравнений (29) следует, что $\frac{dx}{dt} = 1$; это можно записать как $x = t$ (принимая $x=0$ для $t=0$); $2n$ канонических уравнений (29) для x_i и p_i имеют вид ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial p_i} H(t, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n), \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} H(t, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (10.2-46)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая приведенную форму (46), играет важную роль в вариационном исчислении (п.11.5-6), а также в аналитической динамике и оптике.

Если удалось найти n -параметрическое решение

$$z = \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (10.2-47)$$

уравнения Гамильтона — Якоби (45), для которого $\det \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial \alpha_k} \right] \neq 0$, то решение $x_i = x_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений (46) получается из соотношений

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.2-48)$$

где α_n и β_i — $2n$ постоянных интегрирования; после отыскания $x_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ функции p_i находятся подстановкой x_i в соотношения $p_i =$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{см. также п.10.2-4, б}).$$

1) Остающееся каноническое уравнение есть $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}$.

(б) Применение канонических преобразований (см. также п.10.2-6, б). Если полный интеграл (47), дающий решение уравнений (46) неизвестен, то можно попытаться ввести каноническое преобразование, связывающее $2n + 2$ переменных $x = t, p, x_i, p_i$ с $2n + 2$ новыми переменными $\bar{x} = \bar{t}, \bar{p}, \bar{x}_i, \bar{p}_i$, так что $p + H = \bar{p} + \bar{H}$ и

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{10.2-49}$$

В этом случае выражение

$$\sum_{k=1}^n p_k dx_k - H dt - \left(\sum_{k=1}^n \bar{p}_k d\bar{x}_k - \bar{H} d\bar{t} \right) = d\Omega \tag{10.2-50}$$

должно быть полным дифференциалом производящей функции $\Omega(t, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$. В частности, пусть $\bar{t} = t$. Тогда каждая дважды дифференцируемая функция $\Omega = \Psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, для которой $\det \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial \bar{x}_k} \right] \neq 0$, определяет каноническое преобразование такое, что

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, & \bar{p}_i &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}_i} & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \tag{10.2-51}$$

Иногда возможно так выбрать это преобразование, что \bar{H} уже не зависит явно от \bar{x}_i (преобразование к *циклическим переменным* \bar{x}_i); тогда соответствующие уравнения (49) интегрируются непосредственно: $\bar{p}_i = \text{const}$.

(с) Те о р и я о з м у щ е н и й. Дано решение (47) уравнения Гамильтона—Якоби (45); производящая функция

$$\Psi = \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

определяет каноническое преобразование (51), дающее *постоянные значения* преобразованным переменным

$$x_i = \alpha_i, \quad \bar{p}_i = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{10.2-52}$$

Как показано в п.10.2-7, а $2n$ уравнений (52) дают решение $x_i = x_i(t), p_i = p_i(t)$ канонической системы (46).

Данное решение «невозмущенной» канонической системы (46) часто позволяет решить канонические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial x_i} & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \text{где} & & K &= H(t, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) + \\ & & & + \varepsilon H_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned} \right\} \tag{10.2-53}$$

и εH_1 — малый дополнительный член (*возмущение*, т.е. эффект малого отклонения тела в небесной механике). Применение известного решения (47) для «невозмущенного» уравнения Гамильтона—Якоби (45), вводит новые переменные \bar{x}_i, \bar{p}_i каноническими преобразованиями (51) с производящей функцией

$$\Psi = \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Теперь уравнения (46) заменены уравнениями (53); \bar{x}_i и \bar{p}_i уже не являются постоянными и удовлетворяют преобразованным каноническим уравнениям

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{x}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{10.2-54}$$

которые возможно легче решить, чем данную систему (53). Если записать

$$\bar{x}_i = \alpha_i + \varepsilon X_i(t), \quad \bar{p}_i = -\beta_i + \varepsilon P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то поправки $\varepsilon X_i(t), \varepsilon P_i(t)$ к константам (52) производят соответствующие поправки к решениям невозмущенной системы (46).

10.3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ, ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ХАРАКТЕРИСТИКИ

10.3-1. Квазилинейные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристика.

(а) Уравнение с частными производными r -го порядка называется квазилинейным, если оно линейно относительно производных r -го порядка от неизвестной функции Φ . Квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными x и y имеет вид

$$a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + B = 0, \quad (10.3-1)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{22} и B — функции от x , y , Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Предполагается, что все встречающиеся функции и их производные непрерывны.

(б)* Характеристики. Дана кривая C_0 (в плоскости xOy), описываемая уравнениями

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad (10.3-2a)$$

и последовательность краевых условий типа Коши (называемых начальными условиями в п.10.2-2), заданная краевыми значениями ¹⁾

$$\Phi = z(\tau), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = p(\tau), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = q(\tau) \quad \left(\frac{dz}{d\tau} = p \frac{dx}{d\tau} + q \frac{dy}{d\tau} \right). \quad (10.3-2b)$$

Кривая C_0 вместе с функциями (2б) образует полосу первого порядка C_1 . Заданная совокупность функций (2) единственным образом определяет значения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = u(\tau), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = v(\tau), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = w(\tau)$$

(и также значения производных высшего порядка от Φ) на кривой (2а) в каждой точке P_0 , где функции (2а) не удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (10.3-4)$$

В самом деле, производные u , v , w от Φ на C_1 должны удовлетворять уравнению (1) и условиям полосы второго порядка

$$\frac{dp}{d\tau} = u \frac{dx}{d\tau} + v \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{dq}{d\tau} = v \frac{dx}{d\tau} + w \frac{dy}{d\tau}, \quad (10.3-5)$$

так что, например,

$$v = \frac{a_{11} dy \sqrt{dp} + a_{22} dx dq + B dx dy}{a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2}. \quad (10.3-6)$$

¹⁾ Если заданы граничные значения нормальной производной $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (п.5.6-1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2}} \left(q \frac{dx}{d\tau} - p \frac{dy}{d\tau} \right) = P(\tau), \quad (10.3-3)$$

то, решая уравнение (3) вместе с условием $\frac{dz}{d\tau} = p \frac{dx}{d\tau} + q \frac{dy}{d\tau}$, найдем $p(\tau)$ и $q(\tau)$.

Уравнения (4) выполняются в точке P_0 , если C_0 есть дуга **характеристической кривой** (называемой часто **характеристикой**) $y = y(x)$, удовлетворяющей уравнению (4), или если C_0 касается такой кривой в точке P_0 .

Собственно говоря, характеристики связывают с данным дифференциальным уравнением (1) кривые $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$ на интегральной поверхности $z = \Phi(x, y)$, так что $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (4). Если уравнение (1) линейно, т.е. a_{11} , a_{12} , a_{22} и B не зависят от z , p и q , то характеристики определяются независимо от выбора z , p и q , т.е. независимо от интегральной поверхности.

Основная задача Коши для уравнения (1) ставится следующим образом. Дана полоса первого порядка C_1 ; надо найти решение $\Phi(x, y)$ уравнения (1) такое, чтобы поверхность $\Phi(x, y)$ содержала полосу C_1 . (Решение ищется в некоторой малой окрестности кривой C_0 ; см. также п.10.3-4.) Если полоса C_1 целиком состоит из точек, в которых уравнения (4) соблюдаются (характеристическая полоса), то, чтобы на ней можно было построить полосу второго порядка, должно соблюдаться дополнительное условие. Так как на интегральной поверхности выражение (6) должно быть конечным, то

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{и} \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

должны удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a_{11} dy dp + a_{22} dx dq + B dx dy = 0$$

или

$$\frac{dq}{dp} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} \frac{B}{a_{22}} \left(\frac{dy}{dp} \right) \quad (10.3-7)$$

на каждой характеристике, определенной уравнением (4) с соответствующим знаком плюс или минус. В этом случае полоса второго порядка определяется не однозначно. Это означает, что на характеристических полосах возможно ветвление интегральной поверхности, т.е. имеются различные интегральные поверхности, для которых вдоль характеристики значения Φ , p и q совпадают, а некоторые производные высших порядков оказываются различными.

З а м е ч а н и е. Производные второго порядка от Φ могут быть разрывны (но обязательно конечны) на характеристике, так что различные решения могут быть соединены вместе вдоль характеристик.

(с) **Гиперболическое, параболическое и эллиптическое уравнения.** Данное квазилинейное уравнение с частными производными (1) является на выбранной интегральной поверхности:

1) **гиперболическим**, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ во всех точках поверхности; тогда уравнение (4) описывает два различных семейства характеристик;

2) **параболическим**, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$; тогда существует одно семейство характеристик;

3) **эллиптическим**, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$; тогда действительных характеристик не существует.

Следовательно, тип квазилинейного уравнения зависит от того, какое решение рассматривается, и может быть разным для разных решений.

10.3-2. Решение гиперболических уравнений методом характеристик (см. также п.10.3-4). В *гиперболическом* случае ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$) одновременное решение четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (4) и (7) выражает $p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ на интегральной поверхности как функции x и y , так что $\Phi = \Phi(x, y)$ может быть получена дальнейшим интегрированием. Во многих приложениях $\partial \Phi / \partial x$ и $\partial \Phi / \partial y$ более важны, чем $\Phi(x, y)$ (компоненты скорости); этот метод образует основу для многих аналитических и численных методов решения в теории сжимаемой жидкости.

Вычисления значительно упрощаются в специальном случае. Если $B = 0$, то

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 \left(\frac{dq}{dp} \right)_2 = -1, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 \left(\frac{dq}{dp} \right)_1 = -1, \quad (10.3-8)$$

где индекс означает, что в уравнениях характеристик (4) и (7) выбирают соответствующие знаки плюс или минус. Если в дополнение a_{11} , a_{12} и a_{22} зависят только от $\partial \Phi / \partial x$ и $\partial \Phi / \partial y$, то нужно решать только уравнение (7) для получения характеристик (двумерное устойчивое сверхзвуковое течение жидкости). Напротив, если a_{11} , a_{12} и a_{22} зависят только от x и y , то нужно решать только уравнения (4).

10.3-3. Преобразование гиперболических, параболических и эллиптических уравнений к каноническому виду. Пусть a_{11} , a_{12} и a_{22} — функции только от x и y , так что обыкновенное дифференциальное уравнение (4) разделяется на два уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y) \quad \text{с решениями} \quad h_1(x, y) = \alpha_1, \quad (10.3-9a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y) \quad \text{с решениями} \quad h_2(x, y) = \alpha_2, \quad (10.3-9b)$$

где α_1, α_2 — произвольные константы.

В зависимости от знака функции $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ в рассматриваемой области значений x, y ¹⁾ возможны три случая.

1. Гиперболическое дифференциальное уравнение ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$). $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ действительны и различны. Существуют два однопараметрических семейства действительных характеристик (9a) и (9b); через каждую точку рассматриваемой области проходит одна кривая каждого семейства. Вводя новые координаты

$$\bar{x} = h_1(x, y), \quad \bar{y} = h_2(x, y), \quad (10.3-10)$$

преобразуем данное уравнение (1) к канонической форме

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = f(\bar{x}, \bar{y}, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}). \quad (10.3-11)$$

Система координат

$$\xi = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \quad \eta = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2} \quad (10.3-12)$$

производит вторую каноническую форму

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = g(\xi, \eta, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}). \quad (10.3-13)$$

2. Параболическое дифференциальное уравнение ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$). $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ действительны и тождественны. Существует одно однопараметрическое семейство действительных характеристик (9); через каждую точку рассматриваемой области проходит одна характеристика. Вводя новые координаты

$$\bar{x} = h_1(x, y), \quad \bar{y} = h_0(x, y), \quad (10.3-14)$$

где $h_0(x, y)$ — произвольная дифференцируемая функция такая, что $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0$, преобразуем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} = f(\bar{x}, \bar{y}, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}). \quad (10.3-15)$$

3. Эллиптическое дифференциальное уравнение ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$). $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ и, следовательно, $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ комплексно сопряженные; действительных характеристик не существует. Вводя

$$\bar{x} = \frac{h_1(x, y) + h_2(x, y)}{2}, \quad \bar{y} = \frac{h_1(x, y) - h_2(x, y)}{2i}, \quad (10.3-16)$$

¹⁾ В обычных случаях дискриминант $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ не меняет знака в рассматриваемой области. Заметим, что знак $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ есть инвариант относительно непрерывно дифференцируемых преобразований координат $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ с ненулевым якобианом. * В последнее время большое значение получили задачи смешанного типа, когда дискриминант $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ меняет знак в рассматриваемой области (см. [10.7]). *

преобразуем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{y}^2} = f(\bar{x}, \bar{y}, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}). \quad (10.3-17)$$

Эти три типа уравнений с частными производными существенно отличаются друг от друга заданием краевых условий, обеспечивающих существование и единственность решения (пп.10.3-4 и 15.6-2).

10.3-4. Типичные краевые задачи для уравнений второго порядка.

(а) Гиперболические дифференциальные уравнения. В задаче Коши (задача с начальными условиями) в п.10.3-1, б требовалось найти решение гиперболического дифференциального уравнения (1),

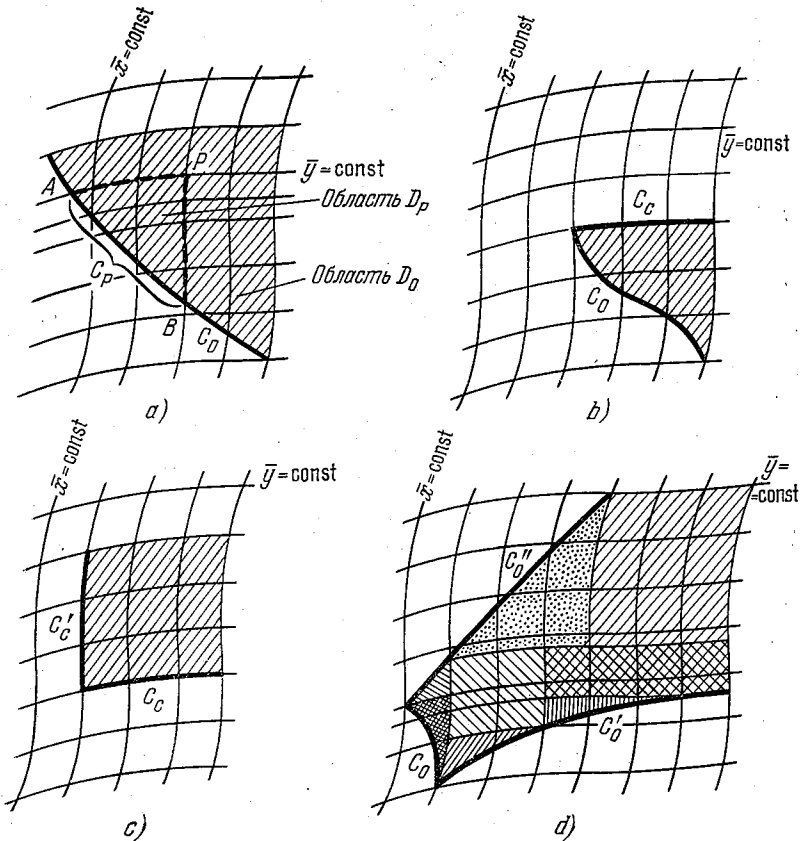


Рис. 10.3-1. Краевые задачи для гиперболических дифференциальных уравнений.

задавая Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}$ на дуге C_0 регулярной кривой, которая не является характеристикой (6) и не касается характеристик. Такая кривая пересекает каждую характеристику не более чем в одной точке; заданные начальные значения определяют Φ в треугольной области D_0 , ограниченной C_0

и характеристиками каждого семейства (рис. 10.3-1,а). Более точно, значения Φ в каждой точке P области D_0 определяются значениями Φ и ее производных на части C_p дуги C_0 , которая ограничена характеристиками, проходящими через точку P .

Второй тип краевой задачи задает только линейное соотношение $\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta \Phi = b(x, y)$ на дуге C_0 , определенной выше; в дополнение Φ задана на характеристике C_c , проходящей через конечную точку дуги C_0 (рис. 10.3-1,б).

Третий тип краевой задачи задает Φ на двух пересекающихся дугах характеристик C_c и C'_c (рис. 10.3-1,с) (задача Гурса).

Комбинации этих трех типов задач могут указывать допустимые краевые условия для более сложных границ. Так, на рис. 10.3-1,д Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ могут быть заданы на C_0 , а соотношения вида $\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta \Phi = b(x, y)$ на каждой из дуг C'_0 и C''_0 . Решения в разных областях, показанных на рис. 10.3-1, «склеиваются» вдоль характеристик так, что Φ непрерывна, а $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ могут быть разрывны. Заметим, что замкнутые границы не допускаются.

Пример. Начальные задачи для гиперболического одномерного волнового уравнения, п.10.3-5.

(б) Параболические дифференциальные уравнения. Здесь существует только одно семейство характеристик. Хотя задача Коши может опять быть разрешима для соответствующей дуги C_0 , однако обычно задается Φ на характеристике $x(=t) = 0$ и линейная комбинация $\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta \Phi$ на двух кривых, которые не пересекают и не касаются друг друга или характеристик. Замкнутые границы в плоскости Oxy не допускаются.

Пример. Допустима следующая краевая задача для параболического уравнения диффузии $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$: задано $\Phi(x, t) = \Phi_0(x)$ на характеристике $t = 0$ (начальное условие) и $\alpha(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta(x, t) \Phi$ на кривых $x = \alpha$ и $x = \beta$ (краевые условия).

(с) Эллиптические дифференциальные уравнения (см. также пп.10.4-1 и 15.6-2). Действительных характеристик не существует; краевые условия типа Коши не допускаются. Типичные проблемы: задают линейную комбинацию $\alpha(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta(x, y) \Phi$ на кривой C , о к р у ж а ю щ е й ограниченную область или неограниченную область (корректная краевая задача).

10.3-5. Одномерное волновое уравнение (см. также пп.10.3-4,а 10.4-8,а и 10.4-9,б). Гиперболическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10.3-18)$$

(одномерное волновое уравнение)

имеет общее решение

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x-ct) + \Phi_2(x+ct), \quad (10.3-19)$$

которое представляет пару бегущих волн, распространяющихся соответственно вправо и влево вдоль оси Ox с постоянной скоростью c . Характе-

ристики $x \pm ct = \text{const}$ есть геометрическое место точек постоянной фазы (рис. 10.3-2). В пп.10.3-5, а, б и с приведены решения для трех типов задач с начальными условиями (т. е. волны в струне); на практике метод Фурье.

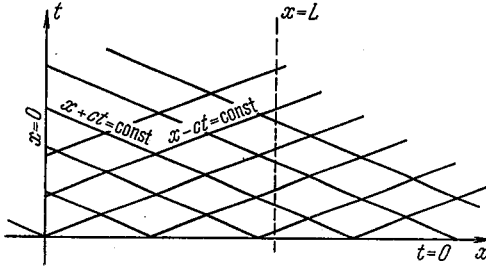


Рис. 10.3-2. Характеристики для одномерного волнового уравнения $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$.

(п.10.4-9) может быть предпочтительнее, особенно в приложениях к неоднородным дифференциальным уравнениям (вынужденные колебания).

(а) Начальные условия

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (10.3-20)$$

представляют *корректную задачу Коши* (пп.10.3-1 и 10.3-4,а; см. также рис. 10.3-1,а и 10.3-2). Решение есть

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi_0(x-ct) + \Phi_0(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi \quad (10.3-21)$$

(решение Даламбера).

Возмущение начальных условий, произведенное на заданном интервале $a < x < b$, затрагивает решение в интервале $a-ct < x < b+ct$. Разрывность $\Phi_0(x)$ распространяется в оба направления.

(б) Начальные условия

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) \quad (x \geq 0) \quad (10.3-22)$$

и краевое условие

$$\Phi(0, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (10.3-23)$$

представляют смешанный тип краевой задачи (см. также п.10.3-4,а и рис. 10.3-1, d и 10.3-2). Решение

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2} [P(x-ct) + P(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} Q(\xi) d\xi, \quad (10.3-24)$$

$$P(x) = \begin{cases} \Phi_0'(x) & (x \geq 0), \\ -\Phi_0'(-x) & (x < 0), \end{cases} \quad Q(x) = \begin{cases} v_0(x) & (x \leq 0), \\ -v_0(-x) & (x < 0) \end{cases} \quad (10.3-25)$$

представляет *суперпозицию прямой и отраженной волн*.

(с) Начальные условия

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (10.3-26)$$

и краевые условия

$$\Phi(0, t) = \Phi(L, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (10.3-27)$$

определяют другую смешанную задачу (см. также рис. 10.3-1, *d* и 10.3-2). Решение дается формулой (24), где $P(x)$ и $Q(x)$ интерпретируются как периодические функции с периодом $2L$ и соответственно равны $\Phi_0(x)$ и $v_0(x)$ для $0 \leq x \leq L$ и $-\Phi_0(-x)$ и $-v_0(-x)$ для $-L \leq x < 0$.

10.3-6. Метод Римана-Вольтерра для линейных гиперболических уравнений (см. также п.10.3-4, а и 15.5-1). Метод позволяет иногда получать решение задачи Коши (п.10.3-1) для действительного гиперболического дифференциального уравнения

$$\mathbf{L}\Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c(x, y)\Phi = f(x, y), \quad (10.3-28)$$

где Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ заданы на граничной кривой C_0 , удовлетворяющей условиям п.10.3-1. В соответствии с рис. 10.3-1, *a* решение в каждой точке P с координатами $x = \xi, y = \eta$ выражается в зависимости от начальных значений $\Phi(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ на сегменте граничной кривой C_P , ограниченном характеристиками, проходящими через точку P ¹⁾:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) = & G_R \Phi|_A - \int_{C_P} G_R \Phi (a \, dy - b \, dx) + \int_{C_P} \left(\Phi \frac{\partial G_R}{\partial y} \, dy + G_R \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, dx \right) + \\ & + \iint_{D_P} G_R f \, dx \, dy = G_R \Phi|_B - \int_{C_P} G_R \Phi (a \, dy - b \, dx) - \int_{C_P} \left(\Phi \frac{\partial G_R}{\partial x} \, dx + G_R \frac{\partial \Phi}{\partial y} \, dy \right) + \\ & + \iint_{D_P} G_R f \, dx \, dy, \end{aligned} \quad (10.3-29)$$

где так называемая **функция Римана-Грина** $G_R(x, y; \xi, \eta)$ непрерывно дифференцируема внутри области D_P , ограниченной C_P и характеристиками, проходящими через точку P , и удовлетворяет условиям простой краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}G_R = & \frac{\partial^2 G_R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (aG_R - \frac{\partial}{\partial y} (bG_R) + cG_R - \nu) \quad (x, y \text{ внутри } D_P), \\ G_R = & \exp \int_{\eta}^y a(\xi, y) \, dy \quad (x = \xi), \\ G_R = & \exp \int_{\xi}^x b(x, \eta) \, dx \quad (y = \eta). \end{aligned} \right\} \quad (10.3-30)$$

Примеры. Для $a = b = c = 0$ функция $G_R = 1$. Для $a = b = 0, c = \text{const}$ функция $G_R = J_0[\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}]$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка нуль (п.21.8-1). Для многих практических применений, в которых встречаются линейные гиперболические дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, предпочтительнее метод интегральных преобразований (п.10.5-1).

10.3-7. Уравнения с тремя и более независимыми переменными. Действительное уравнение с частными производными вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} + B(x_1, x_2, \dots, x_n; \Phi; \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}) = 0, \quad (10.3-31)$$

¹⁾ См. также формулу (10.3-4).

где $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется эллиптическим дифференциальным уравнением, если матрица $[a_{ik}]$ положительно определена (п.13.5-2) всюду в рассматриваемой области.

Во многих задачах рассматриваются неэллиптические дифференциальные уравнения с неизвестной функцией Φ , зависящей от n пространственных координат x_1, x_2, \dots, x_n и временной координаты t .

Дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} + B, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i \partial x_k} + B, \quad (10.3-32)$$

где матрица $[c_{ik}] = [c_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n; t)]$ положительно определена и B есть функция от x_i, t , Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, являются соответственно примерами уравнений гиперболического и параболического типов [10.7].

Характеристики более общих дифференциальных уравнений (31) и (32) суть поверхности или гиперповерхности, на которых краевые условия типа Коши не позволяют определить производные высших порядков искомого решения. Эллиптические дифференциальные уравнения не имеют действительных характеристик. Понятие характеристик может быть распространено на уравнения с частными производными порядка высшего чем два и на некоторые системы уравнений с частными производными [10.5].

4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

10.4.1. Физические основы и обзор.

(а) Многие проблемы классической физики приводят к отысканию решения $\Phi(x, t)$ или $\Phi(r, t)$ линейного уравнения с частными производными в заданном интервале или области \mathcal{V} (табл. 10.4-1). Неизвестная функция Φ или ее производные должны в дополнение удовлетворять заданным начальным условиям при $t=0$ и линейным краевым условиям на границе S области \mathcal{V} . Аналогичные проблемы возникают в квантовой механике.

Каждое дифференциальное уравнение, приведенное в табл. 10.4-1, является однородным (п.10.1-2, б), если $f=0$. Заданное краевое условие также однородно, если наряду с каждой функцией Φ , которая удовлетворяет краевому условию, ему удовлетворяет и функция $\alpha\Phi$. Неоднородности возникают в результате действия внешних влияний (силы, источники тепла, электрические заряды или токи) на рассматриваемую физическую систему. Для эллиптических уравнений типично описание стационарных процессов (стационарные температурные и электростатические поля, упругая деформация). Параболическое и гиперболическое дифференциальные уравнения описывают переходные процессы (свободные колебания, возникающие вследствие заданных начальных возмущений) или, если имеются неоднородности, зависящие от времени («вынуждающие» функции в дифференциальных уравнениях или краевые условия), описывают процессы распространения возмущений (вынужденные колебания, излучение).

Можно связать каждую проблему обсуждаемого типа со своей аппроксимирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений, заменяющей каждую пространственную производную разностным коэффициентом в смысле п.20.3-3 (метод разности дифференциальных уравнений). Этот метод применим не только для численных методов решения; аналогия с дискретными проблемами типа, описанного в пп.9.4-1—9.4-8 может приводить к интересным физическим аналогиям.

(б) Конструкция решения методом суперпозиции. Многие важные методы решения линейных дифференциальных уравнений основываются на фундаментальных теоремах суперпозиции, сформулированных явно в пп.9.3-1 и 15.4-2. Метод наложения (суперпозиции) разумно выбранной последовательности основных функций дает возможность полагать

Таблица 10.4-1

Важнейшие линейные дифференциальные уравнения математической физики

Тип	Физический смысл	Одномерное уравнение	Многомерное уравнение	Дополнительные условия
Параболический	Уравнение теплопроводности, диффузии	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(x, t)$	$\nabla^2 \phi - \gamma^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\mathbf{r}, t)$	Краевые условия; начальное условие для ϕ
Гиперболический	Волны (струны, мембраны, течение жидкости), звуковые волны. Телеграфное уравнение	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - a_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} - a_2 \phi = f(x, t)$	$\nabla^2 \phi - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t)$ $\nabla^2 \phi - a_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} - a_2 \phi = f(\mathbf{r}, t)$	Краевые условия; начальные условия для ϕ и $\frac{\partial \phi}{\partial t}$
Эллиптический	Статический случай	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = f(x)$	$\nabla^2 \phi = f(\mathbf{r})$	Только краевые условия
Уравнения 4-го порядка	Упругие колебания	$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(x, t)$	$\nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t)$	Краевые условия; начальные условия для ϕ и $\frac{\partial \phi}{\partial t}$
	Статический случай	$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = f(x)$	$\nabla^2 \nabla^2 \phi = f(\mathbf{r})$	Только краевые условия

решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям и/или заданным начальным условиям, а также получать решения неоднородных уравнений. Разложения по собственным функциям (п.п. 10.4-2 и 15.4-12) и методы интегральных преобразований (п.п. 9.3-7, 9.4-5 и 10.5-1 — 10.5-3) представляют систематические схемы для конструирования таких решений. Методы функций Грина (п.п. 9.3-3, 9.4-3, 15.5-1 — 15.5-4, 15.6-6, 15.6-9 и 15.6-10) являются суперпозиционными схемами, которые сводят решение соответствующих проблем к проблемам с простыми вынуждающими функциями или краевыми условиями.

Общая теория линейных краевых задач содержится в гл. 15. Пункты 10.4-3 — 10.4-8 представляют применение частных методов с эвристической точки зрения элементарного курса.

(е) Выбор систем координат. Система координат x^1, x^2 или x^1, x^2, x^3 , определяющая точку \mathbf{r} , обычно выбирается так, что, во-первых, возможно разделение переменных (п. 10.1-3) и/или, во-вторых, заданная граница S представляет координатную линию или поверхность или пару координатных линий или поверхностей.

10.4-2. Линейные краевые задачи (см. также п.п. 15.4-1 и 15.4-2).

(а) Пусть V — заданная трех- или двумерная область точек (\mathbf{r}) , и пусть S — граничная поверхность или граничная кривая области V . Требуется найти решение данного дифференциального уравнения

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in V), \tag{10.4-1a}$$

удовлетворяющее последовательности краевых условий

$$B_i\Phi(\mathbf{r}) = b_i(\mathbf{r}) \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{r} \in S), \tag{10.4-1b}$$

где $\Delta\Phi$ и $B_i\Phi$ — линейные однородные функции от неизвестной функции $\Phi(\mathbf{r})$ и ее производных. Каждое решение этой линейной краевой задачи можно записать в виде суммы $\Phi = \Phi_A + \Phi_B$ решений простых краевых задач

$$\Delta\Phi_A(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in V), \tag{10.4-2a}$$

$$B_i\Phi_A(\mathbf{r}) = b_i(\mathbf{r}) \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{r} \in S) \tag{10.4-2b}$$

и

$$\Delta\Phi_B(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in V), \tag{10.4-3a}$$

$$B_i\Phi_B(\mathbf{r}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{r} \in S). \tag{10.4-3b}$$

Заметим, что уравнение (2) является однородным дифференциальным уравнением, в то время как уравнение (3) имеет однородные краевые условия.

(б) Однородные дифференциальные уравнения с неоднородными краевыми условиями. Частные решения, приведенные в п.п. 10.4-3 — 10.4-6, часто позволяют представить $\Phi_A(\mathbf{r})$ как сумму ряда или определенный интеграл

$$\Phi_A(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \Phi_{\mu}(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \Phi_A(\mathbf{r}) = \int_{S_{\mu}} \alpha(\mu) \Phi_{\mu}(\mathbf{r}) d\mu \tag{10.4-4}$$

от подходяще выбранных решений $\Phi_{\mu}(\mathbf{r})$ уравнения (2a). Коэффициенты α_{μ} или $\alpha(\mu)$ выбираются так, чтобы удовлетворялись краевые условия (2b). Часто функции $\Phi_{\mu}(\mathbf{r})$ образуют полную ортонормированную систему (п. 15-2-4; например, ряды Фурье, интегралы Фурье); тогда возможно представить данные функции $b_i(\mathbf{r})$ в виде (4) и найти неопределенные коэффициенты α_{μ} или $\alpha(\mu)$ методом сравнения коэффициентов (п. 10.4-9).

(с) Неоднородные дифференциальные уравнения с неоднородными краевыми условиями: разложения по собственным функциям (см. также п.п. 15.4-5 — 15.4-12). Для важного класса дифференциальных уравнений (1) решение $\Phi_B(\mathbf{r})$ уравнения

(3) можно получить простой суперпозицией решений $\Psi(\mathbf{r})$, соответствующих однородным дифференциальным уравнениям

$$L\Psi(\mathbf{r}) = \lambda\Psi(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in V) \quad (10.4-5a)$$

для различных возможных значений λ , при которых $\Psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет однородным краевым условиям

$$B_i\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; \mathbf{r} \in S). \quad (10.4-5b)$$

Вообще такие решения (ненулевые) существуют только при специальных значениях параметра λ (**собственные значения**); решения $\Psi = \Psi_\lambda(\mathbf{r})$, соответствующие каждому собственному значению, называются **собственными функциями** краевой задачи (5).

В пп.10.4-3–10.4-8 приводятся частные решения $\Psi(\mathbf{r})$ для некоторых дифференциальных уравнений вида (5a). Эти функции позволяют при помощи метода наложения получать решения соответствующих неоднородных проблем (3). Собственные функции, соответствующие дискретной последовательности собственных значений, часто образуют удобные ортонормированные системы (п.15.2-4) для представления правых частей и решений в виде

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} f_{\lambda}\Psi_{\lambda}(\mathbf{r}), \quad \Phi_B = \sum_{\lambda} \beta_{\lambda}\Psi_{\lambda}(\mathbf{r}). \quad (10.4-6a)$$

Непрерывная совокупность (непрерывный спектр) S_{λ} собственных значений λ приводит к *интегральным представлениям*

$$f(\mathbf{r}) = \int_{S_{\lambda}} F(\lambda)\Psi_{\lambda}(\mathbf{r})d\lambda, \quad \Phi_B = \int_{S_{\lambda}} \beta(\lambda)\Psi_{\lambda}(\mathbf{r})d\lambda. \quad (10.4-6b)$$

Подстановка выражений (6a) или (6b) в уравнение (3) позволяет найти неизвестные коэффициенты β_{λ} или $\beta(\lambda)$. Отсылаем к пп.10.5-1 и 15.4-12 для общей теории этого метода решения и его области применения. Важный альтернативный метод решения уравнения (3), так называемый *метод функций Грина*, трактуется в пп.15.5-1–15.5-4.

(d) Проблемы, включающие зависимость от времени. В проблемах, включающих время так же, как пространственные координаты, требуется решить линейное дифференциальное уравнение

$$L\Phi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (\mathbf{r} \in V, t > 0) \quad (10.4-7a)$$

при соответствующих линейных *начальных условиях*

$$A_j\Phi(\mathbf{r}, t) = \beta_j(\mathbf{r}) \quad (j = 1, 2, \dots, M; \mathbf{r} \in V; t = 0+0) \quad (10.4-7b)$$

и *линейных краевых условий*

$$B_i\Phi(\mathbf{r}, t) = b_i(\mathbf{r}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N; \mathbf{r} \in S; t > 0). \quad (10.4-7c)$$

Так как начальные условия (7b) есть просто краевые условия на координатной поверхности $t=0$, то применимы методы пп.10.4-2, а и б (п.10.4-9). Следующие методы позволяют упростить решение задач с начальными условиями:

1. $\Phi_B = \Phi_B(\mathbf{r}, t)$ может быть расщеплено на сумму функций, соответственно удовлетворяющих однородным начальным условиям и однородным краевым условиям.
2. Разделение переменных (пп.10.1-3, 10.4-7, б и 10.4-8).
3. Преобразование Лапласа по переменной t (пп.10.5-2 и 10.5-3, а).
4. Метод Дюамеля (п.10.5-4).

10.4-3. Частные решения уравнения Лапласа: трехмерный случай (см. также табл. 6.5-1, пп.10.1-3 и 15.6-1–15.6-9; см. [10.7] для решений в других координатных системах).

(а) Прямоугольные декартовы координаты x, y, z .

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (10.4-8)$$

Допустимы частные решения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k_1, k_2, k_3}(x, y, z) &= e^{k_1 x + k_2 y + k_3 z} \\ (k_1, k_2, k_3 - \text{любые комплексные числа, удовлетворяющие} \\ \text{условию } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0), \\ \Phi_{000}(x, y, z) &= (a + bx)(\alpha + \beta y)(A + Bz), \end{aligned} \right\} \quad (10.4-9)$$

которые образуют различные произведения действительных линейных, показательных, тригонометрических и гиперболических функций.

(б) Цилиндрические координаты ρ, φ, z . Пусть $\Phi = u(\varphi)v(z)\omega(\rho)$ (п.10.1-3). Тогда

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (10.4-10)$$

Разделение переменных приводит к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u(\varphi) + m^2 u(\varphi) = 0, \quad (10.4-11)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} v(z) - K^2 v(z) = 0, \quad (10.4-12)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \omega(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) + \left(K^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \omega(\rho) = 0, \quad (10.4-13)$$

где единственные требования $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$ или $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; K — произвольная константа (константа разделения, п.10.1-3), которая определяется по данным краевым условиям. Уравнение (10) допускает частные решения (цилиндрические гармоники) вида

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\pm km}(\rho, \varphi, z) &= e^{\pm Kz} Z_m(K\rho) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi), \\ \Phi_{\pm k_0}(\rho, \varphi, z) &= e^{\pm Kz} Z_0(K\rho) (\alpha + \beta\varphi), \\ \Phi_{0m}(\rho, \varphi, z) &= (a + bz) \left(A \rho^m + \frac{B}{\rho^m} \right) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi), \\ \Phi_{00}(\rho, \varphi, z) &= (a + bz) (A + B \ln \rho) (\alpha + \beta\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (10.4-14)$$

где $Z_m(\zeta)$ — цилиндрическая функция (п.21.8-1); в частности, если данная задача требует ограниченности решения Φ при $\rho = 0$, то $Z_m(\zeta)$ должна быть функцией Бесселя первого рода $J_m(\zeta)$ (п.21.8-1).

Если в последнем случае положить $K = i\lambda$, то комбинации комплексно сопряженных решений $\Phi_{\pm i\lambda m}$ образуют действительные решения вида

$$(a \cos \lambda z + b \sin \lambda z) I_m(\lambda \rho) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi),$$

где $I_m(\lambda \rho) = i^{-m} J_m(i\lambda \rho)$ — модифицированная функция Бесселя (п.21.8-6). Заметим, что в случае осевой симметрии, т. е. когда Φ не зависит от φ , $m = 0$.

(в) Сферические координаты r, θ, φ . Пусть $\Phi = u(\varphi)v(\cos \theta)\omega(r)$. Тогда

$$r^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (10.4-15)$$

Разделение переменных дает

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u(\varphi) + m^2 u(\varphi) = 0, \quad (10.4-16)$$

$$(1-\zeta)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} v(\zeta) - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} v(\zeta) + \left[j(j+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2} \right] v(\zeta) = 0 \quad (\zeta = \cos \theta), \quad (10.4-17)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} w(r) - \frac{j(j+1)}{r^2} w(r) = 0, \quad (10.4-18)$$

где требуется регулярность для $\theta = 0$, $\theta = \pi$; постоянная $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j$ и $j = 0, 1, 2, \dots$. Уравнение (15) допускает частные решения вида

$$\Phi_{jm}(r, \theta, \varphi) = \left(Ar^j + \frac{B}{r^{j+1}} \right) P_j^m(\cos \theta) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi) \quad (j = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, j), \quad (10.4-19)$$

где $P_j^m(\zeta)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода порядка j (п.21.8-10). Комбинация таких решений производит более общие частные решения

$$\Phi_j(r, \theta, \varphi) = \left(Ar^j + \frac{B}{r^{j+1}} \right) Y_j(\theta, \varphi) \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (10.4-20)$$

где

$$Y_j(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^j P_j^m(\cos \theta) (\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi) = \sum_{m=-j}^j \gamma_m P_j^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (10.4-21)$$

Функции (21) удовлетворяют уравнению (15) для $r = \text{const}$ и называются **поверхностными сферическими гармониками степени j** (см. также п.21.8-12).

Имеется $2j+1$ линейно независимых поверхностных сферических гармоник степени j . Для разложения в ряд по ортогональным решениям заметим, что функции

$$\sqrt{\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (j = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, j)$$

или более удобные функции

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2j+1}{\pi} \frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} P_j^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (j = 0, 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j)$$

образуют ортонормальную систему в смысле п.21.8-12. Эти функции называются **тессеральными сферическими гармониками** (секторными сферическими гармониками для $m = j$; см. также пп.10.4-9, 15.2-6 и 21.8-11). Ортонормальные функции

$$\sqrt{\frac{2j+1}{2}} P_j(\cos \theta)$$

называются **зональными сферическими гармониками**.

Если допускаются решения с особенностями для $\theta = 0$, $\theta = \pi$, то появляются аналогичные решения, содержащие ассоциированные функции Лежандра второго рода [21.3].

10.4.4. Частные решения для трехмерного уравнения Гельмгольца (см. также пп.10.3-5 и 10.6-10). Дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (\text{уравнение Гельмгольца}) \quad (10.4-22)$$

получается для примера при разделении переменных (при отделении переменной t) в трехмерном волновом уравнении (п.10.4-8,b). Коэффициент k^2 может быть отрицательным ($k = ik$, пространственный вид уравнения Клейна — Гордона).

Для заданного однородного линейного краевого условия (например, $\Phi = 0$ на границе S ограниченной области V) уравнение (22) допускает решения только для соответствующей дискретной последовательности значений k^2 (*проблема собственных значений*, п.15.4-5; см. п.10.4-9, б для примера).

(а) Прямоугольные декартовы координаты x, y, z . Уравнение (22) имеет частные решения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k_1 k_2 k_3}(x, y, z) &= e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} & (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2), \\ \Phi_{0 k_2 k_3}(x, y, z) &= (a + bx)e^{i(k_2 y + k_3 z)} & (k_2^2 + k_3^2 = k^2), \\ \Phi_{00 k}(x, y, z) &= (a + bx)(\alpha + \beta y)e^{ikz}, \end{aligned} \right\} \quad (10.4-23)$$

которые можно представить в виде различных произведений действительных линейных, показательных, тригонометрических и гиперболических функций.

(б) Цилиндрические координаты ρ, φ, z (см. также п.10.4-3, б). Пусть $\Phi = u(\varphi)v(z)w(\rho)$; тогда уравнение (22) разделяется на уравнения (11), (12) и

$$\frac{d^2}{d\rho^2} w(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} w(\rho) + \left[(K^2 + k^2) - \frac{m^2}{\rho^2} \right] w(\rho) = 0, \quad (10.4-24)$$

где единственные требования $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и K — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями. Уравнение (22) допускает решения вида

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\pm K m}(\rho, \varphi, z) &= e^{\pm i K z} Z_m(\rho \sqrt{k^2 + K^2}) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi) \\ & \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \\ \text{Если } K = i\lambda, \text{ то} \\ \Phi_{\pm i\lambda m}(\rho, \varphi, z) &= e^{\pm i\lambda z} Z_m(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi), \\ \Phi_{00}(\rho, \varphi, z) &= (a + bz) Z_0(k\rho) (\alpha + \beta\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (10.4-25)$$

Заметим, что для осевой симметрии $m = 0$.

(в) Сферические координаты r, θ, φ (см. также п.10.4-3). Пусть $\Phi = u(\varphi)v(\cos \theta)w(r)$. Тогда уравнение (22) разделяется на уравнения (16), (17) и

$$\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} w(r) + \left[k^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] w(r) = 0. \quad (10.4-26)$$

Уравнение (22) допускает частные решения вида

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{kj}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{j+1/2}(kr) Y_j(\theta, \varphi) & (j = 1, 2, \dots), \\ \Phi_{k0}(r, \theta, \varphi) &= \frac{e^{\pm i k r}}{r} & (\text{центральная симметрия}), \end{aligned} \right\} \quad (10.4-27)$$

где $Y_j(\theta, \varphi)$ — сферическая поверхностная гармоника (21). В частности, если данная проблема требует аналитичности для $r = 0$, то $Z_{j+1/2}(kr)/\sqrt{r}$ есть сферическая функция Бесселя первого рода (п.21.8-8).

10.4-5. Частные решения двумерных проблем (см. также пп. 15.6-7 и 15.6-10, б).

(а) Уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (10.4-28)$$

допускает частные решения

$$\Phi_k(x, y) = e^{\pm k(x+iy)}, \quad \Phi_0(x, y) = (a+bx)(\alpha+\beta y), \quad (10.4-29)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m(r, \varphi) &= \left(Ar^m + \frac{B}{r^m} \right) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ \Phi_0(r, \varphi) &= A + B \ln r, \end{aligned} \right\} (10.4-30)$$

где K , а также $a, b, \alpha, \beta, A, B$ — произвольные параметры, определяемые краевыми условиями.

(b) Двумерное уравнение Гельмгольца. Двумерное уравнение вида (22) допускает частные решения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k_1 k_2}(x, y) &= e^{i(k_1 x + k_2 y)} \quad (k_1^2 + k_2^2 = k^2), \\ \Phi_{0k}(x, y) &= (a+bx)e^{iky}, \end{aligned} \right\} (10.4-31)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{km}(r, \varphi) &= Z_m(kr) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ \Phi_0(r, \varphi) &= Z_0(kr) (a+b\varphi). \end{aligned} \right\} (10.4-32)$$

(c) Комплексно сопряженные решения (29) и (31) образуют различные произведения действительных линейных, показательных, тригонометрических и/или гиперболических функций.

10.4-6. Уравнение Шредингера. Трехмерное дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \Phi + \left(\frac{2c}{r} - \lambda^2 \right) \Phi = 0 \quad (10.4-33)$$

допускает частные решения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\lambda j}(r, \theta, \varphi) &= r^j e^{-\lambda r} L_{\frac{c}{\lambda} + j}^{2j+1}(2\lambda r) Y_j(\theta, \varphi), \\ \Phi_{\lambda, -j}(r, \theta, \varphi) &= \frac{e^{-\lambda r}}{r^{j+1}} L_{\frac{c}{\lambda} - j - 1}^{-2j-1}(2\lambda r) Y_j(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (10.4-34)$$

где $L_n^k(x)$ — функция Лагерра (п.21.7-5). Если Φ нормировано (п.15.2-16), то оно образуется решениями первого типа (34). Нормированные решения существуют только для собственных значений (п.15.4-5) λ^2 таких, что $c/\lambda = n = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае функции Лагерра сводятся к присоединенным полиномам Лагерра и решения (34) образуют ортогональную систему в смысле пп.21.7-5 и 21.8-12.

10.4-7. Частные решения для уравнения диффузии (см. также пп.10.3-4, б, 10.4-9, 10.5-3, 10.5-4 и 15.5-3).

(а) Одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (10.4-35)$$

допускает частные решения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k(x, t) &= e^{\pm ikx - k^2 \nu^2 t}, \quad \Phi_0(x, t) = a + bx, \\ \Phi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu^2 t}} \quad (t > 0), \end{aligned} \right\} (10.4-36)$$

где k — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями.

(б) Двух- или трехмерное уравнение диффузии

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (10.4-37)$$

допускает частные решения

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_k(\mathbf{r}) e^{-k^2 \gamma^2 t}, \quad (10.4-38)$$

где $\Phi_k(\mathbf{r})$ — частное решение соответствующего уравнения Гельмгольца (22) (пп.10.4-2 и 10.4-5,b); k — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями. Уравнение (37) также допускает частное решение

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\gamma^2 t}} & (\text{двумерный случай}), \\ \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{r^2}{4\gamma^2 t}} & (\text{трехмерный случай}). \end{cases} \quad (10.4-39)$$

10.4-8. Частные решения для волнового уравнения. Синусоидальные волны (см. также пп.4.11-4,b, 10.3-5, 10.4-9, 10.5-2 и 15.6-10).

(а) Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.4-40)$$

допускает частные решения вида

$$\Phi(x, t) = e^{\pm ikx} e^{\pm i\omega t} = e^{\pm ik(x \pm ct)} \quad (\omega = kc), \quad (10.4-41)$$

где k — произвольная константа, определяемая краевыми условиями. Функция (41) и соответствующие значения k^2 образуют собственные функции и собственные значения для проблемы собственных значений, пп.10.4-2 и 15.4-5.

Решения вида (41) образуют следующие действительные решения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, t) &= C \cos(\omega t + \gamma_1) \cos(kx + \gamma_2) \\ &\quad (\text{синусоидальные стоячие волны}), \\ \Phi(x, t) &= a \cos(\omega t \mp kx) + b \sin(\omega t \mp kx) = \\ &= A \cos(\omega t \mp kx + \gamma) \end{aligned} \right\} (\omega = kc). \quad (10.4-42)$$

(синусоидальные волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x).

Круговая частота ω , частота $\nu = \omega/2\pi$, волновое число k , длина волны $\lambda = 2\pi/k$ и фазовая скорость c синусоидальной волны связаны соотношениями

$$\lambda \nu = \frac{\omega}{k} = c. \quad (10.4-43)$$

Синусоидальные волны (42), налагаясь в виде рядов Фурье или интегралов Фурье, образуют более общие волны.

(b) Двух- или трехмерное волновое уравнение

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.4-44)$$

допускает частные решения вида

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_k(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t} \quad (\omega = kc), \quad (10.4-45)$$

где $\Phi_k(\mathbf{r})$ — частное решение соответствующего уравнения Гельмгольца (22) (пп.10.4-4 и 10.4-5,b); k — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями. Решения вида (45) образуют решения, содержащие

действительные тригонометрические функции; в частности, отметим следующие решения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z; t) &= A \cos [\omega t \mp (k_1 x + k_2 y + k_3 z) + \gamma] \\ (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 &= k^2; \quad \omega = kc) \end{aligned} \right\} (10.4-46)$$

(синусоидальные плоские волны, нормаль к фронту которых имеет направление $\{k_1, k_2, k_3\}$),

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\rho, \varphi, z; t) &= Z_m(\rho \sqrt{k^2 - K^2}) \cos (\omega t \mp Kz \mp m\varphi + \gamma) \\ (m = 0, 1, 2, \dots; \quad \omega &= kc) \end{aligned} \right\} (10.4-47)$$

(синусоидальные цилиндрические волны),

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi; t) &= \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{j+1/2}(kr) Y(\theta, \varphi) \cos (\omega t + \gamma) \\ (j = 0, 1, 2, \dots; \quad \omega &= kc) \end{aligned} \right\} (10.4-48)$$

(синусоидальные сферические стоячие волны),

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi, t) &= \frac{A}{r} \cos (\omega t \mp kr + \gamma) \end{aligned} \right\} (10.4-49)$$

(излучение точечного источника),

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi, t) &= A \left[\frac{1}{kr^2} \cos (\omega t \mp kr) \mp \frac{1}{r} \sin (\omega t \mp kr) \right] \cos \theta \end{aligned} \right\} (10.4-50)$$

(излучение диполя),

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \varphi; t) &= Z_m(kr) (\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi) (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \\ (m = 0, 1, 2, \dots; \quad \omega &= kc) \end{aligned} \right\} (10.4-51)$$

(двумерные синусоидальные круговые стоячие волны).

Цилиндрические волны (47) распространяются в положительном и отрицательном направлении оси Oz с фазовой скоростью $c' = \omega/K = kc/K$, которая, как видно, зависит от ω и K (дисперсия). Групповая скорость в направлении оси Oz равна

$$d\omega/dK = Kc/k.$$

(с) Общее одномерное затухающее волновое уравнение (телеграфное уравнение).
Уравнение передачи по линии

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - a_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - a_2 \Phi = 0 \quad (10.4-52)$$

допускает частные решения вида

$$\Phi(x, t) = e^{\pm ikx} e^{st}, \quad (10.4-53)$$

где $s = \sigma + i\omega$ есть корень квадратного уравнения

$$a_0 s^2 + a_1 s + (a_2 + k^2) = 0. \quad (10.4-54)$$

Комплексно сопряженные решения (53) образуют затухающие синусоидальные волны в смысле п.9.4-16; в случае кратных корней уравнения (54) следует поступать так, как в п.9.4-1, в. Уравнение (52) включает уравнения (35) и (40) как частные случаи. Аналогичные обобщения имеют место в многомерном случае.

10.4-9. Решение краевой задачи разложением в ортогональные ряды. Примеры (см. также п.10.5-3). Следующие примеры иллюстрируют применение частных решений, приведенных в пп.10.4-3—10.4-8.

(а) Задача Дирихле для сферы (см. также пп.10.4-3, с, 15.6-2, а и 15.6-6, с). Требуется найти функцию $\Phi(r, \theta, \varphi)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$ внутри данной сферы $r < R$ и принимает заданные краевые значения $\Phi(R, \theta, \varphi) = b(\theta, \varphi)$ на сфере. Ясно, что следует применять сферические координаты r, θ, φ (п.10.4-1, с).

Записываем неизвестную функцию в виде суммы решений (19), которые необходимо конечно при $r = 0$ ($B = 0$):

$$\Phi = \Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j r^j P_j^m(\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\varphi + \beta_{jm} \sin m\varphi).$$

Неизвестные коэффициенты α_{jm}, β_m вычисляются по заданным крайним условиям

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j R^j P_j^m(\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\varphi + \beta_{jm} \sin m\varphi) = b(\theta, \varphi),$$

где, согласно условиям ортогональности п.21.8-12,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{j0} &= \frac{2j+1}{4\pi} \frac{1}{R^j} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} b(\theta, \varphi) P_j(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\ \alpha_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \frac{1}{R^j} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} b(\theta, \varphi) P_j^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta, \\ \beta_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \frac{1}{R^j} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} b(\theta, \varphi) P_j^m(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (10.4-55)$$

$(j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, j).$

(б) Свободные колебания упругой струны (см. также п.10.3-5). Поперечные смещения $\Phi(x, t)$ упругой струны удовлетворяют одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

В дополнение пусть

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) \quad (0 < x < L) \quad (\text{начальные условия}),$$

$$\Phi(0, t) = \Phi_a(t), \quad \Phi(L, t) = \Phi_b(t) \quad (\text{краевые условия}).$$

Рассмотрим частный случай $\Phi_a(t) = \Phi_b(t) = 0$. Стоячие волны (42) одномерного волнового уравнения согласуются с заданными крайними условиями тогда, когда $\gamma_2 = -\pi/2$ и половина длины волны $\lambda/2 = \pi/k$ целое число раз укладывается в длине струны L , или

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega = kc = \frac{n\pi c}{L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Записываем решение в виде ряда из частных решений

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

и определяем коэффициенты a_n и b_n из начальных условий, пользуясь формулами для коэффициентов Фурье (п.4.11-4, б):

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi_0(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Решение представляет сумму гармонических стоячих волн, возбужденных заданными начальными условиями.

(в) Свободные колебания круглой мембраны. Поперечные смещения $\Phi(r)$ мембраны, закрепленной по окружности $r = 1$, удовлетворяют волновому уравнению $\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ ($r < 1$), крайнему условию $\Phi = 0$ ($r = 1$) и начальным условиям

$$\Phi = \Phi_0(r), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (r < 1).$$

Применим полярные координаты r, φ . Так как Φ регулярно при $r = 0$, то образуем суперпозицию решений (51), содержащих только функции Бесселя первого рода, т.е. $Z_n(kr) = J_n(kr)$ (п.21.8-1). Такие решения образуют характеристические колебания, удовлетворяющие заданным крайним условиям $\Phi = 0$ ($r = 1$), если

$$k = \frac{\omega}{c} = k_{mn} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

где h_{mn} есть n -й действительный положительный корень $J_m(t)$; эта задача есть задача о собственных значениях.

Решение представляется в виде суммы характеристических колебаний

$$\Phi(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m(h_{mn}r) (a_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi) (a_{mn} \cos ck_{mn}t + b_{mn} \sin ck_{mn}t),$$

где неизвестные коэффициенты определяются как обыкновенные коэффициенты Фурье при подстановке заданных начальных условий при $t = 0$.

10.5. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

10.5-1. Общая теория (см. также пп. 8.2-1, 8.6-1, 9.3-7, 9.4-5, 10.4-2, с и 15.4-12). Требуется найти решение $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее заданным краевым условиям, действительного линейного дифференциального уравнения с частными производными

$$(L_1 + L_2)\Phi = a_0(x_n) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} + a_1(x_n) \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + a_2(x_n) \Phi + L_2\Phi = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10.5-1)$$

где L_2 — линейный однородный дифференциальный оператор с производными и коэффициентами, содержащими x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , но не x_n .

Для простоты примем x_n изменяющимся в некотором ограниченном или неограниченном интервале (a, b) для всех x_1, x_2, \dots, x_{n-1} так, что граница S области решения состоит из двух координатных поверхностей (см. также п. 10.4-1, с). Уравнение (1) можно часто упростить, применяя линейное интегральное преобразование

$$\bar{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; s) = \int_a^b K(x_n, s) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n. \quad (10.5-2)$$

Если ядро преобразования $K(x_n, s)$ выбрано так, что

$$L_1^* K(x_n, s) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} (a_0 K) - \frac{\partial}{\partial x_n} (a_1 K) + a_2 K = \lambda(s) K, \quad (10.5-3)$$

(L_1^* — оператор, сопряженный с L_1 (п. 14.4-3), то интегрирование по частям (обобщенная формула Грина, п. 15.4-3) приводит к возможно более простому дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} [L_2^* + \lambda(s)] \bar{\Phi} &= \bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; s) - P(x_1, x_2, \dots, x_n; s) \Big|_{x_n=a}^{x_n=b} \\ P(x_1, x_2, \dots, x_n; s) &\equiv a_0 \left(K \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \Phi \frac{\partial K}{\partial x_n} \right) + (a_1 - a_0') \Phi K \end{aligned} \right\} \quad (10.5-4)$$

относительно неизвестной функции $\bar{\Phi}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; s)$, являющейся интегральным преобразованием искомого решения. Заметим, что новое дифференциальное уравнение включает в себя краевые значения Φ и $\partial \Phi / \partial x_n$, заданные для $x_n = a$, $x_n = b$, и переменных x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Метод интегрального преобразования предполагает существование интегралов (2) и сходимость формулы обращения

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b H(x_n, s) \bar{\Phi}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; s) ds, \quad (10.5-5)$$

(см. также п. 15.3-7). Табл. 8.6-1 на стр. 248 содержит некоторое число употребительных интегральных преобразований и формул обращения.

Заметим, что в решениях преобразованного дифференциального уравнения (4) константы интегрирования следует рассматривать как произвольные функции от s .

Метод интегральных преобразований можно обобщить на дифференциальные уравнения, содержащие производные высших порядков от x_n ; кроме того, интегральное преобразование можно применять по двум переменным x_n, x_{n-1} одновременно. Если в выражении $N(x_n, s)$ допускается δ -функция, то формула (5) может приводить к разложению δ -ряды для Φ в конечном интервале (a, b) (конечные интегральные преобразования [8.5]).

10.5-2. Преобразование Лапласа по временной переменной (см. также пп. 8.2-1, 8.3-1, 9.3-7 и 9.4-5). Проблема начальных значений для гиперболических и параболических дифференциальных уравнений часто упрощается введением одностороннего преобразования Лапласа

$$\bar{\Phi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt,$$

которое преобразует каждое линейное дифференциальное уравнение с частными производными с постоянными коэффициентами

$$\nabla^2 \Phi - a_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - a_2 \Phi = f(r, t) \quad (10.5-6)$$

в новое и возможно более простое дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \bar{\Phi} - (a_0 s^2 + a_1 s + a_2) \bar{\Phi} = f(r, s) - \left[(a_0 s + a_1) \bar{\Phi} + a_0 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right]_{t=0+} \quad (10.5-7)$$

для неизвестного интегрального преобразования $\bar{\Phi}(r, s)$ решения $\Phi(r, t)$. Краевые условия преобразуются подобным же образом; заметим, что уравнение (7) включает в себя заданные начальные условия.

10.5-3. Решение краевых задач методом интегральных преобразований. Примеры (см. также п.10.4-9). Следующие примеры иллюстрируют простейшие применения интегральных преобразований к решению краевых задач (см. также [8.5]).

(а) Одномерное уравнение теплопроводности в случае фиксированной температуры на концах; применение преобразования Лапласа. Теорема Дюамеля (п.10.5-4) сводит важный класс одномерных задач теплопроводности к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (a < x < b, t > 0),$$

$$\Phi(x, 0+0) = \Phi_0(x). \quad (\text{начальное условие}),$$

$$\Phi(a, t) = \Phi_a = \text{const}, \quad \Phi(b, t) = \Phi_b = \text{const} \quad (t > 0) \quad (\text{краевые условия}).$$

Дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\gamma^2} \bar{\Phi}(x, s) = -\frac{1}{\gamma^2} \Phi_0(x) \quad (a < x < b).$$

Если, в частности, $\Phi_0(x) = \Phi_0 = \text{const}$, то

$$\bar{\Phi}(x, s) = C_1(s) e^{\frac{x\sqrt{s}}{\gamma}} + C_2(s) e^{-\frac{x\sqrt{s}}{\gamma}} + \frac{\Phi_0}{s},$$

где функции $C_1(s)$ и $C_2(s)$ должны быть выбраны так, чтобы выполнялись преобразованные краевые условия

$$\bar{\Phi}(a, s) = \frac{\Phi_a}{s}, \quad \bar{\Phi}(b, s) = \frac{\Phi_b}{s};$$

$\Phi(x, t)$ получается как обратное преобразование Лапласа методами пп. 8.4-2—8.4-9. В частности, для $a = 0, \Phi_a = 0, \Phi_b = 0$ имеем

$$\bar{\Phi}(x, s) = \Phi_b \frac{\text{sh} \frac{x\sqrt{s}}{\gamma}}{s \text{sh} \frac{b\sqrt{s}}{\gamma}}, \quad \Phi(x, t) = \Phi_b \left[\frac{x}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} e^{-\left(\frac{j\pi\gamma}{b}\right)^2 t} \sin \frac{j\pi x}{b} \right].$$

Заметим, что эта задача может быть решена методом п.10.4-9.

(b) Задача теплопроводности в случае бесконечного интервала. Применение синус- и косинус-преобразований Фурье. Методы п.10.5-3, а также применимы, если $a = 0$, $b = \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} &= 0 & (x > 0; t > 0), \\ \Phi(x, 0+0) &= \Phi_0(x) & (x > 0) & \text{(начальное условие),} \\ \Phi(0, t) &= \Phi_a(t), \\ \int_0^\infty |\Phi(x, t)|^2 dx & \text{ существует} & \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\} & (t > 0) & \text{(краевые условия).} \end{aligned}$$

Применяя синус-преобразование Фурье

$$\bar{\varphi}(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(x, t) \sin sx \, dx$$

(п.4.11-3), можно, как в п.4.11-5, получить преобразованное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \bar{\Phi}(s, t)}{\partial t} + s^2 \bar{\Phi}_0(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} s \Phi_a(t)$$

и преобразованное начальное условие $\bar{\Phi}(s, 0+0) = \bar{\Phi}_0(s)$. Преобразованная задача имеет решение

$$\bar{\Phi}(s, t) = \bar{\Phi}_0(s) e^{-\gamma^2 s^2 t} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma^2 s \int_0^t \Phi_a(\tau) e^{-\gamma^2 s^2 (t-\tau)} d\tau,$$

откуда

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{\Phi}(s, t) \sin sx \, ds.$$

Если, в частности, задано $\Phi_a(t) = \text{const} = \Phi_a$ и $\Phi_0(x) \equiv 0$, то $\bar{\Phi}_0(s) \equiv 0$ и

$$\bar{\Phi}(s, t) = \Phi_a \frac{1 - e^{-\gamma^2 s^2 t}}{s} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \Phi(x, t) = \Phi_a \left(1 - \text{erf} \frac{x}{2\gamma\sqrt{t}} \right).$$

Если задано краевое условие

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0+0} = 0 \quad (t > 0)$$

(теплоизолированный конец), то применяется косинус-преобразование Фурье

$$\bar{\varphi}(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(x, t) \cos sx \, dx.$$

10.5-4. Формулы Дюамеля (см. также п.9.4-3).

(a) Пусть L — однородный линейный оператор с производными и коэффициентами, не содержащими переменную t . Пусть $\Phi(x, t)$ есть решение задачи с начальными и краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} L\Phi + A_0(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + A_1(x) \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 & (0 < x < L; t > 0), \\ \Phi(x, 0+0) &= 0, & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{0+0} &= 0 & (0 < x < L), \\ \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \Phi &= b(t) & (x=0, t > 0), \end{aligned} \right\} \quad (10.5-8)$$

и пусть $\Psi(x, t)$ — решение этой задачи для $b(t) = 1$ ($t > 0$). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \Psi(x, t)b(0+0) + \int_0^t \Psi(x, t-\tau) b'(\tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Psi(x, t-\tau) b(\tau) d\tau \quad (0 < x < L; t > 0). \end{aligned} \quad (10.5-9)$$

(b) Решение $\Phi(\mathbf{r}, t)$ общей проблемы диффузии

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [k(\mathbf{r}) \nabla] \Phi + a(\mathbf{r}) \Phi - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= f(\mathbf{r}, t) & (\mathbf{r} \in V, t > 0), \\ \Phi(\mathbf{r}, 0) &= \Phi_0(\mathbf{r}) & (\mathbf{r} \in V), \\ \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta \Phi &= b(\mathbf{r}, t) & (\mathbf{r} \in S, t > 0) \end{aligned} \right\} \quad (10.5-10)$$

с зависящими от времени возмущающей функцией $f(\mathbf{r}, t)$ и краевым условием $b(\mathbf{r}, t)$ связано с решением $\Psi(\mathbf{r}, t; \lambda)$ более простой задачи

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [k(\mathbf{r}) \nabla] \Psi + a(\mathbf{r}) \Psi - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= f(\mathbf{r}, \lambda) & (\mathbf{r} \in V, t > 0), \\ \Psi(\mathbf{r}, 0; \lambda) &= \Phi_0(\mathbf{r}) & (\mathbf{r} \in V), \\ \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial n} + \beta \Psi &= b(\mathbf{r}, \lambda) & (\mathbf{r} \in S, t > 0), \end{aligned} \right\} \quad (10.5-11)$$

где $f(\mathbf{r}, \lambda)$ и $b(\mathbf{r}, \lambda)$ зависят от параметра λ и не зависят от времени t . Решение $\Phi(\mathbf{r}, t)$ получаем из формулы

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Psi(\mathbf{r}, t-\lambda; \lambda) d\lambda. \quad (10.5-12)$$

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

11.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Очень широкий класс задач составляют *экстремальные задачи*, в которых требуется найти значения параметров или функций, *реализующих максимум или минимум* некоторой зависящей от них величины. Во многих инженерных задачах, например, желательно найти максимум меры выполнения или минимум стоимости. Кроме того, можно по крайней мере приблизить решения многих задач, выбрав неизвестные значения параметров или функций так, чтобы они давали минимум ошибки в пробных решениях; иногда такой прием позволяет применить для решения данной задачи мощные методы числовых приближений.

Примеры: решение задач о собственных значениях в теории колебаний и квантовой механике (шп. 15.4-7 и 15.4-8, b); принципы Гамильтона и Якоби в динамике.

11.2. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ (ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ) ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

11.2-1. Локальные максимумы и минимумы (см. также п. 4.3-3). Действительная функция $f(x)$, определенная при $x=a$, имеет в точке a (**локальный максимум** или (**локальный минимум** $f(a)$), если существует такое положительное число δ , что при всех $\Delta x = x - a$, для которых выполняются неравенства $0 < |\Delta x| < \delta$ и существует значение $f(a + \Delta x)$, соответственно ¹⁾

$$\Delta f \equiv f(a + \Delta x) - f(a) < 0$$

или

$$\Delta f \equiv f(a + \Delta x) - f(a) > 0^*).$$

Локальный максимум (минимум) называется **внутренним максимумом (внутренним минимумом)** или **граничным максимумом (граничным минимумом)**, если соответственно точка a является внутренней точкой, или граничной точкой области определения функции $f(x)$ (п. 4.3-6, а) ²⁾.

¹⁾ Δf есть приращение данной функции $f(x)$, соответствующее приращению Δx независимого переменного x . Приращение Δf есть функция от a и от Δx ; его не следует смешивать с *вариацией* δf , вводимой в п. 11.4-1.

* Если в каждом из этих случаев выполняются нестрогие неравенства, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a *нестрогий максимум (минимум)*. Условие (а) в п. 11.2-2 является необходимым условием нестрогого экстремума.

²⁾ В формулировке задачи должна быть точно указана область определения функции $f(x)$. Например, функция $f_1(x) = x (-\infty < x < +\infty)$ не имеет максимума, а функция $f_2(x) = x (x < 1)$ имеет при $x = 1$ граничный максимум.

11.2-2. Условия существования внутренних максимумов и минимумов.

(а) Если существует производная $f'(a)$, то функция $f(x)$ может иметь в точке a внутренний максимум или минимум лишь в том случае, когда при $x=a$

$$f'(a) = 0 \quad (11.2-1)$$

(необходимое условие экстремума).

(б) Если существует вторая производная $f''(a)$, то функция $f(x)$ имеет в точке a

максимум при $f'(a) = 0$ и $f''(a) < 0$,

минимум при $f'(a) = 0$ и $f''(a) > 0$.

(с) Более общее утверждение: если существует производная $f^{(n)}(a)$ и если $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке a

максимум при n четном и $f^{(n)}(a) < 0$,

минимум при n нечетном и $f^{(n)}(a) > 0$.

Если n нечетно, то функция $f(x)$ в точке a не имеет ни минимума, ни максимума, а имеет точку перегиба (п.17.1-5).

(Условия, сформулированные в б и с, являются достаточными условиями экстремума.) Если $f'(a) = 0$, то во всех случаях говорят, что функция $f(x)$ при $x=a$ имеет стационарное значение.

Примеры. Каждая из функций x^2, x^4, x^6, \dots имеет при $x=0$ минимум, а каждая из функций x^3, x^5, x^7, \dots имеет $x=0$ точкой перегиба.

11.3. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ (ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ) ФУНКЦИЙ ДВУХ И БОЛЬШЕГО ЧИСЛА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

11.3-1. Локальные максимумы и минимумы¹⁾. Действительная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$, имеет в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) (локальный) максимум или (локальный) минимум $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, если существует такое положительное число δ , что при всех $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, для которых выполняются неравенства $0 < \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2} < \delta$ и существует значение $f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_n + \Delta x_n)$, приращение функции

$$\Delta f \equiv f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (11.3-1)$$

соответственно больше нуля или меньше нуля. Локальный максимум (минимум) называется внутренним максимумом (внутренним минимумом) или граничным максимумом (граничным минимумом), если точка (a_1, a_2, \dots, a_n) является соответственно внутренней точкой, или граничной точкой области определения функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (п.4.3-6,а).

11.3-2. Формула для приращения функции. Приращение функции Δf , определяемое соотношением (1), является функцией от a_1, a_2, \dots, a_n и от $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки (a_1, a_2, \dots, a_n) непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \bigg|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \Delta x_i \Delta x_k + o(\rho^2), \quad (11.3-2)$$

¹⁾ См. сноски к п.11.2-1.

где $\varrho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ (локальная формула Тейлора, см. п.4.10-5). Члены порядка 1 и 2 относительно Δx_i в этой формуле соответственно составляют **первый дифференциал** df и половину **второго дифференциала** d^2f функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) (см. также п.4.5-3, б).

11.3-3. Условия существования внутренних максимумов и минимумов.

(а) Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) , то она может иметь в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) **внутренний максимум или минимум** лишь в том случае, когда ее **первый дифференциал** df обращается в этой точке в нуль, т. е. когда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (11.3-3)$$

при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ (необходимые условия экстремума).

(б) Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки (a_1, a_2, \dots, a_n) непрерывные вторые частные производные и если в этой точке выполняются необходимые условия (3), то в случае, когда второй дифференциал

$$d^2f = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \Delta x_i \Delta x_k \quad (11.3-4)$$

есть отрицательно определенная квадратичная форма (п.13.5-2), функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) **максимум**, а в случае, когда этот дифференциал есть положительно определенная квадратичная форма, функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в этой точке **минимум** (достаточные условия экстремума).

Если условия (3) выполняются в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) , то во всех случаях говорят, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в этой точке **стационарное значение**; сама точка называется **стационарной**.

П р и м е р. Найти максимумы и минимумы функции

$$z = 3x^2 - x + y^3 - 3y^2 - 1.$$

Необходимые условия

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6y = 0$$

удовлетворяются здесь при

$$x = 1/3, \quad y = 0; \quad x = -1/3, \quad y = 0; \quad x = 1/3, \quad y = 2; \quad x = -1/3, \quad y = 2.$$

Но, рассматривая характеристическое уравнение квадратичной формы (4) (см. пп.13.4-5 и 13.5-6)

$$(18x - \mu)(6y - 6 - \mu) = 0,$$

видим, что единственными экстремальными значениями являются **максимум** ($\mu_1 = -6, \mu_2 = -6$) $z = -7/9$ при $x = -1/3$ и $y = 0$ и **минимум** ($\mu_1 = 6, \mu_2 = 6$) $z = -47/9$ при $x = 1/3$ и $y = 2$.

(с) Если первый дифференциал df достаточное число раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обращается в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) в нуль, а второй дифференциал d^2f есть **полуопределенная квадратичная форма** (п.13.5-2), то характер стационарного значения зависит от дифференциалов более высокого порядка. Если же d^2f есть **неопределенная форма**, то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не имеет в точке (a_1, a_2, \dots, a_n) ни максимума, ни минимума.

Если из уравнений (3) получена система значений $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$, то характер квадратичной формы (4) можно определить любым из методов, перечисленных в п.13.5-6. Можно также исследовать функцию на максимум и минимум, фактически вычислив значения $f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_n + \Delta x_n)$ для разумным образом выбранных комбинаций приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

11.3-4. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Максимумы и минимумы действительной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переменных x_1, x_2, \dots, x_n , подчиненных достаточно гладким **дополнительным условиям** в виде $m < n$ уравнений связи

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (11.3-5)$$

в принципе можно найти по способу п.11.3-3, исключив m из n переменных x_1, x_2, \dots, x_n с помощью уравнений (5). Если непосредственное исключение m переменных невозможно или нецелесообразно, то применяют следующее *необходимое условие максимума или минимума функции при ограничениях* (5):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0, \quad (11.3-6)$$

где

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

m параметров λ_j называются **множителями Лагранжа**. $n+m$ неизвестных $x_i = a_i$ и λ_j находят из $n+m$ уравнений (5) и (6).

Заметим, что уравнения (6) представляют собой необходимые условия экстремума функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если x_1, x_2, \dots, x_n считать *независимыми* переменными.

Пример. Найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в круг:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Площадь A прямоугольника можно записать в виде

$$A = 4xy.$$

Тогда

$$\Phi(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Необходимые условия экстремума дают

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4y + 2\lambda x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x + 2\lambda y = 0,$$

так что искомым минимумом дают значения $\lambda = -2$ и $x = y = r/\sqrt{2}$.

11.3-5. Граничные максимумы и минимумы. Задачи линейного программирования. Интересный класс задач имеет дело с максимумами и минимумами, расположенными на границе рассматриваемого промежутка или области. В частности, иногда требуется найти максимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, подчиненной системе неравенств

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (11.3-7)$$

Эта задача детально рассматривается для практически важного частного случая, когда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются линейными функциями переменных x_1, x_2, \dots, x_n и $m > n$ (*задачи линейного программирования в исследовании операций, математической экономики и теории игр*). Решения обычно получают численными методами.

11.4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

11.4-1. Вариации.

(а) **Вариация** δy функции $y(x)$ переменного x есть функция от x , определяемая при каждом значении x как разность $\delta y \equiv Y(x) - y(x)$ новой функции $Y(x)$ и функции $y(x)$.

Вариацию δy , вызывающую изменение функционального отношения между y и x , не следует смешивать с приращением Δy значения данной функции $y(x)$, вызываемым приращением Δx независимого переменного (п.11.2-1).

(б) Если дана функция $F[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x); x]$, то ее приращение, соответствующее вариациям $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$ функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, есть

$$\Delta F \equiv F(y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n; x) - F(y_1, y_2, \dots, y_n; x). \quad (11.4-1)$$

Если функции $y(x)$ и δy дифференцируемы, то вариация $\delta y'$ производной $y'(x)$, вызываемая вариацией δy , есть

$$\delta y' \equiv \delta \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} (\delta y) \equiv Y'(x) - y'(x). \quad (11.4-2)$$

Если дана функция $F[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x); y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x); x]$, то ее приращение, соответствующее вариациям $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$, есть

$$\Delta F \equiv F(y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n; y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2, \dots, y'_n + \delta y'_n; x) - F(y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n; x). \quad (11.4-3)$$

(с) Если функция F имеет в некоторой области непрерывные частные производные второго порядка, то ее приращение, определяемое равенством (3), можно представить в виде

$$\Delta F = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} \delta y_i \delta y_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \delta y_i \delta y'_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \delta y'_i \delta y'_k \right\} + o(\rho^2) \quad (11.4-4)$$

для каждого рассматриваемого значения x , где

$$\rho = \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y_2^2 + \delta y_n^2 + \delta y'_1{}^2 + \delta y'_2{}^2 + \dots + \delta y'_n{}^2} \quad (\text{п.4.10-5}).$$

Члены степени 1 и 2 относительно δy и $\delta y'$ в формуле Тейлора (4) соответственно составляют **первую вариацию** δF функции F и половину **второй ее вариации** $\delta^2 F$.

(d) Определения и формулы пп.11.4-1, а, б и с без изменений переносятся на функции y, y_i и F двух и большего числа независимых переменных x_1, x_2, \dots

11.4-2. Максимумы и минимумы определенных интегралов. В то время как теория обыкновенных максимумов и минимумов (пп.11.2-1–11.3-5) имеет дело с *неизвестными значениями независимых переменных x или x_i , соответствующими максимумам и минимумам заданных функций*, предметом **вариационного исчисления** является отыскание *неизвестных функций $y(x)$ или $y_i(x)$, реализующих максимум или минимум определенных интегралов* вида

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx \quad (11.4-5a)$$

или

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x); y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x); x] dx, \quad (11.4-5b)$$

где F — данная функция, причем заданы конечные пределы интегрирования x_1, x_2 и граничные значения $y(x_1), y(x_2)$ или $y_i(x_1), y_i(x_2)$. В других задачах пределы интегрирования и/или граничные значения также неизвестны и нуждаются в определении.

Определенный интеграл (5) имеет (**локальный**) максимум для данной функции $y(x)$ или данной системы функций $y_i(x)$, если существует такое положительное число ε , что

$$\Delta I \equiv \Delta \int_{x_1}^{x_2} F dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} \Delta F dx < 0 \quad (11.4-6)$$

для всех вариаций δy или всех систем вариаций $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$, для которых соответственно $0 < \sqrt{\delta y^2 + \delta y'^2} < \varepsilon$ или $0 < \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y_2'^2 + \dots + \delta y_n^2 + \delta y_n'^2} < \varepsilon$ при $x_1 \leq x \leq x_2$. (**Локальный**) минимум интеграла (5) определяется аналогично неравенством $\Delta I > 0$ *).

*) См. сноску *) к п.11.2-1.

В большинстве приложений функции $y(x)$ или $y_i(x)$, дающие максимум или минимум интегралу (5), должны выбираться не среди множества *всех* возможных функций от x , а лишь среди множества функций определенного класса. В дальнейшем всюду, где это необходимо, предполагается, что рассматриваемые интегралы существуют и что 1) функции, дающие максимум или минимум интегралу, выбираются среди множества всех функций, имеющих на рассматриваемом промежутке или области непрерывные вторые производные, и 2) каждая подынтегральная функция F имеет непрерывные вторые производные.

Условие 1) менее обременительно, чем это кажется. Функции $y(x)$, реализующие максимум или минимум определенного интеграла (5а), удовлетворяющего условию 2), необходимо имеют при $x_1 < x < x_2$ непрерывные вторые производные, если только предположить, что они кусочно-непрерывно дифференцируемы при $x_1 < x < x_2$ и что $y(x_1) = y(x_2) = 0$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \neq 0$ (теорема Дюбуа—Реймона).

11.4-3. Решение вариационных задач. Функции $y(x)$ или $y_i(x)$, реализующие максимум или минимум данного определенного интеграла, могут быть найдены 1) как решения дифференциальных уравнений, получающихся из условия $\delta F = 0$ (пп. 11.5-1—11.5-7), или же 2) *прямыми методами*, описанными в пп. 11.6-1—11.6-3.

Негравитально замечание, что задача рассматриваемого здесь типа может не иметь решения. Для каждого решения, полученного с помощью необходимых (но не достаточных) условий пп. 11.5-1—11.5-7, должно быть проверено, действительно ли оно обладает свойствами максимума или минимума. Установление широко применимых достаточных условий существования максимумов или минимумов определенных интегралов затруднительно [11.1], [11.2].

11.5. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.5-1. Необходимые условия максимумов и минимумов.

(а) *Необходимым условием существования максимума или минимума определенного интеграла*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx \quad (11.5-1)$$

при фиксированных x_1 и x_2 является равенство

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] \delta y dx = 0$$

для произвольно малой вариации δy . Поэтому каждая функция $y(x)$, реализующая максимум или минимум этого интеграла, должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (\text{уравнение Эйлера}). \quad (11.5-2)$$

При этом функция $y(x)$ либо должна принимать заданные граничные значения $y(x_1)$ и/или $y(x_2)$, либо же должна удовлетворять каким-либо другим условиям, определяющим ее граничные значения (п. 11.5-4, а).

(б) Точно так же каждая система из n функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, реализующая максимум или минимум определенного интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x); y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x); x] dx, \quad (11.5-3)$$

должна удовлетворять системе n дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{уравнения Эйлера}) \quad (11.5-4)$$

и некоторым заданным граничным условиям.

(с) Функции $y(x)$ или $y_i(x)$, удовлетворяющие уравнению или уравнениям Эйлера для данной вариационной задачи, называются экстремальными рассматриваемой задачи.

З а м е ч а н и е. Вывод условий (2) или (4) из условия $\delta I = 0$ опирается на основную лемму вариационного исчисления: если $f(x)$ — функция, непрерывная на ограниченном интервале $[x_1, x_2]$ и $\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = 0$ для каждой функции $g(x)$, исчезающей непрерывно производную и обращающейся в нуль в точках x_1 и x_2 , то $f(x) = 0$ на $[x_1, x_2]$.

Примеры приложений, в которых рассматриваются вариационные задачи: геодезические в римановых пространствах (п.17.4-3); вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона. См. также п.15.4-7.

П р и м е р: Брахистохрона в трехмерном пространстве. Если в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат, причем ось Ox направлена вертикально вниз, то эта классическая задача состоит в определении пространственной кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$, для которой материальная точка, скользя по этой кривой без трения под действием силы тяжести из начала координат, достигнет некоторой заданной точки $[x_2 > 0, y(x_2), z(x_2)]$ за наименьшее время. Так как в силу закона сохранения энергии

$$g = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right],$$

где g — ускорение силы тяжести, то нужно найти минимум интеграла

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{x_2} \frac{1}{x^{1/2}} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx.$$

Уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x^{1/2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{x^{1/2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} \right) = 0.$$

или

$$\frac{y'}{x^{1/2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = c_1, \quad \frac{z'}{x^{1/2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = c_2,$$

где c_1 и c_2 — константы. Так как $\frac{dy}{dz} = \frac{c_1}{c_2}$, то кривая должна лежать в вертикальной плоскости, которая, если задать граничные условия

$$y(x_2) = y_2, \quad z(x_2) = 0,$$

будет плоскостью Oxy . В этом случае $z' = 0$ и

$$y' = \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{c_1^2} - x^2}},$$

так что

$$y = a \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \sqrt{2ax - x^2} + k \quad \left(a = \frac{1}{2c_1^2} \right).$$

Поскольку $y = 0$ при $x = 0$, постоянная k должна быть равна нулю. Постоянная a будет зависеть от значений x_2 и y_2 . Искомая кривая является циклоидой (п.2.6-2, е) с основанием на оси Oy и точкой возврата в начале координат.

З а м е ч а н и е. Задача о брахистохроне, как и задача из п.11.5-3, представляет пример задачи на минимум криволинейного интеграла (п.4.6-10). Задачи этого типа всегда можно свести к случаю, когда интегрирование производится лишь по одной независимой переменной.

11.5-2. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Требуется найти систему функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, реализующую максимум или минимум определенного интеграла (5) и, кроме того, подчиняющуюся $m < n$ достаточно гладким *дополнительным условиям* или *уравнениям связи*

$$\varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_n; x) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (11.5-5)$$

Если невозможно непосредственно исключить m из n переменных y_i , воспользовавшись соотношениями (5), то искомую систему функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ получают как решение системы дифференциальных уравнений (*уравнений Эйлера*)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11.5-6)$$

подчиненное условиям (5), где

$$\Phi \equiv F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j. \quad (11.5-7)$$

Неизвестные функции $\lambda_j(x)$ называются *множителями Лагранжа* (см. также п.11.3-4). Если задача имеет решение, то $n+m$ функций y_i и λ_j определяются из $n+m$ уравнений (6) и (5) и из заданных граничных условий. Дифференциальные уравнения (6) являются необходимыми, но не достаточными условиями максимума или минимума.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в случае достаточно гладких *неголомомных условий* вида

$$\varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_n; y_1', y_2', \dots, y_n'; x) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (11.5-8)$$

11.5-3. Изопериметрические задачи. В *изопериметрической задаче* требуется найти систему функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, реализующую максимум или минимум определенного интеграла (3) и подчиняющуюся условиям

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi_k(y_1, y_2, \dots, y_n; y_1', y_2', \dots, y_n'; x) dx = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (11.5-9)$$

где c_k — заданные постоянные. Если функции Ψ_k достаточно гладкие, то применим метод множителей Лагранжа: неизвестные функции $y_i(x)$, подчиненные условиям (9), должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (6), где в этом случае

$$\Phi \equiv F + \sum_{k=1}^r \mu_k \Psi_k. \quad (11.5-10)$$

r множителей Лагранжа μ_k являются *постоянными*, и их вместе с n неизвестными функциями $y_i(x)$ находят из $r+n$ уравнений (9) и (6) и заданных граничных условий.

П р и м е р. Площадь плоской области, ограниченной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ можно найти с помощью формулы

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt,$$

где t — подходящим образом выбранный параметр. Чтобы найти максимум площади I при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt = R^2,$$

где R — отличная от нуля постоянная, положим

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + \mu \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right].$$

Уравнения Эйлера (6) имеют вид

$$-\frac{dy}{dt} + 2\mu \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx}{dt} + 2\mu \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Заданное дополнительное условие и эти уравнения удовлетворяются при

$$x = R \cos \frac{t}{2\mu} + x_0, \quad y = -R \sin \frac{t}{2\mu} + y_0, \quad \text{где } \mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

т.е. искомая кривая есть окружность радиуса R (см. также п.11.6-1).

З а м е ч а н и е. Чтобы найти максимум или минимум интеграла (3), подчиненного m дополнительным условиям (5) и r условиям (8), используются уравнения (6), где

$$\Phi \equiv F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j + \sum_{k=1}^r \mu_k \Psi_k.$$

11.5-4. Вариационные задачи с неизвестными граничными значениями и неизвестными пределами интегрирования.

(а) Чтобы найти максимум или минимум определенного интеграла (3) в случае, когда одно или несколько граничных значений $y_i(x_1)$ и/или $y_i(x_2)$ не задано, каждое отсутствующее граничное условие заменяют соответствующим *естественным граничным условием*

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right|_{x_1} = 0, \quad (11.5-11a)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right|_{x_2} = 0. \quad (11.5-11b)$$

(б) В некоторых вариационных задачах один из пределов интегрирования, скажем x_1 , явном виде не указан, а должен удовлетворять некоторому заданному условию

$$f[y_1(x_1), y_2(x_1), \dots, y_n(x_1); x_1] = 0. \quad (11.5-12)$$

Значение x_1 и функции $y_i(x)$, которые вместе реализуют максимум или минимум определенного интеграла (3), находят тогда из уравнений Эйлера (4) в соединении с естественными граничными условиями (11) и *условием трансверсальности*

$$\left(F - \sum_{k=1}^n y_k' \frac{\partial F}{\partial y_k} \right) \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad (x = x_1; i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.5-13)$$

Аналогичные методы применяют в случае, когда непосредственно не указан предел x_2 , или же если оба предела x_1 и x_2 заданы только неявно.

11.5-5. Решение вариационных задач в случае, когда подынтегральная функция содержит производные высших порядков. Чтобы найти максимум или минимум определенных интегралов вида

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', y_1'', \dots, y_n'', \dots; x) dx, \quad (11.5-14)$$

можно все производные выше первого порядка ввести в качестве новых независимых переменных, связав их друг с другом и с y_i условиями $y_i' = dy_i'/dx$, $y_i'' = dy_i''/dx$, ... В результате необходимые условия максимума и минимума интеграла (14) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'''} \right) + \dots = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (11.5-15)$$

при этом предполагается, что подынтегральная функция является достаточно гладкой. Для того чтобы решить задачу полностью, следует еще задать граничные значения всех производных до $(n-1)$ -го порядка включительно каждой из функций y_i , входящих в F .

11.5-6. Канонические уравнения. Уравнения Эйлера n -го порядка (4) для вариационной задачи п.11.5-1 эквивалентны системе $2n$ канонических уравнений первого порядка

$$y_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11.5-16)$$

относительно $2n$ функций y_i и $p_i = \frac{\partial F}{\partial y'_i}$, где

$$H(y_1, y_2, \dots, y_n; p_1, p_2, \dots, p_n; x) = \sum_{i=1}^n p_i y'_i - F(y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n; x),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_i'^2} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
(11.5-17)

(контактное преобразование, см. также пп.10.2-6 и 10.2-7). Иногда решение этой задачи можно упростить, введя $2n+1$ новых переменных \bar{y}_i, \bar{p}_i и $\bar{H}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n; x)$ с помощью подходящего канонического преобразования (п. 10.2-6), которое дает новые канонические уравнения

$$\bar{y}'_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{p}'_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(приложения теории канонических преобразований см. в [10.9] и [11.1]).

11.5-7. Вариационные задачи в случае нескольких независимых переменных: максимумы и минимумы кратных интегралов. Часто требуется найти систему n функций $y_1(x_1, x_2, \dots, x_m), y_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от m независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m , реализующую максимум или минимум кратного интеграла

$$I = \int \int \dots \int_V F dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (11.5-18)$$

где F — данная функция $n+m+mn$ переменных y_i, x_k и $y_{i,k} \equiv \partial y_i / \partial x_k$. При этом граница S области интегрирования V и граничные значения функций y_i могут быть как заданы, так и не заданы. Предполагается, что функции y_i выбираются среди множества всех функций, имеющих в V непрерывные вторые частные производные (см. также п.11.4-2).

Если подынтегральная функция F является достаточно гладкой, то каждая система функций y_1, y_2, \dots, y_n , реализующая максимум или минимум интеграла (18), должна удовлетворять системе уравнений с частными производными

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11.5-19)$$

и надлежащим граничным условиям. Для решения вариационных задач с уравнениями связи применим метод множителей Лагранжа, описанный в пп.11.5-2 и 11.5-3.

Если граничные значения одной или нескольких неизвестных функций y_i не заданы, то следует с помощью условия $\delta I = 0$ получить *естественные граничные условия*, аналогичные уравнениям (11). Пусть, например, в случае двух независимых переменных x_1, x_2 граница S есть регулярная замкнутая кривая, задаваемая уравнениями $x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s)$, где s — длина дуги. Тогда естественные граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_{i,1}} \frac{dx_1}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y_{i,2}} \frac{dx_2}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.5-20)$$

Пример. Малые смещения струны длины L могут быть описаны функцией $y(x, t)$ координаты x , измеряемой вдоль струны, и времени t . Кинетическая и потенциальная энергия всей струны соответственно равны

$$T = \frac{m}{2} \int_0^L y_t'^2 dx, \quad U = \frac{Q}{2} \int_0^L y_x'^2 dx,$$

где m — масса единицы длины, а Q — натяжение струны. Чтобы интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (m y_t'^2 - Q y_x'^2) dx dt$$

имел минимум (принцип Гамильтона), должно выполняться соотношение

$$y_{tt}'' = \frac{Q}{m} y_{xx}'' ,$$

являющееся уравнением колебаний струны.

11.6. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ

11.6-1. Прямые методы. В каждом из так называемых *прямых методов* нахождения максимума или минимума данного определенного интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx \quad (11.6-1)$$

искомую функцию $y(x)$ пытаются приблизить последовательностью функций $u_1(x), u_2(x), \dots$, выбираемых так, чтобы все они удовлетворяли граничным условиям, наложенным на $y(x)$. Каждая функция $u_r(x)$ должна быть дифференцируемой функцией от x и r параметров $\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rr}$. Последние определяются так, чтобы они давали максимум или минимум функции

$$I_r(\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rr}) \equiv \int_{x_1}^{x_2} F[u_r(x), u_r'(x), x] dx, \quad (11.6-2)$$

т. е. удовлетворяли уравнениям

$$\frac{\partial I_r}{\partial \alpha_{ri}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; \quad r = 1, 2, \dots) \quad (11.6-3)$$

(см. п. 11.3-3, а).

Для каждой функции $y(x)$, полученной таким путем в качестве предела последовательности приближающих функций $u_1(x), u_2(x), \dots$, требуется еще доказать, что она действительно реализует максимум или минимум определенного интеграла (1).

Аналогичными методами можно решать вариационные задачи и в случае нескольких неизвестных функций (п.11.5-1) и/или нескольких независимых переменных (п.11.5-7). Если заданы уравнения связи (пп.11.5-2 и 11.5-3), то им подчиняют каждую приближающую функцию; максимумы и минимумы приближающих интегралов можно тогда находить с помощью метода множителей Лагранжа из п.11.3-4 (см. пример).

Прямые методы могут давать числовые приближения и/или точные решения. Так как при условиях, перечисленных в п.11.4-2, решения вариационных задач должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, выражающим условие $\delta I = 0$, то каждый прямой метод решения вариационной задачи является также приближенным методом решения дифференциальных уравнений.

П р и м е р. Решить изопериметрическую задачу, рассмотренную в качестве примера в п.11.5-3, приближая $x(t)$ и $y(t)$ соответственно последовательностями

$$u_r(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^r (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$v_r(t) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^r (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \quad (r = 1, 2, \dots),$$

так что

$$I_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u_r \frac{dv_r}{dt} - v_r \frac{du_r}{dt} \right) dt = \pi \sum_{k=1}^r k(a_k \beta_k - b_k \alpha_k) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Чтобы найти максимум интеграла I_r при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{du_r}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv_r}{dt} \right)^2 \right] dt = \pi \sum_{k=1}^r k^2 (\alpha_k^2 + b_k^2 + \alpha_k^2 + \beta_k^2) = R^2,$$

применим метод множителей Лагранжа из п.11.3-4 и найдем

$$\left. \begin{aligned} \beta_k + 2\lambda_r k \alpha_k &= 0, & \alpha_k + 2\lambda_r k \beta_k &= 0, \\ -\alpha_k + 2\lambda_r b_k &= 0, & -b_k + 2\lambda_r k \alpha_k &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

при $r = 1, 2, \dots$. Начиная с $k = 1$, получим $\lambda_r = 1/2$, $\beta_1 = -\alpha_1$, $\alpha_1 = b_1$; при $k > 1$, $\alpha_k = b_k$, $\alpha_k = \beta_k = 0$. В этом примере прямой метод дает точное решение

$$x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \quad y = \frac{a_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

где

$$a_1^2 + b_1^2 = R^2.$$

11.6-2. Метод Релея—Ритца. В этом методе искомое решение $y(x)$ пытаются разложить в ряд по полной системе функций $\Psi_j(x)$ (п.15.2-4) так, чтобы приближающие функции

$u_r(x) = \sum_{j=0}^r \alpha_j \Psi_j(x)$ удовлетворяли заданным граничным условиям. Как правило, функции

$\Psi_j(x)$ ортогональны, и таким образом параметры $\alpha_j = \alpha_j$ не зависят от r (п.15.2-4), в точности так же, как в примере п.11.6-1.

Метод Релея—Ритца оказывается полезным для численных решений некоторых задач о собственных значениях в теории колебаний и квантовой механике (см. также п.15.4-7).

11.6-3. Приближение $y(x)$ полигональными функциями. Решение $y(x)$ можно приблизить полигональными функциями $u_r(x)$, каждая из которых определяется, например, r своими значениями $\alpha_{r1} = u_r(x_1 + \Delta x)$, $\alpha_{r2} = u_r(x_1 + 2\Delta x)$, ..., $\alpha_{rr} = u_r(x_1 + r\Delta x) = u_r(x_2 - \Delta x)$. В этом случае условия (3) дают дифференциальное уравнение (п.20.4-3), приближающее уравнение Эйлера (11.5-2) данной вариационной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: СОВРЕМЕННАЯ (АБСТРАКТНАЯ) АЛГЕБРА И АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

12.1. ВВЕДЕНИЕ

12.1-1. Математические модели. Физические процессы, вообще говоря, описываются в терминах *операций* (наблюдений, экспериментов), связывающих физические объекты.

Сложность подлинных физических ситуаций требует упрощенных описаний с помощью словесных, символических и даже физических моделей, которые абстрагируют подходящим образом выбранные «существенные» свойства физических объектов и ситуаций.

Математика в самом общем смысле слова имеет дело с определением и использованием символических моделей. **Математическая модель** охватывает класс неопределяемых (абстрактных, символических) **математических объектов** таких, как числа или векторы, и отношения между этими объектами.

Математическое отношение — это гипотетическое правило, связывающее два или более символических объекта (см. также пп.12.1-3 и 12.8-1). Многие отношения могут быть описаны при помощи **математических операций**, связывающих один или несколько объектов (**операнд, операнды**) с другим объектом или множеством объектов (**результатом операции**). Абстрактная модель с ее объектами произвольной природы, отношениями и операциями *определяется* непротиворечивым набором правил (**определяющих аксиом**), вводящих операции, которыми можно пользоваться, и устанавливающих общие отношения между их результатами (**аксиоматическое определение** математической модели с помощью ее свойств; примеры см. в пп.12.2-1, 12.3-1, 12.4-1, 12.5-2, 12.6-1, 12.8-1 и 1.1-2). **Конструктивное определение** вводит новую математическую модель, пользуясь уже известными математическими понятиями (например, определение сложения и умножения матриц в терминах сложения и умножения чисел, п.13.2-2).

Непротиворечивость аксиоматического определения должна быть доказана конструктивным построением примера, удовлетворяющего определяющим аксиомам (*доказательство существования*, см. также пп.4.2-1 и 9.1-4). Кроме того, обычно проверяют взаимную независимость определяющих аксиом.

Математическая модель будет воспроизводить подходящим образом выбранные стороны физической ситуации, если можно установить **правила соответствия**, связывающие специфические физические объекты и отношения с определенными математическими объектами и отношениями. Поучительным и/или интересным может также быть и построение математических моделей, для которых в физическом мире аналогов не существует. Наиболее общеизвестными математическими моделями являются системы целых и действительных чисел (п.1.1-2) и евклидова геометрия; определяющие свойства этих моделей представляют собой более или менее непосредственные абстракции физических процессов (счет, упорядочение, сравнение, измерение).

Объекты и операции более общих математических моделей часто ассоциируются с множествами действительных чисел, которые могут быть соотнесены с результатами физических измерений. Получающиеся таким образом представления математических моделей с помощью числовых операций специально рассматриваются в гл. 14 и 16.

12.1-2. Обзор. Современная (абстрактная) алгебра ¹⁾ имеет дело с математическими моделями, определяемыми в терминах бинарных операций («алгебраических» операций, обычно представляющих собой различные типы «сложения» и «умножения»), которые связывают пары математических объектов (операнды или оператор и операнд) с соответствующими результатами операций. В пп.12.2-1 – 12.4-2 вводятся некоторые из наиболее общепотребительных моделей такого рода, именно: *группы, кольца, поля, векторные пространства и линейные алгебры; булевы алгебры* отдельно рассматриваются в пп.12.8-1 – 12.8-6.

Важный вопрос о *линейных преобразованиях (линейных операторах)* и их собственных векторах и собственных значениях излагается в гл. 14. *Представление векторов и операторов с помощью числовых компонент и матриц* подробно обсуждается в гл. 14, 15 и 16.

Пункты 12.5-1 – 12.6-3 служат кратким введением к теории математических моделей, позволяющих определить *предельные процессы и порядок*. В частности, в пп.12.5-2 – 12.5-4 рассматриваются метрические пространства, а в пп.12.7-1 – 12.7-5 – простые схемы комбинирования математических моделей (*прямые произведения и прямые суммы*).

12.1-3. «Равенство» и отношения эквивалентности.

(а) Предполагается, что аксиоматическое определение каждого класса математических объектов, рассматриваемых в этой главе, влечет за собой существование правила, устанавливающего, являются ли два данных математических объекта a и b «равными» (эквивалентными или неразличимыми с точки зрения модели, $a = b$) или нет; это правило должно быть таким, что:

- 1) $a = a$ (*рефлексивность отношения равенства*),
- 2) из $a = b$ следует $b = a$ (*симметрия*),
- 3) из $a = b, b = c$ следует $a = c$ (*транзитивность*).

В пп.13.2-2 и 16.3-1 приводятся примеры определения равенства в *конструктивно определяемых моделях*.

(б) Вообще любое отношение $a \sim b$ между двумя объектами a, b класса C называется отношением эквивалентности в том и только в том случае, если оно *рефлексивно* ($a \sim a$), *симметрично* (из $a \sim b$ следует $b \sim a$) и *транзитивно* (из $a \sim b, b \sim c$ следует $a \sim c$). Любое отношение эквивалентности определяет разбиение класса C , т.е. подразделение класса C на подклассы без общих элементов. Элементы одного и того же такого подкласса эквивалентны в смысле свойств, определяющих отношение эквивалентности.

П р и м е р ы. Равенство, тождественность функций (п.1.1-4), равенство и подобие треугольников, изоморфизм (п.12.1-6).

12.1-4. Преобразования, функции, операции (см. также пп.4.2-1, 14.1-3 и 14.3-1). Набор правил $x \rightarrow x'$, ставящих каждому объекту x класса C в соответствие некоторые объекты x' класса C' , называется **преобразованием (отображением)** класса C в класс C' ; x' есть **функция**

$$x' = x'(x) = f(x) \quad (12.1-1)$$

¹⁾ Слово *алгебра* имеет три слабо связанных между собой значения: 1) общий предмет, как в данном случае (*абстрактная алгебра, элементарная алгебра*); 2) теория алгебраических операций, используемая в связи со специфической моделью (*матричная алгебра, тензорная алгебра*); 3) тип математической модели (*линейная алгебра, булева алгебра*).

аргумента x с областью определения C и множеством значений, содержащимся в C' . Классы C и C' могут быть различными, но могут и совпадать. Соотношение (1) можно рассматривать как операцию над операндом x , дающую результат x' . Если в классах C и C' даны удовлетворяющие нужным условиям определения равенства (п.12.1-3), то операция (преобразование, функция) (1) определена корректно, если из $x = y$ следует $x' = y'$. Предполагается, что если специально не будет оговорено противное, это условие всегда будет выполняться.

Отображение (1) называется однозначным [$f(x)$ — однозначная функция x], если каждому объекту x соответствует единственный объект x' . Все отображения в дальнейшем всегда предполагаются однозначными, и это специально не оговаривается. Отображение класса C на класс C' называется взаимно однозначным (взаимно однозначным соответствием классов C и C'), если оно отображает класс C на весь класс C' и определяет однозначное обратное отображение (обратное преобразование) $x' \rightarrow x$.

Каждый объект x в равенстве (1) может сам быть множеством некоторых объектов x_1, x_2, \dots ; таким образом, возможно определить функции $x' = f(x_1, x_2, \dots)$ двух и более аргументов.

Числовая (действительная или комплексная) функция, определенная на некотором множестве функций, называется функционалом (например, интеграл $\int_0^1 \varphi(x) dx$, наибольшее значение функции $\varphi(x)$ на $[a, b]$ и т. л.).

Сами преобразования (функции, операции) можно рассматривать как новые математические объекты (см., например, п.14.3-1).

12.1-5. Инвариантность (см. также пп.12.2-8, 13.14-1, 14.4-5, 16.1-4 и 16.4-1). Если дано преобразование (1) класса (пространства) C в себя, то любая функция $F(x, y, \dots)$ такая, что $F[f(x), f(y), \dots] = F(x, y, \dots)$ для всех x, y, \dots из C , и любое соотношение $O(x, y, \dots) = A$ такое, что $O[f(x), f(y), \dots] = A$ для всех x, y, \dots из C , называются инвариантными по отношению к преобразованию (1).

12.1-6. Представление одной модели другой: гомоморфизмы и изоморфизмы. Пусть M — математическая модель (п.12.1-1), состоящая из объектов a, b, \dots и включающая операции O, P, \dots , результаты которых $O(a, b, \dots), P(a, b, \dots), \dots$ являются элементами модели M ¹⁾. Вторая модель M' с операциями $O'(a', b', \dots)$ называется гомоморфным образом модели M относительно операций $O(a, b, \dots)$ и $O'(a', b', \dots)$, если:

- 1) существует отображение $a \rightarrow a'$ множества элементов модели M на множество элементов модели M' ;
- 2) при этом отображении $O(a, b, \dots) \rightarrow O'(a', b', \dots)$.

Отображение с этими свойствами называется гомоморфизмом модели M в модель M' ; оно сохраняет все отношения, базирующиеся на рассматриваемой операции, т. е. каждое такое отношение между элементами a, b, \dots модели M , порождает соответствующее отношение между элементами a', b', \dots модели M' . Гомоморфизм, отображающий модель M в себя, называется эндоморфизмом.

Изоморфизм — это взаимно однозначный гомоморфизм. Если существует изоморфизм модели M на модель M' , то модели M и M' называются изоморфными относительно рассматриваемых операций; в этом случае как отображение

¹⁾ Элементы a, b, \dots не обязательно должны принадлежать одному классу математических объектов (например, они могут быть векторами и скалярами, п.12.4-1).

$M \rightarrow M'$, так и обратное отображение $M' \rightarrow M$ являются гомоморфизмами. Изоморфизм, отображающий модель M на себя, называется **автоморфизмом** модели M .

Понятие гомоморфизма и родственные с ним понятия изоморфизма и автоморфизма имеют огромное практическое значение, так как они позволяют представлять одну модель другой моделью. Можно, в частности, представлять математические объекты некоторыми множествами действительных чисел (аналитическая геометрия, матричное и тензорное представления). Заметим, что изоморфизм есть отношение эквивалентности (п.12.1-3, б) между моделями: свойства целого класса изоморфных моделей можно выводить из (или рассматривать на примере) свойств любой модели этого класса.

Некоторые авторы требуют, чтобы каждый гомоморфизм $M \rightarrow M'$ отображал M на всю модель M' . В этом случае гомоморфизм определяет изоморфизм между моделью, состоящей из пересечения двух классов элементов модели M , и моделью M' .

12.2. АЛГЕБРА МОДЕЛЕЙ С ОДНОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОПЕРАЦИЕЙ: ГРУППЫ

12.2-1. Определение и основные свойства группы.

(а) Класс G объектов (элементов) a, b, c, \dots называется **группой**, если определена бинарная операция, которая каждой паре элементов a, b класса G ставит в соответствие некоторый объект (результат операции) $a \odot b$ так, что:

- 1) $a \odot b$ является элементом класса G (*замкнутость* по отношению к определяющей операции);
- 2) $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (*ассоциативный закон*);
- 3) G содержит (левую) **единицу** E такую, что для каждого элемента a из G , $E \odot a = a$;
- 4) для каждого элемента a из G в G существует (левый) **обратный** элемент a^{-1} такой, что $a^{-1} \odot a = E$.

Два элемента a, b некоторой группы **перестановочны**, если $a \odot b = b \odot a$. Если все элементы a, b группы G перестановочны, то определяющая операция называется **коммутативной**, а группа G — **коммутативной** или **абелевой группой**. Группа G , содержащая конечное число g элементов, называется **конечной группой** (группой порядка g); в противном случае G — **бесконечная** группа. В этом последнем случае группа G может быть счетной или не-счетной.

(б) Каждая группа G имеет единственную левую и единственную правую единицу, и эти единицы равны ($E \odot a = a \odot E = a$). Каждый элемент a имеет единственный левый и единственный правый обратный элемент, и эти элементы равны ($a^{-1} \odot a = a \odot a^{-1} = E$).

Отсюда

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } c \odot a = c \odot b \text{ следует } a = b, \\ \text{из } a \odot c = b \odot c \text{ следует } a = b \end{array} \right\} \text{ (законы сокращения). } \quad (12.2-1)$$

Группа G содержит единственное решение x любого уравнения $c \odot x = b$ или $x \odot c = b$; т. е. в группе возможны однозначно определенные правое и левое «деление».

(в) Операцию, определяющую группу, часто называют (абстрактным) **умножением** (см., однако, п.12.2-10); тогда ее результат записывается как **произведение** ab , а элемент, обратный элементу a , — как a^{-1} . Это соглашение свободно используется в следующих пунктах.

Кратные произведения aa, aaa, \dots записывают в виде **целых степеней** a^2, a^3, \dots , причем $(a^{-1})^n = a^{-n}$, $a^0 = E$. Заметим, что

$$(a^{-1})^{-1} = a, \quad a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}. \quad (12.2-2)$$

12.2-2. Подгруппы. Подмножество G_1 группы G называется ее подгруппой, если G_1 является группой в смысле определяющей операции группы G . Это справедливо 1) в том и только в том случае, если множество G_1 содержит все произведения принадлежащих ему элементов и все элементы, обратные его элементам*), т. е. 2) в том и только в том случае, если для любой пары элементов a, b из G_1 множество G_1 содержит и произведение ab^{-1} .

Пересечение (п. 4.3-2, а) двух подгрупп группы G есть подгруппа группы G . Сама группа G и E называются несобственными подгруппами группы G ; все остальные подгруппы — собственные. Если G — группа конечного порядка g (п. 12.2-1), то порядок g_1 любой ее подгруппы G_1 является делителем порядка группы (теорема Лагранжа); число g/g_1 называется индексом подгруппы G_1 (в группе G).

12.2-3. Циклические группы. Порядок элемента группы. Циклическая группа состоит из степеней $a^0 = E, a, a^2, \dots$ одного элемента a и обязательно коммутативна. Любая группа простого порядка и любая подгруппа циклической группы являются циклическими.

Каждый элемент a любой группы G порождает в G циклическую подгруппу, состоящую из всех его степеней. Порядок этой подгруппы называется порядком элемента a и равен такому наименьшему натуральному числу m , что $a^m = E$.

12.2-4. Произведения подмножеств. Смежные классы.

(а) Произведение ¹⁾ $C_1 C_2$ двух подмножеств C_1 и C_2 группы G есть множество, состоящее из всех (различных) произведений $a_1 a_2$ элементов a_1 из C_1 и элементов a_2 из C_2 . Произведение $G_1 G_2$ двух подгрупп группы G является подгруппой в G в том и только в том случае, если $G_1 G_2 = G_2 G_1$.

(б) Левым смежным классом xG_1 в группе G по ее подгруппе G_1 называется множество всех произведений xa данного элемента x из G и любых элементов a из G_1 . Аналогично правый смежный класс $G_1 x$ есть множество всех произведений вида $a_1 x$. Смежный класс по подгруппе G_1 сам является подгруппой в том и только в том случае, если x есть элемент из G_1 ; при этом условии $xG_1 = G_1 x = G_1$. Два левых смежных класса по G_1 либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента; то же самое справедливо и для двух правых смежных классов. Каждая подгруппа G_1 группы G определяет разбиение (п. 12.1-3) группы G на конечное или бесконечное число n_1 левых смежных классов и разбиение G на n_1 правых смежных классов; если G — группа конечного порядка g , то n_1 равняется индексу g/g_1 подгруппы G_1 (п. 12.2-2). Два элемента a, b группы G принадлежат одному и тому же левому смежному классу по подгруппе G_1 , если G_1 содержит $a^{-1}b$, и одному и тому же правому смежному классу по G_1 , если G_1 содержит ba^{-1} .

12.2-5. Сопряженные элементы и подгруппы. Нормальные делители. Фактор-группы.

(а) Два элемента x и x' группы G называются сопряженными, если они связаны преобразованием (п. 12.1-4)

$$x' = a^{-1}xa \quad (\text{или} \quad x = ax'a^{-1}), \quad (12.2-3)$$

где a — некоторый элемент группы G . Тогда говорят, что x' получается из x трансформированием элементом a . Сопряженность является отношением эквивалентности (п. 12.1-3) и определяет разбиение группы G на классы сопряженных элементов.

(б) Преобразование (3) переводит каждую подгруппу G_1 группы G в сопряженную подгруппу $G'_1 = a^{-1}G_1 a$. Подгруппа G_1 отображается сама на себя ($G'_1 = G_1$) для любого элемента a из G 1) в том и только в том случае, если элемент a_1 подгруппы G_1 перестановочны с любым элементом a группы G ($a G_1 = G_1 a$) или 2) в том и только в том случае, если подгруппа G_1 содержит все элементы, сопряженные с ее элементами. Подгруппа, отличающаяся этими свойствами, называется нормальным делителем (инвариантной подгруппой) группы G .

Любая подгруппа индекса 2 (п. 12.2-2) является нормальным делителем группы G . Простая группа не содержит никаких нормальных делителей, кроме себя самой и E .

*) В случае конечной группы второе требование излишне, так как оно следует из первого.

¹⁾ Произведение $C_1 C_2$ двух подмножеств не следует смешивать с их пересечением (логическим произведением, п. 4.3-2) $C_1 \cap C_2$, а также с прямым произведением (п. 12.7-2).

(е) *Левые смежные классы* (п.12.2-4, б) по нормальному делителю совпадают с соответствующими правыми смежными классами и образуют группу по отношению к операции умножения, определенной в п.12.2-4,а; эта группа называется фактор-группой G/G_1 группы G по нормальному делителю G_1 . Если G — группа конечного порядка, то порядок фактор-группы G/G_1 равен индексу g/g_1 подгруппы G_1 (п.12.2-2).

12.2-6. Нормальный ряд. Композиционный ряд. Для любой группы G нормальным рядом называется такая (конечная) последовательность подгрупп $G_0 = G, G_1, G_2, \dots, G_m = E$, что каждая подгруппа G_i является нормальным делителем подгруппы G_{i-1} . Нормальный ряд называется композиционным рядом группы G , если при любом i G_i есть собственный нормальный делитель подгруппы G_{i-1} и если между G_{i-1} и G_i нельзя вставить никакого другого нормального делителя, т.е. если каждый композиционный фактор G_{i-1}/G_i — простая группа (п.12.2-5). Между любыми двумя композиционными рядами одной и той же группы G существует такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие их элементы являются изоморфными группами (теорема Жордана—Гельдера). Группа G называется разрешимой, если все ее композиционные факторы являются циклическими группами (п.12.2-3).

12.2-7. Центр. Нормализаторы.

(а) Множество всех элементов группы G , перестановочных с любым элементом этой группы, является нормальным делителем группы G ; он называется центром группы G .

(б) Множество всех элементов группы G , перестановочных с данным элементом a из G , является подгруппой группы G (нормализатором элемента a), которая содержит циклическую подгруппу, порожденную элементом a (п.12.2-3), в качестве своего нормального делителя.

Множество элементов группы G , перестановочных с каждым элементом данной подгруппы G_1 группы G , является подгруппой группы G (нормализатором подгруппы G_1), которая содержит G_1 в качестве нормального делителя.

Число различных элементов или подгрупп группы G , сопряженных (п.12.2-5) с некоторым ее элементом или подгруппой, равно индексу (п.12.2-2) нормализатора этого элемента (или соответственно этой подгруппы) в группе G .

12.2-8. Группы преобразований или операторов (см. также пп.12.1-4, 14.9-1—14.10-7 и 16.1-2). Множество G всех взаимно однозначных преобразований $x' = f(x)$ любого класса S на себя образует группу, определяющей операцией в которой является последовательное применение двух преобразований (умножение преобразований или операторов).

Если G_1 — произвольная подгруппа группы преобразований G , то два объекта x, x' , связанные каким-либо преобразованием $x' = f(x)$ из подгруппы G_1 , называются эквивалентными относительно подгруппы G_1 . Это отношение есть отношение эквивалентности (п.12.1-3), так что каждая подгруппа G_1 определяет разбиение (классификацию) множества S . Каждое свойство, инвариантное (п.12.1-5) по отношению к G_1 (во всем преобразовании из G_1), присуще всем объектам x , эквивалентным относительно G_1 . Множество (обычно числовых) функций $F_1(x), F_2(x), \dots$, инвариантных по отношению к G_1 , называется полной системой инвариантов группы G_1 , если множество значений этих функций однозначно определяет класс эквивалентности любого данного объекта x из S .

Примеры групп преобразований: все $n!$ подстановок из n элементов (симметрическая группа степени n); все $n!/2$ четных подстановок, соответствующих четным числам транспозиций из n элементов (знакопереметная группа степени n). Любая подстановка счетного множества объектов S может быть выражена как произведение циклических подстановок некоторых подмножеств множества S так, что никакие два таких цикла не действуют на одни и те же элементы из S .

12.2-9. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Представление групп (см. также пп.12.2-4, 12.2-5 и 14.9-1—14.10-7).

(а) Гомоморфизм или изоморфизм (по отношению к определяющей операции, п.12.1-6) переводит элементы a, b, \dots данной группы G в элементы a', b', \dots некоторой группы G' так, что $(ab)' \rightarrow a'b'$. Единица группы G переходит в единицу группы G' ; обратные элементы переходят в обратные.

При каждом гомоморфизме группы G на группу G' множество элементов группы G , отображающихся в единицу группы G' есть нормальный делитель G_H группы G , а множество элементов, отображающихся в произвольный элемент группы G' , есть некоторый смежный класс по G_H ; фактор-группа G/G_H изоморфна группе G' . Нормальный делитель G_H называется ядром гомоморфизма. Каждый нормальный делитель G_1 группы G является ядром гомоморфизма, переводящего G в фактор-группу G/G_1 .

Класс всех автоморфизмов любой группы G образует группу; класс всех преобразований вида (3) группы G (внутренних автоморфизмов группы G) есть подгруппа группы автоморфизмов.

Сопряженные подгруппы обязательно изоморфны.

(b) *Всякая группа G изоморфна некоторой подгруппе (может быть представлена такой подгруппой, реализована в виде такой подгруппы) группы всех взаимно однозначных преобразований некоторого класса объектов на себя (теорема Кэли, см. также п.12.2-8). В частности, каждая конечная группа изоморфна некоторой группе подстановок (регулярное представление конечной группы, п.14.9-1, а). Представления групп с помощью линейных преобразований и матриц см. в пп.14.9-1—14.10-7.*

12.2-10. Аддитивные группы. Классы вычетов и сравнимости.

(а) На определяющую операцию в коммутативной группе (абелевой группе, п.12.2-1, а) часто смотрят как на (абстрактное) сложение. Ее результат можно записывать в виде суммы $a+b$, а единицу и элемент, обратный данному элементу a , соответственно как 0 (нуль или нулевой элемент) и $-a$; при этом пишут

$$a + (-b) = a - b.$$

Группу в этом случае называют аддитивной (группой по сложению, модулем), а выражения вида $a+a$, $a+a+a$, $-a-a$, ... обозначают символами $2a$, $3a$, $-2a$, ...

(b) *Каждая подгруппа коммутативной группы есть нормальный делитель. Смежные классы по подгруппе G_1 аддитивной группы G называются классами вычетов по модулю G_1 ; два элемента a , b группы G , принадлежащие одному и тому же классу вычетов (т. е. для которых G_1 содержит $a-b$; см. также п.12.2-4, b) называются сравнимыми по модулю G_1 ($a \equiv b(G_1)$). Сравнимость есть отношение эквивалентности (п.12.1-3, см. также п.12.2-4, b). Фактор-группа G/G_1 аддитивной группы G является группой классов вычетов по модулю G_1 и может быть обозначена символом $G \pmod{G_1}$.*

Два целых числа m и n сравнимы по модулю r [$m \equiv n \pmod{r}$], где r — целое число, если разность $m-n$ делится на r , это значит, что m и n при делении на r дают одинаковые остатки.

12.3. АЛГЕБРА МОДЕЛЕЙ С ДВУМЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ ОПЕРАЦИЯМИ: КОЛЬЦА, ПОЛЯ И ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ

12.3-1. Определения и основные теоремы.

(а) Класс R объектов (элементов) a, b, c, \dots называется **кольцом**, если определены две бинарные операции, обычно называемые (абстрактными) *сложением* и *умножением* такие, что

1) R есть коммутативная группа по сложению (аддитивная группа, п.12.2-10), т. е. R замкнуто по отношению к сложению, и

$$a+b = b+a, \quad a+(b+c) = (a+b)+c, \\ a+0 = a, \quad a+(-a) = a-a = 0;$$

2) произведение ab есть элемент R (замкнутость по отношению к умножению);

3) $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативный закон для умножения)*);

4) $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c)a = ba+ca$ (дистрибутивные законы).

Заметим, что $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ для любого элемента a кольца R . Два элемента $p \neq 0$ и $q \neq 0$ кольца R , для которых $pq=0$, называются соответственно *левым* и *правым делителями нуля*. В кольце без делителей нуля из $ab=0$ следует либо $a=0$, либо $b=0$, либо $a=b=0$, и *действуют законы сокращения* (12.2-1).

Целочисленные «кратные» элемента a кольца, например $2a, 3a, \dots$ (п.12.2-10, а), вообще говоря, не являются произведениями элементов кольца. *Целые степени* элементов кольца определяются как в п.12.2-1, с.

*) Иногда также рассматривают неассоциативные кольца, в которых ассоциативный закон не соблюдается.

(b) **Кольцом с единицей** называют кольцо, содержащее мультипликативную (левую) единицу E такую, что

$$Ea = a$$

для всех a (см. также п.12.2-1, а). E обязательно является как единственной левой, так и единственной правой единицей. Данный элемент a кольца с единицей может иметь, но может и не иметь мультипликативный (левый) обратный элемент a^{-1} . Если a^{-1} существует, то он непременно является как единственным левым, так и единственным правым обратным элементом (см. также п.12.2-1).

(с) **Поле** есть кольцо с единицей, которое содержит: 1) по крайней мере один элемент, отличный от нуля, и 2) для каждого элемента $a \neq 0$ мультипликативный обратный элемент a^{-1} . *Ненулевые элементы поля F образуют группу по умножению.*

Если a и c — произвольные элементы поля F , причем $c \neq 0$, то уравнения

$$cx = b \text{ и } xc = b$$

имеют в F решения; эти решения единственны (однозначно определенные левое и правое деление, см. также п.12.2-1, б). Делителей нуля в поле нет.

(d) Кольцо или поле **коммутативны**, если

$$ab = ba$$

для всех a и b . Коммутативное поле иногда называют просто полем, в отличие от тела или некоммутиативного поля. **Полем Гауа** называют конечное коммутативное поле. **Область целостности** — это коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Любая конечная область целостности является полем Гауа.

В любой области целостности все ненулевые элементы аддитивной группы имеют один и тот же порядок (п.12.2-3). Его называют характеристикой этой области целостности.

(е) Краткое описание упорядоченных полей см. в п.12.6-3.

Примеры полей: рациональные числа, действительные числа, комплексные числа.

Примеры областей целостности: целые числа, комплексные числа с целой действительной и мнимой частью, многочлены с действительными или с комплексными коэффициентами.

Примеры коммутативных колец: четные целые числа (кольцо без единицы), непрерывные функции на конечном промежутке (кольцо имеет делители нуля).

12.3-2. Подкольца и подполя. Идеалы.

(а) Подмножество R_1 кольца R называется его подкольцом, если R_1 является кольцом в смысле определяющих операций кольца R . Это имеет место в том и только в том случае, если R_1 для любой пары своих элементов a и b содержит $a-b$ и ab . Аналогично подмножество F_1 поля F называется его подполем, если F_1 есть подкольцо кольца F , имеющее по крайней мере один ненулевой элемент, и если для каждой пары элементов a и $b \neq 0$ множества F_1 оно содержит и ab^{-1} . Ненулевые элементы подполя F_1 образуют подгруппу мультипликативной группы поля F .

(b) Подмножество I_1 кольца R называется идеалом в R , если

1) I_1 есть подгруппа R по сложению;

2) I_1 содержит все произведения ab (левый идеал), или все произведения ba (правый идеал), или все произведения ab и ba (двусторонний идеал), где a — любой элемент из I_1 , а b — любой элемент из R .

Пример. В кольце всех целых чисел числа, кратные некоторому числу p , составляют двусторонний идеал.

12.3-3. **Расширения.** Коммутативное кольцо или поле часто оказывается возможным включить в качестве подкольца или подполя в «более широкое» поле (поле отношений, алгебраическое расширение и т. д.; см. также пример в п. 12.4-2). Теория полей, включающая так называемую теорию Гауа, занимается вопросом о существовании таких расширений.

12.4. МОДЕЛИ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ В СЕБЯ БОЛЕЕ ОДНОГО КЛАССА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ: ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

12.4-1. Линейные векторные пространства. Пусть R — кольцо с (мультипликативной) единицей 1 (п.12.3-1); элементы α, β, \dots кольца R будем называть **скалярами**. Класс \mathcal{U} объектов (элементов) a, b, c, \dots называется (**линейным**) **векторным пространством над кольцом R** , а элементы класса \mathcal{U} называются **векторами**, если определены две бинарные операции — **векторное сложение** и **умножение вектора на скаляр** такие, что ¹⁾

1) \mathcal{U} есть коммутативная группа по векторному сложению: для каждой пары элементов $a, b \in \mathcal{U}$ пространство \mathcal{U} содержит их векторную сумму $a + b$ и

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a + (b + c) &= (a + b) + c, \\ a + 0 &= a, & a + (-a) &= a - a = 0, \end{aligned}$$

где 0 — аддитивный нулевой элемент (нулевой вектор) пространства \mathcal{U} , $a - a$ — элемент, аддитивный обратный элементу a (п.12.2-10);

2) если a — любой вектор из \mathcal{U} и α — любой скаляр из R , то \mathcal{U} содержит вектор αa , произведение вектора a на скаляр α (*замкнутость по отношению к умножению на скаляр*);

3) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ (*ассоциативный закон для умножения на скаляр*);

4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (*дистрибутивные законы*);

5) $1 \cdot a = a$.

Заметим, что

$$0 \cdot a = 0, \quad (-1)a = -a, \quad (-\alpha)a = -(\alpha a). \quad (12.4-1)$$

Линейные векторные пространства исключительно важны для прикладной математики; они будут детально рассмотрены в гл. 14 (см. также гл. 5, 6, 15, 16 и 17).

12.4-2. Линейные алгебры. Пусть R — кольцо скаляров с единицей. Класс \mathcal{L} называется **линейной алгеброй (линейной ассоциативной алгеброй, системой гиперкомплексных чисел) над кольцом R** , если определены три бинарные операции (сложение и умножение в \mathcal{L} и умножение элементов из \mathcal{L} на скаляры) такие, что

1) \mathcal{L} есть кольцо,

2) \mathcal{L} есть линейное векторное пространство над кольцом скаляров R .

Рангом линейной алгебры называется ее размерность как векторного пространства (п.14.2-4). Если линейная алгебра есть поле, то она называется **алгеброй с делением** (п.12.3-1). Матричное представление линейных алгебр см. в п.14.9-7.

¹⁾ Некоторые авторы требуют, чтобы \mathcal{U} содержало не только сумму любых двух векторов, но и всякую бесконечную сумму $a_1 + a + \dots$, сходящуюся в некотором специальном смысле; определенные таким образом векторные пространства не относятся к алгебре в собственном смысле слова (см. также п.14.2-1).

Элемент $A \neq 0$ линейной алгебры называется **идемпотентным**, если $A^2 = A$, и **нильпотентным**, если существует такое натуральное число $m > 1$, что $A^m = 0$. Эти определения, в частности, применимы к матрицам (п.13.2-2) и к линейным операторам (п.14.3-6).

Примеры (см. также пп.13.2-2 и 14.4-2). 1) Поле комплексных чисел — коммутативная алгебра с делением ранга два над полем действительных чисел. 2) Поле кватернионов a, b, \dots является единственным расширением (п.12.3-3) поля комплексных чисел, которое образует некоммутативную алгебру с делением над полем действительных чисел. Каждый кватернион a может быть представлен в виде

$$a = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 = (\alpha_0 + i\alpha_1) + (\alpha_2 + i\alpha_3)j, \quad (12.4-2)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — действительные числа, а i, j и k — специальные кватернионы (вместе с 1 они являются элементами базиса), подчиняющиеся следующим правилам умножения:

$$\left. \begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k. \end{aligned} \right\} \quad (12.4-3)$$

Если положить $\bar{a} = \alpha_0 - i\alpha_1 - j\alpha_2 - k\alpha_3$, то

$$|a|^2 = \bar{a}a = a\bar{a} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad (12.4-4)$$

$$a^{-1} = \bar{a}/|a|^2 \quad (12.4-5)$$

(см. также п.14.10-6).

12.5. МОДЕЛИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

12.5-1. Топологические пространства (элементарные свойства точечных множеств см. в п.4.3-2).

(а) Класс C объектов (точек) x называется **топологическим пространством**, если он может быть представлен как объединение некоторого семейства I своих подмножеств, которое содержит:

- 1) пересечение любой пары своих множеств,
- 2) объединение любого множества своих множеств.

Элементы семейства I и пустое множество называются **открытыми множествами** пространства C , а семейство открытых множеств — **топологией** пространства C . Некоторое множество \mathcal{B} открытых множеств называется **базой** пространства C , если каждое множество из I есть объединение каких-либо множеств из \mathcal{B} .

Пересечения любого подмножества C_1 топологического пространства C с открытыми множествами этого пространства задают топологию в C_1 (**относительная топология** пространства C_1).

Одно и то же множество может допускать несколько топологий (и при этом получают различные топологические пространства); всякое множество C допускает тривиальную топологию, при которой открытыми множествами считаются только C и пустое множество, и дискретную топологию, когда открыто любое подмножество пространства C .

(б) При данной топологии **окрестностью** точки $x \in C$ называют любое открытое множество в C , содержащее x (или же любое открытое множество из некоторой заранее выбранной базы \mathcal{B} пространства C). Коль скоро определены окрестности, точно так же как в п.4.3-6, а, можно определить **предельные точки**, **внутренние точки**, **границные точки** и **изолированные точки** множеств; топологические пространства очевидным образом обобщают и абстрагируют некоторые свойства системы действительных чисел.

В любом топологическом пространстве C множество является **открытым** в том и только в том случае, если оно содержит только внутренние точки; множество S **замкнуто**: 1) если S есть дополнение в C некоторого открытого множества или 2) если S содержит все свои предельные точки (равносильные определения). Множество S **всюду плотно** в C , если в каждом открытом множестве пространства C содержится хотя бы одна точка из S . Топологическое пространство называется **сепарабельным**, если оно содержит счетное всюду плотное множество. Если в пространстве C существует счетная база, то C сепарабельно.

Предельные и граничные точки множества S соответственно образуют его производное множество S' и его границу. Замкнутое множество $S \cup S'$ называется замыканием множества S . Два множества отделены, если никакие из них не пересекаются с замыканием другого. Множество называется связным, если оно не может быть представлено в виде объединения двух отделенных собственных его подмножеств (пример: область в евклидовом пространстве, п.4.3-6, б).

(е) **Непрерывность. Гомеоморфизмы.** Обращение (преобразование, соответствие, функция, операция) $x \rightarrow x' = f(x)$ топологического пространства C в топологическое пространство C' называется **непрерывным** в точке $a \in C$, если для каждой окрестности U' точки $f(a)$ в C' существует такая окрестность U точки a в C , образ которой содержится в U' . Обращение $f(x)$ **непрерывно** в C , если оно непрерывно в каждой точке пространства C ; для этого необходимо и достаточно, чтобы множество всех точек, отображающихся в любое открытое множество U' пространства C' (полный прообраз множества U'), было открыто в C .

Непрерывное взаимно однозначное отображение, имеющее непрерывное обратное отображение, называется **гомеоморфизмом** или **топологическим отображением**; соответствующие топологические пространства называются **гомеоморфными** или **топологически эквивалентными**.

(д) **Топология** — наука о свойствах и величинах, инвариантных относительно топологических отображений (**топологические инварианты**; см. также п.12.1-5). Весьма существенно, что *подходящие топологические пространства служат моделями, допускающими определение сходящихся предельных процессов с помощью понятия окрестности* (см. также п.4.3-5, 4.4-1 и 12.5-3*). В конкретных случаях топология часто вводится путем определения окрестностей или сходимости.

Примеры. Определение окрестностей, данное в п.4.3-5, устанавливает в системе действительных чисел «обычную» топологию и позволяет ввести пределы, дифференцирование, интегрирование, бесконечные ряды и т. д. Подобным же образом в п.5.3-1 дается определение топологии для пространства евклидовых векторов (см. также п.12.5-3 и 14.2-7).

12.5-2. Метрические пространства. Класс C_M объектов (точек) x, y, z, \dots называется **метрическим пространством**, если для каждой упорядоченной пары точек x, y из C_M определено действительное число $d(x, y)$ (**расстояние** между x и y , **метрика**) такое, что

- 1) $d(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$,
- 2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (**неравенство треугольника**) для любых x, y, z из C_M .

Из этого определения вытекает

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(y, x) = d(x, y) \quad (12.5-1)$$

для всех x и y из C_M .

Два метрических пространства называются **изометричными**, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояния (изометрия). Свойства, общие для всех метрических пространств, изометричных данному, называются **метрическими инвариантами**.

Примеры. Действительные и комплексные числа образуют метрические пространства с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Вообще любое нормированное векторное пространство (п.14.2-5) допускает метрику $d(x, y) = \|x - y\|$ (см. также п.14.2-6, 14.2-7 и 15.2-2).

12.5-3. Топология, окрестности и сходимость в метрическом пространстве.

(а) Если a — любая точка метрического пространства C_M , то множество точек $x \in C_M$, для которых $d(a, x) < \delta$, называется **открытым шаром радиуса δ с центром a** . *Открытые шары конечных радиусов составляют базу в пространстве C_M* (п.12.5-1). Открытые множества в C_M — объединения любых множеств открытых шаров. **Окрестностью** точки a в C_M называется любое открытое множество, содержащее a . Множество точек $x \in C_M$, для которых $d(a, x) \leq \delta$, называется **замкнутым шаром радиуса δ с центром a** . Множество

* Целиком за пределами этого справочника остается алгебраическая топология.

в пространстве C_M называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором замкнутом шаре этого пространства.

(b) Последовательность точек x_0, x_1, x_2, \dots метрического пространства C_M **сходится к пределу** $a \in C_M$, если $d(x_n, a) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. также п.14.2-7).

Если переменная точка $x(\xi)$ пространства C_M является функцией действительного переменного ξ , то говорят, что функция $x(\xi)$ **сходится к пределу** $a \in C_M$ при $\xi \rightarrow a$, если $d[x(\xi), a] \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow a$. Функция $x' = f(x)$, связывающая точки x метрического пространства C_M и точки x' метрического пространства C'_M , непрерывна в точке $a \in C_M$, если $f(a)$ существует и $d[f(x), f(a)] \rightarrow 0$ при $d(x, a) \rightarrow 0$.

12.5-4*. Метрические пространства со специальными свойствами. Теория точечных множеств.

(a) Метрическое пространство C_M называется:

полным, если любая последовательность x_1, x_2, \dots пространства C_M , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$ (**последовательность Коши**,

фундаментальная последовательность), сходится к некоторой точке из C_M ;

компактным, если любое бесконечное множество точек пространства C_M содержит последовательность, сходящуюся к некоторой точке из C_M . Компактное метрическое пространство называется также **компактом**;

вполне ограниченным, если для любого $\delta > 0$ пространство C_M есть объединение конечного числа открытых шаров радиуса δ ;

локально компактным, если у каждой его точки есть окрестность, замыкание (п.12.5-1, б) которой компактно.

Множество S в полном метрическом пространстве C_M является **полным метрическим подпространством** C_M (см. также п.12.5-1, а) в том и только в том случае, если S замкнуто. Для того чтобы метрическое пространство C_M было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным, а для того чтобы оно было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы любое бесконечное его подмножество содержало последовательность Коши.

Всякое конечномерное нормированное пространство является сепарабельным и полным (см. также п.14.2-7). Любой замкнутый шар в нем компактен, и потому такое пространство локально компактно.

(b) Понятия, введенные в пп.12.5-2—12.5-4, а, дают удобную терминологию для многих задач, касающихся приближения произвольного элемента x подходящего класса C_M последовательностью элементов x_0, x_1, x_2, \dots из C_M . В таких случаях $d(x_n, x)$ измеряет **ошибку приближения**.

П р и м е р ы. Важные приложения имеет приближение функции $f(t)$ последовательностью функций $s_0(t), s_1(t), s_2(t), \dots$ (частичные суммы бесконечного ряда). Если дано пространство C функций $f(t), g(t), \dots$, непрерывных в интервале $0 < t < 1$, то можно использовать метрики:

$$d_1(f, g) = \max_{0 < t < 1} |f(t) - g(t)|$$

(максимальная ошибка — ведет к определению равномерной сходимости, п.4.4-4);

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(\tau) - g(\tau)|^2 d\tau$$

(средняя квадратическая ошибка — ведет к определению сходимости в среднем с показателем 2 и к приближениям по методу наименьших квадратов) и другие. С топологией, определяемой метрикой $d_1(f, g)$, C есть полное и сепарабельное пространство; счетное множество S многоэлементов с рациональными коэффициентами всюду плотно в C и годится, таким образом, для приближений (см. также п.4.7-3).

(c) В любом компактном метрическом пространстве C_M :

1) всякое бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку;

2) если S — произвольное замкнутое множество и A — произвольное семейство открытых множеств пространства C_M , объединение которых содержит S (покрытие множества S), то уже некоторое конечное число множеств из семейства A образует покрытие множества S .

Всякое ограниченное замкнутое подмножество евклидова пространства компактно. Поэтому теоремы 1 и 2, в частности, применимы к ограниченным замкнутым множествам действительных и комплексных чисел и к таким же множествам в двух- и трехмерном евклидовом пространстве. Они называются в этом случае соответственно *теоремой Больцано—Вейерштрасса* и *теоремой Гейне—Бореля о выделении конечного покрытия*.

12.6. ПОРЯДОК

12.6-1. Частично упорядоченные множества.

(а)* **Порядок.** Класс S объектов (элементов) a, b, c, \dots называется **частично упорядоченным** множеством, если между некоторыми парами его элементов a, b , определено отношение порядка (правило предшествования) $a \leq b$ такое, что

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ из } a \leq b \text{ и } b \leq c \text{ следует } a \leq c \text{ (транзитивность),} \\ 2) a \leq a \text{ (рефлексивность).} \end{array} \right\} \quad (12.6-1)$$

Если $a \leq b$ и $a \neq b$, то пишут $a < b$. Часто, кроме того, предполагается, что

$$3) \text{ из } a \leq b \text{ и } b \leq a \text{ следует } a = b^1 \text{ (антисимметричность).}$$

(12.6-1а)

Для любого подмножества частично упорядоченного множества, так же как в п.4.3-3, можно определить понятия верхней границы, нижней границы, точной нижней границы, точной верхней границы, наибольшего и наименьшего элементов. Если частично упорядоченное множество удовлетворяет условию 3), то точная верхняя (точная нижняя) граница любого его подмножества, если она существует, единственна.

Частично упорядоченное множество называется **полным** (полной структурой), если в нем выполняется условие 3) и если каждое непустое его подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Частично упорядоченное множество называется **условно полным**, если в нем выполняется условие 3) и если каждое непустое его подмножество, имеющее верхнюю границу (ограниченное сверху), имеет и точную верхнюю границу. Последнее условие выполняется в том и только в том случае, если каждое непустое его подмножество, имеющее нижнюю границу (ограниченное снизу), имеет и точную нижнюю границу.

(б) **Структуры.** Частично упорядоченное множество называется **структурой**, если в нем выполняется условие 3) п.12.6-1, а и если у каждой пары a, b его элементов имеется (необходимо единственная) точная верхняя граница $\sup(a, b)$ и (необходимо единственная) точная нижняя граница $\inf(a, b)$. В каждой структуре можно определить «сумму» $a + b \equiv \sup(a, b)$ и «произведение» $ab \equiv \inf(a, b)$ любых двух элементов. Так определенные сумма и произведение обладают свойствами 1) — 6), перечисленными в п.12.8-4; структуры, обладающие, кроме того, и свойствами 7) и 8), являются булевыми алгебрами.

12.6-2. Линейно упорядоченные множества. Класс S элементов a, b, c, \dots называется **линейно (просто, совершенно) упорядоченным** множеством (цепью), если в нем определено отношение порядка, удовлетворяющее условиям 1), 2) и 3) п.12.6-1, а и, кроме того, условию, что для любой пары a, b различных элементов множества S либо $a < b$, либо $b < a$.

Линейно упорядоченное множество S называется **вполне упорядоченным** множеством, если всякое непустое его подмножество имеет наименьший элемент.

12.6-3*. Упорядоченные поля (см. также пп.1.1-5 и 12.3-1).

(а) Коммутативное поле K называется **упорядоченным** полем, если некоторые его элементы называются **положительными** (>0) и если выполняются условия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ для всякого элемента } a \in K \text{ имеет место одно и только одно из трех отношений: } a > 0, a = 0, -a > 0; \\ 2) \text{ из } a > 0 \text{ и } b > 0 \text{ следует } a + b > 0 \text{ и } ab > 0. \end{array} \right\} \quad (12.6-2)$$

Если $-a > 0$, то элемент a называют **отрицательным** и пишут $a < 0$. Если положить $a > b$, когда $a - b > 0$, то поле становится линейно упорядоченным множеством (п.12.6-2).

(б) Всякое условно полное (п.12.6-1, а) упорядоченное поле изоморфно (по сложению и умножению) полю действительных чисел. Любая упорядоченная область целостности, множество положительных элементов которой вполне упорядочено (п.12.6-2), изоморфна кольцу целых чисел.

¹⁾ Некоторые авторы это условие формулируют в виде: « $a < b$ исключает $b < a$ ».

12.7. КОМБИНАЦИИ МОДЕЛЕЙ: ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПРЯМАЯ СУММА

12.7-1. Декартово произведение. Пусть C_1, C_2, \dots некоторые классы объектов. В пп.12.7-1—12.7-5 рассматривается новый класс C , элементы которого представляют собой всевозможные упорядоченные множества $\{a_1, a_2, \dots\}$ объектов a_1, a_2, \dots , взятых соответственно из классов C_1, C_2, \dots . По определению

$$\{a_1, a_2, \dots\} = \{b_1, b_2, \dots\}$$

в том и только в том случае, если $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$. Класс C называется **декартовым произведением** классов C_1, C_2, \dots . Этот метод комбинирования математических объектов ассоциативен:

$$\{a_1, \{a_2, a_3\}\} \equiv \{\{a_1, a_2\}, a_3\} \equiv \{a_1, a_2, a_3\}. \quad (12.7-1)$$

Остается связать операции в C с операциями в C_1, C_2, \dots

12.7-2. Прямое произведение групп (см. также п.12.2-1). **Прямым произведением** $G = G_1 \otimes G_2$ двух групп G_1 и G_2 называется группа, образованная всеми упорядоченными парами $\{a_1, a_2\}$, где a_1 — любой элемент группы G_1 , а a_2 — любой элемент группы G_2 с умножением, определяемым формулой

$$\{a_1, a_2\}\{b_1, b_2\} \equiv \{a_1 b_1, a_2 b_2\}. \quad (12.7-2)$$

Порядок группы G равен произведению порядков групп G_1 и G_2 . Группа G имеет единицу $E = \{E_1, E_2\}$, где E_1 и E_2 — единицы соответственно в G_1 и в G_2 . Если у групп G_1 и G_2 нет общих элементов, то $\{a_1, a_2\}$ можно записывать как **внешнее произведение** $a_1 a_2$, причем $a_1 E_2 = a_1, E_1 a_2 = a_2$ и G_1 и G_2 — подгруппы в G .

П р и м е р ы. Любая скалярная величина в физике является внешним произведением числа и единицы измерения. Выражения вида

$$\text{работа} = \text{масса} \times \text{ускорение} \times \text{перемещение}$$

— тоже внешние произведения.

12.7-3. Прямое произведение действительных векторных пространств (см. также пп.12.4-1, 14.2-1 и 14.2-4). **Прямым произведением** $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ двух действительных векторных пространств \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 называется действительное векторное пространство, образованное всеми упорядоченными парами (внешними произведениями) $\{a_1, a_2\} \equiv a_1 a_2$, где a_1 — любой элемент из \mathcal{U}_1 , а a_2 — любой элемент из \mathcal{U}_2 с векторным сложением и умножением векторов на скаляры, определяемыми формулами

$$\left. \begin{aligned} a_1(a_2 + b_2) &\equiv a_1 a_2 + a_1 b_2, & (a_1 + b_1)a_2 &\equiv a_1 a_2 + b_1 a_2, \\ \alpha a_1 a_2 &\equiv (\alpha a_1) a_2 \equiv a_1 (\alpha a_2). \end{aligned} \right\} \quad (12.7-3)$$

Линейная размерность векторного пространства \mathcal{U} равна произведению линейных размерностей пространств \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 .

П р и м е р. Построение тензоров как внешних произведений векторов приведено в пп.16.3-6, 16.6-1 и 16.9-1.

12.7-4. Топологическое произведение (см. также п.12.5-1). **Топологическое произведение** двух топологических пространств C_1 и C_2 есть их декартово произведение с топологией (семейством открытых множеств), определяемой следующим образом: открытое множество есть декартово произведение любых двух множеств S_1 и S_2 , где S_1 — открытое множество в C_1 , а S_2 — открытое множество в C_2 .

12.7-5. Прямая сумма.

(а) Прямой суммой $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ двух векторных пространств \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 , взятых над одним и тем же кольцом скаляров R , называется векторное

пространство, образованное всеми парами $[a_1, a_2]$, где a_1 — любой элемент из \mathcal{U}_1 , а a_2 — любой элемент из \mathcal{U}_2 , с векторным сложением и умножением векторов на скаляры α из R , определяемыми формулами

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] \equiv [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \quad \alpha[a_1, a_2] \equiv [\alpha a_1, \alpha a_2]. \quad (12.7-4)$$

Размерность пространства \mathcal{U} равна сумме размерностей пространств \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 . Если \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 не имеют общих элементов, то можно писать $[a_1, a_2] = a_1 + a_2$ и пространства \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 являются тогда подпространствами \mathcal{U} . Каждое линейное векторное пространство размерности, большей чем единица, может быть представлено в виде прямой суммы его непересекающихся подпространств.

(b) Прямой суммой $R' = R_1 \oplus R_2$ двух колец R_1 и R_2 называется кольцо, образованное всеми упорядоченными парами (часто называемыми прямыми суммами) $[a_1, a_2]$, со сложением и умножением, определяемыми формулами

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] \equiv [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \quad [a_1, a_2][b_1, b_2] \equiv [a_1 b_1, a_2 b_2]. \quad (12.7-5)$$

(c) Прямая сумма двух линейных алгебр (п.12.4-2) есть линейная алгебра из упорядоченных пар со сложением, умножением и умножением на скаляр, определяемыми формулами (4) и (5).

12.8. БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

12.8-1. Булевы алгебры. Булевой алгеброй называется класс \mathcal{S} объектов A, B, C, \dots , в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

- (a) Для всех A, B, C из \mathcal{S}
 - 1) \mathcal{S} содержит $A+B$ и AB (замкнутость);
 - 2) $A+B = B+A, \quad AB = BA$ } (коммутативные законы);
 - 3) $A+(B+C) = (A+B)+C, \quad A(BC) = (AB)C$ } (ассоциативные законы);
 - 4) $A(B+C) = AB+AC, \quad A+BC = (A+B)(A+C)$ } (дистрибутивные законы);
 - 5) $A+A = AA = A$ (свойства идемпотентности);
 - 6) $A+B = B$ в том и только в том случае, если $AB = A$ (свойство совместимости).
- (b) Кроме того,
 - 7) \mathcal{S} содержит элементы I и 0 такие, что для всякого элемента A из \mathcal{S}

$$A+0 = A, \quad AI = A, \quad A0 = 0, \quad A+I = I;$$

- 8) для каждого элемента A класс \mathcal{S} содержит элемент \tilde{A} (дополнение элемента A , часто обозначаемое символами \bar{A} или $I-A$) такой, что

$$A + \tilde{A} = I, \quad A\tilde{A} = 0.$$

В каждой булевой алгебре

$$A(A+B) \equiv A+AB \equiv A \quad (\text{законы поглощения}), \quad (12.8-1)$$

$$\left. \begin{aligned} (\overline{A+B}) &\equiv \tilde{A}\tilde{B}, \\ (\overline{AB}) &\equiv \tilde{A}+\tilde{B} \end{aligned} \right\} \quad (\text{двойственность}), \quad (12.8-2)$$

$$\tilde{\tilde{A}} \equiv A, \quad \tilde{I} = 0, \quad \tilde{0} = I, \quad (12.8-3)$$

$$A + \tilde{A}\tilde{B} \equiv A+B, \quad AB+AC+B\tilde{C} \equiv AC+B\tilde{C}. \quad (12.8-4)$$

Если $A + B = B$, то вместо $\bar{A}B$ можно писать $B - A$ (дополнение A до B). Элементы A, B, C, \dots булевой алгебры называются дизъюнктивными, если попарные произведения любых элементов этого множества равны 0.

Символы \cup и \cap , используемые в пп. 4.3-2, а, 12.8-5, б и 18.2-1 для обозначения объединения и пересечения множеств и событий, часто употребляются и для обозначения логического сложения и умножения в любой булевой алгебре, причем вместо $A + B$ пишут $A \cup B$, а вместо AB пишут $A \cap B$.

12.8-2. Булевы функции. Приведение к каноническому виду. Если даны n булевых переменных X_1, X_2, \dots, X_n , каждое из которых может быть равно любому элементу данной булевой алгебры, то булевой функцией

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

называется выражение, получаемое из X_1, X_2, \dots, X_n путем сложения, умножения и взятия дополнения.

В каждой булевой алгебре существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций n переменных. Всякая булева функция либо тождественно равна 0, либо может быть единственным образом представлена в виде суммы минимальных

многочленов Z_1, Z_2, \dots, Z_n , где Z_i равно или X_i , или \bar{X}_i (канонический вид булевой функции; геометрическую иллюстрацию см. на рис. 12.8-1). Данную булеву функцию $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ можно привести к каноническому виду следующим образом:

- 1) пользуясь равенством (2), разложить дополнения к суммам и произведениям;
- 2) с помощью первого дистрибутивного закона свести функцию $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ к сумме произведений;
- 3) с помощью тождеств $X_i X_i \equiv X_i$ и $X_i \bar{X}_i \equiv 0$ и равенства (4) упростить полученное выражение;
- 4) если какой-либо член f не содержит одной из переменных, например X_i , то переписать f в виде $fX_i + f\bar{X}_i$.

Во многих приложениях (например, при проектировании переключательных цепей, п.12.8-6) может оказаться полезным опустить шаг 4) и, продолжив шаг 3), как можно больше упростить каждый член разложения.

12.8-3. Отношение включения (см. также п.12.6-1).

(а) Равенство $A + B = B$, или $AB = A$, эквивалентно рефлексивному отношению частичного упорядочения $A \leq B$ [или $B \geq A$; (логическое) отношение включения].

(б) Во всякой булевой алгебре из $A < B$ и $B < A$ следует $A = B$ и

$$A + B \equiv \sup(A, B), \quad AB \equiv \inf(A, B), \quad (12.8-5)$$

где границы определяются отношением включения. Каждая булева алгебра является структурой (п.12.6-1, б).

(с) Если A — произвольный элемент булевой алгебры \mathcal{B} , то элементы $XA < A$ алгебры \mathcal{B} образуют булеву алгебру, в которой A играет роль 1.

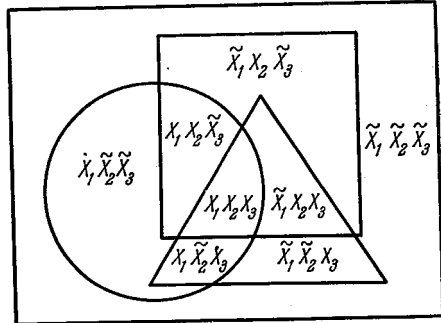


Рис. 12.8-1 Диаграмма Венна (диаграмма Эйлера). Диаграммы этого типа иллюстрируют отношения в алгебре классов (п. 12.8-5). Если прямоугольник, круг, квадрат и треугольник обозначить соответственно через I, X_1, X_2, X_3 , то диаграмма показывает, что всякая булева функция от X_1, X_2, X_3 может быть представлена как объединение минимальных многочленов от X_1, X_2, X_3 (п. 12.8-2). Заметим, что имеется $2^3 = 8$ различных минимальных многочленов.

12.8-4. Полная аддитивность. Алгебры меры (см. также пп.4.6-14, 18.2-1, 18.2-2 и 18.2-7). Булева алгебра \mathcal{F} называется вполне аддитивной, если каждая бесконечная сумма $A_1 + A_2 + \dots$ единственным образом определена как элемент \mathcal{F} . Вполне аддитивная булева алгебра \mathcal{F} называется алгеброй меры, если существует действительная функция (мера) $M(A)$, определенная для всех элементов $A \in \mathcal{F}$ и такая, что

- 1) $M(A) \geq 0$,
- 2) $M(0) = 0$,
- 3) $M(A_1 + A_2 + \dots) = M(A_1) + M(A_2) + \dots$ для любого конечного или счетного множества элементов A_1, A_2, \dots , удовлетворяющего условию: $A_i A_k = 0$ при $i \neq k$.

12.8-5. Примеры и приложения.

(а) Алгебра классов. Подмножества (подклассы) A, B, \dots любого множества (класса) I образуют булеву алгебру (алгебру классов) по отношению к операциям логического сложения (объединения), логического умножения (пересечения) и взятия дополнения, определенного в п.4.3-2,а. Пустое множество (или любое множество, не содержащее ни одного элемента из I) обозначают символом 0. Отношение \subset (п.12.8-3) превращается в логическое отношение включения \subset .

(б) Алгебры событий и символическая логика. Алгебры событий (п.18.2-1) служат моделями для комбинирования событий. В двузначной (аристотелевой) логике алгебра гипотетических событий (логических высказываний, утверждений) E связана с более простой булевой алгеброй значений истинности $T[E]$, равных или I' (E истинно) или 0 (E ложно), гомоморфизмом (п.12.1-6)

$$T[I] = I', \quad T[0] = 0,$$

$$T[E_1 \cup E_2] = T(E_1) + T(E_2), \quad T[E_1 \cap E_2] = T[E_1]T[E_2].$$

На основании этих предложений высказывание E либо истинно, либо ложно (закон исключенного третьего), и значение истинности любого высказывания E , представимого как булева функция от множества событий E_1, E_2, \dots (логически связанного с этим множеством), дается формулой

$$T[E] = T\{F(E_1, E_2, \dots)\} = T\{F\{T[E_1], T[E_2], \dots\}\}, \quad (12.8-6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 0+0 &= 0, & 0+I' &= I', & I'+I' &= I', \\ 00 &= 0, & 0I' &= 0, & I'I' &= I'. \end{aligned} \right\} \quad (12.8-7)$$

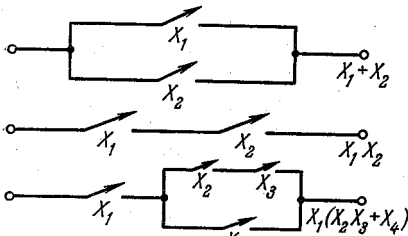


Рис. 12.8-2. Электрические переключательные цепи, представляющие булевы функции в булевой алгебре, содержащей только элементы 0 и 1. Каждый выключатель или комбинация выключателей представляет 0, если цепь разомкнута, и 1, если цепь замкнута.

12.8-6. Изоморфизмы булевых алгебр. Две булевы алгебры изоморфны (по отношению к сложению, умножению и взятию дополнения, п.12.1-6) в том и только в том случае, если они имеют одно и то же число элементов. Всякая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре классов (п.12.8-5). Диаграммы Венна (диаграммы Эйлера), подобные диаграмме, изображенной на рис. 12.8-1, наглядно иллюстрируют свойства булевых алгебр с помощью алгебры классов.

На рис. 12.8-2 изображены электрические переключательные цепи, представляющие булевы функции в булевой алгебре, содержащей только элементы 0 и 1, такой, как алгебра значений истинности в п.12.8-5, б. Диаграммы и фактически осуществленные цепи такого типа помогают при решении задач в алгебре высказываний и связывают проектирование электрических переключательных цепей и электронных вычислительных машин с формулами булевых алгебр.

МАТРИЦЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

13.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Матрицы (п.13.2-1) — это строительные блоки важного класса математических моделей. Аппарат матриц позволяет *более просто представлять различные математические и физические операции с помощью числовых операций над элементами матриц.*

Для большей легкости ссылок в пп.13.2-1—13.4-7 алгебра матриц и матричное исчисление вводятся как независимый объект, а в гл. 14 описывается действительное применение матриц для представления векторов, линейных преобразований (линейных операторов) и скалярного произведения.

В пп.13.5-1—13.5-6 подобным же образом квадратичные и эрмитовы формы вводятся с точки зрения алгебры; их действительное значение для представления скалярного произведения выясняется в пп.14.7-1 и 14.7-2.

13.2. АЛГЕБРА МАТРИЦ И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

13.2-1. Прямоугольные матрицы

(а) Если собираются воспользоваться какой-либо из «матричных операций», определяемых в п.13.2-2, то таблицу

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv [a_{ik}] \quad (13.2-1)$$

«скаляров» a_{ik} , взятых из коммутативного поля F (п.12.3-1), называют (прямоугольной) матрицей размера $m \times n$ над полем F . Элементы a_{ik} называются элементами матрицы; элемент a_{ik} расположен в i -й строке и в k -м столбце матрицы (1); m есть число строк, а n — число столбцов. Матрица конечна, если она имеет конечное число строк и конечное число столбцов; в противном случае она бесконечна.

Матрица (1) над полем комплексных чисел ограничена, если она имеет конечную норму, по определению равную

$$\|A\| \equiv \sup \left| \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k \right| \quad \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^2 = 1 \right) \quad (13.2-2)$$

(см. также п.14.4-1). Конечная матрица над полем комплексных чисел всегда ограничена.

В этом справочнике все матрицы предполагаются конечными матрицами над полем комплексных чисел *). Матрица $A \equiv [a_{ik}]$ называется действительной, если все ее элементы a_{ik} — действительные числа.

(b) Матрица размера $n \times 1$ называется **столбцом**, а матрица размера $1 \times n$ — **строкой**. Будут применяться следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \equiv \{\xi_i\} \equiv x, \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \end{pmatrix} \equiv [\xi_k] \equiv x', \quad (13.2-3)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \dots \bar{\xi}_n \end{pmatrix} \equiv [\bar{\xi}_k] = x^*,$$

где $\bar{\xi}_k$ — комплексное число, сопряженное с ξ_k (см. также пп.13.3-1, 14.5-1 и 14.5-2).

(c) Матрица размера $n \times n$ называется **квадратной матрицей порядка n** . Квадратная матрица $A \equiv [a_{ik}]$ называется

треугольной (наддиагональной), если из $i > k$ следует $a_{ik} = 0$,

строго треугольной, если из $i \geq k$ следует $a_{ik} = 0$,

диагональной, если из $i \neq k$ следует $a_{ik} = 0$,

мономиальной, если в каждой ее строке и в каждом столбце имеется лишь один элемент, отличный от нуля.

13.2-2. Основные операции. Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

1. Две матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ и $B \equiv [b_{ik}]$ размера $m \times n$ равны друг другу ($A = B$) в том и только в том случае, если $a_{ik} = b_{ik}$ для всех i и k (см. также п.12.1-3).

2. Сумма двух матриц $A \equiv [a_{ik}]$ и $B \equiv [b_{ik}]$ размера $m \times n$ есть матрица размера $m \times n$

$$A + B \equiv [a_{ik}] + [b_{ik}] \equiv [a_{ik} + b_{ik}].$$

3. Произведение матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $m \times n$ на скаляр α есть матрица размера $m \times n$

$$\alpha A \equiv \alpha [a_{ik}] \equiv [\alpha a_{ik}].$$

4. Произведение матрицы $A \equiv [a_{ij}]$ размера $m \times n$ на матрицу $B \equiv [b_{jk}]$ размера $n \times r$ есть матрица $C \equiv [c_{ik}]$ размера $m \times r$

$$C = AB \equiv [a_{ij}][b_{jk}] \equiv [c_{ik}],$$

где

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Таким образом элемент c_{ik} матрицы $C = AB$ есть сумма произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B . В каждом произведении матриц AB число n столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B (**форма матриц A и B должна быть согласованной**). Из существования произведения AB вовсе не следует существование произведения BA . Если существуют оба произведения AB и BA (это, в частности, будет всегда, если A и B — квадратные матрицы одного

*) Бесконечные матрицы рассматриваются, например, в [13.1].

и того же порядка), то, вообще говоря, $BA \neq AB$ (см. также п.13.4-4). Отметим, что

$$\left. \begin{aligned} A+B &= B+A, & A+(B+C) &= (A+B)+C, \\ \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A, & \alpha(AB) &= (\alpha A)B = A(\alpha B), \\ A(BC) &= (AB)C, \\ \alpha(A+B) &= \alpha A + \alpha B, & (\alpha+\beta)A &= \alpha A + \beta A, \\ A(B+C) &= AB+AC, & (B+C)A &= BA+CA. \end{aligned} \right\} (13.2-4)$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|. \quad (13.2-5)$$

13.2-3. Нулевая и единичная матрицы; обратные матрицы. Отметим следующие определения:

1. **Нулевая матрица** $[0]$ размера $m \times n$ есть матрица этого размера, все элементы которой равны нулю. Тогда

$$A + [0] = A, \quad [0]B = C[0] = [0],$$

где A — произвольная матрица размера $m \times n$, B — произвольная матрица, имеющая n строк, и C — произвольная матрица, имеющая m столбцов.

2. **Аддитивно обратная (противоположная) матрица** — A для матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $m \times n$ есть матрица размера $m \times n$:

$$-A \equiv (-1)A \equiv [-a_{ik}];$$

тогда $A + (-A) \equiv A - A = [0]$.

3. **Единичная матрица** I порядка n есть диагональная матрица размера $n \times n$ с единичными диагональными элементами:

$$I \equiv [\delta_{ik}], \quad \text{где} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases}$$

(см. также п.16.5-2). Тогда

$$IB = B, \quad CI = C,$$

где B — произвольная матрица, имеющая n строк, а C — произвольная матрица, имеющая n столбцов; для любой же квадратной матрицы A порядка n

$$IA = AI = A.$$

4. Квадратная матрица A называется **неособенной (вырожденной)**, если она имеет (необходимо единственную) **мультипликативно обратную** или просто **обратную** матрицу A^{-1} , определяемую условиями

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

В противном случае A — **особенная (вырожденная) матрица**.

Квадратная матрица $A \equiv [a_{ik}]$ порядка n является невырожденной в том и только в том случае, если $\det(A) \equiv \det[a_{ik}] \neq 0$; в этом случае A^{-1} есть квадратная матрица того же порядка n :

$$A^{-1} \equiv [a_{ik}]^{-1} \equiv \left[\frac{A_{ki}}{\det[a_{ik}]} \right],$$

где A_{ki} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $\det[a_{ik}]$ (см. также пп.1.9-2 и 14.5-3).

Квадратная матрица не вырождена в том и только в том случае, если ее строки (столбцы) линейно независимы.

Произведение двух невырожденных матриц и матрица, обратная невырожденной матрице, не вырождены; если A и B не вырождены и $\alpha \neq 0$, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A. \quad (13.2-6)$$

13.2-4. Целочисленные степени квадратных матриц. По определению $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ... и, если A — невырожденная матрица,

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = (A^p)^{-1} \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Применимы обычные правила действий со степенями (см. также п.14.3-6).

13.2-5. Матрицы как строительные блоки математических моделей. Из определений пп.13.2-2 и 13.2-3 (конструктивные определения, п.12.1-1) вытекают следующие результаты:

1. Для любой пары натуральных чисел m и n класс всех матриц размера $m \times n$ над полем F есть mn -мерное векторное пространство над F (пп.12.4-1 и 14.2-4). В частности, строки или столбцы из n элементов образуют n -мерные векторные пространства (см. также п.14.5-2).

2. Класс всех квадратных матриц данного порядка n над полем F есть линейная алгебра порядка n^2 над F ; вырожденные матрицы являются делителями нуля (п.12.4-2).

3. Класс всех невырожденных квадратных матриц данного порядка n над полем F образует мультипликативную группу (п.12.2-1) и вместе с нулевой матрицей размера $n \times n$ — алгебру с делением порядка n^2 над полем F (п.12.4-2).

Аналогичные теоремы справедливы и для ограниченных бесконечных матриц над полем действительных или комплексных чисел.

13.2-6*. Умножение на матрицы специального вида. Матрицы перестановки. Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n . Тогда

1. Если B — матрица, полученная из единичной матрицы n -го порядка заменой числа 1 в i -й строке на комплексное число α , то матрица AB получается из матрицы A умножением всех элементов i -го столбца на α .

Матрица BA получается из матрицы A умножением всех элементов i -й строки на α .

2. Если C — матрица, полученная из единичной матрицы n -го порядка заменой недиагонального элемента $\delta_{ik} = 0$ на 1, то матрица AC получается из матрицы A заменой k -го столбца на сумму k -го и i -го столбцов. Матрица CA получается из матрицы A заменой i -й строки на сумму i -й и k -й строк.

3. Если D — матрица перестановки, получающаяся из единичной матрицы перестановкой каких-либо ее двух столбцов (или, что то же самое двух ее строк с теми же номерами), то матрица AD получается из матрицы A перестановкой соответствующих столбцов, а матрица DA перестановкой соответствующих строк.

13.2-7. Ранг, след и определитель матрицы (см. также п.14.3-2). Ранг данной матрицы есть такое число r , что по крайней мере один определитель r -го порядка (п.1.5-1), получаемый из этой матрицы при удалении некоторых строк и/или столбцов, отличен от нуля, а все определители $(r+1)$ -го порядка равны нулю. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк (или столбцов). Квадратная матрица A порядка n является невырожденной в том и только в том случае, если ее ранг $r = n$, т. е. $\det(A) \neq 0$ (п.13.2-3).

След (шпур) матрицы $A = [a_{ik}]$ размера $n \times n$ есть сумма

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

ее диагональных элементов *).

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}(A+B) &= \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), & \text{Tr}(\alpha A) &= \alpha \text{Tr}(A), \\ \text{Tr}(BA) &= \text{Tr}(AB), & \text{Tr}(AB-BA) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.2-7)$$

Для двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка:

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B). \quad (13.2-8)$$

*) Иногда след матрицы обозначают $\text{Sp}(A)$.

13.2-8. Разбиение матриц. Матрица, имеющая более чем одну строку и столбец, прямыми, проведенными между строками и/или столбцами, может быть **разбита** на меньшие прямоугольные **подматрицы**. Две соответствующим образом **разбитые матрицы** A и B размера $n \times n$ можно **перемножить**, пользуясь входящими в них **прямоугольными подматрицами** как **элементами** в обычной формуле произведения матриц (п.13.2-2); получающиеся таким путем **элементы произведения** являются **подматрицами матрицы** AB размера $n \times n$. Эта теорема бывает полезна при некоторых выкладках (п.20.3-4).

13.2-9. Клеточные матрицы. Прямые суммы (см. также пп.13.4-6, 14.8-2 и 14.9-2). **Клеточная матрица** есть квадратная матрица A , которую можно разбить так, чтобы получилась диагональная матрица (п.13.2-1), вдоль диагонали которой идут квадратные подматрицы A_1, A_2, \dots

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ [0] & A_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (13.2-9)$$

Клеточную матрицу часто рассматривают как **прямую сумму**

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$$

квадратных матриц, идущих вдоль ее диагонали (см. также п.12.7-5). Отметим, что $A^p = A_1^p \oplus A_2^p \oplus \dots$ при $p=0, 1, 2, \dots$ (а если A — невырожденная матрица, то и при $p=-1, -2, \dots$) и

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(A_1) + \text{Tr}(A_2) + \dots, \\ \det(A) &= \det(A_1) \det(A_2) \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.2-10)$$

13.2-10. Прямое произведение (внешнее произведение) матриц (см. также п.12.7-3). **Прямое произведение (внешнее произведение)** $A \otimes B$ матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $m \times n$ и матрицы $B \equiv [b_{i'k'}]$ размера $m' \times n'$ есть матрица

$$A \otimes B \equiv [c_{jh}] \quad (c_{jh} = a_{ik} b_{i'k'}) \quad (13.2-11)$$

размера $mm' \times nn'$, где индекс j означает порядковый номер пары (i, i') в последовательности $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, m'), (2, 1), (2, 2), \dots, (m, m')$, а индекс h — порядковый номер пары (k, k') в аналогичной последовательности. Отметим, что

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \quad (13.2-12)$$

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B). \quad (13.2-13)$$

* В (12) предполагается, что число строк матрицы C равно числу столбцов матрицы A и число строк матрицы D равно числу столбцов матрицы B , а в (13) — что A и B — квадратные матрицы.*

13.2-11. Сходимость и дифференцирование.

(а) Последовательность матриц S_0, S_1, S_2, \dots , имеющих одно и то же число строк и одно и то же число столбцов, называется **сходящейся** к матрице S , если при $n \rightarrow \infty$ каждый элемент матрицы S_n сходится к соответствующему элементу матрицы S , т. е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S - S_n\| = 0$. Подобным же образом определяется предел матричной функции $A = A(t)$ скалярного аргумента t (см. также п.12.5-3).

(б) Если элементы матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ являются дифференцируемыми функциями $a_{ik}(t)$ скалярного аргумента t , то пишут

$$\left[\frac{da_{ik}}{dt} \right] \equiv \frac{d}{dt} [a_{ik}(t)] \equiv \frac{d}{dt} A(t). \quad (13.2-14)$$

Частные производные и интегралы от матриц определяются аналогично.

13.2-12. Функции матриц. Матричные многочлены и алгебраические функции матриц определяются с помощью элементарных матричных операций.

Теорема Кэли — Гамильтона (п.13.4-7) каждый сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ по степеням квадратной матрицы A порядка n (аналитическую функцию матрицы A) сводит к некоторому многочлену n -й степени от A .

13.3 МАТРИЦЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ СИММЕТРИИ

13.3-1. Транспонированная и эрмитова сопряженная матрица (см. также пп.14.4-3 и 14.4-6,а). Если $A \equiv [a_{ik}]$ — произвольная матрица размера $m \times n$ над полем комплексных чисел, то

Матрица, **транспонированная** по отношению к A , есть матрица $A' \equiv [a_{ki}]$ размера $n \times m$. Матрица, **эрмитово сопряженная** с A (просто сопряженная, присоединенная, ассоциированная)¹⁾, есть матрица

$A^* \equiv [\bar{a}_{ki}]$ размера $n \times m$.

Отметим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (A+B)' &= A'+B', & (\alpha A)' &= \alpha A', & (AB)' &= B'A', \\ (A^{-1})' &= (A')^{-1}, & (A')' &= A, & \|A'\| &= \|A\|, \\ [0]' &= [0] & I' &= I; \end{aligned} \right\} \quad (13.3-1)$$

$$\left. \begin{aligned} (A+B)^* &= A^*+B^*, & (\alpha A)^* &= \bar{\alpha} A^*, & (AB)^* &= B^*A^*, \\ (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1}, & (A^*)^* &= A, & \|A^*\| &= \|A\|, \\ [0]^* &= [0], & I^* &= I. \end{aligned} \right\} \quad (13.3-2)$$

Матрицы A , A' и A^* необходимо имеют один и тот же ранг. Для каждой квадратной матрицы A

$$\text{Tr}(A') = \text{Tr}(A), \quad \det(A') = \det(A); \quad (13.3-3)$$

$$\text{Tr}(A^*) = \overline{\text{Tr}(A)}, \quad \det(A^*) = \overline{\det(A)}. \quad (13.3-4)$$

13.3-2. Матрицы со специальными свойствами симметрии (см. также пп.14.4-4 — 14.4-6). Квадратная матрица $A \equiv [a_{ik}]$ называется

симметрической, если $A' = A$, т. е. если $a_{ik} = a_{ki}$,

кососимметрической (антисимметрической), если $A' = -A$, т. е. если $a_{ik} = -a_{ki}$,

эрмитовой (самосопряженной), если $A^* = A$, т. е. если $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$,

косоэрмитовой (альтернирующей), если $A^* = -A$, т. е. если $a_{ik} = -\bar{a}_{ki}$,

ортогональной, если $A'A = AA' = I$, т. е. если $A' = A^{-1}$

унитарной, если $A^*A = AA^* = I$, т. е. если $A^* = A^{-1}$.

Эрмитова матрица является симметрической, косоэрмитова — кососимметрической и унитарная — ортогональной в том и только в том случае, если все их элементы действительны. Диагональные элементы эрмитовой, косоэрмитовой и кососимметрической матрицы соответственно действительны, чисто мнимы и равны нулю.

¹⁾ Термины *сопряженная*, *присоединенная* и *ассоциированная* употребляются в различных смыслах (см. также пп.12.2-5, 14.4-3, 16.7-1 и 16.7-2); некоторые авторы называют присоединенной к A матрицу $A^{-1} \det(A)$ (состоящую из алгебраических дополнений с переставленными индексами). Символы A' , A^* и $\bar{A} \equiv [\bar{a}_{ik}] = [A']^*$, обозначающие соответственно матрицу транспонированную, эрмитово сопряженную и комплексно сопряженную с данной матрицей A , также варьируются; некоторые авторы матрицу, эрмитово сопряженную с A , обозначают символом A^+ .

Определитель эрмитовой матрицы действителен. Определитель косоэрмитовой матрицы размера $n \times n$ является действительным, если n четно, и чисто мнимым, если n нечетно. Определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю. Определитель унитарной матрицы по модулю равен 1, а определитель ортогональной матрицы равен +1 или -1.

13.3-3. Правила комбинирования (см. также п.14.4-7).

(а) Если A — симметрическая матрица, то и A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , $T'AT$ и αA — симметрические матрицы.

Если T — произвольная невырожденная матрица, то матрица $T'AT$ будет симметрической в том и только в том случае, если симметрической будет и матрица A ; поэтому для любой ортогональной матрицы T матрица $T^{-1}AT$ будет симметрической в том и только в том случае, если симметрической будет и матрица A .

Если A и B — симметрические матрицы, то и $A+B$ — симметрическая матрица. Произведение AB двух симметрических матриц A и B есть симметрическая матрица в том и только в том случае, если $BA=AB$.

(б) Если A — эрмитова матрица, то и A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , T^*AT и αA при действительном α — эрмитовы матрицы.

Если T — произвольная невырожденная матрица, то матрица T^*AT будет эрмитовой в том и только в том случае, если эрмитовой будет и матрица A ; поэтому для любой унитарной матрицы T матрица $T^{-1}AT$ будет эрмитовой в том и только в том случае, если эрмитовой будет и матрица A .

Если A и B — эрмитовы матрицы, то и $A+B$ — эрмитова матрица. Произведение AB двух эрмитовых матриц A и B есть эрмитова матрица в том и только в том случае, если $BA=AB$.

(в) Если A — ортогональная матрица, то и A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , A' и $-A$ — ортогональные матрицы. Если матрицы A и B ортогональны, то и матрица AB ортогональна.

Если A — унитарная матрица, то и A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , A^* и αA при $|\alpha|=1$ — унитарные матрицы. Если матрицы A и B унитарны, то и матрица AB унитарна.

13.3-4. Теоремы о разложении. Нормальные матрицы (см. также пп. 13.4-4,а и 14.4-8).

(а) Для каждой квадратной матрицы A над полем комплексных чисел

1. $\frac{1}{2}(A+A')=S_1$ есть симметрическая, а $\frac{1}{2}(A-A')=S_2$ — кососимметрическая матрица. $A=S_1+S_2$ есть (единственное) разложение данной матрицы A в сумму симметрической и кососимметрической матриц.

2. $\frac{1}{2}(A+A^*)=H_1$ есть эрмитова, а $\frac{1}{2i}(A-A^*)=H_2$ — косоэрмитова матрица. $A=H_1+iH_2$ есть (единственное) разложение данной матрицы A в сумму эрмитовой и косоэрмитовой матриц (аналогичное разложению комплексного числа на действительную и мнимую части).

3. A^*A есть эрмитова (и неотрицательная, п.13.5-3) матрица; существует *полярное разложение* $A=QU$ матрицы A в произведение неотрицательной эрмитовой матрицы Q и унитарной матрицы U . Матрица Q однозначно определяется условием $Q^2=A^*A$, а матрица U однозначно определяется в том и только в том случае, если A — невырожденная матрица (аналогично представлению комплексного числа в виде $z=re^{i\varphi}$).

(б) Квадратная матрица A называется **нормальной** матрицей, если $A^*A=AA^*$, или, эквивалентно, если $H_2H_1=H_1H_2$.

13.4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

13.4-1. Эквивалентные и подобные матрицы (см. также пп.12.2-5, 13.5-4, 13.5-5 и 14.6-2).

(а) Две прямоугольные матрицы A и B эквивалентны, если существуют такие две квадратные невырожденные матрицы S и T , что A и B связаны преобразованием

$$B = SAT. \quad (13.4-1)$$

Каждая матрица B , эквивалентная данной матрице A , имеет столько же строк и столько же столбцов, сколько и матрица A , и может быть получена из A с помощью последовательного применения шести операций, определенных в п.13.2-6. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг; две матрицы размера $m \times n$, имеющие один и тот же ранг, эквивалентны.

Если $B = QA$ или $B = AQ$, где Q — невырожденная матрица, то A и B эквивалентны

(б) В частности, две квадратные матрицы A и \tilde{A} подобны (иногда их называют просто эквивалентными), если существует такая невырожденная матрица T (преобразующая матрица), что A и \tilde{A} связаны преобразованием подобия

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \text{или} \quad A = T\tilde{A}T^{-1}; \quad (13.4-2)$$

A , \tilde{A} и T необходимо являются квадратными матрицами одного и того же порядка.

При каждом преобразовании подобия (2) сохраняется результат сложения матриц, умножения матриц и умножения матрицы на скаляр (см. также п.12.1-6). Две подобные матрицы имеют один и тот же ранг, один и тот же след и один и тот же определитель (см. также п.13.4-2,а).

(с) Две квадратные матрицы A и \tilde{A} , связанные преобразованием

$$\tilde{A} = T^*AT, \quad (13.4-3)$$

где T — невырожденная матрица, называются конгруэнтными. Две квадратные матрицы A и \tilde{A} , связанные преобразованием

$$\tilde{A} = T^*AT, \quad (13.4-4)$$

где T — невырожденная матрица, называются соединенными. В каждом из этих случаев A , \tilde{A} и T необходимо являются квадратными матрицами одного и того же порядка.

(д) Эквивалентность, подобие, конгруэнтность и соединенность матриц являются отношениями эквивалентности; каждое из них определяет разбиение класса рассматриваемых матриц (п.12.1-3,б). В большинстве приложений две или несколько подобных матриц дают различные представления некоторого линейного преобразования (линейного оператора) A (п.14.6-2). В этой связи представляет интерес: 1) нахождение преобразования подобия, дающего особенно простое представление оператора A (приведение данной матрицы к диагональному или какому-либо иному «каноническому» виду), и 2) нахождение свойств матриц, инвариантных относительно преобразований подобия и, таким образом, общих для каждого класса подобных матриц (к числу таких свойств, например, относятся ранг, след, определитель, собственные значения).

13.4-2. Собственные значения и спектры квадратных матриц (см. также п.14.8-3).

(а) Собственными значениями (собственными числами, характеристическими числами) квадратной матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ называются те значения скалярного параметра λ , для которых резольвента $A - \lambda I$ является вырожденной матрицей. Спектр (спектр собственных значений) матрицы A есть множество всех ее собственных значений.

Собственные значения квадратной матрицы A можно определить и непосредственно как собственные значения линейного оператора, представляемого матрицей A (п.14.8-3), подобные матрицы имеют один и тот же спектр.

(b) Если нормальная матрица A ($A^*A = AA^*$, п.13.3-4, б) имеет собственное значение λ , то матрица A^* имеет собственное значение $\bar{\lambda}$, матрица $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ имеет собственное значение $\text{Re } \lambda$ и матрица $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ имеет собственное значение $\text{Im } \lambda$ (см. также п.13.3-4, а).

Все собственные значения данной нормальной матрицы являются действительными в том и только в том случае, если эта матрица подобна некоторой эрмитовой матрице (см. также п. 14.8-4). В частности, все собственные значения эрмитовых и действительных симметрических матриц действительны. Все собственные значения унитарной матрицы по модулю равны 1; в частности, действительные собственные значения действительных ортогональных матриц равны +1 или -1, а их комплексные собственные значения появляются парами $e^{\pm i\varphi}$. Квадратная матрица невырождена в том и только в том случае, если все ее собственные значения отличны от нуля. О вычислениях собственных значений см. пп.13.4-5, а, 14.8-5, 14.8-9 и 20.3-5.

13.4-3. Приведение квадратной матрицы к треугольному виду. Алгебраическая кратность собственного значения (см. также п. 14.8-3, е).

(а) Для любой квадратной матрицы A существует такое преобразование подобия $\tilde{A} = T^{-1}AT$, что \tilde{A} есть треугольная матрица (п.13.2-1, с). Диагональные элементы каждой треугольной матрицы, подобной матрице A , являются собственными значениями матрицы A , и каждое собственное значение λ , матрицы A встречается в качестве диагонального элемента во всякой такой треугольной матрице одно и то же число $m_j \geq 1$ раз; число m_j называется алгебраической кратностью данного собственного значения λ

З а м е ч а н и е. Алгебраическая кратность m_j собственного значения λ_j может не совпадать с его геометрической кратностью n_j , определяемой в п.14.8-3, б.

(b) След $\text{Tr}(A)$ равен сумме всех собственных значений матрицы A , причем каждое собственное значение считается столько раз какова его алгебраическая кратность. Определитель $\det(A)$ (п.13.2-7) равен точно таким же образом подсчитанному произведению собственных значений (см. также п.13.4-5)

13.4-4. Приведение матриц к диагональному виду (см. также п. 14.8-5).

(а) Квадратная матрица A может быть преобразованием подобия приведена к диагональному виду (т. е. существует такая невырожденная преобразующая матрица T , что матрица $\tilde{A} = T^{-1}AT$ диагональна, п.13.2-1, с) в том и только в том случае, если A подобна некоторой нормальной матрице (п.13.3-4, б). Более конкретно, данная матрица A может быть преобразованием подобия с унитарной преобразующей матрицей T (или, если матрица A действительна, с действительной ортогональной преобразующей матрицей) приведена к диагональному виду в том и только в том случае, если A — нормальная матрица ($A^*A = AA^*$, п.13.3-4, б). В любом случае диагональные элементы матрицы \tilde{A} являются собственными значениями матрицы A ; каждое собственное значение матрицы A встречается в качестве диагонального элемента матрицы \tilde{A} ровно столько раз, какова его алгебраическая кратность. Метод, дающий преобразующую матрицу T с нужными свойствами, описан в п.14.8-6.

Частные случаи матриц, приводимых к диагональному виду. Эрмитовы и унитарные матрицы (а потому действительные и симметрические или ортогональные матрицы) представляют собой частные случаи нормальных матриц. Каждая матрица, имеющая собственные значения только алгебраической кратности 1, подобна некоторой нормальной матрице.

(b) Две эрмитовы матрицы A и B могут быть приведены к диагональному виду одним и тем же преобразованием подобия U , в частности, одним

и тем же преобразованием подобия с унитарной преобразующей матрицей T) в том и только в том случае, если $BA = AB$ (см. также пп. 13.5-5 и 14.8-6, e).

(в) Для любой эрмитовой матрицы A существует такая невырожденная матрица T , что матрица $\tilde{A} = T^*AT$ диагональна; диагональные элементы матрицы \tilde{A} в этом случае действительны. В частности, существует такая невырожденная матрица T , что диагональные элементы матрицы \tilde{A} принимают только значения $+1$, -1 и/или 0 .

Для любой действительной симметрической матрицы A существует такая действительная невырожденная матрица T , что матрица $\tilde{A} = T'AT$ диагональна. В частности, существует такая действительная невырожденная матрица T , что диагональные элементы матрицы \tilde{A} принимают только значения $+1$, -1 и/или 0 .

Матрицы T с искомыми свойствами получают из соотношения $T = DU$, где U — унитарная (или действительная ортогональная) матрица, для которой матрица $U^{-1}AU$ диагональна, а D — действительная диагональная матрица; матрицу U находят по методу п. 14.8-6 (см. также п. 13.5-4, d).

13.4-5. Собственные значения и характеристическое уравнение матрицы.

(а) Спектр собственных значений квадратной матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ порядка n совпадает с множеством корней алгебраического уравнения n -й степени

$$F_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) \equiv \det[a_{ik} - \lambda \delta_{ik}] \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13.4-5)$$

(характеристическое уравнение или вековое уравнение матрицы A).

Кратность (порядок, п. 1.6-2) каждого корня λ_j этого уравнения равна его алгебраической кратности m_j как собственного значения, так что $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Подобные матрицы размера $n \times n$ имеют тождественные характеристические уравнения; коэффициенты уравнения (5) являются симметрическими функциями n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (п. 1.6-4). В частности, коэффициент при λ^{n-1} и свободный член уравнения (5) соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) &= (-1)^{n-1} \text{Tr}(A), \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n &= \det(A). \end{aligned} \right\} \quad (13.4-6)$$

Коэффициент при λ^{n-r} равен взятой с множителем $(-1)^r$ сумме всех (r) главных миноров r -го порядка (п. 1.5-4) определителя $\det(A)$.

(б) (См. также п. 14.8-5.) Для любой квадратной матрицы A с собственными значениями λ_j матрица αA имеет собственные значения $\alpha \lambda_j$, а матрица A^p — собственные значения λ_j^p ($p = 0, 1, 2, \dots$, а если A — невырожденная матрица, то $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Каждый многочлен или аналитическая функция $f(A)$ (п. 13.2-12) имеет собственные значения $f(\lambda_j)$.

Матричный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$ сходится (п. 13.2-11, а) в том и только в том случае, если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda_j^k$ сходится для каждого собственного значения λ_j матрицы

A . Если две квадратные матрицы A и B имеют соответственно собственные значения λ_j и μ_j , то спектр собственных значений прямого произведения $A \oplus B$ (п. 13.2-10) является множеством всевозможных произведений $\lambda_j \mu_k$.

13.4-6. Собственные значения клеточных матриц (прямых сумм, п. 13.2-9). Спектр клеточной матрицы (прямой суммы) $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$ есть объединение спектров матриц A_1, A_2, \dots ; алгебраические кратности складываются. Выгляд в спектр каждой конечной подматрицы A_k может быть найден с помощью ее характеристического уравнения.

13.4-7. Теорема Кэли—Гамильтона и смежные вопросы.

(а) Каждая квадратная матрица A удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению (п.13.4-5, а), т. е.

$$F_A(A) = 0 \quad (\text{теорема Кэли—Гамильтона}). \quad (13.4-7)$$

(б) Теорема Кэли—Гамильтона позволяет каждую целочисленную степень, а поэтому и каждую аналитическую функцию квадратной матрицы A порядка n представлять в виде линейной функции от n различных положительных целочисленных степеней матрицы A (см. также п.13.2-12). Точнее

$$f(A) \equiv \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \Delta_{n-k} A^{n-k}, \quad (13.4-8)$$

где Δ — определитель Вандермонда (п.1.6-5) $\det [\lambda_i^{k-1}]$, а Δ_j — определитель, получаемый, если в Δ вместо $\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j$ подставить $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$.

Если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A различны, то равенство (8) можно переписать в виде

$$f(A) \equiv \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (A - \lambda_i I)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)} \quad (\text{теорема Сильвестра}). \quad (13.4-9)$$

13.5. КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

13.5-1. Билинейные формы. Билинейная форма от $2n$ действительных или комплексных переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ есть однородный многочлен второй степени (п.1.4-3)

$$x' Ay \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k. \quad (13.5-1)$$

$x' \equiv [\xi_k]$ — матрица-строка, $y \equiv [\eta_k]$ — матрица-столбец (п.13.2-1, б).

13.5-2. Квадратичные формы. Квадратичная (однородная) форма от n действительных или комплексных переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ есть многочлен

$$x' Ax \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \equiv x' A_1 x, \quad (13.5-2)$$

где $A_1 = (1/2)(A + A')$ — «симметрическая часть» (п.13.3-4) матрицы $A \equiv [a_{ik}]$. Выражение (2) тождественно равно нулю в том и только в том случае, если A — кососимметрическая матрица ($a_{ki} = -a_{ik}$, п.13.3-2). Квадратичная форма (2) называется симметрической, если A — симметрическая матрица ($a_{ki} = a_{ik}$, п.13.3-2), и действительной, если A — действительная матрица (и таким образом, каждый элемент a_{ik} — действительное число, п.13.2-1)*.

Действительная симметрическая квадратичная форма (2) (а также соответствующая действительная симметрическая матрица A) называется положительной определенной, отрицательно определенной, неотрицательной или неположительной, если соответственно $x' Ax > 0$, $x' Ax < 0$, $x' Ax \geq 0$ или $x' Ax \leq 0$

*) Каждой квадратичной форме можно поставить в соответствие бесконечно много различных матриц A , для которых эта форма равна $x' Ax$. Среди них одна матрица (матрица A_1 , о которой шла речь выше) является симметрической. Обычно квадратичную форму записывают именно с помощью этой матрицы и, таким образом, всякая квадратичная форма является симметрической. Квадратичная форма называется действительной, если действительной является эта симметрическая матрица. Например, форма $\xi_1^2 + i\xi_1\xi_2 - i\xi_2\xi_1 + \xi_2^2$ действительна, так как ее симметрическая запись имеет вид $\xi_1^2 + \xi_2^2$.

для каждого набора действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, не все из которых равны нулю. Все остальные квадратичные формы являются **неопределенными** (т. е. знак $x'Ax$ зависит от выбора чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$) или тождественно равными нулю.

Действительная симметрическая квадратичная форма (2) (а также соответствующая действительная симметрическая матрица A) называется **положительно полуопределенной** или **отрицательно полуопределенной**, если соответственно она неотрицательна или неположительна и если $x'Ax = 0$ для некоторого набора $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ действительных чисел, не все из которых равны нулю.

13.5-3. Эрмитовы формы. Эрмитова форма от n действительных или комплексных переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ есть многочлен

$$x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{\xi}_i \xi_k, \quad (13.5-3)$$

где $A \equiv [a_{ik}]$ — эрмитова матрица ($a_{ik} = \bar{a}_{ki}$), а матрица $x^* \equiv [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n]$. Форма (3) принимает действительные значения для каждого набора комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ в том и только в том случае, если A — эрмитова матрица (см. также п.14.4-4).

Эрмитова форма (3), а также соответствующая эрмитова матрица $A \equiv [a_{ik}]$, называется **положительно определенной**, **отрицательно определенной**, **неотрицательной** или **неположительной**, если соответственно $x^*Ax > 0$, $x^*Ax < 0$, $x^*Ax \geq 0$ или $x^*Ax \leq 0$ для каждого набора комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, не все из которых равны нулю. Все остальные эрмитовы формы (или эрмитовы матрицы) являются **неопределенными** (т. е. знак x^*Ax зависит от выбора чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$) или тождественно равными нулю.

Эрмитова форма (3) (а также соответствующая эрмитова матрица A) называется **положительно полуопределенной** или **отрицательно полуопределенной**, если соответственно она неотрицательна или неположительна и если $x^*Ax = 0$ для некоторого набора комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, не все из которых равны нулю.

13.5-4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм. Приведение к сумме квадратов.

(а) Линейная подстановка

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \sum_{k=1}^n t_{ik} \tilde{\xi}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{или} \\ x &= T\tilde{x} \end{aligned} \right\} (\det [t_{ik}] \neq 0) \quad (13.5-4)$$

(невырожденное однородное линейное преобразование координат вектора, пассивная точка зрения, п.14.6-1) переводит каждую квадратичную форму (2) в квадратичную форму от новых переменных $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$:

$$\left. \begin{aligned} x'Ax &\equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_k \equiv \tilde{x}'\tilde{A}\tilde{x}, \\ \text{где} \\ \tilde{a}_{ik} &= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n a_{jkh} t_{ji} t_{hk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \\ \text{или} \\ \tilde{A} &= T'AT. \end{aligned} \right\} \quad (13.5-5)$$

Если A — симметрическая матрица, то и \tilde{A} — симметрическая матрица, если A и T — действительные матрицы, то и \tilde{A} — действительная матрица.

Линейная подстановка (4) переводит каждую эрмитову форму (3) в новую эрмитову форму:

$$x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \bar{\xi}_i \xi_k,$$

где

$$\tilde{a}_{ik} = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n a_{jkh} \bar{t}_{ji} \bar{t}_{hk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (13.5-6)$$

или

$$\tilde{A} = T^*AT.$$

(б) Для каждой данной действительной симметрической квадратичной формы (2) существует такое линейное преобразование (4) с действительными коэффициентами t_{ik} , что новая матрица \tilde{A} в (5) является диагональной (см. также п.13.4-4), так что

$$x^*Ax \equiv \tilde{x}^* \tilde{A} \tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} \tilde{\xi}_i^2. \quad (13.5-7)$$

Точно так же для данной эрмитовой формы (3) существует такое линейное преобразование (4), что

$$x^*Ax \equiv \tilde{x}^* \tilde{A} \tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} |\tilde{\xi}_i|^2. \quad (13.5-8)$$

Число r , отличных от нуля коэффициентов в равенствах (7) или (8) не зависит от выбора преобразования, приводящего матрицу A к диагональному виду, и равно рангу матрицы A ; число r называется **рангом** данной квадратичной или эрмитовой формы. Для любой данной действительной симметрической квадратичной формы (2) разность между числом положительных и числом отрицательных коэффициентов \tilde{a}_{ii} в равенстве (7) не зависит от выбора преобразования, приводящего матрицу A к диагональному виду (закон инерции квадратичных форм); это число называется **сигнатурой** данной квадратичной формы. В точности такое же утверждение справедливо и для эрмитовых форм (закон инерции эрмитовых форм).

(в) В частности, для каждой действительной симметрической квадратичной формы (2) существует **действительная ортогональная матрица** T , а для каждой эрмитовой формы (3) — **унитарная матрица** T , приводящая матрицу A к диагональному виду (см. также п.13.4-4). Получающееся в результате преобразование к **главным осям** (преобразование к **нормальным координатам** $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$, см. также п.9.4-8) дает **нормальный вид** данной квадратичной или эрмитовой формы,

$$x^*Ax \equiv \tilde{x}^* \tilde{A} \tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{\xi}_i^2 \quad \text{или} \quad x^*Ax \equiv \tilde{x}^* \tilde{A} \tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i |\tilde{\xi}_i|^2, \quad (13.5-9)$$

где множество действительных чисел λ_i составляет спектр собственных значений данной матрицы A (п.13.4-2).

(г) Добавочное преобразование $\tilde{\xi}_i = \xi_i / \sqrt{|\lambda_i|}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) приводит выражения (9) к **каноническому виду**

$$x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xi_i^2 \quad \text{или} \quad x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_i |\xi_i|^2, \quad (13.5-10)$$

где каждый коэффициент ε_i равен $+1$, -1 или 0 , если соответствующее собственное значение λ_i положительно, отрицательно или равно нулю.

(е) Вопрос о нахождении подходящих матриц, приводящих данную матрицу A к диагональному виду, рассмотрен в п.14.8-6.

13.5-5. Одновременное приведение двух квадратичных или эрмитовых форм к сумме квадратов (см. также пп.13.4-4, б и 14.8-7.) Если даны две действительные симметрические квадратичные формы $x'Ax$ и $x'Bx$, причем $x'Bx$ — положительно определенная форма, то можно найти действительное преобразование (4), одновременно приводящее к сумме квадратов формы $x'Ax$ и $x'Bx$. В частности, существует такое действительное преобразование (4) к новым координатам $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$, что

$$x'Ax \equiv \tilde{x}'\tilde{A}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \mu_i \tilde{\xi}_i^2, \quad x'Bx \equiv \tilde{x}'\tilde{B}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i^2. \quad (13.5-11)$$

Точно так же, если даны две эрмитовы формы x^*Ax и x^*Bx , причем x^*Bx — положительно определенная форма, то существует такое преобразование (4) к новым координатам $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$, что

$$x^*Ax \equiv \tilde{x}^*\tilde{A}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n \mu_i |\tilde{\xi}_i|^2, \quad x^*Bx \equiv \tilde{x}^*\tilde{B}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^n |\tilde{\xi}_i|^2. \quad (13.5-12)$$

В любом случае множество действительных чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ составляет спектр собственных значений матрицы $B^{-1}A$, получаемый как множество корней алгебраического уравнения n -й степени

$$\det(A - \mu B) \equiv \det[a_{ik} - \mu b_{ik}] = 0. \quad (13.5-13)$$

Известную матрицу преобразования T можно найти по методу п.14.8-7 или же с помощью равенства $T = UT_0$, где T_0 — матрица преобразования, приводящего форму $x'Bx$ или x^*Bx к каноническому виду (п.13.5-4, д), а U — унитарная матрица, приводящая форму $x'Ax$ или x^*Ax к сумме квадратов (п.13.5-4, с).

З а м е ч а н и е. Две действительные симметрические квадратичные формы $x'Ax$ и $x'Bx$ или две эрмитовы формы x^*Ax и x^*Bx можно одновременно привести к сумме квадратов с помощью одной и той же унитарной матрицы преобразования T в том и только в том случае, если $BA = AB$ (см. также пп.13.4-4, б и 14.8-6, е).

13.5-6. Признаки положительной определенности, неотрицательности и т. д.

(а) Действительная симметрическая квадратичная форма, или эрмитова форма, является положительно определенной, отрицательно определенной, неотрицательной, неположительно определенной, неопределенной или тождественно равной нулю (пп.13.5-2 и 13.5-3) в том и только в том случае, если (необходимо действительные) собственные значения λ_j матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ соответственно все положительны, все отрицательны, все неотрицательны, все неположительно, имеют различные знаки или все равны нулю.

Действительная симметрическая квадратичная форма, или эрмитова форма, является положительно полуопределенной или отрицательно определенной в том и только в том случае, если она соответственно неотрицательна или неположительно и если по крайней мере одно собственное значение λ_j матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ равно нулю.

Заметим, что числа λ_j являются корнями характеристического уравнения (13.4-5); знаки этих корней часто можно исследовать одним из методов п.1.6-6.

(б)* Для того чтобы эрмитова матрица $A \equiv [a_{ik}]$ (и соответствующая эрмитова форма, или действительная симметрическая квадратичная форма) была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы каждый из определителей

$$\Delta_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \det [a_{ik}] \quad (13.5-14)$$

был положительным. Для того чтобы эрмитова матрица $A \equiv [a_{ik}]$ (и соответствующая эрмитова форма или действительная симметрическая квадратичная форма) была неотрицательна, необходимо и достаточно, чтобы все глав-

ные миноры определителя $\det [a_{ik}]$ (т. е. все миноры, получающиеся из этого определителя вычеркиванием строк и столбцов с одними и теми же номерами или, иначе говоря, миноры, симметричные относительно главной диагонали этого определителя) были неотрицательны.

Отметим, что для неотрицательности эрмитовой матрицы неотрицательность только угловых миноров (14) недостаточна.

(с) Эрмитова матрица A (и соответствующая эрмитова форма или действительная симметрическая квадратичная форма) отрицательно определена, неположительно или отрицательно полуопределена в том и только в том случае, если матрица $-A$ соответственно положительно определена, неотрицательно или положительно полуопределена.

(d) Матрица A является неотрицательной эрмитовой матрицей в том и только в том случае, если существует такая матрица B , что $A = B^*B$. Действительная матрица A является неотрицательной симметрической матрицей в том и только в том случае, если существует такая действительная матрица B , что $A = B^tB$. В любом из этих случаев матрица A положительно определена, если B , а значит и A , — невырожденная матрица.

(e) Если эрмитовы матрицы A и B положительно определены или неотрицательны, то это же верно и для матрицы AB . Каждая положительно определенная эрмитова матрица A имеет единственный квадратный корень H , определяемый условиями, что $H^2 = A$ и что H — эрмитова положительно определенная матрица (см. также п.13.3-4).

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ). ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТРИЦАМИ

14.1. ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

14.1-1. Вводные замечания. В этой главе дается обзор теории *линейных векторных пространств* (см. также п.12.4-1) и *линейных преобразований (линейных операторов)*. Векторы и линейные операторы представляют физические объекты и операции во многих важных приложениях.

Большинство практических задач требует описания (представления) математических моделей (п.12.1-4) с помощью упорядоченных множеств действительных или комплексных чисел. В частности, понятия гомоморфизма и изоморфизма (п.12.1-6) позволяют многие математические модели «представлять» соответствующими классами *матриц* (п.13.2-1; см. также п.13.2-5), так что *абстрактным математическим операциям соответствуют числовые операции над элементами матриц*. (Примеры: матричные представления операторов квантовой механики и электрических преобразователей.) В пп.14.5-1 — 14.10-7 описывается применение матриц для представления векторов, линейных операторов и элементов групп.

14.1-2. Числовое описание математических моделей: системы отсчета (см. также пп.2.1-2, 3.1-2, 5.2-2, 6.2-1, 12.1-1 и 16.1-2). Система отсчета (система координат) есть схема правил, описывающих (представляющих) каждый объект (точку) некоторого класса (пространства, области некоторого пространства) S соответствующим упорядоченным множеством (действительных или комплексных) чисел (**компонент, координат**) x_1, x_2, \dots . Число координат требуемых для определения каждой точки (x_1, x_2, \dots) , называется **размерностью** пространства S (см. также п.14.2-4). Во многих приложениях значения координат связаны с системами физических мер.

14.1-3. Преобразования координат (см. также пп.2.1-5 — 2.1-8, 3.1-12, 6.2-1 и 16.1-2). Преобразование координат x_1, x_2, \dots есть множество правил или соотношений, ставящих каждой точке (x_1, x_2, \dots) в соответствие новое множество координат. Преобразование координат допускает две интерпретации:

1. «Активная» точка зрения, или точка зрения «*alibi*»: преобразование координат

$$x'_1 = x'_1(x_1, x_2, \dots), \quad x'_2 = x'_2(x_1, x_2, \dots), \dots \quad (14.1-1)$$

описывает *операцию (функцию, отображение, п.12.1-4)*, относящую каждому данному математическому объекту (точке) (x_1, x_2, \dots) некоторую новую точку (x'_1, x'_2, \dots) .

2. «Пассивная» точка зрения, или точка зрения «alias»: преобразование координат

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_1, x_2, \dots), \quad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(x_1, x_2, \dots), \dots \quad (14.1-2)$$

вводит новое описание (новое представление) каждой точки (x_1, x_2, \dots) посредством новых координат x_1, x_2, \dots .

Преобразования координат позволяют абстрактные математические отношения представлять числовыми соотношениями («активная» точка зрения) и заменять системы отсчета («пассивная» точка зрения). Замена системы отсчета часто упрощает данную задачу. (Примеры: приведение к главным осям, пп.2.4-8, 3.5-7, 9.4-8 и 17.4-8; контактные преобразования, пп.10.2-5 и 11.5-6, обобщенные координаты в динамике.)

14.1-4. Инвариантность (см. также пп.12.1-5 и 16.2-1; для более подробного рассмотрения отсылаем к пп.16.1-4 и 16.4-1). Функция координат, поставленных в соответствие к некоторому объекту или объектам, **инвариантна относительно данного преобразования координат** (1) или (2), если значение этой функции не меняется при подстановке вместо каждой координаты x_i функции $\tilde{x}_i(x_1, x_2, \dots)$ или $\tilde{x}_i(x_1, x_2, \dots)$. Соотношение между значениями координат инвариантно, если оно сохраняет силу при любых подстановках такого рода.

Инвариантность относительно преобразования координат «активного» типа интерпретируется в духе п.12.1-5. Функции и соотношения, инвариантные относительно какого-либо класса преобразований координат «пассивного» типа, можно рассматривать как функции от реальных объектов (**инвариантов**), представляемых различными множествами координат в различных системах отсчета или соответственно как соотношения между ними. **Полная система инвариантов** $f_1(x_1, x_2, \dots), f_2(x_1, x_2, \dots), \dots$ однозначно характеризует все свойства объекта (x_1, x_2, \dots) , инвариантные относительно данного класса (группы) преобразований координат (см. также п.12.2-8).

14.1-5. Системы мер. Представление модели, включающей два или более класса объектов, требует, вообще говоря, системы отсчета для каждого класса объектов; получающееся в результате множество систем отсчета называется **системой мер**. Изменение системы мер включает в себя преобразование координат «пассивного» типа для каждого класса объектов; обычно эти преобразования связывают таким образом, чтобы обеспечить инвариантность некоторых важных функций и/или соотношений (см. также пп.16.1-4, 16.2-1 и 16.4-1).

14.2. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

14.2-1. Определяющие свойства. Как уже говорилось в п.12.4-1, *линейное векторное пространство* \mathcal{U} , состоящее из векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$, над кольцом (с единицей, п.12.3-1) R , состоящим из скаляров α, β, \dots , допускает сложение векторов и умножение векторов на скаляры, обладающие следующими свойствами:

1. \mathcal{U} есть коммутативная группа относительно сложения векторов: для каждой пары векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} из \mathcal{U} пространство \mathcal{U} содержит их сумму $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, причем

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Кроме того, \mathcal{U} содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$ и для каждого вектора \mathbf{a} противоположный вектор $-\mathbf{a}$ такие, что

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

2. \mathcal{U} содержит произведение $\alpha \mathbf{a}$ каждого вектора $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ на любой скаляр $\alpha \in R$, причем

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\mathbf{a} &= \alpha(\beta\mathbf{a}), & 1\mathbf{a} &= \mathbf{a}, \\ \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, & (\gamma + \beta)\mathbf{a} &= \gamma\mathbf{a} + \beta\mathbf{a},\end{aligned}$$

где 1 — единица кольца R .

Отметим, что

$$0 \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}, \quad (-\alpha)\mathbf{a} = -(\alpha\mathbf{a}). \quad (14.2-1)$$

Если специально не оговорено противное, то подразумевается, что все линейные векторные пространства, рассматриваемые в этом справочнике, являются **действительными векторными пространствами** или же **комплексными векторными пространствами**, соответственно определяемыми как линейные векторные пространства над полем действительных чисел и над полем комплексных чисел.

В случае векторных пространств, допускающих определение сходимости (п.14.2-7,b), многие авторы называют совокупность векторов, обладающую описанными выше свойствами, **линейным многообразием**, а термин **векторное пространство** резервируют для *замкнутых* линейных многообразий, т.е. линейных многообразий, содержащих все свои предельные точки (п.12.5-1,b); в случае конечномерных многообразий эти два понятия равносильны, п.14.2-4).

14.2-2. Линейные многообразия и подпространства в \mathcal{U} . Подмножество \mathcal{U}_1 линейного векторного пространства \mathcal{U} есть **линейное многообразие** в \mathcal{U} , если \mathcal{U}_1 есть линейное многообразие над тем же кольцом скаляров, что и \mathcal{U} ; \mathcal{U}_1 называется **подпространством** пространства \mathcal{U} , если оно является замкнутым линейным многообразием в \mathcal{U} (см. также п.14.2-1). **Собственное подпространство** пространства \mathcal{U} есть его подпространство, отличное от $\mathbf{0}$ и от самого \mathcal{U} .

Любое данное множество векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ пространства \mathcal{U} порождает (определяет) линейное многообразие, содержащее всевозможные линейные комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$.

Пример: прямые линии и плоскости, проходящие через начало координат в трехмерном евклидовом пространстве.

14.2-3. Линейно независимые и линейно зависимые векторы (см. также пп.1.9-3, 5.2-2 и 9.3-2).

(а) Конечное множество векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ **линейно независимо**, если

$$\text{из } \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots = \mathbf{0} \text{ следует, что } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0. \quad (14.2-2)$$

В противном случае векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ **линейно зависимы** и по крайней мере один из них, например \mathbf{a}_k , может быть выражен в виде линейной комбинации

$\mathbf{a}_k = \sum_i \mu_i \mathbf{a}_i$ остальных векторов \mathbf{a}_i этого множества. Это, в частности, верно в том тривиальном случае, когда \mathbf{a}_k — нулевой вектор.

(б) Определения п.14.2-3, а применимы и к **бесконечным** множествам векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$, если можно приписать смысл условию (2). Вообще говоря, для этого требуется, чтобы, помимо алгебраических постулатов, из п.14.2-1 векторное подпространство допускало определение *сходимости* (пп.12.5-3 и 14.2-7,b).

14.2-4. Размерность линейного многообразия или векторного пространства. Базисы и системы координат (системы отсчета).

(а) **Базис (линейный)** линейного многообразия \mathcal{U} есть такое множество линейно независимых векторов e_1, e_2, \dots многообразия \mathcal{U} , что каждый вектор $a \in \mathcal{U}$ может быть представлен в виде линейной формы

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \quad (14.2-3)$$

относительно базисных векторов e_i . Каждое множество линейно независимых векторов образует базис линейного многообразия, состоящего из всевозможных линейных комбинаций данных векторов.

(б) В конечномерном линейном многообразии или векторном пространстве, порожденном n базисными векторами:

- 1) каждое множество из n линейно независимых векторов является базисом;
- 2) никакое множество из $m < n$ векторов не является базисом;
- 3) каждое множество из $m > n$ векторов необходимо линейно зависимо.

Число n называется (линейной) **размерностью** данного векторного пространства. **Бесконечномерное** векторное пространство не допускает никакого конечного базиса.

(в) В каждом действительном или комплексном векторном пространстве размерности n числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются единственными **координатами** вектора $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ в **системе координат (системе отсчета)**, определяемой базисными векторами e_1, e_2, \dots, e_n . Отметим, что вектор $a + b$ имеет координаты $\alpha_i + \beta_i$, а вектор αa — координаты $\alpha \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$; см. п.5.2-2).

(д) Два линейных векторных пространства \mathcal{U} и \mathcal{U}' над одним и тем же кольцом скаляров α, β, \dots изоморфны (п.12.1-6) в том и только в том случае, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие $a \leftrightarrow a', b \leftrightarrow b', \dots$, при котором $a + b \leftrightarrow a' + b'$ и $\alpha a \leftrightarrow \alpha a'$. В случае конечномерных векторных пространств для этого необходимо и достаточно, чтобы \mathcal{U} и \mathcal{U}' имели одну и ту же линейную размерность.

В частности, каждое n -мерное действительное или комплексное векторное пространство изоморфно пространству матриц-столбцов, имеющих n строк, соответственно над полем действительных или комплексных чисел (матричное представление, п.14.5-2).

14.2-5. Нормированные векторные пространства. Действительное или комплексное векторное пространство \mathcal{U} называется **нормированным векторным пространством**, если для каждого вектора $a \in \mathcal{U}$ существует такое действительное число $\|a\|$ (**норма, абсолютная величина, модуль вектора a**), что из $a = b$ следует $\|a\| = \|b\|$ и что для всех a, b из \mathcal{U}

$$\left. \begin{aligned} \|a\| \geq 0, \quad \text{из } \|a\| = 0 \text{ следует, что } a = 0, \quad \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|, \\ \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (\text{неравенство Минковского}). \end{aligned} \right\} \quad (14.2-4)$$

Единичный вектор есть вектор с единичной нормой (см. также п.5.2-5). Отметим, что $\| -a \| = \|a\|$ и $\|0\| = 0$.

14.2-6. Унитарные векторные пространства.

(а) Действительное или комплексное векторное пространство \mathcal{U} называется **унитарным (эрмитовым, предгильбертовым) векторным пространством**, если можно определить бинарную операцию, ставящую каждой паре a, b векторов из \mathcal{U} в соответствие скаляр (a, b) — скалярное, или **внутреннее произведение a и b** , причем:

- 1) $(a, b) = \overline{(b, a)}$ (*эрмитова симметрия*);
- 2) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$ (*дистрибутивный закон*);
- 3) $(a, \alpha b) = \alpha (a, b)$ (*ассоциативный закон*¹⁾);
- 4) $(a, a) \geq 0$; из $(a, a) = 0$ следует $a = 0$
(*положительная определенность*).

¹⁾ Некоторые авторы пользуются вместо этого постулатом $(\alpha a, b) = \alpha (a, b)$, что сводится к перестановке a и b в определении произведения (a, b) ; тогда $(a, \alpha b) = \overline{\alpha} (a, b)$.

Отсюда следует, что в каждом унитарном векторном пространстве

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}), \quad (\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (14.2-5)$$

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \quad (\text{неравенство Коши — Шварца}). \quad (14.2-6)$$

Неравенство Коши — Шварца (6) (см. также п.1.3-2) превращается в равенство в том и только в том случае, если \mathbf{a} и \mathbf{b} линейно зависимы (см. также пп.1.3-2, 4.6-19 и 15.2-1,с).

т векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ пространства \mathcal{U} линейно независимы в том и только в том случае, если определитель $\det [(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k)]$ m -го порядка (определитель Грама, см. также пп.5.2-8 и 15.2-1,а) отличен от нуля.

(б) Если унитарное векторное пространство действительно, то все скалярные произведения (\mathbf{a}, \mathbf{b}) действительны, и скалярное умножение векторов коммутативно, так что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad (\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (14.2-7)$$

Замечание. Используемые в теории относительности пространства с внутренним произведением с неопределенной метрикой являются действительными или комплексными векторными пространствами, допускающими определение скалярного произведения (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , удовлетворяющего условиям (1)–(3), но не удовлетворяющего условию (4) из п.14.2-6,а. Все векторы такого пространства могут быть подразделены на векторы с положительным, отрицательным или нулевым квадратом (\mathbf{a}, \mathbf{a}) . Полагают $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|(\mathbf{a}, \mathbf{a})|}$ (см. также пп.14.2-5 и 16.8-1).

14.2-7. Норма, метрика и сходимость в унитарных векторных пространствах. Гильбертовы пространства.

(а) Каждое унитарное векторное пространство позволяет формулами

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \\ d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}, \\ \cos \gamma &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \end{aligned} \right\} \quad (14.2-8)$$

вести норму (абсолютную величину, модуль) $\|\mathbf{a}\|$ каждого вектора \mathbf{a} , расстояние $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между двумя «точками» \mathbf{a}, \mathbf{b} из \mathcal{U} и угол γ между любыми двумя векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Функции $\|\mathbf{a}\|$ и $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, определенные в (8), удовлетворяют всем условиям пп.14.2-5 и 12.5-2.

Если \mathcal{U} — действительное унитарное векторное пространство, то для всех \mathbf{a} и \mathbf{b} число γ непременно является действительным. Конечномерные действительные унитарные векторные пространства называются евклидовыми векторными пространствами и служат моделями n -мерных евклидовых геометрий (см. также гл. 2 и 3 и пп.5.2-6 и 17.4-6,д).

(б) Каждое нормированное векторное пространство и, в частности, каждое унитарное векторное пространство \mathcal{U} является метрическим пространством с метрикой $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ (п.12.5-2) и в нем (как в п.12.5-3) можно определить окрестности и сходимость (см. также п.5.3-1). В этом смысле ряд

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots \text{ сходитс}я, \text{ и его сумма равна вектору } \mathbf{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{a}_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k$$

пространства \mathcal{U} в том и только в том случае, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{s} - \sum_{k=0}^n \mathbf{a}_k \right\| = 0$.

Каждое конечномерное унитарное векторное пространство \mathcal{U} является полным (п.12.5-4), т. е. каждая последовательность векторов $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots$ пространства \mathcal{U} , удовлетворяющая условию

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\| = 0$$

(последовательность Коши, фундаментальная последовательность, см. также п.4.9-1), сходится к некоторому вектору $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$.

Полное унитарное векторное пространство называется **гильбертовым пространством**¹⁾. Гильбертовы пространства обладают многими свойствами, аналогичными свойствам конечномерных унитарных векторных пространств. В частности, поскольку *каждое подпространство гильбертова пространства замкнуто в нем, оно и полно* (см. также п.14.2-2), и значит, само является гильбертовым пространством.

Полное нормированное векторное пространство называется **банаховым пространством**.

(с) **Проекция.** Для любого полного подпространства \mathcal{U}_1 унитарного векторного пространства \mathcal{U} и любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ существует единственный такой вектор $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{U}_1$, что разность $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ ортогональна каждому вектору из \mathcal{U}_1 (т.е. скалярное произведение вектора $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ и каждого вектора из \mathcal{U}_1 равно нулю). Вектор \mathbf{x}_1 называется проекцией вектора \mathbf{x} на \mathcal{U}_1 . Если, в частности, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_1$, то $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$.

14.3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ)

14.3-1. Линейное преобразование векторного пространства. Линейные операторы. Пусть \mathcal{U} и \mathcal{U}' — линейные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров α, β, \dots . Тогда (однородное) **линейное преобразование** пространства \mathcal{U} в пространство \mathcal{U}' есть отображение

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (14.3-1)$$

ставящее каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ в соответствие некоторый вектор $\mathbf{x}' \in \mathcal{U}'$ так, что при этом сохраняются «линейные» операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \equiv f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(\alpha\mathbf{x}) \equiv \alpha f(\mathbf{x}). \quad (14.3-2)$$

Каждое линейное преобразование может быть записано как умножение на **линейный оператор \mathbf{A}** (линейную операцию), причем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) \equiv \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}). \quad (14.3-3)$$

Линейное преобразование (оператор), отображающее линейное векторное пространство \mathcal{U} в себя, называется **линейным оператором в пространстве \mathcal{U}** .

Функция $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}'$ называется **линейной векторной функцией**. При задании каждого линейного оператора должна быть указана область его определения. В физике первое из соотношений (3) часто называют принципом суперпозиции для данного класса операций.

14.3-2. Множество значений, ядро и ранг линейного преобразования (оператора). Множество значений линейного преобразования \mathbf{A} (образ при преобразовании \mathbf{A} , п.12.1-4) линейного векторного пространства \mathcal{U} в линейное векторное пространство \mathcal{U}' есть линейное многообразие (п.14.2-2) в \mathcal{U}' . Ядро линейного преобразования \mathbf{A} есть многообразие в \mathcal{U} , состоящее из всех векторов, отображающихся в нулевой вектор пространства \mathcal{U}' . **Ранг r** и **размерность ядра r'** линейного преобразования \mathbf{A} это соответственно линейные размерности (п.14.2-4, б) множества его значений и его ядра. Если \mathcal{U} имеет конечную размерность n , то множество значений и ядро любого линейного преобразования \mathbf{A} являются подпространствами, и $r + r' = n$.

14.3-8. Сложение и умножение на скаляры. Нулевое преобразование.

(а) Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — линейные преобразования (операторы), отображающие \mathcal{U} в \mathcal{U}' . Тогда по определению $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ и $\alpha\mathbf{A}$ — линейные преобразования пространства \mathcal{U} в \mathcal{U}' , при которых

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \pm \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (\alpha\mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (14.3-4)$$

для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

¹⁾ Некоторые авторы требуют, чтобы каждое гильбертово пространство было не только полным, но и сепарабельным (п.12.5-1, б); иногда гильбертовыми называют только бесконечномерное полное унитарное пространство.

(b) Нулевое преобразование \mathcal{O} пространства \mathcal{U} в \mathcal{U}' определяется условием $\mathcal{O}x = \mathcal{O}'$ для всех векторов $x \in \mathcal{U}$, где \mathcal{O}' — нулевой вектор пространства \mathcal{U}' .

14.3-4. Произведение двух линейных преобразований (операторов). Тождественное преобразование.

(a) Пусть A — линейное преобразование (оператор), отображающее \mathcal{U} в \mathcal{U}' , и B — линейное преобразование, отображающее (множество значений преобразования A) в \mathcal{U}'' . **Произведение BA** есть линейное преобразование пространства \mathcal{U} в \mathcal{U}'' , получающееся, если последовательно произвести преобразования A и B (см. также п.12.2-8):

$$(BA)x \equiv B(Ax). \quad (14.3-5)$$

(b) **Тождественное преобразование I** любого векторного пространства \mathcal{U} переводит каждый вектор $x \in \mathcal{U}$ в себя:

$$Ix \equiv x, \quad I'A \equiv A, \quad (14.3-6)$$

где A — линейное преобразование пространства \mathcal{U} в \mathcal{U}' , а I и I' — соответственные тождественные преобразования этих пространств.

14.3-5. Невырожденные линейные преобразования (операторы). Обратные преобразования (операторы). Линейное преобразование (оператор) A называется **невырожденным (неособенным)**, если оно взаимно однозначно отображает пространство \mathcal{U} на все пространство \mathcal{U}' (пространства \mathcal{U} и \mathcal{U}' в этом случае необходимо изоморфны, п.14.2-4). Преобразование A является невырожденным в том и только в том случае, если оно имеет единственное **обратное преобразование (обратный оператор) A^{-1}** , отображающее \mathcal{U}' на \mathcal{U} так, что из $x' = Ax$ следует $x = A^{-1}x'$ и наоборот, или

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I, \quad (14.3-7)$$

где I и I' — тождественные преобразования соответственно в \mathcal{U} и в \mathcal{U}' .

Произведения и обратные преобразования невырожденных преобразований (операторов) являются невырожденными; если A и B не вырождены и $\alpha \neq 0$, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A. \quad (14.3-8)$$

Невырожденные линейные преобразования (операторы) сохраняют линейную независимость векторов, а потому и линейные размерности отображаемых многообразий (пп.14.2-3 и 14.2-4).

Линейное преобразование (оператор) A , определенное на конечномерном векторном пространстве, невырождено в том и только в том случае, если из $Ax = 0$ следует $x = 0$, т. е. если $r = n$ и $r' = 0$ (п.14.3-2).

14.3-6. Целые степени операторов. Пусть A — линейный оператор в линейном векторном пространстве \mathcal{U} . По определению $A^0 \equiv I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ... и, если A — невырожденный, $A^{-p} = (A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$ ($p = 1, 2, \dots$). Справедливы обычные правила действий со степенями (см. также п.12.4-2).

14.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННОМ ИЛИ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭРМИТОВЫ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

14.4-1. Ограниченные линейные преобразования (см. также п.13.2-1,а). Линейное преобразование A нормированного векторного пространства (п.14.2-5) \mathcal{U} в нормированное векторное пространство \mathcal{U}' называется **ограниченным**, если A имеет конечную норму

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (14.4-1)$$

Отметим, что

$$\left. \begin{aligned} \|A\| \geq 0, \quad \|\alpha A\| &= |\alpha| \cdot \|A\|, \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \\ \|AB\| &\leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \end{aligned} \right\} \quad (14.4-2)$$

Каждое линейное преобразование (оператор), определенное на конечномерном нормированном векторном пространстве, ограничено. * Линейное преобразование A нормированного векторного пространства \mathcal{U} в нормированное векторное пространство \mathcal{U}' непрерывно, если оно непрерывно как отображение метрического пространства \mathcal{U} в метрическое пространство \mathcal{U}' (см. пп.14.2-7 и 12.5-3,б). Линейное преобразование одного нормированного векторного пространства в другое непрерывно в том и только в том случае, если оно ограничено. *

Если \mathcal{U} — унитарное векторное пространство (п.14.2-6) и A — линейный оператор в этом пространстве (п.14.3-1), то

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|(x, Ay)|}{\|x\| \|y\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(x, Ay)|. \quad (14.4-3)$$

14.4-2. Ограниченные линейные операторы в нормированном векторном пространстве.

(а) Ограниченные линейные операторы A, B, \dots в нормированном векторном пространстве \mathcal{U} составляют линейную алгебру (п.12.4-2), операции в которой определены в пп.14.3-3 и 14.3-4, причем нулем служит нулевой, а единицей тождественный оператор. Вырожденные операторы являются в этой алгебре делителями нуля (п.12.3-1,а), а невырожденные образуют мультипликативную группу и вместе с нулевым оператором — алгебру с делением (п.12.4-2). Если \mathcal{U} — пространство конечной размерности n , то алгебра линейных операторов имеет порядок n^2 .

Алгебра операторов, вообще говоря, не коммутативна (см. также п.12.4-2). Оператор $AB - BA$ называется коммутатором операторов A и B .

(б) Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве (п.14.2-7,б) позволяют, как в п.13.2-11 и 13.2-12, определить с помощью метрики $\|A - B\|$ сходящиеся последовательности и аналитические функции операторов (п.12.5-3).

14.4-3. Сопряженный оператор. Пусть A — линейный оператор в унитарном векторном пространстве \mathcal{U} . Линейный оператор A^* в пространстве \mathcal{U} называется сопряженным с оператором A , если

$$(x, Ay) = (A^*x, y) \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } \mathcal{U}. \quad (14.4-4)$$

Сопряженный оператор A^* , если он существует, является единственным. Если оператор A ограничен и имеет сопряженный оператор A^* , то и оператор A^* ограничен. При этом

$$\left. \begin{aligned} (A+B)^* &= A^* + B^*, & (\alpha A)^* &= \bar{\alpha} A^*, \\ (AB)^* &= B^* A^*, & (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1}, & (A^*)^* &= A, \\ \|A^*\| &= \|A\|, & \|A^* A\| &= \|A\|^2, & 0^* &= 0, & I^* &= I; \end{aligned} \right\} \quad (14.4-5)$$

$$(Ax, By) \equiv (x, A^*By) \equiv (B^*Ax, y). \quad (14.4-6)$$

Каждый ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве имеет сопряженный оператор (см. также пп.14.2-6,а и 14.2-7,б).

14.4-4. Эрмитовы операторы. Линейный оператор A в унитарном векторном пространстве \mathcal{U} называется эрмитовым (самосопряженным), если он имеет сопряженный оператор и если

$$A^* = A, \quad \text{т. е.} \quad (x, Ay) = (Ax, y) \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } \mathcal{U}. \quad (14.4-7)$$

Если \mathcal{U} — комплексное унитарное векторное пространство, то оператор A является эрмитовым в том и только в том случае, если скалярное произведение (x, Ax) для всех x действительно, или

$$(x, Ax) = \overline{(Ax, x)} = (Ax, x) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{U}. \quad (14.4-8)$$

Всякий эрмитов оператор в комплексном гильбертовом пространстве является ограниченным. Оператор A , удовлетворяющий условию $A^* = -A$, называется **косоэрмитовым**.

Эрмитовы операторы играют важную роль в тех приложениях, где требуется, чтобы скалярное произведение (x, Ax) было действительным числом (теория колебаний, квантовая механика). Эрмитов оператор A называется соответственно **положительно определенным**, **отрицательно определенным**, **неотрицательным**, **неположительным**, **положительно полуопределенным**, **отрицательно полуопределенным**, **неопределенным** или **нулевым**, если это же верно для скалярного произведения (эрмитовой формы) (x, Ax) (см. также пп.13.5-3 и 14.7-1).

14.4-5. Унитарные операторы. Линейный оператор A в унитарном векторном пространстве \mathcal{U} называется **унитарным**, если

$$A^*A = AA^* = I, \quad \text{т.е.} \quad A^* = A^{-1}. \quad (14.4-9)$$

Каждый унитарный оператор является невырожденным и ограниченным и $\|A\| = 1$. Каждое унитарное преобразование $x' = Ax$, где A — унитарный оператор, сохраняет скалярное произведение:

$$\left. \begin{aligned} (x', y') &= (Ax, Ay) = (x, y) && \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } \mathcal{U}, \\ \|x'\| &= \|Ax\| = \|x\| && \text{для всех } x \in \mathcal{U}. \end{aligned} \right\} (14.4-10)$$

Если пространство \mathcal{U} конечномерно, то каждое из соотношений (10) влечет за собой унитарность оператора A .

Унитарные операторы сохраняют скалярное произведение векторов, а также сложение векторов и произведение векторов на скаляры; таким образом, при унитарных преобразованиях норма векторов, расстояния, углы, ортогональность и ортонормированность (пп.14.2-7, а и 14.7-3) инвариантны (п.12.1-5).

14.4-6. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в действительных унитарных векторных пространствах.

(а) Оператор A^* , сопряженный (п.14.4-3) с линейным оператором A в действительном унитарном векторном пространстве \mathcal{U} , часто называется **транспонированным оператором (преобразованием)** и обозначается символом A' ; он удовлетворяет соотношениям

$$(x, Ay) = (Ay, x) = (A'x, y) = (y, A'x) \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } \mathcal{U}. \quad (14.4-11)$$

Если рассматриваемое векторное пространство действительно, то во всех соотношениях из п.14.4-3 вместо A^* можно писать A' .

(б) Линейный оператор (преобразование) A в действительном унитарном векторном пространстве \mathcal{U} называется **симметрическим**, если

$$A' = A, \quad \text{т.е.} \quad (x, Ay) = (y, Ax) \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } \mathcal{U}, \quad (14.4-12)$$

кососимметрическим (антисимметрическим), если

$$A' = -A, \quad \text{т.е.} \quad (x, Ay) = -(y, Ax) \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } \mathcal{U}, \quad (14.4-13)$$

ортогональным, если

$$A'A = AA' = I, \quad \text{т.е.} \quad A' = A^{-1}. \quad (14.4-14)$$

Ортогональные операторы в действительном унитарном векторном пространстве являются унитарными, так что для них верны все утверждения из п.14.4-5.

14.4-7. Правила комбинирования (см. также п.13.3-3).

(а) Если A — эрмитов оператор, то это же верно и для операторов A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , T^*AT и, если α — действительное число, для оператора αA .

Если T — любой невырожденный оператор, то оператор T^*AT является эрмитовым в том и только в том случае, если эрмитовым является оператор A ; поэтому для любого унитарного оператора T оператор $T^{-1}AT$ является эрмитовым в том и только в том случае, если это же верно для A .

В частности, если рассматриваемое унитарное векторное пространство действительно и A — симметрический оператор, то такими же будут и операторы A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , T^*AT и αA . Если T — любой невырожденный оператор, то оператор T^*AT является симметрическим в том и только в том случае, если симметрическим является и A ; для любого ортогонального оператора T оператор $T^{-1}AT$ является симметрическим в том и только в том случае, если это же верно и для A .

(б) Если A и B — эрмитовы (или симметрические) операторы, то это же верно и для суммы $A+B$. Произведение AB двух эрмитовых (или симметрических) операторов A и B является эрмитовым (или симметрическим) оператором в том и только в том случае, если $BA=AB$ (см. также п.13.4-4, б).

(с) Если A — унитарный оператор, то это же верно и для A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), A^{-1} , A^* , а если $|\alpha|=1$, то и для αA . Если A и B — унитарные операторы, то и AB — унитарный оператор.

Если A — ортогональный оператор, то это же верно и для A^p ($p=0, 1, 2, \dots$), $A^{-1}=A'$ и $-A$. Если A и B — ортогональные операторы, то и AB — ортогональный оператор.

14.4-8. Теоремы о разложении. Нормальные операторы (см. также пп.13.3-4 и 14.8-4).

(а) Для каждого ограниченного линейного оператора A в унитарном векторном пространстве \mathcal{U} , имеющего сопряженный оператор A^* , оператор $\frac{1}{2}(A+A^*)=H_1$ является эрмитовым, а $\frac{1}{2i}(A-A^*)=H_2$ — косоэрмитовым. $A=H_1+iH_2$ есть (единственное) разложение данного оператора A на эрмитовую и косоэрмитовую части (ср. с разложением комплексного числа на действительную и мнимую части).

Если пространство \mathcal{U} действительно, то это разложение превращается в (единственное) разложение оператора A на симметрическую часть $\frac{1}{2}(A+A')$ и кососимметрическую часть $\frac{1}{2}(A-A')$.

Для каждого ограниченного линейного оператора A в унитарном векторном пространстве, имеющего сопряженный оператор A^* , оператор A^*A является эрмитовым и неотрицательным, и существует разложение $A=QU$ оператора A в произведение неотрицательного эрмитового оператора Q и унитарного оператора U . Оператор Q однозначно определяется условием $Q^2=A^*A$, а оператор U определяется однозначно в том и только в том случае, если A — невырожденный оператор (ср. это с п. 13,3-4, а).

(б) Оператор A в унитарном векторном пространстве \mathcal{U} называется нормальным оператором, если $A^*A=AA^*$ или, что эквивалентно, если $H_2H_1=H_1H_2$. Ограниченный линейный оператор A нормален в том и только в том случае, если он имеет сопряженный оператор и если $\|Ax\|=\|A'\cdot\|\cdot\|x\|$ для всех $x \in \mathcal{U}$. Эрмитовы и унитарные операторы нормальны.

14.4-9. Бесконечно малые линейные преобразования (см. также пп.4.5-3 и 14.10-5).

(а) Бесконечно малое линейное преобразование (бесконечно малый линейный оператор) в нормированном действительном или комплексном векторном пространстве имеет вид

$$A = I + \varepsilon B, \tag{14.4-15}$$

где B — ограниченный оператор, а $|\varepsilon|^2$ пренебрежимо мало по сравнению с 1 (обычно ε — скалярный дифференциал), т. е. $|\varepsilon|^2 \approx 0$.

(b) Для бесконечно малых линейных преобразований

$$\begin{aligned} A &= I + \varepsilon B, & A_1 &= I + \varepsilon_1 B_1, & A_2 &= I + \varepsilon_2 B_2 & \text{имеем} \\ A^{-1} &= I - \varepsilon B, & A_1 A_2 &= I + (\varepsilon_1 B_1 + \varepsilon_2 B_2) = A_2 A_1. \end{aligned} \quad (14.4-16)$$

Бесконечно малые линейные преобразования (операторы) перестановочны.

(c) Бесконечно малое линейное преобразование $A = I + \varepsilon B$ в унитарном векторном пространстве является унитарным в том и только в том случае, если оператор εB косоэрмитов. Бесконечно малое линейное преобразование $A = I + \varepsilon B$ в действительном унитарном векторном пространстве является ортогональным в том и только в том случае, если оператор εB кососимметричен.

14.5. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОПЕРАТОРОВ)

14.5-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «активная» точка зрения (см. также п.14.1-3). Рассмотрим конечномерное¹⁾ действительное или комплексное векторное пространство \mathcal{U}_n с системой координат, определяемой n базисными векторами e_1, e_2, \dots, e_n (п.14.2-4). Каждый вектор

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \quad (14.5-1)$$

описывается своими координатами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Линейное преобразование (оператор) A в пространстве \mathcal{U}_n (п.14.3-1) переводит каждый базисный вектор e_k в соответствующий вектор

$$e'_k = A e_k = a_{1k} e_1 + a_{2k} e_2 + \dots + a_{nk} e_n = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (14.5-2)$$

а каждый вектор $x \in \mathcal{U}_n$ в соответствующий вектор $x' \in \mathcal{U}_n$:

$$x' = A x = A \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \sum_{k=1}^n \xi_k e'_k = \sum_{i=1}^n \xi'_i e_i. \quad (14.5-3)$$

Координаты ξ'_i вектора x' и координаты ξ_k вектора x отнесены к одному и тому же базису e_1, e_2, \dots, e_n и связаны n линейными однородными соотношениями преобразования

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1n} \xi_n, \\ \xi'_2 &= a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + \dots + a_{2n} \xi_n, \\ &\dots \\ \xi'_n &= a_{n1} \xi_1 + a_{n2} \xi_2 + \dots + a_{nn} \xi_n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(преобразование координат} \\ \text{векторов, «активная»} \\ \text{точка зрения).} \end{array} \quad (14.5-4)$$

14.5-2. Матричное представление векторов и линейных преобразований (операторов). Для каждого данного базиса e_1, e_2, \dots, e_n в пространстве \mathcal{U}_n :

- 1) векторы $x \equiv \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ в \mathcal{U}_n взаимно однозначно представляются матрицами-столбцами $\{\xi_k\}$ (п.13.2-1);
- 2) линейные преобразования (операторы) в \mathcal{U}_n взаимно однозначно представляются квадратными матрицами $A \equiv [a_{ik}]$ порядка n , определяемыми в (2) или (4).

¹⁾ Теория пп.14.5-1–14.7-7 применима и к некоторым бесконечномерным векторным пространствам (пп.14.2-4–14.2-7,b). Такие пространства должны допускать определение счетных базисов (п.14.2-4), а также ортонормированных базисов (п.14.7-4) и сходимости (п.14.2-7), так что суммы вроде той, которая рассматривается в (1), превращаются в сходящиеся бесконечные ряды. Векторные пространства, не допускающие счетных базисов, могут быть представлены подходящими пространствами функций (п.15.2-1).

Соответствие между векторами и операторами и указанными матрицами есть изоморфизм (п.12.1-6): суммы и произведения, содержащие скаляры, векторы и операторы, переходят в аналогичные суммы и произведения матриц. Тожественный оператор переходит в единичную матрицу, а обратный оператор — в обратную матрицу; невырожденным операторам соответствуют невырожденные матрицы, и наоборот.

В частности, векторное равенство

$$x' = Ax \quad (14.5-5)$$

представляется в базисе e_1, e_2, \dots, e_n матричным равенством

$$x' = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = Ax, \quad (14.5-6)$$

которое эквивалентно n соотношениям (4); произведение линейных преобразований A и B представляется произведением соответствующих матриц A и B .

З а м е ч а н и е. Преобразования n -мерного векторного пространства U_n в m -мерное векторное пространство U_m можно подобным же образом представить матрицами размера $m \times n$. Преобразования, связывающие два действительных векторных пространства, всегда можно представить действительными матрицами.

14.5-3. Матричные обозначения для неоднородных линейных уравнений (см. также пп.1.9-2—1.9-5). Система неоднородных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (14.5-7)$$

эквивалентна матричному уравнению

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (14.5-8)$$

Неизвестные x_k можно рассматривать как координаты неизвестного вектора, для которого преобразование (8) дает вектор с координатами b_i . Если, в частности, матрица $[a_{ik}]$ не вырождена (п.13.2-3), то матричное уравнение (8) имеет единственное решение

$$x = A^{-1}b; \quad (14.5-9)$$

формула (9) эквивалентна правилу Крамера (1.9-4).

14.5-4. Диадическое представление линейных операторов. Линейный оператор A в n -мерном векторном пространстве может быть выражен в виде суммы n внешних произведений пар векторов (n диад) по способу п.16.9-1. Соответствующая матрица A размера $n \times n$ может быть аналогично выражена в виде суммы внешних произведений пар матриц-строк и матриц-столбцов (см. также п.13.2-10).

14.6. ЗАМЕНА СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

14.6-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «пасивная» точка зрения (см. также п.14.1-3).

(а) Если дан координатный базис e_1, e_2, \dots, e_k в конечномерном ¹⁾ векторном пространстве U_n , то m векторов $a_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}e_i$ ($k = 1, 2, \dots, m$) линейно независимы (п.14.2-3) в том и только в том случае, если матрица $[\alpha_{ik}]$ имеет ранг m (см. также п.1.9-3).

¹⁾ См. сноску к п.14.5-1.

(п.14.6-1), то матрицы A и \tilde{A} связаны преобразованием подобия (п.13.4-1)

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \text{или} \quad A = T\tilde{A}T^{-1}. \quad (14.6-8)$$

Наоборот, каждая матрица \tilde{A} , связанная с матрицей A преобразованием подобия (8), представляет тот же самый линейный оператор A в координатном базисе (1).

(б) Все матрицы (8), представляющие один и тот же оператор A , имеют один и тот же ранг r , равный рангу оператора A (п.14.3-2). След и определитель матрицы A также являются общими для всех матриц (8) и называются следом $\text{Tr}(A)$ и определителем $\det(A)$ оператора A (см. также пп.14.1-4 и 13.4-1,б).

14.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ

14.7-1. Представление скалярного произведения (см. также пп.14.2-6, 14.7-6 и 16.8-1). Пусть векторы $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{e}_i$ в конечномерном¹⁾ унитарном векторном пространстве \mathcal{U} соответственно представляются матрицами-столбцами $\mathbf{a} \equiv \{\alpha_i\}$ и $\mathbf{b} \equiv \{\beta_i\}$ по способу п.14.5-2 (см. также п.13.2-1,б). Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} \bar{\alpha}_i \beta_k = \mathbf{a}^* G \mathbf{b}, \quad (14.7-1)$$

где

$$G \equiv [g_{ik}], \quad g_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

и $\mathbf{a}^* \equiv (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ — матрица-строка. Матрица $G \equiv [g_{ik}]$ необходимо является эрмитовой ($g_{ik} = \bar{g}_{ki}$) и положительно определенной (п.13.5-3); если \mathcal{U} — действительное унитарное векторное пространство, то G — действительная и симметрическая матрица.

Соотношение (1) позволяет описать через числовые координаты векторов нормы, углы, расстояния, сходимость и т. д. в \mathcal{U} (см. также п.14.2-7). В частности, для каждого

$$\text{вектора } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{e}_i \in \mathcal{U}$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} \bar{\xi}_i \xi_k = \mathbf{x}^* G \mathbf{x}. \quad (14.7-2)$$

Эрмитова форма (п.13.5-3) (2) называется основной формой пространства \mathcal{U} относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

14.7-2. Замена системы координат (см. также пп.14.6-1 и 14.6-2). Если ввести новые базисные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_k$, для которых $\mathbf{a} = T\tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b} = T\tilde{\mathbf{b}}$ (п.14.6-1), то из инвариантности (14.1-4) скалярного произведения

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^* G \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} \bar{\alpha}_i \beta_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{g}_{ik} \bar{\alpha}_i \beta_k = \tilde{\mathbf{a}}^* \tilde{G} \tilde{\mathbf{b}} \quad (14.7-3)$$

следует, что

$$\tilde{G} \equiv [\tilde{g}_{ik}] \equiv [(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k)] = T^* G T. \quad (14.7-4)$$

14.7-3. Ортогональные векторы и ортонормированные системы векторов.

(а) Два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} унитарного векторного пространства \mathcal{U} (взаимно) ортогональны, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ($\gamma = 90^\circ$, п.14.2-7,а). Ортонормированная

¹⁾ См. сноску к п.14.5-1.

(ортогональная нормированная) система векторов есть система попарно ортогональных единичных векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ так, что

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots). \quad (14.7-5)$$

Каждая система попарно ортогональных ненулевых векторов (\mathbf{u} , в частности, каждая ортонормированная система) линейно независима. Таким образом, наибольшее число векторов в любой такой системе (ортогональная размерность пространства \mathcal{U}) не может превышать линейную размерность пространства \mathcal{U} (см. также пп. 14.2- и 14.2-4, б).

(б) Неравенство Бесселя (см. также п.15.2-3, б). Если даны конечная или бесконечная ортонормированная система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ и любой вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$, то

$$\sum_{k=1}^m |(\mathbf{u}_k, \mathbf{a})|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \quad (\text{неравенство Бесселя}). \quad (14.7-6)$$

Знак равенства имеет здесь место в том и только в том случае, если вектор \mathbf{a} принадлежит линейному многообразию, порождаемому данной ортонормированной системой (см. также п.14.7-4). m может быть как конечным, так и бесконечным; неравенство Бесселя часто используется для доказательства сходимости бесконечных рядов.

14.7-4. Ортонормированные базисы (полные ортонормированные системы).

(а) В конечномерном унитарном векторном пространстве размерности n каждая ортонормированная система из n векторов образует базис (ортонормированный базис). Вот более общее утверждение. В каждом гильбертовом пространстве \mathcal{U} (п.14.2-7, б) ортонормированная система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ образует ортонормированный базис (полную ортонормированную систему) в том и только в том случае, если она удовлетворяет следующему условию:

1. Каждый вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{a} = \hat{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + \dots, \quad \text{где } \hat{\alpha}_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{a}) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

2. Для любого вектора $\mathbf{a} = \hat{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + \dots$,

$$\|\mathbf{a}\|^2 = |\hat{\alpha}_1|^2 + |\hat{\alpha}_2|^2 + \dots \quad (\text{равенство Парсеваля}).$$

3. Для любой пары векторов $\mathbf{a} = \hat{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + \dots$ и $\mathbf{b} = \hat{\beta}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\beta}_2 \mathbf{u}_2 + \dots$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{\hat{\alpha}}_1 \hat{\beta}_1 + \bar{\hat{\alpha}}_2 \hat{\beta}_2 + \dots$$

4. Ортонормированная система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ не содержится ни в какой другой ортонормированной системе пространства \mathcal{U} . Для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ из $(\mathbf{u}_k, \mathbf{a}) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) следует, что $\mathbf{a} = 0$.

Из каждого из этих четырех условий следуют остальные три условия. Сравнительная простота выписанных выше выражений для $\|\mathbf{a}\|^2$ и (\mathbf{a}, \mathbf{b}) делают ортонормированные базисы особенно удобными в качестве координатных базисов. Заметим, что если \mathbf{a} и \mathbf{a}' — два вектора с одними и теми же координатами $\hat{\alpha}_k$, то $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\| = 0$ (теорема единственности).

(б) Построение ортонормированной системы векторов. Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ — любая конечная или счетная система линейно независимых векторов в гильбертовом пространстве, то существует ортонормированная система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$, порождающая то же самое линейное многообразие.

Такую ортонормированную систему можно построить с помощью следующих рекуррентных формул (процесс ортогонализации Грама — Шмидта, см. также п.15.2-5):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{e}_{i+1} - \sum_{k=1}^i (\mathbf{u}_k, \mathbf{e}_{i+1}) \mathbf{u}_k \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (14.7-7)$$

14.7-5. Матрицы, соответствующие сопряженным операторам (см. также пп.14.4-3 — 14.4-6, 13.3-1 и 13.3-2).

(а) Если линейный оператор \mathbf{A} в конечномерном пространстве представляется в некотором базисе матрицей A , то сопряженный оператор \mathbf{A}^* представляется в этом же базисе матрицей $G^{-1}A^*G^1$.

(б) Для ортонормированного базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ имеем $G = I$ (см. п.14.7-3) и

$$A \equiv [a_{ik}] \equiv [(\mathbf{u}_i, \mathbf{A}\mathbf{u}_k)]. \quad (14.7-8)$$

Значит, сопряженным операторам соответствуют сопряженные матрицы, и наоборот. Таким образом, в случае ортонормированного базиса эрмитовым, кососимметрическим и унитарным операторам соответствуют матрицы тех же типов, и наоборот. В частности, симметрическим, кососимметрическим и ортогональным операторам в действительных векторных пространствах соответствуют симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы.

Верно и более общее утверждение. В случае ортогонального (но не обязательно ортонормированного) базиса, унитарным или ортогональным операторам соответствуют матрицы того же типа.

14.7-6. Взаимные базисы.

(а) Для каждого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ в конечномерном векторном пространстве существует единственный взаимный (дуальный) базис $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$, определяемый симметричными соотношениями

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (14.7-9)$$

так что каждый вектор \mathbf{e}^i ортогонален всем \mathbf{e}_k с $k \neq i$

$$[(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k)] = G^{-1} = [(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)]^{-1}, \quad (14.7-9a)$$

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n g_{ik} \mathbf{e}^i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (14.7-10)$$

(б) Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$, представляемые в базисе \mathbf{e}_i матрицами-столбцами a, b, \dots , в базисе \mathbf{e}^i представляются матрицами-столбцами Ga, Gb, \dots^2 и

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^* G \mathbf{b} = \mathbf{a}^* (G \mathbf{b}) = (G \mathbf{a})^* \mathbf{b} = (G \mathbf{a})^* G^{-1} (G \mathbf{b}). \quad (14.7-11)$$

В частности, если $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$, то $(\mathbf{e}^i, \mathbf{a}) = \alpha_i$.

Линейный оператор \mathbf{A} , задаваемый в базисе \mathbf{e}_i матрицей A , в базисе \mathbf{e}^i представляется матрицей GAG^{-1} .

(с) Базис $\tilde{\mathbf{e}}^1, \tilde{\mathbf{e}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}^n$, взаимный другой системе базисных векторов

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^n t_{ik} \mathbf{e}_i, \quad \text{где } \det[t_{ik}] \neq 0,$$

¹ Заметим, что во взаимном базисе (п.14.7-6) оператор \mathbf{A}^* представляется матрицей A^* .

² Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ можно также представить матрицами-строками $(Ga)^*, (Gb)^*, \dots$ или $(Ga)', (Gb)', \dots$, что соответствует представлению их ковариантными компонентами (пп.16.2-1 и 16.7-3).

задается формулами

$$e^k = \sum_{i=1}^n t_{ik} \tilde{e}^i. \quad (14.7-12)$$

Говорят, что базисные векторы e^i и e_k преобразуются контраградиентно (см. также п.16.6-2). Аналогично

$$\text{из } x = T\tilde{x} \text{ следует } \tilde{G}x = T(Gx). \quad (14.7-13)$$

(d) Каждый ортонормированный базис (п.14.7-4,а) совпадает со взаимным к нему базисом (является самодуальным), так что $e^i = e_i = \mathbf{u}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и

$$G = I, \quad Gx \equiv x, \quad GAG^{-1} \equiv A. \quad (14.7-14)$$

14.7-7. Сравнение обозначений. Для того чтобы облегчить ссылки на стандартные учебники, в гл. 12 – 14 координаты векторов помечаются только *нижними индексами*. В усовершенствованной системе обозначений, применяемой в тензорном анализе и описываемой в п.16.1-3, употребляются не только нижние, но и *верхние индексы*. В табл. 14.7-1 дается обзор различных обозначений, применяемых для описания векторов и линейных операторов; ею можно пользоваться для перевода одних обозначений в другие (см. также п.16.2-1).

Таблица 14.7-1

Сравнение различных обозначений скаляров, векторов и линейных операторов

Бескоординатные (инвариантные) обозначения	Матричные представления	Координаты (элементы матриц)	
		условные обозначения	тензорные обозначения
α (скаляр)	α	α	α
(e_i, e_k)	$[(e_i, e_k)] \equiv G$	g_{ik}	g_{ik}
(e^i, e^k)	$[(e^i, e^k)] \equiv G^{-1}$	Нет специального символа	g^{ik}
\mathbf{a} (вектор)	a	a_i	a^i
	Ga	Нет специального символа	$a_i = g_{ik}a^k$
$y = Ax$	$y = Ax$	$\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x^k$	$y^i = A^i_k x^k$
A (линейный оператор)	A	a_{ik}	A^i_k
	GA	Нет специальных символов	$A_{ik} = g_{ij}A^j_k$
	AG^{-1}		$A^{ik} = A^i_j g^{jk}$
	GAG^{-1}		$A^i_k = g_{ij}A^j_h g^{hk}$

14.8. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

14.8-1. Вводные замечания. Изучение собственных векторов и собственных значений представляет исключительный практический интерес ввиду того, что

1) многие соотношения, в которые входит некоторый линейный оператор, радикально упрощаются, если в качестве координатных базисных векторов взять его собственные векторы (приведение матриц к диагональному виду, квадратичных форм к сумме квадратов, решение операторных уравнений в спектральной форме; см. также п.15.1-1);

2) собственные значения линейного оператора выражают важные свойства этого оператора без ссылки на какую бы то ни было конкретную систему координат.

Во многих приложениях собственные векторы и собственные значения линейных операторов имеют прямой геометрический или физический смысл; обычно они могут быть интерпретированы на языке задачи о максимуме и минимуме (п.14.8-8). Наиболее важные приложения относятся к эрмитовым операторам, имеющим действительные собственные значения (п.14.8-4 и 14.8-10).

14.8-2. Инвариантные многообразия. Разложимые линейные преобразования (линейные операторы) и матрицы. Многообразие \mathcal{U}_1 в линейном векторном пространстве \mathcal{U} называется **инвариантным** относительно данного линейного оператора A в пространстве \mathcal{U} , если A переводит каждый вектор $x \in \mathcal{U}_1$ в некоторый вектор $Ax \in \mathcal{U}_1$. Если \mathcal{U} конечномерно и $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ — координатный базис в \mathcal{U} , обладающий тем свойством, что векторы e_1, e_2, \dots, e_m порождают \mathcal{U}_1 , то оператор A представляется матрицей A , которую можно подразделить следующим образом:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \tilde{A} \\ \hline [0] & \tilde{A} \end{array} \right), \quad (14.8-1)$$

где A_1 — матрица размера $m \times m$, представляющая оператор A_1 в пространстве \mathcal{U}_1 , «индуцированный» оператором A . Может случиться, что оператор A_1 можно подвергнуть дальнейшему приведению.

Линейное преобразование (линейный оператор) A в векторном пространстве \mathcal{U} называется **разложимым (приводимым, вполне приводимым¹⁾**; если пространство \mathcal{U} есть прямая сумма $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots$ (п.12.7-5,а) двух или более подпространств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$, каждое из которых инвариантно относительно A . В этом случае оператор A записывают как **прямую сумму** $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$ **линейных операторов** A_1, A_2, \dots , индуцированных оператором A соответственно в $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$.

*Квадратная матрица A представляет разложимый оператор A в том и только в том случае, если матрица A подобна клеточной матрице (прямой сумме матриц A_1, A_2, \dots , соответствующих операторам A_1, A_2, \dots , см. также п.13.2-9). Матрица A , обладающая этим свойством, также называется **разложимой (приводимой, вполне приводимой²⁾**.*

14.8-3. Собственные векторы, собственные значения и спектр (см. также п.13.4-2).

(а) **Собственный вектор (характеристический вектор)** линейного оператора (линейного преобразования) A в линейном векторном пространстве \mathcal{U} есть такой вектор $y \in \mathcal{U}$, что

$$Ay = \lambda y \quad (y \neq 0), \quad (14.8-2)$$

¹⁾ См. сноску к п.14.9-2,б.

²⁾ См. сноску к п.14.9-2,б.

где λ — некоторый скаляр, называемый **собственным значением** (характеристическим значением) оператора A , соответствующим собственному вектору u .

(b) Если u — собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению λ , то это же верно для любого вектора $\alpha u \neq 0$. Если u_1, u_2, \dots, u_r — собственные векторы оператора A , соответствующие собственному значению λ , то это же верно и для каждого вектора $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r \neq 0$; эти векторы порождают линейное многообразие, инвариантное относительно A (п.14.8-2; см. также п.14.8-4,с).

Эта теорема также справедлива для сходящихся бесконечных рядов собственных векторов в гильбертовых пространствах.

Если собственному значению λ соответствует ровно $m \geq 1$ линейно независимых собственных векторов, то m называется **геометрической кратностью** собственного значения λ .

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям одного и того же линейного оператора, линейно независимы.

Линейный оператор в n -мерном векторном пространстве имеет не более n различных собственных значений. Каждое собственное значение невырожденного оператора отлично от нуля.

(с) Если ограниченный линейный оператор A имеет собственное значение λ , то оператор αA имеет собственное значение $\alpha \lambda$, а оператор A^p имеет собственное значение λ^p ($p = 0, 1, 2, \dots$, а если A — невырожденный оператор, то $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Каждый многочлен $f(A)$ (п.14.4-2,б) имеет собственное значение $f(\lambda)$ (см. также п.13.4-5, б). Все эти функции от A имеют те же собственные векторы, соответствующие указанному собственному значению, что и A .

(d) Спектр линейного оператора. Спектром ограниченного линейного оператора A в банаховом пространстве (полном нормированном векторном пространстве, п.14.2-7,б) \mathcal{U} называется множество всех комплексных чисел (спектральных значений, собственных значений¹⁾) λ , для которых векторное уравнение

$$Ax - \lambda x = f$$

не имеет для каждого вектора f единственного решения $x = (A - \lambda I)^{-1}f$ (см. также п.14.8-10). Оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ (резольвентный оператор, резольвента) для множества значений λ , не принадлежащих спектру оператора A определен и ограничен на всем пространстве \mathcal{U} . Спектр можно подразделить на

1) **дискретный спектр (точечный спектр)**, определяемый равенством (2) с собственными векторами $u \neq 0$;

2) **непрерывный спектр**, состоящий из тех спектральных значений λ , для которых оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ имеет область определения, плотную в \mathcal{U} , и неограничен;

3) **остаточный спектр**, состоящий из тех спектральных значений λ , для которых оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ имеет область определения, не плотную в \mathcal{U} , и неограничен.

Спектр ограниченного линейного оператора A содержит его **предельный спектр**, определяемый как множество всех комплексных чисел λ , для которых существует такая последовательность единичных векторов u_1, u_2, \dots , что $\|(A - \lambda I)u_n\| < 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Предельный спектр содержит дискретный и непрерывный спектр (см. также п.14.8-4).

Остаточный спектр ограниченного линейного оператора A в гильбертовом пространстве содержится в дискретном спектре оператора A^* .

(е) Спектр линейного оператора A в конечномерном нормированном векторном пространстве совпадает со спектром каждой матрицы A , представляющей оператор A , как в п.14.5-2. Алгебраической кратностью m' лю-

¹⁾ Некоторые авторы называют собственными значениями все спектральные значения, а другие пользуются этим термином только для дискретного спектра.

бого собственного значения λ_j оператора A называется алгебраическая кратность числа λ_j как собственного значения соответствующей матрицы (п.13.4-3,а). Алгебраическая кратность m_j больше или равна геометрической кратности n_j собственного значения λ_j .

Для каждого линейного оператора в конечномерном нормированном векторном пространстве след $\text{Tr}(A)$ оператора A равен сумме всех его собственных значений, каждое из которых считается столько раз, какова его алгебраическая кратность, а определитель $\det(A)$ равен таким же образом подсчитываемому произведению всех собственных значений (см. также п.13.4-3,б).

Характеристическое уравнение $F_A(\lambda) = 0$, соответствующее классу подобных конечных матриц (п.13.4-5, а), называется характеристическим уравнением представляемого этими матрицами оператора A ; оно дает его собственные значения вместе с их алгебраическими кратностями. Теорема Кэли-Гамильтона ($F_A(A) = 0$, п.13.4-7,а) и теоремы из п.13.4-7,б применимы и к линейным операторам в конечномерных нормированных векторных пространствах.

(г) Если A — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве, то из $Ay = \lambda y$ и $A^*z = \mu z$ следует, что либо $\mu = \bar{\lambda}$, либо $(y, z) = 0$ (см. также п.14.8-4).

14.8-4. Собственные векторы и собственные значения нормальных и эрмитовых операторов (см. также пп.13.4-2, 13.4-4, 14.4-6, 14.8-8, 15.3-3,б, 15.3-4 и 15.4-6).

(а) Если A — нормальный оператор в гильбертовом пространстве ($A^*A = AA^*$, п.14.4-8,б), то A и A^* имеют одни и те же собственные векторы; соответствующие собственные значения операторов A и A^* являются комплексными сопряженными числами. Спектр каждого нормального оператора совпадает с его предельным спектром; остаточный спектр пуст (см. также п.14.8-3,д).

Для каждого нормального оператора A с собственными значениями λ эрмитовы операторы $H_1 = \frac{1}{2}(A+A^*)$, $H_2 = \frac{1}{2i}(A-A^*)$ и A^*A имеют те же собственные векторы, что и A , и соответственно собственные значения $\text{Re } \lambda$, $\text{Im } \lambda$ и $|\lambda|^2$.

(б) Все спектральные значения любого эрмитова оператора действительны.

Обратное верно не всегда, но каждый нормальный оператор, имеющий действительный спектр, является эрмитовым.

(с) Следующими важными спектральными свойствами нормальных операторов, в частности, обладают эрмитовы операторы:

1. Ортогональность собственных векторов. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям нормального оператора, попарно ортогональны.

2. Свойство полноты собственных векторов. Каждый ограниченный нормальный оператор A в гильбертовом пространстве \mathcal{U} вполне приводим (п.14.8-2). При этом \mathcal{U} есть прямая сумма подпространства, порожденного ортонормированной системой собственных векторов оператора A (п.14.7-4), и подпространства, состоящего из векторов, ортогональных каждому собственному вектору оператора A . В конечномерном случае ортонормированная система собственных векторов порождает \mathcal{U} .

Каждый нормальный оператор A в конечномерном унитарном векторном пространстве \mathcal{U} разложим в прямую сумму (п.14.8-2) нормальных операторов A_1, A_2, \dots , определенных в соответствующих подпространствах $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ пространства \mathcal{U} таких, что каждый оператор A_j имеет единственное собственное значение λ_j . В каждом подпространстве \mathcal{U}_j существует полная ортонормированная система собственных векторов $u_j^{(i)}$.

Если собственное значение λ нормального оператора имеет алгебраическую кратность m , то геометрическая кратность значения λ также равна m , и наоборот.

(д)* Спектральные представления. Следующими свойствами нормальных операторов обладают, в частности, эрмитовы операторы.

Если y_1, y_2, \dots, y_n — ортонормированная система собственных векторов нормального оператора A в конечномерном пространстве \mathcal{U} и x — любой вектор вида $x = \hat{\xi}_1 y_1 + \hat{\xi}_2 y_2 + \dots + \hat{\xi}_n y_n$ ($\hat{\xi}_k = (y_k, x)$, п.14.7-4, а),

то

$$\left. \begin{aligned} Ax &= \lambda_1 \hat{\xi}_1 y_1 + \lambda_2 \hat{\xi}_2 y_2 + \dots + \lambda_n \hat{\xi}_n y_n \\ (\text{спектральное представление оператора } A), \\ (x, Ax) &= \lambda_1 |\hat{\xi}_1|^2 + \lambda_2 |\hat{\xi}_2|^2 + \dots + \lambda_n |\hat{\xi}_n|^2, \end{aligned} \right\} \quad (14.8-3)$$

где λ_k — собственное значение, соответствующее y_k (см. также п.13.5-4, б).

* Вопросу о спектральном представлении операторов в произвольном гильбертовом пространстве (спектральный анализ операторов) посвящена обширная литература; см., например, [13.4], [13.6]. *

14.8-5. Определение собственных значений и собственных векторов: конечномерный случай (см. также пп.13.4-5 и 13.5-5; численные методы см. в п.20.3-5). Если $A \equiv [a_{ik}]$ — матрица размера $n \times n$, представляющая линейный оператор A относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n , то собственные значения λ и собственные векторы $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$ оператора A определяют следующим образом:

1. Собственные значения находят как корни алгебраического уравнения n -й степени (*характеристического уравнения*)

$$\det (A - \lambda I) \equiv \det (A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Координаты $\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \dots, \eta_n^{(j)}$ всех m_j линейно независимых собственных векторов

$$y^{(j)} = \eta_1^{(j)} e_1 + \eta_2^{(j)} e_2 + \dots + \eta_n^{(j)} e_n,$$

соответствующих каждому отдельному собственному значению λ_j , получают, решая систему n однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_j) \eta_1^{(j)} + a_{12} \eta_2^{(j)} + \dots + a_{1n} \eta_n^{(j)} &= 0, \\ a_{21} \eta_1^{(j)} + (a_{22} - \lambda_j) \eta_2^{(j)} + \dots + a_{2n} \eta_n^{(j)} &= 0, \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \eta_1^{(j)} + a_{n2} \eta_2^{(j)} + \dots + (a_{nn} - \lambda_j) \eta_n^{(j)} &= 0, \end{aligned}$$

матрица которой имеет ранг $n - m_j$ (п. 1.9-5).

m_j матриц-столбцов $y^{(j)} = \begin{pmatrix} \eta_1^{(j)} \\ \eta_2^{(j)} \\ \dots \\ \eta_n^{(j)} \end{pmatrix}$ называются **модальными столбцами**

(или просто **собственными векторами**) данной матрицы A , соответствующими собственному значению λ_j . Каждый модальный столбец можно умножить на произвольную постоянную, отличную от нуля.

14.8-6. Приведение и диагонализация матриц. Преобразование к главным осям (см. также п.14.8-2).

(а) Каждая конечная система линейно независимых собственных векторов Y_1, Y_2, \dots, Y_s , соответствующих одному и тому же собственному значению линейного оператора A порождает подпространство \mathcal{U}_1 , инвариантное относительно A (п.14.8-3, б). Если Y_1, Y_2, \dots, Y_s взять в качестве первых s базисных векторов, то оператор A будет представляться матрицей вида

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & \tilde{A} \\ \hline [0] & \hat{A} \end{array} \right). \quad (14.8-4)$$

(б) Пусть, в частности, A — нормальный оператор в конечномерном векторном пространстве размерности n . Тогда метод п.14.8-5 дает ровно n линейно независимых собственных векторов

$$y^{(i)} = \eta_1^{(i)} e_1 + \eta_2^{(i)} e_2 + \dots + \eta_n^{(i)} e_n.$$

Соответствующие n модальных столбцов образуют невырожденную модальную матрицу

$$T \equiv [t_{ik}], \quad \text{где} \quad t_{ik} = \eta_i^{(j)}, \quad (14.8-5)$$

причем каждому отдельному собственному значению λ_j соответствует m_j соседних столбцов; $n = m_1 + m_2 + \dots$ столбцов имеют индексами последовательные значения $k = 1, 2, \dots, n$. Преобразование координат пассивного типа

$$x = T\tilde{x} \quad (14.8-6)$$

(п.14.6-1) вводит в качестве координатного базиса n собственных векторов $y^{(i)}$ нормального оператора A . Преобразование подобия

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad (14.8-7)$$

дает матрицу \tilde{A} , представляющую оператор A в новой системе координат; \tilde{A} есть клеточная матрица

$$\tilde{A} \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_1 & [0] & \dots \\ \hline [0] & \tilde{A}_2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array} \right), \quad (14.8-8)$$

где каждая подматрица \tilde{A}_j соответствует собственному значению λ_j оператора A , отличному от других его собственных значений, и имеет ровно m_j строк и m_j столбцов (см. также п.14.8-4, с).

(с) Если n собственных векторов, определяющих столбцы модальной матрицы (5), попарно ортогональны, то преобразование подобия (7) дает диагональную матрицу \tilde{A} (приведение данной матрицы A к диагональному виду, диагонализация, п.13.4-4, а). Чтобы получить матрицу преобразования T , приводящего данную матрицу A , представляющую нормальный оператор A , к диагональному виду, поступают следующим образом:

1. Если все собственные значения λ_j простые (это верно, если характеристическое уравнение не имеет кратных корней), то матрицу A диагонализует каждая модальная матрица (5).

2. Если существуют кратные собственные значения λ_j , то с помощью процесса Грама — Шмидта (п.14.7-4, б) ортогонализуем каждое

множество m , собственных векторов $\mathbf{y}^{(j)} = \eta_1^{(j)} \mathbf{e}_1 + \eta_2^{(j)} \mathbf{e}_2 + \dots + \eta_n^{(j)} \mathbf{e}_n$.

n модальных столбцов $\tilde{\mathbf{y}}^{(j)} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1^{(j)} \\ \tilde{\eta}_2^{(j)} \\ \dots \\ \tilde{\eta}_n^{(j)} \end{pmatrix}$, представляющих получающиеся

в результате $m_1 + m_2 = \dots = n$ попарно ортогональных собственных векторов

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(j)} = \tilde{\eta}_1^{(j)} \mathbf{e}_1 + \tilde{\eta}_2^{(j)} \mathbf{e}_2 + \dots + \tilde{\eta}_n^{(j)} \mathbf{e}_n,$$

составляют тогда искомую матрицу преобразования T .

(d) Во многих приложениях первоначальный координатный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ является ортонормированным (прямоугольные декартовы координаты), так что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) \equiv \mathbf{x}^* \mathbf{Ax} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{x}_i x_k \quad (14.8-9)$$

(п.14.7-4, а), а в качестве нового координатного базиса берется ортонормированная система собственных векторов $\tilde{\mathbf{y}}^{(j)}$ (получаемая, если нужно, с помощью процесса Грама – Шмидта). Тогда каждая модальная матрица T , образованная из $\tilde{\mathbf{y}}^{(j)}$, является унитарной матрицей. Унитарное преобразование координат (6), вводящее в качестве базисных векторов n ортонормированных собственных векторов, называется преобразованием к главным осям для оператора \mathbf{A} (см. также пп.2.4-7 и 3.5-6).

Преобразование к главным осям для эрмитова оператора \mathbf{A} приводит соответствующую эрмитову форму (9) к ее нормальной форме (13.5-9) (см. также п.13.5-4).

(e) Два эрмитовых оператора \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть в одном и том же базисе представлены диагональными матрицами в том и только в том случае, если $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$ (см. также пп.13.4-4, б и 13.5-5).

14.8-7. «Обобщенная» задача о собственных значениях (см. также пп.13.5-5 и 15.4-5).

(а) В некоторых приложениях требуется найти «собственные векторы» \mathbf{y} и «собственные значения» μ , определяемые соотношением вида

$$\mathbf{Ay} = \mu \mathbf{By} \quad (\mathbf{y} \neq 0), \quad (14.8-10)$$

где \mathbf{B} – невырожденный оператор. Векторы \mathbf{y} и числа μ обязательно являются собственными векторами и собственными значениями оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$; если \mathbf{B} – тождественный оператор, то задача сводится к задаче, определяемой равенством (2). Если \mathbf{A} и \mathbf{B} – эрмитовы операторы и \mathbf{B} положительно определен (п.14.4-4), то

- 1) все собственные значения μ действительны;
- 2) можно ввести новое скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{B}} \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{Bb}) \quad (14.8-11)$$

(см. также п.14.2-6, а). По отношению к этому новому скалярному произведению оператор $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ оказывается эрмитовым, и к нему применимы теоремы об ортогональности и о полноте из п.14.8-4, с. В частности, собственные векторы \mathbf{y} , соответствующие различным собственным значениям μ , попарно ортогональны относительно скалярного произведения (11) (см. также п.14.7-3, а).

(b) Рассмотрим конечномерное унитарное векторное пространство и ортонормированную систему координат u_1, u_2, \dots, u_n , так что $(a, b) \equiv \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \beta_k$

(п.14.7-4, а). Пусть A и B представляются эрмитовыми матрицами $A \equiv [a_{ik}]$ и $B \equiv [b_{ik}]$, причем матрица B является положительно определенной. Тогда собственные значения μ , определяемые равенством (10), совпадают с корнями алгебраического уравнения n -й степени

$$\det(A - \mu B) \equiv \det[a_{ik} - \mu b_{ik}] = 0 \quad (\text{характеристическое уравнение}) \quad (14.8-12)$$

для «обобщенной» задачи о собственных значениях.

Для каждого корня μ_j кратности m_j существует ровно m_j линейно независимых собственных векторов $y^{(j)} = \eta_1^{(j)} u_1 + \eta_2^{(j)} u_2 + \dots + \eta_n^{(j)} u_n$; координаты $\eta_i^{(j)}$ этих векторов получаются из системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} - \mu_j b_{ik}) \eta_k^{(j)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14.8-13)$$

Применяя к $m_1 + m_2 + \dots = n$ собственным векторам $y^{(j)}$ процесс Грама—Шмидта (п.14.7-4, b), находим полную ортонормированную систему векторов относительно нового скалярного произведения

$$(a, b)_B = a^* B b = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \bar{a}_i \beta_k. \quad (14.8-14)$$

Если в качестве координатного базиса взять эту ортонормированную систему собственных векторов, подобно тому как это было сделано в п.14.8-6, с, то эрмитовы формы $(x, Ax) = x^* A x$ и $(x, Bx) = x^* B x$ примут вид (13.5-12) (одновременное приведение двух эрмитовых форм к сумме квадратов, п.13.5-5).

(с) Аналогичная «обобщенная» задача о собственных значениях для случая бесконечномерных векторных пространств рассматривается в п.15.4-5.

14.8-8. Задачи о собственных значениях как задачи о стационарных значениях (см. также п.15-4-7).

(а) Рассмотрим эрмитов оператор A в конечномерном унитарном векторном пространстве \mathcal{U} и выберем в \mathcal{U} ортонормированный координатный базис¹⁾ u_1, u_2, \dots, u_n , так что A представляется эрмитовой матрицей $A \equiv [a_{ik}]$. Важная задача нахождения собственных векторов $y^{(j)} = \eta_1^{(j)} u_1 + \eta_2^{(j)} u_2 + \dots + \eta_n^{(j)} u_n$ и соответствующих собственных значений λ_j оператора A в точности эквивалентна каждой из следующих задач:

1. Найти каждый вектор $y \neq 0$ (т.е. его координаты η_i), для которого

$$\frac{(y, Ay)}{(y, y)} \equiv \frac{y^* A y}{y^* y} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{\eta}_i \eta_k}{\sum_{i=1}^n \eta_i \bar{\eta}_i} \quad (\text{частное Релея}) \quad (14.8-15)$$

принимает стационарное значение. Эти стационарные значения $\lambda_j = \frac{(y^{(j)}, Ay^{(j)})}{(y^{(j)}, y^{(j)})}$ определяют λ_j как отношение

¹⁾ В большинстве приложений для удобства берут ортонормированный базис; в общем случае нужно только в равенствах (15) – (17) сделать замену $(y, Ay) = y^* G A y$ и $(y, y) = y^* G y$.

2. Найти каждый вектор y , для которого форма

$$(y, Ay) = y^*Ay = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{\eta}_i \eta_k \quad (14.8-16)$$

принимает стационарное значение при условии, что

$$(y, y) = y^*y = \sum_{i=1}^n |\eta_i|^2 = 1. \quad (14.8-17)$$

Эти стационарные значения $y = y^{(j)}$ определяют $\lambda_j = (y^{(j)}, Ay^{(j)})$.

3. Найти каждый вектор $y \neq 0$, для которого скалярное произведение (y, y) принимает стационарное значение при условии, что

$$(y, Ay) = 1. \text{ Эти стационарные значения } y^{(j)} \text{ дают } \lambda_j = \frac{1}{(y^{(j)}, y^{(j)})}.$$

Пусть собственные значения оператора A занумерованы в порядке возрастания, причем собственное значение кратности m повторяется m раз: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Наименьшее собственное значение λ_1 равно минимальному значению частного Релея (15) для произвольного вектора $y \in \mathcal{U}$. r -е собственное значение λ_r в этой последовательности подобным же образом меньше или равно частному Релея для всех ненулевых векторов, ортогональных ко всем собственным векторам, соответствующим собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$. Число λ_r есть максимум минимума $\min_{y \in \mathcal{U}_r} (y, Ay)/(y, y)$ для произвольных $(r-1)$ -мерных подпространств \mathcal{U}_r пространства \mathcal{U} (принцип минимакса Куранта).

Последние теоремы можно высказать и для задач 2 и 3 и для максимумов вместо минимумов; заметим, что минимум в задачах 1 и 2 соответствует максимуму в задаче 3, и наоборот. Эрмитова форма (y, Ay) обычно имеет прямой физический смысл. Задача 3 собственными значениями оператора A ставит в соответствие главные оси некоторой поверхности второго порядка (см. также пп. 2.4-7 и 3.5-6).

(b) Обобщения. Теория п.14.8-8 может быть распространена на «обобщенную» задачу о собственных значениях, определяемую условием $Ay = \mu By$, где A — эрмитов, а B — положительно определенный эрмитов оператор (п.14.8-7). Нужно только в формулировке каждой задачи из п.14.8-8 заменить (y, y) на $(y, y)_B \equiv (y, By)$. При этом частное Релея (15) заменяется отношением

$$\frac{(y, Ay)}{(y, By)} = \frac{y^*Ay}{y^*By} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{\eta}_i \eta_k}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \bar{\eta}_i \eta_k} \quad (14.8-18)$$

(частное Релея для «обобщенной» задачи о собственных значениях).

Аналогичные теоремы справедливы и для подходящих классов операторов в гильбертовых пространствах; в этом случае формы (y, Ay) , (y, y) и (y, By) могут оказаться не суммами, а интегралами, так что задачи о стационарных значениях из п.14.8-8, а превращаются в вариационные задачи (п.15.4-7).

14.8-9. Границы для собственных значений линейных операторов (см. также п.15.4-10). Для исследования собственных значений часто оказываются полезными следующие теоремы.

(a)* Для каждого собственного значения λ линейного оператора A , представляемого матрицей $A \equiv [a_{ik}]$ размера $n \times n$,

$$|\lambda| \leq \min \{P, Q\}, \quad (14.8-19)$$

где

$$P = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|,$$

$$Q = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{kj}|.$$

Для действительной и мнимой частей характеристических чисел имеют место оценки:

$$\min_{1 \leq i \leq n} [\operatorname{Re} a_{ii} - P_i] \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} [\operatorname{Re} a_{ii} + P_i],$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} [\operatorname{Im} a_{ii} - P_i] \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} [\operatorname{Im} a_{ii} + P_i],$$

где $P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$. В этих оценках P_i можно заменить на $Q_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$.

Если дополнительно предположить, что $|a_{ii}| > P_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$|\lambda| \geq \min_{1 \leq i \leq n} [|a_{ii}| - P_i].$$

(Величины P_i могут быть заменены на Q_i).

Действительная часть $\operatorname{Re} \lambda$ лежит между наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, а мнимая часть $\operatorname{Im} \lambda$ — между наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ (см. также п.13.3-4, а).

(b) Для эрмитовых матриц и операторов

$$|\lambda|^2 \leq \sum_i \sum_k |a_{ik}|^2, \quad |\lambda| \leq \|A\|. \quad (14.8-20)$$

(e) Теоремы сравнения. Пусть $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ — последовательность (с учетом кратностей) собственных значений конечномерной задачи о собственных значениях (10), где A и B — эрмитовы операторы, причем B является положительно определенным. Тогда:

1) прибавление положительно определенного эрмитова оператора к A не может уменьшить ни одно из собственных значений μ_r в этой последовательности;

2) прибавление положительно определенного эрмитова оператора к B не может увеличить ни одно из собственных значений μ_r ;

3) если векторы u рассматривать только в некотором $(n-m)$ -мерном подпространстве пространства \mathcal{U} , то $n-m$ собственных значений $\mu'_1 \leq \mu'_2 \leq \dots \leq \mu'_{n-m}$ задачи, получаемой при таком ограничении, будут удовлетворять соотношениям

$$\mu_r \leq \mu'_r \leq \mu_{r+m} \quad (r = 1, 2, \dots, n-m). \quad (14.8-21)$$

Эти ограничения обычно принимают вид m независимых линейных уравнений, связывающих векторные компоненты η_i .

Эти теоремы применимы к операторам в гильбертовых пространствах, если A и B — положительно определенные операторы, дающие дискретную последовательность $\mu_1 < \mu_2 < \dots$ с конечными кратностями.

14.8-10. Неоднородные линейные векторные уравнения (см. также пп. 1.9-4, 15.3-7 и 15.4-12).

(а) Если A — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве, то векторное уравнение

$$Ax - \lambda x = f \quad (14.8-22)$$

имеет для каждого данного вектора f единственное решение x в том и только в том случае, если скаляр λ не принадлежит спектру оператора A (п.14.8-3, d). Если λ есть собственное значение λ_1 оператора A в смысле равенства (2), то уравнение (22) имеет решение только в том случае, если данный вектор f ортогонален каждому собственному вектору оператора A^* , соответствующему собственному значению $\bar{\lambda}_1$. В этом последнем случае существует бесконечное множество решений: решением является каждая сумма любого частного решения и произвольной линейной комбинации собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1 .

(b) В важном частном случае

$$Ax = f, \quad (14.8-23)$$

где A — ограниченный нормальный оператор, единственное решение x для каждого данного вектора f существует в том и только в том случае, если из $Ax = 0$ следует $x = 0$, т. е. если A — невырожденный оператор. Если A — вырожденный оператор, то уравнение (23) имеет решение только в том случае, если вектор f ортогонален каждому собственному вектору оператора A^* , соответствующему собственному значению нуль.

(с) Для эрмитова оператора $A = A^*$, имеющего ортонормированную систему собственных векторов y_k , для которых $f = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k, f) y_k$, решение уравнения (22) дается формулой

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y_k, f)}{\lambda_k - \lambda} y_k, \quad (14.8-24)$$

где λ_k — (не обязательно различные) собственные значения, соответствующие каждому вектору y_k .

14.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

14.9-1. Представления групп.

(а) Каждая группа (п.12.2-1) может быть представлена гомоморфизмом (п.12.1-6), отображающим ее в группу невырожденных линейных преобразований некоторого векторного пространства (представляющего пространство, пространства-носителя) и, следовательно, в некоторую группу невырожденных матриц (это — одна из форм теоремы Кэли, сформулированной в п.12.2-9, b). Представление степени или размерности n группы G в поле F есть группа матриц A, B, \dots размера $n \times n$ над полем F , связанная с элементами a, b, \dots группы G гомоморфизмом $A = A(a), B = B(b), \dots$, так что из $ab = c$ для всех a и b из группы G следует, что $A(a)B(b) = C(c)$ (условие представления). Число n равно линейной размерности представляющего пространства. Представление называется **точным (истинным)**, если оно взаимно однозначно (и таким образом является изоморфизмом, п.12.1-6).

Каждая группа допускает в качестве представляющего пространства некоторое комплексное векторное пространство, т. е. каждая группа имеет представление в поле комплексных чисел. Такое представление позволяет описать определяющую операцию произвольной группы в терминах сложения и умножения чисел (см. также пп.12.1-1 и 14.1-1). В большинстве приложений речь идет о группах преобразований (п.12.2-8; примеры см. в п.14.10-7).

Каждая группа a_1, a_2, \dots, a_g конечного порядка g допускает точное представление, содержащее g линейно независимых матриц перестановки (п.13.2-6) $A_i(a_j) = [a_{ik}(a_j)]$, определяемых условиями

$$a_{ik}(a_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i^{-1} a_j a_k = E, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, g), \quad (14.9-1)$$

где E — единичный элемент данной группы (регулярное представление конечной группы). Таким образом, каждая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок (см. также п.12.2-8).

(b) Два представления \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ группы G называются **подобными** или **эквивалентными**, если все пары матриц $A(a)$ представления \mathcal{R} и $\tilde{A}(a)$ представления $\tilde{\mathcal{R}}$ связаны одним и тем же преобразованием подобия (п.13.4-1, b) $\tilde{A} = T^{-1}AT$. В этом случае говорят, что матрицы $A(a)$ и $\tilde{A}(a)$ описывают одно и то же линейное преобразование $A(a)$ представляющего пространства, общего для \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ (см. также п.14.6-2).

Представление \mathcal{R} называется **ограниченным, унитарным и/или ортогональным**, если соответствующим свойством обладают все его матрицы. Каждое представление конечной группы и каждое унитарное представление ограничено. Для каждого ограниченного представления существует эквивалентное унитарное представление.

(c) **Ранг** любого представления \mathcal{R} есть наибольшее число линейно независимых матриц¹⁾ в \mathcal{R} .

14.9-2. Приведение представлений.

(a) Представление \mathcal{R} группы G называется **приводимым**²⁾, если представляющее пространство \mathcal{U} имеет собственное подпространство \mathcal{U}_1 , инвариантное относительно \mathcal{R} , т. е. относительно каждого линейного преобразования, описываемого матрицей из \mathcal{R} (п.14.5-2). Это верно в том и только в том случае, если существует преобразование подобия

$$\tilde{A} = T^{-1}AT,$$

одновременно переводящее матрицы $A(a), B(b), \dots$ представления \mathcal{R} в соответствующие матрицы вида

$$\tilde{A}(a) \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_1(a) & \hat{A}(a) \\ \hline [0] & A_2(a) \end{array} \right), \quad \tilde{B}(b) \equiv \left(\begin{array}{c|c} B_1(b) & \hat{B}(b) \\ \hline [0] & B_2(b) \end{array} \right), \quad \dots, \quad (14.9-2)$$

где $A_1(a), B_1(b), \dots$ — квадратные матрицы одного и того же порядка. Матрицы $A_1(a), B_1(b), \dots$ образуют представление \mathcal{R}_1 данной группы G с представляющим пространством \mathcal{U}_1 . Представление, которое не является приводимым, называется **неприводимым**.

(b) Представление \mathcal{R} называется **разложимым**³⁾, если его представляющее пространство \mathcal{U} является прямой суммой $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots$ (п.12.7-5, a) подпространств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ инвариантных относительно \mathcal{R} . Это имеет место в том и только в том случае, если существует преобразование подобия $\tilde{A} = T^{-1}AT$,

¹⁾ Так как матрицы можно рассматривать как векторы, линейная независимость матриц определяется точно так же, как в п.14.2-3.

²⁾ Определения в этом пункте применимы и к любому множеству линейных преобразований в векторном пространстве или к соответствующему множеству матриц (не обязательно группе).

³⁾ Термины **неприводимое**, **разложимое** и **полное приводимое** различными авторами переставляются по-разному. В действительности в случае ограниченных матриц, преобразований и представлений, а значит для всех представлений конечных групп, они эквивалентны (п.14.9-2).

одновременно переводящие матрицы $A(a)$, $B(b)$, ... представления \mathcal{R} в соответствующие клеточные матрицы

$$\tilde{A}(a) \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} A_1(a) & [0] & \dots \\ \hline [0] & A_2(a) & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array} \right), \quad \tilde{B}(b) \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} B_1(b) & [0] & \dots \\ \hline [0] & B_2(b) & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \quad (14.9-3)$$

(прямые суммы матриц п.13.2-9), где соответствующие подматрицы имеют один и тот же порядок. Каждое множество матриц $A_i(a)$, $B_i(b)$, ... ($i = 1, 2, \dots$) образует представление \mathcal{R} , данной группы G с представляющим пространством \mathcal{U}_i . Представление \mathcal{R} записывается как прямая сумма $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots$

(в) Представление \mathcal{R} называется **вполне приводимым**, если оно разложимо на неприводимые представления (**неприводимые компоненты**) $\mathcal{R}^{(1)}$, $\mathcal{R}^{(2)}$, ...

(д) Условия приводимости (см. также п.14.9-5, б). Каждое ограниченное представление (\mathcal{U} , в частности, каждое представление конечной группы) либо вполне приводимо, либо неприводимо.

Группа G имеет разложимое представление в том и только в том случае, если она является прямым произведением (п.12.7-2) простых групп (п.12.2-5, б).

Ограниченное представление \mathcal{R} вполне приводимо в том и только в том случае, если существует матрица Q , не имеющая вида αI , перестановочная с каждой матрицей из \mathcal{R} . Неприводимые представления коммутативных (абелевых) групп необходимо одномерны.

Если все соответствующие матрицы A , \tilde{A} двух неприводимых представлений \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ связаны одним и тем же преобразованием $Q\tilde{A} = A\tilde{Q}$, то либо \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ эквивалентны, либо $Q = [0]$ (лемма Шура).

14.9-3. Неприводимые представления группы.

(а) Разложение $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(1)} \oplus \mathcal{R}^{(2)} \oplus \dots$ данного вполне приводимого представления \mathcal{R} некоторой группы на неприводимые компоненты единственно с точностью до эквивалентности и перестановки порядка слагаемых. Каждое вполне приводимое представление однозначно определяется (с точностью до эквивалентности) своими неприводимыми компонентами. Если $\mathcal{R}^{(j)}$ — одно из m , имеющихся взаимно эквивалентных неприводимых компонент представления \mathcal{R} ($j = 1, 2, \dots$), то можно писать

$$\mathcal{R} = m_1 \mathcal{R}^{(1)} \oplus m_2 \mathcal{R}^{(2)} \oplus \dots$$

(б) Для каждой группы G конечного порядка g

1) число m различных неэквивалентных неприводимых представлений конечно и равно числу различных классов сопряженных элементов (п.12.2-5, а);

2) если n_j — размерность j -го неприводимого представления, то его ранг равен n_j^2 (теорема Бернсайд); ранг каждого представления R группы G равен сумме рангов n_j^2 различных неприводимых компонент R ;

3) каждое число n_j является делителем g , и

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_m^2 = g; \quad (14.9-4)$$

4) регулярное представление группы G (п.14.9-1, а) содержит j -е неприводимое представление группы G ровно n_j раз.

(в) Нахождение полного множества неприводимых представлений группы G операторов представляет особый интерес как ключ к решению некоторых задач о собственных значениях. Если N — эрмитов оператор, перестановочный с каждым оператором из группы G , то между различными собственными значениями λ_i оператора N и неэквивалентными неприводимыми представлениями $R^{(i)}$ группы G существует взаимно однозначное соответствие, и геометрическая кратность каждого собственного значения λ_i равна размерности $R^{(i)}$ (классификация собственных значений в квантовой механике из соображений симметрии [13.7]).

14.9-4. Характер представления.

(а) Характер представления \mathcal{R} есть функция

$$\chi(a) \equiv \text{Tr}[A(a)], \quad (14.9-5)$$

определенная на элементах a группы G , представляемой \mathcal{R} . *Сопряженные элементы группы* (п.12.2-5, а) *имеют равные значения характера.*

Для каждого ограниченного представления

$$\chi(a^{-1}) \equiv \overline{\chi(a)}. \quad (14.9-6)$$

Два вполне приводимых представления одной и той же группы G эквивалентны в том и только в том случае, если их характеры совпадают.

(b) *Характеры неприводимых представлений называются простыми или примитивными характерами, а характеры приводимых представлений — составными характерами. Из $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots$ следует $\chi(a) \equiv \chi_1(a) + \chi_2(a) + \dots$, где $\chi(a)$, $\chi_1(a)$, $\chi_2(a)$, \dots — характеры соответственно представлений \mathcal{R} , \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \dots .*

14.9-5. Соотношения ортогональности (см. также п.14.9-6).

(a) *Примитивные характеры $\chi^{(1)}(a)$, $\chi^{(2)}(a)$, \dots , соответствующие неэквивалентным неприводимым представлениям $\mathcal{R}^{(1)}$, $\mathcal{R}^{(2)}$, \dots конечной группы G , удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} \text{средн. ар. } \{ \overline{\chi^{(j)}(a)} \chi^{(j')}(a) \} &= \frac{1}{g} \sum_{a \in G} \overline{\chi^{(j)}(a)} \chi^{(j')}(a) = \\ &= \delta_{jj'} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq j', \\ 1, & \text{если } j = j' \end{cases} \quad (j, j' = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (14.9-7)$$

Для каждого вполне приводимого представления $\mathcal{R} = m_1 \mathcal{R}^{(1)} \oplus m_2 \mathcal{R}^{(2)} \oplus \dots$ группы G

$$\chi(a) \equiv m_1 \chi^{(1)}(a) + m_2 \chi^{(2)}(a) + \dots, \quad (14.9-8)$$

$$m_j = \text{средн. ар. } \overline{\chi^{(j)}(a)} \chi(a) = \frac{1}{g} \sum_{a \in G} \overline{\chi^{(j)}(a)} \chi(a), \quad (14.9-9)$$

$$\text{средн. ар. } \{ \overline{\chi(a)} \chi(a) \} = \frac{1}{g} \sum_{a \in G} |\chi(a)|^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots > 1. \quad (14.9-10)$$

Если \mathcal{R} неприводимо, то средн. ар. $\{ |\chi(a)|^2 \} = 1$.

(b) *Каждое из m неэквивалентных неприводимых представлений $\mathcal{R}^{(j)}$ конечной группы G эквивалентно соответствующему унитарному неприводимому представлению, содержащему матрицы $[u_{ik}^{(j)}(a)]$ (см. также п.14.9-1, b). Элементы этих унитарных матриц удовлетворяют соотношениям*

$$\text{средн. ар. } \{ \overline{u_{ik}^{(j)}(a)} u_{i'k'}^{(j')}(a) \} = \frac{1}{g} \sum_{a \in G} \overline{u_{ik}^{(j)}(a)} u_{i'k'}^{(j')}(a) = \frac{1}{n_j} \delta_{jj'} \delta_{ii'} \delta_{kk'}, \quad (14.9-11)$$

$$(j, j' = 1, 2, \dots, m; i, k = 1, 2, \dots, n_j; i', k' = 1, 2, \dots, n_{j'}).$$

14.9-6. Прямые произведения представлений.

(a) *Если \mathcal{R}_1 — n_1 -мерное, а \mathcal{R}_2 — n_2 -мерное представления одной и той же группы G , то матрицы размера $n_1 n_2 \times n_1 n_2$, получаемые как прямые произведения (п.13.2-10) матриц из \mathcal{R}_1 на матрицы из \mathcal{R}_2 , образуют $n_1 n_2$ -мерное представление группы G — прямое (кронекеровское) произведение $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ представлений \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 (см. также п.12.7-2). Его представляющее пространство является прямым произведением представляющих пространств для \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 (п.12.7-3). Характер $\chi(a)$ представления $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ равен произведению характера $\chi_1(a)$ представления \mathcal{R}_1 и характера $\chi_2(a)$ представления \mathcal{R}_2 :*

$$\chi(a) \equiv \chi_1(a) \chi_2(a). \quad (14.9-12)$$

Если \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 ограничены или унитарны, то это же верно и для $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$.

(b) *Прямое произведение $\mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}$ двух ограниченных неприводимых представлений $\mathcal{R}^{(1)}$ и $\mathcal{R}^{(2)}$ группы G неприводимо, если размерность представления $\mathcal{R}^{(1)}$ и/или $\mathcal{R}^{(2)}$ равна 1; в противном случае $\mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}$ вполне приводимо. С помощью этого последнего факта можно из данного неприводимого представления группы G получать новые ее неприводимые представления.*

(с) Неприводимые представления прямого произведения $G_1 \otimes G_2$ двух групп G_1 и G_2 (п.12.7-2) являются прямыми произведениями $R_1^{(G_1)} \otimes R_2^{(G_2)}$ неприводимых представлений $R_1^{(G_1)}$ группы G_1 и $R_2^{(G_2)}$ группы G_2 .

14.9-7. Представления колец, полей и линейных алгебр (см. также пп.12.3-1 и 12.4-2). Кольца, поля и линейные алгебры также могут быть представлены подходящими классами матриц или линейных преобразований. В частности, линейная алгебра порядка n^2 над полем F , имеющая единицу, изоморфна алгебре матриц порядка $n \times n$ над полем F (регулярное представление линейной алгебры, см. также пп.14.9-1, а и 14.10-6).

14.10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЙ

14.10-1. Вращения в трехмерном евклидовом векторном пространстве.

(а) Каждое ортогональное линейное преобразование

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}) \quad (14.10-1a)$$

в трехмерном евклидовом векторном пространстве (п.14.2-7, а) сохраняет модули векторов и углы между векторами (пп.14.4-5 и 14.4-6). Такое преобразование называется (собственным) **вращением**, если $\det(\mathbf{A}) = 1$, т. е. если это преобразование, кроме того, сохраняет относительную ориентацию любых трех базисных векторов (и потому правую и левую системы координат, векторное произведение двух векторов и смешанное произведение трех векторов). Преобразование (1a) с $\det(\mathbf{A}) = -1$ называется **несобственным вращением** или **вращением с отражением**.

(б) Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ — любой ортонормированный базис (п.14.7-4), и пусть

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{u}_1 + \xi_2 \mathbf{u}_2 + \xi_3 \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{x}' = \xi'_1 \mathbf{u}_1 + \xi'_2 \mathbf{u}_2 + \xi'_3 \mathbf{u}_3.$$

Каждое преобразование (1a) задается формулами

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3, \\ \xi'_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3, \\ \xi'_3 &= a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3, \end{aligned} \right\} \quad (14.10-1b)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (14.10-1c)$$

где для собственных вращений

$$\det [a_{ik}] = \det(\mathbf{A}) = 1. \quad (14.10-2)$$

Так как рассматриваемая система координат является ортонормированной, действительная матрица $\mathbf{A} \equiv [a_{ik}]$, описывающая каждое вращение, ортогональна ($\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$, см. также п.14.7-5), т. е.

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}a_{kj} = \sum_{j=1}^3 a_{ji}a_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (14.10-3)$$

и каждый коэффициент a_{ik} равен алгебраическому дополнению элемента a_{ki} в определителе $\det [a_{ik}]$. Любые три из коэффициентов a_{ik} определяют все 9.

Геометрически коэффициент a_{ik} есть косинус угла между базисным вектором \mathbf{u}_i и повернутым базисным вектором

$$\mathbf{u}'_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^3 a_{jk}\mathbf{u}_j \quad (\text{см. также п.14.5-1}): \quad (14.10-4)$$

$$a_{ik} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}'_k = \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}_k) \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

14.10-2. Угол поворота. Ось вращения.

(а) Вращение (1) поворачивает радиус-вектор \mathbf{x} каждой точки трехмерного евклидова пространства на угол поворота δ вокруг направленной оси вращения, точки которой инвариантны. Угол поворота δ и направляющие косинусы c_1, c_2, c_3 положительной оси вращения определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= \frac{1}{2} [\text{Tr} (A) - 1] = \frac{1}{2} [\text{Tr} (A) - 1] = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1), \\ c_1 &= \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \delta}, \quad c_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \delta}, \quad c_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \delta}, \end{aligned} \right\} (14.10-5)$$

так что $\delta > 0$ соответствует вращению правого винта, вворачиваемого в направлении положительной оси вращения. Либо знак угла δ , либо направление оси вращения могут выбираться произвольно.

Направление положительной оси вращения, это — направление собственного вектора $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$, соответствующего собственному значению +1 оператора A , и находямого путем приведения матрицы A к диагональному виду (п. 14.8-6). Остальными собственными значениями оператора A являются $\cos \delta \pm i \sin \delta = e^{\pm i\delta}$.

(б) Матрица преобразования A , соответствующая данному вращению, описываемому числами δ, c_1, c_2, c_3 есть

$$\begin{aligned} A &\equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \cos \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{pmatrix} + \sin \delta \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14.10-6)$$

14.10-3. Вращения вокруг осей координат. Следующие матрицы преобразования описывают правые вращения вокруг положительных осей координат:

$$A_1(\psi) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (\text{вращение на угол } \psi \text{ вокруг } \mathbf{u}_1), \quad (14.10-7a)$$

$$A_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (\text{вращение на угол } \psi \text{ вокруг } \mathbf{u}_2), \quad (14.10-7b)$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{вращение на угол } \psi \text{ вокруг } \mathbf{u}_3). \quad (14.10-7c)$$

14.10-4. Углы Эйлера.

(а) Каждая матрица $A \equiv [a_{ik}]$, описывающая собственное вращение в трехмерном евклидовом пространстве, может быть различными способами

представлена в виде произведения трех матриц (7) и, в частности, так:

$$\begin{aligned}
 A &\equiv A(\alpha, \beta, \gamma) \equiv A_3(\gamma) A_2(\beta) A_1(\alpha) \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} [\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - [\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \gamma] \\ -\sin \alpha \sin \gamma] & + \cos \alpha \sin \gamma] & \\ [\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + [-\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma] & + \cos \alpha \cos \gamma] & \\ + \sin \alpha \cos \gamma] & + \cos \alpha \cos \gamma] & \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (14.10-8)
 \end{aligned}$$

В литературе встречаются и различные другие наборы углов Эйлера, например углы α', β', γ' , определяемые условием

$$A \equiv A(\alpha', \beta', \gamma') \equiv A_3(\gamma') A_1(\beta') A_2(\alpha'). \quad (14.10-9)$$

Можно также один или несколько из углов Эйлера взять с противоположным знаком или же заменить дополнительным углом.

Заметим также, что некоторые авторы рассматривают вращения *системы координат* (преобразование «пассивного» типа, п.14.6-1), и таким образом меняют местами A и $A' = A^{-1}$.

Три угла Эйлера α, β, γ однозначно определяют вращение; они могут быть связаны с δ, c_1, c_2, c_3 с помощью соотношений (5) и (8). В частности,

$$\cos \frac{\delta}{2} = \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \quad (14.10-10)$$

Заметим, что обратное вращение A^{-1} (возвращающее x' в x) описывается матрицей

$$A^{-1} \equiv A' \equiv A_3(-\alpha) A_2(-\beta) A_1(-\gamma). \quad (14.10-11)$$

(б) Геометрическая интерпретация углов Эйлера (см. также рис. 14.10-1). Оси x, y, z прямоугольной декартовой системы координат (рассматриваемые как твердое тело), вначале направленные вдоль векторов u_1, u_2, u_3 , можно повернуть так, чтобы они стали направлены вдоль векторов u'_1, u'_2, u'_3 с помощью трех последовательных вращений:

- 1) поворот вокруг оси z на угол Эйлера α ,
- 2) поворот вокруг оси y на угол Эйлера β ,
- 3) поворот вокруг оси x на угол Эйлера γ .

14.10-5. Бесконечно малые вращения, непрерывное вращение и угловая скорость (см. также пп.5.3-2 и 14.4-9).

(а) Бесконечно малое трехмерное вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси вращения с направляющими косинусами c_1, c_2, c_3 описывается соотношением

$$x' = x + dx' = (I + dA)x. \quad (14.10-12)$$

$I + dA$ есть ортогональное бесконечно малое преобразование, так что преобразование dA кососимметрично (п.14.4-9). В ортонормированном координатном базисе u_1, u_2, u_3 преобразование dA описывается кососимметрической матрицей

$$dA \equiv \left[\frac{d}{d\delta} a_{ik} |_{\delta=0} \right] d\delta \equiv \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} d\delta, \quad (14.10-13)$$

получаемой дифференцированием соотношения (6). Отметим, что

$$d\mathbf{x}' = (d\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) d\delta, \quad (14.10-14)$$

где $\mathbf{e} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$ — единичный вектор в направлении положительной оси вращения.

Вот более общее утверждение. Если \mathbf{W} — любой кососимметрический линейный оператор в трехмерном евклидовом векторном пространстве \mathcal{U} , представляемый в ортонормированном базисе $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ кососимметрической матрицей

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

то для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{w} \times \mathbf{x},$$

где $\mathbf{w} = w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ (см. также п.16.9-2).

(б) Для непрерывного трехмерного вращения, описываемого соотношением

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},$$

формула (14) дает

$$\frac{d\mathbf{x}'(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}. \quad (14.10-15)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ направлен вдоль мгновенной оси вращения (оси вращения $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} + d\mathbf{x}'$), а $\boldsymbol{\omega}(t)$ есть **мгновенная скорость вращения** относительно t . Если параметр t есть время, то вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ называется **угловой скоростью** вращения.

Если преобразование $\mathbf{A}(t)$ описывается углами Эйлера $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$, переводящими фиксированные базисные векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ в повернутые базисные векторы $\mathbf{u}'_1(t), \mathbf{u}'_2(t), \mathbf{u}'_3(t)$ (п.14.10-4), то угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \omega_1(t)\mathbf{u}_1 + \omega_2(t)\mathbf{u}_2 + \omega_3(t)\mathbf{u}_3 =: \tilde{\omega}_1(t)\mathbf{u}'_1(t) + \tilde{\omega}_2(t)\mathbf{u}'_2(t) + \tilde{\omega}_3(t)\mathbf{u}'_3(t)$$

задается формулами

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(t) &\equiv -\sin \alpha \frac{d\beta}{dt} + \cos \alpha \sin \beta \frac{d\gamma}{dt}, \\ \omega_2(t) &\equiv \cos \alpha \frac{d\beta}{dt} + \sin \alpha \sin \beta \frac{d\gamma}{dt}, \\ \omega_3(t) &\equiv \frac{d\alpha}{dt} + \cos \beta \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(координаты } \boldsymbol{\omega}(t) \text{ в неподвижной} \\ \text{системе координат);} \end{array} \quad (14.10-16a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_1(t) &\equiv -\sin \beta \cos \gamma \frac{d\alpha}{dt} + \sin \gamma \frac{d\beta}{dt}, \\ \tilde{\omega}_2(t) &\equiv \sin \beta \sin \gamma \frac{d\alpha}{dt} + \cos \gamma \frac{d\beta}{dt}, \\ \tilde{\omega}_3(t) &\equiv \cos \beta \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(координаты } \boldsymbol{\omega}(t) \text{ в повернутой} \\ \text{системе координат).} \end{array} \quad (14.10-16b)$$

14.10-6. Представление векторов и вращений комплексными матрицами размера 2×2 . Параметры Коли — Клейна. Если задан ортонормированный базис $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, то каждый действительный вектор $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{u}_1 + \xi_2\mathbf{u}_2 + \xi_3\mathbf{u}_3$ может

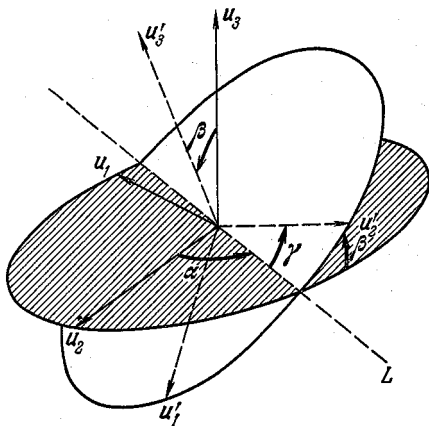


Рис. 14.10-1. Углы Эйлера α, β, γ .

быть представлен (вообще говоря, комплексной) эрмитовой матрицей размера 2×2

$$H \equiv \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix} \equiv \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \xi_3 S_3, \quad (14.10-17)$$

где базисным векторам u_1, u_2, u_3 соответствуют спин-матрицы Паули

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14.10-18)$$

Соответствие (17) является изоморфизмом, сохраняющим результат сложения векторов и умножения векторов на (действительные) скаляры.

Для каждого вращения (1), описываемого углами Эйлера α, β, γ (п.14.10-4), вектор вращения

$$x' = Ax = \xi'_1 u_1 + \xi'_2 u_2 + \xi'_3 u_3$$

представляется матрицей

$$H' = \xi'_1 S_1 + \xi'_2 S_2 + \xi'_3 S_3 = U^*(\alpha, \beta, \gamma) H U(\alpha, \beta, \gamma), \quad (14.10-19)$$

где $U(\alpha, \beta, \gamma)$ — (вообще говоря, комплексная) унитарная матрица с определителем, равным 1 (унимодулярная матрица)

$$U(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1), \quad (14.10-20a)$$

где

$$a = e^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2}, \quad b = e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (14.10-20b)$$

Параметры Кэли—Клейна a, b определяют соответствующее вращение A однозначно, но a, b и $-a, -b$ (или U и $-U$) описывают одно и то же вращение, так как углы $\alpha + 2\pi, \beta + 2\pi, \gamma + 2\pi$ соответственно эквивалентны углам α, β, γ .

Геометрически параметры Кэли—Клейна a, b определяют преобразование комплексной плоскости

$$u' = \frac{\bar{a}u - b}{bu + a} \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1) \quad (14.10-21)$$

(дробно-линейное преобразование, п.7.9-2), переводящее стереографическую проекцию и точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) сферы на комплексную плоскость в стереографическую проекцию u' повернутой точки (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) .

З а м е ч а н и е. Каждая комплексная матрица размера 2×2 является линейной комбинацией матриц $S_0 = I, S_1, S_2$ и S_3 . Линейные комбинации матриц I, iS_1, iS_2 и iS_3 с действительными коэффициентами образуют представление алгебры кватернионов (п.12.4-2), скаляры которой соответствуют действительным кратным матрицам I , а образующие соответствуют матрицам iS_1, iS_2, iS_3 , причем

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = I, & \quad S_2 S_3 = -S_3 S_2 = -iS_1, \\ S_1 S_3 = -S_3 S_1 = iS_2, & \quad S_1 S_2 = -S_2 S_1 = -iS_3. \end{aligned} \right\} \quad (14.10-22)$$

14.10-7. Группа трехмерных вращений и ее представления (см. также пп.12.2-1—12.2-12 и 14.9-1—14.9-6).

(а) Ортогональные преобразования (1) трехмерного евклидова векторного пространства на себя необходимо ограничены и невырождены и образуют группу, группу трехмерных вращений-отражений R_3^\pm . Собственные вращения ($\det(A) = 1$) образуют нормальный делитель группы R_3^\pm , группу трехмерных вращений R_3^+ . Ни группа R_3^\pm , ни группа R_3^+ не коммутативны.

Вращения, имеющие один и тот же по абсолютной величине угол вращения $|\delta|$, принадлежат к одному и тому же классу сопряженных элементов. Бра-

щения вокруг произвольной фиксированной оси образуют коммутативную подгруппу группы R_3^+ (двумерные вращения).

R_3^+ является подгруппой группы всех невырожденных линейных преобразований евклидова векторного пространства на себя (полная линейная группа, ПЛГ). Заметим, что каждое преобразование из ПЛГ является произведением собственного или несобственного вращения и неотрицательного симметрического преобразования (аффинного преобразования, сжатия или растяжения; см. также пп. 14.4-8 и 13.3-4).

(b) Неприводимые представления группы R_3^+ . Матрицы (20) образуют неприводимое унитарное двукратное представление группы R_3^+ в поле комплексных чисел, т. е. группа трехмерных вращений R_3^+ представляется группой унитарных преобразований с определителем 1 двумерного унитарного векторного пространства на себя (двумерная унитарная группа, СУГ).

Справедливо и более общее утверждение. Группа трехмерных вращений R_3^+ имеет ограниченные неприводимые представления размерностей $n = 2, 3, 4, \dots$. Полную систему унитарных неприводимых представлений удобно обозначить символами $\mathcal{R}^{(1/2)}, \mathcal{R}^{(1)}, \mathcal{R}^{(3/2)}, \dots$, где $\mathcal{R}^{(j)}$ имеет размерность $n = 2j + 1$, а матрица размера $(2j + 1) \times (2j + 1)$, представляющая вращение с углами Эйлера α, β, γ , имеет вид

$$[U_{m_q}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)] \equiv \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \sqrt{(j+m)! (j-m)! (j+q)! (j-q)!}}{(j-m-h)! (j+q-h)! (h-q+m)! h!} \times \right. \\ \left. \times e^{-i(\alpha+mq)} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j-m+q-2h} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-q+2h} \right] \quad (14.10-23)$$

$$\left(j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; m, q = -j, -j+1, \dots, j-1, j \right).$$

Считается, что $1/(N!) = 0$ при $N < 0$, и поэтому каждая сумма имеет только конечное число членов. Представление $\mathcal{R}^{(j)}$ является точным (важно однозначным) при $j = 1, 2, \dots$ и двукратным при $j = 1/2, 3/2, \dots$ (см. также п. 14.10-6). Характером (п. 14.9-4) представления $\mathcal{R}^{(j)}$ служит функция

$$\chi^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \text{Tr} [U_{m_q}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)] \equiv \frac{\sin \left(j + \frac{1}{2} \right) \delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad \left(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \right), \quad (14.10-24)$$

где δ — угол поворота, определенный в п. 14.10-2.

Особые индексы j, m и q , применяемые для $\mathcal{R}^{(j)}$ и $U_{m_q}^{(j)}$, это как раз индексы, связанные с сферическими функциями степени j (п. 21.8-12). Для целочисленных значений j эти функции образуют $(2j + 1)$ -мерное представляющее пространство для $\mathcal{R}^{(j)}$ с функциями (21.8-66) в качестве ортонормированного базиса.

(c) Прямые произведения групп вращения (см. также пп. 12.7-2 и 14.9-6). Прямые произведения групп трехмерных вращений описывают, например, составные вращения динамических систем, содержащих два или более вращающихся тела (атомы или ядра в квантовой механике). Прямое произведение $R_3^+ \otimes R_3^+$ изоморфно R_3^+ ; отметим что

$$\mathcal{R}^{(j)} \otimes \mathcal{R}^{(j')} = \mathcal{R}^{(j+j')} \oplus \mathcal{R}^{(j-j')} \oplus \mathcal{R}^{(j'-j)} = \mathcal{R}^{(j+j')} \oplus \mathcal{R}^{(j+j'-1)} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^{(|j-j'|)} \quad (14.10-25)$$

(равенство Клебша — Жордана).

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

15.1. ВВЕДЕНИЕ

15.1-1. Вводные замечания. Современный анализ рассматривает подходящим образом выбранные классы функций как состоящие из многомерных векторов, допускающих определение скалярного произведения (п.15.2-1) и разложения по ортогональным функциям (базисным векторам, см. п.15.3-4). Изящные и богатые геометрическими аналогиями выводы теории линейных преобразований, введенной в гл. 14, распространяются на широкий класс операций, включающий линейные интегральные преобразования и дифференцирование. Решения линейных дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, и линейных интегральных уравнений находятся путем более или менее простого обобщения решения систем линейных уравнений, в частности, сюда могут быть включены задачи о собственных значениях (п.14.8-3 и 15.4-5).

В пп.15.3-1—15.3-10 рассматриваются линейные интегральные уравнения, в пп. от 15.4-1 до 15.4-12 вводятся линейные краевые задачи и задачи о собственных значениях для дифференциальных уравнений. Остальная часть главы содержит различные методы решения линейных краевых задач, а именно:

1. Разложения по собственным функциям (п.15.4-12); этот метод может быть расширен включением различных методов интегральных преобразований (п.10.5-1).
2. Функции Грина (пп.15.5-1, 15.5-3, 15.6-6, 15.6-9).
3. Сведение к интегральным уравнениям (п.15.3-2).
4. Вариационные методы (п.15.4-7, см. также пп.11.6-1—11.6-3). В частности, в пп.15.6-1—15.6-10 рассматриваются краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона (теория потенциала) и пространственная форма волнового уравнения.

Несмотря на то, что многие практические задачи поддаются лишь численному решению (п.20.8-3), общая теория гл. 15 предоставляет возможность далеко идущего проникновения в теорию поведения колебательных систем, атомных явлений и т. д.

15.1-2. Обозначения (см. также п.15.4-1). На всем протяжении в пп. с 15.2-1 до 15.5-4, $\Phi(x)$, $f(x)$, $F(x)$, ... обозначают или функции одной независимой переменной x или, для краткости, функции нескольких переменных x^1, x^2, \dots, x^n (см. также пп.6.2-1 и 16.1-2). В одномерном случае dx есть просто дифференциал, в многомерном случае

$$dx \equiv dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

Интеграл

$$I = \int_V f(\xi) d\xi \quad (15.1-1)_*$$

представляет в одномерном случае определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

по ограниченному или неограниченному интегралу $V \equiv (a, b)$, а в n -мерном случае n -кратный интервал

$$I = \iiint_V \dots \int f(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n \quad (15.1-2)$$

по области V в n -мерном пространстве. Как правило, возможно ввести элемент объема $dV(\xi) = \sqrt{|g(\xi)|} d\xi$ так, что каждый интеграл (2) приобретает вид объемного интеграла (пп.6.2-3, 15.4-1, б и 16.10-10).

15.2. ФУНКЦИИ КАК ВЕКТОРЫ. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

15.2-1. Квадратично интегрируемые функции как векторы. Скалярное произведение и нормирование ¹⁾.

(а) Действительная или комплексная функция, определенная на измеримом множестве E «точек» (x) или (x^1, x^2, \dots, x^n) , **квадратично интегрируема** на E , если существует в смысле Лебега интеграл $\int_E |f(\xi)|^2 d\xi$ (п.4.6-15). Класс

L_2 (более точно $L_2(V)$) всех действительных или комплексных квадратично интегрируемых функций на некотором интервале или в некоторой области соответственно образует бесконечномерное действительное, или комплексное унитарное векторное пространство (п.14.2-6), если рассматривать функции $f(x), h(x), \dots$ как векторы и определить

вектор-сумму функций $f(x)$ и $h(x)$ как $f(x) + h(x)$;

произведение вектора $f(x)$ **на скаляр** α как $\alpha f(x)$;

скалярное произведение векторов $f(x)$ и $h(x)$ как

$$(f, h) \equiv \int_V \gamma(\xi) \overline{f(\xi)} h(\xi) d\xi, \quad (15.2-1)$$

где $\gamma(x)$ — данная действительная неотрицательная функция (**весовая функция**), квадратично интегрируемая на V . Замена весовой функции соответствует замене независимой переменной; во многих приложениях $\gamma(x) \equiv 1$ или $\gamma(\xi) d\xi$ есть элемент объема (п.15.4-1, б).

Линейная независимость множества функций (векторов) в L_2 определяется способом п.1.9-3 (см. также п.14.2-3). Квадратично интегрируемые функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель Грама $\det \{(f_i, f_k)\}$ отличен от нуля (см. также п.14.2-6, а).

(б) Как и в п.14.2-7, **норма** функции (вектора) $f(x)$ в L_2 есть число

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \equiv \left[\int_V \gamma(\xi) |f(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}. \quad (15.2-2)$$

Функция $f(x)$ (необходимо квадратично интегрируемая) **нормируема** тогда и только тогда, когда $\|f\|$ существует и отлична от нуля. Умножение на $1/\|f\|$ нормируемой функции $f(x)$ доставляет функцию $f(x)/\|f\|$ с единичной нормой (**нормирование** $f(x)$).

¹⁾ Обозначения см. п.15.1-2.

(с) Скалярное произведение, определенное равенством (1), имеет свойства, перечисленные в п.14.2-6. В частности, если $f(x)$, $h(x)$ и действительная неотрицательная весовая функция $\gamma(x)$ квадратично интегрируемы на V , то имеет место неравенство Коши — Шварца

$$|(f, h)|^2 \equiv \left| \int_V \gamma \bar{f} h \, d\xi \right|^2 \leq \int_V \gamma |f|^2 \, d\xi \int_V \gamma |h|^2 \, d\xi \equiv (f, f) (h, h) \quad (15.2-3)$$

и неравенство Минковского

$$\|f+h\| = \left(\int_V \gamma |f+h|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \leq \left(\int_V \gamma |f|^2 \, d\xi \right)^{1/2} + \left(\int_V \gamma |h|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \equiv \|f\| + \|h\|. \quad (15.2-4)$$

15.2-2. Метрика и сходимость в L_2 . Сходимость в среднем (см. также пп.12.5-2 — 12.5-4, 14.2-7 и 18.6-3).

(а) Как унитарное векторное пространство L_2 допускает введение расстояния между функциями (метрика, п.12.5-2)

$$d(f, h) \equiv \|f-h\| \equiv \left[\int_V \gamma(\xi) |f(\xi) - h(\xi)|^2 \, d\xi \right]^{1/2}. \quad (15.2-5)$$

Корень (5) из среднего квадратичного разности между $f(x)$ и $h(x)$ равен нулю (метрическая эквивалентность $f(x)$ и $h(x)$) тогда и только тогда, когда $f(x) = h(x)$ для почти всех x в V (п.4.6-14, б).

(б) Сходимость в среднем. Метрика (5) порождает следующее определение сходимости по метрике в L_2 . Для данного интервала или области V последовательность квадратично интегрируемых функций $s_0(x)$, $s_1(x)$, ... сходитсся в среднем (с индексом 2) к пределу $s(x)$ ($s_n(x) \xrightarrow{\text{в среднем}} s(x)$) при $n \rightarrow \infty$), если

$$d^2(s_n, s) \equiv \|s_n - s\|^2 \equiv \int_V \gamma(\xi) |s_n(\xi) - s(\xi)|^2 \, d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (15.2-6)$$

В этом случае последовательность определяет ее предел в среднем — $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$, единственным образом почти всюду в V и, в частности, в каждой точке непрерывности $s(x)$. Сходимость в среднем не обязательно имеет своим следствием обычную сходимость последовательности $s_0(x)$, $s_1(x)$, ... в каждой точке, а обычная сходимость последовательности в каждой точке V не имеет следствием сходимость в среднем. В частности, бесконечный ряд квадратично интегрируемых функций $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \dots$ сходитсся в среднем

к пределу $s(x)$, если $\sum_{k=0}^n a_k(x) \xrightarrow{\text{в среднем}} s(x)$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае пишут

$$a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \dots \underset{\text{в среднем}}{=} s(x).$$

(с) Полнота L_2 . Теорема Рисса — Фишера. Пространство L_2 ассоциированное с данным интервалом или областью V является полным (п. 12.5-4, а). Именно, каждая фундаментальная последовательность квадратично интегрируемых функций $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., т. е. последовательность, для которой $\lim_{m \rightarrow \infty} d(s_m, s_n) = 0$, сходитсся в среднем к квадратично интегрируемой функции $s(x)$ и определяет $s(x)$ однозначно для почти всех x в V (теорема Рисса — Фишера).

З а м е ч а н и е. Свойство полноты, выраженное теоремой Рисса—Фишера, превращает L_2 в гильбертово пространство (п.14.2-7, б); в нем можно ввести ортонормированный базис со всеми свойствами, указанными в пп.14.7-4 и 15.2-4. Это является важным обстоятельством для использования интегрирования по Лебегу и сходимости в среднем.

(д) По определению $f(x, \alpha) \rightarrow F(x)$ при $\alpha \rightarrow a$, если
в среднем

$$\lim_{\alpha \rightarrow a} \|f(x, \alpha) - F(x)\| = 0.$$

15.2-3. Ортогональные функции и ортонормированные последовательности функций (см. также п.14.7-3).

(а) Две квадратично интегрируемые функции $f(x)$, $h(x)$ называются взаимно **ортогональными** (ортогональными относительно действительной неотрицательной весовой функции $\gamma(x)$ ¹⁾), если

$$(f, h) \equiv \int_V \gamma(\xi) \overline{f(\xi)} h(\xi) d\xi = 0. \quad (15.2-7)$$

Последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... называется **ортонормированной**, если

$$(u_i, u_k) \equiv \int_V \gamma \overline{u_i} u_k d\xi = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots). \quad (15.2-8)$$

Каждое множество нормируемых взаимно ортогональных функций (и, в частности, каждая ортонормированная последовательность) является линейно независимым.

(б) **Неравенство Бесселя.** Для любой конечной или бесконечной ортонормированной последовательности $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... и любой квадратично интегрируемой на V функции $f(x)$ выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_k |(u_k, f)|^2 \leq (f, f). \quad (15.2-9)$$

Знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $f(x)$ принадлежит линейному многообразию, натянутому на $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... (см. пп.14.2-2 и 15.2-4).

15.2-4. Полные ортонормированные последовательности функций. Ортонормированные базисы (см. также п.14.7-4). Ортонормированная последовательность $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... в $L_2(V)$ является **полной ортонормированной последовательностью (ортонормированным базисом)** тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Каждая квадратично интегрируемая функция может быть представлена в форме $f(x) = f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \dots$, где $f_k =$
в среднем
 $= (u_k, f)$ ($k = 1, 2, \dots$).

2. Для каждой квадратично интегрируемой функции $f(x)$ таковой, что $f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \dots = f(x)$ имеет место тождество
в среднем

Парсеваля или соотношение полноты (см. также п.14.7-3, б и 15.2-3, б)

$$(f, f) = |f_1|^2 + |f_2|^2 + \dots$$

¹⁾ Некоторые авторы называют $f(x)$ и $h(x)$ взаимно ортогональными только в случае $\gamma(x) \equiv 1$, т.е. если $\int_V \overline{f} h d\xi = 0$.

3. Для каждой пары квадратично интегрируемых функций $f(x)$, $h(x)$ таких, что

$$f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \dots = f(x),$$

в среднем

$$h_1 u_1(x) + h_2 u_2(x) + \dots = h(x)$$

в среднем

имеет место соотношение

$$(f, h) = \bar{f}_1 \bar{h}_1 + \bar{f}_2 \bar{h}_2 + \dots$$

4. Ортонормированная последовательность $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... не содержится в какой-либо другой ортонормированной последовательности в $L_2(V)$; каждая квадратично интегрируемая функция $f(x)$, ортогональная к каждой $u_k(x)$, равна нулю почти всюду в V .

Каждое из этих четырех предложений имеет следствиями три остальных. Если на интервале или в области V дана полная ортонормированная последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... и некоторая последовательность комплексных чисел f_1, f_2, \dots такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$ сходится, то существует квадратично интегрируемая функция $f(x)$ такая, что $f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \dots$ сходится в среднем к $f(x)$ (теорема Рисса — Фишера, см. также п.15.2-2, с); f_k определяют $f(x)$ однозначно почти всюду в V , и, в частности, если $f(x)$ непрерывна, то всюду в V (теорема единственности, см. также п.4.11-5).

15.2-5. Ортогонализация и нормирование последовательности функций (см. также п.14.7-4, б). Пусть дано счетное (конечное или бесконечное) множество линейно независимых (п.1.9-3) функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., нормируемых на V ; тогда существует ортонормированная последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., порождающая то же самое многообразие функций. Эта последовательность может быть построена посредством следующих рекуррентных формул (процесс ортогонализации Грама — Шмидта):

$$\left. \begin{aligned} u_i(x) &= \frac{v_i(x)}{\|v_i(x)\|} = \frac{v_i(x)}{\sqrt{(v_i, v_i)}}, \\ v_1(x) &= \varphi_1(x), \quad v_{i+1}(x) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (u_k, \varphi_{i+1}) u_k(x), \\ &(i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (15.2-10)$$

См. также п.21.7-1, примеры.

15.2-6. Аппроксимация и разложения в ряды по ортогональным функциям (см. также пп.4.11-2, с, 4.11-4, б, 15.4-12, 20.5-1, 20.5-5, 20.5-8, 21.8-12). Пусть дана квадратично интегрируемая функция $f(x)$ и ортонормированная последовательность $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... Аппроксимация $f(x)$ в форме

$$s_n(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_n u_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15.2-11)$$

доставляет наименьшее значение среднеквадратичной ошибки

$$\int_V |s_n(x) - f(x)|^2 dx, \quad \text{если } a_k = (u_k, f).$$

Заметим, что выбор коэффициентов a_k не зависит от n . Это свойство вместе с относительной простотой формул, указанных в п.15.2-4, а, делает очень важными разложения в ряды

$$f(x) = f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \dots, \quad \text{где } f_k = (u_k, f) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

в среднем

по подходящим образом выбранной последовательности ортонормированных функций.

15.2-7. Линейные операции над функциями. В пп.8.2-1, 8.6-1—8.6-4, 15.3-1, 15.4-1, 20.4-2 введены различные линейные операции (п.14.3-1)

$$\varphi(x) = L\Phi(\xi), \quad (15.2-12)$$

связывающие функцию $\varphi(x)$ с данной функцией $\Phi(\xi)$ так, что

$$L[\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\xi)] = L\Phi_1(\xi) + L\Phi_2(\xi), \quad L[\alpha\Phi(\xi)] = \alpha L\Phi(\xi). \quad (15.2-13)$$

$\Phi(\xi)$ и $\varphi(x)$ могут принадлежать одной или различным областям. Как и в п.14.1-3, существуют две различные интерпретации функционального преобразования (12):

1. Уравнение (12) описывает операцию над функцией (точка зрения «алibi» или «активная»).

2. $\Phi(\xi)$ и $\varphi(x)$ представляют один и тот же абстрактный вектор (в том же смысле, как две матрицы, п.14.6-1, b) и уравнение (12) описывает замену представления (точка зрения «alias» или «пассивная», особенно используемая в квантовой механике, см. также п.8.4-1).

15.3. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

15.3-1. Линейные интегральные преобразования ¹⁾.

(a) В пп.15.3-1—15.3-10 рассматриваются линейные интегральные преобразования

$$Kf(\xi) \equiv \int_V K(x, \xi) f(\xi) d\xi = F(x), \quad (15.3-1)$$

связывающие пары функций $f(\xi)$ и $F(x)$. Функция $K(x, \xi)$ называется **ядром** линейного интегрального преобразования. Все интегралы предполагаются существующими в смысле Лебега (п.4.6-15).

Области, которым принадлежат функция-объект $f(\xi)$ и результирующая функция $F(x)$ в уравнении (1), не обязательно тождественны (см., например, преобразования Лапласа, п.8.2-1). В пп.15.3-1, b—15.3-10 предполагается, что x и ξ изменяются в одном и том же интервале или в одной и той же области. «Символическое» интегральное преобразование

$$\int_V \delta(x, \xi) f(\xi) d\xi \equiv f(x)$$

представляет единичное преобразование (см. также пп.15.5-1 и 21.9-2).

Линейное интегральное преобразование (1) может быть трактовано или с точки зрения «алibi», или с точки зрения «alias» (п.15.2-7). Каждое ядро представляет линейный оператор в том же смысле, что и матрица (п.4.5-2, см. также п.15.3-1, c).

(b) Для данного ядра $K(x, \xi)$, $\bar{K}(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$ называется **транспонированным ядром**, $K^*(x, \xi) \equiv \bar{K}(\xi, x)$ называется **сопряженным** (эрмитово сопряженным) **ядром** (см. также п.14.4-3). Данное ядро $K(x, \xi)$ называется

симметричным, если $K(\xi, x) \equiv K(x, \xi)$;

эрмитовым, если $\bar{K}(\xi, x) \equiv K(x, \xi)$;

нормируемым, если $\iint_V |K(x, \xi)|^2 d\xi dx$ существует и отличен от нуля;

непрерывным в среднем на V , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_V |K(x + \Delta x, \xi) - K(x, \xi)|^2 d\xi = 0 \quad (\text{см. также п.12.5-1, c});$$

¹⁾ Обозначения см. п.15.1-2, см. также п.15.4-1.

вырожденным (разделяющимся), если $K(x, \xi)$ может быть представлено в виде конечной суммы $K(x, \xi) = \sum_{i=1}^m f_i(x) h_i(\xi)$.

Нормируемое ядро представляет ограниченный оператор (п.14.4-1) так, что $F(x)$ нормируема, если $f(\xi)$ нормируема (п.15.2-1, б). Вырожденные ядра представляют операторы конечного ранга (п.14.3-2). Если $K(x, \xi)$ эрмитово, нормируемо и непрерывно в среднем на V и $f(\xi)$ квадратично интегрируема на V , то $F(x)$ непрерывна в V .

(е) **Матричное представление.** Произведение двух интегральных преобразований. Дано нормируемое ядро $K(x, \xi)$ и ортонормированный базис (п.15.2-4) $u_1(x), u_2(x), \dots$ в пространстве функций $f(x)$. Пусть

$$\left. \begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(\xi), & F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k u_k(x), \\ K(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik} u_i(x) \overline{u_k(\xi)}, \\ & \left[h_{ik} = \int_V \int_V \overline{u_j(x)} K(x, \xi) u_k(\xi) dx d\xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.3-2)$$

Тогда уравнение (1) эквивалентно матричному уравнению

$$\{F_i\} = [h_{ik}] \{f_k\}.$$

Заметим, что произведение матриц $[m_{ik}][h_{ik}]$, соответствующее ядру

$$\int_V M(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta,$$

представляет произведение двух последовательных интегральных преобразований (1) ядра которых $K(x, \xi)$, $M(x, \xi)$ соответствуют $[h_{ik}]$, $[m_{ik}]$. Если $K(x, \xi)$ — вырожденное ядро то возможен выбор такой $u_k(x)$, что матрица $[h_{ik}]$ будет конечной.

15.3-2. Линейные интегральные уравнения. Обзор. Интегральное уравнение есть функциональное уравнение (п.9.1-2), включающее интегральное преобразование над неизвестной функцией $\Phi(x)$ (если функциональное уравнение включает также производные от $\Phi(x)$, то говорят об интегро-дифференциальном уравнении). Интегральное уравнение называется **однородным**, если каждое кратное $\alpha\Phi(x)$ некоторого решения $\Phi(x)$ также есть решение. В пп.15.3-2 — 15.3-10 рассматриваются линейные интегральные уравнения в общей форме

$$\beta(x) \Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x), \quad (15.3-3)$$

где ядро $K(x, \xi)$ и функции $\beta(x)$, $F(x)$ являются заданными. Область интегрирования V может быть фиксированной (интегральные уравнения типа фредгольмовых) или переменной (интегральные уравнения типа вольтерровых, п.15.3-10). Три важных типа задач суть:

1. **Линейные интегральные уравнения первого рода** ($\beta(x) \equiv 0$, $\lambda = -1$ п.15.3-9), в которых надо найти неизвестную функцию $\Phi(x)$ по данному ее интегральному преобразованию $F(x)$. Соответствующее операторное уравнение $K\Phi = F$ аналогично матричному уравнению $[k_{ik}]\{\Phi_k\} = \{F_i\}$.

2. **Однородное линейное интегральное уравнение второго рода** ($F(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv 1$, λ — неизвестно, пп.15.3-3 — 15.3-6) представляет задачу о собственных значениях. Соответствующее операторное уравнение $\lambda K\Phi = \Phi$ аналогично матричному уравнению $\lambda[k_{ik}]\{\Phi_k\} = \{\Phi_i\}$.

3. **Неоднородное линейное интегральное уравнение второго рода** ($\beta(x) \equiv 1$, λ дано; п.15.3-7) может быть записано в виде $\Phi - \lambda K\Phi = F$ и представляет задачу, тип которой был обсужден в п.14.8-10.

Если $\beta(x)$ — действительная положительная функция всюду в V , то можно свести общее линейное интегральное уравнение (3) посредством преобразования

$$\varphi(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{\sqrt{\beta(x)}}, \quad F(x) = \tilde{F}(x)\sqrt{\beta(x)}, \quad K(x, \xi) = \tilde{K}(x, \xi)\sqrt{\beta(x)\beta(\xi)}, \quad (15.3-4)$$

к линейному интегральному уравнению второго рода.

15.3-3. Однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Собственные функции и собственные значения (см. также п.14.8-3 и 15.4-5).

(а) Функция $\psi = \psi(x)$, не равная тождественно нулю в V и удовлетворяющая однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\lambda K\psi(\xi) \equiv \lambda \int_V K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \psi(x) \quad (15.3-5)$$

при определенном значении параметра λ , называется **собственной функцией (характеристической функцией)** линейного интегрального уравнения (5) или ядра $K(x, \xi)$. Соответствующее значение λ есть **собственное значение** интегрального уравнения.

Если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ суть собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению λ , то то же самое относится к их линейной комбинации $\alpha_1\psi_1(x) + \alpha_2\psi_2(x)$. Число m линейно независимых собственных функций, соответствующих некоторому собственному значению, называется **рангом** λ ; если $K(x, \xi)$ — нормируемое ядро, то каждое m конечно. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям линейного интегрального уравнения (5), линейно независимы. Общее количество линейно независимых собственных функций конечно только в том случае, когда $K(x, \xi)$ — вырожденное ядро.

Если линейный оператор K , описываемый линейным интегральным преобразованием (5), имеет единственный обратный $L = K^{-1}$, то $\psi(x)$ и λ суть собственная функция и собственное значение неособенного оператора L (см. также п.15.4-5) и все собственные значения отличны от нуля. Во многих приложениях L является дифференциальным оператором, а $K(x, \xi)$ — функцией Грина (п.15.5-1).

(б) **Собственные функции и собственные значения эрмитовых ядер** (см. также пп.14.8-4 и 15.4-6). Если $K(x, \xi)$ — эрмитово ядро, то имеют место следующие свойства:

1. Все собственные значения интегрального уравнения (5) действительны.
2. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны (с весом 1, п.15.2-3).
3. Если ядро $K(x, \xi)$ нормируемо, то все собственные значения отличны от нуля.
4. Существует по меньшей мере одно собственное значение, отличное от нуля; собственные значения образуют дискретную последовательность, содержащую не более конечного числа собственных значений в каждом конечном интервале и каждое собственное значение имеет конечный ранг.

15.3-4. Теоремы разложения.

(а) Теоремы разложения для эрмитовых ядер. В соответствии с определениями скалярного произведения (п.15.2-1) и сходимости в среднем (п.15.2-2) каждое нормируемое эрмитово ядро $K(x, \xi)$ обладает ортонормированной последовательностью собственных функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ так, что для каждой функции $F(x)$, представимой в форме $F(x) = \int_V K(x, \xi) f(\xi) d\xi$

(интегральное преобразование (1) функции $f(\xi)$, «истокообразное» представление $F(x)$) справедливо разложение

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k \psi_k(x) & (x \in V), \\ F_k = (\psi_k, F) &= \int_V \overline{\psi_k(\xi)} F(\xi) d\xi & (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (15.3-6)$$

Ряд (6) сходится абсолютно и равномерно к $F(x)$ для всех $x \in V$, если $f(\xi)$ кусочно-непрерывна в V или если $f(\xi)$ квадратично интегрируема, а ядро $K(x, \xi)$ непрерывно в среднем. Эрмитово ядро $K(x, \xi)$ называется **полным**, если каждая квадратично интегрируемая функция $F(x)$ может быть представлена в форме (1) или (6), так что собственные функции $\psi_k(x)$ образуют полную ортонормированную последовательность (п.15.2-4); это имеет место, например, если $K(x, \xi)$ положительно или отрицательно определенное (п.15.3-6).

Каждое нормируемое эрмитово ядро $K(x, \xi)$ может быть разложено в ряд

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \overline{\psi_k(\xi)} \psi_k(x) \quad (x, \xi \in V). \quad (15.3-7)$$

Ряд сходится равномерно к $K(x, \xi)$ для всех $x, \xi \in V$, если $K(x, \xi)$ непрерывно в среднем или если V есть ограниченный интервал или ограниченная область, так что $K(x, \xi)$ непрерывно для всех $x, \xi \in V$ и интегральное уравнение (5) имеет конечное число положительных или отрицательных собственных значений (теорема Мерсера).

(в) Вспомогательные ядра и теоремы разложения для неэрмитовых ядер. Пусть $K(x, \xi)$ — нормируемое ядро и $\mu_k > 0$ — положительные числа, для которых существуют ненулевые решения системы уравнений

$$\mu_k \int_V K(x, \xi) \psi_k(\xi) d\xi = w_k(x), \quad \mu_k \int_V K^*(x, \xi) w_k(\xi) d\xi = \psi_k(x). \quad (15.3-8)$$

Тогда числа μ_k^2 являются собственными значениями вспомогательных эрмитовых ядер

$$\int_V K^*(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta \quad \text{и} \quad \int_V K(x, \eta) K^*(\eta, \xi) d\eta.$$

Любая функция $F(x)$, представляемая как интегральное преобразование (1) с ядром K или K^* может быть разложена в ряды

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k(x), \quad \text{где} \quad b_k = (w_k, F) \quad (x \in V), \quad (15.3-9a)$$

или

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x), \quad \text{где} \quad a_k = (\psi_k, F). \quad (15.3-9b)$$

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно к $F(x)$ для всех $x \in V$, если $f(\xi)$ кусочно-непрерывна в V , или $f(\xi)$ квадратично интегрируема, а $K(x, \xi)$ непрерывно в среднем; весовая функция равна 1 (п.15.2-1). Для каждого нормируемого ядра $K(x, \xi)$

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \overline{\psi_k(\xi)} w_k(x) \quad (x, \xi \in V). \quad (15.3-10)$$

Если ядро $K(x, \xi)$ самосопряжено, то $w_k(x) = \psi_k(x)$, и формула (10) превращается в формулу (7).

15.3-5. Итерированные ядра. Итерированные ядра определяются соотношениями

$$K_1(x, \xi) \equiv K(x, \xi), \quad K_{p+1}(x, \xi) \equiv \int_V K_p(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta \quad (p = 2, 3, \dots) \quad (15.3-11)$$

и представляют степени K^p линейного оператора K уравнения (1). *Линейное интегральное уравнение*

$$\lambda K^p \psi(\xi) \equiv \lambda \int_V K_p(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \psi(x) \quad (15.3-12)$$

имеет те же собственные функции $\varphi(x)$, что и уравнение (5) с соответствующими собственными значениями λ^p (см. также п.14.8-3, d). Обратно, каждое решение $\psi(x)$ уравнения (12) является решением уравнения (5). Если ядро $K(x, \xi)$ эрмитово и нормируемо, то

$$K_p(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^p} \overline{\psi_k(\xi)} \psi_k(x), \quad p = 2, 3, \dots, x, \xi \in V, \quad (15.3-13)$$

и эти ряды сходятся абсолютно и равномерно в V .

15.3-6. Эрмитовы интегральные формы. Задача о собственных значениях как вариационная задача (см. также пп.11.1-1, 13.5-3, 14.8-8, а, 15.4-7).

(а) Пусть дано нормируемое эрмитово ядро $K(x, \xi)$; скалярное произведение (необходимо действительное)

$$(\Phi, K\Phi) = \int_V \int_V \overline{\Phi(x)} K(x, \xi) \Phi(\xi) dx d\xi \quad (15.3-14)$$

называется эрмитовой интегральной формой или, в частности, действительной квадратической интегральной формой, если $K(x, \xi)$ — действительное и симметричное ¹⁾. Эрмитова интегральная форма (14) (а также эрмитово ядро $K(x, \xi)$) называется положительным, отрицательным, отрицательно определенным, неотрицательным или неположительным, если выражение (14) соответственно положительно, отрицательно, неотрицательно или неположительно для каждой функции $\Phi(x)$, не равной тождественно нулю в V и такой, что интеграл существует. Интегральная форма (14) положительно определена или отрицательно определена в том и только в том случае, когда все собственные значения λ_k соответственно положительны или отрицательны.

(б) Проблема нахождения собственных функций $\psi(x)$ и собственного значения λ нормируемого эрмитова ядра может быть сформулирована как задача о стационарных значениях, способом, подобным изложенному в п.14.8-3, а.

Найдем квадратично интегрируемую функцию $\Phi(x)$ такую, что эрмитова интегральная форма (14) имеет стационарное значение при условии

$$(\Phi, \Phi) = \int_V |\Phi(\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Функция $\Phi = \psi_k(x)$ доставляет указанное стационарное значение форме (14), причем

$$\lambda_k = \frac{1}{\int_V \int_V \overline{\psi_k(x)} K(x, \xi) \psi_k(\xi) dx d\xi}.$$

Здесь также приложимы все другие теоремы п.14.8-3, а. Следует лишь вспомнить, что оператор K , представимый данным ядром $K(x, \xi)$, имеет собственные функции $\psi_k(\xi)$ и собственные значения $1/\lambda_k$. Часто бывает возможно решить интегральное уравнение вида (5), точно или приближенно, методами вариационного исчисления.

15.3-7. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода (см. также п.14.8-10).

(а) **Существование и единственность решения.** Фредгольмово линейное интегральное уравнение второго рода

$$\Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x) \quad (15.3-16)$$

имеет следующее «альтернативное» свойство:

¹⁾ Заметим, что в матричных обозначениях, введенных в п.15.3-1, с:

$$(\Phi, K\Phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{k}_{ik} \bar{\Phi}_i \Phi_k. \quad (15.3-15)$$

1. Если данный параметр λ не является собственным значением ядра $K(x, \xi)$, то уравнение (16) имеет единственное решение $\Phi(x)$.
 2. Если λ равно одному из собственных значений λ_1 уравнения (5), то «союзное» однородное интегральное уравнение

$$\bar{\lambda}_1 \int_V \overline{K(\xi, x)} \chi(\xi) d\xi = \chi(x) \quad (15.3-17)$$

имеет решение $\chi(x)$, не равное тождественно нулю в V , и данное интегральное уравнение (16) имеет решение $\Phi(x)$, лишь если $F(x)$ ортогональна (с весовой функцией 1) каждому решению $\chi(x)$ уравнения (17). Заметим, что уравнения (17) и (5) идентичны для эрмитовых ядер.

При указанных выше условиях решения существуют, в частности, когда $K(x, \xi)$ кусочно-непрерывно и нормируемо, а $F(x)$ непрерывна и квадратично интегрируема на V . Если во втором случае решение $\Phi(x)$ существует, то уравнение (16) имеет бесконечное количество решений, так как каждая сумма некоторого частного решения и линейной комбинации собственных функций $\psi(x)$, соответствующих λ_1 , является решением; в частности, существует единственное решение $\Phi(x)$, ортогональное ко всем этим собственным функциям.

(b) Сведение к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Если $K(x, \xi)$ нормируемо, то каждое решение $\Phi(x)$ уравнения (16) есть решение интегрального уравнения

$$\Phi(x) - |\lambda| \int_V H(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x) - \bar{\lambda} \int_V \overline{K(\xi, x)} F(\xi) d\xi, \quad (15.3-18a)$$

где $H(x, \xi)$ есть эрмитово ядро, определяемое формулой

$$H(x, \xi) \equiv e^{i \arg \lambda} K + e^{-i \arg \lambda} K^* - |\lambda| \int_V \overline{K(\eta, x)} K(\eta, \xi) d\eta. \quad (15.3-18b)$$

Вследствие этого достаточно изучить методы решений для эрмитовых ядер.

З а м е ч а н и е. $H(x, \xi)$ и $K(x, \xi)$ имеют тождественные собственные функции, соответствующие собственным значениям $|\lambda_k|$ и λ_k .

(с) Резольвентное ядро. Решение $\Phi(x)$ линейного интегрального уравнения (16) удобно писать в форме

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_V \Gamma(x, \xi; \lambda) F(\xi) d\xi. \quad (15.3-19)$$

Функция $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ называется **резольвентным ядром** (иногда она называется взаимным ядром) для интегрального уравнения (16); уравнения (16) и (19) представляют взаимно обратные линейные преобразования.

Когда резольвентное ядро $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ существует, оно удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(x, \xi; \lambda) - \lambda \int_V K(x, t) \Gamma(t, \xi; \lambda) dt &= K(x, \xi), \\ \Gamma(x, \xi; \lambda) - \lambda \int_V K(t, \xi) \Gamma(x, t; \lambda) dt &= K(x, \xi), \\ \Gamma(x, \xi; \lambda) - \Gamma(x, \xi; \lambda') &= (\lambda - \lambda') \int_V \Gamma(x, t; \lambda) \Gamma(t, \xi; \lambda') dt \end{aligned} \right\} \quad (15.3-20)$$

для произвольных λ, λ' , не являющихся собственными значениями $K(x, \xi)$.

15.3-8. Решение линейного интегрального уравнения (16) (см. также п.20.8-5, численные методы).

(а) Решение последовательными приближениями. Ряды Неймана. Отправляясь от пробного решения

$$\Phi^{(0)}(x) = F(x),$$

вычисляют последовательные приближения

$$\Phi^{(j+1)}(x) = F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi^{(j)}(\xi) d\xi \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (15.3-21)$$

искового решения $\Phi(x)$ уравнения (16). Функции (21) можно рассматривать как частичные суммы бесконечного ряда (называемого *рядом Неймана*)

$$F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi) F(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_V K_2(x, \xi) F(\xi) d\xi + \dots \equiv (1 + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots) F(x). \quad (15.3-22)$$

Если $K(x, \xi)$ нормируемо, $F(x)$ квадратично интегрируема на V , то существует действительное число

$$r_0 \geq \left[\int_V \int_V |K(x, \xi)|^2 dx d\xi \right]^{-1/2}$$

такое, что ряд Неймана (22) сходится в среднем к решению (19) при $|\lambda| < r_0$. Если, кроме этого,

$$\int_V |K(x, \xi)|^2 d\xi \quad \text{и} \quad \int_V |K(\xi, x)|^2 d\xi$$

равномерно ограничены в V , то степенной ряд (22) и соответствующий ряд для резольвентного ядра

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = K(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) + \dots \quad (15.3-23)$$

сходится равномерно к указанным пределам при $x, \xi \in V$ и $|\lambda| < r_0$.

Функция (23) в таком случае является аналитической функцией от λ при $|\lambda| < r_0$ и может быть аналитически продолжена (п.7.8-1), давая тем самым резольвентное ядро для других возможных значений λ . Ряд (23), как и ряд (22), известен под названием ряда Неймана.

Если нормируемое ядро $K(x, \xi)$ эрмитово, то радиус сходимости (или сходимости в среднем) r_0 дается формулой $r_0 = |\lambda_1|$, где λ_1 есть наименьшее по абсолютной величине собственное значение ядра.

(б) Формула Гильберта—Шмидта для резольвентного ядра (см. также п.14.8-10). Для каждого нормируемого и эрмитова ядра $K(x, \xi)$ решение линейного интегрального уравнения (16) дается формулой (19) с резольвентным ядром

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\psi_k(\xi)} \psi_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \quad (\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots) \quad (15.3-24)$$

(формула Гильберта—Шмидта),

где ψ_k — ортонормированные собственные функции ¹⁾ ядра $K(x, \xi)$. Ряд сходится равномерно для $x, \xi \in V$ и $\lambda \neq \lambda_k$.

¹⁾ Если λ_t — собственное значение, имеющее ранг m (п.15.3-3, а), то пишут $\lambda_{t+1} = \dots = \lambda_{t+m-1} = \lambda_t$, и, таким образом, ряд (24) содержит m членов, содержащих собственные функции $\psi_t(x), \psi_{t+1}(x), \dots, \psi_{t+m-1}(x)$, соответствующих λ_t .

$\Gamma(x, \xi; \lambda)$ есть мероморфная функция λ в конечной части λ -плоскости; вычеты $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ в ее полюсах связаны простыми соотношениями (пп.7.6-8 и 7.7-1) с собственными функциями $\psi_k(x)$.

Формула Гильберта—Шмидта для решения, когда λ равно собственному значению λ_k . Если параметр λ равен некоторому собственному значению λ_k данного ядра $K(x, \xi)$, то из суммы (24) (не являющейся теперь резольвентным ядром) исключаются члены, содержащие λ_k , и к правой части (19) прибавляется произвольная собственная функция $\psi(x)$, соответствующая λ_k . Резольвирующая функция $\Phi(x)$ является решением данного интегрального уравнения (16) при ограничениях случая 2 в п.15.3-7, а.

(е) Формулы Фредгольма для резольвентного ядра. Если $K(x, \xi)$ нормируемо, резольвентное ядро $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ может быть выражено в виде отношения двух целых функций (см. также п.7.6-7)

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{15.3-25}$$

где

$$\left. \begin{aligned} D(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} C_k \lambda^k, \\ D(x, \xi; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D_k(x, \xi) \lambda^k \end{aligned} \right\} \tag{15.3-26}$$

с

$$C_0 = 1, \quad D_0(x, \xi) = K(x, \xi)$$

и для $k = 1, 2, \dots$

$$C_k = \int_V D_{k-1}(\xi, \xi) d\xi, \quad D_k(x, \xi) = C_k K(x, \xi) - k \int_V K(x, \eta) D_{k-1}(\eta, \xi) d\eta.$$

Оба степенных ряда сходятся для всех конечных λ ; степенной ряд для $D(x, \xi; \lambda)$ сходится равномерно в V . Полюсы $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ совпадают с нулями $D(\lambda)$.

Отметим аналогию между функциями $D(x, \xi; \lambda)$, $D(\lambda)$ и определителями, используемыми для нахождения решения x_k аналогичной конечномерной задачи, $\sum_{k=1}^n (a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) x_k = b_i$

($i = 1, 2, \dots, n$), по правилу Крамера (1.9-4).

(д) С и н г у л я р н ы е я д р а. Если данное ядро $K(x, \xi)$ не ограничено в окрестности $x = \xi$, тогда как итерированное ядро $K_2(x, \xi)$ остается ограниченным, решение $\Phi(x)$ уравнения (16) находят посредством решения интегрального уравнения

$$\Phi(x) - \lambda^2 \int_V K_2(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi) F(\xi) d\xi. \tag{15.3-27}$$

Уравнение (27) получено подстановкой

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi$$

в левую часть уравнения (16). Эта процедура может быть использована, если первым итерированным ядром, остающимся ограниченным, является $K_2(x, \xi)$, $K_4(x, \xi)$, ...

15.3-9. Решение линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (см. также пп.14.8-10, 15.4-12, 15.5-1). Если линейное интегральное уравнение

$$\int_V K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x) \tag{15.3-28}$$

нормируемым ядром $K(x, \xi)$ имеет решение $\Phi(x)$, то теорема разложения

п.15.3-4, б дает

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(w_k, F) v_k(x) + \varphi(x), \quad (15.3-29)$$

в среднем

где $v_k(x)$, $w_k(x)$ и μ_k определены в п.15.3-4, б и $\varphi(x)$ — произвольная функция, ортогональная ко всем $v_k(x)$.

Если $v_k(x)$ образуют полную ортонормированную последовательность в $L_2(V)$ (п.15.2-4), то $\varphi(x) = 0$ для почти всех $x \in V$ и решение (29) единственно почти всюду в V . Если $w_k(x)$, как и $v_k(x)$, образуют полную ортонормированную последовательность в $L_2(V)$, то интегральное преобразование (28) является несобственным и допускает однозначное обращение

$$\left. \begin{aligned} \int_V K_{-1}(x, \xi) F(\xi) d\xi &= \Phi(x) \\ K_{-1}(x, \xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \overline{w_k(\xi)} v_k(x). \end{aligned} \right\} \quad (15.3-30)$$

$K_{-1}(x, \xi)$ называется взаимным ядром, ассоциированным с $K(x, \xi)$, и представляет линейный оператор K^{-1} . Для эрмитовых ядер $K(x, \xi)$ имеем $v_k(x) = w_k(x)$, $\mu_k = |\lambda_k|$.

15.3-10. Интегральные уравнения Вольтерра.

(а) Пусть x и ξ — одномерные действительные переменные. Тогда

1. Интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^x H(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x) \quad (15.3-31)$$

сводится к интегральному уравнению Фредгольма (16) на интервале $V \equiv (0, \infty)$, если ввести новое ядро

$$K(x, \xi) \equiv H(x, \xi) U_+(x - \xi) = \begin{cases} H(x, \xi) & \text{для } \xi < x, \\ 0 & \text{для } \xi \geq x. \end{cases} \quad (15.3-32)$$

2. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x \tilde{H}(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = \tilde{F}(x) \quad (15.3-33)$$

посредством дифференцирования сводится к виду (31), где

$$H(x, \xi) \equiv \frac{\partial \tilde{H}(x, \xi)}{\partial x}, \quad F(x) \equiv \frac{d \tilde{F}(x)}{dx}. \quad (15.3-34)$$

(б) Следующий пример иллюстрирует метод решения для одного класса интегральных уравнений Вольтерра, имеющих неограниченные ядра. Для нахождения решения уравнения

$$\int_0^x \frac{\Phi(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi = F(x) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (15.3-35)$$

умножают обе его части на $(y-x)^{\alpha-1}$ и интегрируют по x в пределах от a до y . Получаемое при этом интегральное уравнение имеет ограниченное ядро. Его решением является

$$\Phi(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \left[\frac{F(a)}{(x-a)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{F'(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} \right]. \quad (15.3-36)$$

В частном случае при $\alpha = 1/2$ уравнение (36) известно под названием интегрального уравнения Абеля.

15.4. ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

15.4-1. Линейные краевые задачи. Постановка задачи и обозначения (см. также пп.9.3-1, 10.3-4, 15.1-2, 15.2-7).

(а) Линейную однородную функцию от функции $\Phi(x)$ и ее производных будем записывать в виде произведения $L\Phi(x)$ функции $\Phi(x)$ и линейного дифференциального оператора L , например, вида d/dx или $-\nabla^2 - q(x^1, x^2, x^3)$. Требуется найти неизвестную функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению

$$L\Phi(x) = f(x) \quad (x \in V) \quad (15.4-1a)$$

внутри открытого интервала или области V и N линейным краевым условием

$$B_i\Phi(x) = b_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, N; x \in S), \quad (15.4-1b)$$

где S — граница области V ; каждая из $B_i\Phi(x)$ есть линейная однородная функция от $\Phi(x)$ и ее производных.

(б) Обозначения. Объемные интегралы и скалярные произведения (см. также пп.4.6-12, 15.1-2, 15.2-1, 16.10-10). В одномерном случае x есть действительная переменная, уравнение (1a) есть обыкновенное дифференциальное уравнение, V есть ограниченный или неограниченный открытый интервал, концы которого $x = a$, $x = b$ образуют границу S .

В n -мерном случае x обозначает «точку» (x_1, x_2, \dots, x_n) в n -мерном пространстве, уравнение (1a) есть уравнение в частных производных. Предполагается возможным ввести объемный элемент

$$dV(x) = \sqrt{|g(x^1, x^2, \dots, x^n)|} dx^1 dx^2 \dots dx^n \equiv \sqrt{|g(x)|} dx$$

тем же способом, что в п.6.2-3, б и 16.10-10; $\sqrt{|g(x)|}$ действителен и положителен всюду в V . Тогда $\int_V \varphi(\xi) dV(\xi)$ есть n -мерный объемный интеграл по V и можно определить скалярное произведение двух функций $u(x), v(x)$, как в п.15.2-1,

$$(u, v) \equiv \int_V \gamma_0(\xi) \overline{u(\xi)} v(\xi) d\xi \equiv \int_V \overline{u(\xi)} v(\xi) dV(\xi). \quad (15.4-2)$$

Заметим, что $\gamma_0(x) \equiv \sqrt{|g(x)|}$ зависит от системы координат. Аналогично можно предположить существование соответствующего элемента поверхности $dA(x)$ ($x \in S$) на границе гиперповерхности S ; тогда $\int_S \varphi(\xi) dA(\xi)$ интеграл по поверхности в n -мерном пространстве (см. также п.4.6-12 и 6.4-3). В частности, при $n=3$ V есть ограниченная или неограниченная открытая область пространства с граничной поверхностью S ; S есть регулярная поверхность (п.3.1-14). При $n=2$ V есть соответственно плоская область с (регулярной) граничной линией S .

15.4-2. Дополнительное дифференциальное уравнение и краевые условия для линейной краевой задачи. Теоремы о суперпозиции (см. также пп.9.3-1, 10.4-2, 14.3-1, 15.2-7). С каждой линейной краевой задачей (1) можно связать однородное дополнительное или приведенное дифференциальное уравнение

$$L\Phi(x) = 0 \quad (x \in V) \quad (15.4-3a)$$

и совокупность однородных «дополнительных краевых условий»

$$B_i\Phi(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; x \in S). \quad (15.4-3b)$$

Следующие важные теоремы устанавливают связь между решениями $\Phi(x)$ данной линейной краевой задачи (1) и функциями, удовлетворяющими более простым условиям вида (3).

1. Решение каждой линейной краевой задачи (1) может быть сведено к линейной краевой задаче с тем же оператором L и краевыми условиями (3) (см. также п.15.5-4)¹⁾.

2. Наиболее общий вид функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению (1а), может быть записан в виде суммы некоторого частного решения уравнения (1а) и наиболее общего решения дополнительного уравнения (3а).

3. Однородному линейному дифференциальному уравнению удовлетворяет любая линейная комбинация его решений.

4. Пусть $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям $L\Phi_1(x) = f_1(x)$ и $L\Phi_2(x) = f_2(x)$ с одинаковыми линейными однородными краевыми условиями $B_i \Phi(x) = 0$. Тогда $\alpha\Phi_1(x) + \beta\Phi_2(x)$ удовлетворяет уравнению $L\Phi(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ при указанных краевых условиях.

5. Пусть $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению $L\Phi(x) = 0$ с соответственными линейными краевыми условиями $B_i \Phi_1(x) = b_{1i}(x)$ и $B_i \Phi_2(x) = b_{2i}(x)$. Тогда $\alpha\Phi_1(x) + \beta\Phi_2(x)$ удовлетворяет данному уравнению и краевым условиям $B_i \Phi(x) = \alpha b_{1i}(x) + \beta b_{2i}(x)$.

15.4-3. Эрмитово сопряженные и сопряженные краевые задачи. Эрмитовы операторы (см. также пп.14.4-3, 14.4-4, 15.3-1, б).

(а) Данная однородная линейная краевая задача (3) и определение скалярного произведения (2) порождают эрмитово сопряженную краевую задачу

$$L^* \chi(x) = 0 \quad (x \in V), \quad (15.4-5a)$$

$$B_i^* \chi(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; x \in S) \quad (15.4-5b)$$

посредством условия

$$(v, Lu) - (L^*v, u) = \int_V [\bar{v}Lu - u\overline{L^*v}] dV = 0, \quad (15.4-6)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — пара соответственно дифференцируемых функций, причем $u(x)$ удовлетворяет заданным краевым условиям (3б), $v(x)$ удовлетворяет эрмитово сопряженным краевым условиям (5б); u и v могут рассматриваться как принадлежащие сопряженным векторным пространствам (15.2).

Два линейных дифференциальных оператора второго порядка L и L^* являются эрмитово сопряженными тогда и только тогда, когда функция $\bar{v}Lu - u\overline{L^*v}$ имеет форму n -мерной дивергенции $\frac{1}{|g(x)|} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} [V|g(x)| p^k]$ (табл. 16.10-1), где каждая p^k есть функция от u , v , \bar{v} , \bar{v} и их производных первого порядка²⁾.

¹⁾ Если записать $\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) + v(x)$, где $v(x)$ — соответствующим образом выбранная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1), то $\tilde{\Phi}(x)$ есть решение линейной краевой задачи

$$L\tilde{\Phi}(x) = f(x) - Lv(x) \quad (x \in V); B_i \tilde{\Phi}(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; x \in S) \quad (15.4-4)$$

$Lv(x)$ определяется выбором $v(x)$ и может содержать члены с δ -функциями; часто возможно найти $v(x)$ так, что $Lv(x) = 0$ (см. также п.10.4-2).

²⁾ Верхние значки k , как и в гл. 6 и 16, не являются показателями степеней.

При этом становится возможным представить объемный интеграл $\int_V [\bar{v}Lu - u\bar{L}^*v] dV$

через интеграл по границе S ; формулы такого типа известны как *обобщенные формулы Грина* (см. также п.15.4-3, с). Эрмитово сопряженные краевые условия $B_1u = 0$, $B_2^*v = 0$ (x в S) определяются из условия обращения в нуль интеграла по границе, т.е. выполнения условия (6).

В случае действительных функций и операторов, эрмитово сопряженные задачи, операторы и краевые условия обычно называются взаимно сопряженными.

(б) Эрмитовы операторы. Дифференциальный оператор L называется эрмитовым (самосопряженным), если

$$(v, Lu) - (Lv, u) = \int_V [\bar{v}Lu - u\bar{L}v] dV = 0 \quad (15.4-7)$$

для каждой пары соответственно дифференцируемых функций $u = u(x)$, $v = v(x)$, удовлетворяющих одинаковым однородным краевым условиям, определяющим некоторое линейное многообразие функций. Эрмитово-сопряженные краевые задачи с эрмитовыми операторами, имеющие одинаковые краевые условия тождественны (*самосопряженные краевые задачи*).

(с) Частные случаи. Действительные операторы Штурма-Лиувилля и обобщение теоремы Грина (см. также пп.5.6-1 и 15.5-4). В *одномерном* случае уравнения (3а) и (5а) являются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с заданными краевыми условиями на концах интервала $(a, b) \equiv V$. Если скалярное произведение

определено формулой $(u, v) = \int_a^b \bar{u}v dx$ (п.15.2-1), то для действительных

дифференциальных операторов второго порядка имеем

$$\left. \begin{aligned} Lu &\equiv a_0(x) \frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_2(x)u, \\ L^*v &\equiv \frac{d^2}{dx^2} [a_0(x)v] - \frac{d}{dx} [a_1(x)v] + a_2(x)v, \\ vLu - uL^*v &= \frac{dP(x)}{dx}, \quad P(x) \equiv a_0(x)(vu' - uv') + [a_1(x) - a_0'(x)]uv. \end{aligned} \right\} (15.4-8)$$

$P(x)$ иногда называют *конъюнкцией* $u(x)$ и $v(x)$ относительно оператора L .
Условие $a_1(x) \equiv a_0'(x)$ превращает L в *самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля*

$$L \equiv -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x), \quad (15.4-9)$$

где $p(x) = -a_0(x)$ и $q(x) = -a_2(x)$ (см. также п.15.4-8); интегрирование по частям приводит к обобщенной формуле Грина

$$\int_a^b (vLu - uLv) d\xi = -p(x) (vu' - uv') \Big|_{a'}^b. \quad (15.4-10)$$

В *трехмерном* случае определим скалярное произведение формулой (2), а оператор ∇^2 , так же как в табл. 6.4-1 или 16.10-1. Тогда, считая $q = q(x^1, x^2, x^3)$ действительной дифференцируемой функцией, будем иметь, что действительный дифференциальный оператор

$$L \equiv -\nabla^2 - q(x^1, x^2, x^3) \quad (15.4-11)$$

является самосопряженным и удовлетворяет обобщенной формуле Грина

$$\int_V (vLu - uLv) dV = - \int_S (v \nabla u - u \nabla v) \cdot dA = - \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dA \quad (15.4-12)$$

(см. также табл. 5.6-1). Аналогичная формула может быть написана для двумерного случая.

15.4-4. Теорема Фредгольма об альтернативе (см. также пп.14.8-10, 15.3-7, а, 15.4-12). *Линейная краевая задача, определяемая дифференциальным уравнением*

$$L\Phi(x) = f(x) \quad (x \in V) \quad (15.4-13a)$$

с однородными краевыми условиями

$$B_i\Phi(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; x \in S), \quad (15.4-13b)$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эрмитово сопряженная (сопряженная) краевая задача (5) имеет лишь решение $\chi(x)$, тождественно равное нулю $\chi(x) \equiv 0$. Если же однородная краевая задача (5) имеет решения $\chi(x)$, отличные от нуля, то данная задача (13) разрешима, лишь если $f(x)$ ортогональна к каждому $\chi(x)$, т. е.

$$(\chi, f) = \int_V \bar{\chi} f dV = 0. \quad (15.4-14)^1$$

Если последнее условие выполнено, то данная задача (13) имеет бесчисленное множество решений.

З а м е ч а н и е. Во многих приложениях L есть эрмитов оператор и эрмитово сопряженная задача (5) совпадает с данной задачей (13).

15.4-5. Задачи о собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений (см. также пп.10.4-2, с, 14.8-3, 15.1-1).

(а) Для заданной совокупности линейных краевых условий **собственной функцией (характеристической функцией)** линейного дифференциального оператора L называется решение $\psi(x)$, не тождественно равное нулю в V , дифференциального уравнения

$$L\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad (x \in V), \quad (15.4-15)$$

где λ есть соответствующим образом определенное число, называемое **собственным значением (характеристическим числом)** оператора L , связанным с собственной функцией $\psi(x)$.

(б) Более общие задачи о собственных значениях приводят к нахождению собственных функций $\psi(x) \neq 0$ и собственных значений λ , удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению

$$L\psi(x) = \lambda B(x)\psi(x) \quad (x \in V) \quad (15.4-16)$$

и заданным линейным однородным краевым условиям; $B(x)$ есть действительная и положительная функция в V .

(с) Если $\psi(x)$ есть собственная функция, принадлежащая собственному значению λ , то то же самое можно сказать о $\alpha\psi(x) \equiv 0$. Если $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_s(x)$ суть собственные функции, принадлежащие собственному значению λ , то то же самое имеет место для любой функции

$$\alpha_1\psi_1(x) + \alpha_2\psi_2(x) + \dots + \alpha_s\psi_s(x) \equiv 0.$$

Эта теорема приложена также к равномерно сходящимся рядам по собственным функциям.

Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям линейно независимы (пп.1.9-3, 9.3-2). Если собственному значению λ

¹) В одномерном случае dV совпадает с dx .

принадлежат $m > 1$ линейно независимых собственных функций, то число m называется **рангом** собственного значения.

(д) Спектр линейной задачи о собственных значениях. Непрерывный спектр и обобщенные собственные функции (см. также пп. 14.8-3 и 15.4-12). Для заданных однородных линейных краевых условий и $B(x) > 0$, спектр линейной задачи о собственных значениях (16) есть множество комплексных чисел λ таких, что дифференциальное уравнение

$$L\phi(x) - \lambda B(x)\phi(x) = f(x) \quad (x \in V) \quad (15.4-17)$$

с заданной нормируемой «возмущающей» функцией $f(x)$ не имеет единственного нормируемого решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям. Спектр может быть *непрерывным* и *остаточным*, а также *дискретным*, который определен уравнением (16) с нормируемыми собственными функциями $\psi(x)$.

В частном случае, когда $B(x) \equiv 1$, говорят о *спектре дифференциального оператора* L . Если L — эрмитов оператор и $B(x) > 0$, то дискретный и непрерывный спектр задачи (16) включается в *предельный спектр* (п. 14.8-3, д). Часто можно получать предельный спектр приближением задачи о собственных значениях последовательностью задач о собственных значениях, имеющих лишь дискретный спектр. В процессе таких предельных переходов собственные функции заменяются множеством функций, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра λ ; такие функции известны под названием *обобщенных собственных функций*; они удовлетворяют уравнению (16).

П р и м е р. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\lambda\phi(x) \quad \text{с } V \equiv (0, \infty)$$

при краевых условиях

$$\phi(0) = 0, \quad \int_0^{\infty} |\phi(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

имеет непрерывный спектр $0 < \lambda < \infty$. Этот спектр аппроксимируется дискретным спектром $\lambda = \left(k \frac{\pi}{a}\right)^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) задач о собственных значениях

$$\frac{d^2\phi_a(x)}{dx^2} = -\lambda\phi_a(x) \quad \text{с } V \equiv (0, a), \quad \phi(0) = \phi(a) = 0$$

при $a \rightarrow \infty$. Собственные функции $\sin \frac{\pi k}{a} x$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) последней задачи аппроксимируют обобщенные собственные функции $\sin \sqrt{\lambda} x$ при $a \rightarrow \infty$ (переход от рядов Фурье к интегралам Фурье). Аналогично квантовомеханические волновые функции и уровни энергии в свободном пространстве аппроксимируются теми же величинами, соответствующими неограниченно расширяющимся «боксам».

15.4-6. Собственные значения и собственные функции эрмитовой задачи о собственных значениях. Полные ортонормированные множества собственных функций (см. также пп. 14.8-4, 14.8-7, 15.2-4, 15.3-3, 15.4-3).

(а) Если оператор L в уравнении (15) эрмитов, то:

1. Все значения λ спектра действительны.
2. Нормируемые собственные функции ψ_i, ψ_k , соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны

$$(\psi_i, \psi_k) = \int_V \bar{\psi}_i \psi_k dV = 0 \quad (i \neq k).$$

Если L — эрмитов оператор, имеющий чисто дискретный спектр, то имеет место следующая теорема разложения:

3. Существует ортонормированная последовательность собственных функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, доставляющая разложение в ряд

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) + \dots \quad \left(a_k = \int_V \bar{\psi}_k \phi dV, \quad k = 1, 2, \dots \right) \quad (15.4-18a)$$

каждой квадратично интегрируемой функции $\phi(x)$, удовлетворяющей краевым условиям задачи и такой, что $L\phi(x)$ существует почти всюду в V .

(b) Эти же теоремы распространяются на «обобщенную» задачу о собственных значениях (16), где L эрмитов оператор и $B(x) > 0$, в предположении, что ортогональность и нормированность переопределены посредством скалярного произведения¹⁾

$$(u, v)_B = \int_V \bar{u}vB \, dV.$$

Таким образом, разложение (18a) заменяется более общим разложением

$$\varphi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \dots \left(a_k = \int_V \bar{\psi}_k\varphi B \, dV, \quad k=1, 2, \dots \right). \quad (15.4-18b)$$

Ортонормированность собственных функций $\psi_k(x)$ определена как

$$\int_V \bar{\psi}_i\psi_k B \, dV = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \quad (i, k \neq 1, 2, \dots). \quad (15.4-19a)$$

Эти соотношения содержат как частный случай соотношения, полученные для задачи (15).

(с) Для эрмитовой задачи с (необходимо действительным) непрерывным спектром, обладающим обобщенными собственными функциями (см. п. 15.4-5, d), существует множество обобщенных собственных функций $\psi_k(x, \lambda)$, для которых

$$\int_V \bar{\psi}(\xi, \lambda) \psi(\xi, \lambda') B(\xi) \, dV(\xi) = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (14.4-19b)$$

15.4-7. Эрмитова задача о собственных значениях как вариационная задача (см. также пп. 11.6-1, 11.6-3, 14.8-8, 15.3-6, 15.4-9, 15.4-10).

(а) Задача о собственных значениях (16) для эрмитова дифференциального оператора L с дискретными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ эквивалентна каждой из следующих вариационных задач²⁾:

1. Найти функцию $\psi(x) \neq 0$ в V , удовлетворяющую данным краевым условиям и обращающую вариацию (пп. 11.4-1 и 11.4-2) функционала

$$\frac{(\psi, L\psi)}{(\psi, B\psi)} = \frac{\int_V \bar{\psi}L\psi \, dV}{\int_V |\psi|^2 B \, dV} \quad (15.4-20)$$

(частное Рейля)

в нуль.

2. Найти функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую данным краевым условиям и обращающую вариацию функционала

$$(\psi, L\psi) = \int_V \bar{\psi}L\psi \, dV \quad (15.4-21)$$

в нуль при условии, что

$$(\psi, B\psi) = \int_V |\psi|^2 B \, dV = 1. \quad (15.4-22)$$

В каждом из этих случаев функция $\psi = \psi_k(x)$ доставляет функционалу стационарное значение λ_k .

¹⁾ В одномерном случае dV идентично с dx .

²⁾ В одномерном случае $dV = dx$.

Таким образом, возможно использовать прямые методы вариационно-го исчисления, в частности метод Релея—Ритца (п.11.6-2), при решении задачи о собственных значениях для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

(b) Пусть дан эрмитов оператор L с дискретным спектром, содержащим не более конечного числа отрицательных собственных значений (п.15.4-8, 15.4-9), и пусть собственные значения расположены в порядке их возрастания, причем собственные значения ранга m повторены m раз: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Наименьшее собственное значение λ_1 равно минимуму частного Релея (20) для произвольных «допустимых» функций $\psi(x)$, т. е. для произвольных нормируемых $\psi(x)$, которые удовлетворяют данным краевым условиям и таким, что частное Релея существует.

Аналогично r -е собственное значение λ_r указанной выше последовательности не превосходит частного Релея для всех «допустимых» функций $\psi(x)$ таких, что

$$\int_V \bar{\psi}_k \psi B dV = 0 \quad (15.4-23)$$

для каждой собственной функции ψ_k , соответствующей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ (принцип минимакса Куранта).

15.4-8. Одномерная задача Штурма—Лиувилля о собственных значениях.

(a) Рассмотрим одномерную действительную переменную x , и пусть V — ограниченный интервал (a, b) . Тогда наиболее общий действительный эрмитов дифференциальный оператор второго порядка L имеет вид (9). Действительное дифференциальное уравнение (однородное дифференциальное уравнение Штурма—Лиувилля)

$$L\psi \equiv - \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \psi \equiv - \left[p(x) \frac{d^2\psi}{dx^2} + p'(x) \frac{d\psi}{dx} + q(x) \psi \right] = \lambda B(x) \psi \quad (15.4-24a)$$

определяет самосопряженную задачу о собственных значениях, если это уравнение дополнить однородными линейными краевыми условиями

$$B_1\psi = \alpha_1\psi'(a) + \beta_1\psi(a) = 0, \quad B_2\psi = \alpha_2\psi'(b) + \beta_2\psi(b) = 0, \quad (15.4-24b)$$

или условиями периодичности

$$B_1(\psi) \equiv \psi(a) - \psi(b) = 0, \quad B_2(\psi) \equiv \psi'(a) - \psi'(b) = 0. \quad (15.4-24c)$$

Здесь предполагается, что $p(x)$, $q(x)$ и $B(x)$ — дифференцируемы в $[a, b]$, $p(x)$ и $B(x)$ положительны в $[a, b]$ и не существует собственных функций, отвечающих числу $\lambda=0$. Эти предположения обеспечивают дискретность спектра.

* При условии (24b) все собственные значения имеют ранг 1. При условиях периодичности (24c) ранг может равняться двум. Например, уравнение $\psi'' + \lambda\psi = 0$ с условиями (24c) при $a=0$ и $b=2\pi$ имеет собственные числа $\lambda=n^2$ и собственные функции $\cos nx$ и $\sin nx$.

Больше двух ранг быть не может.

Если в задаче (24a, b) $p(x) > 0$, $B(x) > 0$, $q(x) \leq 0$, $\alpha_1\beta_1 \leq 0$, $\alpha_2\beta_2 \geq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$, то все собственные значения положительны, за исключением случая, когда $q(x) \equiv 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, в котором $\lambda_0 = 0$. *

В п.9.3-4—9.3-10, а также в п.21.7-1—21.8-12 изучены различные упрощающие преобразования и методы решения однородных дифференциальных уравнений типа (24). Задача Штурма—Лиувилля возникает, в частности, при разделении переменных в краевых задачах для линейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. п.10.4-3—10.4-9) и имеет важное значение в квантовой механике. Заметим, что каждое

дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x) \frac{d^2 \psi}{dx^2} + a_1(x) \frac{d\psi}{dx} + a_2(x) \psi = \lambda h(x) \psi \quad (15.4-25)$$

можно привести к виду (24а) посредством умножения обеих частей его на

$$\exp \int \frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)} dx$$

(см. также п. 9.3-8, а). Отсюда следует, что примеры пп. 10.4-3—10.4-9 могут быть трактованы как задачи Штурма—Лиувилля.

(б) Если в формуле (9) положить $q(x) \equiv q_1'(x) - q_2(x)$, то

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b u \Delta u &= \int_a^b [(pu' + 2q_1 uu' + q_2 u^2) d\xi - (puu' + q_1 u^2)]_a^b, \\ \int_a^b u \Delta v &= \int_a^b [pu'v' + q_1(u'v + uv') + q_2 uv] d\xi - (pv' + q_1 v)u \Big|_a^b. \end{aligned} \right\} \quad (15.4-26)$$

Интегралы (26) имеют физическое значение во многих приложениях (см. также п. 15.4-7).

(с) Обобщения и родственные задачи. Многие общие задачи связаны с рассмотрением неограниченного интервала $V \equiv (0, \infty)$ или $V \equiv (-\infty, \infty)$ с крайними условиями, в которых указывается асимптотическое поведение $\psi(x)$ на бесконечности или другие ограничения. Далее, могут допускаться особенности в точке $x = a$ или $x = b$ у функций $p(x)$, $q(x)$ или $B(x)$. В случае, когда функции $p(x)$, $q(x)$ или $B(x)$ имеют особенности на концах ограниченного интервала (a, b) , спектр может оставаться чисто дискретным.

Неоднородная краевая задача, включающая оператор Штурма—Лиувилля L , может быть решена методами пп. 9.3-3, 9.3-4, 15.4-12, 15.5-1.

15.4-9. Задача Штурма—Лиувилля для уравнений с частными производными второго порядка (см. также п. 15.4-3, с).

(а) Пусть $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Определим скалярное произведение формулой (2) с $dV \equiv dx^1 dx^2 \dots dx^n$. Тогда действительное уравнение в частных производных (многомерное однородное уравнение Штурма—Лиувилля)

$$L\psi \equiv - \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} \left(p \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + q \right] \psi = \lambda B \psi \quad (15.4-27)$$

с функциями $p = p(x^1, x^2, \dots, x^n) > 0$, $B(x^1, x^2, \dots, x^n) > 0$, $q = q(x^1, x^2, \dots, x^n)$, дифференцируемыми на V и S , определяет самосопряженную задачу о собственных значениях при однородных краевых условиях вида $\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta \psi = 0$.

Если заданная область ограничена, то спектр собственных значений указанной задачи дискретен и содержит не более чем конечное число отрицательных собственных значений. Если расположить собственные значения в порядке их возрастания $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, то $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

(б) В трехмерном случае последняя теорема применима к задаче о собственных значениях для дифференциального уравнения

$$-\nabla^2 \psi - q(x^1, x^2, x^3) \psi = \lambda B(x^1, x^2, x^3) \psi$$

с крайними условиями вида $\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta \psi = 0$, $B > 0$ и q , дифференцируемыми в V и на S . Из обобщенной формулы Грина (12) следует

$$\int_V u L v dV = \int_V [(\nabla u)^2 - qu^2] dV - \int_S (u \nabla v) \cdot dA. \quad (15.4-28)$$

Интеграл (28) имеет физическое значение в многих приложениях (см. также п. 15.4-7 и табл. 5.6-1).

15.4-10. Теоремы сравнения (см. также п. 5.6-1, 10.8-9, с и 15.4-7). Нижеследующие теоремы сравнения имеют место для дифференциальных

уравнений Штурма — Лиувилля как обыкновенных, так и в частных производных, определенных в пп. 15.4-8 и 15.4-9.

Пусть дано некоторое дифференциальное уравнение (24a) или (27) и интервал или область V с краевыми условиями (24) или (24с) ($\beta/\alpha \geq 0$); тогда:

1. Возрастание p и q и/или убывание B влечет возрастание собственных значений λ_k ; аналогично убывание p и q и/или возрастание B влечет убывание собственных значений.

2. Расширение интервала или области V влечет убывание собственных значений λ_k , порождаемых условиями

$$\psi(a) = \psi(b) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{на } S, \quad (15.4-29a)$$

и убывание собственных значений λ_k , порождаемых условиями

$$\psi'(a) = \psi'(b) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S \quad (15.4-29b)$$

3. Каждое собственное значение λ_k , порождаемое краевыми условиями $\alpha\psi'(a) + \beta\psi(a) = \alpha\psi'(b) + \beta\psi(b) = 0$ или $\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta\psi = 0$ на S с $\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$ есть неубывающая функция от $\frac{\beta}{\alpha}$. В частности, условия Неймана (29b) не увеличивают собственных значений сравнительно с условиями Дирихле (20a).

4. Модификации задачи о собственных значениях, усиливающие ограничения (присоединение условий) на ψ , влекут неубывание собственных значений.

Теоремы сравнения имеют важное значение для теории колебаний (эффект масс, жесткость, геометрия натуральных частот).

Примеры (см. также п. 10.4-9): $\psi'' = -\lambda\psi(x)$ (колебания струны) и $\nabla^2\psi(x, y, z) = -\lambda\psi(x, y, z)$ (колебания мембраны).

15.4-11. Решение дискретных задач о собственных значениях методами возмущений. Даны собственные значения λ_k и ортонормированные собственные функции ψ_k эрмитовой задачи

$$L\psi = \lambda\psi. \quad (15.4-30)$$

Требуется аппроксимировать собственные значения $\tilde{\lambda}_k$ и собственные функции $\tilde{\psi}_k$ возмущенной эрмитовой задачи

$$L\tilde{\psi} + \varepsilon L'\tilde{\psi} = \tilde{\lambda}\tilde{\psi} \quad (15.4-31)$$

при неизменных краевых условиях; $\varepsilon L'\tilde{\psi}$ — малый возмущающий член ($\varepsilon \ll 1$).

(а) Ранг L' равен 1. Для каждого собственного значения λ_i невозмущенной задачи имеем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \lambda_i + \varepsilon L'_{ii} + \varepsilon^2 \sum_{k \neq i} \frac{|L'_{ik}|^2}{\lambda_i - \lambda_k} + \dots, \\ \tilde{\psi}_i &= \psi_i + \varepsilon \sum_{k \neq i} \frac{L'_{ki}}{\lambda_i - \lambda_k} \psi_k + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (15.4-32)$$

где

$$L'_{ik} = \int_V \tilde{\psi}_i L' \psi_k dV \quad (i, k = 1, 2, \dots). \quad (15.4-33)$$

(б) Ранг L' равен m . Для каждого собственного значения λ_i ранга m с собственными функциями $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ существуют m различных собственных значений возмущенного оператора. Соответствующие значения $\Delta\lambda = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda_i}{\varepsilon}$ аппроксимируются корнями

векового уравнения m -й степени

$$\begin{vmatrix} L'_{11} - \Delta\lambda & L'_{12} & \dots & L'_{1m} \\ L'_{21} & L'_{22} - \Delta\lambda & \dots & L'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L'_{m1} & L'_{m2} & \dots & L'_{mm} - \Delta\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (15.4-34)$$

которые могут быть и совпадающими. Собственная функция или собственные функции, соответствующие каждому значению $\tilde{\lambda} = \lambda_j + \Delta\lambda$, аппроксимируются выражением

$$\tilde{\psi} = \sum_{k=1}^m a_k \psi_k,$$

где a_k получены из уравнений

$$\sum_{k=1}^m a_k (L'_{ik} - \delta_{ik} \Delta\lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (15.4-35)$$

Заметим, что не существует других m собственных функций, кроме указанных выше, доставляющих аппроксимации $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\psi}$ для случая ранга, большего чем единица; полученные аппроксимации для $\tilde{\psi}$ имеют «нулевой порядок» и не пропорциональны ϵ . Относительные приближений высшего порядка см. [5.2].

(с) Изучение непрерывного спектра см. [10.6].

15.4-12. Решение краевых задач посредством разложений в ряды по собственным функциям (см. также пп.10.4-2,с, 14.8-10, 15.4-4, 15.5-2; примеры см. п.10.4-9).

(а) Очень важный класс физических краевых задач (например, упругие колебания, электромагнитная теория) относится к действительным линейным дифференциальным уравнениям — обыкновенным или в частных производных

$$L\Phi(x) - \lambda B(x)\Phi(x) = f(x) \quad (x \in V), \quad (15.4-36)$$

L — эрмитов оператор (см. п.15.4-3), $B(x) > 0$ в V при заданных однородных краевых условиях. Если $f(x) \equiv 0$ в V (нет приложенных сил, токов и т. п.), то уравнение (36) сводится к дополнительному уравнению

$$L\psi(x) = \lambda B(x)\psi(x) \quad (x \in V), \quad (15.4-37)$$

которое удовлетворяется только собственными или обобщенными собственными функциями $\psi(x)$ со спектральными значениями λ . В неоднородном случае (36) (например, вынужденные колебания) λ является заданным параметром.

Рассмотрим сначала задачу (36), при условии, что задача о собственных значениях (37) имеет *чисто дискретный спектр* (не обязательно различных) собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ с соответствующими ортонормированными функциями $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ (п.15.4-6, б). Предполагая, что «вынуждающая функция» может быть разложена в ряд

$$f(x) = B(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x) \quad \left(f_k = \int_V \bar{\psi}_k f dV, k = 1, 2, \dots \right) \quad (15.4-38)$$

для почти всех $x \in V$, можно ожидать, что решение уравнения (36) имеет вид «разложения по главным колебаниям»

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \psi_k(x). \quad (15.4-39)$$

Ряд (39) определяет решение $\Phi(x)$ однозначно в каждой точке непрерывности, если только параметр λ не равен некоторому собственному значению λ_k

(резонанс). В последнем случае решение существует, лишь когда $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим λ_k , так что $f_k = 0$. Тогда существует бесконечное количество решений, состоящих из ряда (39) плюс линейная комбинация собственных функций, принадлежащих λ_k .

(b) Если краевая задача (37) обладает *чисто непрерывным* спектром D_A с обобщенными собственными функциями $\psi(x, \lambda)$, имеющими свойство ортогональности (19b) (например, оператор Штурма – Лиувилля имеет особенности в V или же V неограничена), то возможно представить решение $\Phi(x)$ как «обобщенный интеграл Фурье» по (необходимо действительному) спектру D_A . Имеем тогда почти для всех $x \in V$

$$\Phi(x) = \int_{D_A} H(\lambda) \psi(x, \lambda) d\lambda, \quad H(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda} \int_V \overline{\psi(\xi, \lambda)} f(\xi) dV. \quad (15.4-40)$$

(см. также п.10.5-1 методы интегральных преобразований).

Если задача о собственных значениях (37) имеет как дискретный, так и непрерывный спектр, то решение будет содержать члены вида (39) и интеграл (40); оба типа членов могут быть объединены в интеграл Стильтеса по спектру.

(c) Методы решений пп.15.4-12, а и 15.4-12 могут быть применены и тогда, когда данный оператор L не эрмитов, если только доказано существование соответствующих ортонормированных разложений по собственным функциям.

15.5. ФУНКЦИИ ГРИНА. СВЯЗЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

15.5-1. Функции Грина для краевой задачи с однородными краевыми условиями (см. также пп.9.3-3, 9.4-3, 15.4-4; примеры см. в табл. 9.3-1, пп.15.6-6, 15.6-9).

(a) Линейная краевая задача

$$L\Phi(x) = f(x) \quad (x \in V), \quad (15.5-1a)$$

$$B_i\Phi(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; x \in S), \quad (15.5-1b)$$

представляет данную функцию $f(x)$ как результат линейной операции над неизвестной функцией $\Phi(x)$, удовлетворяющей заданным краевым условиям. Если возможно записать соответствующую *обратную операцию* в форме линейного интегрального преобразования (п.15.3-1)

$$\Phi(x) = \int_V G(x, \xi) f(\xi) dV(\xi), \quad (15.5-2)^1$$

для каждой возможной $f(x)$, то ядро $G(x, \xi)$ называют **функцией Грина для данной краевой задачи** (1).

$G(x, \xi)$ должна удовлетворять однородным краевым условиям (1b) вместе с условиями

$$\left. \begin{aligned} L G(x, \xi) &= 0 & (x, \xi \in V; x \neq \xi), \\ \int_V L G(x, \xi) dV(\xi) &= 1 & (x \in V); \end{aligned} \right\} \quad (15.5-3a)$$

или

$$L G(x, \xi) = \delta(x, \xi) \quad (x, \xi \in V), \quad (15.5-3b)$$

где $\delta(x, \xi)$ есть дельта-функция в системе координат, в которой поставлена краевая задача (п.21.9-7).

¹⁾ В одномерном случае $dV = dx$.

Формула (2) представляет решение $\Phi(x)$ краевой задачи (1) как суперпозицию элементарных решений $G(x, \xi) f(\xi)$, имеющих особенность при $x = \xi$. Эти элементарные решения могут быть интерпретированы как эффект *импульсных сил*, *точечных зарядов* и т. д., $f(\xi) \delta(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ (см. пп. 9.4-3, 15.5-4, 15.6-6, 15.6-9). Функция Грина часто может быть найдена непосредственно интегрированием «символического дифференциального уравнения» (3б) с данными краевыми условиями методами, указанными в пп. 9.4-5, 10.5-1, 15.4-12. См. табл. 9.3-3, пп. 15.6-6 и 15.6-9, где даны примеры функций Грина.

(b) Модифицированная функция Грина (см. также п. 15.4-4). Краевая задача (1) не имеет функции Грина, удовлетворяющей уравнению (3), если эрмитово сопряженная краевая задача

$$L^* \chi(x) = 0 \quad (x \in V), \quad B_i^* \chi(x) = 0 \quad (x \in S) \quad (15.5-4)$$

имеет решение $\chi(x)$, отличное от $\chi(x) \equiv 0$ (см. п. 15.4-4). В этом случае тем не менее возможно построить модифицированную функцию Грина $G(x, \xi)$, доставляющую представление (2) для всех $f(x)$, ортогональных к $\chi(x)$. $G(x, \xi)$ должна удовлетворять уравнению

$$L G(x, \xi) = \delta(x, \xi) - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\chi}_{0k}(\xi) \chi_{0k}(x) \quad (15.5-5)$$

и краевым условиями (1b). Здесь $\chi_{0k}(x)$ есть полная ортонормированная последовательность решений задачи (4). В рассматриваемом случае результирующее решение (2) не может быть единственным, однако существует единственная модифицированная функция Грина, которая удовлетворяет дополнительным условиям ортогональности

$$\int_V \bar{\chi}_{0k}(\xi) G(x, \xi) dV(\xi) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15.5-6)$$

Если L — эрмитов оператор, то χ_{0k} суть просто его собственные функции для $\lambda = 0$.

(c) Функции Грина для эрмитово сопряженных краевых задач (п. 15.4-3, а) являются эрмитово сопряженными ядрами (п. 15.3-1, б). Для каждой функции Грина $G(x, \xi)$, принадлежащей эрмитову оператору L (п. 15.4-3), $G(\xi, x) \equiv \bar{G}(x, \xi)$.

15.5-2. Связь краевых задач и задач о собственных значениях с интегральными уравнениями. Резольвента Грина.

(a) Если существует функция Грина $G(x, \xi)$ краевой задачи (1), то из формулы (2) следует, что общая краевая задача

$$\left. \begin{aligned} L \Phi(x) - \lambda B(x) \Phi(x) &= f(x) & (x \in V), \\ B_i \Phi(x) &= 0 & (i = 1, 2, \dots, N; x \in S) \end{aligned} \right\} \quad (15.5-7)$$

эквивалентна линейному интегральному уравнению

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi &= F(x), \\ K(x, \xi) &= G(x, \xi) B(\xi) \sqrt{|g(\xi)|}, \quad F(x) = \int_V G(x, \xi) f(\xi) dV(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (15.5-8)$$

Заметим, что интегральное уравнение включает в себя заданные краевые условия. В одномерном случае $dV(\xi) \equiv d\xi$ и $|g(\xi)| \equiv 1$.

Полученное интегральное уравнение распространяет теорию пп. 15.3-1 — 15.3-9 и численные методы п. 20.8-5 на линейные краевые задачи и задачи о собственных значениях. В частности, можно использовать ряды Неймана (15.3-23) и аналитическое продолжение для введения резольвентного ядра (п. 15.3-7, с) $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ так, что решение принимает форму

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_V \Gamma(x, \xi; \lambda) F(\xi) d\xi. \quad (15.5-9)$$

$\Gamma(x, \xi; \lambda)$ называют **резольвентой Грина**; она является ядром линейного преобразования, представляющего резольвентный оператор $(L - \lambda)^{-1}$ (п. 14.8-3).

$\Gamma(x, \xi; \lambda)$ часто можно построить методами п.15.3-8; следует отметить, что ядро $K(x, \xi)$ не необходимо должно быть нормируемым. Множество особых точек λ функции $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ совпадает с спектром оператора L (п.15.4-5, d), который может включать и непрерывный спектр. В частности, полюсы $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ соответствуют дискретным собственным значениям L , тогда как точки разветвления указывают на наличие непрерывного спектра (см. 15.2).

(b) Задачи для эрмитовых операторов. Разложение функции Грина по собственным функциям (см. также п.15.3-3, 15.3-4, 15.4-6, 15.4-12).

В важном частном случае, когда L — эрмитов оператор и $B(x)$ действительна и положительна в V , можно ввести новую неизвестную функцию

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \sqrt{B(x) |g(x)|} \quad (15.5-10)$$

и заменить уравнение (8) линейным интегральным уравнением с эрмитовым ядром

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x) - \lambda \int_V \tilde{K}(x, \xi) \tilde{\Phi}(\xi) d\xi &= \tilde{F}(x), \\ \tilde{K}(x, \xi) &= G(x, \xi) \sqrt{B(x) B(\xi) |g(x) g(\xi)|}, \\ \tilde{F}(x) &= \sqrt{B(x) |g(x)|} \int_V G(x, \xi) f(\xi) dV(\xi). \end{aligned} \quad (15.5-11)$$

Эрмитова задача о собственных значениях

$$\begin{aligned} L \psi(x) &= \lambda B(x) \psi(x) & (x \in V), \\ B_i \psi(x) &= 0 & (i = 1, 2, \dots, m; x \in S), \end{aligned} \quad (15.5-12a)$$

и интегральное уравнение

$$\tilde{\psi}(x) = \lambda \int_V \tilde{K}(x, \xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi \quad (15.5-12b)$$

имеют идентичный спектр; соответствующие собственные функции $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ связаны соотношением $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) \sqrt{B(x) |g(x)|}$. Если спектр собственных значений чисто дискретный, то существует полная последовательность собственных функций $\psi_k(x)$ и $\tilde{\psi}_k(x)$ так, что

$$\int_V B \tilde{\psi}_i \psi_k dV = \int_V \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_k dV = \delta_{ik}. \quad (15.5-13)$$

В этом случае $\tilde{K}(x, \xi)$ есть нормируемое ядро и

$$G(x, \xi) = \text{в среднем} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \tilde{\psi}_k(\xi) \psi_k(x) \quad (x, \xi \in V). \quad (15.5-14)$$

Последнее выражение не содержит явно $B(x)$ или $g(x)$. В случае задачи Штурма—Лиувилля с чисто дискретным спектром (пп.15.4-8, а и 15.4-9) ряды (14) сходятся абсолютно и равномерно в V (см. также теорему Мерсера п.15.3-4).

(c) Если данная краевая задача (7) выражается в терминах дифференциальных инвариантов (п.16.10-7), то $G(x, \xi)$, $K(x, \xi)$ и $\tilde{K}(x, \xi)$ являются функциями точки, инвариантными относительно преобразований используемой системы координат.

15.5-3. Приложение метода функций Грина к задаче с начальными условиями: обобщенное уравнение диффузии (см. также пп.10.4-7, 10.5-3, 10.5-4). Требуется найти решение $\Phi = \Phi(x, t)$ задачи

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi - a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - b\Phi &= f(x, t), \\ \Phi(x, 0) &= \Phi_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (x \in V) \quad (15.5-15)$$

с заданными константами a^2 , b и однородными краевыми условиями $\Phi = 0$ или $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ на границе данной n -мерной области V , $n = 1, 2$ или 3 . Имеем

$$\Phi(x, t) = \int_0^t \int_V G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) dV(\xi) - a^2 \int_V G(x, t; \xi, 0) \Phi_0(\xi) dV(\xi) \quad (t > 0), \quad (15.5-16)$$

где $G(x, t; \xi, \tau)$ — функция Грина, удовлетворяющая заданным краевым условиям, и

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G - a^2 \frac{\partial G}{\partial t} - bG &= \delta(x, \xi) \delta(t - \tau), \\ G &= 0 \quad (t < \tau) \end{aligned} \right\} \quad (x \in V) \quad (15.5-17)$$

Если $\psi_k(x)$ и λ_k — соответственно собственные функции и собственные значения пространственного волнового уравнения

$$\nabla^2 \psi(x) + \lambda \psi(x) = 0 \quad (x \in V) \quad (15.5-18)$$

при заданных краевых условиях (пп. 10.4-4 и 10.4-5, б), то

$$G(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{a^2} \sum_k e^{-\frac{\lambda_k + b}{a^2}(t-\tau)} \psi_k(\xi) \psi_k(x) \quad (t > \tau). \quad (15.5-19)$$

Если V совпадает со всем пространством, то

$$G(x, t; \xi, \tau) = -\left[\frac{a^2}{4\pi(t-\tau)} \right]^{n/2} \frac{1}{a^2} \exp \left[-\frac{a^2}{4} \frac{|r-q|^2}{t-\tau} - \frac{b}{a^2} (t-\tau) \right], \quad (t > \tau; n = 1, 2, 3), \quad (15.5-20)$$

где $|r-q|$ — расстояние между точками $(x) = (r)$ и $(\xi) = (q)$.

Результирующее решение (16) известно как *интегральное решение Пуассона* задачи о диффузии.

15.5-4. Метод функций Грина для неоднородных краевых условий (см. также п.15.4-2).

(а) Решение $\Phi(x)$ трехмерной линейной краевой задачи

$$\Delta \Phi(x) = 0 \quad (x \in V), \quad \nabla \Phi(x) = b(x) \quad (x \in S) \quad (15.5-21)$$

часто может быть записано в форме поверхностного интеграла

$$\Phi(x) = \int_S G_S(x, \xi) b(\xi) dA(\xi) \quad (15.5-22)$$

для каждой заданной функции $b(x)$, интегрируемой на S . $G_S(x, \xi)$ должна удовлетворять данному дифференциальному уравнению при $x \in V$, $\xi \in S$ и

$$\left. \begin{aligned} \nabla G_S(x, \xi) &= 0 \quad (x, \xi \in S; x \neq \xi), \\ \int_S \nabla G_S(x, \xi) dA(\xi) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (15.5-23)$$

$G_S(x, \xi)$ называют либо *функцией Грина второго рода*, либо просто *функцией Грина* (см. также п.15.6-6). Аналогичные соотношения имеют место и в *двумерном случае* (см. также п.15.6-9). Линейные краевые задачи для неоднородных дифференциальных уравнений, так же как и при неоднородных краевых условиях, могут быть часто решены *суперпозицией объемного (2) и поверхностного (22) интегралов*.

(б) Как указано в п.15.4-2, каждая краевая задача (21) может быть формулирована как краевая задача типа (1). Отсюда следует, что $G_S(x, \xi)$ может быть выражена через *обычную функцию Грина* $G(x, \xi)$, определенную способом п.15.5-1 для задачи с *дополнительными* однородными краевыми условиями. В частности, рассмотрим двумерную или трехмерную краевую задачу для

действительного самосопряженного дифференциального уравнения вида

$$\mathbf{L}\Phi(x) \equiv -[\nabla^2 + q]\Phi(x) = 0 \quad (x \in V), \quad (15.5-24)$$

где $q = q(x)$ — действительная дифференцируемая функция. Если $G(x, \xi)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$-[\nabla^2 + q]G(x, \xi) = \delta(x, \xi) \quad (15.5-25)$$

при заданных однородных краевых условиях (п.15.5-1), то формула Грина (15.4-12) дает

$$\Phi(x) = \int_S \left[G(x, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \nu} - \Phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu} \right] dA(\xi) \quad (x \in V), \quad (15.5-26)$$

где символ $\partial/\partial \nu$ обозначает производную по нормали. Отсюда для краевых условий вида

$$\mathbf{B}\Phi(x) \equiv \Phi(x) = b(x) \quad (x \in S) \quad (15.5-27)$$

(т. е. для условий Дирихле) решение (22) приводит к соотношению

$$G_S(x, \xi) \equiv -\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu} \quad (\xi \in S), \quad (15.5-28)$$

где $G(x, \xi)$ удовлетворяет в V уравнению (25) и обращается в нуль на S .

Для краевых условий (задача Неймана)

$$\mathbf{B}\Phi(x) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial n} = b(x) \quad (x \in S) \quad (15.5-29)$$

решение (22) дифференциального уравнения (24) сводится к использованию «функции Неймана»

$$G_S(x, \xi) = G(x, \xi) \quad (\xi \in S), \quad (15.5-30)$$

где $G(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению (25) в V и $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n} = 0$ на S .

В пп.15.6-6 и 15.6-9 указаны приложения этих соотношений при решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. В п.10.3-6 показан сходный метод при решении задач с начальными значениями для уравнений гиперболического типа (см. также п.10.3-5).

15.6. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

15.6-1. Введение. Дифференциальные уравнения Лапласа и Пуассона (см. также п.5.7-3, 10.4-3 и 10.4-5). Многие важные приложения связаны с решением $\Phi(\mathbf{r})$ линейных уравнений с частными производными:

уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (15.6-1)$$

уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi Q(\mathbf{r}), \quad (15.6-2)$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ и $Q(\mathbf{r})$ — функции точки в трехмерном точечном евклидовом пространстве $(\mathbf{r}) \equiv (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ или двумерном точечном евклидовом пространстве $(\mathbf{r}) \equiv (x, y) \equiv (x^1, x^2)$. $\Phi(\mathbf{r})$ часто интерпретируется как потенциал безвихревого векторного поля

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}),$$

порождаемого распределением зарядов или масс, так что $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi Q(\mathbf{r})$ (пп.5.7-2, 5.7-3, 15.6-5). Изучение таких потенциалов и, в частности, решений дифференциального уравнения Лапласа (1) известно как теория потенциала.

15.6-2. Трехмерная теория потенциала. Классические краевые условия задачи.

(а) **Задача Дирихле.** Ограниченная область V , допускающая решение краевой задачи (*Дирихле*)

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in V), \quad \Phi(\mathbf{r}) = b(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S) \quad (15.6-3)$$

для всякой заданной непрерывной функции $b(\mathbf{r})$, называется **областью Дирихле**. Если решение существует, то оно необходимо единственно. Если V — неограниченная область, то должно быть указано асимптотическое поведение решения на бесконечности, скажем $\Phi(\mathbf{r}) = O(1/r)$ при $r \rightarrow \infty$; последнее условие влечет единственность решения в случае его существования. В п.15.6-6 обсуждаются вопросы существования решения.

Решение $\Phi(\mathbf{r})$ задачи Дирихле (3) доставляет стационарное значение интегралу Дирихле $\int_V (\nabla \Phi)^2 dV$, где $\Phi(\mathbf{r})$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой в V и на S и удовлетворяющей данным краевым условиям (см. также п.15.4-7, а). Задача Дирихле имеет особую важность для электростатики (см. 15.6).

(б) **Задача Неймана.** Для второй классической краевой задачи (*Неймана*)

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in V), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = b(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S), \quad (15.6-4)$$

где $b(\mathbf{r})$ — данная непрерывная функция; существование решения требует выполнения условия $\int_S b(\mathbf{r}) dA = 0$ (см. также теорему Гаусса, табл. 5.6-1). Если V — неограниченная область, то для существования решения необходимо $\Phi(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ при $r \rightarrow \infty$. Решение задачи Неймана в ограниченной области V единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Задача Неймана возникает, в частности, при изучении течения несжимаемой жидкости (см. 15.6).

15.6-3. Теорема Кельвина об инверсии. Если $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$ есть решение дифференциального уравнения Лапласа в некоторой области \tilde{V} , лежащей внутри сферы $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = R$, то функция

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{R}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \tilde{\Phi} \left[\frac{R^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2} (\mathbf{r}-\mathbf{a}) + \mathbf{a} \right] \quad (15.6-5)$$

есть решение уравнения Лапласа в соответствующей области, лежащей вне сферы и обратно.

В сферических координатах r, ϑ, φ это значит, что если $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ есть решение при $r < R$, то $\frac{R}{r} \Phi\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ есть решение при $r > R$ и обратно.

Отсюда следует, что так называемая **внешняя краевая задача**

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) &= 0 && (\mathbf{r} \text{ вне } V), \\ \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta \Phi &= b(\mathbf{r}) && (\mathbf{r} \in S), \\ \Phi(\mathbf{r}) &= O\left(\frac{1}{r}\right) && \text{при } r \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (15.6-6)$$

для ограниченной области V может быть преобразована в соответствующую краевую задачу для внутренней области \tilde{V} , полученной из V посредством преобразования инверсии

$$\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{a} = \frac{R^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2} (\mathbf{r}-\mathbf{a}). \quad (15.6-7)$$

15.6-4. Свойства гармонических функций.

(а) Теоремы о среднем значении и максимуме модуля. Решения $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Лапласа (1) называют **гармоническими функциями**. Каждая функция $\Phi(\mathbf{r})$ гармоническая в открытой области V , аналитична (п.4.10-5) и имеет в V гармонические производные любого порядка. Каждое значение $\Phi(\mathbf{r}_1)$ равно среднеарифметическому (п.4.6-3) значений $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности (а отсюда и по объему) сферы с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ в предположении, что сфера содержится внутри области V (теорема о среднем значении). Обратно, непрерывная функция $\Phi(\mathbf{r})$ является гармонической в каждой открытой области, в которой выполняется свойство среднего значения.

Функция $\Phi(\mathbf{r})$, гармоническая внутри ограниченной области V и на ее границе S , не может иметь максимума или минимума внутри V (теорема о максимуме модуля, см. также п.7.3-5). Если $\Phi(\mathbf{r})$, гармоническая в V , непрерывна в V и на S и равна нулю на S , то $\Phi(\mathbf{r}) \equiv 0$ в V . Если $\Phi(\mathbf{r})$ гармоническая в V , непрерывно дифференцируема в V и на S и $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ на S , то $\Phi(\mathbf{r})$ постоянна в V . Теорема об инверсии п.15.6-3 доставляет аналогичные теоремы для неограниченной области V' вне S .

(б) Теоремы Гарнака. Следующие ниже теоремы интересны в связи с аппроксимированием гармонических функций.

Если последовательность $s_0(\mathbf{r}), s_1(\mathbf{r}), s_2(\mathbf{r}), \dots$ функций, гармонических в V и непрерывных на границе S области V , равномерно сходится на S , то эта последовательность сходится равномерно в V к некоторой функции $s(\mathbf{r})$, гармонической в V и такой, что $s(\mathbf{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\mathbf{r})$ на S . Последовательность частных производных от функций $s_n(\mathbf{r})$ сходится равномерно к соответствующей частной производной $s(\mathbf{r})$ в каждой замкнутой подобласти V (первая теорема Гарнака).

Пусть дана последовательность функций $s_0(\mathbf{r}), s_1(\mathbf{r}), s_2(\mathbf{r}), \dots$ гармонических в V и таких, что $s_0(\mathbf{r}) > s_1(\mathbf{r}) > s_2(\mathbf{r}) > \dots$ для всех $\mathbf{r} \in V$. Из сходимости этой последовательности в некоторой точке V следует сходимость последовательности всюду в V и равномерная сходимость в каждой замкнутой подобласти V ; предел данной последовательности есть функция, гармоническая в V (вторая теорема Гарнака).

15.6-5. Решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы.

(а) Потенциалы точечного заряда, диполя и мультиполя. Следующие ниже частные решения уравнения Лапласа имеют особенно простую физическую интерпретацию:

потенциал единичного точечного заряда в точке $(\rho) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|} \equiv \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (\mathbf{r} \neq \rho), \quad (15.6-8)$$

потенциал единичного диполя, направленного вдоль единичного вектора \mathbf{u} , в точке (ρ)

$$\varphi_1(\mathbf{r}-\rho) \equiv -(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) \quad (\mathbf{r} \neq \rho). \quad (15.6-9)$$

Более общо, потенциал мультиполя порядка j в точке $\rho = 0$ есть

$$\begin{aligned} \Phi_j(\mathbf{r}) &= (-1)^j (\mathbf{p}_j \cdot \nabla) (\mathbf{p}_{j-1} \cdot \nabla) \dots (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla) \varphi_0(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{i+k+l=j} \sum_{i+k+l=j} Q_{ikl}^{(j)} \frac{\partial^j \varphi_0(\mathbf{r})}{\partial x^i \partial y^k \partial z^l} \quad (\mathbf{r} \neq 0), \end{aligned} \quad (15.6-10)$$

где так называемые **компоненты момента мультиполя** $Q_{ikl}^{(j)}$ суть константы, определяемые посредством j векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_j$, образующих мультиполь. В сферических координатах r, ϑ, φ имеем

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{j+1}} \Phi_j\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{r^{j+1}} Y_j(\varphi, \vartheta) \quad (\mathbf{r} \neq 0), \quad (15.6-11)$$

где $Y_j(\varphi, \vartheta)$ — сферическая функция j -го порядка (п.21.8-12). Мультиполи второго и третьего порядков известны под названиями соответственно **эвадриполя** и **октиполя**.

(b) Потенциалы распределений зарядов. Соотношения для разрывов. Другие частные решения уравнения Лапласа получаются линейной суперпозицией (или интегрированием) простых потенциалов и потенциалов диполей. В частности, представляют интерес *объемные потенциалы распределений зарядов и диполей*

$$\int_V Q(\rho) \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) dV(\rho) = \int_V \frac{Q(\rho)}{|\mathbf{r}-\rho|} dV(\rho), \quad (15.6-12)$$

$$-\int_V [\mathbf{p}(\rho) \cdot \nabla] \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) dV(\rho) = -\int_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|} dV(\rho) \quad (15.6-13)$$

и потенциалы поверхностных распределений зарядов и диполей (потенциалы простого и двойного слоев)

$$\int_S \sigma(\rho) \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) dA(\rho) = \int_S \frac{\sigma(\rho)}{|\mathbf{r}-\rho|} dA(\rho), \quad (15.6-14)$$

$$-\int_S p(\rho) [dA(\rho) \cdot \nabla] \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = -\int_S p(\rho) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dA(\rho) = -\int_S p(\rho) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|} \right) dA(\rho). \quad (15.6-15)$$

Потенциалы одномерных распределений зарядов (линейные интегралы) представляют интерес главным образом в двумерной теории потенциала (п.15.6-7).

Если плотность зарядов $Q(\mathbf{r})$ ограничена и интегрируема в V , то простой объемный потенциал (12) и все его производные существуют и равномерно непрерывны при всех \mathbf{r} ; производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла. Потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (2), если $Q(\mathbf{r})$ ограничена и непрерывно дифференцируема. Если функции поверхностной плотности $\sigma(\mathbf{r})$ и $p(\mathbf{r})$ дважды дифференцируемы на S , то:

1. Потенциал простого слоя (14) непрерывен в каждой регулярной точке \mathbf{r}_0 поверхности S . То же самое имеет место для производной $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в некотором направлении, касательном к S в точке \mathbf{r}_0 ; однако производная $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ вдоль нормали к S в точке \mathbf{r}_0 претерпевает разрыв, причем

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_+ - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_- = -4\pi\sigma(\mathbf{r}_0). \quad (15.6-16)$$

Здесь индексы $+$ и $-$ указывают соответствующие односторонние пределы, когда $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ по положительной или отрицательной стороне нормали к S .

2. Разрыв потенциала двойного слоя (15) и его касательных производных удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_+(\mathbf{r}_0) - \Phi_-(\mathbf{r}_0) = \Phi(\mathbf{r}_0) - \Phi_-(\mathbf{r}_0) = 2\pi p(\mathbf{r}_0), \quad (15.6-17)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_+ - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_- = 2\pi \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (15.6-18)$$

в каждой регулярной точке \mathbf{r}_0 , принадлежащей S , в которой нормальная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ непрерывна.

З а м е ч а н и е. В частном случае, когда $p(\mathbf{r}) = p$ потенциал двойного слоя (15) равен умноженному на p телесному углу с вершиной в точке (\mathbf{r}_0); этот угол принимается положительным, если точка (\mathbf{r}) расположена на положительной стороне нормали к S . Для замкнутой поверхности S потенциал равен $-4\pi p$, если (\mathbf{r}) внутри S , и равен нулю, если (\mathbf{r}) находится вне S .

(e) Разложение по мультиполям и теорема Гаусса. Рассмотрим потенциал $\Phi(\mathbf{r})$, порождаемый некоторой комбинацией распределений зарядов, заключенных в ограниченной сфере $|\mathbf{r}| < R$; пусть Q_{Σ} — конечный общий заряд. $\Phi(\mathbf{r})$ является линейной комбинацией потенциалов типа (12)—(15); для $|\mathbf{r}| > R$ можно разложить $\Phi(\mathbf{r})$

в ряд Тейлора (5.5-4) с членами (10) или в ряд по сферическим функциям (11). Для достаточно больших r , потенциал таким образом последовательно аппроксимируется потенциалом точечного заряда Q_T , расположенного в начале, потенциалом точечного заряда плюс потенциал диполя и т.д. (разложение по мультиполям). Для каждой регулярной поверхности, заключающей внутри себя распределение зарядов, теорема Гаусса (табл. 5.6-1) принимает специальный вид

$$\int_S dA \cdot \nabla \Phi = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA = -4\pi Q_T. \quad (15.6-19)$$

(d) Общие решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы. Пусть V — односвязная, ограниченная или неограниченная трехмерная область с регулярной граничной поверхностью S , и пусть $\Phi(\mathbf{r})$ дважды непрерывно дифференцируема в V и непрерывно дифференцируема на S ; $\Phi(\mathbf{r}) = 0(1/r)$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда теорема Грина (табл. 5.6-1 или п.15.4-3, с) позволяет представить $\Phi(\mathbf{r})$ в форме

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) \nabla_\rho \Phi(\rho)] \cdot dA(\rho) - \frac{1}{4\pi} \int_S [\Phi(\rho) \nabla_\rho \varphi_0(\mathbf{r}-\rho)] \cdot dA(\rho) - \frac{1}{4\pi} \int_V \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) \nabla^2 \Phi(\rho) dV(\rho) \quad (\mathbf{r} \in V), \quad (15.6-20a)$$

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|}, \quad (15.6-20b)$$

где ∇_ρ означает дифференцирование по компоненте ρ ; заметим, что $\nabla_\rho \varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = \nabla_\rho \Phi(\mathbf{r}-\rho)$. Формула (20) выражает любое решение $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Пуассона (2) как потенциал, порожденный тремя распределениями:

1. Распределения простого слоя (14) с плотностью

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\nabla \Phi_0 dA}{dA} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

2. Распределения двойного слоя (15) с плотностью

$$\frac{1}{4\pi} \Phi.$$

3. Объемного распределения (12) с плотностью

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \Phi = \Theta(\mathbf{r}).$$

Последний потенциал равен нулю, если $\Phi(\mathbf{r})$ удовлетворяет в V уравнению Лапласа (1).

З а м е ч а н и е. Выражение (20a) обращается в нуль, если точка \mathbf{r} находится вне V и равно $\Phi(\mathbf{r})/2$ для точек \mathbf{r} , принадлежащих поверхности S .

15.6-6. Решение трехмерных краевых задач посредством функций Грина. Метод функций Грина пп.15.5-1 и 15.5-4 позволяет выразить решение $\Phi(\mathbf{r})$ задачи Дирихле (3) и задачи Неймана (4) для подходящих областей V в форме поверхностных интегралов

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_S G_s(\mathbf{r}, \rho) b(\rho) dA(\rho). \quad (15.6-21)$$

В п.15.5-4, б указана связь между «поверхностной» функцией $G_s(\mathbf{r}, \rho)$ Грина с обычной функцией Грина $G(\mathbf{r}, \rho)$, доставляющей решение

$$\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi \int_V G(\mathbf{r}, \rho) Q(\rho) dV(\rho) \quad (15.6-22)$$

уравнения Пуассона (2) при «дополнительных» однородных условиях Дирихле или Неймана. Суперпозиция решений (21) и (22) доставляет решение уравнения Пуассона с заданными граничными значениями $b(\rho)$ функции Φ или $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (п.15.4-2). Заметим, что $G(\rho, r) \equiv G(r, \rho)$ (п.15.5-1). Функции Грина легко найти в следующих частных случаях (заметим, что положительное направление нормали идет *вне* замкнутой поверхности).

(а) Функция Грина для всего пространства. Если V есть все трехмерное пространство, то формула (20) доставляет единственное решение (22) уравнения Пуассона при «краевом условии» $\Phi(r) = O(1/r)$ при $r \rightarrow \infty$. Соответствующая функция Грина есть

$$G(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r-\rho} = \frac{1}{4\pi} \varphi_0(r-\rho) \quad (15.6-23)$$

(см. также п.5.7-3).

(б) Полупространство с условиями Дирихле. Если V — полупространство $z > 0$, то функции Грина для условий Дирихле имеют вид

$$G(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|r-\rho|} - \frac{1}{|r-\bar{\rho}|} \right) = \frac{1}{4\pi} [\varphi_0(r-\rho) - \varphi_0(r-\bar{\rho})], \quad (15.6-24)$$

$$G_s(r, \rho) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = -\frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{z}{2\pi[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (15.6-25)$$

где точка $(\bar{\rho}) \equiv (\xi, \eta, -\zeta)$ есть *зеркальное отражение* точки $(\rho) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ в граничной плоскости. Решение (22) может быть интерпретировано как объемный потенциал, порождаемый данным зарядом и индуцированным им зарядом в точке $(\bar{\rho})$; решение (21) выражает влияние неоднородных условий Дирихле в виде потенциала двойного слоя, расположенного на границе.

(в) Сфера с условиями Дирихле. Интеграл Пуассона. Если V есть *внутренность* сферы $|r|=R$, то функции Грина при условиях Дирихле имеют вид

$$G(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|r-\rho|} - \frac{R}{r} \frac{1}{\left| \frac{R^2}{r^2} r - \rho \right|} \right) = \frac{1}{4\pi} \left[\varphi_0(r-\rho) - \frac{R}{r} \varphi_0 \left(\frac{R^2}{r^2} r - \rho \right) \right], \quad (15.6-26)$$

$$G_s(r, \rho) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = -\frac{\partial G}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=R} = -\frac{1}{4\pi} \frac{r^2 - R^2}{R(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (15.6-27)$$

где γ — угол между r и ρ , или

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (15.6-28)$$

если сферические координаты точек (r) и (ρ) обозначены соответственно через r, ϑ, φ и $\rho, \vartheta', \varphi'$. Второй член в формуле (26) можно рассматривать как эффект индуцированного заряда, симметричного данному относительно сферы в соответствии с теоремой Кельвина об инверсии (п.15.6-3). Решение (21) задачи Дирихле

$$\nabla^2 \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (r < R), \quad \Phi|_{r=R} = b(\vartheta, \varphi),$$

имеет вид

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) \equiv \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \frac{b(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta'}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma)^{3/2}} \quad (15.6-29)$$

(интегральная формула Пуассона)

и может быть интерпретировано как потенциал двойного слоя.

Выражение (27) может быть разложено по сферическим гармоникам в соответствии с (21.8-68) (разложение по мультиполям, п.15.6-5, см. также

п.10.4-9). Формулы (26) – (29) доставляют решения для внутренней сферы ($r < R$). Если V – внешность сферы ($r > R$), $G(r, \rho)$ также дается формулой (26), однако теперь

$$G_s(r, \rho) = - \left. \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial \nu} = \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial \rho} \right]_{r=R},$$

так что знаки правых частей формул (27) и (29) должны быть изменены на обратные.

(д) Теорема существования. Функция Грина $G(r, \rho)$ уравнения Пуассона с условиями Дирихле и, следовательно, решение задачи Дирихле с разумными краевыми условиями — существует для каждой области, ограниченной конечным числом кусков регулярных поверхностей, каждая точка которых может быть вершиной тетраэдра, расположенного вне V .

15.6-7. Двумерная теория потенциала. Логарифмический потенциал.

(а) Во многих трехмерных задачах теории потенциала функция $\Phi(x, y, z)$ не зависит от координаты z и V есть прямой цилиндр, граничная поверхность S которого пересекает плоскость Oxy по некоторой линии C (например, потенциал и течение вблизи бесконечного цилиндра, плоские границы). Эти задачи составляют содержание *двумерной теории потенциала*.

Теорема о дивергенции и теорема Гаусса принимают вид (4.6-33); используя прямоугольные декартовы координаты x, y или плоские полярные координаты r, φ , можно записать уравнение Лапласа в виде

$$\nabla^2 \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (15.6-30)$$

уравнение Пуассона —

$$\nabla^2 \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -2\pi Q, \quad (15.6-31)$$

с $\Phi = \Phi(r)$, $Q = Q(r)$, $\mathbf{r} \equiv (x, y) \equiv (r, \varphi)$.

На двумерные гармонические функции полностью переносятся теоремы п.15.6-4; следует только в теоремах о среднем значении заменить сферы на окружности. Формула Кельвина (5) имеет место для каждой окружности $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = R$; таким образом, если $\Phi(r, \varphi)$ есть решение для $r < R$, то $\frac{R}{r} \Phi\left(\frac{R^2}{r}, \varphi\right)$ есть решение для $r > R$ и обратно.

(б) Двумерное уравнение Лапласа (30) имеет элементарное решение, называемое *логарифмическим потенциалом* точечного источника в $\mathbf{r} = \rho$,

$$\psi_0(\mathbf{r} - \rho) = \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \rho|} = \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (15.6-32)$$

которое описывает потенциал равномерно заряженной прямой линии в направлении оси z .

Функция (32) играет роль функции (8) в двумерной теории так, что потенциалы (12), (14) и (15) из п.15.6-5 заменяются соответствующими логарифмическими потенциалами

$$\int_D Q(\rho) \psi_0(\rho) dA(\rho) = \int_D Q(\rho) \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \rho|} dA(\rho), \quad (15.6-33)$$

$$\int_C \sigma(\rho) \psi_0(\rho) ds(\rho) = \int_C \sigma(\rho) \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \rho|} ds(\rho), \quad (15.6-34)$$

$$- \int_C p(\rho) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds(\rho) = - \int_C p(\rho) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \rho|} ds(\rho). \quad (15.6-35)$$

Уравнение (20) заменяется на

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0 \psi_0(\mathbf{r}-\rho) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds(\rho) - \frac{1}{2\pi} \int_s \Phi(\rho) \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} ds(\rho) - \frac{1}{2\pi} \int_D \psi_0(\mathbf{r}-\rho) \nabla_{\rho}^2 \Phi(\rho) dA(\rho). \quad (15.6-36)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \nu} ds(\rho) \equiv \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\xi. \quad (15.6-37)$$

15.6-8. Двумерная теория потенциала; сопряженные гармонические функции (см. также пп. 7.3-2 и 7.3-3).

(а) Плоскость Oxy может рассматриваться как комплексная числовая плоскость с точками $z = x + iy$. Пара (необходимо гармонических) функций $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ называются **гармонически сопряженными** в области D плоскости Oz тогда и только тогда, когда функция

$$E = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

есть аналитическая функция от $z = x + iy$ в области D .

Сопряженные гармонические функции связаны уравнениями Коши-Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (15.6-38)$$

и определяют одна другую всюду в D с точностью до аддитивной постоянной. Если дана функция $\Phi(x, y)$, гармоническая в D , то $\Psi(x, y)$ выражается криволинейным интегралом

$$\Psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right), \quad (15.6-39a)$$

где x_0 и y_0 — произвольные постоянные, а путь интегрирования расположен внутри D . Если дана $\Psi(x, y)$, то имеем

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy \right). \quad (15.6-39b)$$

Линии $\Phi(x, y) = \text{const}$ и $\Psi(x, y) = \text{const}$ образуют взаимно ортогональные семейства. Эти линии имеют важную физическую интерпретацию (эквипотенциальные линии и линии градиента в электростатике, линии уровня потенциала скоростей и линии тока для несжимаемых течений).

E часто называют **комплексным потенциалом**.

(b) Каждое преобразование

$$\tilde{z} = \tilde{z}(z) \quad (z = x + iy, \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}), \quad (15.6-40)$$

аналитическое в V и такое, что $\frac{d\tilde{z}}{dz} \neq 0$ в V (конформные отображения, п. 7.9-1), преобразует сопряженные гармонические функции $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ в сопряженные гармонические функции $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ с взаимно ортогональными линиями уровней. Эта теорема позволяет упрощать граничные линии и линии уровня посредством конформных отображений (см. также п. 15.6-9).

(с) Пусть $\Psi(x, y)$ есть решение задачи Неймана

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (\text{в } D), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = b(x, y) \quad (\text{на } C), \quad (15.6-41)$$

так, что $\Psi(x, y)$ и ее производные непрерывны на C и, следовательно, в D . Тогда функция (39б), комплексно сопряженная функции $\Psi(x, y)$, есть решение задачи Дирихле

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{в } D), \quad \Phi(x, y) = B(x, y) = B(s) \quad (\text{на } C), \quad (15.6-42)$$

где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (\text{на } C) \quad \text{или} \quad B(s) = -\int b(s) ds + \text{const.} \quad (15.6-43)$$

Решение $\Phi(x, y)$ задачи Дирихле (42) аналогичным образом доставляет решение (39а) задачи Неймана (41), если только

$$-\oint_C b(s) ds = \oint_C \frac{\partial B}{\partial s} ds = 0 \quad (15.6-44)$$

так, что теорема Гаусса выполняется (см. также табл. 5.6-1 и п.15.6-5, с).

15.6-9. Решение двумерных краевых задач. Функции Грина и конформные отображения (см. также пп.15.5-1, 15.5-4, 15.6-6). Методы функций Грина пп.15.5-1 и 15.5-3 позволяют выразить решение $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Пуассона (31) с однородными линейными краевыми условиями в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \rho) Q(\rho) dA(\rho) \quad (15.6-45)$$

и решение $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Лапласа (30) с данными краевыми значениями $b(\mathbf{r})$ функции Φ или $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_C G_s(\mathbf{r}, \rho) b(\rho) ds(\rho). \quad (15.6-46)$$

Решение уравнения Пуассона при неоднородных линейных краевых условиях может быть получено суперпозицией интегралов вида (45) и (46). Заметим, что $G(\mathbf{r}, \rho) = G(\rho, \mathbf{r})$.

Функции Грина легко находятся в нижеследующих специальных случаях.
(а) Функция Грина для всей плоскости. Если D — вся плоскость, то формула (36) доставляет единственное решение (45) уравнения Пуассона при «краевом условии» $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Соответствующая функция Грина есть

$$G(\mathbf{r}, \rho) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \rho|}. \quad (15.6-47)$$

(б) Полуплоскость с условиями Дирихле. Если D полуплоскость $x > 0$, то функции Грина для условий Дирихле имеют вид

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \rho) &= \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \rho|} - \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\rho}|} \right] = \frac{1}{2\pi} [\psi_0(\mathbf{r} - \rho) - \psi_0(\mathbf{r} - \tilde{\rho})] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \end{aligned} \quad (15.6-48)$$

$$G_s(\mathbf{r}, \rho) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + (y - \eta)^2}, \quad (15.6-49)$$

где точка $(\tilde{\rho}) \equiv (-\xi, \eta)$ есть зеркальное отражение точки $(\rho) \equiv (\xi, \eta)$ в граничной линии.

(с) Окружность с условиями Дирихле. Интегральная формула Пуассона. Если D есть круг $r < R$, то функции Грина для условий Дирихле имеют вид

$$G(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R^2 + \frac{r^2 \rho^2}{R^2} - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi')}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi')}, \quad (15.6-50)$$

$$G_s(r, \rho) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = -\frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \varphi')}, \quad (15.6-51)$$

где ρ' , φ' — полярные координаты точки (ρ) .

Решение (45) задачи Дирихле

$$\nabla^2 \Phi(r, \varphi) = 0 \quad (r < R), \quad \Phi_{r=R} = b(\varphi), \quad (15.6-52)$$

принимает вид

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi')} b(\varphi') d\varphi' \quad (\text{интегральная формула Пуассона}) \quad (15.6-53)$$

и может быть разложено в ряд Фурье по φ .

Уравнения (50)–(53) доставляют решения для круга $r < R$. Если D есть область $r > R$, то $G(r, \rho)$ также выражается формулой (50), но в этом случае

$G_s(r, \rho) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}$ так, что знак в правых частях формул (51) и (53) должен быть изменен на обратный.

(d) Существование функций Грина и конформные отображения.

Из п.15.6-9, с и теоремы Римана об отображениях (п.7.10-1) следует существование функции Грина (а отсюда и решения задачи Дирихле) для некоторой области D , которая вместе со своей границей может быть отображена конформно на единичный круг. Более точно, пусть $w = w(z)$ — аналитическая функция, отображающая точки $z = x + iy$ замкнутой области D в точки единичного круга так, что точка $\zeta = \xi + i\eta$ области D переходит в начало, или

$$w(z) = 1 \quad (z \text{ на } C), \quad w(\zeta) = 0. \quad (15.6-54)$$

Тогда задача Дирихле для области D имеет функцию Грина

$$G(x, y; \xi, \eta) \equiv G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|w(z)|}. \quad (15.6-55)$$

15.6-10. Распространение теории на более общие дифференциальные уравнения. Запаздывающий и опережающие потенциалы (см. также п.10.4-4).

Теория пп.15.6-5, 15.6-7 и 15.6-9 позволяет конструировать решения уравнения Лапласа и Пуассона посредством суперпозиции точечных и дипольных потенциалов. Эта теория легко обобщается на более общие дифференциальные уравнения

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad (15.6-56)$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -4\pi q(r), \quad (15.6-57)$$

которые включают пространственную форму волнового уравнения (k — действительное, п.10.4-4) и пространственную форму уравнения Клейна–Гордона, используемого в ядерной физике ($k = ik$). Дифференциальное уравнение (57) принадлежит к типу, изученному в п.15.5-4.

(а) Трехмерный случай. Трехмерное уравнение (56) имеет элементарное частное решение

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} \quad (\mathbf{r} \neq \rho). \quad (15.6-58)$$

Для действительных k положительный знак соответствует уходящим волнам, отрицательный знак — приходящим волнам; при мнимых $k = i\kappa$ представляет большой интерес только отрицательный показатель $-|\kappa|$.

Подстановка выражения (58) вместо $\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|}$ в формулы (8) — (15), (23), (24) доставляет решения дифференциальных уравнений (56) и (57) вместо соответствующих решений уравнений Лапласа и Пуассона.

Результирующие решения волнового уравнения (п.10.4-8) суть частные случаи западающих потенциалов (положительный знак в формуле (58)) и опережающих потенциалов (отрицательный знак в формуле (58)).

В частности, если $\Phi(\mathbf{r})$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение однородного дифференциального уравнения (56), формула (20) заменяется по теореме Гельмгольца на

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} \nabla_\rho \Phi \right) dA - \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Phi \nabla_\rho \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} \right) dA(\rho) \quad (\mathbf{r} \in V). \quad (15.6-59)$$

(б) Двумерный случай. В случае двумерных дифференциальных уравнений вида (56) и (57) элементарные частные решения (32) заменяются на

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = \begin{cases} -\frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\rho|) & (\text{уходящие волны}), \\ \frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\rho|) & (\text{приходящие волны}), \end{cases} \quad (15.6-60)$$

где $H_0^{(\nu)}(z)$ функции Ганкеля (п.21.8-1).

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

16.1. ВВЕДЕНИЕ

16.1-1. Вводные замечания. В тензорном исчислении рассматриваются специальные математические объекты (см. п.12.1-1), тензоры, задаваемые обычно в каждой точке пространства и меняющиеся от точки к точке. Эти объекты представляют собой, следовательно, функции точки; роль «точек» могут играть элементы различной природы, определяемые системами чисел — координат этих точек. Предполагается, что каждый тензор может быть аналитически охарактеризован упорядоченной системой функций от координат точки (компонент тензора); эти функции могут выбираться по-разному, но так, чтобы введенные с их помощью математические соотношения между тензорами не зависели от конкретного выбора аналитической характеристики.

Тензорная алгебра является обобщением теории векторных пространств (п.12.4-1 и 14.2-1—14.2-7) линейных алгебр (п.12.4-2 и 14.3-5) и их представлений (п.14.1-2). *Тензорный анализ* занимается изучением тензоров как функций точки (тензорное поле) и применяется в основном для описания пространства с кривизной (гл. 17) и в теории поля в физике. Тензорные методы часто позволяют проследить на относительно простой математической модели изменение сложных количественных характеристик при переходе от одной системы отсчета к другой.

16.1-2. Системы координат и допустимые преобразования. Рассмотрим множество объектов, которые будем называть *точками*. Предположим, что каждой точке множества отнесена по определенному правилу упорядоченная система $n < \infty$ действительных чисел x^1, x^2, \dots, x^n (ее *координат*), причем точки множества взаимно однозначно соответствуют точкам некоторой области n -мерного арифметического пространства переменных x^1, x^2, \dots, x^n . Преобразование координат («пассивная» точка зрения на формулы преобразования, см. п.14.1-3), *допустимое* в смысле последующего изложения, состоит в том, что каждой точке относятся n новых координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$, связанных следующими формулами преобразования с координатами относительно исходной системы:

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (16.1-1)$$

Уравнения (1) должны удовлетворять в рассматриваемой области следующие двум требованиям:

- 1) функции $\bar{x}^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ непрерывно дифференцируемы и
- 2) якобиан (п.4.5-5) $\det [\partial \bar{x}^k / \partial x^i]$ отличен от нуля.

Множество допустимых преобразований образует группу (п.12.2-1) относительно «умножения», т.е. последовательного выполнения преобразований (см. также п.12.2-3). Якобиан произведения двух преобразований равен произведению якобианов этих преобразований. Каждое допустимое преобразование (1) имеет единственное обратное преобразование, якобиан которого равен обратной величине якобиана данного преобразования.

1) Здесь и дальше верхние индексы не являются степенями.

16.1-3. Компоненты объектов. Индексные обозначения. В тензорном анализе рассматриваются объекты, связанные с точками (x^1, x^2, \dots, x^n) пространства n измерений ($n < \infty$, п.14.1-2) и представляющие собой *функции точек* (п.5.4-1), определенные в некоторой области пространства. Каждая такая функция, обозначим ее $Q(x^1, x^2, \dots, x^n)$, может быть, по предположению, определена (координатное представление объекта Q) системой $n^2 < \infty$ скалярных функций $Q(j_1, j_2, \dots, j_R; x^1, x^2, \dots, x^n)$, ее **компонент (координат)** (см. также п.14.1-2); индексы j_1, j_2, \dots, j_R пробегают целые значения от 1 до n .

В зависимости от типа объекта (п.16.2-1 и 16.2-2) некоторые из индексов записываются в каждой компоненте наверху, другие — внизу. Например, объект Q может определяться n^{r+s} компонентами $Q_{i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots j_r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, где все индексы принимают значения от 1 до n . Эти обозначения позволяют сокращенно записывать суммы вида

$$\sum_{k=1}^n A^{ik} B_k = C^i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{как} \quad A^{ik} B_k = C^i,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ij}^k B^k C_{ih} = D_{jh} \quad (j, h = 1, 2, \dots, n) \quad \text{как} \quad A_{ij}^k B^k C_{ih} = D_{jh},$$

а также суммы, содержащие векторы:

$$\sum_{k=1}^n a^k e_k = \mathbf{a} \quad \text{как} \quad a^k e_k = \mathbf{a}.$$

Сокращенная запись суммы основана на следующих соглашениях:

1. *Соглашение о суммировании.* Суммирование от 1 до n производится по каждому **немому** индексу, встречающемуся дважды, один раз внизу и один раз наверху.

Обозначение любого немом индекса может быть изменено, так как немые индексы «взаимно уничтожаются» при суммировании. (Пример: $A^{ik} B_k = A^{ij} B_j = A^{ih} B_h$.) При перемножении сумм следует использовать различные индексы суммирования.

2. *Соглашение о ранге.* Все свободные индексы, встречающиеся только внизу или только наверху, пробегают значения от 1 до n , так что уравнение с R свободными индексами является сокращенной записью n^R уравнений.

Как верхние, так и нижние индексы из различных частей уравнения должны совпадать.

3. В производных вида $\frac{\partial a^i}{\partial x^k}$ индекс k считается нижним.

В настоящей главе немые индексы в соответствии с соглашениями (1), (2) всегда используются для обозначения суммирования. Так, выражения вида $A^{ik} B_k$ следует рассматривать как суммы, если специально не оговорено противное, например $A^{ik} B_k$ (не суммировать!).

Во многих приложениях индексные обозначения оказываются более совершенными, чем матричная запись, использованная в гл. 13 (см. табл. 14.7-1 для сравнения обозначений).

16.1-4. Системы отчета и индуцированные преобразования. Геометрические объекты (см. также п.14.1-5 и 16.2-1). Рассмотрим класс объектов, являющихся функциями точки. Говорят, что для этого класса или для множества классов задана **система отчета** (координатная система), если каждому объекту по некоторому правилу соответствует (взаимно однозначно) система действительных чисел — компонент (координат) объекта.

Каждый объект должен определяться во всех системах отсчета одним и тем же числом компонент. В физике значение каждой компоненты представляет собой обычно результат физического измерения.

Полезно считать, что с каждой системой координат x^1, x^2, \dots, x^n связана своя система отсчета (система отсчета x). Тогда компоненты $Q_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ объекта $Q(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в системе отсчета x и компоненты $\bar{Q}_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_r}^{k_1 k_2 \dots k_r}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ того же объекта в системе отсчета \bar{x} связаны индуцированным преобразованием

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_r}^{k_1 k_2 \dots k_r}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) &= \\ &= \bar{Q}_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_r}^{k_1 k_2 \dots k_r} [Q_{i_1 i_2 \dots i_1}^{11 \dots 1}(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, Q_{i_n \dots i_n}^{nn \dots n}(x^1, x^2, \dots, x^n)], \end{aligned} \quad (16.1-2)$$

которое порождается каждым допустимым преобразованием координат (1).

Класс S объектов $Q(x^1, x^2, \dots, x^n)$, определяемых в системе отсчета x скалярными компонентами $Q_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, называется классом инвариантных или геометрических объектов (иногда называемых тензорами в наиболее широком смысле слова), если математические свойства объектов этого класса могут быть описаны в терминах операций, не зависящих от системы отсчета (см. также пп. 12.1-1 и 16.4-1). Это значит, что индуцированные преобразования (2) следующим образом связаны с операциями, заданными в S :

1. Соответствие между допустимыми преобразованиями координат (1) и соответствующими индуцированными преобразованиями (2) есть гомоморфизм (п. 12.1-6), сохраняющий произведение двух индуцированных преобразований.

2. Каждое индуцированное преобразование является изоморфизмом, сохраняющим операции, определенные в S (см. также п. 16.4-1). Если определены операции, связывающие элементы двух или более классов C_1, C_2, \dots (например, скаляры и векторы), то они также сохраняются при преобразованиях, индуцированных в S_1, S_2, \dots .

Можно рассматривать также классы объектов, инвариантных лишь относительно подгруппы множества допустимых преобразований (п. 12.2-8).

16.2. АБСОЛЮТНЫЕ (ИСТИННЫЕ) ТЕНЗОРЫ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ (ПСЕВДОТЕНЗОРЫ)

16.2-1. Определение абсолютных и относительных тензоров, основанное на законе преобразования их компонент (см. также табл. 16.2-1 и 6.3-3). В настоящем справочнике, а также в большинстве приложений рассматриваются действительные (абсолютные или относительные) тензоры, т. е. тензоры с действительными компонентами. В основу определения тензора можно положить соотношения, связывающие компоненты тензора в различных координатных системах. При переходе от одной координатной системы к другой компоненты тензора подвергаются линейному однородному преобразованию (4) или (5), различному для абсолютных или относительных тензоров различного типа; тип тензора определяется законом преобразования его компонент.

Если задано пространство точек (x^1, x^2, \dots, x^n) и группа допустимых преобразований координат (16.1-2), то

1. Скаляром (абсолютным скаляром; инвариантом; тензором ранга 0) называется объект, который в координатной системе x определяется функцией $\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в координатной системе \bar{x} функцией $\bar{\alpha}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, связанной с $\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке пространства соотношением

$$\bar{\alpha} = \alpha. \quad (16.2-1)$$

2. Контравариантным вектором (абсолютным контравариантным вектором; абсолютным контравариантным тензором ранга 1) называется объект, который в координатной системе x определяется n

Таблица 16.2-1

Определения тензорных величин наиболее распространенного типа, основанные на законе преобразования их компонент

(п.16.2-1; п.16.1-3, система индексных обозначений)

Тип тензорной величины	Компоненты в системе координат x^1, x^2, \dots, x^n	Компоненты в системе координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$
1. Абсолютный скаляр (скалярный инвариант) α ($R = r = s = 0$)	$\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\bar{\alpha}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) = \alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$
2. Абсолютный контравариантный вектор a ($R = r = 1, s = 0$)	$a^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\bar{a}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} a^i$
3. Абсолютный ковариантный вектор a ($R = s = 1, r = 0$)	$a_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\bar{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} a_i$
4. Абсолютный контравариантный тензор A ранга 2 ($R = r = 2, s = 0$)	$A^{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\bar{A}^{jh} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^k} A^{ik}$
5. Абсолютный ковариантный тензор A ранга 2 ($R = s = 2, r = 0$)	$A_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\bar{A}_{jh} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^h} A_{ik}$
6. Абсолютный смешанный тензор A ранга 2 ($R = 2, r = s = 1$)	$A^i_k(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\bar{A}^j_h = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^h} A^i_k$

упорядоченными числами или функциями (компонентами) $a^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в системе \bar{x} определяется n упорядоченными компонентами $\bar{a}^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, связанными с $a^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке пространства преобразованием

$$\bar{a}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} a^i. \quad (16.2-2)$$

3. Ковариантным вектором (абсолютным ковариантным вектором; абсолютным ковариантным тензором ранга 1) называется объект, который в координатной системе x определяется n упорядоченными компонентами $a_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в системе \bar{x} определяется n упорядоченными компонентами $\bar{a}_i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, связанными с $a_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке пространства преобразованием

$$\bar{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} a_i. \quad (16.2-3)$$

4. Тензором A , r раз контравариантным и s раз ковариантным (истинным тензором, абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным) называется объект, который в координатной

*) В векторной алгебре (гл. 5) компоненты вектора назывались координатами вектора. Отметим, что термины компоненты тензора и координаты тензора применяются взаимозаменяемо.

системе x определяется n^{r+s} компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в системе \bar{x} определяется n^{r+s} компонентами $\bar{A}_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_r}^{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_s}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, связанными с $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке преобразованием

$$\bar{A}_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_r}^{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_s} = \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{\bar{k}_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{\bar{k}_2}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{\bar{k}_r}} A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s}. \quad (16.2-4)$$

Общее число индексов $r+s$ называется **рангом (валентностью)** тензора A .

5. Относительным тензором (псевдотензором) A веса W , r раз контравариантным и s раз ковариантным, называется объект, определяемый в каждой координатной системе n^{r+s} упорядоченными компонентами, которые при переходе к новой системе координат преобразуются по закону

$$\bar{A}_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_s}^{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_r} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_1}} \frac{\partial x^{k_2}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_2}} \dots \frac{\partial x^{k_r}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_r}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_s}}{\partial x^{i_s}} \dots \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_2}} \dots \frac{\partial x^{i_s}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_s}} A_{i_1 i_2 \dots i_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} \left[\frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)} \right]^W, \quad (16.2-5)$$

где W — целое число. При $W = +1$ относительный тензор называется тензорной плотностью, при $W = -1$ — тензорной емкостью.

Уравнение (5) включает (1), (2), (3) и (4) как частные случаи, соответствующие $W = 0$.

Тензор с компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$ называется смешанным тензором, если ни r , ни s не равны нулю. Преобразование (5), характеризующее любую тензорную величину, является линейным и однородным относительно компонент тензора. Преобразование, обратное преобразованию (5), имеет вид

$$A_{i_1 i_2 \dots i_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} = \frac{\partial \bar{x}^{\bar{i}_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{i}_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\bar{i}_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_1}} \frac{\partial x^{k_2}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_2}} \dots \frac{\partial x^{k_s}}{\partial \bar{x}^{\bar{i}_s}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\bar{k}_s}}{\partial x^{i_s}} A_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_s}^{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_r} \left[\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)} \right]^W. \quad (16.2-6)$$

З а м е ч а н и е. Для того чтобы не вводить новых символов, компоненты тензоров иногда различают относительным положением верхних и нижних индексов. Так, A^i_k и A_k^i обозначают различные системы компонент (см. пп.16.7-2 и 16.9-1).

16.2-2. **Инфинитезимальное перемещение.** Градиент скалярного поля (см. также пп.5.2-2, 5.7-1, 6.2-3, 16.10-7). Дифференциалы координат dx^i определяют контравариантный вектор, который называется вектором инфинитезимального перемещения dr . Если скаляр α задан дифференцируемой функцией от координат x^i , то $\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}$ служат компонентами ковариантного вектора — градиента $\nabla \alpha$ скаляра α . Ковариантный вектор, заданный компонентами a_i , является градиентом скаляра в том и только в том случае, если $\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} = 0$ для всех i, k ; при этом предполагается, что все частные производные непрерывны.

16.3. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ

16.3-1. **Равенство тензоров.** Два тензора A и B одного и того же типа, ранга и веса называются **равными** ($A=B$) в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) , если в этой точке равны соответствующие компоненты тензоров относительно некоторой координатной системы

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s}(x^1, x^2, \dots, x^n) = B_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s}(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \left\{ \text{равенство тензоров} \right\}. \quad (16.3-1)$$

Отсюда следует, что *соответствующие компоненты тензоров А и В равны в каждой координатной системе* (см. также п.16.4-1). Равенство тензоров обладает свойствами симметрии, рефлексивности и транзитивности (п.12.1-3).

З а м е ч а н и е. В тензорной алгебре не определяются никакие соотношения между значениями тензоров в различных точках пространства. Некоторые из этих соотношений для частного случая тензоров в римановых пространствах рассматриваются в п.16.9-10.

16.3-2. Нуль-тензор. Нуль-тензором 0 любого заданного типа, ранга и веса называется тензор, обладающий тем свойством, что все его компоненты в некоторой координатной системе равны нулю. Условие того, что $A = 0$ в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) , имеет вид

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 \quad (\text{нуль-тензор}). \quad (16.3-2)$$

Все компоненты нуль-тензора А равны нулю в любой координатной системе.

16.3-3. Сложение тензоров. Если задан класс тензоров одного и того же типа, ранга и веса, то **суммой** $C = A + B$ двух тензоров А и В называется тензор, компоненты которого в некоторой координатной системе (и, следовательно, в каждой координатной системе) равны суммам соответствующих компонент тензоров А и В:

$$C_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} = A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} + B_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} \quad (\text{сложение тензоров}). \quad (16.3-3)$$

Сумма тензоров $A+B$ является тензором того же ранга, типа и веса, что и каждое из слагаемых. Сложение тензоров коммутативно и ассоциативно.

16.3-4. Умножение тензора на абсолютный скаляр. Произведением $B = \alpha A$ тензора А на скаляр α называется тензор, компоненты которого в каждой координатной системе равны произведениям компонент тензора А на скаляр α :

$$B_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} = \alpha A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} \quad (\text{умножение на скаляр}). \quad (16.3-4)$$

αA является тензором того же ранга, типа и веса, что и А. Умножение на скаляр коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения как тензоров, так и скаляров. В частности, $(-1)A \equiv -A$ есть тензор, противоположный тензору А, т. е. $A + (-A) = 0$.

16.3-5. Свертывание смешанного тензора. Свертывание — операция, которая может быть применена к смешанному тензору. Рассмотрим смешанный тензор А с компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$. Если выбрать какой-нибудь верхний индекс и какой-нибудь нижний индекс и просуммировать все компоненты с совпадающими значениями этих индексов, то полученные n^{r+s-2} суммы будут являться компонентами нового тензора того же веса, что и А, $r-1$ раз контравариантного и $s-1$ раз ковариантного. Смешанный тензор может быть, вообще говоря, свернут различными способами; кроме того, свертывание может быть повторено несколько раз.

П р и м е р. Свертывание абсолютного или относительного смешанного тензора А ранга 2 с компонентами A_k^i порождает абсолютный или относительный скаляр $A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + \dots + A_n^n$ (след А).

16.3.6. Произведение (внешнее) двух тензоров (см. также п.12.7-3). Произведением $C = AB$ (**внешним**) двух тензоров А и В веса W и W' соответственно, определяемых компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$ и $B_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q}$, называется тензор с компонентами

$$C_{i_1 i_2 \dots i_r k_1 k_2 \dots k_p}^{j_1 j_2 \dots j_s l_1 l_2 \dots l_q} = A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} B_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q} \quad (\text{внешнее умножение}). \quad (16.3-5)$$

Произведение AB является тензором веса $W+W'$, $r+p$ раз контравариантным и $s+q$ раз ковариантным. Умножение тензоров ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Однако оно, вообще говоря, не коммутативно, так как порядок следования индексов в формулах (5) является существенным.

Примеры. $a^i b^k = A^{ik}$, $a^i b_k = A_k^i$, $a_i b_k = A_{ik}$. Произведение (4) является частным случаем внешнего произведения тензоров.

16.3-7. Внутреннее произведение. Если произведение двух тензоров A и B , определяемое формулами (5), можно свернуть (п.16.3-5) таким образом, что в каждом из слагаемых один или несколько верхних индексов компоненты $A_{i_1^1 i_2^1 \dots i_r^1}$ будут совпадать с одним или несколькими нижними индексами компоненты $B_{k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2}$, то полученные суммы будут служить компонентами нового тензора, который называется **внутренним произведением** тензоров A и B . В общем случае можно образовать несколько таких внутренних произведений.

Каждое внутреннее произведение тензоров A и B является тензором того же веса, что и AB . Ранг внутреннего произведения равен разности между рангом AB и числом попарно взятых индексов, по которым производилось суммирование. Внутреннее умножение дистрибутивно относительно сложения тензоров. Иногда внутреннее умножение тензоров называют *свертыванием* этих тензоров.

Примеры. $a^i b_i = \gamma$, $A_k^i a^k = c^i$, $A_k^i b_i = D_k$, $B^{ik} b_i = f^k$, $C_{ik} a^k = h_i$.

16.3-8. Признак тензора. Пусть в координатной системе x заданы n^R компонент $Q(j_1, j_2, \dots, j_R; x^1, x^2, \dots, x^n)$ объекта Q , и пусть X — тензор, описываемый компонентами $X_{i_1^1 i_2^1 \dots i_r^1}^1(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Как и в п.16.3-6, *внешнее произведение* QX определяется n^{R+r+s} компонентами $Q(j_1, j_2, \dots, j_R) X_{i_1^1 i_2^1 \dots i_r^1}^1$. *Внутреннее произведение* Q и X определяется суммами, образованными посредством такого свертывания (п.16.3-5) объекта QX , при котором один или несколько индексов каждой компоненты $Q(j_1, j_2, \dots, j_R)$ совпадает с одним или несколькими индексами (верхними или нижними) компоненты $X_{i_1^1 i_2^1 \dots i_r^1}^1$, входящей в то же слагаемое. *Для того чтобы объект Q был тензором, необходимо и достаточно, чтобы для каждого тензора X некоторого определенного (фиксированного) ранга, типа и веса внешнее произведение QX или какое-нибудь внутреннее произведение объекта Q и тензора X было тензором Y определенного (фиксированного) ранга, типа и веса.*

Можно получить аналогичную теорему, заменив X *внешним произведением* R различных произвольных векторов определенных фиксированных типов и весов. Ранг и тип Q могут быть в каждом случае определены на основании подсчета верхних и нижних индексов. Вес Q равен разности весов Y и X .

Примеры. 1) Q является абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным, если для каждого абсолютного вектора a с компонентами a^i

$$\sum_{j_1+s}^n Q(j_1, j_2, \dots, j_{r+s}) a^{j_1+s} = B_{j_1+s}^{j_1 j_2 \dots j_r}$$

где правые части служат компонентами абсолютного тензора, зависящий от a .

2) Q является абсолютным тензором r раз контравариантным и s раз ковариантным, если для каждого абсолютного тензора A с компонентами $A_{i_1^1 i_2^1 \dots i_r^1}^1$

$$\sum_{j_1-1}^n \sum_{j_2-1}^n \dots \sum_{j_r+s-1}^n Q(j_1, j_2, \dots, j_{r+s}) A_{j_1^1 j_2^1 \dots j_r^1}^1 = \alpha,$$

где α — абсолютный скаляр, зависящий от A .

*З а м е ч а н и е. Объект Q , определяемый n^2 компонентами Q_{ik} , является абсолютным ковариантным тензором ранга 2 в том и только в том случае, если

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{ik} a^i b^k = \alpha$$

для любых двух абсолютных контравариантных векторов с компонентами a^i и b^k . Объект Q_{ik} является тензором, если

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{ik} a^i a^k = \alpha$$

есть абсолютный скаляр для каждого абсолютного контравариантного вектора a с компонентами a^i , и $Q_{ik} = Q_{ki}$. *

16.4. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА. ИНВАРИАНТНОСТЬ ТЕНЗОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

16.4-1. Инвариантность тензорных уравнений. При любом допустимом преобразовании координат (16.1-1) компоненты тензоров преобразуются по закону, сохраняющему результаты сложения, свертывания и внешнего (следовательно, и внутреннего) умножения, а также равенство тензоров. Каждое соотношение между тензорами, которое можно выразить через эти операции (и операцию предельного перехода), инвариантно относительно группы допустимых преобразований координат. Если соотношение, записанное в виде уравнений между компонентами, имеет место в одной координатной системе, то оно справедливо во всех координатных системах (см. также пп.12.5-1 и 16.1-4).

Пр и м е р. Из

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} + B_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_r} = C_{i_1 i_2 \dots i_r}^{l_1 l_2 \dots l_r}$$

следует

$$\bar{A}_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} + B_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} = \bar{C}_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$$

и наоборот; это соотношение может быть символически записано в виде $A+B=C$.

Следовательно, о тензорах и тензорных операциях можно говорить безотносительно к координатным системам (системам отсчета). Каждую подобранную подходящим образом систему тензорных величин можно рассматривать как класс инвариантных объектов с определенными в этом классе и вполне определяющими его (с точностью до изоморфизма, п.12.1-6) абстрактными операциями, не связанными с координатным представлением объектов.

Так, классы абсолютных тензоров ранга 0, 1 и 2 представляют собой соответственно скалярные поля (п.12.3-1, с), векторные пространства (п.12.4-1), линейные алгебры (п.12.4-2; см. также п.16.9-2) или кольца линейных операторов (пп.14.5-2, 14.6-2, 16.3-8). Классы тензоров ранга 2, 3, ... можно рассматривать как прямые произведения векторных пространств (п.12.7-3; см. также п.16.6-1, с).

16.5. СИММЕТРИЧНЫЕ И АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ

16.5-1. Симметричные и антисимметричные объекты. Объект Q с n^2 компонентами $Q(j_1, j_2, \dots, j_R)$, каждая из которых снабжена упорядоченной системой из R индексов j_1, j_2, \dots, j_R , называется

1. Симметричным по какой-нибудь паре индексов, например j_1 и j_2 , если

$$Q(j_1 = i, j_2 = k, j_3, \dots, j_R) = Q(j_1 = k, j_2 = i, j_3, \dots, j_R).$$

2. **Антисимметричным (кососимметричным)** по какой-нибудь паре индексов, например j_1 и j_2 , если

$$Q(j_1 = i, j_2 = k, j_3, \dots, j_n) = -Q(j_1 = k, j_2 = i, j_3, \dots, j_n)$$

для всех значений i, k, j_3, \dots, j_n от 1 до n .

Объект Q называется **симметричным (абсолютно симметричным)** или **антисимметричным (абсолютно антисимметричным)** относительно всех индексов, если он соответственно симметричен или антисимметричен по любой паре индексов.

Симметричность (антисимметричность) тензора или псевдотензора относительно некоторой пары верхних или нижних индексов является свойством, инвариантным относительно группы допустимых преобразований координат.

16.5-2. Символы Кронекера. Обобщенным символом Кронекера ранга $2r$ (δ -объектом ранга $2r$) называется абсолютный тензор, n^{2r} компонент которого $\delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ определяются следующим образом:

1. $\delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = +1$ или -1 , если все верхние индексы i_1, i_2, \dots, i_r различны и система нижних индексов k_2, \dots, k_r получена соответственно четным или нечетным числом транспозиций из системы верхних индексов.

2. $\delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = 0$ для всех других комбинаций верхних и нижних индексов.

Особенно важную роль играют δ -символы Кронекера ранга 2, определяемые следующими условиями:

$$\delta_k^i = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases} \quad (16.5-1)$$

Свертывание любого смешанного тензора A по верхнему индексу i и нижнему индексу i' (п.16.3-5) равносильно внутреннему умножению (п.16.3-7) A на $\delta_{i'}^i$. Каждый символ Кронекера абсолютно антисимметричен (п.16.5-1) как по верхним, так и по нижним индексам. Все символы Кронекера ранга $2r > 2n$ равны нулю. Если $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ симметричен по любой паре верхних индексов, то

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_r} A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = 0. \quad (16.5-2)$$

Если $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ симметричен по любой паре нижних индексов, то

$$\delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = 0. \quad (16.5-3)$$

Следует также отметить, что

$$\delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} A^{k_1 k_2 \dots k_r} = r! A^{i_1 i_2 \dots i_r}, \quad (16.5-4)$$

$$\delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \frac{(n-s)!}{(n-r)!} \delta_{k_1 k_2 \dots k_r, i_{r+1} \dots i_s}^{i_1 i_2 \dots i_r, i_{r+1} \dots i_s}, \quad \delta_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad (16.5-5)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i. \quad (16.5-6)$$

16.5-3*. e-объекты (символы Леви-Чивита) (см. также п.16.7-2). **e-символы**

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta_{1 2 \dots n}^{i_1 i_2 \dots i_n} \quad \text{и} \quad e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} \quad (16.5-7)$$

определяют абсолютно антисимметричные относительные тензоры (**e-объекты**) ранга n и веса $+1$ и -1 соответственно. Из (16.5-7) следует, что

1. $e^{i_1 i_2 \dots i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$, если среди индексов i_1, i_2, \dots, i_n имеется хотя бы два одинаковых.

2. $e^{i_1 i_2 \dots i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$, если упорядоченная система индексов i_1, i_2, \dots, i_n отличается четным числом транспозиций от $1, 2, \dots, n$.

3. $e^{i_1 i_2 \dots i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} = -1$, если упорядоченная система индексов i_1, i_2, \dots, i_n отличается от $1, 2, \dots, n$ нечетным числом транспозиций.

Следует также отметить, что

$$e^{i_1 i_2 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} e_{k_1 k_2 \dots k_r i_{r+1} \dots i_n} = (n-r)! \delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}, \quad (16.5-8)$$

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1 i_2 \dots i_n} = n!, \quad (16.5-9)$$

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1}^1 A_{i_2}^2 \dots A_{i_n}^n = e_{i_1 i_2 \dots i_n} A_1^{i_1} A_2^{i_2} \dots A_n^{i_n} = \det [A_i^j]. \quad (16.5-10)$$

16.5-4. Альтернированное произведение двух векторов (см. также пп.16.3-4 и 16.10-6). Альтернированным произведением двух контравариантных или двух ковариантных векторов (иногда *бивектором*) называют антисимметричный тензор ранга 2 с компонентами

$$V^{ij} = abj - aib \quad \text{или} \quad V_{ij} = a_j b_i - a_i b_j. \quad (16.5-11)$$

Вес альтернированного произведения равен сумме весов его сомножителей.

16.6. ЛОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ (ЛОКАЛЬНЫЙ БАЗИС)

16.6-1. Выражение векторов и тензоров через векторы локального базиса.

(а) Если задана координатная система x , то каждый (абсолютный или относительный) контравариантный вектор с компонентами $a^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ может быть представлен в виде инвариантной формы

$$\mathbf{a} = a^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \mathbf{e}_i(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (16.6-1)$$

Эта форма линейна относительно n абсолютных контравариантных векторов $\mathbf{e}_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \mathbf{e}_2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, \mathbf{e}_n(x^1, x^2, \dots, x^n)$; последние называются **контравариантными локальными базисными векторами** координатной системы x (о значении немых индексов см. п.16.1-3). *Компоненты i -го базисного вектора \mathbf{e}_i равны $\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n$* (см. также п.14.2-3).

(б) Аналогично каждый (абсолютный или относительный) ковариантный вектор \mathbf{b} с компонентами $b_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ может быть следующим образом выражен через n абсолютных **ковариантных локальных базисных векторов**

$$\mathbf{e}^1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{e}^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \dots, \quad \mathbf{e}^n(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

координатной системы x :

$$\mathbf{b} = b_i(x^1, x^2, \dots, x^n) \mathbf{e}^i(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (16.6-2)$$

Компоненты i -го базисного вектора \mathbf{e}^i равны $\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i$. Следует отметить, что векторы (1) и (2) принадлежат, вообще говоря, различным векторным пространствам.

(с) Каждый абсолютный или относительный тензор \mathbf{A} с компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$ может быть представлен в виде инвариантной формы

$$\mathbf{A} = A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_r} \mathbf{e}^{j_1} \mathbf{e}^{j_2} \dots \mathbf{e}^{j_s}. \quad (16.6-3)$$

Эта форма однородна относительно локальных базисных векторов \mathbf{e}_i и \mathbf{e}^i .

16.6-2. Преобразование локального базиса при преобразовании координат. $2n$ локальных базисных векторов $e_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $e^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, связанных с системой координат x^1, x^2, \dots, x^n , позволяют получить аналитическое представление любого тензора в виде системы его компонент (п.16.1-4). Новые локальные базисные векторы $\bar{e}_k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ и $\bar{e}^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, связанные с системой координат $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$, имеют в этой системе компоненты, равные соответственно δ_k^i и δ_i^k . Векторы локального базиса системы \bar{x}^i выражаются через векторы локального базиса системы x^i следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} e_i(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \bar{e}^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) &= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} e^i(x^1, x^2, \dots, x^n). \end{aligned} \right\} \quad (16.6-4)$$

Необходимо помнить, что $e_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $\bar{e}_k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ являются, вообще говоря, различными векторами (одного и того же векторного пространства), а не одним и тем же вектором, заданным различными способами. Векторы e_i преобразуются формально так же, как компоненты абсолютного ковариантного вектора (*коградиентно* этим компонентам); закон преобразования e^i совпадает с законом преобразования компонент контравариантного вектора. Компоненты a^i абсолютных контравариантных векторов и компоненты b_i абсолютных ковариантных векторов (и, как следствие, контравариантные и ковариантные базисные векторы e_i и e^i) преобразуются *контраградиентно*, т. е. таким образом, что внутреннее произведение $a^i b_i$ является *инвариантом* (см. также п.16.4-1).

16.7. ТЕНЗОРЫ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. АССОЦИИРОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ

16.7-1. Риманово пространство и фундаментальные тензоры. В каждом римановом пространстве может быть определено скалярное произведение, а вместе с ним длины и углы (п.16.8-1; см. также п.14.2-7;) эти определения приводят в свою очередь к полезным обобщениям евклидовой геометрии (см. также пп.17.4-1 — 17.4-7).

Пространство конечного числа измерений, точки которого определяются упорядоченными системами n действительных¹⁾ чисел (координат) x^1, x^2, \dots, x^n , называется **римановым пространством**, если в нем задан абсолютный ковариантный тензор ранга 2 (п.16.2-1) с компонентами $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, удовлетворяющими в рассматриваемой области пространства следующим трем требованиям:

1. Каждая компонента $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ является действительной функцией координат и имеет непрерывные частные производные.

$$2. g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) = g_{ki}(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

$$3. g = \det [g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)] \neq 0.$$

Квадратичная форма, соответствующая матрице $[g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)]$, часто предполагается положительно определенной (п.13.5-2), хотя это не является необходимым; случай неопределенной формы представляет интерес для теории относительности (см. также пп.16.8-1 и 17.4-6).

Все перечисленные свойства тензора g_{ik} инвариантны относительно допустимых (п.16.1-2) преобразований координат. Тензор (см. также п.17.4-2)

¹⁾ Теория, изложенная в пп.16.7-1—16.10-11, применима к векторам и тензорам с действительными компонентами, определенными в действительных римановых пространствах (последнее означает, что координаты точек действительны), а также в римановых пространствах теории относительности, где мнимые координаты используются в сущности лишь как форма записи.

с компонентами $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ (**метрический тензор**) и абсолютный симметрический тензор ранга 2, компоненты которого $g^{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ определяются соотношениями

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad \text{или} \quad g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g}, \quad (16.7-1)$$

где $G^{ik} = G^{ki}$, есть алгебраическое дополнение (п.1.5-2) g_{ik} в определителе $\det [g_{ik}]$ (**ассоциированный метрический тензор**), называются **фундаментальными тензорами** риманова пространства.

* Компоненты каждого из фундаментальных тензоров определяют *дифференциал длины дуги* ds (или *линейный элемент* ds^2) и, следовательно, всю *внутреннюю геометрию* риманова пространства (пп.17.4-1-17.4-7). Так как при любом преобразовании координат $g = \det [g_{ik}]$ преобразуется по формуле

$$\bar{g}(x^1, x^2, \dots, x^n) = g(x^1, x^2, \dots, x^n) \left(\frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)} \right)^2,$$

то естественно принять, что

$$\sqrt{|g(x^1, x^2, \dots, x^n)|} = \sqrt{|g(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)|} \frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)}.$$

При этом допущении выбор знака перед $\sqrt{|g(x^1, x^2, \dots, x^n)|}$ в одной системе координат однозначно определяет соответствующий знак для любой системы. Система координат x^1, x^2, \dots, x^n называется **правой**, если в этой системе координат скалярная плотность $\sqrt{|g(x^1, x^2, \dots, x^n)|}$ положительна, и **левой**, если она отрицательна (см. также пп.6.2-3, б и 6.4-3, с). *

16.7-2. Ассоциированные тензоры¹⁾. Поднятие и опускание индексов.

Контравариантный (абсолютный или относительный) вектор с компонентами a^i , и ковариантный вектор с компонентами a_i , заданные в римановом пространстве, называются **ассоциированными**, если их компоненты связаны в каждой точке следующими соотношениями:

$$a^k = a_i g^{ik} \quad \text{и, следовательно,} \quad a_i = g_{ik} a^k. \quad (16.7-2)$$

Аналогично, для того чтобы получить тензор, ассоциированный данному тензору с компонентами $A_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$, следует, по определению, **поднять индекс** k посредством внутреннего умножения на g^{kj} или **опустить индекс** i посредством внутреннего умножения на g_{ji} ; можно также совершить несколько операций этого рода. Тензор, ранг которого больше единицы, имеет несколько различных ассоциированных тензоров. Поскольку компоненты всех тензоров, ассоциированных данному тензору A , целесообразно обозначать одной и той же буквой A ,¹⁾ необходимо принимать во внимание порядок, в котором верхние индексы расположены по отношению к нижним (см. также п.16.2-1). Так, результат поднятия индекса k_2 в $A_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ записывается следующим образом:

$$A_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r j} = g^{j k_2} A_{k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}. \quad (16.7-3)$$

Поднятие ранее опущенных или опускание ранее поднятых индексов возвращает к компонентам первоначального тензора.

З а м е ч а н и е. Контравариантные и ковариантные ϵ -символы (п.16.5-3) связаны соотношениями

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{g} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \dots g_{i_n k_n} \epsilon^{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad \epsilon^{k_1 k_2 \dots k_n} = \frac{1}{g} g^{k_1 i_1} g^{k_2 i_2} \dots g^{k_n i_n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (16.7-4)$$

и не являются ассоциированными относительными тензорами.

¹⁾ См. также сноску в п.13.3-1.

16.7-3. Эквивалентность ассоциированных тензоров. Соответствие между ассоциированными тензорами в римановом пространстве устанавливает между ними отношение эквивалентности, разбивающее множество всех тензоров на классы эквивалентных тензоров, не имеющие общих элементов (п.12.1-3, б). Поэтому в римановом пространстве компоненты всех тензоров, ассоциированных тензору A , рассматриваются как **различные аналитические представления тензора A** (см. также п.16.9-1).

В частности, компоненты a^k и a_i , связанные соотношениями (2), можно интерпретировать как контравариантные и ковариантные составляющие одного и того же вектора \mathbf{a} относительно локального базиса, связанного с данной системой координат. В обозначениях п.16.6-1

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{e}_k = a_i \mathbf{e}^i. \quad (16.7-5)$$

Следовательно, базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ в случае риманова пространства можно рассматривать как два различных базиса одного и того же векторного пространства; их называют **взаимными базисами** (см. также п.16.8-2). Зависимость между векторами взаимных базисов совпадает по форме с зависимостью между компонентами ассоциированных векторов:

$$\mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k. \quad (16.7-6)$$

Подстановка выражений (6) для некоторых из \mathbf{e}^k и \mathbf{e}_i в (16.6-3) соответствует поднятию или опусканию индексов тензора A (см. также п.16.9-1).

16.7-4. Операции над тензорами в римановых пространствах. В римановом пространстве:

1. Любые два тензора одного ранга и веса можно сложить, согласно определению, приведенному в п.16.3-3, для чего в случае необходимости нужно предварительно поднять или опустить индексы таким образом, чтобы компоненты слагаемых приобрели одинаковую структуру, т. е. одинаковое расположение верхних и нижних индексов.

2. Тензор может быть свернут по любой паре индексов согласно правилу п.16.3-5, для чего в случае необходимости один из этих индексов должен быть предварительно поднят или опущен. Свертывание по двум верхним индексам i, k соответствует внутреннему умножению на g_{ik} ; свертывание по двум нижним индексам i, k соответствует внутреннему умножению на g^{ik} .

3. Внутреннее произведение двух тензоров A и B определяется как свертка их внешнего произведения AB по некоторому индексу (или индексам) A и соответствующему индексу (или индексам) B согласно правилу (2).

16.8. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ПОНЯТИЯ

16.8-1. Скалярное произведение (внутреннее произведение) двух векторов в римановом пространстве. В соответствии с содержанием п.16.7-4 в римановом пространстве можно определить скалярное произведение (внутреннее произведение, см. также пп.5.2-6, 6.4-2, а, 14.2-6) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ для любых абсолютных или относительных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} с действительными компонентами a^i или a_k и b^i или b_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) a^i(x^1, x^2, \dots, x^n) b^k(x^1, x^2, \dots, x^n) = \\ &= a_k b^k = a^i b_i = g^{ik} a_i b_k = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (16.8-1)$$

Длиной (модулем) $|\mathbf{a}|$ абсолютного или относительного вектора \mathbf{a} с компонентами (действительными) a^i или a_k называется соответственно абсолютный или относительный скалярный инвариант

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = g_{ik} a^i a^k = a^i a_i = g^{ik} a_i a_k. \quad (16.8-2)$$

Если квадратичная форма $g_{ik} a^i a^k$ является положительно определенной, то длину вектора \mathbf{a} можно рассматривать как **норму** $\|\mathbf{a}\|$ (см. п.14.2-5).

Единичным вектором называется абсолютный вектор, длина которого равна 1. Косинусом угла γ (определение угла) между двумя абсолютными или относительными векторами называется абсолютный скалярный инвариант

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}. \quad (16.8-3)$$

Формулы (2) и (3) обобщают элементарное определение скалярного произведения.

З а м е ч а н и е. Если квадратичная форма $g_{ik}a^i a^k$ не является определенной (неопределенная метрика, см. также п.17.4-4) в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) , то скалярный квадрат $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ абсолютного или относительного вектора \mathbf{a} в этой точке может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от знака выражения $g_{ik}a^i a^k$, причем из равенства $|\mathbf{a}| = 0$ не следует, вообще говоря, что $\mathbf{a} = 0$.

16.8-2. Скалярные произведения локальных базисных векторов. Ортогональная система координат (см. также пп.6.3-3, 6.4-1, 17.4-7, а). Длины локальных базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ и углы между ними в каждой точке (x^1, x^2, \dots, x^n) (п.16.6-1) определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k &= g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k &= g^{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k &= \delta_k^i. \end{aligned} \right\} \quad (16.8-4)$$

Векторы \mathbf{e}_i направлены по касательным к соответствующим координатным линиям, \mathbf{e}^k имеют направления нормалей к координатным гиперповерхностям. Каждый \mathbf{e}^k перпендикулярен ко всем \mathbf{e}_i , кроме \mathbf{e}_k . Система координат x^1, x^2, \dots, x^n называется ортогональной, если $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$ для $i \neq k$; в этом случае \mathbf{e}_i (а также \mathbf{e}^i) попарно ортогональны. Не каждое риманово пространство допускает введение ортогональной системы координат.

Две системы базисных векторов \mathbf{e}_i и \mathbf{e}^i , связанные соотношениями $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_k^i$, называются взаимными базисами рассматриваемого риманова пространства (см. также п.14.7-6).

16.8-3. Физические компоненты тензора (см. также п.6.3-4). Локальные единичные векторы \mathbf{u}_i , каждый из которых имеет направление координатной линии, соответствующей индексу вектора, следующим образом выражаются через \mathbf{e}_i и \mathbf{e}^k :

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sqrt{|g_{ii}|}} \mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{|g_{ii}|}} g_{ik} \mathbf{e}^k, \quad \mathbf{e}_i = \sqrt{|g_{ii}|} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i. \quad (16.8-5)$$

Физическими компонентами $\hat{A}_{j_1 j_2 \dots j_R}$ тензора \mathbf{A} (в частности, физическими компонентами \mathbf{a} вектора \mathbf{a}) называются величины, определяемые уравнениями

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n \hat{a}_j \mathbf{u}_j, \quad \hat{a} = \sqrt{|g_{jj}|} a^j, \quad (16.8-6)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_R=1}^n \hat{A}_{j_1 j_2 \dots j_R} \mathbf{u}_{j_1} \mathbf{u}_{j_2} \dots \mathbf{u}_{j_R}; \quad (16.8-7)$$

для определения $\hat{A}_{j_1 j_2 \dots j_R}$ достаточно внести в (16.8-7) вместо \mathbf{A} его выражение (16.6-3) и заменить \mathbf{u}_i по формулам (16.8-5). Физическая компонента \hat{a} вектора \mathbf{a} в направлении вектора \mathbf{b} определяется как $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{b}|$.

16.8-4. Векторное произведение и смешанное произведение (см. также пп.5.2-7, 5.2-8, 6.3-3, 6.4-2). Векторным произведением $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ двух абсолютных или относительных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} трехмерного риманова пространства ($n=3$) называется вектор с компонентами (см. также п.16.5-3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|g|}} e^{ijk} a_i b_j &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|g|}} e^{ijk} (a_i b_j - a_j b_i) \\ \sqrt{|g|} e_{ijk} a^i b^j &= \frac{1}{2} \sqrt{|g|} e_{ijk} (a^i b^j - a^j b^i). \end{aligned} \right\} \quad (16.8-8)$$

ИЛИ

Отсюда следует, что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{|g|} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (16.8-9)$$

Полезно отметить, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]}, & \mathbf{e}^2 &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]}, & \mathbf{e}^3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]}, \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{[\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]}, & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{[\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]}, & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{[\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]}, \end{aligned} \right\} \quad (16.8-10)$$

где смешанное произведение $[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}]$ определяется, как и в п.5.2-8, следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{abc}] &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sqrt{|g|} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} e^{ijk} a_i b_j c_k = \sqrt{|g|} e_{ijk} a^i b^j c^k; \end{aligned} \quad (16.8-11)$$

в частности,

$$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = \sqrt{g}, \quad [\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3] = \frac{1}{\sqrt{|g|}}. \quad (16.8-12)$$

Формулы табл. 5.2-2 и п.5.2-9 остаются в силе.

З а м е ч а н и е. Определение векторного произведения (8) охватывает элементарное соотношение (5.2-6) и определяет векторное произведение двух абсолютных векторов как абсолютный вектор. Некоторые авторы опускают множитель $\sqrt{|g|}$ в определении (8), вследствие чего векторное произведение двух абсолютных векторов становится «аксиальным» вектором (в отличие от «полярного» или абсолютного вектора), который можно рассматривать либо как относительный контравариантный вектор веса +1, либо как относительный ковариантный вектор веса -1.

16.9. ТЕНЗОРЫ РАНГА 2 (ДИАДИКИ) В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

16.9-1. Диадики. Абсолютные (истинные) или относительные тензоры ранга 2 называются диадиками. Диадики $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ риманова пространства, определенные, например, своими смешанными компонентами A_k^i, B_k^i, \dots (см. также п.16.7-2, замечание о порядке индексов), представляют интерес для многих приложений. С ними иногда связывают особую систему обозначений, краткое описание которой дано в следующих пунктах.

Каждый диадик \mathbf{A} может быть представлен в виде суммы n диадных произведений (диад), т. е. тензорных (внешних) произведений двух векторов:

$$\mathbf{A} = p_j q^j = (p^j e_j) (q^k e^k), \quad A_k^i = p^j q_k^i. \quad (16.9-1)$$

Либо левые множители p^j , либо правые множители q^j могут быть выбраны произвольно, если только они являются линейно независимым (п.14.2-3). В частности,

$$\mathbf{A} = A_k^i e_i e^k = A_{ik} e^i e^k = A^{ik} e_i e_k = A_i^k e^i e_k, \quad (16.9-2)$$

$$\mathbf{A} = e_j A^j = A_k e^k \quad \mathbf{A}^i = A_k^i e^k, \quad \mathbf{A}_k = A_k^i e_i. \quad (16.9-3)$$

Используя физические компоненты \hat{A}_{ik} (п.16.8-3), можно представить диадик в виде

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{A}_{ik} u_i u_k, \\ \hat{A}_{ik} &= A^{ik} \sqrt{|g_{ii} g_{kk}|} \quad (\text{не суммировать!}), \\ A^{ik} &= g^{kj} A_j^i. \end{aligned} \right\} \quad (16.9-4)$$

В случае ортогональных координат (п.16.8-2)

$$\hat{A}_{ik} = A_k^i \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{kk}}} \quad (\text{не суммировать!}). \quad (16.9-5)$$

З а м е ч а н и е. Иногда диадик называют произвольную сумму диадных произведений, т. е. произвольный тензор ранга 2.

16.9-2. Умножение диадиков и векторов и связанная с ним система обозначений. Для обозначения внутреннего произведения, образованного из (действительных) диадиков и векторов риманова пространства (см. также п.16.8-1), используются следующие обозначения:

$$A \cdot a = p_j (q^j \cdot a) \quad - \text{вектор с компонентами } A_k^i a^k, \quad (16.9-6)$$

$$a \cdot A = (a \cdot p_j) q^j \quad - \text{вектор с компонентами } A_k^i a_i, \quad (16.9-7)$$

$$A \cdot B = p_j (q^j \cdot p'_h) q'^h \quad - \text{диадик с компонентами } A_j^i B_h^j, \quad (16.9-8)$$

$$\text{где } B = p'_j q'^j = B_k^i e_i e^k.$$

Благодаря принятым обозначениям алгебра диадиков в точности совпадает с алгеброй линейных операторов (аффиноров), изображенной в пп.14.3-1—14.3-6, так как диадик связывает с каждой точкой (x^1, x^2, \dots, x^n) некоторое линейное преобразование.

В табл. 14.7-1 осуществляется сравнение тензорных обозначений, «классических» обозначений гл. 14 и матричных обозначений диадиков и векторов.

Определения симметричного и антисимметричного диадика аналогичны соответствующим определениям из п.16.5-1. Именно, диадик A называется симметричным, если $A^{ik} = A^{ki}$ или $A_{ik} = A_{ki}$; но отсюда не следует с необходимостью, что $A^{ik} = A^{ki}$, так же, как это соотношение не означает, что A симметричен (см. также п.14.7-5).

След матрицы $[A_k^i]$, т. е. $\text{Tr}(A) = p_j \cdot q^j$ называется первым скаляром диадика (1).

Скаляр $A \cdot B = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (p_i \cdot p'_k) (q^i \cdot q'^k)$ называется двойным скалярным произведением.

При $n=3$ можно определить векторное произведение

$$\begin{aligned} a \times A &= (a \times p_j) q^j, \quad A \times a = p_j (q^j \times a), \\ A \times B &= p_j (q^j \times p'_h) q'^h. \end{aligned} \quad (16.9-9)$$

Вектор $v_A = p_j \times q^j$ называется вектором диадика (1). $v_A = 0$ в том и только в том случае, если A симметричен. Если A антисимметричен, то для любого вектора a

$$a \cdot A = \frac{1}{2} v_A \times a = -A \cdot a, \quad (16.9-10)$$

т. е. векторное умножение эквивалентно внутреннему умножению на антисимметричный диадик.

16.9-3. Собственные векторы и собственные значения (см. также п.14.8-3). Собственные значения и собственные векторы диадиков определяются в каждой точке (x^1, x^2, \dots, x^n) так же, как в п.14.8-3. Коэффициенты характеристического уравнения (п.14.8-5), соответствующего диадику, являются абсолютными или относительными скалярами.

Симметричный диадик A в трехмерном евклидовом пространстве может быть геометрически интерпретирован при помощи семейства поверхностей второго порядка (3.5-1) с коэффициентами $a_{ik} = A_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$) (см. также п.3.5-1).

16.10. АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

16.10-1. Абсолютные дифференциалы.

(а) Ни для определения бесконечно малого приращения тензорной величины, ни для определения ее дифференциала не может быть использовано понятие разности между «значениями» тензора в точках $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$

и (x^1, x^2, \dots, x^n) , так как тензорная алгебра в римановом пространстве (п.п. 16.3-1 — 16.3-7) не определяет соотношений между «значениями» тензора в различных точках пространства. Вместо этого в тензорном анализе формулируются следующие требования (постулаты), определяющие абсолютные дифференциалы $d\alpha, da, db, dA, dB, \dots$ скаляров, векторов и тензоров *) (компоненты скаляров, векторов и тензоров риманова пространства предполагаются дифференцируемыми):

1. Абсолютные дифференциалы $d\alpha, da$ и dA являются тензорами того же ранга и типа, что α, a и A .

2. Абсолютный дифференциал $d\alpha$ скаляра α определяется в соответствующей координатной системе выражением

$$D\alpha \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dx^j \equiv \alpha_{,j} dx^j. \quad (16.10-1)$$

3. Имеют место следующие правила дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot d\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{a}, \\ d(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= d\mathbf{A} + d\mathbf{B}, \\ d(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \mathbf{A} d\mathbf{B} + \mathbf{B} d\mathbf{A}, \\ d(\alpha\mathbf{A}) &= \mathbf{A} d\alpha + \alpha d\mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (16.10-2)$$

В частности,

$$d(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = d\mathbf{a} + d\mathbf{b}, \quad d(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{a} d\alpha + \alpha d\mathbf{a};$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= d(a^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i da^i + a^i d\mathbf{e}_i = a^i_{,j} (x^1, x^2, \dots, x^n) dx^j \mathbf{e}_i = \\ &= d(a^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}^i da_i + a_i d\mathbf{e}^i = a_{i,j} (x^1, x^2, \dots, x^n) dx^j \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (16.10-3)$$

т. е. компоненты вектора $d\mathbf{a}$ равны

$$Da^i \equiv a^i_{,j} dx^j \quad \text{или} \quad Da_i \equiv a_{i,j} dx^j.$$

Постулаты, перечисленные выше, определяют инвариантные операции (п.п. 16.4-1 и 16.10-7) и приводят к независимому обобщению векторного анализа, изложенного в гл. 5; постулаты удовлетворяются, если положить

$$a_{i,j} \equiv \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} a^k, \quad a_{i,j} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} a_k \equiv g_{ib} a_{,j}^b. \quad (16.10-4)$$

Функции $\Gamma^k_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ представляют собой трехиндексные символы Кристоффеля 2-го рода, определенные в п. 16.10-3.

Замечание. Формулы (3) и (4) определяют каждую компоненту абсолютного дифференциала $d\mathbf{a}$ как сумму «относительных дифференциалов» da^i или da_i и членов, вызванных изменением базисных векторов при переходе от точки к точке (и, следовательно, изменением метрики при этом переходе).

Производные $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j}$ вектора \mathbf{a} можно определить соотношением

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} dx^j. \quad (16.10-5)$$

При этом

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (a^i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = a^i_{,j} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^j} (a_i \mathbf{e}^i) = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \mathbf{e}^i + a_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = a_{i,j} \mathbf{e}^i, \quad (16.10-6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k = \Gamma_{ij;k} \mathbf{e}^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial x^j} = -\Gamma^k_{ij} \mathbf{e}^k \quad (16.10-7)$$

($\Gamma_{ij;k}$ — символы Кристоффеля первого рода (см. п. 16.10-3).

*) Если не оговорено противное, имеются в виду абсолютные скаляры, векторы и тензоры.

(b) Из постулатов п.16.10-1,а следует, что абсолютный дифференциал любого тензора A , заданного в римановом пространстве дифференцируемыми компонентами $A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r}$, является тензором того же ранга и типа, причем его компоненты $DA_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ определяются следующим уравнением:

$$\left. \begin{aligned} dA &= d(A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{i_1'} e^{i_2'} \dots e^{i_r'}) = \\ &= DA_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{i_1'} e^{i_2'} \dots e^{i_r'}, \\ DA_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} &\equiv A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} dx^j, \end{aligned} \right\} \quad (16.10-8)$$

где (символы Кристоффеля Γ определены в п.16.10-3)

$$A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} \equiv \frac{D}{\partial x^j} A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} - \Gamma_{i_1' j}^{i_1} A_{i_2' i_3' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} - \dots - \Gamma_{i_r' j}^{i_r} A_{i_1' i_2' \dots i_{r-1}'}^{i_1 i_2 \dots i_r} + \Gamma_{i_1' j}^{i_1} A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{i_r' j}^{i_r} A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (16.10-9)$$

* Иногда для обозначения абсолютного дифференциала вместо da , dA пишут Da , DA .*

16.10-2. Абсолютный дифференциал относительного тензора. Абсолютный дифференциал относительного тензора (п.16.2-1) определяется по аналогии с абсолютным дифференциалом тензора (п.16.10-1). В частности, абсолютный дифференциал α относительного скаляра α веса W определяется в соответствующей координатной системе выражением

$$D\alpha = a_{,j} dx^j, \quad \text{где } a_{,j} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - W \Gamma_{ik}^k \alpha. \quad (16.10-10)$$

При $W = 0$ формула (10) переходит в (1). Абсолютный дифференциал dA любого относительного тензора веса W (с дифференцируемыми компонентами) определяется выражением (8) с дополнительным слагаемым вида

$$-W \Gamma_{jk}^k A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (16.10-11)$$

в правой части формулы (9), так что

$$\frac{D}{\partial x^j} A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} \equiv \sqrt{|g|}^W \frac{D}{\partial x^j} \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}^W} A_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1 i_2 \dots i_r} \right]; \quad (16.10-12)$$

dA является относительным тензором, ранг, тип и вес которого совпадают с рангом, типом и весом A .

16.10-3. Символы Кристоффеля.

(а) Если риманово пространство отнесено к координатам x^1, x^2, \dots, x^n , то его (трехиндексными) символами Кристоффеля первого рода $[ij; k] \equiv \Gamma_{ij; k}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и символами Кристоффеля второго рода $\{ij\} \equiv \Gamma_{ij}^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называются следующие функции координат x^1, x^2, \dots, x^n :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{ij; k} &\equiv [ij; k] \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \\ \Gamma_{ij}^k &\equiv \{ij\} \equiv g^{kh} [ij; h], \end{aligned} \right\} \quad (16.10-13)$$

где g_{ik} и g^{ik} — компоненты фундаментального тензора риманова пространства. Символы Кристоффеля не являются, вообще говоря, тензорами и при переходе к новой системе координат преобразуются по закону:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Gamma}_{hk; r} &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} \Gamma_{ij; s} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^h \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} g_{ij}, \\ \bar{\Gamma}_{hk}^r &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \Gamma_{ij}^s + \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^h \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}; \end{aligned} \right\} \quad (16.10-14)$$

Функции $\bar{\Gamma}_{hk}; r \equiv \bar{\Gamma}_{hk}; r(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ и $\bar{\Gamma}_{hk}^r \equiv \bar{\Gamma}_{hk}^r(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ суть символы Кристоффеля, связанные с системой координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$.

(b) Символы Кристоффеля удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Gamma_{ij}; k = \Gamma_{ji}; k, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (16.10-15)$$

$$\Gamma_{ij}; k = g_{hk} \Gamma_{ij}^h, \quad \Gamma_{ij}^k = g^{kh} \Gamma_{ij}; h, \quad (16.10-16)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}; j + \Gamma_{jk}; i = g_{kj} \Gamma_{ik}^k + g_{ik} \Gamma_{jk}^k, \quad (16.10-17)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ih} \Gamma_{hk}^j - g^{jh} \Gamma_{hk}^i, \quad (16.10-18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{|g|} = \Gamma_{ih}^h, \quad g \equiv \det[g_{ik}], \quad (16.10-19)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial e_i}{\partial x^j} \cdot e^k = \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \cdot e^k = -\frac{\partial e^k}{\partial x^j} \cdot e^i, \quad \Gamma_{ij}; k = \frac{\partial e_i}{\partial x^j} \cdot e_k. \quad (16.10-20)$$

(c) В важном случае ортогональных координат x^1, x^2, \dots, x^n (ш.6.4-1 и 16.8-2), который характеризуется условием $g_{ik} = g_{ii} \delta_k^i$, предыдущие соотношения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{ij}; k &\equiv \Gamma_{ij}^k \equiv 0 & (i \neq j \neq k \neq i), \\ \Gamma_{ii}; k &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} & (i \neq k), \\ \Gamma_{ij}; i &\equiv \Gamma_{ji}; i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \\ \Gamma_{ii}^k &\equiv -\frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} & (i \neq k), \\ \Gamma_{ki}^k &\equiv \Gamma_{ki}^k \equiv \frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{kk}}{\partial x^i}. \end{aligned} \right\} \quad (16.10-21)$$

16.10-4. Ковариантное дифференцирование. Вследствие аналогии между выражениями (4), (9) и обычными частными производными, операцию образования функций $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} = \frac{D}{\partial x^j} A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ по компонентам тензора $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ называют **ковариантным дифференцированием** по метрике, определяемой тензором g_{ik} .

Если $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ являются компонентами абсолютного тензора A , то компоненты $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$, также определяют абсолютный тензор

$$\nabla A = A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_r}, \quad (16.10-22)$$

r раз контравариантный и $s+1$ раз ковариантный. Тензор ∇A (а иногда также каждую отдельную его компоненту) называют **ковариантной производной тензора A** ; для компонент тензора A используют также обозначение

$$\nabla_j A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \equiv \frac{D A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}}{\partial x^j} \equiv A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}.$$

Следует иметь в виду, что ни частные производные $\frac{\partial}{\partial x^j} A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$, ни «относительные» дифференциалы $d A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ не являются, вообще говоря, компонентами тензора.

16.10-5. Правила ковариантного дифференцирования (см. также п.16.10-7). Применение тензорного анализа часто упрощается благодаря тому, что

обычные правила дифференцирования суммы и произведения (табл. 4.2-5) остаются справедливыми для ковариантного дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{\partial x^j} (A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} + B_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r}) &= A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r, j} + B_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r, j}, \\ \frac{D}{\partial x^j} (A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} B_{k_1' k_2' \dots k_s'}^{k_1 k_2 \dots k_r}) &= A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} B_{k_1' k_2' \dots k_s'}^{k_1 k_2 \dots k_r, j} + \\ &+ B_{k_1' k_2' \dots k_s'}^{k_1 k_2 \dots k_r} A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r, j}, \\ \frac{D}{\partial x^j} A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} &= A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r, j} \quad (\text{правило для свертки}). \end{aligned} \right\} \quad (16.10-23)$$

Последние два правила применяются также для ковариантного дифференцирования внутреннего произведения (пп.16.3-7 и 16.8-1).

Важное значение имеют соотношения

$$\left. \begin{aligned} g_{ik, j} &= g^{ik},_{j} = 0 \quad (\text{теорема Риччи}), \\ g_{, j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.10-24)$$

Уравнения (24) показывают, что фундаментальные тензоры ведут себя относительно ковариантного дифференцирования как константы.

Ковариантная производная тензора, ассоциированного тензору \mathbf{A} , является тензором, ассоциированным $\nabla \mathbf{A}$ (см. также пп.16.7-2 и 16.7-3).

Ковариантные производные δ -символов Кронекера и ϵ -объекта (пп.16.5-2 и 16.5-3) равны нулю.

16.10-6. Ковариантные производные высших порядков. Если компоненты данного тензора и компоненты метрического тензора g_{ik} имеют производные достаточно высокого порядка, то можно рассматривать ковариантные производные высшего порядка с компонентами $A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r, j_1 j_2 \dots j_m}$. Полученные при этом тензоры, вообще говоря, не симметричны по нижним индексам j ; ковариантная производная не зависит от последовательности дифференцирования в том и только в том случае, если риманово пространство является плоским (локально евклидовым) (п.17.4-6,с). Для любого вектора с компонентами a_i

$$a_{i, jk} - a_{i, kj} = R^r{}_{ijk} a_r, \quad (16.10-25)$$

где $R^r{}_{ijk}$ — компоненты смешанного тензора кривизны (п.17.4-5) риманова пространства.

16.10-7. Дифференциальные операторы и дифференциальные инварианты (см. также пп.5.5-2 и 5.5-5).

(а) Если рассматривать выражение

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial x^j} A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{i_1'} e^{i_2'} \dots e^{i_s'} &\equiv \nabla_j A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{i_1'} e^{i_2'} \dots e^{i_s'} \equiv \\ &\equiv A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r, j} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{i_1'} e^{i_2'} \dots e^{i_s'} \end{aligned}$$

как результат «умножения» тензора $A_{i_1' i_2' \dots i_s'}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} e^{i_1'} e^{i_2'} \dots e^{i_s'}$ на символ

$\nabla_j \equiv \frac{D}{\partial x^j}$, то ковариантную производную (22) тензора \mathbf{A} можно записать в виде внешнего «произведения» (п.16.3-6) тензора \mathbf{A} и (инвариантного) «вектора»

$$\nabla \equiv e^j \frac{D}{\partial x^j} \equiv e^j \nabla_j, \quad (16.10-26)$$

который называется **дифференциальным оператором набла**; его «компоненты» $\frac{D}{\partial x^j} = \nabla_j$ преобразуются, как ковариантные компоненты вектора (п.16.2-1). Для любого преобразования координат в римановом пространстве

$$\frac{D}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \frac{D}{\partial x^j} \quad \text{или} \quad \bar{\nabla}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \nabla_j. \quad (16.10-27)$$

(b) Соотношения между компонентами тензоров, полученные в результате ковариантного дифференцирования, а также сложения и умножения тензоров, инвариантны относительно группы допустимых преобразований координат (см. также пп.16.4-1 и 16.10-1). Тензорные величины, образованные посредством внешнего и внутреннего умножения других тензорных величин на инвариантный оператор (26), называются **дифференциальными инвариантами**. В табл. 16.10-1 указаны важнейшие дифференциальные операторы.

Т а б л и ц а 16.10-1

Дифференциальные инварианты, определенные в римановых пространствах

$$\left(\nabla \equiv e^j \frac{D}{\partial x^j} \equiv e^j \nabla_j, \text{ см. также пп.16.2-2, 16.10-1 — 16.10-7, табл. 6.4-1 — 6.5-11} \right)$$

(a) Градиент (абсолютного) скаляра α есть (абсолютный) вектор

$$\nabla \alpha = e^j \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} = e_j g^{jt} \frac{\partial \alpha}{\partial x^t}.$$

(b) Ковариантная производная ∇_a (абсолютного) вектора a называется **градиентом** или **локальным аффинором** вектора a . Дивергенция (абсолютного) вектора a является (абсолютным) скаляром $\nabla \cdot a$; она равна

$$\nabla_i a^i \equiv \frac{D a^i}{\partial x^i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^k \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} a^i).$$

З а м е ч а н и е. Соответствующие формулы табл. 5.5-1 могут применяться к градиенту и дивергенции в римановых пространствах (см. также п.16.10-5).

(c) Оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ является инвариантным скалярным оператором $g^{ik} \frac{D}{\partial x^i} \frac{D}{\partial x^k} \equiv g^{ik} \nabla_i \nabla_k$. В частности, лапласиан $\nabla^2 \alpha$ (абсолютного) скаляра α имеет вид

$$g^{ik} \frac{D}{\partial x^i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} \equiv g^{ik} \nabla_i \nabla_k \alpha \equiv g^{ik} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{ik}^j \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{|g|} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} \right).$$

(d) Если (абсолютный) вектор a задан компонентами a_i , то антисимметричный (абсолютный) тензор с компонентами

$$c_{ij} \equiv \frac{D a_i}{\partial x^j} - \frac{D a_j}{\partial x^i} \equiv \nabla_j a_i - \nabla_i a_j \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$$

тождественно обращается в ноль в том и только в том случае, если a является градиентом (абсолютного) скаляра.

З а м е ч а н и е. При $n = 3$ можно определить **ротор** (абсолютного) вектора a как (абсолютный) вектор $\nabla \times a$ с компонентами

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{D a_j}{\partial x^i} e^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \nabla_i a_j e^{ijk} \equiv \frac{1}{2 \sqrt{|g|}} \left(\frac{D a_j}{\partial x^i} - \frac{D a_i}{\partial x^j} \right) e^{ijk} \equiv \frac{1}{2 \sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) e^{ijk}$$

(см. также п.16.8-4). К (абсолютным) векторам трехмерного риманова пространства могут применяться формулы табл. 5.5-1 и уравнения (5.5-19).

16.10-8. Абсолютные (внутренние) производные и производные по направлению (см. также п.5.5-3). Если в римановом пространстве задана регулярная кривая

$$x^i = x^i(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2), \quad (16.10-28)$$

то компоненты $\frac{dx^i}{dt}$ определяют контравариантный вектор $\frac{dr}{dt}$, «направленный» по касательной к данной кривой (п.17.4-2). **Абсолютной (внутренней) производной** $\frac{dA}{dt}$ истинного или относительного тензора A (с дифференцируемыми компонентами) по параметру t вдоль данной кривой называется следующий тензор того же веса, ранга и типа, как A :

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dr}{dt} \cdot \nabla \right) A;$$

компоненты тензора $\frac{dA}{dt}$ равны

$$\frac{D}{dt} A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \equiv A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \frac{dx^j}{dt}. \quad (16.10-29)$$

Если компоненты тензора A зависят от t не только через координаты x^1, x^2, \dots, x^n , но и явно, то

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \nabla \right) A, \\ \frac{D A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}}{dt} &= \frac{\partial A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}}{\partial t} + A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \frac{dx^j}{dt}. \end{aligned} \quad (16.10-30)$$

Производной по направлению $\frac{dA}{ds}$ тензора A в направлении данной кривой ($ds \neq 0$, п.17.4-2) называется абсолютная производная тензора A по длине дуги s вдоль кривой.

16.10-9. Тензоры, постоянные вдоль кривой. Уравнения параллелизма. Тензор A является по определению **постоянным** вдоль регулярной кривой (28) (т. е. его «значения» в соседних точках кривой «равны»), если его абсолютная производная (30) (и, следовательно, также его абсолютный дифференциал $dA = \frac{dA}{ds} ds$) вдоль кривой равны нулю. Суммы и произведения таких тензоров также постоянны вдоль рассматриваемой кривой, так что, например, модули постоянных векторов и углы между ними постоянны. Каждый вектор a , компоненты которого $a^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $a_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$Da^i = 0 \text{ или } Da_i = 0 \quad (\text{уравнения параллелизма}) \quad (16.10-31)$$

при условии, что дифференциалы координат x^1, x^2, \dots, x^n определяют смещение вдоль кривой (28), подвергается «параллельному перенесению» вдоль кривой.

З а м е ч а н и е. Вектор, полученный в результате «параллельного перенесения» данного вектора a вдоль замкнутой кривой, не совпадает, вообще говоря, с этим вектором по возвращении в исходную точку (см. также п.17.4-6).

16.10-10. Интегрирование тензорных величин. Элемент объема. Интегралы от тензорных величин вдоль кривых в римановом пространстве могут быть определены при помощи скалярных интегралов по параметру так же, как это сделано для векторов в пп.5.4-5 и 6.2-3, а.

Элемент объема dV определяется (см. также пп.6.2-3, б и 6.4-3, с) следующим выражением:

$$dV = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \dots dx^n. \quad (16.10-32)$$

* Если в выражении для dV опустить множитель $\sqrt{|g|}$, то элемент объема оказывается псевдоскаляром веса -1 , т. е. скалярной емкостью (п.16.2-1); так как $\sqrt{|g|}$ — скалярная плотность, то (16.10-32) определяет dV как инвариант. *

Интегралы по объему от скалярных инвариантов являются скалярными инвариантами, но интегралы по объему от тензоров ранга $R > 0$ не являются, вообще говоря, тензорами. Элемент объема может быть определен также для подпространства; он является аналогом элемента площади в трехмерном пространстве. Существуют обобщения интегральных теорем, приведенных в пп. 5.6-1 и 5.6-2 (см. п.16.10-11).

16.10-11. Дифференциальные инварианты диадиков; интегральные теоремы (см. также п.16.9-1). Дивергенцией диадика A (с дифференцируемыми компонентами), определенного в римановом пространстве, называется вектор $\nabla \cdot A$; оператор ∇ (п.16.10-7) действует как ковариантный вектор. Следует отметить соотношения

$$\nabla \cdot (\alpha A) = \alpha \nabla \cdot A + A \cdot \nabla \alpha, \quad (16.10-33)$$

$$\nabla \cdot (a \cdot A) = (\nabla a) \cdot A + (\nabla \cdot \tilde{A}) \cdot a, \quad \nabla \cdot (A \cdot a) = (\nabla a) \cdot \tilde{A} + (\nabla \cdot A) \cdot a, \quad (16.10-34)$$

где диадик \tilde{A} получен транспонированием A ($\tilde{A}_k^i = A_i^k$). Диадик ∇a называется градиентом a (табл. 16.10-11).

Для функций, кривых и поверхностей, удовлетворяющих известным условиям, имеют место *интегральные теоремы*, аналогичные теоремам пп. 5.6-1 и 5.6-2:

$$\int_V \nabla \cdot A \, dV = \int_S dA \cdot A, \quad (16.10-35)$$

$$\int_V \nabla a \, dV = \int_S dA a; \quad \int_V (\nabla \times A) \, dV = \int_S (dA \times A), \quad (16.10-36)$$

$$\int_V \nabla \cdot (A \cdot a) \, dV = \int_S dA \cdot (A \cdot a), \quad (16.10-37)$$

$$\int_S dA \cdot (\nabla \times A) = \int_O dr \cdot A. \quad (16.10-38)$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

17.1. КРИВЫЕ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

17.1-1. Касательная к плоской кривой. Пусть кривая C задана (п.2.1-9) уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{17.1-1a}$$

или

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{17.1-1b}$$

или

$$y = f(x). \tag{17.1-1c}$$

Касательной к кривой C в ее точке $P_1(x_1, y_1) \equiv P_1[x(t_1), y(t_1)]$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через P_1 и через отличную от нее точку P_2 этой кривой при стремлении P_2 к P_1 .

Кривая (1) имеет единственную касательную с уравнениями

$$x = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 (t - t_1) + x_1, \tag{17.1-2a}$$

$$y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 (t - t_1) + y_1,$$

или

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) = 0, \tag{17.1-2b}$$

или

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1) \tag{17.1-2c}$$

в каждой **регулярной** точке (x_1, y_1) кривой; регулярная точка характеризуется либо тем, что а) при некотором выборе параметра функции $x(t), y(t)$ будут иметь в достаточной близости от t_1 непрерывные производные первого порядка, не равные одновременно нулю, либо тем, что б) для некоторого уравнения $\varphi(x, y) = 0$ кривой C функция $\varphi(x, y)$ имеет в достаточной малой окрестности точки (x_1, y_1) непрерывные частные производные первого порядка, из которых по меньшей мере одна отлична от нуля. Из б) всегда следует а); условия а) и б) эквивалентны, если (x_1, y_1) не является кратной точкой кривой C , что заведомо имеет место для той дуги кривой, на которой хотя бы одна из производных $x'(t), y'(t)$ сохраняет знак.

Угловым коэффициентом касательной (2) равен

$$\operatorname{tg} \vartheta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 / \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 / \left(\frac{dx}{dt}\right)_1. \tag{17.1-3}$$

17.1-2. Нормаль к плоской кривой. Нормалью к кривой (1) в регулярной точке $P_1(x_1, y_1)$ называется прямая, проходящая через P_1 и перпендикулярная к касательной в точке P_1 :

$$y - y_1 = -\frac{1}{(dy/dx)_1} (x - x_1). \quad (17.1-4)$$

Положительное направление нормали может быть тем или иным способом согласовано с положительным направлением касательной; последнее совпадает с положительным направлением кривой. Положительное направление кривой определяется некоторым дополнительным условием (возрастание t , возрастание x и т. д.; см. также п.2.2-1).

17.1-3.* Особые точки. Всякая точка кривой, не являющаяся регулярной, называется **особой**. Пусть кривая (1b) обладает тем свойством, что все производные от $\varphi(x, y)$ до $(n-1)$ -го порядка включительно равны нулю в точке $P_1(x_1, y_1)$, в то время как производные n -го порядка непрерывны в некоторой окрестности (x_1, y_1) и не равны одновременно нулю в этой точке. Тогда кривая имеет n касательных в P_1 ; некоторые из них могут совпадать или оказаться мнимыми (последних будет четное число). Так, если все производные первого порядка от $\varphi(x, y)$ равны нулю в точке $P_1(x_1, y_1)$, а производные второго порядка не все равны нулю, то угловые коэффициенты dy/dx двух касательных в точке P_1 являются корнями квадратного уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = x_1, y = y_1). \quad (17.1-5)$$

Корни уравнения (5) и, следовательно, две касательные, могут быть действительными и различными (*двойная точка, узел*), совпадающими (*точка возврата либо точка самоприкосновения*) или мнимыми (*изолированная точка*); во всех этих случаях точка (x_1, y_1) является особой.

Свойства кривой в особой точке могут быть описаны также в терминах производных от $x(t)$ и $y(t)$.

17.1-4. Кривизна плоской кривой. Соприкасающейся окружностью (**кругом кривизны**) плоской кривой C в ее точке P_1 называется предельное положение окружности, проходящей через P_1 и две соседние точки кривой P_2 и P_3 , при стремлении P_2 и P_3 к P_1 .

Центр этой окружности (**центр кривизны** кривой C , соответствующий точке P_1) лежит на нормали к C , проведенной в точке P_1 . Координаты центра кривизны равны

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2\right] / \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = x_1 - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \\ y_k &= y_1 + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2\right] / \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = y_1 + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}; \end{aligned} \right\} \quad (17.1-6)$$

все производные вычисляются при $x = x_1$ ($t = t_1$); точками обозначено дифференцирование по t . Радиус ρ_k круга кривизны (**радиус кривизны** кривой C в точке P_1) равен обратной величине **кривизны** k кривой C в точке P_1 ; кривизну можно определить как предел отношения угла поворота касательной к длине соответствующей дуги Δs кривой C при стремлении Δs к нулю:

$$k = \frac{1}{\rho_k} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}; \quad (17.1-7)$$

все производные подсчитываются при $x = x_1$ ($t = t_1$)¹⁾. Данная кривая C является

¹⁾ Правые части формул (6) и (7) можно выразить через частые производные от левой части уравнения кривой $\varphi(x, y) = 0$ при помощи формул (4.5-16).

соответственно *вогнутой* или *выпуклой* в положительном направлении оси Oy в зависимости от того, будет ли производная d^2y/dx^2 и, следовательно, кривизна k положительной или отрицательной. Многие авторы называют кривизной, как это и сделано в п.17.2-3, не k , а $|k|$.

В полярных координатах ρ, φ (п.2.1-8) дифференциал длины дуги ds и угол μ между касательной к кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и полярным радиусом-вектором определяется формулами

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad \operatorname{tg} \mu = \rho \left/ \frac{d\rho}{d\varphi} \right., \quad (17.1-8)$$

откуда следует, что

$$k = \frac{1}{\rho_k} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\mu}{ds} = \frac{\rho^{2+2} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}{\left[\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} \right]^3}. \quad (17.1-9)$$

17.1-5. Порядок касания плоских кривых. Говорят, что кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют в точке $P_1(x_1, y_1)$ **касание n -го порядка**, если

$$f(x_1) = g(x_1), \quad f'(x_1) = g'(x_1), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_1) = g^{(n)}(x_1), \quad f^{(n+1)}(x_1) \neq g^{(n+1)}(x_1), \quad (17.1-10)$$

это определение предполагает, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_1 производные до $(n+1)$ -го порядка включительно.

* При соблюдении условий (10) разность $f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)$ является бесконечно малой $(n+1)$ -го порядка относительно Δx . *

В точке касания касательные к кривым совпадают.

Одна из кривых лежит по разные стороны от другой в достаточной близости от точки касания, т. е. кривые пересекаются в этой точке в том и только в том случае, если n четно. Точка, в которой кривая и касательная к ней имеют касание второго порядка (или любого *четного* порядка), называется **точкой перегиба**. В точке перегиба кривая пересекает свою касательную. Кривизна в точке перегиба равна нулю.

17.1-6. Асимптоты. Прямую линию называют **асимптотой** данной кривой C , если расстояние от точки $P(x, y)$ кривой до прямой стремится к нулю при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$; говорят также, что кривая C **асимптотически приближается** к этой прямой.

Предельное положение касательной к регулярной кривой есть асимптота; обратное утверждение неверно.

* Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$ существуют, то прямая $y = ax + b$ является асимптотой кривой. *

17.1-7. Огибающая семейства плоских кривых. **Огибающей** однопараметрического семейства кривых

$$\varphi(x, y, \lambda) = 0 \quad (17.1-11)$$

называется кривая, касающаяся в каждой своей точке одной из кривых семейства. Иногда к огибающей относят также точки, которые принадлежат одновременно всем кривым семейства. В дальнейшем имеется в виду именно это последнее определение. Уравнение огибающей можно получить, если исключить параметр λ из уравнений (11) и

$$\frac{\partial \varphi(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0; \quad (17.1-12)$$

исключение возможно и заведомо приводит к огибающей, если в рассматриваемой области значений x , y и λ выполняются условия

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi_\lambda)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \varphi_{\lambda\lambda} \neq 0. \quad (17.1-13)$$

В общем случае уравнения (11) и (12) определяют λ -дискриминантную кривую, т. е. геометрическое место точек, в которых пересекаются бесконечно близкие кривые семейства (предельное положение точек пересечения кривых $\varphi(x, y, \lambda_1) = 0$ и $\varphi(x, y, \lambda_2) = 0$ при $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$). λ -дискриминантная кривая содержит наряду с огибающей особые точки кривых, принадлежащих семейству.

17.1-8. Изогональные траектории. Семейство кривых, пересекающих все кривые однопараметрического семейства $\varphi(x, y, \lambda) = 0$ под данным углом γ , определяется дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \sin \gamma\right) dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos \gamma\right) dy = 0; \quad (17.1-14)$$

при $\gamma = \pi/2$ уравнение (14) определяет ортогональные траектории.

17.2. КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

17.2-1. Вводные замечания (см. также п.3.1-13). В пп.17.2-1—17.2-6 рассматриваются геометрические свойства кривой C , которая определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t) \\ x &= x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \end{aligned} \right\} \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (17.2-1)$$

(t_1 и t_2 могут равняться соответственно $-\infty$ и $+\infty$). Функции (1) имеют непрерывные производные по t и $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$ для всех значений t из промежутка $t_1 \leq t \leq t_2$, т. е. C — регулярная дуга. В случае необходимости будет предполагаться существование производных более высокого порядка.

Удобно принять за новый параметр длину дуги

$$s = \int_0^s ds \equiv \int_0^s \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \int_0^s \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

(п.5.5-4); знак ds выбирается произвольно и определяет положительное направление на кривой и касательной (см. также пп.17.2-2 и 17.2-3). Производные по s будут обозначаться штрихами, так что, например,

$$x' \equiv x'_s \equiv \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt}.$$

Уравнения кривых в криволинейных координатах (гл. 6) кратко рассмотрены в п.17.4-1.

17.2-2. Подвижной трехгранник (см. также пп.17.2-3 и 17.2-4).

(а) Касательная к кривой. Касательной к кривой C в точке $P_1(\mathbf{r}_1) \equiv P_1(x_1, y_1, z_1)$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через P_1 и отличную от нее точку кривой P_2 при стремлении P_2 к P_1 . Кривая (1) имеет единственную касательную в каждой точке, в которой существует $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$. Положительное направление касательной соответствует положительному направлению на кривой.

(b) **Соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся окружность.** Главная нормаль. Соприкасающейся окружностью или кругом кривизны кривой C в точке P_1 называется предельное положение окружности, проходящей через P_1 и две соседние точки кривой P_2 и P_3 при стремлении P_2 и P_3 к P_1 . Плоскость этой окружности называется **соприкасающейся плоскостью** кривой C в

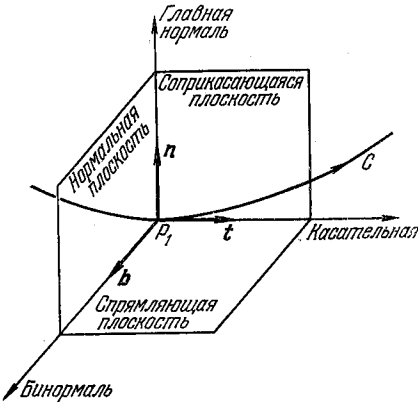


Рис. 17.2-1. Подвижный трехгранник, связанный с пространственной кривой C .

точке P_1 ; она содержит касательную к C в точке P_1 . Направленная прямая, идущая из точки P_1 в центр соприкасающейся окружности, называется **главной нормалью** кривой C в точке P_1 ; главная нормаль перпендикулярна к касательной.

(c) **Бинормаль. Нормальная и спрямяющая плоскость.** Бинормалью кривой C в точке P_1 называется направленная прямая, проходящая через точку P_1 и образующая вместе с положительной касательной и главной нормалью правую систему декартовых прямоугольных осей (п.3.1-3). Плоскости, определяемые осями этого «подвижного трехгранника», называются **нормальной** (плоскость, перпендикулярная к касательной), **спрямяющей** (плоскость, перпендикулярная к главной нормали), **соприкасающейся** (плоскость, перпендикулярная к бинормали) (см. рис. 17.2-1).

(d) Единичные векторы t , n и b , направленные, соответственно вдоль положительной касательной, главной нормали и бинормали, следующим образом выражаются через производные от функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ по s ; здесь и далее производные по s обозначаются штрихами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{r}' && \text{(единичный вектор касательной),} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} = \frac{1}{k} \mathbf{r}'' && \text{(единичный вектор главной нормали),} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} && \text{(единичный вектор бинормали).} \end{aligned} \right\} (17.2-2)$$

Вектор $k\mathbf{n} = \mathbf{r}''$ называется **вектором кривизны**; через k обозначена кривизна, рассмотренная в п.17.2-3.

17.2-3. Формулы Френе — Серре. Кривизна и кручение пространственной кривой (см. также пп.17.2-4 и 17.2-5).

(a) Единичные векторы (2) удовлетворяют в каждой точке кривой соотношениям

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \quad (\text{формулы Френе—Серре}),$$

$$\text{где } k = \frac{1}{\rho_k} = |\mathbf{t}'| = |\mathbf{r}''|, \quad \tau = \frac{1}{\rho_\tau} = \frac{1}{k^2} [\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''']. \quad (17.2-3)$$

При возрастании s точка P_1 движется по кривой C ; при этом:

1. Касательная вращается вокруг мгновенного положения бинормали с положительной угловой скоростью k (**кривизна** кривой C в точке P_1).

2. Бинормаль вращается вокруг мгновенного положения касательной с угловой скоростью τ (**кручение** кривой C в точке P_1);

τ положительно, если вид кривой напоминает правую винтовую нарезку.

3. Трехгранник вращается как твердое тело вокруг мгновенной оси, направление которой определяется **вектором Дарбу** $\Omega = \tau t + kb$, с угловой скоростью (положительной), равной $|\Omega| = \sqrt{\tau^2 + k^2}$ (полная кривизна кривой C в точке P_1).

Механический смысл производных от базисных векторов трехгранника Френе становится более очевидным, если переписать формулы Френе в виде

$$\left. \begin{aligned} t' &= \Omega \times t = (kb) \times t & n' &= \Omega \times n, \\ b' &= \Omega \times b = (\tau t) \times b; \end{aligned} \right\} \quad (17.2-4)$$

$e_k = 1/k$ есть радиус кривизны кривой C в точке P_1 (радиус соприкасающейся окружности); $e_\tau = 1/\tau$ называется радиусом кручения.

(б) Скалярные функции $k = k(s)$ и $\tau = \tau(s)$ определяют кривую с точностью до положения в пространстве (естественные уравнения кривой). C является плоской кривой в том и только в том случае, если ее кручение тождественно равно нулю; аналогично C — прямая линия, если ее кривизна тождественно равна нулю, и только в этом случае.

(в) При произвольном выборе параметра t

$$k = \frac{1}{e_k} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \tau = \frac{1}{e_\tau} = \frac{[\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}]}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}; \quad (17.2-5)$$

точками обозначено дифференцирование по t . Полезно отметить, что

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{s}t + \frac{1}{e_k} \dot{s}^2 n = \dot{s}t + \left(\frac{\dot{s}}{e_k} b\right) \times \dot{\mathbf{r}} \quad (17.2-6)$$

(распадение скорости движущейся точки на тангенциальную и нормальную составляющие; см. также п.5.3-2).

17.2-4. Уравнения касательной, нормали и бинормали; уравнения соприкасающейся нормальной и спрямляющей плоскостей.

(а) Касательная, главная нормаль и бинормаль кривой C в точке $P_1(r_1) \equiv P_1(x_1, y_1, z_1)$ определяются соответственно следующими векторными уравнениями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{t}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{n}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{b}, \quad (17.2-7)$$

где u — переменный параметр.

Векторные уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей имеют соответственно следующий вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (17.2-8)$$

(б) Координаты единичных векторов (2) относительно правой декартовой прямоугольной системы координат равны:

$$t_x = x', \quad t_y = y', \quad t_z = z' \quad (\text{направляющие косинусы касательной}), \quad (17.2-9a)$$

$$n_x = \frac{1}{k} x'', \quad n_y = \frac{1}{k} y'', \quad n_z = \frac{1}{k} z'' \quad (\text{направляющие косинусы главной нормали}), \quad (17.2-9b)$$

$$b_x = \frac{1}{k} (y'z'' - y''z'), \quad b_y = \frac{1}{k} (z'x'' - z''x'), \quad b_z = \frac{1}{k} (x'y'' - x''y') \quad (\text{направляющие косинусы бинормали}). \quad (17.2-9c)$$

Кривизна и кручение выражаются формулами

$$k = \frac{1}{e_k} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad \tau = \frac{1}{e_\tau} = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \quad (17.2-10)$$

Подстановка направляющих косинусов (9) в

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_x} = \frac{y-y_1}{\cos \alpha_y} = \frac{z-z_1}{\cos \alpha_z} \quad (17.2-11)$$

приводит к уравнениям касательной, нормали и бинормали в декартовых прямоугольных координатах; уравнение

$$(x-x_1) \cos \alpha_x + (y-y_1) \cos \alpha_y + (z-z_1) \cos \alpha_z = 0 \quad (17.2-12)$$

определяет соприкасающуюся нормальную, спрямляющую плоскости.

17.2-5. Дополнительные замечания.

(а) Центр кривизны кривой C , связанный с ее точкой P_1 , определяется радиусом-вектором

$$r_k = r_1 + \rho_k n. \quad (17.2-13)$$

(б) Предельное положение сферы, проходящей через четыре различные точки кривой P_1, P_2, P_3 и P_4 при стремлении P_3, P_3 и P_4 к P_1 , называется **соприкасающейся сферой** кривой в точке P_1 . Ее центр лежит на прямой, проходящей через центр кривизны и имеющей направление бинормали. Радиус-вектор r_Q центра соприкасающейся сферы и ее радиус ρ_Q таковы:

$$\rho_Q = \sqrt{\rho_k^2 + (\rho_k \rho_k')^2}, \quad r_Q = r_k + \rho_k \rho_k' b = r_1 + \rho_k n + \rho_k \rho_k' b. \quad (17.2-14)$$

Кривая C лежит на сфере радиуса R , если $\rho_Q = R$ (необходимое и достаточное условие).

Полярными прямыми кривой C называются касательные к ее **полярной кривой**; последняя определяется как геометрическое место центров соприкасающихся сфер кривой C . **Полярная поверхность** кривой C есть линейчатая поверхность (п.3.1-15), образованная касательными к полярной кривой.

(с) **Эвольвенты и эволюты.** Касательная к кривой C описывает линейчатую поверхность, состоящую из двух полостей, касающихся вдоль данной кривой. **Эвольвентами** кривой называются кривые, лежащие на этой поверхности и ортогональные ее образующим, т. е. касательным к кривой C . Если известно уравнение $r = r(s)$ кривой C , то уравнения эвольвент имеют вид

$$\rho = \rho(s) = r(s) + (d-s)t(s). \quad (17.2-15)$$

Каждой эвольвенте соответствует свое значение d , представляющее собой постоянную сумму длины дуги s и отрезка касательной $P_S P_T$. Кривая C' называется **эволютой** кривой C , если касательные к C' являются нормальными к C , т. е. если C' есть эвольвента C . Эволюты кривой C лежат на ее полярной поверхности.

17.2-6. Порядок касания (см. также п.17.1-5). Пусть кривые $r = f(s)$ и $r = g(s)$ проходят через точку $P_1(r_1)$, где $r_1 = f(s_1) = g(s_1)$. Если расстояние между точками этих кривых: $|f(s_1 + \Delta s) - g(s_1 + \Delta s)|$ является бесконечно малой $(n+1)$ -го порядка относительно Δs , то говорят, что кривые имеют касание n -го порядка в точке P_1 .

Необходимым и достаточным условием того, что регулярные кривые $r = f(s)$ и $r = g(s)$ имеют касание n -го порядка в точке $P_1(x_1, y_1, z_1) = P_1(r_1)$, являются соотношения

$$f(s_1) = g(s_1) = r_1, \quad f'(s_1) = g'(s_1), \dots, f^{(n)}(s_1) = g^{(n)}(s_1), \quad f^{(n+1)}(s_1) \neq g^{(n+1)}(s_1), \quad (17.2-16)$$

которые должны выполняться при подходящем выборе начала отсчета и направления на каждой из кривых.

Для кривой, заданной уравнениями $z = z(x), y = y(x)$, условия касания n -го порядка принимают вид, аналогичный (17.1-10).

17.3. ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

17.3-1. Вводные замечания (см. также п.3.1-14, примеры см. в п.3.5-10). В пп.17.3-1—17.3-14 рассматривается геометрия регулярного куска поверхности S , определяемого уравнениями

$$r = r(u, v), \quad (17.3-1a)$$

или

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (17.3-1b)$$

или

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (17.3-1c)$$

для некоторой области изменения параметров (**криволинейных координат на поверхности**) u, v (п.3.1-14). Предполагается, что функции (1) имеют непрерывные частные производные первого порядка и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (17.3-2)$$

равен 2 (п.13.2-7), т. е. три функциональных определителя $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ не обращаются в нуль одновременно, или

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0 \quad \left(\mathbf{r}_u \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{r}_v \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right). \quad (17.3-3)$$

В случае необходимости предполагается существование производных более высокого порядка.

Условия, перечисленные выше, обеспечивают существование и линейную независимость векторов \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v , направленных соответственно по касательным к координатным линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на поверхности, проходящим через точку (u, v) . Точки поверхности, в которых три определителя существуют, но обращаются в нуль при любом выборе параметров u, v , называются *особыми точками*; им соответствуют ребра, вершины и т. д.

17.3-2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

(а) В каждой точке поверхности $P_1(\mathbf{r}_1) \equiv P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv (u_1, v_1)$, удовлетворяющей условиям п.17.3-1 (регулярная точка поверхности), существует единственная **касательная плоскость**, которая определяется как предельное положение плоскости, проходящей через три различные точки поверхности P_1, P_2, P_3 при стремлении P_2 и P_3 к P_1 ; при этом P_2 и P_3 перемещаются вдоль кривых, имеющих различные касательные в точке P_1 . Эта плоскость содержит касательные ко всем регулярным кривым поверхности, проходящим через P_1 . Касательная плоскость определяется уравнением

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \quad (17.3-4)$$

где все производные берутся при $u = u_1, v = v_1$.

(б) **Нормалью** к поверхности S в ее регулярной точке P_1 называется прямая, проходящая через P_1 и перпендикулярная к касательной плоскости в этой точке. Уравнение нормали имеет вид

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t\mathbf{N}, \quad (17.3-5)$$

где

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2}} \quad (17.3-6)$$

есть **единичный вектор нормали** к поверхности S в точке P_1 ; все производные берутся при $u = u_1, v = v_1$. Направление вектора \mathbf{N} называется **направлением положительной нормали** в точке P_1 ; положительное направление линии u (направление вектора \mathbf{r}_u), положительное направление линии v (направление вектора \mathbf{r}_v) и положительная нормаль образуют правую систему осей (п.3.1-3).

17.3-3. Первая основная квадратичная форма поверхности. Дифференциал длины дуги и элемент площади.

(а) Дифференциал радиуса-вектора \mathbf{r} вдоль кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)] \quad \text{или} \quad u = u(t), \quad v = v(t), \quad (17.3-7)$$

лежащей на поверхности S , имеет вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \quad (17.3-8)$$

и, следовательно, квадрат дифференциала длины дуги $ds = |dx|$ на поверхности (1) в точке (u, v) равен

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= |dx|^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \\ &\text{(первая основная квадратичная форма поверхности),} \\ \text{где } E(u, v) &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F(u, v) &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G(u, v) &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (17.3-9)$$

В каждой регулярной точке поверхности (1), отнесенной к (действительным) координатам u, v , квадратичная форма (9) является положительно определенной (п.13.5-2), т. е.

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0. \quad (17.3-10)$$

(б) Угол γ между двумя регулярными кривыми на поверхности:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_1(t) \quad \text{или} \quad u = U_1(t), \quad v = V_1(t)$$

и

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2(t) \quad \text{или} \quad u = U_2(t), \quad v = V_2(t),$$

проходящими через точку (u, v) , определяется формулой

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{d\mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{R}_2}{|d\mathbf{R}_1| \cdot |d\mathbf{R}_2|} = \frac{E dU_1 dU_2 + F(dU_1 dV_2 + dU_2 dV_1) + G dV_1 dV_2}{\sqrt{E dU_1^2 + 2F dU_1 dV_1 + G dV_1^2} \sqrt{E dU_2^2 + 2F dU_2 dV_2 + G dV_2^2}} = \\ &= E \frac{dU_1}{ds} \frac{dU_2}{ds} + F \left(\frac{dU_1}{ds} \frac{dV_2}{ds} + \frac{dU_2}{ds} \frac{dV_1}{ds} \right) + G \frac{dV_1}{ds} \frac{dV_2}{ds}. \end{aligned} \quad (17.3-11)$$

В частности, угол γ_1 между координатными линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, проходящими через точку (u, v) , определяется формулами

$$\cos \gamma_1 = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}. \quad (17.3-12)$$

Условие ортогональности координатных линий u, v имеет вид $F=0$ (см. также пп.6.4-1 и 6.8-2).

(в) Векторный элемент площади $d\mathbf{A}$ и элемент площади dA в регулярной точке поверхности (u, v) определяются выражениями

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv = \mathbf{N} |d\mathbf{A}|,$$

$$dA = \pm |d\mathbf{A}| = \sqrt{a(u, v)} du dv,$$

где

$$a(u, v) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2. \quad (17.3-13)$$

Знак dA может быть выбран произвольно (см. также пп.4.6-11, 5.2-6, 6.4-3, б).

17.3-4. Геодезическая и нормальная кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье.

(а) В каждой точке (u, v) регулярной кривой C

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(s), v(s)] \quad \text{или} \quad u = u(s), \quad v = v(s), \quad (17.3-14)$$

лежащей на поверхности S , вектор кривизны $\mathbf{r}'' = k\mathbf{n}$ (п.17.2-2, д) может быть единственным образом представлен в виде суммы двух векторов, один из которых (вектор геодезической или тангенциальной кривизны) лежит

в касательной плоскости, а другой (вектор нормальной кривизны) направлен вдоль нормали к поверхности S , т. е.

$$\mathbf{r}'' = k\mathbf{n} = k_G(\mathbf{N} \times \mathbf{r}') + k_N \mathbf{N}; \quad (17.3-15)$$

\mathbf{N} — единичный вектор нормали к поверхности. В каждой точке $[u(s), v(s)]$ величина

$$k_G = [k\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}\mathbf{N}] = [\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{N}] \quad (\text{геодезическая кривизна кривой } C \text{ в точке } (u, v)) \quad (17.3-16)$$

является кривизной проекции кривой C на касательную плоскость (см. также п.17.4-2, d), и

$$k_N = k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{r}' \cdot \mathbf{N}' \quad (\text{нормальная кривизна кривой } C \text{ в точке } (u, v)) \quad (17.3-17)$$

является кривизной **нормального сечения** (сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль к поверхности, плоскость которого проходит через касательную к C ; см. также п.17.3-5).

(b) Теорема Менъе. Кривизна k кривой, лежащей на поверхности, равна кривизне k_N нормального сечения, плоскость которого проходит через касательную к кривой в данной ее точке, деленной на косинус угла α между соприкасающейся плоскостью кривой в этой точке и плоскостью нормального сечения, т. е.

$$k = \left| \frac{k_N}{\cos \alpha} \right|. \quad (17.3-18)$$

Уравнение (18) выражает кривизну любого наклонного сечения через кривизну нормального сечения с той же касательной.

17.3-5. Вторая основная квадратичная форма. Главные кривизны, гауссова кривизна и средняя кривизна.

(а) Для того чтобы записать выражение для k_N (формула (17)) в криволинейных координатах u, v , рассматривается $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv$ и вводятся обозначения

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2$$

где

(вторая основная квадратичная форма поверхности),

$$L(u, v) = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u = \frac{[\mathbf{r}_{uu} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M(u, v) = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u = \frac{[\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N(u, v) = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_v = \frac{[\mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

(17.3-19)

Все производные берутся в точке (u, v) ; подробные выражения для смешанных произведений можно написать по формулам (5.2-11).

Кривизна нормального сечения в точке (u, v) поверхности S , плоскость которого проходит через бесконечно близкую точку этой поверхности $(u + du, v + dv)$, равна

$$k_N = -\frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N}}{ds^2} = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (17.3-20)$$

Из формулы (8), записанной в виде $dr = du \left(r_u + \frac{dv}{du} r_v \right)$ следует, что отношение dv/du вполне определяет направление касательной к рассматриваемому нормальному сечению.

(б) Точка поверхности, в которой k_N имеет одно и то же значение для всех нормальных сечений ($L:M:N = E:F:G$), называется **омбилической**. В каждой неомбилической точке (u, v) существует два нормальных сечения (**главные нормальные сечения**), которым соответствуют наибольшая величина k_1 и наименьшая величина k_2 кривизны k_N (**главные кривизны** поверхности S в точке (u, v)). Плоскости главных нормальных сечений взаимно перпендикулярны; для любого нормального сечения в точке (u, v) , плоскость которого образует угол ϑ с плоскостью первого главного нормального сечения,

$$k_N = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta \quad (\text{теорема Эйлера}). \quad (17.3-21)$$

Величины k_1 и k_2 являются корнями характеристического уравнения *)

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0. \quad (17.3-22)$$

Симметрические функции $H(u, v) \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ и $K(u, v) \equiv k_1 k_2$ называются соответственно **средней** и **полной (гауссовой) кривизной** поверхности S в точке (u, v) ; они следующим образом выражаются через коэффициенты основных квадратичных форм:

$$H \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \equiv \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (\text{средняя кривизна}), \quad (17.3-23)$$

$$K \equiv k_1 k_2 \equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{гауссова кривизна}), \quad (17.3-24)$$

(см. также пп.17.3-8 и 17.3-13). Значения функций k_1 , k_2 , H и K не зависят от выбора криволинейных координат.

В зависимости от того, будет ли квадратичная форма определенной, полуопределенной или неопределенной (п.13.5-2) в точке (u, v) , эта последняя является:

эллиптической точкой, в которой $K = k_1 k_2 > 0$ (нормальные сечения все выпуклы или все вогнуты; поверхность не пересекает касательную плоскость. Пример: любая точка эллипсоида);

параболической точкой, в которой $K = k_1 k_2 = 0$ (например, любая точка цилиндра);

гиперболической точкой (седловой точкой), в которой $K = k_1 k_2 < 0$ (имеются как выпуклые, так и вогнутые нормальные сечения; поверхность пересекает касательную плоскость. Пример: любая точка однополостного гиперboloида).

Омбилическая точка ($k_1 = k_2$, п.17.3-5, б) необходимо является либо эллиптической, либо параболической.

17.3-6. Некоторые направления и кривые на поверхности. Минимальные поверхности.

(а) **Линией кривизны** на поверхности называется кривая, в каждой точке которой касательная принадлежит плоскости главного нормального сечения в этой точке. Через

*) Иначе говоря, k_1 и k_2 есть собственные числа обобщенной задачи о собственных значениях матрицы $A - kB$, где

$$A = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

и матрица B положительно определена (п.14.8-7).

каждую неомбилическую точку (u, v) поверхности S проходят две линии кривизны $v = v(u)$, которые всегда являются взаимно перпендикулярными; их дифференциальное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} dv^2 - du \, dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0, \quad (17.3-25)$$

(b) Асимптотической линией поверхности называется кривая, нормальная кривизна (20) которой в каждой точке равна нулю; асимптотические линии определяются дифференциальным уравнением

$$L \, du^2 + 2M \, du \, dv + G \, dv^2 = 0. \quad (17.3-26)$$

(Пример: любая прямая линия на поверхности.) Направления касательных к асимптотическим линиям называются асимптотическими направлениями поверхности.

* В эллиптической точке поверхности асимптотические направления являются мнимыми.

В гиперболической точке имеются два различных асимптотических направления. Линии кривизны делят пополам угол между ними.

В параболической точке имеется одно асимптотическое направление, которое совпадает с направлением касательной к главному нормальному сечению имеющему нулевую кривизну.*

(c) Направления двух регулярных дуг поверхности

$$u = U_1(t), \quad v = V_1(t) \quad \text{и} \quad u = U_2(t), \quad v = V_2(t)$$

называются сопряженными в точке их пересечения (u, v) , если касательная к одной из этих дуг в точке (u, v) является предельным положением прямой, по которой касательная плоскость поверхности в точке (u, v) пересекается с касательной плоскостью поверхности в некоторой точке второй дуги при стремлении этой точки к (u, v) . Условие сопряженности имеет вид

$$L \, dU_1 \, dU_2 + M(dU_1 \, dV_2 + dU_2 \, dV_1) + N \, dV_1 \, dV_2 = 0. \quad (17.3-27)$$

(Пример: направления линий кривизны.)

Отношение сопряженности является взаимным.

(d) Координатные линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ являются

ортогональными, если $F \equiv 0$,

сопряженными, если $M \equiv 0$,

линиями кривизны, если $F \equiv 0$, $M \equiv 0$,

асимптотическими, если $L \equiv 0$, $N \equiv 0$.

Все приведенные условия необходимы и достаточны.

(e) * Минимальной поверхностью называется поверхность, у которой $H(u, v) \equiv 0$, т. е. $k_2 = -k_1$ (формула (23)). Это имеет место в том и только в том случае, когда асимптотические линии образуют ортогональную сеть*.

Пусть дана поверхность в виде односвязной области, ограниченной замкнутым контуром. Если оставить неизменным контур и менять натянутую на него поверхность (как меняется упругая пленка), то поверхность, имеющая наименьшую площадь, будет обязательно минимальной; отыскание минимальной поверхности по заданному контуру называется задачей Плато.

Физическим аналогом минимальной поверхности может служить мыльная пленка, натянутая на изогнутый в пространстве проволочный контур.

17.3-7. Поверхности как римановы пространства. Трехиндексные символы Кристоффеля и параметры Бельтрами. Регулярный кусок поверхности S с первой основной квадратичной формой (9) является двумерным римановым пространством, отнесенным к координатам u, v , метрический тензор которого имеет компоненты: $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$ (пп. 16.7-1 и 17.4-1; см. также п. 17.3-12); $a(u, v) = EG - F^2$ есть определитель метрического тензора (п. 16.7-1). Если рассматривать поверхность как риманово пространство, то на ней можно определить векторы, тензоры, скалярное произведение и ковариантное дифференцирование (п. 16.2-1, 16.8-1 и 16.10-1). Трехиндексные символы Кристоффеля второго рода (п. 16.10-3) имеют для поверхности S следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\}_S &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\}_S &= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\}_S &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{matrix} \right\}_S = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\}_S &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 1 \end{matrix} \right\}_S = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\}_S &= \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2(EG - F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\}_S &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (17.3-28)$$

обозначение «S» использовано для того, чтобы отличить символы Кристоффеля поверхности от символов Кристоффеля $\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\}$ объемлющего пространства.

Для функций $\Phi(u, v)$, $\Psi(u, v)$, имеющих непрерывные частные производные нужного порядка, могут быть составлены дифференциальные инварианты

$$\left. \begin{aligned} \nabla_S(\Phi, \Psi) &= \frac{E\Phi_u\Psi_v - F(\Phi_u\Psi_v + \Phi_v\Psi_u) + G\Phi_v\Psi_u}{EG - F^2} \quad (\text{первый дифференциальный параметр Бельтрами}), \\ \nabla_S^2(\Phi) &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{G\Phi_u - F\Phi_v}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E\Phi_v - F\Phi_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \quad (\text{второй дифференциальный параметр Бельтрами}), \end{aligned} \right\} (17.3-29)$$

вполне аналогичные $\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi$ и $\nabla^2\Phi$, определенным в табл. 16.10-1. Так как двумерное риманово пространство «погружено» в трехмерное евклидово пространство, ковариантное дифференцирование на поверхности можно интерпретировать при помощи действительного сравнения векторов поверхности в соседних ее точках; однако при этом должно рассматриваться не приращение вектора, а его ортогональная проекция на касательную плоскость.

17.3-8. Уравнения в частных производных, связывающие коэффициенты основных квадратичных форм. Theorema Egregium Гаусса.

(а) Изменение линейно независимых векторов $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}$ («локальный базис») при смещении вдоль координатных линий поверхности описывается следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S \mathbf{r}_u + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S \mathbf{r}_v + L\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S \mathbf{r}_u + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S \mathbf{r}_v + M\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}_S \mathbf{r}_u + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}_S \mathbf{r}_v + N\mathbf{N}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения Гаусса}), \quad (17.3-30)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_u &= \frac{1}{EG - F^2} [(FM - GL)\mathbf{r}_u + (FL - EM)\mathbf{r}_v], \\ \mathbf{N}_v &= \frac{1}{EG - F^2} [(EN - GM)\mathbf{r}_u + (FM - EN)\mathbf{r}_v] \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения Вейнгартена}). \quad (17.3-31)$$

(б) Условия совместности системы дифференциальных уравнений (17.3-30) (условия интегрируемости, п.10.1-2, с), равносильные соотношениям $\mathbf{r}_{uuv} = \mathbf{r}_{uvu}$, $\mathbf{r}_{vuu} = \mathbf{r}_{uvv}$, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} L_v + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S M + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S N &= M_u + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S L + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S M, \\ M_v + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S M + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S N &= N_u + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}_S L + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}_S M, \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения Майнардичи-Кодацци*}) \quad (17.3-32)$$

$$\frac{1}{F} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S - \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_S \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}_S \right] = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K. \quad (17.3-33)$$

(в) Уравнения (33) выражают K только через E, F, G и их производные, откуда следует, что гауссова кривизна $K(u, v)$ поверхности является инвариантом изгибаия, т.е. не меняется при таких деформациях поверхности, при которых сохраняется ее первая квадратичная форма (Theorema Egregium Гаусса).

17.3-9. Определение поверхности коэффициентами ее основных квадратичных форм. Три функции $E(u, v)$, $G(u, v)$ и $F(u, v)$, удовлетворяющие условиям $\bar{E}(u, v) > 0$, $\bar{G}(u, v) > 0$, $EG - F^2 > 0$, определяют метрику (внутреннюю геометрию) поверхности. Шесть функций E, F, G, L, M, N , удовлетворяющих указанным выше неравенствам и условиям совместности (32) и (33), однозначно определяют действительную поверхность. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ с точностью до ее положения в пространстве (основная теорема теории поверхностей).

* В русской литературе уравнения (17.3-32), основываясь на хронологической последовательности, с которой они рассматривались, называют уравнениями Петерсона-Кодацци.

17.3-10. Отображения. (а) Взаимно однозначное преобразование (отображение)

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v) \quad \left[\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \neq 0 \right] \quad (17.3-34)$$

ставит в соответствие каждой точке (u, v) данного регулярного куска поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ определенную точку (\bar{u}, \bar{v}) регулярного куска другой поверхности $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$. В дальнейшем символы с чертой сверху будут относиться ко второй поверхности. Функции $\bar{u}(u, v)$, $\bar{v}(u, v)$ предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз. Отображение называется

изометрическим (сохраняет все метрические величины на поверхности), если

$$\bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv E(u, v), \quad \bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv F(u, v), \quad \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv G(u, v);$$

конформным (сохраняет углы), если

$$\bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) : \bar{F}(\bar{u}, \bar{u}) : \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv E(u, v) : F(u, v) : G(u, v);$$

эквиваральным (сохраняет площади), если

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \equiv \sqrt{\frac{EG - F^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}.$$

(б) Для получения конформного отображения (34) каждая из поверхностей конформно отображается на плоскость, а затем одна плоскость отображается на другую при помощи аналитической функции комплексного переменного (п.7.9-1).

Для того чтобы отобразить конформно поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ на плоскость с декартовыми прямоугольными координатами $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, решается дифференциальное уравнение

$$E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 = 0 \quad (17.3-35a)$$

или, что то же,

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{G} (-F + i\sqrt{EG - F^2}) \quad \text{и} \quad \frac{dv}{du} = \frac{1}{G} (-F - i\sqrt{EG - F^2}). \quad (17.3-35b)$$

Интегралы этих уравнений определяют мнимые кривые (изотропные или минимальные «кривые» на поверхности, которые характеризуются условием $ds^2 = 0$)

$$U(u, v) = \text{const}, \quad V(u, v) = \text{const}.$$

Тогда первая квадратичная форма поверхности в действительных ортогональных координатах

$$\xi(u, v) = \frac{1}{2}(U + V), \quad \eta(u, v) = \frac{1}{2i}(U - V) \quad (17.3-36)$$

(изотропные или изотермические координаты) принимает вид

$$ds^2 = \varphi(\xi, \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) \quad (17.3-37)$$

и становится пропорциональной первой квадратичной форме $d\xi^2 + d\eta^2$ плоскости с декартовыми прямоугольными координатами ξ, η .

17.3-11. Огибающие (см. также пп.10.2-3 и 17.1-7). Пусть уравнение

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \quad (17.3-38)$$

определяет однопараметрическое семейство поверхностей, для которого

$$\nabla\varphi \times \nabla\varphi_\lambda \neq 0 \quad \varphi_{\lambda\lambda} \neq 0 \quad (17.3-39)$$

в некоторой области V пространства. Тогда в V существует поверхность (огibaющая данного семейства), которая касается каждой из поверхностей (38) вдоль кривой (характеристики), определяемой уравнениями

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \quad \varphi_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0, \quad (17.3-40)$$

т.е. имеет с поверхностью семейства общую касательную плоскость в каждой точке характеристики.

Если, кроме того, в области V выполняется условие $[\nabla\varphi \nabla\varphi_\lambda \nabla\varphi_{\lambda\lambda}] \neq 0$, то огibaющая имеет ребро возврата, т.е. кривую, которая касается каждой характеристики (40); точка

касания ребра возврата и характеристики называется **фокусом**. Координаты фокуса определяются уравнениями

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \varphi_{\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \varphi_{\lambda\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0. \quad (17.3-41)$$

Исключение λ из уравнений (41) приводит к уравнениям ребра возврата.

Уравнение (40) определяет при фиксированном значении $\lambda = \lambda_1$ кривую, являющуюся предельным положением линии пересечения поверхностей $\varphi(x, y, z, \lambda_1) = 0$ и $\varphi(x, y, z, \lambda_2) = 0$ при $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$; если λ произвольно, то уравнения (40) определяют геометрическое место таких кривых. Это геометрическое место (λ -дискриминантная кривая) содержит, наряду с огибающей, все особые точки поверхностей семейства (ребра, узловые точки и т. д.).

Ребро возврата является, аналогично, геометрическим местом точек пересечения трех бесконечно близких поверхностей (38).

17.3-12. Геодезические линии поверхности (см. также п.17.4-3). Геодезической линией регулярного куска поверхности S называется регулярная дуга, геодезическая кривизна которой (п.17.3-4, а) тождественно равна нулю; геодезическая либо является прямой линией, либо ее главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности в каждой точке. Для любой геодезической

$$u = u(s), \quad v = v(s) \quad \text{или} \quad v = v(u)$$

соответствующие функции $u(s)$, $v(s)$ или $v(u)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}_s \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}_s \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \begin{Bmatrix} 1 & \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}_s \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}_s \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}_s \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \begin{Bmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}_s \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.3-42a)$$

или

$$\frac{d^2v}{du^2} = \begin{Bmatrix} 1 & \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}_s \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + \left[2 \begin{Bmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}_s - \begin{Bmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}_s \right] \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left[\begin{Bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}_s - 2 \begin{Bmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}_s \right] \frac{dv}{du} - \begin{Bmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}_s. \quad (17.3-42b)$$

Эти соотношения определяют единственную геодезическую, проходящую через каждую данную точку в каждом данном направлении. Геодезические линии кривой поверхности имеют много свойств, аналогичных свойствам прямых линий на плоскости (см. также п.17.4-3). Если на поверхности существует кривая наибольшей или наименьшей длины, соединяющая две данные точки поверхности, то она является геодезической. Вопрос о существовании геодезической, проходящей через две данные точки поверхности, требует специального исследования в каждом отдельном случае.

17.3-13. Геодезические нормальные координаты. Геометрия на поверхности (см. также п.17.4-7).

(а) * Система геодезических нормальных координат u, v (полугеодезические координаты) характеризуется тем, что координатные линии $v = \text{const}$ являются геодезическими линиями, а координатные линии $u = \text{const}$ их ортогональными траекториями.*

Всегда можно так выбрать систему полугеодезических координат, что вдоль каждой из геодезических координат v играет роль длины дуги s , и длина отрезка геодезической между линиями $u = u_1$ и $u = u_2$ равна $u_2 - u_1$. Тогда семейство линий $u = \text{const}$ называется геодезическими параллелями, так как заключенные между любыми двумя из таких линий отрезки ортогональных к ним геодезических имеют равные длины.

Первая основная квадратичная форма поверхности, отнесенной к полугеодезическим координатам, принимает вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2. \quad (17.3-43)$$

В полу геодезических координатах полная (гауссова) кривизна

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{G_u^2 - 2G \cdot G_{uu}}{4G^2}. \quad (17.3-44)$$

(b) В специальном случае геодезических полярных координат геодезические $v = \text{const}$ пересекаются в одной точке (полюсе), а v_1 есть угол (п.17.3-3, б) между геодезическими $v = 0$ и $v = v_1$. Каждая линия $u = \text{const}$ есть «геодезическая окружность» радиуса u , пересекающая все линии $v = \text{const}$ под прямым углом. «Дуга окружности радиуса u , соответствующая центральному углу dv , равна

$$\sqrt{G(u, v)} dv = \left[u - \frac{1}{6} K_0 u^3 + o(u^3) \right] dv, \quad (17.3-45)$$

где K_0 — гауссова кривизна в полюсе. Величина (45) меньше, равна или больше чем $u dv$, если соответственно $K_0 > 0$, $K_0 = 0$ или $K_0 < 0$.

Длина окружности $C_G(u)$ и площадь $A_G(u)$ геодезического круга малого радиуса u с центром в полюсе связаны с длиной окружности $2\pi u$ и площадью πu^2 круга того же радиуса на плоскости следующими соотношениями:

$$\frac{3}{\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2\pi u - C_G(u)}{u^3} = \frac{12}{\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\pi u^2 - A_G(u)}{u^4} = K_0. \quad (17.3-46)$$

(с) Для любого геодезического треугольника на поверхности постоянной гауссовой кривизны K разность $\pi - (A + B + C)$, где A, B, C — углы треугольника (дефект треугольника), связана с его площадью S_T соотношением

$$\frac{1}{2} A + B + C - \pi = K S_T. \quad (17.3-47)$$

Как следствие, геометрия на поверхности постоянной кривизны является евклидовой при $K = 0$, гиперболической при $K < 0$ и эллиптической при $K > 0$. Поверхности постоянной равной гауссовой кривизны изометричны (теорема Миндинга).

Примеры. Для сферы радиуса R гауссова кривизна $K = \frac{1}{R^2}$. Поверхность постоянной отрицательной кривизны K может быть получена вращением трактрисы

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sin t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$$

вокруг ее асимптоты (псевдосфера).

17.3-14. Теорема Гаусса—Бонне. Пусть гауссова кривизна $K(u, v)$ непрерывна в замкнутой односвязной области поверхности S , граница которой C состоит из n регулярных дуг с геодезической кривизной $K_G(u, v)$. Тогда сумма Θ всех n внешних углов границы связана с интегральной кривизной $\iint_S K dA$ области S следующей формулой:

$$\int_C K_G ds + \iint_S K dA = 2\pi - \Theta \quad (\text{Теорема Гаусса—Бонне}). \quad (17.3-48)$$

Первый из интегралов обращается в нуль, если область ограничена геодезическими; формула (47) является частным случаем теоремы Гаусса—Бонне.

17.4. ПРОСТРАНСТВА С КРИВИЗНОЙ

17.4-1. Вводные замечания. Теория, изложенная в пп.17.4-2—17.4-7, посвящена изучению в криволинейных координатах таких геометрических понятий, как длина, угол, кривизна и обобщению их на некоторый класс многомерных пространств, а именно *римановых пространств*, введенных в гл. 16.

17.4-2. Кривые, длины и направления в римановом пространстве (см. также пп.4.6-9, 5.4-4, 6.2-3)¹⁾.

(а) Метрические свойства, связанные с n -мерным точечным римановым пространством, отнесенным к координатам x^1, x^2, \dots, x^n , задаются компонентами его метрического тензора g_{ik} (x^1, x^2, \dots, x^n) (п.16.7-1), который определяет скалярное произведение и, следовательно, модули и направления векторов в каждой точке (п.16.8-1).

¹⁾ Уравнения (4)–(6) могут применяться непосредственно лишь в случае $ds \neq 0$. Изотропные направления и линии нулевой длины ($dx \neq 0, ds = |dx| = 0$) в римановых пространствах с неопределенной метрикой кратко рассмотрены в п.17.4-4.

(б) Регулярная дуга C определяется n параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (17.4-1)$$

с непрерывными производными dx^i/dt , не обращающимися одновременно в нуль. Дифференциалы $dx^i \equiv \left(\frac{dx^i}{dt}\right) dt$ служат компонентами вектора, который можно рассматривать как направляющий вектор dr касательной к кривой C в ее точке (x^1, x^2, \dots, x^n) ; элемент расстояния ds между двумя соседними точками кривой (x^1, x^2, \dots, x^n) и $(x^1+dx^1, x^2+dx^2, \dots, x^n+dx^n)$ определяется следующим образом:

$$ds \equiv \sqrt{g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k} \equiv \sqrt{g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}} dt. \quad (17.4-2a)$$

Знак ds выбирается так, что $ds > 0$ для $dt > 0$ (положительное направление на кривой C для случая положительно определенной квадратичной формы $g_{ik} dx^i dx^k$). В некоторых случаях ds определяется соотношением

$$ds \equiv \sqrt{|g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k|}. \quad (17.4-2b)$$

Длина дуги s кривой C от точки кривой, соответствующей значению параметра $t = t_0$, определяется интегралом

$$s = \int_{t_0}^t ds \equiv \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}} dt. \quad (17.4-3)$$

Величина интеграла (3) не зависит от выбора параметра t на кривой.

(с) Под направлением кривой (1) в каждой ее точке (x^1, x^2, \dots, x^n) понимается направление вектора dr ; иными словами, угол γ между любым вектором a , заданным в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) , и кривой определяется формулой

$\cos \gamma = \frac{a \cdot dr}{|a| |ds|}$ (п.16.8-1). В частности, угол γ между двумя регулярными дугами $x^i = X_1^i(t)$ и $x^i = X_2^i(t)$ находится по формуле

$$\cos \gamma = g_{ik} \frac{dX_1^i}{ds} \frac{dX_2^i}{ds}. \quad (17.4-4)$$

Общие точки $(n-1)$ из n координатных гиперповерхностей $x^i = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), проходящих через данную точку (x^1, x^2, \dots, x^n) , лежат на координатной линии, соответствующей n -й координате (см. также п.6.2-2). Косинус угла между i -й и k -й координатными линиями в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) равен $g_{ik}/\sqrt{g_{ij}g_{kk}}$.

(д) Единичный вектор $\frac{dr}{ds}$ (с компонентами $\frac{dx^i}{ds}$) является единичным вектором касательной к кривой C в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) . Первый вектор кривизны $\frac{d^2r}{ds^2}$ (с компонентами $\frac{D}{ds} \left(\frac{dx^i}{ds}\right)$) перпендикулярен к кривой (направление главной нормали, см. также п.17.2-2,b); его абсолютная величина

$$|k| = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right| = \sqrt{g_{ik} \frac{D}{ds} \left(\frac{dx^i}{ds}\right) \frac{D}{ds} \left(\frac{dx^k}{ds}\right)} \quad (17.4-5)$$

называется первой кривизной кривой C в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) (см. также п.17.3-7).

17.4-3. Геодезические линии в римановом пространстве (см. также п.17.3-12).

(а) **Геодезической линией** риманова пространства называется регулярная дуга, геодезическая кривизна которой равна нулю в каждой точке кривой или, что то же, единичный касательный вектор которой dx/ds сохраняет постоянное значение (в смысле параллельного перенесения, п.16.10-9) вдоль кривой:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{D}{ds} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) \equiv \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (17.4-6)$$

Дифференциальные уравнения (6) (n уравнений второго порядка) определяют единственную геодезическую $x^i = x^i(s)$, проходящую через данную точку $[x_1^i = x^i(s_1)]$ в любом данном направлении (соответствующем заданным значениям dx^i/ds при $s = s_1$).

Геодезические линии могут определяться также уравнениями более общего вида, а именно, дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \lambda(t) \frac{dx^i}{dt} \quad (17.4-7)$$

(с заданными начальными значениями x^i и $\frac{dx^i}{dt}$) определяют геодезическую $x^i = x^i(t)$; вид функции

$$\lambda(t) = -\frac{d^2 t}{ds^2} / \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \quad (17.4-8)$$

связан с выбором параметра t на геодезической, но не меняет кривую как таковую.

(б) Геодезические линии обладают многими свойствами прямых евклидовой геометрии (см. также п.17.4-6). Если существует кривая наименьшей или наибольшей длины (3), соединяющая две данные точки риманова пространства, то она является геодезической. Дифференциальные уравнения геодезической (6) или (7) можно рассматривать как уравнения Эйлера (п.11.5-11 и 11.5-2), выражающие тот факт, что первая вариация длины дуги (3), соединяющей данные точки, равна нулю. Вопрос о существовании геодезической, соединяющей две данные точки риманова пространства, требует в каждом отдельном случае специального исследования.

17.4-4. Римановы пространства с неопределенной метрикой. Изотропные направления и геодезические нулевой длины. Если фундаментальная форма $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k$ риманова пространства является неопределенной (п.13.5-2) в точке (x^1, x^2, \dots, x^n) , то квадрат $|a|^2 = g_{ik} a^i a^k$ вектора a может быть положительным, отрицательным или равным нулю, и из $|a|^2 = 0$ не следует, вообще говоря, что $a = 0$. В любой точке (x^1, x^2, \dots, x^n) направление вектора $a \neq 0$, удовлетворяющего условию $|a|^2 = g_{ik} a^i a^k = 0$, называется изотропным направлением. Для вектора элементарного перемещения $dr \neq 0$, имеющего изотропное направление, $ds = |dr| = 0$; при этом точки (x^1, x^2, \dots, x^n) и $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$, связанные таким изотропным перемещением, различны. Кривая $x^i = x^i(t)$, удовлетворяющая условию

$$g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (17.4-9)$$

имеет изотропное направление в каждой своей точке (кривая нулевой длины, изотропная кривая, см. также п.17.3-10).

Кривая $x^i = x^i(t)$, удовлетворяющая одновременно уравнениям (7) и (9), называется геодезической линией нулевой длины. Каждое изотропное направление определяет единственную геодезическую линию нулевой длины, проходящей через данную точку в этом направлении (одно из применений — траектории светового луча в римановом пространстве теории относительности).

17.4-5. Тензор кривизны риманова пространства.

(а) **Тензором кривизны (тензором Римана—Кристоффеля)**, данного риманова пространства называется абсолютный тензор ранга 4 со следующими смешанными компонентами: (здесь r — немой индекс):

$$R^i{}_{jkh} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ rk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r \\ jh \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ rh \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r \\ jk \end{matrix} \right\} \quad (17.4-10)$$

или с ковариантными компонентами

$$R_{ijk} \equiv g_{ir} R^r_{jkh} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} [jh, i] - \frac{\partial}{\partial x^h} [jk; i] + \left\{ \begin{matrix} r \\ jk \end{matrix} \right\} [ih; r] - \left\{ \begin{matrix} r \\ jh \end{matrix} \right\} [ik; r] \equiv \\ \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} \right] + \\ + g^{rs} ([jk; s] [ih; r] - [jh; s] [ik; r]). \quad (17.4-11)$$

* Иногда пользуются также обозначениями

$$R_{ijkh} \equiv R_{ij, kh} \quad \text{и} \quad R^i_{jkh} \equiv R^i_{, j, kh} \equiv R^i_{kh, j} \quad *$$

Компоненты тензора кривизны удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R^i_{jkh} = -R^i_{jkh} = g^{rl} R_{rjkh}, \quad R^i_{jkh} + R^i_{kjh} + R^i_{hjk} = 0, \quad (17.4-12)$$

$$R_{ijkl} = R_{khij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0; \quad (17.4-13)$$

соотношения второго столбца называются тождествами Риччи.

Тензор кривизны n -мерного риманова пространства имеет $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ существенных компонент, через которые выражаются остальные его компоненты. Абсолютные производные тензора кривизны удовлетворяют тождествам Бианки (Бианки-Падова)

$$\left. \begin{aligned} R^i_{jkh, r} + R^i_{jhr, k} + R^i_{jrk, h} &= 0, \\ R_{ijkl, r} + R_{ijhr, k} + R_{ijrk, h} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(тождества Бианки)} \quad (17.4-14)$$

(b) Тензором Риччи данного риманова пространства называется абсолютный тензор ранга 2 с ковариантными компонентами

$$R_{ij} \equiv R_{ji} \equiv R^k_{ijk} \equiv \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x^h} \ln \sqrt{|g|} + \left\{ \begin{matrix} k \\ hj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ ik \end{matrix} \right\} \quad (17.4-15)$$

или со смешанными компонентами $R^i_j \equiv g^{ik} R_{kj}$. Тензор Риччи в n -мерном римановом пространстве является симметричным и имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ существенных компонент.

Собственные направления тензора Риччи (п.14.8-3) называются главными направлениями Риччи; они определены в каждой точке риманова пространства.

(c) Скалярным инвариантом или скалярной кривизной риманова пространства называется скалярный (абсолютный) инвариант

$$R \equiv R^i_i \equiv g^{ik} R_{ik} \equiv g^{ik} R^j_{ikj}. \quad (17.4-16)$$

(d) Тензором Эйнштейна данного риманова пространства называется абсолютный тензор ранга 2 с компонентами

$$G^i_j \equiv R^i_j - \frac{1}{2} R \delta^i_j \quad \text{или} \quad G_{ij} \equiv g_{ik} G^k_j \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}. \quad (17.4-17)$$

Дивергенция (п.16.10-7) $G^i_{,i}$ тензора Эйнштейна тождественно равна нулю.

17.4-6. Геометрическое истолкование тензора кривизны. Плоские пространства и евклидовы пространства.

(a) Параллельное перенесение вектора вдоль замкнутого контура. Параллельное перенесение вектора a ($Da^i = 0$, п.16.10-9) вдоль бесконечно малого

замкнутого контура

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, \dots, x^n) &\rightarrow (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^n + dx^n) \rightarrow \\ &\rightarrow (x^1 + dx^1 + d\xi^1, x^2 + dx^2 + d\xi^2, \dots, x^n + dx^n + d\xi^n) \rightarrow \\ &\rightarrow (x^1 + d\xi^1, x^2 + d\xi^2, \dots, x^n + d\xi^n) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n) \end{aligned}$$

вызывает изменение каждой компоненты a^i вектора a на

$$\delta a^i = -R_{jkh}^i a^j dx^k d\xi^h \quad (17.4-18)$$

(см. также уравнение (16.10-25)).

(b)* Геодезически параллельные линии. Пусть $x^i = x^i(s, \lambda)$ — уравнения однопараметрического семейства геодезических, где s — длина дуги геодезической, λ — параметр семейства. Ортогональные траектории семейства (геодезические параллельные) отсекают на геодезических линиях дуги равной длины. Следовательно, эти ортогональные траектории можно при подходящем выборе начала отсчета на каждой из геодезических определить уравнением $s = \text{const}$. Вектор s компонентами

$$\frac{\delta x^i(s, \lambda)}{\partial \lambda} = \eta^i(s, \lambda)$$

будет иметь направление нормали к геодезической $\lambda = \text{const}$, касаясь в то же время двумерной поверхности риманова пространства $x^i = x^i(s, \lambda)$ (s, λ — переменные параметры). Вектор η^i меняется при перемещении вдоль любой из геодезических семейства таким образом, что

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = -R_{jkh}^i \eta^k p^j p^k, \quad (17.4-19)$$

где p^j — координаты единичного вектора касательной к данной геодезической линии.

(с)* Плоские пространства. Риманово пространство называется **плоским**, если в окрестности каждой его точки существует такая система координат $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ (декартовы прямоугольные координаты), что в этой окрестности

$$ds^2 = e_1(\xi^1)^2 + e_2(\xi^2)^2 + \dots + e_n(\xi^n)^2, \quad (17.4-20)$$

где e_i постоянны и равны либо $+1$, либо -1 .

Риманово пространство является плоским в том и только в том случае, если все компоненты его тензора кривизны R_{jkh}^i или R_{ijkh} равны нулю в каждой точке пространства, так что в плоском пространстве смешанные ковариантные производные не зависят от последовательности дифференцирования, и параллельное перенесение тензора вдоль замкнутого контура оставляет все компоненты тензора неизменными (пп.16.10-9 и 17.4-6, а).²⁾

В любой декартовой координатной системе все символы Кристоффеля тождественно равны нулю; ковариантное дифференцирование сводится к обычному дифференцированию и любая геодезическая определяется линейными параметрическими уравнениями $\xi^i = a^i t + b^i$.

Фундаментальная форма (20) может быть дополнительно упрощена посредством введения координат $\zeta^i = \sqrt{e_i} \xi^i$; ζ^i является мнимым, если $e_i = -1$ (это последнее обстоятельство имеет место в теории относительности).

¹⁾ Принятое здесь обозначение $x^i = x^i(s, \lambda)$ исключает геодезические нулевой длины.

²⁾ При этом предполагается, что контур может служить границей поверхности, все точки которой принадлежат плоскому пространству.

* (d) Плоское риманово пространство с положительно определенной метрикой (все e_i в (20) равны +1) называют **локально евклидовым**. Топология (п.12.5-1) локально евклидова пространства может отличаться от «обычной» топологии евклидова пространства элементарной геометрии (гл. 2 и 3); иногда, впрочем, локально евклидово пространство также называют евклидовым независимо от его топологии. С другой стороны, плоское пространство иногда называют локально евклидовым независимо от того, является ли его фундаментальная форма положительно определенной, а в случае положительно определенной формы (17.4-20) употребляют термин «собственно евклидово пространство»; если же форма (20) не является положительно определенной, то пространство называют псевдоевклидовым.*

17.4-7. Специальные координатные системы. Благодаря инвариантности тензорных уравнений (п.16.1-4, 16.4-1, 16.10-7, б), часто удается упростить математические рассуждения путем использования одной из *специальных координатных систем*.

(а) Не каждое риманово пространство допускает *ортогональные координаты* ($g_{ik} = 0$ для $i \neq k$, п.16.8-2), но всегда возможно выбрать одну из координат, пусть для определенности это будет x^n , так, что ее координатные линии будут ортогональны ко всем остальным координатным линиям, вследствие чего фундаментальная квадратичная форма принимает вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik} dx^i dx^k + g_{nn} (dx^n)^2 \quad (17.4-21)$$

в каждой точке (x^1, x^2, \dots, x^n) . При этом всегда можно выбрать систему координат так, что будет выполняться одно из дополнительных условий $g_{nn} = 1$ или $g_{nn} = -1$; x^n является тогда длиной s дуги каждой из координатных линий $x^i = \text{const}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), представляющих собой геодезические ортогональные ко всем гиперплоскостям $x^n = \text{const}$ (**нормальные геодезические** или **полугеодезические координаты**, см. также п.17.3-13).

(б)* Каждое риманово пространство допускает такую систему координат $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, что его фундаментальная квадратичная форма будет иметь вид (20) в *одной* наперед заданной точке пространства. Более того, система координат может быть выбрана таким образом, что в этой точке компоненты тензора g_{ik} и частные производные первого порядка $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ будут совпадать соответственно с компонентами метрического тензора псевдоевклидова пространства и их частными производными; оно называется **соприкасающимся псевдоевклидовым пространством** риманова пространства в данной его точке. В окрестности каждой своей точки риманово пространство с точностью до бесконечно малых высшего порядка изометрично соприкасающемуся псевдоевклидову (собственно евклидову, если метрика положительно определенная) пространству.

(с) **Римановыми (нормальными) координатами с началом O** называются числа $x^i = sp^i$, где p^i — компоненты единичного вектора касательной в точке O к геодезической линии, соединяющей O с точкой (x^1, x^2, \dots, x^n) , а s — геодезическое расстояние между O и точкой (x^1, x^2, \dots, x^n) . Каждое риманово пространство допускает геодезические координаты с любым началом O ; при этом символы Кристоффеля обращаются в точке O в нуль.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

18.1. ВВЕДЕНИЕ

18.1-1. Вводные замечания. Вероятностями называются значения некоторой действительной функции, определенной на классе идеализированных событий, которые представляют собой результаты испытания (опыта или наблюдения). Вероятности вводятся посредством определенных аксиом (п.18.2-2; см. также п.12.1-1), абстрагируемых из основных свойств статистических относительных частот (п.19.2-1). Практически понятие вероятности проявляется в том, что обычно относительная частота случайного события в каждой последовательности независимых повторных испытаний приближается к соответствующей вероятности (п.19.2-1)¹.

Теория вероятностей занимается определением и описанием моделей, связанных с понятием вероятности. В частности, здесь рассматриваются методы вычисления вероятности некоторого события по известным или заданным вероятностям других событий, которые с ним логически связаны. Многие приложения теории вероятностей относятся к области *случайных процессов* (гл. с 18.8-1 по 18.11-5).

18.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

18.2-1. Алгебра событий, связанных с данным испытанием. Каждая вероятностная модель описывает некоторый идеализированный опыт (или наблюдение), обладающий тем свойством, что для класса \mathcal{S}^+ его возможных исходов (событий) имеют смысл следующие определения.

1. **Объединение (логическая сумма)** $E_1 \cup E_2 \cup \dots$ (или $E_1 + E_2 + \dots$) конечной или бесконечной последовательности событий E_1, E_2, \dots есть событие, состоящее в осуществлении *хотя бы одного* из событий E_1, E_2, \dots .

2. **Совмещение (логическое произведение)** $E_1 \cap E_2$ (или $E_1 E_2$) двух событий E_1 и E_2 есть событие, состоящее в осуществлении *и* E_1 и E_2 .

3. **Дополнение (логическое отрицание)** \bar{E} события E есть событие, состоящее в *неосуществлении* события E (событие \bar{E} называют «противоположным» событию E).

4. **Достоверное событие** I состоит в осуществлении *хотя бы одного* из событий класса \mathcal{S}^+ .

5. **Невозможное событие** 0 состоит в том, что не осуществляется ни одно из событий класса \mathcal{S}^+ .

¹ До тех пор, пока это положение имеет место, оно может рассматриваться как *закон природы*; не надо смешивать это положение с *математическими теоремами* типа теоремы Бернулли или закона больших чисел (п.18.6-5).

18.2-4. Сложные испытания. Независимые испытания и повторные независимые испытания. Часто испытание можно расплестить на отдельные частичные испытания (см. также пп.18.7-3 и 18.8-1). Результаты первого, второго, ... частичных испытаний обозначим через E', E'', \dots . Результат E сложного испытания может быть описан как совмещение событий $E = E' \cap E'' \cap \dots$; в общем случае их вероятности будут зависеть от природы и взаимодействия частичных испытаний.

Два (или более) частичных испытания называются независимыми, если независимы их результаты E', E'', \dots , полученные в процессе сложного испытания. Если некоторое частичное испытание независимо от остальных, то вероятность осуществления любого его исхода при проведении сложного испытания равна соответствующей вероятности при самостоятельном проведении частичного испытания.

Повторными независимыми испытаниями называется последовательность независимых испытаний, каждое из которых имеет один и тот же набор возможных исходов E и их вероятностей $P\{E\}$. Вероятность получения определенной последовательности результатов E_1, E_2, \dots, E_n при проведении n повторных независимых испытаний равна

$$P\{E_1, E_2, \dots, E_n\} = P\{E_1\} P\{E_2\} \dots P\{E_n\}. \quad (18.2-3)$$

18.2-5. Правила сочетаний (см. также пп.18.7-1—18.7-3). Каждая из теорем табл. 18.2-1 выражает вероятность некоторого события через вероятности других событий, логически связанных с ним.

Таблица 18.2-1

Вероятности логически связанных событий

(а) Вероятность неосуществления события E	$P\{\bar{E}\} = 1 - P\{E\}$
Вероятность осуществления хотя бы одного из двух событий E_1 и E_2 (E_1 или E_2 или оба)	$P\{E_1 \cup E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1 \cap E_2\}$
Вероятность совмещения всех событий E_1, E_2, \dots, E_n	$P\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n\} = P\{E_1\} P\{E_2/E_1\} \dots P\{E_n/E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1}\}$
(б) Вероятность осуществления хотя бы одного из N независимых в совокупности событий E_1, E_2, \dots, E_N	$P\{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N\} = 1 - (1 - P\{E_1\})(1 - P\{E_2\}) \dots (1 - P\{E_N\})$
Вероятность совмещения событий E_1, E_2, \dots, E_N , независимых в совокупности	$P\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_N\} = P\{E_1\} P\{E_2\} \dots P\{E_N\}$

Вероятности осуществления не менее m и точно m из N (не обязательно независимых) событий E_1, E_2, \dots, E_N равны соответственно

$$P_m = \sum_{j=m}^N (-1)^{j-m} \binom{j-1}{m-1} S_j; \quad P_{[m]} = \sum_{j=m}^N (-1)^{j-m} \binom{j}{m} S_j \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

Где

$$S_1 = \sum_i P\{E_i\}; \quad S_2 = \sum_{i < k} P\{E_i \cap E_k\}; \dots$$

$$S_N = P\{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_N\}. \quad (18.2-5)$$

Заметим, что

$$S_j = \sum_{k=j}^N \binom{k-1}{j-1} P_k = \sum_{k=j}^N \binom{k}{j} P_{[k]} \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (18.2-6)$$

Если E_1, E_2, \dots, E_n независимы в совокупности, то величины (5) приводятся к симметрическим функциям (1.4-9) от $P\{E_i\}$ (табл. 18.2-1, б).

Примеры. Если вероятность выпадения каждой стороны игральной кости равна $1/6$, то

$$\text{вероятность выпадения или 1 или 6 есть } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\text{вероятность невыпадения 6 есть } 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$\text{вероятность выпадения 6 хотя бы один раз за два бросания кости есть } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36},$$

$$\text{вероятность выпадения 6 точно один раз за два бросания кости есть } \frac{1}{3} - \frac{2}{36} = \frac{5}{18},$$

$$\text{вероятность выпадения 6 дважды за два бросания есть } 1/36.$$

18.2-6. Теоремы Байеса (см. также п.18.4-5, б). Пусть H_1, H_2, \dots — последовательность попарно несовместных событий, образующих полную группу, т. е. $H_1 \cup H_2 \cup \dots = I$. Тогда для каждой пары событий H_i, E имеет место формула Байеса

$$P\{H_i/E\} = \frac{P\{H_i \cap E\}}{P\{E\}} = \frac{P\{H_i\} P\{E/H_i\}}{\sum_j P\{H_j\} P\{E/H_j\}}. \quad (18.2-7)$$

Формула (7) позволяет вычислять «апостериорные» вероятности $P\{H_i/E\}$ через «априорные» вероятности $P\{H_i\}$ «гипотез» H_i .

18.2-7. Представление событий как множеств в пространстве выборов. Каждый класс \mathcal{S} событий E может быть представлен как множество g попарно несовместных событий $\hat{E} \neq 0$ так, что каждое событие E есть объединение некоторого подмножества событий из g . g называется **пространством выборов** или **множеством элементарных событий**, связанных с данным испытанием. Каждое множество элементарных событий \hat{E} из g соответствует некоторому событию E . В частности, само g соответствует достоверному событию, а пустое множество из g — невозможному событию. Вероятности $P\{E\}$ могут рассматриваться при этом как значения некоторой аддитивной функции множества, вероятностной функции, определяющей распределение вероятностей в пространстве выборов.

Таким образом, алгебра событий \mathcal{S} изоморфно отображается на алгебру измеримых множеств (см. также пп.4.6-17, б и 12.8-4). Множество элементарных событий, соответствующее условиям вероятностям $P\{E/E_1\}$, есть подмножество, составляющее событие E_1 . Обратно, множество элементарных событий, связанное с некоторым испытанием, может рассматриваться как подмножество в пространстве выборов, связанном с более общим испытанием.

18.2-8. Случайные величины. Случайная величина есть любая (не обязательно численная) переменная x , «значения» которой $x = X$ образуют множество элементарных событий $\{x = X\}$, или, другими словами, обозначают точки в пространстве выборов. Соответствующее распределение вероятностей называется **распределением случайной величины x** .

Каждая измеримая функция (п.4.6-14, с) x , определенная на некотором множестве элементарных событий, есть случайная величина; ее распределение задается вероятностями событий — измеримых подмножеств значений x .

18.2-9. Описание вероятностных моделей на языке случайных величин и их функций распределения. Во многих задачах элементарные события \hat{E} бывают отмечены значениями X действительной случайной величины x . Таковы, например, результаты измерения. Сложные события, скажем $\{x \leq a\}$, $\{\sin x > 0,5\}$ или $\{x = \arctg 2\}$, соответствуют измеримым множествам значений величины x .

Более общим образом каждое случайное событие может быть отмечено упорядоченным набором $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, \dots)$ действительных чисел X_1, X_2, \dots , который дает «значение» многомерной случайной величины $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots)$. Каждая из действительных величин x_1, x_2, \dots сама является случайной величиной.

Если множество элементарных событий, связанное с данным испытанием, отмечено случайной величиной x или \mathbf{x} , то вероятности случайных событий однозначно описываются распределением вероятностей этой случайной величины.

В настоящем справочнике все действительные случайные величины считаются заданными в интервале $(-\infty, +\infty)$; значения случайной величины, не соответствующие элементарным событиям \mathcal{E} , трактуются как невозможные события и им приписывается вероятность 0.

Распределение действительной случайной величины x задается ее функцией распределения

$$\Phi_x(X) \equiv \Phi(X) \equiv P\{x < X\}. \quad (18.2-8)$$

Распределение многомерной случайной величины $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots)$ задается функцией совместного распределения

$$\Phi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \dots) \equiv \Phi(X_1, X_2, \dots) \equiv P\{x_1 < X_1, x_2 < X_2, \dots\}. \quad (18.2-9)$$

Обратно, функция распределения определяется по данному распределению вероятностей однозначно для всех значений случайной величины, за возможным исключением множества меры нуль (п.4.6-14). Функция распределения всегда определена однозначно в точках непрерывности. Каждая функция распределения является неубывающей функцией от каждого из своих аргументов и

$$\Phi_x(-\infty) = 0, \quad \Phi_x(+\infty) = 1, \quad (18.2-10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\mathbf{x}}(-\infty, X_2, X_3, \dots) &= \Phi_{\mathbf{x}}(X_1, -\infty, X_3, \dots) = \dots = 0, \\ \Phi_{\mathbf{x}}(+\infty, +\infty, +\infty, \dots) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (18.2-11)$$

18.3. ОДНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.3-1. Дискретные одномерные распределения вероятностей. (Примеры см. в табл. 18.8-1 – 18.8-7). Действительная случайная величина x называется дискретной, если вероятности

$$p_x(X) \equiv p(X) \equiv P\{x = X\} \quad (18.3-1)$$

отличны от нуля только для счетного множества спектральных значений $X = X_{(1)}, X_{(2)}, \dots$ (спектр дискретной случайной величины). Каждое дискретное распределение вероятностей описывается или функцией (1) или функцией распределения

$$\Phi_x(X) \equiv \Phi(X) \equiv P\{x < X\} = \sum_{X_{(i)} < X} p(X_{(i)}). \quad (18.3-2a)$$

Функцию распределения удобно записывать с помощью единичной функции $U_+(t)$ [$U_+(t) = 0$ при $t < 0$, $U_+(t) = 1$ при $t > 0$, п.21.9-1]:

$$\Phi(X) = p(X_{(1)}) U_+(X - X_{(1)}) + p(X_{(2)}) U_+(X - X_{(2)}) + \dots \quad (18.3-2b)$$

В настоящем справочнике символ $\sum_x y(x)$ обозначает сумму значений функции $y(x)$ по всем спектральным значениям дискретной случайной величины x . Заметим, что

$$\sum_x p(x) = \Phi(+\infty) = 1. \quad (18.3-3)$$

18.3-2. Непрерывные одномерные распределения вероятностей. (Примеры см. в табл. 18.8-11.) Действительная случайная величина x называется **непрерывной**, если ее функция распределения $\Phi_x(X) \equiv \Phi(X)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную — плотность распределения вероятностей величины x :

$$\varphi_x(X) \equiv \varphi(X) \equiv \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq x < X + \Delta X\}}{\Delta X} = \frac{d\Phi}{dX}. \quad (18.3-4)$$

Дифференциал $d\Phi = \varphi(X) dX \approx P\{X \leq x < X + dX\}$ называется **элементом вероятности**. Отметим формулы

$$P\{x < X\} \equiv \Phi(X) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx,$$

$$P\{a \leq x < b\} = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (18.3-5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \Phi(\infty) = 1. \quad (18.3-6)$$

Если x — непрерывная случайная величина, то каждое событие $\{x = X\}$ имеет вероятность нуль, но не обязательно является невозможным. Спектром непрерывной случайной величины x называется множество значений $x = X$, в которых $\varphi(X) \neq 0$.

18.3-3. Математическое ожидание и дисперсия. Числовые характеристики одномерного распределения вероятностей (см. также п.18.3-6).

(а) Математическое ожидание (среднее значение) функции $y(x)$ от дискретной или непрерывной случайной величины x есть

$$My(x) = \begin{cases} \sum_x y(x) p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \quad (18.3-7)$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости (см. пп.4.6-2).

(б) В частности, математическое ожидание (среднее значение) $Mx = \xi$ и дисперсия $Dx = \sigma^2$ дискретной или непрерывной случайной величины x определяются по формулам

$$Mx = \xi = \begin{cases} \sum_x xp(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \quad (18.3-8)$$

$$Dx = \sigma^2 = M(x - \xi)^2 = \begin{cases} \sum_x (x - \xi)^2 p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi)^2 \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}). \end{cases}$$

Для вычисления дисперсии можно применять формулы

$$Dx = \sigma^2 = Mx^2 - \xi^2 = Mx(x-1) - \xi(\xi-1). \quad (18.3-9)$$

Если существуют Mx и Dx , то средний квадрат отклонения $M(x-X)^2 = \sigma^2 + (\xi-X)^2$ случайной величины x от данного числа X будет наименьшим (и равным σ^2) при $X = \xi$.

(е) Mx и Dx не являются функциями от x ; это — функционалы (п.12.1-4), описывающие свойства распределения случайной величины x : Mx характеризует положение величины x , а Dx — ее рассеяние. Определения других числовых характеристик одномерного распределения вероятностей даны в табл. 18.3-1 и в пп.18.3-7 и 18.3-9. Заметим, что некоторые параметры типа Mx , Dx , $M|x-\xi|$, ... могут не существовать у данного распределения вероятностей.

Таблица 18.3-1

Числовые характеристики одномерных распределений вероятностей (см. также пп. 18.3-3, 18.3-7, 18.3-9)

(а) **Квантили.** Квантиль порядка P одномерного распределения есть такое значение x_P случайной величины x , для которого

$$P\{x < x_P\} = \Phi(x_P) = P \quad (0 < P < 1).$$

$x_{1/2}$ есть медиана распределения. Квартили $x_{1/4}$, $x_{1/2}$, $x_{3/4}$, децили $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, ..., $x_{0,9}$ и проценти $x_{0,01}$, $x_{0,02}$, ..., $x_{0,99}$ делят область изменения x соответственно на 4, 10 и 100 интервалов, попадания в которые имеют равные вероятности.

Квантили существуют у каждого распределения вероятностей, но они не обязательно однозначно определены. Таблицы квантилей широко используются в статистике (пп.19.5-3, 19.5-4).

(б) **Характеристики положения.**

1. Центр распределения (математическое ожидание) $Mx = \xi$ (п.18.3-3).

2. Медиана $x_{1/2}$ (см. выше).

3. Мода непрерывного распределения есть точка максимума плотности распределения вероятностей $\varphi(x)$. Мода дискретного распределения есть такое спектральное значение ξ_m , что предшествующее и следующее за ним спектральные значения имеют вероятности, меньшие чем $p(\xi_m)$.

Распределения, имеющие одну, две или более мод, называются соответственно одномодальными, двумодальными или многомодальными.

(с) **Характеристики рассеяния.**

1. Дисперсия $\sigma^2 = Dx$ (п.18.3-3).

2. Среднее квадратическое отклонение (стандарт) $\sigma = \sqrt{Dx}$.

3. Коэффициент вариации σ/ξ .

4. Среднее абсолютное отклонение $M|x-\xi|$.

5. Интерквартильная широта $x_{3/4} - x_{1/4}$ и 10-90 процентильная широта

$x_{0,9} - x_{0,1}$.

6. Размах (разность между наибольшим и наименьшим спектральными значениями).

7. Полуширота одномодального непрерывного распределения есть полуразность двух значений величины x , в которых

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \max \varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(\xi_m).$$

(д) **Характеристики асимметрии и эксцесса.** Первые две из вводимых ниже характеристик определяются через моменты (см. пп.18.3-7 и 18.3-9).

1. Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}$.

2. Коэффициент эксцесса $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}$.

3. Пирсоновская мера асимметрии для одномодального распределения

$$s = \frac{\xi - \xi_m}{\sigma} \quad (\text{см. также п.19.2-4}).$$

Вместо величин γ_1 и γ_2 употребляются также γ_1^2 и $\gamma_2 + 3$ или $\frac{1}{2}(\gamma_2 + 3)$.

(d) Табл. 18.8-1—18.8-7 и 18.8-11 дают математические ожидания и дисперсии некоторых часто употребляемых распределений.

18.3-4. Нормирование. Если известно, что функция $\psi(x) > 0$ пропорциональна вероятности $p(x)$ дискретной случайной величины x (п.18.3-1), то

$$p(x) = \frac{1}{k} \psi(x) = \frac{\psi(x)}{\sum_x \psi(x)}; \quad My(x) = \frac{\sum_x y(x) \psi(x)}{\sum_x \psi(x)}. \quad (18.3-10)$$

Если функция $\psi(x) > 0$ пропорциональна плотности $\varphi(x)$ распределения непрерывной случайной величины x (п.18.3-2), то

$$\varphi(x) = \frac{1}{k} \psi(x) = \frac{\psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx}; \quad My(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y(x) \psi(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx}. \quad (18.3-11)$$

В обоих случаях $1/k$ называется **нормирующим множителем**. Подобный метод применим и в случае многомерных распределений.

18.3-5.* Неравенство Чебышева и связанные с ним формулы. Неравенство Чебышева дает оценку сверху для вероятности того, что абсолютное отклонение $|x - \xi|$ случайной величины x от ее центра распределения $\xi = Mx$ превзойдет данное число $a > 0$:

$$P\{|x - \xi| \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad (a > 0). \quad (18.3-12)$$

Если все значения $x \geq 0$, то имеет место оценка

$$P\{x \geq a\} \leq \frac{\xi}{a} \quad (a > 0). \quad (18.3-13)$$

Если x имеет непрерывное одномодальное распределение, то справедлива более сильная оценка

$$P\{|x - \xi| \geq a\} \leq \frac{4}{9} \frac{1 + s^2}{\left(\frac{a}{\sigma} - |s|\right)^2}, \quad (18.3-14)$$

где s — пирсоновская мера асимметрии (табл. 18.3-1); заметим, что $s = 0$, если распределение симметрично относительно моды.

18.3-6. Единое описание распределений вероятностей с помощью интеграла Стильтеса. Изучение дискретных и непрерывных распределений вероятностей можно объединить, если представить вероятность каждого события $\{a \leq x < b\}$ как интеграл Лебега — Стильтеса (п.4.6-17)

$$P\{a \leq x < b\} = \int_a^b d\Phi(x), \quad (18.3-15)$$

где $\Phi(x) \equiv P\{x < X\}$ — функция распределения случайной величины x (п.18.2-9, 18.3-1, 18.3-2). В случае непрерывного распределения интеграл (15) приводится к интегралу Римана. В случае дискретного распределения функция $\Phi(x)$ определяется формулой (2) и интеграл (15) приводится к сумме $\sum_{a \leq x < b} p(x)$.

С помощью интеграла Стильтеса мы получаем единые выражения

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} x d\Phi(x); \quad My(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) d\Phi(x); \quad Dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^2 d\Phi(x) \quad (18.3-16)$$

как для дискретного, так и для непрерывного распределений. Интеграл Стильтеса применим также и к более общим распределениям, в частности, к распределениям, которые частично дискретны, а частично непрерывны. Аналогичные понятия применяются в случае многомерных распределений (п.п. 18.4-4 и 18.4-8).

18.3-7. Моменты одномерного распределения вероятностей.

(а) Моментом порядка $r \geq 0$ случайной величины x относительно числа X называется математическое ожидание $M(x-X)^r$.

(б) В частности, начальный момент порядка r (относительно $X=0$) есть

$$\alpha_r = Mx^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x x^r p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}). \end{cases} \quad (18.3-17)$$

Центральный момент порядка r (относительно центра распределения $\xi = Mx$) есть

$$\mu_r = M(x-\xi)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^r d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x (x-\xi)^r p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^r \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}). \end{cases} \quad (18.3-18)$$

Если существует величина α_r или μ_r , то существуют все моменты α_k и μ_k порядков $k < r$; если интеграл (или ряд) для α_r или μ_r расходится, то расходятся все интегралы (ряды) для α_k и μ_k порядков $k > r$.

Если распределение вероятностей симметрично относительно своего центра, то все (существующие) центральные моменты μ_r нечетного порядка r равны нулю.

(с) Факториальным моментом порядка r случайной величины x относительно $X=0$ называется

$$\alpha_{[r]} = Mx^{[r]} = Mx(x-1) \dots (x-r+1). \quad (18.3-19)$$

Центральным факториальным моментом порядка r называется $M(x-\xi)^{[r]}$.

Абсолютным моментом порядка r относительно $X=0$ называется $\beta_r = M|x|^r$.

Отметим формулы

$$M(x-X)^2 = \mu_2 + (\xi-X)^2 > \mu_2; \quad \sqrt{\beta_r} < \sqrt{\beta_{r+1}}, \quad \left. \begin{aligned} \alpha_0 = \mu_0 = \alpha_{[0]} = \beta_0 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (18.3-20)$$

(д) Одномерное распределение вероятностей однозначно определяется своими моментами

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, если все они существуют и если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k| s^k}{k!}$ сходится при некотором $s > 0$.

(е) Примеры приведены в табл. 18.3-1-18.3-7; в п.п. 18.3-10 указана связь между α_r , μ_r и $\alpha_{[r]}$.

18.3-8. Характеристические и производящие функции (примеры см. в табл. 18.3-1-18.3-8).

(а) По распределению вероятностей одномерной случайной величины x однозначно определяется (в общем случае комплексная) **характеристическая**

Функция

$$\chi_x(q) \equiv M e^{iqx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x e^{iqx} p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \quad (18.3-21)$$

где q — действительная переменная, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$.

(б) По распределению вероятностей случайной величины x однозначно определяется **производящая функция моментов**

$$M_x(s) \equiv M e^{sx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x e^{sx} p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}) \end{cases} \quad (18.3-22)$$

и производящая функция факториальных моментов

$$\gamma_x(s) \equiv M s^x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s^x d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x s^x p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} s^x \varphi(x) dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \quad (18.3-23)$$

где s — любое комплексное число, для которого приведенные интегралы или ряды сходятся абсолютно.

(в) *Характеристическая функция $\chi_x(q)$ однозначно определяет распределение вероятностей¹⁾. Это же справедливо и для каждой из функций $M_x(s)$ и $\gamma_x(s)$, если они существуют в смысле абсолютной сходимости в некотором интервале действительной оси, включающем точку $s = 0$ в случае $M_x(s)$ или точку $s = 1$ в случае $\gamma_x(s)$.* В частности, для дискретной или непрерывной случайной величины x имеем

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q} \int_{-Q}^Q e^{-iqx} \chi_x(q) dq & (x \text{ дискретна}), \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \chi_x(q) dq & (x \text{ непрерывна}). \end{aligned} \right\} \quad (18.3-24)$$

Формула (24) дает также выражение $p(x)$ или $\varphi(x)$ через $M_x(s)$, так как

$$M_x(iq) = \chi_x(q). \quad (18.3-25)$$

(д) Во многих задачах бывает значительно легче описать распределение вероятностей через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ или $\gamma_x(s)$, чем вычислять непосредственно $\Phi(x)$, $p(x)$ или $\varphi(x)$ (гл. 18.5-3, 18.5-7 и 18.5-8). С другой стороны, методы п. 18.3-10 позволяют просто вычислять математическое ожидание, дисперсию и моменты через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ или $\gamma_x(s)$. Линейные интегральные преобразования с (21) по (24) можно осуществлять с помощью таблиц преобразования Фурье или Лапласа.

(е) Производящая функция $\gamma_x(s)$ применяется, в частности, в задачах, содержащих дискретные распределения со спектром $0, 1, 2, \dots$, для которых

$$\gamma_x(s) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(k), \quad p(k) = \frac{1}{k!} \gamma_x^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

¹⁾ $\Phi(x)$ определяется однозначно, за возможным исключением множества точек меры нуль; если $\Phi(x)$ непрерывна, то она определяется однозначно (см. также п. 18.2-9).

18.3-9. Семинварианты (см. также п.18.3-10). Если для одномерного распределения вероятностей существует момент r -го порядка α_r , то существуют **семинварианты** $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$, определяемые разложением

$$\ln \chi_x(q) = \sum_{k=1}^r \kappa_k \frac{(iq)^k}{k!} + o(q^r). \quad (18.3-26)$$

При условиях п.18.3-7, d все семинварианты существуют и однозначно определяют распределение вероятностей.

18.3-10. Вычисление моментов и семинвариантов через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ и $\gamma_x(s)$. Соотношения между моментами и семинвариантами. Многие характеристики распределения могут быть вычислены непосредственно по $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ и $\gamma_x(s)$ без предварительного нахождения $\Phi(x)$, $p(x)$ или $\varphi(x)$. Если рассматриваемые далее выражения существуют, то

$$\begin{aligned} \alpha_r &= i^{-r} \chi_x^{(r)}(0) = M_x^{(r)}(0); & \alpha_{[r]} &= \gamma_x^{(r)}(1), \\ \kappa_r &= i^{-r} \left. \frac{d^r}{dq^r} \ln \chi_x(q) \right|_{q=0} = \left. \frac{d^r}{ds^r} \ln M_x(s) \right|_{s=0}. \end{aligned} \quad (18.3-27)$$

Заметим, что

$$M_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{s^k}{k!}; \quad \ln M_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k \frac{s^k}{k!}; \quad \gamma_x(s+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{[k]} \frac{s^k}{k!}, \quad (18.3-28)$$

если только стоящие слева функции (производящая функция моментов, производящая функция семинвариантов и производящая функция факториальных моментов соответственно) аналитичны в окрестности точки $s=0$.

Из формул (28) можно получить Mx и Dx :

$$\begin{aligned} Mx &= \xi = \alpha_1 = \alpha_{[1]} = \kappa_1, \\ Dx &= \sigma^2 = \mu_2 = \alpha_2 - \xi^2 = \alpha_{[2]} - \xi(\xi-1) = \kappa_2. \end{aligned} \quad (18.3-29)$$

В табл. 18.3-1 указаны и другие характеристики, которые могут быть выражены через моменты.

Следующие формулы связывают моменты и семинварианты

$$\mu_r = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \alpha_{r-k} \xi^k; \quad \alpha_r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \mu_{r-k} \xi^k \quad (r=0, 1, 2, \dots), \quad (18.3-30)$$

$$\alpha_{[r]} = \sum_{k=0}^{r-1} S_k^r \alpha_{r-k} \quad (r=0, 1, 2, \dots; \text{ см. также п. 21.5-3}), \quad (18.3-31)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} & &= \kappa_2 + \kappa_1^2, \\ \alpha_3 &= \alpha_{[3]} + 3\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} & &= \kappa_3 + 3\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1^3, \\ \alpha_4 &= \alpha_{[4]} + 6\alpha_{[3]} + 7\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} & &= \kappa_4 + 6\kappa_1^2 \kappa_2 + 4\kappa_1 \kappa_3 + 3\kappa_1^2 \kappa_1^2 + \kappa_1^4, \end{aligned} \right\} \quad (18.3-32)$$

$$\mu_3 = \kappa_3; \quad \mu_4 = \kappa_4 + 3\kappa_1 \quad (18.3-33)$$

$$\mu_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad \mu_5 = \mu_5 - 10\mu_2\mu_3, \quad \mu_6 = \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3. \quad (18.3-34)$$

18.4. МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.4-1.* Многомерные случайные величины (см. также п. 18.2-9). Если случайное событие описывается упорядоченным набором действительных чисел X_1, X_2, \dots, X_n , то этот набор представляет значение n -мерной случайной величины $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Можно также говорить о системе случайных

величин или о n -мерном случайном векторе. Каждое элементарное событие может рассматриваться как результат сложного испытания, состоящего в измерении всех величин x_1, x_2, \dots, x_n и интерпретироваться как точка n -мерного пространства (x_1, x_2, \dots, x_n) или как вектор $\mathbf{x}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Каждая из величин x_1, x_2, \dots, x_n является случайной величиной (одномерной). Если говорят, что \mathbf{x} — случайный вектор (или n -мерная случайная величина), то величины x_1, x_2, \dots, x_n называют его *случайными координатами*.

18.4-2. Двумерные распределения вероятностей. Распределения координат случайной величины. Распределение системы двух случайных величин x_1, x_2 или двумерного случайного вектора $\mathbf{x}\{x_1, x_2\}$ задается функцией совместного распределения

$$\Phi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2) \equiv \Phi(X_1, X_2) \equiv \mathbf{P}\{x_1 < X_1; x_2 < X_2\}. \quad (18.4-1)$$

Каждая из случайных величин x_1 и x_2 (координаты случайного вектора) определяется соответствующей функцией распределения (одномерной)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(X_1) &\equiv \mathbf{P}\{x_1 < X_1\} \equiv \mathbf{P}\{x_1 < X_1; x_2 < \infty\} = \Phi(X_1, \infty), \\ \Phi_2(X_2) &\equiv \mathbf{P}\{x_2 < X_2\} \equiv \mathbf{P}\{x_1 < \infty; x_2 < X_2\} = \Phi(\infty, X_2). \end{aligned} \right\} \quad (18.4-2)$$

Отметим, что функция (1) полностью определяет функции (2). Наоборот, функции (2) определяют функцию (1) только при условии, что случайные величины x_1 и x_2 *независимы* (см. п.18.4-11).

18.4-3. Дискретные и непрерывные двумерные распределения вероятностей.

(а) Двумерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ называется **дискретной** (имеет **дискретное распределение вероятностей**), если **совместная вероятность** выполнения условий $x_1 = X_1, x_2 = X_2$

$$p_{\mathbf{x}}(X_1, X_2) \equiv p(X_1, X_2) \equiv \mathbf{P}\{x_1 = X_1 | x_2 = X_2\} \quad (18.4-3)$$

отлична от нуля только для счетного множества (**спектра**) точек (X_1, X_2) , т.е. если и x_1 и x_2 являются дискретными случайными величинами (п.18.3-1). Распределения случайных координат x_1 и x_2 определяются вероятностями

$$\left. \begin{aligned} p_1(X_1) &\equiv \mathbf{P}\{x_1 = X_1\} = \sum_{x_2} p(X_1, X_2), \\ p_2(X_2) &\equiv \mathbf{P}\{x_2 = X_2\} = \sum_{x_1} p(X_1, X_2). \end{aligned} \right\} \quad (18.4-4)$$

(б) Двумерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ называется **непрерывной** (имеет **непрерывное распределение вероятностей**), если функция распределения $\Phi(X_1, X_2)$ непрерывна всюду и если **двумерная плотность распределения вероятностей**

$$\varphi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2) \equiv \varphi(X_1, X_2) \equiv \frac{\partial^2 \Phi(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (18.4-5)$$

существует и кусочно-непрерывна. Дифференциал $\varphi(x_1, x_2)dx_1 dx_2$ называется **элементом вероятности**. **Спектр** непрерывного двумерного распределения вероятностей есть множество точек, в которых плотность распределения (5) отлична от нуля. Распределения координат x_1 и x_2 определяются плотностями распределения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(X_1) &\equiv \frac{d\Phi_1(X_1)}{dX_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X_1, x_2) dx_2, \\ \varphi_2(X_2) &\equiv \frac{d\Phi_2(X_2)}{dX_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, X_2) dx_1. \end{aligned} \right\} \quad (18.4-6)$$

(е) Отметим формулы

$$\left. \begin{aligned} \sum_{x_1} \sum_{x_2} p(x_1, x_2) &= \sum_{x_1} p_1(x_1) = \sum_{x_2} p_2(x_2) = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x_2) dx_2 = 1. \end{aligned} \right\} (18.4-7)$$

18.4-4. Математическое ожидание, моменты, ковариация и коэффициент корреляции.

(а) Математическое ожидание (среднее значение) функции $y(x_1, x_2)$ двух случайных величин x_1, x_2 определяется формулой

$$\begin{aligned} My(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2) d\Phi(x_1, x_2) = \\ &= \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} y(x_1, x_2) p(x_1, x_2) & \text{для дискретного} \\ & \text{распределения,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & \text{для непрерывного} \\ & \text{распределения,} \end{cases} \end{aligned} \quad (18.4-8)$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости.

З а м е ч а н и е. Если y есть функция только одного x_i , то среднее значение (8) совпадает со средним значением, определенным по распределению величины x_i .

(б) Средние значения (математические ожидания) $Mx_1 = \xi_1, Mx_2 = \xi_2$ определяют точку (ξ_1, ξ_2) , называемую **центром распределения вероятностей (центром рассеивания)**. Величины $M(x_1 - X_1)^{r_1} (x_2 - X_2)^{r_2}$ называются **моментами порядка $r_1 + r_2$ относительно точки (X_1, X_2)** . В частности, моменты порядка $r_1 + r_2$ относительно начала (**начальные моменты**) и относительно центра распределения (**центральные моменты**) определяются соответственно формулами (см. также п.18.3-7):

$$\alpha_{r_1, r_2} = Mx_1^{r_1} x_2^{r_2}; \quad \mu_{r_1, r_2} = M(x_1 - \xi_1)^{r_1} (x_2 - \xi_2)^{r_2}. \quad (18.4-9)$$

(в) **Центральные моменты второго порядка** представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= M(x_1 - \xi_1)^2 = Dx_1 = \sigma_1^2, \\ \lambda_{22} &= M(x_2 - \xi_2)^2 = Dx_2 = \sigma_2^2, \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = M(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) = \text{cov}\{x_1, x_2\} \end{aligned} \right\} \text{(дисперсии } x_1 \text{ и } x_2),$$

(ковариация x_1 и x_2 , корреляционный момент, смешанный момент второго порядка),

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \rho(x_1, x_2) = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11} \lambda_{22}}} = M \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1} \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2}$$

(коэффициент корреляции между x_1 и x_2).

(18.4-10)

Заметим, что

$$-1 \leq \rho_{12} \leq 1, \quad \lambda_{12} = Mx_1 x_2 - \xi_1 \xi_2 = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2. \quad (18.4-11)$$

18.4-5. Условные распределения вероятностей, связанные с двумя случайными величинами.

(а) Распределение системы двух случайных величин x_1, x_2 определяет условное распределение величины x_1 при условии, что $x_2 = X_2$, и условное

распределение величины x_2 при условии, что $x_1 = X_1$. В случае **дискретного** совместного распределения эти условные распределения также являются дискретными и описываются **условными вероятностями** (п.18.2-2):

$$\begin{aligned} p_{1|2}(X_1|X_2) &\equiv P\{x_1 = X_1 | x_2 = X_2\} = \frac{p(X_1, X_2)}{p_2(X_2)}, \\ p_{2|1}(X_2|X_1) &\equiv P\{x_2 = X_2 | x_1 = X_1\} = \frac{p(X_1, X_2)}{p_1(X_1)}. \end{aligned} \quad (18.4-12)$$

В случае **непрерывного** совместного распределения условные распределения величин x_1 и x_2 также являются непрерывными и описываются **условными плотностями распределений**:

$$\varphi_{1|2}(X_1|X_2) = \frac{\varphi(X_1, X_2)}{\varphi_2(X_2)}; \quad \varphi_{2|1}(X_2|X_1) = \frac{\varphi(X_1, X_2)}{\varphi_1(X_1)}. \quad (18.4-13)$$

(b) Отметим формулы

$$\begin{aligned} \sum_{x_1} p_{1|2}(X_1|X_2) &= \sum_{x_2} p_{2|1}(X_2|X_1) = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{1|2}(x_1|x_2) dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2|1}(x_2|x_1) dx_2 = 1, \end{aligned} \quad (18.4-14)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{1|2}(X_1|X_2) &= \frac{p_1(X_1) p_{2|1}(X_2|X_1)}{\sum_{x_1} p_1(x_1) p_{2|1}(X_2|x_1)}, \\ p_{2|1}(X_2|X_1) &= \frac{p_2(X_2) p_{1|2}(X_1|X_2)}{\sum_{x_2} p_2(x_2) p_{1|2}(X_1|x_2)}, \\ \varphi_{1|2}(X_1|X_2) &= \frac{\varphi_1(X_1) \varphi_{2|1}(X_2|X_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1) \varphi_{2|1}(X_2|x_1) dx_1}, \\ \varphi_{2|1}(X_2|X_1) &= \frac{\varphi_2(X_2) \varphi_{1|2}(X_1|X_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x_2) \varphi_{1|2}(X_1|x_2) dx_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(формулы Байеса,} \\ \text{см. также п.18.2-6).} \end{array} \quad (18.4-15)$$

(c) Если дано дискретное или непрерывное распределение вероятностей системы двух случайных величин x_1 и x_2 , то **условное математическое ожидание функции $y(x_1, x_2)$ при условии, что $x_1 = X_1$, есть**

$$M\{y(x_1, x_2) | X_1\} = \begin{cases} \sum_{x_2} y(X_1, x_2) p_{2|1}(x_2 | X_1) & \text{для дискретного распределения,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y(X_1, x_2) \varphi_{2|1}(x_2 | X_1) dx_2 & \text{для непрерывного распределения,} \end{cases} \quad (18.4-16)$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости. Заметим, что $M\{y(x_1, x_2) | X_1\}$ есть функция от X_1 .

Пр и м е р. Условные дисперсии величин x_1 и x_2 равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} D(x_1 | X_2) &= M\{(x_1 - M(x_1 | X_2))^2 | X_2\}, \\ D(x_2 | X_1) &= M\{(x_2 - M(x_2 | X_1))^2 | X_1\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.4-17)$$

18.4-6. Регрессии (см. также пп. 18.4-9 и 19.7-2).

(а) Если дано распределение системы двух случайных величин x_1 и x_2 , то **регрессией x_2 на x_1** называется любая функция $g_2(x_1)$, приближенно представляющая статистическую зависимость x_2 от x_1 . При этом величина x_2 представляется как сумма двух случайных величин

$$x_2 = g_2(x_1) + h_2(x_1, x_2), \quad (18.4-18)$$

где $h_2(x_1, x_2)$ рассматривается в качестве поправочного члена.

В частности, *средняя квадратическая регрессия x_2 на x_1*

$$g_2(x_1) \equiv M\{x_2 | x_1\} = \begin{cases} \sum_{x_2} x_2 P_{21}(x_2 | x_1) & \text{для дискретного распределения} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \varphi_{21}(x_2 | x_1) dx_2 & \text{для непрерывного распределения,} \end{cases} \quad (18.4-19)$$

минимизирует средний квадрат отклонения

$$M[x_2 - g_2(x_1)]^2 = M[h_2(x_1, x_2)]^2. \quad (18.4-20)$$

Соответствующая кривая $x_2 = M\{x_2 | x_1\}$ называется **кривой средней квадратической регрессии величины x_2** .

(б) Часто оказывается достаточным аппроксимировать регрессию (19) линейной функцией

$$g_2(x_1) \equiv g_2^{(1)}(x_1) = \xi_2 + \beta_{21}(x_1 - \xi_1); \quad \beta_{21} = \rho_{12} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (\text{линейная регрессия } x_2 \text{ на } x_1). \quad (18.4-21)$$

Уравнение (21) описывает прямую линию — **прямую регрессии величины x_2** ; β_{21} есть **коэффициент регрессии x_2 на x_1** . Формула (21) представляет линейную функцию $ax_1 + b$, коэффициенты которой $a = \beta_{21}$ и $b = \xi_2 - \beta_{21}\xi_1$ минимизируют среднее квадратическое отклонение

$$M[x_2 - (ax_1 + b)]^2 = \sigma_2^2 + a^2\sigma_1^2 - 2a\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + [\xi_2 - (a\xi_1 + b)]^2.$$

Наименьшее среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2)$; таким образом, **коэффициент корреляции ρ_{12} измеряет качество «наилучшего» линейного приближения.**

(в) Регрессия (19) может быть аппроксимирована более точно с помощью многочлена степени $m > 1$ (**параболическая регрессия порядка m**) или с помощью других функций, коэффициенты которых выбираются так, чтобы минимизировать отклонение (20).

(д) Если рассматривать в качестве независимой переменной величину x_2 , то мы получим подобным образом среднюю квадратическую регрессию x_1 на x_2 :

$$\text{и линейную регрессию } x_1 \text{ на } x_2: \quad g_1(x_2) = M\{x_1 | x_2\}, \quad (18.4-22)$$

$$g_1^{(1)}(x_2) = \xi_1 + \beta_{12}(x_2 - \xi_2); \quad \beta_{12} = \rho_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (18.4-23)$$

Заметим, что в общем случае ни функции (19) и (22), ни функции (21) и (23) не являются взаимно обратными. Все линии регрессии проходят через центр (ξ_1, ξ_2) распределения вероятностей.

18.4-7. n -мерные распределения вероятностей.

(а) Распределение системы n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n или n -мерного случайного вектора \mathbf{x} задается функцией совместного распределения

$$\Phi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \Phi(X_1, X_2, \dots, X_n) = P\{x_1 < X_1, x_2 < X_2, \dots, x_n < X_n\} \quad (18.4-24)$$

(п. 18.2-9). Распределение подсистемы $m < n$ величин x_1, x_2, \dots, x_m есть **m -мерное распределение**, получаемое из исходного распределения. Соответствующая m -мерная функция распределения получается из n -мерной функции распределения (24) подстановкой $X_j = \infty$ для каждого из $n - m$ аргументов X_j , которые не входят в выбранную подсистему, например,

$$\begin{aligned}\Phi_{12}(X_1, X_2) &= \Phi(X_1, X_2, \infty, \dots, \infty); \\ \Phi_2(X_2) &= \Phi(\infty, X_2, \infty, \dots, \infty), \quad \text{и т. д.}\end{aligned}$$

(б) n -мерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **дискретной** (имеет **дискретное распределение вероятностей**), если совместные вероятности

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \dots, X_n) &\equiv p(X_1, X_2, \dots, X_n) = \\ &= P\{(x_1 = X_1) (x_2 = X_2) \dots (x_n = X_n)\} \quad (18.4-25)\end{aligned}$$

отличны от нуля лишь для счетного множества (спектра) точек (X_1, \dots, X_n) , т. е. если каждая из величин x_1, x_2, \dots, x_n дискретна (см. также пп. 18.3-4 и 18.4-3,а).

Распределения подсистем случайных величин и условные распределения определяются так же, как в пп. 18.4-3,а и 18.4-5,а, т. е.

$$\begin{aligned}p_{12}(X_1, X_2) &= \sum_{x_3} \dots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ p_2(X_2) &= \sum_{x_1} \sum_{x_3} \dots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{x_1} p_{12}(x_1, X_2) \quad \text{и т. д.}, \\ p_{12}(X_1 | X_2) &= \frac{p_{12}(X_1, X_2)}{p_2(X_2)}; \quad p_{123}(X_1 | X_2, X_3) = \frac{p_{123}(X_1, X_2, X_3)}{p_{23}(X_2, X_3)}; \\ p_{231}(X_2, X_3 | X_1) &= \frac{p_{123}(X_1, X_2, X_3)}{p_1(X_1)} \quad \text{и т. д.}\end{aligned}$$

(с) n -мерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **непрерывной** (имеет **непрерывное распределение вероятностей**), если функция распределения $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ непрерывна всюду и если плотность распределения вероятностей

$$\varphi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\partial^n \Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_1 \partial X_2 \dots \partial X_n} \quad (18.4-26)$$

существует и кусочно-непрерывна. Дифференциал

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

называется **элементом вероятности** (см. также пп. 18.3-2 и 18.4-3,б). Спектр непрерывного распределения вероятностей есть множество всех точек (X_1, X_2, \dots, X_n) , в которых плотность распределения (26) отлична от нуля.

(д) Отметим формулы

$$\left. \begin{aligned} \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (18.4-27)$$

(е) Плотности m -мерных распределений и условных распределений, получаемых из непрерывного n -мерного распределения вероятностей, определяются так же, как в

пп.18.4-3, б и 18.4-5, а, например

$$\varphi_{12}(X_1, X_2) = \frac{\partial^2 \Phi_{12}(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X_1, X_2, x_3, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n,$$

$$\varphi_{12|3}(X_1 | X_2) = \frac{\varphi_{12}(X_1, X_2)}{\varphi_3(X_2)}, \quad \varphi_{123}(X_1 | X_2, X_3) = \frac{\varphi_{123}(X_1, X_2, X_3)}{\varphi_{23}(X_2, X_3)};$$

$$\varphi_{12|3}(X_1, X_2 | X_3) = \frac{\varphi_{123}(X_1, X_2, X_3)}{\varphi_3(X_3)}.$$

(г) *Распределение системы двух или более многомерных случайных величин $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, ... есть совместное распределение всех величин $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$. Это распределение может оказаться дискретным по одной или нескольким случайным величинам и непрерывным по другим; кроме того, каждая случайная координата может быть частично дискретной и частично непрерывной.*

18.4-8. Математические ожидания и моменты (см. также п.18.4-4).

(а) **Математическое ожидание (среднее значение) функции $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n определяется формулой**

$$My(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2, \dots, x_n) d\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} y(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{(для дискретного распределения),} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n & \text{(для непрерывного распределения),} \end{cases}$$

(18.4-28)

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости.

Замечание. Если y есть функция только $m < n$ из n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , то математическое ожидание (28) совпадает с математическим ожиданием y по отношению к m -мерному распределению только рассматриваемых m величин.

(б) n математических ожиданий $Mx_1 = \xi_1, Mx_2 = \xi_2, \dots, Mx_n = \xi_n$ определяют точку $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, которая называется **центром распределения вероятностей**. Величины $M(x_1 - X_1)^{r_1} (x_2 - X_2)^{r_2} \dots (x_n - X_n)^{r_n}$ называются **моментами порядка $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ относительно точки (X_1, X_2, \dots, X_n)** . В частности, моменты относительно начала (**начальные моменты**) и относительно центра распределения (**центральные моменты**) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \mu_{r_1, r_2, \dots, r_n} &= Mx_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \\ \mu_{r_1, r_2, \dots, r_n} &= M(x_1 - \xi_1)^{r_1} (x_2 - \xi_2)^{r_2} \dots (x_n - \xi_n)^{r_n}. \end{aligned} \right\} \quad (18.4-29)$$

(с) **Центральные моменты второго порядка** представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения:

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = M(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) =$$

$$= \begin{cases} Dx_i = \sigma_i^2 & \text{при } i = k \text{ (дисперсия),} \\ \text{cov}\{x_i, x_k\} & \text{при } i \neq k \text{ (ковариация)} \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (18.4-30)$$

Эти моменты определяют матрицу моментов (λ_{ik}) . Ее определитель $\det (\lambda_{ik})$ называется **обобщенной дисперсией** n -мерного распределения. **Коэффициенты корреляции**

$$\rho_{ik} = \rho(x_i, x_k) = \frac{\lambda_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{kk}}} = M \frac{x_i - \xi_i}{\sigma_i} \frac{x_k - \xi_k}{\sigma_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (18.4-31)$$

определяют **корреляционную матрицу** (ρ_{ik}) n -мерного распределения, если только все $\sigma_i \neq 0$. Величину

$$\sqrt{\det (\rho_{ik})} = \frac{\sqrt{\det (\lambda_{ik})}}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}$$

иногда называют **коэффициентом разброса**.

Матрицы (λ_{ik}) и (ρ_{ik}) действительны и симметричны. Их общий ранг (п.13.2-7) r есть **ранг n -мерного распределения вероятностей**. * Распределение называется **собственным** или **несобственным** в зависимости от того, будет ли $r = n$ или $r < n$. В случае собственного распределения матрицы (λ_{ik}) и (ρ_{ik}) являются положительно определенными (п.13.5-2). * **Эллипсоидом рассеяния** для собственного n -мерного распределения вероятностей с центром в начале координат называется n -мерный «эллипсоид»

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} x_i x_k = n+2, \quad (18.4-32)$$

где $(A_{ik}) = (\lambda_{ik})^{-1}$ есть матрица, обратная матрице моментов.

Эллипсоид рассеяния обладает тем свойством, что при равномерном распределении вероятностей на нем матрица моментов такого распределения совпадает с (λ_{ik}) . Эллипсоид рассеяния иллюстрирует распределение вероятностей по различным направлениям. «Объем» этого эллипсоида пропорционален корню квадратному из обобщенной дисперсии. Для несобственного распределения вероятностей (при $r < n$) спектр (п.18.4-7) сосредоточен на некотором r -мерном линейном многообразии (прямой, плоскости, гиперплоскости) в n -мерном пространстве точек (x_1, x_2, \dots, x_n) и там же расположен его эллипсоид рассеяния. Так, например, спектр двумерного распределения вероятностей при $r = 1$ лежит на прямой, а при $r = 0$ находится в одной точке.

18.4-9. Регрессия. Коэффициенты корреляции (см. п.п 18.4-6 и 19.7-2).

(а) Если дано совместное распределение n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , то зависимость одной из этих величин, например x_1 , от остальных $n-1$ величин можно изучать с помощью формулы

$$x_1 = g_1(x_2, x_3, \dots, x_n) + h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (18.4-33)$$

где $h_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рассматривается как поправочный член.

(Средняя квадратическая) регрессия x_1 на x_2, x_3, \dots, x_n есть функция

$$g_1(x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv M\{x_1 | x_2, x_3, \dots, x_n\} = \begin{cases} \sum_{x_1} x_1 p_{1|23\dots n}(x_1 | x_2, x_3, \dots, x_n), & \text{если } x_1 \text{ дискретна,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \varphi_{1|23\dots n}(x_1 | x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1, & \text{если } x_1 \text{ непрерывна,} \end{cases} \quad (18.4-34)$$

которая минимизирует средний квадрат отклонения

$$M[x_1 - g_1(x_2, x_3, \dots, x_n)]^2 = M[h_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2.$$

$M\{x_1 | X_2, X_3, \dots, X_n\}$ есть **условное среднее значение величины x_1 при условии, что $x_2 = X_2, x_3 = X_3, \dots, x_n = X_n$** (см. также п.18.4-5).

(б) Регрессия величины x_i на остальные $n-1$ величин часто аппроксимируется линейной функцией — **линейной регрессией**

$$g_i^{(1)} = \xi_i + \sum_{k \neq i} \beta_{ik}(x_k - \xi_k), \quad \beta_{ik} = -\frac{A_{ik}}{A_{ii}}, \quad (18.4-35)$$

где $(A_{ik}) = (\lambda_{ik})^{-1}$ есть матрица, обратная матрице моментов.

Коэффициенты регрессии β_{ik} определяются единственным образом, если распределение — собственное (п.18.4-8). **Сводный коэффициент корреляции**

$$\rho(x_i, g_i^{(1)}) = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_{ii} \Lambda_{ii}}} \quad (18.4-36)$$

является мерой корреляции между x_i и остальными $n-1$ величинами.

(с) Случайная величина $h_i^{(1)} = x_i - g_i^{(1)}$ (разность между x_i и ее «линейной оценкой» $g_i^{(1)}$ при $\Lambda_{ii} \neq 0$) называется **остатком** x_i относительно остальных $n-1$ величин. Заметим, что

$$\text{cov}\{h_i^{(1)}, x_k\} = 0 \quad (i \neq k), \quad D h_i^{(1)} = \frac{1}{\Lambda_{ii}} \quad (\text{остаточная дисперсия}). \quad (18.4-37)$$

(d) Коэффициент корреляции величин x_1 и x_2 по отношению к величинам x_3, x_4, \dots, x_n :

$$\rho_{12|34 \dots n} = \rho(h_{1|34 \dots n}^{(1)}, h_{2|34 \dots n}^{(1)}) = -\frac{\Lambda_{12}}{\sqrt{\Lambda_{11} \Lambda_{22}}} \quad (18.4-38)$$

измеряет корреляцию между x_1 и x_2 после устранения изменений, вызванных влиянием величин x_3, x_4, \dots, x_n . В частности, при $n=3$:

$$\rho_{12|3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}.$$

18.4-10. Характеристические функции (см. также п.18.3-8). Совместное распределение вероятностей n -мерной случайной величины $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ однозначно определяет **характеристическую функцию**

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) &\equiv \chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, \dots, q_n) \equiv M \exp\left(i \sum_{k=1}^n q_k x_k\right) \equiv \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \sum_{k=1}^n q_k x_k\right) d\Phi_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (18.4-39)$$

Для непрерывного распределения имеет место формула обращения

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i \sum_{k=1}^n q_k x_k\right) \chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_1 dq_2 \dots dq_n. \end{aligned} \quad (18.4-40)$$

Характеристическая функция, соответствующая m -мерному распределению m из n величин x_1, x_2, \dots, x_n находится путем подстановки в формулу (39) значений $q_k = 0$ для всех тех x_k , которые не входят в m -мерное распределение; так, например, $\chi_{12}(q_1, q_2) = \chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, 0, \dots, 0)$.

Моменты и семинварианты многомерных распределений могут быть получены как коэффициенты разложений в степенные ряды функций $\chi_{\mathbf{x}}$ и $\ln \chi_{\mathbf{x}}$, подобно тому как это сделано в п.18.3-10.

18.4-11. Независимость случайных величин (см. также п.18.2-3).

(а) Случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n называются **(взаимно) независимыми**, если независимы в совокупности события $\{x_1 \in S_1\}, \{x_2 \in S_2\}, \dots, \{x_n \in S_n\}$ для любого набора множеств S_1, S_2, \dots, S_n действительных чисел. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) \dots \Phi_n(x_n) \quad (18.4-41)$$

или в случаях дискретных и непрерывных случайных величин соответственно, чтобы

$$\left. \begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_n) &\equiv p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_n(x_n), \\ \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) &\equiv \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n). \end{aligned} \right\} \quad (18.4-42)$$

Распределение системы независимых случайных величин вполне определяется их индивидуальными распределениями. Независимые случайные величины **не коррелированы**, т. е. $\rho_{ik} = 0$ при всех $i \neq k$ (п.18.4-8,с), но обратное утверждение не всегда справедливо.

(б) Независимость многомерных случайных величин x_1, x_2, \dots определяется формулами вида (41) или (42), в которые вместо x_1, x_2, \dots надо подставить X_1, X_2, \dots .

Пример. Многомерные случайные величины (x_1, x_2) и (x_3, x_4, x_5) независимы тогда и только тогда, когда

$$\Phi_{12345}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \equiv \Phi_{12}(x_1, x_2) \Phi_{345}(x_3, x_4, x_5). \quad (18.4-43)$$

Заметим, что формула (43) влечет за собой независимость x_2 и x_5, x_1 и (x_3, x_4) , (x_1, x_2) и (x_3, x_5) и т. д.

(с) Если в распределении дискретной или непрерывной n -мерной случайной величины (x_1, x_2, \dots, x_n) m -мерная величина (x_1, x_2, \dots, x_m) независима от $(n-m)$ -мерной величины (x_{m+1}, \dots, x_n) , то

$$\left. \begin{aligned} & P_{12 \dots m(m+1) \dots n}(x_1, x_2, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv p_{12 \dots m}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \text{или} & \\ & \varphi_{12 \dots m(m+1) \dots n}(x_1, x_2, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv \varphi_{12 \dots m}(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \right\} \quad (18.4-44)$$

(д) Случайные величины x_1 и x_2 независимы тогда и только тогда, когда характеристическая функция двумерной случайной величины (x_1, x_2) равна произведению индивидуальных характеристических функций координат x_1 и x_2 (п.18.4-10), т.е.

$$\chi_{12}(q_1, q_2) \equiv \chi_1(q_1) \chi_2(q_2). \quad (18.4-45)$$

Аналогичная теорема верна для многомерных случайных величин.

(е) Если случайные величины x_1, x_2, \dots независимы, то независимы и случайные величины $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots$. Аналогичная теорема верна и для многомерных случайных величин.

18.4-12. Энтропия распределения вероятностей.

(а) Энтропия распределения вероятностей для одномерной случайной величины x с дискретным или непрерывным распределением определяется соответственно формулами

$$H(x) = \left\{ \begin{aligned} & M \log_2 \frac{1}{p(x)} = - \sum_x p(x) \log_2 p(x), \\ & M \log_2 \frac{1}{\varphi(x)} = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log_2 \varphi(x) dx. \end{aligned} \right. \quad (18.4-46)$$

$H(x)$ есть мера *априорной неопределенности* измерения величины x . В случае дискретного распределения вероятностей $H(x) \geq 0$, причем $H(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x имеет вырожденное (причинное) распределение (табл. 18.8-1). *Непрерывное распределение, имеющее наибольшую энтропию при данной дисперсии σ^2 , является нормальным распределением* (п.18.8-3) с $H(x) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma^2}$.

(б) Для дискретного или непрерывного распределения вероятностей двумерной случайной величины (x_1, x_2) энтропия определяется следующими формулами:

$$H(x_1, x_2) = \left\{ \begin{aligned} & -M \log_2 p(x_1, x_2), \\ & -M \log_2 \varphi(x_1, x_2). \end{aligned} \right. \quad (18.4-47)$$

Условная энтропия $H_{x_2}(x_1)$ определяется как

$$H_{x_2}(x_1) = \left\{ \begin{aligned} & -M \log_2 p_{112}(x_1 | x_2), \\ & -M \log_2 \varphi_{112}(x_1 | x_2) \end{aligned} \right. \quad (18.4-48)$$

(это не условные математические ожидания). Переставляя индексы 1 и 2, получим условную энтропию $H_{x_1}(x_2)$. Имеют место соотношения

$$H(x_1, x_2) = H(x_1) + H_{x_1}(x_2) = H(x_2) + H_{x_2}(x_1) \leq H(x_1) + H(x_2). \quad (18.4-49)$$

Равенство в правой части достигается тогда и только тогда, когда величины x_1 и x_2 независимы (п.18.4-11).

Неотрицательные величины

$$J(x_1, x_2) = H(x_1) + H(x_2) - H(x_1, x_2) = H(x_1) - H_{x_2}(x_1) = H(x_2) - H_{x_1}(x_2) \quad (18.4-50)$$

могут служить мерами зависимости между x_1 и x_2 .

18.5. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

18.5-1. Вводные замечания. Ниже даются соотношения, позволяющие рассчитывать распределения вероятностей функций от случайных величин.

18.5-2. Функции (или преобразования) одномерной случайной величины.

(а) Распределение вероятностей функции $y = y(x)$ вполне определяется распределением вероятностей случайной величины x (см. также п.18.2-8).

(б) Пусть случайные величины x и y связаны взаимно однозначным соответствием $y = y(x)$, $x = x(y)$. Тогда:

1. Если $y(x)$ — возрастающая функция, то

$$\left. \begin{aligned} \Phi_y(Y) &= \Phi_x[x(Y)], & \Phi_x(X) &= \Phi_y[y(X)], \\ y_P &= y(x_P), & x_P &= x(y_P). \end{aligned} \right\} \quad (0 < P < 1). \quad (18.5-1)$$

Заметим, что соотношение $y_{1/2} = y(x_{1/2})$, связывающее медианы $x_{1/2}$ и $y_{1/2}$, справедливо как для возрастающей, так и для убывающей функции $y(x)$.

2. Если x и y — непрерывные случайные величины, то

$$\varphi_y(Y) |dy| = \varphi_x[x(Y)] |dx| \quad \text{или} \quad \varphi_y(Y) = \varphi_x[x(Y)] \left| \frac{dx}{dy} \right|_{y=Y} \quad (18.5-2)$$

для всех значений Y величины y , при которых производная $\frac{dx}{dy}$ существует и непрерывна.

З а м е ч а н и е. Если функция $x(y)$ многозначна, то

$$\varphi_y(Y) = \varphi_{x_1}(Y) + \varphi_{x_2}(Y) + \dots,$$

где $\varphi_{x_1}(Y)$, $\varphi_{x_2}(Y)$, ... — плотности распределения, получаемые из формулы (2) для соответствующих однозначных ветвей $x_1(y)$, $x_2(y)$, ... функции $x(y)$.

П р и м е р. Если $y = x^2$, то $x_1 = +\sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$ и

$$\varphi_y(Y) = \begin{cases} 0 & \text{при } Y < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{Y}} \varphi_x(\sqrt{Y}) + \frac{1}{2\sqrt{Y}} \varphi_x(-\sqrt{Y}) & \text{при } Y > 0. \end{cases} \quad (18.5-3)$$

(с) Заметим, что вообще $M y(x) \neq y(Mx)$ (см. также п.18.5-3).

18.5-3. Линейные преобразования одномерной случайной величины.

(а) Если x — непрерывная случайная величина и $y = ax + b$, то

$$\varphi_y(Y) = \frac{1}{|a|} \varphi_x\left(\frac{Y-b}{a}\right). \quad (18.5-4)$$

(b) Если рассматриваемые ниже средние существуют, то

$$M(ax+b) = aMx+b, \quad D(ax+b) = a^2Dx, \quad (18.5-5)$$

$$\left. \begin{aligned} M(ax+b)^r &= a^r \alpha_r + \binom{r}{1} a^{r-1} b \alpha_{r-1} + \dots + b^r, \\ \chi_{ax+b}(q) &= e^{ibq} \chi_x(aq), \quad M_{ax+b}(s) = e^{bs} M_x(as), \quad \gamma_{ax}(s) = \gamma_x(s^a). \end{aligned} \right\} \quad (18.5-6)$$

Семинварианты κ_i для x (п.18.3-9) связаны с семинвариантами κ_i^* для $y = ax + b$ соотношениями

$$\kappa_1^* = a\kappa_1 + b, \quad \kappa_r^* = a^r \kappa_r \quad (r > 1).$$

(с) Особый интерес представляет линейное преобразование к стандартному виду (нормирование):

$$x' = \frac{x-\xi}{\sigma} \quad \text{с} \quad Mx' = 0, \quad Dx' = 1. \quad (18.5-7)$$

x' называется стандартизованной (нормированной) случайной величиной.

(d) Если функцию $y = y(x)$ на большей части спектра величины x можно представить приближенно линейной функцией, то

$$y \approx y(\xi) + y'(\xi)(x-\xi), \quad My(x) \approx y(\xi), \quad Dy(x) \approx [y'(\xi)]^2 Dx. \quad (18.5-8)$$

18.5-4. Функции (или преобразования) многомерных случайных величин.

(a) Если случайные величины

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots \quad (18.5-9)$$

представляют функции n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , то распределение вероятностей каждой случайной величины y_i однозначно определяется распределением вероятностей системы величин x_1, x_2, \dots, x_n ; то же верно для каждого m -мерного или условного распределения любого конечного числа случайных величин y_i .

Например, функция распределения величины y_i и функция распределения системы величин y_i и y_k определяются соответственно формулами

$$\Phi_{y_i}(Y_i) \equiv \int \int \dots \int_{y_i(x_1, \dots, x_n) < Y_i} d\Phi_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (18.5-10)$$

$$\Phi_{y_i, y_k}(Y_i, Y_k) \equiv \int \int \dots \int_{\substack{y_i(x_1, \dots, x_n) < Y_i \\ y_k(x_1, \dots, x_n) < Y_k}} d\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (18.5-11)$$

(b) Если $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — непрерывные n -мерные случайные величины, связанные взаимно однозначным невырожденным преобразованием (9), то их плотности распределения $\varphi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $\varphi_{\mathbf{y}}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ связаны соотношением

$$\varphi_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) |dy_1, dy_2, \dots, dy_n| = \varphi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \dots, X_n) |dx_1 dx_2 \dots dx_n|$$

или

$$\varphi_{\mathbf{y}}(Y_1, \dots, Y_n) = \varphi(X_1, \dots, X_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|. \quad (18.5-12)$$

где $X_i = x_i(Y_1, \dots, Y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) для всех Y_1, Y_2, \dots, Y_n , для которых якобиан существует и непрерывен.

Если функция $x(v)$ многозначна, то $\varphi_{\mathbf{y}}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ может быть вычислена способом, аналогичным указанному в п.18.5-2, б.

(с) Для любых двух случайных величин x_1 и x_2

$$Mx_1 x_2 = Mx_1 Mx_2 + \text{cov}\{x_1, x_2\}, \quad (18.5-13)$$

если эти средние существуют. Если x_1, x_2, \dots, x_n взаимно независимы, то

$$Mx_1x_2 \dots x_n = Mx_1Mx_2 \dots Mx_n \quad (18.5-14)$$

при условии существования этих средних.

18.5-5. Линейные преобразования (см. также пп. 14.5-1 и 14.6-1). Для каждого невырожденного линейного преобразования

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \eta_i + \sum_{k=1}^n a_{ik}(x_k - \xi_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ &\text{(в матричной форме } y = \eta + A(x - \xi)) \end{aligned} \right\} \quad (18.5-15)$$

распределения n -мерных случайных величин (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) имеют одинаковый ранг (п. 18.4-8,с), причем

$$My_i = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{(в матричной форме } My = \eta), \quad (18.5-16)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda'_{ik} &= M(y_i - \eta_i)(y_k - \eta_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \lambda_{jh} a_{ij} a_{kh} \\ &(i, k = 1, 2, \dots, n) \quad \text{(в матричной форме } A' = AA') \end{aligned} \right\} \quad (18.5-17)$$

если рассматриваемые средние существуют. Здесь $A = (\lambda_{ik})$ и $A' = (\lambda'_{ik})$ — матрицы моментов (п. 18.4-8,с) для (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно.

Методы п. 13.5-5 позволяют найти:

1) такое ортогональное преобразование вида (15), чтобы матрица новых моментов (λ'_{ik}) (а значит, и новая корреляционная матрица) была диагональной (приведение к некоррелированным случайным величинам y_i);

2) такое преобразование вида (15), чтобы $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n = 0$ и $\lambda'_{ik} = \delta_{ik}^2$ (приведение к некоррелированным стандартизованным случайным величинам y_i).

18.5-6. Среднее значение и дисперсия суммы случайных величин.

(а) Для любых двух (не обязательно независимых) случайных величин x_1, x_2

$$M(x_1 \pm x_2) = Mx_1 \pm Mx_2 = \xi_1 \pm \xi_2, \quad (18.5-18)$$

$$D(x_1 \pm x_2) = Dx_1 + Dx_2 \pm 2 \operatorname{cov} \{x_1, x_2\} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

(закон сложения дисперсий),

если рассматриваемые средние существуют.

(б) Более общие формулы

$$\left. \begin{aligned} M\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i, \\ D\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k. \end{aligned} \right\} \quad (18.5-19)$$

(с) Если функцию $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на большей части спектра n -мерной величины (x_1, x_2, \dots, x_n) можно приближенно представить линейной функцией, то

$$y \approx y(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_k} \Big|_{x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n} (x_k - \xi_k)$$

и средние My и Dy можно приближенно вычислять с помощью формул (16) и (17).

18.5-7. Суммы независимых случайных величин (примеры см. п. 18.8-9).(а) Если x_1 и x_2 — независимые случайные величины, то

$$\Phi_{x_1+x_2}(X) = \Phi_1(X) * \Phi_2(X) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(X-x_1) d\Phi_1(x_1) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(X-x_2) d\Phi_2(x_2),$$

$$\chi_{x_1+x_2}(q) = \chi_1(q) \chi_2(q), \quad (18.5-20)$$

$$P_{x_1+x_2}(X) = p_1(X) * p_2(X) \equiv \sum_{x_1} p_2(X-x_1) p_1(x_1) \equiv \sum_{x_2} p_1(X-x_2) p_2(x_2)$$

 $(x_1, x_2 \text{ дискретны}),$

$$\varphi_{x_1+x_2}(X) = \varphi_1(X) * \varphi_2(X) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(X-x_1) \varphi_1(x_1) dx_1 \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(X-x_2) \varphi_2(x_2) dx_2 \quad (x_1, x_2 \text{ непрерывны}),$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к распределениям x_1 и x_2 .(б) В более общем случае, если $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ есть сумма фиксированного числа n взаимно независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , то

$$\Phi_x(X) = \Phi_1(X) * \Phi_2(X) * \dots * \Phi_n(X), \quad \chi_x(q) = \chi_1(q) \chi_2(q) \dots \chi_n(q), \quad (18.5-21)$$

и если существуют рассматриваемые выражения, то

$$p_x(X) = p_1(X) * p_2(X) * \dots * p_n(X), \quad \varphi_x(X) = \varphi_1(X) * \varphi_2(X) * \dots * \varphi_n(X), \quad (18.5-22)$$

$$M_x(s) = M_1(s) M_2(s) \dots M_n(s), \quad \gamma_x(s) = \gamma_1(s) \gamma_2(s) \dots \gamma_n(s); \quad (18.5-23)$$

$$Mx = \xi = \sum_{i=1}^n Mx_i = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad Dx = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n Dx_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2; \quad (18.5-24)$$

$$M(x-\xi)^2 = \sum_{i=1}^n M(x_i-\xi_i)^2; \quad (18.5-25)$$

$$\kappa_r = \sum_{i=1}^n \kappa_r^{(i)}, \quad (18.5-26)$$

где $\kappa_r^{(i)}$ — семинварианты r -го порядка величины x_i .

Формулы (21) и (23) позволяют вычислять моменты высших порядков с помощью соотношений, приведенных в п. 18.3-10.

Распределение суммы

$$z \equiv (z_1, z_2, \dots) = x + y$$

двух независимых многомерных случайных величин $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ описывается формулами

$$\Phi_z(z_1, z_2, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(z_1-x_1, z_2-x_2, \dots) d\Phi_x(x_1, x_2, \dots), \quad (18.5-27)$$

$$\chi_z(q_1, q_2, \dots) = \chi_x(q_1, q_2, \dots) \chi_y(q_1, q_2, \dots). \quad (18.5-28)$$

18.5-8. Распределение суммы случайного количества случайных величин. Пусть x_1, x_2, \dots — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей, и пусть k — дискретная случайная величина со спектральными значениями $0, 1, 2, \dots$, причем величина k независима от x_1, x_2, \dots . Если производящие функции $\gamma_x(s)$ и $\gamma_k(s)$ существуют, то распределение суммы $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ дается производящей функцией

$$\gamma_x(s) = \gamma_k[\gamma_{x_1}(s)]. \quad (18.5-29)$$

18.6. СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

18.6-1. Последовательность распределенных вероятностей. Сходимость по вероятности. Последовательность случайных величин y_1, y_2, \dots сходится по вероятности к случайной величине y , если вероятность того, что y_n отличается от y на любое конечное число, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$y_n \xrightarrow{\text{вер}} y \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|y - y_n| > \varepsilon\} = 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0. \quad (18.6-1)$$

m -мерная случайная величина y_n сходится по вероятности к m -мерной случайной величине y , если каждая координата величины y_n сходится по вероятности к соответствующей координате величины y .

Если случайные величины $y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nm}$ сходятся по вероятности соответственно к постоянным a_1, a_2, \dots, a_m при $n \rightarrow \infty$, то любая рациональная функция $g(y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nm})$ сходится по вероятности к $g(a_1, a_2, \dots, a_m)$, если только $g(a_1, a_2, \dots, a_m)$ конечно.

18.6-2. Пределы функций распределения, характеристических и производящих функций. Теоремы непрерывности.

(а) y_n сходится по вероятности к y при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность функций распределения $\Phi_{y_n}(Y)$ сходится к пределу $\Phi_y(Y)$ во всех точках Y , где $\Phi_y(Y)$ непрерывна (сходимость в основном).

(б) y_n сходится по вероятности к y при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность характеристических функций $\chi_{y_n}(q)$ сходится к пределу, непрерывному при $q = 0$; в этом случае $\chi_y(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{y_n}(q)$ (теорема непрерывности для характеристических функций).

(в) Последовательность дискретных случайных величин y_1, y_2, \dots сходится по вероятности к дискретной случайной величине y при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{y_n}(Y) = p_y(Y). \quad (18.6-2)$$

Если все случайные величины y_1, y_2, \dots имеют целые неотрицательные спектральные значения $0, 1, 2, \dots$ и обладают производящими функциями $\gamma_{y_1}(s), \gamma_{y_2}(s), \dots$, то формула (2) справедлива тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{y_n}(s) = \gamma_y(s)$ при $0 < s < 1$ (теорема непрерывности для производящих функций).

Заметим, что последовательность дискретных случайных величин может сходиться по вероятности к случайной величине, которая не будет дискретной (см., например, табл. 18.8-3).

(д) Аналогичные теоремы применимы, если $y(n)$ сходится как функция непрерывного параметра n .

(е) Аналогичные теоремы применимы к многомерным случайным величинам.

18.6-3. Сходимость в среднем (см. также п.12.5-3). Последовательность случайных величин y_1, y_2, \dots , имеющих конечные средние значения и дисперсии, сходится в среднем к величине y при $n \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(y - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(y - y_n) = 0 \quad (18.6-3)$$

(предполагается, что My и Dy также конечны).

Сходимость в среднем влечет за собой сходимость по вероятности, но обратное неверно; более того, из сходимости по вероятности y_n к y при $n \rightarrow \infty$ не следует даже, что My и Dy существуют.

18.6-4. Асимптотически нормальные распределения вероятностей (примеры см. в табл. 18.8-3 и п.19.5-3). Случайная величина y_n с функцией распределения $\Phi_{y_n}(Y)$ распределена асимптотически нормально, если существует последовательность пар действительных чисел η_n, σ_n^2 таких, что случайные

величины $\frac{y_n - \eta_n}{\sigma_n}$ сходятся по вероятности к стандартизованной нормальной величине (п.18.8-3). Это имеет место тогда и только тогда, когда для всех a и $b > a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n + a\sigma_n < y_n < \eta_n + b\sigma_n\} = \Phi_u(b) - \Phi_u(a). \quad (18.6-4)$$

Формула (4) позволяет аппроксимировать распределение вероятностей величины y_n для достаточно больших n нормальным распределением с центром η_n и дисперсией σ_n^2 . Заметим, что из формулы (4) не следует ни то, что η_n и σ_n^2 являются центром и дисперсией величины y_n , ни то, что последовательность y_n сходится по вероятности, ни то, что пределы $M y_n$ и η_n или $D y_n$ и σ_n^2 совпадают. На самом деле эти пределы могут даже не существовать.

18.6-5. Предельные теоремы.

(а) Для каждого класса случайных событий E с вероятностями $P_n\{E\}$ имеем:

1) относительная частота $h_n\{E\} = \frac{n_E}{n}$ (п.19.2-1) появления события E за n независимых повторных испытаний (п.18.2-4) есть случайная величина, которая сходится в среднем и, следовательно, по вероятности к $P\{E\}$ при $n \rightarrow \infty$ (теорема Бернулли);

2) $h_n\{E\}$ имеет асимптотически нормальное распределение вероятностей с центром $\eta_n = P\{E\}$ и дисперсией $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} P\{E\}(1 - P\{E\})$ (см. также таблицу 18.8-3).

Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} p(n_E) &= \binom{n}{n_E} P\{E\}^{n_E} (1 - P\{E\})^{n - n_E} & (n_E = 0, 1, 2, \dots, n), \\ M \frac{n_E}{n} &= P\{E\}, \quad D \frac{n_E}{n} = \frac{1}{n} P\{E\}(1 - P\{E\}). \end{aligned} \right\} \quad (18.6-5)$$

(б) Пусть x_1, x_2, \dots — последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих одно и то же распределение вероятностей с конечным центром ξ . Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеем:

1) случайная величина $\bar{x}_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ сходится по вероятности к ξ (теорема Хинчина, закон больших чисел);

2) случайная величина \bar{x}_n имеет асимптотически нормальное распределение вероятностей с центром $\eta_n = \xi$ и дисперсией $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ при условии, что существует общая дисперсия σ^2 величин x_1, x_2, \dots (теорема Линдберга—Левы, центральная предельная теорема).

(в) Пусть x_1, x_2, \dots — последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих конечные центры ξ_1, ξ_2, \dots и дисперсии $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$. Тогда при $n \rightarrow \infty$:

1) из $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ следует, что $x_n - \xi_n \xrightarrow{\text{вер}} 0$;

2) из $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 0$ следует

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \xrightarrow{\text{вер}} 0$$

(закон больших чисел, теорема Чебышева);

3) случайная величина $\sum_{i=1}^n x_i$ имеет асимптотически нормальное распределение с центром $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ и дисперсией $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ при условии, что для любого положительного числа ε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D \sum_{i=1}^n z_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} = 1, \quad \text{где } z_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } (x_i - \xi_i)^2 \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \\ 0, & \text{если } (x_i - \xi_i)^2 > \varepsilon \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \end{cases} \quad (18.6-6)$$

(центральная предельная теорема, условия Линдберга).

* Условия Линдберга удовлетворяются, в частности, если существует такое положительное число α , что при $n \rightarrow \infty$:

$$B_n = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^n M |x_i - \xi_i|^{2+\alpha} \rightarrow 0,$$

где $B_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ условия Ляпунова). *

18.7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

18.7-1. Вводные замечания. Многие задачи теории вероятностей сводятся к нахождению распределения случайной величины x (или системы случайных величин) по данному распределению других случайных величин x_1, x_2, \dots . Как правило, простые события, отмечаемые значениями величины x , оказываются сложными событиями по отношению к значениям величин x_1, x_2, \dots . Первый шаг в решении любой такой задачи должен состоять в четком определении множества элементарных событий, отмеченного каждой случайной величиной. Тогда вероятности сложных событий могут быть вычислены методами пп.18.2-2 — 18.2-6 и 18.5-1 — 18.7-3. Формулы (18.3-3), (18.3-6), (18.4-7) или (18.4-27) могут применяться для контроля вычислений.

18.7-2. Задачи с дискретным распределением вероятностей: подсчет событий и комбинаторный анализ. Следующие соотношения (каждое в отдельности или в сочетании с соотношениями пп.18.2-2 — 18.2-6) помогают вычислять вероятности сложных событий по данному множеству элементарных событий.

(а) Если множество элементарных событий конечно (состоит из N «случаев») и все элементарные события равновероятны, то вероятность сложного события («успеха»), определяемого как объединение N_1 элементарных событий («благоприятствующих») случаев, можно вычислить по формуле

$$\text{вероятность успеха} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число всех случаев}} = \frac{N_1}{N}. \quad (18.7-1)$$

(б) Если множество элементарных событий счетно (конечно или бесконечно) и событие E состоит в объединении N_1 элементарных событий с вероятностями p_1, N_2 элементарных событий с вероятностями p_2, \dots , то

$$P\{E\} = N_1 p_1 + N_2 p_2 + \dots, \quad (18.7-2)$$

причем $N_1 + N_2 + \dots$ не обязан быть конечным.

(с) Во многих задачах рассматриваемые элементарные события представляют собой различные возможные расположения данного множества или множеств элементов, так что числа N_1, N_2, \dots в приведенных выше соотношениях являются количествами *перестановок, сочетаний* и т. п. *Наиболее важные определения и формулы для них приведены в табл. 18.7-1—18.7-3.* Отсылаем к п.1.2-4 и табл. 21.5-1 для определения и свойств факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга (п.21.4-2) применяется для приближенных вычислений. Дополнительный материал содержится в книге [18.10].

Перестановки и разбиения

Т а б л и ц а 18.7-1

1	Число различных перестановок из n различных объектов	$n!$
2	а) Число различных последовательностей из N объектов, содержащих $n < N$ неразличимых объектов типа 1 и $N-n$ неразличимых объектов типа 2, или б) Число различных разбиений последовательности из N различных объектов на два класса из $n < N$ и $N-n$ объектов соответственно	$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$ (биномиальные коэффициенты, п.21.5-1)
3	а) Число различных последовательностей из $N = N_1 + N_2 + \dots + N_r$ объектов, содержащих N_1 неразличимых объектов типа 1, N_2 неразличимых объектов типа 2, ... и N_r неразличимых объектов типа r , или б) Число различных разбиений последовательности $N = N_1 + N_2 + \dots + N_r$ различных объектов на r классов из N_1, N_2, \dots, N_r объектов соответственно	$\frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_r!}$ (мультиномиальные коэффициенты)

Т а б л и ц а 18.7-2

Сочетания и выборки

Каждая формула справедлива для $N < n, N = n$ и $N > n$

1	Число различных неупорядоченных сочетаний из N объектов различного типа по n в каждом: а) объект каждого типа может встречаться не более одного раза в любом сочетании (<i>сочетания без повторений</i>) б) объект каждого типа может встречаться 0, 1, 2, ... или n раз в любом сочетании (<i>сочетания с повторениями</i>) с) объект каждого типа должен встречаться по крайней мере один раз в каждом сочетании	$\binom{N}{n}$ $\binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1}$ $\binom{n-1}{N-1}$
2	Число различных выборок (размещений, упорядоченных рядов) объема n из совокупности N различного типа объектов: а) объект каждого типа может встречаться не более одного раза в любой выборке (<i>выборки без возвращения, размещения без повторения</i>) б) объект каждого типа может встречаться 0, 1, 2, ... или n раз в каждой выборке (<i>выборки с возвращением, размещения с повторением</i>)	$N(N-1) \dots (N-n+1) = \binom{N}{n} n!$ N^n

П р и м е р. Дано множество $N = 3$ различного типа элементов a, b, c . Для $n = 2$ существуют 3 сочетания без повторения (ab, ac, bc), 6 сочетаний с повторениями (aa, ab, ac, bb, bc, cc), 6 различных выборок без возвращения (ab, ac, ba, bc, ca, cb), 3 различных выборок с возвращением ($aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$).

Т а б л и ц а 18.7-3

Размещения в ячейках или расположения
Каждая формула справедлива для $N < n$, $N = n$ и $N > n$

1	<p>Число различных размещений из n неразличимых объектов в N различных ячейках (положениях):</p> <p>а) нет ячейки, которая содержит более одного объекта</p> <p>б) каждая ячейка может содержать 0, 1, 2, ... или n объектов</p> <p>с) каждая ячейка должна содержать хотя бы один объект</p>	$\binom{N}{n}$ $\binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1}$ $\binom{n-1}{N-1}$
2	<p>Число различных размещений из n различных объектов в N различных ячейках:</p> <p>а) нет ячейки, которая содержит более одного объекта</p> <p>б) каждая ячейка может содержать 0, 1, 2, ... или n объектов</p>	$N(N-1) \dots (N-n+1) =$ $= \binom{N}{n} n!$ N^n

18.7-3. Задачи с дискретным распределением вероятностей: успехи и неудачи в составляющих испытаниях. Часто рассматриваются такие составляющие испытания, которые допускают только два возможных исхода («успех» и «неудача»). Вероятности различных сложных событий при этом могут быть подсчитаны методами пп.18.2-2—18.2-6 через вероятности $\theta_1, \theta_2, \dots$ успехов в первом, втором, ... составляющих испытаниях.

Для применения методов пп.18.5-6—18.5-8 следует связать с k -м составляющим испытанием дискретную случайную величину x_k со спектральными значениями 1_k и 0, соответствующими событиям «успех» и «неудача»; для этой величины имеем:

$$p_{x_k}(1) = \theta_k, \quad p_{x_k}(0) = 1 - \theta_k, \quad (18.7-3)$$

$$Mx_k = \theta_k, \quad Dx_k = \theta_k(1 - \theta_k), \quad (18.7-4)$$

$$\chi_{x_k}(q) = (1 - \theta_k) + \theta_k e^{iq}, \quad \mu_{x_k}(s) = (1 - \theta_k) + \theta_k e^s, \quad \gamma_{x_k}(s) = (1 - \theta_k) + \theta_k s. \quad (18.7-5)$$

Успехи в двух или более независимых испытаниях будут по определению независимыми событиями (п.18.2-4). Повторные независимые испытания, каждое из которых имеет лишь два возможных исхода, называются испытаниями по схеме Бернулли ($\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta$). Вероятность появления точно $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ успехов в n испытаниях по схеме Бернулли дается биномиальным распределением (табл. 18.8-3).

18.8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.8-1. Дискретные одномерные распределения вероятностей. Таблицы 18.8-1—18.8-7 описывают некоторые дискретные одномерные распределения, представляющие интерес в связи с выборочными обследованиями, азартными играми и т. п. В первую очередь табулированы производящие функции, так как по ним легко найти характеристические функции и производящие функции моментов по формулам

$$\chi_x(q) = \gamma_x(e^{iq}); \quad M_x(s) = \gamma_x(e^s)$$

(см. также п.18.3-8). Моменты, не приведенные в таблице, можно вычислить методами п.18.3-10.

Т а б л и ц а 18.8-1

Вырожденное (причинное) распределение
(см. также табл. 18.8-11)

(а)	$p(x) = \delta_x^\xi = \begin{cases} 1 & \text{при } x = \xi, \\ 0 & \text{при } x \neq \xi \end{cases}$	$(x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \xi - \text{целое}).$
(б)	$Mx = \xi, \quad Dx = 0, \quad \gamma_x(s) = s^\xi$	

Таблица 18.8-2

Гипергеометрическое распределение

$$(a) p(x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n; N \geq n \geq 0; N > N_1 = \vartheta N > 0).$$

$$(b) Mx = \frac{nN_1}{N} = n\vartheta; Dx = \frac{nN_1(N-N_1)}{N^2} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = n\vartheta(1-\vartheta) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

(c) **Типичное толкование.** $p(x)$ есть вероятность того, что случайная бесповторная выборка объема n (п.19.5-5) содержит точно x элементов типа 1, если эта выборка производится из генеральной совокупности N элементов, среди которых $N_1 = \vartheta N$ элементов принадлежат типу 1.

(d) **Приближения.** Если $N \rightarrow \infty$, в то время как n и $\vartheta = N_1/N$ остаются фиксированными, то гипергеометрическое распределение стремится к биномиальному распределению (табл. 18.8-3; бесповторные выборки мало отличаются от повторных выборок, если отношение n/N мало). Аппроксимация биномиальным распределением применима, если $n/N < 0,1$.

Таблица 18.8-3

Биномиальное распределение

(рис. 18.8-1; см. также п.18.7-3)

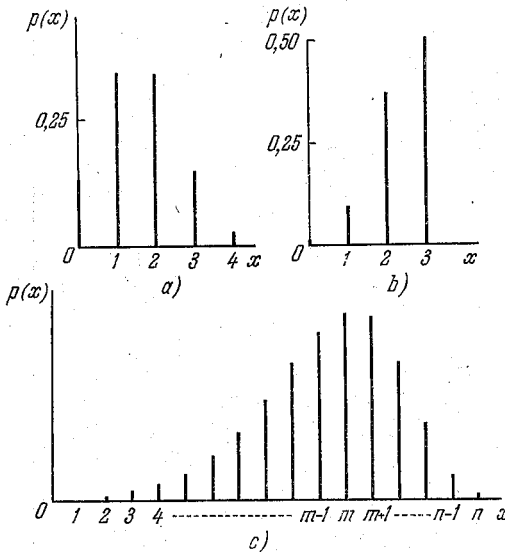


Рис. 18.8-1. Биномиальное распределение:

a) $n=4, \vartheta=0,4$; b) $n=3, \vartheta=0,8$; c) $n=16, \vartheta=0,7$; m — мода.

Т а б л и ц а 18.8-3 (продолжение)

(а) $p(x) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}$ ($x = 0, 1, 2, \dots, n; 0 < \vartheta < 1$).

Вероятность $p(x)$ имеет наибольшее значение, когда x равен целой части числа $(n+1)\vartheta$ (если это число целое, то $p[(n+1)\vartheta] = p[(n+1)\vartheta-1]$). При $\vartheta > \frac{n}{n+1}$ последовательность $p(0), p(1), p(2), \dots$ монотонно возрастает, при $\vartheta < \frac{1}{n+1}$ она монотонно убывает, в остальных случаях биномиальное распределение одномодально (рис. 18.8-1). Заметим также, что

$$\Phi_x(x) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} \vartheta^i (1-\vartheta)^{n-i} = 1 - J_{\vartheta} \left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2} \right) = 1 - \Phi_{\vartheta^2(m_1, m_2)} \left(\frac{m_2}{m_1} \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \right)$$

с $m_1 = 2(x+1), m_2 = 2(n-x)$ (см. пп.19.5-3 и 21.4-5).

(б) $Mx = n\vartheta, Dx = n\vartheta(1-\vartheta), \gamma_x(s) = (\vartheta s + 1 - \vartheta)^n,$
 $\alpha_2 = n\vartheta + n(n-1)\vartheta^2, \alpha_3 = n(n-1)(n-2)\vartheta^3 + 3n(n-1)\vartheta^2 + n\vartheta,$
 $\mu_3 = n\vartheta(1-\vartheta)(1-2\vartheta), \mu_4 = n\vartheta(1-\vartheta)[1 + 3(n-2)\vartheta(1-\vartheta)],$
 $\gamma_1 = \frac{1-2\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}, \gamma_2 = \frac{1-6\vartheta(1-\vartheta)}{n\vartheta(1-\vartheta)}.$

(с) Типичное толкование. $p(x)$ есть:

1) вероятность того, что повторная случайная выборка объема n (п.19.5-5) содержит точно x элементов типа 1, если генеральная совокупность объема N содержит ϑN элементов типа 1;

2) вероятность появления события точно x раз в n независимых испытаниях по схеме Бернулли (п.18.7-3) при условии, что вероятность события в каждом испытании равна ϑ .

(д) Приближения. Биномиальное распределение при $n \rightarrow \infty$ является асимптотически нормальным с центром $n\vartheta = \xi$ и дисперсией $n\vartheta(1-\vartheta) = \sigma^2$ (предельная теорема Муавра—Лапласа, частный случай центральной предельной теоремы, п.18.6-5). При $0 < \vartheta < 1$

$$\sum_{i=0}^x p(x) \approx \Phi_u \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right) \approx \Phi_u \left(\frac{x + \frac{1}{2} - \xi}{\sigma} \right) - \Phi_u \left(\frac{x - \frac{1}{2} - \xi}{\sigma} \right);$$

когда $\frac{(x-\xi)^2}{\sigma^4} \rightarrow 0;$

$$\{P\{X_1 < x < X_2\}\} \approx \Phi_u \left(\frac{X_2 + \frac{1}{2} - \xi}{\sigma} \right) - \Phi_u \left(\frac{X_1 - \frac{1}{2} - \xi}{\sigma} \right),$$

когда $\frac{(X_1 - \xi)^2}{\sigma^4} \rightarrow 0, \frac{(X_2 - \xi)^2}{\sigma^4} \rightarrow 0;$

$$P \left\{ a < \frac{x-\xi}{\sigma} < b \right\} \rightarrow \Phi_u(b) - \Phi_u(a), \text{ когда } n \rightarrow \infty \text{ при фиксированных } a, b.$$

Приближения, основанные на этих соотношениях, применимы при

$$\frac{\xi}{\sigma^2} = [n\vartheta(1-\vartheta)] \gg 9.$$

Об исследовании ошибок приближения см. [18.8]. Аппроксимацию биномиального распределения распределением Пуассона см. в табл. 18.8-4.

Таблица 18.8-4

Распределение Пуассона (рис. 18.8-2)

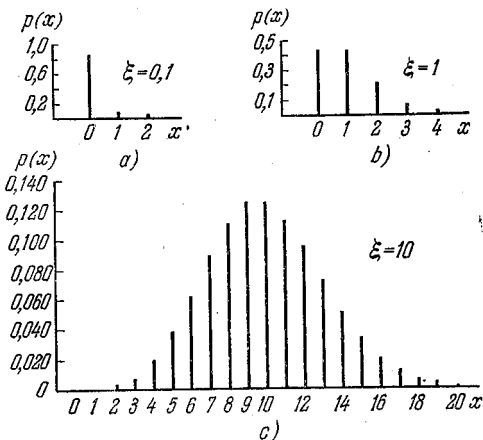


Рис. 18.8-2. Распределение Пуассона.

$$(a) \quad p(x) = e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots; \xi > 0),$$

$$(b) \quad Mx = Dx = \xi, \quad \gamma_2(s) = e^{\xi s^2 - \xi s},$$

$$\alpha_2 = \xi(\xi + 1), \quad \alpha_3 = \xi(\xi^2 + 3\xi + 1),$$

$$\alpha_4 = \xi(\xi^3 + 6\xi^2 + 7\xi + 1),$$

$$\mu_3 = \xi, \quad \mu_4 = 3\xi^2 + \xi,$$

$$\gamma_1 = \xi^{-1/2}; \quad \gamma_2 = \xi^{-1}.$$

(с) Распределение Пуассона аппроксимирует гипергеометрическое распределение (табл. 18.8-2) и биномиальное распределение (табл. 18.8-3), когда $\phi N \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$ при условии, что ϕn имеет конечный предел ξ (закон малых чисел). Это приближение применяется при $\phi < 0, 1$. Наиболее важные приложения распределения Пуассона, связанные со случайными процессами, см. п.18.9-3.

Таблица 18.8-5

Геометрическое распределение

$$(a) \quad p(x) = \phi(1-\phi)^x \quad (x = 0, 1, 2, \dots; 0 < \phi < 1),$$

$$(b) \quad Mx = \frac{1-\phi}{\phi}, \quad Dx = \frac{1-\phi}{\phi^2}, \quad \gamma_2(s) = \frac{\phi}{1-(1-\phi)s}.$$

(с) Типичное толкование. $p(x)$ есть вероятность появления события (успеха) в первый раз после точно x испытаний по схеме Бернулли при вероятности успеха ϕ . $\Phi(x) = 1 - (1-\phi)^{x+1}$ ($x = 0, 1, 2, \dots$) есть вероятность того, что первый успех появится самое большее после x испытаний (см. также табл. 18.8-6).

Таблица 18.8-6

Распределение Паскаля

$$(a) p(x) = \binom{m+x-1}{x} \theta^m (1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots; 0 < \theta < 1).$$

$$(b) Mx = m \frac{1-\theta}{\theta}, \quad Dx = m \frac{1-\theta}{\theta^2}, \quad \gamma_x(s) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)s} \right)^m.$$

(с) Типичное толкование. $p(x)$ есть вероятность появления события («успеха») в m -й раз после точно $m+x-1$ испытаний по схеме Бернулли при вероятности успеха θ . $\Phi(x)$ есть вероятность того, что m -й успех наступит самое большое после $m+x-1$ испытаний. При $m=1$ распределение Паскаля сводится к геометрическому распределению (табл. 18.8-5).

Таблица 18.8-7

Распределение Пуассона

$$(a) p(x) = \left(\frac{\xi}{1+\beta\xi} \right)^x \frac{1(1+\beta) \dots [1+(x-1)\beta]}{x!} p(0) \quad (x = 1, 2, \dots),$$

$$p(0) = (1+\beta\xi)^{-\frac{1}{\beta}} \quad (\xi > 0, \beta > 0).$$

$$(b) Mx = \xi, \quad Dx = \xi(1+\beta\xi), \quad \gamma_x(s) = (1+\beta\xi - \beta\xi s)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

(с) Распределение Пуассона сводится к распределению Пуассона (табл. 18.8-4) при $\beta=0$ и к геометрическому распределению (табл. 18.8-5) при $\beta=1$. О толковании на языке случайных процессов (процесс размножения) см. [18.8]

18.8-2. Дискретные многомерные распределения вероятностей (см. также п.18.4-2).

(а) **Полиномиальное распределение** описывается формулой

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{N!}{x_1! x_2! \dots x_n!} \vartheta_1^{x_1} \vartheta_2^{x_2} \dots \vartheta_n^{x_n} \quad (18.8-1)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n = 0, 1, 2, \dots; x_1 + x_2 + \dots + x_n = N),$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ — положительные числа, сумма которых

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n = 1.$$

Если испытание имеет n попарно несовместных исходов E_1, E_2, \dots, E_n с вероятностями $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$, где $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n = 1$, то выражение (1) дает вероятность того, что события E_1, E_2, \dots, E_n произойдут соответственно x_1, x_2, \dots, x_n раз за N повторных независимых испытаний (см. также п.18.7-3).

В классической статистической механике x_1, x_2, \dots, x_n — числа замещений n независимых состояний с априорными вероятностями $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ соответственно.

(б) **Многомерное распределение Пуассона** описывается формулой

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)} \frac{\xi_1^{x_1} \xi_2^{x_2} \dots \xi_n^{x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!} \quad (18.8-2)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n = 0, 1, 2, \dots; \xi_k > 0, k = 1, 2, \dots, n).$$

18.8-3. Непрерывные распределения вероятностей: нормальное распределение (Гаусса). Непрерывная случайная величина x распределена нормально

с центром ξ и дисперсией σ^2 (или нормальна с параметрами ξ, σ^2), если

$$\varphi(X) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right)^2} \equiv \frac{1}{\sigma} \varphi_u\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right),$$

$$\Phi(X) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)^2} dx \equiv \Phi_u\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right) \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{X-\xi}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (18.8-3)$$

Распределение стандартизованной нормальной величины (нормального отклонения) $u = \frac{x-\xi}{\sigma}$ (см. также п.18.5-3,с и п.18.8-4) дается формулами

$$\varphi_u(U) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}U^2} \quad (\text{плотность нормального распределения; см. табл. 18.8-8})$$

$$\Phi_u(U) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^U e^{-\frac{1}{2}u^2} du \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (18.8-4)$$

(нормальная функция распределения; см. табл. 18.8-9)
 $Mu = 0, \quad Du = 1.$

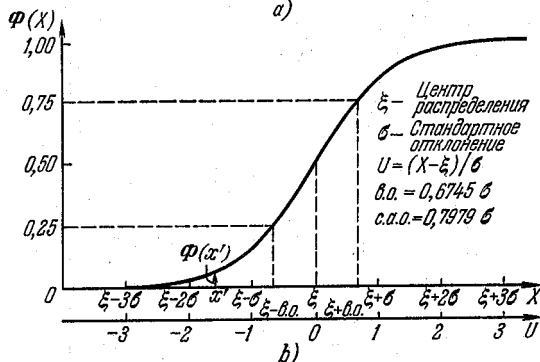
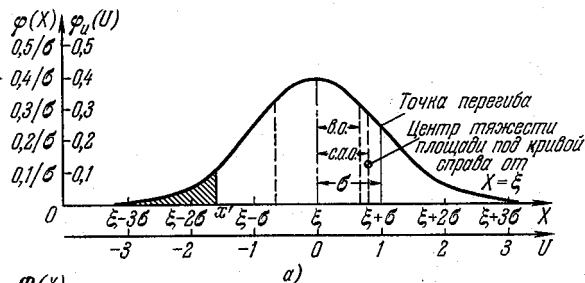


Рис. 18.8-3. а) Плотность нормального распределения

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma} \varphi_u(U), \quad U = \frac{X-\xi}{\sigma}.$$

б) Нормальная функция распределения

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)^2} dx = \Phi_u(U), \quad U = \frac{X-\xi}{\sigma}$$

$\operatorname{erf} z$ — функция ошибок (см. также п.21.3-2 и табл. 18.8-10)

$$\operatorname{erf} z \equiv -\operatorname{erf}(-z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta = 2\Phi_u(z/\sqrt{2}) - 1. \quad (18.8-5)$$

$\varphi(X)$ имеет точки перегиба при $X = \xi \pm \sigma$. Заметим, что

$$\varphi_u^{(k)}(U) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k H_k\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right) \varphi_u(U), \quad (18.8-6)$$

где $H_k(z)$ — многочлен Эрмита степени k (п.21.7-1).

Каждое нормальное распределение симметрично относительно центра ξ ; ξ есть медиана и единственная мода. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю;

$$\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \dots (2k-1) \sigma^{2k}, \quad \mu_{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (18.8-7)$$

$$\kappa_1 = \xi, \quad \kappa_2 = \sigma^2; \quad \kappa_3 = \kappa_4 = \dots = 0, \quad (18.8-8)$$

$$\chi_u(q) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} q^2 + i\xi q\right). \quad (18.8-9)$$

Моменты σ_r относительно начала можно вычислить способом, указанным в п.18.3-10.

Таблица 18.8-8

Плотность нормального распределения (стандартизованного)

$$\varphi_u(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-U^2/2}$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29658	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12004	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	9893	9728	9566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00774	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

Таблица 18.8-9

Интеграл вероятностей

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{U}{\sqrt{2}} \right) = \Phi_u(U) - \frac{1}{2}$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	4999997133									

18.8-4. Нормальные случайные величины: распределение отклонений от центра.

(а) Для любой нормальной случайной величины x с центром ξ и дисперсией σ^2

$$P(a < x < b) = \Phi_u \left(\frac{b-\xi}{\sigma} \right) - \Phi_u \left(\frac{a-\xi}{\sigma} \right) \tag{18.8-10}$$

и при $Y > 0$:

$$P\{|x-\xi| < Y\sigma\} = P(\xi - Y\sigma < x < \xi + Y\sigma) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Y}^Y e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi_u(Y) - 1 = \operatorname{erf} \left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right) = \Phi_{1u}(Y), \tag{18.8-11}$$

$$P\{|x-\xi| > Y\sigma\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_Y^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2[1 - \Phi_u(Y)] = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \Phi_{1u}(Y). \tag{18.8-12}$$

Таблица 18.8-10

Функция ошибок

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0014	0023	0034	0045	0056	0068	0079	0090	0102
1	0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
2	0226	0237	0248	0260	0271	0282	0293	0305	0316	0327
3	0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
4	0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0553
5	0564	0575	0586	0598	0609	0620	0631	0643	0654	0665
6	0676	0688	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
7	0789	0800	0811	0822	0834	0845	0856	0867	0878	0890
8	0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
9	1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
10	1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1225
1	1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
2	1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
3	1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
4	1569	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
5	1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
6	1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
7	1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
8	2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
9	2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
20	2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
1	2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
2	2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
3	2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
4	2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753
5	2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
6	2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
7	2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
8	3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
9	3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
30	3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
1	3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
2	3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3573	3583
3	3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
4	3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
5	3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3873	3883
6	3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
7	3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
8	4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
9	4187	4197	4207	4216	4226	4236	4245	4255	4265	4274
40	4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
1	4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
2	4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
3	4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
4	4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
5	4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
6	4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
7	4937	4946	4956	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
8	5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
9	5117	5126	5134	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196
50	5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284

(b) Квантили

$$|u|_P = u_{1+P} = |u|_{1-\alpha} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (18.8-13)$$

определяемые формулой

$$P(|x-\xi| < |u|_P \sigma) = P = 1-\alpha, \quad (18.8-14)$$

часто принимаются в качестве доверительных границ нормального отклонения u или в частях α -значений нормального отклонения (см. также п.19.6-4). Заметим, что

$$|u|_{0,95} = u_{0,975} \approx 1,96, \quad |u|_{0,99} = u_{0,995} \approx 2,58, \quad |u|_{0,999} = u_{0,9995} \approx 3,29. \quad (18.8-15)$$

(с) Для нормального распределения применяются следующие характеристики рассеяния (см. также табл. 18.3-1):

среднее абсолютное отклонение (с. а. о.)

$$M|x-\xi| = \sigma M|u| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0,798\sigma,$$

Непрерывные одномерные

	Распределение	Плотность распределения $\varphi(x)$	Функции распределения $\Phi(x)$
1	Вырожденное (причинное) распределение	$\delta(x-\xi) = \begin{cases} 0 & (x \neq \xi), \\ \infty & (x = \xi) \end{cases}$ (см. п.21.9-2)	$U_+(x-\xi)$ (см. п.21.9-1)
2	Равномерное (прямоугольное) распределение	$\begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & (x-\xi < \alpha), \\ 0 & (x-\xi > \alpha) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & (x < \xi-\alpha), \\ \frac{1}{2\alpha}(x-\xi+\alpha) & (\xi-\alpha < x < \xi+\alpha), \\ 1 & (x > \xi+\alpha) \end{cases}$
3	Распределение Коши	$\frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)^2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{\alpha}$
4	Распределение Лапласа	$\frac{1}{2\beta} e^{-\frac{ x-\xi }{\beta}}$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{ x-\xi }{\beta}} & (x < \xi), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{ x-\xi }{\beta}} & (x > \xi) \end{cases}$
5	Бета-распределение	$\begin{cases} 0 & (x < 0, x > 1), \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & (0 < x < 1) \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} & (0 < x < 1), \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$
6	Гамма-распределение	$\begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & (x > 0) \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)	$\begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma_\beta(x) & (x > 0) \end{cases}$

вероятное отклонение (в. о., медиана величины $|x - \xi|$)

$$|u|_{1/2} \sigma = -u_{1/4} \sigma = u_{3/4} \sigma \approx 0,674\sigma,$$

половина полушироты $\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 1,177\sigma,$

нижний и верхний квартили $x_{1/4} = \xi + u_{1/4} \sigma = \xi - |u|_{1/2} \sigma,$ $x_{3/4} = \xi + u_{3/4} \sigma = \xi + |u|_{1/2} \sigma,$

$$\text{мера точности } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

18.8-5. Различные непрерывные одномерные распределения вероятностей.

Табл. 18.8-11 описывает некоторые непрерывные одномерные распределения.

Т а б л и ц а 18.8-11

распределения вероятностей

Центр $M(x)$	Дисперсия $D(x)$	Характеристи- ческая функция $\chi_x(q)$	Примечания
ξ	0	$e^{i\xi q}$	x равен ξ почти всегда. Вырожденное распределение аппроксимирует распределение равномерное, Коши или Лапласа при $\alpha \rightarrow 0$ или $\beta \rightarrow 0$
ξ	$\frac{\alpha^2}{3}$	$\frac{\sin \alpha q}{\alpha q} e^{i\xi q}$	Величина x равномерно распределена на интервале $(\xi - \alpha, \xi + \alpha)$
M_x и D_x не существуют; главное значение по Коши (п. 4.6-2,с) среднего M_x равно ξ		$e^{i\xi q - \alpha q }$	Это есть распределение величины $x = \xi + \alpha \operatorname{tg} y$, если величина y распределена равномерно в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Распределение симметрично относительно $x = \xi$
ξ	$2\beta^2$	$\frac{e^{i\xi q}}{1 + \beta^2 q^2}$	При $\xi = 0$ характеристическая функция пропорциональна плотности распределения Коши с $\alpha = \frac{1}{\beta}$
$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$	см. (18.3-21)	$B_x(\alpha, \beta)$ — неполная бета-функция (п. 21.4-5). Единственная мода $\frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$ при $\alpha > 1, \beta > 1.$ $\alpha_r = \frac{\Gamma(\alpha + r) \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta + r)}$
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$(1 - \frac{i q}{\beta})^{-\alpha}$	$\Gamma_x(\alpha)$ — неполная гамма-функция (п. 21.4-5)

18.8-6. Двумерные нормальные распределения.

(а) Двумерное нормальное распределение задается плотностью распределения

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} (u_1^2 - 2\rho_{12}u_1u_2 + u_2^2) \right\},$$

где

$$u_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}, \quad u_2 = \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho_{12}| \leq 1).$$

Распределения координат x_1 и x_2 являются нормальными с центрами ξ_1, ξ_2 и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 соответственно; ρ_{12} — коэффициент корреляции между x_1 и x_2 . Пять параметров $\xi_1, \xi_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_{12}$ вполне определяют распределение.

Условные распределения x_1 и x_2 тоже нормальны с

$$M\{x_1|x_2\} = \xi_1 + \rho_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \xi_2); \quad D\{x_1|x_2\} = \sigma_1^2(1 - \rho_{12}^2), \quad (18.8-17)$$

$$M\{x_2|x_1\} = \xi_2 + \rho_{12} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \xi_1); \quad D\{x_2|x_1\} = \sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2), \quad (18.8-18)$$

так что кривые средней квадратической регрессии совпадают с прямыми регрессии (п. 18.4-6). x_1 и x_2 независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы ($\rho_{12} = 0$, см. также п.18.4-11). Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} P\{x_1 \geq \xi_1; x_2 \geq \xi_2\} &= P\{x_1 \leq \xi_1; x_2 \leq \xi_2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho_{12}, \\ P\{x_1 \geq \xi_1; x_2 \leq \xi_2\} &= P\{x_1 \leq \xi_1; x_2 \geq \xi_2\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (18.8-19)$$

(б) Каждое двумерное нормальное распределение (16) может быть описано стандартизованными нормальными величинами u_1, u_2 с коэффициентом корреляции ρ_{12} или независимыми стандартизованными нормальными величинами u'_1, u'_2 (п.18.5-5), а именно

$$\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} (u_1^2 - 2\rho_{12}u_1u_2 + u_2^2) \right] du_1 du_2 = \varphi_u(u_1) \varphi_u(u_2) du_1 du_2 = \varphi_u(u'_1) \varphi_u(u'_2) du'_1 du'_2, \quad (18.8-20)$$

где

$$u_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}, \quad u_2 = \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2}, \quad u'_1 = \frac{u_1 - \rho_{12}u_2}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}; \quad u'_2 = \frac{u_2 - \rho_{12}u_1}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}. \quad (18.8-21)$$

(в) Распределение (16) можно представить графически с помощью эллипсов равной вероятности $\varphi(x_1, x_2) = \text{const}$ или

$$\frac{1}{1-\rho_{12}^2} \left[\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12} \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1} \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] = \lambda^2 = \text{const}. \quad (18.8-22)$$

Вероятность того, что точка (x_1, x_2) лежит внутри эллипса (22), равна

$$P = \Phi \chi^2_{(2)}(\lambda^2),$$

что означает $\lambda^2 = \chi^2_{(2)}$ (табл. 19.5-1). Две прямые регрессии, определенные уравнениями (17) и (18), делят пополам все хорды эллипса равных вероятностей, идущие в направлениях осей x_1 и x_2 соответственно (см. также п.2.4-6).

18.8-7. Круговое нормальное распределение. Формула (16) определяет **круговое нормальное распределение** с центром (ξ_1, ξ_2) и дисперсией σ^2 , если $\rho_{12} = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. При этом эллипсы равных вероятностей сводятся к окружностям, соответствующим квантилям **радиального отклонения (радиальной ошибки)**

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Распределение r дается формулами (см. также табл. 19.5-1)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r(r) &= \frac{2r}{\sigma^2} \varphi_{\chi^2(2)}\left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (r \geq 0), \\ \Phi_r(R) &= P\{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \leq R^2\} = \int_0^R \varphi_r(r) dr = \Phi_{\chi^2(2)}\left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \right\} (18.8-23)$$

Отметим формулы

$$r_{1.2} = \sqrt{\chi_{1.2}^2(2)} \sigma \approx 1,1774\sigma \quad (\text{круговая вероятная ошибка}), \quad (18.8-24)$$

$$Mr = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \approx 1,2533\sigma \quad (\text{средняя радиальная ошибка}). \quad (18.8-25)$$

18.8-8. n -мерные нормальные распределения. Распределение n -мерной случайной величины (x_1, x_2, \dots, x_n) называется **n -мерным нормальным распределением**, если оно является непрерывным с плотностью распределения

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\lambda_{jk})}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Lambda_{jk}(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k) \right], \quad (18.8-26)$$

где

$$\lambda_{jk} = \lambda_{kj} \text{ и } (\Lambda_{jk}) = (\lambda_{jk})^{-1}.$$

Нормальное распределение вполне определяется своим центром $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и матрицей моментов $(\lambda_{jk}) = (\Lambda_{jk})^{-1}$ или дисперсиями и коэффициентами корреляции (п.18.4-8). Характеристическая функция равна

$$\chi_x(q_1, q_2, \dots, q_n) = \exp \left[i \sum_{j=1}^n \xi_j q_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} q_j q_k \right]. \quad (18.8-27)$$

Каждое m -мерное или условное распределение, получаемое из нормального распределения, является нормальным. Все гиперповерхности средней квадратической регрессии совпадают с соответствующими гиперплоскостями регрессии (п.18.4-9).

n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , имеющих нормальное n -мерное распределение, взаимно независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы (см. также п.18.4-11). Каждое n -мерное нормальное распределение может быть описано как распределение системы n взаимно независимых стандартизованных нормальных величин, связанных с исходными величинами линейным преобразованием (п.18.5-5).

18.8-9. Теоремы сложения (см. также п.18.5-7 и табл. 19.5-1).

(а) **Биномиальное распределение** (табл. 18.8-3), **распределение Пуассона** (табл. 18.8-4) и **распределение Коши** (табл. 18.8-8) устойчивы («самовоспроизводятся») при сложении независимых величин. *Если случайная величина x является суммой*

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

т взаимно независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_m , то

$$\text{из } p_i(x_i) = \binom{n_i}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{n_i-x_i} \text{ следует } p_x(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$(n = n_1 + n_2 + \dots + n_m), \quad (18.8-28)$$

$$\text{из } p_i(x_i) = e^{\xi_i} \frac{\xi_i^{x_i}}{(x_i)!} \text{ следует } p_x(x) = e^{\xi} \frac{\xi^x}{x!} \quad (\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m), \quad (18.8-29)$$

$$\text{из } \varphi_i(x_i) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - \xi_i}{\alpha}\right)^2} \text{ следует } \varphi_x(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \xi}{\alpha}\right)^2}$$

$$(\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m). \quad (18.8-30)$$

(б) Сумма $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ взаимно независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n имеет нормальное распределение тогда и только тогда, когда все они нормально распределены. В этом случае

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n; \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2. \quad (18.8-31)$$

Если случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n (не обязательно независимые) имеют нормальные распределения, то величина $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ имеет нормальное распределение с центром и дисперсией, определяемыми формулами (18.5-19).

18.9. ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

18.9-1. Случайные процессы. Случайный процесс есть случайная функция $x(t)$ от независимой переменной t . Каждое испытание дает определенную функцию $X(t)$, которая называется реализацией процесса или выборочной функцией. Случайный процесс можно рассматривать либо как совокупность реализаций процесса $X(t)$, либо как совокупность случайных величин, зависящих от параметра t . При этом должны быть заданы распределения вероятностей систем случайных величин $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots$ (выборочных значений) для любого конечного множества значений t_1, t_2, \dots (выборочных моментов). Случайный процесс дискретен или непрерывен, если дискретно или непрерывно распределение величин $x(t_1), x(t_2), \dots$ для каждого конечного множества t_1, t_2, \dots . Процесс называется случайной последовательностью (процессом с дискретным временем), если независимая переменная может принимать только счетное множество значений.

Более общо случайный процесс может описываться многомерной случайной величиной $\mathbf{x}(t) \equiv [x(t), y(t), \dots]$.

Определение случайного процесса предполагает существование распределения вероятностей для функционального пространства его реализаций. Каждая реализация $x(t) = X(t)$ образует элементарное событие (выборочную точку в функциональном пространстве).

В большинстве приложений независимой переменной t служит время, а величина $x(t)$ или $\mathbf{x}(t)$ означает состояние физической системы.

Примеры: результаты последовательных наблюдений, состояния динамической системы в статистической механике Гиббса или квантовой механике, сообщения и шумы в системах связи, временные ряды в эконоимике.

18.9-2. Описание случайных процессов. Средние по множеству наблюдений.

(а) Для описания случайного процесса надо задать распределение величины $x(t_1)$ и распределения систем величин $[x(t_1), x(t_2)], [x(t_1), x(t_2), x(t_3)], \dots$ для каждого конечного множества значений t_1, t_2, t_3, \dots (первое, второе, ... конечномерные распределения вероятностей случайного процесса). Эти распределения описываются функциями распределения соответственно первого,

второго, ... порядков (см. также п.18.4-7):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(1)}(X_1, t_1) &\equiv P\{x(t_1) \leq X_1\}, \\ \Phi_{(2)}(X_1, t_1; X_2, t_2) &\equiv P\{x(t_1) \leq X_1; x(t_2) \leq X_2\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.9-1a)$$

Дискретные и непрерывные случайные процессы описываются соответственно вероятностями или плотностями распределения:

$$\left. \begin{aligned} P_{(1)}(X_1, t_1) &\equiv P\{x(t_1) = X_1\}, \\ P_{(2)}(X_1, t_1; X_2, t_2) &\equiv P\{x(t_1) = X_1; x(t_2) = X_2\}, \dots \\ \varphi_{(1)}(X_1, t_1) &\equiv \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial X_1}, \quad \varphi_{(2)}(X_1, t_1; X_2, t_2) = \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial X_1 \partial X_2}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.9-1b)$$

З а м е ч а н и е. Последовательность функций распределения (1a) описывает случайный процесс с возрастающей подробностью, так как каждая функция распределения $\Phi_{(n)}$ вполне определяет все предыдущие функции распределения $\Phi_{(m)}$ ($m < n$) (п.18.4-7). Это же справедливо и для каждой из последовательностей (1b). Каждая из функций (1) симметрична относительно перестановки пар X_i, t_i и X_k, t_k .

(b) Условные распределения вероятностей для случайного процесса получаются из функций (1b) так же, как в п.18.4-7, например

$$P(X_1, t_1; \dots; X_m, t_m | X_{m+1}, t_{m+1}; \dots; X_n, t_n) = \frac{P_{(n)}(X_1, t_1; \dots; X_n, t_n)}{P_{(n-m)}(X_{m+1}, t_{m+1}; \dots; X_n, t_n)}, \quad (18.9-2a)$$

$$\varphi(X_1, t_1; \dots; X_m, t_m | X_{m+1}, t_{m+1}; \dots; X_n, t_n) = \frac{\varphi_{(n)}(X_1, t_1; \dots; X_n, t_n)}{\varphi_{(n-m)}(X_{m+1}, t_{m+1}; \dots; X_n, t_n)}. \quad (18.9-2b)$$

З а м е ч а н и е. Функции (2), вообще говоря, уже не будут симметричными относительно перестановки пар X_i, t_i и X_k, t_k , отделенных чертой.

(c) Для функции $f[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ от n выборочных значений $x(t_1), \dots, x(t_n)$ формула

$$Mf \equiv Mf[x(t_1), \dots, x(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, \dots, X_n) d\Phi_{(n)}(X_1, t_1; \dots; X_n, t_n) \quad (18.9-3)$$

определяет среднее по множеству наблюдений, если стоящий справа интеграл сходится абсолютно. В формуле (3) интегрирование производится по X_1, \dots, X_n ; Mf есть функция от t_1, \dots, t_n .

Особый интерес представляют средние $Mx(t_1)$, $Mx^2(t_1)$ и $M\{x(t_1) x(t_2)\} \equiv R_{xx}(t_1, t_2)$ — корреляционная (автокорреляционная) функция.

Взаимная корреляционная функция $M\{x(t_1) y(t_2)\} = R_{xy}(t_1, t_2)$ есть среднее значение по множеству наблюдений для совместного распределения двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ (см. также п.18.10-5).

Если $x(t)$ может быть комплексной случайной величиной (фактически двумерный случайный процесс), то корреляционные функции определяются так:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{\overline{x(t_1)} x(t_2)\}; \quad R_{xy}(t_1, t_2) = M\{\overline{x(t_1)} y(t_2)\}.$$

(d) n -мерная характеристическая функция, соответствующая функции распределения n -го порядка для случайного процесса есть

$$\chi_{(n)}(q_1, t_1; q_2, t_2; \dots; q_n, t_n) = M \exp \left[i \sum_{k=1}^n q_k x(t_k) \right]. \quad (18.9-4)$$

(е) Иногда случайный процесс задается непосредственно распределением вероятностей множества реализаций $x(t)$. Например, можно задать процесс условием, что событие $\{x(t) = X(t)\}$ невозможно, если только $x(t)$ не совпадает с данной функцией $x(t; \eta_1, \eta_2, \dots)$ от t и случайных параметров η_1, η_2, \dots . При этом случайный процесс определяется распределением параметров η_1, η_2, \dots (п.18.4-7) и

$$Mf[x(t_1), \dots, x(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f[x(t_1; \eta_1, \eta_2, \dots), \dots, x(t_n; \eta_1, \eta_2, \dots)] d\Phi_{\eta_1, \eta_2, \dots}(\eta_1, \eta_2, \dots). \tag{18.9-5}$$

В частности, каждое распределение вероятностей для такого случайного процесса однозначно определяется его характеристической функцией (п.18.4-10)

$$X_{(n)}(q_1, t_1; \dots; q_n, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \sum_{k=1}^n q_k x(t_k; \eta_1, \eta_2, \dots) \right] d\Phi_{\eta_1, \eta_2, \dots}(\eta_1, \eta_2, \dots). \tag{18.9-6}$$

18.9-3. Специальные классы случайных процессов.

(а) Случайный процесс порядка n . Случайный процесс имеет порядок n , если он вполне определяется своими функциями распределения $\Phi_{(n)}$ порядка n (п.18.9-2), но не определяется функциями распределения порядка $n-1$.

(б) Чисто случайный процесс. Случайный процесс $x(t)$ называется **чисто случайным**, если случайные величины $x(t_1), x(t_2), \dots$ взаимно независимы для каждого конечного множества t_1, t_2, \dots . Чисто случайный процесс вполне определяется функцией $\Phi_{(1)}(X_1, t_1)$, $p_{(1)}(X_1, t_1)$ или $\varphi_{(1)}(X_1, t_1)$.

Примеры: последовательность независимых наблюдений, испытания по схеме Бернулли, случайный выбор в статистике (п.19.1-2).

(е) Марковские процессы. Дискретный или непрерывный случайный процесс $x(t)$ называется (простым) **марковским процессом**, если для каждого конечного множества $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$

$$p(X_n, t_n | X_1, t_1; \dots; X_{n-1}, t_{n-1}) = p(X_n, t_n | X_{n-1}, t_{n-1}) \tag{18.9-7a}$$

или

$$\varphi(X_n, t_n | X_1, t_1; \dots; X_{n-1}, t_{n-1}) = \varphi(X_n, t_n | X_{n-1}, t_{n-1}) \tag{18.9-7b}$$

соответственно. Если дано $x(t_{n-1}) = X_{n-1}$, то знание $x(t_{n-2}), x(t_{n-3}), \dots$ не добавляет никакой новой информации о распределении $x(t_n)$.

Марковский процесс вполне определяется своим распределением вероятностей второго порядка и, следовательно, может быть задан распределениями вероятностей первого порядка и «вероятностей перехода»

$$p(X_2, t_2 | x, t) \text{ или } \varphi(X_2, t_2 | x, t) \quad (t < t_2). \tag{18.9-8}$$

Марковские случайные последовательности часто называются **цепями Маркова**. Каждый чисто случайный процесс является марковским.

Многие физические процессы могут быть описаны как марковские. Важный класс задач состоит в отыскании функций (8) по их начальным значениям при $t = t_1$. Из определяющего свойства (7) марковского процесса вытекают уравнения Колмогорова — Смолуховского — Чепмена

$$p(X_2, t_2 | X_1, t_1) = \sum_{x(t)} p(X_2, t_2 | x, t) p(x, t | X_1, t_1) \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \tag{18.9-9a}$$

или

$$\varphi(X_2, t_2 | X_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X_2, t_2 | x, t) \varphi(x, t | X_1, t_1) dx \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \tag{18.9-b}$$

Уравнение (9) есть разностное уравнение первого порядка (п.20.4-3), которое может быть решено относительно неизвестной функции (8) независимой переменной t , если задана $p(x, t | X_1, t_1)$ или $\varphi(x, t | X_1, t_1)$. Если $p_{(1)}(X_1, t_1)$ или $\varphi_{(1)}(X_1, t_1)$ известно, то марковский процесс вполне определен при всех $t > t_1$.

Пример е р. Пуассоновский процесс. Во многих задачах со случайным поиском, очередями, радиоактивным распадом и т. п. $x(t)$ есть дискретная случайная величина со спектральными значениями $0, 1, 2, \dots$ (число «успехов», телефонных вызовов, распадов и т. п.) и вероятностями

$$p(X_2, t_2 | x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } X_2 < x, \\ 1 - \alpha \Delta t + o(\Delta t) & \text{при } X_2 = x, \\ \alpha \Delta t + o(\Delta t) & \text{при } X_2 = x+1, \\ o(\Delta t) & \text{при } X_2 > x+1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \Delta t = t_2 - t, \\ x, X_2 = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

где $o(\Delta t)$ обозначает, что $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ (п.4.4-3). Чтобы найти $p_{(1)}(X, t)$, умножим уравнение (9а) на $p_{(1)}(X_1, t_1)$ и просуммируем по X_1 , что дает

$$p_{(1)}(X_2, t_2) = \sum_{x(t)} p(X_2, t_2 | x, t) p_{(1)}(x, t).$$

Теперь, полагая $X_2 = X$, $t_2 = t + \Delta t$, получим разностное уравнение

$$\frac{p_{(1)}(X, t + \Delta t) - p_{(1)}(X, t)}{\Delta t} = \alpha[-p_{(1)}(X, t) + p_{(1)}(X-1, t)] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (X = 0, 1, 2, \dots), \quad (18.9-10)$$

где $p_{(1)}(-1, t) = 0$. При $\Delta t \rightarrow 0$ уравнение (10) приводится к дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{(1)}(X, t) = \alpha[-p_{(1)}(X, t) + p_{(1)}(X-1, t)] \quad (X = 0, 1, 2, \dots). \quad (18.9-11)$$

Если состояние системы при $t = 0$ описывается значением $x=0$, то имеем начальные условия: $p_{(1)}(0, 0) = 1$ и $p_{(1)}(X, 0) = 0$ при $X \neq 0$; решая уравнение (11) последовательно для $X = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$p_{(1)}(X, t) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^X}{X!} \quad (t > 0; X = 0, 1, 2, \dots). \quad (18.9-12)$$

Число x изменений состояния в интервале $(0, t)$ имеет *распределение Пуассона*, введенное несколько иным способом в табл. 18.8-4. В частности, вероятность того, что не произойдет ни одного изменения состояния, равна

$$p_{(1)}(0, t) = e^{-\alpha t} \quad (t > 0); \quad (18.9-13)$$

поэтому вероятность того, что состояние изменится по крайней мере один раз, равна

$$1 - p_{(1)}(0, t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad (t > 0). \quad (18.9-14)$$

Интервал времени T_1 между последовательными изменениями состояния есть случайная величина с плотностью распределения

$$p_{T_1}(T_1) = \alpha e^{-\alpha T_1} \quad (T_1 > 0)$$

и центром распределения $1/\alpha$; α есть средняя плотность числа событий за единицу времени (или средняя скорость счета). Внутри любого конечного интервала времени длины T пуассоновский процесс может быть определен распределением множества взаимно независимых случайных величин $K; t_1, t_2, \dots, t_K$, где K есть число изменений состояния в течение времени T , а t_1, t_2, \dots, t_K — моменты времени первого, второго, ..., K -го изменения состояния в течение этого интервала времени. При этом

$$p_K(K) = e^{-\alpha T} \frac{(\alpha T)^K}{K!} \quad (K = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_k(t_k | K) = \frac{1}{T} \quad (K = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, K),$$

$$\varphi_{t_1 t_2 \dots t_K}(t_1, t_2, \dots, t_K | K) = \frac{1}{T^K} \quad (K = 1, 2, \dots).$$

(д) Гауссовский случайный процесс. Случайный процесс называется гауссовским, если все его распределения вероятностей нормальны

для всех t_1, t_2, \dots . Каждый гауссовский процесс однозначно определяется своим (обязательно нормальным) распределением вероятностей второго порядка и, следовательно, корреляционной функцией (см. п.18.9-2)

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{\overline{x(t_1)} x(t_2)\}.$$

В частности, n -мерное распределение каждого множества выборочных значений $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_n = x(t_n)$ является нормальным распределением, плотность которого дается формулой (18.8-26) с

$$\xi_j = Mx(t_j), \quad \lambda_{jk} = R_{xx}(t_j, t_k) - \xi_j \xi_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

18.9-4. Средние по времени. Для любого процесса $x(t)$ среднее по времени (по параметру t) от измеримой функции $f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$ определяется так:

$$\langle f[x(t_1), \dots, x(t_n)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[x(t_1+t), \dots, x(t_n+t)] dt, \quad (18.9-15)$$

если этот предел существует ¹⁾.

Если $x(t)$ описывает случайный процесс, то $\langle f \rangle$ есть случайная величина для каждого данного множества значений t_1, \dots, t_n .

18.9-5. Стационарные и эргодические случайные процессы.

(а) Стационарный случайный процесс. Случайный процесс $x(t)$ называется **стационарным**, если никакое его распределение вероятностей не изменится при замене t на $t+t_0$, так что

$$\Phi_{(n)}(X_1, t_1+t_0; X_2, t_2+t_0; \dots; X_n, t_n+t_0) \equiv \Phi_{(n)}(X_1, t_1; X_2, t_2; \dots; X_n, t_n) \\ (-\infty < t_0 < \infty, n = 1, 2, \dots), \quad (18.9-16)$$

т. е. распределение вероятностей n -го порядка зависит только от $n-1$ разностей

$$\tau_1 = t_2 - t_1, \quad \tau_2 = t_3 - t_1, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = t_n - t_1$$

выборочных моментов t_k . В этом случае каждое среднее (3) по множеству наблюдений зависит только от $n-1$ разности τ_j :

$$Mf[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \equiv Mf[x(0), x(\tau_1), \dots, x(\tau_{n-1})] \quad (18.9-17)$$

для всех t_1 . В частности (см. также п.18.10-2, б):

$$Mx(t_1) \equiv Mx(0) \equiv Mx, \quad (18.9-18)$$

$$M|x(t_1)|^2 \equiv M|x(0)|^2 \equiv M|x|^2, \quad (18.9-19)$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) \equiv M\overline{x(t_1)} x(t_2) \equiv M\overline{x(0)} x(\tau_1) \equiv R_{xx}(\tau_1). \quad (18.9-20)$$

(б) Эргодическая гипотеза и эргодические случайные процессы. Стационарный случайный процесс $x(t)$ удовлетворяет *эргодической гипотезе*, если для каждой измеримой функции $f[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ с вероятностью 1 среднее (15) по времени равно среднему (3) по множеству наблюдений, т. е.

$$P\langle f \rangle = Mf = 1 \quad (18.9-21)$$

¹⁾ Вместо обозначения $\langle f \rangle$, так же как и вместо Mf , иногда применяют \bar{f} , но последнее обозначение лучше сохранить для эмпирического среднего

$$\bar{f} = \frac{1}{n} ({}^1f + {}^2f + \dots + {}^nf),$$

где kf есть значение f для k -й выборки $x(t) = {}^kx(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

(при условии, что эти средние существуют). Любая из функций $x(t)$ определяет при этом случайный процесс однозначно с вероятностью 1, например, через характеристическую функцию (4), вычисляемую по $x(t)$ с помощью формулы (21). Каждое среднее по времени t , например $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ или $R_{xx}(\tau)$, описывает при этом с вероятностью 1 общее свойство целого множества функций $x(t)$.

Эргодическая гипотеза (21) применима, если случайный процесс стационарен и вероятность каждого стационарного его подмножества равна 0 или 1 (эргодическая теорема). (с) Два или более случайных процесса $x(t)$, $y(t)$, ... называются совместно стационарными, если все их совместные распределения вероятностей не изменяются при замене t на $t+t_0$. Два или более случайных процесса называются совместно эргодическими, если их совместные множества стационарны и если вероятность любого стационарного подмножества равна 0 или 1; в этом случае эргодическое свойство применимо к характеристикам, вычисленным по выборочным значениям $x(t)$, $y(t)$, ...

18.10. СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРЫ

18.10-1. Вводные замечания. В большинстве приложений функция $x(t)$, описывающая стационарный случайный процесс, является действительной функцией со следующими свойствами:

1. Существуют

$$\langle |x| \rangle = \langle |x(0)| \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)| dt$$

и

$$\langle |x|^2 \rangle = \langle |x(0)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{средняя мощность}).$$

2. В каждом конечном интервале $x(t)$ есть функция с ограниченной вариацией (п.4.4-8, b).

При этих условиях $x(t)$ можно представить почти всюду (п.4.6-14, b) как сумму ее среднего значения $\langle x \rangle = \langle x(0) \rangle = A_0$, некоторого ряда периодических компонент и аperiodической компоненты $p(t)$:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) + p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t} + p(t). \quad (18.10-1a)$$

Здесь $\omega_0 = 0$, $\omega_k = -\omega_{-k} > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), так что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt = \begin{cases} a_0 = A_0 & \text{при } \omega = 0, \\ a_k = \bar{a}_{-k} = \frac{1}{2} A_{|k|} e^{i\alpha_k} & \text{при } \omega = \omega_k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \\ 0 & \text{для остальных значений } \omega, \end{cases} \quad (18.10-1b)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t) e^{-i\omega t} dt = 0. \quad (18.10-1c)$$

18.10-2. Корреляционные функции.

(а) **Корреляционная функция (по времени)** для действительной или комплексной случайной функции $x(t)$ определяется формулой

$$R_{xx}(\tau) = \overline{\langle x(0) x(\tau) \rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{x(t)} x(t+\tau) dt. \quad (18.10-2)$$

Этот предел существует всегда, когда существует $\langle |x|^2 \rangle$; функция $R_{xx}(\tau)$ действительна при действительной $x(t)$.

Для эргодических случайных процессов (п.18.9-5, б) функция $R_{xx}(\tau)$ с вероятностью 1 совпадает с корреляционной функцией $R_{xx}(\tau)$ по множеству наблюдений (п.18.9-2, с).

Заметим, что

$$\overline{R_{xx}(-\tau)} \equiv R_{xx}(\tau); \quad |R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) = \langle |x|^2 \rangle. \quad (18.10-3)$$

Матрица $(R_{xx}(\tau_i - \tau_k))$ есть положительно определенная эрмитова матрица (п.13.5-3) для каждого конечного множества $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Для действительных $x(t)$ функция $R_{xx}(\tau)$ четная: $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$.

(б) **Взаимная корреляционная функция (по времени)** для двух действительных или комплексных функций $x(t), y(t)$ (обычно описывающих многомерный случайный процесс) определяется формулой

$$R_{xy}(\tau) = \overline{\langle x(0) y(\tau) \rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{x(t)} y(t+\tau) dt. \quad (18.10-4)$$

Этот предел существует всегда, когда существуют $\langle |x|^2 \rangle$ и $\langle |y|^2 \rangle$; функция $R_{xy}(\tau)$ действительна при действительных $x(t), y(t)$. Для совместно эргодических случайных процессов $R_{xy}(\tau)$ совпадает с вероятностью 1 с корреляционной функцией $R_{xy}(\tau)$ по множеству наблюдений (п.18.9-2, с). Заметим, что

$$\overline{R_{yx}(-\tau)} \equiv R_{xy}(\tau); \quad |R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0) R_{yy}(0) = \langle |x|^2 \rangle \langle |y|^2 \rangle. \quad (18.10-5)$$

$R_{xy}(\tau)$ измеряет связь между $x(t)$ и $y(t)$, или «серийную корреляцию» между значениями функций $x(t)$ и $y(t+\tau)$, разделенными запаздыванием τ . Функции $x(t)$ и $y(t)$ называются некоррелированными, если $R_{xy}(\tau) \equiv 0$. Для действительных функций $x(t), y(t)$ функции $R_{xx}(\tau), R_{xy}(\tau), R_{yx}(\tau), R_{yy}(\tau)$ — элементы корреляционной матрицы.

(с) Если $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$, где $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ действительны, то

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2} A_1^2 \cos \omega_1 \tau, \\ R_{xy}(\tau) &= \begin{cases} \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos(\omega_1 \tau + \alpha_2 - \alpha_1) & \text{при } \omega_2 = \omega_1, \\ 0 & \text{при } \omega_2 \neq \omega_1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18.10-6)$$

Более общо, если $x(t)$ и $y(t)$ — действительные функции, удовлетворяющие условиям п.18.10-1, так что

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) + p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t} + p(t), \\ y(t) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(\omega_k t + \beta_k) + q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{i\omega_k t} + q(t), \end{aligned} \right\} \quad (18.10-7)$$

и различные члены в каждой сумме не коррелированы, то

$$R_{xx}(\tau) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \cos \omega_k \tau + R_{pp}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{i\omega_k \tau} + R_{pp}(\tau), \quad (18.10-8)$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= A_0 B_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k \cos (\omega_k \tau + \beta_k - \alpha_k) + R_{pq}(\tau) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k b_k e^{i\omega_k \tau} + R_{pq}(\tau). \end{aligned} \quad (18.10-9)$$

18.10-3. Спектральные плотности.

(а) Функции, введенные в п.18.10-1, вообще говоря, не могут быть представлены как суммы периодических членов и интегралов Фурье, однако можно определить некоторую функцию $g_{xx}(\omega)$ круговой частоты ω , позволяющую как и в операционном исчислении, удобно представить различные операции над $x(t)$ через соответствующие операции над $g_{xx}(\omega)$. Спектральная плотность $g_{xx}(\omega)$ для функции $x(t)$ и взаимная спектральная плотность $g_{xy}(\omega)$ для пары функций $x(t)$ и $y(t)$ определяются с помощью соотношений Хинчина — Винера

$$\left. \begin{aligned} g_{xx}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\ R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} g_{xx}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \\ g_{xy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau, \quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xy}(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (18.10-10)$$

где оба косинус-интеграла в правой части применимы только в случае действительных $x(t)$. Спектральные плотности $g_{xx}(\omega)$ и $g_{xy}(\omega)$ для функций (7), удовлетворяющих условиям п.18.10-1, могут быть формально выражены через их разложения с помощью δ -функций (п.21.9-2):

$$g_{xx}(\omega) = A_0^2 \delta(\omega) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \delta(|\omega - \omega_k|) + g_{pp}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) + g_{pp}(\omega), \quad (18.10-11)$$

$$g_{xy}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k b_k \delta(\omega - \omega_k) + g_{pq}(\omega). \quad (18.10-12)$$

(б) Часто оказывается удобным ввести $g_{xy}(\omega)$ и $g_{xx}(\omega)$ с помощью формального, символического соотношения

$$g_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \overline{a_T(\omega)} b_T(\omega), \quad (18.10-13a)$$

где $a_T(\omega)$ и $b_T(\omega)$ — преобразования Фурье от «усеченных» функций $x_T(t)$, $y_T(t)$, равных соответственно $x(t)$, $y(t)$ при $|t| < T$ и 0 при $|t| > T$:

$$a_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad b_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T y(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (18.10-13b)$$

(с) Для действительных и комплексных функций $x(t), y(t)$ функция $g_{xy}(\omega)$ действительна и неотрицательна, и

$$g_{yx}(\omega) = \overline{g_{xy}(\omega)}. \quad (18.10-14)$$

Для действительных $x(t), y(t)$ функция $g_{xy}(\omega)$ четна и

$$g_{xy}(-\omega) = \overline{g_{xy}(\omega)} = g_{xy}(\omega). \quad (18.10-15)$$

(d) Многие авторы применяют другие формы спектральных плотностей, а именно

$$G_{xx}(\omega) = 2g_{xx}(\omega), \quad G_{xy}(\omega) = 2g_{xy}(\omega), \quad (18.10-16)$$

или, вводя истинные частоты $\nu = \omega/2\pi$,

$$\Gamma_{xy}(\nu) = 2\gamma_{xy}(\nu) = 2\pi G_{xy}(2\pi\nu) = 4\pi g_{xy}(2\pi\nu). \quad (18.10-17)$$

Отсюда следует, что для действительных и комплексных $x(t), y(t)$ имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} \langle |x|^2 \rangle &= R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} G_{xx}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \Gamma_{xx}(\nu) d\nu, \\ \langle \bar{x}y \rangle &= R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xy}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\nu) d\nu, \end{aligned} \right\} \quad (18.10-18)$$

а для действительных $x(t), y(t)$

$$\langle xy \rangle = R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xy}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \text{Re } G_{xy}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \text{Re } \Gamma_{xy}(\nu) d\nu. \quad (18.10-19)$$

В выражение (19) вносят вклад лишь частоты, общие для спектров функций $x(t)$ и $y(t)$.

18.10-4. Влияние линейного преобразования на корреляционные функции и спектральные плотности.

(а) Если $x(t) = u(t) + v(t)$, то

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= R_{uu}(\tau) + R_{vv}(\tau) + R_{uv}(\tau) + R_{vu}(\tau), \\ g_{xx}(\omega) &= g_{uu}(\omega) + g_{vv}(\omega) + g_{uv}(\omega) + g_{vu}(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (18.10-20)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{uv}(\tau) + R_{vv}(\tau), \quad g_{xy}(\omega) = g_{uv}(\omega) + g_{vv}(\omega). \quad (18.10-21)$$

(б) Если $x(t) = \alpha u(t)$, то

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= |\alpha|^2 R_{uu}(\tau), \quad R_{xy}(\tau) = \bar{\alpha} R_{uv}(\tau), \quad R_{yx}(\tau) = \alpha R_{vu}(\tau), \\ g_{xx}(\omega) &= |\alpha|^2 g_{uu}(\omega), \quad g_{xy}(\omega) = \bar{\alpha} g_{uv}(\omega), \quad g_{yx}(\omega) = \alpha g_{vu}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (18.10-22)$$

(с) Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — действительные функции, связанные линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, так что

$$y(t) = H \left(\frac{d}{dt} \right) x(t), \quad (18.10-23)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda, \quad (18.10-24)$$

где $H(i\omega)$ — частотная характеристика, а $h(\lambda)$ — (обязательно действительная) весовая функция с

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega\lambda} d\omega, \quad H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-i\omega\lambda} d\lambda \quad (18.10-25)$$

(см. также пп.9.4-3 и 9.4-7). Тогда

$$\left. \begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) R_{xx}(\tau - \lambda) d\lambda \text{ (соотношение Винера — Липсица),} \\ R_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) R_{xx}(\tau + \mu - \lambda) d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (18.10-26)$$

$$g_{xy}(\omega) = H(i\omega) g_{xx}(\omega), \quad g_{yy}(\omega) = |H(i\omega)|^2 g_{xx}(\omega). \quad (18.10-27)$$

Если исходные случайные процессы, описываемые функциями $u(t)$, $v(t)$ или $x(t)$ стационарны, эргодичны и/или гауссовские, то таковы же будут и преобразованные процессы.

18.10-5. Спектры и корреляционные функции по множеству наблюдений (см. также пп.18.9-2 и 18.9-5, b).

(а) Спектральная плотность по множеству наблюдений $g_{xx}(\omega) = \frac{1}{2} G_{xx}(\omega)$ и взаимная спектральная плотность по множеству наблюдений $g_{xy}(\omega) = \frac{1}{2} G_{xy}(\omega)$ для стационарных случайных процессов определяются так:

$$\left. \begin{aligned} g_{xx}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \\ g_{xy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (18.10-28)$$

Спектральные плотности по множеству наблюдений часто могут быть получены как средние по множеству наблюдений от соответствующих спектральных плотностей выборочных функций (реализаций процесса).

(б) Соотношения (3), (5), (14) и (20) — (27) остаются в силе, если каждое среднее по времени заменить средним по множеству наблюдений.

Если $x(t)$ и $y(t)$ — действительные функции, связанные линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, так что

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t, \lambda) x(\lambda) d\lambda, \quad (18.10-29)$$

то для случайных процессов как стационарных, так и нестационарных

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t_2, \lambda) R_{xx}(t_1, \lambda) d\lambda, \quad (18.10-30)$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t_1, \mu) R_{yy}(\mu, t_2) d\mu. \quad (18.10-31)$$

(с) В случае эргодических случайных процессов (п.18.9-5) спектральные плотности и корреляционные функции определяют (с вероятностью 1) свойства всего случайного процесса, а не только свойства отдельных его реализаций. В частности, гауссовский эргодический случайный процесс (п.18.9-3,д) вполне определяется средними по множеству наблюдений $Mx(0)$ и $R_{xx}(\tau)$ и, следовательно, с вероятностью 1 своими средними по времени $\langle x \rangle$ и $R_{xx}(\tau)$ для одной реализации $x(t)$ (см. также п.18.8-8).

18.10-6. Теорема о выборке. Функция $x(t)$, спектр которой ограничен конечным интервалом («полосой») частот, однозначно определяется своими выборочными значениями для дискретного множества значений t . Точнее, если спектр функции $x(t)$ ограничен интервалом $-B < \nu < B$, где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, то

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2B}\right) \frac{\sin \pi(2Bt-k)}{\pi(2Bt-k)} \quad (-\infty < t < \infty). \quad (18.10-32)$$

Если функция с ограниченной шириной полосы частот заметно отличается от нуля только в течение конечного интервала времени, то теорема о выборке позволяет приближенно описать процесс $x(t)$ с помощью конечной выборки значений $x\left(\frac{k}{2B}\right)$.

Выражение (32) есть разложение по ортогональным функциям (п.15.2-6): семейство функций $s_k(t) \equiv \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}$ ортогонально и нормировано

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_j(t) s_k(t) dt = \delta_{jk} \quad (j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (18.10-33)$$

так что для функций $x(t)$ с ограниченной шириной полосы частот

$$2B \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s_k(2Bt) dt = x\left(\frac{k}{2B}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (18.10-34)$$

18.11. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

18.11-1. $x(t)$ тогда естественно равна случайной величине x с данной плотностью $\varphi(x)$ (рис. 18.11-1,а). Такой процесс является стационарным, но не эргодическим

$$\left. \begin{aligned} Mx(t_1) &= Mx, & \langle x(t_1) \rangle &= x, \\ R_{xx}(\tau) &= Mx^2, & R_{xx}(\tau) &= x^2. \end{aligned} \right\} \quad (18.11-1)$$

18.11-2. Синусоидальный случайный процесс (рис. 18.11-1, б)

$$x(t) = a \sin(\omega t + \alpha). \quad (18.11-2)$$

(а) Если a — постоянная, а фаза α равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, то процесс стационарный и эргодический с

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1[x(t_1)] &= \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} & (|x| \leq a), \\ Mx(t_1) &= 0, & R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau. \end{aligned} \right\} \quad (18.11-3a)$$

(b) Если a — случайная величина, независимая от α , то процесс стационарный, но не эргодический с

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{(1)}[x(t_1)] &= \frac{1}{\pi} \int_{|a| > |x|} \frac{\varphi_a(a) da}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\ Mx(t_1) &= 0, \quad R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} Ma^2 \cos \omega\tau. \end{aligned} \right\} \quad (18.11-3b)$$

* (Здесь предполагается, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_a(a) da}{|a|}$ сходится.) *

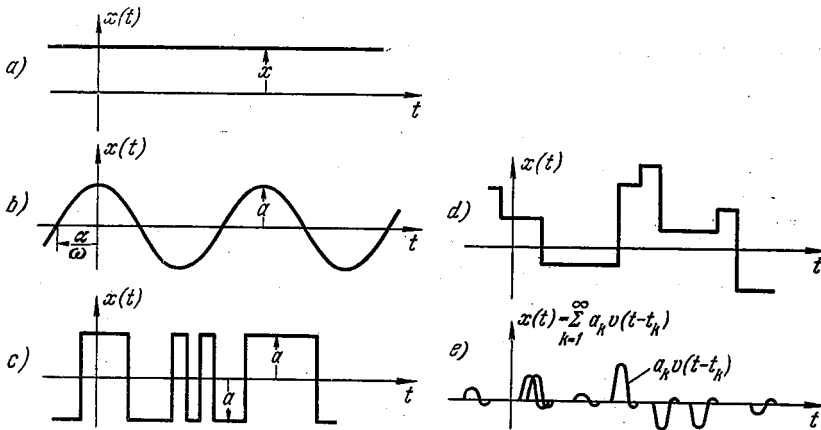


Рис. 18.11-1. Выборочные функции (реализации) для пяти примеров случайных процессов. На рис. 18.11-1, e $x(t)$ есть сумма показанных отдельных импульсов $a_k v(t-t_k)$.

Если, в частности, амплитуда a имеет **распределение Релея** с плотностью

$\varphi_a(a) = a e^{-a^2/2}$ ($a > 0$), то случайный процесс будет гауссовским.

(e) Если α распределена не равномерно на $(0, 2\pi)$, то процесс не будет стационарным.

18.11-3. Случайная телеграфная волна (рис. 18.11-1, c). Функция $x(t)$ принимает только значения $\pm a$ с изменением знака, порождаемым изменением состояния некоторого пуассоновского процесса со средней скоростью счёта α (п.18.9-3, c). Процесс является стационарным и эргодическим, если он начинается с $t = -\infty$, и

$$\left. \begin{aligned} Mx(t_1) &= 0, \quad R_{xx}(\tau) = a^2 e^{-2\alpha|\tau|}, \\ g_{xx}(\omega) &= \frac{a^2}{\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11-4)$$

18.11-4. Модель термоэлектронного тока (рис. 18.11-1, d). Функция $x(t)$ изменяет значение с каждым изменением состояния некоторого пуассоновского процесса со средней скоростью счёта α ; между изменениями состояния функция $x(t)$ постоянна и принимает непрерывно распределённое

случайное значение x с данным центром ξ и дисперсией σ^2 . Этот процесс стационарен и эргодичен, если он начинается с $t = -\infty$, и

$$\left. \begin{aligned} Mx(t_1) &= \xi, & R_{xx}(\tau) &= \xi^2 + \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \\ g_{xx}(\omega) &= \xi^2 \delta(\omega) + \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11-5)$$

18.11-5. Дробовой эффект (рис. 18.11-1,е). $x(t)$ есть сумма многих импульсов:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v(t - t_k), \quad (18.11-6)$$

форма которых дается функцией $v = v(t)$ с

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt = V(\omega), \quad (18.11-7)$$

в то время как амплитуда импульса a_k есть случайная величина с конечной дисперсией, а моменты t_k — случайные моменты, определяемые изменением состояния некоторого пуассоновского процесса со средней скоростью счета α (п.18.9-3, с). Этот процесс стационарный и эргодический, если он начинается с $t = -\infty$; он аппроксимируется гауссовским случайным процессом (п.18.9-3, d), если импульсы перекрывают друг друга достаточно часто. Для этого процесса

$$\left. \begin{aligned} Mx(t_1) &= \xi = \alpha M a_k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt, \\ Mx^2(t_1) &= \xi^2 + \alpha M a_k^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt, \\ R_{xx}(\tau) &= \xi^2 + \alpha M a_k^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v(t) v(t + \tau) d\tau, \\ g_{xx}(\omega) &= \xi^2 \delta(\omega) + \frac{\alpha}{2\pi} M a_k^2 \cdot |V(\omega)|^2. \end{aligned} \right\} \quad (18.11-8)$$

В частном случае, когда a_k — фиксированные постоянные, формулы (8) известны как *формулы Кемпбелла*.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

19.1. ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

19.1-1. Статистики. Математическая статистика занимается как статистическим описанием результатов опытов или наблюдений, так и построением и проверкой подходящих математических моделей, содержащих понятие вероятности. Ее методы расширяют возможности научного предсказания и рационального принятия решения во многих задачах, где существенные параметры не могут быть известны или контролируемы с достаточной точностью.

Статистическое описание и вероятностные модели применяются к физическим процессам, обладающим тем свойством, что хотя результат отдельного измерения физической величины x не может быть предсказан с достаточной точностью, значение некоторой подходящей функции $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от множества результатов x_1, x_2, \dots, x_n повторных измерений может быть предсказано с существенно лучшей точностью. Такая функция называется **статистикой**, а указанное свойство физического процесса — его **статистической устойчивостью**. Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический физический закон, который может быть проверен только опытом.

Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием объема n выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) (физический закон больших чисел). Наиболее известные статистики — относительная частота (п.19.2-1) и выборочные средние (п.19.2-3).

19.1-2. Классическая вероятностная модель: статистики случайной выборки. Понятие о генеральной совокупности.

(а) В классической модели наблюдаемая физическая величина x рассматривается как одномерная случайная величина с подлежащей определению или оценке плотностью $\varphi(x)$. Каждая выборка (x_1, x_2, \dots, x_n) значений x рассматривается как результат n независимых повторных измерений (п.18.2-4). При этом x_1, x_2, \dots, x_n представляют собой взаимно независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности $\varphi(x)$. Такая выборка называется **случайной выборкой объема n** и представляет собой n -мерную случайную величину (x_1, x_2, \dots, x_n) . Плотность ее распределения называется **функцией правдоподобия**:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n). \quad (19.1-1)$$

Каждая статистика, определяемая как некоторая функция

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

выборочных значений x_1, x_2, \dots, x_n , представляет собой случайную величину, распределение которой (**выборочное распределение статистики y**) однозначно определяется функцией правдоподобия, а следовательно, и распределением

величины x . Каждое выборочное распределение зависит, как правило, от объема выборки n .

Кроме рассматриваемой модели, могут встречаться и другие: распределение x может быть дискретным (игры, контроль качества), выборка может иметь бесконечный объем, значения x_i могут быть не одинаково распределены и не быть взаимно независимыми, случайная величина x может быть многомерной.

(b) Когда возрастает объем выборки (n), многие выборочные статистики сходятся по вероятности к соответствующим параметрам теоретического распределения величины x ; в частности, относительные частоты сходятся в среднем к соответствующим вероятностям (п.19.2-1). Поэтому каждую выборку рассматривают как выборку из теоретически бесконечной **генеральной совокупности**, распределение признака в которой совпадает с теоретическим распределением вероятностей величины x . Последнее называется **распределением генеральной совокупности**, а его параметры — **параметрами генеральной совокупности**. Во многих приложениях теоретическая генеральная совокупность есть идеализация действительной совокупности, из которой получена выборка.

19.1-3. Связь вероятностной модели с опытом: оценка и проверка.

(a) **Оценка параметров.** Статистические методы позволяют учесть данные опыта (выборочные значения) для уточнения деталей *вероятностной модели*, например для оценки плотности вероятностей $\varphi(x)$ случайной величины x . Знание же вероятностной модели позволяет прогнозировать будущие события, что важно для принятия решений. В большинстве приложений относительные частоты (п.19.2-1) применяются непосредственно только для грубой *качественной* оценки распределения генеральной совокупности. Обычно задаются определенным типом закона распределения генеральной совокупности

$$\varphi = \varphi(x; \eta_1, \eta_2, \dots) \quad (19.1-2)$$

и по данным случайной выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) оценивают лишь неизвестные *параметры* η_1, η_2, \dots . В пп.19.3-1 — 19.3-5 приведено некоторое количество типичных законов распределения для подбора их в соответствии с физическими предпосылками.

Параметры η_1, η_2, \dots обычно характеризуют определенное свойство теоретического распределения величины x (например, генеральное среднее, дисперсию, асимметрию, см. табл. 18.3-1). Для оценки значений этих параметров по данным выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) пользуются значениями таких статистик $y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$, которые характеризуют аналогичные свойства выборки (например, выборочное среднее, выборочную дисперсию, пп.19.2-3 — 19.2-6). Выбор «подходящих» статистик не обязательно однозначен; предпочитают оценки $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые сходятся по вероятности к η при $n \rightarrow \infty$ (**состоятельные оценки**), у которых математическое ожидание равно η (**несмещенные оценки**) или у которых выборочное распределение имеет наименьшую дисперсию (**эффективные оценки**) и/или которые легче вычислить (пп.19.4-1 — 19.4-5).

(b) **Проверка статистических гипотез.** Для проверки статистических гипотез, устанавливающих некоторые свойства теоретического распределения (например, значения параметров η_1, η_2, \dots), оценивается правдоподобие (1) испытываемой выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) при условии, что для вычисления функции $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ применяется предполагаемая плотность распределения (2). Гипотеза отбрасывается, если испытываемая выборка (x_1, x_2, \dots, x_n) попадает в область малого правдоподобия, т. е. если найденное из опыта значение статистики $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ маловероятно при выбранной гипотетической функции правдоподобия. Выбор вероятности, которую следует считать малой (**уровня значимости критерия**), зависит от условий задачи.

Непараметрические критерии проверяют свойства гипотетического распределения, которые не сводятся к значениям параметров (например, идентичность двух распределений, независимость двух случайных величин, пп. 19.6-8 и 19.7-6); эти критерии удобны тем, что не требуют знания типа распределения (2) генеральной совокупности.

Примечание. Некорректное применение статистических методов может привести к неверным заключениям. Все (возможно и не высказанные явно) предположения, относящиеся к теоретическому распределению, должны быть проверены. *Никогда не следует применять одну и ту же выборку для оценки и для проверки.* Заметим, наконец, что статистические критерии не могут доказать ни одной гипотезы: они могут лишь указать на «отсутствие опровержения».

19.2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

19.2-1. Относительные частоты.

(а) **Определение.** Пусть событие E состоит в том, что значение случайной величины x принадлежит некоторому измеримому множеству S_E (обычно некоторому классовому интервалу, п.19.2-2,б), и пусть дана случайная выборка (x_1, x_2, \dots, x_n) значений величины x . **Частотой события E** в данной случайной выборке называется количество n_E выборочных значений x_k , попадающих в S_E , а **относительной частотой** — отношение n_E к объему выборки n :

$$h\{E\} = \frac{n_E}{n}. \quad (19.2-1)$$

(б) **Центр распределения и дисперсия.** Так как случайная выборка может рассматриваться как результат последовательности n испытаний по схеме Бернулли (п.18.7-3), то случайная величина n_E имеет биномиальное распределение (табл. 18.8-3), где $\vartheta = P\{E\} = \int_{S_E} d\Phi(x)$ есть *вероятность события E* и

$$Mh\{E\} = P\{E\}, \quad Dh\{E\} = \frac{P\{E\}(1-P\{E\})}{n}. \quad (19.2-2)$$

Относительная частота $h\{E\}$ есть несмещенная состоятельная оценка для соответствующей вероятности $P\{E\}$; при $n \rightarrow \infty$ эта оценка $h\{E\}$ асимптотически нормальна с параметрами (2) (пп.18.6-4 и 18.6-5, а).

19.2-2. Распределение выборки. Группированные данные.

(а) **Эмпирическая функция распределения.** Для данной случайной выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) **эмпирическая функция распределения**

$$F(X) = h\{x < X\} \quad (19.2-3)$$

есть неубывающая ступенчатая функция с $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Она является *несмещенной состоятельной оценкой для функции распределения $\Phi(X) = P\{x < X\}$* (п.18.2-9) и определяет **частотное распределение выборки**.

(б) **Классовые интервалы и группированные данные.** Пусть размах случайной величины x разделен на конечное (или бесконечное) число подходящим образом выбранных классовых интервалов $X_j - \frac{1}{2}\Delta X_j \leq x < X_j + \frac{1}{2}\Delta X_j$ ($j = 1, 2, \dots$), длины которых соответственно равны $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots$ (середины интервалов суть $X_1 < X_2 < \dots$). Для данной случайной выборки **групповая частота n_j** есть число тех x_k , которые попадают в j -й классовой интервал (описание выборки через **группированные данные**).

Относительные частоты $h_j = n_j/n$ попадания в j -й классовой интервал должны в сумме давать единицу; они являются несмещенными состоятельными оценками для соответствующих вероятностей

$$P_j = \frac{x_j + \frac{1}{2} \Delta x_j}{x_j - \frac{1}{2} \Delta x_j} \int d\Phi(x).$$

Накопленные частоты N_j и накопленные относительные частоты F_j определяются формулами

$$N_j = \sum_{i=1}^j n_i, \quad F_j = \sum_{i=1}^j h_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^j n_i = \frac{N_j}{n} = F\left(X_j + \frac{1}{2} \Delta X_j\right). \quad (19.2-4)$$

Для выборок достаточно большого объема при достаточно малых классовых интервалах все выборочные статистики могут быть вычислены по относительным частотам $h_j = \frac{n_j}{n}$, точно так же как соответствующие параметры генеральной совокупности вычисляются по вероятностям. Применение группированных данных дает экономию в расчетах, если объем выборки n больше чем 25. Кроме того, статистики $F(X)$, n_j , h_j , N_j и F_j дают различные графические представления выборочного распределения и, следовательно, оцениваемого распределения генеральной совокупности (гистограмма, полигон распределения и т. д.).

(е) **Выборочные квантили** X_p определяются формулой (см. также табл. 18.3-1 и п.19.5-2),

$$h(x < X_p) = F(X_p) = P \quad (0 < P < 1). \quad (19.2-5)$$

Эта формула определяет X_p неоднозначно, она лишь указывает границы выборочных значений x_k . $X_{1/2}$ называется **выборочной медианой**, $X_{1/4}$, $X_{1/2}$ и $X_{3/4}$ — **выборочными квантилями**; аналогично определяются выборочные децили и процентиля.

19.2-3. Выборочные средние (см. также пп. 18.3-3, 19.2-5 и 19.5-3).

(а) **Выборочное среднее** значение величины x . Пусть дана случайная выборка (x_1, x_2, \dots, x_n) ; **выборочным средним** значением величины x называется

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (19.2-6)$$

Для выборочного распределения, заданного классовыми интервалами с центрами $x = X_1, X_2, \dots, X_n$ (п.19.2-2), выборочное среднее \bar{x} аппроксимируется значением

$$\bar{x}_g = \frac{1}{n} (n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots + n_m X_m) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j X_j \quad (19.2-7)$$

(выборочное среднее при группированных данных).

\bar{x} есть **характеристика положения** для выборочного распределения. Отметим моменты распределения величины \bar{x} :

$$M\bar{x} = \xi, \quad D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (19.2-8)$$

$$M(\bar{x} - \xi)^3 = \frac{\mu_3}{n^2}, \quad M(\bar{x} - \xi)^4 = \frac{3(n-1)\sigma^4 + \mu_4}{n^3}, \quad (19.2-9)$$

если величины справа существуют (μ_3 и μ_4 — центральные моменты теоретического распределения величины x). **Выборочное среднее \bar{x} есть несмещенная состоятельная оценка для генерального среднего $\xi = Mx$. Если σ^2 существует, то \bar{x} имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами (8) при $n \rightarrow \infty$ (пп.18.6-4 и 19.5-2).**

(b) Выборочное среднее для $y(x)$. Выборочное среднее для функции $y(x)$ случайной величины x есть

$$\bar{y} = \frac{1}{n} [y(x_1) + y(x_2) + \dots + y(x_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y(x_k) \quad (19.2-10)$$

или, при группированных данных,

$$\bar{y}_g = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j y(X_j). \quad (19.2-11)$$

Оценки, основанные на формуле (11), иногда можно улучшить введением поправочного члена (п.19.2-5).

19.2-4. Выборочные дисперсии и моменты (см. также пп.18.3-3, 18.3-7, 19.2-5, 19.4-2 и 19.5-2).

(a) **Выборочные дисперсии**

$$\left. \begin{aligned} s^2 &= \overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2, \\ S^2 &= \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \end{aligned} \right\} \quad (19.2-12)$$

являются характеристиками рассеяния выборочного распределения; s называется **выборочным стандартным отклонением**. Отметим формулы

$$Ms^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2; \quad MS^2 = \sigma^2, \quad (19.2-13)$$

$$DS^2 = \frac{1}{n} \left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right), \quad (19.2-14)$$

если величины справа существуют. S^2 есть несмещенная состоятельная оценка для генеральной дисперсии $\sigma^2 = Dx$, и потому она чаще применяется, чем s^2 .

(b) **Моменты выборки**. Выборочные начальные моменты a_r и выборочные центральные моменты m_r порядка r определяются формулами

$$a_r = \bar{x}^r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^r; \quad m_r = \overline{(x-\bar{x})^r} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^r. \quad (19.2-15)$$

Заметим, что

$$Ma_r = a_r, \quad Da_r = \frac{a_{2r} - a_r^2}{n}, \quad (19.2-16)$$

$$Mm_r = \mu_r + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$Dm_r = \frac{1}{n} (\mu_{2r} - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1} - \mu^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.2-17)$$

если величины справа существуют. a_r есть несмещенная состоятельная оценка для соответствующего теоретического начального момента $\alpha_r = Mx^r$ генеральной совокупности. Если существует α_{2r} , то a_r имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами (16) при $n \rightarrow \infty$. m_r есть состоятельная, но смещенная оценка для теоретического центрального момента $\mu_r = M(x - \xi)^r$.

Несмещенными и состоятельными оценками для μ_3 и μ_4 будут соответственно

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_3 \quad \text{и} \quad \frac{n(n^2-2n+3)m_4 - 3n(2n-3)m_3^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

(е) Характеристики асимметрии и эксцесса (см. также табл. 18.3-1 и п.19.3-5). Статистики

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \quad (19.2-18)$$

характеризуют соответственно асимметрию и эксцесс выборки и являются состоятельными оценками асимметрии и эксцесса генеральной совокупности (см. также п.19.4-2). Грубо говоря, $g_1 > 0$ указывает на длинный «хвост» в правой части распределения. Некоторые авторы вводят g_1^2 и $g_2 + 3$ или $1/2(g_2 + 3)$ вместо g_1 и g_2 .

19.2-5. Упрощенное вычисление выборочных средних и дисперсий. Поправка на группировку.

(а) При вычислении удобно выбрать начало отсчета X_0 вблизи центра выборочного распределения и считать по формуле

$$\bar{x} = X_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - X_0) \quad (19.2-19)$$

или, при группированных данных,

$$\bar{x}_G = X_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j (X_j - X_0). \quad (19.2-20)$$

(б) Выборочные дисперсии s^2 и S^2 могут быть подсчитаны по формуле

$$s^2 = \frac{n-1}{n} S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 \quad (19.2-21)$$

или, при группированных данных,

$$s_G^2 = \frac{n-1}{n} S_G^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j X_j^2 - \bar{x}_G^2. \quad (19.2-22)$$

(с) Вычисления при группированных данных особенно упрощаются, если все классовые интервалы имеют одинаковую длину ΔX и если за начало отсчета принята середина одного из классовых интервалов, так что

$$X_j = X_0 + Y_j \Delta X, \quad (19.2-23)$$

где Y_j принимает только целые значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Тогда

$$\bar{x}_G = X_0 + \bar{y}_G \Delta X, \quad \bar{y}_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j Y_j, \quad (19.2-24)$$

$$s_G^2 = \frac{n-1}{n} S_G^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j Y_j^2 - \bar{y}_G^2 \right) (\Delta X)^2. \quad (19.2-25)$$

Проверить вычисления можно, выбирая другое начало отсчета, например $X_0 + \Delta X$.

(д) Поправка Шепарда на группировку. Пусть все классовые интервалы имеют одинаковую длину ΔX . Если для теоретического распределения величины x оба «хвоста» имеют высокий порядок соприкосновения с осью x , то приближение s_G^2 к истинной выборочной дисперсии s^2 можно улучшить путем прибавления поправки Шепарда $-\frac{(\Delta X)^2}{12}$. Для выборочных моментов по группированным данным

$$a_{rG} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j X_j^r, \quad m_{rG} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j (X_j - \bar{x}_G)^r \quad (19.2-26)$$

можно ввести аналогичные поправки с помощью оценок

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= a_{1\sigma}, \\ a'_2 &= a_{2\sigma} - \frac{1}{12} (\Delta X)^2, & m'_2 &= m_{2\sigma} - \frac{1}{12} (\Delta X)^2, \\ a'_3 &= a_{3\sigma} - \frac{1}{4} a_{1\sigma} (\Delta X)^2, & m'_3 &= m_{3\sigma}, \\ a'_4 &= a_{4\sigma} - \frac{1}{2} a_{2\sigma} (\Delta X)^2 + \frac{7}{240} (\Delta X)^4, & m'_4 &= m_{4\sigma} - \frac{1}{2} m_{2\sigma} (\Delta X)^2 + \frac{7}{240} (\Delta X)^4, \end{aligned} \right\} (19.2-27)$$

Вообще

$$a'_r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (2^{1-k} - 1) B_k a_{(r-k)\sigma} (\Delta X)^k \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (19.2-28)$$

где B_k — числа Бернулли (п.21.5-2).

П р и м е ч а н и е. Поправка Шенпарда часто применима в качестве оценки ошибки, возникающей при округлении выборочных значений в точных формулах (12) и (15). Например, средняя ошибка округления $\Delta X/2$ в значениях x_k воздействует обычно на s^2 только как $1/12 (\Delta X)^2$.

19.2-6. Размах выборки (см. также п.19.5-4). **Размах w случайной выборки** (x_1, x_2, \dots, x_n) есть разность между наибольшим и наименьшим значениями x_i . Размах выборки имеет физический смысл (контроль качества) и служит для грубой, но удобно вычисляемой оценки характеристик генеральной совокупности.

19.3. ТИПОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

19.3-1. Вводные замечания. В качестве теоретического распределения (генеральной совокупности) в статистических моделях могут служить распределения вероятностей, описанные в пп.18.8-1 — 18.8-9, в частности, нормальное, биномиальное, гипергеометрическое и пуассоновское распределения. Применимость тех или иных частных типов распределения (с подходящими параметрами) может быть установлена как теоретически, так и по графику эмпирического распределения.

Особенно удобно *нормальное распределение*. Каждое нормальное распределение вполне определяется своими первым и вторым моментами. В случае нормального распределения генеральной совокупности точно рассчитаны статистические критерии выборочного распределения (пп.19.6-4 и 19.6-6). Применимость нормального распределения часто обосновывается *ц ентральной предельной теоремой* (п.18.6-5); в частности, *ошибки измерения* часто рассматриваются как нормально распределенные суммы большого количества независимых «элементарных ошибок».

19.3-2.* Класс распределений Кэптейна. Часто оказывается желательным сопоставить опытным данным такое распределение случайной величины x , чтобы некоторая функция $g(x)$ имела нормальное распределение, т. е. чтобы

$$\Phi_x(x) = \Phi_u \left[\frac{g(x) - \mu}{\sigma_g} \right], \quad \varphi_x(x) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{g(x) - \mu}{\sigma_g} \right]^2} \left| \frac{dg}{dx} \right|, \quad (19.3-1)$$

где $-\infty < g(x) < +\infty$, $g'(x) \neq 0$ для $a < x < b$. После того как функция $g(x)$ выбрана (например, из теоретических соображений), остается оценить только два параметра $\mu = Mg(x)$ и σ_g , что для нормального распределения сделать нетрудно.

Случайная величина x , описываемая распределением (1), может рассматриваться как предел последовательности случайных величин

$$x_{r+1} = x_r + z_{r+1} h(x_r) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

нажда из которых есть результат действия малых независимых импульсов z_1, z_2, \dots, z_r , удовлетворяющих условиям п.18.6-3,с, причем

$$z_1 + z_2 + \dots + z_r = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{h(x_i)} \approx \int_{x_0}^x \frac{dx}{h(x)} = g(x).$$

В частности, если $h(x) = \text{const} = C$, то $g(x) = (x - x_0)/C$ и распределение (1) нормальное. Если $h(x) = x$, т. е. эффект действия импульса пропорционален уже достигнутому значению случайной величины, то $g(x) = \ln x$ и мы имеем логарифмически нормальное распределение с плотностью

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} & (x > 0). \end{cases} \quad (19.3-2)$$

19.3-3. Ряды Грама — Шарлье и Эдживорта. Плотность стандартизованной случайной величины $x = \frac{z - Mz}{\sigma(z)}$ (п.18.5-5) часто удобно аппроксимировать с помощью формулы

$$\begin{aligned} \varphi_z(x) &\approx \varphi_u(x) - \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \varphi_u'''(x) + \left[\frac{1}{4!} \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi_u^{(4)}(x) + \frac{10}{6!} \left(\frac{\mu_2}{\sigma^2} \right)^2 \varphi_u^{(6)}(x) \right] = \\ &= \varphi_u(x) - \frac{\gamma_1}{3!} \varphi_u'''(x) + \left[\frac{\gamma_2}{4!} \varphi_u^{(4)}(x) + \frac{10\gamma_1^2}{6!} \varphi_u^{(6)}(x) \right], \end{aligned} \quad (19.3-3)$$

где $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \gamma_1, \gamma_2$ — параметры теоретического распределения величины z (п.18.3-7,в и табл. 18.3-1). Аналогичное выражение для функции распределения $\Phi_z(x)$ получается из (3) заменой $\varphi_u^{(k)}(x)$ на $\Phi_u^{(k)}(x)$. Заметим, что для входящих в формулу (3) производных от плотности нормального распределения $\varphi_u(x)$ (п.18.8-3) имеются широко распространенные таблицы и что параметры (коэффициенты) могут быть легко оценены как функции моментов (п.19.4-3); но расчет выборочных распределений здесь не прост.

Для весьма ограниченного класса распределений формула (3) содержит первые члены разложения в ряд Грама — Шарлье по ортогональным функциям (п.15.2-6):

$$\Phi_z(x) = \Phi_u(x) + \frac{\eta_2}{3!} \Phi_u''(x) + \frac{\eta_4}{4!} \Phi_u^{IV}(x) + \dots \quad (19.3-4a)$$

$$\varphi_z(x) = \varphi_u(x) + \frac{\eta_2}{3!} \varphi_u'''(x) + \frac{\eta_4}{4!} \varphi_u^{IV}(x) + \dots \quad (19.3-4b)$$

где

$$\eta_k = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \int_{-\infty}^{\infty} H_k \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \varphi_x(x) dx, \quad (19.3-4c)$$

$H_k(x)$ — многочлен Эрмита степени k (п.21.7-1). Ряд (4a) сходится к $\Phi_z(x)$, если существуют все моменты μ_1, μ_2, \dots и если $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2} d\Phi_z(x)$ сходится; ряд (4b) будет при этом сходиться к $\varphi_z(x)$ во всех точках непрерывности, если $\varphi_z(x)$ есть функция ограниченной вариации (п.4.4-8,в) в $(-\infty, \infty)$. Для очень большого класса распределений аппроксимация (3) может быть обоснована асимптотическими рядами Эдживорта [18.6].

19.3-4. Усеченные нормальные распределения и распределение Парето.

(а) Усеченные нормальные распределения. Если из нормальной совокупности со средним μ и дисперсией σ^2 (п.19.1-2) исключить все события $\{x < \hat{\epsilon}_a\}$, то оставшаяся совокупность будет иметь одностороннее усеченное нормальное распределение, для которого $\varphi(x) = \Phi(x) = 0$ при $x < \hat{\epsilon}_a$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma(1 - \tau_a)} \varphi_u \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \quad \Phi(x) = \frac{\varphi_u \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) - \tau_a}{1 - \tau_a} \quad (x > \hat{\epsilon}_a), \quad (19.3-5)$$

где $\tau_\alpha = \Phi_u \left(\frac{\xi_\alpha - \mu}{\sigma} \right)$ (степен усечения) есть часть исходного распределения, отброшенная при усечении. Если ξ_α известно, то можно применить формулы

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \xi = Mx = \mu + \sigma^2 \varphi(\xi_\alpha), \\ \alpha_2 &= \mu^2 + \sigma^2 \varphi(\xi_\alpha) (\xi_\alpha + \mu) + \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (19.3-6)$$

для оценки параметров μ и σ по методу моментов (п.19.4-3) с помощью таблиц Пирсона, выражающих μ и σ через α_1 и α_2 .

(b) Распределение Парето определяется формулами $\varphi(x) = \Phi(x) = 0$ при $x < \xi_\alpha$ и

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\xi_\alpha} \left(\frac{\xi_\alpha}{x} \right)^{\alpha+1}, \quad \Phi(x) = 1 - \left(\frac{\xi_\alpha}{x} \right)^\alpha \quad (x > \xi_\alpha; \alpha > 0) \quad (19.3-7)$$

с

$$\xi = Mx = \frac{\alpha}{\alpha-1} \xi_\alpha \quad (\alpha > 1), \quad x_{1/2} = \xi_\alpha \sqrt[2]{2}. \quad (19.3-8)$$

19.3-5. Типы распределений Пирсона. Плотность многих непрерывных распределений вероятностей может быть определена как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{x + \eta_1}{\eta_2 + \eta_3 x + \eta_4 x^2} \varphi(x), \quad (19.3-9)$$

содержащего четыре параметра. Каждый параметр η_k может быть выражен через первые четыре момента α_r или μ_r (п.19.4-3), но расчет выборочных распределений, даже в наиболее простых случаях, труден. Распределения, определяемые уравнением (9), могут быть классифицированы в зависимости от характера корней уравнения $\eta_2 + \eta_3 x + \eta_4 x^2 = 0$. Эти распределения охватывают многие распределения, приведенные в табл. 18.8-11, пп.18.8-3 и 9.5-3, как частные случаи.

Для распределений Пирсона вводится пирсоновская мера асимметрии (табл. 18.3-1):

$$\frac{\xi - \xi_m}{\sigma} = \frac{\gamma_1(\gamma_2 + 6)}{2(5\gamma_2 - 6\gamma_1^2 + 6)}; \quad (19.3-10)$$

при малых γ_1, γ_2 отсюда следует, что $\xi_m \approx \xi - \frac{1}{2} \sigma \gamma_1$.

19.4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ

19.4-1. Свойства оценок (см. также п.19.1-3).

(a) Статистика $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **состоятельной оценкой** для параметра η теоретической совокупности, если y сходится к η по вероятности при увеличении объема выборки n , т. е. если вероятность любого конечного отклонения $|y - \eta|$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (п.18.6-1).

(b) **Смещением** некоторой оценки y параметра η называется разность $b(\eta) = My - \eta$. Оценка y называется **несмещенной оценкой** параметра η , если $My = \eta$ при любых значениях η .

(c) **Асимптотически эффективные оценки** и **эффективные оценки**. Желательно применять такие оценки, выборочные распределения которых возможно меньше рассеиваются около искомого значения параметра, т. е. оценки с возможно меньшей стандартной ошибкой $\sqrt{Dy} = \sigma(y)$. Для важного класса оценок $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, выборочные распределения которых **асимптотически нормальны** со средней η и дисперсией λ/n (см. также п.19.5-2), постоянная λ определяется формулой

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} n Dy \geq \lambda_{\min} = \frac{1}{M \left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial \eta} \right)^2}. \quad (19.4-1)$$

Асимптотическая эффективность $e_{\infty}\{y\} = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda}$ такой оценки измеряет рассеяние асимптотического распределения около параметра η ; y называется

асимптотически эффективной оценкой параметра η , если $\lambda = \lambda_{\min}$. Каждая *асимптотически эффективная оценка является состоятельной*.

Более общо, «относительная эффективность» оценки $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ параметра η по данной выборке объема n измеряется обратной величиной среднего квадрата отклонения $M(y-\eta)^2$. При достаточно общих условиях [18.6] средний квадрат отклонения $M(y-\eta)^2$ различных возможных оценок y данного параметра η имеет конечную нижнюю грань, определяемую формулой

$$M(y-\eta)^2 \geq \frac{\lambda_{\min}}{n} = \frac{\left(1 + \frac{db}{d\eta}\right)^2}{n M \left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial \eta}\right)^2}, \quad (19.4-2)$$

где $b(\eta) = M y - \eta$.

Для несмещенных оценок y выражение (2) сводится к

$$Dy \geq \frac{\lambda_{\min}}{n} = \frac{1}{n M \left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial \eta}\right)^2}. \quad (19.4-3)$$

Эффективность $e(y) = \frac{\lambda_{\min}}{n Dy}$ несмещенной оценки, удовлетворяющей соотношению (3), измеряет рассеяние выборочного распределения около $\eta = M y$. В этом случае предел $\lim_{n \rightarrow \infty} e(y)$, если он существует, называется *асимптотической эффективностью*. Некоторая (обязательно несмещенная и состоятельная) оценка y называется *эффективной оценкой* параметра η , если Dy существует и равняется нижней грани $\frac{\lambda_{\min}}{n}$.

(д) **Достаточные оценки**. Оценка $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ параметра η называется **достаточной оценкой**, если функцию правдоподобия для выборки (п.19.1-2) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} L(X_1, X_2, \dots, X_n; \eta) &\equiv L_1(Y, \eta) L_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \\ Y &\equiv y(X_1, X_2, \dots, X_n), \end{aligned} \right\} \quad (19.4-4)$$

где L_2 не зависит от η . В этом случае условное распределение вероятностей величины (x_1, x_2, \dots, x_n) при условии $\{y = Y\}$ не зависит от η , так что *достаточная оценка y параметра η подытоживает всю информацию относительно η , содержащуюся в выборке. Эффективная оценка обязательно является достаточной*.

(е) **Обобщения**. Формулы (1) – (3) применимы и к дискретным распределениям, если вместо плотности распределения $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ подставить в них $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теория, изложенная выше, применима без изменения к совокупностям, описываемым многомерными случайными величинами.

Совокупность m подходящих несмещенных оценок y_1, y_2, \dots, y_m называется **совместно эффективной оценкой m параметров $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$** , если эллипсоид рассеяния (п.18.4-8,с) совместного выборочного распределения совпадает с «эллипсоидом минимального рассеяния», аналогично минимуму дисперсии, определенному формулой (3). **Совместные асимптотически эффективные оценки** определяются подобным образом через асимптотические выборочные распределения. Обратная величина обобщенной дисперсии (п.18.4-8,с), сопоставленной совместно выборочному распределению величин y_1, y_2, \dots, y_m является мерой *относительной совместной эффективности* этой совокупности оценок.

Чтобы определить совокупность m **совместно достаточных оценок y_1, y_2, \dots, y_m** , надо только заменить случайную величину y в формуле (4) m -мерной случайной величиной (y_1, y_2, \dots, y_m) .

19.4-2. Некоторые свойства статистик, применяемых в качестве оценок (см. также п.19.2-4).

(а) **Функции от моментов**. Каждая статистика, представляемая в виде рациональной функции от выборочных моментов a_r , является *состоятельной оценкой той же самой функции от соответствующих моментов α_r генеральной совокупности при условии, что рассматриваемые моменты существуют и что значения функции в них конечно* (см. также п.18.3-7).

Несмещенную состоятельную оценку часто удается получить из смещенной состоятельной оценки путем умножения ее на подходящую функцию от n .

Аналогичная теорема применима к функции от выборочных моментов $a_{r_1 k}, \dots$ для многомерных выборок. В частности, величины g_1, g_2, l_{ik}, r_{ik} и $r_{12-34} \dots m$ (п.19.7-2) являются состоятельными оценками соответствующих параметров $\gamma_1, \gamma_2, l_{ik}, r_{ik}$ и $r_{12-34} \dots m$ генеральной совокупности.

(b) Для выборок из *нормальной совокупности* имеем:

1) \bar{x} — эффективная оценка для ξ .
 2) \bar{x} и s^2 — совместные асимптотически эффективные оценки для ξ и σ^2 , но s^2 — смещенная оценка; \bar{x} и $S^2 = \frac{n}{n-1} s^2$ — совместные достаточные и асимптотически эффективные оценки для ξ и σ^2 . S^2 имеет эффективность $\frac{n-1}{n}$.

3) Если ξ известно, то $\hat{s}^2 = (x - \xi)^2$ — эффективная оценка для σ^2 .

4) Выборочная медиана $x_{1/2}$ имеет асимптотическую эффективность $2/n$.

Для выборок из *биномиального распределения* (табл. 18.8-3) \bar{x} — эффективная оценка для ξ .

Для выборок из *двумерного нормального распределения* (п.18.8-6) с известным центром распределения выборочные центральные моменты l_{11}, l_{12} и l_{22} (п.19.7-2) являются совместными асимптотически эффективными оценками для $\lambda_{11}, \lambda_{12}$ и λ_{22} .

19.4-3. Нахождение оценок. Метод моментов. Если распределение генеральной совокупности описывается функцией

$$\Phi(x; \eta_1, \eta_2, \dots), \quad \varphi(x; \eta_1, \eta_2, \dots) \quad \text{или} \quad p(x; \eta_1, \eta_2, \dots)$$

заданного вида с подлежащими определению параметрами η_1, η_2, \dots , то каждая числовая характеристика распределения Mx, Dx, α_r и т. д. является функцией параметров η_1, η_2, \dots . В частности,

$$\alpha_1 = \alpha_1(\eta_1, \eta_2, \dots), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\eta_1, \eta_2, \dots), \dots$$

если эти моменты существуют. *Метод моментов* определяет (совместные) оценки

$$y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для соответствующих параметров $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ посредством m уравнений

$$\alpha_r(y_1, y_2, \dots, y_m) = a_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad (19.4-5)$$

получаемых путем *приравнивания первых m выборочных моментов a_r соответствующим моментам α_r генеральной совокупности*. Получаемые при этом оценки y_k будут функциями от выборочных моментов (см. также п.19.4-2,а).

19.4-4. Метод наибольшего правдоподобия. Для любой данной выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) значение функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (п.19.1-2) есть функция неизвестных параметров η_1, η_2, \dots . По *методу наибольшего правдоподобия* в качестве оценки каждого параметра η_k выбирается такая функция $y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая придает возможно большее значение величине $L(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots)$ для всех выборок (x_1, x_2, \dots, x_n) . Для получения совокупности m (совместно) **наиболее правдоподобных оценок**

$$y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \quad y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

решают систему m уравнений наибольшего правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

(19.4-6)

которые выражают необходимые условия максимума функции правдоподобия, если последняя дифференцируема (п.11.3-3).

Хотя метод наибольшего правдоподобия часто приводит к более сложным вычислениям, чем метод моментов, наиболее правдоподобные оценки могут оказаться предпочтительнее, особенно в случае малых выборок, так как:

1) Если эффективная оценка (или совокупность совместно эффективных оценок) существует, то она будет единственным решением уравнения (или системы уравнений) правдоподобия (6).

2) Если достаточная оценка (или совокупность достаточных оценок) существует, то каждое решение уравнения (или системы уравнений) правдоподобия (6) будет функцией этой оценки (или оценок).

Кроме того, при достаточно общих условиях [18.6] уравнения правдоподобия (6) имеют решения, дающие состоятельные, асимптотически нормальные и асимптотически эффективные оценки.

Пример. Если величина x распределена нормально, наиболее правдоподобная оценка $X = \bar{x}$ для ξ является эффективной оценкой и минимизирует $\sum_{i=1}^n (x_i - X)^2$ (метод наименьших квадратов в теории ошибок). Заметим, что метод наибольшего правдоподобия применим также к многомерным совокупностям.

19.4-5. Другие методы нахождения оценок. Некоторые методы, обычно применяемые в критериях согласия, могут быть использованы и для оценок параметров (п.19.6-7).

19.5. ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

19.5-1. Вводные замечания. Здесь рассматриваются распределения статистик, часто применяемых в качестве состоятельных оценок для соответствующих параметров генеральной совокупности. В п.19.5-2 речь идет о приближенном расчете выборочного распределения для больших выборок, в пп.19.5-3 и 19.5-4 — о распределении статистик, получаемых из нормальных совокупностей.

19.5-2. Асимптотически нормальные выборочные распределения (см. также п.18.6-4). При достаточно большом объеме выборки выборочные распределения многих статистик можно аппроксимировать нормальными распределениями с помощью следующих теорем, получаемых из п.18.6-5.

(а) Пусть статистика $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представима в виде функции $y = f(t_1, t_2, \dots)$ от выборочных моментов t_k , и пусть $f(t_1, t_2, \dots)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $t_1 = \mu_1, t_2 = \mu_2, \dots$. Тогда выборочное распределение статистики y асимптотически нормально при $n \rightarrow \infty$ с центром $f(\mu_1, \mu_2, \dots)$ и дисперсией вида $\frac{\text{const}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Эта теорема применима, в частности, к выборочному среднему \bar{x} , к выборочным дисперсиям s^2 и S^2 и ко всем выборочным моментам a_r и m_r (п.19.2-4). Аналогичная теорема применима к многомерным распределениям.

(б) Распределение каждой выборочной квантили X_r асимптотически нормально с центром x_r и дисперсией $\frac{P(1-P)}{n\varphi^2(x_r)}$, если только генеральная квантиль x_r единственна и если производная $\varphi'(x)$ существует и непрерывна в окрестности точки $x = x_r$. Эта теорема применима, в частности, к выборочной медиане $X_{1/2}$. При аналогичных условиях любое совместное распределение выборочных квантилей (и, следовательно, например, выборочной интерквартильной широты) также является асимптотически нормальным.

19.5-3. Выборки из нормальной совокупности. Распределения χ^2 , t и ν^2 .

(а) В случае выборок из нормальной совокупности (нормальных выборок) все выборочные значения являются нормальными случайными величинами и многие выборочные распределения могут быть вычислены явно с помощью пп.18.5-7 и 18.8-9. Предположение о нормальности генеральной совокупности

часто опирается на центральную предельную теорему (п.18.6-5; пример: ошибки измерения).

Для любой выборки объема n из нормальной совокупности с центром ξ и дисперсией σ^2 :

- 1) $\frac{\bar{x} - \xi}{\sigma/\sqrt{n}}$ имеет стандартизованное нормальное распределение (u -распределение, п. 18.8-4);
- 2) $\frac{\bar{x} - \xi}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \xi}{s/\sqrt{n-1}}$ (отношение Стьюдента) имеет t -распределение с $n-1$ степенью свободы (табл. 19.5-2);
- 3) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ имеет χ^2 -распределение с $n-1$ степенью свободы (табл. 19.5-1);

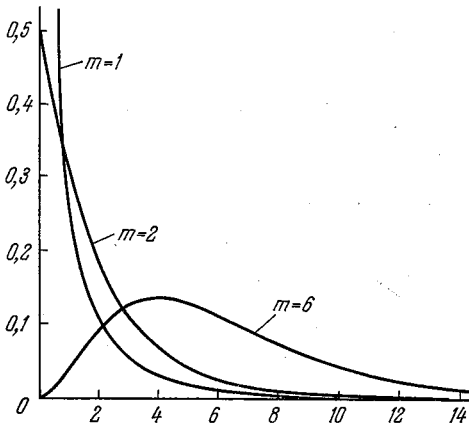


Рис. 19.5-1. χ^2 -распределение для различных значений m (табл. 19.5-1).

- 4) $\frac{x_i - \xi}{\sigma}$ имеет стандартизованное нормальное распределение;
- 5) $\frac{x_i - \xi}{S} = \frac{x_i - \xi}{s} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ имеет t -распределение с $n-1$ степенью свободы;
- 6) $\frac{x_i - \bar{x}}{S} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ имеет r -распределение с $m = n-2$ (п. 19.7-4);
- 7) $\frac{n\hat{s}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \xi)^2$ имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы.

Дополнительные формулы см. ниже в табл. 19.6-1. Табл. 19.5-1 — 19.5-3 описывают распределения χ^2 , t и u^2 ; квантили этих функций табулированы (см. табл. 19.5-4—19.5-6).

Т а б л и ц а 19.5-1

χ^2 -распределение с m степенями свободы
(рис. 19.5-1, см. также пп. 18.8-7, 19.5-3 и 19.6-7)

$$(a) \varphi_Y(Y) \equiv \varphi_{\chi^2(m)}(Y) = \begin{cases} 0 & \text{при } Y < 0, \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{m/2}} Y^{\frac{m-2}{2}} e^{-\frac{Y}{2}} & \text{при } Y > 0. \end{cases}$$

$$(b) M_Y = m, \quad D_Y = 2m.$$

Мода $m-2$ ($m > 2$).

Коэффициент асимметрии $2\sqrt{\frac{2}{m}}$.

Момент порядка r
относительно $y = 0$:

Коэффициент эксцесса $12/m$.

$$m(m+2) \dots (m+2r-2).$$

Характеристическая функция

Семинвариант порядка r :

$$(1-2iq)^{-m/2}$$

$$2^{r-1}(r-1)! m.$$

(с) Типичная интерпретации. Если m взаимно независимых стандартизованных случайных величин $u_k = \frac{x_k - \xi_k}{\sigma_k}$ имеют нормальные распределения,

то сумма их квадратов $\chi^2 = \sum_{k=1}^m u_k^2$ имеет χ^2 -распределение с m степенями свободы.

Если $\sum_{k=1}^m u_k^2$ выражена в виде суммы от r квадратичных форм $y_j(u_1, u_2, \dots, u_m)$

рангов соответственно m_j (п.13.5-4, б), то y_1, y_2, \dots, y_r взаимно независимы и имеют χ^2 -распределения с m_1, m_2, \dots, m_r степенями свободы тогда и только тогда, когда $m_1 + m_2 + \dots + m_r = m$ (теорема разложения).

Сумма r независимых случайных величин y_1, y_2, \dots, y_r , имеющих χ^2 -распределение с m_1, m_2, \dots, m_r степенями свободы соответственно, имеет χ^2 -распределение с $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ степенями свободы (теорема сложения или свойство устойчивости, см. также п.18.8-9).

(d) Квантили для y обозначаются через χ_P^2 или $\chi_P^2(m)$. В таблицах часто дается $\chi_{1-\alpha}(m)$ в зависимости от α .

(e) Приближения. При $m \rightarrow \infty$

y распределена асимптотически нормально с центром m и дисперсией $2m$,

y/m распределена асимптотически нормально с центром 1 и дисперсией $2/m$,

$\sqrt{2y}$ распределена асимптотически нормально с центром $\sqrt{2m-1}$ и дисперсией 1.

Из последнего свойства вытекает аппроксимация квантилей

$$\chi_P^2(m) \approx \frac{1}{2} (\sqrt{2m-1} + u_P)^2 \quad (m > 30).$$

Эта аппроксимация не годится при значениях P , близких к 0 или 1. Лучшая аппроксимация дается формулой

$$\chi_P^2(m) \approx m \left(1 - \frac{2}{9m} + u_P \sqrt{\frac{2}{9m}} \right)^3.$$

Таблица 19.5-2

***t*-распределение Стьюдента с m степенями свободы**
(рис. 19.5-2, см. также пп.19.5-3 и 19.6-6)

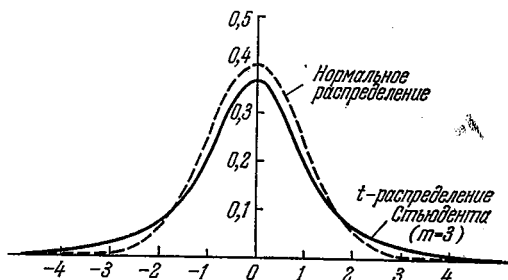


Рис. 19.5-2. *t*-распределение Стьюдента; сравнение со стандартизованным нормальным распределением.

$$(a) \varphi_y(Y) \equiv \varphi_{t(m)}(Y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}} \left(1 + \frac{Y^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}$$

$$(b) M_y = 0 \quad (m > 1), \quad D_y = \frac{m}{m-2} \quad (m > 2).$$

Мода 0

Коэффициент асимметрии 0

$$\text{Коэффициент эксцесса} \quad \frac{3(m-2)}{m-4} \quad (m > 4)$$

Моменты порядка $2r$ относительно $y = 0$:

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2r-1)}{(m-2)(m-4) \dots (m-2r)} m^r \quad (2r < m).$$

(c) Типичная интерпретация. Распределению Стьюдента подчинено отношение

$$y = t = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{m}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)}}$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ — взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с центрами 0 и дисперсиями σ^2 . Заметим, что t от σ^2 не зависит.

(d) Квантили y_p для y обозначаются через t_p ; заметим, что $t_p = -t_{1-p}$. Распределение величины $|y| = |t|$ связано с *t*-распределением формулами

$$P\{|y| < Y\} = P\{-Y < y < Y\} = \int_{-Y}^Y \varphi_{t(m)}(y) dy = 2\Phi_{t(m)}(Y) - 1 = \Phi_{|t(m)|}(Y),$$

$$P\{|y| > Y\} = 2 \int_Y^{\infty} \varphi_{t(m)}(y) dy = 2[1 - \Phi_{t(m)}(Y)] = 1 - \Phi_{|t(m)|}(Y).$$

Квантили

$$|t|_{1-\alpha} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

определяемые соотношением $P\{|y| > |t|_{1-\alpha}\} = \alpha$, табулированы; в некоторых таблицах значения $|t|_{1-\alpha}$ обозначены через t_{α} .

(e) Приближения. При $m \rightarrow \infty$ распределение y асимптотически нормально с центром 0 и дисперсией 1, так что

$$t_p \approx u_p \quad \text{и} \quad |t|_{1-\alpha} = t_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx |u|_{1-\alpha} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

(п.18.8-4, b) при $m > 30$.

Таблица 19.5-3

Распределение отношения дисперсий (v^2 -распределение) и связанные с ним распределения (см. также п.19.6-6)

$$(a) \varphi_y(Y) \equiv \varphi_{v^2(m, m')}(Y) = \begin{cases} 0 & \text{при } Y < 0, \\ \left(\frac{m}{m'}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+m'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'}{2}\right)} Y^{\frac{m-2}{2}} \left(1+\frac{m}{m'}Y\right)^{-\frac{m+m'}{2}} & \text{при } Y > 0. \end{cases}$$

$$(b) My = \frac{m'}{m'-2} \quad (m' > 2) \quad Dy = \frac{2m'^2(m+m'-2)}{m(m'-2)^2(m'-4)} \quad (m' > 4).$$

Мода $\frac{m'(m-2)}{m(m'+2)}$.

Момент порядка r относительно $y = 0$: $\frac{\Gamma(m/2+r)\Gamma(m'/2-r)}{\Gamma(m/2)\Gamma(m'/2)}(m'/m)^r$.

(с) Типичная интерпретация. Этому распределению подчинено отношение v^2 двух случайных величин, имеющих χ^2 -распределения с m и m' степенями свободы, или

$$y = v^2 = \frac{\frac{1}{m}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)}{\frac{1}{m'}(x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_{m'}^2)} = e^{2z} = \frac{m'}{m} \frac{g^2}{1-g^2},$$

где все $m+m'$ величин x_i и x_i' взаимно независимы и нормально распределены с центрами 0 и дисперсиями σ^2 . Заметим, что v^2 от σ^2 не зависит.

(d) Преобразование переменных. Распределение отношения дисперсий v^2 описывается также другими случайными величинами:

1) v с плотностью

$$\varphi_{v(m, m')}(V) = \begin{cases} 0 & \text{при } V < 0, \\ 2 \left(\frac{m}{m'}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+m'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'}{2}\right)} V^{m-1} \left(1+\frac{m}{m'}V^2\right)^{-\frac{m+m'}{2}} & \text{при } V > 0; \end{cases}$$

2) $z = \ln v = \frac{1}{2} \ln v^2$ с плотностью

$$\varphi_{z(m, m')}(Z) = 2 \left(\frac{m}{m'}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+m'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'}{2}\right)} e^{mz} \left(1+\frac{m}{m'}e^{2z}\right)^{-\frac{m+m'}{2}}, \quad (\text{распределение Фишера});$$

Фишера);

3) $g^2 = \frac{m}{m'} v^2 \left(1 + \frac{m}{m'} v^2\right)^{-1}$ с бета-распределением (табл. 18.8-11).

(e) Квантили

$$v_{1-\alpha}^2(m, m') = \frac{1}{v_{\alpha}(m, m')}, \quad v_{1-\alpha}(m, m') \quad \text{и} \quad z_{1-\alpha}(m, m')$$

табулированы в функциях от α для различных значений m, m' .

Специальные случаи

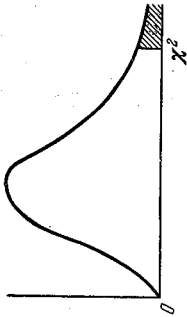
$$\begin{aligned} v_{P}^2(1, m) &= \frac{t_{1-P}^2(m)}{2}, & v_{P}^2(m, \infty) &= \frac{1}{m} \chi_{P}^2(m), & v_{P}^2(1, \infty) &= \frac{u_{1-P}^2}{2}, \\ v_{P}^2(m, 1) &= \frac{1}{\frac{t_{P}^2(m)}{2}}, & v_{P}^2(\infty, m) &= \frac{1}{m \chi_{1-P}^2(m)}, & v_{P}^2(\infty, 1) &= \frac{1}{\frac{u_{P}^2}{2}}. \end{aligned}$$

(f) Приближения. При $m \rightarrow \infty, m' \rightarrow \infty$ величина z распределена асимптотически нормально с центром $\frac{m-m'}{2mm'}$ и дисперсией $\frac{m+m'}{2mm'}$. Эта аппроксимация пригодна при $m > 30, m' > 30$.

Таблица 19.5-4

χ^2 - распределение

В таблице приведены значения квантилей $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α



		Вероятность $P\{\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m)\}$										
α	m	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	2	0,00016	0,0063	0,393	0,7158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
1	3	0,0201	0,0404	0,703	0,2118	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
1	4	0,1415	0,185	0,352	0,584	0,852	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
1	5	0,297	0,399	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
1	6	0,354	0,452	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
1	7	0,472	0,572	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,083	16,812	22,457
1	8	0,591	0,691	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,692	18,475	24,322
1	9	0,708	0,808	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
1	10	0,815	0,915	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
1	11	0,915	1,015	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
1	12	1,015	1,115	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
1	13	1,115	1,215	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
1	14	1,215	1,315	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
1	15	1,315	1,415	6,571	7,790	9,471	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
1	16	1,415	1,515	7,261	8,547	10,307	19,341	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
1	17	1,515	1,615	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
1	18	1,615	1,715	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
1	19	1,715	1,815	9,399	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
1	20	1,815	1,915	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
1	21	1,915	2,015	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
1	22	2,015	2,115	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
1	23	2,115	2,215	12,338	14,044	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,298	48,258
1	24	2,215	2,315	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,688	49,728
1	25	2,315	2,415	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
1	26	2,415	2,515	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
1	27	2,515	2,615	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
1	28	2,615	2,715	16,152	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
1	29	2,715	2,815	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
1	30	2,815	2,915	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
1	31	2,915	3,015	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

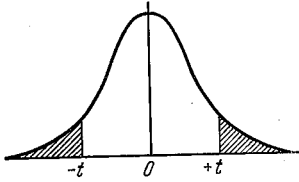


Таблица 19.5-5

t-распределение Стьюдента

В таблице приведены значения квантилей $|t(m)|_{1-\alpha}$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α

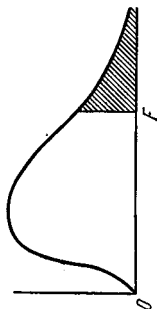
Вероятность $P\{ t > t(m) _{1-\alpha}\}$								
$m \backslash \alpha$	0,80	0,40	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,325	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,271	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,256	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,254	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,254	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

F-распределение (распределение v^2)

В таблице приведены значения квантилей $v_{1-\alpha}^2(m, m')$ для $\alpha = 0,05$ (обычный шрифт) и $\alpha = 0,01$ (жирный шрифт)

в зависимости от числа степеней свободы m и m' .

m — число степеней свободы для большей дисперсии
 m' — число степеней свободы для меньшей дисперсии



Число степеней свободы для большей дисперсии

$m \backslash m'$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	40	50	100	200	∞	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,47	19,48	19,49	19,50	19,50
3	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,38	99,40	99,42	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	99,50
4	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,92	26,83	26,69	26,50	26,41	26,35	26,23	26,18	26,12	26,12	26,12
5	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,37	14,24	14,15	14,02	13,98	13,88	13,74	13,69	13,57	13,52	13,46	13,46
6	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,89	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,14	9,07	9,02	9,02
7	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,60	7,52	7,39	7,31	7,23	7,14	7,09	6,99	6,94	6,88	6,88
8	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,47	6,35	6,27	6,15	6,07	5,98	5,90	5,85	5,75	5,70	5,65	5,65
9	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,08	5,91	5,82	5,67	5,56	5,48	5,38	5,28	5,20	5,11	5,08	4,98	4,96	4,86	4,86
10	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,49	5,35	5,26	5,11	5,00	4,92	4,80	4,73	4,61	4,51	4,42	4,36	4,31	4,21	4,21
11	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,38	5,21	5,06	4,95	4,85	4,71	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,01	3,96	3,86	3,86
12	9,66	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,40	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,80	3,70	3,66	3,56	3,56
13	9,38	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,16	4,05	3,98	3,86	3,78	3,70	3,61	3,56	3,46	3,41	3,36	3,36
14	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,85	3,78	3,67	3,59	3,51	3,42	3,37	3,27	3,21	3,16	3,16

Т а б л и ц а 19.5-6 (продолжение)

m	Число степеней свободы для большой дисперсии																∞				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30		40	50	100	200
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,13
15	4,56	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,55	2,48	2,43	2,38	2,33	2,29	2,25	2,21	2,17	2,12	2,07	2,04	2,07
16	4,52	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,50	2,43	2,38	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,12	2,07	2,02	1,98	2,01
17	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,50	2,43	2,38	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,12	2,07	2,02	1,98	2,01
18	4,46	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,46	2,39	2,33	2,28	2,23	2,19	2,15	2,11	2,07	2,02	1,98	1,94	1,88
19	4,43	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,41	2,34	2,29	2,23	2,18	2,14	2,10	2,06	2,02	1,98	1,94	1,90	1,84
20	4,40	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,38	2,31	2,26	2,20	2,15	2,11	2,07	2,02	1,98	1,94	1,90	1,87	1,84
21	4,37	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,35	2,28	2,23	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,90	1,87	1,84	1,84
22	4,34	3,46	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,32	2,25	2,20	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,91	1,87	1,84	1,81	1,81
23	4,31	3,43	3,04	2,81	2,65	2,54	2,46	2,39	2,29	2,22	2,17	2,12	2,06	2,02	1,97	1,93	1,88	1,84	1,81	1,78	1,78
24	4,28	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,26	2,19	2,14	2,09	2,03	1,99	1,94	1,90	1,85	1,81	1,77	1,74	1,74
25	4,25	3,37	2,98	2,75	2,59	2,48	2,40	2,33	2,23	2,16	2,11	2,06	2,00	1,96	1,91	1,87	1,82	1,78	1,74	1,71	1,71
26	4,22	3,34	2,95	2,72	2,56	2,45	2,37	2,30	2,20	2,13	2,08	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,75	1,71	1,67	1,67
27	4,19	3,31	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,17	2,10	2,05	2,00	1,94	1,90	1,85	1,81	1,76	1,72	1,68	1,64	1,64
28	4,16	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,31	2,24	2,14	2,07	2,02	1,97	1,91	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,61	1,61
29	4,13	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,28	2,21	2,11	2,04	1,99	1,94	1,88	1,84	1,79	1,75	1,70	1,66	1,62	1,58	1,58
30	4,10	3,22	2,83	2,60	2,44	2,33	2,25	2,18	2,08	2,01	1,96	1,91	1,85	1,81	1,76	1,72	1,67	1,63	1,59	1,55	1,55
32	4,07	3,19	2,80	2,57	2,41	2,30	2,22	2,15	2,05	1,98	1,93	1,88	1,83	1,79	1,74	1,70	1,65	1,61	1,57	1,53	1,53
34	4,04	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,19	2,12	2,02	1,95	1,90	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,62	1,58	1,54	1,50	1,50
35	4,01	3,13	2,74	2,51	2,35	2,24	2,16	2,09	2,00	1,93	1,88	1,83	1,78	1,74	1,69	1,65	1,60	1,56	1,52	1,48	1,48
36	3,98	3,10	2,71	2,48	2,32	2,21	2,13	2,06	1,97	1,90	1,85	1,80	1,75	1,71	1,66	1,62	1,57	1,53	1,49	1,45	1,45
37	3,95	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,87	1,82	1,77	1,72	1,68	1,63	1,59	1,54	1,50	1,46	1,42	1,42
38	3,92	3,04	2,65	2,42	2,26	2,15	2,07	2,00	1,91	1,84	1,79	1,74	1,69	1,65	1,60	1,56	1,51	1,47	1,43	1,39	1,39
39	3,89	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,04	1,97	1,88	1,81	1,76	1,71	1,66	1,62	1,57	1,53	1,48	1,44	1,40	1,36	1,36
40	3,86	2,98	2,59	2,36	2,20	2,09	2,01	1,94	1,85	1,78	1,73	1,68	1,63	1,59	1,54	1,50	1,45	1,41	1,37	1,33	1,33
41	3,83	2,95	2,56	2,33	2,17	2,06	1,98	1,91	1,82	1,75	1,70	1,65	1,60	1,56	1,51	1,47	1,42	1,38	1,34	1,30	1,30
42	3,80	2,92	2,53	2,30	2,14	2,03	1,95	1,88	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,48	1,44	1,39	1,35	1,31	1,27	1,27
43	3,77	2,89	2,50	2,27	2,11	2,00	1,92	1,85	1,76	1,69	1,64	1,59	1,54	1,50	1,45	1,41	1,36	1,32	1,28	1,24	1,24
44	3,74	2,86	2,47	2,24	2,08	1,97	1,89	1,82	1,73	1,66	1,61	1,56	1,51	1,47	1,42	1,38	1,33	1,29	1,25	1,21	1,21
45	3,71	2,83	2,44	2,21	2,05	1,94	1,86	1,79	1,70	1,63	1,58	1,53	1,48	1,44	1,39	1,35	1,30	1,26	1,22	1,18	1,18
46	3,68	2,80	2,41	2,18	2,02	1,91	1,83	1,76	1,67	1,60	1,55	1,50	1,45	1,41	1,36	1,32	1,27	1,23	1,19	1,15	1,15
47	3,65	2,77	2,38	2,15	1,99	1,88	1,80	1,73	1,64	1,57	1,52	1,47	1,42	1,38	1,33	1,29	1,24	1,20	1,16	1,12	1,12
48	3,62	2,74	2,35	2,12	1,96	1,85	1,77	1,70	1,61	1,54	1,49	1,44	1,39	1,35	1,30	1,26	1,21	1,17	1,13	1,09	1,09
49	3,59	2,71	2,32	2,09	1,93	1,82	1,74	1,67	1,58	1,51	1,46	1,41	1,36	1,32	1,27	1,23	1,18	1,14	1,10	1,06	1,06
50	3,56	2,68	2,29	2,06	1,90	1,79	1,71	1,64	1,55	1,48	1,43	1,38	1,33	1,29	1,24	1,20	1,15	1,11	1,07	1,03	1,03
51	3,53	2,65	2,26	2,03	1,87	1,76	1,68	1,61	1,52	1,45	1,40	1,35	1,30	1,26	1,21	1,17	1,12	1,08	1,04	1,00	1,00
52	3,50	2,62	2,23	2,00	1,84	1,73	1,65	1,58	1,49	1,42	1,37	1,32	1,27	1,23	1,18	1,14	1,09	1,05	1,01	0,97	0,97
53	3,47	2,59	2,20	1,97	1,81	1,70	1,62	1,55	1,46	1,39	1,34	1,29	1,24	1,20	1,15	1,11	1,06	1,02	0,98	0,94	0,94
54	3,44	2,56	2,17	1,94	1,78	1,67	1,59	1,52	1,43	1,36	1,31	1,26	1,21	1,17	1,12	1,08	1,03	0,99	0,95	0,91	0,91
55	3,41	2,53	2,14	1,91	1,75	1,64	1,56	1,49	1,40	1,33	1,28	1,23	1,18	1,14	1,09	1,05	1,00	0,96	0,92	0,88	0,88
56	3,38	2,50	2,11	1,88	1,72	1,61	1,53	1,46	1,37	1,30	1,25	1,20	1,15	1,11	1,06	1,02	0,97	0,93	0,89	0,85	0,85
57	3,35	2,47	2,08	1,85	1,69	1,58	1,50	1,43	1,34	1,27	1,22	1,17	1,12	1,08	1,03	0,99	0,94	0,90	0,86	0,82	0,82
58	3,32	2,44	2,05	1,82	1,66	1,55	1,47	1,40	1,31	1,24	1,19	1,14	1,09	1,05	1,00	0,96	0,91	0,87	0,83	0,79	0,79
59	3,29	2,41	2,02	1,79	1,63	1,52	1,44	1,37	1,28	1,21	1,16	1,11	1,06	1,02	0,97	0,93	0,88	0,84	0,80	0,76	0,76
60	3,26	2,38	1,99	1,76	1,60	1,49	1,41	1,34	1,25	1,18	1,13	1,08	1,03	0,99	0,94	0,90	0,85	0,81	0,77	0,73	0,73
61	3,23	2,35	1,96	1,73	1,57	1,46	1,38	1,31	1,22	1,15	1,10	1,05	1,00	0,96	0,91	0,87	0,82	0,78	0,74	0,70	0,70
62	3,20	2,32	1,93	1,70	1,54	1,43	1,35	1,28	1,19	1,12	1,07	1,02	0,97	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75	0,71	0,67	0,67
63	3,17	2,29	1,90	1,67	1,51	1,40	1,32	1,25	1,16	1,09	1,04	0,99	0,94	0,90	0,85	0,81	0,76	0,72	0,68	0,64	0,64
64	3,14	2,26	1,87	1,64	1,48	1,37	1,29	1,22	1,13	1,06	1,01	0,96	0,91	0,87	0,82	0,78	0,73	0,69	0,65	0,61	0,61
65	3,11	2,23	1,84	1,61	1,45	1,34	1,26	1,19	1,10	1,03	0,98	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75	0,70	0,66	0,62	0,58	0,58
66	3,08	2,20	1,81	1,58	1,42	1,31	1,23	1,16	1,07	1,00	0,95	0,90	0,85	0,81	0,76	0,72	0,67	0,63	0,59	0,55	0,55
67	3,05	2,17	1,78	1,55	1,39	1,28	1,20	1,13	1,04	0,97	0,92	0,87	0,82	0,78	0,73	0,69	0,64	0,60	0,56	0,52	0,52
68	3,02	2,14	1,75	1,52	1,36	1,25	1,17	1,10	1,01	0,94	0,89	0,84	0,79	0,75	0,70	0,66	0,61	0,57	0,53	0,49	0,49
69	2,99	2,11	1,72	1,49	1,33	1,22	1,14	1,07	0,98	0,91	0,86	0,81	0,76	0,72	0,67	0,63	0,58	0,54	0,50	0,46	0,46
70	2,96	2,08	1,69	1,46	1,30	1,19	1,11	1,04	0,95	0,88	0,83	0,78	0,73	0,69	0,64	0,60	0,55	0,51	0,47	0,43	0,43
71	2,93	2,05	1,66	1,43	1,27	1,16	1,08	1,01	0,92	0,85	0,80	0,75	0,70	0,66	0,61	0,57	0,52	0,48	0,44	0,40	0,40
72	2,90	2,02	1,63	1,40	1,24	1,13	1,05	0,98	0,89	0,82	0,77	0,72	0,67	0,62	0,58	0,53	0,49	0,45	0,41	0,37	0,37
73	2,87	2,00	1,60	1,37	1,21	1,10	1,02	0,95	0,86	0,79	0,74	0,69	0,64	0,59	0,55	0,50	0,46	0,42	0,38	0,34	0,34
74	2,84	1,97	1,57	1,34	1,18	1,07	0,99	0,92	0,83	0,76	0,71	0,66	0,61	0,56	0,52	0,47	0,43	0,39	0,35	0,31	0,31
75	2,81	1,94	1,54	1,31	1,15	1,04	0,96	0,89	0,80	0,7											

Таблица 19.5-6 (продолжение)

m/n		Число степеней свободы для большей дисперсии																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	40	50	100	200	∞
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.03	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.62	1.59	1.54	1.55
37	4.39	3.25	2.85	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.14	2.09	2.02	1.97	1.92	1.86	1.81	1.76	1.72	1.67	1.62	1.57	1.54	1.53
38	4.10	3.25	2.85	2.63	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.08	2.02	1.96	1.92	1.84	1.81	1.76	1.72	1.67	1.62	1.57	1.54	1.53
39	4.35	3.25	2.85	2.63	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.08	2.02	1.96	1.92	1.84	1.81	1.76	1.72	1.67	1.62	1.57	1.54	1.53
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.00	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.61	1.57	1.55	1.51
41	4.31	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.00	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.61	1.57	1.55	1.51
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.05	1.99	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.61	1.57	1.54	1.49
43	4.37	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.05	1.99	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.61	1.57	1.54	1.49
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.04	1.98	1.92	1.87	1.81	1.76	1.72	1.67	1.63	1.60	1.56	1.54	1.48
45	4.36	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.04	1.98	1.92	1.87	1.81	1.76	1.72	1.67	1.63	1.60	1.56	1.54	1.48
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	1.97	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.58	1.54	1.51	1.46
47	4.35	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	1.97	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.58	1.54	1.51	1.46
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.96	1.90	1.86	1.81	1.74	1.70	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.45
49	4.34	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.96	1.90	1.86	1.81	1.74	1.70	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.45
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.95	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.59	1.55	1.51	1.48	1.43
51	4.33	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.95	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.59	1.55	1.51	1.48	1.43
52	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.93	1.88	1.83	1.77	1.72	1.67	1.61	1.58	1.54	1.46	1.44	1.41
53	4.32	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.93	1.88	1.83	1.77	1.72	1.67	1.61	1.58	1.54	1.46	1.44	1.41
54	4.01	3.16	2.77	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.48	1.44	1.41	1.36
55	4.31	3.16	2.77	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.48	1.44	1.41	1.36
56	4.00	3.15	2.76	2.52	2.36	2.25	2.16	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.48	1.44	1.41	1.36
57	4.30	3.15	2.76	2.52	2.36	2.25	2.16	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.48	1.44	1.41	1.36
58	4.00	3.14	2.75	2.51	2.35	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.46	1.42	1.37	1.32
59	4.29	3.14	2.75	2.51	2.35	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.46	1.42	1.37	1.32
60	4.04	3.14	2.75	2.51	2.35	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.46	1.42	1.37	1.32
61	4.28	3.13	2.74	2.50	2.34	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.45	1.40	1.35	1.30
62	4.01	3.13	2.74	2.50	2.34	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.45	1.40	1.35	1.30
63	4.30	3.13	2.74	2.50	2.34	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.45	1.40	1.35	1.30
64	4.00	3.12	2.73	2.49	2.33	2.22	2.13	2.06	2.00	1.96	1.88	1.83	1.78	1.71	1.66	1.61	1.55	1.52	1.44	1.39	1.34	1.29
65	4.29	3.12	2.73	2.49	2.33	2.22	2.13	2.06	2.00	1.96	1.88	1.83	1.78	1.71	1.66	1.61	1.55	1.52	1.44	1.39	1.34	1.29
66	4.00	3.11	2.72	2.48	2.32	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.87	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.43	1.38	1.33	1.28
67	4.28	3.11	2.72	2.48	2.32	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.87	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.43	1.38	1.33	1.28
68	4.00	3.10	2.71	2.47	2.31	2.20	2.11	2.04	1.98	1.94	1.86	1.81	1.76	1.69	1.64	1.58	1.53	1.47	1.39	1.34	1.29	1.24
69	4.27	3.10	2.71	2.47	2.31	2.20	2.11	2.04	1.98	1.94	1.86	1.81	1.76	1.69	1.64	1.58	1.53	1.47	1.39	1.34	1.29	1.24
70	4.00	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.39	1.34	1.28	1.23
71	4.26	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.39	1.34	1.28	1.23
72	4.00	3.08	2.69	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.84	1.78	1.74	1.67	1.62	1.56	1.50	1.47	1.38	1.33	1.27	1.22
73	4.25	3.08	2.69	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.84	1.78	1.74	1.67	1.62	1.56	1.50	1.47	1.38	1.33	1.27	1.22
74	4.00	3.07	2.68	2.44	2.28	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.83	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.36	1.31	1.25	1.20
75	4.24	3.07	2.68	2.44	2.28	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.83	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.36	1.31	1.25	1.20
76	4.00	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.44	1.44	1.34	1.29	1.22	1.17
77	4.23	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.44	1.44	1.34	1.29	1.22	1.17
78	4.00	3.05	2.66	2.42	2.26	2.15	2.06	1.99	1.93	1.88	1.81	1.75	1.70	1.63	1.58	1.53	1.47	1.43	1.34	1.29	1.22	1.17
79	4.22	3.05	2.66	2.42	2.26	2.15	2.06	1.99	1.93	1.88	1.81	1.75	1.70	1.63	1.58	1.53	1.47	1.43	1.34	1.29	1.22	1.17
80	4.00	3.04	2.65	2.41	2.25	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.80	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.46	1.42	1.33	1.28	1.21	1.16
81	4.21	3.04	2.65	2.41	2.25	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.80	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.46	1.42	1.33	1.28	1.21	1.16
82	4.00	3.03	2.64	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86	1.79	1.73	1.68	1.61	1.56	1.51	1.45	1.41	1.32	1.27	1.20	1.15
83	4.19	3.03	2.64	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86	1.79	1.73	1.68	1.61	1.56	1.51	1.45	1.41	1.32	1.27	1.20	1.15
84	4.00	3.02	2.63	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.78	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.44	1.38	1.29	1.24	1.17	1.12
85	4.18	3.02	2.63	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.78	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.44	1.38	1.29	1.24	1.17	1.12
86	4.00	3.01	2.62	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.77	1.71	1.66	1.59	1.54	1.48	1.43	1.37	1.28	1.23	1.16	1.11
87	4.17	3.01	2.62	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.77	1.71	1.66	1.59	1.54	1.48	1.43	1.37	1.28	1.23	1.16	1.11
88	4.00	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.76	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.42	1.36	1.27	1.22	1.15	1.10
89	4.16	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.76	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.42	1.36	1.27	1.22	1.15	1.10
90	4.00	2.99	2.60	2.36	2.20	2.09	2.00	1.93	1.87	1.82	1.75	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.41	1.35	1.26	1.21	1.14	1.09
91	4.15	2.99	2.60	2.36	2.20	2.09	2.00	1.93	1.87	1.82	1.75	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.41	1.35	1.26	1.21	1.14	1.09
92	4.00	2.98	2.59	2.35	2.19	2.08	1.99	1.92	1.86	1.81	1.74	1.68	1.63	1.56	1.51	1.45	1.40	1.34	1.25	1.20	1.13	1

(b) Выборочное среднее \bar{x} и выборочная дисперсия s^2 независимы тогда и только тогда, когда рассматриваемая выборка получена из нормальной совокупности.

Для каждой нормальной выборки \bar{x} , s^2 и $m, m_2^{-\frac{r}{2}}$ взаимно независимы для всех r ; для $g_1 = m_3 m_2^{-\frac{3}{2}}$, $g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$ имеем

$$Mg_1 = 0, \quad Dg_1 = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}, \quad (19.5-1)$$

$$Mg_2 = -\frac{6}{n+1}, \quad Dg_2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}. \quad (19.5-2)$$

19.5-4. Распределение размаха выборки (см. также пп.19.2-6 и 19.7-6).

(a) Если генеральная совокупность имеет непрерывное распределение, то размах w случайной выборки объема n имеет плотность распределения

$$f_w(w) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(x+w) - \Phi(x)]^{n-2} \varphi(x) \varphi(x+w) dx. \quad (19.5-3)$$

Эта функция табулирована для некоторых видов распределений генеральной совокупности [18.9].

(b) Для нормальной генеральной совокупности среднее значение и среднее квадратическое отклонение размаха w пропорциональны среднему квадратическому отклонению σ генеральной совокупности:

$$Mw = k_n \sigma, \quad Dw = c_n^2 \sigma^2; \quad (19.5-4)$$

k_n , c_n и c_n/k_n табулированы как функции от n ; w/k_n есть несмещенная оценка для σ . Средний размах

$$\bar{w} = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n}$$

для m случайных выборок объема n имеет асимптотически нормальное распределение с центром $k_n \sigma$ и дисперсией $\frac{c_n^2 \sigma^2}{m}$ при $m \rightarrow \infty$; w/k_n является при этом несмещенной состоятельной оценкой для σ .

(c) Для равномерного распределения генеральной совокупности в интервале (a, b)

$$Mw = (b-a) \frac{n-1}{n+1}, \quad Dw = (b-a)^2 \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} \quad (19.5-5)$$

и $w \frac{n+1}{n-1}$ есть несмещенная состоятельная оценка для $b-a$.

Заметим, что арифметическое среднее из наименьшего и наибольшего выборочных значений есть состоятельная несмещенная оценка для Mx .

(d) Для любого непрерывного распределения генеральной совокупности вероятность того, что по крайней мере доля q всей совокупности расположена между крайними значениями x_{\min} и x_{\max} данной случайной выборки объема n равна

$$1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n. \quad (19.5-6)$$

19.5-5. Выбор из конечной совокупности. Пусть дана конечная совокупность N элементов (событий, результатов измерений или наблюдений) E_1, E_2, \dots, E_N , каждый из которых отмечен одним из $M < N$ спектральных значений $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(M)}$ некоторой (обязательно дискретной) случайной величины x , и пусть $p(X_{(i)}) = \frac{N_i}{N}$, где N_i — количество элементов E_k , отмеченных значением $X_{(i)}$. Для случайной бесповторной выборки объема

$n < N$ (n/N — доля выборки) имеем

$$Mx = \xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M N_i X_{(i)}, \quad Dx = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M N_i (X_{(i)} - \xi)^2, \quad (19.5-7)$$

$$Mx = \xi, \quad Dx = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}, \quad (19.5-8)$$

$$Mx^3 = \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} \frac{N-2n}{N-2} \sqrt{\frac{N-1}{N-n}}, \quad (19.5-9)$$

$$Mx^4 = \frac{N-1}{n(N-2)(N-3)(N-n)} [(N^2 - 6Nn + N + 6n^2)\alpha_4 + 3N(N-n-1)(n-1)\alpha_2^2]. \quad (19.5-10)$$

Эти формулы при $N \rightarrow \infty$ приводятся к формулам пп.19.2-3 и 19.2-4.

19.6. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

19.6-1. Статистические гипотезы. Рассмотрим пространство выборок (x_1, x_2, \dots, x_n) , где x_1, x_2, \dots, x_n — численные случайные величины. Каждое непротиворечивое множество предположений, относящихся к распределению n -мерной величины (x_1, x_2, \dots, x_n) называется **статистической гипотезой**. Статистическая гипотеза H называется **простой**, если она однозначно определяет распределение вероятностей; в противном случае она называется **сложной**.

Пусть распределение n -мерной величины (x_1, x_2, \dots, x_n) определено одной из функций $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_1, \eta_2, \dots)$, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_1, \eta_2, \dots)$ или $p(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_1, \eta_2, \dots)$, где η_1, η_2, \dots — параметры (см. также п.19.1-3). Тогда **простая статистическая гипотеза** приписывает параметрам η_1, η_2, \dots вполне определенные значения $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots$ («точка» в пространстве параметров), тогда как **сложная статистическая гипотеза** ограничивает «точки» η_1, η_2, \dots некоторой областью в пространстве параметров. Класс допустимых статистических гипотез (допустимых комбинаций параметров) ограничен условиями рассматриваемой задачи.

Если случайная выборка (x_1, x_2, \dots, x_n) получена из одной теоретической совокупности (т. е. если случайные величины x_i взаимно независимы и одинаково распределены), то статистические гипотезы относятся к значениям параметров совокупности или к отношениям между ними. Заметим, однако, что теория пп.19.6-1 и 19.6-2 относится не только к таким выборкам, но и к выборкам из любого случайного процесса.

19.6-2. Критерии с фиксированной выборкой; определения. Пусть дана некоторая фиксированная выборка объема n ; **критерий статистической гипотезы** H есть правило, позволяющее отвергнуть или не отвергнуть гипотезу H на основании выборки (X_1, X_2, \dots, X_n) . Каждый критерий определяет **критическое множество (область) S_c** «точек» (x_1, x_2, \dots, x_n) ; гипотеза H отвергается, если выборка (X_1, X_2, \dots, X_n) принадлежит критическому множеству, и не отвергается в противном случае.

Такое принятие или отбрасывание гипотезы не дает логического доказательства ее или опровержения. Здесь возможны четыре случая:

1. Гипотеза H верна и принимается согласно критерию.
2. Гипотеза H неверна и отвергается согласно критерию.
3. Гипотеза H верна, но отвергается согласно критерию (**ошибка первого рода**).
4. Гипотеза H неверна, но принимается согласно критерию (**ошибка второго рода**).

Для любого множества (фактических) значений параметров η_1, η_2, \dots вероятность **отвергнуть** проверяемую гипотезу по данной критической

области S_C равна

$$\pi_{S_C}(\eta_1, \eta_2, \dots) \equiv P\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_C; \eta_1, \eta_2, \dots\} = \\ = \int_{S_C} d\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_1, \eta_2, \dots). \quad (19.6-1)$$

Если с гипотезой H конкурирует лишь одна альтернативная простая гипотеза $H_1 \equiv \{\eta_1 = \eta_{11}, \eta_2 = \eta_{21}, \dots\}$, то вероятность $\pi_{S_C}(\eta_{11}, \eta_{21}, \dots)$ *отвергнуть* гипотезу H , когда верна гипотеза H_1 , называется **мощностью критерия**, **определенного на S_C , по отношению к гипотезе H_1** . Вероятность не *отвергнуть* H , т. е. $1 - \pi_{S_C}(\eta_{11}, \eta_{21}, \dots)$, часто называется **оперативной характеристикой критерия**.

19.6-3. Уровень значимости. Правило Неймана – Пирсона отбора критериев для простых гипотез.

(а) Желательно применять такую критическую область S_C , чтобы вероятность $\pi_{S_C}(\eta_1, \eta_2, \dots)$ была мала, если проверяемая гипотеза верна, и велика в противном случае. Пусть критическая область S_C применяется для проверки *простой* гипотезы $H_0 \equiv \{\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \dots\}$ («нулевая гипотеза»), и пусть эта гипотеза *верна*. Тогда вероятность напрасно отвергнуть гипотезу H_0 (ошибки первого рода) есть $\pi_{S_C}(\eta_{10}, \eta_{20}, \dots) = \alpha$. α называется **уровнем значимости данного критерия**: критическая область S_C проверяет простую гипотезу на **уровне значимости α** .

В случае *дискретных* случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n нельзя задавать α произвольным образом, можно лишь указать верхнюю границу для α . Критическая область, применяемая для проверки *сложной* гипотезы $H \equiv \{\eta_1, \eta_2, \dots\} \in D$, будет давать, вообще говоря, различные уровни значимости для различных простых гипотез (комбинаций параметров η_1, η_2, \dots), допускаемых гипотезой H ; можно указать точную верхнюю грань этих уровней значимости.

(б) Для каждой выборки объема n в данного уровня значимости α :

1. **Наиболее мощный критерий** для простой гипотезы $H_0 \equiv \{\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \dots\}$ относительно простой альтернативной гипотезы $H_1 \equiv \{\eta_1 = \eta_{11}, \eta_2 = \eta_{21}, \dots\}$ определяется такой критической областью S_C , которая дает наибольшее значение вероятности $\pi_{S_C}(\eta_{11}, \eta_{21}, \dots)$.

2. **Равномерно наиболее мощный критерий** есть наиболее мощный критерий относительно *всех* допустимых альтернативных гипотез; такой критерий не всегда существует.

3. Критерий называется **несмещенным**, если $\pi_{S_C}(\eta_{11}, \eta_{21}, \dots) \geq \alpha$ для каждой простой альтернативной гипотезы H_1 ; в противном случае критерий будет **смещенным**. **Наиболее мощный несмещенный критерий** относительно данной альтернативной гипотезы H_1 и **равномерно наиболее мощный несмещенный критерий** выделяются из **несмещенных** критериев, как указано выше.

Критическая область S_C для **наиболее мощного критерия** строится так, чтобы для всех выборочных точек (x_1, x_2, \dots, x_n) отношение правдоподобия $\frac{\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \dots)}{\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_{11}, \eta_{21}, \dots)}$ или $\frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \dots)}{P(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_{11}, \eta_{21}, \dots)}$ было меньше некоторого постоянного C ; различные значения C будут давать «лучшие» критические области при различных уровнях значимости α . **Равномерно наиболее мощный критерий** представляет особый интерес при проверке гипотезы H_0 по отношению к сложной альтернативной гипотезе. На практике в отборе критерия решающим фактором может оказаться легкость вычисления. Обычно можно увеличить мощность каждого критерия путем увеличения объема выборки n (см. также п.19.6-9).

19.6-4. Критерии значимости. Пусть проверяемое свойство генеральной совокупности сводится к множеству значений параметров $\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \dots$, которые сравниваются с выборочными оценками этих параметров. В качестве основных критерия пробуют построить такую статистику

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \dots) \equiv g(y_1, y_2, \dots; \eta_{10}, \eta_{20}, \dots), \quad (19.6-2)$$

значения которой измеряют отклонения или отношения сравниваемых параметров генеральной совокупности и выборки. При этом простая гипотеза $H_0 \equiv \{\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \dots\}$ отвергается с данным уровнем значимости α («отклонение» *значимо*), если выборочное значение y попадает *вне* допустимого интервала $\{y_{P_1} \leq y \leq y_{P_2}\}$, для которого

$$P\{y_{P_1} \leq y \leq y_{P_2}\} = P_2 - P_1 = 1 - \alpha. \quad (19.6-3)$$

Таким способом определенными критерии часто называются **критериями значимости**. Формула (3) определяет $y_{P_1} = y_{P_1}(\eta_{10}, \eta_{20}, \dots)$ и $y_{P_2} = y_{P_2}(\eta_{10}, \eta_{20}, \dots)$ как квантили выборочного распределения статистики $y(x_1, x_2, \dots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \dots)$. Часто оказывается возможным выбрать статистику y так, чтобы ее квантили y_P были независимы от $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots$. Важные примеры приведены в табл. 19.6-1 и в пп. 19.6-6 и 19.6-7.

В приложениях к контролю качества границы y_{P_1} и y_{P_2} , определенные формулой (3), называются **границами допуска** при данном уровне значимости α , а интервал (y_{P_1}, y_{P_2}) называется **интервалом допуска** (см. также рис. 19.6-1).

19.6-5. Доверительная область.

(а) Пусть построено семейство критических областей $S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \dots)$ для проверки множества простых гипотез (допустимых комбинаций параметров η_1, η_2, \dots) при некотором заданном уровне значимости α ¹⁾. Тогда для любой фиксированной выборки ($x_1 = X_1, x_2 = X_2, \dots, x_n = X_n$) множество $D_\alpha(X_1, X_2, \dots, X_n)$ комбинаций параметров (η_1, η_2, \dots) («точеч» в пространстве параметров), согласуемых с данной выборкой, есть **доверительная область уровня α** ; $1 - \alpha$ называется **доверительной вероятностью**. Доверительная область содержит все допустимые комбинации параметров, принятие которых на основе данной выборки имеет вероятность $P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \dots)\} \geq 1 - \alpha$.

(б) Доверительные интервалы, построенные по критериям значимости (см. также п. 19.6-4 и табл. 19.6-2). Чтобы найти доверительные области, связывающие значения одного из неизвестных параметров, скажем η_1 , с данным выборочным значением $Y = y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ подходящей статистики y , обратимся к рис. 19.6-1. Начертим нижнюю и верхнюю границы допуска $y_{P_1}(\eta_1)$ и $y_{P_2}(\eta_1)$ в зависимости от η_1 для данного уровня значимости α . Пересечение этих граничных кривых с каждой прямой $y = Y$ определяет нижнюю и верхнюю границы $\eta_1 = \eta_1(Y)$, $\eta_2 = \eta_2(Y)$ **доверительного интервала** $D_\alpha \equiv (\eta_1, \eta_2)$ уровня α . Доверительный интервал содержит такие значения η_1 , принятие которых на основе выборочного значения $y = Y$ имеет вероятность $P\{y_{P_1}(\eta_1) \leq Y \leq y_{P_2}(\eta_1)\} \geq 1 - \alpha$.

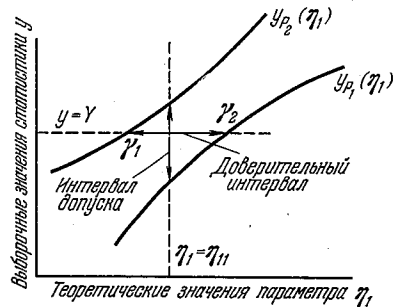


Рис. 19.6-1. Построение доверительных интервалов.

¹⁾ В случае дискретного распределения критические области $S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \dots)$ определяются для уровня значимости, не превосходящего α .

Таблица 19.6-1

Некоторые критерии значимости, относящиеся к параметрам ξ , σ^2 нормальной совокупности
 (см. также пп. 19.5-3, а и 19.6-4). Выборки предполагаются случайными. Квантили находятся по таблицам.
 При большом объеме выборки применимы аппроксимации квантилей, данные в табл. 19.5-1 и 19.5-2 1)

№	Проверяемая гипотеза	Статистика $y = y(x_1, \dots, x_n)$, на основе которой построен критерий	Критическая область S_c отбрасывания гипотезы при данном уровне значимости α ($\leq \alpha$ для сложных гипотез)	Мощность $\pi, s_c(\xi, \sigma)$	Примечания
1	$\xi = \xi_0$ (σ известно)		$ y > u_{1-\alpha} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\Phi_u \left(u_{\alpha/2} - \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) +$ $+ \Phi_u \left(u_{\alpha/2} + \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$	Простая гипотеза. Равномерно наиболее мощный несмещенный критерий; равномерно наиболее мощный критерий не существует
2	$\xi < \xi_0$ (σ известно)	$\frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$y > u_{1-\alpha}$	$\Phi_u \left(u_{\alpha} + \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$	Сложные гипотезы. Если допустить гипотезы ограничены уровнем $\xi > \xi_0$ для критерия 2 или $\xi < \xi_0$ для критерия 3, то любой из этих критериев будет равномерно наиболее мощным для простой гипотезы $\xi = \xi_0$
3	$\xi > \xi_0$ (σ известно)		$y < u_{\alpha} = -u_{1-\alpha}$		
4	$\xi = \xi_0$		$ y > t_{1-\alpha} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $(m = n-1)$	Применяется формула (19.6-1)	Простая гипотеза; двусторонний t-критерий. Простая гипотеза обобщено через $ t_{1-\alpha}$
5	$\xi < \xi_0$	$\frac{\bar{x} - \xi_0}{S/\sqrt{n}}$	$y > t_{1-\alpha}$ $(m = n-1)$		
6	$\xi > \xi_0$		$y < t_{\alpha} = -t_{1-\alpha}$ $(m = n-1)$		Сложные гипотезы; односторонний t-критерий

Таблица 19.6.1 (продолжение)

№	Проверяемая гипотеза	Статистика $y = y(x_1, \dots, x_n)$, на основе которой построены критерий	Критическая область S_α отбрасывания гипотезы при данном уровне значимости α ($< \alpha$ для сложных гипотез)	Мощность $\pi_{S_\alpha}(\xi, \sigma)$	Примечания
7	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$(n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$	$y < \chi_{\alpha/2}^2$ $y > \chi_{1-\alpha/2}^2$ ($m = n-1$)	$P \left\{ \chi^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{\alpha/2}^2 \right\} + P \left\{ \chi^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha/2}^2 \right\}$	Простая гипотеза; не существует равномерно наиболее мощный критерий
8	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$		$y > \chi_{1-\alpha}^2$ ($m = n-1$)	$P \left\{ \chi^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha}^2 \right\}$	Сложные гипотезы; если допустить гипотезы ограничены условием $\sigma^2 > \sigma_0^2$ для критерия 8 или $\sigma^2 < \sigma_0^2$ для критерия 9, то любой из этих критериев будет равномерно наиболее мощным для простой гипотезы $\sigma^2 = \sigma_0^2$
9	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$y < \chi_\alpha^2$ ($m = n-1$)	$P \left\{ \chi^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_\alpha^2 \right\}$	

1) Заметим, что в таблицах чаще даются $\chi_{1-\alpha}^2$ чем χ_α^2 ; в каждом случае следует внимательно проверять указания к таблицам.

Таблица 19.6-2

Доверительные границы для нормальной совокупности

При больших n применима аппроксимация, данная в табл.19.5-1 — 19.5-3

№	Параметр η_1	Доверительный интервал $\{\gamma_1 < \eta_1 < \gamma_2\}$ Доверительная вероятность $1-\alpha = P_2 - P_1$
1	ξ (σ^2 известно)	$\bar{x} - u_{P_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \xi < \bar{x} - u_{P_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2	ξ (σ^2 неизвестно)	$\bar{x} - t_{P_2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \xi < \bar{x} - t_{P_1} \frac{S}{\sqrt{n}}$
3	σ^2	$S^2 \frac{n-1}{\chi^2_{P_2}} < \sigma^2 < S^2 \frac{n-1}{\chi^2_{P_1}}$

19.6-6. Критерии сравнения нормальных совокупностей. Дисперсионный анализ.

(а) Статистики объединенных выборок. Рассмотрим r взаимно независимых случайных выборок $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ini})$ из r генеральных совокупностей с центрами ξ_i и дисперсиями σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, r$). Пусть i -я выборка объема n_i имеет центр и дисперсию

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}, \quad S_i^2 = \frac{n_i}{n_i - 1} s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, r). \tag{19.6-4}$$

Эти r выборок можно рассматривать как «объединенную» выборку, объем которой, центр и дисперсия даются формулами

$$n = \sum_{i=1}^r n_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i \bar{x}_i, \tag{19.6-5}$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} [(n-r) S_0^2 + (r-1) S_A^2], \tag{19.6-6}$$

где

$$S_0^2 = \frac{1}{n-r} \sum_{i=1}^r (n_i - 1) S_i^2, \quad S_A^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

Статистики S_0^2 (суммарная дисперсия) и S_A^2 измеряют рассеяние *внутри выборок* и *между выборками* соответственно.

(б) Сравнение нормальных совокупностей (см. также табл. 19.5-1 — 19.5-3). Если имеется r независимых выборок из *нормальных* совокупностей с центрами ξ_i и одинаковыми дисперсиями $\sigma_i^2 = \sigma^2$, то S^2 , S_0^2 и S_A^2 являются состоятельными несмещенными оценками для дисперсии генеральной совокупности σ^2 , как правило, неизвестны. Случайные величины $(n-r) \frac{S_0^2}{\sigma^2}$ и $(r-1) \frac{S_A^2}{\sigma^2}$ независимы и имеют χ^2 распределения со степенями свободы $n-r$ и $r-1$ соответственно.

Отметим выборочные распределения следующих статистик:

1. $\frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_k) - (\xi_i - \xi_k)}{\sigma} \sqrt{\frac{n_i n_k}{n_i + n_k}}$ имеет стандартизованное нормальное распределение.
2. $\frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_k) - (\xi_i - \xi_k)}{S_0} \sqrt{\frac{n_i n_k}{n_i + n_k}}$ имеет t распределение с $n_i + n_k - 2$ степенями свободы.
3. $\left. \begin{array}{l} \frac{S_i^2}{S_k^2} \text{ имеет } \nu^2\text{-распределение,} \\ \ln \frac{S_i}{S_k} \text{ имеет } z\text{-распределение} \end{array} \right\} (m = n_i - 1, m' = n_k - 1).$
4. $\left. \begin{array}{l} \frac{S_0^2}{S_i^2} \text{ имеет } \nu^2\text{-распределение,} \\ \ln \frac{S_0}{S_i} \text{ имеет } z\text{-распределение} \end{array} \right\} (m = r - 1, m' = n - r).$

Таблица 19.6-3 показывает применение этих статистик в критериях сравнения нормальных совокупностей. Доверительные границы для разности $\xi_i - \xi_k$ можно вычислить из t -распределения. Случай нормальных распределений с различными дисперсиями рассмотрен в [18.9].

(е) Дисперсионный анализ. В третьем критерии табл. 19.6-3 средние значения ξ_i сравниваются путем разбиения общей дисперсии S^2 на составляющие S_0^2 и S_A^2 , обусловленные соответственно *статистической флуктуацией внутри выборок и различием между выборками*. Этот метод известен как *дисперсионный анализ*; рассматриваемый здесь частный случай относится к *группировке по одному признаку*, соответствующему значению индекса i . Подобные критерии применяются в исследованиях эффекта различных методов лечения, обработки почвы и т. п. [18.6], [18.9].

Дисперсионный анализ для группировки по двум признакам (случайные блоки). Рассмотрим rq выборочных значений x_{ik} , расположенных в таблице

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rq} \end{matrix}$$

и введем средние по строкам \bar{x}_i , средние по столбцам \bar{x}_k и общее среднее \bar{x} с помощью формул

$$\bar{x}_i = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q x_{ik}, \quad \bar{x}_k = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{ik}, \quad \bar{x} = \frac{1}{rq} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^q x_{ik}. \tag{19.6-7}$$

Общая дисперсия разбивается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{rq-1} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^q (x_{ik} - \bar{x})^2 = \frac{1}{rq-1} [(r-1)(q-1) S_0^2 + (r-1)q S_I^2 + r(q-1) S_{II}^2], \\ S_0^2 &= \frac{1}{(r-1)(q-1)} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^q (x_{ik} - \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{x})^2 \quad (\text{дисперсия, обусловленная флуктуацией внутри строк и столбцов}), \\ S_I^2 &= \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (\text{дисперсия между строками}), \\ S_{II}^2 &= \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^q (\bar{x}_k - \bar{x})^2 \quad (\text{дисперсия между столбцами}). \end{aligned} \right\} \tag{19.6-8}$$

Если случайные величины x_{ik} распределены нормально с одинаковыми дисперсиями, то случайные величины S_i^2 , S_j^2 и S_{II}^2 взаимно независимы и имеют χ^2 -распределение со степенями свободы $(r-1)(q-1)$, $r-1$ и $q-1$ соответственно. Статистика S_i^2/S_j^2 имеет v^2 -распределение с $m = r-1$, $m' = (r-1)(q-1)$ и служит для проверки равенства средних по строкам $Mx_i = \xi_i$, тем же способом, что и в табл. 19.6-3. Аналогично S_{II}^2/S_j^2 имеет v^2 -распределение с $m = q-1$, $m' = (r-1)(q-1)$ и служит для проверки равенства средних по столбцам $Mx_{.k} = \xi_{.k}$.

Т а б л и ц а 19.6-3

Критерии значимости для сравнения нормальных совокупностей

(см. также табл. 19.5-2 и 19.5-3)

№	Проверяемая гипотеза	Критическая область, в которой гипотеза отвергается при уровне значимости α
1a	$\sigma_i^2 = \sigma_k^2$	$\left. \begin{aligned} \left \ln \frac{S_i}{S_k} \right > z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ \ln \frac{S_i}{S_k} > z_{1-\alpha} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (m = n_i - 1, \quad m' = n_k - 1) \\ \text{(критерий Фишера)} \end{array}$
1b	$\sigma_i^2 < \sigma_k^2$	
2a	$\xi_i = \xi_k$ (дано $\sigma_i^2 = \sigma_k^2$)	$\left. \begin{aligned} \left \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_k}{S_0} \sqrt{\frac{n_i n_k}{n_i + n_k}} \right > t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_k}{S_0} \sqrt{\frac{n_i n_k}{n_i + n_k}} > t_{1-\alpha} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (m = n_i + n_k - 2) \\ \text{(t-критерий;} \\ \text{отметим специ-} \\ \text{альный случай} \\ n_i = 1) \end{array}$
2b	$\xi_i < \xi_k$ (дано $\sigma^2 = \sigma_k^2$)	
3	$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_r$ (дано $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2$)	$\left \ln \frac{S_A}{S_0} \right > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (m = r-1, \quad m' = n-r)$ <p style="text-align: right;">(критерий Фишера)</p>

19.6-7. Критерий согласия χ^2 (см. также табл. 19.5-1).

(а) Критерий χ^2 контролирует согласованность гипотетических вероятностей $p_k = P\{E_k\}$ случайных событий E_1, E_2, \dots, E_r с их относительными частотами $h_k = h\{E_k\} = n_k/n$ в выборке из n независимых наблюдений. Во многих приложениях каждое событие E_k состоит в том, что некоторая случайная величина x попадает в определенный классовой интервал (п.19.2-2), так что критерий χ^2 позволяет сравнивать гипотетическое теоретическое распределение величины x с ее эмпирическим распределением.

Согласие измеряется с помощью статистики

$$y = n \sum_{k=1}^r \frac{(h_k - p_k)^2}{p_k} = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}, \quad (19.6-9)$$

распределение которой при $n \rightarrow \infty$ стремится к распределению χ^2 с $m = r - 1$ степенями свободы. Если все $np_k > 10$ (для этого при необходимости объединяют некоторые классы интервалов), то критерий χ^2 отвергает гипотетические вероятности с уровнем значимости α при $y > \chi_{1-\alpha}^2(m)$. Если $m > 30$, то вместо χ^2 -распределения можно пользоваться нормальным распределением величины $\sqrt{2\chi^2}$ с центром $\sqrt{2m-1}$ и дисперсией 1.

(б) Критерий χ^2 с оцениваемыми параметрами. Если гипотетические вероятности p_k зависят от q неизвестных параметров $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$, то сначала находят совместные наиболее правдоподобные оценки этих параметров по данной выборке (п.19.4-4) и подставляют полученные значения $p_k = p_k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$ в формулу (9). При достаточности k χ^2 с $t = r - q - 1$ степенями свободы и критерий χ^2 применим с $t = r - q - 1$. Критерии этого типа проверяют применимость нормального распределения, распределения Пуассона и др. с параметрами, оцениваемыми по выборке.

Указанная сходимость имеет место, если функции $p_k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$ в некоторой окрестности точки $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$ совместного максимума правдоподобия удовлетворяют следующим условиям:

$$1. \sum_{k=1}^r p_k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q) = 1.$$

2. Вероятности $p_k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$ имеют положительную нижнюю грань и дважды непрерывно дифференцируемы, а матрица $\left(\frac{\partial p_k}{\partial \eta_j}\right)$ имеет ранг q .

19.6-8. Непараметрическое сравнение двух совокупностей: критерий знаков. Проверяемая гипотеза состоит в том, что две случайные величины x и y независимы и одинаково распределены, или

$$P\{x - y > 0\} = P\{x - y < 0\} = \frac{1}{2},$$

если известно, что $P\{x = y\} = 0$.

Рассмотрим случайную выборку n пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$; при вычислении объема выборки n пренебрежем парами, для которых $x_i = y_i$ (совпадения). Вероятность того, что более чем m разностей $x_i - y_i$ положительны, равна

$$p(m) = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m+2} + \dots + \binom{n}{n} \right].$$

Пусть теперь m_α есть наименьшее значение m , для которого $p(m) \leq \alpha$. Односторонний критерий знаков требует отвергнуть гипотезу (1) с уровнем значимости $\leq \alpha$, если число положительных разностей $x_i - y_i$ превосходит m_α . Двусторонний критерий знаков требует отвергнуть гипотезу с уровнем значимости 2α , если число положительных или число отрицательных разностей превосходит m_α . m_α табулировано в зависимости от α и n (см. [18.3], [18.5]). Критерий знаков может применяться также для проверки: 1) симметрии распределения вероятностей, 2) гипотезы о том, что значение $x = X$ является медианой распределения.

19.6-9. Обобщения. Критерии, основанные на фиксированной выборке (п.19.6-1—19.6-7), допускают только две возможности: отвергнуть или не отвергнуть проверяемую гипотезу на основании выборки. Последовательные критерии разрешают увеличение объема выборки (дополнительные наблюдения) в качестве третьего возможного решения; тогда можно уточнить оба уровня значимости и мощность критерия (относительно некоторой альтернативной гипотезы), пока проверяемая гипотеза не будет в конце концов принята или отвергнута.

Схемы критериев с фиксированной выборкой и последовательных критериев представляют собой частные случаи решающих функций или правил поведения, связанных с принятием гипотезы (решением) по каждой выборке некоторого наблюдаемого признака.

19.7. НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИКИ, ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КРИТЕРИИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

19.7-1. Вводные замечания. Здесь даются лишь некоторые часто применяемые определения, формулы и критерии, не исчерпывающие исследования многомерных статистик. Отметим, что многомерные статистики служат для оценки и проверки стохастических связей между случайными величинами.

19.7-2. Статистики, получаемые на основе многомерных выборок.

(а) Пусть дана многомерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_p)$ (п.18.2-9); по аналогии с пп.19.1-2, 19.2-2, 19.2-4 определим случайную выборку объема n :

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \equiv (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{v1}; x_{12}, x_{22}, \dots, x_{v2}; \dots; x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{vn})$$

и статистики: выборочное среднее от x_i

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, v), \quad (19.7-1)$$

выборочное среднее от $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$

$$\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_p)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{pk}), \quad (19.7-2)$$

выборочные дисперсии (при $i = j$) и ковариации (при $i \neq j$)

$$l_{ij} = \overline{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)} = l_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, v), \quad (19.7-3)$$

и выборочные коэффициенты корреляции

$$r_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sqrt{l_{ii} l_{jj}}} = r_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, v). \quad (19.7-4)$$

Точка $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)$ есть центр выборочного распределения, матрица $L \equiv (l_{ij})$ — матрица моментов выборки.

(б) Для двумерной случайной выборки $(x_{11}, x_{21}; x_{12}, x_{22}; \dots; x_{1n}, x_{2n})$ двумерной случайной величины (x_1, x_2) определяют выборочные коэффициенты регрессии

$$b_{21} = \frac{l_{12}}{l_{11}} = r_{12} \frac{s_2}{s_1}, \quad b_{12} = \frac{l_{21}}{l_{22}} = r_{12} \frac{s_1}{s_2}. \quad (19.7-5)$$

Эмпирическая линейная средняя квадратическая регрессия x_2 на x_1 :

$$g_2(x_1) = \bar{x}_2 + b_{21}(x_1 - \bar{x}_1) \quad (19.7-6)$$

представляет линейную функцию $ax_1 + b$, которая минимизирует средний квадрат отклонения в выборке

$$\overline{[x_2 - (ax_1 + b)]^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x_{2k} - (ax_{1k} + b)]^2 \quad (19.7-7)$$

(см. также пп.18.4-6, б и 19.7-4, с).

Для v -мерных совокупностей эмпирические сводный и частный коэффициенты корреляции и коэффициенты регрессии получаются из выборочных моментов l_{ij} по формулам, аналогичным формулам (18.4-35) — (18.4-38), и служат для оценки соответствующих параметров генеральной совокупности. Полную теорию см. в [18.6] и [18.9].

(с) Статистики (1) — (4) могут быть аппроксимированы оценками по группированным данным по способу пп.19.2-3 — 19.2-5. Оценки по группированным данным l'_{ikg} центральных моментов второго порядка l_{ik} можно улучшить поправками Шенпарда

$$l'_{ii} = l_{iig} - \frac{1}{12} (\Delta X_i)^2; \quad l'_{ik} = l_{ikg} \quad (i \neq k),$$

где ΔX_i — длины классовых интервалов. Эти поправки часто сглаживают ошибки, возникающие от группировки, если ΔX_i не превосходит восьмой части размаха величины x_i . Практические схемы вычислений даны в [18.9].

19.7-3. Оценка параметров (см. также п.19.4-1). Теорема п.19.4-2, применимая к многомерным распределениям, и поэтому статистики (3)–(5), так же как и выборочные средние \bar{x}_i , являются самостоятельными оценками соответствующих параметров генеральной совокупности. Среднее значение и дисперсия каждого выборочного среднего \bar{x}_i и выборочной дисперсии $l_{ii} = s_i^2$ даются формулами (19.2-3), (19.2-13) и (19.2-14); дополнительно отметим формулы

$$Ml_{ij} = \frac{n-1}{n} \lambda_{ij} = \lambda_{ij} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (19.7-8)$$

$$Dl_{ij} = \frac{1}{n} [M(x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 - \lambda_{ij}^2] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.7-9)$$

$$\text{cov}\{l_{ii}, l_{jj}\} = \frac{1}{n} [M(x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 - \lambda_{ii}\lambda_{jj}] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.7-10)$$

$$\text{cov}\{l_{ii}, l_{ij}\} = \frac{1}{n} [M(x_i - \xi_i)^3 (x_j - \xi_j) - \lambda_{ii}\lambda_{ij}] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.7-11)$$

$$Mr_{ij} = \rho_{ij} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (19.7-12)$$

Dr_{ij} имеет порядок $1/n$ при возрастании n .

Для многомерных нормальных распределений (см. также п.19.7-4)

$$\left. \begin{aligned} M \det(l_{ij}) &= \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-v)}{n^v} \det(\lambda_{ij}), \\ D \det(l_{ij}) &= \frac{v(2n+1-v)}{(n-v)(n-v+1)} \frac{(n-1)^2 (n-2)^2 \dots (n-v)^2}{n^{2v}} \det^2(\lambda_{ij}) \end{aligned} \right\} (n > v > 2). \quad (19.7-13)$$

19.7-4. Выборочные распределения в случае нормальной совокупности (см. также пп.18.8-6 и 18.8-8). Для случайной выборки из многомерной нормальной совокупности выборочные распределения и критерии, содержащие только выборочные средние \bar{x}_i и выборочные дисперсии $l_{ii} = s_i^2$, получаются непосредственно из п.19.5-3. Остается исследовать статистики, которые описывают стохастические связи между случайными величинами x_i , в частности, выборочную корреляцию и коэффициенты регрессии.

(а) Распределение выборочного коэффициента корреляции. Для простоты рассмотрим случайную выборку $(x_{11}, x_{21}; x_{12}, x_{22}; \dots; x_{1n}, x_{2n})$ из двумерной нормальной совокупности с плотностью распределения

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2)\right\}, \quad (19.7-14)$$

$$u_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}, \quad u_2 = \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho = \rho_{12} < 1).$$

Плотность распределения выборочного коэффициента корреляции $r_{12} = r$ (п.19.7-2) равна

$$\begin{aligned} \varphi_{r(n)}(r) &= \frac{2^{n-3}}{\pi(n-3)!} (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right) \frac{(2\rho r)^k}{k!} = \\ &= \frac{n-2}{\pi} (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \int_0^1 \frac{\vartheta^{n-2}}{(1-\rho r \vartheta)^{n-1} \sqrt{1-\vartheta^2}} d\vartheta \quad (-1 < r < 1) \end{aligned} \quad (19.7-15)$$

и равна 0 при $|r| > 1$; отметим формулы

$$Mr = \varrho + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad Dr = \frac{(1-\varrho^2)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (19.7-16)$$

Заметим, что $\varphi_{r(n)}(r)$ не зависит от $\xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2$; $n \geq 4$.
Полезно ввести новую случайную величину

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (19.7-17)$$

которая при $n \geq 10$ распределена приблизительно нормально с центром и дисперсией

$$My \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varrho}{1-\varrho} + \frac{\varrho}{2(n-1)}, \quad Dy \approx \frac{1}{n-3}. \quad (19.7-18)$$

Поведение статистик r и y при различных значениях ϱ и n представлено на рис. 19.7-1.

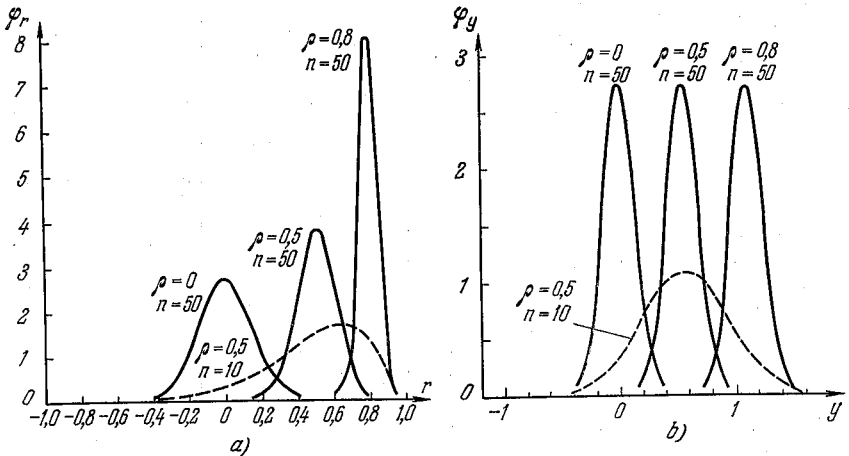


Рис. 19.7-1. Плотности распределения статистик r и y , применяемых для оценок коэффициента корреляции ϱ двумерных нормальных распределений.

Если y и y' — значения статистики (17), вычисленные для двух независимых случайных выборок объемов n и n' из одной и той же нормальной совокупности, то $y - y'$ имеет приблизительно нормальное распределение с центром 0 и дисперсией $\approx \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n'-3}$.

(b) r -распределение. Критерий некоррелированности величин. В важном частном случае $\varrho = 0$ (гипотеза некоррелированности величин!) плотность распределения (15) сводится к

$$\varphi_{r(n)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \quad (-1 < r < 1). \quad (19.7-19)$$

В этом случае величина $t = \sqrt{n-2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ имеет t -распределение с $n-2$

степенями свободы (табл.19.5-2). Статистика $r\sqrt{n-1}$ имеет r -распределение с $n-2$ степенями свободы. r -распределение табулировано; оно асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией 1 при $n \rightarrow \infty$. Как t -распределение, так и r -распределение дают критерии для гипотезы $\rho = 0$.

(с) Проверка гипотетического значения коэффициента регрессии и (см. также п.19.7-2). Если дана случайная выборка из двумерной нормальной совокупности с плотностью (14), то гипотетическое значение коэффициента регрессии $\beta_{21} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} = \rho_{12} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ (п.18.4-6, b) проверяют при помощи статистики

$$t' = \frac{s_1 \sqrt{n-2}}{s_2 \sqrt{1-r_{12}^2}} (b_{21} - \beta_{21}), \quad (19.7-20)$$

которая имеет t -распределение с $n-2$ степенями свободы. Этот критерий значительно более удобен, чем непосредственное применение распределения выборочного коэффициента регрессии b_{21} [18.9].

(д) ν -мерные выборки. Для случайной выборки из ν -мерной нормальной совокупности с плотностью распределения (18.8-26) совместное распределение выборочных средних $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_\nu$ является нормальным со средними значениями $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ и матрицей моментов Λ/n . Совместное распределение величин \bar{x}_i не зависит от совместного распределения $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ выборочных моментов l_{ij} (обобщенная теорема Фишера, см. также п.19.5-3, b).

19.7-5. Выборочная средняя квадратическая сопряженность признаков. Критерий независимости двух случайных величин, основанный на таблице сопряженности признаков (см. также п.19.6-7).

(а) Пусть дана двумерная случайная выборка $(x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n)$ случайных величин x, y . В таблице сопряженности признаков эти n выборочных пар размещены в r классовых x -интервалах и s классовых y -интервалах. Пусть

n_i пар (x_k, y_k) попадают в i -й классовой x -интервал,

n_j пар (x_k, y_k) попадают в j -й классовой y -интервал,

n_{ij} пар (x_k, y_k) попадают в i -й классовой x -интервал и j -й классовой y -интервал.

Выборочная средняя квадратическая сопряженность признаков есть статистика

$$f^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(\frac{n_{ij}}{n} - \frac{n_i}{n} \frac{n_j}{n} \right)^2}{\frac{n_i}{n} \frac{n_j}{n}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_i n_j} - 1, \quad (19.7-21)$$

которая измеряет зависимость между x и y . Величина f^2 заключена между 0 и $\min(r, s) - 1$ и достигает последнего значения тогда и только тогда, когда каждая строка (при $r \geq s$) или каждый столбец (при $r \leq s$) содержит только один элемент, отличный от нуля.

(б) Если x и y независимы, то статистика nf^2 сходится по вероятности к χ^2 с $t = (r-1)(s-1)$ степенями свободы при $n \rightarrow \infty$ (табл. 19.5-1). Если все $n_{ij} > 10$ (при необходимости некоторые классы интервалов объединяются), то гипотеза о независимости отвергается с уровнем значимости α в критической области $nf^2 > \chi_{1-\alpha}^2(t)$ (п.19.6-3).

(с) Особый интерес представляет частный случай $r=s=2$ (таблица сопряженности признаков 2×2); в этом случае

$$f^2 = \frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_{\cdot 1} n_{\cdot 2}} \quad (19.7-22)$$

(см. также [18.6]).

19.7-6. Ранговая корреляция по Спирмену. Непараметрический критерий независимости. Пусть относительно случайной выборки n пар $(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n)$ известно только, что x_k в порядке убывания величины занимает A_k -е место, а y_k в порядке убывания величины занимает B_k -е место ($k=1, 2, \dots, n$). Если величины x и y независимы, то статистика (коэффициент ранговой корреляции)

$$R = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{k=1}^n (A_k - B_k)^2 \quad (19.7-23)$$

распределена асимптотически нормально с центром 0 и дисперсией $\frac{1}{n-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого значения $n > 1$ гипотеза о независимости отвергается с уровнем значимости $\leq \alpha$ (п.19.6-3), если

$$R > \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n-1}} \quad (\text{односторонний критерий}), \quad (19.7-24)$$

или

$$|R| > \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}} \quad (\text{двусторонний критерий}). \quad (19.7-25)$$

Примечание. Если двумерное распределение (x, y) нормально, то $2 \sin \frac{\pi R}{6}$ есть состоятельная оценка для коэффициента корреляции ρ_{xy} .

19.7-7. Проверка и оценка стохастических связей. Во многих приложениях случайная величина (x_1, x_2, \dots) отмечает наблюдаемое событие E , которое стохастически связано с классом неизвестных событий H , обозначаемых случайной величиной (η_1, η_2, \dots) ; заметим, что здесь η_1, η_2, \dots — случайные величины, а не параметры. Если распределение величины $(x_1, x_2, \dots; \eta_1, \eta_2, \dots)$ известно, то «наблюденную часть» (x_1, x_2, \dots) совместной выборки $(x_1, x_2, \dots; \eta_1, \eta_2, \dots)$ можно использовать:

1) для получения оценок $y_1(x_1, x_2, \dots), y_2(x_1, x_2, \dots), \dots$ величин η_1, η_2, \dots путем подходящего метода регрессии;

2) для проверки гипотезы $H \equiv \{(\eta_1, \eta_2, \dots) \in D_H\}$ путем построения критической области S_G , которая отвергает гипотезу H , когда $(x_1, x_2, \dots) \in S_G$;

3) для получения доверительной области для (η_1, η_2, \dots) (п.19.6-5).

В отличие от пп.19.6-4—19.6-5, где η_1, η_2, \dots рассматривались как неслучайные параметры, теорема Байеса (п.18.2-6) позволяет теперь вычислять апостериорные вероятности $\mathcal{P}\{H|E\}$.

ГЛАВА 20

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

20.1. ВВЕДЕНИЕ

20.1-1. Вводные замечания. Глава 20 содержит описание известных вычислительных методов, причем упор делается на методику, а не на схемы или программы расчета. В пп.20.4-1 – 20.5-7 дается исчисление конечных разностей. Разностные методы представляют интерес не только для численного интегрирования дифференциальных уравнений, но также и в тех математических моделях, где переменные меняются дискретными шагами.

20.1-2. Ошибки. За исключением возможных промахов (грубых ошибок) в приближенных вычислениях встречаются ошибки начальных данных, ошибки округления, вызванные использованием конечного числа знаков, и ошибки усечения, вызванные конечной аппроксимацией бесконечного процесса. Влияние малых ошибок Δx_i или относительных ошибок $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ на результат $f(x_1, x_2, \dots)$ может быть оценено с помощью дифференциала (п.4.5-3); так,

$$\Delta(x_1 + x_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad \Delta(x_1 x_2) = x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1, \quad (20.1-1)$$

$$\left| \frac{\Delta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{|x_1 - x_2|}, \quad \frac{\Delta(x_1 x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}. \quad (20.1-2)$$

Возникновение и распространение ошибок в более сложных вычислениях составляют предмет продолжающихся исследований; точные результаты получены лишь в отдельных классах вычислений. Желательно своевременно обнаруживать промахи и ошибки с помощью различных программ контроля (например, подстановкой приближенного решения в исходное уравнение), осуществляемых на каждом этапе расчета. В качестве весьма грубого практического совета можно рекомендовать сохранять на две значащих цифры больше, чем это оправдывается точностью исходных данных или требуемой точностью результата. В сходящихся итерационных процессах (пп.20.2-2, 20.2-4, 20.3-2, 20.7-3 и 20.8-5) влияние ошибки уменьшается, за исключением ошибок, нарушающих сходимость.

20.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

20.2-1. Вводные замечания. Численному решению уравнения

$$f(x) = 0 \quad (20.2-1)$$

должно быть предпослано хотя бы грубое исследование вопросов существования и положения корней, их оценки и т. д. (см. также пп.1.6-6 и 7.6-9). Решения могут быть проверены подстановкой.

20.2-2. Итерационные методы.

(a) Данное уравнение (1) приводят к виду

$$z = \varphi(z). \quad (20.2-2)$$

Выбирая некоторое начальное приближение $z^{[0]}$, вычисляют последовательные приближения

$$z^{[j+1]} = \varphi(z^{[j]}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (20.2-3)$$

Сходимость таких приближений к искомому решению z требует отдельного исследования.**Признак сходимости и оценка ошибки.** Если существует такая область D в комплексной плоскости и такое положительное число $M < 1$, что

$$|\varphi(Z_1) - \varphi(Z_2)| < M|Z_1 - Z_2| \text{ для всех } Z_1, Z_2 \text{ из } D,$$

и если D содержит $z^{[0]}$, $z^{[1]}$ и все точки z , удовлетворяющие неравенству

$$|z - z^{[j]}| < \frac{M}{1-M} |z^{[j]} - z^{[j-1]}| \quad (20.2-4)$$

для каждого значения $j > 1$, то приближения (3) сходятся к некоторому решению z уравнения (1), которое удовлетворяет неравенству (4) и является единственным в D . Заметим, что правая часть неравенства (4) дает верхнюю грань ошибки j -го приближения $z^{[j]}$.

(b) Имеется много способов приведения уравнения (1) к виду (2). Вот некоторые итерационные формулы:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - kf(z^{[j]}), \quad (20.2-5)$$

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})} \quad (\text{метод Ньютона}), \quad (20.2-6)$$

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})} - \frac{1}{2} \frac{\{f(z^{[j]})\}^2 f''(z^{[j]})}{\{f'(z^{[j]})\}^3}. \quad (20.2-7)$$

Приведенные итерационные формулы особенно удобны при вычислении действительных корней. Для нахождения комплексных корней действительных уравнений надо выбрать комплексное начальное приближение $z^{[0]}$. Признак сходимости и оценка ошибки из п. 20.2-2, а применимы во всех случаях.**Примеры.** Применение метода (6) к уравнениям $\frac{1}{z} - a = 0$, $z^2 - a = 0$ и $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{a} = 0$ дает итерационные формулы вычисления $\frac{1}{a}$ и \sqrt{a} :

$$z^{[j+1]} = z^{[j]}(2 - az^{[j]}) \rightarrow \frac{1}{a} \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad 0 < z^{[0]} < \frac{2}{a}, \quad (20.2-8)$$

$$z^{[j+1]} = \frac{1}{2} \left(z^{[j]} + \frac{a}{z^{[j]}} \right) \rightarrow \sqrt{a} \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad z^{[0]} > 0, \quad (20.2-9a)$$

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} \left[1 + \frac{a - (z^{[j]})^2}{2a} \right] \rightarrow \sqrt{a} \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad 0 < z^{[0]} < \sqrt{3a}. \quad (20.2-9b)$$

(c)* **Метод секущих (regula falsi).** Следующая итерационная схема применяется для отыскания действительных корней действительных уравнений. Для решения уравнения (1) выбирают два начальных приближения $z = z^{[0]}$, $z = z^{[1]}$ и строят последовательные приближения:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{z^{[j]} - z^{[k]}}{f(z^{[j]}) - f(z^{[k]})} f(z^{[j]}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots; k < j). \quad (20.2-10)$$

Приближения $z^{[j]}$ и $z^{[k]}$ обычно выбирают так, чтобы $f(z^{[j]})$ и $f(z^{[k]})$ имели противоположные знаки, что обеспечивает локализацию корня между $z^{[j]}$ и $z^{[k]}$ (см. также [20.10]).

(д) Кратные корни. Итерационные схемы, опирающиеся на формулы (6) (метод Ньютона) или (7), не будут сходиться в окрестности кратного корня уравнения. Заметим, что кратные корни функции $f(z)$ являются корнями ее производной $f'(z)$; для алгебраических уравнений общий наибольший делитель функций $f(z)$ и $f'(z)$ может быть получен методом п.1.7-3.

20.2-3. Специальные методы численного решения алгебраических уравнений.

(а) Вычисление значений многочлена. Для применения рассматриваемых далее итерационных методов надо уметь вычислять значения многочлена

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (20.2-11)$$

Для этой цели либо вычисляют последовательно $a_0 z + a_1$, $z(a_0 z + a_1) + a_2, \dots$ либо предварительно находят величины $f(c), f'(c), \frac{1}{2} f''(c), \dots$ по схеме Горнера и затем пользуются формулой (12).

Схема Горнера. Деление многочлена $f(z)$ на $(z-c)$ дает новый многочлен $f_1(z)$ и остаток $f(c)$ (п.1.7-2); деление $f_1(z)$ на $(z-c)$ дает многочлен $f_2(z)$ и остаток $f'(c)$. Продолжая этот процесс, получаем последовательно остатки $f(c), f'(c), \frac{1}{2!} f''(c), \frac{1}{3!} f'''(c), \dots$, которые являются коэффициентами разложения многочлена

$$F(u) \equiv f(u+c) \equiv f(c) + f'(c)u + \frac{1}{2!} f''(c) u^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) u^n \equiv f(z). \quad (20.2-12)$$

Схема Горнера для комплексного аргумента. Если $f(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами, $a = a+ib$, то $f(c) = Ac+B = (Aa+B)+iAB$, где $Az+B$ — действительный остаток от деления $f(z)$ на $(z^2-2az+a^2+b^2)$.

(б) Итерационные методы для действительных корней. Чтобы вычислить изолированный простой корень алгебраического уравнения

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (20.2-13)$$

можно:

1) применить метод Ньютона (6);

2) применить формулу (5) с $k = \frac{1}{a_{n-1}}$, вычисляя последовательные значения многочлена

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{1}{a_{n-1}} f(z^{[j]}) \quad (20.2-14)$$

по схеме Горнера. Если $a_{n-1} = 0$, заменяют z на $u = z - c$ и применяют формулу (12), чтобы привести уравнение (13) к виду $F(u) = 0$;

3) применить метод секущих (п.20.2-2,с).

Метод Горнера (для действительных корней) сводится к последовательному вычислению коэффициентов многочленов $F_1(u) \equiv f(u+c_1)$, $F_2(u) \equiv F_1(u+c_2)$, ... по схеме Горнера, где c_1, c_2, \dots выбираются так, чтобы уменьшить абсолютные величины остатков. Если удастся получить $F_j(0) \approx 0$, то искомый корень приближенно равен $c_1 + c_2 + \dots + c_j$.

(с) *Комплексные корни.* Итерационные формулы (5) и (6) применимы и в случае комплексных корней; первое приближение надо выбрать комплексным, близким к искомому корню. Схема Горнера для комплексного аргумента применима, если $f(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами.

Если $f(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами, то в качестве первого приближения надо испытать такое $a+ib$, которое минимизирует $|A|$ и $|B|$ в схеме Горнера для комплексного аргумента.

(d) Метод Грегге — Лобачевского. Если дано алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами

$$f(z) \equiv \prod_{k=1}^n (z - z_k) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (20.2-15)$$

то сначала находят коэффициенты $a_1^{(1)}$ многочлена

$$f(z) f(-z) \equiv (-1)^n \prod_{k=1}^n (z^2 - z_k^2) \equiv (-1)^n (z^{2n} + a_1^{(1)} z^{2n-2} + \dots + a_n^{(1)})$$

с помощью таблицы

$k = n$	$k = n-1$	$k = n-2$	$k = n-3$	(Номер столбца)
a_n a_n	a_{n-1} $-a_{n-1}$	a_{n-2} a_{n-2}	a_{n-3} $-a_{n-3}$...
a_n^2	$-a_{n-1}^2$ $+ 2a_n a_{n-2}$	a_{n-2}^2 $- 2a_{n-1} a_{n-3}$ $+ 2a_n a_{n-4}$	$-a_{n-3}^2$ $+ 2a_{n-2} a_{n-4}$ $- 2a_{n-1} a_{n-5}$ $+ 2a_n a_{n-6}$...
$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-3}^{(1)}$...

Повторяя этот процесс, получают последовательно коэффициенты $a_i^{(j)}$ многочленов

$$(-1)^n \prod_{k=1}^n (z^{2j} - z_k^{2j}) \equiv (-1)^n (z^{2jn} + a_1^{(j)} (z^{2j})^{n-1} + \dots + a_n^{(j)}).$$

При возрастании j столбцы в расчетных таблицах оказываются одного из трех типов:

1) В некоторых столбцах удвоенные произведения становятся пренебрежимо малыми, так что последовательные записи в этих столбцах становятся квадратами с одинаковыми знаками (*правильные столбцы*); если последовательные записи имеют одинаковые знаки, а их абсолютные значения оказываются равными определенной доле квадрата предыдущего значения, то мы имеем *частично правильные столбцы*.

2) Записи столбцов могут иметь чередующиеся знаки (*колеблющиеся столбцы*).

3) Некоторые столбцы могут не обладать указанной выше правильностью.

Каждая пара правильных столбцов (например, k и $k-r$), разделенная $r-1$ неправильными столбцами, соответствует r корням z с равными модулями такими, что

$$\left| \frac{a_k^{(j)}}{a_{k-r}^{(j)}} \right| \sim |z|^{2j+r} \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (20.2-16)$$

Эти r корней все либо действительны, либо чисто мнимы, если $r-1$ разделяющих столбцов частично правильны. В частности:

1. Два соседних правильных столбца (например, k и $k-1$) определяют *простой действительный корень* z такой, что

$$\left| \frac{a_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)}} \right| \sim |z|^{2j} \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

2. Два правильных столбца (k и $k-2$), разделенные одним колеблющимся столбцом, определяют пару *простых комплексно сопряженных корней* z таких, что

$$\left| \frac{a_k^{(j)}}{a_{k-2}^{(j)}} \right| \sim |z|^{2j+1} \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

На практике сначала находят действительные корни и чисто мнимые; знаки определяют подстановкой или с помощью п.1.6-6. Затем упрощают уравнение делением на выделенные множители или находят комплексные корни, дополняя формулу (16) формулой Ньютона (1.6-4); см. также п.20.2-2, d о выделении кратных корней.

(е) Матричный метод. Корни алгебраического уравнения (13) n -й степени с $a_0 = 1$ можно вычислить как собственные значения $n \times n$ -матрицы

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad (20.2-17)$$

одним из методов, описанных в п.20.3-5.

20.2-4. Система уравнений и экстремальные задачи: итерационные методы (см. также пп.11.1-1, 20.2-2 и 20.2-3).

(а) Задача решения системы n уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (20.2-18)$$

с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n эквивалентна задаче *минимизации функции*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^n |f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 \quad (20.2-19)$$

или какой-либо другой возрастающей функции от абсолютных величин $|f_i|$. **Невязок (ошибок)** $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Задача отыскания минимума (или максимума) функции n переменных и сама по себе имеет большое практическое значение.

Для решения этой задачи *итерационными методами* начинают с произвольных значений $x_i^{[0]}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и строят последовательные приближения

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} + \lambda^{[j]} v_i^{[j]} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots), \quad (20.2-20)$$

которые сходятся к некоторому решению x_i при $j \rightarrow \infty$.

Различные методы отличаются выбором «направления» j -го шага, т. е. выбором отношений $v_1^{[j]} : v_2^{[j]} : \dots : v_n^{[j]}$. Величина шага определяется значением параметра $\lambda^{[j]}$, минимизирующим величину $F(x_1^{[j+1]}, x_2^{[j+1]}, \dots, x_n^{[j+1]})$ как функцию от $\lambda^{[j]}$. Эту функцию обычно аппроксимируют ее тейлоровским разложением или интерполяционным многочленом по трем—пяти выбранным значениям $\lambda^{[j]}$. *Последний метод применим для отыскания max и min таблично заданной функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

(с) Компактная схема исключения. Находим x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 в указанном порядке из уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2, \\ \dots & \dots \\ x_n &= \beta_n \end{aligned} \right\} \quad (20.3-2)$$

после вычисления элементов следующей $(n+1) \times n$ -матрицы:

$$\begin{array}{cccc|c} \gamma_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \dots & \gamma_{nn} & \beta_n \end{array}$$

с помощью рекуррентных формул:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{i1} &= a_{i1} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad \alpha_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}} \quad (k = 2, 3, \dots, n), \\ \gamma_{ik} &= a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{ij} \alpha_{jk} \quad (i, k = 2, 3, \dots, n; i \geq k), \\ \alpha_{ik} &= \frac{1}{\gamma_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \alpha_{jk} \right) \quad (i, k = 2, 3, \dots, n; i < k), \\ \beta_1 &= \frac{b_1}{a_{11}}; \quad \beta_i = \frac{1}{\gamma_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \beta_j \right) \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (20.3-3)$$

Вычисление определителя производится по формуле

$$\det (a_{ik}) = \gamma_{11} \gamma_{22} \dots \gamma_{nn}. \quad (20.3-4)$$

Компактный метод требует меньшего количества промежуточных записей, чем метод Гаусса, и становится особенно простым, когда матрица (a_{ik}) симметрична ($a_{ki} = a_{ik}$). В этом важном частном случае

$$\alpha_{ik} = \frac{\gamma_{ki}}{\gamma_{ii}} \quad (i < k). \quad (20.3-5)$$

20.3-2. Итерационные методы (см. также п.20.2-4).

(а) Излагаемые ниже итерационные методы для системы линейных уравнений (1) с действительными коэффициентами дают последовательные приближения решения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в виде (20.2-20). Невязки, получаемые на каждом шаге итерации, будем обозначать через

$$f_i^{[j]} \equiv \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{[j]} - b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots). \quad (20.3-6)$$

З а м е ч а н и е. Для многих итерационных схем требуется, чтобы матрица коэффициентов $A = (a_{ik})$ была нормальна с положительно определенной симметричной частью (п.13.3-4) или чтобы матрица A была симметричной и положительно определенной (п.13.5-2). Если для данной матрицы коэффициентов это условие не выполнено, то можно попробовать так переставить или преобразовать данные уравнения, чтобы получить относительно большие диагональные коэффициенты, или можно решать эквивалентную систему

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ik} x_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} b_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.3-7)$$

матрица коэффициентов которой обязательно симметрична и положительно определена, если только матрица A не вырождена.

(b) Простая итерация и итерация Зейделя (одношаговый циклический процесс). Преобразуем данную систему (путем перестановки уравнений и/или умножения их на постоянные) к такому виду, чтобы диагональные коэффициенты a_{ii} были положительными и возможно большими. Начиная с произвольных значений $x_i^{[0]}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), вычисляем последовательные приближения по формуле простой итерации

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \frac{1}{a_{ii}} f_i^{[j]} = x_i^{[j]} - \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{[j]} - b_i \right) \\ (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots) \quad (20.3-8)$$

или по методу Зейделя

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{[j+1]} + \sum_{k=i}^n a_{ik} x_k^{[j]} - b_i \right) \\ (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots). \quad (20.3-9)$$

Обе схемы просты, но могут сходиться медленно или не сходиться совсем.

(c) Методы релаксации позволяют ускорить сходимость итерационного процесса при вычислении вручную. Начиная с произвольного приближения $x_i^{[0]}$ (обычно просто $x_1^{[0]} = 1, x_2^{[0]} = x_3^{[0]} = \dots = x_n^{[0]} = 0$), пробуют находить последовательные приближения $x_i^{[j]}$ таким образом, чтобы свести n невязок (6) к нулю. На каждом шаге выписывают невязки $f_i^{[j]}$ и комбинируют следующие методы:

1. *Координатная релаксация.* На каждом шаге «ликвидируют» наибольшую по абсолютной величине невязку $f_i^{[j]}$ путем исправления одного только x_i :

$$x_i^{[j+1]} \approx x_i^{[j]} - \frac{f_i^{[j]}}{a_{ii}}; \quad x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} \quad (i \neq I). \quad (20.3-10)$$

Для начальных шагов допустим грубый подсчет $x_i^{[j+1]}$.

2. *Блочная и групповая релаксации.* В некотором множестве («блоке») координат $x_i^{[j]}$ придадим им равные приращения $x_i^{[j+1]} - x_i^{[j]}$ так, чтобы ликвидировать одну из невязок $f_i^{[j+1]}$ или чтобы свести к нулю сумму всех невязок. Этот последний метод применяется, в частности, когда все начальные невязки $f_i^{[0]}$ имеют одинаковый знак.

При *групповой релаксации* для выбранного множества координат $x_i^{[j]}$ приращения могут быть различными.

3. *Сверхрелаксация.* Иногда можно ускорить сходимость релаксации, *изменяя знак* регулируемой невязки и уменьшая ее абсолютную величину, вместо того, чтобы полностью ликвидировать ее на данном этапе.

Методы релаксации особенно удобны при решении вручную большого количества простых линейных разностных уравнений, используемых обычно для приближенного решения уравнений с частными производными (п. 20.3-3). Эффективность методов релаксации во многом зависит от навыков и искусства вычислителя, а также от знания им физического существа вопроса.

(д) Методы наискорейшего спуска (градиентные методы) минимизируют некоторую положительную функцию типа

$$F \equiv \sum_{i=1}^n |f_i|, \quad F \equiv \sum_{i=1}^n |f_i|^2, \dots,$$

способом, изложенным в п.20.2-4,д. Если матрица коэффициентов (a_{ik}) симметрична и положительно определена, можно вести расчет по формулам

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \frac{\sum_{k=1}^n (f_k^{[j]})^2}{\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_{kh} f_k^{[j]} f_h^{[j]}} f_i^{[j]} \quad \left. \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, n), \\ (j = 0, 1, 2, \dots) \end{matrix} \right\} \quad (20.3-11)$$

Если сходимость имеет колеблющийся характер, то ее можно ускорить путем умножения последнего члена формулы (11) на 0,9 при некоторых значениях j .

(е) Метод взаимных градиентов. Пусть дана система линейных уравнений (1) с действительной, симметричной и положительно определенной матрицей коэффициентов (a_{ik}) , и пусть $x_i^{[0]}$ — начальное приближение. Положим $v_i^{[0]} = f_i^{[0]}$ и вычислим последовательно

$$\left. \begin{aligned} x_i^{[j+1]} &= x_i^{[j]} - \frac{\sum_{k=1}^n f_k^{[j]} v_k^{[j]}}{m^{[j]}} v_i^{[j]}, \\ f_i^{[j+1]} &= f_i^{[j]} - \frac{\sum_{k=1}^n f_k^{[j]} v_k^{[j]}}{m^{[j]}} \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k^{[j]}, \\ v_i^{[j+1]} &= f_i^{[j+1]} - \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_{kh} f_k^{[j+1]} v_h^{[j]}}{m^{[j]}} v_i^{[j]} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, n), \\ (j = 0, 1, 2, \dots) \end{matrix} \right\} \quad (20.3-12)$$

где $m^{[j]} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_{kh} v_k^{[j]} v_h^{[j]}$. Значения $f_i^{[j]}$ удовлетворяют формуле (6). При отсутствии ошибок округления этот метод дает точное решение $x_i = x_i^{[n]}$ после n шагов; сверх того, этот метод имеет все преимущества итерационной схемы.

20.3-3. Обращение матриц (см. также пп.13.2-3 и 14.5-3).

(а) Методы пп.20.3-1 и 20.3-2 непосредственно применимы для численного обращения данной невырожденной матрицы $A \equiv (a_{ik})$, а также для вычисления $\det (a_{ik})$.

(б) Итерационная схема обращения матрицы. Чтобы для данной $n \times n$ -матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} , начинают с произвольной $n \times n$ -матрицы $X^{[0]}$ (скажем, $X^{[0]} = E$) и вычисляют последовательные приближения

$$X^{[j+1]} = X^{[j]} (2E - AX^{[j]}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (20.3-13)$$

Если эта последовательность сходится, ее пределом является A^{-1} (см. также п.20.2-2,б).

е) (см. также п.13.4-7). Для каждой невырожденной $n \times n$ -матрицы A

$$\left. \begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{a_n} (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-2} A + a_{n-1} E), \\ \text{где} \quad a_1 &= -\text{Tr } A, \\ a_j &= -\frac{1}{j} [a_{j-1} \text{Tr } A + a_{j-2} \text{Tr } A^2 + \dots + a_1 \text{Tr } A^{j-1} + \text{Tr } A^j] \end{aligned} \right\} \quad (20.3-14)$$

($j = 2, 3, \dots, n$).

20.3-4. Решение системы линейных уравнений и обращение матриц при помощи разбиения на клетки (см. также п.13.2-8).

(а) Система линейных уравнений (1) может быть записана в матричной форме (п.14.5-3):

$$Ax \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \equiv b. \quad (20.3-15)$$

Уравнение (15) можно преобразовать путем разбиения матриц на клетки:

$$\left. \begin{aligned} Ax &\equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \equiv b, \\ \text{где} \quad A_{11} &\equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \\ X_1 &\equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad B_1 \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (m < n). \end{aligned} \right\} \quad (20.3-16)$$

Решение системы *матричных* уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 &= B_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 &= B_2 \end{aligned} \right\} \quad (20.3-17)$$

приводит к уравнению

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})X_1 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \quad (20.3-18)$$

которое дает m линейных уравнений для первых m неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m , если только известна обратная матрица A_{22}^{-1} порядка $n - m$. Этот метод особенно удобен, если надо найти лишь первые m неизвестных.

(б) Обратная матрица A^{-1} получается тоже разбитой на клетки

$$\left. \begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \\ \text{где} \quad C_{11} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \quad C_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}C_{11}, \\ C_{22} &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}, \quad C_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}C_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (20.3-19)$$

так что обращение матрицы порядка n сводится к обращению матриц меньших порядков (m и $n-m$).

20.3-5. Собственные значения и собственные векторы матриц (см. также пп.13.4-2—13.4-6, 14.8-5 и 14.8-9).

(а) **Характеристическое уравнение.** Собственные значения λ_k матрицы $A \equiv (a_{ik})$ порядка n находят как корни характеристического уравнения

$$F_A(\lambda) \equiv \det(a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0 \quad (20.3-20)$$

одним из методов, описанных в пп.20.2-1—20.2-3. Чтобы избежать непосредственного разворачивания определителя, можно вычислить $F_A(\lambda)$ для $n+1$ выбранного значения λ (скажем, $\lambda=0, 1, 2, \dots, n$), после чего многочлен n -й степени $F_A(\lambda)$ находится по одной из интерполяционных формул п.20.5-3.

(б) **Итерационный метод.** Пусть матрица A —эрмитова, так что все ее собственные значения действительны; во многих приложениях A действительна и симметрична. Если наибольшее по модулю собственное значение λ_M простое, то, начиная с произвольного начального вектора $x^{[0]}$, например $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$, вычисляют последовательно произведения

$$x^{[j+1]} = \alpha_j A x^{[j]} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (20.3-21)$$

где α_j — подходящий множитель, выбираемый, например, так, чтобы наибольшая по модулю координата вектора $x^{[j+1]}$ равнялась 1. При возрастании j векторы $x^{[j]}$ будут приближаться к собственному вектору, принадлежащему доминирующему собственному значению λ_M ; последнее можно вычислить по формуле

$$\lambda_M = \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{x}_i x_k}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (20.3-22)$$

Этот метод сходится тем быстрее, чем значительнее отличается $|\lambda_M|$ от модулей всех остальных собственных значений матрицы A и чем ближе направление начального вектора $x^{[0]}$ к направлению искомого собственного вектора; если $x^{[0]} = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ не удовлетворяет этому условию, то пробуют $\{0, 1, 0, \dots, 0\}$ и т. д. Можно ускорить сходимость путем применения A^2 или A^3 вместо A в формуле (21).

Последующие собственные значения и собственные векторы находятся после приведения матрицы (п.14.8-6). О других методах см. [20,5], [20,9].

Если наибольшее по модулю собственное значение λ_M имеет кратность $m > 1$, то последовательность векторов, определяемых формулой (21), сходится к одному из собственных векторов, принадлежащих λ_M . Выбирая различные начальные векторы $x^{[0]}$, можно построить m линейно независимых векторов инвариантного подпространства, принадлежащего λ_M .

(в) **Метод вращения.** Если дана действительная симметричная матрица $A \equiv (a_{ik}) \equiv A^{[0]}$, то начинаем с исключения недиагонального элемента a_{iK} , имеющего наибольшую абсолютную величину, путем ортогонального преобразования

$$A^{[1]} = T_1^{-1} A^{[0]} T_1, \quad T_1 = (t_{ik}),$$

где

$$\left. \begin{aligned} t_{ik} &= \delta_k^i \left[1 + (\cos \vartheta_1 - 1) (\delta_i^i + \delta_K^K) \right] + \sin \vartheta_1 (\delta_K^i \delta_K^i - \delta_i^i \delta_K^K) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \\ \operatorname{tg} 2\vartheta_1 &= \frac{2a_{iK}}{a_{ii} - a_{KK}} \end{aligned} \right\} \quad (20.3-23)$$

(е) Конечные разности удобно располагать в таблицы таких типов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-1} & y_{-1} & & & & & \\
 x_0 & y_0 & \Delta y_{-1} & \Delta^2 y_{-1} & \Delta^3 y_{-1} & & \\
 \hline
 & & \Delta y_0 & & & & \\
 x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & \Delta^3 y_0 & \Delta^4 y_0 & \\
 x_2 & y_2 & \Delta y_1 & & & & \\
 x_3 & y_3 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_1 & & &
 \end{array} \tag{20.4-5}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-3} & y_{-3} & & & & & \\
 x_{-2} & y_{-2} & \nabla y_{-2} & \nabla^2 y_{-1} & \nabla^3 y_0 & & \\
 x_{-1} & y_{-1} & \nabla y_{-1} & \nabla^2 y_0 & \nabla^3 y_1 & \nabla^4 y_1 & \\
 \hline
 x_0 & y_0 & \nabla y_0 & & & & \\
 x_1 & y_1 & \nabla y_1 & & & &
 \end{array} \tag{20.4-6}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-2} & y_{-2} & & & & & \\
 x_{-1} & y_{-1} & \delta y_{-3/2} & \delta^2 y_{-1} & \delta^3 y_{-1/2} & \delta^4 y_0 & \\
 \hline
 x_0 & y_0 & \delta y_{-1/2} & \delta^2 y_0 & \delta^3 y_{1/2} & \delta^4 y_1 & \\
 x_1 & y_1 & \delta y_{1/2} & \delta^2 y_1 & & & \\
 x_2 & y_2 & \delta y_{3/2} & & & &
 \end{array} \tag{20.4-7}$$

Заметим, что вычисление разности порядка r требует знания $r + 1$ значения функции и что y многочлена n -й степени разности n -го порядка постоянны.

20.4-2. Операторные обозначения.

(а) Определения. **Оператор смещения E** для функции $y = y(x)$ действительного переменного x и фиксированного приращения $\Delta x = h$ определяют формулами

$$E y(x) = y(x + \Delta x), \quad E^r y(x) = y(x + r \Delta x), \tag{20.4-8}$$

где r — любое действительное число.

Разностные операторы Δ , ∇ , δ и оператор усреднения μ определяются так:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta y(x) &= y(x + \Delta x) - y(x), \\
 \nabla y(x) &= y(x) - y(x - \Delta x), \\
 \delta y(x) &= y\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - y\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right), \\
 \mu y(x) &= \frac{1}{2} \left[y\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) + y\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right].
 \end{aligned} \right\} \tag{20.4-9}$$

$$\tag{20.4-10}$$

Заметим, что при $u_k = u(x_0 + k \Delta x)$, $v_k = v(x_0 + k \Delta x)$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta(u_k + v_k) &= \Delta u_k + \Delta v_k, \quad \Delta(\alpha u_k) = \alpha \Delta u_k, \\
 \Delta(u_k v_k) &= u_{k+1} \Delta v_k + v_k \Delta u_k = u_k \Delta v_k + v_{k+1} \Delta u_k.
 \end{aligned} \right\} \tag{20.4-11}$$

Заметим также, что при $\Delta x = 1$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta x^{[r]} &= \Delta[x(x-1) \dots (x-r+1)] = rx(x-1) \dots (x-r+2) = rx^{[r-1]}, \\
 \Delta \binom{x}{r} &= \binom{x}{r-1} \quad (r = 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \right\} \tag{20.4-12}$$

(b) Соотношения между операторами (см. также п.14.3-1).

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= E - 1 = E \nabla = E^{1/2} \delta, \quad \nabla = 1 - E^{-1} = E^{-1} \Delta = E^{-1/2} \delta, \\ \delta &= E^{1/2} - E^{-1/2} = E^{-1/2} \Delta = E^{1/2} \nabla, \quad \mu = \frac{1}{2} (E^{1/2} + E^{-1/2}), \\ E &= 1 + \Delta, \quad \nabla \Delta = \Delta \nabla = \delta^2. \end{aligned} \right\} \quad (20.4-13)$$

Отметим для памяти

$$\Delta^r = (E-1)^r = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} E^{r-j} \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (20.4-14)$$

откуда легко получаются формулы для $\nabla = E^{-1} \Delta$ и $\delta = E^{-1/2} \Delta$. Заметим также, что

$$E^r = (1 + \Delta)^r = 1 + \binom{r}{1} \Delta + \binom{r}{2} \Delta^2 + \dots \quad (20.4-15)$$

Если r — целое и положительное, то ряд (15) конечен; в противном случае его сходимость требует исследования.

(c) Для функции, дифференцируемой нужное количество раз,

$$E^r = e^{r \Delta x D} = 1 + r \Delta x D + \frac{1}{2!} (r \Delta x D)^2 + \dots \quad (D \equiv \frac{d}{dx}) \quad (20.4-16)$$

(операторное обозначение ряда Тейлора, п.4.10-4; см. также табл. 8.3-1).

20.4-3. Разностные уравнения.

(a) Обыкновенное разностное уравнение порядка r есть уравнение

$$\begin{aligned} G(x_k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+r}) &\equiv G(x_k, y_k, E y_k, \dots, E^r y_k) = 0 \quad (20.4-17) \\ (k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; r = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

связывающее значения $y_k = y(x_k) = y(x_0 + k \Delta x)$ функции $y = y(x)$ на дискретном множестве значений $x = x_k = x_0 + k \Delta x$, где Δx — фиксированное приращение. Часто бывает удобно ввести в качестве новой независимой переменной величину $k = \frac{x - x_0}{\Delta x} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Обыкновенное разностное уравнение порядка r можно представить как соотношение, связывающее значение y_k и конечные разности $\Delta^i y_k, \nabla^i y_k$ или $\delta^i y_k$ вплоть до порядка r . Разностное уравнение может также связывать y_k и разностные отношения $\frac{\Delta^i y_k}{\Delta x^i}, \frac{\nabla^i y_k}{\Delta x^i}$ или $\frac{\delta^i y_k}{\Delta x^i}$ вплоть до порядка r .

Решением разностного уравнения (17) называется такая функция $y = y(x)$, что последовательность y_k удовлетворяет данным уравнениям для некоторой области значений k . Общее решение обыкновенного разностного уравнения порядка r содержит, вообще говоря, r произвольных постоянных, которые должны быть определены по начальным, краевым или другим дополнительным условиям, налагаемым на y_k . Решение разностного уравнения в любой конечной области сводится в принципе к решению системы уравнений.

Как и в случае дифференциальных уравнений, можно рассматривать систему обыкновенных разностных уравнений, содержащую две или более неизвестных функции $y(x_k) = y_k, z(x_k) = z_k, \dots$. Любое разностное уравнение (17) порядка r можно привести к системе r уравнений первого порядка введением новых переменных $E^i y_k$ или $\Delta^i y_k$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$).

Разностные уравнения применяются: 1) для аппроксимации дифференциальных уравнений (п.20.8-2 и 20.8-3) и 2) для решения задач, представляющих модели с дискретными переменными.

Пример: суммирование рядов. Задача решения разностного уравнения первого порядка вида

$$\Delta y_{k-1} = \nabla y_k = \alpha_k \quad \text{или} \quad y_k = y_{k-1} + \alpha_k \quad (20.4-18)$$

с данным начальным значением $y_0 = \alpha_0$ равносильна задаче суммирования ряда (п.4.8-5)

$$y_k = y_{k-1} + \alpha_k = \sum_{j=0}^k \alpha_j \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (20.4-19)$$

Эта задача аналогична интегрированию дифференциального уравнения $y' = f(x)$. Σ и ∇ являются взаимно обратными операторами. Отметим суммирование по частям

$$\sum_{k=m}^n u_k \Delta v_k = (u_{n+1}v_{n+1} - u_m v_m) - \sum_{k=m}^n v_{k+1} \Delta u_k. \quad (20.4-20)$$

(b) Уравнение с частными разностями связывает значения

$$\Phi_{ij} \dots = \Phi(x_0 + i \Delta x, y_0 + j \Delta y, \dots) \quad (i, j, \dots = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

функции $\Phi = \Phi(x, y, \dots)$; порядок уравнения с частными разностями есть наибольшая разность между значениями i , значениями j , ..., встречающимися в этом уравнении. В п.20.8-3 приведены формулы, выражающие различные разностные операторы через значения функции $\Phi_{ij} \dots$, и указано их применение для приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными.

20.4-4. Линейные обыкновенные разностные уравнения.

(a) Структура общего решения (см. также пп.9.3-1 и 15.4-2). Линейное обыкновенное разностное уравнение порядка r имеет вид

$$\begin{aligned} a_0(k)y_{k+r} + a_1(k)y_{k+r-1} + \dots + a_r(k)y_k &\equiv \\ &\equiv [a_0(k)E^r + a_1(k)E^{r-1} + \dots + a_r(k)]y_k = f(k), \end{aligned} \quad (20.4-21)$$

где $a_i(k)$ и $f(k)$ — данные функции от $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Общее решение уравнения (21) может быть представлено в виде суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения («приведенного» уравнения)

$$[a_0(k)E^r + a_1(k)E^{r-1} + \dots + a_r(k)]y_k = 0. \quad (20.4-22)$$

Любая линейная комбинация решений линейного однородного разностного уравнения (22) является решением этого уравнения (принцип наложения).

(b) Метод вариации произвольных постоянных (см. также п.9.3-3). Если известны r линейно независимых решений $y_{(1)k}, y_{(2)k}, \dots, y_{(r)k}$ «приведенного» уравнения (22), то общее решение неоднородного линейного разностного уравнения (21) можно найти в виде

$$y_k = C_1(k)y_{(1)k} + C_2(k)y_{(2)k} + \dots + C_r(k)y_{(r)k}, \quad (20.4-23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^r y_{(h)k+j} \Delta C_h(k) &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r-1), \\ \sum_{h=1}^r y_{(h)k+r} \Delta C_h(k) &= f(k). \end{aligned} \right\} \quad (20.4-24)$$

После решения системы r линейных уравнений (24) относительно $\Delta C_h(k)$ находим каждое $C_h(k)$ путем суммирования, как в формуле (19).

20.4-5. Линейные обыкновенные разностные уравнения с постоянными коэффициентами (см. также пп.9.4-1 — 9.4-8).

(a) Метод неопределенных коэффициентов. Общее решение линейного однородного разностного уравнения

$$a_0 y_{k+r} + a_1 y_{k+r-1} + \dots + a_r y_k \equiv (a_0 E^r + a_1 E^{r-1} + \dots + a_r) y_k = 0 \quad (20.4-25)$$

с постоянными коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_r имеет вид

$$y_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + \dots + C_r \lambda_r^k, \tag{20.4-26}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ — корни характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \dots + a_r = 0, \tag{20.4-27}$$

если только все его r корней различны. Если некоторый корень, скажем λ_1 , имеет кратность m , то соответствующий член в решении (26) составляет $(C_1 + kC_2 + \dots + k^{m-1}C_m)\lambda_1^k$. Если все коэффициенты a_j действительны, то два члена, соответствующих простым комплексно сопряженным корням $\lambda = \rho e^{\pm i\varphi}$, можно заменить на $\rho^k (A \cos k\varphi + B \sin k\varphi)$. Коэффициенты C_j, A, B, \dots должны быть определены по начальным или краевым условиям.

Решение неоднородного линейного разностного уравнения

$$a_0 y_{k+r} + a_1 y_{k+r-1} + \dots + a_r y_k = (a_0 E^r + a_1 E^{r-1} + \dots + a_r) y_k = f(k) \tag{20.4-28}$$

можно находить общим методом п.20.4-4, б, но более удобными могут оказаться специальные методы, излагаемые ниже.

(б) Матричный метод. Система линейных разностных уравнений первого порядка (рекуррентных соотношений)

$$\left. \begin{aligned} y_{k+1} &= a_{11}y_k + a_{12}z_k + \dots + f_1(k), \\ z_{k+1} &= a_{21}y_k + a_{22}z_k + \dots + f_2(k) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{20.4-29}$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} может быть записана в матричной форме (см. также п.14.5-3)

$$Y_{k+1} = AY_k + F(k), \tag{20.4-30}$$

где $Y_k \equiv \{y_k, z_k, \dots\}$, $F(k) \equiv \{f_1(k), f_2(k), \dots\}$ — векторы (матрицы-столбцы) а $A \equiv (a_{ij})$. Если дано $Y_0 \equiv \{y_0, z_0, \dots\}$, то решением является

$$Y_k = A^k Y_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} F(h). \tag{20.4-31}$$

Этот метод применим, в частности, к решению линейного разностного уравнения (28) порядка r , если оно сначала приведено к системе вида (29) путем введения $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{k+r-1}$ в качестве новых переменных, так что

$$\left. \begin{aligned} Y_k &\equiv \{y_{k+r-1}, y_{k+r-2}, \dots, y_k\}, \\ F(k) &\equiv \left\{ \frac{1}{a_0} f(k), 0, 0, \dots, 0 \right\}, \\ A &\equiv \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & \dots & -\frac{a_{r-1}}{a_0} & -\frac{a_r}{a_0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{20.4-32}$$

Замечание. Степени матрицы A , нужные для решения (31), можно вычислить методом п.13.4-7, б.

(в) Решение с помощью преобразования Лапласа от ступенчатой функции. Для функции $u(t)$ действительного

переменного t ступенчатая функция $\int u(t)$ определяется так:

$$\int u(t) = u(k) \quad \text{при} \quad k \leq t < k+1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (20.4-33a)$$

т. е.

$$\int u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(j)[U_-(t-j) - U_-(t-j-1)], \quad (20.4-33b)$$

где $U_-(t)$ — асимметричная единичная функция (п.21.9-1). В частности, $\int t$ есть *целая часть* t (наибольшее целое число, не превосходящее t).

Разностное уравнение (28) определяет неизвестную функцию $y(x)$ только для целых значений $t = k$ переменной $t = \frac{x-x_0}{\Delta x}$. Если ввести ступенчатую функцию $\int u(t)$ такую, что $u(k) = y_k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то решение линейного разностного уравнения (28) приводится к решению функционального уравнения

$$a_0 \int u(t+r) + a_1 \int u(t+r-1) + \dots + a_r \int u(t) = \int f(t) \quad (20.4-34)$$

относительно неизвестной ступенчатой функции $\int u(t)$. Функция $\int u(t)$, в отличие от $y(x)$, определена для всех t , и для ее нахождения применимы методы преобразования Лапласа.

Применим преобразование Лапласа (п.8.2-1) к обеим частям уравнения (34) с помощью формулы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\int u(t+n)\} &= e^{ns} \mathcal{L}\{\int u(t)\} - \frac{e^s - 1}{s} [u(0)e^{(n-1)s} + u(1)e^{(n-2)s} + \dots + u(n-2)e^s + \\ &+ u(n-1)] \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (20.4-35)$$

(см. также табл. 8.3-1), где $u(0) = y_0, u(1) = y_1, \dots, u(r-1) = y_{r-1}$ — начальные значения y_k . Если все написанные преобразования Лапласа существуют, решим полученное уравнение относительно $\mathcal{L}\{\int u(t)\}$ и затем найдем $\int u(t)$ как обратное преобразование Лапласа (см. также п.9.4-5). Заметим, что $y_k = u(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В табл. 20.4-1 приведены пары преобразований Лапласа для некоторых ступенчатых функций; дополнительные формулы могут быть получены из

$$\mathcal{L}\{t^n a^t\} = \frac{e^s - 1}{se^s} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{1 - ae^{-s}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (20.4-36)$$

Преобразования для ступенчатой функции часто можно упростить путем разложения на простейшие дроби по способу п.8.4-5.

Аналогичные методы применяются для решения систем двух и более линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см. также п.9.4-5).

(д) Применение z -преобразования (см. п.8.6-5). В то время как преобразование Лапласа требует введения ступенчатой функции, можно непосредственно ввести преобразование от функций дискретного аргумента, опирающиеся на ряды, а не на интегралы, например z -преобразование¹⁾:

$$Z\{y_k; z\} = y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \dots \quad (20.4-37)$$

¹⁾ z -преобразование широко применяется при анализе систем управления по выборочным данным. z -преобразование связано с преобразованием Лапласа ступенчатой функции, введенной в п.20.4-5, с соотношением

$$Z\{u(k); z\} = u(0) + \frac{u(1)}{z} + \frac{u(2)}{z^2} + \dots = \frac{se^s}{e^s - 1} \mathcal{L}\{\int u(t)\}, \quad (20.4-38)$$

где $z = e^s$.

Таблица 20.4-1

**Краткая таблица преобразований Лапласа от ступенчатых функций
и z-преобразований**

	Последовательность выбранных значений $y_k = y(x_0 + k \Delta x) = u(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	Преобразование Лапласа ступенчатой функции $\mathcal{L}\{u(t)\} =$ $= \frac{e^s - 1}{se^s} \sum_{j=0}^{\infty} u(j)e^{-js}$	z-преобразование $Z[y_k; z] =$ $= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^j}$
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	k	$\frac{1}{s} \frac{1}{e^s - 1}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
3	k ²	$\frac{e^s + 1}{s(e^s - 1)^2}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\binom{k}{n} (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{s(e^s - 1)^{n+1}}$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$
5	a ^k	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{e^s - a}$	$\frac{z}{z-a}$
6	ka ^k	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{a}{(e^s - a)^2}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
7	$\binom{k}{n} a^{k-n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - a)^{n+1}}$	$\frac{z}{(z-a)^{n+1}}$
8	$\frac{a^k - b^k}{a-b} (a \neq b)$	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - a)(e^s - b)}$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$
9	a ^k sin bk	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{a \sin b}{e^{2s} - 2ae^s \cos b + a^2}$	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$
10	a ^k cos bk	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - a \cos b}{e^{2s} - 2ae^s \cos b + a^2}$	$\frac{z(z - a \cos b)}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$

Применим к обеим частям разностного уравнения (28) z-преобразование, учитывая, что

$$Z[\alpha u_k + \beta v_k; z] = \alpha Z[u_k; z] + \beta Z[v_k; z], \quad (20.4-39)$$

$$\left. \begin{aligned} Z[y_{k+1}; z] &= zZ[y_k; z] - y_0 z, \\ Z[y_{k+n}; z] &= z^n Z[y_k; z] - (y_0 z^n + y_1 z^{n-1} + \dots + y_{n-1} z) \end{aligned} \right\} (n = 2, 3, \dots). \quad (20.4-40)$$

Решим полученное уравнение относительно z-преобразования $Z[y_k; z]$, считая известными начальные значения y_0, y_1, y_2, \dots . Тогда неизвестные y_k могут быть найдены либо как коэффициенты при $1/z^k$ в разложении $Z[y_k; z]$, либо с помощью таблицы z-преобразования (табл. 20.4-1). Так же как и в случае преобразования Лапласа, часто бывает полезным разложение $Z[y_k; z]$ на простейшие дроби.

20.5. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДРУГИЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ

20.5-1. Вводные замечания.

(а) **Интерполяционная формула** сопоставляет функции $y(x)$ функцию известного класса $Y(x) \equiv Y(x; \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, зависящую от $n+1$ параметров α_j , выбранных так, чтобы значения $Y(x)$ совпадали со значениями $y(x)$ для данного множества $n+1$ значений аргумента (узлов интерполяции):

$$Y(x_k) = y(x_k) = y_k.$$

Приближение по методу наименьших квадратов сопоставляет действительной функции $y(x)$ функцию вида

$$Y(x) \equiv \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x),$$

где $\varphi_j(x)$ — известные функции, а $n+1$ коэффициентов α_j выбираются так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку

$$F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k [Y(x_k) - y(x_k)]^2$$

для заданного множества m ($m > n+1$) значений аргумента $x = x_k$. Искомые $n+1$ значений параметров α_j находят из системы $n+1$ линейных уравнений («нормальных» уравнений):

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

«Дискретный» метод наименьших квадратов представляет собой частный случай методов аппроксимации, в которых неизвестные параметры аппроксимирующей функции $Y(x)$ находят из условия минимизации какой-либо меры ошибки, например

$$\max_{a \leq x \leq b} |Y(x) - y(x)|, \\ \int_a^b |Y(x) - y(x)| dG(x) \quad \text{или} \quad \int_a^b |Y(x) - y(x)|^2 dG(x).$$

В частности, для целей аппроксимации весьма полезны описанные в п.15.2-5 ортогональные разложения, если их коэффициенты легко вычислить аналитически или методами численного интегрирования.

(б) Применение интерполяции (и, в частности, интерполяционных многочленов) не всегда оправдано. В случае эмпирических функций может оказаться желательным *сглаживание колебаний* $y(x_k)$, вызванных случайными ошибками, например *посредством аппроксимации по методу наименьших квадратов*.

20.5-2. Общие формулы параболической интерполяции (значения аргумента могут быть и неравноотстоящими). Интерполяционная формула n -го порядка аппроксимирует функцию $y(x)$ многочленом n -й степени $Y(x)$, удовлетворяющим условиям $Y(x_k) = y(x_k) = y_k$ в $n+1$ узлах интерполяции — точках x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

(а) **Интерполяционная формула Лагранжа**

$$Y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (20.5-1)$$

(b) Разделенные разности и интерполяционная формула Ньютона. **Разделенные разности** определяются так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(x_0, x_1) &\equiv \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \\ \Delta_r(x_0, x_1, x_2, \dots, x_r) &\equiv \frac{\Delta_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_r) - \Delta_{r-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})}{x_r - x_0} \end{aligned} \right\} (20.5-2)$$

$(r = 2, 3, \dots).$

Интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$Y(x) = y_0 + (x - x_0) \Delta_1(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \Delta_2(x_0, x_1, x_2) + \dots + \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \Delta_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (20.5-3)$$

В отличие от формулы (1), прибавление новой пары значений (x_{n+1}, y_{n+1}) сводится здесь просто к прибавлению одного нового члена. Разделенные разности (2) для формулы (3) удобно записывать в таблицу того же типа, что (20.4-5).

Нахождение разделенных разностей есть линейная операция (п.15.2-7) над $y(x)$. Каждая функция (2) вполне симметрична по всем своим аргументам.

(c) Итерационно-интерполяционный метод Эйткена. Если требуется найти лишь значения интерполяционного многочлена $Y(x)$, а не его представление, то может быть применена следующая схема. Пусть $Y_{jk} \dots$ — интерполяционный многочлен, определяемый парами (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , $(x_k, y_k), \dots$, так что

$$Y_{012 \dots n} = Y(x).$$

Интерполяционные многочлены возрастающих степеней могут быть получены последовательно так:

$$\begin{aligned} Y_{01} &= \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}, & Y_{12} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} x - x_1 & y_1 \\ x - x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \dots \\ Y_{012} &= \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & Y_{01} \\ x - x_2 & Y_{12} \end{vmatrix}, \dots & Y_{0123} &= \frac{1}{x_3 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & Y_{012} \\ x - x_3 & Y_{123} \end{vmatrix}, \dots \end{aligned}$$

.....

Этот процесс можно закончить, когда в значениях двух интерполяционных многочленов последовательных степеней совпадет требуемое количество знаков.

(d) Остаточные члены. Если $y(x)$ достаточное число раз дифференцируема, то для интерполяционной формулы, базирующейся на $n+1$ значениях функции $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ **остаточный член** (ошибка) может быть записан в виде

$$R_{n+1}(x) \equiv y(x) - Y(x) = \frac{1}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) \prod_{k=0}^n (x - x_k), \quad (20.5-4)$$

где ξ лежит в наименьшем интервале I , содержащем все точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и x (см. также п.4.10-4; вообще говоря, ξ зависит от x). Отсюда следует оценка

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in I} |y^{(n+1)}(X)| \prod_{k=0}^n |x - x_k|. \quad (20.5-5)$$

20.5-3. Интерполяционные формулы для равноотстоящих значений аргумента. Ромбовидные диаграммы. Пусть $y_k = y(x_k)$, $x_k = x_0 + k\Delta x$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где Δx — фиксированное приращение, как в п.20.4-1; введем сокращенное обозначение

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = u.$$

(а) Интерполяционные формулы Ньютона. Если даны y_0, y_1, y_2, \dots или $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots$, то из формулы (3) получаем соответственно

$$\left. \begin{aligned} Y(x) &= y_0 + \binom{u}{1} \Delta y_0 + \binom{u}{2} \Delta^2 y_0 + \dots, \\ Y(x) &= y_0 + \frac{u}{1!} \nabla y_0 + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 y_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20.5-6)$$

Первая формула применяется для интерполирования «вперед», а вторая — «назад».

(б) Интерполяционные формулы с центральными разностями. Табл. 20.5-1 дает наиболее употребительные интерполяционные формулы для того случая, когда заданы значения y_0, y_1, y_2, \dots и y_{-1}, y_{-2}, \dots (см. также рис. 20.5-1). Заметим, что формулы Эверетта и Стеффенсена удобны при работе с печатными таблицами, так как для них надо составлять таблицы разностей только четного или только нечетного порядков.

(в) Применение ромбовидной диаграммы. Многие интерполяционные формулы можно получить с помощью ромбовидной диаграммы (диаграммы Фрезера), приведенной на рис. 20.5-1. Некоторые более сложные интерполяционные формулы (например, формулу Эверетта) можно получить, усредняя несколько эквивалентных интерполяционных многочленов.

20.5-4. Обратная интерполяция.

(а) По данным значениям

$$x_k = x_0 + k\Delta x, \quad y_k = y(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

требуется найти заключенное между x_0 и x_1 значение ξ аргумента x , соответствующее данному значению η функции $y(x)$; Δx предполагается настолько малым, чтобы ξ было единственным. Можно применить общую формулу (1) или (3), меняя ролями x и y . Вместо этого можно применить одну из итерационных схем п.20.2-2 для решения уравнения

$$Y(\xi) - \eta = 0,$$

где $Y(x)$ — подходящий интерполяционный многочлен, аппроксимирующий $y(x)$; для первого шага итерации применяют линейную интерполяцию, для второго шага — квадратичную и. т.д.

(б) Обратная интерполяция с помощью обращения рядов. Применяя любую подходящую интерполяционную формулу в виде степенного ряда

$$Y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \approx y,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} x &\approx \frac{y - a_0}{a_1} + C_2 \left(\frac{y - a_0}{a_1} \right)^2 + \dots, \\ C_2 &= -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad C_3 = -\frac{a_3}{a_1^3} + 2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \\ C_4 &= -\frac{a_4}{a_1^4} + 5 \frac{a_2 a_3}{a_1^3} - 5 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3, \\ C_5 &= -\frac{a_5}{a_1^5} + 6 \frac{a_2 a_4}{a_1^4} + 3 \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2 - 21 \frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} + 14 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^4, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (20.5-7)$$

где

Таблица 20.5-1

Интерполяционные формулы с центральными разностями.

Дано нечетное число $n+1 = 2m+1$ значений функции $y_k = y(x_0 + k\Delta x)$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$), где Δx — фиксированное приращение; $u = \frac{x-x_0}{\Delta x}$

№	Название формулы	Интерполяционный многочлен $Y(x)$	Остаточный член ¹⁾ $R_{m+1}(x) \equiv R_{2m+1}(x)$
1	Стирлинга ²⁾	$y_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{u+k}{2k+1} \frac{\delta^{2k+1}y_{-1/2} + \delta^{2k+1}y_{1/2}}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{u}{2k} \binom{u+k-1}{2k-1} \delta^{2k}y_0$	$\binom{u+m}{2m+1} y^{(2m+1)}(\xi) \Delta x^{2m+1}$
2	Бесселя ³⁾	$\frac{y_0 + y_1}{2} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u-\frac{1}{2}}{2k+1} \binom{u+k-1}{2k} \delta^{2k+1}y_{1/2} + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{u+k-1}{2k} \frac{\delta^{2k}y_0 + \delta^{2k}y_1}{2}$	$\binom{u+m-1}{2m} y^{(2m)}(\xi) \Delta x^{2m}$
3	Эверетта ²⁾	$(1-u)y_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \binom{u+k}{2k+1} \delta^{2k}y_1 - \binom{u+k-1}{2k+1} \delta^{2k}y_0 \right\}$	$\binom{u+m-1}{2m} y^{(2m)}(\xi) \Delta x^{2m}$
4	Стеффенсена	$y_0 + \sum_{k=1}^m \left\{ \binom{u+k}{2k} \delta^{2k-1}y_{1/2} - \binom{k-u}{2k} \delta^{2k-1}y_{-1/2} \right\}$	$\binom{u+m}{2m+1} y^{(2m+1)}(\xi) \Delta x^{2m+1}$

1) ξ лежит в наименьшем интервале, содержащем x и все применяемые узлы интерполяции.

2) Заметим, что $\binom{u+k}{2k+1} = \frac{u(u^2-1)(u^2-2^2)\dots(u^2-k^2)}{(2k+1)!}$.

3) Модифицированная формула Бесселя дает простейший многочлен, учитывающий влияние разностей до 6-го порядка:

$$Y(x) = y_0 + u\delta y_{1/2} + \frac{u(u-1)}{2} \delta^2 y_0 + \delta^2 y_1 + \frac{u}{6} \left(\delta^3 y_{1/2} - \frac{13}{120} \delta^5 y_{1/2} \right) + \frac{u(u-1)}{24} \left(\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1 \right) + \frac{191}{924} \frac{\delta^6 y_0 + \delta^6 y_1}{2}$$

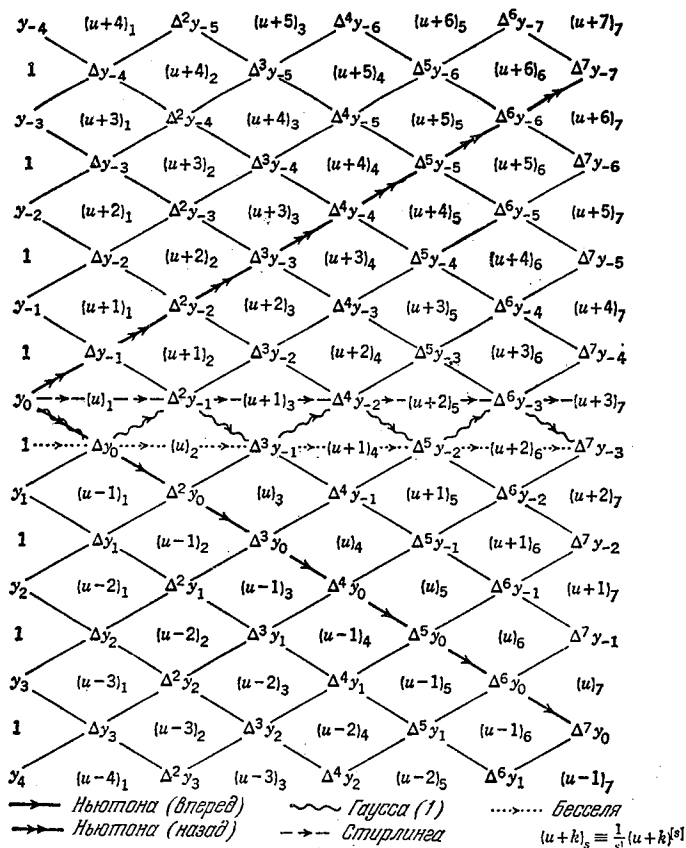


Рис. 20.5-1. Ромбовидная диаграмма для интерполяционных формул. Сокращенное обозначение $(u+k)_s = \frac{1}{s!} (u+k)^{[s]} = \binom{u+k}{s}$.

Для получения интерполяционной формулы вдоль некоторого пути диаграммы применяются следующие правила:

1. Когда столбец разностей пересекается слева направо, добавляется один член.
2. Если путь входит (слева) в некоторый столбец разностей с положительным наклоном, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, скажем $\Delta^k y_{-p}$, на коэффициент $(u+p-1)_k$, лежащий точно под этой разностью.
3. Если путь входит (слева) в некоторый столбец разностей с отрицательным наклоном, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, скажем $\Delta^k y_{-p}$, на коэффициент $(u+p)_k$, лежащий точно над этой разностью.
4. Если путь входит (слева) в некоторый столбец разностей горизонтально, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, скажем $\Delta^k y_{-p}$, на среднее арифметическое двух коэффициентов $(u+p)_k$ и $(u+p-1)_k$, лежащих соответственно точно над и под этой разностью.
5. Если путь пересекает (слева направо) столбец разностей между двумя разностями, скажем $\Delta^k y_{-(p+1)}$ и $\Delta^k y_{-p}$, то добавочный член равен произведению среднего арифметического из этих двух разностей на коэффициент $(u+p)_k$, стоящий на пересечении пути и столбца.
6. Каждая часть пути, проходимая справа налево, вызывает те же самые члены, что и при прохождении слева направо, но с противоположным знаком.
7. Со столбцом табличных значений функции можно обращаться, как со столбцом разностей нулевого порядка, по тем же правилам, что и с остальными столбцами разностей, если только ромб входит точно в этот столбец (левым концом). Таким образом, этот столбец может пересекаться путем, образующим положительный, отрицательный или нулевой наклон, как и с остальными столбцами.

Таблица 20.5-2

Коэффициенты интерполяционных формул

Интерполяционная формула Лагранжа по пяти точкам

$$f_s \approx L_{-2}(s) f_{-2} + L_{-1}(s) f_{-1} + L_0(s) f_0 + L_1(s) f_1 + L_2(s) f_2.$$

Для отрицательных s обозначения столбцов указаны внизу

s	$L_{-2}(s)$	$L_{-1}(s)$	$L_0(s)$	$L_1(s)$	$L_2(s)$	
0,0	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,0
0,1	0,007838	-0,059850	0,987525	0,073150	-0,008663	-0,1
0,2	0,014400	-0,105600	0,950400	0,158400	-0,017600	-0,2
0,3	0,019338	-0,136850	0,889525	0,254150	-0,026163	-0,3
0,4	0,022400	-0,153600	0,806400	0,358400	-0,033600	-0,4
0,5	0,023438	-0,156250	0,703125	0,468750	-0,039063	-0,5
0,6	0,022400	-0,145600	0,582400	0,582400	-0,041600	-0,6
0,7	0,019338	-0,122850	0,447525	0,696150	-0,040163	-0,7
0,8	0,014400	-0,089600	0,302400	0,806400	-0,033600	-0,8
0,9	0,007838	-0,047850	0,151525	0,909150	-0,020663	-0,9
1,0	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	-1,0
1,1	-0,008663	0,051150	-0,146475	1,074150	0,029838	-1,1
1,2	-0,017600	0,102400	-0,281600	1,126400	0,070400	-1,2
1,3	-0,026163	0,150150	-0,398475	1,151150	0,123338	-1,3
1,4	-0,033600	0,190400	-0,489600	1,142400	0,190400	-1,4
1,5	-0,039063	0,218750	-0,546875	1,093750	0,273438	-1,5
1,6	-0,041600	0,230400	-0,561600	0,998400	0,374400	-1,6
1,7	-0,040163	0,220150	-0,524475	0,849150	0,495338	-1,7
1,8	-0,033600	0,182400	-0,425600	0,638400	0,638400	-1,8
1,9	-0,020663	0,111150	-0,254475	0,358150	0,805838	-1,9
2,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	-2,0
	$L_2(s)$	$L_1(s)$	$L_0(s)$	$L_{-1}(s)$	$L_{-2}(s)$	s

Примечание. Все коэффициенты становятся точными, если заменить каждую конечную цифру 8 на 75, а 3 на 25.

Интерполяционная формула Стирлинга

$$f_s \approx f_0 + s\mu\delta f_0 + C_2(s)\delta^2 f_0 + C_3(s)\mu\delta^3 f_0 + C_4(s)\delta^4 f_0$$

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	s
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,0
0,1	0,00500	-0,01650 *)	-0,00041	-0,1
0,2	0,02000	-0,03200 *)	-0,00160	-0,2
0,3	0,04500	-0,04550 *)	-0,00341	-0,3
0,4	0,08000	-0,05600 *)	-0,00660	-0,4
0,5	0,12500	-0,06250 *)	-0,00781	-0,5
0,6	0,18000	-0,06400 *)	-0,00960	-0,6
0,7	0,24500	-0,05950 *)	-0,01041	-0,7
0,8	0,32000	-0,04800 *)	-0,00960	-0,8
0,9	0,40500	-0,02850 *)	-0,00641	-0,9
1,0	0,50000	0,00000	0,00000	-1,0

*) Для s из правого столбца надо изменить знак.

Интерполяционная формула Ньютона

$$f_s \approx f_0 + s \Delta f_0 + C_2(s) \Delta^2 f_0 + C_3(s) \Delta^3 f_0 + C_4(s) \Delta^4 f_0 + C_5(s) \Delta^5 f_0,$$

$$f_{n-s} \approx f_n - s \nabla f_n + C_2(s) \nabla^2 f_n - C_3(s) \nabla^3 f_n + C_4(s) \nabla^4 f_n - C_5(s) \nabla^5 f_n,$$

(для интерполяции надо брать положительные s)

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	$C_5(s)$
-1,0	1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
-0,9	0,85500	-0,82650	0,80584	-0,78972
-0,8	0,72000	-0,67200	0,63840	-0,61286
-0,7	0,59500	-0,53550	0,49534	-0,46562
-0,6	0,48000	-0,41600	0,37440	-0,34445
-0,5	0,37500	-0,31250	0,27344	-0,24609
-0,4	0,28000	-0,22400	0,19040	-0,16755
-0,3	0,19500	-0,14950	0,12334	-0,10607
-0,2	0,12000	-0,08800	0,07040	-0,05914
-0,1	0,05500	-0,03850	0,02984	-0,02447
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	-0,04500	0,02850	-0,02066	0,01612
0,2	-0,08000	0,04800	-0,03360	0,02554
0,3	-0,10500	0,05950	-0,04016	0,02972
0,4	-0,12000	0,06400	-0,04160	0,02995
0,5	-0,12500	0,06250	-0,03906	0,02734
0,6	-0,12000	0,05600	-0,03360	0,02285
0,7	-0,10500	0,04550	-0,02616	0,01727
0,8	-0,08000	0,03200	-0,01760	0,01126
0,9	-0,04500	0,01650	-0,00866	0,00537
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Интерполяционная формула Бесселя

$$f_s \approx \mu f_{1/2} + \left(s - \frac{1}{2}\right) \delta f_{1/2} + C_2(s) \mu \delta^2 f_{1/2} + C_3(s) \delta^3 f_{1/2} + C_4(s) \mu \delta^4 f_{1/2} + C_5(s) \delta^5 f_{1/2}$$

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	$C_5(s)$	s
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,0
0,1	-0,04500	0,00600 *)	0,00784	-0,00063 *)	0,9
0,2	-0,08000	0,00800 *)	0,01440	-0,00086 *)	0,8
0,3	-0,10500	0,00700 *)	0,01934	-0,00077 *)	0,7
0,4	-0,12000	0,00400 *)	0,02240	-0,00045 *)	0,6
0,5	-0,12500	0,00000	0,02344	0,00000	0,5

*) Для s из правого столбца надо изменить знак.

Интерполяционная формула Эверетта

$$f_s \approx (1-s)f_0 + C_2(s)\delta^2 f_0 + C_4(s)\delta^4 f_0 + sf_1 + C_2(1-s)\delta^2 f_1 + C_4(1-s)\delta^4 f_1$$

s	C ₂ (s)	C ₄ (s)	s	C ₂ (s)	C ₄ (s)
0,0	0,00000	0,00000	0,6	-0,05600	0,01075
0,1	-0,02850	0,00455	0,7	-0,04550	0,00890
0,2	-0,04800	0,00806	0,8	-0,03200	0,00634
0,3	-0,05950	0,01044	0,9	-0,01650	0,00329
0,4	-0,06400	0,01165	1,0	0,00000	0,00000
0,5	-0,06250	0,01172			

Интерполяционная формула Стеффенсена

$$f_s \approx f_0 + C_1(s)\delta f_{1/2} + C_3(s)\delta^3 f_{1/2} - C_1(-s)\delta f_{-1/2} - C_3(-s)\delta^3 f_{-1/2}$$

s	C ₁ (s)	C ₃ (s)	s	C ₁ (s)	C ₃ (s)
-0,5	-0,12500	0,02344	0,1	0,05500	-0,00866
-0,4	-0,12000	0,02240	0,2	0,12000	-0,01760
-0,3	-0,10500	0,01934	0,3	0,19500	-0,02616
-0,2	-0,08000	0,01440	0,4	0,28000	-0,03360
-0,1	-0,04500	0,00784	0,5	0,37500	-0,03906
0,0	0,00000	0,00000			

20.5-5. Интерполяция с оптимальным выбором узлов (см. также п.20.6-3). Многочлен $Y(x)$ степени n , который совпадает с $y(x)$ в $n+1$ точках $x = x_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) на $[a, b]$, таких что $\max_{a < x < b} \prod_{k=0}^n (x-x_k)$ будет иметь наименьшее значение, приближенно минимизирует максимум абсолютной величины погрешности интерполяции (4) на $[a, b]$. Такой многочлен $Y(x)$ дается формулой

$$Y(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^n A_k T_k \left(\frac{2x-b-a}{b-a} \right), \tag{20.5-8a}$$

где

$$A_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n y(x_j) \cos \frac{(2j+1)k\pi}{2n+2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$T_k(\xi)$ — многочлен Чебышева степени k (п.21.7-4),

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi}{2n+2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{20.5-8b}$$

20.5-6. Интерполирование функций нескольких переменных. Для аппроксимации функции $z = z(x, y)$ многочленом $Z(x, y)$, удовлетворяющим условию $Z(x, y) = z(x, y)$ на заданном множестве точек (x_i, y_k) , можно сначала интерполировать по x функцию $z(x, y_k)$ при фиксированных y_k , а затем интерполировать относительно x , что даст $Z(x, y)$.

Другой путь заключается в подстановке в интерполяционную формулу по y интерполяционной формулы относительно x . Если $\Delta x = \Delta y = h$ — фиксированное приращение и

$$\left. \begin{aligned} z(x_0 + j\Delta x, y_0 + k\Delta y) &= z_{jk} \quad (j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ u &= \frac{x-x_0}{\Delta x}, \quad v = \frac{y-y_0}{\Delta y}, \end{aligned} \right\} \tag{20.5-9}$$

то, дважды применяя интерполяционную формулу Бесселя из табл. 20.5-1, получаем формулу Бесселя интерполяции по двум переменным:

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= \frac{1}{4} (z_{00} + z_{10} + z_{01} + z_{11}) + \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{2} \right) (z_{10} - z_{00} + z_{11} - z_{01}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(v - \frac{1}{2} \right) (z_{01} - z_{00} + z_{11} - z_{10}) + \left(u - \frac{1}{2} \right) \left(v - \frac{1}{2} \right) (z_{11} - z_{10} - z_{01} + z_{00}). \end{aligned} \tag{20.5-1}$$

Аналогичные методы применяются для функций трех и более переменных. См. также [20.1].

20.5-7. Обратные разности и интерполирование рациональными дробями. Пусть $y(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где x_0, x_1, x_2, \dots — произвольные узлы интерполяции; определим обратные разности:

$$\left. \begin{aligned} e_1(x_0, x_1) &= \frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1}, & e_2(x_0, x_1, x_2) &= \frac{x_0 - x_2}{e_1(x_0, x_1) - e_1(x_1, x_2)} + y_1, \\ e_r(x_0, x_1, x_2, \dots, x_r) &= \frac{x_0 - x_r}{e_{r-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) - e_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_r)} + \\ &+ e_{r-2}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \quad (r = 3, 4, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (20.5-11)$$

Функция $y(x)$ аппроксимируется рациональной функцией, которая получается из разложения в непрерывную дробь

$$Y(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{e_1(x, x_1)}, \quad (20.5-12a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_1(x, x_1) &= e_1(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{e_2(x, x_1, x_2) - y_1}, \\ e_2(x, x_1, x_2) &= e_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{x - x_3}{e_3(x, x_1, x_2, x_3) - e_1(x_1, x_2)}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (20.5-12b)$$

Если $y(x)$ — рациональная функция, то непрерывная дробь обрывается.

20.5-8. Численный гармонический анализ и тригонометрическое интерполирование (см. также пп. 4.11-4, б и 20.5-1).

(а) Даны m значений функции $y(x_k) = y_k$ при $x_k = k \frac{T}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$); требуется аппроксимировать $y(x)$ на интервале $(0, T)$ тригонометрическим полиномом

$$Y(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{j=1}^n \left(A_j \cos j \frac{2\pi x}{T} + B_j \sin j \frac{2\pi x}{T} \right) \quad \left(n < \frac{m}{2} \right) \quad (20.5-13a)$$

так, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений $\sum_{k=0}^{m-1} [Y(x_k) - y_k]^2$.

Искомые коэффициенты A_j, B_j определяются по формулам

$$A_j = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos j \frac{2\pi k}{m}, \quad B_j = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin j \frac{2\pi k}{m} \quad \left(0 \leq j < \frac{m}{2} \right). \quad (20.5-13b)$$

В частном случае $n = \frac{m}{2}$ формулы (13) вместе с

$$A_n = A_{m/2} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k y_k \quad (20.5-14)$$

дают $Y(x_k) = y(x_k)$ (тригонометрическая интерполяция) при произвольном B_n .

Аналогичные формулы для неравноотстоящих x_k см. в [20.11]. Численные методы для многомерного анализа и синтеза см. в [20.11].

(b) Схема на 12 ординат. Вычисление сумм (13b) упрощается, если m делится на 4. Удобная расчетная схема при $m = 12$ приведена в табл. 20.5-3.

Отметим более простые формулы для случая, когда нужны гармоники не выше третьего порядка:

$$\left. \begin{aligned} 6A_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{11}, & 6A_3 &= y_0 - y_2 + y_4 - y_6 + y_8 - y_{10}, \\ 4A_2 &= y_0 - y_3 + y_6 - y_9, & 6B_3 &= y_1 - y_3 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11}, \\ A_1 &= \frac{1}{2}(y_0 - y_6) + A_3, & B_1 &= \frac{1}{2}(y_3 - y_9) + B_3, \end{aligned} \right\} \quad (20.5-15)$$

$$4B_2 = y\left(\frac{T}{8}\right) - y\left(\frac{3T}{8}\right) + y\left(\frac{5T}{8}\right) - y\left(\frac{7T}{8}\right). \quad (20.5-16)$$

Четыре добавочных значения функции для формулы (16) часто можно снять непосредственно с графика функции $y(x)$.

(c) Отыскание неизвестных периодических компонент. Если для функции вида

$$f(u) = A_1 \cos \omega_1 u + B_1 \sin \omega_1 u + A_2 \cos \omega_2 u + B_2 \sin \omega_2 u + \dots + B_m \sin \omega_m u$$

известны из опыта N ($N \geq 3m + 1$) значений $f_0 = f(0), f_1 = f(1), f_2 = f(2), \dots, f_{N-1} = f(N-1)$, то $\cos \omega_1, \cos \omega_2, \dots, \cos \omega_m$ определяются как корни (алгебраического) уравнения

$$\cos m\omega - \alpha_1 \cos(m-1)\omega - \dots - \alpha_{m-1} \cos \omega - \frac{1}{2} \alpha_m = 0,$$

коэффициенты которого α_k должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$e_i \equiv \sum_{k=1}^{m-1} (f_{i+k-1} + f_{2m+i-k-1})\alpha_k + f_{m+i-1}\alpha_m - f_{i-1} - f_{2m+i-1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, N-2m).$$

Для нахождения m коэффициентов α_k по методу наименьших квадратов надо решить систему m линейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \sum_{i=1}^{N-2m} e_i^2 = 0.$$

После того как ω_k найдены, относительно легко найти A_k и B_k методом, указанным в п.20.5-8, а.

20.6. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

20.6-1. Численное дифференцирование. Численное дифференцирование чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных, отбрасыванием членов ряда и т. д., и поэтому должно применяться с осторожностью.

(a) Применение таблицы разностей для равноотстоящих значений аргумента (см. также п.20.4-1). Для дифференцируемой достаточное число раз функции $y(x)$

$$\frac{d^r}{dx^r} = D^r = \left[\frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta) \right]^r = \frac{1}{(\Delta x)^r} \left(\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \dots \right)^r, \quad (20.6-1)$$

так что если $x_k = x_0 + k\Delta x$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то

$$\left. \begin{aligned} y'_k &= y'(x_k) = Dy_k = \frac{1}{\Delta x} \left(\Delta y_k - \frac{1}{2} \Delta^2 y_k + \frac{1}{3} \Delta^3 y_k - \dots \right), \\ y''_k &= y''(x_k) = D^2 y_k = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(\Delta^2 y_k - \Delta^3 y_k + \frac{11}{12} \Delta^4 y_k - \frac{5}{6} \Delta^5 y_k + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.6-2)$$

Схема гармонического анализа на 12 ординат

$$y_k = y \left(\frac{hT}{12} \right)$$

Строка	Действие и результат	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	Данные значения функции	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
2		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	Сумма 1 и 2	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
4	Разность 1 и 2	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}
5	Перестановка	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
6		s_6	s_5	s_4	—	d_5	d_4	—	d_3	d_2	d_1	d_0	—
7	Сумма 5 и 6	s'_0	s'_1	s'_2	s'_3	s'_4	s'_5	s'_6	s'_7	s'_8	s'_9	s'_{10}	s'_{11}
8	Разность 5 и 6	d'_0	d'_1	d'_2	—	d'_4	d'_5	—	d'_6	d'_7	d'_8	d'_9	d'_{10}
9	Перестановка и умножение на коэффициент $\frac{\sqrt{3}}{2}$	s''_0	s''_1	s''_2	s''_3	s''_4	s''_5	s''_6	s''_7	s''_8	s''_9	s''_{10}	s''_{11}
10		s''_6	s''_5	s''_4	—	s''_5	s''_4	—	s''_3	s''_2	s''_1	s''_0	—
11		—	—	$\frac{1}{2} d'_2$	—	—	$\frac{1}{2} s'_2$	$\frac{1}{2} s'_4$	—	—	—	—	—
12		—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2} d'_1$	—	—	—	—	—	—	—	—
13	Сумма (с 9 по 12)	S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3	S_4	T_4	S_5	T_5	S_6	T_6
14	$S_1 + T_1$	$6A_0$	—	$6A_1$	—	—	$6A_2$	—	—	$6B_1$	—	$6B_2$	—
15	$S_1 - T_1$	$12A_6$	—	$6A_5$	—	$6A_4$	$6A_3$	—	$6A_2$	$6B_5$	—	$6B_4$	$6B_3$

Дифференцирование интерполяционных формул Стирлинга и Бесселя дает соответственно

$$\left. \begin{aligned} y'_k &= \frac{\mu}{\Delta x} \left(\delta y_k - \frac{1}{6} \delta^3 y_k + \frac{1}{30} \delta^5 y_k - \dots \right), \\ y''_k &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(\delta^2 y_k - \frac{1}{12} \delta^4 y_k + \frac{1}{90} \delta^6 y_k - \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (20.6-3)$$

$$\left. \begin{aligned} y'_k &= \frac{1}{\Delta x} \left(\delta y_k - \frac{1}{24} \delta^3 y_k + \dots \right), \\ y''_k &= \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \left(\delta^2 y_k - \frac{5}{24} \delta^4 y_k + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.6-4)$$

Многие подобные формулы, а также и формулы для аппроксимации производных высших порядков, могут быть выведены путем дифференцирования подходящих интерполяционных формул (см. также рис. 20.8-1).

Приведем еще явные трехточечные формулы дифференцирования с оценками погрешностей:

$$\begin{aligned} y'_- &= \frac{1}{2 \Delta x} (-3y_{-1} + 4y_0 - y_1) + \frac{\Delta x^2}{3} y'''(\xi), \\ y'_0 &= \frac{1}{2 \Delta x} (-y_{-1} + y_1) - \frac{\Delta x^2}{6} y'''(\xi), \\ y'_1 &= \frac{1}{2 \Delta x} (y_{-1} - 4y_0 + 3y_1) + \frac{\Delta x^2}{3} y'''(\xi), \end{aligned}$$

где $x_{-1} < \xi < x_1$.

(b) Применение разделенных разностей (см. также п.20.5-2,б). Дифференцирование интерполяционной формулы Ньютона (20.5-3) для произвольных узлов интерполяции x_0, x_1, x_2, \dots дает

$$y^{(r)}(x) \approx F_r^{(r)}(x) \Delta_r(x_0, x_1, \dots, x_r) + F_{r+1}^{(r)}(x) \Delta_{r+1}(x_0, x_1, \dots, x_{r+1}) + \dots \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (20.6-5)$$

где

$$F_j(x) \equiv \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

(c) Численное дифференцирование после сглаживания. Следующие формулы получаются путем дифференцирования многочленов наилучшего среднеквадратического приближения, и поэтому на них меньше сказываются случайные ошибки опытных данных:

$$\begin{aligned} y'_k &\approx \frac{1}{12 \Delta x} (3y_{k+1} + 10y_k - 18y_{k-1} + 6y_{k-2} - y_{k-3}), \\ y'_k &\approx \frac{1}{12 \Delta x} [(y_{k-2} - y_{k+2}) - 8(y_{k-1} - y_{k+1})], \\ y'_k &\approx \frac{1}{12 \Delta x} (y_{k+3} - 6y_{k+2} + 18y_{k+1} - 10y_k - 3y_{k-1}). \end{aligned}$$

20.6-2. Численное интегрирование для равноотстоящих узлов.

(a) Квадратурные формулы Ньютона — Котеса. Квадратурные формулы Ньютона — Котеса замкнутого типа (табл. 20.6-1) основаны на аппроксимации

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0 + n \Delta x} y(x) dx &\approx a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n, \\ a_k &= \frac{(-1)^{n-k} \Delta x}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n)}{(\lambda-k)} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (20.6-6)$$

где

Квадратурные формулы Ньютона – Котеса, замкнутый тип

№		$I' \approx \int_{x_0}^{x_0+n\Delta x} y(x)dx = I$	Погрешность $I-I'$ ($x_0 < \xi < x_0 + n \Delta x$)
1	Правило трапеций ($n=1$)	$\frac{\Delta x}{2} (y_0 + y_1)$	$-\frac{1}{12} \Delta x^3 y''(\xi)$
2	Правило Симпсона ($n=2$)	$\frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$	$-\frac{1}{90} \Delta x^5 y^{(4)}(\xi)$
3	Правило Уэддл ($n=6$)*)	$\frac{3}{10} \Delta x (y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6)$	$-\frac{\Delta x^7}{1400} [10y^{(6)}(\xi) + 9 \Delta x^2 y^{(8)}(\xi')]$

*) При выводе правила Уэддл точный коэффициент $41/140$ при $\Delta^6 y_0$ заменен на $3/10$

$y_k = y(x_k)$ – данные значения функции для $n+1$ равноотстоящих значений аргумента $x_k = x_0 + k\Delta x$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$). Формулы являются точными, если $y(x)$ – многочлен степени не выше, чем n . Вместо того чтобы применять значения $n > 6$, складывают m сумм вида (6) при $n \leq 6$ для последовательных подынтервалов:

$$\int_{x_0}^{x_0+m\Delta x} y(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} y(x)dx + \int_{x_0+\Delta x}^{x_0+2\Delta x} y(x)dx + \dots + \int_{x_0+(m-1)\Delta x}^{x_0+m\Delta x} y(x)dx. \tag{20.6-7}$$

(б) Применение формулы Эйлера – Маклорена. Формула суммирования Эйлера – Маклорена (4.8-10) дает ряд квадратурных формул, содержащих, кроме значений $y(x)$, также и значения ее производных $y'_k = y'(x_k)$, $y''_k = y''(x_k)$, ... Получающиеся квадратурные формулы

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} y(x) dx = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + y_1) - \frac{\Delta x^2}{12} (y'_1 - y'_0) + \frac{\Delta x^4}{720} (y'''_1 - y'''_0) - \dots \tag{20.6-8}$$

дают поправочные члены к правилу трапеций (табл. 20.6-1).

20.6-3. Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева.

(а) Интеграл $\int_a^b y(x) dx$ с помощью замены переменных

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{a+b}{2}, \quad \eta(\xi) = \frac{b-a}{2} y(x) \tag{20.6-9}$$

приводится сначала к виду $\int_{-1}^1 \eta(\xi) d\xi$. Квадратурная формула Гаусса:

$$\int_{-1}^1 \eta(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n a_k \eta(\xi_k), \quad a_k = \frac{2}{(1-\xi_k^2)[P'_n(\xi_k)]^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{20.6-10}$$

где n значений аргумента ξ_k являются корнями многочлена Лежандра $P_n(\xi)$ (п.21.7-1). Абсциссы ξ_k и веса a_k для некоторых значений n приведены в табл. 20.6-2.

Таблица 20.6-2

Абсциссы и веса для квадратурных формул.

(а) Абсциссы ξ_k и веса a_k для квадратурной формулы Гаусса (10)

n	Абсциссы	Веса	n	Абсциссы	Веса
2	$\pm 0,577350$	1	4	$\pm 0,339981$ $\pm 0,861136$	0,652145 0,347855
3	0	$\frac{8}{9}$	5	0 $\pm 0,538469$ $\pm 0,906180$	0,568889 0,478629 0,236927
	$\pm 0,774597$	$\frac{5}{9}$			

(б) Абсциссы ξ_k для квадратурной формулы Чебышева (11)

n	Абсциссы	n	Абсциссы
2	$\pm 0,577350$	7	0 $\pm 0,323912$ $\pm 0,529657$ $\pm 0,883862$
3	0	9	0 $\pm 0,167906$ $\pm 0,528762$ $\pm 0,601019$ $\pm 0,911589$
4	$\pm 0,707107$ $\pm 0,187592$		
5	$\pm 0,794654$ 0 $\pm 0,374541$ $\pm 0,832497$		
6	$\pm 0,266635$ $\pm 0,422519$ $\pm 0,866247$		

(с) Абсциссы ξ_k и веса a_k для квадратурной формулы Лагерра (12)

n	Абсциссы	Веса
2	0,585786 3,414214	0,853553 0,146447
3	0,415775 2,294280 6,289945	0,711093 0,278518 0,0103893
4	0,322548 1,745761 4,536620	0,603154 0,357419 0,0388879
5	9,395071 0,263560 1,413403 3,596426 7,085810 12,840801	0,000539295 0,521756 0,398667 0,0759424 0,00361176 0,0000233700

(d) Абсциссы ξ_k и веса a_k для квадратурной формулы Эрмита (13)

n	Абсциссы	Веса
2	$\pm 0,707107$	0,886227
3	0 $\pm 1,224745$	1,181636 0,295409
4	$\pm 0,524648$ $\pm 1,650680$	0,804914 0,0813128
5	0 $\pm 0,958572$ $\pm 2,020183$	0,945309 0,393619 0,0199532

Погрешность квадратурной формулы Гаусса (10) равна

$$E = \frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{(2n+1) [(2n)!]^3} y^{(2n)}(X) \quad (a < X < b).$$

(b) *Квадратурные формулы Чебышева* применяются тоже после предварительной замены переменных (9); они имеют вид

$$\int_{-1}^1 \eta(\xi) d\xi \approx \frac{2}{n} [\eta(\xi_1) + \eta(\xi_2) + \dots + \eta(\xi_n)] \quad (n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9). \quad (20.6-11)$$

Абсциссы ξ_k приведены в табл. 20.6-2. Применение равных весов минимизирует вероятную ошибку, если значения $y(x)$ подвержены нормально распределенным случайным ошибкам.

При $n = 3$ погрешность квадратурной формулы Чебышева (11) равна $\frac{1}{360} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 y^{(4)}(X)$ ($a < X < b$).

(c) Отметим еще *квадратурную формулу Лагерра*

$$\int_0^\infty e^{-\xi} \eta(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n a_k \eta(\xi_k), \quad a_k = \frac{(n!)^2}{\xi_k [L'_n(\xi_k)]^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (20.6-12)$$

где ξ_k — корни многочлена Лагерра $L_n(\xi)$ (п.21.7-1), и *квадратурную формулу Эрмита*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\xi^2} \eta(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n a_k \eta(\xi_k), \quad a_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(\xi_k)]^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (20.6-13)$$

где ξ_k — корни многочлена Эрмита $H_n(\xi)$ (п.21.7-1).

Абсциссы ξ_k и веса a_k для формул (12) и (13) приведены в табл. 20.6-2.

20.6-4. Вычисление кратных интегралов. Кратные интегралы можно вычислять повторным применением методов, описанных в пп.20.6-2 и 20.6-3. Для двойных интегралов можно пользоваться формулами

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x, y) dx dy \approx \frac{2h^2}{9} (2f_{00} + f_{10} + f_{01} + f_{-1,0} + f_{0,-1}) \quad (20.6-14)$$

или (Симпсона)

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x, y) dx dy \approx \frac{h^2}{9} [16f_{00} + 4(f_{10} + f_{01} + f_{-1,0} + f_{0,-1}) + f_{11} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{-1,-1}], \quad (20.6-15)$$

где

$$f_{jk} = f(j \Delta x, k \Delta y), \quad \Delta x = \Delta y = h \quad (j, k = 0, \pm 1).$$

Для тройных интегралов:

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x, y, z) dx dy dz \approx \frac{4}{3} h^3 (f_{100} + f_{010} + f_{001} + f_{-1,00} + f_{0,-1,0} + f_{00,-1}), \quad (20.6-16)$$

где

$$f_{ijk} = f(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z), \quad \Delta x = \Delta y = \Delta z = h \quad (i, j, k = 0, \pm 1).$$

20.7. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

20.7-1. Вводные замечания. Численному интегрированию иногда целесообразно предпослать грубое графическое решение (п.9.5-2) для ориентировки. Решение начальных задач (Кюпи) рассматривается в пп.20.7-2 — 20.7-5, решение краевых задач — в пп.20.8-1 и 20.8-2.

20.7-2. Одношаговый метод решения начальной задачи. Метод Рунге — Кутты. Требуется найти решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad (20.7-1)$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$; выберем фиксированное приращение $\Delta x = h$ независимого переменного x и обозначим

$$x_0 + k\Delta x = x_k, \quad y(x_k) = y(x_0 + k\Delta x) = y_k, \quad f(x_k, y_k) = f_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(а) При достаточно малом $\Delta x = h$ пошаговое приближенное решение начальной задачи для малых значений $k=0, 1, 2, \dots$ дается следующими простыми формулами:

$$y_{k+1} = y_k + f_k \Delta x \quad (\text{ломаная Эйлера}), \quad (20.7-2)$$

$$y_{k+1} = y_k + f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + f_k \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x, \quad (20.7-3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} [f_k + f(x_{k+1}, y_k + f_k \Delta x)] \Delta x. \quad (20.7-4)$$

(б) Метод Рунге — Кутты. Полагаем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f_k \Delta x = f(x_k, y_k) \Delta x, \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right) \Delta x, \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right) \Delta x, \\ k_4 &= f(x_{k+1}, y_k + k_3) \Delta x. \end{aligned} \right\} \quad (20.7-5)$$

20.7-3. Разностные схемы решения задачи Коши. Каждая из следующих разностных схем численного решения начальной задачи аппроксимирует последовательные значения функции

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$

путем интегрирования интерполяционного многочлена для $f(x, y)$ по трем-пяти значениям $f_i = f(x_i, y_i)$. Итерационные методы п.20.7-3, с и d служат для уменьшения накопления ошибок.

(а) Начало решения. Каждая разностная схема нуждается в вычислении сверх заданного начального значения y_0 еще трех или пяти значений функции y_1, y_2, \dots , что может быть сделано одним из методов пп.9.2-5, 20.7-2 или 20.7-3, d. Это «начало решения» должно быть вычислено с большей точностью, чем требуется для всего решения, по крайней мере в 10 раз. Если для начала решения применяется метод Рунге — Кутты, то величину шага $\Delta x = h$ для него надо брать меньшую, чем для разностной схемы.

(б) Экстраполяционные схемы. Пусть уже известны $y_{k-4}, y_{k-3}, y_{k-2}, y_{k-1}, y_k$; вычисляем $f_k, \nabla f_k, \nabla^2 f_k, \nabla^3 f_k, \nabla^4 f_k$ (п.20.4-1,а) и подставляем в формулу Адамса

$$y_{k+1} = y_k + \left(f_k + \frac{1}{2} \nabla f_k + \frac{5}{12} \nabla^2 f_k + \frac{3}{8} \nabla^3 f_k + \frac{251}{720} \nabla^4 f_k \right) \Delta x, \quad (20.7-6)$$

или в формулу

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \left(2f_k + \frac{1}{3} \nabla^2 f_k + \frac{1}{3} \nabla^3 f_k + \frac{29}{90} \nabla^4 f_k \right) \Delta x. \quad (20.7-7)$$

Членом четвертого порядка обычно пренебрегают, выбирая для этого достаточно малый шаг.

(е) Интерполяционно-итерационные схемы. Полагаем в первом приближении $f_{k+1} \approx f_k$, $\nabla f_{k+1} \approx \nabla f_k$, $\nabla^2 f_{k+1} \approx \nabla^2 f_k, \dots$ и вычисляем значение y_{k+1} по формуле Адамса

$$y_{k+1} = y_k + \left(f_{k+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{k+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{k+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{k+1} - \frac{19}{720} \nabla^4 f_{k+1} \right) \Delta x \quad (20.7-8)$$

или по более удобной формуле

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \left(2f_k + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{k+1} \right) \Delta x. \quad (20.7-9)$$

Применяя полученное приближение для y_{k+1} , вычисляем уточненные значения $f_{k+1}, \nabla f_{k+1}, \nabla^2 f_{k+1}, \dots$ и повторяем этот процесс до тех пор, пока разность между последовательными приближениями y_{k+1} станет меньше нескольких единиц последнего сохраняемого десятичного знака. Величину шага Δx надо выбирать так, чтобы можно было ограничиться одной или двумя итерациями.

Примечание. Так как формула (9) связывает значения y_k через одно, то при решении по этой формуле может происходить «раскачка», что приводит к необходимости сглаживания; то же относится и к методу Милна (d).

(d) Метод Милна «предсказание-уточнение». Сначала применяют «предсказывающую» формулу

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3} (2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}) \Delta x \quad (20.7-10a)$$

для получения первого приближения f_{k+1} , затем вычисляют y_{k+1} по формуле уточнения

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3} (f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}) \Delta x. \quad (20.7-10b)$$

Величина шага Δx должна быть выбрана такой, чтобы выражения (10a) и (10b) отличались не более чем на 14 единиц последнего сохраняемого десятичного знака.

Чтобы получить y_{-1}, y_1, y_2 для начала решения Милн рекомендует применять последовательные приближения по следующим начальным формулам:

$$\left. \begin{aligned} y_{-1} &= y_0 - \frac{1}{24} (f_1 + 16f_0 + 7f_{-1}) \Delta x + \frac{1}{4} y''(x_0) \Delta x^2, \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{24} (7f_1 + 16f_0 + f_{-1}) \Delta x + \frac{1}{4} y''(x_0) \Delta x^2, \\ y_2 &= y_0 + \frac{2}{3} (5f_1 - f_0 - f_{-1}) \Delta x - 2y''(x_0) \Delta x^2 \end{aligned} \right\} \quad (20.7-11)$$

вместе с формулой (10b).

(е) Изменение величины шага. Чтобы уменьшить шаг вдвое, удобно применить следующие интерполяционные формулы:

$$\left. \begin{aligned} f_{k-\frac{1}{2}} &= f_k - \frac{1}{2} \nabla f_k - \frac{1}{8} \nabla^2 f_k - \frac{1}{16} \nabla^3 f_k, \\ f_{k+\frac{1}{2}} &= f_k + \frac{1}{2} \nabla f_k + \frac{3}{8} \nabla^2 f_k + \frac{5}{16} \nabla^3 f_k. \end{aligned} \right\} \quad (20.7-12)$$

20.7-4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков в системе дифференциальных уравнений. Каждое обыкновенное дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка равносильно системе уравнений первого порядка (п.9.1-3). В дальнейшем рассматриваются только системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$y' = f(x, y, z, \dots), \quad z' = g(x, y, z, \dots), \dots \quad (20.7-13)$$

(а) Интегрирование системы (13) методом последовательных приближений Пикара или с помощью рядов Тейлора по существу уже описано в п.9.2-5.

(б) Метод Рунге-Кутты применяется по схеме, подобной п.20.7-2, б:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \dots,$$

где

$$k_1 = f(x_k, y_k, z_k, \dots) \Delta x,$$

$$m_1 = g(x_k, y_k, z_k, \dots) \Delta x, \dots,$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}, z_k + \frac{m_1}{2}, \dots\right) \Delta x,$$

$$m_2 = g\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}, z_k + \frac{m_1}{2}, \dots\right) \Delta x, \dots,$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}, z_k + \frac{m_2}{2}, \dots\right) \Delta x,$$

$$m_3 = g\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}, z_k + \frac{m_2}{2}, \dots\right) \Delta x, \dots,$$

$$k_4 = f(x_k + \Delta x, y_k + k_3, z_k + m_3, \dots) \Delta x,$$

$$m_4 = g(x_k + \Delta x, y_k + k_3, z_k + m_3, \dots) \Delta x, \dots$$

(20.7-14)

(с) Любая разностная схема из п.20.7-3 может быть применена к каждому из уравнений (13) с обозначениями

$$\left. \begin{aligned} y(x_k) &= y_k, & z(x_k) &= z_k, \dots \\ f(x_k, y_k, z_k, \dots) &= f_k, & g(x_k, y_k, z_k, \dots) &= g_k, \dots \end{aligned} \right\} \quad (20.7-15)$$

20.7-5. Специальные формулы для уравнений второго порядка. Ввиду практической важности дифференциальных уравнений второго порядка представляют интерес приведенные ниже схемы численного интегрирования дифференциального уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad (20.7-16)$$

при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$; в этих схемах введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_0 + k \Delta x &= x_k, & y(x_k) &= y_k, & y'(x_k) &= y'_k, & f(x_k, y_k, y'_k) &= f_k \\ & & & & & & & (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (20.7-17)$$

Приведенные ниже методы могут быть распространены на системы уравнений второго порядка так, как указано в п.20.7-4.

(а) Метод Рунге-Кутты для уравнения (16):

$$y_{k+1} = y_k + y'_k \Delta x + \frac{1}{6} (k_1 + k_2 + k_3) \Delta x,$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = f(x_k, y_k, y'_k) \Delta x,$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + y'_k \frac{\Delta x}{2}, y'_k + \frac{k_1}{2}\right) \Delta x,$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + y'_k \frac{\Delta x}{2} + \frac{k_1}{4} \Delta x, y'_k + \frac{k_2}{2}\right) \Delta x,$$

$$k_4 = f\left(x_k + \Delta x, y_k + y'_k \Delta x + \frac{k_2}{2} \Delta x, y'_k + k_3\right) \Delta x.$$

(20.7-18)

(б) Интерполяционно-итерационная схема

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + \left(f_k + \frac{1}{12} \nabla^2 f_{k+1}\right) \Delta x^2,$$

$$y'_{k+1} = y'_{k-1} + \left(2f_k + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{k+1}\right) \Delta x.$$

(20.7-19)

(в) Схема «предсказание — уточнение»

$$y'_{k+1} = y'_{k-1} + \frac{4}{3} (2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}) \Delta x \text{ («предсказание»),}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3} (y'_{k+1} + 4y'_k + y'_{k-1}) \Delta x,$$

$$y'_{k+1} = y'_{k-1} + \frac{1}{3} (f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}) \Delta x \text{ («уточнение»).}$$

(20.7-20)

(д) Если $f(x, y, y')$ не содержит явно y' , то можно применять в качестве предсказывающей формулу

$$y_{k+1} = y_k + y_{k-2} - y_{k-3} + \frac{1}{4} (5f_k + 2f_{k-1} + 5f_{k-2}) \Delta x^2, \quad (20.7-21a)$$

а для уточнения формулу (Штермера)

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + \frac{1}{12} (f_{k+1} + 10f_k + f_{k-1}) \Delta x^2. \quad (20.7-21b)$$

20.8. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ; ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

20.8-1. Вводные замечания. В пп. 20.8-2 и 20.8-3 описываются разностные методы, применимые для численного решения краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными, а также и для численного интегрирования гиперболических и параболических уравнений с частными производными. Кроме описанных здесь методов, имеются еще следующие методы решения.

Приведение уравнения с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению путем разделения переменных (пп.10.1-3 и 10.4-9), решения характеристического уравнения (пп.10.2-2 и 10.2-4) или метода характеристик (п.10.3-2).

Приведение к вариационной задаче (пп.11.1-1, 11.6-1 и 15.4-7) и решение ее прямыми методами, например методом Рунге (п.11.6-2).

Приведение к интегральному уравнению (п.15.5-2), которое можно решать прямыми методами или с помощью методов аппроксимации п.20.8-5.

Методы возмущений для решения задачи о собственных значениях описаны в п. 15.4-11.

20.8-2. Двухточечная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также пп.9.3-3, 15.4-1 и 15.5-2). Двухточечная краевая задача, т. е. задача нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющего крайним условиям на границе интервала (a, b) , может быть сведена к задаче Коши методом п.9.3-4. Более подходящим может оказаться следующий *разностный метод*.

Разделим данный интервал (a, b) на равные промежутки точками

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x, \dots, \quad x_n = x_0 + n\Delta x = b$$

и заменим каждую производную и в дифференциальном уравнении и в краевых условиях соответствующим разностным отношением того же порядка (п.20.6-1, а, рис. 20.8-1 и 20.8-6). Это позволяет аппроксимировать данное дифференциальное уравнение разностным уравнением того же порядка. Численное решение разностного уравнения сводится к решению системы уравнений относительно неизвестных значений функции $y_k = y(x_0 + k\Delta x)$ (пп.20.2-4—20.3-4). При расчетах вручную особенно удобны релаксационные методы (п.20.3-2, с).

Пример. Чтобы найти решение уравнения $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{5} y = 0$, удовлетворяющее крайним условиям $y(0) = 1, y(1) = 0$, делим интервал $(0, 1)$ на n промежутков длины $\Delta x = \frac{1}{n}$ и, заменяя $\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, получаем разностное уравнение

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + \frac{1}{5} \Delta x^2 y_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

с дополнительными условиями $y_0 = 1, y_n = 0$. При $n = 4$ ($k = 1, 2, 3$) получаем следующую систему относительно y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} -1,99y_1 + y_2 = -1, \\ y_1 - 1,99y_2 + y_3 = 0, \\ y_2 - 1,99y_3 = 0. \end{cases}$$

20.8-3. Разностные методы численного решения уравнений с частными производными.

(а) Уравнения с двумя независимыми переменными. Методы решения задач для уравнений с частными производными аналогичны изложенным в п.20.8-2. Введем подходящую сетку значений координат $x_i = x_0 + i\Delta x, y_k = y_0 + k\Delta y$ ($i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); неизвестная функция $\Phi(x, y)$ будет представлена дискретным множеством своих значений $\Phi(x_i, y_k) = \Phi_{ik}$. Аппроксимируем каждый дифференциальный оператор соответствующим разностным оператором того же порядка так, что любая производная будет аппроксимирована соответствующим разностным отношением. Получаемое разностное уравнение будет давать систему уравнений для неизвестных значений Φ_{ik} . В частности:

1. *Задача Коши* для гиперболических или параболических уравнений с частными производными (п.10.3-4) приводит к рекуррентным формулам для последовательности Φ_{ik} , начинающейся от данных начальных значений.

2. *Линейная краевая задача* (например, задача Дирихле для $\nabla^2\Phi = 0$, п.15.6-2) приводит к системе N линейных уравнений относительно N неизвестных Φ_{ik} .

3. *Линейная задача о собственных значениях* (например, $\nabla^2\Phi = \lambda\Phi$ с подходящими краевыми условиями, п.15.4-1) приводит к задаче о собственных значениях некоторой матрицы (см. п.20.3-5).

(b) *Двумерные разностные операторы*. На рис. 20.8-1 – 20.8-6 приведены часто встречающиеся линейные разностные операторы. В частности, каждая диаграмма на рис. с 20.8-1 по 20.8-5 дает центрально разностное выражение для центра «звездочки» через взвешенную сумму значений функции «сверху», «снизу», «справа» и т. д. относительно центра; каждый весовой коэффициент помещен в соответствующем узле сетки. Например, рис. 20.8-1 надо понимать так:

$$h^2 \nabla^2 \Phi|_{(x_i, y_k)} \approx \Phi(x_i + h, y_k) + \Phi(x_i - h, y_k) + \Phi(x_i, y_k + h) + \Phi(x_i, y_k - h) - 4\Phi(x_i, y_k) = \Phi_{i+1, k} + \Phi_{i-1, k} + \Phi_{i, k+1} + \Phi_{i, k-1} - 4\Phi_{ik},$$

где $h = \Delta x = \Delta y$ есть шаг сетки по обоим переменным x и y .

Рис. 20.8-1 применяется для сетки прямоугольных декартовых координат при равных шагах по x и y . Рис. 20.8-3 применяется при изменении

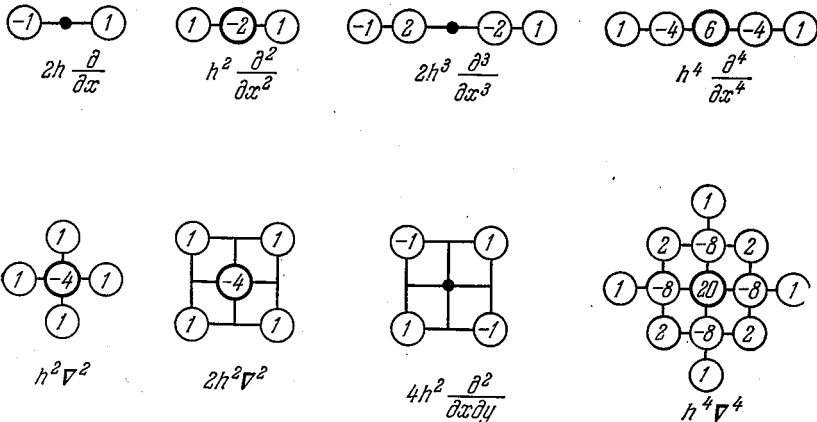


Рис. 20.8-1. Операторы для центрально-разностной аппроксимации (прямоугольная сетка декартовых координат: $\Delta x = \Delta y = h$). Относительная погрешность имеет порядок h^2 .

шага сетки, либо чтобы приспособить ее к неправильным границам, либо чтобы увеличить точность вычислений в некоторой области, представляющей особый интерес. В любом случае используемая сетка может быть уточнена после первых грубых подсчетов.

Рисунки 20.8-2, 20.8-4 и 20.8-5 демонстрируют разностные операторы для сеток, отличающихся от прямоугольных декартовых. На рис. 20.8-6 приведены разностные операторы для интерполирования вперед и назад.

Для расчетных целей сетка точек (x_i, y_k) часто обозначается простой последовательностью $1, 2, \dots$; соответствующие значения функции Φ_{ik} обозначаются при этом через Φ_1, Φ_2, \dots (см., например, рис. 20.8-7). В расчетах

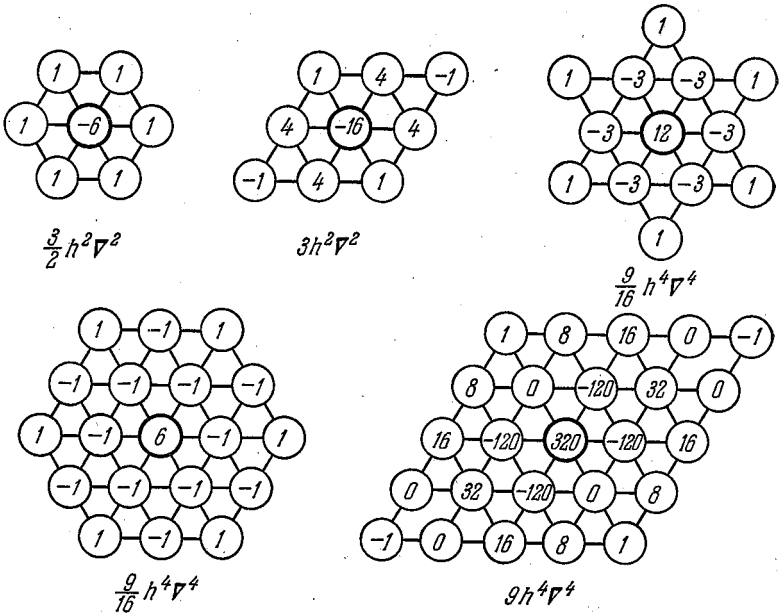


Рис. 20.8-2. Центральнo-разностная аппроксимация для сетки из правильных треугольников со стороной h . Относительная погрешность имеет порядок h^2 .

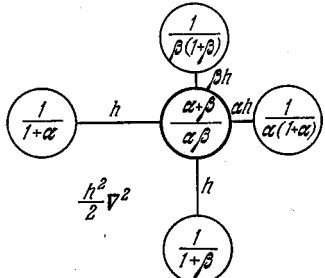


Рис. 20.8-3. Центральнo-разностный оператор, применяемый для градуированной сетки или для аппроксимации вблизи границы. Относительная погрешность имеет порядок h .

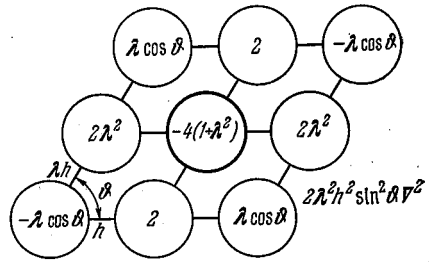


Рис. 20.8-4. Центральнo-разностный оператор, применяемый для неосоугольной сетки декартовых координат. Относительная погрешность имеет порядок h^2 .

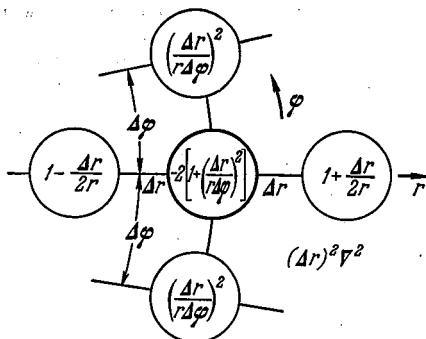


Рис. 20.8-5. Центральнo-разностный оператор, применяемый для сетки полярных координат r, φ . Относительная погрешность имеет порядок $r \Delta r \Delta \varphi$. Удобна сетка градуированная соотношением $\Delta r = r \Delta \varphi$.

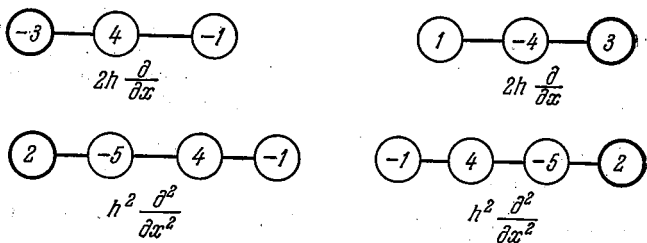


Рис. 20.8-6. Разностная аппроксимация для интерполирования вперед или назад (прямоугольная сетка декартовых координат: $\Delta x = \Delta y = h$). Относительная погрешность имеет порядок h^2 .

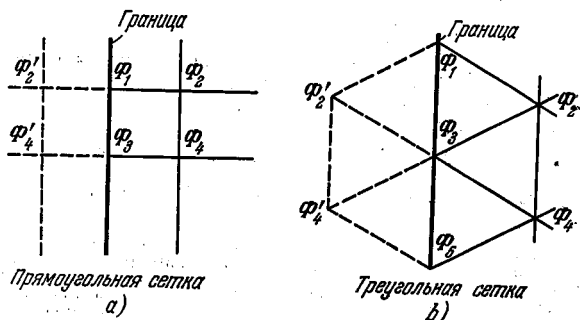


Рис. 20.8-7. Представление краевых условий для $\nabla^2 \varphi = 0$ или $\nabla^4 \varphi = 0$. Сетка продолжена влево от данной границы и введены «отраженные значения» $\varphi'_2 = \varphi_2, \varphi'_4 = \varphi_4$ для представления условия $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ на границе разностным отношением. Краевое условие $\varphi = 0, \nabla^2 \varphi = 0$ (например, свободный край упругой пластины) представляется подобным же образом через $\varphi_1 = \varphi_3 = 0, \varphi_2 = -\varphi_4, \varphi_4 = -\varphi_2$.

релаксационного типа (п.20.3-2,с) при решении линейных краевых задач вошло в обычай применять крупный план области и записывать значения функции и невязки непосредственно в каждой точке сетки. Значения функции и невязки от предшествующих шагов релаксационного процесса просто вычеркиваются или стираются.

Примечание. Дифференциальный оператор в линейных краевых задачах нельзя заменять разностным оператором более высокого порядка, так как это может вызвать ложные колебательные составляющие в решении получающегося разностного уравнения. С другой стороны, в разностных схемах решения задач Коши для гиперболических или параболических уравнений часто используют разностные операторы высших порядков, чем соответствующие производные, подобно тому как это сделано в пп.20.7-1—20.7-5.

(е) Представление краевых условий (рис. 20.8-7). Аппроксимируем данные границы линиями применяемой сетки; если нужно, вводим градуированную сетку (рис. 20.8-3). Тогда:

1. Если заданы краевые значения искомой функции Φ , то вписываем их в соответствующих точках границы (рис. 20.8-7,а).

2. Если заданы краевые значения производных (таких, как $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, п.5.6-1,б), то продолжаем сетку за границу области и аппроксимируем краевые условия соответствующими разностными отношениями. Получающиеся уравнения, так же как и разностные отношения, аппроксимирующие само дифференциальное уравнение в точках вблизи границы, будут включать значения функции в точках, лежащих вне области; но все такие значения можно исключить алгебраическими преобразованиями.

Пример. На рис. 20.8-7, б показано, как аппроксимируются краевые условия $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ путем «отражения» значений функции в границах так, что $\Phi'_2 - \Phi_2 = 0$, $\Phi'_4 - \Phi_4 = 0$.

Для дифференциального уравнения $\nabla^2 \Phi = 0$, применяя первый разностный оператор рис. 20.8-2, получаем

$$\Phi'_2 + \Phi'_4 + \Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_2 + \Phi_4 - 6\Phi_2 = 0$$

или, так как из краевого условия вытекает $\Phi'_2 = \Phi_2$, $\Phi'_4 = \Phi_4$,

$$2\Phi_2 + 2\Phi_4 + \Phi_2 + \Phi_4 - 6\Phi_2 = 0.$$

Последнее уравнение содержит только точки, лежащие внутри области или на границе.

(d) Задачи, содержащие более двух независимых переменных. Аналогичные методы применимы к задачам, содержащим более двух независимых переменных. В частности,

$$h^2 \nabla^2 \Phi(x, y, z) \approx \Phi(x+h, y, z) + \Phi(x-h, y, z) + \Phi(x, y+h, z) + \Phi(x, y, z+h) + \Phi(x, y, z-h) - 6\Phi(x, y, z). \quad (20.8-1)$$

Число независимых переменных часто может быть уменьшено путем разделения переменных (п.10.1-3).

(е) Пригодность разностных схем. Условия устойчивости. Пригодность решения, полученного разностной аппроксимацией, требует исследования. Если дифференциальное уравнение аппроксимируется двумя различными разностными уравнениями, то даже при одном и том же шаге сетки мы можем получить значительное расхождение. Сверх того, не всегда возможно улучшить аппроксимацию путем уменьшения шага сетки, даже если разностное уравнение допускает точное решение. Пригодны только такие схемы, в которых при уменьшении шага сетки решение разностного уравнения сходится к решению рассматриваемого дифференциального уравнения. Для параболических и гиперболических уравнений с частными производными такая сходимость имеет место только тогда, когда шаг сетки по обоим координатам удовлетворяют некоторому условию устойчивости. Так, решение разностного уравнения

$$\frac{\Phi(x + \Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\Phi(x, t + \Delta t) - \Phi(x, t)}{\Delta t}$$

сходится к решению уравнения теплопроводности (п.10.4-1)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, если $\Delta t < \frac{1}{2a^2} \Delta x^2$.

Решение разностного уравнения

$$\frac{\Phi(x + \Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\Phi(x, t + \Delta t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

сходится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, если $\Delta t < \frac{1}{c} \Delta x$.

Такие условия устойчивости обеспечивают также лучшую аппроксимацию при конечном шаге сетки.

20.8-4. Методы аппроксимирующих функций для численного решения краевых задач.

(а) Аппроксимация функциями, точно удовлетворяющими краевым условиям. Пусть переменное x одномерно или многомерно $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (п.15.4-1). Требуется найти решение дифференциального уравнения обыкновенного или с частными производными

$$L\Phi(x) = f(x) \quad (x \in V), \quad (20.8-2a)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$B\Phi(x) = b(x) \quad (x \in S) \quad (20.8-2b)$$

на границе S данной области V (п.15.4-1). Аппроксимируем искомое решение $\Phi(x)$ некоторой *аппроксимирующей функцией*

$$\varphi = \varphi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (20.8-3a)$$

которая удовлетворяет краевым условиям и зависит от m параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Во многих приложениях уравнения (2) линейны и функцию $\Phi(x)$ аппроксимируют линейной комбинацией известных функций

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(x), \quad (20.8-3b)$$

где $\varphi_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (2b), а $\varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ удовлетворяют однородному краевому условию $B\Phi(x) = 0$ ($x \in S$) (см. также п.15.4-2). Ошибка аппроксимации (3a) или (3b) есть функция от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$:

$$E(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv L\varphi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - f(x). \quad (20.8-4)$$

Неизвестные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ выражения (3a) или (3b) определяют по одной из следующих схем.

1. Коллокация. Выбирают α_k так, чтобы $\varphi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ точно удовлетворяла данному дифференциальному уравнению (2a) в m точках $x = X_1, x = X_2, \dots, x = X_m$, т.е. чтобы

$$E(X_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (20.8-5)$$

2. Средние квадратические приближения (см. также п.20.5-1). Выбирают α_k так, чтобы минимизировать среднюю квадратическую ошибку

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv \int_V |E(\xi; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)|^2 d\xi \quad (20.8-6)$$

или величину

$$J'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv \sum_{k=1}^N b_k |E(X_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)|^2, \quad (20.8-7)$$

где b_k — подходящим образом определенные весовые коэффициенты, приданные N точкам X_1, X_2, \dots, X_N из V . Например, можно взять равноотстоящие точки и положить

$$b_1 = b_2 = \dots = b_N = 1.$$

Коэффициенты α_k определяются из m условий

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_k} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial J'}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (20.8-8)$$

3. Метод Галеркина. Выбирают m линейно независимых «весовых функций» $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ (часто применяют $\varphi_k = \varphi_k$) и определяют α_k так, чтобы

$$\int_V \varphi_i(\xi) E(\xi; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) d\xi = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (20.8-9)$$

Если данные уравнения (2) линейны (линейная краевая задача), то и получающиеся при аппроксимации вида (3b) уравнения (5), (8) или (9) будут линейны.

(b) Аппроксимация функциями, которые точно удовлетворяют дифференциальному уравнению. Часто предпочтительнее использовать аппроксимирующие функции (3), которые для всех x из V точно удовлетворяют дифференциальному уравнению (1a), и подбирать параметры α_k по краевым условиям одним из указанных выше методов.

20.8-5. Численное решение интегральных уравнений (см. также п.15.3-2).

(a) Решение $\Phi(x)$ линейного интегрального уравнения

$$\Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = F(x) \quad (20.8-10)$$

часто можно аппроксимировать итерационным методом п.15.3-8,а; или же можно аппроксимировать данное ядро $K(x, \xi)$ многочленом или другим вырожденным ядром (п.15.3-1,б), чтобы упростить решение. Задача о собственных значениях ($F \equiv 0$) часто может рассматриваться как вариационная задача (п.15.3-6).

(b) Метод аппроксимирующих функций п.20.8-4 применим также непосредственно к численному решению линейного интегрального уравнения (10). Выберем аппроксимирующую функцию вида (3b) и вычислим m функций

$$f_k(x) = \varphi_k(x) - \lambda \int_V K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (20.8-11)$$

Тогда

1. Метод коллокации дает m линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k(X_i) = F(X_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (20.8-12)$$

2. Метод наименьших квадратов приводит к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m A_{ik} \alpha_k &= \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, m), \\ \text{где} \quad A_{ik} &= \sum_{h=1}^N b_h f_i(X_h) f_k(X_h), \\ \beta_i &= \sum_{h=1}^N b_h f_i(X_h) F(X_h); \end{aligned} \right\} \quad (20.8-13)$$

b_h — весовые коэффициенты, определяемые так же, как в формуле (7).

3. Метод Галеркина приводит к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m A_{ik} \alpha_k &= \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, m), \\ \text{где} \quad A_{ik} &= \int_V \psi_i(\xi) f_k(\xi) d\xi, \quad \beta_i = \int_V \psi_i(\xi) F(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (20.8-14)$$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

21.1. ВВЕДЕНИЕ

21.1-1. Вводные замечания. Глава 21 представляет по существу собрание формул, связывающих специальные функции. Отсылаем к гл. 7 для связи с теорией функций комплексного переменного и к гл. 9, 10 и 15 для применений к дифференциальным уравнениям. Гораздо более подробное изложение, а также сведения о реже встречающихся специальных функциях можно найти в книгах [21.1] и [21.3].

21.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

21.2-1. Тригонометрические функции (см. также п.21.2-12 и табл. 7.2-1).

(а) Тригонометрические функции $w = \sin z$, $w = \cos z$ могут быть определены при помощи степенных рядов (п.21.2-12) как решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + w = 0,$$

как $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$ (интегральные представления, п.21.2-4) или, для действительных z , в геометрических терминах (гонометрия, рис. 21.2-1). Остальные тригонометрические функции определяются как

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad (21.2-1)$$

$$\operatorname{sec} z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}. \quad (21.2-2)$$

(б) $\sin z$ и $\cos z$ — периодические функции с периодом 2π ; $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ периодичны и имеют период π . $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — нечетные функции, а $\cos z$ — четная функция.

На рис. 21.2-2 изображены графики $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ для действительного аргумента.

(в) Соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right), & \cos z &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \\ \operatorname{tg} z &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right), & \operatorname{ctg} z &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \end{aligned} \right\} \quad (21.2-3)$$

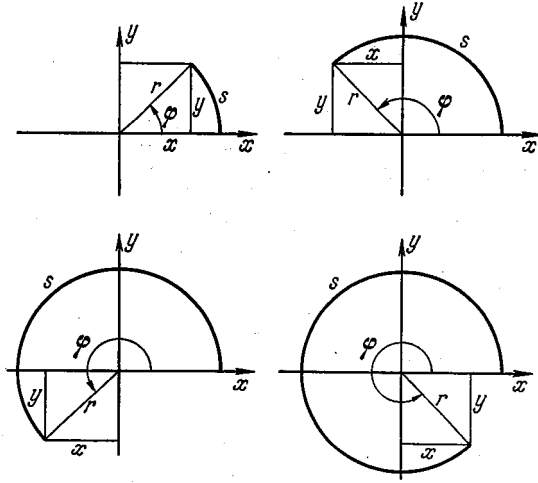


Рис. 21.2-1. Определения тригонометрических функций для данного угла φ :

$$\varphi = \frac{s}{r} \quad (\text{в радианах}),$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{x}{y},$$

$$\operatorname{sec} \varphi = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{cosec} \varphi = \frac{r}{y}.$$

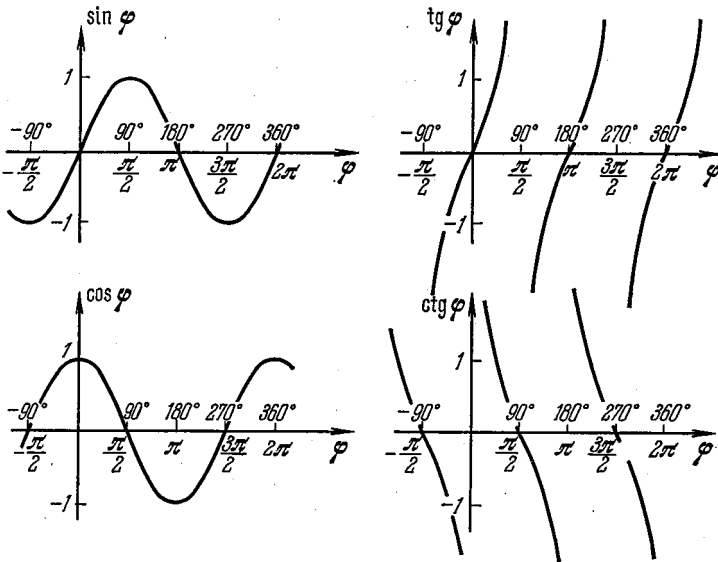


Рис. 21.2-2. Графики тригонометрических функций для действительного аргумента $z = \varphi$.

позволяют выражать значения тригонометрических функций любого действительного аргумента через значения функций для аргумента, заключенного между 0 и $\pi/2$ рад $= 90^\circ$.

21.2-2. Соотношения между тригонометрическими функциями (см. также п.21.2-6). Основные соотношения

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tg} z = \frac{1}{\operatorname{ctg} z} \quad (21.2-4)$$

имеют следствиями формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= \sqrt{1 - \cos^2 z} = \frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 z}}, \\ \cos z &= \sqrt{1 - \sin^2 z} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}} = \frac{\operatorname{ctg} z}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 z}}, \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 z}}{\cos z} = \frac{1}{\operatorname{ctg} z}, \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 z}}{\sin z} = \frac{\cos z}{\sqrt{1 - \cos^2 z}} = \frac{1}{\operatorname{tg} z}. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-5)$$

21.2-3. Теоремы сложения и формулы для кратных углов. Из основного соотношения

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \quad (21.2-6)$$

следуют:

$$\left. \begin{aligned} \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \sin B \cos A, \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \\ \operatorname{tg}(A \pm B) &= \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}, \quad \operatorname{ctg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \mp 1}{\operatorname{ctg} B \pm \operatorname{ctg} A}; \end{aligned} \right\} \quad (21.2-7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2A &= 2 \sin A \cos A, \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A, \\ \operatorname{tg} 2A &= \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}, \quad \operatorname{ctg} 2A = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2 \operatorname{ctg} A} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A); \end{aligned} \right\} \quad (21.2-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}, \\ \operatorname{ctg} \frac{A}{2} &= \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A}; \end{aligned} \right\} \quad (21.2-9)$$

$$\left. \begin{aligned} a \sin A + b \cos A &= r \sin(A+B) = r \cos(90^\circ - A - B), \\ r &= +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}; \end{aligned} \right\} \quad (21.2-10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin A \pm \sin B &= 2 \sin \frac{A \pm B}{2} \cos \frac{A \mp B}{2}, \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}, \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}, \\ \operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B &= \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}, \quad \operatorname{ctg} A \pm \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(B \pm A)}{\sin A \sin B}; \end{aligned} \right\} \quad (21.2-11)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos A \cos B &= \cos(A-B) + \cos(A+B), \\ 2 \sin A \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B), \\ 2 \sin A \cos B &= \sin(A-B) + \sin(A+B), \\ 2 \cos^2 A &= 1 + \cos 2A, \quad 2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-12)$$

Если n — целое положительное число, то

$$\left. \begin{aligned} \sin nA &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} A \sin A - \binom{n}{3} \cos^{n-3} A \sin^3 A + \\ &\quad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} A \sin^5 A \mp \dots, \\ \cos nA &= \cos^n A - \binom{n}{2} \cos^{n-2} A \sin^2 A + \\ &\quad + \binom{n}{4} \cos^{n-4} A \sin^4 A \mp \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.2-13)$$

Если n — нечетное целое число, то

$$\left. \begin{aligned} \sin^n z &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left[\sin nz - \binom{n}{1} \sin(n-2)z + \binom{n}{2} \sin(n-4)z - \right. \\ &\quad \left. - \binom{n}{3} \sin(n-6)z + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin z \right], \\ \cos^n z &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nz + \binom{n}{1} \cos(n-2)z + \binom{n}{2} \cos(n-4)z + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{3} \cos(n-6)z + \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos z \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-14)$$

Если n — четное целое число, то

$$\left. \begin{aligned} \sin^n z &= \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \left[\cos nz - \binom{n}{1} \cos(n-2)z + \binom{n}{2} \cos(n-4)z - \right. \\ &\quad \left. - \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2z \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}, \\ \cos^n z &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nz + \binom{n}{1} \cos(n-2)z + \binom{n}{2} \cos(n-4)z + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2z \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-15)$$

21.2-4. Обратные тригонометрические функции (см. также табл. 7.2-1).
(а) Обратные тригонометрические функции

$$w = \arcsin z, \quad w = \arccos z, \quad w = \operatorname{arctg} z, \quad w = \operatorname{arcctg} z^1)$$

определяются как обратные соответственно к функциям

$$z = \sin w, \quad z = \cos w, \quad z = \operatorname{tg} w, \quad z = \operatorname{ctg} w$$

или как

$$\left. \begin{aligned} \arcsin z &= \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, & \arccos z &= - \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \\ \operatorname{arctg} z &= \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}, & \operatorname{arcctg} z &= - \int_{-\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-16)$$

На рис. 21.2-3 изображены графики обратных тригонометрических функций для действительного аргумента; заметим, что $\arcsin z$ и $\arccos z$ действительны только при z действительном и $|z| \leq 1$. Все четыре обратные тригонометрические функции бесконечнозначны, потому что тригонометрические функции периодические. Для действительного аргумента **главные значения** $\arcsin z$ и $\operatorname{arctg} z$ заключены между $-\pi/2$ и $\pi/2$ (см. рис. 21.2-3); главное значение $\arccos z$ и $\operatorname{arcctg} z$ заключено между 0 и π .

(б) Отметим формулы

$$\left. \begin{aligned} \arcsin a \pm \arcsin b &= \arcsin (a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}) = \arccos (\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} \mp ab), \\ \arccos a \pm \arccos b &= \arccos (ab \mp \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}) = \arcsin (b\sqrt{1-a^2} \pm a\sqrt{1-b^2}), \\ \operatorname{arctg} a \pm \operatorname{arctg} b &= \operatorname{arctg} \frac{a \pm b}{1 \mp ab}. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-17)$$

¹⁾ В английской литературе применяются символы $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, $\operatorname{tg}^{-1} z$, $\operatorname{ctg}^{-1} z$.

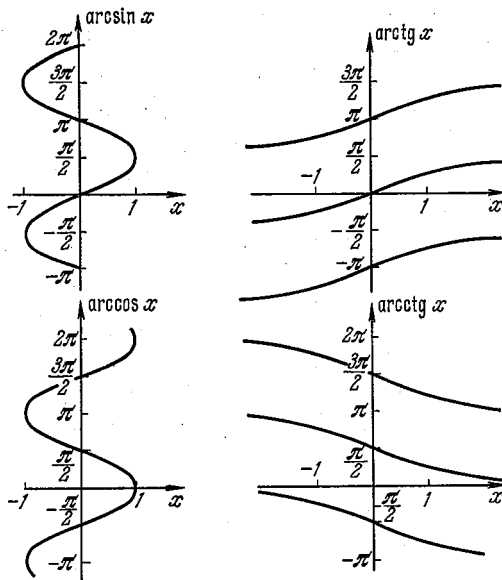


Рис. 21.2-3. Графики обратных тригонометрических функций.

21.2-5. Гиперболические функции (см. также п.21.2-1 и табл. 7.2-1). Гиперболические функции $w = \text{sh } z$, $w = \text{ch } z$ определяются степенными рядами (21.2-42) как решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - w = 0$$

или просто соотношениями

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (21.2-18)$$

Четыре дополнительные гиперболические функции определяются как

$$\left. \begin{aligned} \text{th } z &= \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}, & \text{cth } z &= \frac{\text{ch } z}{\text{sh } z}, \\ \text{sech } z &= \frac{1}{\text{ch } z}, & \text{cosech } z &= \frac{1}{\text{sh } z}. \end{aligned} \right\} \quad (21.2-19)$$

Геометрическая интерпретация sh t и ch t для действительных t. Если $t/2$ — площадь, ограниченная равносторонней гиперболой (п.2.5-2,b) $x^2 - y^2 = 1$, осью x и радиусом-вектором точки (x, y) гиперболы, то $y = \text{sh } t$, $x = \text{ch } t$. Заметим, что если гиперболу заменить окружностью $x^2 + y^2 = 1$, то $y = \sin t$, $x = \cos t$.

21.2-6. Соотношения между гиперболическими функциями (см. также п.21.2-8). Из основных соотношений

$$\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1, \quad \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z} = \text{th } z = \frac{1}{\text{cth } z} \quad (21.2-20)$$

следуют

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1} = \frac{\operatorname{th} z}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 z - 1}}, \\ \operatorname{ch} z &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}} = \frac{\operatorname{cth} z}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 z - 1}}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}{\operatorname{ch} z} = \frac{1}{\operatorname{cth} z}, \\ \operatorname{cth} z &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z}}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{ch} z}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} z}. \end{aligned} \right\} (21.2-21)$$

21.2-7. Формулы сложения для гиперболических функций (эти формулы могут быть получены из соответствующих формул для тригонометрических функций применением соотношений п.21.2-9).

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh}(A \pm B) &= \operatorname{sh} A \operatorname{ch} B \pm \operatorname{ch} A \operatorname{sh} B, \\ \operatorname{ch}(A \pm B) &= \operatorname{ch} A \operatorname{ch} B \pm \operatorname{sh} A \operatorname{sh} B, \\ \operatorname{th}(A \pm B) &= \frac{\operatorname{th} A \pm \operatorname{th} B}{1 \pm \operatorname{th} A \operatorname{th} B}, \quad \operatorname{cth}(A \pm B) = \frac{\operatorname{cth} A \operatorname{cth} B \pm 1}{\operatorname{cth} B \pm \operatorname{cth} A}; \end{aligned} \right\} (21.2-22)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} 2A &= 2 \operatorname{ch} A \operatorname{sh} A, \quad \operatorname{ch} 2A = \operatorname{ch}^2 A + \operatorname{sh}^2 A, \\ \operatorname{th} 2A &= \frac{2 \operatorname{th} A}{1 + \operatorname{th}^2 A}, \quad \operatorname{cth} 2A = \frac{\operatorname{cth}^2 A + 1}{2 \operatorname{cth} A}; \end{aligned} \right\} (21.2-23)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} A - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} A + 1}{2}}, \\ \operatorname{th} \frac{A}{2} &= \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A + 1} = \frac{\operatorname{ch} A - 1}{\operatorname{sh} A}, \quad \operatorname{cth} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A - 1} = \frac{\operatorname{ch} A + 1}{\operatorname{sh} A}; \end{aligned} \right\} (21.2-24)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} A \pm \operatorname{sh} B &= 2 \operatorname{sh} \frac{A \pm B}{2} \operatorname{ch} \frac{A \mp B}{2}, \\ \operatorname{ch} A + \operatorname{ch} B &= 2 \operatorname{ch} \frac{A + B}{2} \operatorname{ch} \frac{A - B}{2}, \\ \operatorname{ch} A - \operatorname{ch} B &= 2 \operatorname{sh} \frac{A + B}{2} \operatorname{sh} \frac{A - B}{2}, \\ \operatorname{th} A \pm \operatorname{th} B &= \frac{\operatorname{sh}(A \pm B)}{\operatorname{ch} A \operatorname{ch} B}, \\ \operatorname{cth} A \pm \operatorname{cth} B &= \frac{\operatorname{sh}(B \pm A)}{\operatorname{sh} A \operatorname{sh} B}; \end{aligned} \right\} (21.2-25)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{ch} A \operatorname{ch} B &= \operatorname{ch}(A + B) + \operatorname{ch}(A - B), \\ 2 \operatorname{sh} A \operatorname{sh} B &= \operatorname{ch}(A + B) - \operatorname{ch}(A - B), \\ 2 \operatorname{sh} A \operatorname{ch} B &= \operatorname{sh}(A + B) + \operatorname{sh}(A - B), \\ 2 \operatorname{ch}^2 A &= 1 + \operatorname{ch} 2A, \quad 2 \operatorname{sh}^2 A = 2 \operatorname{ch} 2A - 1. \end{aligned} \right\} (21.2-26)$$

21.2-8. Обратные гиперболические функции (см. также п.21.2-4). Обратные гиперболические функции¹⁾ $w = \operatorname{arsh} z$, $w = \operatorname{arch} z$, $w = \operatorname{arth} z$ определяются соответственно как $z = \operatorname{sh} w$, $z = \operatorname{ch} w$, $z = \operatorname{th} w$. Отметим соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} a \pm \operatorname{arch} b &= \operatorname{arsh} (a\sqrt{b^2+1} \pm b\sqrt{a^2+1}) = \operatorname{arch} (\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1} \pm ab), \\ \operatorname{arch} a \pm \operatorname{arch} b &= \operatorname{arch} (ab \pm \sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}) = \\ &= \operatorname{arsh} (b\sqrt{a^2-1} \pm a\sqrt{b^2-1}), \\ \operatorname{arth} a \pm \operatorname{arth} b &= \operatorname{arth} \frac{a \pm b}{1 \pm ab}. \end{aligned} \quad (21.2-27)$$

21.2-9. Соотношения между показательной, тригонометрическими и гиперболическими функциями (см. также пп.1.2-3 и 21.2-12 и табл. 7.2-1):

$$\left. \begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \end{aligned} \right\} (21.2-28)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z; \quad (21.2-29)$$

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \quad e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z, \quad (21.2-30)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad (21.2-31)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz; \end{aligned} \right\} (21.2-32)$$

$$\left. \begin{aligned} a^{ix} &= e^{ix \ln a} = \cos(x \ln a) + i \sin(x \ln a), \\ x^i &= e^{i \ln x} = \cos(\ln x) + i \sin(\ln x), \\ i^x &= e^{x \ln i} = \cos \frac{\pi x}{2} + i \sin \frac{\pi x}{2} \quad (\text{главное значение}), \\ e^{2n\pi i} &= 1, \quad e^{(2n+1)\pi i} = -1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ i^i &= e^{i \ln i} = e^{-\pi/2} \quad (\text{главное значение}). \end{aligned} \right\} (21.2-33)$$

21.2-10. Определение логарифма (см. также пп.1.2-3 и 12.2-12 и табл. 7.2-1).

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z; \quad (21.2-34)$$

$$\left. \begin{aligned} \ln(ix) &= \ln x + \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi i, \\ \ln(-x) &= \ln x + (2n+1) \pi i \end{aligned} \right\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21.2-35)$$

21.2-11. Соотношения между обратными тригонометрическими, обратными гиперболическими и логарифмической функциями.

$$\left. \begin{aligned} \arccos z &= -i \operatorname{arch} z, & \operatorname{arch} z &= i \arccos z, \\ \arcsin z &= -i \operatorname{arsh} iz, & \operatorname{arsh} z &= -i \arcsin iz, \\ \operatorname{arctg} z &= -i \operatorname{arth} iz, & \operatorname{arth} z &= -i \operatorname{arctg} iz, \\ \operatorname{arccotg} z &= i \operatorname{arch} z, & \operatorname{arch} z &= i \operatorname{arccotg} iz; \end{aligned} \right\} (21.2-36)$$

¹⁾ В английской литературе применяются чаще символы $\operatorname{sh}^{-1}z$, $\operatorname{ch}^{-1}z$, $\operatorname{th}^{-1}z$.

$$\left. \begin{aligned} \arccos z &= -i \ln(z + i\sqrt{1-z^2}), & \operatorname{arch} z &= \ln(z + \sqrt{z^2-1}), \\ \arcsin z &= -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}), & \operatorname{arsh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2+1}), \\ \operatorname{arctg} z &= -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, & \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \\ \operatorname{arctg} z &= -\frac{i}{2} \ln \frac{iz-1}{iz+1}, & \operatorname{arcth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \right\} (21.2-37)$$

21.2-12. Разложения в степенные ряды (см. также пп.4.10-1-4.10-4).

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots \quad (|z| < 1; \quad \text{геометрическая прогрессия, п.1.2-7}); \quad (21.2-38)$$

$$(1+z)^p = 1 + \binom{p}{1}z + \binom{p}{2}z^2 + \dots \quad (|z| < 1; \quad \text{биномиальный ряд, см. также пп.1.4-1 и 21.5-1}); \quad (21.2-39)$$

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots \quad (|z| < \infty); \quad (21.2-40)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots \quad (|z| < \infty); \quad (21.2-41)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \quad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (|z| < \infty); \quad (21.2-42)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots \quad (|z| < 1). \quad (21.2-43)$$

$$\left. \begin{aligned} \arcsin z &= z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{z^7}{7} + \dots, \\ \operatorname{arsh} z &= z - \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{z^7}{7} \pm \dots \end{aligned} \right\} (|z| < 1); \quad (21.2-44)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arctg} z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \mp \dots, \\ \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \end{aligned} \right\} (|z| < 1). \quad (21.2-45)$$

В терминах чисел Бернулли (п.21.5-2)

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad (|z| < \frac{\pi}{2}), \quad (21.2-46)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \dots \quad (|z| < \pi). \quad (21.2-47)$$

Из разложений (46) и (47) можно получить разложения для функций $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ с помощью формул (32).

21.2-13. Разложения в бесконечные произведения (см. также п.7.6-6).

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= z \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{k\pi} \right)^2 \right], \\ \cos z &= \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 - \left[\frac{2z}{\pi(2k+1)} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \right\} |z| < \infty. \quad (21.2-48)$$

Аналогичные разложения для функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ могут быть получены с помощью формул (32).

21.3. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

21.3-1. Интегральные синус, косинус, логарифм и показательная функция.

По определению

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si}(x) = x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} \mp \dots$$

(интегральный синус). (21.3-1)

Значения интегрального синуса приведены в табл. 21.3-1.

$$\operatorname{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = C + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos x}{x} dx =$$

$$= C + \ln x - \frac{1}{2!} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{4} \mp \dots \quad (x > 0) \text{ (интегральный косинус),} \quad (21.3-2)$$

где $C \approx 0,577216$ — постоянная Эйлера — Маскерони, определенная в п.21.4-1.

Значения интегрального косинуса находятся при помощи табл. 21.3-2.

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^x}{x} dx \quad (x < 0) \text{ (интегральная показательная функция),} \quad (21.3-3)$$

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x} \quad (x > 0) \text{ (интегральный логарифм).} \quad (21.3-4)$$

* При $x > 1$ функция $\operatorname{li}(x)$ определяется как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dx}{\ln x} \right]$ (главное значение интеграла в смысле Коши).

Функция $\operatorname{Ei}(x)$ представляется в виде ряда

$$\operatorname{Ei}(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k} \quad (x < 0),$$

с помощью которого она продолжается на всю комплексную плоскость z с разрезом вдоль положительной части действительной оси *)

$$\operatorname{Ei}(z) = C + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!k} \quad (|\arg(-z)| < \pi).$$

*) Все введенные функции можно рассматривать как функции комплексного переменного z (см., например, [21.1]).

Таблица 21.3-1

Интегральный синус

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$$

x	Si(x)	x	Si(x)	x	Si(x)	x	Si(x)	x	Si(x)	x	Si(x)
0,0	0,00000	5,0	1,54993	10,0	1,65835	15,0	1,61819	20,0	1,54824	25,0	1,53148
0,1	0,99994	5,1	53125	10,1	65253	15,1	62226	20,1	55289	50,0	55162
0,2	1,99956	5,2	51367	10,2	64600	15,2	62575	20,2	55767		
0,3	2,99850	5,3	49732	10,3	63883	15,3	62865	20,3	56253		
0,4	3,9646	5,4	48230	10,4	63112	15,4	63093	20,4	56743		
0,5	4,9311	5,5	46872	10,5	62294	15,5	63258	20,5	57232		
0,6	5,8813	5,6	45667	10,6	61439	15,6	63359	20,6	57714		
0,7	6,8122	5,7	44620	10,7	60556	15,7	63396	20,7	58186		
0,8	7,7210	5,8	43736	10,8	59654	15,8	63370	20,8	58641		
0,9	8,6047	5,9	43018	10,9	58743	15,9	63280	20,9	59077		
1,0	9,4608	6,0	42469	11,0	57831	16,0	63130	21,0	59489		
1,1	1,02869	6,1	42087	11,1	56927	16,1	62921	21,1	59873		
1,2	1,0805	6,2	41871	11,2	56042	16,2	62657	21,2	60225		
1,3	1,8396	6,3	41817	11,3	55182	16,3	62339	21,3	60543		
1,4	2,5623	6,4	41922	11,4	54356	16,4	61973	21,4	60823		
1,5	3,2468	6,5	42179	11,5	53571	16,5	61563	21,5	61063		
1,6	3,8918	6,6	42582	11,6	52835	16,6	61112	21,6	61261		
1,7	4,4959	6,7	43121	11,7	52155	16,7	60627	21,7	61415		
1,8	5,0582	6,8	43787	11,8	51535	16,8	60111	21,8	61525		
1,9	5,5778	6,9	44570	11,9	50981	16,9	59572	21,9	61590		
2,0	6,0541	7,0	45460	12,0	50497	17,0	59014	22,0	61608		
2,1	6,4870	7,1	46443	12,1	50088	17,1	58443	22,1	61582		
2,2	6,8763	7,2	47509	12,2	49755	17,2	57865	22,2	61510		
2,3	7,2221	7,3	48644	12,3	49501	17,3	57285	22,3	61395		
2,4	7,5249	7,4	49834	12,4	49327	17,4	56711	22,4	61238		
2,5	7,7852	7,5	51068	12,5	49234	17,5	56146	22,5	61041		
2,6	8,0039	7,6	52331	12,6	49221	17,6	55598	22,6	60806		
2,7	8,1821	7,7	53611	12,7	49287	17,7	55070	22,7	60536		
2,8	8,3210	7,8	54894	12,8	49430	17,8	54568	22,8	60234		
2,9	8,4219	7,9	56167	12,9	49647	17,9	54097	22,9	59902		
3,0	8,4865	8,0	57419	13,0	49936	18,0	53661	23,0	59546		
3,1	8,5166	8,1	58637	13,1	50292	18,1	53264	23,1	59168		
3,2	8,5140	8,2	59810	13,2	50711	18,2	52909	23,2	58772		
3,3	8,4808	8,3	60928	13,3	51188	18,3	52600	23,3	58363		
3,4	8,4191	8,4	61981	13,4	51716	18,4	52339	23,4	57945		
3,5	8,3313	8,5	62960	13,5	52291	18,5	52128	23,5	57521		
3,6	8,2195	8,6	63857	13,6	52905	18,6	51969	23,6	57097		
3,7	8,0862	8,7	64665	13,7	53352	18,7	51863	23,7	56676		
3,8	7,9333	8,8	65379	13,8	54225	18,8	51810	23,8	56262		
3,9	7,7650	8,9	65993	13,9	54917	18,9	51810	23,9	55860		
4,0	7,5820	9,0	66504	14,0	55621	19,0	51863	24,0	55474		
4,1	7,3874	9,1	66908	14,1	56330	19,1	51967	24,1	55107		
4,2	7,1837	9,2	67205	14,2	57036	19,2	52122	24,2	54762		
4,3	6,9732	9,3	67393	14,3	57733	19,3	52324	24,3	54444		
4,4	6,7583	9,4	67473	14,4	58414	19,4	52572	24,4	54154		
4,5	6,5414	9,5	67446	14,5	59072	19,5	52863	24,5	53897		
4,6	6,3246	9,6	67316	14,6	59702	19,6	53192	24,6	53672		
4,7	6,1101	9,7	67084	14,7	60296	19,7	53357	24,7	53484		
4,8	5,8998	9,8	66757	14,8	60851	19,8	53954	24,8	53333		
4,9	5,6956	9,9	66338	14,9	61360	19,9	54378	24,9	53221		

Таблица 21.3-2

 $S_1(x)$ и интегральный косинус $Ci(x)$

$$S_1(x) = \ln x + C - Ci(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u} du,$$

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du = \ln x + C - S_1(x)$$

 $(C \approx 0,5772 - \text{постоянная Эйлера - Маскерони})$

x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$
0,0	0,00000	5,0	2,37669	10,0	2,92527	15,0	3,23899	20,0	3,52853	25,0	3,80295
0,1	00249	5,1	38994	10,1	94327	15,1	25090	20,1	53173	50,0	4,49486
0,2	00998	5,2	40113	10,2	96050	15,2	26308	20,2	53535		
0,3	02241	5,3	41044	10,3	97688	15,3	27552	20,3	53946		
0,4	03973	5,4	41801	10,4	99234	15,4	28814	20,4	54402		
0,5	06185	5,5	42402	10,5	3,00688	15,5	30087	20,5	54905		
0,6	08866	5,6	42866	10,6	02045	15,6	31363	20,6	55456		
0,7	12002	5,7	43210	10,7	03300	15,7	32641	20,7	56049		
0,8	15579	5,8	43452	10,8	04457	15,8	33911	20,8	56687		
0,9	19578	5,9	43610	10,9	05514	15,9	35167	20,9	57368		
1,0	23981	6,0	43704	11,0	06467	16,0	36404	21,0	58085		
1,1	28766	6,1	43749	11,1	07323	16,1	37612	21,1	58840		
1,2	33908	6,2	43764	11,2	08083	16,2	38790	21,2	59629		
1,3	39384	6,3	43766	11,3	08749	16,3	39932	21,3	60446		
1,4	45168	6,4	43770	11,4	09322	16,4	41032	21,4	61288		
1,5	51233	6,5	43792	11,5	09814	16,5	42088	21,5	62155		
1,6	57549	6,6	43847	11,6	10225	16,6	43096	21,6	63037		
1,7	64088	6,7	43947	11,7	10561	16,7	44050	21,7	63935		
1,8	70820	6,8	44106	11,8	10828	16,8	44947	21,8	64842		
1,9	77713	6,9	44335	11,9	11038	16,9	45788	21,9	65751		
2,0	84739	7,0	44643	12,0	11190	17,0	46568	22,0	66662		
2,1	91865	7,1	45040	12,1	11301	17,1	47288	22,1	67568		
2,2	99060	7,2	45534	12,2	11370	17,2	47945	22,2	68465		
2,3	1,06295	7,3	46130	12,3	11412	17,3	48543	22,3	69348		
2,4	13540	7,4	46834	12,4	11429	17,4	49077	22,4	70216		
2,5	20764	7,5	47649	12,5	11436	17,5	49553	22,5	71059		
2,6	27939	7,6	48577	12,6	11437	17,6	49969	22,6	71879		
2,7	35038	7,7	49619	12,7	11438	17,7	50330	22,7	72670		
2,8	42035	7,8	50775	12,8	11453	17,8	50639	22,8	73427		
2,9	48903	7,9	52044	12,9	11484	17,9	50895	22,9	74153		
3,0	55620	8,0	53423	13,0	11540	18,0	51107	23,0	74838		
3,1	62163	8,1	54906	13,1	11628	18,1	51276	23,1	75483		
3,2	68541	8,2	56491	13,2	11754	18,2	51404	23,2	76089		
3,3	74846	8,3	58171	13,3	11924	18,3	51500	23,3	76651		
3,4	80552	8,4	59938	13,4	12142	18,4	51568	23,4	77170		
3,5	86211	8,5	61786	13,5	12414	18,5	51610	23,5	77644		
3,6	91613	8,6	63704	13,6	12745	18,6	51633	23,6	78072		
3,7	96745	8,7	65686	13,7	13134	18,7	51645	23,7	78459		
3,8	2,01600	8,8	67721	13,8	13587	18,8	51648	23,8	78801		
3,9	06170	8,9	69799	13,9	14104	18,9	51648	23,9	79101		
4,0	10449	9,0	71909	14,0	14688	19,0	51660	24,0	79360		
4,1	14438	9,1	74042	14,1	15338	19,1	51661	24,1	79582		
4,2	18131	9,2	76136	14,2	16054	19,2	51685	24,2	79767		
4,3	21535	9,3	78332	14,3	16835	19,3	51727	24,3	79917		
4,4	24648	9,4	80468	14,4	17677	19,4	51790	24,4	80036		
4,5	27479	9,5	82583	14,5	18583	19,5	51879	24,5	80129		
4,6	30033	9,6	84669	14,6	19545	19,6	52002	24,6	80197		
4,7	32517	9,7	86713	14,7	20564	19,7	52156	24,7	80243		
4,8	34344	9,8	88712	14,8	21630	19,8	52348	24,8	80271		
4,9	36124	9,9	90651	14,9	22746	19,9	52578	24,9	80288		

Если $z = x > 0$, то $\operatorname{Re} \operatorname{Ei}(x) = \overline{\operatorname{Ei}}(x) = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}$ называется модифицированной интегральной показательной функцией. При приближении точки $z = x + iy$ к разрезу ($x > 0$) имеют место соотношения

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y > 0)}} \operatorname{Ei}(x \pm iy) = \overline{\operatorname{Ei}}(x) \mp \pi i. *$$

Отметим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Ei}(x) &= \operatorname{li}(e^x) & (x < 0), \\ \operatorname{Ei}(\ln x) &= \operatorname{li}(x) & (x < 1), \\ \operatorname{Ei}(\pm ix) &= \operatorname{Ci}(x) \pm i \operatorname{Si}(x) \mp \frac{\pi i}{2} & (x > 0). \end{aligned} \right\} \quad (21.3-5)$$

Значения интегральной показательной функции и родственных с ней функций приведены в табл. 21.3-3.

21.3-2. Интегралы Френеля и интеграл вероятностей (см. также п.18.8-3). По определению

$$\left. \begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx = J_{1/2} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + J_{3/2} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + J_{5/2} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + \dots, \\ S(x) &= \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx = J_{3/2} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + J_{5/2} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + J_{7/2} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(интегралы} \\ \text{Френеля)} \end{array} \quad (21.3-6)$$

где $J_{n/2}(z)$ — функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного числа (см. п.21.8-1,е);

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \frac{x^7}{7} \pm \dots \right) \quad \text{(интеграл вероятностей);} \quad (21.3-7)$$

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1.$$

Отметим формулы:

$$C(x) - iS(x) = \frac{1}{1+i} \operatorname{erf} \left(\frac{1+i}{2} x \sqrt{\pi} \right); \quad (21.3-8)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x} \sin \frac{\pi}{2} x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ S(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x} \cos \frac{\pi}{2} x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (21.3-9)$$

Таблица 21.3-3

Интегральная показательная функция

Интегральные показательные функции обычно применяются в комбинации:

- 1) интегральных показательных функций $Ei(x)$ и $\overline{Ei}(x)$ или
- 2) $E_0(x)$, $E_1(x) \equiv -Ei(-x)$ и $E_2(x)$, где

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-n} du. \quad \text{Во всех случаях } x > 0.$$

Малые значения аргумента. Для вычисления значений $Ei(-x)$ и $\overline{Ei}(x)$ при малых значениях x можно пользоваться разложениями в ряд, приведенными в соответствующей таблице.

Большие значения аргумента для $Ei(-x)$ и $\overline{Ei}(x)$:

а) для $5 < x < 16$ значения даны в таблицах;

б) для $5 < x < 40$, $E_1(x) = -Ei(-x) = F_1 \frac{e^{-x}}{x}$ и $\overline{Ei}(x) = F_2 \frac{e^x}{x}$, где F_1

и F_2 имеют значения

x	5	10	15	20	25	30	35	40
F_1	0,8516	0,9156	0,9408	0,9549	0,9627	0,9687	0,9729	0,9753
F_2	1,354	1,1316	1,0781	1,0560	1,0440	1,0358	1,0305	1,0264

(с) для больших значений x величины F_1 и F_2 могут быть вычислены с помощью асимптотических рядов

$$F_1 = 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots, \quad F_2 = 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \dots$$

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	∞	99,00	49,01	32,35	24,02	19,02	15,70	13,32	11,54	10,15
1	9,048	8,144	7,391	6,755	6,210	5,738	5,326	4,963	4,640	4,352
2	4,094	3,860	3,648	3,454	3,278	3,115	2,966	2,827	2,699	2,580
3	2,469	2,366	2,269	2,179	2,093	2,013	1,938	1,867	1,800	1,736
4	1,676	1,619	1,564	1,513	1,464	1,417	1,372	1,330	1,289	1,250
5	1,213	1,177	1,143	1,111	1,079	1,049	1,020	*9921	*9653	*9395
6	0,9147	8907	8677	8454	8239	8031	7831	7637	7450	7269
7	7094	6925	6760	6601	6447	6298	6154	6013	5877	5745
8	5617	5492	5371	5254	5139	5028	4920	4816	4713	4614
9	4517	4423	4332	4243	4156	4071	3988	3908	3830	3753
1,0	3679	3606	3535	3466	3399	3333	3268	3206	3144	3085
1	3026	2969	2913	2859	2805	2753	2702	2653	2604	2556
2	2510	2464	2420	2376	2334	2292	2251	2211	2172	2134
3	2096	2060	2024	1989	1954	1920	1887	1855	1823	1792
4	1761	1732	1722	1673	1645	1618	1591	1564	1538	1513
5	1488	1463	1439	1415	1392	1369	1347	1325	1304	1283
6	1262	1242	1222	1202	1183	1164	1145	1127	1109	1092
7	1075	1058	1041	1025	1009	*9930	*9775	*9623	*9474	*9327
8	0,09183	9042	8903	8766	8631	8500	8370	8242	8116	7993
9	7872	7753	7636	7521	7407	7296	7187	7079	6973	6869
2	$10^{-1} \times 0,6767$	5831	5037	4309	3780	3283	2857	2489	2172	1897
3	$10^{-2} \times 1,660$	1,453	1,274	1,118	0,9816	8628	7590	6682	5887	5190
4	$10^{-2} \times 0,4579$	4042	3570	3155	2790	2469	2185	1935	1714	1520
5	$10^{-2} \times 1,348$	1,195	1,061	0,9418	8364	7431	6603	5870	5220	4643
6	$10^{-2} \times 0,4131$	3677	3273	2915	2596	2313	2061	1837	1638	1461
7	$10^{-4} \times 1,303$	1,1621	1,037	0,9254	8260	7375	6585	5881	5253	4693
8	$10^{-4} \times 0,4193$	3747	3349	2994	2677	2394	2141	1915	1713	1533
9	$10^{-5} \times 1,371$	1,227	1,098	0,9831	8800	7879	7055	6318	5658	5068

Т а б л и ц а 21.3-3 (продолжение)

$$E_1(x) = -\text{Ei}(-x) = - \left[C + \ln x - \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right],$$

где $C = 0,5772$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	∞	4,038	3,355	2,959	2,681	2,468	2,295	2,151	2,027	1,919
1	1,823	1,737	1,660	1,589	1,524	1,464	1,409	1,358	1,310	1,265
2	1,223	1,183	1,145	1,110	1,076	1,044	1,014	0,9849	9573	9309
3	0,9057	8815	8583	8361	8147	7942	7745	7554	7371	7194
4	7024	6859	6700	6546	6397	6253	6114	5979	5848	5721
5	5598	5478	5362	5250	5140	5034	4930	4830	4732	4636
6	4544	4454	4366	4280	4197	4115	4036	3959	3883	3810
7	3738	3668	3599	3532	3467	3403	3341	3280	3221	3163
8	3106	3050	2996	2943	2891	2840	2790	2742	2694	2647
9	2602	2557	2513	2470	2429	2387	2347	2308	2269	2231
1,0	2194	2157	2122	2087	2052	2019	1986	1953	1922	1890
1	1860	1830	1801	1772	1743	1716	1688	1662	1635	1609
2	1584	1559	1535	1511	1487	1464	1441	1419	1397	1376
3	1355	1334	1313	1293	1274	1254	1235	1216	1198	1180
4	1162	1145	1128	1111	1094	1078	1062	1046	1030	1015
5	1000	*8854	*9709	*9567	*9426	*9288	*5152	*9019	*8887	*8758
6	0,8631	8506	8383	8261	8142	8025	7909	7796	7684	7574
7	7465	7359	7254	7151	7049	6949	6850	6753	6658	6564
8	6471	6380	6290	6202	6115	6029	5945	5862	5780	5700
9	5620	5542	5465	5390	5315	5241	5169	5098	5027	4958
2,0	4890	4823	4757	4692	4627	4564	4502	4440	4380	4320
1	4261	4204	4147	4090	4035	3980	3927	3874	3821	3770
2	3719	3669	3620	3571	3523	3476	3430	3384	3339	3294
3	3250	3207	3164	3122	3081	3040	3000	2960	2921	2882
4	2844	2806	2769	2733	2697	2662	2627	2592	2558	2525
5	2491	2459	2427	2395	2364	2333	2303	2273	2243	2214
6	2185	2157	2129	2101	2074	2047	2021	1994	1969	1943
7	1918	1893	1869	1845	1821	1798	1775	1752	1730	1707
8	1686	1664	1643	1622	1601	1581	1560	1540	1521	1502
9	1482	1464	1445	1427	1409	1391	1373	1356	1338	1322
3,0	1305	1288	1272	1256	1240	1225	1209	1194	1179	1164
1	1149	1135	1121	1107	1093	1079	1066	1052	1039	1026
2	1043	1001	*9882	*9758	*9637	*9517	*9398	*9281	*9166	9052
3	0,008939	8828	8718	8610	8503	8398	8294	8191	8090	7990
4	7891	7793	7697	7602	7508	7416	7324	7234	7145	7057
5	6970	6884	6800	6716	6634	6552	6472	6393	6314	6237
6	6160	6085	6011	5937	5864	5793	5722	5652	5583	5515
7	5448	5381	5316	5251	5187	5124	5062	5000	4939	4879
8	4820	4762	4704	4647	4591	4535	4480	4426	4372	4319
9	4267	4216	4165	4114	4065	4016	3967	3919	3872	3825
4,0	3779	3734	3689	3645	3601	3557	3515	3472	3431	3390
1	3349	3309	3269	3230	3191	3153	3115	3078	3041	3005
2	2969	2933	2898	2864	2829	2796	2762	2729	2697	2665
3	2633	2602	2571	2540	2510	2480	2450	2421	2393	2364
4	2336	2308	2281	2254	2227	2201	2175	2149	2123	2098
5	2073	2049	2025	2001	1977	1954	1931	1908	1885	1863
6	1841	1819	1798	1777	1756	1735	1715	1694	1674	1655
7	1635	1616	1597	1578	1560	1541	1523	1505	1488	1470
8	1453	1436	1419	1402	1386	1370	1354	1338	1322	1307
9	1291	1276	1261	1247	1232	1218	1204	1189	1176	1162
5,0	1148	1135	1122	1109	1096	1083	1070	1058	1045	1033

Таблица 21.3-3 (продолжение)

$$\overline{\text{Ei}}(x) = C + \ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	—∞	4,018	3,315	2,899	2,601	2,368	2,175	2,011	1,867	1,739
1	—1,623	1,317	1,419	1,329	1,244	1,164	1,089	1,017	0,9491	0,8841
2	—0,8218	7619	7042	6485	5947	5425	4919	4427	3949	3482
3	—0,3027	2582	2147	1721	1304	0894	0493	0098	*0290	*0672
4	+0,1048	1418	1783	2143	2498	2849	3195	3537	3876	4211
5	0,4542	4870	5195	5517	5836	6153	6467	6778	7087	7394
6	0,7699	8002	8302	8601	8898	9194	9488	9780	1,007	1,036
7	1,065	1,094	1,122	1,151	1,179	1,207	1,236	1,264	1,292	1,320
8	1,347	1,375	1,403	1,431	1,458	1,486	1,513	1,541	1,568	1,595
9	1,623	1,650	1,677	1,705	1,732	1,759	1,786	1,814	1,841	1,868
1,0	1,895	1,922	1,949	1,977	2,004	2,031	2,058	2,086	2,113	2,140
1	2,167	2,195	2,222	2,249	2,277	2,304	2,332	2,359	2,387	2,414
2	2,442	2,470	2,498	2,525	2,553	2,581	2,609	2,637	2,665	2,693
3	2,721	2,750	2,778	2,806	2,835	2,863	2,892	2,921	2,949	2,978
4	3,007	3,036	3,065	3,094	3,124	3,153	3,183	3,212	3,242	3,271
5	3,301	3,331	3,361	3,391	3,422	3,452	3,482	3,513	3,544	3,574
6	3,605	3,636	3,667	3,699	3,730	3,762	3,793	3,825	3,857	3,889
7	3,921	3,953	3,986	4,018	4,051	4,084	4,117	4,150	4,183	4,216
8	4,250	4,284	4,317	4,351	4,386	4,420	4,454	4,489	4,524	4,559
9	4,594	4,629	4,664	4,700	4,736	4,772	4,808	4,844	4,881	4,917
2,0	4,954	4,991	5,028	5,066	5,104	5,141	5,179	5,217	5,256	5,294
1	5,333	5,372	5,411	5,451	5,490	5,530	5,570	5,611	5,651	5,692
2	5,733	5,774	5,815	5,857	5,899	5,941	5,983	6,025	6,068	6,111
3	6,154	6,198	6,242	6,286	6,330	6,374	6,419	6,464	6,509	6,555
4	6,601	6,647	6,693	6,740	6,787	6,834	6,881	6,929	6,977	7,025
5	7,074	7,123	7,172	7,221	7,271	7,321	7,372	7,422	7,473	7,524
6	7,576	7,628	7,680	7,733	7,786	7,839	7,893	7,947	8,001	8,055
7	8,110	8,166	8,221	8,277	8,334	8,390	8,447	8,505	8,563	8,621
8	8,679	8,738	8,798	8,857	8,917	8,978	9,039	9,100	9,162	9,224
9	9,286	9,349	9,412	9,476	9,540	9,605	9,670	9,735	9,801	9,867
3,0	9,934	10,00	10,07	10,14	10,21	10,27	10,34	10,41	10,48	10,55
1	10,63	10,70	10,77	10,84	10,92	10,99	11,06	11,14	11,22	11,29
2	11,37	11,44	11,52	11,60	11,68	11,76	11,84	11,92	12,00	12,08
3	12,16	12,24	12,33	12,41	12,49	12,58	12,66	12,75	12,84	12,92
4	13,01	13,10	13,19	13,28	13,37	13,46	13,55	13,64	13,74	13,83
5	13,93	14,02	14,12	14,21	14,31	14,41	14,51	14,60	14,70	14,80
6	14,91	15,01	15,11	15,21	15,32	15,42	15,53	15,64	15,74	15,85
7	15,96	16,07	16,18	16,29	16,40	16,52	16,63	16,75	16,86	16,98
8	17,09	17,21	17,33	17,45	17,57	17,69	17,82	17,94	18,06	18,19
9	18,32	18,44	18,57	18,70	18,83	18,96	19,09	19,23	19,36	19,49
4,0	19,63	19,77	19,91	20,05	20,19	20,33	20,47	20,61	20,76	20,90
1	21,05	21,20	21,35	21,50	21,65	21,80	21,95	22,11	22,26	22,42
2	22,58	22,74	22,90	23,06	23,22	23,39	23,55	23,72	23,89	24,06
3	24,23	24,40	24,57	24,75	24,92	25,10	25,28	25,46	25,64	25,82
4	26,01	26,19	26,38	26,57	26,76	26,95	27,15	27,34	27,54	27,73
5	27,93	28,13	28,34	28,54	28,75	28,95	29,16	29,37	29,58	29,80
6	30,01	30,23	30,45	30,67	30,89	31,12	31,34	31,57	31,80	32,03
7	32,26	32,50	32,74	32,97	33,21	33,46	33,70	33,95	34,20	34,45
8	34,70	34,95	35,21	35,47	35,73	35,99	36,25	36,52	36,79	37,06
9	37,33	37,61	37,88	38,16	38,45	38,73	39,02	39,31	39,60	39,89
5,0	40,19	40,48	40,78	41,09	41,39	41,70	42,01	42,32	42,64	42,96

Таблица 21.3-3 (продолжение)

$$E_1(x) = -Ei(-x), \quad 5 < x < 16$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	$10^{-2} \times 1,148$	1,021	9086	8086	7198	6409	5708	5085	4532	4039
6	$10^{-3} \times 0,3601$	3211	2864	2555	2279	2034	1816	1621	1448	1293
7	$10^{-4} \times 1,155$	1,032	9219	8239	7364	6583	5886	5263	4707	4210
8	$10^{-4} \times 0,3767$	3370	3015	2699	2415	2162	1936	1733	1552	1390
9	$10^{-5} \times 1,245$	1,115	9988	8948	8018	7185	6439	5771	5173	4637
10	$10^{-5} \times 0,4157$	3727	3342	2997	2687	2410	2162	1939	1740	1561
11	$10^{-6} \times 1,400$	1,256	1,127	1,012	0,9080	8149	7315	6566	5894	5291
12	$10^{-6} \times 0,4751$	4266	3830	3440	3089	2774	2491	2238	2010	1805
13	$10^{-7} \times 1,622$	1,457	1,309	1,176	1,057	0,9495	8532	7667	6900	6193
14	$10^{-7} \times 0,5566$	5002	4500	4042	3633	3266	2936	2640	2373	2134

$$\overline{Ei}(x), \quad 5 < x < 16$$

5	$10^2 \times 0,4019$	4328	4662	5026	5419	5847	6310	6813	7360	7954
6	$10^2 \times 0,8599$	9300	1,006	1,089	1,179	1,277	1,384	1,501	1,627	1,765
7	$10^3 \times 0,1915$	2079	2257	2451	2663	2894	3146	3420	3720	4047
8	$10^3 \times 0,4404$	4793	5218	5682	6189	6743	7347	8007	8729	9517
9	$10^4 \times 0,1038$	1132	1235	1347	1471	1605	1752	1913	2089	2282
10	$10^4 \times 0,2492$	2723	2975	3251	3553	3884	4246	4642	5076	5551
11	$10^4 \times 0,6071$	6641	7265	7949	8698	9518	1,042	1,140	1,248	1,366
12	$10^5 \times 0,1496$	1638	1794	1964	2151	2357	2581	2828	3098	3395
13	$10^5 \times 0,3720$	4076	4467	4896	5367	5883	6449	7070	7751	8499
14	$10^5 \times 0,9319$	1,022	1,121	1,229	1,348	1,479	1,622	1,779	1,952	2,142

$$E_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-2} du = e^{-x} - xE_1(x) = x[E_0(x) - E_1(x)]$$

0,0	1,000	0,9497	9131	8817	8535	8278	8040	7818	7610	7412
1	0,7225	7048	6878	6715	6560	6410	6267	6128	5995	5866
2	5742	5622	5505	5393	5283	5177	5074	4974	4877	4783
3	4691	4602	4515	4430	4348	4267	4189	4112	4038	3963
4	3894	3824	3556	3690	3626	3562	3500	3440	3381	3325
5	3266	3211	3157	3104	3052	3001	2951	2902	2855	2808
6	2762	2717	2673	2630	2587	2546	2505	2465	2426	2387
7	2349	2312	2276	2240	2205	2171	2137	2104	2072	2040
8	2009	1978	1948	1918	1889	1860	1832	1804	1777	1750
9	1724	1698	1673	1648	1623	1599	1576	1552	1530	1507
1,0	1485	1463	1442	1421	1400	1380	1360	1340	1321	1302
1	1283	1264	1246	1228	1211	1193	1176	1160	1143	1127
2	1111	1095	1080	1065	1050	1035	1020	1006	*9920	*9781
3	0,99645	9510	9378	9247	9119	8993	8868	8746	8625	8506
4	8389	8274	8160	8048	7938	7829	7722	7617	7513	7411
5	7310	7211	7113	7017	6922	6828	6736	6645	6555	6467
6	6380	6295	6210	6127	6045	5964	5884	5806	5729	5652
7	5577	5503	5430	5358	5287	5217	5148	5080	5013	4947
8	4882	4817	4754	4691	4630	4569	4509	4450	4392	4335
9	4278	4222	4167	4113	4059	4007	3955	3903	3852	3803
2	$10^{-1} \times 0,3753$	3297	2898	2550	2246	1980	1746	1541	1362	1203
3	$10^{-2} \times 1,064$	0,9417	8337	7384	6544	5802	5146	4567	4054	3600
4	$10^{-2} \times 0,3198$	2842	2527	2247	1999	1779	1583	1410	1255	1118
5	$10^{-3} \times 0,9965$	8884	7917	7060	6296	5617	5012	4473	3992	3564
6	$10^{-3} \times 0,3183$	2842	2539	2268	2027	1812	1619	1448	1294	1157
7	$10^{-4} \times 1,035$	0,9259	8283	7411	6632	5935	5313	4756	4258	3812
8	$10^{-4} \times 0,3414$	3057	2738	2453	2198	1969	1764	1581	1417	1270
9	$10^{-5} \times 1,138$	1,021	0,9149	8203	7356	6597	5916	5306	4760	4270

Некоторые интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x C(x) dx &= xC(x) - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x^2, \\ \int_0^x S(x) dx &= xS(x) + \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x^2 - \frac{1}{\pi}, \\ \int_0^x \operatorname{erf} x dx &= x \operatorname{erf} x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-x^2} - 1). \end{aligned} \right\} \quad (21.3-10)$$

Интегралы

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{x}{3} - \frac{1}{7} \frac{x^2}{3!} + \frac{1}{11} \frac{x^5}{5!} \mp \dots, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx &= 1 - \frac{1}{5} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{9} \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{13} \frac{x^6}{6!} \pm \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.3-11)$$

также иногда называются интегралами Френеля.
Функция

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (21.3-12)$$

называется **дополнительным интегралом вероятностей**.

21.4. ГАММА-ФУНКЦИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ФУНКЦИИ

21.4-1. Гамма-функция.

(а) Интегральные представления. Гамма-функция $\Gamma(z)$ обычно определяется как

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (21.4-1)$$

(интеграл Эйлера второго рода)

или для $\operatorname{Re} z < 0$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t-t^z} dt \quad (\text{интегральное представление Ганкеля}), \quad (21.4-2)$$

где контур C идет из $-\infty$ по отрицательной части действительной оси, обходит начало координат в положительном направлении (против часовой стрелки) и опять по отрицательной части оси x возвращается к исходной точке. Это оп-

ределение может быть расширено при помощи аналитического продолжения (п.7.8-1). Единственными особенностями $\Gamma(z)$ в конечной части плоскости являются простые полюсы с вычетами $\frac{(-1)^n}{n!}$ при

$$z = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$\frac{1}{\Gamma(z)}$ есть целая функция. Рис. 21.4-1 представляет график $\Gamma(x)$ для действительных x . Значения $\Gamma(x)$ приведены в табл. 21.4-1. Заметим

$$\left. \begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned} \right\} \quad (21.4-3)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

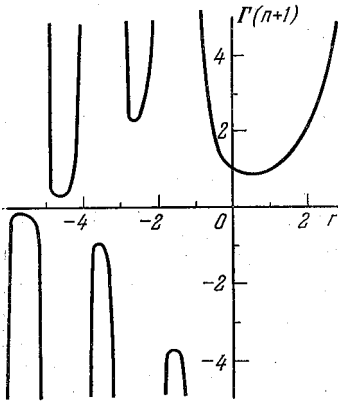


Рис. 21.4-1. График $\Gamma(n+1)$ для действительных значений n .

Последовательные относительные максимумы и минимумы приближенно равны

$$\begin{aligned} \Gamma(1,462) &= 0,886; \\ \Gamma(-0,5040) &= -3,545; \\ \Gamma(-1,573) &= 2,302; \\ \Gamma(-2,611) &= -0,888. \end{aligned}$$

(b) Другие представления для $\Gamma(z)$.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} n^z$$

(определение Эйлера), (21.4-4)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\sigma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

(бесконечное произведение Вейерштрасса) (21.4-5)

C — постоянная Эйлера — Маскерони, определенная как

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = - \int_0^1 \ln \ln \frac{1}{\tau} \, d\tau \approx 0,5772157. \quad (21.4-6)$$

(c) Функциональные уравнения.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (21.4-7)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \quad (21.4-8)$$

$$\Gamma(nz) = \sqrt{\frac{n^{2nz-1}}{(2\pi)^{n-1}}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

($n = 2, 3, \dots$) (теорема умножения Гаусса). (21.4-9)

Таблица 21.4-1

$$\text{Гамма-функция } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Для больших значений аргумента $\Gamma(x)$ вычисляется при помощи формулы

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \dots$$

Пример. $\Gamma(4, 7) = 3,7 \times 2,7 \times 1,7 \times 0,9086 = 15,43$.

Если $x < 1$ и $x \neq 0, -1, -2, \dots$, то

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \dots$$

Примеры.

$$\Gamma(0,7) = \frac{\Gamma(1,7)}{0,7} = 1,298, \quad \Gamma(-3,2) = \frac{\Gamma(1,8)}{(-3,2)(-2,2)(-1,2)(-0,2)(0,8)} = 0,689$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	0,9994	9988	9983	9977	9971	9966	9960	9954	9949
1	0,9943	9938	9932	9927	9921	9916	9910	9905	9899	9894
2	9888	9883	9878	9872	9867	9862	9856	9851	9846	9841
3	9835	9830	9825	9820	9815	9810	9805	9800	9794	9789
4	9784	9779	9774	9769	9764	9759	9755	9750	9745	9740
5	9735	9730	9725	9721	9716	9711	9706	9702	9697	9692
6	9687	9683	9678	9673	9669	9664	9660	9655	9651	9646
7	9642	9637	9633	9628	9624	9619	9615	9610	9606	9602
8	9597	9593	9589	9584	9580	9576	9571	9567	9563	9559
9	9555	9550	9546	9542	9538	9534	9530	9526	9522	9518
1,10	9514	9509	9505	9501	9498	9494	9490	9486	9482	9478
1	9474	9470	9466	9462	9459	9455	9451	9447	9443	9440
2	9436	9432	9428	9425	9421	9417	9414	9410	9407	9403
3	9399	9396	9392	9389	9385	9382	9378	9375	9371	9368
4	9364	9361	9357	9354	9350	9347	9344	9340	9337	9334
5	9330	9327	9324	9321	9317	9314	9311	9308	9304	9301
6	9298	9295	9292	9289	9285	9282	9279	9276	9273	9270
7	9267	9264	9261	9258	9255	9252	9249	9246	9243	9240
8	9237	9234	9231	9229	9226	9223	9220	9217	9214	9212
9	9209	9206	9203	9201	9198	9195	9192	9190	9187	9184
1,20	9182	9179	9176	9174	9171	9169	9166	9163	9161	9158
1	9156	9153	9151	9148	9146	9143	9141	9138	9136	9133
2	9131	9129	9126	9124	9122	9119	9117	9114	9112	9110
3	9108	9105	9103	9101	9098	9096	9094	9092	9090	9087
4	9085	9083	9081	9079	9077	9074	9072	9070	9068	9066
5	9064	9062	9060	9058	9056	9054	9052	9050	9048	9046
6	9044	9042	9040	9038	9036	9034	9032	9031	9029	9027
7	9025	9023	9021	9020	9018	9016	9014	9012	9011	9009
8	9007	9005	9004	9002	9000	8999	8997	8995	8994	8992
9	8990	8989	8987	8986	8984	8982	8981	8979	8978	8976
1,30	8975	8973	8972	8970	8969	8967	8966	8964	8963	8961
1	8960	8959	8957	8956	8954	8953	8952	8950	8949	8948
2	8946	8945	8944	8943	8941	8940	8939	8937	8936	8935
3	8934	8933	8931	8930	8929	8928	8927	8926	8924	8923
4	8922	8921	8920	8919	8918	8917	8916	8915	8914	8913

Таблица 21.4-1 (продолжение)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8912	8911	8910	8909	8908	8907	8906	8905	8904	8903
6	8902	8901	8900	8899	8898	8897	8897	8896	8895	8894
7	8893	8892	8892	8891	8890	8889	8888	8888	8887	8886
8	8885	8885	8884	8883	8883	8882	8881	8880	8880	8879
9	8879	8878	8877	8877	8876	8875	8875	8874	8874	8873
1,40	8873	8872	8872	8871	8871	8870	8870	8869	8869	8868
1	8868	8867	8867	8866	8866	8865	8865	8865	8864	8864
2	8864	8863	8863	8863	8862	8862	8862	8861	8861	8861
3	8860	8860	8860	8860	8859	8859	8859	8859	8858	8858
4	8858	8858	8858	8858	8857	8857	8857	8857	8857	8857
5	8857	8857	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
6	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
7	8856	8856	8856	8857	8857	8857	8857	8857	8857	8857
8	8857	8858	8858	8858	8858	8858	8859	8859	8859	8859
9	8859	8860	8860	8860	8860	8861	8861	8861	8862	8862
1,50	8862	8863	8863	8863	8864	8864	8864	8865	8865	8866
0	8866	8866	8867	8867	8868	8868	8869	8869	8869	8870
1	8870	8871	8871	8872	8872	8873	8873	8874	8875	8875
2	8876	8876	8877	8877	8878	8879	8879	8880	8880	8881
3	8882	8882	8883	8884	8884	8885	8886	8887	8887	8888
4	8889	8889	8890	8891	8892	8892	8893	8894	8895	8896
5	8896	8897	8898	8899	8900	8901	8901	8902	8903	8904
6	8905	8906	8907	8908	8909	8909	8910	8911	8912	8913
7	8914	8915	8916	8917	8918	8919	8920	8921	8922	8923
8	8924	8925	8926	8927	8929	8930	8931	8932	8933	8934
9	8935	8936	8937	8939	8940	8941	8942	8943	8944	8946
1,60	8947	8948	8949	8950	8952	8953	8954	8955	8957	8958
0	8959	8961	8962	8963	8964	8966	8967	8968	8970	8971
1	8972	8974	8975	8977	8978	8979	8981	8982	8984	8985
2	8986	8988	8989	8991	8992	8994	8995	8997	8998	9000
3	9001	9003	9004	9006	9007	9009	9010	9012	9014	9015
4	9017	9018	9020	9021	9023	9025	9026	9028	9030	9031
5	9033	9035	9036	9038	9040	9041	9043	9045	9047	9048
6	9050	9052	9054	9055	9057	9059	9061	9062	9064	9066
7	9068	9070	9071	9073	9075	9077	9079	9081	9083	9084
8	9086	9088	9090	9092	9094	9096	9098	9100	9102	9104
9	9106	9108	9110	9112	9114	9116	9118	9120	9122	9124
1,70	9126	9128	9130	9132	9134	9136	9138	9140	9142	9145
0	9147	9149	9151	9153	9155	9157	9160	9162	9164	9166
1	9168	9170	9173	9175	9177	9179	9182	9184	9186	9188
2	9191	9193	9195	9197	9200	9202	9204	9207	9209	9211
3	9214	9216	9218	9221	9223	9226	9228	9230	9233	9235
4	9238	9240	9242	9245	9247	9250	9252	9255	9257	9260
5	9262	9265	9267	9270	9272	9275	9277	9280	9283	9285
6	9288	9290	9293	9295	9298	9301	9303	9306	9309	9311
7	9314	9316	9319	9322	9325	9327	9330	9333	9335	9338
8	9341	9343	9346	9349	9352	9355	9357	9360	9363	9366
9	9368	9371	9374	9377	9380	9383	9385	9388	9391	9394
1,80	9397	9400	9403	9406	9408	9411	9414	9417	9420	9423
0	9426	9429	9432	9435	9438	9441	9444	9447	9450	9453
1	9456	9459	9462	9465	9468	9471	9474	9478	9481	9484
2	9487	9490	9493	9496	9499	9503	9506	9509	9512	9515
3	9518	9522	9525	9528	9531	9534	9538	9541	9544	9547
4	9551	9554	9557	9561	9564	9567	9570	9574	9577	9580
5	9584	9587	9591	9594	9597	9601	9604	9607	9611	9614

Т а б л и ц а 21.4-1 (продолжение)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,90	9618	9621	9625	9628	9631	9635	9638	9642	9645	9649
1	9652	9656	9659	9663	9666	9670	9673	9677	9681	9684
2	9688	9691	9695	9699	9702	9706	9709	9713	9717	9720
3	9724	9728	9731	9735	9739	9742	9746	9750	9754	9757
4	9761	9765	9768	9772	9776	9780	9784	9787	9791	9795
5	9799	9803	9806	9810	9814	9818	9822	9826	9830	9834
6	9837	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9873
7	9877	9881	9885	9889	9893	9897	9901	9905	9909	9913
8	9917	9921	9925	9929	9933	9938	9942	9946	9950	9954
9	9958	9962	9966	9971	9975	9979	9983	9987	9992	9996
2,00	1,0000	0004	0008	0013	0017	0021	0026	0030	0034	0038

21.4-2. Асимптотическое разложение Стирлинга для $\Gamma(z)$ и $n!$ (см. также пп. 4.4-3, 4.8-6, б и 21.5-4).

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51\,840z^3} - \frac{571}{2\,488\,320z^4} + O(z^{-5}) \right]$$

($|\arg z| < \pi$) (ряд Стирлинга). (21.4-10)

Ряд Стирлинга особенно полезен для больших значений $|z|$; для действительных положительных z абсолютная величина ошибки меньше, чем абсолютная величина последнего из взятых членов. Заметим, в частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \text{или} \quad n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

при $n \rightarrow \infty$ (формула Стирлинга). (21.4-11)

Относительная ошибка формулы Стирлинга убывает с возрастанием n ; асимптотическая формула часто применяется при вычислении отношения двух факториалов или гамма-функций, так как в этом случае относительная ошибка особенно важна.

Отметим более специальные формулы:

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n + \frac{1}{12n}}, \quad (21.4-12)$$

$$n! \approx n^n \sqrt{2\pi n} \exp\left(-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^2} + \dots\right) \quad (21.4-13)$$

при $n \rightarrow \infty$.

21.4-3. Логарифмическая производная гамма-функции.

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{z+k} \right) - C; \quad (21.4-14)$$

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt = - \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln t} + \frac{t^{z-1}}{1-t} \right) dt \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (21.4-15)$$

Заметим, что

$$\psi(1) = -C, \quad \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}. \quad (21.4-16)$$

21.4-4. Бета-функция. Бета-функция (полная) определяется как

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p) \quad (21.4-17)$$

или при помощи аналитического продолжения интеграла

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0)$$

(интеграл Эйлера первого рода), (21.4-18)

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \varphi \cos^{2q-1} \varphi d\varphi. \quad (21.4-19)$$

Отметим формулы

$$B(p, q) B(p+q, r) = B(q, r) B(q+r, p), \quad (21.4-20)$$

$$\frac{1}{B(n, m)} = m \binom{n+m-1}{n-1} = n \binom{n+m-1}{m-1} \quad (n, m = 1, 2, \dots). \quad (21.4-21)$$

21.4-5. Неполные гамма- и бета-функции. Неполная гамма-функция $\Gamma_z(p)$ и неполная бета-функция $B_z(p, q)$ соответственно определяются аналитическим продолжением интегралов

$$\Gamma_z(p) = \int_0^z t^{p-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (21.4-22)$$

$$B_z(p, q) = \int_0^z t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0; 0 < z < 1). \quad (21.4-23)$$

$I_z(p, q) = \frac{B_z(p, q)}{B(p, q)}$ называется отношением неполной бета-функции.

Большое число определенных и неопределенных интегралов, связанных с гамма-функцией содержится в [4.6], [21.3].

21.5. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ФАКТОРИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ. МНОГОЧЛЕНЫ И ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

21.5-1. Биномиальные коэффициенты и факториальные многочлены (см. также п.1.4-1). В табл. 21.5-1 приведены определение и основные свойства биномиальных коэффициентов $\binom{x}{n}$. Выражение

$$x^{[n]} = \binom{x}{n} n! = x(x-1)\dots(x-n+1) =$$

$$= S_0^{(n)} x^n + S_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + S_{n-1}^{(n)} x \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (21.5-1)$$

называется факториальным многочленом степени n . Коэффициенты $S_k^{(n)}$ называются числами Стирлинга первого рода и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$S_k^{(n+1)} = S_k^{(n)} - n S_{k-1}^{(n)} \quad (21.5-2)$$

или из формулы (17). Заметим, что

$$(x+y)^{[n]} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{[k]} y^{[n-k]} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (21.5-3)$$

(биномиальная теорема Вандермонда).

Определение и свойства биномиальных коэффициентов
(см. также пп.1.4-1 и 21.5-4)

(а) Определения и основные свойства. Если x, y, z — действительные числа и n — целое число, то

$$\binom{x}{n} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} & \text{для } n > 0, \\ 1 & \text{для } n = 0, \\ 0 & \text{для } n < 0 \end{cases} \quad (\text{определение}),$$

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{x}{n-j} \binom{y}{j} \quad (n > 0),$$

$$\binom{x}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{z}{j} \binom{x-z}{n-j} \quad (n > 0) \quad (\text{теорема сложения}),$$

$$\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} \quad \binom{-x}{n} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n} \quad (x > 0).$$

(б) Если, в частности, N и n — положительные числа, то

$$\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n} = \begin{cases} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!} & \text{для } N \geq n, \\ 0 & \text{для } N < n; \end{cases}$$

$$\binom{N}{N} = 1, \quad \binom{N}{N-1} = \binom{N}{1} = N,$$

$$\binom{2N}{N} = (-1)^N 2^{2N} \left(\frac{-1}{2}\right)^N = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}^2,$$

$$\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} = 2^N, \quad \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{N}{j} = 0.$$

(с) Если M, N, n — положительные целые числа такие, что $M > n, N > n$, то

$$\binom{N+1}{n+1} = \sum_{j=n}^N \binom{j}{n} = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{n+j}{j},$$

$$\binom{N-1}{n-1} = \sum_{j=n}^N (-1)^{j-n} \binom{N}{j} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{N}{j},$$

$$\binom{N+n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{N}{j} \binom{n}{j},$$

$$\binom{M+N}{N-n} = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N}{n+j} \binom{M}{j}.$$

21.5-2. Многочлены и числа Бернулли (см. также п.21.2-12).

(а) **О п р е д е л е н и я.** Многочлены Бернулли $B_k^{(n)}(x)$ порядка $n=0, 1, 2, \dots$ и степени k определяются из разложения производящей функции (п.8.6-5)

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t - 1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)}(x) \frac{t^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (21.5-4)$$

Многочлены Бернулли порядка 1 обычно называются просто **многочленами Бернулли**. Заметим, что

$$B_k^{(0)}(x) = x^k, \quad B_k^{(n+1)}(x) = \frac{k!}{n!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x-1)(x-2)\dots(x-n)] \quad (n > k). \quad (21.5-5)$$

Числа $B_k^{(n)}(0) = B_k^{(n)}$ называются **числами Бернулли порядка n** ; имеем

$$\frac{t^n}{(e^t - 1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (21.5-6)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(n)} &= 1, & B_1^{(n)} &= -\frac{1}{2}n, & B_2^{(n)} &= \frac{1}{12}n(3n-1), \\ B_3^{(n)} &= -\frac{1}{8}n^2(n-1), & B_4^{(n)} &= \frac{1}{240}n(15n^3-30n^2+5n+2), \\ B_5^{(n)} &= -\frac{1}{96}n^2(n-1)(3n^2-7n-2), \\ B_6^{(n)} &= \frac{1}{4032}n(63n^5-315n^4+315n^3+91n^2-42n-16). \end{aligned} \right\} \quad (21.5-7)$$

Числа Бернулли порядка 1 обычно просто называют **числами Бернулли**. $B_k^{(1)} = B_k$; $B_k = 0$ для всех нечетных $k > 1$, и

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = -\frac{1}{30}, \quad B_4 = \frac{1}{42}, \dots \quad (21.5-8)$$

Числа Бернулли B_{2n} положительны при n нечетном и отрицательны при n четном. Числа Бернулли могут также быть получены с помощью *рекуррентной формулы*

$$B_0 = 1, \quad 1 + \binom{k}{1} B_1 + \binom{k}{2} B_2 + \dots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (21.5-9)$$

или в виде определителей (*формула Лапласа*)

$$B_n = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

(b) Некоторые свойства многочленов и чисел Бернулли

$$\frac{d}{dx} B_k^{(n)}(x) = kB_{k-1}^{(n)}(x), \quad \int_a^x B_k^{(n)}(\xi) d\xi = \frac{1}{k+1} [B_{k+1}^{(n)}(x) - B_{k+1}^{(n)}(a)], \quad (21.5-10)$$

$$\Delta B_m^{(n)}(k) = mB_{m-1}^{(n-1)}(k), \quad \Delta^n B_m^{(n)}(k) = m(m-1)\dots(m-n+1)k^{m-n} \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; m \geq n) \quad (\text{см. п. 20.4-1}), \quad (21.5-11)$$

$$B_k^{(n)}(x+1) = B_k^{(n)}(x) + kB_{k-1}^{(n-1)}(x), \quad B_k^{(n)}(1) = B_k^{(n)} + kB_{k-1}^{(n-1)}, \quad (21.5-12)$$

$$\int_x^{x+1} B_k^{(n)}(\xi) d\xi = \frac{1}{k+1} \Delta B_{k+1}^{(n)}(x) = B_k^{(n-1)}(x), \quad \int_0^1 B_k^{(n)}(\xi) d\xi = B_k^{(n-1)}, \quad (21.5-13)$$

$$B_k^{(n)}(n-x) = (-1)^k B_k^{(n)}(x) \quad (\text{теорема о дополнительном аргументе}); \quad (21.5-14)$$

$$\left. \begin{aligned} B_k^{(n+1)}(x) &= \left(1 - \frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}(x) + k \binom{x}{n-1} B_{k-1}^{(n)}(x), \\ B_k^{(n+1)}(1) &= \left(1 - \frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}, \end{aligned} \right\} \quad (21.5-15)$$

$$B_k^{(1)}(mx) = m^{k-1} \sum_{j=0}^{m-1} B_k^{(1)}\left(x + \frac{j}{m}\right) \quad (\text{теорема умножения});$$

$$\left. \begin{aligned} B_{2k}^{(1)}(x) &= 2(-1)^{k+1}(2k)! \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi r x}{(2\pi r)^{2k}}, \\ B_{2k+1}^{(1)}(x) &= 2(-1)^{k+1}(2k+1)! \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi r x}{(2\pi r)^{2k+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (21.5-16)$$

21.5-3. Формулы, связывающие многочлены и факториальные многочлены.

Многочлены и числа Бернулли связаны с факториальными многочленами, (п.21.5-1) по степеням x ; эти связи используются при решении разностных уравнений и, в частности, при суммировании рядов (п.4.8-5, d).

$$x^{[n]} = \binom{x}{n} n! = x(x-1)\dots(x-n+1) = \\ = B_n^{(n+1)}(x+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}^{(n)} x^k \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (21.5-17)$$

$$\int_0^x (\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-2r+1)d\xi = \int_0^x (\xi-1)^{[2r-1]} d\xi = \\ = \frac{1}{2r} [B_{2r}^{(2r)}(x) - B_{2r}^{(2r)}] \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (21.5-18)$$

21.5-4. Приближенные формулы для $\binom{N}{n}$ (см. также п.21.4-2). Если N — положитель-

ное целое число и $z = \frac{2}{N} \left| \frac{N}{2} - n \right| \ll \sqrt{\frac{1}{N}}$, то

$$\binom{N}{n} \approx \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{N-1}{2} z^2} e^{\alpha \frac{Nz^3}{1-z}} = \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{N-1}{2} z^2} \left(1 + \alpha \frac{Nz^3}{1-z} + \dots\right) \quad \left(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}\right). \quad (21.5-19)$$

Если $n < N$, то

$$\binom{N}{n} \approx \frac{N^n}{n!} e^{-\alpha \frac{n^2}{N-n}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right). \quad (21.5-20)$$

При больших значениях N , n и $N-n$ применяется формула Стирлинга (21.4-11).

21.6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ

21.6-1. Эллиптические функции; общие свойства. Функция $w = f(z)$ комплексной переменной z называется эллиптической функцией, если:

1. $f(z)$ является дwoякопериодической функцией с двумя конечными примитивными периодами (наименьшими периодами), отношение которых не есть действительное число, т. е.

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \operatorname{Im} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \neq 0). \quad (21.6-1)$$

2. Единственные особенности $f(z)$ в конечной части плоскости суть полюсы (см. также пп.7.6-7 — 7.6-9).

Дwoякопериодическая функция повторяет значения, принимаемые ею в параллелограмме периодов, определенном точками $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$, причем две стороны, соединяющие три последние точки, нужно исключить как принадлежащие смежному параллелограмму. Порядком эллиптической функции называется число полюсов в параллелограмме периодов, причем каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Дwoякопериодическая функция, не имеющая полюсов в параллелограмме периодов (целая дwoякопериодическая функция), есть постоянная. Сумма вычетов дwoякопериодической функции в ее полюсах в параллелограмме периодов равна нулю; отсюда следует, что простейшая нетривиальная эллиптическая функция имеет порядок 2. Эллиптическая функция $f(z)$ порядка r принимает каждое значение w в точности r раз в каждом параллелограмме периодов, если это значение считать столько раз, какова кратность корня уравнения $f(z) - w = 0$ (теоремы Лиувилля, см. также п.7.6-5).

Эллиптические функции обычно встречаются в связи с интегралами или дифференциальными уравнениями, содержащими квадратные корни из многочленов третьей или четвертой степени (например, при вычислении длины дуги эллипса, при решении уравнения колебаний маятника; см. также пп.4.6-7 и 21.6-4). Эллиптические функции Вейерштрасса и нормальные эллиптические интегралы образуются из простых функций с известными особенностями и просты для теоретических исследований (пп.21.6-2, 21.6-3 и 21.6-5, б). Для численных расчетов предпочтительнее эллиптические функции Якоби (п. 21.6-7), которые могут рассматриваться как обобщение тригонометрических функций; нормальные эллиптические интегралы Лежандра, тесно связанные с обратными функциями Якоби, также подробно табулированы (пп.21.6-5 и 21.6-6).

21.6-2. \wp -функция Вейерштрасса.

(а) $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_2)$ есть четная эллиптическая функция порядка 2 с периодами ω_1, ω_2 и двукратными полюсами в точках $z = m\omega_1 + n\omega_2$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Функция $\wp(z)$ определяется как

$$\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m, n} \left[\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right] = \wp(-z) \quad \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) > 0 \right]. \quad (21.6-2)$$

Суммирование распространяется по всем целым значениям m и n (положительным, отрицательным и нулевым), за исключением одновременных нулевых значений m и n . Функция $w = \wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = 4w^3 - g_2w - g_3 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3), \quad (21.6-3)$$

где

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad (21.6-4)$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3. \quad (21.6-5)$$

Параметры g_2, g_3 определяют постоянные ω_1, ω_2 , связанные с каждой \wp -функцией, и называются **инвариантами** $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_2) = \wp(z; g_2, g_3)$; заметим, что

$$\wp(z; g_2, g_3) = m^2 \wp\left(mz; \frac{g_2}{m^4}, \frac{g_3}{m^6}\right) \quad (21.6-6)$$

Точки $w = e_1, e_2, e_3$ и $w = \infty$ есть точки ветвления обратной для $\wp(z|\omega_1, \omega_2)$ функции

$$z = \int_{\infty}^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} \quad (21.6-7)$$

(нормальный эллиптический интеграл Вейерштрасса первого рода).

Заметим следующие разложения в ряды:

$$\left. \begin{aligned} \wp(z; g_2, g_3) &= \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \frac{g_2^2}{1200} z^6 + \frac{3g_2 g_3}{6160} z^8 + \dots = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{2k-2} \quad [0 < |z| < \min(|\omega_1|, |\omega_2|)], \\ a_k &= \frac{3}{(k-3)(2k+1)} (a_2 a_{k-2} + a_3 a_{k-3} + \dots + a_{k-2} a_2); \end{aligned} \right\} \quad (21.6-8)$$

$$\left. \begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{\substack{m, n \\ m^2 + n^2 \neq 0}} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right), \\ g_3 &= 140 \sum_{\substack{m, n \\ m^2 + n^2 \neq 0}} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5 q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right) \quad \left(q = e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}}\right); \end{aligned} \right\} \quad (21.6-9)$$

и теорему сложения

$$\wp(A+B) = -\wp(A) - \wp(B) + \frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(A) - \wp'(B)}{\wp(A) - \wp(B)} \right]^2. \quad (21.6-10)$$

(b) Каждая эллиптическая функция $f(z)$ с периодами ω_1, ω_2 может быть представлена как рациональная функция от $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ и $\wp'(z; \omega_1, \omega_2)$. Более точно, $f(z)$ может быть записана в виде

$$f(z) = R_1[\wp(z)] + \wp'(z) R_2[\wp(z)], \quad (21.6-11)$$

где R_1 и R_2 — рациональные функции; $\wp'(z)$ — нечетная эллиптическая функция порядка 3.

21.6-3. ζ - и σ -функции Вейерштрасса.

(а) ζ - и σ -функции Вейерштрасса не являются эллиптическими функциями, однако могут быть использованы для построения эллиптических функций

с заданными особенностями. По определению

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta(z | \omega_1, \omega_2) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{m, n \\ m^2 + n^2 \neq 0}} \left[\frac{1}{z - m\omega_1 - n\omega_2} + \frac{1}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right] = -\zeta(-z), \\ \sigma(z) &= \sigma(z | \omega_1, \omega_2) = \\ &= z \prod_{\substack{m, n \\ m^2 + n^2 \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{m\omega_1 + n\omega_2} \right) \exp \left[\frac{z}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z^2}{2(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right] = -\sigma(-z) \\ &\quad \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) > 0 \right], \end{aligned} \quad (21.6-12)$$

где сумма и произведение распространяются по всем целым (положительным, отрицательным и нулевым) значениям m и n , за исключением одновременных нулевых значений m и n . $\zeta(z)$ имеет простые полюсы и $\sigma(z)$ имеет простые нули в точках $z = m\omega_1 + n\omega_2$, и

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z). \quad (21.6-13)$$

Формулы (8) и (13) позволяют получить разложения функций $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$. Отметим, что

$$\zeta(z) = \int_{\text{const}}^{\wp(z)} \frac{w \, dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} \quad (\text{нормальный эллиптический интеграл Вейерштрасса второго рода}). \quad (21.6-14)$$

Теорема сложения для ζ -функции

$$\zeta(A+B) = \zeta(A) + \zeta(B) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(A) - \wp'(B)}{\wp(A) - \wp(B)}. \quad (21.6-15)$$

Если заданы $2\zeta(\omega_1/2) = \eta_1$, $2\zeta(\omega_2/2) = \eta_2$, то $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ и

$$\zeta(z + m\omega_1 + n\omega_2) = \zeta(z) + m\eta_1 + n\eta_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21.6-16)$$

и

$$\sigma(z + m\omega_1 + n\omega_2) = (-1)^{m+n+mn} \sigma(z) \exp \left[(m\eta_1 + n\eta_2) \left(z + \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{2} \right) \right]. \quad (21.6-17)$$

(b) Каждая эллиптическая функция $f(z)$ порядка r (п.21.6-1) может быть представлена в виде

$$f(z) = A \frac{\prod_{j=1}^r \sigma(z - a_j)}{\prod_{j=1}^r \sigma(z - b_j)} \quad \left(\sum_{j=1}^r a_j = \sum_{j=1}^r b_j \right), \quad (21.6-18)$$

где a и b_j — соответственно нули и полюсы $f(z)$ в параллелограмме периодов.

21.6-4. Эллиптические интегралы (см. также п.4.6-7). Функция

$$F(z) = \int_a^z f(z) \, dz$$

называется **эллиптическим интегралом**, если $f(z)$ есть рациональная функция от z и квадратного корня $\sqrt{G(z)}$ из многочлена

$$G(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4), \quad (21.6-19)$$

не имеющего кратных корней; сюда включается случай многочлена третьей степени $G(z) = G_3(z)$, который рассматривается как многочлен четвертой степени $G(z) = G_4(z)$ при условии, что $\alpha_4 = \infty$ и $a_0 = 0$ так, что формально $a_0(z - \alpha_4) = a_1$. Каждый эллиптический интеграл есть многозначная функция от z ; разные пути интегрирования производят бесчисленное множество значений функции. Точки $z = \alpha_1, z = \alpha_2, z = \alpha_3, z = \alpha_4$ являются *точками ветвления*. Соединяя α_1, α_2 , и α_3, α_4 двумя соответствующим образом определенными разрезами, можно получить связную риманову поверхность (п.7.4-3), подобную поверхности тора.

Эллиптический интеграл первого рода конечен для всех z ; его единственные особенности это точки ветвления $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. **Эллиптический интеграл второго рода** аналитичен всюду в плоскости z , исключая точки ветвления $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и конечное число полюсов. **Эллиптический интеграл третьего рода** имеет логарифмическую особенность (см. также пп.21.6-5 и 21.6-6).

21.6-5. Приведение эллиптических интегралов. Следующие действия приводят каждый эллиптический интеграл к сумме элементарных функций и трех так называемых *нормальных эллиптических интегралов* (см. также [21.2], [21.3]; в [21.3] содержится очень подробная таблица явных формул, выражающих эллиптические интегралы через нормальные эллиптические интегралы).

(а) Алгебраическое приведение. Заметим, что четные степени $\sqrt{G(z)}$ есть многочлены от z , и запишем

$$f(z) = \frac{P_1(z) + P_2(z)\sqrt{G(z)}}{P_3(z) + P_4(z)\sqrt{G(z)}} = \frac{(P_1 + P_2\sqrt{G})(P_3 - P_4\sqrt{G})}{(P_3)^2 - (P_4)^2G} = R_1(z) + \frac{R_2(z)}{\sqrt{G(z)}}, \quad (21.6-20)$$

где $P_i(z)$ — многочлены, а $R_1(z)$ и $R_2(z)$ — рациональные функции. Интегрирование $R_1(z)$ приводит к элементарным функциям (п.4.6-6).

Разлагая рациональную функцию $R_2(z)$ на простейшие дроби (п.1.7-4), приведем вычисление $\int \frac{R_2(z)}{\sqrt{G(z)}} dz$ к интегралам вида

$$I_n = \int \frac{(z-c)^n}{\sqrt{G(z)}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21.6-21)$$

Каждый такой интеграл может быть выражен через I_0, I_1, I_2 и I_{-1} при помощи рекуррентной формулы

$$(2n+6)b_0I_{n+4} + (2n+5)b_1I_{n+3} + (2n+4)b_2I_{n+2} + (2n+3)b_3I_{n+1} + (2n+2)b_4I_n = 2(z-c)^{n+1}\sqrt{G(z)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (21.6-22)$$

где коэффициенты b_k определяются из тождества

$$G(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = b_0(z-c)^4 + b_1(z-c)^3 + b_2(z-c)^2 + b_3(z-c) + b_4. \quad (21.6-23)$$

Формула (22) позволяет явно выразить I_2 через I_0, I_1 и I_{-1} , если $a_0 = 0$ (т. е. $b_0 = 0$) или если c есть корень уравнения $G(z) = 0$ (т. е. $b_4 = 0$). Пусть c не является таким корнем; тогда можно записать I_2 как

$$\int \frac{(z-c)^2}{\sqrt{G(z)}} dz = \int \frac{(z-c')^2}{\sqrt{G(z)}} dz + \alpha \int \frac{z dz}{\sqrt{G(z)}} + \beta \int \frac{dz}{\sqrt{G(z)}}, \quad (21.6-24)$$

где $z=c'$ есть корень $G(z)=0$. Следовательно, каждый эллиптический интеграл может быть выражен в виде суммы элементарных функций и трех сравнительно простых типов эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода (п.21.6-4):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{G(z)}}, \int \frac{z dz}{\sqrt{G(z)}}, \int \frac{dz}{(z-c)\sqrt{G(z)}}. \quad (21.6-25)$$

Первый из этих интегралов обычно рассматривают как **нормальный эллиптический интеграл первого рода**; другие два интеграла (25) непосредственно применяются редко и чаще пользуются их линейными комбинациями — **нормальными эллиптическими интегралами второго и третьего рода** (пп.21.6-2, 21.6-3 и 21.6-6).

(б) Замена переменных. Нормальные формы Вейерштрасса и Римана. В процессе приведения можно ввести новую переменную интегрирования $\tilde{z}=\tilde{z}(z)$, преобразующую эллиптические интегралы (21) или (25) в новые эллиптические интегралы, содержащие более удобные многочлены $\tilde{G}(\tilde{z})$ и, возможно, более простую рекуррентную формулу (22). В частности, дробно-линейное преобразование

$$z = \frac{A\tilde{z} + B}{C\tilde{z} + D} \quad (AD - BC \neq 0) \quad (21.6-26)$$

(п.7.9-2), выбранное так, что точки ветвления $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ преобразуются в точки $\tilde{z} = e_1, e_2, e_3, \infty$, приводит к эллиптическим интегралам в **нормальной форме Вейерштрасса**, где $\tilde{G}(\tilde{z}) = 4\tilde{z}^3 - g_2\tilde{z} - g_3$. Эти интегралы связаны с функцией Вейерштрасса \wp (п.21.6-2). Напротив, преобразование (26), отображающее точки $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ в $\tilde{z} = 0, 1, 1/k, -1/k$, где k есть действительное число между 0 и 1, приводит к эллиптическим интегралам в **нормальной форме Римана**, где $\tilde{G}(\tilde{z}) = \tilde{z}(1-\tilde{z})(1-k^2\tilde{z}^2)$.

(в) Приведение к нормальной форме Лежандра. Более часто требуется преобразовать действительный интеграл $\int_a^x f(x) dx$ к **нормальной форме Лежандра**, где $\tilde{G}(\tilde{z}) = (1-\tilde{z}^2)(1-k^2\tilde{z}^2)$ и k есть действительное число, связанное между 0 и 1. Процесс приведения приводит к действительным нормальным интегралам Лежандра (п.21.6-6), для которых имеются подробные таблицы.

Пусть $G(x)$ — действительный многочлен, положительный в интервале (a, x) ; тогда $\int_a^x f(x) dx$ принимает действительные значения, если интервал интегрирования не содержит действительных корней уравнения $G(x) = 0$. Табл. 21.6-1 содержит преобразования $x=x(\varphi)$, отображающие интервал интегрирования (a, x) в соответствующий интервал действительного аргумента φ между 0 и $\pi/2$, так что

$$\frac{dx}{\sqrt{G(x)}} = \mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0 < k^2 < 1) \quad (21.6-27)$$

для различных возможных типов действительных многочленов четвертой степени $G(x) = G_4(x)$ и третьей степени $G(x) = G_3(x)$. Соответствующие значения постоянных параметров k^2 и μ также табулированы.

Во всех случаях старшие коэффициенты (a_0 или a_1) многочленов $G(x)$ приняты равными 1 или -1 . В случае действительных корней принимаем, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$; комплексные корни обозначаем $b_1 \pm ic_1$ и $b_2 \pm ic_2$, где

Таблица 21.6-1

Преобразование к нормальной форме Лежандра
Все корни $G(x)$ действительны

$G(x)$ корни	Стар- ший коэф- фици- ент	Интервал	Преобразование $x =$	$\sin^2 \varphi =$	Соответствующие значения		k^2	μ
					x	φ		
$G_4(x)$, четыре действитель- ных корня	+1	$\alpha_1 \leq x$ или $x \leq \alpha_4$	$\frac{\alpha_1 \alpha_{42} - \alpha_{23} \alpha_{41} \sin^2 \varphi}{\alpha_{42} - \alpha_{41} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{42} x - \alpha_1}{\alpha_{41} x - \alpha_2}$	α_1	0	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3)$	$\frac{2}{(\alpha_{31} \alpha_{42})^{1/2}}$
		$\alpha_3 \leq x \leq \alpha_2$	$\frac{\alpha_3 \alpha_{42} - \alpha_4 \alpha_{32} \sin^2 \varphi}{\alpha_{42} - \alpha_{32} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{42} x - \alpha_3}{\alpha_{32} x - \alpha_4}$	α_3	0		
	-1	$\alpha_4 \leq x \leq \alpha_3$	$\frac{\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31} x - \alpha_4}{\alpha_{43} \alpha_1 - x}$	α_4	0	$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_1)$	
		$\alpha_2 \leq x \leq \alpha_1$	$\frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31} x - \alpha_2}{\alpha_{21} x - \alpha_3}$	α_2	0		
	1	$\alpha_3 \leq x \leq \alpha_2$	$\alpha_3 + \alpha_{32} \sin^2 \varphi$	$\frac{x - \alpha_3}{\alpha_{32}}$	α_3	0		
		$\alpha_1 \leq x$	$\frac{\alpha_1 - \alpha_2 \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}$	$\frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2}$	α_1	0		
$G_3(x)$, три дей- ствительных корня	-1	$x \leq \alpha_3$	$\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_1 - x}$	$-\infty$	0		$\frac{2}{(\alpha_{31})^{1/2}}$
		$\alpha_2 \leq x \leq \alpha_1$	$\frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31} x - \alpha_2}{\alpha_{21} x - \alpha_3}$	α_2	0		

Таблица 21.6-1 (продолжение)

Преобразование к нормальной форме Лежандра

 $G(x)$ имеет комплексные корни

$G(x)$ корни	Старший коэффициент	Интервал	Преобразование	Вспомогательная величина		Соответствующие значения		k^2	μ
				x	φ	x	φ		
$G_1(x)$, два действительных и два комплексных корня	1	$\alpha_1 \leq x$ или $x \leq \alpha_2$	$x = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \frac{1 - r \cos \varphi}{1 + r \cos \varphi}$	θ_1 — острый угол θ_2 — тупой	α_1	0	$\left[\sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right]^2$	$\frac{(-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}}{c_1}$	
	-1	$\alpha_2 \leq x \leq \alpha_1$	$(\operatorname{tg} \varphi/2)^2 = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \frac{\alpha_1 - x}{x - \alpha_2}$	θ_1, θ_2 — острые	α_2	π		$\frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}}{c_1}$	
$G_2(x)$, два комплексных корня	1	$\alpha_1 \leq x$	$x = \alpha_1 - \frac{c_1}{\cos \theta_1} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$	θ_1 — тупой	α_1	0		$\frac{(-\cos \theta_1)^{1/2}}{c_1}$	
	-1	$x \leq \alpha_1$	$(\operatorname{tg} \varphi/2)^2 = \frac{\cos \theta_1}{c_1} (\alpha_1 - x)$	θ_1 — острый	∞	π	$\left[\sin \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2$	$-\frac{(\cos \theta_1)^{1/2}}{c_1}$	
$G_3(x)$, четыре комплексных корня, $b_1 > b_2$	1	$-\infty < x < \infty$	$x = b_1 + c_1 \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_4}{2} \right)$ $\operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2} \right) = \frac{x - b_1}{c_1}$	$\theta_3, \theta_4, \frac{1}{2}\theta_5$ — острые	$-\infty$ b_1	$-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_3}{2} - \frac{\theta_4}{2}$ $\frac{\theta_3}{2} - \frac{\theta_4}{2}$	$\sin^2 \theta_6$	$\frac{(\cos \theta_5)^{1/2}}{c_1 c_2}$	
			$x = b_1 - c_1 \operatorname{ctg} \varphi$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_1}{b_1 - c_1}$		∞	$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_3}{2} - \frac{\theta_4}{2}$		$\frac{1}{c_1}$	

$b_1 \geq b_2$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Иногда вводятся вспомогательные величины:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \alpha_k - \alpha_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \frac{\beta - \delta}{\beta - \gamma}, \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\alpha_1 - b_1}{c_1}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\alpha_2 - b_1}{c_1}, \\ \operatorname{tg} \theta_3 &= \frac{c_1 + c_2}{b_1 - b_2}, \quad \operatorname{tg} \theta_4 = \frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}, \\ \operatorname{tg}(\theta_3/2) &= \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_4}, \\ \nu &= \operatorname{tg}[(\theta_2 - \theta_1)/2] \operatorname{tg}[(\theta_1 + \theta_2)/2]. \end{aligned} \right\} \quad (21.6-28)$$

21.6-6. Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (см. также пп. 21.6.6-4 и 21.6.6-5).

(а) Определения. Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (неполные) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} F(k, \varphi) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \tilde{F}(k, z) \\ &\text{(нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода);} \\ E(k, \varphi) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz = \tilde{E}(k, z) \\ &\text{(нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода),} \\ \pi(c, k, \varphi) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\sin^2 \varphi - c) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \int_0^z \frac{dz}{(z^2 - c) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \tilde{\pi}(c, k, z) \\ &\text{(нормальный эллиптический интеграл Лежандра третьего рода),} \end{aligned} \right\} \quad (21.6-29)$$

где $z = \sin \varphi$. k есть комплексное число, называемое **модулем** эллиптического интеграла. Эллиптические интегралы (29) все действительны для действительных φ , заключенных между 0 и $\pi/2$, если k^2 — действительное число, заключенное между 0 и 1; для указанных значений φ и k^2 функции $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ табулированы (см. также рис. 21.6-1).

(б) Полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра (см. также рис. 21.6-2). Функции

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \pi/2), \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(k, \pi/2), \end{aligned} \right\} \quad (21.6-30)$$

соответственно известны как **полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода**. k и $k' = \sqrt{1-k^2}$ называются **дополнительными модулями**. $K(k)$ и $K'(k) = K(k')$ называются **связанными**

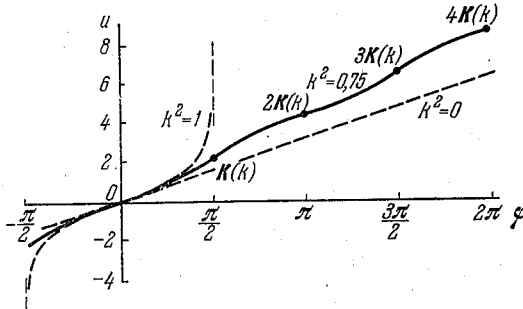


Рис. 21.6-1. Графики эллиптических интегралов $F(k, \varphi)$ как функций от φ для трех значений модуля k .

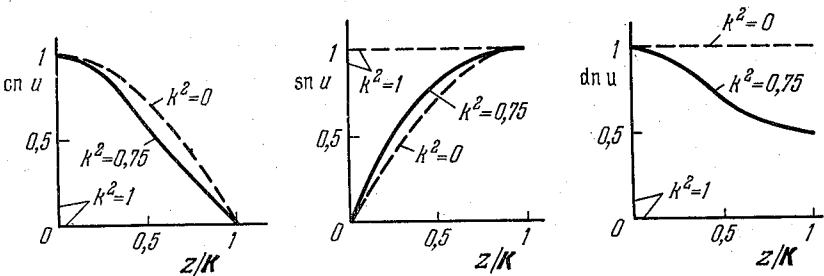


Рис. 21.6-2. Графики эллиптических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$ в зависимости от z/K для трех значений модуля k .

эллиптическими интегралами первого рода; а $E(k)$ и $E'(k) = E(k')$ — связанными эллиптическими интегралами второго рода. Заметим, что

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2} \quad (\text{соотношение Лежандра}) \quad (21.6-31)$$

и

$$K(0) = K'(1) = \frac{\pi}{2}, \quad K(1) = K'(0) = \infty.$$

Различные значения многозначного эллиптического интеграла $F(k, \varphi)$ отличаются на $4mK + 2niK'$; это значит, что обратная функция $\operatorname{sn} z$ (см. п. 21.6-7, а) двоякопериодическая с периодами $4K$ и $2iK'$. Различные значения $E(k, \varphi)$ отличаются на $4mE + 2ni(K' - E')$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; см. также п. 21.6-7, б).

$K(k)$ и $E(k)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} k(1-k^2) \frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2) \frac{dK}{dk} - kK &= 0, \\ k(1-k^2) \frac{d^2E}{dk^2} + (1-k^2) \frac{dE}{dk} + kE &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.6-32)$$

Таблица 21.6-2

Преобразования эллиптических интегралов

k	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$F(k, \varphi)$	$E(k, \varphi)$
$\frac{1}{k}$	$k \sin \varphi$	$\Delta(k, \varphi)$	$kF(k, \varphi)$	$\frac{1}{k} [E(k, \varphi) - k'^2 F(k, \varphi)]$
k'	$-i \operatorname{tg} \varphi$	$\sec \varphi$	$-iF(k, \varphi)$	$i[E(k, \varphi) - F(k, \varphi) - (i \operatorname{tg} \varphi) \Delta(k, \varphi)]$
$\frac{1}{k'}$	$-ik' \operatorname{tg} \varphi$	$\frac{\Delta(k, \varphi)}{\cos \varphi}$	$-ik'F(k, \varphi)$	$\frac{i}{k'} [E(k, \varphi) - k'^2 F(k, \varphi) - (i \operatorname{tg} \varphi) \Delta(k, \varphi)]$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k' \sin \varphi}{\Delta(k, \varphi)}$	$\frac{\cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)}$	$k'F(k, \varphi)$	$\frac{1}{k'} [E'(k, \varphi) - k^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)}]$
$\frac{k'}{ik}$	$-\frac{ik \sin \varphi}{\Delta(k, \varphi)}$	$\frac{1}{\Delta(k, \varphi)}$	$-ikF(k, \varphi)$	$\frac{i}{k} [E(k, \varphi) - F(k, \varphi) - k^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)}]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k') \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)}$	$\frac{\cos^2 \varphi - k' \sin^2 \varphi}{\Delta(k, \varphi)}$	$(1+k')F(k, \varphi)$	$\frac{2}{1+k'} [E(k, \varphi) + k'F(k, \varphi)] - (1-k') \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)}$

так что для действительных $k^2 < 1$

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right], \\ E(k) &= \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (21.6-33)$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция, определенная в п.9.3-9.

(е) Преобразования. Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (29) с модулями k и $k' = 1/k, k', 1/k', ik/k', k'/ik, (1-k')/(1+k'), 2\sqrt{k}/(1+k)$ связаны соотношениями, приведенными в табл. 21.6-2, где

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta(k, \varphi) \quad (21.6-34)$$

(см. также п.21.6-7, а). Табл. 21.6-3 содержит различные соотношения для полных нормальных эллиптических интегралов (30), а табл. 21.6-4 — значения этих интегралов.

Таблица 21.6-3

Преобразования полных эллиптических интегралов

k	$K(k)$	$K'(k)$	$E(k)$	$E'(k)$
$\frac{1}{k}$	$k(K + iK')$	kK'	$\frac{1}{k} [E - k'^2 K - i(E' - k^2 K')]$	$\frac{1}{k} E'$
k'	K'	K	E'	E
$\frac{1}{k'}$	$k'(K' + iK)$	$k'K$	$\frac{1}{k'} [E' - k^2 K' - i(E - k'^2 K)]$	$\frac{1}{k'} E$
$\frac{ik}{k'}$	$k'K$	$k'(K' + iK)$	$\frac{1}{k'} E'$	$\frac{1}{k'} [E' - k^2 K' - i(E - k'^2 K)]$
$\frac{k'}{ik}$	kK'	$k(K + iK')$	$\frac{1}{k} E'$	$\frac{1}{k} [E - k'^2 K - i(E' - k^2 K')]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{1+k'}{2} K$	$(1+k')K'$	$\frac{E + k'K}{1+k'}$	$\frac{2E' - k^2 K'}{1+k'}$
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$(1+k)K$	$\frac{1+k}{2} K'$	$\frac{2E - k'^2 K}{1+k}$	$\frac{E' + kK'}{1+k}$

В частности,

$$K(k) = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right). \quad (21.6-35)$$

Положим в (35) последовательно

$$k'_0 = k', \quad k'_{n+1} = \frac{2\sqrt{k'_n}}{1+k'} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (21.6-36)$$

Таблица 21.6-4

Полные эллиптические интегралы К и Е

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx$$

$$k = \sin \alpha$$

	К	Е		К	Е		К	Е
0°	1,5708	1,5708	50°	1,9356	1,3055	81°	3,2553	1,0338
1	5709	5707	51	9539	2963	81,2	2771	0336
2	5713	5703	52	9729	2870	81,4	2995	0314
3	5719	5697	53	9927	2776	81,6	3223	0302
4	5727	5689	54	2,0133	2681	81,8	3458	0290
5	5738	5678	55	0347	2587	82,0	3699	0278
6	5751	5665	56	0571	2492	82,2	3946	0267
7	5767	5649	57	0804	2397	82,4	4199	0256
8	5785	5632	58	1047	2301	82,6	4460	0245
9	5805	5611	59	1300	2206	82,8	4728	0234
10	5828	5589	60	1565	2111	83,0	5004	0223
11	5854	5564	61	1842	2015	83,2	5288	0213
12	5882	5537	62	2132	1920	83,4	5581	0202
13	5913	5507	63	2435	1826	83,6	5884	0192
14	5946	5476	64	2754	1732	83,8	6196	0182
15	5981	5442	65	3088	1638	84,0	6519	0172
16	6020	5405	65,5	3261	1592	84,2	6852	0163
17	6061	5367	66,0	3439	1545	84,4	7198	0153
18	6105	5326	66,5	3622	1499	84,6	7557	0144
19	6151	5283	67,0	3809	1453	84,8	7930	0135
20	6200	5238	67,5	4001	1408	85,0	8317	0127
21	6252	5191	68,0	4198	1362	85,2	8721	0118
22	6307	5141	68,5	4401	1317	85,4	9142	0110
23	6365	5090	69,0	4610	1272	85,6	9583	0102
24	6426	5037	69,5	4825	1228	85,8	4,0044	0094
25	6490	4981	70,0	5046	1184	86,0	0528	0086
26	6557	4924	70,5	5273	1140	86,2	1037	0079
27	6627	4864	71,0	5507	1096	86,4	1574	0072
28	6701	4803	71,5	5749	1053	86,6	2142	0065
29	6777	4740	72,0	5998	1011	86,8	2744	0059
30	6858	4675	72,5	6256	0968	87,0	3387	0053
31	6941	4608	73,0	6521	0927	87,2	4073	0047
32	7028	4539	73,5	6796	0885	87,4	4811	0041
33	7119	4469	74,0	7081	0844	87,6	5609	0036
34	7214	4397	74,5	7375	0804	87,8	6477	0031
35	7312	4323	75,0	7681	0764	88,0	7427	0026
36	7415	4248	75,5	7998	0725	88,2	8478	0021
37	7522	4171	76,0	8327	0686	88,4	9654	0017
38	7633	4092	76,5	8669	0648	88,6	5,0988	0014
39	7748	4013	77,0	9026	0611	88,8	2527	0010
40	7868	3931	77,5	9397	0574	89,0	4349	0008
41	7992	3849	78,0	9786	0538	89,1	5402	0006
42	8122	3765	78,5	3,0192	0502	89,2	6579	0005
43	8256	3680	79,0	0617	0468	89,3	7914	0004
44	8396	3594	79,5	1064	0434	89,4	9455	0003
45	8541	3506	80,0	1534	0401	89,5	6,1278	0002
46	8691	3418	80,2	1729	0388	89,6	3509	0001
47	8848	3329	80,4	1928	0375	89,7	6385	0001
48	9011	3238	80,6	2132	0363	89,8	7,0440	0000
49	9180	3147	80,8	2340	0350	89,9	7371	0000

Так как при этом $k'_n \rightarrow 1$, то $(1-k'_n)/(1+k'_n) \rightarrow 0$; учитывая, что $K(0) = \pi/2$, получим формулу

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+k'_n}, \tag{21.6-37}$$

которую можно использовать для вычисления $K(k)$. $K(k, \varphi)$ может быть получено в аналогичном виде.

21.6-7. Эллиптические функции Якоби.

(а) Определения. Обращение эллиптических интегралов $z = F(k, \varphi)$ и $z = \tilde{F}(k, w)$ (п.21.6-6, а) порождает функции $\text{am } z$ (амплитуда z) и $\text{sn } z$ (синус амплитуды z), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \text{am } z, \quad z &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi), \\ w = \text{sn } z &= \sin(\text{am } z), \\ z &= \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2 w^2)}} = \tilde{F}(k, w). \end{aligned} \right\} \tag{21.6-38}$$

Кроме этого, определяются функции $\text{cn } z$ (косинус амплитуды z) и $\text{dn } z$ (дельта амплитуды z)

$$\left. \begin{aligned} \text{cn } z &= \cos(\text{am } z) = \sqrt{1-\text{sn}^2 z} \quad (\text{cn } 0 = 1), \\ \text{dn } z &= \Delta(k, \text{am } z) = \sqrt{1-k^2 \text{sn}^2 z} \quad (\text{dn } 0 = 1). \end{aligned} \right\} \tag{21.6-39}$$

$\text{sn } z$, $\text{cn } z$ и $\text{dn } z$ называются эллиптическими функциями Якоби. Данное значение параметра k явно не участвует в обозначениях этих функций; когда это необходимо, будем писать $\text{sn}(z, k)$, $\text{cn}(z, k)$, $\text{dn}(z, k)$. k' , K , K' , E и E' определены в п.21.6-6, б. Эллиптические функции Якоби все действительны для действительных z и действительных k^2 , заключенных между 0 и 1 и приводятся к элементарным функциям при $k^2=0$ и $k^2=1$; в частности,

$$\text{sn}(z, 0) = \sin z, \quad \text{cn}(z, 0) = \cos z. \tag{21.6-40}$$

Эллиптические функции Якоби могут быть также определены в терминах \wp -, ζ -, σ - или θ -функций соотношениями п.21.6-9.

(б) Различные свойства и специальные значения. Все эллиптические функции Якоби имеют порядок 2 (п.26.1-1); их периоды, нули (простые) и полюсы (простые) приведены в табл. 21.6-5. $\text{sn } z$ есть нечетная функ-

Таблица 21.6-5

Периоды, нули, полюсы и вычеты эллиптических функций Якоби

Функция	Примитивные периоды	Нули	Полюсы	Вычеты
$\text{sn}(z, k)$	$\frac{4K}{2iK'}$	$2mK + 2niK'$	$2mK + (2n+1)iK'$	$\frac{(-1)^m}{k}$
$\text{cn}(z, k)$	$\frac{4K}{2K + 2iK'}$	$(2m+1)K + 2niK'$		$\frac{(-1)^{m+n}}{ik}$
$\text{dn}(z, k)$	$\frac{2K}{4iK'}$	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$		$(-1)^{n+1}i$

ция, а $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{dn} z$ — четные функции от z . В табл. 21.6-6 приведены специальные значения функций. Табл. 21.6-7 показывает эффект изменения аргумента на четверть и половину периода; при этом используются удобные обозначения

$$\operatorname{sn}(z, k) = s, \quad \operatorname{cn}(z, k) = c, \quad \operatorname{dn}(z, k) = d \quad (21.6-41)$$

(например, $ks = k \operatorname{sn}(z, k)$).

Отметим еще соотношения:

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1, \quad \operatorname{dn}^2 z - k^2 \operatorname{cn}^2 z = k'^2; \quad (21.6-42)$$

$$\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z; \quad (21.6-43)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(2\mathbf{K}-z) &= \operatorname{sn} z, & \operatorname{sn}(2i\mathbf{K}'-z) &= -\operatorname{sn} z, \\ \operatorname{cn}(2\mathbf{K}-z) &= -\operatorname{cn} z, & \operatorname{cn}(2i\mathbf{K}'-z) &= -\operatorname{cn} z, \\ \operatorname{dn}(2\mathbf{K}-z) &= \operatorname{dn} z, & \operatorname{dn}(2i\mathbf{K}'-z) &= -\operatorname{dn} z; \end{aligned} \right\} \quad (21.6-44)$$

$$\tilde{E}(k, \operatorname{sn} z) = \int_0^z \operatorname{dn}^2 z \, dz. \quad (21.6-45)$$

(с) Теоремы сложения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(A+B) &= \frac{\operatorname{sn} A \operatorname{cn} B \operatorname{dn} B + \operatorname{sn} B \operatorname{cn} A \operatorname{dn} A}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 A \operatorname{sn}^2 B}, \\ \operatorname{cn}(A+B) &= \frac{\operatorname{cn} A \operatorname{cn} B - \operatorname{sn} A \operatorname{dn} A \operatorname{sn} B \operatorname{dn} B}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 A \operatorname{sn}^2 B}, \\ \operatorname{dn}(A+B) &= \frac{\operatorname{dn} A \operatorname{dn} B - k^2 \operatorname{sn} A \operatorname{cn} A \operatorname{sn} B \operatorname{cn} B}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 A \operatorname{sn}^2 B}. \end{aligned} \right\} \quad (21.6-46)$$

(d) Дифференцирование:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\operatorname{sn} z)}{dz} &= \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \\ \frac{d(\operatorname{cn} z)}{dz} &= -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \\ \frac{d(\operatorname{dn} z)}{dz} &= -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z. \end{aligned} \right\} \quad (21.6-47)$$

(е) Преобразования. Табл. 21.6-8 показывает соотношения между эллиптическими функциями Якоби с модулями k и ik/k' , k' , $1/k$, $1/k'$, k'/ik (см. также п. 21.6-6, с).

(f) Разложения в ряды:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} z &= z - (1+k^2) \frac{z^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \operatorname{cn} z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{z^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4) \frac{z^6}{6!} + \dots, \\ \operatorname{dn} z &= 1 - k^2 \frac{z^2}{2!} + k^2(4+k^2) \frac{z^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4) \frac{z^6}{6!} + \dots, \\ |z| &< \min(|\mathbf{K}'|, |2\mathbf{K}+i\mathbf{K}'|, |2\mathbf{K}-i\mathbf{K}'|). \end{aligned} \right\} \quad (21.6-48)$$

Таблица 21.6-6

Специальные значения эллиптических функций Якоби

$$\operatorname{sn} \left(\frac{1}{2}mK + \frac{1}{2}nK' \right)$$

$\frac{1}{2}mK$ $\frac{1}{2}nK'$	0	$\frac{1}{2}K$	K	$\frac{3}{2}K$
0	0	$(1+k')^{-1/2}$	1	$(1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2} + i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2} - i(1-k)^{1/2}]$
iK'	∞	$(1-k)^{1/2}$	k^{-1}	$(1-k)^{-1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2} - i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2} + i(1-k)^{1/2}]$
$\operatorname{cn} \left(\frac{1}{2}mK + \frac{1}{2}nK' \right)$				
0	1	$k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$	0	$-k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}(1-k)^{-1/2}$	$-ik^{-1}k'$	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$
$\operatorname{dn} \left(\frac{1}{2}mK + \frac{1}{2}nK' \right)$				
0	1	$k'^{1/2}$	k'	$k'^{1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$(1+k)^{1/2}$	$(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k)^{1/2} - i(1-k')^{1/2}]$	$(1-k)^{1/2}$	$(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k')^{1/2} + i(1-k')^{1/2}]$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}$	0	$ik'^{1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-(1+k)^{1/2}$	$-(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k)^{1/2} + i(1-k')^{1/2}]$	$-(1-k)^{1/2}$	$-(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k')^{1/2} - i(1-k')^{1/2}]$

Таблица 21.6-7

Изменение переменной на четверть и половину периода

$mK \backslash niK'$	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$sn(mK + niK' \pm z)$					
$-iK'$	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
0	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$
iK'	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
$2iK'$	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$
$cn(mK + niK' \pm z)$					
$mK \backslash niK'$	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-ik'/(hc)$	$\pm id/(hs)$	$ik'/(hc)$	$\mp id/(hs)$	$-ik'/(hc)$
0	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$
iK'	$ik'/(hc)$	$\mp id/(hs)$	$-ik'/(hc)$	$\pm id/(hs)$	$ik'/(hc)$
$2iK'$	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$
$dn(mK + niK' \pm z)$					
$mK \backslash niK'$	$-K$	0	K	$2K$	
$-iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	
0	k'/d	d	k'/d	d	
iK'	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$	
$2iK'$	$-k'/d$	$-d$	$-k'/d$	$-d$	
$3iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	

Таблица 21.6-8.

Преобразования первого порядка эллиптических функций Якоби

Преобразование	z	k	k'	K	K'	$\operatorname{sn}(z, k)$	$\operatorname{cn}(z, k)$	$\operatorname{dn}(z, k)$
A	$k'z$	$\frac{i k}{k'}$	$\frac{1}{k'}$	$k'K$	$k'(K' + iK)$	$k' \frac{\operatorname{sn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(z, k)}$
B	$-iz$	k'	k	K'	K	$-i \frac{\operatorname{sn}(z, k)}{\operatorname{cn}(z, k)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(z, k)}$	$\frac{\operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{cn}(z, k)}$
C	kz	$\frac{1}{k}$	$\frac{k'}{i k}$	$k(K + iK')$	kK'	$k \operatorname{sn}(z, k)$	$\operatorname{dn}(z, k)$	$\operatorname{cn}(z, k)$
D	$-ik'z$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{k}{i k'}$	$k'(K' + iK)$	$k'K$	$-ik' \frac{\operatorname{sn}(z, k)}{\operatorname{cn}(z, k)}$	$\frac{\operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{cn}(z, k)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(z, k)}$
E	$-ikz$	$\frac{k'}{i k}$	$\frac{1}{k}$	kK'	$k(K + iK')$	$-ik \frac{\operatorname{sn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(z, k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)}$

21.6-8. Тэта-функции Якоби.

(а) Даны комплексная переменная v и комплексный параметр $q = e^{i\pi\tau}$ такой, что τ имеет положительную мнимую часть. Четыре тэта-функции ¹⁾

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v|\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin(2n+1)\pi v =$$

$$= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} (e^{i\pi v})^{2n-1},$$

$$\vartheta_2(v) = \vartheta_2(v|\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)\pi v =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} (e^{i\pi v})^{2n-1},$$

$$\vartheta_3(v) = \vartheta_3(v|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} (e^{i\pi v})^{2n},$$

$$\vartheta_4(v) = \vartheta_4(v|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (e^{i\pi v})^{2n}$$

(21.6-49)

¹⁾ Иногда $\vartheta_4(v)$ обозначают через $\vartheta_0(v)$ или $\vartheta(v)$.

— все периодические целые функции от v соответственно с периодами 2, 2, 1, 1. Четыре тэта-функции (49) имеют нули соответственно в точках $v = m + n\tau$, $m + n\tau + 1/2$, $m + (n+1/2)\tau + 1/2$ и $m + (n+1/2)\tau$, где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; эти нули позволяют представить тэта-функции в виде бесконечных произведений (7.6-2) [21.3].

Тэта-функции не являются эллиптическими функциями. Очень хорошая сходимость рядов (49) позволяет вычислять различные эллиптические функции и эллиптические интегралы с помощью соотношений п.21.6-9; тэта-функции являются решениями дифференциального уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0, \tag{21.6-50}$$

которое связано с уравнением диффузии (п.10.3-4, б).

(б) Отметим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) &= \vartheta_2(v), & \vartheta_2\left(v + \frac{1}{2}\right) &= -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) &= \vartheta_4(v), & \vartheta_4\left(v + \frac{1}{2}\right) &= \vartheta_3(v), \end{aligned} \right\} \tag{21.6-51}$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) &= ie^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)} \vartheta_4(v), & \vartheta_2\left(v + \frac{\tau}{2}\right) &= e^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)} \vartheta_3(v), \\ \vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) &= e^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)} \vartheta_2(v), & \vartheta_4\left(v + \frac{\tau}{2}\right) &= ie^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)} \vartheta_1(v). \end{aligned} \right\} \tag{21.6-52}$$

(в) Для отыскания $\vartheta_i\left(\frac{v}{c\tau + D} \middle| \frac{A\tau + B}{c\tau + D}\right)$ (и таким же образом преобразованным эллиптическим функциям, п.21.6-9) применяются формулы:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(v|\tau+1) &= e^{i\pi/4} \vartheta_1(v|\tau), & \vartheta_2(v|\tau+1) &= e^{i\pi/4} \vartheta_2(v|\tau), \\ \vartheta_3(v|\tau+1) &= \vartheta_4(v|\tau), & \vartheta_4(v|\tau+1) &= \vartheta_3(v|\tau); \end{aligned} \right\} \tag{21.6-53}$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{i\pi v^2/\tau} \vartheta_1(v|\tau), \\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{i\pi v^2/\tau} \vartheta_4(v|\tau), \\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{i\pi v^2/\tau} \vartheta_3(v|\tau), \\ \vartheta_4\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{i\pi v^2/\tau} \vartheta_2(v|\tau). \end{aligned} \right\} \tag{21.6-54}$$

(д) Значения четырех тэта-функций и их производных при $v = 0$ для краткости обозначают так: $\vartheta_i(0) = \vartheta_i$, $\vartheta_i'(0) = \vartheta_i'$, ... ($i = 1, 2, 3, 4$). Эти значения удовлетворяют соотношениям

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4, \quad \frac{\vartheta_1''}{\vartheta_1} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}. \tag{21.6-55}$$

21.6-9. Соотношения между эллиптическими функциями Якоби, Вейерштрасса и тэта-функциями. Если различные параметры, входящие в определения $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ и $\vartheta_i(z)$ (пп.21.6-2, 21.6-3, 21.6-6 – 21.6-8), связаны соотношениями

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2, \quad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \left(\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\right)^2, \tag{21.6-56}$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\omega_1}{2} \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2, & iK' &= \frac{\omega_2}{2} \sqrt{e_1 - e_3} = \tau K, \\ \tau &= \frac{iK'}{K} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (\operatorname{Im} \tau > 0) \end{aligned} \right\} \tag{21.6-57}$$

И

$$w = z\sqrt{e_1 - e_3} = 2Kv, \quad v = \frac{z}{\omega_1} = \frac{w}{2K}, \quad (21.6-58)$$

ТО

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} w &= \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}} = \frac{\vartheta_3 \vartheta_1(v)}{\vartheta_2 \vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{cn} w &= \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}} = \frac{\vartheta_4 \vartheta_2(v)}{\vartheta_2 \vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{dn} w &= \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}} = \frac{\vartheta_4 \vartheta_3(v)}{\vartheta_2 \vartheta_4(v)}; \end{aligned} \right\} \quad (21.6-59)$$

$$\wp(z) = e_1 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w} = e_2 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 w}. \quad (21.6-60)$$

21.7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

21.7-1. Введение. Ортогональные многочлены, рассматриваемые в пп. 21.7-1 — 21.7-8, являются специальными решениями линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, связанных с гипергеометрическим дифференциальным уравнением (9.3-31) (многочлены Лежандра, Чебышева и Якоби) или с вырожденным гипергеометрическим дифференциальным уравнением (9.3-42) (многочлены Лагерра и Эрмита). Эти специальные решения порождаются специальными однородными краевыми условиями; каждый класс ортогональных многочленов есть последовательность собственных функций для проблемы собственных значений типа Штурма — Лиувилля. Для большинства приложений важны только действительные значения аргумента $z = x^*$).

Многочлены $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ каждого типа определяются с точностью до постоянных множителей, которые обычно (но не всегда) выбираются так, что коэффициент при x^n в многочлене n -й степени $\psi_n(x)$ равен единице. Последовательные многочлены каждого типа могут быть определены

- 1) в терминах соответствующих *гипергеометрических рядов* (п.9.3-9,а) или *вырожденных гипергеометрических рядов* (п.9.3-10);
- 2) с помощью *рекуррентных формул*, получающихся из дифференциальных уравнений;
- 3) последовательным дифференцированием *производящей функции* $\Phi(x, s)$ (см. также п.8.6-5);
- 4) процессом *ортогонализации Грама — Шмидта* степеней 1, x, x^2, \dots с соответствующим весом (п.15.2-5);
- 5) из *интегральных представлений* (п.21.7-7), которые обычно связаны с интегральными преобразованиями решений дифференциальных уравнений или с коэффициентами рядов Тейлора или Лорана производящих функций.

В табл. 21.7-1 приведены основные формулы.

Разложения в ряды по ортогональным многочленам производятся в смысле п.15.2-4,а и дают важные приближения с минимальной соответственно определенной средней квадратичной ошибкой (п.15.2-6; см. также пп.20.5-1, 20.6-3).

*) Ортогональные многочлены в комплексной области рассматриваются в [7.1], [21.3]

Ортогональные многочлены Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита
(см. также пп. 21.7.1 - 21.7.7)

Таблица 21.7-1

	Многочлены Лежандра $P_n(x)$	Многочлены Чебышева $T_n(x)$
1	<p>Дифференциальное уравнение</p> $(1-z^2) \frac{d^2w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0$	<p>Многочлены Чебышева $T_n(x)$</p> $(1-x^2) \frac{d^2w}{dx^2} - z \frac{dw}{dx} + n^2w = 0$
2	<p>(Действительная) область и крайние условия</p> <p>$w(z)$ однозначна и аналитична для $z = x \in (-1, 1)$,</p> $\int_{-1}^1 w^2(x) dx \text{ существует}$	<p>$w(z)$ однозначна и аналитична для $z = x \in (-1, 1)$,</p> $\int_{-1}^1 \frac{w^2(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ существует}$
3	<p>Ортогональность и нормировка</p> $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases}$	$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi/2 & (m = n \neq 0), \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases}$
4	<p>Ряды (9.3.32) и (9.3.43)</p> $P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{2n!}{2^n(n!)^2} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}; \frac{1}{x^2}\right)$	$T_n(x) = F\left(n, -n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$
5	<p>Рекуррентные формулы</p> $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) = x P_n(x) + \frac{x^2-1}{n+1} \frac{dP_n}{dx}$	$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$
6	<p>Обобщенная формула Родрига</p> $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$	$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$
7	<p>Производящая функция</p> $\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n & (s < 1), \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^{-n-1} & (s > 1) \end{cases}$	$\frac{1-sx}{1-2sx+s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) s^n \quad (s < 1)$
8	<p>Первые пять многочленов</p> $\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ \frac{1}{4}(3x^2-1) &= \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1) \\ \frac{1}{8}(5x^3-3x) &= \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta) \\ \frac{1}{16}(35x^4-30x^2+3) &= \frac{1}{16}(35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9) \\ \frac{1}{32}(63x^5-70x^3+15x) & \dots \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ 2x^2-1 &= \cos 2\theta \\ 4x^3-3x &= \cos 3\theta \\ 8x^4-8x^2+1 &= \cos 4\theta \\ 16x^5-20x^3+5x &= \cos 5\theta \\ T_n(\cos \theta) &= \cos n\theta \end{aligned}$

Т а б л и ц а 21.7-1 (продолжение)

	Многочлены Лагерра ¹⁾ $L_n(x)$	Многочлены Эрмита ²⁾ $H_n(x)$
1	Дифференциальное уравнение $z \frac{d^2w}{dz^2} + (1-2z) \frac{dw}{dz} + nw = 0$	$\frac{d^2w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + 2nw = 0$
2	(Действительная) область и крайние условия $\int_0^\infty e^{-xz} L_n(x) dx$ существует $w(z)$ однозначна и аналитична для $z = x \in (0, \infty)$,	$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} w^2(x) dx$ существует $w(z)$ однозначна и аналитична для $z = x \in (-\infty, \infty)$,
3	Ортогональность и нормировка $\int_0^\infty e^{-xz} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ (n!)^2 & (m = n) \end{cases}$	$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n) \end{cases}$
4	Ряды (9.3-32) и (9.3-43) $L_n(x) = n! F(-n; 1; x) = (-1)^n \left[x^n - n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} \mp \dots \right]$	$H_{2m}(x) = (-1)^m 2^m (2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1 F(-n; 1/2; x^2),$ $H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{m+1} (2n+1)(2n-1) \dots 3 \cdot 1 x F(-n; 3/2; x^2)$
5	Рекуррентные формулы $L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x),$ $\frac{dL_{n+1}}{dx} = (n+1) \left[\frac{dL_n}{dx} - L_n(x) \right]$	$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x),$ $\frac{dH_n}{dx} = 2n H_{n-1}(x)$
6	Обобщенная формула Роурига $L_n(x) = e^{xz} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-xz})$	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$
7	Производящая функция $e^{-s} \frac{1-s}{1-s} = \sum_{n=0}^\infty L_n(x) \frac{s^n}{n!} \quad (0 < s \leq \infty)$	$e^{-s^2 + 2sz} = \sum_{n=0}^\infty H_n(x) \frac{s^n}{n!}$
8	Первые пять многочленов 1 $-x+1$ x^2-4x+2 $-x^3+9x^2-18x+6$ $x^4-16x^3+72x^2-96x+24$ $-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$	1 $2x$ $4x^2-2x$ $8x^3-12x$ $16x^4-48x^2+12$ $32x^5-160x^3+120x$

¹⁾ Иногда многочлены $\frac{1}{n!} L_n(x)$ обозначают через $L_n(x)$.

²⁾ Иногда рассматривают многочлены $He_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x/\sqrt{2})$, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению $\frac{d^2w}{dz^2} - z \frac{dw}{dz} + nw = 0$.

21.7-2. Действительные нули ортогональных многочленов. Все нули каждого из ортогональных многочленов, рассмотренных в пп. 21.7-1 — 21.7-8 просты. Два последовательных нуля $\psi_n(x)$ разделяются одним нулем $\psi_{n+1}(x)$ и по меньшей мере одним нулем $\psi_m(x)$ для каждого $m > n$.

21.7-3. Функции Лежандра (см. также пп. 21.8-10, 21.8-11 и 21.8-13). Дифференциальное уравнение (дифференциальному уравнению Лежандра) и рекуррентным формулам для многочленов Лежандра (табл. 21.7-1) удовлетворяют не только многочлены Лежандра первого рода $P_n(z)$ табл. 21.7-1, но также и функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$; для $z = x$ и $-1 < x < 1$ они равны

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - 1) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2} x, \dots \quad (21.7-1)$$

Более общо, метод п.9.3-8,b позволяет получить линейно независимые решения $P_n(z)$, $Q_n(z)$ дифференциального уравнения Лежандра (функции Лежандра первого и второго рода) для нецелых положительных и отрицательных чисел, а также для комплексных значений $n = \alpha$; решения для $n = \alpha$ и $n = -\alpha - 1$ тождественны.

Значения первых многочленов Лежандра приведены в табл. 21.7-2.

21.7-4. Многочлены Чебышева первого и второго рода. Дифференциальному уравнению и рекуррентным формулам для многочленов Чебышева (табл. 21.7-1) удовлетворяют не только многочлены Чебышева первого рода

$$T_n(x) = \cos (n \arccos x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (21.7-2)$$

табл. 21.7-1, но также функции Чебышева второго рода

$$U_0(x) = \arcsin x,$$

$$U_n(x) = \sin (n \arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{d}{dx} T_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (21.7-3)$$

Функции $U_n(x)$ не являются многочленами от x ; функция $\frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}}{dx}$ есть многочлены; их обычно называют многочленами Чебышева второго рода. Отметим формулы

$$T_n(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{d}{dx} U_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (21.7-4)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(x) U_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \text{ или } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{при } n = m \neq 0. \end{cases} \quad (21.7-5)$$

21.7-5. Присоединенные многочлены и функции Лагерра (см. также пп. 9.3-10 и 10.4-6).

(а) Присоединенные (или обобщенные) многочлены Лагерра степени $n - k$ и порядка k ¹⁾

$$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x) = (-1)^k n! \binom{n}{k} F(k-n; k+1; x)$$

$$(n = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (21.7-6)$$

где $F(k-n; k+1; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (k+1-z) \frac{dw}{dz} + (n-k)w = 0 \quad (21.7-7)$$

для целых значений $n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n$. Уравнение (7) приводится к дифференциальному уравнению для многочленов Лагерра (табл. 21.7-1) при $k = 0$.

¹⁾ Эти обозначения применяются в большинстве руководств по теоретической физике. Чаще присоединенные многочлены Лагерра степени n определяются как $L_n^{(k)}(x) = (-1)^k L_{n+k}^k(x)/(n+k)!$; эти многочлены удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (k+1-z) \frac{dw}{dz} + nw = 0 \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Производящая функция для присоединенных многочленов Лагерра

$$\left(\frac{s}{s-1}\right)^k e^{\frac{sz}{s-1}} = \sum_{n=k}^{\infty} L_n^k(x) \frac{s^n}{n!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (21.7-8)$$

Условия ортогональности и нормировки

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!} \delta_{n,m}. \quad (21.7-9)$$

Если в качестве n и k допускаются нецелые действительные числа или комплексные числа, то дифференциальное уравнение (7) определяет **обобщенные функции Лагерра**. Эти функции, частным случаем которых являются многочлены (6), суть вырожденные гипергеометрические функции (п.9.3-10), причем $a = k - n$, $c = k + 1$.

(b) Функции $\psi_{nj}(x) = x^j e^{-x/2} L_{n+j}^{2j+1}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$; $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$),

которые часто называются **присоединенными функциями Лагерра**, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{dw}{dz} + \left[n - \frac{z}{4} - \frac{j(j+1)}{z} \right] w = 0 \quad (n = 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (21.7-10)$$

и условию

$$\int_0^{\infty} \psi_{nj}^2(x) x^2 dx = \frac{2n[(n+j)!]^3}{(n-j-1)!} \quad (21.7-11)$$

(см. также п.10.4-6).

21.7-6. Функции Эрмита. Функции $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), обычно называемые **функциями Эрмита**, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + (2n+1-x^2) w = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (21.7-12)$$

и условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}. \quad (21.7-13)$$

21.7-7. Некоторые интегральные формулы.

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos t)^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{интеграл Лапласа}), \quad (21.7-14)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-x)^{n+1}} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{интеграл Шлеффли}). \quad (21.7-15)$$

Контур интегрирования в формуле (15) окружает точку $z = x$.

$$H_n(x) = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x\sqrt{2} + it)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (21.7-16)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} x^k e^{-x} [L_n^k(x)]^2 dx &= \frac{(n!)^3}{(n-k)!}, \\ \int_0^{\infty} x^{k+1} e^{-x} [L_n^k(x)]^2 dx &= \frac{(n!)^3}{(n-k)!} (2n-k+1), \\ \int_0^{\infty} x^{k+2} e^{-x} [L_n^k(x)]^2 dx &= \frac{(n!)^3}{(n-k)!} (6n^2 - 6nk + k^2 + 6n - 3k + 2) \end{aligned} \right\} \quad (21.7-17)$$

$$(n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^{n-1} n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m-1} + 2^n (n+1)! \sqrt{\pi} \delta_{n,m+1}. \quad (21.7-18)$$

21.7-8. Многочлены Якоби и Гегенбауэра.

(а) Многочлены Якоби (гипергеометрические многочлены) есть специальный случай гипергеометрических функций

$$\psi_n(x) = F(-n, \alpha+n; \gamma; x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+n}] \quad (21.7-19)$$

п.9.3-9); они удовлетворяют условиям ортогональности *)

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{n,m} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\dots(\alpha-\gamma+n)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{n!}{\alpha+2n} \quad (21.7-20)$$

(Re $\gamma > 0$; Re $(\alpha-\gamma) > -1$.)

(б) Функции

$$C_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} F\left(n+2\alpha, -n; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \quad (21.7-21)$$

называются многочленами Гегенбауэра (ультрасферическими). Они представляют обобщение многочленов Лежандра (табл. 21.7-1), к которым и приводятся при $\alpha = \frac{1}{2}$. Многочлены Гегенбауэра удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(z^2-1) \frac{d^2w}{dz^2} + (2\alpha+1)z \frac{dw}{dz} - n(n+2\alpha)w = 0 \quad (21.7-22)$$

и условиям ортогональности

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-1/2} C_n^\alpha(x) C_m^\alpha(x) dx = \delta_{n,m} \frac{\pi \Gamma(2\alpha+n)}{2^{2\alpha-1}(\alpha+n)n![\Gamma(\alpha)]^2} \quad (21.7-23)$$

Многочлены Гегенбауэра могут быть получены как коэффициенты разложения в степенной ряд производящей функции

$$(1-2sx+s^2)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x) s^n. \quad (21.7-24)$$

21.8. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА И СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

21.8-1. Функции Бесселя и другие цилиндрические функции.

(а) Цилиндрическая функция (круговая цилиндрическая функция) порядка m есть решение $w = z_m(z)$ линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) w = 0 \quad (\text{дифференциальное уравнение Бесселя}), \quad (21.8-1)$$

где m — действительное число; цилиндрические функции $Z_m(z)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$Z_{m+1}(z) = \frac{2m}{z} Z_m(z) - Z_{m-1}(z) = \frac{m}{z} Z_m(z) - \frac{d}{dz} Z_m(z) = -z^m \frac{d}{dz} [z^{-m} Z_m(z)]; \quad (21.8-2)$$

при $m=0$ получим $Z_1(z) = -Z_0'(z)$. Функции $e^{kz} e^{\pm im\varphi} Z_m(K\rho)$ суть решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах ρ, φ, z (цилиндрические гармоники, п.10.4-3,б). Цилиндрические функции целого порядка порядка многозначны (п.9.3-5, б); их главная ветвь определяется условием $|\arg z| < \pi$ (разрез от $z=0$ до $z=-\infty$, п.7.4-2).

*) Многочлены, определенные формулой (21.7-19), ортогональны на интервале $[0, 1]$. Чаще рассматриваются многочлены Якоби, ортогональные на интервале $[-1, 1]$; одни сводятся к другим заменой переменной.

(b) Наиболее часто встречаются следующие цилиндрические функции порядка m

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (|\arg z| < \pi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(функции Бесселя} \\ \text{первого рода);} \end{array} \right\} \quad (21.8-3)$$

$$\left. \begin{aligned} N_m(z) &= \frac{1}{\sin m\pi} [J_m(z) \cos m\pi - J_{-m}(z)] \quad (m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ N_m(z) &= (-1)^m N_{-m}(z) = \frac{2}{\pi} J_m(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C\right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{m+k} \frac{1}{j}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; |\arg z| < \pi) \end{aligned} \right\} \quad (21.8-4)$$

(функции Бесселя второго рода или функции Неймана);

$$H_m^{(1)}(z) = J_m(z) + iN_m(z), \quad H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - iN_m(z) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(функции Ганкеля первого} \\ \text{и второго рода).} \end{array} \right\} \quad (21.8-5)$$

В формуле (4) последнюю сумму следует считать равной нулю, если $m=0$; C — постоянная Эйлера — Маскерони (21.4-6). Важно отметить, что каждая функция Неймана имеет особенность в начале координат¹⁾.

(c) Аналитическое продолжение. Значения цилиндрических функций для $|\arg z| > \pi$ получаются из формул

$$\left. \begin{aligned} J_m(e^{i\pi} z) &= e^{im\pi} J_m(z), \\ N_m(e^{i\pi} z) &= e^{-im\pi} N_m(z) + 2iJ_m(z) \sin m\pi \operatorname{ctg} m\pi \end{aligned} \right\} \quad (21.8-6)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots),$

где $\sin m\pi \operatorname{ctg} m\pi = (-1)^{mn} n$ для $m = \pm n$;

$$\left. \begin{aligned} H_m^{(1)}(e^{i\pi} z) &= -e^{-im\pi} H_m^{(2)}(z) = -H_{-m}^{(2)}(z), \\ H_m^{(2)}(e^{-i\pi} z) &= -e^{im\pi} H_m^{(1)}(z) = -H_{-m}^{(1)}(z). \end{aligned} \right\} \quad (21.8-7)$$

Цилиндрические функции целого порядка суть однозначные целые функции (п. 7.6-5).

(d) Каждая цилиндрическая функция порядка m может быть представлена как линейная комбинация функций $J_m(z)$ и $N_m(z)$ или как линейная комбинация $H_m^{(1)}(z)$ и $H_m^{(2)}(z)$:

$$Z_m(z) = aJ_m(z) + bN_m(z) = \alpha H_m^{(1)}(z) + \beta H_m^{(2)}(z) \quad (21.8-8)$$

(фундаментальная система, п. 9.3-2). $J_m(z)$ и $J_{-m}(z)$ образуют фундаментальную систему, если m не равно целому числу ($m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), так как при m целых $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$. Вронскианы (п. 9.3-2) указанных систем равны

$$W\{J_m(z), N_m(z)\} = \frac{2}{\pi z}, \quad W\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z)\} = -\frac{4i}{\pi z},$$

$$W\{J_m(z), J_{-m}(z)\} = -\frac{2 \sin m\pi}{\pi z}.$$

¹⁾ Иногда функции $N_m(z)$ обозначаются через $Y_m(z)$; иногда вместо функций Неймана берут аналогичные им функции Вебера [21.3].

Первые два вронскиана не зависят от m . Отметим, что

$$J_m(z) = \frac{1}{2} [H_m^{(1)}(z) + H_m^{(2)}(z)], \quad N_m(z) = \frac{1}{2i} [H_m^{(1)}(z) - H_m^{(2)}(z)], \quad (21.8-9)$$

$$J_{-m}(z) = \frac{1}{2} [e^{im\pi} H_m^{(1)}(z) + e^{-im\pi} H_m^{(2)}(z)]. \quad (21.8-10)$$

(е) Цилиндрические функции, порядок которых равен половине нечетного целого числа ($m = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$), выражаются через элементарные функции (см. также п.21.8-8):

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}; \quad (21.8-11)$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{\cos z}{\sqrt{z}} + \frac{\sin z}{z\sqrt{z}} \right), \quad J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{\sin z}{\sqrt{z}} - \frac{\cos z}{z\sqrt{z}} \right); \quad (21.8-12)$$

$$J_{k+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{k+1/2} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^k \frac{\sin z}{z} \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (21.8-13)$$

$$H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}, \quad H_{-1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}; \quad (21.8-14)$$

$$H_{1/2}^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i} \frac{e^{-iz}}{\sqrt{z}}, \quad H_{-1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-iz}}{\sqrt{z}}. \quad (21.8-15)$$

21.8-2. Интегральные формулы (см. п.8.6-4).

(а) Интегральные представления для $J_0(z), J_1(z), J_2(z), \dots$

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mt - z \sin t) dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(интегральная} \\ \text{формула Бесселя);} \end{array} \right\} \quad (21.8-16)$$

$$J_{2m}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin t) \cos 2mt dt, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (21.8-17)$$

$$J_{2m+1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin t) \sin(2m+1)t dt \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$J_m(z) = \frac{(-i)^m}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos t} \cos mt dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (21.8-18)$$

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2} \right)^m \oint t^{-m-1} e^{t - \frac{z^2}{4t}} dt \quad (|\arg z| < \pi), \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{(интеграл Сонина — Шлефли),} \quad (21.8-19)$$

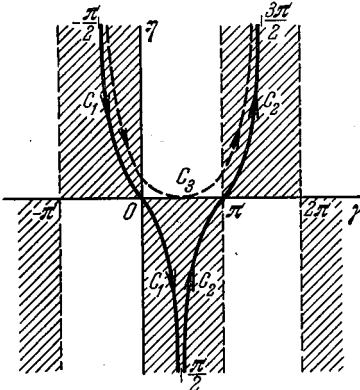
где контур интегрирования начинается в точке $t = \infty$, идет по отрицательной части действительной оси, окружает в положительном направлении начало координат и возвращается по отрицательной части действительной оси в бесконечность.

(b) Формулы Зоммерфельда и Пуассона. Комплексный интеграл (рис. 21.8-1)

$$Z_m(z) = \frac{e^{-im\pi/2}}{\pi} \int_C e^{i(z \cos t + mt)} dt \quad (\text{интеграл Зоммерфельда}) \quad (21.8-20)$$

равен $H_m^{(1)}(z)$ для контура C_1 , $H_m^{(2)}(z)$ для контура C_2 и $2J_m(z)$ для контура C_3 . Эти контуры могут быть деформированы при условии, что начало и конец каждого из них стремятся к точке $t = \infty$ в указанных заштрихованных областях. $t = 0$ и $t = \pi$ могут быть использованы как седловые точки (точки перевала) для C_1 и C_2 при вычислении $Z_m(z)$ для больших значений z (см. также п.21.8-9).

Отметим еще формулу



$$J_m(z) = \frac{2(z/2)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) \sin^{2m} t dt \quad (m > -\frac{1}{2})$$

Рис. 21.8-1. Контур интегрирования для интегралов Зоммерфельда; $t = \gamma + i\eta$.

(интегральная формула Пуассона).

$$(21.8-21)$$

(c) Некоторые интегральные формулы, содержащие цилиндрические функции (см. также п.21.8-4,с).

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) x dx &= \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x)] = \\ &= \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_{m-1}(\beta x) J_m(\alpha x) - \alpha J_{m-1}(\alpha x) J_m(\beta x)] \quad (\alpha^2 - \beta^2 \neq 0); \\ \int_0^x [J_m(\alpha x)]^2 x dx &= \frac{x^2}{2} [J'_m(\alpha x)]^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{m^2}{\alpha^2}\right) [J_m(\alpha x)]^2 \quad (m > -1) \end{aligned} \right\} \quad (21.8-22)$$

(интегралы Ломмеля);

$$\int_0^\infty x^{-m+n} J_m(\alpha x) dx = 2^{n-m} \alpha^{m-n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(m - \frac{n-1}{2}\right)} \quad (-1 < n < 2m+1). \quad (21.8-23)$$

21.8-3. Нули цилиндрических функций.

(a) Все нули цилиндрических функций простые, за исключением, быть может, $z=0$. Последовательные положительные или отрицательные действительные нули двух линейно независимых действительных цилиндрических функций порядка n перемежаются; $z=0$ есть единственный возможный общий нуль.

(b) (См. также рис. 21.8-2.) Функция $J_m(z)$ имеет бесконечное число действительных нулей; для $m > -1$ все ее нули действительны. Для $m=0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ и $n=1, 2, \dots$, $J_m(z)$ и $J_{m+n}(z)$ не имеют общих нулей.

Для $m=1, 2, \dots$ последовательные положительные или отрицательные действительные нули $J_m(z)$ разделяются единственными действительными нулями $J_{m+1}(z)$ и единственными действительными нулями $J_m(z)$.

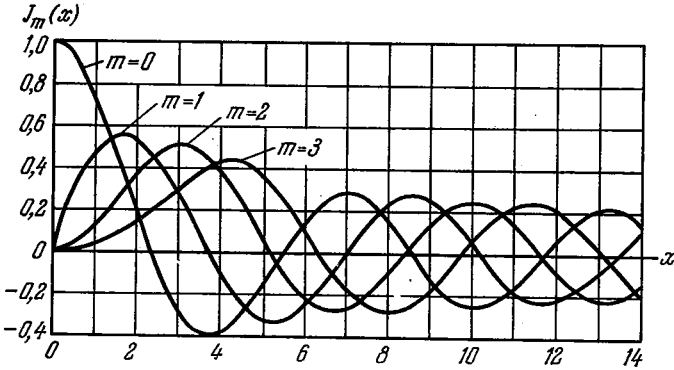


Рис. 21.8-2. Графики функций Бесселя $J_0(x), J_1(x), J_2(x), J_3(x)$ для действительного аргумента. Заметим, что $J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$.

21.8-4. Функции Бесселя целого порядка.

(а) **Производящая функция.** Функции Бесселя неотрицательного целого порядка $m=0, 1, 2, \dots$ — все однозначные целые функции от z . Они могут быть получены как коэффициенты разложения в ряд Лорана (п.7.5-3) производящей функции (см. также п.8.6-5)

$$e^{\frac{z}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)} = J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} [s^m + (-s)^{-m}] J_m(z), \tag{21.8-24}$$

или как коэффициенты рядов Фурье

$$\left. \begin{aligned} \cos(z \sin t) &= J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos 2kt, \\ \sin(z \sin t) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(z) \sin (2k-1)t; \end{aligned} \right\} \tag{21.8-25a}$$

$$\begin{aligned} e^{\pm iz \sin t} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) e^{\pm i m t} = J_0(z) + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} [J_{2k}(z) \cos 2kt \pm i J_{2k-1}(z) \sin (2k-1)t]. \end{aligned} \tag{21.8-25b}$$

Отметим еще формулы

$$1 = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) = J_0^2(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z), \tag{21.8-26}$$

$$z^n = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)(n+k-1)!}{k!} J_{2k+n}(z) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{21.8-27}$$

(b) Поведение для действительного аргумента. Для действительного $x = x$ функции $J_0(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z)$, ... все действительны; рис. 21.8-2 иллюстрирует их нули, максимумы и минимумы и их асимптотическое поведение при $x \rightarrow \infty$ (см. также пп.21.8-3 и 21.8-9).

(c) Условия ортогональности (см. также пп.15.4-6 и 21.8-2, c) Если x_i и x_k — два нуля функции $J_m(z)$ (необходимо действительные), то имеют место условия ортогональности

$$\int_0^1 J_m(x_i \xi) J_m(x_k \xi) \xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ \frac{1}{2} [J'_m(x_i)]^2, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (21.8-28)$$

Отметим также, что

$$\alpha \int_0^\infty J_m(\alpha \xi) J_m(\beta \xi) \xi d\xi = \delta(\alpha - \beta), \quad (21.8-29)$$

где $\delta(x)$ есть импульсная функция, вводимая в п.21.9-2.

21.8-5. Решение дифференциальных уравнений при помощи функций Бесселя и связанных с ними функций. Линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1-2a}{z} \frac{dw}{dz} + \left[(bcz^c - 1)^2 + \frac{a^2 - m^2 c^2}{z^2} \right] w = 0 \quad (21.8-30)$$

имеет решение вида

$$w = z^a Z_m(bz^c). \quad (21.8-31)$$

Многие специальные случаи уравнения (30) представляют значительный интерес (пп.21.8-6 — 21.8-8, [9.4]).

21.8-6. Модифицированные функции Бесселя и Ганкеля. Модифицированные цилиндрические функции порядка m :

$$\left. \begin{aligned} I_m(z) &= i^{-m} J_m(iz) && (\text{модифицированные функции Бесселя}), \\ K_m(z) &= \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(iz) && (\text{модифицированные функции Ганкеля}), \end{aligned} \right\} \quad (21.8-32)$$

определяются с помощью формул (3) — (5); определения могут быть расширены с помощью формул (6) и (7). Функции (32) суть линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{m^2}{z^2} \right) w = 0 \quad (\text{модифицированное дифференциальное уравнение Бесселя}) \quad (21.8-33)$$

(см. также п.10.4-3, b) и удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\left. \begin{aligned} I_{m+1}(z) &= I_{m-1}(z) - \frac{2m}{z} I_m(z) = 2 \frac{d}{dz} I_m(z) - I_{m-1}(z), \\ K_{m+1}(z) &= K_{m-1}(z) + \frac{2m}{z} K_m(z) = -2 \frac{d}{dz} K_m(z) - K_{m-1}(z); \end{aligned} \right\} \quad (21.8-34)$$

$I_m(z)$ и $K_m(z)$ действительные монотонные функции для $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и действительных z .

21.8-7. Функции $\text{ber}_m z$, $\text{bei}_m z$, $\text{her}_m z$, $\text{hei}_m z$, $\text{ker}_m z$, $\text{kei}_m z$. Функции $\text{ber}_m z$, $\text{bei}_m z$, $\text{her}_m z$, $\text{hei}_m z$, $\text{ker}_m z$, $\text{kei}_m z$ определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} J_m(i^{\pm 3/2} z) &= \text{ber}_m z \pm i \text{bei}_m z, \\ H_m^{(1)}(i^{3/2} z) &= \text{her}_m z + i \text{hei}_m z; \end{aligned} \right\} \quad (21.8-35)$$

$$i^{\mp m} K_m(i^{\pm 1/2} z) = \text{ker}_m z \pm i \text{kei}_m z. \quad (21.8-36)$$

Все эти функции действительны для действительных значений z . Индекс m опускается, если $m=0$, например $\text{ber}_0 z = \text{ber } z$.

Заметим, что

$$\ker_m z = -\frac{\pi}{2} \text{hei}_m z, \quad \text{kei}_m z = \frac{\pi}{2} \text{her}_m z,$$

$\text{ber } z$, $\text{bei } z$, $\text{her } z$ и $\text{hei } z$, так же как $J_0(i^{\pm 3/2} z)$ и $H_0^{(1)}(i^{3/2} z)$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - iw = 0. \quad (21.8-37)$$

Имеют место разложения

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } z &= 1 - \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(z/2)^8}{(4!)^2} - \dots = 1 - \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} \mp \dots, \\ \text{bei } z &= \left(\frac{1}{2} z\right)^2 - \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots = \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} \pm \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.8-38)$$

Во многих приложениях удобно вводить $|J_m(i^{3/2} z)|$,

$$|K_m(i^{3/2} z)|, \quad \arg J_m(i^{3/2} z) \quad \text{и} \quad \arg [i^{-m} K_m(i^{3/2} z)],$$

как специальные функции вместо или одновременно с $\text{ber}_m z$, $\text{bei}_m z$, $\text{ker}_m z$ и $\text{kei}_m z$. Все эти функции действительны для действительных значений z .

21.8-8. Сферические функции Бесселя. Сферические функции Бесселя первого, второго, третьего и четвертого рода

$$\left. \begin{aligned} j_j(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{j+1/2}(z), & n_j(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{j+1/2}(z), \\ h_j^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{j+1/2}^{(1)}(z), & h_j^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{j+1/2}^{(2)}(z), \end{aligned} \right\} \quad (21.8-39)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + \left[1 - \frac{j(j+1)}{z^2} \right] w = 0 \quad (21.8-40)$$

(см. также п.10.4-4,с) и рекуррентным формулам

$$w_{j+1}(z) = \frac{2j+1}{z} w_j(z) - w_{j-1}(z) = -z^j \frac{d}{dz} [z^{-j} w_j(z)]. \quad (21.8-41)$$

Для целых значений j сферические функции Бесселя суть элементарные трансцендентные функции (см. также п.21.8-1):

$$\left. \begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z}, & h_0^{(1)}(z) &= -\frac{ie^{iz}}{z}, & h_0^{(2)}(z) &= \frac{ie^{-iz}}{z}, \\ j_{-1}(z) &= \frac{\cos z}{z}, & h_{-1}^{(1)}(z) &= \frac{e^{iz}}{z}, & h_{-1}^{(2)}(z) &= \frac{e^{-iz}}{z}, \end{aligned} \right\} \quad (21.8-42)$$

$$j_j(z) = z^j \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^j \frac{\sin z}{z}, \quad n_j(z) = (-1)^{j+1} j_{-j-1}(z) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

(21.8-43)

21.8-9. Асимптотические разложения цилиндрических функций и сферических функций Бесселя для больших значений $|z|$ (см. также пп. 4.4-3, 4.8-6). При $z \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} J_m(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[A_m(z) \cos \left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - B_m(z) \sin \left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \\ N_m(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[A_m(z) \sin \left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + B_m(z) \cos \left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (|\arg z| < \pi),$$

(21.8-44)

где $A_m(z)$ и $B_m(z)$ имеют асимптотические разложения

$$\left. \begin{aligned} A_m(z) &= 1 - \frac{(4m^2-1)(4m^2-9)}{2!(8z)^2} + \\ &+ \frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)(4m^2-49)}{4!(8z)^4} \mp \dots \\ B_m(z) &= \frac{4m^2-1}{8z} - \frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)}{3!(8z)^3} \pm \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.8-45)$$

Подставляя разложения (44) и (45) в формулы (5), получим соответствующие асимптотические разложения для $H_m^{(1)}(z)$ и $H_m^{(2)}(z)$. Из разложений (44) и (45) следует, что для $|z| \gg m$ при $z \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} J_m(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), & H_m^{(1)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ N_m(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), & H_m^{(2)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}; \end{aligned} \right\} \quad (21.8-46)$$

$$J_{m+1/2}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{m\pi}{2}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (21.8-47)$$

$$\left. \begin{aligned} j_j(z) &\approx \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{j+1}{2}\pi\right), & n_j(z) &\approx \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{j+1}{2}\pi\right), \\ h_j^{(1)}(z) &\approx \frac{1}{z} (-i)^{j+1} e^{iz}, & h_j^{(2)}(z) &\approx \frac{1}{z} i^{j+1} e^{-iz}. \end{aligned} \right\} \quad (21.8-48)$$

21.8-10. Присоединенные функции и многочлены Лежандра (см. также пп. 21.7-1 и 21.7-3).

(а) Присоединенные функции Лежандра степени j и порядка m есть решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[j(j+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] w = 0, \quad (21.8-49)$$

где j и m — действительные или комплексные числа; уравнение (49) приводится к дифференциальному уравнению Лежандра (табл. 21.7-1 и 21.7-3) для $m=0$. Общая теория присоединенных функций Лежандра содержится в [21.3]. Во многих важных приложениях (пп. 10.4-3, с и 21.8-12) j и m — действительные целые числа, а $z = x$ — действительное число, заключенное между -1 и 1 ; положим $x = \cos \theta$. При этих условиях уравнению (49) удовлетворяют **присоединенные функции Лежандра первого рода**

$$\begin{aligned} P_j^{(m)}(x) &= \frac{1}{2^m} \frac{(j+m)!}{(j-m)! m!} (1-x^2)^{m/2} F\left(m-j, m+j+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^j j!} \frac{d^{j+m}}{dx^{j+m}} (x^2-1)^j = (-1)^{j+m} P_j^m(-x) \\ & \qquad \qquad \qquad (-1 \leq x \leq 1), \quad (21.8-50) \end{aligned}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, j$$

(см. также п.9.3-9), причем $P_j^0(x) = P_j(x)$ и $P_j^m(x) = 0$ для $m > j$. В частности,

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2} = \sin \theta, \quad (21.8-51)$$

$$\left. \begin{aligned} P_2^1(x) &= 3x\sqrt{1-x^2} = 3/2 \sin 2\theta, \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = 3/2(1-\cos 2\theta), \end{aligned} \right\} \quad (21.8-52)$$

$$\left. \begin{aligned} P_3^1(x) &= 3/2(5x^2-1)\sqrt{1-x^2} = 3/8(\sin \theta + 5 \sin 3\theta), \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2) = 15/4 \cos \theta(\cos \theta - \cos 3\theta), \\ P_3^3(x) &= 15(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 15/4(3 \sin \theta - \sin 3\theta), \end{aligned} \right\} \quad (21.8-53)$$

$$P_j^j(x) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1)(1-x^2)^{j/2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1) \sin^j \theta \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (21.8-54)$$

где $\cos \theta = x$ (см. также п.21.8-12).

(б) Присоединенные функции Лежандра, определенные формулами (50), удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям ($-1 < x < 1$):

$$(2j+1)xP_j^m(x) - (j-m+1)P_{j-1}^m(x) - (j+m)P_{j+1}^m(x) = 0 \quad (0 \leq m \leq j-1); \quad (21.8-55)$$

$$(x^2-1) \frac{d}{dx} P_j^m(x) - (j-m+1)P_{j+1}^m(x) + (j+1)xP_j^m(x) = 0 \quad (0 \leq m \leq j); \quad (21.8-56)$$

$$P_j^{m+2}(x) - 2(m+1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_j^{m+1}(x) + [j(j+1) - m(m+1)]P_j^m(x) = 0 \quad (0 \leq m \leq j-2); \quad (21.8-57)$$

$$P_{j+1}^m(x) - P_{j-1}^m(x) = (2j+1)\sqrt{1-x^2} P_j^{m-1}(x) \quad (0 \leq m \leq j-1); \quad (21.8-58)$$

$$(j+m)(j+m+1)P_{j-1}^m(x) - (j-m)(j-m+1)P_{j+1}^m(x) = (2j+1)\sqrt{1-x^2} P_j^{m+1}(x) \quad (0 \leq m < j-1). \quad (21.8-59)$$

(в) Асимптотическое поведение. При $j \rightarrow \infty$

$$P_j^m(\cos \theta) = (-j)^m \sqrt{\frac{2}{\pi j \sin \theta}} \cos \left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} \right] + O(j^{-3/2}) \quad (0 < \theta < \pi). \quad (21.8-60)$$

21.8-11. Интегральные свойства присоединенных функций Лежандра (см. также п.21.7-7).

$$P_j^m(x) = (-1)^{m/2} \frac{(j+m)!}{j! \pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos t)^j \cos mt \, dt$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, j) \quad (\text{интегральная формула Гейне}); \quad (21.8-61)$$

$$\int_{-1}^1 P_j^m(x) P_r^m(x) dx = \frac{2}{2j+1} \frac{(j+m)!}{(j-m)!} \delta_{j,r} \quad (j, r = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots); \quad (21.8-62)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 [P_j^m(x)]^2 dx &= \frac{1}{2j+1} \frac{(j+m)!}{(j-m)!}, & \int_0^1 \frac{[P_j^m(x)]^2}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2m} \frac{(j+m)!}{(j-m)!} \end{aligned} \right\} \quad (21.8-63)$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, j).$$

21.8-12. Сферические гармоники. Ортогональность (см. также пп. 10.4-3,с, 14.10-7,б и 15.2-6).

(а) Решения $\Phi(r, \theta, \varphi)$ уравнения Лапласа в сферических координатах (10.4-15) называются **сферическими гармониками**. **Сферические поверхностные гармоники степени j** суть решения дифференциального уравнения

с частными производными

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + j(j+1)Y = 0, \quad (21.8-64)$$

полученного разделением переменных в уравнении (10.4-15). Если потребовать, чтобы решения были регулярны при $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и удовлетворяли условию $Y_j(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_j(\theta, \varphi)$, то мы приходим к проблеме собственных значений (п.15.4-5), допускающей решения только при целых значениях j . Можно не касаться отрицательных значений j , так как $-j-1$ и j дают одинаковые значения $j(j+1)$. Действительные собственные функции

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \\ & \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\sin \theta) \sin m\varphi \\ & (j = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, j) \end{aligned} \right\} \quad (21.8-65)$$

называются **тессеральными сферическими гармониками** степени j и порядка m ; они периодичны на поверхности сферы и меняют знак вдоль узловых линий $\theta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ (рис. 21.8-3); на самих этих линиях они равны нулю.

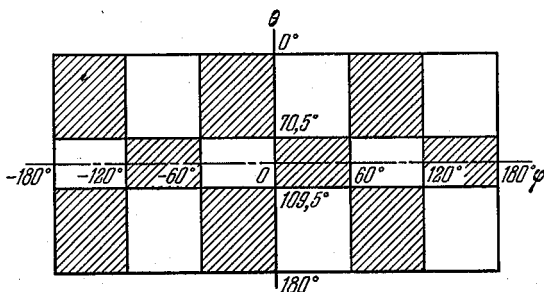


Рис. 21.8-3. Узлы функций $P_3^3(\cos \theta) \sin 3\varphi$ на развернутой поверхности сферы. Функция отрицательная в заштрихованной части.

При $m=j$ функции (65) называются **секториальными сферическими гармониками** и при $m=0$ **зональными сферическими гармониками**. Обе функции (65) и более часто встречающиеся комплексные функции

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2j+1}{\pi} \frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} P_j^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (j = 0, 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, +j) \quad (21.8-66)$$

образуют ортонормальную последовательность собственных функций в смысле скалярного произведения

$$(f, h) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \overline{f(\theta, \varphi)} h(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta \quad (21.8-67)$$

(п.15.4-6, б). $(f, h) = 0$ для каждой пары функций (65) или функций (66), если $f \neq h$; если же $f = h$, то скалярное произведение равно единице: $(f, f) = 1$. Существует $2j+1$ линейно независимых сферических поверхностных гармоник степени j .

(b) Каждая дважды дифференцируемая действительная функция $\Phi(\theta, \varphi)$ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $\Phi(\theta, \varphi + 2\pi) = \Phi(\theta, \varphi)$, определенная на поверхности сферы, допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \alpha_{j0} P_j(\cos \theta) + \sum_{m=1}^j P_j^m(\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\varphi + \beta_{jm} \sin m\varphi) \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \gamma_{jm} P_j^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (21.8-68a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos m\varphi \int_0^{\pi} \Phi(\theta, \varphi) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\ \beta_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin m\varphi \int_0^{\pi} \Phi(\theta, \varphi) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\ \gamma_{jm} &= \bar{\gamma}_{j, -m} = \frac{1}{2} (\alpha_{jm} - i\beta_{jm}) = \\ &= \frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta, \varphi) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &\quad (j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, j). \end{aligned} \right\} \quad (21.8-68b)$$

Разложения вида (68) физически интерпретируются как разложения потенциалов по мультиполям (п.п.15.6-5, а и с).

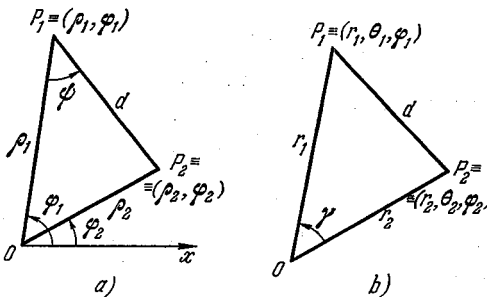


Рис. 21.8-4. Геометрическая иллюстрация к теоремам сложения.

21.8-13. Теоремы сложения.

(a) Теоремы сложения для цилиндрических функций. Пусть P_1 и P_2 — две точки плоскости с полярными координатами (ρ_1, φ_1) , (ρ_2, φ_2) . Согласно рис. 21.8-4, а пусть $\rho_1 > \rho_2$, так что $0 \leq |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ и

$$\left. \begin{aligned} d^2 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ e^{2i\varphi} &= \frac{\rho_1 - \rho_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\rho_1 - \rho_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (21.8-69)$$

Тогда для каждой цилиндрической функции $Z_m(z)$, удовлетворяющей уравнению (1),

$$Z_m(\alpha d) e^{i m \varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{m+k}(\alpha \rho_1) J_k(\alpha \rho_2) e^{i k(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

(теорема сложения для цилиндрических функций),

где α — произвольное комплексное число. В частности, если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, то

$$Z_m[\alpha(\rho_1 + \rho_2)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k(\alpha \rho_1) J_{m-k}(\alpha \rho_2). \quad (21.8-71)$$

(b) Теоремы сложения для сферических функций Бесселя и многочленов Лежандра. Пусть P_1 и P_2 — две точки пространства со сферическими координатами $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Согласно рис. 21.8-4, b пусть $\theta_1 + \theta_2 < \pi$; тогда

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \gamma, \quad \cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (21.8-72)$$

$$j_0(\alpha d) = \frac{\sin \alpha d}{\alpha d} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) j_k(\alpha r_1) j_k(\alpha r_2) P_k(\cos \gamma), \quad (21.8-73)$$

$$h_0^{(1)}(\alpha d) = \frac{e^{i \alpha d}}{i \alpha d} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) h_k^{(1)}(\alpha r_1) j_k(\alpha r_2) P_k(\cos \gamma) \quad (r_1 > r_2)$$

(теорема сложения для сферических функций Бесселя порядка нуля),

$$P_j(\cos \gamma) = P_j(\cos \theta_1) P_j(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\cos \theta_1) P_j^m(\cos \theta_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (21.8-74)$$

(теорема сложения для многочленов Лежандра).

21.9. СТУПЕНЧАТЫЕ ФУНКЦИИ И СИМВОЛИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ

21.9-1. Ступенчатые функции (см. также пп. 4.6-17, с, 18.3-1 и 20.4-5, с).

(а) Ступенчатой функцией действительной переменной x называется функция, которая изменяет свои значения только в дискретной последовательности точек разрыва (необходимо первого рода, п. 4.4-7, б). Значения функции в точках разрыва могут быть как определены, так и не определены. Наиболее часто применяются ступенчатые функции ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1/2 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases} & \left. \begin{aligned} & \text{(симметричная} \\ & \text{единичная функция),} \end{aligned} \right\} \\ U_-(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0; \end{cases} & \left. \begin{aligned} & \text{(асимметричные} \\ & \text{единичные функции)} \end{aligned} \right\} \\ U_+(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (21.9-1)$$

(см. также рис. 21.9-1).

¹⁾ Система обозначений различных единичных функций не является общепринятой; поэтому необходима осторожность при пользовании разными источниками.

Заметим, что

$$U(0-0) = 0, \quad U(0+0) = 1, \quad U(e^x) = 1; \quad (21.9-2)$$

$$U[(x-a)(x-b)] = U[x - \max(a, b)] + U[\min(a, b) - x]. \quad (21.9-3)$$

Каждая ступенчатая функция может быть представлена (за исключением, возможно, ее значений в точках разрыва $x = x_k$) как сумма вида

$$\sum_k a_k U(x - x_k), \quad \sum_k a_k U_-(x - x_k) \quad \text{или} \quad \sum_k a_k U_+(x - x_k).$$

(Примеры: $\operatorname{sgn} x = 2U(x) - 1$; функции скачков в п.20.4-5, с).

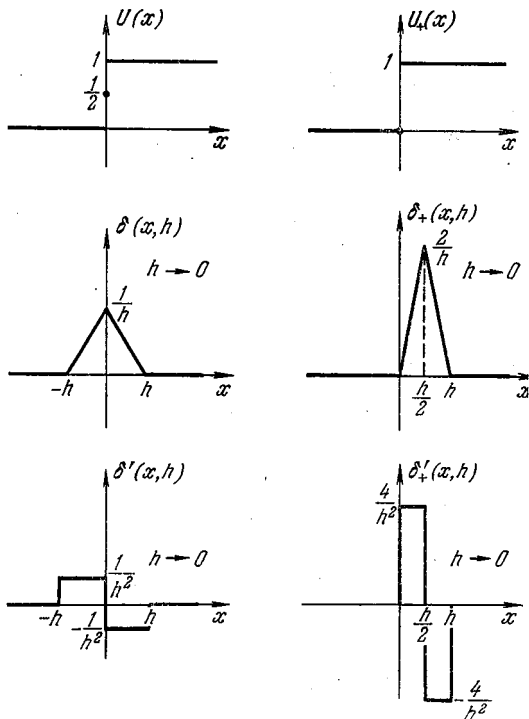


Рис. 21.9-1. Единичные ступенчатые функции $U(x)$ и $U_+(x)$ и аппроксимации импульсных функций $\delta(x)$, $\delta_+(x)$, $\delta'(x)$ и $\delta'_+(x)$.

(b) Аппроксимация ступенчатых функций непрерывными функциями.

$$U(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha x \right], \quad (21.9-4)$$

$$U(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\operatorname{erf}(\alpha x) + 1], \quad (21.9-5)$$

$$U(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2^{-e^{-\alpha x}}, \quad (21.9-6)$$

$$U(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha x} \frac{\sin t}{t} dt. \quad (21.9-7)$$

(с) Представления интегралом Фурье (см. также п.4.11-6). Комплексный контурный интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega$ соответственно равен $U(t)$ или $-U(-t)$ в зависимости от того, огибает ли контур интегрирования начало координат против часовой стрелки (т.е. по полуокружности, расположенной в нижней полуплоскости) или по часовой стрелке (по полуокружности в верхней полуплоскости). Главное значение интеграла по Коши (п.4.6-2, b) равно $U(t) - 1/2$. Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{2}. \quad (21.9-8)$$

Отметим также формулу

$$U(1-t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega \quad (t > 0). \quad (21.9-9)$$

21.9-2. Символическая дельта-функция Дирака *).

(а) Симметричная единичная импульсная функция или функция Дирака $\delta(x)$ действительной переменной x определяется условием

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - X) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } X < a \text{ или } X > b, \\ 1/2 f(X) & \text{при } X = a \text{ или } X = b, \\ f(X) & \text{при } a < X < b \end{cases} \quad (a < b), \quad (21.9-10a)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная в точке $x = X$.

Более общее определение функции $\delta(x)$:

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - X) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } X < a \text{ или } X > b, \\ 1/2 f(X+0) & \text{при } X = a, \\ 1/2 f(X-0) & \text{при } X = b, \\ 1/2 [f(X-0) + f(X+0)] & \text{при } a < X < b \end{cases} \quad (a < b), \quad (21.9-10b)$$

где $f(x)$ — произвольная функция ограниченной вариации в окрестности точки $x = X$. $\delta(x)$ не является функцией в обычном смысле; из определения (10) следуют несовместимые условия

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1; \quad (21.9-10c)$$

$\delta(x)$ есть символическая (обобщенная) функция, позволяющая формально представить функциональное преобразование $f(\xi) \rightarrow f(x)$ как интегральное преобразование (п.15.3-1, а). Формальное применение $\delta(x)$ приводит к удобным обозначениям, подсказывающим обобщения многих математических соотношений (см. также пп.8.5-1, 15.3-1, а, 15.5-1 и 18.3-1). Хотя функций, обладающих в точности свойствами (10), не существует, возможно в некотором смысле рассматривать $\delta(x)$ как пределы обычных функций (п.21.9-4).

Математические предложения, в которых применяются импульсные функции, следует рассматривать как эвристические и нуждающиеся в строгих обоснованиях.

* В настоящее время широкое развитие получила теория обобщенных функций, играющая важную роль при изучении дифференциальных уравнений математической физики. δ -функция Дирака может рассматриваться как один из примеров обобщенных функций. По этому поводу см., например, [13.6].

Можно избежать применения импульсных функций, вводя интегралы Стильтьеса (п.4.6-17); тогда

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - X) d\xi = \int_a^b f(\xi) dU(\xi - X).$$

При этом возможно ввести обобщения понятий «функция» и «дифференциала» (теория распределений Лорана Шварца)*).

(b) Формальные соотношения, содержащие $\delta(x)$.

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x) \quad (a > 0), \quad \delta(-x) = \delta(x), \quad (21.9-11)$$

$$f(x) \delta(x-a) = \frac{1}{2} [f(a-0) + f(a+0)] \delta(x-a), \quad x\delta(x) = 0, \quad (21.9-12)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad (a > 0), \quad (21.9-13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b). \quad (21.9-14)$$

21.9-3. Производные ступенчатых и импульсных функций (см. также п.8.5-1). Формулы (10) приводят к соотношению ($a > 0$)

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt = e^{-as} = s \mathcal{L}[U(t-a)],$$

откуда следует символическое равенство

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} U(x) \quad (21.9-15)$$

(его формально можно получить также из формулы (19) п.21.9-4, b). Производные $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ... импульсной функции $\delta(x)$ определяются условиями

$$\int_a^b f(\xi) \delta^{(r)}(\xi - X) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } X < a \text{ или } X > b, \\ \frac{1}{2}(-1)^r f^{(r)}(X+0) & \text{при } x = a, \\ \frac{1}{2}(-1)^r f^{(r)}(X-0) & \text{при } x = b, \\ \frac{1}{2}(-1)^r [f^{(r)}(X-0) + f^{(r)}(X+0)] & \text{при } a < X < b \end{cases} \quad (a < b), \quad (21.9-16)$$

где $f(x)$ — произвольная функция такая, что односторонние пределы $f^{(r)}(X-0)$ и $f^{(r)}(X+0)$ существуют. Функции $\delta^{(r)}(\xi - X)$ есть ядра линейных интегральных преобразований (п.15.2-1), представляющих повторные дифференцирования. Отметим символическое соотношение

$$\delta^{(r)}(x) = (-1)^r r! \frac{\delta(x)}{x^r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (21.9-17)$$

21.9-4. Аппроксимация импульсных функций (см. также рис. 21.9-1).

(a) Аппроксимация $\delta(x)$ непрерывно дифференцируемыми функциями. Возможно аппроксимировать $\delta(x)$ непрерывно

* См. сноску на стр. 678.

дифференцируемыми функциями

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 x^2 + 1)} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \quad (21.9-18a)$$

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \quad (21.9-18b)$$

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty \quad (21.9-18c)$$

в том смысле, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta(x, \alpha) = 0$ ($x \neq 0$) и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x - \xi, \alpha) d\xi = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

при условии, что $f(x-0)$ и $f(x+0)$ существуют; заметим еще, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi, \alpha) d\xi = 1.$$

Интегрирование аппроксимирующих функций (18) приводит к соответствующим аппроксимациям ступенчатых функций (формулы (4) и (5)). $\mathcal{L}[\delta(x-a, \alpha)]$ ($a > 0$) сходится к $e^{-as} = \mathcal{L}[\delta(x-a)]$ при $\alpha \rightarrow \infty$ для каждой функции (18).

(б) Аппроксимация $\delta(x)$ разрывными функциями. $\delta(x)$ часто аппроксимируется центральной конечной разностью (п.20.4-3)

$$\delta(x, h) = \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h} \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (21.9-19)$$

Отметим также, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin \omega(X-\xi)}{X-\xi} d\xi = \frac{1}{2} [f(X-0) + f(X+0)] \quad (-\infty < X < \infty)$$

(интегральная формула Дирихле) (21.9-20)

$$\text{и } \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha \cos(X-\xi) + \alpha^2} d\xi = \frac{1}{2} [f(X-0) + f(X+0)] \quad (-\pi < X < \pi),$$

(21.9-21)

если $f(x)$ — функция ограниченной вариации в окрестности точки $x=X$ (см. также п.4.11-6)

(в) Аппроксимация функций $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ..., $\delta^{(r)}(x)$. Последовательное дифференцирование формулы (18a) приводит к аппроксимирующим функциям

$$\delta'(x, \alpha) = -\frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2 x}{(\alpha^2 x^2 + 1)^2} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \quad (21.9-22)$$

$$\delta^{(r)}(x, \beta) = \frac{(-1)^r r!}{\pi} \frac{\sin \left[(r+1) \arctg \frac{\beta}{x} \right]}{(x^2 + \beta^2)^{(r+1)/2}} \quad \text{при } \beta \rightarrow 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (21.9-23)$$

Заметим также, что

$$\delta'(x, h) = \frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (21.9-24)$$

21.9-5. Представления интегралом Фурье. Отметим формальные соотношения

$$\delta(x-X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega X} e^{i\omega x} d\omega, \quad (21.9-25)$$

$$\delta^{(r)}(x-X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^r e^{-i\omega X} e^{i\omega x} d\omega, \quad (21.9-26)$$

$$\frac{1}{2} [\delta(x-X) + \delta(x+X)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega X \cos \omega x d\omega. \quad (21.9-27)$$

21.9-6. Асимметричные импульсные функции (см. также пп.8.5-1 и 9.4-3).

(а) Асимметричные импульсные функции $\delta_+(x)$, $\delta'_+(x)$, ..., $\delta_+^{(r)}(x)$ определяются соотношениями

$$\int_{a+0}^b f(\xi) \delta_+(\xi-X) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } X < a \text{ или } X \geq b, \\ f(X+0) & \text{при } a \leq X \leq b \end{cases} \quad (a < b), \quad (21.9-28)$$

$$\int_{a+0}^b f(\xi) \delta_+^{(r)}(\xi-X) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } X < a \quad \text{или} \quad X \geq b, \\ (-1)^r f^{(r)}(X+0) & \text{при } a \leq X < b \end{cases} \quad (a < b; r = 1, 2, \dots). \quad (21.9-29)$$

Можно записать

$$\delta_+(x) = 2\delta(x)U(x) = \frac{d}{dx} U_+(x). \quad (21.9-30)$$

Чтобы получить аппроксимирующие функции для $\delta_+(x)$, нужно подставить аппроксимирующие функции п.21.9-4 в соотношения (30), например

$$\delta_+(x, h) = \frac{U(x) - U(x-h)}{h} \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (21.9-31)$$

$$\delta_+^{(r)}(x, h) = \frac{U(x) - 2U(x-h/2) + U(x-h)}{h^2} \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (21.9-32)$$

(б) Можно ввести $\delta_+(-x) = \delta_-(x)$ как вторую асимметричную импульсную функцию, соответствующую «производной» асимметричной ступенчатой функции $U_-(x)$ (п.21.9-1).

21.9-7. Многомерные дельта-функции (см. также п.15.5-1). В n -мерном пространстве точек (x^1, x^2, \dots, x^n) с элементом объема

$$dV = dV(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sqrt{|g(x^1, x^2, \dots, x^n)|} dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

(п.16.10-10) n -мерная дельта-функция $\delta(x^1, \xi^1; x^2, \xi^2; \dots; x^n, \xi^n)$ должна удовлетворять условию

$$\int_V f(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \delta(X^1, \xi^1; X^2, \xi^2; \dots; X^n, \xi^n) dV(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) = f(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (21.9-33)$$

для каждой точки (X^1, X^2, \dots, X^n) в V , где $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ непрерывна. Заметим, что определение $\delta(x^1, \xi^1; x^2, \xi^2; \dots; x^n, \xi^n)$ зависит от выбора системы координат и теряет смысл, если $dV=0$. В частности, для прямоугольной декартовой системы координат x, y, z имеем $dV=dx dy dz$ и

$$\delta(x, \xi; y, \eta; z, \zeta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta). \quad (21.9-34)$$

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

- 1.1. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, «Наука», 1965.
- 1.2. Мишина А. П. и Проскуряков И. В., Высшая алгебра, СМБ *), «Наука», 1965.

К главам 2 и 3

- 2.1. Делоне Б. Н. и Райков Д. А., Аналитическая геометрия, ч. 1 и 2, Гостехиздат, 1949.
- 2.2. Ефимов Н. В., Квадратичные формы и матрицы, «Наука», 1967.

К главе 4

- 4.1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, в 5 томах, «Наука», 1967.
- 4.2. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III, «Наука», 1966.
- 4.3. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Физматгиз, 1957.
- 4.4. Данилов В. Л. и др., Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби), СМБ, Физматгиз, 1961.
- 4.5. Арамянович И. Г. и др., Математический анализ (дифференцирование и интегрирование), СМБ, Физматгиз, 1961.
- 4.6. Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963.

К главам 5 и 6

- 5.1. Бермант А. Ф., Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования, Физматгиз, 1959.
- 5.2. Маделунг Э., Математический аппарат физики (справочное руководство), «Наука», 1968.
См. также [4.5].

К главе 7

- 7.1. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1965.
- 7.2. Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, «Наука», 1966.
- 7.3. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, «Наука», 1967.
- 7.4. Евграфов М. А., Аналитические функции, «Наука», 1965.
- 7.5. Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, тт. I, II, «Наука», 1963.
- 7.6. Концевельс В. и Штальман Ц., Практика конформного отображения, ИЛ, 1963.

*) СМБ — серия «Справочная математическая библиотека».

К главе 8

- 8.1. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, «Наука», 1965.
- 8.2. Диткин В. А. и Прудников А. П., а) Операционное исчисление, «Высшая школа», 1966.
б) Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», 1965.
- 8.3. Диткин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, СМБ, Физматгиз, 1961.
- 8.4. Ван дер Поль Б. и Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
- 8.5. Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955. См. также [7.1] и [7.4].

К главе 9

- 9.1. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1965.
- 9.2. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, «Наука», 1966.
- 9.3. Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1965.
- 9.4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1965.
- 9.5. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
- 9.6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
- 9.7. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.

К главе 10

- 10.1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
- 10.2. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
- 10.3. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
- 10.4. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики т. I, Гостехиздат, 1951.
- 10.5. Курант Р., Дифференциальные уравнения с частными производными, «Наука», 1965.
- 10.6. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. I, II, ИЛ, 1958.
- 10.7. Бабич В. М. и др., Линейные уравнения математической физики, СМБ, Физматгиз, 1964.
- 10.8. Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, «Наука», 1966.
- 10.9. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, «Наука», 1966.

К главе 11

- 11.1. Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
- 11.2. Цлаф Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения (справочное руководство), «Наука», 1966.
- 11.3. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, «Наука» 1966.
См. также [9.3] и [10.4].

К главе 12

- 12.1. Ван-дер-Варден Б., Современная алгебра, ч. 1, 2, Гостехиздат, 1947.
- 12.2. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
- 12.3. Курош А. Г., Теория групп, «Наука», 1967.
- 12.4. Куратовский К., Топология, «Мир», 1967.

К главам 13 и 14

- 13.1. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1966.
- 13.2. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966.
- 13.3. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
- 13.4. Ахизер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966.
- 13.5. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
- 13.6. Вилленкин Н. Я. и др., Функциональный анализ, СМБ, Физматгиз, 1964.

К главе 15

- 15.1. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
 15.2. Петровский И. Г., Лекции по интегральным уравнениям, «Наука», 1965.
 15.3. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960. См. также [10.2], [10.4], [11.2].

К главам 16 и 17

- 16.1. Норден А. П., Краткий курс дифференциальной геометрии, Физматгиз, 1958.
 16.2. Ращевский П. К., Дифференциальная геометрия, Физматгиз, 1956.
 16.3. Ращевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1967.

К главам 18 и 19

- 18.1. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, «Наука», 1967.
 18.2. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1964.
 18.3. Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, Физматгиз, 1959.
 18.4. Арлей Н. и Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, 1951.
 18.5. Ван-дер-Варден Б., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
 18.6. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
 18.7. Лозв М., Теория вероятностей, ИЛ, 1962.
 18.8. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, 1952.
 18.9. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, 1956.
 18.10. Ригордан Д., Комбинаторный анализ, ИЛ, 1963.
 18.11. Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, «Наука», 1965.

К главе 20

- 20.1. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, тт. 1, 2, «Наука», 1966
 20.2. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, «Наука», 1966.
 20.3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, «Наука», 1967.
 20.4. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
 20.5. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, «Наука», 1963.
 20.6. Михлин С. Г. и Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, СМБ, «Наука», 1965.
 20.7. Милн В. Э., Численный анализ, ИЛ, 1951.
 20.8. Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955.
 20.9. Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956.
 20.10. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, ИЛ, 1963.
 20.11. Уиттекер Э. и Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ОНТИ, 1935.

К главе 21

- 21.1. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
 21.2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), «Наука», 1964.
 21.3. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции в трех томах, СМБ, «Наука»:
 - т. 1. Гипергеометрическая функция и ее обобщения. Функции Лежандра.
 - т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.
 - т. 3. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье.
 См. также [4.6], [5.2], [7.1], [7.5].

УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже указаны главы или пункты, в которых вводятся или определяются обозначения, используемые в книге.

Скаляры и матрицы

- α, β, \dots скалярные (числовые) величины — главы 5, 6, 12—16
- $\bar{\alpha}$ комплексно сопряженная с α 1.3-2
- $|\alpha|$ абсолютная величина α , модуль α 1.3-2
- A, B, \dots ; $A = [a_{ik}]$ матрицы (чаще всего квадратные) 13.2-1
- $\bar{A} \equiv [\bar{a}_{ik}]$ матрица комплексно сопряженная с A 13.3-1
- $A' \equiv [a_{ki}]$ матрица, транспонированная с A 13.3-1
- $A^* \equiv [\bar{a}_{ki}]$ матрица эрмитова сопряженная с A 13.3-1
- $x \equiv \{\xi_i\} \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ матрица-столбец 13.2-1
- $x' \equiv \{\xi_i\} \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots)$ матрица-строка 13.2-1

Векторы и координаты векторов

- a, b, \dots и x, y, \dots векторы 5.1-1, 12.4-1, 14.2-1, 16.2-1, 16.7-3
- u единичный вектор 5.2-5, 14.2-5, 16.8-1
- i, j, k , правый прямоугольный декартов базис 5.2-3
- e_i, e^i базисные векторы 6.8-3, 14.2-4, 16.6-1
- u_i единичные базисные векторы 6.3-2, 16.8-3; ортогональные единичные базисные векторы 16.4-1, 14.7-4
- $r \equiv xi + yj + zk$, } радиусы-векторы в трех-
- $r \equiv \xi i + \eta j + \zeta k$ } мерном евклидовом про-
- странстве — главы 5, 15, 17
- $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots$ вектор, представленный с помощью матриц-столбцов с компонентами $a \equiv \{\alpha_i\} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ 14.2-4, 14.5-2
- $a = \hat{\alpha}_1 u_1 + \hat{\alpha}_2 u_2 + \dots$ вектор, выраженный

через ортонормированную базу векторов и координат 14.7-4

- $a = a^k e_k = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n$ контравариантный вектор (функция) с координатами a^k 6.3-3, 16.6-1
- $a = a_k e^k = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n$ ковариантный вектор (функция) с координатами a_k 6.3-3, 16.6-1
- $a = \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \dots + \hat{a}_n u_n$ вектор, выраженный посредством физических координат \hat{a}_k 6.3-2, 16.8-3
- $a \cdot b$ скалярное произведение векторов a и b 5.2-6, 16.8-1
- $|a| \equiv (a \cdot a)^{1/2}$ абсолютная величина (норма) a 5.2-5, 16.8-1
- (a, b) общее скалярное произведение 14.2-6
- $\|a\| \equiv (a, a)^{1/2}$ норма a 14.2-7
- (f, h) скалярное произведение функций 15.2-1
- $\|f\| \equiv (f, f)^{1/2}$ норма функции 15.2-1
- $a \times b$ векторное произведение трехмерных векторов a, b 5.2-7, 16.8-4
- $[abc]$ смешанное произведение векторов 5.2-8, 16.8-4
- См. также 16.1-3 по поводу немых индексных обозначений и 14.7-7 для сравнения обозначений.

Линейные операторы и тензоры

- A, B, \dots линейные операторы — главы 14, 15, и 20 или тензоры диадика — глава 16
- L линейные дифференциальные операторы над функциями $y(x), y(t), \Phi(x), \Phi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 9.3-1, 10.4-2, 15.2-7, 15.4-1

K линейный интегральный оператор 15.3-1
 $A', B', \dots; L', K'$ транспонированные к A, B, L, K 14.4-6, 15.3-1, 15.4-3
 $A^*, B^*, \dots; L^*, K^*$ эрмитово сопряженные к $A, B, \dots; L, K$ 14.4-3, 15.3-1, 15.4-3
 D оператор дифференцирования 20.4-2
 ∇ (набла) векторный дифференциальный оператор 5.5-2, 16.10-7
 $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ оператор Лапласа, 5.5-5, 16.10-7
 E оператор сдвига 20.4-2
 ∇ оператор восходящих разностей 20.4-2
 Δ оператор нисходящих разностей 20.4-2

Математическое ожидание (средние значения) и дисперсии

$M\{x\} = \xi$ математическое ожидание 18.3-3, 18.4-4, 18.4-3, 18.9-2
 $\langle x \rangle$ среднее по времени (случайной величины) 18.9-4
 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ выборочное среднее значение 19.2-3

Л а т и н с к и й а л ф а в и т

$\arcsin z, \arccos z, \operatorname{arctg} z$ обратные тригонометрические функции арксинус, аркосинус, арктангенс 21.2-4

$\arg z$ аргумент z 1.3-2

$\operatorname{arsh} z, \operatorname{arch} z, \operatorname{arth} z$ обратные гиперболические функции аресинус, ареакосинус, ареатангенс 21.2-8

$B_k, B_k^{(n)}$ числа Бернулли 21.5-2

$B_k^{(n)}(x)$ многочлены Бернулли 21.5-2

$\operatorname{ber}_m z, \operatorname{bei}_m z$ 21.8-7

C_m^n или $\binom{m}{n}$ биномиальные коэффициенты 21.5-1

$G(x)$ интеграл Френеля 21.3-2

$\operatorname{ch} z$ гиперболический косинус 21.2-5

Ci x интегральный косинус 21.3-1

$\operatorname{cp} z$ (косинус-амплитуда) эллиптическая функция 21.6-7

$\operatorname{cos} z$ косинус 21.2-1

$\operatorname{ch}^{-1} z$ гиперболический ареакосинус $\operatorname{arch} z$ 21.2-8

$\operatorname{dn} z$ (дельта амплитуды), эллиптическая функция 21.6-7

$\det [a_{ik}]$ определитель 1.5-1

$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ якобиан 4.5-6

$\operatorname{erf} x$ функция ошибок 21.3-2

$\operatorname{erfc} x$ дополнительная функция ошибок 21.3-2

$E(k, \varphi)$ лежандров нормальный эллиптический интеграл второго рода 21.6-6

Ei $x, \bar{Ei} x$ экспоненциальный интеграл 21.3-1

$E(k)$ лежандров полный нормальный эллиптический интеграл второго рода 21.6-6

$F(a, b; c; z)$ $\equiv {}_2F_1(a, b; c; z)$ гипергеометрическая функция 9.3-9, 9.3-11

$F(a; c; z) \equiv {}_1F_1(a; c; z)$ вырожденная гипергеометрическая функция 9.3-10, 9.3-11

$F(k, \varphi)$ лежандров нормальный эллиптический интеграл первого рода 21.6-6

$\mathcal{F}[f(t)]$ преобразование Фурье 4.11-3

$\mathcal{F}_c[f(t)], \mathcal{F}_s[f(t)]$ косинус- и синус-преобразование Фурье 4.11-3

$G_{xy}(\omega), G_{xy}(\omega)$ спектральные плотности 18.10-3

$\mathcal{G}_{xy}(\omega), \mathcal{G}_{xy}(\omega)$ спектральные плотности по множеству наблюдений 18.10-5

$h_y^{(1)}(z), h_y^{(2)}(z)$ сферические бесселевы функции третьего рода 21.8-8

$H_n(z)$ многочлены Эрмита 21.7-1

$E_n^{(1)}(z), E_n^{(2)}(z)$ функции Ганкеля 21.8-1

$\operatorname{her}_m z, \operatorname{hei}_m z$ 21.8-7

$i = \sqrt{-1}$ мнимая единица 1.3-1

$I_m(z)$ модифицированная функция Бесселя 21.8-6

$I_2(p, q)$ неполная бета-функция 21.4-5

$\operatorname{Im} z$ мнимая часть z 1.3-1

$\inf x$ точная нижняя грань 4.3-3

$j_\nu(z)$ сферическая функция Бесселя первого рода 21.8-8

$J_m(z)$ функция Бесселя первого рода 21.8-1

$K(k)$ лежандров полный эллиптический интеграл первого рода 21.8-1

$K_m(z)$ модифицированная функция Ганкеля 21.8-6

$\operatorname{ker}_m z, \operatorname{kei}_m z$ 21.8-7

$L_n(z)$ многочлены Лагерра 21.7-1

L_n^m ассоциированный многочлен Лагерра или обобщенная функция Лагерра 21.7-5

$L_2 \equiv L_2(V)$ класс квадратично интегрируемых функций 15.2-1

$\mathcal{L}[f(t)] \equiv \mathcal{L}[f(t), s]$ преобразование Лапласа 8.2-1

$\operatorname{li}(z)$ интегральный логарифм 21.3-1

$\lim z$ предел 4.4-1

$\text{l.i.m. } x$ предел в среднем 15.2-2

$\log_a z$ логарифм 1.2-3, 21.2-10

$\max x, \min x$ максимальное и минимальное значения 4.3-3

$N_m(z)$ цилиндрическая функция Неймана второго рода 21.8-1

$n!$ факториал 1.2-4

$n_\nu(z)$ сферическая функция Бесселя второго рода 21.8-8

$o(g(x)), o[g(x)]$ асимптотические соотношения 4.4-3

- $P_n(z)$ многочлены Лежандра первого рода 21.7-1
 $P_j^m(z)$ присоединенные «многочлены» Лежандра первого рода 21.8-10
 $Q_n(z)$ функция Лежандра второго рода 21.7-3
 $R_{xy}(\tau), R_{xy}(t_1, t_2)$ взаимная корреляционная функция 18.10-2
 $R_{xy}(\tau), R_{xy}(t_1, t_2)$ корреляционные функции на множестве наблюдений 18.9-2, 18.10-5
 $\text{Re } z$ действительная часть z 1.3-1
 $\text{Res}_z f$ вычет функции $f(z)$ в точке $z = a$ 7.7-1
 $s(t)$ 18.10-6
 $S(x)$ интеграл Френеля 21.3-2
 $S_k^{(n)}$ числа Стирлинга 21.5-1
 $\text{sgn } x$ функция-сигнатура 21.9-1
 $\text{Si}(x)$ интегральный синус 21.3-1
 $\sin z$ синус 21.2-1
 $\text{sh } z$ гиперболический синус 21.2-5
 $\text{sh}^{-1} z$ гиперболический аресинус $\text{arsh } z$ 21.2-8
 $\sin^{-1} z$ $\arcsin z$ (арксинус z) 21.2-4
 $\sup x$ точная верхняя граница 4.3-3
 $T_n(z)$ многочлен Чебышева первого рода 21.7-1
 $\text{tg } z$ тангенс 21.2-1
 $\text{tg}^{-1} z$ арктангенс ($\text{arctg } z$) 21.2-4
 $\text{th } z$ гиперболический тангенс 21.2-5
 $\text{th}^{-1} z$ гиперболический аретангенс $\text{arth } z$ 21.2-8
 $\text{Tr}[a_{ik}]$ или $\text{Sp}[a_{ik}]$ след 13.2-7
 $U_n(z)$ «многочлен» Чебышева второго рода 21.7-4
 V векторное пространство 8.2-1
 $Y_j(\vartheta, \varphi)$ сферическая поверхностная гармоника 21.8-12
 $Z_m(z)$ цилиндрическая функция 21.8-1
- $\Gamma(z)$ гамма-функция 21.4-1
 $\Gamma_z(p)$ неполная гамма-функция 21.4-5
 $\gamma_{xy}(\nu), \Gamma_{xy}(\nu)$ спектральные плотности 18.10-3
 δ_{ik}, δ_k^i — символ Кронекера 13.2-3
 $\delta(x), \delta_+(x), \delta_-(x)$ импульсные функции 21.9-2
 $\delta(x, \xi)$ многомерная дельта-функция 15.3-1, 21.9-7
 Δy_k нисходящие разности 20.4-1
 ∇y_k восходящие разности 20.4-1
 $\zeta(z)$ дзета-функция Вейерштрасса 21.6-3
 $\vartheta_i(z)$ тэта-функции Якоби 21.6-8
 μy_k центральное среднее 20.4-1
 $\sigma(z)$ сигма-функция Вейерштрасса 21.6-3
 $\psi(z)$ пси-функция 21.4-3
 $\Psi(z)$ Ψ -функция Вейерштрасса 21.6-2
- Специальные
 математические знаки
- $\int y(t)$ функция скачка 20.4-5
 \oplus прямая сумма 12.7-5, 13.2-10, 14.8-2, 14.9-2
 \otimes прямое произведение 12.7-2, 13.2-10, 14.10-7
 \cap логическое умножение 12.8-1, 18.2-1
 \cup логическое сложение 12.8-1
 $*$ символ свертки 4.6-13
 $\sum_{k=m}^n$ суммирование 1.2-5
 $\prod_{k=m}^n$ произведение 1.2-5
 $=$ символ равенства 1.1-3, 12.1-3
 \equiv символ тождества 1.1-4
 \approx приближенно равно
 \approx асимптотически равно 4.4-3
 \sim асимптотически пропорционально 4.4-3
 $<, >, <=, >=$ символы неравенства 1.1-5, 12.6-1
 \in принадлежность элемента 4.3-2
 \ni так, что
- Греческий алфавит
- $B(p, q)$ бета-функция 21.4-4
 $B_z(p, q)$ неполная бета-функция 21.4-5

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Цифры указывают номера пунктов, например 14.2-5 означает п.5 из § 2 гл. 14.)

А

Абсолютная величина вектора 14.2-5
— — действительного числа 1.1-6. 1.3-2
Абсцисса 2.1-2
— абсолютной сходимости преобразования Лапласа 8.2-2
Автоморфизм 12.1-6
— группы внутренний 12.2-9
Аксиома координатная 2.1-2
— непрерывности 2.1-2
— Кантора — Дедекинда 4.3-1
Аксиомы вероятностей 18.2-2
— определяющие 12.1-1
— Пеано 1.1-2
Алгебра 12.1-2
— булева 12.8-1
— классов 12.8-5
— линейная ассоциативная 12.4-2
— — над кольцом 12.4-2
— меры 12.8-4
— операторов линейная 14.4-2
— с делением 12.4-2, 14.4-2
— событий 12.8-5, 18.2-1
Алгебраическая кратность собственного значения 13.4-3
Алгебраическое дополнение 1.5-2
Амплитуда 4.11-4, 21.6-7
— комплексная 9.4-6
Аналитическая функция матрицы 13.2-12
Аналитическое продолжение функции 7.8-1
Ангармоническое отношение 7.9-2
Аппроксимация функции 15.2-6
Аргумент комплексного числа 1.3-2
— —, главное значение 1.3-2
Асимметрия 19.2-4
Асимптота 17.7-6
— гиперболы 2.5-2
Асимптотические соотношения между функциями 4.4-3

Астроида 2.6-1
Аффинор 16.9-2
— локальный вектора 16.10-7

Б

База топологического пространства 12.5-1
Базис 5.2-2
— дуальный взаимный 14.7-6
— линейного многообразия 14.2-4
— локальный 6.3-1, 17.3-8
— ортонормированный 14.7-4, 15.2-4
Базисные векторы 3.1-5
Базисы взаимные 16.7-3
— — риманова пространства 16.8-2
Бесконечное произведение 4.8-7
— —, расходящееся к нулю 4.8-7
— —, сходящееся абсолютно 4.8-7
— —, — коммутативно 4.8-7
— —, — равномерно 4.8-7
Бесконечный ряд 4.8-1
Бета-распределение вероятностей 13.8-5
Бета-функция неполная 21.4-5
— полная 21.4-4
Бивектор 16.5-4
Билинейная форма 13.5-1
Бином Ньютона 1.4-1
Биномиальные коэффициенты 1.4-1, 21.5-1
— —, определение 21.5-1
— —, приближенные формулы 21.5-4
— —, свойства 21.5-1
— —, теорема сложения 21.5-1
Бинормаль 17.2-2, 17.2-4
—, направляющие косинусы 17.2-4
Борелевское множество 4.6-14
Брахистохрона 11.5-1
Булева алгебра 4.3-2, 12.8-1
— — вполне аддитивная 12.8-4
— функция 12.8-2

Булева функция, канонический вид 12.8-2
 Булево переменное 12.8-2
 Булевы алгебры изоморфные 12.8-6

В

Валентность тензора 16.2-1
 Вариационное исчисление 11.4-2
 Вариация 11.4-1
 Вектор 12.4-1
 — аксиальный 16.8-4
 — бинормали единичный 17.2-2, 17.2-3
 —, выражение через векторы локального базиса 16.6-1
 — главной нормали единичный 17.2-2, 17.2-3
 — Дарбу 17.2-3
 — диадика 16.9-2
 — единичный 5.2-5, 14.2-8, 16.8-1
 — — локальный 16.8-3
 — инфинитезимального перемещения 16.2-2
 — касательной единичный 17.2-2, 17.2-3, 17.4-2
 — ковариантный 16.2-1
 — — абсолютный 16.2-1
 — контравариантный 16.2-1
 — — абсолютный 16.2-1
 — кривизны 17.2-2
 — — геодезической 17.3-4
 — — нормальной 17.3-4
 — — первый 17.4-2
 — — тангенциальной 17.3-4
 —, матричное представление 14.5-2
 — нормали единичный 17.3-2
 — нормальный плоскости 3.2-1
 — нулевой 5.2-1
 — площади 3.1-10
 — площадки 5.4-6
 — полярный 16.8-4
 —, представление комплексными матрицами 14.10-6
 — случайный многомерный 18.4-1, 18.4-7
 — собственный 14.3-5
 — угловой скорости 5.3-2
 Векторная линия 5.4-3
 — сумма 5.2-1
 — функция линейная 14.3-1
 Векторное двойное произведение трех векторов 5.2-9
 — поле 5.4-3
 — произведение двух векторов 5.2-7
 — пространство 14.2-1
 — — бесконечномерное 14.2-4
 — — евклидово 14.2-7
 — —, линейная размерность 14.2-4
 — — линейное 14.2-1

Векторное пространство линейное над кольцом 12.4-1
 — —, матричное представление 14.2-4
 — — нормированное 14.2-5
 — — полное 14.2-7
 — — предгильбертово 14.2-6
 — — унитарное 14.2-6, 14.2-7
 — — эрмитово 14.2-6
 Векторно-скалярное произведение трех векторов 5.2-8
 Векторные уравнения 5.2-11
 — функции поля 5.5-1
 Векторный анализ 5.1-1
 — элемент линии 5.4-4
 — — поверхности 5.4-6
 Вектор-сумма функций 15.2-1
 Вектор-функция 5.3-1
 — дифференцируемая 5.3-2
 — непрерывная 5.3-1
 — ограниченная 5.3-1
 —, правила дифференцирования 5.3-2
 Векторы ассоциированные 16.7-2
 — базисные 5.2-2, 6.3-1
 — — локальные 6.3-2
 — — — контравариантные 16.6-1
 — линейно зависимые 5.2-2, 5.2-7
 — — независимые 5.2-2
 — ортогональные 14.7-3
 —, условие перпендикулярности 5.3-6
 Величина случайная см. Случайная величина
 Вероятности событий, правило умножения 18.2-2
 Вероятностная функция 18.2-7
 Вероятность несуществования события 18.2-5
 — осуществления m событий из N 18.2-5
 — — хотя бы одного события 18.2-5
 — события 18.1-1, 18.2-2
 — — апостериорная 18.2-6
 — — априорная 18.2-6
 — — сложного 18.7-2
 — — условная 18.2-2
 — совмещения событий 18.2-2, 18.2-5
 Вершина конуса 3.1-15
 Вершины кривой второго порядка 2.4-7
 Ветвь функции 7.4-1
 Возмущение 10.2-7
 Волна приходящая 15.6-10
 — синусоидальная круговая 10.4-8
 — — сферическая 10.4-8
 — — стоячая 10.4-8
 — — цилиндрическая 10.4-8
 — — уходящая 15.6-10
 Волны 10.4-1
 — затухающие 10.4-1
 Вращение 14.10-1

- Вращение вокруг осей координат 14.10-3
 — двумерное 14.10-7
 — на бесконечно малый угол 14.10-5
 — несобственное 14.10-1
 —, представление комплексными матрица-
 ми 14.10-6
 — с отражением 14.10-1
 Вронскиан 9.3-2
 Выборка случайная 19.7-2
 — — многомерная 19.7-4
 Выборки из нормальной совокупности
 19.5-3
 Выборочная дисперсия 19.2-4, 19.7-2
 — медиана 19.2-2
 — средняя квадратичная сопряженности
 признаков 19.7-5
 — функция 18.9-1
 Выборочное значение 18.9-1
 — среднее 19.7-2
 — — при группированных данных 19.2-3
 — — случайной величины 19.2-3
 — —, упрощенное вычисление 19.2-5
 — — функции случайной величины 19.2-3
 — стандартное отклонение 19.2-4
 Выборочный квантиль 19.2-2
 — квартиль 19.2-2
 — коэффициент корреляции 19.7-2
 — — регрессии 19.7-2
 — момент 18.9-1
 — — начальный 19.2-4
 — — центральный 19.2-4
 Выпрямление функций 8.3-2
 Вырождение особой точки 9.3-10
 Вычет функции 7.7-1
 Вычисление значений многочлена 20.2-3
- Г
- Гамма-распределение вероятностей 18.8-5
 Гамма-функция 21.4-1
 —, асимптотическое разложение Стирлин-
 га 21.4-2
 —, бесконечное произведение Вейер-
 штрасса 21.4-1
 —, интегральное представление Ганкеля
 21.4-1
 —, интегральные представления 21.4-1
 —, логарифмическая производная 21.4-3
 —, неполная 21.4-5
 —, определение Эйлера 21.4-1
 —, теорема умножения Гаусса 21.4-1
 —, функциональные уравнения 21.4-1
 Гармоника сферическая зональная 10.4-3
 — — поверхностная степени j 10.4-3
 — — секторальная 10.4-3
 — — тессеральная 10.4-3
 Гармоника цилиндрическая 10.4-3
 Гармоническая компонента 4.11-4
 Гармонический анализ периодических функ-
 ций 4.11-4
 — — численный 20.5-8
 Генеральная совокупность 19.1-2
 Геодезическая окружность 17.3-13
 — параллель 17.3-13
 Гильбертово пространство 14.2-7
 Гипербола 2.4-8, 2.4-9
 —, построение 2.5-3
 —, — касательных и нормалей 2.5-3
 — равносторонняя 2.5-2
 —, условие пересечения со своим диамет-
 ром 2.5-2
 Гиперболоид двуполостный 3.5-7, 3.5-10
 — однополостный 3.5-7, 3.5-10
 Гипергеометрическая функция см. Функция
 гипергеометрическая
 Гипергеометрические многочлены см. Мно-
 гочлены гипергеометрические
 Гипергеометрический ряд см. Ряд гипер-
 геометрический
 Гипотеза статистическая 19.6-1
 — эргодическая 18.9-5
 Гипоциклоида 2.6-2
 Главная линейная часть приращения функ-
 ции 4.5-3
 — ось кривой второго порядка 2.4-6
 — — поверхности второго порядка 3.5-6
 — плоскость поверхности второго порядка
 3.5-6
 Главные направления кривой второго по-
 рядка 2.4-7
 Гомеоморфизм 12.5-1
 Гомоморфизм 12.6-6
 Градиент вектора 16.10-7, 16.10-11
 — поверхностный 5.6-2
 — скаляра 16.2-2, 16.10-7
 — скалярной функции точки 5.5-1
 Граница множества 12.5-1
 — — абсолютная 4.3-3
 — — верхняя 4.3-3
 — — — точная 4.3-3
 — — нижняя 4.3-3
 — — — точная 4.3-3
 — области 4.3-6
 — функции верхняя 4.3-3
 — — — точная 4.3-3
 — — нижняя 4.3-3
 — — — точная 4.3-3
 Границы допуска 19.6-4
 График функции 4.2-1
 Группа 12.2-1
 — абелева 12.2-1
 — аддитивная 12.2-10
 — бесконечная 12.2-1

Группа знаковпеременная степени n 12.2-8
 — коммутативная 12.2-1
 — конечная 12.2-1
 — линейная полная (ПЛУГ) 14.10-7
 — по сложеню 12.2-10
 — простая 12.2-5
 — разрешимая 12.2-6
 — симметрическая степени n 12.2-8
 — трехмерных вращений-отражений 14.10-7
 — — отражений 14.10-7
 — унитарная специальная (с.у.г.) 14.10-7
 — — унимодулярная двумерная 14.10-7
 — циклическая 12.2-3
 Группированные данные 19.2-2

Д

Двойное отношение инвариантное 7.9-2
 Двойственность 12.8-1
 Действительная ось 1.3-2
 — часть комплексного числа 1.3-1
 Действительные числа, свойства 1.1-2
 Декартов лист 2.6-1
 Деление левое, правое 12.2-1
 — многочленов 1.7-2
 — отрезка 2.1-4
 Делители многочлена 1.7-1
 Делитель многочленов общий 1.7-3
 — — — наибольший 1.7-3
 — нормальный 12.2-5
 — нуля левый, правый 12.3-1
 Дельта амплитуды 21.6-7
 Дельта-объект ранга $2r$ 16.5-2
 Дельта-окрестность 4.3-5
 Дельта-символ Кронекера ранга 2 16.5-2
 Дельта-функция 21.9-2
 — многомерная 21.9-7
 Детектирование функции 8.3-2
 Детерминант 1.5-1
 Дефект треугольника 17.3-13
 Дециль 18.3-3
 Диагонализация матриц 14.8-6
 Диаграмма ромбовидная 20.5-3
 — Фрезера 20.5-3
 Диаграммы Венна 12.8-6
 — Эйлера 12.8-6
 Диада 14.5-4, 16.9-1
 Диадик 16.9-1
 — антисимметричный 16.9-2
 — риманова пространства 16.9-1
 — симметричный 16.9-2
 Диаметр конического сечения 2.4-6
 — множества 4.6-11
 —, сопряженный семейству плоскостей, параллельных сопряженным хордам 8.5-5

Диаметральная плоскость поверхности второго порядка, сопряженная хордам 3.5-5
 Диаметры, сопряженные поверхности второго порядка 3.5-5
 —, — центральной кривой второго порядка 2.4-6
 Дивергенция вектора 16.10-7
 — векторной функции точки 5.5-1
 — диадика 16.10-11
 — поверхность 5.6-2
 Директриса 2.4-9
 Дискриминант алгебраического уравнения 1.6-5
 — общего уравнения второй степени 2.4-2, 3.5-2
 Дискриминантная кривая 9.2-2
 Дисперсионный анализ 19.6-6
 — — для группировки по двум признакам 19.6-6
 Дисперсия между столбцами 19.6-6
 — — строками 19.6-6
 — обобщенная 18.4-8
 —, обусловленная флуктуацией внутри строк и столбцов 19.6-6
 — остаточная 18.4-9
 — случайной величины 18.3-3
 — суммарная 19.6-6
 — суммы случайных величин 18.5-6
 — условная 18.4-5, 18.4-8
 Дифференциал абсолютный вектора 16.10-1
 — — относительного скаляра 16.10-2
 — — тензора 16.10-2
 — — скаляра 16.10-1
 — тензора 16.10-1
 — дуги в полярных координатах 17.1-4
 — независимого переменного 4.5-3
 — относительный скаляра 16.10-1
 — полный векторной функции точки 5.5-3
 — — скалярной функции точки 5.5-3
 — — функции 4.5-3
 — — функции второй, третьей, ... 4.5-3
 — — первый 4.5-3
 Дифференциальная форма квадратичная 6.2-3
 Дифференциальное исчисление 4.1-1
 — уравнение Бернулли 9.2-4
 — — Бесселя 21.8-1
 — — — модифицированное 21.8-6
 — — — неоднородное 9.3-3
 — — Ван дер Поля 9.5-4, 9.5-5
 — — вырожденной гипергеометрической функции Куммера 9.3-10
 — —, геометрическое толкование 9.2-2
 — — гипергеометрическое Гаусса 9.3-9
 — — для многочленов Гегенбауэра 21.7-8
 — — — Лагера 21.7-5

- Дифференциальное уравнение для много-
 членов Чебышева 21.7-4
 — — — присоединенных функций Ле-
 жандра 21.8-10
 — — — сферических функций Бесселя
 21.8-8
 — — — функций Эрмита 21.7-6
 — — — дополнительные 15.4-2
 — — — замена переменных 9.2-3
 — — — Клеро 9.2-4
 — — — Лагранжа 9.2-4
 — — — Лапласа 15.6-1
 — — — Лежандра 9.3-3, 21.7-3
 — — — линейное в комплексной области
 9.3-5, 9.3-6, 9.3-7
 — — — второго порядка 9.3-8
 — — —, метод вариации постоянных
 9.3-3
 — — — неоднородное с постоянными ко-
 эффициентами 9.4-2
 — — —, нулевое (тривиальное) решение
 9.3-1
 — — — однородное, понижение порядка
 9.3-2
 — — — — с постоянными коэффициен-
 тами 9.4-1
 — — —, операторный метод решения
 9.4-4
 — — —, особые точки 9.3-1
 — — — первого порядка 9.2-4
 — — — порядка r 9.3-1
 — — — приведенное 9.3-1
 — — —, принцип наложения 9.3-1
 — — —, — суперпозиции 9.3-1
 — — —, условие устойчивое 9.4-4
 — — — устойчивое 9.4-4
 — — —, фундаментальная система реше-
 ний 9.3-2
 — — —, метод последовательных приближе-
 ний Пинара 9.2-5
 — — —, методы решения 9.2-5
 — — — нелинейное 9.5-2
 — — — неполное 9.1-5
 — — — обыкновенное 9.1-2
 — — — однородное 9.2-4
 — — —, преобразование контактное 9.2-3
 — — —, — Лежандра 9.2-3
 — — —, — точечное 2.2-3
 — — — приведенное 15.4-2
 — — — Пуассона 15.6-1
 — — — Пфаффа 9.6-1
 — — — вполне интегрируемое 9.6-2
 — — —, разложение решения в ряд Тейлора
 9.2-5
 — — —, решение с помощью функций Бес-
 селя 21.8-5
 — — — Риккати общее 9.2-4
- Дифференциальное уравнение Риккати
 специальное 9.2-4
 — — — с разделяющимися переменными
 9.2-4
 — — — с частными производными см. Урав-
 нение с частными производными
 — — —, теорема существования и единствен-
 ности решения 9.2-1
 — — — Штурма — Лиувилля 15.4-8
 — — — — многомерное 15.4-9
 Дифференциальные инварианты 16.10-7
 — — — параметры Бельтрами 17.3-7
 Дифференциальный оператор набла 16.10-7
 Дифференцирование вектор-функции 5.3-2
 — — — ковариантное 16.10-4
 — — — матриц 13.2-11
 — — — по параметру 4.6-1
 — — — функции 4.5-1
 — — — функциональных рядов 4.3-4
 — — — численное 20.6-1
 Длина вектора 16.8-1
 — — — дуги 4.6-9, 5.4-4, 17.4-2
 — — — интервала, обобщение 4.6-14
 — — — касательной к окружности 2.5-1
 Доверительная вероятность 19.5-5
 — — — область 19.6-5
 Доверительный интервал 10.6-5
 Долгота 3.1-6
 Дополнение А до В 12.8-1
 — — — множества 4.3-2
 — — — события 18.2-1
 — — — элемента 12.8-1
 Дробь непрерывная 4.8-8
 — — — элементарная 1.7-4
 Дуга жорданова 7.2-3
 — — — простая 3.1-13
 — — — регулярная 3.1-13, 17.2-1, 17.4-2
 — — — спрямляемая 4.6-9
- Е
- Единица 12.2-1
- Ж
- «Жезл» 2.6-1
- З
- Задача вариационная, методы решения
 11.5-4, 11.5-5, 11.5-7, 11.6-1, 11.6-2
 — — — взаимно сопряженная 15.4-3
 — — — Гурса 10.3-4
 — — — Дирихле 15.6-2
 — — — для сферы 10.4-9
 — — — изопериметрическая 11.5-3
 — — — Коши 9.1-2, 10.2-2, 10.2-3

- Задача Коши корректная 10.3-5
 —, метод решения Милна «предсказание— уточнение» 20.7-3
 —, начало решения 20.7-3
 —, схемы решения интерполяционно-итерационные 20.7-3
 —, — — разностные 20.7-3
 —, — — экстрополяционные 20.7-3
 — физически реализуемая 9.4-3
 — $(r+1)$ -я 9.3-4
 — краевая см. Красевая задача
 — линейного программирования 11.3-5
 — начальная 9.1-2
 —, метод решения одношаговый 20.7-2
 —, — — Рунге—Кутта 20.7-2
 — Неймана 15.6-2
 — о брахистохроме в трехмерном пространстве 11.5-1
 — о диффузии, интегральное решение Пуассона 15.5-3
 — о собственных значениях дискретная 15.4-11
 — — — для линейных дифференциальных уравнений 15.4-5
 — — — для эрмитовых операторов 15.5-2
 — — — обобщенная 14.8-7
 — — —, связь с интегральным уравнением 15.5-2
 — — — эрмитова 15.4-6, 15.4-7
 — Плато 17.3-6
 — с начальными условиями 10.2-2, 10.2-4
 — Штурма—Лиувилля для уравнений с частными производными второго порядка 15.4-9
 — — — о собственных значениях 15.4-8
 Закон ассоциативный 12.2-1
 — для умножения 12.3-1
 — больших чисел 18.6-5
 — дистрибутивный 12.3-1
 — инерции квадратичных форм 13.5-4
 — эрмитовых форм 13.5-4
 — исключенного третьего 12.3-5
 — малых чисел 18.8-1
 — сложения дисперсий 18.5-6
 Законы поглощения 12.3-1
 — сокращения 12.2-1
 Замкнутость 12.2-1
 — по отношению к умножению 12.3-1
 Замыкание множества 12.5-1
 Затухание аperiodическое 9.4-1
 — критическое 9.4-1
 Знаменатель прогрессии 1.2-7
 Значение бесконечного произведения 4.8-7
 — истинности 12.3-5
 — функции наибольшее 4.3-3
 — — наименьшее 4.3-3
- И
- Идеал 12.3-2
 — двусторонний 12.3-3
 — левый 12.3-2
 — правый 12.3-2
 Излучение диполя 10.4-8
 — точечного источника 10.4-8
 Изображение 8.2-1
 Изоклина 9.2-2, 9.5-2
 Изометрия 12.5-2
 Изоморфизм 12.1-6
 — булевых алгебр 12.8-6
 Импульс полусинусоидальный 4.11-4
 — прямоугольный 4.11-4
 — трапецидальный симметричный 4.11-4
 — треугольный симметричный 4.11-4
 Инвариант 14.1-4, 16.2-1
 — изгибания 17.3-8
 — скалярный 17.4-5
 Инвариантность относительно преобразования координат 14.1-4
 — преобразований 12.1-5
 Инварианты кривой второго порядка 2.4-2
 — общего уравнения второй степени 3.5-2
 — топологические 12.5-1
 — функции Вейерштрасса 21.6-2
 Инверсия точки 7.9-2
 Индекс замкнутой кривой 9.5-3
 — изолированной особой точки 9.5-3
 — подгруппы 12.2-2
 — свободный 16.1-3
 Индексные обозначения 16.1-3
 Интеграл вероятностей 18.8-3, 31.3-2
 — — дополнительный 21.3-2
 — Дирихле 4.11-6
 — дифференциального уравнения с частными производными общих, частный, особый, полный 10.1-2, 10.2-3
 — Дюамеля 9.4-3
 — живых сил 9.5-6
 — Зоммерфельда 21.3-2
 — Лапласа 21.7-7
 — Лебега кратный 4.6-15
 — — от неограниченной функции 4.6-15
 — — от ограниченной функции 4.6-15
 — — по неограниченным интервалам 4.6-15
 — —, свойства 4.6-15
 — —, сравнение с интегралом Римана 4.6-15
 — —, условие существования 4.6-15
 — Лебега — Стильтеса 4.6-17
 — несобственный 4.6-2
 — —, признаки сходимости 4.9-3
 — особый 9.1-2, 9.2-2
 — по Коши, главные значения 4.6-2

- Интеграл по объему 4.6-12**
 — — —, замена переменных 4.6-13
 — по поверхности 4.6-12
 — — —, замена переменных 4.6-13
 — Римана 4.6-1, 4.6-15
 — Римана — Стильбеса 4.6-17
 — Соинина—Шлефли 21.3-2
 — Стильбеса 4.6-17
 — типа Коши 7.5-1
 — Фейера 4.11-6
 — Фурье 4.11-3
 — Шварца — Кристоффеля 7.9-4
 — Шлефли 21.7-7
 — Эйлера второго рода 21.4-1
 — — первого рода 21.4-4
 — эллиптический см. Эллиптический интеграл
- Интегралы Ломмеля 21.3-2**
 — Френеля 21.3-2
- Интегральная кривая 9.1-2**
 — поверхность 10.2-1
 — показательная функция 21.3-1
 — сумма 4.6-1
 — форма квадратичная действительная 15.3-6
 — — эрмитова 15.3-6
 — — неотрицательная 15.3-6
 — — отрицательно определенная 15.3-6
 — — положительно определенная 15.3-6
- Интегральное исчисление 4.1-1**
 — преобразование Ганкеля 8.6-4
 — — конечное 10.5-1
 — — линейное 8.6-1, 15.3-1
 — — —, матричное представление 15.3-1
 — — символическое 15.3-1
 — — Фурье 4.11-3
 — — —, линейность 4.11-5
 — — — обратное 4.11-4
 — — —, свойства 4.11-5
 — — —, теорема Бореля о свертке 4.11-5
 — — —, — масштаба 4.11-5
 — — —, — непрерывности 4.11-5
 — — —, — о дифференцировании 4.11-5
 — — —, — о модуляции 4.11-5
 — — —, — о сдвиге 4.11-5
 — — —, — Парсевала 4.11-5
 — — —, — подобия 4.11-5
 — — Фурье—Бесселя 9.6-4
 — уравнение 15.3-2
 — — Абели 15.3-10
 — — Вольтерра второго рода 15.3-10
 — — — первого рода 15.3-10
 — — — линейное неоднородное второго рода 15.3-3
 — — — однородное второго рода 15.3-2
 — — — первого рода 15.3-2
- Интегральное уравнение общее 15.3-2**
 — — однородное 15.3-2
 — — с эрмитовым ядром 15.5-2
 — — типа Вольтерра 15.3-2
 — — — Фредгольма 15.3-2
 — — Фредгольма линейное второго рода 15.3-7, 15.3-8
 — — — первого рода 15.3-9
 — — — однородное второго рода 15.3-2
- Интегральные суммы Лебега 4.6-15**
 — теоремы 5.6-2, 16.10-11
 — уравнения, численные методы решения 20.8-5
- Интегральный косинус 21.3-1**
 — логарифм 21.3-1
 — синус 21.3-1
- Интегрирование 4.6-6**
 — вектор-функции 5.3-3
 — дифференциальных уравнений 9.1-2
 — многочленов 4.6-6
 — неравенств 4.6-1
 — по частям 4.6-1, 4.6-6
 — подстановкой 4.6-1
 — рациональных функций 4.6-6
 — тензорных величин 16.10-9
 — функционального ряда 4.8-4
 — численное см. Численное интегрирование
- элементарных дробей 4.6-6
- Интегрирующий множитель 9.2-4**
- Интегро-дифференциальное уравнение 15.3-2**
- Интервал допуска 19.6-4**
 — неограниченный открытый 4.3-4
 — ограниченный замкнутый 4.3-4
 — — открытый 4.3-4
 — полуоткрытый 4.3-4
 — частичный 4.3-4
- Интерквартильная ширина 18.3-3**
- Интерполирование рациональными дробями 20.5-7**
 — функций нескольких переменных 20.5-6
- Интерполяционная формула 20.5-1**
 — — Бесселя 20.5-3
 — — модифицированная 20.5-3
 — — — по двум переменным 20.5-6
 — — Лагранжа 20.5-2
 — — Ньютона 20.5-2
 — — Стеффенсена 20.5-3
 — — Стирлинга 20.5-3
 — — Эверетта 20.5-3
 — — n -го порядка 20.5-2
- Интерполяционные формулы Ньютона 20.5-3**
 — — с центральными разностями 20.5-3
- Интерполяционный многочлен 20.5-3**
- Интерполяция обратная 20.5-4**

Интерполяция обратная с помощью обра-
щения рядов 20.5-4
— параболическая 20.5-2
— с оптимальным выбором узлов 20.5-5
— тригонометрическая 20.5-8
Испытание сложное 18.2-4
Испытания независимые 18.2-4
— — повторные 18.2-4
— по схеме Бернулли 18.7-3
Итерационно-интерполяционный метод
Эйтнена 20.5-2
Итерационные формулы численного реше-
ния уравнений 20.2-2
Итерация Зейделя 20.3-2
— простая 20.3-2

К

Кардинальное число 4.3-2
— — бесконечное 4.3-2
Кардиоида 2.6-1
Касание n -го порядка 17.1-5, 17.2-6
Касательная к кривой плоской 17.1-1
— — — пространственной 17.2-2, 17.2-4
—, направляющие косинусы 17.2-4
— плоскость 17.2-2
— — к поверхности второго порядка 3.5-8
Квадрант 2.1-2
Квадратичная форма 13.5-2
— — действительная 13.5-2
— —, линейная подстановка 19.5-4
— — неопределенная 13.5-2
— — неотрицательная 13.5-2
— — неположительная 13.5-2
— — отрицательно определенная 13.5-2
— — — полуопределенная 13.5-2
— — поверхности вторая основная 17.3-5
— — — первая основная 17.3-3
— — положительно определенная 13.5-2
— — — полуопределенная 13.5-2
— — симметрическая 13.5-2
— — характеристическая 2.4-5, 3.5-4
Квадратурная формула Гаусса 20.6-3
— — Лагерра 20.6-3
— — Чебышева 20.6-3
— — Эрмита 20.6-3
Квадратурные формулы Ньютона—Котеса,
замкнутый тип 20.6-2
Квадрика 3.5-1
Квадриполь 15.6-5
Квантиль порядка P 18.3-3
Квартиль 18.3-3
Кватернион 12.4-2
Класс вычетов по модулю 12.2-10
— геометрических объектов 16.1-4
— инвариантных объектов 16.1-4

Класс распределений Каптейна 19.3-2
— сменный левый, правый 12.2-4
— сопряженных элементов 12.2-5
Ковариация 18.4-4, 18.4-8
Колесание вынужденное 9.4-8
— затухающее 9.4-1
— свободное 2.4-8
— собственное 9.4-1
Колесания круглой мембраны свободные
10.4-9
— упругие 10.4-1
— упругой струны свободные 10.4-9
— характеристические 10.4-9
Коллокация 20.8-4
Кольцо 12.3-1
— без делителей нуля 12.3-1
— коммутативное 12.3-1
— неассоциативное 12.9-1
— с единицей 12.3-1
Коммутатор операторов 14.4-2
Компакт 12.5-4
Комплексная плоскость 1.3-2, 7.2-4
Комплексные числа сопряженные 1.3-1
Комплексный контурный интеграл 7.2-5
Композиционный ряд 12.2-6
— фактор 12.2-6
Компонента 14.1-2
Компоненты вектора физические 16.8-3
— метрического тензора 6.2-3
— момента мультиполя 15.6-5
— тензора 16.2-1
— — физические 16.8-3
— функции 16.1-3
Конические сечения 2.4-1
— —, классификация 2.4-3
— — невырожденные 2.4-3
— —, способы задания 2.4-11
— —, условия подобия 2.4-3
Контур 7.2-3
Конус 3.1-15
— действительный 3.5-7, 3.5-10
— Монжа 10.2-1
Конформное отображение 7.9-1
Конхоида Никомеда 2.6-1
Конъюнкция 15.4-3
Координата 14.1-2
Координатная гиперповерхность 17.4-2
— линия 6.2-2, 17.4-2
— поверхность 6.2-2
Координатные линии на поверхности 17.3-1
— плоскости 3.1-2
Координаты биполярные 6.5-10
— бицилиндрические 6.5-10
— вектора 5.2-2
— — декартовы прямоугольные 5.2-3
— — ковариантные 6.3-3
— — контравариантные 6.3-3

- Координаты вектора физические 6.3-2
 — геодезические нормальные 17.4-7
 — — — полярные 17.3-13
 — — — декартовы 2.1-2, 3.1-2
 — — — прямоугольные, общее преобразование переноса и поворота 3.1-12
 — — — —, одновременное преобразование переноса и поворота 2.1-7
 — — — —, преобразование параллельного переноса 2.1-5, 3.1-12
 — — — —, — поворота 2.1-6, 3.1-12
 — — — —, связь с полярными 2.1-3
 — — — —, изотермические 17.3-10
 — — — —, изотропные 17.3-10
 — — — —, конические 6.5-6
 — — — —, криволинейные на поверхности 17.3-1
 — — — —, ортогональные, векторное произведение 6.4-2
 — — — —, векторный элемент линии 6.4-3
 — — — —, дифференциальные операторы 6.4-2
 — — — —, криволинейный интеграл 6.4-3
 — — — —, площадь поверхности 6.4-3
 — — — —, символы Кристоффеля 6.5-1
 — — — —, скалярное произведение 6.4-2
 — — — —, элемент объема 6.4-3
 — — — —, точки 6.2-1
 — — — —, элемент длины дуги 6.2-3
 — — — —, линейные 2.3-3, 3.4-4
 — — — —, неподвижной системы 14.10-5
 — — — —, нормальные 9.4-8
 — — — —, ортогональные 17.4-7
 — — — —, параболические 6.5-8, 6.5-9
 — — — —, параболического цилиндра 6.5-9
 — — — —, параболоидальные 6.5-7
 — — — —, плюнкеровы 2.3-3, 3.4-4
 — — — —, повернутой системы 14.10-5
 — — — —, полугеодезические 17.3-13, 17.4-7
 — — — —, полярные 2.1-8, 6.5-1
 — — — —, связь с декартовыми 2.1-8
 — — — —, римановы с началом O 17.4-7
 — — — —, середины отрезка 2.1-4, 3.1-7
 — — — —, сферические 3.1-6, 6.5-1
 — — — —, связь с декартовыми 3.1-6
 — — — —, тангенциальные 2.3-3, 3.4-4
 — — — —, тензора 16.2-1
 — — — —, тороидальные 6.5-11
 — — — —, точечные 2.3-3
 — — — —, точки 2.1-1, 16.1-2
 — — — —, делящей отрезок в отношении λ 2.1-4, 3.1-7
 — — — —, пересечения трех плоскостей 3.4-5
 — — — —, фокуса 2.4-9, 17.3-11
 — — — —, функции 16.1-3
 — — — —, центра кривизны 17.1-4
 — — — —, поверхности второго порядка 3.5-5
 — — — —, цилиндрические 3.1-6, 6.5-1
- Координаты цилиндрические, связь с декартовыми 3.1-6
 — — — эллипсоида вращения вытянутого 6.5-3
 — — — — сплюснутого 6.5-4
 — — — эллипсоидальные общие 6.5-2
 — — — эллиптического цилиндра 6.5-5
 Корень алгебраического уравнения 1.6-2
 — — — кратный 1.6-3
 — — — арифметический из действительного числа 1.2-1
 — — — n -й степени 1.2-1
 — — — из комплексного числа 1.3-3
 Корректность определения операции 12.1-4
 Корреляция ранговая по Спирмену 19.7-6
 Косинус амплитуды 21.6-7
 Косинус-интеграл Фурье 4.11-3
 Косинус-преобразование Фурье 4.11-3
 Коэффициент асимметрии 18.3-3
 — — — вариации 18.3-3
 — — — затухания 9.4-1
 — — — искажения 7.9-1
 — — — корреляции 18.4-4, 18.4-8, 18.4-9
 — — — сводный 18.4-9
 — — — ранговой 19.7-6
 — — — разброса 18.4-8
 — — — регрессии 18.4-6, 18.4-9
 — — —, проверка гипотетического значения 19.7-4
 — — — эксцесса 18.3-3
 Коэффициенты алгебраического уравнения 1.6-3
 — — — Фурье 4.11-2
 Краевая задача 9.1-2
 — — — двумерная, решение посредством функции Грина 15.6-9
 — — — двухточечная, приведение к задаче Коши 9.3-4
 — — — для уравнения гиперболического 10.3-4
 — — — — параболического 10.3-4
 — — — — эллиптического 10.3-4
 — — — корректная 10.3-4
 — — — линейная 10.4-2, 15.4-1, 15.4-2
 — — — общая, связь с интегральным управлением 15.5-2
 — — —, решение 15.4-12
 — — —, — методом интегральных преобразований 10.5-1, 10.5-3
 — — —, — разложением в ортогональные ряды 10.4-9
 — — — самосопряженная 15.4-3
 — — — трехмерная, решение посредством функции Грина 15.6-6
 — — — эрмитово сопряженная 15.4-3
 Краевые условия 15.4-1
 — — — взаимно сопряженные 15.4-3
 — — — дополнительные 15.4-2

Красные условия Неймана 15.5-7
 — — эрмитово сопряженные 15.4-3
Крамера правило 1.0-2
Кратность собственного значения алгебраическая 14.8-3
 — — — геометрическая 14.8-3
Кратные интегралы, вычисление 20.6-4
«Крест» 2.6-1
Кривая, асимптотически приближающаяся к прямой 17.1-6
 — вогнутая 17.1-4
 — второго порядка 2.4-1
 — — —, инварианты 2.4-2
 — — — невырожденная, геометрическое определение 2.4-9
 — — — центральная 2.4-6
 — выпуклая 17.1-4
 — жорданова замкнутая 7.2-3
 — изотропная 17.3-10, 17.4-4
 — минимальная 17.3-10
 — непрерывная 3.1-13, 7.2-3
 — нулевой длины 17.4-4
 —, параметрическое задание 2.1-9
 — простая 7.2-3
 — — в смысле Жордана 3.1-13
 — — замкнутая 3.1-13, 7.2-3
 — регулярная 3.1-14
 — средней квадратической регрессии 18.4-6
 — характеристическая 10.3-1
 — n -го порядка 2.1-9
Кривизна 17.1-4, 17.2-3
 — гауссова 17.3-5
 — геодезическая 17.3-4
 — нормальная 17.3-4
 — нормального сечения 17.3-5
 — области интегральная 17.3-14
 — первая 17.4-2
 — полная 17.2-3, 17.3-5
 — скалярная 17.4-5
 — средняя 17.3-5
 —, формула 17.2-4
Кривизны главные 17.3-5
Криволинейные координаты см. Координаты криволинейные
Криволинейный интеграл 4.6-10
 — — векторный 5.4-5
 — — скалярный 5.4-5
 — —, условие независимости от пути интегрирования 5.7-1
Кривые второго порядка вырожденные 2.4-8
 — плоские алгебраические, примеры 2.6-1
 — — трансцендентные, примеры 2.6-2
Критерии непараметрические 19.1-3
Критерий знаков односторонний, двусторонний 19.6-8
 — значимости 19.6-4

Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов 4.9-4
 — — — — последовательностей или рядов 4.9-2
 — — — сходимости несобственных интегралов 4.9-3
 — — — последовательностей или рядов 4.9-1
 — некоррелированности величин 19.7-4
 — Рауса—Гурвица 1.6-6
 — с фиксированной выборкой 19.6-9
 — статистической гипотезы 19.6-2
 — — наиболее мощный 19.6-3
 — — несмещенный 19.6-3
 — — равномерно наиболее мощный 19.6-3
 — — смещенный 19.6-3
 — χ^2 с оцениваемыми параметрами 19.6-7
 — — согласия 19.6-7
Критическая область 19.6-2
Критическое множество 19.6-2
Круг кривизны 17.1-4, 17.2-2
 — сходимости степенного ряда 7.5-2
Кручение 17.2-3
 —, формула 17.2-4

II

Лапласиан 5.5-5, 5.5-6
 — скаляра 16.10-7
Лемма Абеля 4.8-5
 — Жордана 7.7-3
 — основная вариационного исчисления 11.5-1
 — Шура 14.9-2
Лемниската Бернулли 2.6-1
Линейная алгебра над кольцом 12.4-2
Линейное многообразие 14.2-1
 — —, линейный базис 14.2-4
Линейный интеграл 5.4-5
Линии градиента 5.5-1
 — пересечения поверхности с координатными плоскостями 3.1-16
Линия асимптотическая 17.3-6
 — геодезическая 17.3-12, 17.4-3
 — — нулевой длины 17.4-4
 — кривизны 17.3-6
 — пересечения двух поверхностей 3.1-16
 — тока 5.4-3
 — характеристическая 10.2-1
Логарифм 21.2-10
 — действительного числа 1.2-3
 — —, свойства 1.2-3
 — десятичный 1.2-3
 — натуральный (неперов) 1.2-3
Логарифмический декремент 9.4-1

Логика символическая 12.8-5
 Локоп Аньези 2.6-1
 Ломаная Эйлера 20.7-2
 λ -дискриминантная кривая 17.1-7, 17.3-11

М

Максимум внутренний 11.2-1, 11.3-1

— граничный 11.2-1, 11.3-1, 11.3-5

— интеграла кратного 11.5-7

— — — определенного 11.4-2

— — — локальный 11.4-2

— локальный 11.2-1, 11.3-1

— нестрогий 11.2-1

— условный 11.3-4

— функции абсолютный 4.3-3

Математическая операция 12.1-1

— статистика 19.1-1

Математическое ожидание случайной величины 18.3-3

— — суммы случайных величин 18.5-6

— — условное 18.4-5, 18.4-9

— — функции от случайной величины 18.3-3, 18.4-4, 18.4-8

Матрица аддитивно обратная 13.2-3

— альтернирующая 13.3-2

— антисимметрическая 13.3-2

— ассоциированная 13.3-1

— бесконечная 13.2-1

—, вековое уравнение 13.4-5

— Грина 9.4-3

— действительная 13.2-1

— диагональная 13.2-1

— единичная порядка n 13.2-3

— квадратная вполне приводимая 14.8-2

— — невырожденная 13.2-3

— — неособенная 13.2-3

— — порядка n 13.2-1

— —, приведение к диагональному виду 13.4-4

— —, — к треугольному виду 13.4-3

— — приводимая 14.8-2

— — разложимая 14.8-2

— —, собственные значения 13.4-2

— —, — числа 13.4-2

— —, условие невырожденности 13.2-3, 13.4-2

— —, характеристические числа 13.4-2

— —, целочисленные степени 13.2-4

— клеточная 13.2-9

— —, собственные значения 13.4-6

— —, спектр 13.4-6

— комплексно сопряженная 13.3-1

— конечная 13.2-1

— корреляционная 18.4-8, 18.10-2

— нососимметрическая 13.3-2

Матрица носоэрмитова 13.3-2

— модальная 14.8-6

— моментов 18.4-8

— — выборки 19.7-2

— мономпальная 13.2-1

— над полем комплексных чисел ограниченная 13.2-1

— наддиагональная 13.2-1

— неотрицательная 13.5-2

— неположительная 13.5-2

— нормальная 13.3-4

— нулевая 13.2-3

— ортогональная 13.3-2

— отрицательно определенная 13.5-2

— — полуопределенная 13.5-2

— передаточная 9.4-7

— перестановки 13.2-6

— положительно определенная 13.5-2

— — полуопределенная 13.5-2

—, правила комбинирования 13.3-3

— присоединенная 13.3-1

— противоположная 13.2-3

— прямоугольная размера $m \times n$ над полем 13.2-1

—, разбиение на клетки 20.3-4

— самосопряженная 13.3-2

— симметрическая 13.3-2

— системы 1.9-4

— — расширенная 1.9-4

—, соответствующая сопряженному оператору 14.7-5

— сопряженная 13.3-1

—, спектр собственных значений 13.4-2

— строго треугольная 13.2-1

—, теоремы о разложении 13.3-4

— транспонированная 13.3-1

— треугольная 13.2-1

— унимодулярная 14.10-6

— унитарная 13.3-2

—, характеристическое уравнение 13.4-8

— эрмитова см. Эрмитова матрица

— эрмитово сопряженная 13.3-1

Матрица-столбец 13.2-1

Матрица-строка 13.2-1

Матрицы конгруэнтные 13.4-1

— подобные 13.4-1

— просто эквивалентные 13.4-1

—, равные друг другу 13.2-2

—, связанные преобразованием подобия 13.4-1

— соединенные 13.4-1

— эквивалентные 13.4-1

Медиана распределения 18.3-3

Мера 12.8-4

— асимметрии пирсоновская 13.3-3

— Лебега в пространствах двух, трех, ... измерений 4.6-14

- Мера Лебега внешняя 4.6-14**
 — — внутренняя 4.6-14
 — —, определение аксиоматическое 4.6-14
 — —, — конструктивное 4.6-14
 — Лебега — Стильеса 4.6-17
 — точности 18.8-4
- Метод взаимных градиентов 20.8-2**
 — вращения 20.8-5
 — Галеркина 20.8-5
 — Гаусса 20.8-1
 — градиента 20.2-4, 20.3-2
 — Горнера 20.2-3
 — Грэффе—Лобачевского 20.2-3
 — Зейделя 20.3-2
 — исключения по главным элементам 20.3-1
 — итерационный отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы 20.3-5
 — коллокации 20.8-4, 20.8-5
 — Крылова—Боголюбова приближенного решения дифференциальных уравнений 9.5-5
 — Майера решения дифференциального уравнения Пфаффа 2.6-2
 — матричный численного решения уравнений 20.2-3
 — Милна, предсказание — уточнение 20.7-3
 — моментов для отыскания оценок 19.4-3
 — наибольшего правдоподобия для отыскания оценок 19.4-4
 — наименьших квадратов 20.8-5
 — — — дискретный 20.5-1
 — наискорейшего спуска 20.2-4, 20.3-2
 — Ньютона численного решения уравнений 20.2-2
 — — — системы уравнений 20.2-4
 — последовательных приближений Пинара 20.7-4
 — простой итерации 20.3-2
 — Рунге—Кутты 20.7-4, 20.7-5
 — секущих 20.2-2
 — средних квадратических приближений 20.8-4
 — функций Грина для неоднородных краевых условий 15.5-4
 — — —, приложение к задаче с начальными условиями 15.5-3
 — Штурма 1.6-6
- Методы аппроксимирующих функций 20.8-4, 20.8-5**
 — исключения 20.3-1
 — итерационные численного решения системы уравнений 20.2-4, 20.3-2
 — — — уравнения 20.2-2, 20.2-3
 — релаксации 20.3-2
- Метрика 12.5-2**
 — в пространстве L_1 15.2-3
- Метрическая эквивалентность функций 15.2-2**
Минимум внутренний 11.2-1, 11.3-1
 — граничный 11.2-1, 11.3-1, 11.3-5
 — интеграла краткого 11.5-7
 — — — определенного 11.4-2
 — — — локальный 11.4-2
 — локальный 10.2-1, 11.3-1
 — нестрогий 11.2-1
 — условный 11.3-4
 — функции абсолютный 4.3-3
- Минор 1.5-2**
 — главный 1.5-4
 — дополнительный 1.5-4
 — m -го порядка 1.5-4
- Мнимая единица 1.3-1**
 — ось 1.3-2
 — часть комплексного числа 1.3-1
- Многообразия инвариантные 14.8-2**
Многочлен 1.4-3, 7.6-5
 —, алгоритм деления 1.7-2
 — минимальный 12.8-2
 —, разложение на множители 1.7-1
 — симметрический 1.4-3
 — тригонометрический 4.11-2
- Многочлены Бернулли 21.5-2, 21.5-3**
 — — порядка n 21.5-2
 — Гегенбауэра 21.7-8
 — гипергеометрические 21.7-8
 — Лагерра присоединенные 21.7-5
 — Лежандра первого рода 21.7-3
 — —, теорема сложения 21.8-3
 — ультрафермические 21.7-8
 — Чебышева первого, второго рода 21.7-7
 — Якоби 21.7-8
- Множества отделенные 12.5-1**
Множество бесконечное 4.3-2
 — векторов линейно зависимое 14.2-3
 — — — независимое 14.2-3
 — вполне упорядоченное 12.6-2
 — всюду плотное 12.5-1
 — дискретное 4.3-6
 — замкнутое 4.3-6, 12.5-1
 — значений функций 4.2-1
 — измеримое с мерой Лебега 4.6-14
 — конечное 4.3-2
 — линейно упорядоченное 12.6-2
 — неограниченное 4.3-3
 — ограниченное 4.3-3, 4.3-6, 12.5-3
 — открытое 4.3-6, 12.5-1
 — полное 12.6-1
 — производное 12.5-1
 — просто упорядоченное 12.6-2
 — пустое 4.3-2
 — связное 4.3-6, 12.5-1
 — собственное 4.3-2

- Множество совершенно упорядоченное
 12.6-2
 — счетное 4.3-2
 — топологического пространства открытое
 12.5-1
 — точечное линейное 4.3-1
 — условно полное 12.6-1
 — частично упорядоченное 12.6-1
 — элементарных событий 13.2-7
 Множители Лагранжа 11.3-4, 11.5-2
 — многочлена 1.7-1
 Множитель левый 16.9-1
 — многочленов общий 1.7-3
 — нормирующий 13.3-4
 — правый 16.9-1
 Мода распределения дискретного 13.3-3
 — — непрерывного 13.3-3
 Модели изоморфные 12.1-6
 Модель 12.1-1
 — математическая 12.1-1
 — термоэлектронного тока 18.11-4
 Модуль 12.2-10
 — вектора 5.2-5, 14.2-5, 16.3-1
 — действительного числа 1.3-2
 — комплексного числа 1.3-2
 — эллиптического интеграла 21.6-6
 — — — дополнительный 21.6-4
 Момент выборочный 18.9-1
 — корреляционный 18.4-4
 — случайной величины 18.3-7, 18.4-4, 18.4-8
 — — — абсолютный 18.3-7
 — — — начальный 18.3-7, 18.4-4, 18.4-8
 — — — факториальный 18.3-7
 — — — центральный 18.3-7
 — — — центральный 18.3-7, 18.4-4, 18.4-8
 — — — второго порядка 18.4-4, 18.4-8
 Мощность критерия 19.6-2
 — множества 4.3-2
 — средняя 18.10-1
- Н**
- Направление асимптотическое 17.3-6
 — главное Риччи 17.4-5
 — главной нормали 17.4-2
 — изотропное 17.4-4
 — кривой 17.4-2
 — координатных линий положительное
 6.2-3
 — положительное 7.2-4
 — положительной нормали 17.3-2
 Направления сопряженные 17.3-6
 Направляющая конуса 3.1-15
 — цилиндра 3.1-15
 Направляющие косинусы 2.1-4, 3.1-8
 — — вектора 5.2-3
 — — прямой 3.3-1
- Направляющий вектор прямой 3.3-1
 Натуральные числа, принцип полной ин-
 дукции 1.1-2
 Начало координат 3.1-2
 Невязка 20.2-4
 Неопределенный интеграл 4.6-4
 — — от вектор-функции 5.3-3
 Непрерывная дробь 4.8-8
 Непрерывность суммы функционального
 ряда 4.8-4
 — функции 4.4-6
 — — равномерная 4.4-6
 Неравенства 1.1-5, 12.6-2, 12.6-3
 Неравенство Адамара 1.5-1
 — Бесселя 14.7-3, 15.2-3
 — Гельдера 4.6-19
 — Коши 1.3-2
 — Коши—Буняковского 4.6-19
 — Коши—Шварца 4.6-19, 14.2-6, 15.2-1
 — Минковского 4.6-19, 14.2-5, 15.2-1
 — треугольника 12.5-2
 — Чебышева 13.3-5
 Несобственный интеграл 4.6-2
 — — сходящийся 4.6-2
 — — — абсолютно 4.6-2
 — — — равномерно 4.6-2
 — — — условно 4.6-2
 Норма вектора 14.2-5, 15.2-1, 17.3-1
 — матрицы 13.2-1
 — оператора конечная 14.4-1
 — функции 15.2-1
 Нормализатор подгруппы 12.2-7
 — элемента 12.2-7
 Нормаль главная 17.2-2, 17.2-4
 — —, направляющие косинусы 17.2-4
 — к кривой 17.1-2
 — к поверхности 17.3-2
 — — — второго порядка 3.5-3
 Нормальная плоскость 17.2-2, 17.2-4
 — провадная от скалярной функции
 5.6-2
 — реакция на внешнюю нагрузку 9.4-2
 — — на единичный импульс 9.4-3
 Нормальное сечение 17.3-4
 Нормальные сечения главные 17.3-5
 Нормальный делитель 12.2-5
 — ряд 12.2-6
 Нормирование 18.3-4
 — последовательности функций 15.2-5
 — случайной величины 18.5-3
 — функции 15.2-1
 Нули ортогональных многочленов 21.7-2
 — цилиндрических функций 21.8-3
 Нуль 1.1-2
 — функции 1.6-2, 7.6-1
 — — порядка m 7.6-1
 Нуль-тензор 16.3-2

- Область 4.3-6
- Дирихле 15.6-2
 - замкнутая 4.3-6
 - измеримая по Жордану 4.6-11
 - квадратуемая 4.6-11
 - многосвязная 4.3-6
 - ограниченная 7.2-4
 - односвязная 4.3-6
 - определения 4.2-1
 - с естественными границами 7.8-1
 - функции фундаментальная 7.9-1
 - целостности 12.3-1
- Образ модели гомоморфный 12.1-6
- Образующая линейчатой поверхности 3.1-15
- Обращение матриц 20.3-3, 20.3-4
- преобразования Лапласа 8.2-5, 8.2-6, 8.2-8
- Обход положительный 7.2-4
- Объединение 4.3-2
- событий 18.2-1
- Объект абсолютно антисимметричный по всем индексам 16.5-1
- — симметричный по всем индексам 15.6-1
 - антисимметричный по паре индексов 16.5-1
 - — по всем индексам 16.5-1
 - кососимметричный по паре индексов 16.5-1
 - симметричный по паре индексов 16.5-1
 - — по всем индексам 16.5-1
- Объем выборки 19.1-1
- области 4.6-11
 - параллелепипеда 3.1-11
 - тетраэдра 3.1-11
- Объемный интеграл векторный 5.4-7
- —, связь с поверхностным 5.6-1
 - — скалярный 5.4-7
- Овалы Кассини 2.6-1
- Огибающая поверхность 17.3-11
- семейства интегральных кривых 9.2-2
 - — плоских кривых 17.1-7
- Окрестность точек $+\infty$, $-\infty$ 4.3-5
- точки 4.3-5, 7.2-2, 12.5-1, 12.5-3
- Окружности концентрические 2.5-1
- , условие ортогональности 2.5-1
- Окружность 2.5-1
- Октаполь 15.6-5
- Операнд 12.1-1
- Оператор антисимметрический 14.4-6
- взаимно сопряженный 15.4-3
 - кососимметрический 14.4-6
 - косоэрмитов 14.4-4
 - Лапласа 5.5-5, 16.10-7
 - —, правила повторного применения 5.5-6
- Оператор линейный 14.3-1
- — бесконечно малый 14.4-9
 - — вполне приводимый 14.3-2
 - — невырожденный 14.3-5
 - — несобственный 14.3-5
 - — ограниченный 14.4-1
 - —, отыскание собственных векторов 14.3-5
 - —, — значений 14.3-5
 - —, представление в различных базисах 14.6-2
 - —, — диадическое 14.5-4
 - —, — матричное 14.5-2
 - — приводимый 14.3-2
 - — разложимый 14.3-2
 - —, характеристическое уравнение 14.3-3
 - набла (∇) 5.5-2, 5.5-8
 - —, свойства 5.5-2
 - нормальный 14.4-8
 - —, спектральное представление 14.3-4
 - обратный 14.3-5
 - ортогональный 14.4-6
 - , правила комбинирования 14.4-7
 - резольвентный 14.3-3
 - самосопряженный 15.4-3
 - — Штурма—Лиувилля 15.4-3
 - симметрический 14.4-6
 - смещения 20.4-2
 - сопряженный 14.4-3
 - , теоремы о разложении 14.4-8
 - транспонированный 14.4-6
 - унитарный 14.4-5
 - усреднения 20.4-2
 - , целые степени 14.3-6
 - эрмитов 14.4-4, 15.4-3
 - — неотрицательный 14.4-4
 - — неположительный 14.4-4
 - — отрицательно определенный 14.4-4
 - — полуопределенный 14.4-4
 - — положительно определенный 14.4-4
 - — полуопределенный 14.4-4
 - — самосопряженный 14.4-4
 - —, спектральное представление 14.3-4
- Операторы дифференциальные эрмитово сопряженные 15.4-3
- разности 20.4-2
 - — двумерные 20.8-3
 - , соотношения между ними 20.4-2
- Операции над векторными функциями 5.5-1
- — скалярными функциями 5.5-7
- Операция 12.1-1
- коммутативная 12.2-1
 - корректная 12.1-4
 - линейная 14.3-1
- Определение аксиоматическое 12.1-1
- конструктивное 12.1-1

Определенный интеграл в смысле Римана 4.6-1

— —, важнейшие свойства 4.6-1
 — —, вычисление с помощью теоремы о вычетах 7.7-3
 — — от вектор-функции 5.3-3

Определитель 1.5-1

— Вандермонда 1.6-5
 — Вронского 9.3-2
 — Грама 5.2-8

—, изменение порядка 1.5-7

— метрического тензора 17.3-7
 — оператора 14.6-2

—, разложение Лапласа 1.5-4

—, свойства 1.5-5

— системы линейных уравнений 1.9-2

— эрмитов неопределенный 14.4-4

Ордината 2.1-2

Оригинал 8.2-1

Орт 5.2-5

Ортогонализация последовательности функций 15.2-5

Ортогональные многочлены 21.7-1, 21.7-2

Оси координат 2.1-2, 3.1-2

Основание степени 1.2-1

Особая точка вырожденная 9.3-10

— — функции 7.6-2

— — — существенно изолированная 7.6-2

Особенность функции 7.6-2

— — изолированная 7.6-2

— — устранимая 7.6-2

Остаток 1.7-2, 18.4-9

— ряда 4.7-1

Остаточный член 20.5-2

— — ряда Лорана 7.5-3

— — — Тейлора 7.5-2

— формулы Тейлора 4.10-4

— — — — в форме Лагранжа 4.10-4

Ось вращения 14.10-2

— гиперболы действительная 2.5-2

— — мнимая 2.5-2

— эллипса большая, малая 2.5-2

Отклонение вероятное (в.о.) 18.8-4

— от точки до прямой 2.3-1

— радиальное 18.8-7

— среднее абсолютное (с.а.о.) 18.3-3

— — квадратическое 18.3-3

— точки от плоскости 3.4-2

Отношение включения логическое 12.3-3, 18.2-1

— неполной бета-функции 21.4-5

— порядка 12.6-1

— равенства, симметрия 1.1-3, 12.1-3

— —, транзитивность 1.1-3, 12.1-3

— тождества 1.1-4

— эквивалентности 12.1-3

Отображение взаимно однозначное 12.1-4

Отображение дробно-линейное 7.9-2

— Жуковского 7.9-3

— изогональное 7.9-1

— изометрическое 17.3-10

— класса в класс 12.1-4

— конформное 7.9-1, 17.3-10

— — второго рода 7.9-1

— непрерывное в топологическом пространстве 12.5-1

— — в точке 12.5-1

— обратное 12.1-4

— однозначное 12.1-4

— топологическое 12.5-1

— эквивалентное 17.3-8

— $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ 7.9-3

Отрезок 4.3-4

Отрицание логического события 18.2-1

Оценка асимптотически эффективная 19.4-1

— достаточная 19.4-1

— несмещенная 19.1-3, 19.4-1

— ошибки приближения 20.2-2

— совместная асимптотически эффективная 19.4-1

— совместно достаточная 19.4-1

— — эффективная 19.4-1

— состоятельная 19.1-3, 19.4-1

— эффективная 19.1-3, 19.4-1

Ошибка 20.2-4

— вероятная круговая 18.8-7

— второго рода 19.6-2

— квадратичная средняя взвешенная 20.5-1

— максимальная 12.5-4

— начальных данных 20.1-2

— округления 20.1-2

— первого рода 19.6-2

— приближения 12.5-4

— радиальная 18.8-7

— — средняя 18.8-7

— средняя квадратическая 12.5-4

— усечения 20.1-2

П

Пара полярно сопряженных прямых 3.5-8

Парабола 2.4-8, 2.4-9

— Нейля 2.6-1

— полукубическая 2.6-1

— построение 2.5-4

— — касательных и нормалей 2.5-4

Параболоид гиперболический 3.5-7, 3.5-10

— эллиптический 3.5-7, 3.5-10

Параллелограмм периодов 21.6-1

Параллельность прямых 2.3-2

Параллельные геодезические 17.4-6

- Параметр генеральной совокупности 19.1-2
 Параметрическое задание кривой 3.1-13
 — — плоскости 3.2-2
 Параметры Кэли—Клейна 14.10-6
 Первообразная 4.6-4
 Переменное зависимое 4.2-1
 — независимое 4.2-1
 Пересечение 4.3-2
 Период примитивный 21.6-1
 — функции 4.2-2
 Перпендикулярность прямых 2.3-2
 Плоскость 3.2-1
 Плотность распределения вероятностей
 18.3-2, 18.4-3
 — — нормального 18.8-4
 — — случайных величин 18.5-4
 — — условная 18.4-5
 — спектральная 18.10-3
 — — взаимная 18.10-3
 — — по множеству наблюдений 18.10-5
 — стандартизированной случайной величины
 19.3-3
 Площадь области 4.6-11
 — параллелограмма 3.1-10
 — поверхности 4.6-11
 — треугольника 2.1-4, 2.1-8, 3.10-10
 Поверхности второго порядка, классификация
 3.5-3
 — — —, параметрическое задание 3.5-10
 Поверхностный интеграл векторный 5.4-6
 — —, связь с объемным 5.6-1
 — — скалярный 5.4-6
 Поверхность вращения 3.11-15
 — второго порядка 3.5-1
 — — — центральная 3.5-5
 — как риманово пространство 17.3-7
 — линейчатая 3.1-15
 — минимальная 17.3-6
 — непрерывная 3.1-14
 — простая 3.1-14
 — регулярная 3.1-14
 — уровня 5.4-2
 Погрешность квадратурной формулы Гаусса
 20.6-3
 — — — Чебышева 20.6-3
 Подвижный трехгранник 17.2-2
 Подгруппа 12.2-2
 — инвариантная 12.2-5
 — несобственная 12.2-2
 — собственная 12.2-2
 — сопряженная 12.2-5
 Подкольцо 12.3-2
 Подматрица 13.2-8
 Подмножество 4.3-2
 Подполе 12.3-2
 Подпространство 14.2-2
 — собственное 14.2-2
 Покрытие множества 12.5-4
 Поле 12.3-1
 — векторное 5.4-3
 — — бевихревое 5.7-1
 — — солениодальное 5.7-2
 — —, теорема единственности 5.7-3
 — Галуа 12.3-1
 — кватернионов 12.4-2
 — коммутативное 12.3-1
 — линейных элементов 9.2-2
 — направлений 9.2-2
 — некоммутативное 12.3-1
 — отношений 12.3-3
 — скалярное 5.4-2
 — упорядоченное 12.6-2
 Полоса 10.2-1
 — характеристическая 10.2-1
 Полуширота 18.3-3
 Полус 2.1-8, 2.4-10, 17.3-13
 — касательной плоскости к поверхности
 второго порядка 3.5-8
 — функции порядка m 7.6-2
 Поляр точки 2.4-10
 Полярная кривая 17.2-5
 — ось 2.1-8
 — плоскость точки относительно поверхно-
 сти второго порядка 3.5-8
 — поверхность 17.2-5
 — прямая 17.2-5
 Полярные координаты 2.1-8
 Полярный радиус 2.1-8, 3.1-6
 — угол 2.1-8
 Поправка Шепарда на группировку 19.2-5
 Порядок 12.6-1
 — группы 12.6-1
 — дифференциального уравнения 9.1-3
 — определителя 1.5-1
 — разности 20.4-1
 — точки разветвления 7.4-2
 — частной производной 4.5-2
 — элемента 12.2-3
 — эллиптической функции 21.6-1
 Последовательность 4.2-2
 — двойная сходящаяся 4.4-5
 — квадратично интегрируемых функций,
 сходящаяся в среднем 15.2-2
 — Коши 12.5-4
 — матриц сходящаяся 13.2-11
 — случайных величин, сходящаяся в сред-
 нем 18.6-3
 — —, — по вероятности 18.6-1
 — сходящаяся 4.4-1
 — — к пределу 12.5-3
 — фундаментальная 12.5-4
 — функций ортонормированная 15.2-3
 — — — полная 15.2-4
 — — — равномерно сходящаяся 4.4-1

- Постоянная времени 9.4-1
 — затухания 9.4-1
 — интегрирования 4.6-4
 — Эйлера—Маскерони 21.3-1, 21.4-1
 Постоянное интегрирования 9.1-2
 Потенциал безвихревого векторного поля 15.6-1
 — векторного поля 5.7-2
 — двойного слоя 15.6-5
 — диполя 15.6-5
 — запаздывающий 15.6-10
 — комплексный 15.6-8
 — логарифмический точечного источника 15.6-7
 — мультиполя 15.6-5
 — опережающий 15.6-10
 — простого слоя 15.6-5
 —, разложение по мультиполям 15.6-5
 — скалярный безвихревого векторного поля 5.7-1
 — точечного заряда 15.6-5
 Потенциалы распределений зарядов и диполей объемные, поверхностные 15.6-5
 Поток вектора через поверхность 5.4-6
 Почти всюду 4.6-14
 Правила дифференцирования 4.5-4
 — — ковариантного 16.10-5
 Правило Коши умножения рядов 4.3-3
 — Крамера 1.9-2
 — Лейбница 4.6-1
 — Лопиталя 4.7-2
 — параллелограмма 5.2-1
 — Симпсона 20.6-2
 — соответствия 4.2-1, 12.1-1
 — трапеций 20.6-2
 — Уэддла 20.6-2
 Предел в среднем квадратично интегрируемых функций 15.2-2
 — вектор-функции 5.3-1
 — двойной последовательности 4.4-5
 — матричной функции 13.2-11
 — последовательности 4.4-1
 — — производящих функций 18.6-2
 — — характеристических функций 18.6-2
 — суммы функционального ряда 4.8-4
 — функции 4.4-1
 — — по совокупности переменных 4.4-5
 — — распределения 18.6-2
 — — слева 4.4-7
 — — справа 4.4-7
 Пределы интегрирования 4.6-1
 —, операции над ними 4.4-2
 Предельный цикл 9.5-3
 — — неустойчивый 9.5-3
 — — полустойчивый 9.5-3
 — — устойчивый 9.5-3
 Представление групп 12.2-9
 Представление группы вполне приводимое 14.9-2
 — — гомоморфизмы 14.9-1
 — — истинное 14.9-1
 — — конечной регулярное 14.9-1
 — — неприводимое 14.9-2, 14.9-3
 — —, неприводимые компоненты 14.9-2
 — — ограниченное 14.9-1
 — — ортогональное 14.9-1
 — — приводимое 14.9-2
 — — разложимое 14.9-2
 — — размерности 14.9-1
 — — степени n 14.9-1
 — — точное 14.9-1
 — — унитарное 14.9-1
 — —, условия приводимости 14.9-2
 Представления группы подобные 14.9-1
 — — эквивалентные 14.9-1
 Преобразование антисимметрическое 14.4-6
 — аффинное 14.10-7
 — базисных векторов 14.5-1, 14.6-1
 — Гильберта 8.6-1
 — допустимое 6.2-1
 — инвариантное 12.1-5
 — индуцированное 16.1-4
 — интегральное см. Интегральное преобразование
 — к главным осям 14.8-6
 — каноническое 10.2-6
 — — унитарное 10.2-6
 — квадратичных форм 13.5-4
 — класса в класс 12.1-4
 — координатное 16.6-2
 — контраградиентное 16.6-2
 — — базисных векторов 14.7-6
 — координат 14.1-3
 — —, активная и пассивная точки зрения 14.1-3
 — — векторов, активная и пассивная точки зрения 14.5-1, 14.6-1
 — — нососимметрическое 14.4-6
 — Куммера 4.8-5
 — Лапласа, абсолютная сходимость 8.2-2
 — —, абсцисса абсолютной сходимости 8.2-2
 — — в форме интеграла Стильтьеса 8.6-3
 — — двустороннее 8.6-1, 8.6-2
 — — для произведений оригиналов на синус или косинус 8.3-2
 — —, достаточные условия существования 8.2-4
 — — импульсных функций 8.5-2
 — — обратное 8.2-5
 — — — для рациональных функций 8.4-4, 8.4-5
 — — —, достаточные условия существования 8.2-7

- Преобразование Лапласа обратное, приемы вычисления 8.4-3, 8.4-9
- — —, условие единственности 8.2-8
 - — — одностороннее 8.2-1, 10.5-2
 - — — периодических функций 8.3-2
 - — —, предельные теоремы 8.3-4
 - — — ступенчатой функции 20.4-5
 - — —, таблица соответствия операций 8.3-1
 - — —, таблицы 8.4-1
 - — —, теорема обращения 8.6-2
 - — —, теоремы соответствия операций 8.3-1
 - — —, условие единственности 8.2-8
 - — — Лапласа—Карсона 8.6-1
 - — — Лежандра n -мерное 10.2-5
 - — — линейное бесконечно малое 14.4-9
 - — — вполне приводимое 14.8-2
 - — —, матричное представление 14.5-2
 - — — невырожденное 14.3-5
 - — — несобственное 14.3-5
 - — — ограниченное 14.4-1
 - — — приводимое 14.8-2
 - — — разложимое 14.8-2
 - — — Меллина 8.6-1
 - — — нулевое 14.3-3
 - — — обратное 12.1-4, 14.3-5
 - — — ортогональное 3.1-12, 14.4-6
 - — — подобия 13.4-1
 - — — пространства линейное однородное 14.3-1
 - — — симметрическое 14.4-6
 - — — случайной величины 18.5-2
 - — — — линейное 18.5-3
 - — — соотношения 10.2-5
 - — — тождественное 14.3-4
 - — — транспонированное 14.4-6
 - — — Фурье 8.6-1
 - — — Эйлера 4.8-4
 - — — эрмитовых форм 13.5-4
 - — — z 20.4-5
- Приближение по методу наименьших квадратов 20.5-1
- Приведение матриц 14.8-6
- Признак сходимости см. Сходимость
- Примитивная 4.6-4
- Принцип аргумента 7.6-9
- — Гамильтона 11.5-7
 - — двойственности 3.4-4
 - — консерватизма функциональных уравнений 7.8-1
 - — минимакса Куранта 14.8-8, 15.4-7
 - — симметрии 7.8-2
 - — суперпозиции для класса операции 14.3-1
- Приращение функции 11.4-1
- Программа контроля 20.1-2
- Прогрессия арифметическая 1.2-6
- — — геометрическая 1.2-7, 21.2-12
 - — — бесконечная 4.10-2
- Проективная плоскость 7.2-4
- Проекция направляющего вектора на координатные оси 3.3-1
- Проекция вектора на подпространство 14.2-7
- — — направленного отрезка на ось 3.1-9
 - — — на плоскость 3.1-9
 - — — на прямую 3.1-9
 - — — стереографическая 7.2-4
- Произведение 12.2-1
- — — бесконечное 4.8-7
 - — — вектора на диадик 16.9-2
 - — — — векторное 16.9-2
 - — — на скаляр 5.2-1, 15.2-1
 - — — векторное 16.8-4
 - — — векторов альтернированное 16.5-4
 - — — скалярное 15.2-1
 - — — внешнее 12.7-2
 - — — внутреннее 16.8-1
 - — — группы вращений прямое 14.10-7
 - — — прямое 12.7-2
 - — — действительных векторных пространств прямое 12.7-3
 - — — диадика на вектор 16.9-2
 - — — диадиков 16.9-2
 - — — векторное 16.9-2
 - — — диадное 16.9-1
 - — — интегральных преобразований 15.3-1
 - — — классов декартово 12.7-1
 - — — комплексных чисел 1.3-1, 1.3-3
 - — — линейных операторов 14.3-4
 - — — преобразований 14.3-4
 - — — логическое 4.8-2
 - — — матриц 13.2-2
 - — — — внешнее 13.2-10
 - — — прямое 13.2-10
 - — — матрицы на скаляр 13.2-2
 - — — подмножеств 12.2-4
 - — — представлений кронекеровское 14.9-6
 - — — прямое 14.9-6
 - — — рядов 4.8-3
 - — — скалярное 16.8-1
 - — — смешанное 16.8-4
 - — — событий логическое 13.2-1
 - — — тензора на скаляр 16.3-4
 - — — тензоров внешнее 16.3-6
 - — — — внутреннее 16.3-7
 - — — топологическое 12.7-4
- Производная абсолютная истинного тензора 16.10-8
- — — относительного тензора 16.10-8
 - — — вектора 16.10-1
 - — — вектор-функции 5.3-2
 - — — импульсной функции 21.9-3, 21.9-4
 - — — ковариантная 16.10-4
 - — — невязной функции 4.5-4, 4.5-7
 - — — нормальная от скалярной функции 5.6-2

Производная обратной функции 4.5-4
 — по дуге, обозначение 17.2-1
 — по направлению высшего порядка 5.5-4
 — — — от векторной функции точки 5.5-3
 — — — от скалярной функции точки 5.5-3
 — по нормали 15.5-4
 — полная векторной функции вдоль кривой 5.5-3
 — — скалярной функции вдоль кривой 5.5-3
 — ступенчатой функции 21.9-3
 — тензора по направлению 16.10-8
 — функции вторая, третья, ... (второго, третьего, ... порядка) 4.5-1
 — —, заданной параметрически 4.5-4
 — — левая 4.5-1
 — — первая (первого порядка) 4.5-1
 — — правая 4.5-1
 — функция 7.3-1
 — частная см. Частная производная
 Производные ковариантные высших порядков 16.10-6
 Производящая функция 8.6-5
 — — моментов 18.3-3
 — — семинвариантов 18.3-10
 — — факториальных моментов 18.3-8
 Промежках 20.1-2
 Промежуток замкнутый 4.3-4
 Прообраз множества полный 12.5-1
 Пропорции производные 1.4-2
 Пропорция 1.4-2
 Пространства изометричные 12.5-2
 Пространство банахово 14.2-7
 — векторное линейное 14.2-1
 — — — над кольцом 12.4-1
 — выборки 18.2-7
 — гильбертово 14.2-7
 — гомеоморфное 12.5-1
 — локально евклидово 17.4-6
 — метрическое 12.5-2
 — — вполне ограниченное 12.5-4
 — — компактное 12.5-4
 — — локально компактное 12.5-4
 — — полное 12.5-4
 — —, условие компактности 12.5-4
 — плоское 17.4-6
 — представляющее 14.9-1
 — псевдоевклидово 17.4-6
 — — соприкасающееся 17.4-7
 — риманово 16.7-1
 — — плоское 17.4-6
 — с внутренним произведением с неопределенной метрикой 14.2-6
 — сепарабельное 12.5-1
 — собственное евклидово 17.4-6
 — топологически эквивалентное 12.5-1
 — топологическое 12.5-1

Пространство-носитель 14.9-1
 Процентиль 18.3-3
 Процентильная широта 18.3-3
 Процесс гауссовский 18.9-3
 — марковский 18.9-3
 — ортогонализации Грама—Шмидта 14.7-4, 15.2-5
 — переходный 10.4-1
 — пуассоновский 18.9-3
 — распространения возмущений 10.4-1
 — случайный 18.9-1
 — — дискретный 18.9-1
 — — непрерывный 18.9-1
 — — порядка n 18.9-3
 — — с дискретным временем 18.9-1
 — — сингулярный 18.11-2
 — — стационарный 18.9-5
 — —, удовлетворяющий эргодической гипотезе 18.9-5
 — стационарный 10.4-1
 — чисто случайный 18.9-3
 — D — C 18.11-1
 Процессы случайные совместно стационарные 18.9-5
 — — эргодические 18.9-5
 Прямая 3.3-1
 — регрессии 18.4-6
 Псевдосфера 17.3-13
 Псевдотензор 16.2-1
 Псевдоэкспонента 21.5-1
 Пучок прямых 2.3-2

Р

Равенство 12.1-3
 — Клебша—Жордана 14.10-7
 — матриц 13.2-2
 — множеств 4.3-2
 — Парсевалья 14.7-4
 — тензоров 16.3-4
 Радиальная ось двух окружностей 2.5-1
 Радиальный центр 2.5-1
 Радиус кривизны 17.1-4, 17.2-3
 — кручения 17.2-3
 — сходимости степенного ряда 4.10-2, 7.5-2
 Радиус-вектор середины отрезка 3.1-7
 — точки 3.1-5
 — —, делящей отрезок в отношении λ 3.1-7
 Разбиение класса C 12.1-3
 — матриц 13.2-8
 Размах 18.3-3
 — выборки 19.2-6
 Размерность векторного пространства линейная 14.2-4
 — пространства 14.1-2

- Размерность пространства ортогональная** 14.7-3
- ядра линейного преобразования 14.3-2
- Разности разделенные** 20.5-2
- Равностное отношение** 20.4-3
- уравнение линейное 20.4-4
 - — с постоянными коэффициентами 20.4-5
 - — обыкновенное 20.4-3
- Разность восходящая** 20.4-1
- нисходящая 20.4-1
 - обратная 20.5-7
 - прогрессии 1.2-6
 - центральная 20.4-1
- Разрез** 7.4-2
- Ранг квадратичной формы** 13.5-4
- линейного преобразования 14.3-2
 - линейной алгебры 12.4-2
 - матрицы 13.2-7
 - многомерного распределения вероятностей 13.4-8
 - представления 14.0-1
 - собственного значения 15.3-3, 15.4-5
 - тензора 16.2-1
 - эрмитовой формы 13.5-4
- Раскрытие неопределенностей** 4.7-2
- Распределение вероятностей** 13.2-7
- — асимптотически нормальное 16.6-4
 - — биномиальное 18.7-3, 18.8-1
 - — Пуассона обобщенное 18.7-3
 - — вырожденное (причинное) 18.8-1, 18.8-5
 - — геометрическое 18.8-1
 - — гипергеометрическое 18.8-1
 - — Коши 18.8-5
 - — Лапласа 18.8-5
 - — многомерное 18.4-7
 - — непрерывное 18.8-3
 - — несобственное 18.4-8
 - — нормальное двумерное 18.8-6
 - — круговое 18.8-7
 - — усеченное 19.3-4
 - —, описание с помощью интеграла Стильтеса 18.3-6
 - — Парето 19.3-4
 - — Паскаля 18.8-1
 - — Поля 18.8-1
 - — полиномиальное 18.8-2
 - — Пуассона 18.8-1
 - — — многомерное 18.8-2
 - — равномерное 18.8-5
 - — Релея 18.11-2
 - — случайного процесса 18.9-2
 - — случайной величины 18.5-4
 - — собственное 18.4-8
 - — условное 18.4-5
 - — выборки частотное 19.2-2
- Распределение выборочного коэффициента корреляции** 19.7-4
- выборочное асимптотически нормальное 19.5-2
 - генеральной совокупности 19.1-2
 - логарифмически нормальное 12.3-2
 - нормального отклонения 18.8-4
 - нормальное (Гаусса) 18.4-3
 - — многомерное 18.8-8
 - одномерное, числовые характеристики 18.3-3
 - — одномодальное, двумодальное, многомодальное 18.3-3
 - — отношения дисперсий 19.5-3
 - — размаха выборки 19.5-4
 - — случайной величины 18.2-8
 - — стандартизованной нормальной величины 18.4-3
 - — статистики выборочное 19.1-2
 - — Стьюдента 19.5-3, 19.7-4
 - — сумм случайных величин 18.5-7, 18.5-8
 - — Фишера 19.5-3
 - — χ 19.5-3
- Расстояние** 12.5-2
- между параллельными плоскостями 3.4-2
 - — — прямыми 2.3-2
 - — — прямыми кратчайшее 3.4-2
 - — — точками 2.1-4, 2.1-8, 3.1-7
 - от плоскости до параллельной ей прямой 3.4-2
 - от точки до плоскости 3.4-2
 - — — до прямой 2.3-1, 3.4-2
- Расходимость ряда, признаки сравнения** 4.9-1
- Расширение алгебраическое** 12.3-3
- Реализация процесса** 18.9-1
- Ребро возврата** 17.3-11
- Регрессия** 18.4-6, 18.4-9
- линейная 18.4-6
 - параболическая 18.4-6
 - средняя квадратическая 18.4-6, 18.4-9
 - — — линейная эмпирическая 18.7-2
- Резольвента** 14.3-3
- Грина 15.5-2
 - уравнения четвертой степени 1.8-6
- Резонанс** 9.4-2
- Результант** 1.6-5
- многочлена 1.7-3
- Результат операции** 12.1-1
- Релаксация блочная** 20.3-2
- групповая 20.3-2
 - координатная 20.3-2
- Рефлексивность** 12.1-3
- Решающая функция** 19.6-9
- Решение Даламбера** 10.3-5

- Решение алгебраического уравнения полное 1.6-3
 — дифференциального уравнения общее 9.1-2
 — — — приближенное, метод Крылова—Боголюбова 9.5-5
 — — — с частными производными общее, частное 10.1-2
 — — — частное 9.1-2
 — разностного уравнения 20.4-3
 — системы дифференциальных уравнений периодическое устойчивое, неустойчивое 9.5-4
 — — — — равновесное устойчивое, неустойчивое 9.5-4
 — — — — устойчивое по Ляпунову 9.5-4
 — уравнения 1.6-2
 Решения линейного дифференциального уравнения линейно независимые 9.3-2
 Риманова поверхность 7.4-3
 Риманово пространство, операции над тензорами 16.7-4
 Ротор вектора 16.10-7
 — векторной функции точки 5.5-1
 — поверхностный 5.6-2
 Ряд 4.8-1
 — асимптотический 4.8-6
 — биномиальный 21.2-12
 — гипергеометрический 9.3-9
 — — вырожденный 9.3-10
 — — обобщенный 9.3-11
 — двойной 4.8-3
 — как функциональное преобразование 8.6-5
 — композиционный 12.2-6
 — Лорана 7.5-3
 — —, главная часть 7.5-3
 — Маклорена 4.10-4
 — Неймана 15.3-8
 — нормальный 12.2-6
 — полусходящийся 4.8-6
 —, признаки сходимости 4.9-1
 — расходящийся 4.8-1
 — степенной 4.10-2
 — — комплексный 7.2-1
 — —, свойства 4.10-2
 — Стирлинга 21.4-2
 —, суммируемый по методу Чеваро 4.8-6
 —, — средними арифметическими 4.8-6
 —, — C_1 4.8-6
 —, — $(C_1, 1)$ 4.8-6
 — сходящийся 4.8-1
 —, — абсолютно 4.8-1
 —, — коммутативно 4.8-3
 —, —, перестановка членов 4.8-3
 —, — равномерно 4.8-2
 —, —, свойства 4.8-4
- Ряд сходящийся, свойства 4.8-3
 —, — условно 4.8-3
 — Тейлора 4.10-4, 5.5-4, 7.5-2
 — — кратный 4.10-5
 — —, операторное обозначение 20.4-2
 — тригонометрический 4.11-2
 — функциональный 4.8-2
 — —, признаки сходимости 4.9-2
 — —, условие интегрируемости 4.8-4
 — Фурье 4.11-2
 — — кратный 4.11-3
 — —, операции над ним 4.11-5
- С
- Свертка 9.4-3
 — двух последовательностей 4.6-18
 — — функции 4.6-18
 — Стильбеса 4.6-18
 Свертывание смешанного тензора 16.3-5
 — тензоров 16.3-7
 Сверхрелаксация 20.3-2
 Свободный член многочлена 1.6-3
 Свойства метрически инвариантные 12.5-2
 Сегмент 4.8-4
 Седло 9.5-4
 Семейство интегральных кривых 9.1-2
 Семинвариант 18.3-9, 18.4-10
 Семинварианты, связь с моментами 18.3-10
 Сигнал, треугольная форма 4.11-4
 Сигнатура квадратичной формы 13.5-4
 Символ Кронекера обобщенный ранга 2r 16.5-2
 Символы Кристоффеля второго рода 16.10-3, 17.3-7
 — — первого рода 16.10-3
 — Леви-Чивита 16.5-3
 Симметрия 18.1-3
 Синус амплитуды 21.6-7
 Синус-интеграл Фурье 4.11-3
 Синусоида выпрямленная 4.11-4
 — детектированная 4.11-4
 — срезанная 4.11-4
 Синусоидальный член 4.11-4
 Синус-преобразование Фурье 4.11-3
 Система автономная 9.5-2
 — алгебраических уравнений 1.9-1
 — векторов ортонормированная 14.7-3
 — — — полная 14.7-4
 — — —, построение 14.7-4
 — геодезических нормальных координат 17.3-13
 — гиперкомплексных чисел 12.4-2
 — дифференциальных уравнений 2.1-3
 — — — с частными производными 10.1-2
 — — —, теорема существования и единственности решения 9.2-1

- Система инвариантов полная 12.2-8, 14.1-4
 — криволинейных координат 6.2-1
 — — ортогональная 6.4-1
 — — правая 6.2-3
 — координат 14.1-2, 16.1-4
 — — аффинная 2.1-2
 — — декартова 2.1-2, 3.1-2
 — — общая 2.1-2
 — — прямоугольная правая 2.1-3, 3.1-3, 3.1-4
 — — левая 2.1-2, 16.7-1
 — — ортогональная 16.8-2
 — — полярная 2.1-8
 — — правая 2.1-2, 16.7-1
 — — сферическая 3.6-6
 — — цилиндрическая 3.1-6
 — линейных дифференциальных уравнений, операторный метод решения 9.4-4
 — — —, периодические внешние нагрузки 9.4-6
 — — — устойчивая 9.4-4
 — — однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 9.4-1
 — — уравнений 1.9-2
 — — — несовместная 1.9-4
 — — —, общая теория 1.9-4
 — — — однородных 1.9-5
 — — —, правило Крамера 1.9-2
 — мер 14.1-5
 — отсчета 14.1-2, 16.1-4
 — случайных величин 18.4-1
 — физически реализуемая 9.4-3
 Скаляр 5.2-1, 12.4-1, 16.2-1
 — абсолютный 16.2-1
 — диадика первый 16.9-2
 Скалярное поле 5.4-2
 — произведение векторов 5.2-6
 — — двойное 16.9-2
 Скачок функции 4.4-7
 Снобка Пуассона 10.2-6
 Скорость вращения мгновенная 14.10-5
 — — угловая 14.10-5
 — — счета средняя 18.9-3
 След матрицы 13.2-7, 13.4-3
 — оператора 14.6-2
 Сложение абстрактное 12.3-1
 — векторное 12.4-1
 — векторов 5.2-1
 — комплексных чисел 1.3-1
 — логическое 12.8-1
 — рядов 4.3-3, 4.3-4
 — тензоров 16.3-3
 Случайная величина 18.2-8
 — — двумерная дискретная 18.4-3
 — — дискретная 18.3-1, 18.4-3
 — — многомерная 18.4-1
 Случайная величина многомерная дискретная 18.4-7
 — — — непрерывная 18.4-7
 — — — непрерывная 18.3-2, 18.4-3
 — — — нормированная 18.5-3
 — — — стандартизованная 18.5-3
 — — выборка объема 19.1-2
 — — последовательность 18.9-1
 — — телеграфная волна 18.11-3
 Случайные блоки 19.6-6
 — величины независимые 18.4-11
 — — некоррелированные 18.4-11
 — —, условие независимости 18.4-11
 — — координаты 18.4-1
 Случайный вектор многомерный 18.4-1, 18.4-7
 — процесс см. Процесс случайный
 Смешанное произведение трех векторов 5.2-8
 Смещение оценки 19.4-1
 Собственная функция интегрального уравнения 15.3-3
 — — краевой задачи 10.4-2
 — — линейного дифференциального оператора 15.4-5
 — — обобщенная 15.4-5
 — — эрмитова ядра 15.3-3
 — — ядра 15.3-3
 Собственное значение 10.4-2
 — — диадика 16.9-2
 — — интегрального уравнения 15.3-3
 — — линейного дифференциального оператора 15.4-5
 — — оператора 14.8-3, 14.8-4
 — — эрмитова ядра 15.3-3
 Собственный вектор диадика 16.9-2
 — — оператора 14.8-3, 14.8-4
 Событие 18.2-1
 — достоверное 18.2-1
 — невозможное 18.2-1
 — противоположное 18.2-1
 События, независимые в совокупности 18.2-3
 —, — по вероятности 18.2-3
 — несовместимые 18.2-1
 Совмещение событий 18.2-1
 Соотношение Лежандра 21.6-6
 Соотношения Хинчина—Винера 18.10-3
 Соприкасающаяся окружность 17.1-4, 17.2-2
 — — плоскость 17.2-2, 17.2-4
 — — сфера 17.2-5
 Спектр дифференциального оператора 15.4-5
 — — линейного оператора 14.8-3
 — — — дискретный 14.8-3
 — — — непрерывный 14.8-3

- Спектр линейного оператора остаточный 14.8-8
 — — — предельный 14.8-3
 — — — точечный 14.8-3
 — линейной задачи о собственных значениях 15.4-5
 — матрицы 18.4-2
 — непрерывный 15.4-5
 — случайной величины дискретной 18.3-1
 — — — непрерывной 18.3-2, 18.4-3, 18.4-7
 — собственных значений 10.4-2
 Спектральное значение 18.3-1
 Спин-матрицы Паули 14.10-6
 Спираль Архимеда 2.6-2
 — логарифмическая 2.6-2
 — параболическая 2.6-2
 Спрямляющая плоскость 17.2-2, 17.2-4
 Среднее значение случайной величины 18.3-3
 — — — функции 4.6-3
 — — — от случайной величины 18.3-3
 — — — по времени 18.9-4
 — — — по множеству наблюдений 18.9-2
 Статистика 19.1-1
 — объединенных выборок 19.6-6
 Статистическая гипотеза 19.6-7
 — — —, проверка 19.1-3
 — — — простая 19.6-1
 — — — сложная 12.6-1
 — — — устойчивость 19.1-1
 Стационарное значение 11.2-2, 11.3-3
 Степень многочлена 1.4-3
 — целая 12.2-1
 — числа действительного 1.2-1
 — — — комплексного 1.3-3
 Столбец колеблющийся 20.2-3
 — матрицы 13.2-1
 — модальный 14.8-5
 — правильный 20.2-3
 — — — частично 20.2-3
 Строка матрицы 13.2-1
 Строфоид 2.6-1
 Структура 12.6-1
 — полная 12.6-1
 Ступенчатая функция 20.4-5
 Сумма комплексных чисел 1.3-1, 1.3-3
 — логическая 4.3-2
 — — — событий 18.2-1
 — матриц 13.2-2
 — прямая векторных пространств 12.7-5
 — — — колец 12.7-5
 — — — линейных алгебр 12.7-5
 — ряда 4.8-1
 — тензоров 16.3-3
 —, сокращенная запись 16.1-3
 Суммирование рядов, применение вычетов 7.7-4
- Суммирование рядов средними арифметическими 4.8-6
 — — —, формула Пуассона 4.8-5
 — — —, — Эйлера—Маклорена 4.8-5
 Сфера 3.5-9
 Сферические гармоники 21.8-12
 — — — зональные 21.8-12
 — — — поверхностные 21.8-12
 — — — секторные 21.8-12
 — — — тессеральные 21.8-12
 Схема Горнера 20.2-3
 — — — для комплексного аргумента 20.2-3
 — — — включения компактная 20.3-1
 Сходимость в среднем в пространстве L_1 15.2-2
 — — — последовательности случайных величин 18.6-3
 — — — неравномерная вблизи точки разрыва 4.11-7
 — — — несобственных интегралов, признак Абеля 4.9-3
 — — — —, — Дирихле 4.9-3
 — — — —, — сравнения 4.9-3
 — — — — равномерная, признак Вейерштрасса 4.9-4
 — — — —, — Дирихле 4.9-4
 — — — по вероятности 18.6-1
 — — — последовательности 12.5-3
 — — — последовательных приближений 20.2-2
 — — — ряда 4.8-1
 — — —, признак Абеля 4.9-1
 — — —, — Даламбера 4.9-1
 — — —, — Дирихле 4.9-1
 — — —, — коши интегральный радикальный, 4.9
 — — —, — Лейбница 9-1
 — — —, — Раабе 4.9-1
 — — —, — сравнения 4.9-1
 — — — равномерная, признак Абеля 4.9-2
 — — —, — Вейерштрасса 4.9-2
 — — — функции 12.5-3
 — — — равномерная 4.4-4
- Т
- Таблица отображений 7.9-5
 — сопряженности признаков 19.7-5
 Тело 12.3-1
 Тензор 16.1-4
 — абсолютный ковариантный ранга 1 16.2-1
 — — — контравариантный ранга 1 16.2-1
 — — — r раз контравариантный и s раз ковариантный 16.2-1
 — — —, аналитические представления 16.7-3
 — — — ассоциированный данному 16.7-2

- Тензор**, выражение через векторы локального базиса 16.6-1
 — истинный 16.2-1
 — кривизны 17.4-5
 — метрический 16.7-1
 — ассоциированный 16.7-1
 — относительный веса W , γ раз контравариантный и γ раз ковариантный 16.2-1
 — постоянный вдоль кривой 16.10-9
 — ранга 0 16.2-1
 — Римана—Кристоффеля 17.4-5
 — риманова пространства фундаментальный 16.7-1
 — Риччи 17.4-5
 — смешанный 16.2-1
 — Эйнштейна 17.4-5
Тензорная емкость 16.2-1
 — плотность 16.2-1
Тензорные уравнения, инвариантность 16.4-1
Тензоры, равные в точке 16.3-1
Теорема Абеля для степенных рядов 4.10-3
 — Безу 1.7-2
 — Бендиксона первая, вторая 9.5-3
 — Бернсайда 14.9-3
 — Бернулли 18.6-5
 — Больцано—Вейерштрасса 12.5-4
 — Брианшона 2.4-11
 — Бюдана 1.6-6
 — Вандермонда биномиальная 21.5-1
 — Вейерштрасса 7.6-4, 7.6-6
 — Гаусса 5.6-1, 15.6-5
 — — умножения гамма-функций 21.4-1
 — Гаусса—Бонне 17.3-14
 — Гаусса—Остроградского 5.6-1
 — Гейне—Бореля о выделении конечного покрытия 12.5-4
 — Дюбуа—Реймона 11.4-2
 — единственности векторного поля 5.7-3
 — — для степенного ряда 4.10-2
 — — преобразования Фурье 4.11-5
 — — ряда Фурье 4.11-5
 — Жордана 7.2-4
 — Жордана—Гельдера 12.2-6
 — Кельвина об инверсии 15.6-3
 — Коши 4.7-1
 — — интегральная 7.5-1
 — Кэли 12.2-9, 14.9-1
 — Кэли—Гамильтона 13.4-7
 — Лагранжа 4.7-1
 — — о порядке подгруппы 12.2-2
 — Лебега о сходимости 4.6-16
 — Лерха 8.2-8
 — Линдберга—Леви 18.6-5
 — Лиувилля 7.6-5
 — Менье 17.3-4
 — Мерсера 15.3-4
Теорема Миндинга 17.3-13
 — Миттаг-Леффлера 7.6-8
 — Морера 7.5-1
 — непрерывности для производящих функций 18.6-2
 — — для характеристических функций 18.6-2
 — о выборке 18.10-6
 — о вычетах 7.7-2
 — о градиенте 5.6-1
 — о дивергенции 5.6-1
 — о дополнительном аргументе многочленов Бернулли 21.5-2
 — о конечном приращении 4.7-1
 — о максимуме модуля 7.3-5
 — — — для гармонических функций 15.6-4
 — о непрерывности определенного интеграла, зависящего от параметра 4.6-2
 — о разложении многочлена на множители 1.7-1
 — о роторе 5.6-1
 — о свертке преобразования произведения 8.3-3
 — о среднем для гармонических функций 15.6-4
 — обращения Ганкеля 8.6-4
 — — для одностороннего преобразования Лапласа 8.6-2
 — — преобразования Лапласа 8.2-6
 — основной алгебры 7.6-1
 — — интегрального исчисления 4.6-5
 — — теория поверхностей 17.3-9
 — Парсевала 4.11-4
 — — для преобразования Ганкеля 8.6-4
 — Паскаля 2.4-11
 — Пинара 7.6-4
 — предельная Муавра—Лапласа 18.8-1
 — — центральная 18.6-5
 — Прингсгейма о суммировании по столбцам и строкам 4.8-3
 — разложения 19.5-3
 — — Гельмгольца 5.7-3
 — Римана об отображении 7.9-6
 — — об условно сходящихся рядах 4.8-3
 — Римана—Лебега 4.11-2
 — — — о тригонометрических рядах 4.11-2
 — Рисса—Фишера 15.2-4
 — — — о свойстве полноты 15.2-2
 — Риччи 16.10-5
 — Роля 1.6-6, 4.7-1
 — Руше 7.6-1
 — Сильвестра 13.4-7
 — сложения 19.5-3
 — — для биномиальных коэффициентов 21.5-1

- Теорема сложения для многочленов Ле-жандра 21.8-3
 — для сферических функций 21.8-3
 — для цилиндрических функций 21.8-13
 — Стокса 5.6-2
 — существования неявных функций 4.5-7
 — функции Грина 15.6-6
 — Таубера для степенных рядов 4.10-3
 — умножения для многочленов Вернулли 21.5-2
 — Фейера 4.11-7
 — Фишера обобщенная 19.7-4
 — Фредгольма об альтернативе 15.4-4
 — Хинчина 18.6-5
 — Чебышева 18.6-5
 — Эйлера 17.3-5
 — о коэффициентах тригонометрического ряда 4.11-2
 — о тригонометрических рядах 4.11-2
 — об однородных функциях 4.5-5
 — эргодическая 18.9-5
Theorema Egregium Гаусса 17.3-8
 Теоремы Байеса 18.2-6
 — Вейерштрасса о приближении 4.7-2
 — Гарнака о гармонических функциях 15.6-4
 — Грина 5.6-1
 — Лиувилля об эллиптических функциях 21.6-1
 — о непрерывности 4.6-16
 — о нормальном распределении суммы случайных величин 18.8-9
 — о полюсах и полярах 2.4-10
 — о разложении операторов 14.4-8
 — о среднем 4.7-1
 — о суперпозиции 15.4-2
 — о сходимости 4.6-16
 — предельные теории вероятностей 18.6-5
 — разложения для эрмитовых ядер 15.3-4
 — сложения для эллиптических функций Якоби 21.6-7
 — соответствия операций над оригиналами и их изображениями 8.3-1
 — сравнения для уравнений Штурма—Лиувилля 15.4-10
 Теория вероятностей 18.1-1
 — возмущений 10.2-7
 — потенциала 15.6-1
 — — двумерная 15.6-7
 — распределений Лорана Шварца 21.9-2
 Тета-функции Якоби 21.6-8, 21.6-9
 Тождества Бианки 17.4-5
 Тождество Пуассона 10.2-6
 — Риччи 17.4-5
 Топология 12.5-1
 — дискретная 12.5-1
 — пространства 12.5-1
 Топология пространства относительная 12.5-1
 — тривиальная 12.5-1
 Точка 16.1-2
 — бесконечно удаленная 7.2-2
 — ветвления 21.6-4
 — внутренняя 4.3-6
 — возврата 17.1-3
 — гиперболическая 17.3-5
 — граничная 4.3-6
 — двойная 17.1-3
 — дифференциального уравнения особая изолированная 9.3-6
 — — — правильная 9.3-6
 — — — слабо особая 9.3-6
 — — — существенно особая 9.3-6
 — изолированная 4.3-6, 17.1-3
 — инвариантная 7.9-2
 — конденсации 4.3-6
 — накопления 4.3-6
 — омбилическая 17.3-5
 — особая 17.1-3, 17.3-1
 — отображения критическая 7.9-1
 — параболическая 17.3-5
 — перегиба 17.1-5
 — пересечения кривых 2.1-9
 — — прямых 2.3-2
 — покоя 9.5-3
 — предельная 4.3-6
 — равновесия 9.5-3
 — разветвления 7.4-2
 — — алгебраическая 7.6-2
 — — бесконечного порядка 7.4-2
 — — логарифмическая 7.4-2
 — — трансцендентная конечного порядка 7.6-2
 — — функции 7.6-2
 — разрыва первого рода 4.4-7
 — регулярная 3.1-13, 3.1-14, 17.1-1
 — самоприкосновения 17.1-3
 — седловая 17.3-5
 — фазовой плоскости обыкновенная 9.5-3
 — — — особая 6.5-3
 — эллиптическая 17.3-5
 Траектория изогональная семейства кривых 17.1-8
 — ортогональная семейства кривых 17.1-8
 Трактриса 2.6-2
 Травитивность 12.1-3
 Трансформирование элемента 12.2-5
 Трехгранник Френе 17.2-3
 Трисектриса 2.6-1
- У
- Угловой коэффициент 2.2-1
 Углы Эйлера 14.10-4

- Углы Эйлера, геометрическая интерпретация** 14.10-4
- Угол между асимптотами гиперболы** 2.5-2
- между векторами 16.8-1
 - между дугами 17.4-2
 - между координатными линиями 17.4-2
 - между кривыми на поверхности 17.3-3
 - между направленными отрезками 2.1-4, 3.1-8
 - между плоскостями 3.4-1
 - между прямой и плоскостью 3.4-1
 - между прямыми 2.3-2, 3.1-7, 3.4-1
 - поворота 17.10-2
- Узел** 17.1-3
- интерполяции 20.5-1
 - неустойчивый, устойчивый 9.5-4
- Улитка Паскаля** 2.6-1
- Умножение абстрактное** 12.2-1, 12.3-1
- вектора на скаляр 5.2-1, 12.4-1
 - вероятностей 15.2-2
 - комплексных чисел 1.3-1
 - логическое 12.8-1
 - операторов 12.8-8
 - определителей 1.5-6
 - преобразований 12.2-3
 - ряда на число или ограниченную функцию 4.8-3, 4.8-4
 - тензора на скаляр 16.3-4
 - тензоров внешнее 16.3-6
 - — внутреннее 16.3-7
- Уравнение алгебраическое действительное** 1.6-6
- —, отделение корней 1.6-6
 - —, свойства корней 1.6-6
 - — степени n 1.6-3
 - асимптотической линии 17.3-6
 - бинормали 17.2-4
 - в полных дифференциалах 9.2-4
 - вековое матрицы 13.4-5
 - векторное линейное неоднородное 14.8-10
 - волновое двумерное, частные решения 10.4-8
 - — одномерное 10.3-5
 - — затухающее, частные решения 10.4-8
 - —, частные решения 10.4-8
 - — трехмерное, частные решения 10.4-8
 - второй степени общее 2.4-1, 3.5-1
 - Гамильтона—Якоби 10.2-7
 - Гельмгольца двумерное, частные решения 10.4-5
 - — трехмерное 10.4-4
 - —, прямоугольные декартовы координаты 10.4-4
 - —, сферические координаты 10.4-4
- Уравнение Гельмгольца трехмерное, цилиндрические координаты** 10.4-4
- геодезической линии 17.4-3
 - главной нормали 17.2-4
 - диаметра конического сечения, сопряженного хордам 2.4-6
 - — поверхности второго порядка, сопряженного семейству плоскостей 3.5-5
 - диаметральной плоскости поверхности второго порядка 3.5-5
 - директрисы 2.4-9
 - дифференциальное см. Дифференциальное уравнение
 - диффузии 10.4-1
 - — двумерное, частные решения 10.4-7
 - — обобщенное 15.5-3
 - — одномерное, частные решения 10.4-7
 - — трехмерное, частные решения 10.4-7
 - интегральное см. Интегральное уравнение
 - касательной к кривой второго порядка 2.4-10
 - — — — плоской 17.1-1
 - — — — пространственной 17.2-2, 17.2-4
 - — — — плоскости 17.3-2
 - — — — к поверхности второго порядка 3.5-8
 - квадратное 1.8-2
 - Клейна—Гордона 10.4-4
 - конического сечения в полярных координатах 2.4-11
 - —, проходящего через пять точек 2.4-11
 - кривой 2.1-9
 - второго порядка, приведение к каноническому виду 2.4-8
 - кубическое 1.8-3
 - — неполное 1.8-3
 - —, неприводимый случай 1.3-4
 - —, решение Кардана 1.8-3
 - —, — тригонометрическое 1.8-4
 - Лапласа двумерное 15.6-7
 - —, частные решения 10.4-5
 - — трехмерное, прямоугольные декартовы координаты 10.4-3
 - — —, сферические координаты 10.4-3
 - — —, цилиндрические координаты 10.4-3
 - линейное 1.8-1
 - — однородное, матричное обозначение 14.5-3
 - — линии кривизны 17.3-6
 - — нормали к кривой второго порядка 2.4-10
 - — — — плоской 17.1-2
 - — — — к поверхности 17.3-2

Уравнение нормали к прямой 2.3-2

- нормальной плоскости 17.2-4
- огибающей семейства плоских кривых 17.1-7
- окружности в полярных координатах 2.5-1
- — общее 2.5-1
- —, проходящей через точки пересечения двух окружностей 2.5-1
- —, — через три точки 2.5-1
- — с центром в начале координат 2.5-1
- определяющее 9.3-6
- плоскости в отрезках 3.2-1
- — нормальное 3.2-1
- — общее 3.2-1
- —, проходящей через данную точку 3.2-1
- —, — через три точки, не лежащие на одной прямой 3.2-1
- поверхности второго порядка, приведение к каноническому виду 3.5-7
- —, проходящей через линию пересечения поверхностей 3.1-16
- проекции кривой на координатную плоскость 3.1-16
- прямой в отрезках 2.2-1
- — в полярных координатах 2.2-2
- — нормальное 2.2-1
- — общее 2.2-1
- —, параллельной данной 2.3-2
- —, проходящей через данную точку перпендикулярно плоскости 3.4-5
- —, — через две точки 2.2-1
- —, — через точку пересечения прямых 2.3-2
- —, — — под углом к прямой 2.3-2
- — с угловым коэффициентом 2.2-1
- Пуассона двумерное 15.6-7
- пучка плоскостей 3.4-5
- — прямых 2.2-1
- с частными производными 10.1-2
- — — гиперболическое 10.3-1 — 10.3-3, 10.3-6, 10.3-7
- — — квазилинейное 10.2-1, 10.3-1
- — — линейное 10.1-2
- — —, метод разделения переменных 10.1-3
- — — однородное 10.1-2
- — — параболическое 10.3-1, 10.3-3, 10.3-7
- — — первого порядка 10.2-1
- — — эллиптическое 10.3-1, 10.3-3, 10.3-7
- — — разности 20.4-3
- связи 11.3-4
- соприкасающейся плоскости 17.2-4
- спрямляющей плоскости 17.2-4

Уравнение сферы 3.5-0

- телеграфное 10.4-1
- —, частные решения 10.4-8
- теплопроводности 10.4-1
- — одномерное, преобразование Лапласа 10.5-3
- — —, синус- и косинус-преобразования Фурье 10.5-3
- характеристики 17.3-11
- характеристическое 10.2-2, 10.2-4
- — квадратичной формы 2.4-5, 3.5-4
- — матрицы 13.4-5
- четвертой степени 1.8-5
- — — неполное 1.8-5
- — —, решение Декарта—Эйлера 1.3-5
- — —, — Феррори 1.8-6
- Шредингера, частные решения 10.4-6
- Эйлера 11.5-1
- Уравнения асимптот гиперболы 2.5-2
- Вейнгартена 17.3-8
- Гаусса 17.3-8
- геодезической линии 17.3-12
- канонические 10.2-6
- канонических поверхностей второго порядка 3.5-7
- Колмогорова—Смолуховского—Чепмена 13.9-3
- Коши—Римана 7.3-2
- кривой естественные 17.2-3
- —, проходящей через точки пересечения кривой с поверхностью 3.1-16
- кривых второго порядка канонические 2.4-8, 2.4-9
- линейно зависимые 1.9-3
- — независимые 1.9-3
- Майнард—Кодацци 17.3-8
- нормали к поверхности второго порядка 3.5-8
- параллелизма 16.10-9
- Петерсона—Кодацци 17.3-8
- плоскостей, проектирующих прямую на координатные плоскости 3.3-1
- преобразования 4.5-6
- прямой как пересечения двух плоскостей 2.3-1
- — канонические 3.3-1
- — параметрические 2.2-2, 3.3-2
- —, проходящей через данную точку в данном направлении 3.3-1
- —, — через две точки 3.3-1
- ребра возврата 17.3-11
- эвольвент 17.2-5
- Эйлера 11.5-1
- Уровень значимости критерия 19.1-3, 19.6-3
- Ускорение движущейся точки, разложение на тангенциальную и нормальную составляющие 17.2-3

- Условие граничное естественное 11.5-4
 — Липшица 9.2-1
 — параллельности плоскостей 3.4-1
 — — прямой и плоскости 3.4-1
 — — прямых 2.3-2
 — пересечения трех прямых в одной точке 2.3-2
 — перпендикулярности прямой и плоскости 3.4-1
 — — прямых 4.3-2, 3.4-1
 — представления 14.9-1
 — трансверсальности 11.5-4
 — того, что две прямые лежат в плоскости 3.4-3
 — —, — три плоскости проходят через одну прямую 3.4-3
 — —, — — точки лежат на одной прямой 2.3-1, 3.4-3
 — —, — четыре плоскости проходят через одну точку 3.4-3
 — —, — — точки лежат в одной плоскости 3.4-3

Условия граничные типа Коши 10.2-1

- Дирихле 4.4-8, 4.11-4
 — интегрируемости 10.1-2
 — краевые 9.1-2
 — Линдберга 18.6-5
 — Ляпунова 18.6-5
 — начальные 9.1-2, 10.2-1
 — параллельности прямых 3.4-1
 — периодичности 15.4-8
 — полосы 10.2-1
 — совместности 10.1-2

Устойчивость дифференциального уравнения 9.4-4

- периодических решений системы дифференциальных уравнений 9.5-4
 — по Ляпунову решений системы дифференциальных уравнений 9.5-4
 — равновесного решения системы дифференциальных уравнений 9.5-4

Ф

- Фаза 4.11-4
 Фазовая плоскость 9.5-2
 — траектория 9.5-2
 Фактор композиционный 12.2-6
 Фактор-группа группы по нормальному делителю 12.2-6
 Факториал 1.2-4
 Факториальный многочлен степени n 21.5-1, 21.5-3
 Фокальная ось 2.4-9
 — хорда 2.4-9
 Фокальный параметр 2.4-9

- Фокус 2.4-9, 17.3-11
 — устойчивый, неустойчивый 9.5-4
 Форма билинейная 13.5-1
 — квадратичная 13.5-2
 — однородная 13.5-2
 — пространства основная относительно базиса 14.7-1
 — эрмитова см. Эрмитова форма
 Формула Адамса 20.7-3
 — Бесселя интегральная 21.8-2
 — Гильберта—Шмидта для резольвентного ядра 15.3-3
 — Грина для окружности с условиями Дирихле 15.6-9
 — — обобщенная 15.4-3
 — Дюамеля 10.5-4
 — интегральная Гейне 21.8-11
 — — Дирихле 21.9-4
 — — Коши 7.5-1
 — — Пуассона 15.6-6, 15.6-9, 21.8-2
 — интерполяционная см. Интерполяционная формула
 — Лапласа для чисел Бернулли 21.5-2
 — Муавра 1.3-3
 — обращения 10.5-1
 — Стирлинга 21.4-2
 — Тейлора 4.10-4, 4.10-5
 — — локальная 11.3-2
 Формулы Байеса 18.2-6, 18.4-5
 — Грина 4.6-12
 — дифференцирования 4.5-1
 — для уничтожения иррациональности в знаменателе 1.2-2
 — квадратурные см. Квадратурные формулы
 — Кемпбелла 18.11-5
 — Ньютона 1.4-3, 1.6-3
 — параболической интерполяции 20.5-2
 — разложения Хевисайда 3.4-4
 — Фредгольма для резольвентного ядра 15.3-8
 — Френе—Серре 17.2-3
 — Эйлера—Фурье 4.11-2
 Функции асимптотически пропорциональные 4.4-3
 — — равные 4.4-3
 — асимптотические соотношения 4.4-3
 — бесконечно большие порядка 1, 2, ... 4.4-3
 — — экспоненциального порядка 4.4-3
 — — малые порядка 1, 2, ... 4.4-3
 — Бесселя сферические 21.8-8
 — —, асимптотические разложения 21.8-9
 — —, теорема сложения 21.8-3
 — — цилиндрические, асимптотические разложения 21.8-9

- Функции Бесселя цилиндрические** второго рода 21.8-1
- — —, интегральные представления 21.8-2
 - — —, — формулы 21.8-2
 - — — модифицированные 21.8-6
 - — — нецелого порядка 21.8-1
 - — — первого рода 21.8-1
 - — — целого порядка 21.8-1, 21.8-4
 - Вебера 21.8-1
 - Вейерштрасса 21.6-2, 21.6-3, 21.6-9
 - взаимно ортогональные 15.2-3
 - Ганкеля, асимптотические разложения 21.8-9
 - — — второго рода 21.8-1
 - — — модифицированные 21.8-6
 - — — первого рода 21.8-1
 - гармонически сопряженные 15.6-8
 - гиперболические 21.2-5, 21.2-6, 21.2-7, 21.2-9
 - —, геометрическая интерпретация 21.2-5
 - —, разложение в степенной ряд 21.2-12
 - единичные асимметричные 21.9-1
 - импульсные асимметричные 21.9-6
 - канонически сопряженные 10.2-6
 - Лагерра обобщенные 21.7-5
 - — присоединенные 21.7-5
 - Лежандра второго рода 21.7-3
 - — первого рода 21.7-3
 - — присоединенные 21.8-10
 - — —, интегральные свойства 21.8-11
 - — — первого рода 21.8-10
 - линейно зависимые 1.9-3
 - — независимые 1.9-3
 - Неймана 21.8-1
 - —, асимптотические разложения 21.8-9
 - некоррелированные 18.10-2
 - неявные, теорема существования 4.5-7
 - обратные гиперболические 21.2-8, 21.2-11
 - — —, разложение в степенной ряд 21.2-12
 - — тригонометрические 21.2-4, 21.2-11
 - — —, главные значения 21.2-4
 - — —, разложение в степенной ряд 21.2-12
 - одинакового порядка 4.4-3
 - от многих радиусов-векторов 5.5-8
 - , отображающие специальные области на единичный круг 7.9-6
 - симметрические элементарные 1.4-3
 - случайной величины одномерной 18.5-2
 - случайных величин многомерных 18.5-4
 - тригонометрические 21.2-1, 21.2-2, 21.2-3, 21.2-9
 - —, разложение в бесконечные произведения 21.2-13
 - — —, — в степенной ряд 21.2-12
- Функции функционально зависимые** 4.5-6
- цилиндрические, теорема сложения 21.8-13
 - Чебышева второго рода 21.7-4
 - эквивалентные 4.4-3
 - эллиптические см. Эллиптические функции
 - Эрмита 21.4-6
 - $ber_m z$, $bei_m z$, $ker_m z$, $kei_m z$, $21.8-7$
- Функционал** 12.1-4
- Функциональный определитель** 4.5-6
- Функция автокорреляционная** 18.9-2, 18.10-2
- алгебраическая 4.2-2
 - аналитическая 4.10-4
 - — в бесконечности 7.3-3
 - — в открытой области 7.3-3
 - — в точке 7.3-3
 - —, интегральные теоремы 7.5
 - — моногенная 7.4-2
 - — — с естественными границами 7.3-1
 - —, разложение в ряд 7.5-2, 7.5-3
 - —, свойства 7.3-4
 - антипериодическая 4.2-2, 8.3-2
 - аппроксимирующая 20.8-4
 - аргумента x 4.2-1
 - бесконечно большая 4.4-1
 - — малая 4.4-1
 - векторная линейная 14.3-1
 - — точки 5.4-3
 - вероятностная 18.2-7
 - весовая 15.2-1
 - возрастающая 4.4-3
 - выборочная 18.9-1
 - , выпрямление 8.3-2
 - гармоническая 15.6-4
 - гипергеометрическая 9.3-9
 - — второго рода 9.3-9
 - — вырожденная второго рода 9.3-10
 - — — Куммера 9.3-10
 - голоморфная 7.3-3
 - Грина 9.3-3
 - асимметрическая 9.4-3
 - — второго рода 15.5-4
 - — для краевой задачи с однородными краевыми условиями 15.5-1
 - — для линейных краевых задач 9.3-3
 - — для плоскости 15.6-9
 - — для полуплоскости с условиями Дирихле 15.6-9
 - — для полупространства с условиями Дирихле 15.6-6
 - — для сферы с условиями Дирихле 15.6-6
 - — модифицированная 15.5-1
 - — обобщенная 9.3-3

- Функция Грина**, разложение по собственным функциям 15.5-2
- — симметрическая 9.4-3
 - — двойнопериодическая 21.6-1
 - —, детектирование 8.3-2
 - — целая 21.6-1
 - Дирихле $\delta(x)$ 21.9-2
 - дифференцируемая 7.3-1
 - — в точке 4.5-1, 4.5-3
 - — на множества 4.5-3
 - дробная рациональная 4.2-2
 - единичная симметричная 21.9-1
 - измеримая 4.6-14
 - —, свойства 4.6-14
 - импульсная, аппроксимация непрерывно дифференцируемыми функциями 21.9-4
 - —, — разрывными функциями 21.9-4
 - — единичная симметричная 21.9-2
 - —, представления интегралом Фурье 21.9-5
 - интегральный синус, интегральный косинус и т. д. см. Интегральный синус и т. д.
 - , интегрируемая в смысле Римана 4.6-1
 - , — по Лебегу 4.6-15
 - , квадратически интегрируемая 15.2-1
 - комплексная 7.2-1
 - координат инвариантная относительно преобразований координат 14.1-4
 - корреляционная 18.9-2
 - — взаимная 18.9-2, 18.10-2
 - кусочно-гладкая 4.5-1, 4.5-3
 - — непрерывная 4.4-7
 - логарифмическая 21.2-10, 21.2-11
 - —, разложение в степенной ряд 21.2-12
 - матрицы 13.2-12
 - мероморфная 7.6-7
 - —, разложение на простейшие дроби 7.6-7
 - многих переменных 4.2-1
 - — — аналитическая 4.10-5
 - — —, разложение в кратный ряд Тейлора 4.10-5
 - многозначная 4.2-2
 - монотонная строго 4.4-8
 - — вострого 4.4-8
 - невозрастающая 4.4-8
 - Неймана 15.5-7
 - неограниченно возрастающая 4.4-1
 - непрерывная в точке 4.4-6
 - — — — слева 4.4-7
 - — — — справа 4.4-7
 - — на множестве 4.4-6
 - непрерывно дифференцируемая 4.5-3
 - убывающая 4.4-8
 - нечетная 4.2-2
- Функция нормируемая** 15.2-1
- обратная 4.2-2
 - ограниченная 4.3-3
 - ограниченной вариации 4.4-8
 - однозначная 4.2-2, 12.1-4
 - однородная степени r 4.5-5
 - ошибок 18.8-3
 - передаточная 9.4-7
 - периодическая 4.2-2, 8.3-2
 - подынтегральная 4.6-1
 - показательная 21.2-9
 - —, разложение в степенной ряд 21.2-12
 - полигональная 11.6-3
 - правдоподобия 19.1-2
 - представление интегралом 4.10-1
 - — — — Фурье 4.11-4
 - производящая см. Производящая функция
 - равномерно непрерывная на множестве 4.4-6
 - — ограниченная 4.3-3
 - — сходящаяся 4.4-4
 - —, разложение в ряд 15.2-6
 - — — — степенной 4.10-1
 - — — — Тейлора 4.10-4
 - — — — Фурье 4.11-4
 - распределения 18.2-9
 - — вероятностей случайного процесса 18.9-2
 - — двумерного случайного вектора 18.4-2
 - — многомерная 18.4-7
 - — нормальная 18.8-3
 - — эмпирическая 19.2-2
 - рациональная 4.2-2
 - —, разложение на элементарные дроби 1.7-4
 - регулярная 7.3-3
 - результирующая 15.3-1
 - Римана—Грина 10.3-6
 - с зеркально сдвинутыми полуовнами 8.3-2
 - скалярная точки 5.4-2
 - собственная краевой задачи 10.4-2
 - , среднее значение 4.11-4
 - , стремящаяся к пределу 4.4-1
 - — к $+\infty$, $-\infty$ 4.4-1
 - ступенчатая 21.9-1
 - —, аппроксимация непрерывными функциями 21.9-1
 - —, представления интегралом Фурье 21.9-1
 - суммируемая 4.6-15
 - —, сходящаяся к пределу 12.5-3
 - точек 16.1-3
 - убывающая 4.4-8
 - , условие аналитичности в точке 7.3-3

Функция, условие дифференцируемости 7.3-2
 — характеристическая 18.3-8, 18.4-10
 — целая 7.6-5
 — —, разложение в произведение 7.6-6
 — — рациональная 1.4-3, 4.2-2, 7.6-5
 — — трансцендентная 7.6-5
 — цилиндрическая 21.8-1
 — — круговая 21.8-1
 — четная 4.2-2
 — эллиптическая см. Эллиптическая функция
Функция-объект 15.3-1

X

Характер представления 14.9-4
 — — примитивный 14.9-4
 — — простой 14.9-4
 — — составной 14.9-4
Характеристика 10.2-1, 10.3-1, 10.3-7, 17.3-11
 — области целостности 12.3-1
 — оперативная критерия 19.6-2
Характеристическая функция 18.3-8, 18.4-10
 — — интегрального уравнения 15.3-3
 — — линейного дифференциального оператора 15.4-5
 — — ядра 15.3-3
Характеристический вектор оператора 14.8-4, 14.8-7
Характеристическое значение оператора 14.8-3, 14.8-4
 — уравнение оператора 14.8-3
 — число линейного дифференциального оператора 15.4-5

Ц

Центр выборочного распределения 19.7-2
 — группы 12.2-7
 — кривизны 17.1-4, 17.2-5
 — кривой второго порядка 2.4-6
 — окружности 2.5-1
 — поверхности второго порядка 3.5-5
 — пучка 2.3-2
 — распределения вероятностей 18.3-3, 18.4-4, 18.4-8
 — рассеивания 18.4-4
 — соприкасающейся сферы 17.2-5
Цепная линия 2.6-2
Цепь 12.6-2
 — Маркова 18.9-3
Циклоида 2.6-2

Циклоида удлинненная 2.6-2
 — укороченная 2.6-2
Цилиндр 3.1-15
 — гиперболический 3.5-7
 — параболический 3.5-7
 — эллиптический 3.5-7
Цилиндрическая функция см. Функция цилиндрическая
Цилиндрические гармоники 21.8-1
Циркуляция вектора 5.7-1
Циссоида Диоклесса 2.6-1

Ч

Частичная сумма ряда 4.8-1
Частная производная вектор-функции 5.3-2
 — — функции 4.5-2
 — — — более высокого порядка 4.5-2
Частное 1.7-2
 — комплексных чисел 1.3-3
 — Релея 14.8-8, 15.4-7
 — — для обобщенной задачи о собственных значениях 14.8-8
Частота круговая 4.11-4
 — — собственная 9.4-1
 — основная 4.11-4
 — — гармоническая вторая, третья 4.11-4
 — попадания относительная в j -й классовой интервал 19.2-2
 — события 19.2-1
 — — групповая 19.2-2
 — — накопленная 19.2-2
 — — относительная 19.2-1
 — — накопленная 19.2-2
Частотная характеристика 9.4-7
Числа алгебраические 1.1-2
 — Бернулли 21.5-2, 21.5-3
 — — порядка n 21.5-2
 — —, рекуррентная формула 21.5-2
 — —, формула Лапласа 21.5-2
 — иррациональные 1.1-2
 — натуральные 1.1-2
 — —, полная упорядоченность 1.1-2
 — —, свойства 1.1-2
 — —, упорядоченность 1.1-2
 — Стирлинга 21.5-1
 — трансцендентные 1.1-2
 — целые 1.1-2
 — —, сравнимые по модулю 12.2-10
Численное дифференцирование 20.6-1
 — интегрирование дифференциальных уравнений 20.7-2
 — — — второго порядка 20.7-5
 — — — высших порядков 20.7-4
 — — для равноотстоящих узлов 20.6-2
 — — систем дифференциальных уравнений 20.7-4

Численное интегрирование уравнений с частными производными 20.8-1, 20.8-3
 — решение двухточечной краевой задачи для дифференциальных уравнений 20.8-2
 — — краевых задач, методы аппроксимирующих функций 20.8-4
 — — интегральных уравнений 20.8-5
 Число алгебраическое 1.6-3
 — действительное 1.1-2, 1.3-1
 — комплексное 1.3-1
 — мнимое 1.3-1
 — обратное 1.1-2
 — противоположное 1.1-2
 — чисто мнимое 1.3-1
 — Эйлера e 1.2-3

III

Шар конечного радиуса замкнутый 12.5-3
 — — — открытый 12.5-3
 Широта 3.1-6

Э

Эвольвента 17.2-5
 Эволюта 17.2-5
 Экстремаль 11.5-1
 Экстремум, достаточные условия 11.2-2, 11.3-3
 —, необходимые условия 11.2-2, 11.3-3
 — определенного интеграла, необходимое условие 11.5-1
 — — — условный 11.5-2
 — условный, необходимое условие 11.3-4
 Эксцентриситет 2.4-9
 Экспесс 19.2-4
 Элемент булевой алгебры дизъюнктивный 12.3-1
 — вероятности 18.3-2, 18.4-3, 18.4-7
 — группы 12.2-1
 — — обратный левый 12.2-1
 — дуги 4.6-9
 — линейной алгебры идемпотентный 12.4-2
 — — — нильпотентный 12.4-2
 — матрицы 13.2-1
 — множества 4.3-2
 — объема 6.2-3, 16.10-10
 — плоский 10.2-1
 — площади 17.3-3
 — — векторный 17.3-3
 — — поверхности 5.4-6
 — расстояния 17.4-2
 Элементы группы перестановочные 12.2-1
 — — сопряженные 12.2-5
 — —, сравнимые по модулю 12.2-10

Элементы определителя 1.5-1
 —, эквивалентные относительно подгруппы 12.2-3
 Эллипс 2.4-8, 2.4-9
 —, построение касательных и нормалей 2.5-3
 —, — по осям 2.5-3
 Эллипсы равной вероятности 18.3-6
 Эллипсоид действительный 3.5-7, 3.5-10
 — рассения 18.4-8
 Эллиптическая функция 21.6-1, 21.6-2
 Эллиптические функции Якоби 21.6-7, 21.6-9
 — — —, дифференцирование 21.6-7
 — — —, разложения в ряды 21.6-7
 — — —, теорема сложения 21.6-7
 Эллиптический интеграл 4.6-7, 21.6-4
 — —, алгебраическое приведение 21.6-5
 — — Вейерштрасса нормальный второго рода 21.6-3
 — — — первого рода 21.6-2
 — — Лежандра нормальный неполный 21.6-6
 — — — — полный 21.6-6
 — —, нормальная форма Вейерштрасса 21.6-5
 — — — Римана 21.6-5
 — — нормальный первого, второго, третьего рода 21.6-5
 — — первого, второго, третьего рода 21.6-4, 21.6-5
 — —, приведение к нормальной форме Лежандра 21.6-5
 — — — связанный 21.6-6
 Эндоморфизм 12.1-6
 Энтропия распределения вероятностей 18.4-12
 — условная 18.4-12
 Эпициклоида 2.6-2
 Эргодическая гипотеза 18.9-5
 — теорема 18.9-5
 Эрмитова матрица неопределенная 13.5-3
 — — неположительная 13.5-3
 — — неотрицательная 13.5-3
 — — отрицательно определенная 13.5-3
 — — — полуопределенная 13.5-3
 — — — положительно определенная 13.5-3
 — — — полуопределенная 13.5-3
 — — форма 13.5-3
 — —, линейная подстановка 13.5-4
 — — неопределенная 13.5-3
 — — неотрицательная 13.5-3
 — — неположительная 13.5-3
 — — отрицательно определенная 13.5-3
 — — — полуопределенная 13.5-3
 — — — положительно определенная 13.5-3
 — — — полуопределенная 13.5-3

Эффект дробовой 18.11-5
 Эффективность оценки 19.4-1
 — — асимптотическая 19.4-1

Я

Явление Гиббса 4.11-7
 Ядро взаимное 15.3-7, 15.3-9
 — вырожденное разделяющееся 15.3-1
 — гомоморфизма 12.2-9
 — интегрального преобразования 15.3-1
 — итерированное 15.3-5
 — линейного преобразования 14.3-2
 — непрерывное в среднем 15.3-1
 — нормируемое 15.3-1
 — резольвентное 15.3-7

Ядро симметричное 15.3-1
 — сингулярное 15.3-8
 — сопряженное 15.3-1
 — транспонированное 15.3-1
 — эрмитово 15.3-1, 15.3-2
 — — вспомогательное 15.3-4
 — — неотрицательное 15.3-6
 — — неположительное 15.3-6
 — — отрицательно определенное 15.3-6
 — — полное 15.3-4
 — — положительно определенное 15.3-6
 — —, разложение в ряд 15.3-4
 — — сопряженное 15.3-1
 — —, теоремы разложения 15.3-4
 Якобиан 4.5-6