O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

S. S. SADADDINOVA,
M.S.POZILOV, M.TOSHPO‘LATOV

SONLI USULLAR VA DASTURLASH

Toshkent – 2015

UDK 004 (075.32)
Sadaddinova S.S., Pozilov M.S., Toshpo‘latov M. Sonli usullar va dasturlash: O‘quv qo‘llanma. – Toshkent: TATU, 2015. – 385 b.

Taqrizchilar: f.-m.f.d., prof. Yo.Xusanboyev
t.f.d., prof. X.N.Zayniddinov

Ushbu qo‘llanma universitetlar hamda texnika oliy o‘quv yurtlarining “Sonli usullar va dasturlash” kursi materiallarini o‘z ichiga oladi. Jumladan, xatoliklar nazariyasi elementlari, funktsiyalarni darajali qatorlarga yoyish, algebraik va transtsendent tenglamalarning sonli yechish usullari, chiziqli va nochiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechish, funktsiyalarni approksimatsiyalash, sonli integrallash va differentsiallash, Koshi masalalarini yechish, hisoblashning Monte-Karlo usuli, chiziqli dasturlash va optimallash masalalari keltirilgan.

Kitobda hozirgi zamon hisoblash matematikasi va dasturlari asoslarining yutuqlari o‘z aksini topgan.

Qo‘llanma Toshkent axborot texnologiyalari universitetiga turdosh universitetlar, texnika oliy o‘quv yurtlari, pedagogika universitetlari talabalari uchun mo‘ljallangan, shuningdek, kichik ilmiy hodimlar va professor-o‘qituvchilar ham foydalanishlari mumkin.

M U N D A R I J A

SO’Z BOSHI

Keyingi yillarda axborot va kommunikatsion texnologiyalarning ilmiy-amaliy va ta’lim sohalariga kirib kelishi bilan mutaxassis tayyorlash sifatiga bo‘lgan talab ham ortdi. Shunga qarab, ta’lim dasturining o‘zgarishi amaliy fanlarda o‘z aksini topadi. Amaliy fanlarning asosini tashkil qiluvchi “Sonli usullar va dasturlash” fani matematik modellashtirishning kompyuterli jarayonlarida yuzaga keladigan masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega.

“Sonli usullar va dasturlash” kursiga bag‘ishlangan qo‘llanmalar rus va ingliz tillarida ko‘plab chop etilgan bo‘lsa-da, bunday kitoblar o‘zbek tilida juda kam, jumladan M.Isroilovning “Hisoblash metodlari” I, II qism va A.M. Siddiqov, S.N.Babakayev, D.Utebayevlarning “Sonli usullar algoritmlari va programmalari” nomli o‘quv qo‘llanmalari mavjud. Shu sabab hozirgi zamon fan va texnikasi taraqqiyotini aks ettiruvchi “Sonli usullar va dasturlash” faniga doir qo‘llanma va darsliklarni yaratish juda muhimdir. Respublikamiz oliy o‘quv yurtlarida hozirgi zamon talablariga javob beradigan yuqori malakali mutaxassislarni tayyorlash, bu mutaxassislarning hisoblash matematikasidan oladigan bilimlari darajasi yuqori va puxta bo‘lishi lozim.

Mazkur qo‘llanma texnika oliy o‘quv yurtlarining barcha yo‘nalishlari talabalariga mos keladi.

Qo‘llanma 14 ta bobdan iborat bo‘lib, u o‘z ichiga hisoblash xatoliklari haqida, tenglamalarni taqribiy yechish usullari, funktsiyalarni darajali qatorlarga yoyish, nochiziqli tenglamalarni sonli yechish usullari, chiziqli va nochiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechish, funktsiyalarni approksimatsiyalash, sonli integrallash va differentsiallash, chiziqli dasturlash va optimallash masalalarini qamrab olgan.

Mualliflar qimmatli maslahatlari uchun dots. A.N.Mirzayevga samimiy minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Qo‘llanma haqida tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan barcha kitobxonlarga mualliflar oldindan rahmat deb qoladilar.

I BOB. KIRISH

1.1. Sonli usullar va dasturlash fanining predmeti

XXI asrning xarakterli xususiyatlaridan biri – inson faoliyatining turli sohalarida matematik (sonli) usullarning va EHM larning keng qo‘llanilishidir. Fan, texnika va ijtimoiy sohalarga sonli usullarni keng ko‘lamda tadbiq etish 1950-yillarda EHM ning yaratilishi va tezda takomillashtirilishi natijasida yuz berdi.

Sonli usullar insoniyatning dastlabki davrlarida amaliyot zaruratidan paydo bo‘ldi. Qurilish, yer maydonlarini o‘lchash, savdo hisoblarini bajarish, davlatni boshqarish – arifmetik amallarni bajarishni va ma’lum geometrik tasavvurga ega bo‘lishni talab qilar edi. Insonning ehtiyojlari amaliy faoliyatda matematiklar oldiga yangidan-yangi masalalarni qo‘ydiki, bu matematik usullarning qo‘llanish doirasini kengaytirdi, fan-texnikaning ham taraqqiy qilishiga yordam berdi.

Sonli usullarning tarixan o‘zgarib, rivojlanib borishiga ikki faktor o‘zining muhim ta’sirini o‘tkazdi:

- matematik apparatning rivojlanish darajasi va o‘rganilayotgan ob’yekt haqidagi bilimlarning puxtalik darajasi;
- ob’yektning eng muhim xossa va xususiyatlarini tenglamalar ko‘rinishida tavsiflash imkoniyati, ya’ni ob’yektning matematik modelini qurish imkoniyati.

EHM lar yaratilguncha matematika fanlarning “tili” bo‘lib keldi. EHM lar yaratilishi bilan sharoit biroz o’zgardi. Sababi amaliyotda izlanayotgan miqdorlarni berilgan miqdorlar bilan bog‘laydigan formulani har doim ham yozishning iloji yo‘q. Bunday masalalarni yechish uchun izlangan javobga yaqinlashtiruvchi qandaydir cheksiz jarayonni topishga harakat qilinadi. Agar shunday jarayon ko‘rsatilgan bo‘lsa, u holda ma’lum qadamlar bajarib, masalaning taqribiy yechimlari olinadi. Bu jarayon qat’iy qoidalar asosida bajarilib, unga **algoritm** deyiladi.

Matematik masalalarni yechishning bunday usuli EHM lar yaratilishigacha ham ma’lum edi, ammo bu usulda juda ko‘p murakkab hisoblashlar mavjudligi sabab kam qo‘llanilgan. Jumladan, U.Leverye tomonidan Neptun planetasining kashf etilishi. Olim bu planetaning trayektoriyasini Uran planetasi trayektoriyasining og‘ishiga asoslanib, yozuv stolida pero bilan hisoblagan.

Ammo ko‘p hollarda tadqiqotchilar katta hisoblashlarni chetlab o‘tishga harakat qilardilar. Shuning uchun ham formula ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lmagan matematik modellar o‘rganilmagan yoki qo‘shimcha farazlar bilan soddalashtirilgan. Modelning soddalashtirilishi uning ob’yektga moslik darajasini kamaytirar, natijada hisoblash aniqligi pasayar edi. Bu ba’zida xato natijalarga olib kelar edi.

1.2. Hisoblash mashinalarida masala yechishning bosqichlari

Amaliy masalalarning katta mehnat talab qiladigan hisoblash ishlari hozirgi kunda hisoblash mashinalariga yuklatilgan. Chunki kishilar kun davomida qiladigan hisob-kitobni EHM lar bir lahzadayoq bajarib qo‘yadi.

EHM bazasida sonli usullarning qo‘llanilishi tahlil qilish mumkin bo‘lgan matematik masalalar sinfini kengaytirib yubordi. Endilikda tadqiqotchi uchun qandaydir ob’yekt modelini qurishda javobini oshkor ko‘rinishda yozish uchun zarur bo‘lgan kuchli soddalashtirishlarga hojat ham qolmadi. Tadqiqotchining diqqat e’tibori o‘rganilayotgan ob’yektning hamma eng muhim xususiyatlarini tog‘ri hisobga olishga va ularni modelda aks ettirishga qaratilgan bo‘lishi lozim.

EHM larda masalalar yechishda baribir asosiy vazifani inson bajaradi. Mashina esa inson tuzgan dasturlar asosida ishlaydi. Agar masalani yechish bosqichlariga ajratib chiqsak, inson va mashinaning tutgan o‘rni yaqqol namoyon bo‘ladi.

I bosqich. Masalaning qo‘yilishi – bunda masalaning mazmuni va yakunda qanday natija olish aniqlanadi.

II bosqich. Matematik modelni qurish – model asosiy fizik qonunlarni o‘zida mujassam qilishi kerak. Berilganlar asosida matematik modelni qurish yoki tanlash qo‘yilgan muammoni chuqur anglashni va mos matematik bilimlarni talab qiladi.

III bosqich. Sonli usullarni ishlab chiqish – EHM masalaning qo‘yilishini va qanday matematik formulalar bilan ishlanishini bilmaydi. Mashina uchun biror hisoblash usuli bilan yechiladigan algoritm kerak bo‘ladi. Ushbu vazifa bilan hisoblash matematikasi sohasida faoliyat yurituvchi mutaxassislar shug‘ullanishadi. Odatda, amaliyotchi-mutaxassis masalani yechish uchun mavjud usullardan to‘g‘ri keladiganini tanlaydi.

IV bosqich. Algoritmni ishlab chiqish va blok sxemani qurish – masalani yechish jarayonining natijaga olib boruvchi arifmetik va mantiqiy amallari ketma-ketligi yoziladi. Yozilgan algoritmni blok-sxema ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

V bosqich. Dasturlash – masala yechimininig algoritmi mashina uchun tushunarli tilda yoziladi. Bu tilga **dastur** deyiladi.

VI bosqich. Dasturni tekshirish – tuzilgan dasturda turli xatoliklar bo‘lishi mumkin, masalan, noaniqlik, ma’lumotlarni noto‘g‘ri kiritish ba h.k. Bu bosqichda xatoliklar tahlil qilinadi va to‘g‘rilanadi. Dastur natijaning aniqligi va ishonchliligini tekshiradigan testdan o‘tkaziladi.

VII bosqich. Hisoblashni bajarish – oldingi ma’lumotlar jadval yoki grafiklar tarzida beriladi.

VIII bosqich. Natijalarni tahlil qilish – olingan natijalar diqqat bilan o‘rganiladi va ilmiy-texnik hujjat tayyorlanadi.

1.3. Matematik modellar

Amaliy masalalarda tabiat hodisasi, ishlab chiqarish jarayoni, konstruksiya, boshqarish tizimi, iqtisodiy reja va shu kabi real «nomatematik» ob’yektlar bevosita beriladi. Tadqiqot ob’yektni formallashtirishdan, tegishli matematik modelni qurishdan boshlanadi; ya’ni ob’yektning eng muhum xususiyatlari va xossalari ajratiladi hamda matematik munosabatlar yordamida tavsiflanadi. Matematik model qurilgandan so‘ng, ya’ni masalaga matematik shakl berilgandan keyingina uni o‘rganish uchun sonli usullardan foydalanish mumkin.

Model – tadqiqot ob’yektini ifodalaydigan va tajriba o‘tkazish uchun qulay bo‘lgan fizik yoki abstrakt tizimdir.

Masalan, stol sirtini aniqlash kerak bo‘lsin. Buning uchun uning bo‘yi va enini o‘lchab, topilgan sonlar o‘zaro ko‘paytiriladi. Bu elementar jarayon aslida quyidagini anglatadi: real ob’yekt – stol sirti; matematik model – to‘g‘ri to‘rtburchak. O‘lchash natijasida topilgan sonlar to‘g‘ri to‘rtbuchakning o‘lchamlari deb qaraladi va bunday to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi taqriban izlanayotgan sirtning yuzi deb qaraladi.

Stol sirti uchun to‘g‘ri to‘rtburchak modelini tanlaganda biz odatda o‘z ko‘rish tasavvurimizga asoslanamiz. Biroq odamning ko‘zi o‘lchov asbobi kabi katta aniqlikka ega emas. Shuning uchun masalaga jiddiy qaralganda sirtni aniqlashda to‘g‘ri to‘rtburchak modelidan foydalanishdan avval uni tekshirish lozim. Tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi: stolning qarama-qarshi tomonlari va diagonallari uzunliklari o‘lchanadi hamda o‘lchash natijalari mos ravishda o‘zaro taqqoslanadi. Agar qarama-qarshi tomonlar va diagonallar uzunliklari juft-jufti bilan talab etilgan aniqlikda o‘zaro teng bo‘lsa, u holda stol sirtini haqiqatan to‘g‘ri to‘rtburchak deb qarash mumkin. Aks holda to‘g‘ri to‘rtburchak modelidan voz kechish va umumiy ko‘rinishdagi to‘rtburchak modeli bilan almashtirish lozim.

Modellashtirish – ob’yekt, jarayon yoki hodisalarni o‘rganish va tadqiq qilish uchun model qurishdir.

Matematik modellarning sinflanishi. *Jadval 1.*

Sinflash belgilari	**Matematik modellar turlari**
Iyerarxik darajaga mansubligi	Mikrodaraja modellari; Makrodaraja modellari; Metadaraja modellari
Ob’yekt xossalarini akslantirish xarakteri	Strukturali; Funktsional
Ob’yekt xossalarini namoyon qilish usullari	Analitik; Algoritmik; Imitatsion
Modelni qurish usullari	Nazariy; Tajribaviy (empirik)
Ob’yektning xususiyatlari	Determinirlangan; Ehtimoliy

Modellashtirish sohasida malakalarga ega bo‘lish inson hayotida ham muhim hisoblanadi. Ular kun tartibini rejalashtirish, o‘qish, mehnat, hayotiy masalalarni omadli hal qilishda optimal variantlarni tanlash uchun yordam beradi.

Model tushunchasiga bir nechta misollar keltiramiz:

a) Arxitektor bino qurmoqchi bo‘lsin. U avvalo tasavvuridagi binoni qanday ko‘rinishda chiqishini bilish uchun uni stol ustiga kubiklardan yasab ko‘radi. To‘g‘ri arxitektor bino modelini yasamay turib ham uni qurishi mumkin, lekin u bino mukammal chiqishiga ishonch hosil qilishi kerak.

b) Lektor talabalarga qon aylanish tizimini tushuntirish uchun qon harakati yo‘nalishlar bilan tasvirlangan ko‘rgazmadan foydalanadi.

Model quyidagi ikki shartga asosan quriladi:

1) Agar **prototip** (original ob’yekt) mavjud bo‘lmasa, model quriladi.

2) Agar prototipning bir qancha xossalari mavjud bo‘lsa, qaysidir xossasini o‘rganish uchun ob’yektga eng kam ta’sir qiluvchi biror xossasidan voz kechishga

to‘g‘ri keladi, ya’ni soddalashtirilgan model quriladi.

Matematik model qurishda asosiy shart modelning o‘rganilayotgan **ob’yektga adekvatlik sharti**dir.

Model qurish ob’yektni o‘rganish va u haqidagi farazlarni ilgari surishdan boshlanadi. Buning uchun tadqiq qilinayotgan ob’yektga o‘xshash ob’yektlar tahlil qilinadi, ular ichidan tadqiqotchi o‘rganishi mumkin bo‘lgan va ob’yektga eng yaqin prototipi tanlanadi. Prototip tahlili natijasida ob’yekt xossalarini aniqlashtiradigan va tajriba o‘tkazish imkonini beradigan mantiqiy sxema quriladi. Bu mantiqiy sxema ob’yekt modeli bo‘ladi. Model va ob’ektning matematik izohlari mos kelganda, modelning xossalari haqidagi tadqiqot natijalarini ob’yektga o‘tkazish mumkin.

Modellashtirish natijalari tasdiqlansa, model ob’yektga **adekvat** deyiladi.

Matematik modellashtirish analitik va kompyuterli bo‘lishi mumkin.

Analitik modellashtirishda tizim elementlarining funktsiyasi biror matematik (algebraik, integral, turli xil) yoki mantiqiy ifodalar orqali ifodalanadi. Analitik model quyidagi hollarda tadqiq etiladi:

- analitik, tizimning qidirilayotgan tavsiflari uchun bog‘liqliklarni aniqlashga urinishda;
- sonli, tenglamani yechishni bilmasdan, boshlang‘ich va natija shartlar ma’lum bo‘lganda sonli qiymatlarni olishga harakat qilishda;
- sifatli, yaqqol yechimga ega bo‘lmasdan yechimning ba’zi xossalarini topish (masalan, yechim chidamliligini baholash)da.

Matematik model real jarayon, holat yoki ob’yektni matematik ifodalar orqali ifodalaydi. Matematik model differentsial (oddiy yoki xususiy hosilali) tenglamalar tizimini, chiziqli va nochiziqli tenglamalarni ifodalashi mumkin.

Kompyuterli modellashtirishni uch guruhga bo‘lish mumkin:

1. Sonli modellashtirish;
2. Imitatsion modellashtirish;
3. Statistik modellashtirish.

Kompyuterli modellashtirish uchun tizim matematik modeli hisoblash tajribalarini o‘tkazish imkonini beradigan EHM dasturi yoki kompyuter modeli ko‘rinishida bo‘lishi muhim.

Sonli modellashtirishda kompyuterli modelni qurish uchun hisoblash matematikasi usullari qo‘llaniladi, tajriba esa parametrlar va boshlang‘ich shartlarning berilgan qiymatlarida ba’zi matemetik tenglamalarni sonli yechishdan iborat.

Imitatsion modellashtirish ham kompyuterli modellashtirishning bir turi bo‘lib, unga tadqiqot tizimining ishlash jarayonini EHM da amalga oshirish xususiyati xosdir. Shu bilan birga elementar holatlar, tashkil etuvchi jarayonni ularning tashkil etuvchi tuzilmalarini, vaqt o‘tish ketma-ketligini saqlagan holda imitatsiya qilinadi, bunda berilgan vaqt momentlarida tizim holati ma’lumotlarini olish imkonini beradi.

Statistik modellashtirish – kompyuterli modellashtirish turi bo‘lib, unda modellashtirilayotgan tizim jarayonlari haqida statistik ma’lumotlar olish imkoni bo‘ladi.

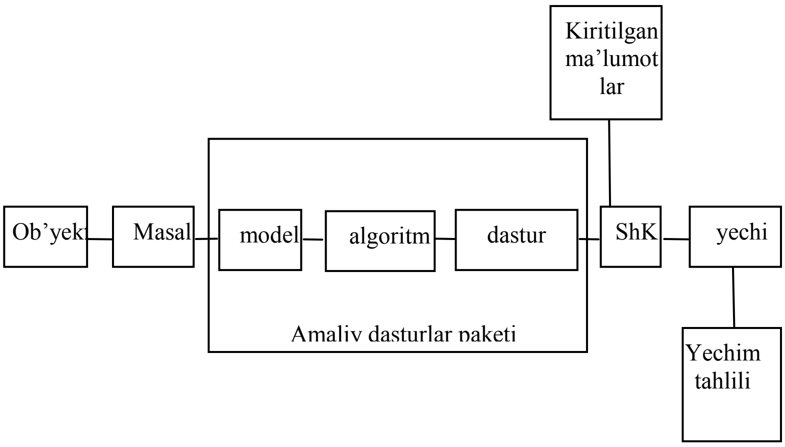
1.4. Algoritmni qurish

Oxirgi yillarda strukturali dasturlash kontseptsiyasi o‘z tadbiqini topmoqda. Strukturali dasturlash deganda oldindan belgilangan qat’iy tartibda bajariladigan loyihalash, kodlash, test o‘tkazish va dasturni hujjatlashtirish ishlari tushuniladi.

Algoritmni to‘liq qurish uchun quyidagi ketma-ketlikdagi bosqichlardan o‘tiladi:

1. masalaning qo‘yilishi;
2. modelni qurish;
3. algoritmni ishlab chiqish;
4. algoritm to‘g‘riligini tekshirish;
5. algoritmni dasturini tuzish;
6. algoritmni va uning murakkabligini tahlil qilish;
7. dasturni tekshirish;
8. hujjatlashtirish.

Shaxsiy kompyuterlarda sodda masalalarni yechish bosqichlari 1.1-rasmda keltirilgan.



Rasm 1.1. Shaxsiy kompyuterda masalani yechish bosqichlari.

Murakkab masalalarni dasturlashda yuqorida keltirilgan bosqichlar tartibini o‘zgartirishga va bir necha marta takror bajarishga to‘g‘ri keladi.

Algoritm qurishdan oldin masalani to‘g‘ri talqin qilib, formulaga solish kerak, ya’ni qanday ma’lumotlar berilgan, nimani topish talab qilinganligini aniqlab olish kerak. Vazifa aniq belgilab olingandan keyin uning matematik modelini qurish boshlanadi. Bunda masala uchun qaysi matematik struktura mos kelishi yoki unga o‘xshash masalalar mavjudligi aniqlanadi.

Masalaga mos keluvchi strukturani tanlashda quyidagi faktorlar ta’sirini sezish mumkin:

- kam sonli strukturalarni bilishimiz, ya’ni bilimimizning chegaralanganligi;
- hisoblashning soddaligi;
- qaralayotgan struktura bilan bog‘liq amallarning foydaliligi.

Oldiniga matematik strukturaning sinov ko‘rinishi tanlanib, keyin uni matematik ob’yektga mos terminlar asosida qayta tuziladi. Buning uchun masalada keltirilgan barcha axborotlar matematik ob’yektda o‘z ifodasini topganligi, izlanayotgan natijani matematik kattalik bilan ifodalab bo‘lishligi, model bilan ishlash qulayligi, modelda ob’yektning barcha xossalari o‘z aksini topganligi inobatga olinadi.

Keyingi bosqich algoritmni ishlab chiqishdan iborat. Algoritm qurishda asosiy vazifa samarali yechish algoritmini tanlashdir, ya’ni kam vaqt va kam xotira maydonini egallaydigan algoritmni tanlash kerak. Tanlangan algoritmning to‘g‘riligini isbotlash – ishning eng murakkab, mashaqqatli qismidir.

Algoritm to‘g‘ri ishlayotganligini aniqlashning ikki usuli mavjud:

1. Tuzilgan dastur (algoritm)ni turli testlardan o‘tkazish; agar dastur asosida olingan javoblar qo‘lda hisoblab topilgan natijalar bilan yoki oldindan ma’lum bo‘lgan qiymatlar bilan bir xil chiqsa, dastur to‘g‘ri ishlayapti deb xulosa qilish mumkin. Biroq bu usul barcha shubhalarni tarqatmaydi, balki dastur xato ishlaydigan boshqa holatlar bordir.

2. Tuzilgan dastur (algoritm) to‘g‘riligini tekshirishning umumiy usuli; faraz qilaylik, algoritm 0 dan *m* gacha ketma-ketlikda ishlaydigan qadamdan iborat bo‘lsin. Har bir qadamning to‘g‘riligi asoslanadi. Xususan, o‘tilgan qadamgacha va undan keyin amalga oshiriladigan shartlarni to‘g‘riligini talab qilish mumkin. Undan keyin barcha kiritilgan ma’lumotlar bilan chiqishdagi natijaviy ma’lumotlarning mosligini tekshirib, algoritm to‘g‘riligi isbotlanadi.

Tuzilgan dastur (algoritm) to‘g‘riligini tekshirishning boshqacha usuli ham mavjud. Bunda dasturning **har bir sikli** uchun qo‘lda (kalkulyatorda) ikkita nazorat nuqtasi hisoblanadi. Agar nazorat nuqtalardagi qo‘lda hisoblangan natijalar bilan dasturdan olingan natijalar ustma-ust tushsa, dasturning barcha sikllari to‘g‘ri ishlamoqda deb ishonch hosil qilish mumkin. Algoritmning to‘g‘riligi uning samaradorliligini bildirmaydi.

Algoritmni tuzgandan keyin uni mashina tiliga o‘girish kerak. Bunda algoritm tezligiga va xotirada egallaydigan maydoniga ta’sir qiluvchi quyidagi muammolar yuzaga keladi:

- juda ko‘p hollarda algoritmning alohida olingan qadami shunday shaklda bo‘lishi mumkinki, uni dasturiy tilga o‘tkazish murakkab bo‘lsin. Masalan, algoritmning qadamlaridan biri butun bir qism dasturdan iborat bo‘lishi mumkin.
- Modelda qatnashuvchi muhim jihatlarni topib, ma’lumotlar ketma-ketligini strukturaviy tizimini qurish kerak, ya’ni blok-sxema chizish talab qilinadi.
- Dasturni qaysi tilda tuzgan ma’qul va asosiy o‘zgaruvchilar qanday, nechta massiv va qanday o‘lchamda kerakligi tahlil qilinadi.

Nazorat uchun savollar:

1. Sonli usullar qanday paydo bo‘ldi?
2. EHM larda masalani yechish bosqichlarini sanang.
3. Matematik modelga ta’rif bering.
4. Modelning ob’yektga adekvatlik shartini ayting.

II BOB. HISOBLASH XATOLIKLARI HAQIDA MA'LUMOT

2.1. Xatoliklar manbai

Aksariyat hollarda amaliy masalalarni sonli usullarda yechishda aniq yechim topilmasdan, balki u yoki bu aniqlikdagi taqribiy yechim topiladi. Aniq yechim bilan taqribiy yechim orasidagi farq **xato** deyiladi.

Matematik modellashtirishning yuqoridagi bosqichlarini amalga oshirish natijasida xatoliklar manbalari hosil boʻladi. Ular 4 xil boʻladi:

1) matematik model xatoligi;
2) kiritilgan maʼlumotlar xatoligi (yoʻqotilmas xatolik);
3) sonli usul xatoligi;
4) hisoblash xatoligi.

Matematikada tabiat hodisalarining miqdoriy nisbati u yoki bu funktsiyalarni bir-birlari bilan bogʻlaydigan tenglamalar yordamida tasvirlanadi va bu funktsiyalarning bir qismi maʼlum boʻlib (**dastlabki maʼlumotlar**), boshqalarini topish kerak boʻladi. Tabiiyki, topilishi kerak boʻlgan miqdorlar (**masalaning yechimi**) dastlabki maʼlumotlarning funktsiyasi boʻladi. Dastlabki maʼlumotlar, odatda tajribadan olinadi (masalan, yorugʻlik tezligi, Plank doimiysi, Avagadro soni va hokazo). Shuning uchun ham dastlabki maʼlumotlarning aniq qiymatiga emas, balki uning taqribiy qiymatiga ega boʻlamiz. Dastlabki maʼlumotlar taqribiy boʻlganligidan natija ham taqribiy boʻladi.

Dastlabki maʼlumotlarning noaniqligi natijasida hosil boʻlgan xato **yoʻqotilmas xato** deyiladi. Bu xato masalani yechayotgan kishiga bogʻliq boʻlmasdan, unga berilgan maʼlumotlarning aniqligiga bogʻliq. Bu holda dastlabki maʼlumotlar xatosining kattaligini bilish va shunga qarab natijaning yoʻqotilmas xatosini baholash kerak. Agar dastlabki maʼlumotlarning aniqligi katta boʻlmasa, aniqligi juda katta boʻlgan usulni qoʻllash foydasiz. Chunki aniqligi katta boʻlgan usul koʻp mehnat (hisoblashni) talab qiladi, lekin natijaning xatosi bari bir yoʻqotilmas xatodan kam boʻlmaydi.

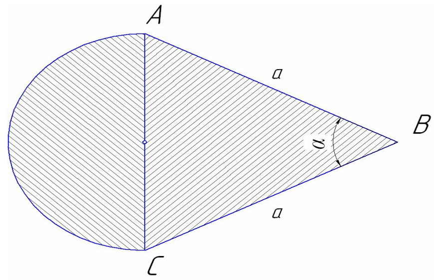
Baʼzi matematik ifodalar tabiat hodisasining ozmi-koʻpmi ideallashtirilgan modelini tasvirlaydi. Shuning uchun ham hodisalarning aniq formulasini yoki tenglamasini berib boʻlmaydi, buning natijasida xatolik kelib chiqadi.

Shuningdek, biror masalani formulasi yoki tenglamasi bor, lekin uni yechish usuli yoʻq boʻlsa, bu masala unga yaqinroq va yechish yoʻli boʻlgan masalaga almashtiriladi. Buning natijasida ham xatolik kelib chiqadi. Yechish usullari sababli kelib chiqadigan xatoga **sonli usul xatosi** deyiladi.

Hisoblash natijasida hosil boʻlgan koʻp xonali sonlarni yaxlitlash oqibatida hosil boʻlgan xato **hisoblash xatosi** deyiladi. Masalan, π, e, $ln2$ va shunga oʻxshash irratsional sonlarni taqribiy qiymatlari olinganda hosil boʻladi.

Yoʻqotilmas xato, usul xatosi va hisoblash xatolarining yigʻindisi **toʻliq xato** deyiladi.

Misol. Yon tomonlari a va ular orasidagi burchagi α boʻlgan teng yonli ABC uchburchak bilan asosini diametr qilib chizilgan yarim doiradan tashkil topgan shaklning yuzi S ni hisoblang. a va α ni oʻlchash natijasida topilgan deb oling.



Rasm 2.1. Strixlangan shakl yuzasi.

Yechilishi: Chizmaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$S = \frac{a^2}{2}\left[\sin\alpha + \frac{\pi}{2}(1-\cos\alpha)\right].$$

Agar a^* va α^* bilan mos ravishda a va α larning o‘lchash natijasida topilgan qiymatlarini belgilab olsak, u holda

$$S^* = \frac{a^{*2}}{2}\left[\sin\alpha^* + \frac{\pi}{2}(1-\cos\alpha^*)\right]$$

bo‘ladi. Bundan yo‘qotilmas xato $\rho_1 = S - S^*$ kelib chiqadi. Agar qo‘limizda trigonometrik funktsiyalar jadvali bo‘lmasa, bu formulani jadvalsiz hisoblash mumkin bo‘lgan boshqa

$$\overline{S} = \frac{a^{*2}}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\alpha^{*2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\alpha^{*2k}}{(2k)!}\right]$$

formula bilan almashtirish mumkin.

Natijada $\rho_2 = S^* - \overline{S}$ usul xatosi kelib chiqadi.

$\overline{S}$ ni hisoblashda π ni taqribiy qiymati bilan almashtirish va oraliqdagi natijalarni yaxlitlashga to‘g‘ri keladi. Natijada $\overline{S}$ o’rniga $\overline{\overline{S}}$ ga ega bo‘lamiz, u holda $\rho_3 = \overline{S} - \overline{\overline{S}}$ hisoblash xatosi kelib chiqadi.

To‘liq xato $\rho = S - \overline{\overline{S}}$ ga, ya’ni yo‘qotilmas xato, usul xatosi va hisoblash xatolarining yig‘indisiga tengdir:

$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$

Odatda, xatolarning ishoralari noma’lum bo‘ladi, shuning uchun ularni absolyut qiymatlari bilan olish kerak.

2.2. Hisoblash xatosi

Masala qo‘lda yoki mashinada hisoblanganda sonlarning diskret to‘plami bilan ish ko‘riladi. Bu to‘plam

$$\pm\left(\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1}\right) \quad (2.1)$$

ko‘rinishdagi sonlardan iborat bo‘lib, bu yerda

q – sanoq sistemasining asosi;

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_м$ – butun sonlar bo‘lib, $0 \le \alpha_i \le q-1$;

m – bu to‘plamdagi sonlar xonasining miqdori;

n – soni $|n| \le n_0$ shartni qanoatlantiradi.

Qo‘lda hisoblaganda 10 lik sanoq sistemasi ($q=10$) bilan ish ko‘riladi. EHM larda esa ikkilik sanoq sistemasi ($q=2$) ishlatiladi. Quyida sonning 10 lik sanoq sistemasida yozilishi keltirilgan:

$$1358{,}7604=1\cdot10^3+3\cdot10^2+5\cdot10+8+7\cdot10^{-1}+6\cdot10^{-2}+0\cdot10^{-3}+4\cdot10^{-4}.$$

Odatda, arifmetik amallarni bajarayotganda ko‘p xonali sonlar hosil bo‘ladi. Natija qaralayotgan to‘plamdan chiqib ketmasligi uchun yaxlitlanadi. Hisoblash natijasida quyidagi son hosil bo‘lsin:

$$\pm\left(\alpha_1 q^n+\alpha_2 q^{n-1}+...+\alpha_m q^{n-m+1}+\alpha_{m+1}q^{n-m}\right) \quad (2.2)$$

Agar $\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}q^{-1}+...<\frac{1}{2}q$ bo‘lsa, (2.2) sonni (2.1) son bilan almashtiramiz, agarda $\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}q^{-1}+...>\frac{1}{2}q$ bo‘lsa, (2.2) sonni

$$\pm\left(\alpha_1 q^n+\alpha_2 q^{n-1}+...+(\alpha_m+1)q^{n-m+1}\right) \quad (2.3)$$

ga almashtiramiz. Endi shubhali hol qoldi:

$$\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}q^{-1}+...=\frac{1}{2}q$$

bo‘lsa-chi, bu holda (2.2) sonni shunday almashtiramizki, keyingi amallarni bajarish qulay bo‘lsin.

Ayrim EHMlar shubhali holda (2.2) sonini (2.3) soni bilan almashtiradigan qilib dasturlangan. Qo‘lda hisoblayotganda bunday holda juft raqam qoidasi ishlatiladi:

Agar α_m juft bo‘lsa, natija (2.1) ga va α_m toq bo‘lsa, (2.3) ga almashtiriladi.

Misol 1. 5,780475 sonini yaxlitlang.

5,780475 ≈ 5,78048 ≈ 5,7805 ≈ 5,780 ≈ 5,78 ≈ 5,8 ≈ 6.

Misol 2. Raqamlariga mos holda c^* sonini yahlitlang:

1)c^* = 1,9396712; 2)c^* = 245,351365;
c^*= 1,939671; c^*= 245,35136;
c^*= 1,93967; c^*= 245,3514;
c^*= 1,9397;c^*= 245,351;
c^*= 1,940;c^*= 245,35;
c^*= 1,94;c^*= 245,4;
c^*= 1,9;c^*= 245;
c^*= 2; c^*= $2{,}4\cdot10^2$;
c^*= $2\cdot10^2$;

2.3. Yo‘qotilmas xato

Agar a – biror miqdorning aniq qiymati bo‘lib, a^* uning ma’lum taqribiy qiymati bo‘lsin. a^* **sonning absolyut xatosi** deb, $\Delta a^*=\left|a-a^*\right|$ ga aytiladi.

Absolyut xato sonning aniqligini tavsiflovchi belgilaridan biridir. Absolyut xato faqat nazariy ahamiyatga ega, chunki ko‘pincha a ning aniq qiymatini bilmaymiz. Shuning uchun noma’lum bo‘lgan absolyut xato o‘rniga yangi tushuncha kiritamiz.

Absolyut xatodan kichik bo‘lmagan har qanday songa taqribiy a^* sonning **limit absolyut xatosi** $\Delta(a^*)$ deyiladi. Ta’rifdan $\left|a-a^*\right| \le \Delta(a^*)$ dan $a^* - \Delta(a^*) \le a \le a^* + \Delta(a^*)$ kelib chiqadi. Buni qisqacha $a = a^* \pm \Delta(a^*)$ kabi yoziladi.

Misol 1. π sonini yaxlitlaganda π^* sonning limit absolyut xatosini toping.

Yechilishi: Ma’lumki, $3{,}14<\pi<3{,}15$, shuning uchun ham $\left|\pi-\pi^*\right|<0{,}01$. Demak, $\Delta(\pi^*)=0{,}01$ deb olish mumkin. Agar $3{,}14<\pi<3{,}142$ tengsizliklarni hisobga olsak, u holda yaxshiroq bahoga ega bo‘lamiz: $\Delta(\pi^*)=0{,}02$.

Limit absolyut xato $\Delta(a^*)$ sifatida $\left|a-a^*\right| \le \Delta(a^*)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan har qanday sonni olish mumkin. Bunday sonlar cheksiz ko‘p. Shuning uchun ham, bular orasidan kichigini tanlash maqsadga muvofiqdir.

Absolyut va limit absolyut xatolar hisoblash aniqligini baholash uchun yetarli emas. Masalan, ikki xil uzunlik o‘lchanganda $l_1 = 500{,}2 \pm 0{,}1$ sm va $l_2 = 15{,}8 \pm 0{,}1$ sm natijalar olingan bo‘lsin. Bularning ikkalasida ham limit absolyut xatolar bir xil bo‘lsa ham, birinchi o‘lchash ikkinchisiga qaraganda ancha aniq hisoblanadi. Shuning uchun ham aniqlikni yaxshiroq baholaydigan yangi tushuncha – nisbiy xato tushunchasini kiritamiz.

Absolyut xatoning taqribiy miqdorning absolyut qiymatiga nisbati taqribiy sonning **nisbiy xatosi** δa^* deyiladi: $\delta a^* = \dfrac{\Delta a^*}{\left|a^*\right|}$.

Limit absolyut xatoning taqribiy miqdorning absolyut qiymatiga nisbati taqribiy sonning **limit nisbiy xatosi** $\delta(a^*)$ deyiladi va quyidagi formuladan topiladi:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{\left|a^*\right|}.$$

Limit nisbiy xato yordamida aniq a son quyidagicha yoziladi: $a = a^*\left(1 \pm \delta(a^*)\right)$.

Bundan keyin limit absolyut xato va limit nisbiy xatoni qisqacha absolyut va nisbiy xato deymiz. Absolyut xato ismli miqdor, nisbiy xato ismsiz miqdor bo‘lib, odatda foizlarda yoziladi.

Sonning chap tomonidan noldan farqli birinchi raqamidan boshlab, hamma raqamlari **qiymatli raqamlar** deyiladi. $a^* = 0{,}567$ sonining qiymatli raqamlari uchta, 5, 6 va 7.

O‘nli kasrning oxiriga nollarni yozib yoki nollarni tashlab, sonining qiymatli raqamlarini ko‘paytirish yoki kamaytirish mumkin. Bu bilan berilgan son o‘zgarmaydi. Qiymatli raqamlarning sonidagi noaniqlikdan shunday foydalanish mumkinki, uning oxirgi qiymatli raqamiga qarab, bu sonning absolyut xatosi nimaga tengligi ko‘rinib tursin. Bu quyidagicha bajariladi:

Biror $\omega \left(\frac{1}{2} \le \omega \le 1\right)$ sonni tanlaymiz. Agar $\Delta(a^*) \le \omega\, q^{n-k+1}$ tengsizlik bajarilsa, u holda taqribiy

$$a^* = \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1} + \ldots \quad (3.1)$$

sonda α_k raqam **ishonchli raqam** deyiladi, aks holda α_k **shubhali raqam** deyiladi. Agar α_k raqam ishonchli raqam bo‘lsa, undan oldingi raqamlarning barchasi ishonchli raqam bo‘ladi. Demak, ishonchli raqamlar orasida har doim oxirgisi mavjud.

Agar a son n ta ishonchli qiymatli raqamga ega bo‘lsa, u holda uning $\delta(a^*)$ nisbiy xatoligi

$$\delta(\grave{a}^*) \le \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{(a)}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, bu yerda k – shu a sonning birinchi raqami. Aksincha, nisbiy xatoligi $\delta(a^*)$ bo‘lgan a sonning n ta raqami ishonchli bo‘lsa, n ushbu

$$(1+k)\delta(\grave{a}^*) \le \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{(b)}$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan eng katta tub sondir.

Taqribiy sonni yozish qoidasi: taqribiy sonning oxirgi qiymatli raqami har doim ishonchli bo‘lishi kerak. Buning uchun shubhali raqamlar tashlanadi, kerak bo‘lgan holda uning o‘ng tomoniga ko‘paytuvchi q^t (t-butun son) yozib qo‘yiladi.

Misol 2. O‘nli sanoq sistemasida

1) $\Delta(a^*) \le \omega \cdot 10^{-2}$ bo‘lganda $a^* = 3{,}14$ yozuv to‘g‘ri bo‘lib, $a^* = 3{,}140$ yozuv noto‘g‘ri bo‘ladi;

2) $\Delta(b^*) \le \omega \le 1$ bo‘lganda $b^* = 1500$ yozuv to‘g‘ri bo‘lib, $\Delta(b^*) \le \omega \cdot 10$ bo‘lganda noto‘g‘ri;

3) Agar $c^* = 402337$ sonning ikkita ishonchli raqami bo‘lsa, uni $c^* = 40 \cdot 10^4$ ko‘rinishida yozish kerak;

4) sonda $d^* = 0{,}003142$ ishonchli raqamlarning soni uchta bo‘lsa, uni $d^* = 3{,}14 \cdot 10^{-3}$ ko‘rinishida yozish kerak.

Ishonchli raqam ω ning tanlanishiga bog‘liq. Ilgari jadvallarda $\omega = \frac{1}{2}$ deb olinar edi, hozirgi jadvallarda $\omega > \frac{1}{2}$ deb olinadi, tajriba asosida tuzilgan jadvallarda $\omega = 1$ deb olinadi. $\omega > \frac{1}{2}$ deb tanlanishiga sabab, shunda taqribiy sonlarni yaxlitlayotganda ishionchli raqamlar saqlab qolinadi.

Haqiqatan, (3.1) taqribiy sonni yaxlitlash natijasida absolyut xato $\Delta(a^*) + \Delta'$ ga teng bo‘lib, bu yerda $\Delta(a^*)$ taqribiy a^* sonning absolyut xatosi, Δ' esa yaxlitlash paytida a^* sondagi kichik xonalarni tashlab yuborishdan kelib chiqqan xatodir. Yaxlitlashdan keyin α_m raqam ishonchli bo‘lishi uchun

$$\Delta(a^*) + \Delta' \le \omega\, q^{n-m+1} \quad (3.2)$$

tengsizlik bajarilishi kerak. Lekin shubhali holda $\Delta' = \frac{1}{2} q^{n-m+1}$ va $\Delta(a^*) \ne 0$ bo‘lsa, u vaqtda (3.2) tengsizlik $\omega = \frac{1}{2}$ bo‘lganda bajarilmaydi, $\omega > \frac{1}{2}$ bo‘lganda esa bajarilishi mumkin.

Misol 3. $a^* = 0{,}6245 \pm 0{,}00005$ bo‘lsin. Bu yerda $\omega = \frac{1}{2}$ bo‘lganda ham, $\omega = 1$ bo‘lganda ham oxirgi qiymatli raqam 5 ishonchlidir. Bir marta yaxlitlash natijasida

$a^* = 0{,}625 \pm 0{,}00055$ bo‘lib, oxirgi 5 raqami $\omega = \frac{1}{2}$ bo‘lganda ishonchli bo‘lmaydi, $\omega = 1$ da esa ishonchli bo‘ladi.

Misol 4. Agar a^*=47,542 taqribiy sonning nisbiy xatoligi $\delta(\grave{a}^*) = 0{,}1\%$ bo‘lsa, uning ishonchli raqamlari sonini aniqlang.

Yechilishi: (a) tengsizlikni tuzamiz: bu yerda k=4,

$$\delta(\grave{a}^*) = 0{,}1\% = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{1000};$$

$$(1+k)\delta(\grave{a}^*) = (1+4)\cdot\frac{1}{1000} = \frac{5}{1000} = 5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 \le \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Bundan ko‘rinadiki, n-1=2 yoki n=3. Demak, a^*=47,542 soni 3 ta ishonchli raqam: 4, 7 va 5 ga ega.

Hisoblashlarni qo‘lda bajarganda va dastlabki ma’lumotlarni tayyorlash bosqichida absolyut va nisbiy xatolar xossalaridan foydalaniladi.

Absolyut va nisbiy xatolarning xossalari

1^0. $\delta(a \pm b) = \frac{a\delta(a) + b\delta(b)}{a \pm b}$; $\Delta(a \pm \Delta b) = \Delta a + \Delta b$;

2^0. $\delta(ab) = \delta(a) + \delta(b)$; $\Delta(a \cdot b) = a \cdot b[\delta(a) + \delta(b)] = b\Delta a + a\Delta b$;

3^0. $\delta(a/b) = \delta(a) + \delta(b)$; $\Delta(a/b) = \frac{a}{b}[\delta(a) + \delta(b)] = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2}$;

4^0. $\delta(a^m) = m \cdot \delta(a)$; $\Delta(a^m) = m \cdot a^{m-1}\Delta a$;

bunda Δ – absolyut xato; δ – nisbiy xato; m – ratsional son.

2.3.1. Funktsiyaning yo‘qotilmas xatosi

Argumentlarning taqribiy qiymatlari ma’lum bo‘lganda funktsiyaning yo‘qotilmas xatosini topish masalasini ko‘rib chiqaylik. Faraz qilaylik, $y = f(x_1,..., x_n)$ funktsiyaning qiymatini hisoblash kerak bo’lsin, bunda argumentning faqat taqribiy qiymatlari $x_1^*,..., x_n^*$ va ularning mos absolyut xatolari $\Delta(x_1^*),..., \Delta(x_n^*)$ ma’lum bo‘lsin. Masalani soddalashtirish maqsadida qaralayotgan funktsiya va argumentlarning xatolariga nisbatan quyidagi shartlarni qo‘yamiz:

a) qaralayotgan sohada $y = f(x_1,..., x_n)$ uzluksiz differentsiallanuvchi bo‘lib, xususiy hosilalari sekin o‘zgaradi;

b) argumentlarning nisbiy xatolari $\delta(x_1^*),..., \delta(x_n^*)$ yetarlicha kichik.

U holda Lagranj formulasiga ko‘ra quyidagi o‘rinli:

$$y - y^* = f(x_1,..., x_n) - f(x_1^*,..., x_n^*) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^{i}(\xi)(x_i - x_i^*), \quad (3.3)$$

Bu yerda $\xi = (\xi_1,..., \xi_n)$ son $(x_1,..., x_n)$ va $(x_1^*,..., x_n^*)$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesmaning qandaydir nuqtasi.

Funktsiyaga qo‘yilgan 1–shartga ko‘ra $f_{x_i}^{/}(\xi)$ ni $f_{x_i}^{/}(x^*)$ bilan almashtirish mumkin: $y - y^* = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^{/}(x^*)(x_i - x_i^*)$, bundan esa $\left|y - y^*\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f_{x_i}^{/}(x^*)\right|\Delta(x_i^*).$

Demak, **funktsiyaning absolyut xatosi**

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}(x^*) \right| \Delta(x_i^*) \quad (3.4)$$

ga teng bo‘ladi.

Funktsiyaning nisbiy xatosi

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{\left| f(x^*) \right|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}(x^*)}{f(x^*)} \right| \Delta(x_i^*)$$

yoki $\delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \left| \{\ln f(x^*)\}'_{x_i} \right| \Delta(x_i^*)$. (3.5)

Misol 1. 1) $y = \ln x$ berilgan bo‘lsin. U holda (3.4) formulaga ko‘ra natural logarifmning absolyut xatosi argumentning nisbiy xatosiga teng bo‘ladi:

$$\Delta(y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \delta(x^*).$$

Bir xil ishorali taqribiy sonlarni qo‘shish xatolari:

n ta musbat taqribiy sonlar yig‘indisi $u = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ning absolyut va nisbiy xatolarini topish talab qilinsin. Bu holda $f'_{x_i}(x^*)$ lar 1 ga teng bo‘lib, $\{\ln f(x^*)\}'_{x_i} = \frac{1}{x_i^*}$. Bu qiymatlarni (3.4) va (3.5) ga qo‘yib,

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i^*). \quad (3.6)$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{u^*} \delta(x_i^*). \quad (3.7)$$

larni hosil qilamiz.

Teorema 1. Bir xil ishorali qo‘shiluvchilar yig‘indisining absolyut xatosi qo‘shiluvchilar absolyut xatolarining yig‘indisiga teng.

Teorema 2. Bir xil ishorali taqribiy sonlarni qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan yig‘indining nisbiy xatosi qo‘shiluvchilarning eng katta va eng kichik nisbiy xatolari orasida yotadi.

$M = \max_i \delta(x_i^*)$ va $m = \min_i \delta(x_i^*)$ bo‘lsin, u holda (3.7) tenglikdan quyidagi

$$\delta(u^*) \le M \frac{x_1^* + x_i^* ... + x_n^*}{u*} = M$$

va $\delta(u^*) \ge m \frac{x_1^* + x_i^* ... + x_n^*}{u*} = m$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Har xil aniqlikdagi sonlarni qo‘lda hisoblaganda qo‘shish qoidasi:

1^0. O’nli raqamlari boshqa sonlardagiga nisbatan eng kam bo‘lganini ajratib, ularni o‘zgarishsiz qoldirish kerak;

2^0. Qolgan sonlarda esa bitta yoki ikkita ortiqcha raqamlar qoldirib, ajratilgan sonlarga nisbatan yaxlitlash kerak;

3^0. Hamma saqlangan xonalarni hisobga olgan holda berilgan sonlarni qo‘shish kerak;

4^0. Hosil bo‘lgan natijani bitta yoki ikkita xonaga yaxlitlash kerak.

Bir xil ishorali taqribiy sonlarni ayirish xatolari:

Faraz qilaylik, $x_1 > x_2 > 0$ bo‘lib, $u = x_1 - x_2$ bo‘lsin. U holda umumiy formuladan

$$\Delta(u^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*) \quad (3.8)$$

$$\delta(u^*) = \frac{x_1^* \cdot \delta(x_1^*) + x_2^* \cdot \delta(x_2^*)}{u*} \quad (3.9)$$

kelib chiqadi. (3.8) da ham ayirmaning absolyut xatosi kamayuvchi bilan ayiriluvchi absolyut xatolarining yig'indisiga teng. Lekin nisbiy xatosi bu nisbiy xatolarning har biridan katta bo'ladi.

Agar kamayuvchi ayiriluvchidan ancha katta bo'lsa, u vaqtda (3.9) ning maxraji x_1^* ga yaqin bo'lib, kasrning o'zi esa $\delta(x_1^*)$ ga yaqin bo'ladi. Bu hol qo'shishdagiga o'xshaydi va qo'shishdagidek ish tutish kerak.

Agar kamayuvchi bilan ayiriluvchi o'zaro yaqin bo'lsa, maxraj juda kichik bo'lib, kasr juda katta bo'lib ketadi. Bu holda ko'p ishonchli raqamlar yo'qoladi. Shuning uchun imkoni boricha o'zaro yaqin sonlarni ayirmaslik kerak. Ayrim hollarda formulalar ustida turli o'zgartirishlar bajarib, bundan qutilish mumkin.

Misol 2. $x^2 - 154x + 6 = 0$ tenglamaning kichik ildizini toping, natijada 4 ta qiymatli raqamni saqlang.

1-hol. Bu tanglamani kichik ildizi $x = 77 - \sqrt{5923}$ ga teng bo'lib, bu yerda $\sqrt{5923} = 76{,}961...$ yaxlitlashdan keyin $\sqrt{5923} = 76{,}96$ bundan $x^* = 77 - 76{,}96 = 0{,}04$ ga ega bo'lamiz.

2-hol. Suratda irratsionallikdan qutilib, x ni quyidagicha yozish mumkin: $x = \dfrac{6}{77 + \sqrt{5923}}$, $77 + 76{,}96 = 153{,}96.$

Yaxlitlashdan keyin esa $77 + 76{,}96 = 154{,}0.$ Natijada $x^* = \dfrac{6}{154} = 0{,}038961$ va yana yaxlitlansa, $x^* = 0{,}039.$ 2-holda natijaning aniqliligi yuqoriroq.

Teorema 3. $u = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ $(x > 0)$ musbat ishorali taqribiy sonlar ko'paytmasining nisbiy xatosi ko'paytuvchilar nisbiy xatolarining yig'indisiga teng:

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u*}{x_i^*} \Delta(x_i^*),$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*).$$

Bo'linma $u = \dfrac{x_1}{x_2}$ $(x_1, x_2 > 0)$ uchun absolyut va nisbiy xatolar qiyidagi formulalardan topiladi:

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{x_2^{*2}} \left[x_2^* \, \Delta(x_1^*) + x_1^* \, \Delta(x_2^*) \right], \quad \delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*).$$

Teorema 4. O'nli sanoq sistemasida $x_1^*, ..., x_n^*$ (n<10) taqribiy sonlarning har birining ishonchli raqamlar soni k_0 dan kam bo'lmasa, u holda $u^* = x_1^* \cdot ... \cdot x_n^*$ ko'paytma eng kamida $k_0 - 2$ ta ishonchli raqamga ega bo'ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. "Xato" tushunchasiga ta'rif bering.
2. Xatoliklar turlarini sanang.
3. Usul xatosi deganda nimani tushunasiz?
4. Hisoblash xatoligi nima?
5. Yo'qotilmas xatoga ta'rif bering.
6. Har xil aniqlikdagi sonlarni qo'shish qoidasini keltiring.

7. Qiymatli, ishonchli, shubhali raqamlarni farqini ayting.

Misol va masalalar:

1. *e* sonini 4 ta ishonchli raqam bilan yozing va uning absolyut va nisbiy xatolarini aniqlang. Bunda $\omega = \frac{1}{2}$ deb oling.

2. Kesik konus asoslarining radiuslari $R = 33{,}85 \pm 0{,}005$ sm, $r = 14{,}68 \pm 0{,}001$ sm va yasovchisi $l = 12{,}34 \pm 0{,}003$ sm bo'lsa, uning to'la sirtini aniqlashda yo'l qo'yiladigan absolyut va nisbiy xatolarini aniqlang. $\omega = \frac{1}{2}$ deb oling.

3. Quyidagi ifodalarning absolyut va nisbiy xatolarini aniqlang: a) $x+y-z$; b) $\frac{yz}{x}$; v) xyz; g) $(x+h)^3-x^3$.

Bunda h=0,02 aniq son, $x = 0{,}2687 \pm 0{,}25 \cdot 10^{-4}$,

$y = 0{,}4127 \pm 0{,}41 \cdot 10^{-4}$, $\quad z = 0{,}4120 \pm 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ bo'lsin.

4. Quyidagi $f(x,y,\pi) = \frac{\sqrt{x+\pi} + \sqrt{y+\pi}}{xy+\pi^3}$ formulada x va y taqribiy sonlar $x = 0{,}2764 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\quad y = 0{,}8322 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

$f(x,y,\pi)$ funktsiyaning absolyut xatosi π sonini aniq deb olingandagi xatoga nisbatan 2 marta ortmasligi uchun π ni qanday aniqlikda olish kerak?

5. $x^2 - 4x + \pi = 0$ tenglamaning ildizlarini toping, natijada 4 ta qiymatli raqamni saqlang. Buning uchun ozod hadini nechta raqam bilan olish kerak?

6. Quyidagi funktsiyalarning absolyut va nisbiy xatolarini topish uchun formulalar keltirib chiqaring:

a) x^n; v) *cosx*; d) *tgx*;

b) a^x; g) *sinx*; e) *ctgx*.

7. Vakuumda 20 m balandlikdan tushayotgan jism uchun tezlanish $g \approx 9{,}8094$ m/c^2 5 ta ishonchli raqam bilan berilgan va balandlikni o'lchashdagi aniqlik 1 sm.ga teng bo'lsa, tushish vaqtini aniqlashdagi absolyut va nisbiy xatolarini toping.

8. Agar o'nli sanoq sistemasida $x_1,..., x_n$ $\quad (n \le 10)$ taqribiy sonlarni har birining ishonchli raqamlar soni k dan kam bo'lmasa, u holda $u = x_1 + ... + x_n$ yig'indida ishonchli raqamlar soni hech bo'lmaganda $k-1$ ta bo'ladi.

9. $x^2 - 6x + 2e = 0$ tenglamaning ildizlarini toping va yechimni 3 ta qiymatli raqam bilan oling.

10. Sharning radiusi $R = 33{,}85 \pm 0{,}005$ sm bo'lsa, uning hajmini aniqlashdagi absolyut va nisbiy xatolarni toping.

11. Barcha raqamlari ishonchli bo'lgan $a^*_1 = 25{,}3$ va $a^*_2 = 4{,}12$ taqribiy sonlarning ko'paytmasini toping.

12. Agar taqribiy sonning yozilishida bitta ishonchli raqami bo'lsa, uning nisbiy xatosi 10 % dan ortmasligini ko'rsating.

13. Taqribiy sonni uning barcha ishonchli raqamlarini saqlagan holda yozing:

a) 2566±3; b) 40203±0,01.

III BOB. KO'PHADLAR USTIDA AMALLAR

3.1. Masalaning qo'yilishi

Hisoblash amaliyotida ko'pincha biror funktsiyaning berilgan nuqtadagi qiymatini hisoblashga to'g'ri keladi. Bunda shuni nazarda tutish kerakki, matematik ekvivalent bo'lgan ifodalar ularning qiymatlarini hisoblash uchun zarur bo'lgan amallar soni ma'nosida hamma vaqt ham teng kuchli bo'lavermaydi. Masalan, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ayniyatning chap qismini hisoblashda 4 ta ko'paytirish amalini va 2 ta qo'shish amalini bajarish zarur. O'ng qismini hisoblash uchun esa bitta qo'shish va bitta ko'paytirish amalini bajarish kerak.

Funktsiyalarni qiymatlarini hisoblash odatda elementar arifmetik amallar ketma-ketligiga keltiriladi. Bu amallarni takrorlanuvchi sikllarga bo'lib, ularning sonini kamaytirish ma'quldir.

3.2. Bir noma'lumli ko'phadlar

Ta'rif 1. Agar $a_0 \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \quad (3.1)$$

ifoda **bir noma'lumli *n*-darajali ko'phad** deyiladi, bunda $a_0x^n, a_1x^{n-1}, \ldots, a_{n-1}x, a_n$ lar ko'phadning **hadlari,**

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ lar esa ko'phadning **koeffitsiyentlari** deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, $f(x)=7x^3+2x^2-3$ va $\varphi(x)=x^4-3x^3+2x^2+1$ ifodalar ko'phad, $h(x)=5x^3-5\sqrt{x}+2x^2-3$ va $g(x)=\frac{1}{x^5}-x^3+4x-9$ ifodalar ko'phad emas.

$a_0 \neq 0$ bo'lganda a_0x^n – had (3.1) ko'phadning **bosh hadi**, a_n esa **ozod hadi** deyiladi.

Ta'rif 2. Ikkita ko'phadning koeffitsiyentlari nolga teng bo'lgan hadlaridan boshqa barcha mos nomerli hadlari bir-biriga teng bo'lganda va faqat shundagina ular **o'zaro teng** deyiladi.

Misol. $f(x)=2x^5+x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+3$ va

$\varphi(x)=2x^5+x^4+3$ ko'phadlar teng $f(x)=\varphi(x)$.

Ta'rif 3. $f(x)$ ko'phad uchun $-f(x)=-a_0x^n-a_1x^{n-1}-\ldots-a_{n-1}x-a_n$ ko'phad **qarama-qarshi ko'phad** deyiladi.

3.3. Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish

Ma'lumki, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'rinishidagi funktsiya n butun musbat son bo'lganda, **ko'phad** yoki ***x* ning butun ratsional funktsiyasi,** n – soni

ko‘phadning darajasi deyiladi. Bu yerda $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ koeffitsiyentlar va x erkli o‘zgaruvchi haqiqiy yoki kompleks sonlardan iborat bo‘lishi mumkin.

Agar biror α element uchun $f(\alpha)=0$ tenglik bajarilsa, u holda α element $f(x)$ **ko’phadning ildizi** deyiladi.

Teorema 1 (Bezu teoremasi). $f(x)$ ko‘phadni $x-a$ ayirmaga bo‘lganda $f(a)$ ga teng qoldiq hosil bo‘ladi.

Haqiqatan, $f(x)$ ni $x-a$ ga bo‘lganda bo‘linmada darajasi $f(x)$ ning darajasidan bitta kam bo‘lgan $f_1(x)$ ko‘phad hosil bo‘lib, qoldiq o‘zgarmas $f(a)$ bo‘ladi:

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+f(a).$$

Natija: Agar a ko‘phadning ildizi, ya’ni $f(a)=0$ bo‘lsa, $f(x)$ ko‘phad $x-a$ ga qoldiqsiz bo‘linadi va quyidagi ko‘paytma shaklida yoziladi: $f(x)=(x-a)f_1(x).$

Misol 1. $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ ko‘phad $x-1$ ga qoldiqsiz bo‘linadi, demak, $f(1)=0$ bo‘ladi:

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

Teorema 2 (algebraning asosiy teoremasi). Har qanday butun ratsional $f(x)$ funktsiya eng kamida bitta haqiqiy yoki kompleks ildizga ega bo‘ladi.

Teorema 3. n – darajali har qanday ko‘phad $x-a$ shakldagi n ta chiziqli ko‘paytuvchiga va x^n oldidagi koeffitsiyentga teng ko‘paytuvchiga ajraladi.

Haqiqatan ham, Bezu teoremasiga ko’ra

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

ko’phadni $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$

deb yozish mumkin, bunda $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ sonlar ko‘phadning ildizlari bo‘ladi.

Misol 2. $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ ko‘phad $x=1,\ x=2,\ x=3$ bo‘lganda nolga aylanadi. Demak,

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Teorema 4. Agar $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko‘phad aynan nolga teng bo‘lsa, uning hamma koeffitsiyentlari nolga teng.

Teorema 5. Agar ikki ko‘phad bir-biriga aynan teng bo‘lsa, ko‘phadlardan birining koeffitsiyentlari ikkinchisining mos koeffitsiyentlariga tengdir.

Misol 3. Agar ax^3+bx^2+cx+d ko‘phad x^2-51x ko‘phadga aynan teng bo‘lsa, $a=0,\quad b=1,\quad c=-5,\quad d=0$ bo‘ladi.

3.3.1. Evklid algoritmi. Eng katta umumiy bo‘luvchi

Faraz qilaylik, $f(x)\neq 0$ bo‘lib, $f(x)$ ning darajasi $\varphi(x)\neq 0$ ko‘phadning darajasidan kichik emas. $f(x)$ ni $\varphi(x)$ ga bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan bo‘linma va qoldiqni mos ravishda $g_1(x)$ va $r_1(x)$ bilan belgilaymiz. Ma’lumki, $r_1(x)$ ning darajasi $\varphi(x)$ ning darajasidan kichikdir. Endi $\varphi(x)$ ni $r_1(x)$ ga bo‘lib, bo‘linma va qoldiqni $g_2(x)$ va $r_2(x)$ bilan belgilaymiz. $r_2(x)$ ning darajasi $r_1(x)$ ning darajasidan kichik ekanligini e’tiborga olib, $r_1(x)$ ni $r_2(x)$ ga bo‘lamiz va hosil bo‘lgan bo‘linma va qoldiqni $g_3(x)$ va $r_3(x)$ bilan belgilaymiz va h.k., har qoldiqni undan keyingi qoldiqqa bo‘lamiz. Natijada darajalari kamayib boruvchi $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$,… ko‘phadlar hosil bo‘ladi. Bu qoldiq ko‘phadlarning soni cheklidir, chunki ularning darajalari kamayib boruvchi butun sonlar ketma-ketligini hosil qiladi. Shu sababli yuqoridagi bo‘lish jarayoni ham chekli bo‘lib, shunday $r_k(x)$ qoldiqqa kelamizki, unga oldingi $r_{k-1}(x)$ qoldiq bo‘linadigan bo‘ladi. Natijada quyidagi tengliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$f(x) = \varphi(x)g_1(x) + r_1(x),$$
$$\varphi(x) = r_1(x)g_2(x) + r_2(x),$$
$$r_1(x) = r_2(x)g_3(x) + r_3(x), \quad (3.2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x)g_{k+1}(x).$$

Bu ketma-ket bolish jarayoniga **Evklid algoritmi** deyiladi.

Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar $g(x)$ ko‘phadga bo‘linsa, u holda $g(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning **umumiy bo‘luvchisi** deyiladi.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning bir nechta umumiy bo‘luvchilari bo‘lishi mumkin.

Agar $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lib, u bu ikkita ko‘phadning ixtiyoriy umumiy bo‘luvchisiga bo‘linsa, u holda $d(x)$ bo‘luvchiga $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning **eng katta umumiy bo‘luvchisi (EKUB)** deyiladi.

Misol. $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ va $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ kophadlar uchun quyidagi ko‘phadlarning har biri umumiy bo‘luvchi bo‘ladi:

$g_1(x) = x - 1,$ $g_2(x) = x + 1,$ $g_3(x) = x - 2,$ $g_4(x) = x^2 - 1,$ $g_5(x) = x^2 - 3x + 2$, $g_6(x) = x^2 - x - 2,$ $g_7(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Ushbu misolda $g_7(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ eng katta umumiy bo‘luvchi hisoblanadi.

Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi nolinchi darajali ko‘phad bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar **o‘zaro tub ko‘phadlar** deyiladi.

Teorema 1. $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi (3.2) tengliklardagi eng so‘nggi $r_k(x)$ qoldiq bo‘ladi.

Teorema 2. Agar $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa, $ad(x)$ ham $f(x)$ va $\varphi(x)$larning eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi.

3.3.2. Gorner sxemasi

Agar $x = \alpha$ son $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsa, Bezu teoremasiga ko‘ra $f(x)$ ko‘phadning $x = \alpha$ dagi qiymati $r = f(\alpha) = 0$ bo‘lar edi. Qoldiqli bo‘lish teoremasiga asosan $f(x) = (x - \alpha)\varphi(x) + r$ tenglikdagi $\varphi(x)$ ning koeffitsiyentlarini va r qoldiq hadni hisoblash usulini qarab chiqamiz. Buning uchun $\varphi(x)$ va r ni noma’lum koeffitsiyentlar yordamida quyidagicha yozib olamiz:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = (x-\alpha)(A_0x^{n-1} + A_1x^{n-2} + ... + A_{n-2}x + A_{n-1}) + r.$ Tengliklarning o‘ng tomonidagi qavslarni ochib, ikkita ko‘phadning tengligi ta’rifiga asosan, quyidagilarga ega bo‘lamiz: $a_0 = A_0, \quad a_1 = A_1 - \alpha A_0, ..., a_k = A_k - \alpha A_{k-1}, ...$

$$... a_{n-1} = A_{n-1} - \alpha A_{n-2}, \quad a_n = r - \alpha A_{n-1}.$$

Bu tengliklardan A_i, $i = \overline{1,n}$ larni va r ni quyidagicha aniqlaymiz: $A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1 + \alpha A_0, \quad A_2 = a_2 + \alpha A_1, ...$

$$..., A_k = a_k + \alpha A_{k-1}, ... \quad ..., \quad A_{n-1} = a_{n-1} + \alpha A_{n-2}, \quad r = a_n + \alpha A_{n-1}.$$

Bu hisoblashlarni quyidagi Gorner sxemasi deb ataluvchi sxema bilan ham bajarish mumkin:

				a	
				A	

Har bir A_k koeffitsiyentni topish uchun sxemada yuqorisidagi a_k ga A_k dan oldin turgan A_{k-1} ni α ga ko‘paytirib qo‘shish kerak. Agar $\varphi(x)$ ko‘phadni yana biror $x - \beta$ ikkihadga bo‘lish talab etilsa, bu sxemani pastga qarab davom ettirish mumkin.

Misol 1. $x^3 + 2x - 5$ uchhadni $x - 2$ ikkihadning darajalari bo‘yicha yozing.

Yechilishi: Quyidagi sxemani tuzib olamiz:

	1	0	2	-5
2	1	2	6	7
2	1	4	14	
2	1	6		
2	1			

Bu jadvalning birinchi satri $x^3 + 2x - 5 = (x-2)(x^2 + 2x + 6) + 7$ ni, ikkinchi satri esa $x^2 + 2x + 6 = (x-2)(x+4) + 14$ ni bildiradi. Bularga asosan, $x^3 + 2x - 5 = (x+4)(x-2)^2 + 14(x-2) + 7$

yoki $x + 4 = (x-2) + 6$ dan foydalansak,

$$x^3 + 2x - 5 = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 14(x-2) + 7$$

hosil bo‘ladi.

Misol 2. $x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 64x + 48$ ko‘phad uchun $x = 2$ necha karrali ildiz ekanligini aniqlang.

Yechilishi: Quyidagi sxemani tuzib olamiz:

	1	-7	12	16	-64	48
2	1	-5	2	20	-24	0
2	1	-3	-4	12	0	
2	1	-1	-6	0		

2	1	1	-
			4

Jadvaldn ko‘rinadiki, $x = 2$ uch karrali ildiz bo‘lib, berilgan ko‘phadni

$$x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 64x + 48 = (x-2)^2(x^2 - x - 6)$$

shaklda yozish mumkin.

3.3. Ko‘phadni karrali ko‘paytuvchilarga ajratish

Agar $f(x)$ ko‘phad $\varphi^{\alpha}(x)$ ko‘phadga bo‘linib, lekin $\varphi^{\alpha+1}(x)$ ko‘phadga bo‘linmasa, u holda $\varphi(x)$ ko‘phad $f(x)$ ko’phadning **karrali ko‘paytuvchisi** deyiladi:

$$f(x) = \varphi^{\alpha}(x) \cdot g(x).$$

Misol 1. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ ko‘phad uchun $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ ko‘phad ikki karrali ko‘paytuvchidir, chunki $f(x)$ ko‘phad $(x^2 + x + 1)^2$ ga bo‘linadi, lekin $(x^2 + x + 1)^3$ ga bo‘linmaydi. Demak, $f(x) = (x^2 + x + 1)^2(x-1)^2$ bo‘ladi.

Misol 2. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2$ uchun $\varphi(x) = x^3 + 2x - 1$ bir karrali ko‘paytuvchi, chunki $f(x) = (x^3 + 2x - 1)(x + 2).$

Misol 3. $f(x) = 5(x^2 - 4)^4(2x^3 + x - 1)^3(x+1)(x^4 - 3x^3 + 1)^5$ ko‘phad uchun $\varphi_1(x) = (x^2 - 4)^4$ ko‘phad 4 karrali ko‘paytuvchi, $\varphi_2(x) = (2x^3 + x - 1)^3$ ko‘phad 3 karrali ko‘paytuvchi, $\varphi_3(x) = (x+1)$ ko‘phad 1 karrali ko‘paytuvchi, $\varphi_4(x) = (x^4 - 3x^3 + 1)^5$ ko‘phad 5 karrali ko‘paytuvchi ekanligi ravshan.

Misol 4. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ ko‘phadning karrali ko‘paytuvchilarini toping.

Yechilishi: Avval $f(x)$ dan hosila olamiz:

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5.$

So‘ngra Evklid algoritmi yordamida $f(x)$ va $f'(x)$ larning EKUB ini topamiz: EKUB$\left(f(x), f'(x)\right) = d_1(x) = x^2 + 2x + 1$

ga teng bo‘ladi. $d_1(x)$ va $d_1'(x) = 2x + 2$ ning EKUB ini topamiz: EKUB$\left(d_1(x), d_1'(x)\right) = 2x + 2 = d_2(x)$.

Nihoyat, $d_2(x)$ va $d_2'(x)$ larning EKUB ini topamiz:

$$\left(d_2(x), d_2'(x)\right) = 2.$$

Bulardan kelib chiqib, quyidagini hosil qilish mumkin:

$$f(x) = (x-2)(x+1)^2.$$

Teorema. Agar koeffitsiyentlari haqiqiy bo‘lgan $f(x)$ ko‘phad $a + ib$ kompleks ildizga ega bo‘lsa, shu ko‘phad $a - ib$ qo‘shma kompleks ildizga ham ega bo‘ladi.

Nazorat uchun savollar:

1.Ko‘phad ta’rifini keltiring.
2.Bezu teoremasi asoslab bering.
3.Algebraning asosiy teoremasi nima haqida?

4.Evklid algoritmini tushuntirib bering.
5.Eng katta umumiy bo‘luvchi qanday topiladi?
6. Gorner sxemasini tushuntirib bering.

Misol va masalalar:

1. Quyidagi ko‘phadlarning EKUB ini toping.
a) $f(x)=x^4-1$ va $g(x)=2x^3+x^2-2x-1$;
b) $f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$ va $\varphi(x)=x^4-5x^2+4$;
v) $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3$ va $\varphi(x)=2x^3-5x^2-4x+3$;
g) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ va $\varphi(x)=3x^3+x^2+3x-1$;
2. Quyidagi ko‘phadlarning EKUB ini toping.
a) $f(x)=x^5-x^2-x+1$ va $\varphi(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3;$
b) $f(x)=x^5-7x^4+12x^3+16x^2-64x+48$ va $\varphi(x)=x^2-x-6;$
v) $f(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1$ va $\varphi(x)=x^2+x+1;$
g) $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+3x-2$ va $\varphi(x)=x^3+2x-1;$
d) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$ va $\varphi(x)=x+1;$
3. Quyidagi ko‘phadlarning ildizlarini Gorner sxemasi yordamida toping:
a) $f(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1;$
b) $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+3x-2;$
4. Quyidagi ko‘phadlarni ko‘paytuvchilarga ajrating:
a) $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$;
b) $f(x)=x^5-7x^4+12x^3+16x^2-64x+48$;
v) $f(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1$;
g) $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+3x-2$;
d) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$.

IV BOB. FUNKTSIYALARNI DARAJALI QATORLARGA YOYISH

4.1. Masalaning qo'yilishi

Zamonaviy dasturlash tillarida funktsiyalar juda keng qo‘llaniladi. Ular qism dasturlarni alohida ajratib hisoblash imkoniyatini beradi. Ba’zi dasturlash tillarida birmuncha ko‘p uchraydigan *sinx, lnx,* $|x|$, e^x, $\sqrt{x}$ kabi transtsendent funktsiyalar deb ataluvchi funktsiyalar uchun maxsus bazalar mavjud. Bu funktsiyalarning ixtiyoriy x ga mos aniq qiymatini hisoblash uchun chekli amallar ketma-ketligini ko‘rsatib bo‘lmaydi. Shuningdek, har doim ham bu funktsiyalarning qiymati ratsional son chiqavermaydi. Demak, ularning qiymatini hisoblash uchun biror usul, qoida yaratish zarurati paydo bo‘ladi.

4.2. Darajali qatorning yig‘indisi

Oliy matematika kursidan ma’lumki, istalgan sonli qator yo yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (4.1)$$

sonli **qator yaqinlashuvchi** bo‘lsa, u holda hadlarining yig‘indisi qandaydir chekli songa teng bo‘ladi:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S. \quad (4.2)$$

$-1 \le x \le 1$ oraliqda yaqinlashuvchi funktsional qatorni qaraylik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (4.3)$$

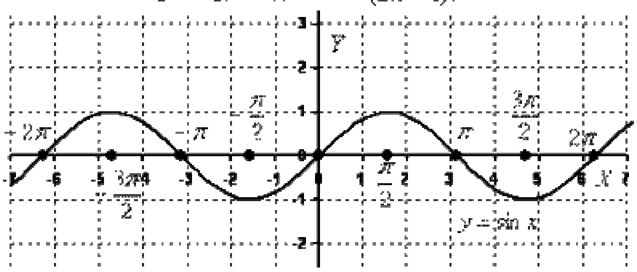
Sonli qator songa yaqinlashadi, funktsional qator esa funktsiyaga yaqinlashadi. Bu funktsional qatorni yig‘indisi uning yaqinlashish sohasida biror $f(x)$ funktsiya bo‘lsin:

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = f(x) \quad (4.4)$$

$-1 \le x \le 1$ oraliqdan tashqarida $f(x)$ funktsiya uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ darajali qator berilgan. Uning yaqinlashish oralig’i $-\infty \le x \le \infty$ bo‘lib, bu funktsiyaning yoyilmasi va grafigi quyidagicha:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + ...$$



Agar $y = \sin x$ funktsiya grafigini chizib ko‘rsak, u ham xuddi shu sinusoidani chizadi. Bundan berilgan funktsional qatorning $\sin x$ funktsiyaga yaqinlashishi kelib chiqadi. Dalamber shartini qo‘llab, qatorning $\forall x$ uchun yaqinlashuvchi ekanini aniqlash mumkin, ya’ni qator har doim yaqinlashuvchi.Agar qatorning oldingi uchta hadini olib,

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

grafik yasalsa, uni sinusoida deb atash qiyin. Birinchi 100 ta hadni olib, grafigi yasalganda esa:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .. - \frac{x^{199}}{199!}$$

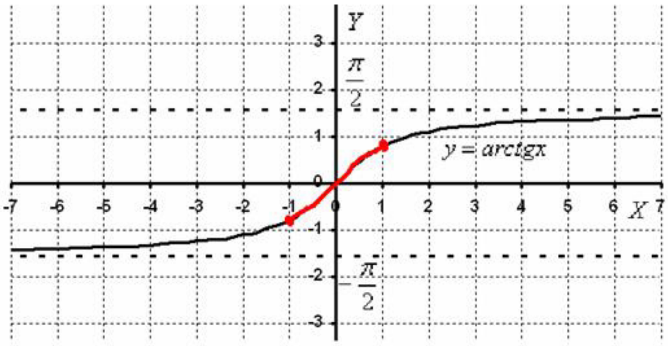
u sinusoidaga o‘xshaydi. Demak, qator hadlari qancha ko‘p bo‘lsa, chizma shuncha aniq chiqadi. Boshqacha aytganda, qator barcha x larda $y = \sin x$ funktsiyaga yaqinlashadi:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + ...$$

Misol 2. $-1 \le x \le 1$ oraliqda yaqinlashuvchi funktsional qator berilgan bo‘lsin:

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Bu qatorning grafigi faqat [-1;1] oraliqda, ya’ni qatorning yaqinlashish oralig‘idagina $y = arctgx$ funktsiya grafigi bilan ustma-ust tushib, oraliqdan tashqarida $y = arctgx$ funktsiya cheksizlikka ketadi:



Teylor formulasi:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + .. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ..$$

Makloren formulasi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Ba’zi bir funktsiyalarning Teylor va Makloren qatorlariga yoyilishini ko‘raylik.

Misol 3. $y = e^x$ elementar funktsiyani x ning darajalari bo‘yicha Makloren qatoriga yoying.

Yechilishi: Buning uchun funktsiyaning birinchi, ikkinchi va hojazo hosilalarni topib, $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblab chiqamiz. Topilgan qiymatlarni Makloren formulasiga asosan joylashtiramiz:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (e^x)' = e^x \quad f''(0) = e^0 = 1$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = (e^x)' = e^x \quad f'''(0) = e^0 = 1$$

Bundan ko‘rinadiki,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = .. = f^{(n)}(0) = .. = 1$$

Natijada quyidagi yoyilmani hosil qilamiz:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + .. + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Misol 4. $f(x) = x\cos 3x$ funktsiyani x ning darajalari bo‘yicha Makloren qatoriga yoying va yaqinlashish sohasini toping.

Yechilishi: Avvalo *cosx* funktsiya uchun yoyilma tuzamiz:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Bu qatorning yaqinlashish sohasi: $-\infty \le \alpha \le \infty$. Bizning holda $\alpha = 3x$ bo‘lgani uchun

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Bundan

$$\cos 3x = 1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Tenglik hosil bo‘ladi. Tenglikning har ikki tomonini x ga ko‘paytirib,

$$x\cos 3x = x \cdot \left(1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + ...\right)$$

Izlangan natijani olamiz:

$$y = x\cos 3x = x - \frac{3^2 x^3}{2!} + \frac{3^4 x^5}{4!} - \frac{3^6 x^7}{6!} + ... + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} + ..$$

Endi yaqinlashish sohasini topish kerak: kosinus funktsiyaning yoyilmasi barcha α larda yaqinlashuvchi, demak, $\alpha = 3x$ larda ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Biroq *cosx* ni x ga ko‘paytirgandan keyin qator uzoqlashuvchi bo‘lib qoladi.

Misol 5. $f(x) = \ln(1 - x^2)$ funktsiyani x ning darajalari bo‘yicha Makloren qatoriga yoying va yaqinlashish sohasini toping.

Yechilishi: Makloren formulalaridan quyidagi qator ma’lum:

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n} + ...$$

Bu qatorning yaqinlashish sohasi: $-1 < \alpha < 1$, oraliq oxirlarida qator yaqinlashishini alohida tekshirib ko‘rish kerak bo‘ladi. Funktsiyani formulaga o‘xshash ko’rinishda yozib olamiz:

$$f(x) = \ln(1 - x^2) = \ln(1 + (-x^2))$$

Bunda $\alpha = -x^2$ va

$$\ln(1 - x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{(-x^2)^n}{n} + ...$$

Demak, $\ln(1 - x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - ... - \frac{x^{2n}}{n} - ...$

Endi yaqinlashish sohasini tekshiramiz. Dalamber alomatini qo‘llab, qatorning $-1 < x < 1$ da yaqinlashuvchi ekanini, oraliq chetlarida esa uzoqlashuvchi ekanini aniqlaymiz.

Misol 6. Funktsiyaning x ning darajalari bo‘yicha Makloren qatoriga yoying va yaqinlashish sohasini toping:

$$f(x) = \frac{6x}{2 - 3x}$$

Yechilishi: Makloren qatorlari jadvalidan berilgan funktsiyaga yaqin qatorni topamiz: $\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+...+\alpha^n...$

Berilgan funktsiyani formulaga o‘xshatish uchun kasrning suratida 1 bo‘lishi kerak: $f(x)=6x\cdot\frac{1}{2-3x}$ so‘ngra maxrajda $1-\alpha$ ga o‘xshash ifodani hosil qilamiz:

$$f(x)=6x\cdot\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}x\right)} \quad f(x)=3x\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}$$

Bizning misolda $\alpha=\frac{3}{2}x$ bo‘lgani uchun:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=1+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^3+...+\left(\frac{3}{2}x\right)^n+...=$$

$$=1+\frac{3}{2}x+\frac{3^2x^2}{2^2}+\frac{3^3x^3}{2^3}+...+\frac{3^nx^n}{2^n}+...$$

Natijada izlangan qator:

$$f(x)=\frac{6x}{2-3x}=3x\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=3x\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3^2x^2}{2^2}+\frac{3^3x^3}{2^3}+...+\frac{3^nx^n}{2^n}+..\right)=$$

$$=3x+\frac{3^2x^2}{2}+\frac{3^3x^3}{2^2}+\frac{3^4x^4}{2^3}+...+\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}+...$$

Dalamber alomatini qo‘llamasdan, mos formulaning $-1<\alpha<1$ da yaqinlashuvchi ekanini hisobga olib,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}$$

qatorning $\alpha=\frac{3}{2}x$ bo‘lgani uchun $-1<\frac{3}{2}x<1$ uchu tekshiramiz. Demak, qatorning $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ yaqinlashish oralig‘i topildi. Endi oraliq oxirlarida qator o‘zini qanday tutishini ko‘rib chiqsak:

$$x=-\frac{2}{3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{2^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

$$x=\frac{2}{3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{2^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}1^n$$

Demak, oraliq chetlarida qator uzoqlashuvchi.

Nazorat uchun savollar:

1. Yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) qatorga ta’rif bering.
2. Makloren qatori deganda nimani tushunasiz?
3. Teylor va Makloren qatorlari farqini ayting.
4. Qator yaqinlashuvchiligining Dalamber alomati?
5. Qator yaqinlashuvchiligining Koshi alomati qanday?

Misol va masalalar:

Quyidagi funktsiyalarni x ning darajalari bo‘yicha Makloren qatoriga yoying va yaqinlashish sohasini toping.

1. $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$ 6. $f(x)=\frac{1}{1+3x^3}$

2. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 7. $f(x)=\sin^2 x$

3. $f(x)=e^{-3x}$ 8. $f(x)=\frac{x}{5}\sin 3x$

4. $f(x)=\sin(x^2)$ 9. $f(x)=\ln(1-2x^2)$

5. $f(x)=\frac{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$ 10. $f(x)=\frac{x}{3}\cos 5x$

V BOB. ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

5.1. Masalaning qo‘yilishi

Nochiziqli tenglamalar tuzilishiga qarab ikki xil bo‘ladi:

1. Algebraik tenglamalar – algebraik ko‘phadlardan iborat tenglamalar;
2. Transendent tenglamalar – trigonometrik, ko‘rsatkichli, logarifmik va boshqa xil funktsiyalardan tashkil topgan tenglamalar.

Barcha amaliy masalalar mana shu ikki xildagi tenglamalar yoki tenglamalar sistemalari ko‘rinishiga keltirib yechiladi. Ma’lumki, darajasi to‘rtdan yuqori bo‘lgan tenglamalarni yechishning formulalari mavjud emas. Shuning uchun bunday tenglamalarni yechishda taqribiy usullardan foydalaniladi. Algebraik va transtsendent tenglamalarni to‘g‘ridan-to‘g‘-ri yoki iteratsion, ya’ni sonli usullar yordamida ketma-ket yaqinlashish yo‘li bilan yechish mumkin.

5.2. Ildizlarni ajratish

5.2.1 Ildizlarni grafik usulda ajratish usuli

Bir noma’lumli har qanday tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$f(x) = 0.$ (5.1)

$f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin.

(5.1) – tenglamaning **ildizi (yechimi)** deb, shunday ξ $[\xi,b]$ soniga aytiladiki, uni tenglamaga qo‘yganda ayniyat hosil bo‘ladi.

(5.1) tenglamaning haqiqiy ildizlari sonini va ildiziga yaqin qiymatni grafik usulda aniqlash mumkin. Bunda $f(x) = 0$ tenglama yechimi $y = f(x)$ funktsiyaning *Ox* o‘qi bilan kesishish nuqtalari bo‘ladi. Agar $y = f(x)$ funktsiya grafigini yasash qiyinchilik tug‘dirsa, u holda unga ekvivalent bo‘lgan ko‘rinishga o‘tkaziladi:

$f_1(x) = f_2(x)$ (5.2)

hosil bo‘lgan tenglamadan $y_1 = f_1(x)$ va $y_2 = f_2(x)$ funktsiyalar hosil qilinib, ularning grafiklari yasaladi.

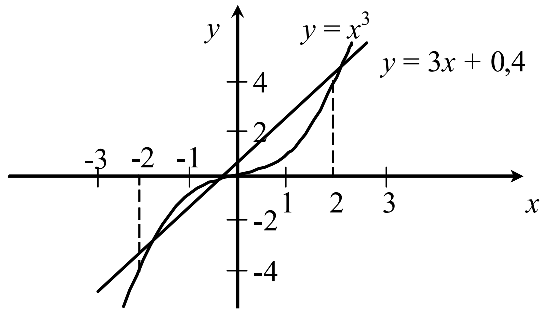
Misol 1. $x^3 – 3x – 0{,}4 = 0$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Berilgan tenglamani (5.2) formuladan $x^3 = 3x+0{,}4$ ko‘rinishda yozib olamiz va $y_1= x^3$ hamda $y_2 = 3x + 0{,}4$ funktsiyalarning grafiklarini yasaymiz (Rasm 5.1.).

Chizmadan ko‘rinadiki, berilgan tenglamaning 3 ta ildizi bor:

$$c_1 \in [–2, –1];\ c_2 \in [–1, 0];\ c_3 \in [1, 2].$$

Tenglama ildizlarini grafik usulda ajratish uchun grafik aniq chizilgan bo‘lishi kerak.



Rasm. 5.1

Misol 2. $x^3 - 4x - 1 = 0$ tenglama $\xi = 0{,}001$ aniqlikda yechilsin. Quyidagi jadvalni tuzamiz:

X	-1	0	1	2	2,1	2,2
f(x) ning ishorasi	+	–	–	–	–	+

Jadvaldan ko‘rinadiki, [–1;0], [2.1;2.2] kesmalarda taqribiy yechim mavjud. Biz uchun qulay kesma [2.1;2.2]. Bu oraliqda $f(2.1)= -1{,}39<0$ va $f(2.2)= 0{,}85>0$.

Bizda a=2.1; b=2.2 bundan $d=b-a=0.01>\xi$. Demak hisoblashni davom ettirish kerak.

$f(2.11)= -0{,}046<0$ va $f(2.12)= 0{,}046>0$.

Bu yerdan a=2.11; b=2.12 $d= b-a=0.01> \xi$.

Hisobni yana davom ettiramiz.

a=2.114; b =2.115; $d = b - a = 2.115–2.114 = 0.001 =\xi$.

Qo‘yilgan maqsadga erishdik, ya’ni kesmani uzunligi d avvaldan berilgan aniqlik ξ=0.001 dan katta emas. Bu misolda izlanayotgan taqribiy yechim “ξ” quyidagi oraliqda bo‘ladi: 2.114 <ξ< 2.115 , ya’ni 2.114 va 2.115 larni taqribiy yechim tarzida olish mumkin.

5.2.2. Ildizlarni analitik usulda ajratish

$f(x)=0$ tenglama yechimi x* ni analitik usulda ajratish deganda boshqa ildizlarni ichiga olmagan x* nuqta atrofini ko‘rsatish tushuniladi.

Agar f(x) funktsiya [a, b] oraliqning chetlarida turli xil ishoraga ega bo‘lsa, ya’ni f(a)·f(b)< 0, u holda bu oraliqning ichida hech bo‘lmaganda f(x)= 0 tenglamaning bitta ildizi mavjud bo‘ladi (rasm 5.2). Agar funktsiya f '(x) hosilasi [a, b] ichida o‘z ishorasini saqlasa, bu x* ildiz yagona bo‘ladi (rasm 5.2 a).

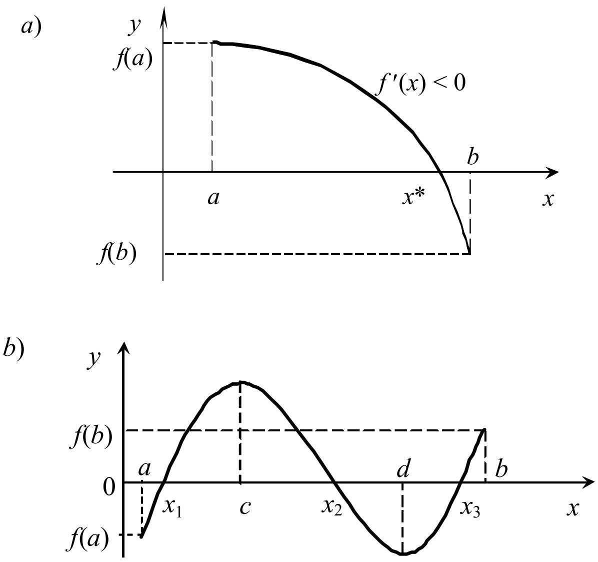
Amaliyotda $f(x)$=0 tenglamaning [a,b] oraliqdagi ildizlarini ajratish $f(a)\cdot f(b)<$ 0 shartni tekshirishdan boshlanadi. Agar bu shart bajarilsa, u holda [a,b] oraliqda ildiz mavjud deb qaralib, keyingi bosqich bu ildizning yagona yoki yagona emasligi aniqlanadi.

Demak, $f(x)=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlarini aniqlash uchun quyidagi algoritm asosida ish yuritiladi:

1) $f(x)$ funktsiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari $f'(x)$ hosila yordamida topiladi;

2) statsionar nuqtalari va oraliq chetlaridagi nuqtalar uchun $f(x)$ funktsiyaning ishoralari jadvali tuziladi;

3) $f(x)$ funktsiyaning qarama-qarshi ishora qabul qiluvchi oraliqlari aniqlanadi. Bu oraliqlarda faqat bitta ildiz yotadi.



Rasm. 5.2

5.2 *b*-rasmda funktsiyaning monotonlik oraliqlari (a,c), (c,d), (d,b) keltirilgan. Mazkur misolda $f(x) = 0$ tenglamaning $[a,b]$ kesmadagi ildizlari x_1, x_2 va x_3 hisoblanadi.

5.2.3. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli

Artilleriyada otib sinab ko‘rish usuli mavjud: Bu usulda bitta snaryadni mo‘ljalga yetkazmasdan, ikkinchisini - mo‘ljaldan oshirib otiladi, bunda nishon **“vilka” (ayri osti)ga olindi** deyiladi. Navbatdagi snaryadni avvalgi ikkitasi orasidagi o‘rtacha qiymatiga teng bo‘lgan nishon ostida otib, u mo‘ljalga yetmay qoldimi, yoki mo‘ljaldan o‘tib ketdimi, shunga qaraladi. Natijada vilka torayadi. Nishonni bunday sozlash snaryadlar nishonga tekkuncha davom ettiriladi.

Uzluksiz funktsiya ildizi haqidagi teoremaning isboti “artilleriya vilkasi” g‘oyasiga asoslangan:

Teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda shu kesmada funktsiyaning hech bo‘lmaganda bitta ildizi mavjud.

Ichma-ich joylashgan $[a_n, b_n]$ kesmalar ketma-ketligi quriladi, ularning uchlari monoton ketma-ketliklarni tashkil etadi, ulardan bittasi $\{a_n\}$ ("mo'ljalga yetmaganlar") quyidan $a_n \le c$, ikkinchisi $\{b_n\}$ ("mo'ljaldan o'tib ketganlar") yuqoridan $b_n \ge c$ biror $x = c$ nuqtaga yaqinlashadi. Teoremaning shartlari bajarilganda $x = c$ limit nuqta $f(x) = 0$ tenglamaning ildizi ekani isbot etiladi. Natijada bu tenglamaning $[a, b]$ kesmada yechimi mavjud ekani kelib chiqadi. Izlangan $x = c$ ildizni o'z ichiga olgan ichma-ich qo'yilgan kesmalar ketma-ketligini qurish jarayoni shu ildizni ixtiyoriy aniqlikda taqribiy hisoblash imkonini beradi (ichki va tashqi chizilgan muntazam ko'pburchaklarninig p_n va q_n perimertlari bo'yicha π sonini hisoblashga o'xshash).

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmaning chap uchida manfiy, o'ng uchida musbat $f(a) < 0, \quad f(b) > 0$ bo'lsin. $[a, b]$ kesmaning o'rta nuqtasini $\xi = \frac{a+b}{2}$ olamiz va unda $f(x)$ funktsiyaning qiymatini hisoblaymiz.

Agar $f(\xi) = 0$ bo'lsa, teoremaning tasdig'i isbotlangan bo'ladi, ya'ni $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funktsiya nolga aylanadigan $c = \xi$ nuqta topilgan bo'ladi.

Agar $f(\xi) \ne 0$ bo'lsa, ikkita $[a, \xi]$ va $[\xi, b]$ kesmalarni qaraymiz, ularning uchlarida $f(x)$ funktsiya turli ishorali qiymatlarga ega bo'lgan bittasini tanlaymiz. Tanlangan kesmani $[a_1, b_1]$ deb belgilaymiz, unda $f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0$. So'ngra $[a_1, b_1]$ kesmaning o'rta $\xi_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ nuqtasini olamiz va unda $f(x)$ funktsiyaning qiymatini hisoblaymiz.

Agar $f(\xi_1) = 0$ bo'lsa, teoremaning isboti tugagan bo'ladi, $f(\xi_1) \ne 0$ bo'lganda esa, yana ikkita $[a_1, \xi_1]$ va $[\xi_1, b_1]$ kesmani qaraymiz, ularning uchlarida $f(x)$ funktsiya turli ishorali qiymatlarga ega bo'lganini tanlaymiz. Tanlangan kesmani $[a_2, b_2]$ deb belgilaymiz, unda $f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0$. Shu jarayonni cheksiz davom ettirib, $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, … ketma-ketlikni hosil qilamiz. Natijada $a_n \le c_1 \le c_2 \le b_n$ tengsizlikdan $c_2 - c_1 = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ kelib chiqadi. Bu $c_1 = c_2 = c$ tenglamaning ildizi bo'lib, uni a_n son kami bilan, b_n son ortig'i bilan $\Delta_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ kesmaning uzunligidan ortmaydigan xatolik bilan aniqlaydi. n ortib borishi bilan xatolik maxraji $q = \frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya qonuni bo'yicha nolga intiladi. Agar talab etilgan aniqlik $\varepsilon > 0$ berilgan bo'lsa, unga erishish uchun $N > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$ shartni qanoatlantiradigan N ta qadam bajarish yetarli.

Natijada quyidagi algoritm hosil bo'ladi:

1) $y_0 = f(x_0)$ hisoblansin;

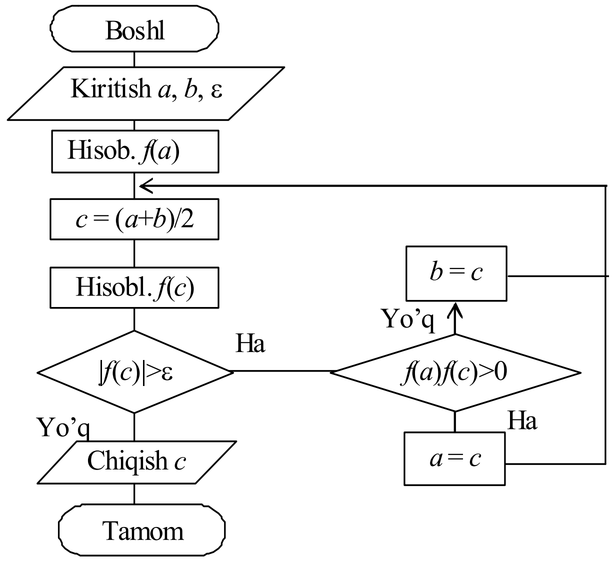
2) $x_2 = (x_0 + x_1)/2, \; y_2 = f(x_2)$ hisoblansin;

3) agar $y_0 \cdot y_2 > 0$ bo'lsa, u holda $x_0 = x_2$, aksincha $x_1 = x_2$ bo'lsin;

4) agar $x_1 - x_0 > \varepsilon$ bo'lsa, u holda hisoblash 1–dan boshlab takrorlansin;

5) $x^* = (x_0 + x_1)/2$ hisoblansin.

Yuqoridagi algoritmni uning blok-sxemasida yaqqol ko‘rish mumkin:



Rasm 5.3. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli algoritmining blok-sxemasi.

Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulining C++ dasturi:

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <conio.h>
using namespace std;
int main()
{
 int i,j;
 float a,b,e,x,fx,fa;
 cout <<"Chap chegara a=";
 cin >>a;
 cout << "O‘ng chegara b=";
 cin >>b;
 cout <<"Xatolik e=";
 cin >>e;
 while (fabs(b-a)>e)
 {
 x=(a+b)/2;
 fx=pow(x,3)-10.1*pow(x,2)-2*x+20.2;
 while(fx!=0)
 {
 fa=pow(a,3)-10.1*pow(a,2)-2*a+20.2;
 if(fa*fx<0) b=x;
 else a=x;
 }
 }
```

```
cout <<x;
cout <<fx;
//system("pause");
return 0;
}
```

Misol. $x=\cos x$ tenglamani oraliqni ikkiga bo‘lish usulida yeching.

Yechilishi: Buning uchun tenglamani $f(x)=x-\cos x=0$ ko’rinishida yozib olamiz. $f(x)=x-\cos x$ funktsiya [0;1] kesmada uzluksiz, uning uchlarida turli ishorali $f(0)=-1<0,\quad f(1)=1-\cos 1>0$ qiymatlarga ega. Bundan [0;1] kesmada tenglamaning hech bo’lmaganda bitta ildizi mavjudligi kelib chiqadi. Berilgan [0;1] kesmani 12 marta teng ikkiga bo’lib, hisoblangan natijalarni quyidagi jadvalga yozamiz:

n	a_n	b_n	$\xi=\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(\xi_n)$
0	0	1	0,5	–0,377582
1	0,5	1	0,75	+0,018311
2	0,5	0,75	0,625	–0,185963
3	0,625	0,75	0,6875	–0,085335
4	0,6875	0,75	0,71875	–0,033879
5	0,71875	0,75	0,734375	–0,007875
6	0,734375	0,75	0,7421875	+0,005196
7	0,734375	0,7421875	0,73828125	–0,001345
8	0,73828125	0,7421875	0,740234375	+0,001924
9	0,73828125	0,740234375	0,7392578125	+0,000289
10	0,73828125	0,7392578125	0,73876953125	–0,000528
11	0,73876953125	0,7392578125	0,739013671875	–0,00012
12	0,739013671875	0,7392578125		

Natijada $x=c$ ildiz $\varepsilon<\left(\frac{1}{2}\right)^{12}<0{,}00025$ xatolik bilan aniqlaydi. Shunday qilib, izlangan c ildiz [0,739013671875; 0,7392578125] kesmaga tegishli bo‘lib, aniqlik chegarasi bo’yicha yaxlitlansa, $0{,}73901<c<0{,}73926$ ga ega bo‘lamiz.

5.2.4 Iteratsiya usuli

Tenglamalarni yechishning yana bir sonli usuli– iteratsiya usulidir. Tenglamani

$x = f(x)$ (5.3)

ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lsin. $f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasidan ixtiyoriy x_0 qiymatni olamiz va ushbu

$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0,1,2,...$ (5.4)

rekurrent formulalar bilan sonlarning $\{x_n\}$ ketma-ketligini quramiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlik **iteratsion ketma-ketlik** deyiladi.

Uni o‘rganishda ikkita savol ko‘ndalang turadi:

1) x_n sonlarni hisoblash jarayonini cheksiz davom ettirish mumkinmi, ya’ni x_n sonlar $f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘ladimi ?

2) agar (5.4) iteratsion jarayon cheksiz bo‘lsa, x_n sonlar $n \to \infty$ da o‘zini qanday tutadi ?

Bu savollarni o‘rganish shuni ko‘rsatadiki, $f(x)$ funktsiyaga ma’lum shartlar qo‘yilganda iteratsion jarayon chekli bo‘ladi va (5.3) tenglama ildiziga yaqinlashadi:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c, \quad c = f(c)$ (5.5)

Ammo bu tekshirishni amalga oshirish uchun yangi tushuncha kiritish kerak. Agar shunday o‘zgarmas son α mavjud bo‘lsaki, $[a,b]$ kesmadan olingan ixtiyoriy x_1, x_2 lar uchun

$|f(x_1) - f(x_2)| \le \alpha |x_1 - x_2|$ (5.6)

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada **Lipshits shartini** qanoatlantiradi deyiladi. Bu holda α miqdor **Lipshits o‘zgarmasi** deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantirsa, u shu kesmada uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan, x_0 kesmaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Shu nuqtada $f(x)$ funktsiyaning $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmasini ko‘ramiz. Va uni (5.6) tengsizlik yordamida baholaymiz: $|\Delta f| \le \alpha |\Delta x|$. Shunday qilib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0,$ bu $f(x)$ funktsiyaning uzluksizligini anglatadi.

Misol 1. $x = \cos x$ tenglamani iteratsiya usulida yeching.

Yechilishi. Bu yerda $f(x)$ funktsiya o‘rnida $\cos x$ bo‘lib, u differentsiallanuvchi, hosilasi $-\sin x$ ga teng bo‘lgan funktsiya. [0;1] kesmada $|f'(x)| = \sin x \le \sin 1$, ya’ni $\alpha = \sin 1 < 1$ o‘zgarmas bilan Lipshits shartini qanoatlantiradi.

Berilgan tenglamaga $x_{n+1} = \cos x_n$ ko‘rinishda rekurrent formula bo‘yicha hisoblashlar bajaramiz. Nolinchi yaqinlashish sifatida kesmaning o‘rtasi $x_0 = 0{,}5$ olingan.

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	0,5	0,877 582 561 890
1	0,639 012 494 166	0,802 685 100 681

2	0,694 778 026 789	0,768 195 831 281
3	0,719 165 445 942	0,752 355 759 420
4	0,730 081 063 138	0,745 120 341 349
5	0,735 006 309 016	0,741 826 522 642
6	0,737 235 725 443	0,740 329 651 877
7	0,738 246 238 333	0,739 649 062 768
8	0,738 704 539 357	0,739 341 452 279
9	0,738 912 449 332	0,739 201 444 135

Iteratsion ketma-ketlikni tahlil qilish qulay bo‘lishi uchun har bir satrda ikkitadan hadlar joylashtirilgan. Natijada juft va toq nomerli hadlardan tuzilgan ustunlar hosil bo‘ladi. Ularni o‘zaro taqqoslab, juft hadlar toq hadlardan kichik ekanini ko‘ramiz, ya’ni iteratsion ketma-ketlik goh yuqoriga, goh pastga “sakraydi”. Nomerning ortib borishi bilan juft hadlar o‘sadi, toq hadlar kamayadi, bu bilan ular bir-biriga yaqinlashadi. Ketma-ketlikning bunday holati $x=\cos x$ tenglamaning ildizi juft va toq iteratsiyalar orasida yotishini anglatadi; juft iteratsiyalar ildizning qiymatini kami bilan, toq iteratsiyalar esa ko‘pi bilan aniqlaydi. Bu ixtiyoriy sondagi iteratsiyalardan so‘ng erishilgan aniqlikni tekshirish imkonini beradi, ya’ni xatolik oxirgi hisoblangan toq va juft hadlar ayirmasidan ortiq bo‘lmaydi.

Misolda jarayon 19-iteratsiyada to‘xtatilgan, c ildiz uchun ikki tomonlama tengsizlikni yozish mumkin:

$$0{,}738912449332 = x_{18} < c < x_{19} = 0{,}739201444135$$

Ya’ni iteratsion ketma-ketlikning x_{18} va x_{19} hadlari c ni xatoligi $\varepsilon < \Delta_{19} = x_{19} - x_{18} < 0{,}0003$ ayirmadan katta bo‘lmagan ham kami bilan, ham ko‘pi bilan aniqlikda topishga yordam beradi.

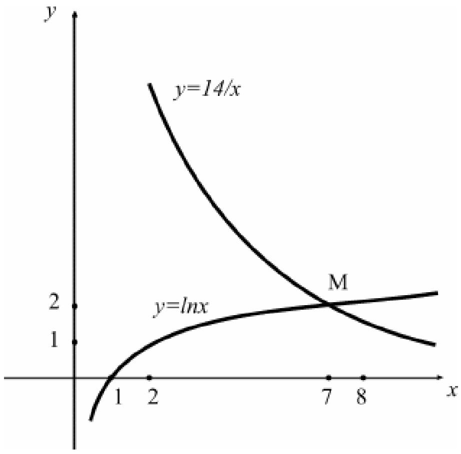
Misol 2. $x\cdot\ln x - 14 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlarini 0,01 aniqlikda iteratsiya usuli bilan toping.

Yechilishi: Tenglamani $\ln x = \dfrac{14}{x}$ ko‘rinishda yozib olamiz, $y=\ln x$ va $y=\dfrac{14}{x}, (x\neq 0)$ funktsiyalarning grafiklarini chizamiz (rasm 5.3). Chizmadan ko‘rinadiki, tenglamaning (7;7,15) oraliqda yotuvchi yagona yechimi mavjud.

$$f(7) = -0{,}3787 < 0; \; f(7{,}15) = 0{,}0648 > 0.$$

Endi iteratsiya usuli bilan $x=\dfrac{14}{\ln x}$ tenglamaning (7;7,15) oraliqdagi yechimini topish mumkinmi, buning uchun shartlarni tekshirib ko‘ramiz:

$$\varphi(x) = \frac{14}{\ln x}, \; \varphi'(x) = -\frac{14}{x\cdot\ln^2 x} < 0, \; |\varphi'(x)| < 0{,}53.$$



Rasm. 5.4

Barcha shartlar bajariladi, demak, iteratsiya usulini qo‘llash mumkin. Ishni $x_0 = 7{,}15$ songa yaqinlashishdan boshlaymiz. $f(x) = x \cdot \ln x - 14$ tenglikdan $|f(7{,}15)| < |f(7)|$.

$x_0 = 7{,}15$; $x_3 = \varphi(x_2) = 7{,}1254$;

$x_1 = \varphi(x_0) = 7{,}1171$; $x_4 = \varphi(x_3) = 7{,}1294$;

$x_2 = \varphi(x_1) = 7{,}1337$; $x_5 = \varphi(x_4) = 7{,}1276$.

Absolyut xatolik 0,004 ga teng. Shu joyda hisoblashni to‘xtatamiz. $\bar{x}$ ni 0,01 aniqlik bilan +7,13 ga teng deb qabul qilamiz.

$f(x) = x \cdot \ln x - 14$ **tenglamani oddiy iteratsiya usulida yechish C++ dasturi**:

```
#include <iostream.h>
#include <math.h>
double Phi (double x);
double Xatolik(double x);
const double Eps = 0.0001;
int main ()
{
 double x=–0.5;
 double y=0.0;
 int i;
 while (Xatolik (y)>Eps)
 {
 y = Phi(x);
 x=y;
 }
 cout<<"x = "<<x<<endl;
 return 0;
}
double Phi (double x)
{
 double y;
 if(x==0) return 0.0001;
 y = 14/log(x);
 return y;
```

```
}
double Xatolik (double x)
{
 double y;
 y = x*log(x)-14;
 if (y<0)
 return y;
 }
```

Misol 3. $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlarini iteratsiya usulida topish dasturini tuzing:

```
//Kub tenglamasini iteratsiya usulida yechish
#include<math.h>
#include<iostream.h>
double a[4]={0},
b[3]={0},
prec=0.00000;
double minim=0, maxim=0;
void Hello(void);
void Input();
void Derivate();
void Calculation();
doubleCalc_Fun(double);
doubleCalc_First(double);
main(void)
{
Hello();
Input();
Derivative();
Calculation();
return 0;
}
void Hello(void)
{
cout<<"Kub tenglamasini iteratsiya usulida yechish programmasi.\n\n";
}
void Input()
{
cout<<"Kub tenglamani ko'rinishi"
<endl<<"a1*x^3+a2*x^2+a3*x+a4=0"<<endl<<;
for(inti=0;i<4;i++)
 {
cout<<"Koeffisiyent qiymatini kiriting a["<<i+1<<"]:";
cin>>a[i];
 }
```

```
cout<<endl<<"Yechimni qidirish intervalini ko'rsatish
lozim."<<endl<<"Qidiruvni past chegarasini kiriting:";
cin>>minim;
cout<<"Qidiruvni yuqori chegarasini kiriting:";
cin>>maxim;
while(minim==maxim||minim>maxim)
 {
cout<<"\nPastk ichegara yuqori chegaradan kam bo'lishi kerak va unga teng
bo'la olmaydi."<<endl
<<"Pastki chegara kiritishni qaytarish:";
cin>>minim;
cout<<"Yuqori chegara kiritishni qaytarish:";
cin>>maxim;
 }
cout<<"Xatolikni kiriting:";
cin>>prec;
 }
void Derivative()
 {
b[0]=a[0]*3;
b[1]=a[1]*2;
b[2]=a[2];
}
void Calculation()
{
double x=0,x_old=0,m=0;
cout<<"------------------"<<endl<<"| Xn | f(Xn) | X(n+1)-Xn |"<<endl<<"------
------"<<endl;
if(fabs(Calc_First(minim))fabs(Calc_First(maxim)))m=x=x_old=minim;
else m=x=x_old=maxim;
m=fabs(1/Calc_First(m));
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<x;
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<Calc_Fun(x);
cout<<"| |\n";
if(Calc_First(x)>0)
{
do
{
x_old=x;
x=x_old-m*Calc_Fun(x_old);
cout<<"|";
```

```
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<x;
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<Calc_Fun(x);
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precisition(10);
cout<<fabs( Calc_Fun(x)-Calc_Fun-Calc_Fun(x_old) );
cout<<"|\n";
}
else
{
do
{
x_old=x;
x=x_old+m*Calc_Fun(x_old);
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<x;
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<Calc_Fun(x);
cout<<"|";
cout.width(15);cout.precision(10);
cout<<fabs(Calc_Fun(x)-Calc_Fun(x_old) );
cout<<"|\n";
}
while((fabs(Calc_Fun(x)-Calc_Fun(x_old) ) )>prec;
}
cout<<"---------------";
}
doubleCalc_Fun(double x)
{
return(a[0]*x*x*x+a[1]*x*x+a[2]*x+a[3]);
 }
doubleCalc_First(double x)
{
return(b[0]*x*x+b[1]*x+b[2]);
}
```

5.2.5. Urinmalar usuli (Nyuton usuli)

Bu usul iteratsiya usulining bir turi hisoblanadi.

Aytaylik, $f(x)=0$ tenglama yechimini, ya'ni $y=f(x)$ funktsiya grafigining Ox o'qi bilan kesishish nuqtalarini topish talab qilingan bo'lsin.

ξ – tenglamaning $[a,b]$ kesmada ajratilgan ildizi bo‘lsin. $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalar uzluksiz hamda $a \le x \le b$ da ishoralarini saqlasin. Ildizning qandaydir n-yaqinlashishdagi qiymati $x_n \approx \xi \ (a \le x \le b)$ bo‘lib, uni Nyuton usuli bilan aniqlashtirish mumkin.
Faraz qilaylik, $\xi = x_n + h_n$, (5.7)

bunda h_n juda kichik son. Nyuton formulasini qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

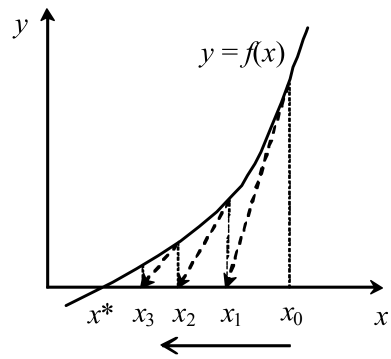
$$0 = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n).$$

Bundan, $h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Topilgan h_n ning qiymatini (5.7) ga qo'yib, $n+1$ - yaqinlashishni hosil qilamiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2 \ldots \quad (5.8)$$

Nyuton usuli geometrik nuqtai nazardan $y=f(x)$ funktsiya grafigiga biror nuqtada o‘tkazilgan urinma formulasiga ekvivalentdir.



Rasm. 5.5.

$[a,b]$ kesmada ildizga ega bo‘lgan $f(x)$ funktsiya shu kesmada differentsiallanuvchi bo‘lib, unda $f'(x)$ hosilasi 0 ga aylanmaydi deylik. Ixtiyoriy $x_0 \in [a,b]$ nuqta olib, $f(x)$ funktsiya grafigiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozamiz:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5.9)$$

$f(x)$ funktsiya va uning urinmasi grafiklari urinish nuqtasi yaqinida o‘zaro yaqin bo‘ladi, shuning uchun urinmaning $0x$ o‘qi bilan kesishgan x_1 nuqtasi c ildizdan uncha uzoq bo‘lmagan joydaligini kutish tabiiy x_1 nuqtani topish uchun

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

tenglamaga egamiz. Shunday qilib, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Bu jarayonni takrorlaymiz: $x = x_1$ bo‘lganda $f(x)$ funksiyaga o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozamiz va uning *0x* o‘qi bilan kesishgan x_2 nuqtasini topamiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Jarayonni davom ettirib, ushbu

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2 \ldots$. (5.10) rekurrent formula bilan aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz.

Shu ketma-ketlikni tekshirish mobaynida iteratsiya metodining (5.4) ketma-ketligini tekshirishdagi kabi 2 ta savol tug‘iladi:

1) x_n sonlarini hisoblash jaroyinini cheksiz davom ettirish mumkinmi, ya’ni x_n sonlar $[a,b]$ kesmaga tegishli bo‘ladimi?

2) Agar (5.10) jarayon cheksiz bo‘lsa, $n \to \infty$ da $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘zini qanday tutadi?

Shu savollar tahlil qilinganda $x = c$ ildiz $[a,b]$ (*a*<*c*<*b*) kesmaning ichki nuqtasi, $f(x)$ funktsiya berilgan kesmada 2 marta differensiallanuvchi va hosilalari

$|f'(x)| \geq m > 0$, $|f''(x)| \leq M$, $x \in [a;b]$ (5.11)

tengsizliklarni qanoatlantiradi, deb faraz qilamiz.

Teorema. Agar $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo‘lib, $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalar noldan farqli va $a \leq x \leq b$ da ishorasini saqlasa, u holda $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi boshlang’ich yaqinlashish $x_0 \in [a,b]$ ga asoslanib, (5.1) tenglamaning yagona ildizi ξ ni istalgan aniqlikda Nyuton usuli bilan topish mumkin.

Eslatma. Nyuton usulidan foydalanganda x_0 nuqta sifatida $[a,b]$ kesmaning shunday oxirini tanlash kerakki, $f''(x)$ hosilaning ishorasi qanday bo‘lsa, bu nuqtaning ham ordinatasi shunday ishorali bo‘lsin.

$n-$ taqribiy qiymat x_n ning xatoligini baholash uchun quyidagi umumiy formuladan foydalanish mumkin:

$|x^* - \xi| \leq \frac{|f(x^*)|}{m}$. (5.12)

1-eslatma. m sifatida $\alpha \leq x \leq \beta$ da aniqlangan $|f'(x)|$ ning eng kichik qiymatini olish mumkin.

2-eslatma. (5.9) formula yanada aniq natija berishi uchun odatda, ξ ildizni va uning x^* taqribiy qiymatini o‘z ichiga olgan (α, β) oraliq olinadi va $|x^* - \xi| \leq \beta - \alpha$ deb faraz qilinadi.

Misol 1. Nyuton usuli bilan $f(x) = x^4 - 3x^3 + 75x - 10000 = 0$ tenglamaning 5–ishonchli raqami bilan manfiy ildizini toping.

Yechilishi: Ildizni saqlaydigan oraliqni topamiz:

$$x = 0; \; f(0) = -10000;$$

$$x = -10;\ f(-10) = -1050;$$
$$x = -100;\ f(-100) \approx 10^3.$$

Shunday qilib, izlanayotgan ξ yechim $-100 < \xi < -10$ oraliqda joylashgan. Topilgan oraliqni kichraytiramiz: $f(-11) = 3453$, ya'ni $-11 < \xi < -10$. Bu oraliqda $f'(x) < 0$ va $f''(x) > 0$. $f(-11) > 0$ va $f''(-11) > 0$ bo'lgani uchun boshlang'ich yaqinlashishni $x_0 = -11$ deb olish mumkin.

$n = 3$ da yaqinlashishni to'xtatamiz, funktsiya ishorasini tekshiramiz $f(x_n + 0{,}001) = f(-10{,}260)$. $f(-10{,}260) < 0$, demak, $-10{,}261 < \xi < -10{,}260$, bu oraliqda yotgan sonlarning qaysi birini olmaylik, u izlangan yaqinlashishni beradi.

x_n ning ketma-ket yaqinlashishi quyidagi sxema bo'yicha topildi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	–11	3453	–5183	0,7
1	–10,3	134,3	–4234	0,03
2	–10,27	37,8	–4196	0,009
3	–10,261	0,2	–	–

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 75x - 10000 = 0$ tenglamani urinmalar usulida yechish C++ dasturi:

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
double newtonRaphson (double x)
{
 return x - (pow(x,4)-3*pow(x,3)+75*x-10000) / (4*pow(x,3)-
9*pow(x,2)+75);
}
int main ()
{
 double x = -11; // the initial guess close and < to the actual root
 double tol = 0.0001; // 0.0001 is the error level we wish
 double old;
 do
 {
 old = x;
 x = newtonRaphson(x);
 }
 while (abs(old - x) > tol); // while loop because the
 // number of iterations is not
 // known beforehand
 cout << "Root: " << x << endl;
```

```
return 0;
}
```

Urinma usulida x_0 taqribiy qiymatning izlangan c yechimga yaqin bo‘lishini talab etish muhimdir.

Shunday qilib, shu usul bo‘yicha hisoblashlarni bajarganda x_0 boshlang‘ich yaqinlashishni ta’minlash uchun $x=c$ ildizning mumkin bo‘lgan sohasini topish mumkin. Agar $f(x)$ funktsiya grafigining umumiy xususiyatlari ma’lum bo‘lsa, shu grafik bo‘yicha tegishli sohani topish oson.

Misol 2. Ixtiyoriy musbat a sondan kvadrat ildiz chiqarilsin.

Yechilishi: Ixtiyoriy musbat a sonning kvadrat ildizini $f(x)=x^2-a=0$ tenglamaning yechimi kabi izlaymiz.

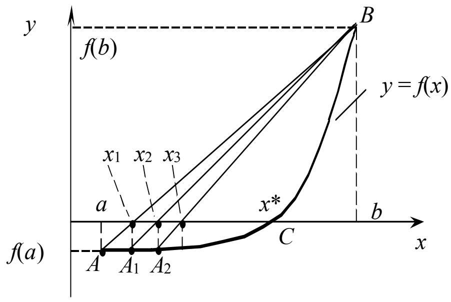
Iteratsiya usulidagi kabi nolinchi yaqinlashish sifatida x_0=0,5 ni olamiz va (5.10) formuladagi bir nechta yaqinlashishlarni hisoblaymiz:

x_1=0,755222320557, x_2=0,739141702652,
x_3=0,739085197449, x_4=0,739085078239,
x_5=0,739085078239.

Ko‘ramizki, n=1 dan boshlab $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayadi va $x=c$ ildiziga yaqinlashadi. 4–qadamdan keyin jarayon to‘xtatiladi. Hisoblar 12 ta raqam bilan olib boriladi va 10^{-12} dan ortmaydigan xatolikka erishilgandan keyin yaxlitlash xatoligi chegaralaridan tashqarida x_{n+1} va x_n lar farqini sezish mumkin bo‘lmay qoladi. Agar aniqlikni oshirish zarurati bo‘lsa, 12 tadan ko‘proq raqamlar bilan hisoblashlarga o‘tish lozim. EHM lar shunday imkoniyatga ega.

5.2.6. Vatarlar usuli

$f(x)$=0 tenglamaning $[a,b]$ oraliqdagi ildizi C ajratilgan bo‘lsin. $f(x)$ funktsiya bu oraliqda uzluksiz va oraliq chetlarida ishoralari turlicha bo‘lsin. A va B nuqtalar mos ravishda $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ koordinatalarga ega bo‘lsin.



Rasm. 5.6

$f(x)$ funktsiya grafigining OX o‘qi bilan kesishgan nuqtasi C izlanayotgan yechim hisoblanadi. Oldiniga Iteratsiya boshida C o‘rniga AB vatarning OX o‘qi bilan kesishish nuqtasi sifatida x_1 yaqinlashish izlanadi.

AB to‘g‘ri chiziq tenglamasini ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq formulasi bo‘yicha quyidagicha yozamiz:

$$\frac{x-b}{y-f(b)}=\frac{x-a}{y-f(a)}.$$

y=0 deb faraz qilib, $x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$ ni topamiz. Buni quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{yoki } \left.\begin{aligned} x_1 &= a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}; \\ x_1 &= b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}; \end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

Agar x_1 yetarlicha aniqlkida bo'lmasa, ikkinchi yaqinlashish topiladi:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}. \quad (5.14)$$

(5.13) va (5.14) dan recurrent ketma-ketlikni hosil qilish mumkin: Agar $f(x_k) \cdot f(b) < 0$ bo‘lsa,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)}, \quad (5.15)$$

va agar $f(x_k) \cdot f(a) < 0$ bo‘lsa,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)} \quad (5.16)$$

o‘rinli bo‘ladi.

[a, b] oraliqda $f(x)$ egri chiziq to‘rt xil ko‘rinishda bo‘lishi mumkin.

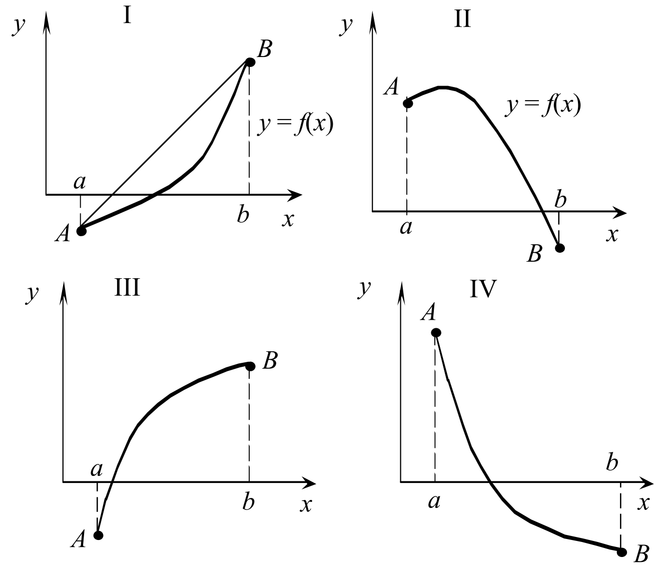
I holda $f'(x) > 0, f''(x) > 0$,

II holda $f'(x) < 0, f''(x) < 0$,

III holda $f'(x) > 0, f''(x) < 0$; va

IV holda $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ bo‘ladi.

U holda I va II holatlar uchun (5.16), ya'ni $x_0 = a$. III va IV holatlar uchun esa (5.15), ya'ni $x_0 = b$.



Rasm. 5.7.

Natijalarni umumlashtiramiz:

1) $f(x)$ funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilasi ishorasi bilan bir xil bo‘lsa, shu oxir qo‘zg‘almas hisoblanadi;

2) qaysi tomonda $f(x)$ funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilasi ishorasi bilan har xil bo‘lsa, x_n ketma-ket yaqinlashish ξ ildizning shu tomonida yotadi.

Har ikki holatda ham har bir keyingi x_{n+1} yaqinlashish x_n ga qaraganda ξ ildizga yaqin bo‘ladi.

Misol. $3\sin x + 0,4x\sqrt{x-1} = 3,7$ tenglama ildizini $\varepsilon = 0,0001$ aniqlikda vatarlar usulida yechish dasturini tuzing.

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
 double HORD (double x)
{
 return 3*sin(x)+0.4*x*sqrt(x-1)-3.7;
}
int main()
{
 double a, b, c, E;
 int i=0;
 a=4;
 b=8;
 E=0.3;
 c=a-(b-a)/(HORD(b)-HORD(a));
 while (fabs(HORD(c))>E)
 {
 if (HORD(a)*HORD(c)>0) a=c;
 else b=c;
 if(i>1000) break;
 i++;
 c=a-(b-a)/(HORD(b)-HORD(a));
 }
 cout<<"Tenglama ildizi x="<<c<<endl;
 return 0;
}
```

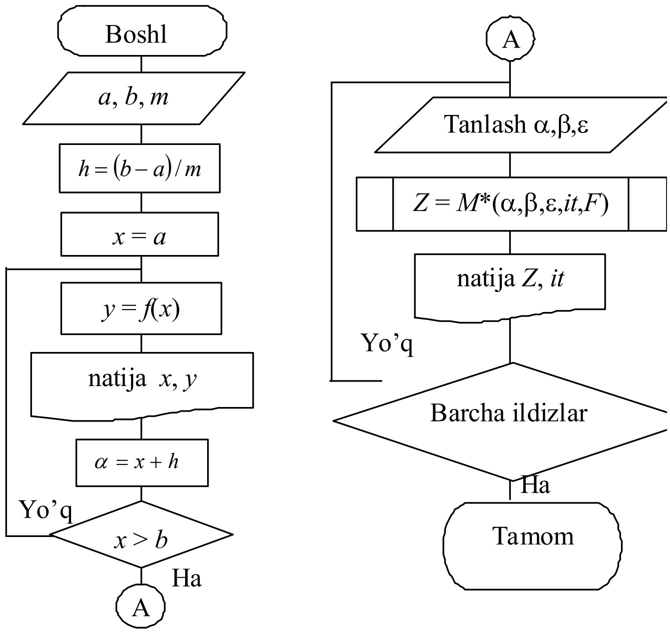
5.3. Nochiziqli tenglamalarni sonli yechish usullarining umumiy algoritmi

Nochiziqli tenglamalarni sonli yechish usullarini amalga oshirishning ikki bosqichini ko‘rib chiqsak:

1. Avvalo dastur $y = f(x)$ funktsiya qiymatlarini (ildizlarni ajratish) jadvalini hosil qilishi kerak.

2. Boshlang‘ich yaqinlashishni kiritish (bu *a, b* yoki $(a+b)/2$) va yechimning aniqligi ε haqida so‘rov beriladi.

Funktsiyani hisoblari va hisoblash algoritmi alohida tuzilgan qism dasturlar yordamida ishlaydi. Bu jarayonning namunaviy algoritmi quyidagicha bo‘lishi mumkin (bunda m=2 deb olish maqsadga muvofiq):



Nazorat uchun savollar:

1. Algebraik va transtsendent tenglamalar deganda nimani tushunasiz?
2. Ildizlarni ajratish usullarini sanang.
3. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usulini tushuntiring.
4. Ildizlarni grafik usulda ajratish usuli qanday?
5. Ildizlar analitik usulda qanday ajratiladi?
6. Iteratsiya usulini tushuntiring.
7. Nyuton usuli bilan ildizlar qanday ajratiladi?
8. Vatarlar usulidan qanday foydalaniladi?
9. Nochiziqli tenglamalarni sonli yechish usullarining umumiy algoritmi qanday qurilgan?

Misol va masalalar:

1. Tenglamalarni keltirilgan usullarda yeching:

a) $sinx+cosx=1/3$ d) $cosx+\sqrt{3}\,sinx=1$

b) $2sin^2x+7cosx-5=0$ e) $2tg^4 3x-3tg^2 3x+1=0$

v) $3cosx-2sin2x=0$ j) $3sin^2x+7cos2x-3=0$

g) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$ i) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}=\frac{4}{\sqrt{2x+5}}$.

2. Quyidagi tenglamalarni vatarlar va urinmalar usulida 0.001 aniqlikda hisoblang:

a) $2x^3-3x^2-12x-5=0$; g) $2x^3+9x^2-21=0$;

b) $x^3-3x^2+3=0$; d) $2x^3-3x^2-12x+10=0$;

v) $x^3+3x^2-24x-10=0$; e) $3x^3-12x^2-2x+7=0$.

VI BOB. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI

6.1. Asosiy tushuncha va ta'riflar

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi chiziqli algebraning muhim matematik modeli hisoblanadi. Ularga quyidagi matematik masalalar kiradi:

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini bevosita yechish;
2. Matritsa determinantlarini hisoblash;
3. Teskari matritsa elementlarini topish;
4. Matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini topish.

Amaliyotda juda ko‘p masalalar chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Shuning uchun ham chiziqli tenglamalar sistemasini yechish hisoblash matematikasining eng muhim va keng tarqalgan masalalaridan biri deyish mumkin. Ikkinchi va uchinchi tur masalalar ham chiziqli tenglamalar sistemasini yechish orqali topiladigan komponentlar hisoblanadi.

Odatda n- tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi quyidagi korinishda:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i;\quad i=\overline{1,n}$$

yoki yoyilgan shaklda:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6.1)$$

yoki vektor shaklida

$$A\overline{x} = \overline{b}\ ,(6.2)$$

beriladi, bunda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix};\quad \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\quad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

(6.2) munosabatdagi A matritsa tenglamalar sistemasining n^2 elementli **asosiy matritsasi** deyiladi.

$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ – noma'lumlardan tuzilgan ustun vektor;

$\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ –ozod hadlardan tuzilgan ustun vector.

n- tartibli A matritsaning determinanti D (det A)

$$|A| = D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots\ a_{n\omega}\ .$$

tenglikdan topiladi.

Bu yerda α, β, ..., ω indekslar 1, 2, ..., n raqamlarning mumkin bo‘lgan $n!$ o‘rin almashtirishlariga teng bo‘ladi; k – ushbu o‘rin almashtirishlarning inversiyalari soni.

Agar det $A \neq 0$ bo‘lsa, u holda (6.1) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

Agar barcha ozod hadlar nolga teng bo‘lsa, ya’ni $\bar{b} = 0$, u holda $A\bar{x} = 0$ bo‘lib, tenglamalar sistemasiga **bir jinsli tenglamalar sistemasi** deyiladi.

Agar $\bar{b} \neq 0$, ya’ni hech bo‘lmaganda bitta ozod had noldan farqli , ya’ni $b_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$ bo‘lsa, u holda (6.2) sistema **bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi** deyiladi.

(6.2) sistemaning **yechimini topish** – sistemaning har bir tenglamasini ayniyatga aylantiruvchi $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ustun-vektorni topish demakdir.

Taqribiy yechimni aniq yechimdan chetlanish darajasini xarakterlovchi ikkita kattalik mavjud:

1) topilgan yechim bilan aniq yechimning ayirmasiga teng bo‘lgan **– xatolik** ε,

2) topilgan yechimni (6.1) sistemaga qo‘yganda hosil bo‘lgan tenglamalarning o‘ng va chap tomonlarini ayirmasiga teng – farq *r:*

$$\begin{cases} \varepsilon = \bar{x} - \overline{x^*}; \\ r = \bar{B} - A\overline{x^*}; \end{cases} \quad (6.3)$$

Bunda $\overline{x^*}$ – vektor yechim.

Agar $\varepsilon \approx 0$ bo‘lsa, u holda $r = 0$ bo‘ladi. Teskari tasdiq har doim ham o‘rinli emas. Biroq tenglamalar sistemasini yechimi aniqligini baholash uchun r dan foydalaniladi.

6.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari ikki guruhga ajraladi:

– to‘g‘ridan-to‘g‘ri (aniq) yechish usuli;

– iteratsion (taqribiy) yechish usuli.

To‘g‘ridan-to‘g‘ri (aniq) yechish usuli deb, no’malumning aniq qiymatini topish zarurati bo‘lganda, yaxlitlamasdan yechimni topish usuliga aytiladi. Bunday usullar oddiy bo‘lib, turli xil tenglamalar sistemalarini yechish uchun qo‘llaniladi. To‘g‘ridan-to‘g‘ri yechish usuliga

1) Kramer qoidasi;

2) Gauss usuli;

3) teskari matritsa usuli;

4) progonka;

5) kvadrat ildiz usuli va boshqalar kiradi.

Biroq bu usullarni yuqori tartibli tenglamalar sistemalari ($n < 200$) ni yechish uchun qo‘llab bo‘lmaydi.

Tenglamalar sistemasini **taqribiy yechish usuli** deb, sistema yechimini yaxlitlamasdan berilgan aniqlikda topishga aytiladi. Bu ketma-ket yaqinlashish usullari deb ham yuritilib, ularga oddiy iteratsiya usuli; Zeydel usuli kiradi.

6.2.1. Tenglamalar sistemasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechish usullari

I. Kramer qoidasi

(6.1) tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar det $A\neq0$ bo‘lsa, u holda tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. Bu yechim mavjudligining zaruriylik va yetarlilik sharti hisoblanadi. U holda Kramer qoidasiga ko‘ra

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \; k=\overline{1,n} \;, (6.4)$$

Bunda D_k – D ning k - ustuniga a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{nk} elementlar o‘rniga ozod hadlarni qo‘yishdan hosil qilingan determinant yoki

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, b_i \;, \; k=\overline{1,n} \; (6.5)$$

Bu yerda A_{ik} determinant D dagi a_{ik} elementning algebraik to‘ldiruvchisi.

Bu usulda yuqori tartibli determinantlarni hisoblash asosiy muammo hisoblanadi.

II. Teskari matritsa usuli

$A\bar{x}=\bar{b}$ tenglamalar sistemasi matritsa shaklida berilgan bo‘lsin. Tenglikning har ikkala tomonini A^{-1} ga ko‘paytiramiz: $A^{-1}A\,\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$;

Natijada $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ (6.6)

hosil bo‘ladi. Ko‘rinadiki, $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)^{T}$ yechimni topish uchun A^{-1} teskari matritsani qulay va tez usulda, mumkin bo‘lgan aniqlikda topish muammosi tug‘iladi. Bu masalani keyinroq ko‘rib chiqamiz.

III. Gauss usuli

Bu usul chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari orasida keng tarqalgan usul hisoblanadi. Usul noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish g‘oyasiga asoslangan. Bunda berilgan sistema uchburchak ko‘rinishiga keltiriladi, ya’ni bosh diagonaldan pastdagi barcha koeffitsiyentlar nollardan iborat bo‘ladi.

Bizga n- tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \Lambda \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6.7)$$

Tenglamalarning birinchi satridagi x_1 qoldirilib, keyingi satrdan boshlab, har bir tenglamadan x_1 noma’lum yo‘qotiladi. Shuningdek, ikkinchi satrda x_2 qoldirilib, undan keyingi har bir tenglamadan x_2 noma’lum ham yo‘qotiladi va hokazo. Bu jarayon oxirgi n-tenglamada x_n noma’lum qolguncha davom etadi. Undan x_n topiladi:

$a'_{nn}x_n = b'$, (6.8)

bunda a'_{nn} va b' – chiziqli almashtirishlar bajarilgandan keyin hosil bo‘lgan koeffitsiyentlar.

Demak, Gauss usulini quyidagi formulalar yordamida yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} a^*_{mi} &= a_{mi} - a_{ki}\frac{a_{mk}}{a_{kk}}, \quad k=\overline{1,n-1}; \quad i=\overline{k,n}; \\ b^*_{m} &= b_m - b_k\frac{a_{mk}}{a_{kk}}, \quad m=\overline{k+1,n} \; (6.9) \end{aligned}\right\}$$

bu yerda m – noma’lum x_k yo‘qotiladigan tenglama raqami;

k – keyingi $(n – k)$ ta tenglamadagi yo‘qotiladigan noma’lum raqami;

i – berilgan matritsaning ustunlar raqami;

a_{kk} – matritsaning bosh elementi.

Tenglamalar sistemasidan ko‘rish mumkinki, noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish jarayonida tenglamalarni a_{11}, a_{22} , …, a_{nn} koeffitsiyentlarga bo‘lish bajariladi. Shuning uchun bu koeffitsiyentlar noldan farqli bo‘lishi kerak ($a_{kk} \neq 0$), aks holda tenglamalar sistemasida mos tengliklar o‘rnini almashtirish kerak bo‘ladi.

(6.7) tenglamalar sistemasidagi x_n, x_{n-1}, ..., x_1 noma’lumlar quyidagi algoritm asosida teskari ketma-ketlikda topiladi:

$$x_n = \frac{b'}{a'_{nn}}; \quad x_k = \frac{1}{a'_{kk}}\left[b'_k - \sum_{i=k+1}^{n} a'_{ki} x_i\right], \quad k = \overline{n-1,1}. \quad (6.10)$$

$$r = \overline{B} - A\overline{x^*}$$

Olingan yechimlar aniqligi r ayirma vositasida baholanadi.

$(r_1, r_2, ... , r_n)^T$ “r ayirmalar” vektorida maksimal element izlanadi va berilgan ε aniqlik bilan solishtiriladi. Agar $r_{\max} < \varepsilon$ shart bajarilsa, topilgan yechim talabga javob beradi. Aks holda yechimni aniqlashtirish kerak bo‘ladi.

Misol. Quyidagi tenglamalar sitemasini Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\ 1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases}$$

Yechilishi: 1-tenglamaning barcha hadlarini 2 ga bo‘lib yuboramiz. 2-tenglamadagi x_1 noma’lumni yo‘qotish uchun 1-tenglamani 0,4 ga ko‘paytirib, 2-tenglamaga qo‘shamiz. 3-tenglamadagi x_1 noma’lumni yo‘qotish uchun 1-tenglamani –1,6 ga ko‘paytirib, 3-tenglamaga qo‘shamiz. 4-tenglamadagi x_1 noma’lumni yo‘qotish uchun 1-tenglamadan 4-tenglamani ayiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2{,}1x_2 + 0{,}8x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}6 \\ \quad 3{,}84x_2 - 2{,}08x_3 - 0{,}6x_4 = -0{,}96 \\ \quad -4{,}16x_2 + 0{,}28x_3 - 1{,}4x_4 = 3{,}56 \\ \quad 4{,}1x_2 + 1{,}8x_3 - 3x_4 = 1{,}6 \end{cases}$$

2-tenglamaning barcha hadlarini 3,84 ga bo‘lib yuboramiz. 3-tenglamadagi x_2 noma’lumni yo‘qotish uchun 2-tenglamani 4,16 ga ko‘paytirib, 3-tenglamaga qo‘shamiz. 4-tenglamadagi x_2 noma’lumni yo‘qotish uchun 2-tenglamani -4,1 ga ko‘paytirib, 4-tenglamaga qo‘shamiz va h.k. davom qilamiz. Topilgan natijalarni jadvalga kiritamiz:

x_1	x_2	x_3	x_4	Ozo d hadlar	$\sum$
2	4,	1,	-3	3,2	
-	2	6	0	-1,6	-1,4
0,4	3	-	-1	-1	-0,2
1	-	2,4	1,5	0	-0,5
,6	0,8	1	…	…	…

1	-2	-1	-1,5	1,6	4
…	…	…			
1	2,	0,			
	1	8			
	3,	-	-0,6	-0,96	0,2
	84	2,08	-1,4	3,56	6,6
	-	0,	-3	1,6	4,5
	4,16	28	…	…	…
	4,	1,	-	-0,25	0.05
	1	8	0,15625		208
	…	…			
	1	-			
		0,54166			
		-	0,75	-4,6	-
		2,53331	2,35	-	6,38331
		-	937	2,625	-
		4,02081	…	…	4,28644
		…	-	1,81	…
		1	0,2006	581	2,51
					198
			1,16	4,67	5,84
			897	603	5
			1	4,00	5,00
		1		013	013
	1			3,00	4,00
1				009	009
				2,00	3,00
				005	005
				1,00	2,00
				002	002

Jadvaldan ko‘rinadiki, $x_1 = 1{,}00002$; $x_2 = 2{,}00005$; $x_3 = 3{,}00009$; $x_4 = 4{,}00013$ lar taqribiy yechim, sistemaning aniq yechimi $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Yechimni aniqlashtirish

Bizga $A\bar{x} = \bar{b}$ tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Unda $\overline{x_0}$ taqribiy yechim topilgan bo‘lsin va u “*r* ayirma” bo‘yicha qoniqarsiz bo‘lsin.

U holda faraz qilaylik, $\bar{x} = \overline{x_0} + \bar{\delta}$, bunda $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)^T$.

$\overline{x_0}$ yechimni tog‘rilash uchun yangi sistemani qarab chiqishga to‘g‘ri keladi:

$$A\,(\overline{x_0 + \delta}) = \bar{b} \text{ yoki } A\bar{\delta} = \bar{\varepsilon},$$

bunda $\bar{\varepsilon} = \bar{b} - A\overline{x_0}$ – oldingi sistema uchun “*r* ayirma”.

Shunday qilib, chiziqli tenglamalar sistemasini oldingi matritsa *A* va yangi ozod had $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)^T$ bilan yechib, $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ tuzatmani olamiz..

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasining yechimi 3 ta raqam aniqligida berilgan bo‘lsa, uni 10^{-4} gacha aniqlashtiring.

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33; \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32; \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42. \end{cases}$$

Yechilishi:

Sistemani matritsaviy ko‘rinishda yozib olamiz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}; \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \overline{b} = \begin{bmatrix} 11{,}33 \\ 32 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Yechimda $x_1^{(0)} = 4{,}67$; $x_2^{(0)} = 7{,}62$; $x_3^{(0)} = 9{,}05$ qiymatlar olingan bo‘lsin.

“*r* ayirma”lar $\varepsilon = \overline{b} - A\overline{x_0}$ tenglikka ko‘ra,

$\varepsilon_1^{(0)} = -0{,}02$; $\varepsilon_2^{(0)} = 0$; $\varepsilon_3^{(0)} = -0{,}01$ ga teng.

Olingan aniqlik $\delta_1^{(0)} = -0{,}0039$; $\delta_2^{(0)} = -0{,}0011$; $\delta_3^{(0)} = -0{,}0025$.

Natijada $x_1 = 4{,}6661$; $x_2 = 7{,}6189$; $x_3 = 9{,}0475$.

“*r* ayirma” lar mos ravishda $\delta_1 = -2\cdot10^{-4}$; $\delta_2 = -2\cdot10^{-4}$; $\delta_3 = 0$ bo‘ladi.

6.2.2. Modifikatsiyalangan Gauss usuli

Bu usulda (5.9) formuladan foydalanganda $a_{kk} \neq 0$ talabga qo‘shimcha kiritiladi, ya’ni almashtirish bajarilayotgan matritsaning ma’lum ustunidagi bosh element modul bo‘yicha maksimal element bo‘lishi kerak. Bunga matritsa satrlarini o‘rnini almashtirish bilan erishiladi.

Misol 1. 3-tartibli chiziqli tenglamalar sistemasini Gaussning modifikatsiyalangan usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4; \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases} \quad (a)$$

Yechilishi:

1-usul. Ikkinchi va uchinchi tenglamalarda x_1 ni yo‘qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamani 0,3 ga ko‘paytiramiz va ikkinchi tenglamaning mos hadlari bilan qo‘shib chiqamiz. So‘ngra birinchi tenglamani (–0,5) ga ko‘paytirib, uchinchi tenglama bilan qo‘shamiz. Natijada

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ -0{,}1x_2 + 6x_3 = 6{,}1; \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 = 2{,}5. \end{cases} \quad (b)$$

Endi ikkinchi tenglamani 25 ga ko‘paytirib, uchinchi bilan qo‘shamiz:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ -0{,}1x_2 + 6x_3 = 6{,}1; \\ 155x_3 = 155. \end{cases} \quad (c)$$

Natijada hosil bo‘lgan sistemaning oxirgi tengligidan boshlab, noma’lumlarni hisoblab topamiz:

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1; \quad x_2 = \frac{6x_3 - 6{,}1}{0{,}1} = -1; \quad x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0.$$

Topilgan yechimni [0; –1; 1] berilgan sistemaga qo‘yib, uning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilamiz.

2-usul. Endi tenglamalar sistemasidagi koeffitsiyentlarni shunday o‘zgartiramizki, natijada oldingi yechim saqlansin. Biroq hisoblash mobaynida yaxlitlash amallaridan foydalanamiz. Masalan, bu quyidagi sistema bo‘lsin:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ -3x_1 + 2{,}099x_2 + 6x_3 = 3{,}901; \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases} \quad \text{(d)}$$

(d) sistema uchun ham xuddi (*a*) sistema ildizini aniqlagan ketma-ketlikdan boramiz:.

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ -0{,}001x_2 + 6x_3 = 6{,}001; \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 = 2{,}5. \end{cases} \quad \text{(i)}$$

x_2 ni yo‘qotgandan keyin uchinchi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi, qolgan tengliklar o‘zgarishsiz qoladi.

$$15005\, x_3 = 15004. \text{ (f)}$$

Bundan yechimlarni topamiz:

$$x_3 = \frac{15004}{15005} = 0{,}99993;$$

$$x_2 = \frac{6 \cdot 0{,}99993 - 6{,}001}{0{,}001} = \frac{0{,}0014}{0{,}001} = -1{,}4;$$

$$x_1 = \frac{7 \cdot (-1{,}5) + 7}{10} = -0{,}35.$$

Ko‘rinib turibdiki, olingan yechimlar turlicha [0; –1; 1] va [–0,35; –1,4; 0,99993].

Bunga sabab (i) dagi ikkinchi tenglamadagi bosh elementning juda kichik qiymatidir. Bu xatolikni yo‘qotish uchun (i) sistemada ikkinchi va uchinchi satrlarni o‘rnini almashtiramiz:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ -0{,}001x_2 + 6x_3 = 6{,}001; \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 = 2{,}5; \end{cases} \equiv \begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7; \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 = 2{,}5; \\ -0{,}001x_2 + 6x_3 = 6{,}001. \end{cases} \quad \text{(j)}$$

Hosil bo‘lgan sistemaning x_2 ni yo‘qotgandan keyingi ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$6{,}002\, x_3 = 6{,}002$. (k)

Bundan yechimlar hisoblansa,

$$x_3 = 1; \quad x_2 = \frac{2{,}5 - 5 \cdot 1}{2{,}5} = -1; \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0;$$

Berilgan sistema bilan ustma-ust tushuvchi (d) sistemaning yechimlari hosil bo‘ladi [0; –1; 1].

(d) sistemani yechganda biz Gaussning modifikatsiyalangan usulini qo‘lladik, ya’ni diagonalda shu ustunning maksimal elementi joylashgan bo‘lishi kerak edi.

Gaussning modifikatsiyalangan usulining blok-sxemasi 6.1-rasmda keltirilgan.

Misol 2. *n*=3 tartibli tenglamalar sistemasini Gaussning modifikatsiyalangan usulini qo‘llab, EHM da yeching (ε=0,001):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6; \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 14. \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Blok 1. Dastlabki ma'lumotlarni kiritish:

n – sistema tartibi,

A – noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa,

b – ozod hadlar vektori.

Blok 2. Birinchi sikl (k uchun 1 dan n–1 gacha o'zgaradigan) A matritsaning bosh diagonalidan mos ustundagi a_{kk} maksimal elementni izlash bilan a_{kk}=0 elementni yo'qotishga qaratilgan, bu amaliyot ikkinchi sikl yordamida 3÷6 bloklarda amalga oshiriladi.

Undan keyin uchinchi sikl yordamida 7÷13 bloklarda k- ustundagi maksimal elementga (uning raqami p) mos ravishda sartlarni o'rnini alamashtirish amaliyoti bajariladi.

So'ngra IV va V bloklarda (6.9) formula bo'yicha hisoblashlar bajariladi.

Blok 3 $p = k = 1$

II siklga kirish

Blok 4 $m = k+1 = 2$ $n = 3$ gacha

Blok 5 $a_{11} = 2 < a_{21} = 4(u)$ dan

Blok 6 $p = 2$

Blok 4 $m = 2+1 = 3$

Blok 5 $a_{21} = 4 < a_{31} = 6$ (u) dan

Blok 6 $p = 3$

II sikldan chiqish va III siklga kirish, 7÷10 bloklar A matritsaning satrlarini elementlar bo'yicha almashtirishlarni bajaradi:*Blok* 7 $j = 1$ ($j = 1$ dan 3 gacha)

Blok 8 $r = a_{11} = 2$ (u) dan

Blok 9 $a_{11} = a_{31} = 6$

Blok 10$a_{31} = r$

Blok 7 $j = 2$

Blok 8 $r = a_{12} = 1$

Blok 9 $a_{12} = a_{32} = 5$

Blok 10$a_{32} = r = 1$

Blok 7 $j = 3$ va $r = a_{13}$; $a_{13}=a_{33}$; $a_{33} =r =-1$.

III sikldan chiqish va *Blok* 11 ga kirish, so'ngra 12÷13 da ozod hadlarning mos o'rin almashtirishlari bajariladi.

$r = b_1 = 1$; $b_1 = b_3 = 14$; $b_3 = \mathrm{r} = 1$.

O'zgartirilgan sistema bilan IV siklga kirish

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}; (1)$$

$\vec{b}$ vektorning b_2 hadini hisoblash uchun

$m = k+1 = 1+1 = 2$ dan $n = 3$ gacha

(1) dan $c = a_{mk} / a_{kk} = a_{21} / a_{11} = 4/6$

(1) dan $b_2 = b_2 - c\ b_1 = 6 - 4/6 \cdot 14 = -20/6$Ikkinchi satrni hisoblash uchun V siklga kirish

$i = 1$ (i 1 dan 3 gacha); $a_{21} = a_{21} - c \cdot a_{11} = 4 - 4/6 \cdot 6 = 0$;

$i = 2$; $a_{22} = a_{22} - c \cdot a_{12} = 6 - 4/6 \cdot 5 = 16/6$;

$i = 3$; $a_{23} = a_{23} - c \cdot a_{13} = 2 - 4/6 \cdot 8 = -20/6$.

V sikldan chiqish va IV siklga kirish

$m = 3; c = a_{31} / a_{11} = 2/6.$

Blok 16 ga kirish

$b_3 = b_3 – c\ b_1 = 1 – 2/6 \cdot 14 = −22/6.$

IV sikldan chiqish va V siklga va Blok 17 ga kirish

$i = 1$ (i 1 dan 3 gacha); $a_{31}=a_{31}–c \cdot a_{11} = 2 – 2/6 \cdot 6 = 0;$

$i = 2$; $a_{32}=a_{32}–c \cdot a_{12}= – 2/6 \cdot 5 = –4/6;$

$i = 3$; $a_{33}= a_{33}–c \cdot a_{13}=−1–2/6\cdot 8 =−22/6.$

O‘zgartirilgan sistema bilan V sikldan chiqish

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 0 & 16/6 & -20/6 \\ 0 & -4/61 & -22/6 \end{bmatrix};\ \overline{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -20/6 \\ -22/6 \end{bmatrix}; (2)$$

Va A chiziq bo‘ylab, I siklga kirish

$k = 2$; $p = k = 2$; $m = k+1 = 3$; Blok 5 da chiqish

(2) dan $| a_{22} | < | a_{32} | = | 16/6 | > | 4/6 |$

II sikldan chiqish va III siklga kirish

$j = 2$ (j 2 dan 3 gacha);

(2) dan $r = a_{kj} = a_{22} = 16/6$; $a_{22} = a_{22}$; $a_{22} = r =16/6$; $j = 3$;

(2) dan $r = a_{23} = −20/6$; $a_{23} = a_{23}$; $a_{23} = r = −20/6$;

Ushbu holatda diagonalda maksimal element borligi aniqlandi, shuning uchun 2- va 3-satrlarni o‘rni almashtirilmaydi.

III sikldan chiqish va I siklga va Blok 11 ga kirish

$r = b_2$;$b_2 = b_2$; $b_2 = \mathrm{r} = −20/6.$

Ozod had b_2 o‘z o‘rnida qoladi.

IV siklga kirish $m = k+1 = 2+1 = 3$;

(2) dan $c = a_{mk} / a_{kk} = a_{32} / a_{22} = (–4/6) / (16/6)$;(2) dan $b_3 = b_3 – cb_2=−22/6–(–1/4)\cdot(–20/6)=−27/6$IV sikldan chiqish va V siklga kirish

$i = 2$ (i 2 dan 3 gacha);$a_{32}=a_{32}–c\cdot a_{22}=−4/6–(−1/4)\cdot 16/6=0;$

$i = 3$; $a_{33} =a_{33}–c\cdot a_{23}=−22/6–(−1/4)\cdot(–20/6)=−27/6.$

V sikldan chiqish va I sikldan chiqish.

19÷24 Bloklarda (6.10) formula amalga oshiriladi.

Blok 19 da oxirgi tenglikdan x_n ($n = 3$) ning qiymati topiladi: $x_3 = b_n / a_{nn} = b_3 / a_{33} = (–27/6) / (–27/6) = 1.$

VI (Блок 20) siklga kirish, bu yerda k sikl o‘zgaruvchilari n–1 dan 1 gacha (–1) qadam bilan o‘zgaradi.

Blok 21s = 0

VII (*Блок* 22) siklga kirish

$i = k+1=2+1=3$; $n = 3$; $s =s+a_{ki}\cdot x_i=0+a_{23} \cdot x_3=−20/6 \cdot 1= −20/6.$

VII sikldan chiqish va VI siklga Blok 24 da kirish:

$k = 2$; $x_2=(b_k – \mathrm{s})/a_{nn}=(b_2 – \mathrm{s})/a_{22}=(–20/6+20/6)/a_{22}=0.$

Shuningdek, o‘xshash amallar bajariladi

$k = k–1 = 2–1 = 1$; $\mathrm{s} = 0$;

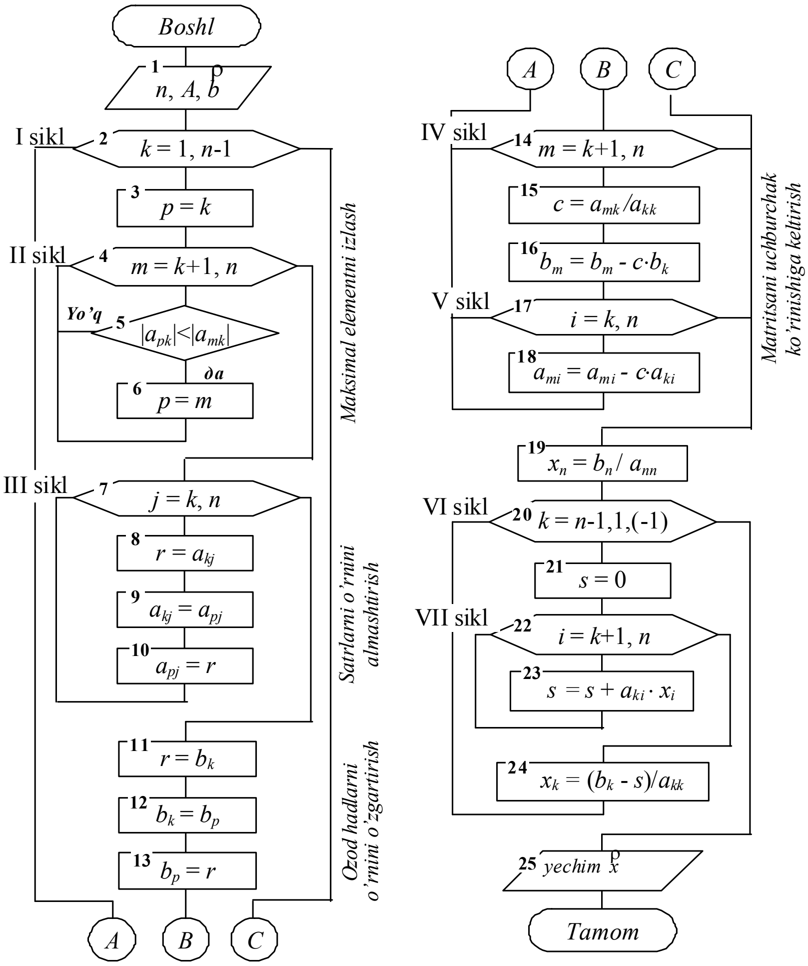
$i = k + 1 = 2$; $s = 0 + a_{12} \cdot x_2 = 5 \cdot 0 = 0;$

$i = k + 1 = 3$; $s = 0 + a_{13} \cdot x_3 = 8 \cdot 1 = 8;$

$x_1 = (b_1 - s)/ a_{11} = (14 - 8) / 6 = 1.$

Oxirgi VII sikldan chiqish.

Blok 25 da (sikl tugaydi) tenglamalar sistemasining topilgan yeshimi ekranga chiqariladi – vektor $\vec{x}$, ya'ni x_i, i=1, ..., n. Bizning holda (1; 0; 1).



Rasm 6.1. Gaussning modifikatsiyalangan usuli blok-sxemasi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish dasturi:

```
#include <iostream.h>
int main()
{
{
 const int n=3;
 int i, j, k;
 float a[n+1][n+1]={5,5,4,-7,5,4,-7,7,-7,8,5,5,2,-4,7,6}, // chiziqli tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari
 b[n+1]={-8,-1,-1,5}, // chiziqli tenglamalar sistemasining qiymatlari
 x[n+1]={0};
 // chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish
 float temp;
 // Gauss usulining to'g'ridan-to'g'ri yo'li
 for(k=0; k<=n-1; k++)
 {
 for (i=k+1;i<=n; i++)
 {
```

```
temp=a[i][k]/a[k][k];
a[i][k]=0;
for(j=k+1;j<=n; j++)
{
a[i][j]=a[i][j]-temp*a[k][j];
}
b[i]=b[i]-temp*b[k];
}
}
x[n]=b[n]/a[n][n];
// Gauss usulining teskari yo'li
for(i=n-1; i>=0; i--)
{
temp=0;
for(j=i+1; j<=n; j++)
{
temp=temp+a[i][j]*x[j];
}
x[i]=(b[i]-temp)/a[i][i];
}
// Natijani chiqarish
for(i=0; i<n+1; i++)
{
cout<<x[i+1]<<endl;
}
}
return 0;
}
```

6.2.3. Progonka usuli

Bu usul ham chiziqli tenglamalar sistemasining xususiy holi uchun Gaussning modifikatsiyalangan usuli hisoblanadi.

Sistemaning kanonik shakli quyidagicha:

$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$; $i=\overline{1,n}$; $a_1 = c_n = 0$, (6.11)

yoki yoyilma shaklda

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \Lambda \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases} \quad (6.12)$$

Mazkur tenglamalar sistemasida barcha $b_i \neq 0$.

Har bir x_i noma'lum x_{i+1} orqali A_i va B_i progonka koeffitsiyentlari vositasida ifodalanadi: $i=1,2,...,n-1$ bo'lganda

$$x_i = A_i \cdot x_{i+1} + B_i \quad (6.13)$$

Yechimni topish algoritmini qarab chiqaylik.

(6.12) sistemaning birinchi tenglamasidan x_1 ni topib olamiz:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

(6.13) tenglikka ko‘ra i=1 uchun: $x_1 = A_1 \cdot x_2 + B_1$ topiladi va

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}; \qquad B_1 = \frac{d_1}{b_1} \quad (6.14)$$

koeffitsiyentlar aniqlanadi. (6.12) sistemaning ikkinchi tenglamasidan x_2 yechim x_3 orqali topiladi va x_1 ning topilgan qiymati o‘rniga qo‘yiladi:

$$a_2 \left(A_1 x_2 + B_1 \right) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2,$$

bundan

$$x_2 = \frac{-c_2 x_3 + d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2}; \quad (6.15)$$

Va (6.13) ga asosan i = 2 bo‘lganda:

$$x_2 = A_2 \cdot x_3 + B_2,$$

natijada $A_2 = -\frac{c_2}{e_2}; \qquad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2}$,

bunda $e_2 = a_2 \cdot A_1 + b_2$.

(6.14) va (6.15) tengliklarni e’tiborga olib, umumiy hol uchun quyidagi munosabatlarni hosil qilish mumkin:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}; \qquad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i}, \quad (6.16)$$

bunda $e_i = a_i \cdot A_{i-1} + b_i \; (i=2,3, ..., n-1)$.

(6.12) ning oxirgi tenglamasidan (6.13) ni qo‘llagan holda $i = n-1$ bo‘lganda x_n yechimni topamiz:

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}. \quad (6.17)$$

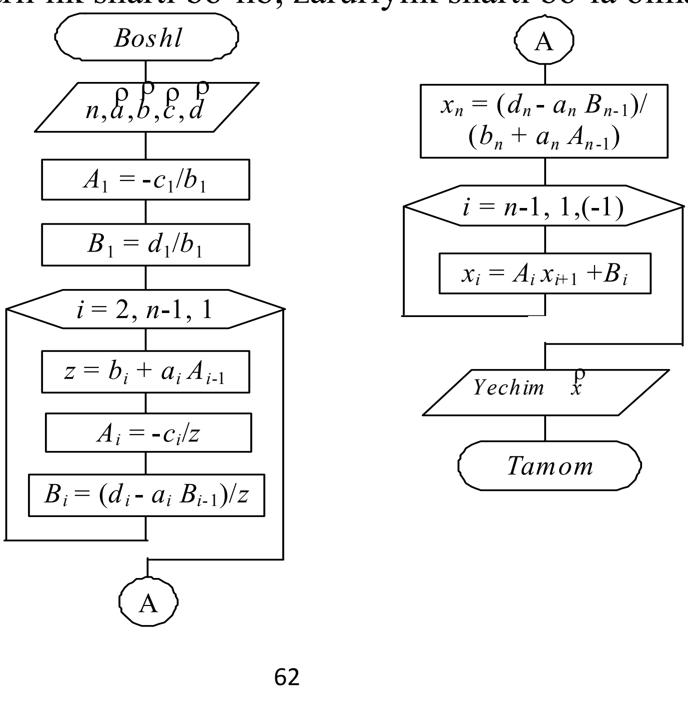
Shu tariqa qolgan yechimlar ham topiladi: $x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1$.

Ushbu usuldan foydalanganda

$$| b_i | \geq | a_i | + | c_i | \quad (6.18)$$

shart bajarilishi kerak yoki hech bo‘lmaganda bitta b_i qat’iy tengsizlikni qanoatlantirishi kerak, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

(6.18) shart yetarli lik sharti bo‘lib, zaruriylik sharti bo‘la olmaydi.



Rasm 6.2. Progonka usulining blok-sxemasi.

6.2.4. Kvadrat ildizlar usuli

Kvadrat ildizlar usuli maxsus xossaga ega bo‘lgan, ya’ni

$A\bar{x} = \bar{b}$ (6.19)

chiziqli tenglamalar sistemasida noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan A matritsa simmetrik bo‘lganda, qo‘llaniladi.

Agar barcha i va j lar uchun $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ bo‘lsa (bu yerda $\overline{a_{ji}}$ ustidagi chiziq qo‘shma kompleks sonni bildiradi) elementlari a_{ij}^* dan iborat bo‘lgan A^* matritsa berilgan $A = [a_{ij}]$ matritsaga nisbatan **qo‘shma matritsa** deyiladi.

Agar A kvadrat matritsa o‘zining qo‘shmasi A^* bilan ustma-ust tushsa, ya’ni $A^* = A$ bo‘lsa, unga **Ermit matritsasi** yoki **o‘z-o‘ziga qo‘shma matritsa** deyiladi.

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan Ermit matritsasi **simmetrik matritsa** deyiladi. Kvadrat ildizlar usulining g‘oyasi A matritsani uchburchak va diagonal matritsalar ko‘paytmasi shaklida tasvirlashdan iborat.

(6.19) sistemani yechish uchun A matritsani ikkita o‘zaro transponirlangan uchburchak matritsalar ko‘paytmasi shaklida yozib olamiz:

$A = S^T \cdot S$, (6.20)

bunda

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \Lambda & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \Lambda & s_{2n} \\ & \Lambda & & \\ 0 & 0 & \Lambda & s_{nn} \end{vmatrix}; \; S^T = \begin{vmatrix} s_{11} & 0 & \Lambda & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \Lambda & 0 \\ & \Lambda & & \\ s_{1n} & s_{2n} & \Lambda & s_{nn} \end{vmatrix}.$$

S^T va S matritsalarni ko‘paytirib hamda A matritsaga tenglab, s_{ij} larni topish uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = a_{1j} / s_{11}, & (j > 1); \\ s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, & (1 \le i \le n); \\ s_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj}}{s_{ii}}, & (i < j); \\ s_{ij} = 0, & (i > j). \end{cases} \quad (6.21)$$

S matritsani topish uchun (6.19) sistemadagi matritsani (6.20) ga ekvivalent bo‘lgan ikkita uchburchak matritsalarga almashtiramiz:

$$S^T \bar{y} = \bar{b}, \qquad S\bar{x} = \bar{y} \quad .(6.22)$$

(6.22) sistemani yoyib yozadigan bo‘lsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} s_{11} y_1 = b_1; \\ s_{12} y_1 + s_{22} y_2 = b_2 \; ; \\ \qquad \Lambda \\ s_{1n} y_1 + s_{2n} y_2 + ... + s_{nn} y_n = b_n \; ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + \ldots + s_{1n}x_n = y_1; \\ \quad s_{22}x_2 + \Lambda + s_{2n}x_n = y_2; \\ \quad\quad \Lambda \\ \quad\quad\quad s_{nn}x_n = y_n. \end{cases}$$

bulardan

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \qquad y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}\, y_k)/ s_{ii}; \qquad (i > 1);$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \qquad x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}\, x_k)/ s_{ii}; \qquad (i < n)$$

izlangan yechimlar topiladi.

Kvadrat ildizlar usuli boshqa usullarga qaraganda tez ishlanishi bilan vaqtdan yutadi, birinchidan, ko‘paytirish va bo‘lish amallari deyarli ikki martaga kamayadi, ikkinchidan ko‘paytmalar yig‘indisini xotira yacheykalarini band qilmasdan hisoblash imkonini beradi.

Bu usulni EHM da qo‘llash uchun berilgan sistemaning A matritsasini uchta matritsa ko‘paytmasi shaklida yozish kerak:

$$A = S^T \cdot D \cdot S,$$

bunda D – elementlari $d_{ii} = \pm 1$ bo‘lgan diagonal matritsa;

S – yuqori uchburchakli matritsa (agar $i > k$ bo‘lsa, $s_{ik} = 0$, $s_{ii} > 0$);

S^T – transponirlangan pastki uchburchakli matritsa.

Misol 1. Aytaylik, ikkinchi tartibli A – simmetrik matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

S va D matritsalarni quyidagicha ko‘rinishlarda izlaymiz:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}, \text{bunda } d_{ii} = \pm 1.$$

U holda

$$S^T D S = \begin{bmatrix} s_{11}^2 d_{11} & s_{11}s_{12}d_{11} \\ s_{11}s_{12}d_{11} & s_{12}^2 d_{11} + s_{22}^2 d_{22} \end{bmatrix}.$$

$A = S^T D S$ tenglik shartidan, navbatdagi tenglamalarni hosil qilamiz: $s_{11}^2 d_{11} = a_{11}$; $s_{11}s_{12}d_{11} = a_{12}$; $s_{12}^2 d_{11} + s_{22}^2 d_{22} = a_{22}$.

Birinchi tenglamadan d_{11} = sign a_{11};$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$.

Agar $a_{11} \neq 0$ bo‘lsa, u holda $s_{12} = a_{12} / (s_{11}\ d_{11})$ bo‘ladi va natijada $s_{22}^2 d_{22} = a_{22} - s_{12}^2 d_{11}$ ga ega bo’lamiz, bundan

d_{22} = sign $(a_{22} - s_{12}^2 d_{11})$;

$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2\, d_{11}|}$.

Agar $S^T DS$ ma’lum bo‘lsa, u holda $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sistemaning yechimi quyidagi sistema yechimi bilan ustma-ust tushadi:

$$S^T D \cdot \vec{y} = \vec{b}; \quad S \cdot \vec{x} = \vec{y}. \qquad (6.23)$$

S matritsa elementlarini topish (A dan ildiz ajratish) quyidagi rekurrent formulalar yordamida bajariladi:

$$d_k = \text{sign}\left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} d_i\, s_{ik}^2 \right);$$

$$s_{kk} = \sqrt{\left|a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} d_i\, s_{ik}^2\right|}; \quad (6.24)$$

$$s_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} d_i\, s_{ik}\, s_{ij}\right) / (s_{kk}\, d_k);$$

$k = 1, 2, ..., n; j = k+1, k+2, ..., n.$

Bu formulalarda avvalo $k = 1$ deb faraz qilamiz va

$$d_1 = \text{sign}\,(a_{11}); s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$$

larni ketma-ket hisoblab, S (s_{1j}, j>1) matritsaning birinchi satr elementlarini topamiz. So‘ngra $k = 2$ deb olib, s_{22} ni hisoblaymiz va matritsaning ikkinchi satr elementlari j>2 uchun s_{1j} topiladi va h.k.

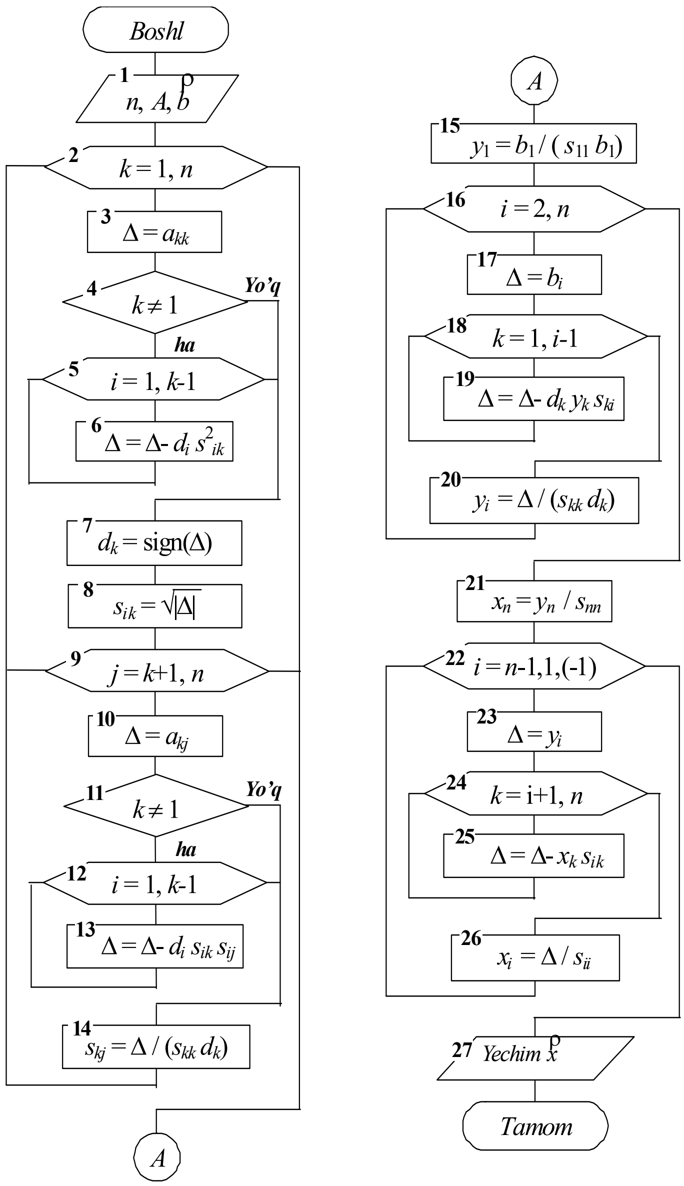
(6.23) sistemaning yechimi S matritsaning uchburchaklik shakliga ko‘ra Gaussning teskari usuliga o‘xshash formulalar bilan topiladi:

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11} d_1}, \qquad y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} d_k\, s_{ki}\, y_k) / (s_{ii}\, d_i); \quad i = 2,3,...,n;$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \qquad x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}\, x_k) / s_{ii}; \quad i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Kvadrat ildizlar usuli matritsaning simmetriklik xossasi sababli Gauss usuliga qaraganda deyarli ikki marta samaraliroq.

Kvadrat ildizlar usulining algoritmi sxemasi 2.3-rasmda keltirilgan. sign(x) funktsiyaning qiymati barcha $x > 0$ uchun +1 ga va barcha $x < 0$ qiymatlar uchun –1 ga teng.



Rasm 2.3. Kvadrat ildiz usulining blok-sxemasi.

Misol 2. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini kvadrat ildizlar usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Yechilishi: A matritsa ikkita uchburchakli matritsalarning ko‘paytmasidan iborat ekanligini tekshirish qiyin emas (bu yerda $d_{ii} = 1$):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S^T \cdot S.$$

Demak, berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$S^T \cdot S \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Belgilash kiritamiz:

$$S \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

U holda $\vec{y}$ vektor uchun $S^T \vec{y} = \vec{b}$ sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

Bu yerda$y_1 = 3$; $y_2 = 2$; $y_3 = 1$.

$\vec{y}$ ni bilgan holda, $S\vec{x} = \vec{y}$ sistemani yechamiz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Bu yerda$x_3 = 1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 1$.

6.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning iteratsion usullari

Yuqori tartibli tenglamalar sistemalarini yechish va EHM da amalga oshirishda qulayligi uchun iteratsion usullardan foydalaniladi. Iteratsion usullarda hisoblash avvalida izlanayotgan yechimga qandaydir boshlang‘ich yaqinlashish berilishi talab qilinadi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashish tezligi va shartlari sistemaning A matritsasi xossalariga va boshlang‘ich yaqinlashishning tanlanishiga bog‘liq.

(6.1) yoki (6.2) sistemalarga iteratsiya usulini qo‘llash uchun quyidagi ko‘rinishga o‘tkazish zarur:

$$\bar{x} = G\bar{x} + \bar{f} \quad (6.25)$$

va keyin iteratsiya jarayoni quyidagi rekurrent formulalar yordamida bajariladi:

$$\bar{x}^{(k+1)} = G\bar{x}^{(k)} + \bar{f}\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots \quad (6.25^*)$$

G matritsa va $\bar{f}$ vektor (6.1) sistemani shakl almashtirish natijasida hosil qilinadi.

(6.25*) ni yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun $|\lambda_i(G)| < 1$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir, bunda $\lambda_i(G)$ – G matritsaning barcha xos qiymatlari. Agar $\|G\|<1$ yoki $|\lambda_i(G)|<\forall\|G\|$ shartlardan biri bajarilganda ham (6.25*) yaqinlashuvchi bo‘ladi.

$\|\ldots\|$ belgi **matritsa normasini** bildiradi. Normani aniqlash uchun ko‘pincha quyidagi ikkita shart tekshirib ko‘riladi:

$$\|G\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |g_{ij}| \text{ yoki } \|G\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |g_{ij}|, \quad (6.26)$$

bunda $G = \{g_{ij}\}_1^n$.

Agar A matritsa diagonal xususiyatiga ega bo‘lsa, ya’ni

$$|a_{ii}| > \sum_{i,j=1; i \ne j}^{n} |a_{ij}|, \qquad A = \{a_{ij}\}_1^n \quad .(6.27)$$

shart bajarilsa, yaqinlashish kafolatlangan bo‘ladi.

Agar (6.26) yoki (6.27) shart bajarilsa, iteratsiya usuli ixtiyoriy $\overline{x}^{(0)}$ boshlang‘ich taqribiy qiymat bo‘yicha yaqinlashadi. Ko‘p hollarda $\overline{x}^{(0)}$ vektor sifatida yoki 0 ni yoki 1 ni yo bo‘lmasa (6.25) formuladagi $\overline{f}$ vektorning o‘zini olish mumkin.

A matritsaga ega bo‘lgan (6.2) sistemani (6.25) ko‘rinishga keltirish yoki (6.26) va (6.27) yaqinlashish shartlarini ta’minlash maqsadida shakl almashtirish bo‘yicha yondoshuvlar ko‘p.

Masalan, (6.25) ni quyidagi usulda hosil qilish mumkin.

Aytaylik $A = B + C$, det $B \neq 0$ bo‘lsin;

U holda $(B+C)\,\overline{x} = \overline{b} \Rightarrow$

$$B\,\overline{x} = -C\overline{x} + \overline{b} \Rightarrow$$

$$B^{-1}B\overline{x} = -B^{-1}\,C\overline{x} + B^{-1}\,\overline{b}$$

tenglik o’rinli bo‘ladi, bunda $\overline{x} = -B^{-1}\,C\overline{x} + B^{-1}\,\overline{b}$.

$-B^{-1}\,C = G$ deb olib, $B^{-1}\,\overline{b} = \overline{f}$ tenglikdan (6.25) ni hosil qilamiz.

(6.26) va (6.27) yaqinlashish shartlariga ko‘ra $A = B + C$ ixtiyoriy bo‘la olmaydi.

Agar *A* matritsa (6.27) shartni qanoatlantirsa, u holda *B* matritsa sifatida pastki uchburchak matritsani olish mumkin:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \Lambda & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & 0 \\ & \Lambda & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{bmatrix}, \; a_{ii} \neq 0.$$

Yoki

$$A\overline{x} = \overline{b};\ \Rightarrow\ A\overline{x} - \overline{b} = 0; \Rightarrow\ \overline{x} + (A\overline{x} - \overline{b}) = \overline{x};\ \Rightarrow$$

$$\overline{x} = \overline{x} + \alpha(A\overline{x} - \overline{b}) = \overline{x} + \alpha A\overline{x} - \alpha\overline{b} = (E + \alpha A)\overline{x} - \alpha\overline{b} = G\overline{x} + \overline{f}\ .$$

α parametrni shunday tanlash kerakki, $\|G\| = \|E + \alpha A\| < 1$ shart bajarilsin.

Agar (6.27) o‘rinli bo‘lsa, u holda almashtirishni (6.25) ga keltirish oson bo‘ladi, ya’ni (6.1) sistemaning har bir *i*- tenglamasini quyidagi rekurrent formulalar bo‘yicha x_i ga nisbatan yechiladi:

$$x_i^k = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1;\,j\neq i}^{n} a_{ij}\,x_j^{k-1} - b_i\right] = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,x_j^{k-1} + f_i;$$

$$g_{ij} = -\,a_{ij}\,/\,a_{ii}\,;g_{ii} = 0; f_i = b_i\,/\,a_{ii}\,, \qquad (6.27^*)$$

ya’ni $G = \{g_{ij}\}_1^n$.

Agar *A* matritsada diagonallik xususiyati bo‘lmasa, teng kuchlilikni saqlagan holda qandaydir chiziqli almashtirishlar bajarib, diagonallik xususiyatini hosil qilish kerak.

Misol. Uch no’malumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}8x_2 + 0{,}4x_3 = 1; & (I) \\ 3x_1 \quad + 2x_2 - 1{,}1x_3 = 0; & (II) \\ x_1 \quad\quad - x_2 + 7{,}3x_3 = 0; & (III) \end{cases} \qquad (6.\ 28)$$

Yechilishi:

Ko‘rinib turibdiki, (*I*) va (*II*) tenglamalarda diagonallik xususiyati yo‘q, (*III*) tenglamada esa mavjud, shuning uni o‘zgarishsiz qoldiramiz.

(I) tenglamani o‘zgartiramiz. Buning uchun (I) tenglikni α ga ko‘paytirib, (II) tenglikni esa β ga ko‘paytirib, ikkala tenglamani qo‘shamiz. Yig’indidan α va β ni qavsdan tashqariga chiqaramiz:

$$(2\alpha + 3\beta)\, x_1 + (-1{,}8\alpha + 2\beta)\, x_2 + (0{,}4\alpha - 1{,}1\beta) x_3 = \alpha\ .$$

$\alpha = \beta = 5$ deb olib, $25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 5$

tenglikni hosil qilamiz.

(II) tenglamani almashtirish uchun (I) ni γ ga, (II) ni δ ga ko‘paytirib, (II) dan (I) ni ayiramiz. Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$(3\delta - 2\gamma)\, x_1 + (2\delta + 1{,}8\gamma)\, x_2 + (-1{,}1\delta - 0{,}4\gamma) x_3 = -\gamma\ .$$

$\delta = 2$, $\gamma = 3$ deb olib, $0x_1 + 9{,}4x_2 - 3{,}4x_3 = -3$ tenglamani hosil qilamiz. Demak, tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga keldi:

$$\begin{cases} 25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = \ \ 5; \\ \qquad 9{,}4x_2 - 3{,}4x_3 = -3; \\ x_1 \ - \ x_2 + 7{,}3x_3 = \ \ 0. \end{cases} \tag{6.29}$$

Bunday usulni matritsalarning keng sinfi uchun qo‘llash mumkin.

Endi (6.29) ning har bir tenglamasini diagonal elementiga bo’lib chiqamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}04x_2 - 0{,}14x_3 = \ 0{,}2; \\ \qquad\qquad x_2 - 0{,}36x_3 = -0{,}32; \\ 0{,}14x_1 - 0{,}14x_2 \ + x_3 = \ \ 0. \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}04x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}2; \\ x_2 = 0{,}36x_3 - 0{,}32; \\ x_3 = -0{,}14x_1 + 0{,}14x_2. \end{cases}$$

Boshlang‘ich yaqinlashish sifatida, masalan,

$$\overline{x}^{(0)} = (0{,}2; -0{,}32; 0)^{\mathrm{T}}$$

vektorni olish mumkin. Sistemani (6.25*) texnologiya asosida yechamiz:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\,0{,}04x_2^{(k)} + 0{,}14x_3^{(k)} + 0{,}2; \\ x_2^{(k+1)} &= \ 0{,}36x_3^{(k)} - 0{,}32; \qquad\qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ x_3^{(k+1)} &= -\,0{,}14x_1^{(k)} + 0{,}14x_2^{(k)}. \end{aligned}$$

Ikkita qo‘shni taqribiy vektorlar qiymatlari aniqlik bo‘yicha ustma-ust tushganda hisoblash jarayoni to‘xtatiladi, ya’ni

$$\left| \overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)} \right| < \varepsilon\,.$$

6.3.1. Oddiy iteratsiya usuli

Sistema yechimini izlashning (6.25*) ko‘rinishdagi iteratsiya texnologiyasi **oddiy iteratsiya usuli** deb yuritiladi.

Oddiy iteratsiya usuli uchun absolyut xatolikni baholash mumkin:

$$\left\| \overline{x}^* - \overline{x}^{(k+1)} \right\| \quad \le \quad \left\| G \right\|^{k+1} \cdot \left\| \overline{x}^{(0)} \right\| + \frac{\left\| G \right\|^{k+1}}{1 - \left\| G \right\|} \cdot \left\| \overline{f} \right\|,$$

Bunda ||.. || belgi normani bildiradi.

Misol 1. Oddiy iteratsiya usulini qo‘llab, ε=0,001 aniqlik bilan tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 0{,}32x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}08x_4 + 2{,}15; \\ x_2 = \ \ 0{,}11x_1 + 0{,}16x_2 - 0{,}28x_3 - 0{,}06x_4 - 0{,}83; \\ x_3 = \ \ 0{,}08x_1 - 0{,}15x_2 \qquad\qquad + 0{,}12x_4 + 1{,}16; \\ x_4 = -0{,}21x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}27x_3 \qquad\qquad + 0{,}44. \end{cases}$$

Yechilishi:

Yechimni ε = 0,001 gacha aniqlikda beruvchi qadamlar sonini quyidagi munosabatdan topish mumkni:

$$\| \bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} \| \quad \le \quad \frac{\|G\|^{k+1}}{1 - \|G\|} . \|\bar{f}\| \le 0{,}001.$$

(6.26) formuladan yaqinlashishni baholaymiz. Bu yerda

$$\|G\| = \max_{1 \le i \le 4} \sum_{j=1}^{4} |g_{ij}| = \max\{0{,}56;\ 0{,}61;\ 0{,}35;\ 0{,}61\} = 0{,}61 < 1; \ \ \|\bar{f}\| = 2{,}15.$$

Demak, yaqinlashish ta’minlangan.

Boshlang‘ich taqribiy qiymat sifatida ozod hadlar vektorini olamiz, ya’ni $\bar{x}^{(0)} = (2{,}15; -0{,}83; 1{,}16; 0{,}44)^T$.

$\bar{x}^{(0)}$ qiymatlarini (6.25*) formulaga qo‘yamiz:

$$x_1^{(1)} = \ \ 0{,}32 \cdot 2{,}15 + 0{,}05 \cdot 0{,}83 + 0{,}11 \cdot 1{,}16 - 0{,}08 \cdot 0{,}44 + 2{,}15 = 2{,}9719;$$
$$x_2^{(1)} = \ \ 0{,}11 \cdot 2{,}15 - 0{,}16 \cdot 0{,}83 - 0{,}28 \cdot 1{,}16 - 0{,}06 \cdot 0{,}44 - 0{,}83 = -1{,}0775;$$
$$x_3^{(1)} = \ \ 0{,}08 \cdot 2{,}15 + 0{,}15 \cdot 0{,}83 + 0{,}12 \cdot 0{,}44 + 1{,}16 = 1{,}5093;$$
$$x_4^{(1)} = -0{,}21 \cdot 2{,}15 - 0{,}13 \cdot 0{,}83 - 0{,}27 \cdot 1{,}16 + 0{,}44 = -0{,}4326.$$

Hisoblashni davom etib, natijalarni jadvalga kiritamiz:

10-mingdan bir qadamda qiymat bilan

	x_1	x_2	x_3	x_4
	2,15	–0,83	1,16	0,44
	2,9719	–1,0775	1,5093	–0,4326
	3,3555	–1,0721	1,5075	–0,7317
	3,5017	–1,0106	1,5015	–0,8111
	3,5511	–0,9277	1,4944	–0,8321
	3,5637	–0,9563	1,4834	–0,8298
	3,5678	–0,9566	1,4890	–0,8332
	3,5760	–0,9575	1,4889	–0,8356
	3,5709	–0,9573	1,4890	–0,8362
	3,5712	–0,9571	1,4889	–0,8364
0	3,5713	–0,9570	1,4890	–0,8364

yaqinlashishga erishildi.

Javob: $x_1 \approx 3{,}571$; $x_2 \approx -0{,}957$; $x_3 \approx 1{,}489$; $x_4 \approx -0{,}836$.

Ushbu natijani (6.27*) formula bilan ham olish mumkin.

Misol 2. (6.27*) formula yordamida tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases} A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Yechilishi: Sistema ko‘rinishini (6. 27*) ga ko‘ra (6.25) ga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 = (2 + x_2 + x_3)/4; \\ x_2 = (4 - x_1 + 2x_3)/5; \\ x_3 = (6 - x_1 - x_2)/4; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^{(k+1)} = (2 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/4; \\ x_2^{(k+1)} = (4 - x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)})/5; \\ x_3^{(k+1)} = (6 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)})/4. \end{matrix} \quad (6.31)$$

Boshlang‘ich taqribiy yechim deb $\bar{x}^{(0)}=(0;\ 0;\ 0)^T$ vektorni olamiz. U holda k=0 uchun $\bar{x}^{(1)}=(0{,}5;\ 0{,}8;\ 1{,}5)^T$ bo‘lishi ravshan. Bu qiymatlarni (6.31) ga qo‘yamiz, ya’ni k=1 uchun, $\bar{x}^{(2)}= (1{,}075;\ 1{,}3;\ 1{,}175)^T$ ni hosil qilamiz.

Xatolik $\varepsilon_2 = \max\limits_{1 \le i \le 2} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right|$=max(0,575; 0,5; 0,325) = 0,575.

(6.27*) formula yordamida oddiy iteratsiya usuli bilan chiziqli tenglamalar sistemasi yechimini topish algoritmining blok-sxemasi 6.4-rasmda tasvirlangan.

Blok-sxemaning quyidagi bloklari alohida ahamiyatga ega:

(13) – blok, uning vazifasini keyinroq ko‘rib chiqamiz;

(21) – natijalarni ekranga chiqarish;

(22) – yaqinlashishni tekshirish (indikator).

(6.30) sistemani taklif qilingan sxema bo‘yicha tahlil qilamiz (n = 3, ω =1, ε = 0,001):

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases} A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,3}}; \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 = 2 \\ b_2 = 4 \\ b_3 = 6 \end{bmatrix}.$$

Blok 1. Boshlang‘ich ma’lumotlarni kiritamiz:

A, $\vec{b}$, $\vec{x}$, ω, ε, n: n = 3, ω =1, ε = 0,001.

Sikl I. $x0_i$ va x_i vektorlarning boshlang‘ich qiymatlarini beramiz (i = 1,2,3).

Blok 5. Iteratsiya soni hisobdonini noldan boshlaymiz.

Blok 6. Xatolik hisobdonini noldan boshlaymiz.

Sikl II – A matritsa va $\vec{b}$ vektor raqamlari hisobdoni:

i = 1:S = b_1 = 2 (blok 8).

Sikl *III*, blok 9 ga o‘tamiz – A matritsaning ustunlari raqamlarini hisobdoni: j = 1.

Blok 10: j = i, bo‘lganda, *blok* 9 ga qaytamiz va j ni birga oshiramiz: j =2.

blok 10 da $j \neq i$ (2 ≠ 1) – bo‘lsa, *blok* 11 ga o‘tiladi.

Blok 11: $S = 2 - (-1) \cdot x0_2 = 2 - (-1) \cdot 0 = 2$, va *blok* 9 ga o‘tiladi, bunda j ni birga oshiriladi: j = 3.

blok 10 da $j \neq i$ shart bajariladi, shuning uchun *blok* 11 ga o‘tiladi.

Blok 11: $S = 2 - (-1) \cdot x0_3 = 2 - (-1) \cdot 0 = 2$, va *blok* 9 ga o‘tiladi, bunda j ni birga oshiriladi: j = 4.

j ning qiymati n (n = 3) dan katta, demak, sikl yakunlanadi va blok 12 ga o‘tiladi.

Blok 12: $S = S / a_{11} = 2 / 4 = 0{,}5$.

Blok 13: $\omega = 1$; $S = S + 0 = 0{,}5$.

Blok 14: $d = | x_i - S | = | 1 - 0{,}5 | = 0{,}5$.

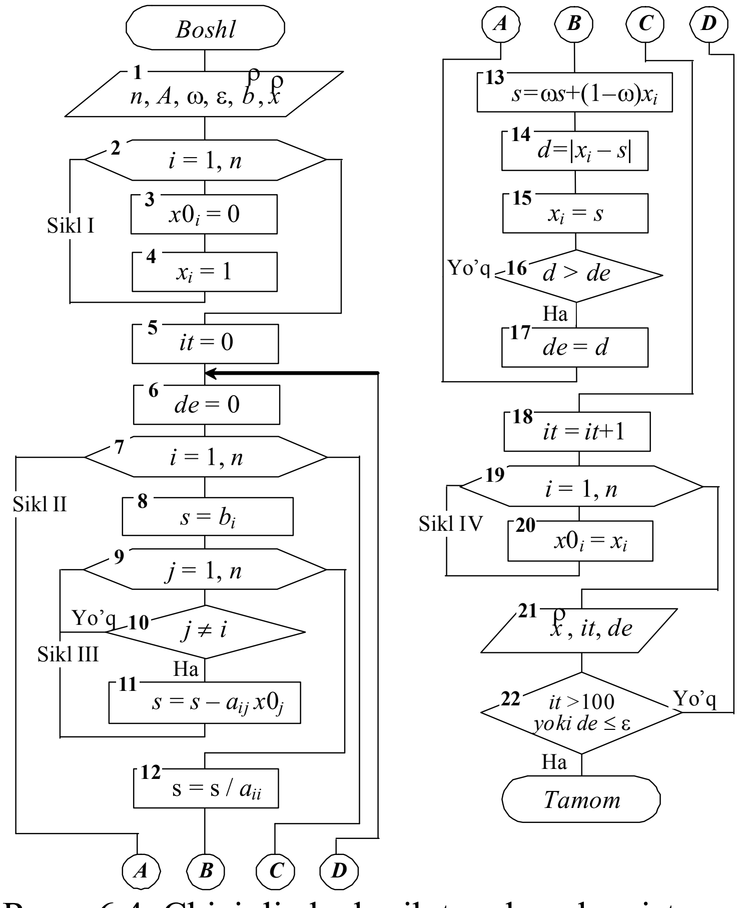
Blok 15: $x_i = 0{,}5$ ($i = 1$).

Blok 16: $d > de$: $0{,}5 > 0$ shartni tekshiramiz va blok 17 ga o‘tamiz, bu yerda $de = 0{,}5$ deb, «*A*» o‘tkazish bo‘yicha keyingi qadamga *sikl II – blok* 7 ga o‘tiladi, bu yerda i ni qiymati birga oshiriladi:

$i = 2$:$S = b_2 = 4$ (*blok* 8).

Sikl III, *blok* 9 ga o‘tamiz:$j = 1$.

Blok 10 bositasida $j \neq i$ ($1 \neq 2$) – *blok* 11 ga o‘tish bajariladi.



Rasm 6.4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usulida yechishning blok-sxemasi

Blok 11: $S = 4 - 1 \cdot 0 = 4$, va *blok* 9 ga o‘tamiz, va j ni qiymatini birga oshiramiz : $j = 2$.

blok 10 da shart bajarilmaydi, shuning uchun *blok* 9 ga o‘tamiz, unda j ni birga oshiramiz: $j = 3$, *blok* 11 ga o‘tamiz.

Blok 11: $S = 4 - (-2) \cdot 0 = 4$, shundan keyin *sikl III* ni yakunlaymiz va blok 12 ga o‘tamiz.

Blok 12: $S = S / a_{22} = 4 / 5 = 0{,}8$.

Blok 13: $\omega = 1$; $S = S + 0 = 0{,}8$.

blok 14: $d = |\ 1 - 0{,}8\ | = 0{,}2$.

Blok 15: $x_i = 0{,}8$ ($i = 2$).

Blok 16: $d > de$: $0{,}2 < 0{,}5$ shartni tekshiramiz va , «*A*» o‘tkazish bo‘yicha keyingi qadamga *sikl II – blok* 7 ga o‘tiladi, bu yerda *i* ni qiymati birga oshiriladi: $i = 3$:$S = b_3 = 6$ (*блок* 8).

Sikl III, *blok* 9 ga o‘tamiz:$j = 1$.

Blok 10 bositasida *blok* 11 ga o‘tish bajariladi.

Blok 11: $S = 6 - 1 \cdot 0 = 6$, va *blok* 9 ga o‘tiladi: $j= 2$.

Blok 10 bositasida *blok* 11 ga o‘tish bajariladi.

Blok 11: $S = 6 - 1 \cdot 0 = 6$. *Sikl III* ni yakunlaymiz va blok 12 ga o‘tamiz.

Blok 12: $S = S / a_{33} = 6 / 4 = 1{,}5$.

Blok 13: $S = 1{,}5$.

Blok 14: $d = |\ 1 - 1{,}5\ | = 0{,}5$.

Blok 15: $x_i = 1{,}5$ ($i = 3$).

Blok 16 asosan («*A*» va «*C*» o‘tkazmalar bo‘yicha) *sikl II* dan chiqamiz va *blok* 18 ga o’tamiz:

Blok 18. Iteratsiya sonini kattalashtiramiz $it=it+1=0+1=1$.

Blok 19 va 20 larda *sikl IV* $x0_i$ boshlang‘ich qiymatni almashtiramiz x_i ($i = 1,2,3$).

Blok 21. Iteratsiyaning oraliq qiymatlarini bosmaga chiqaramiz, bizning holda: $\vec{x} = (0{,}5;\ 0{,}8;\ 1{,}5)^T$, $it = 1$; $de = 0{,}5$.

Blok 22 vositasida «*D*» o’tkazish bo’yicha *blok* 6 ga o‘tamiz va $de = 0$.

blok 7 da s*ikl II* ga o‘tamiz va yangi boshlang‘ich qiymatlar bilan $x0_i$ ($i = 1,2,3$) hisoblashni bajaramiz.

So‘ngra $x_1 = 1{,}075$; $x_2 = 1{,}3$; $x_3 = 1{,}175$ qiymatlarni olamiz.

Blok 18. Iteratsiya soninni oshiramiz $it = it + 1 = 1 + 1 = 2$.

Blok 19 va 20 larda *sikl IV* $x0_i$ boshlang‘ich qiymatni almashtiramiz x_i ($i = 1,2,3$).

Blok 21. Ikkinchi iteratsiya qiymatlarini bosmaga chiqaramiz: $\vec{x} = (1{,}075;\ 1{,}3;\ 1{,}175)^T$, $it = 2$; $de = 0{,}575$; va h.k.

Chiziqli tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan yechish dasturi:

```
#include <iostream.h>
#include <vector.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
using namespace std;
int main()
{
 // Kiritiladigan matritsa tartibini hisoblaymiz
```

```
int size;
cin >> size;
// Matritsani haqiqiy sonlardan iborat
// vektor ko‘rinishida saqlaymiz
vector <vector <long double> > matrix;
// Matritsa o‘lchami (size) x (size + 1),
// ozod hadlar ustunini hisobga olganda
matrix.resize (size);
for (int i = 0; i < size; i++)
{
matrix[i].resize (size + 1);
for (int j = 0; j < size + 1; j++)
{
cin >> matrix[i][j];
}
}
// Yechimning zarur aniqligini hisoblaymiz
long double eps;
cin >> eps;
// keyingi iteratsiyadagi noma’lumlarning vektor qiymatlarini kiritamiz,
// o‘lchami matritsa ustuni soniga teng, ya’ni. size,
// metodga ko‘ra oldiniga uni nollar bilan to‘ldiramiz
vector <long double> previousVariableValues (size, 0.0);
// zarur aniqlikka erishguncha
// iteratsiya jarayonini bajaramiz
while (true)
{
// joriy qadamda noma’lumlarning vektor qiymatlarini kiritamiz
vector <long double> currentVariableValues (size);
// nazariy formulalarga mos holda
// joriy iteratsiyada noma’lumlarning qiymatlarini hisoblaymiz
for (int i = 0; i < size; i++)
{
// matritsaning i-satridagi ozod had
// qiymati bilan i- noma’lumni initsiallaymiz
currentVariableValues[i] = matrix[i][size];
// i-noma’lumdan farqli barchasini summasini ayiramiz
for (int j = 0; j < size; j++)
{
if (i != j)
{
currentVariableValues[i] -= matrix[i][j] * previousVariableValues[j];
}
}
// i- noma’lum bo’lganda koeffitsiyentga bo’lamiz
```

```
currentVariableValues[i] /= matrix[i][i];
}
// oldingi iteratsiyaga nisbatan joriy xatolikni hisoblaymiz
long double error = 0.0;
for (int i = 0; i < size; i++)
{
error += fabs (currentVariableValues[i] - previousVariableValues[i]);
}
// Agar zarur aniqlikka erishilgan bo'lsa, u holda jarayonni to'xtatamiz
if (error < eps)
{
break;
}
// Keyingi iteratsiyaga shunday o'tamizki,
// noma'lumlarning joriy qiymatlari
// oldingi iteratsiyaning qiymatlari bo'lsin
previousVariableValues = currentVariableValues;
}
// Noma'lumlarning topilgan qiymatlarini 8 belgi aniqlikda chiqaramiz
for (int i = 0; i < size; i++)
{
printf ("%.8llf ", previousVariableValues[i]);
}
return 0;
}
```

6.3.2. Zeydel usuli

Zeydel usuli oddiy iteratsiyaning modifikatsiyalangan usuli bo‘lib, (6.25) ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasi $\bar{x} = G\bar{x} + \bar{f}$ uchun quyidagicha texnologiyasi mavjud:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= g_{11}x_1^k + \ldots + g_{1n}x_n^k + f_1; \\ x_2^{(k+1)} &= g_{21}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{2n}x_n^{(k)} + f_2; \\ x_3^{(k+1)} &= g_{31}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{31}x_n^{(k)} + f_3; \\ &\cdots \\ x_n^{(k+1)} &= g_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Bu texnologiya quyidagicha: Agar (6.27) munosabat o‘rinli bo‘lsa, (6.32) sistema va (6.27*) formuladagi navbatdagi $x_i^{(k)}$ $(2 \le i \le n)$ yaqinlashishni hisoblash uchun $x_i^{k-1}, \ldots, x_{i-1}^{k-1}$ qiymatlar o‘rniga oldin hisoblangan $x_1^k, \ldots, x_{i-1}^k$ qiymatlardan foydalaniladi, ya’ni (6.27*)

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}x_j^k + \sum_{j=i+1}^{\bar{n}} g_i x_j^{k-1} + f_i \text{ , } i = 1, \ldots, n. \quad (6.33)$$

ko‘rinishga keltiriladi.

Bu texnologiya iteratsiyalar sonini deyarli 2 marta qisqartiradi. Aniqlik bahosi xuddi oddiy iteratsiya usuliga o‘xshash tekshiriladi. Agar $x0_j$ ni x_j ga o‘zgartirilsa va $x0_i = 1$, $x0_i = x_i$ satrlarni chiqarib tashlansa, algoritm sxemasi ham oddiy iteratsiyaga o‘xshaydi.

Misol 1. Zeydel usulini qo‘llab, ε=0,0001 aniqlik bilan tenglamalar sistemasini iteratsiya uchun qulay ko‘rinishga keltirib yeching:

$$\begin{cases} 4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7 & (I) \\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6 & (II) \\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 2.2 & (III) \end{cases} \quad (6.34)$$

Yechilishi:

Sistema uchun (6.27) shart bajarilmaydi, shuning uchun uni berilgan talablarga mos ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9, & (I + II) \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7, & (2III + II - I) \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4, & (III - II) \end{cases} \quad (6.35)$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 2.4x_1 - 0.5x_2 - 2.4x_3 + 1.9; \\ 10x_2 = -2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.4x_3 + 9.7; \\ 10x_3 = 1.3x_1 - 0.2x_2 + 4.2x_3 - 1.4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3 + 0.19; \\ x_2 = -0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3 + 0.97; \\ x_3 = 0.13x_1 - 0.02x_2 + 0.42x_3 - 0.14. \end{cases}$$

Bu yerda $\|G\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |g_{ij}| = \max\{0.53;\ 0.75;\ 0.57\} = 0.75 < 1$, demak, Zeydel jarayoni yaqinlashadi.

(6.32) hisob texnologiyasi bo‘yicha $\overline{x^0} = \{0.19; 0.97; -0.14\}$.

$$x_1^{(1)} = 0.24 * 0.19 - 0.05 * 0.97 + 0.24 * 0.14 + 0.19 = 0.2207;$$

$$x_2^{(1)} = -0.22 * 0.2207 + 0.09 * 0.97 + 0.44 * 0.14 + 0.97 = 1.0703;$$

$$x_3^{(1)} = 0.13 * 0.2207 - 0.02 * 1.0703 - 0.42 * 0.14 - 0.14 = -0.1915;$$

	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
	0.19	0.97	-0.14		0.2467	1.1135	-0.2237
	0.2207	1.0703	-0.1915		0.2472	1.1143	-0.2241
	0.2354	1.0988	-0.2118		0.2474	1.1145	-0.2243
	0.2424	1.1088	-0.2196		0.2475	1.1145	-0.2243
	0.2454	1.1124	-0.2226				

Javob: $x_1 = 0.248$; $x_2 = 1.115$; $x_3 = -0.224$.

Eslatma. Agar bitta sistemani oddiy iteratsiya va Zeydel usullarida ishlash mumkin bo‘lsa, Zeydel usulini qo‘llagan ma’qul. Biroq amaliyotda bu usullarning yaqinlashish sohasi turlicha bo‘lishi mumkin, ya’ni oddiy iteratsiya usuli yaqinlashuvchi, Zeydel usuli esa uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin va aksincha. Agar $\|G\|$ birga yaqin bo‘lsa, ikkala usul uchun ham yaqinlashish tezligi juda kichik bo‘ladi.

Yaqinlashishni tezlashtirish uchun “muvozanatlashuv” usuli deb ataluvchi sun’iy usuldan foydalaniladi. Bunda iteratsiya usuli bilan olingan $x_i^{(k)}$ ning qiymatlari quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$x_i^{(k)} = \omega x_i^{(k)} + (1-\omega) x_i^{(k-1)} \quad (6.36)$$

ω – ni $0 < \omega \le 2$ oraliqda qandaydir qadam bilan (h = 0,1 yoki 0,2) o‘zgartirish mumkin. ω parametr shunday tanlash kerakki, usul yaqinlashishi iteratsiyaning minimal soniga teng bo’lsin.

“Muvozanatlashuv”– faktorlar ta’siri to‘xtagandan keyin jism holatining asta sekin muvozanatlashishidir.

Misol 2. “Muvozanatlashuv” formulasini qo‘llab, 5-iteratsiya natijasini ko‘ramiz. ω = 1,5 deb olamiz.

$$x_1^{(5)} = 1.5 * 0.2467 - 0.5 * 0.2454 = 0.24735;$$
$$x_2^{(5)} = 1.5 * 1.1138 - 0.5 * 1.1124 = 1.1145;$$
$$x_3^{(5)} = 1.5(-0.2237) + (0.5 * 0.2226) = -0.22425.$$

Ko‘rinib turibdiki, 7-iteratsiya natijasini oldik.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy ko‘rinishdagi matritsalari determinantlarini Kramer usulida hisoblagandan ko‘ra Gauss usulida hisoblash ancha qulay.

$A\bar{x} = 0$ sistema uchun quyidagini hisoblash kerak:

$$\Delta = \det A = a_{11} * a_{22}^{(1)} ... a_{nn}^{(n-1)} = \pm \prod_{k=1}^{n} a_{kk} \, ,$$

Bilamizki, elementlarni ketma-ket yo‘qotish determinant qiymatini o‘zgartirmaydi. Bu yerda a_{kk} – A matritsaning elementlari. Bu belgilash oldingi matritsa satrlarini uni uchburchak shakliga o‘tkazish paytidagi noma’lumlarni yo‘qotish bosqichida “0” ga bo‘lishdan qochishda yoki mos ustunning «*max*» elementni izlashda bajarilgan almashtirishlarning juft yoki toq ekanligiga bog‘liq.

Simmetrik matritsa uchun

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & ... & t_{2n} \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & ... & t_{nn} \end{vmatrix}; \; \Delta = \det A = \left(t_{11} \cdot t_{22} \cdot ... \cdot t_{nn}\right)^2 .$$

6.5. Teskari matritsani topish

1.Gauss usuli bo‘yicha teskari matritsani topish

Har qanday $\det A \ne 0$ bo‘lgan matritsa uchun teskari matritsani topish mumkin. $A \cdot A^{-1} = E$ tenglik o‘rinli, bu tenglikni n ta noma’lumli n ta tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_{kj} = \delta_{ij}; \quad i, j = \overline{1, n}; \ (6.37)$$

bunda a_{ik} – A matritsaning elementlari;

z_{kj} – (A^{-1}) teskari matritsaning elementlari;

δ_{ij} – birlik matritsaning elementlari, shuningdek, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Teskari matritsaning bitta ustuni elementlarini topish uchun mos A matritsali (6.37) chiziqli sistemasini yechish kerak.

Demak, j- ustunni hosil qilish uchun A^{-1} $(z_{1j}, z_{2j}, \ldots z_{nj})$ quyidagi sistema yechiladi:

$$\begin{cases} a_{11}z_{1j} + a_{12}z_{2j} + \ldots + a_{1n}z_{nj} = 0; \\ \cdots \\ a_{j1}z_{1j} + a_{j2}z_{2j} + \ldots + a_{jn}z_{nj} = 1; \\ \cdots \\ a_{n1}z_{1j} + a_{n2}z_{2j} + \ldots + a_{nn}z_{nj} = 0. \end{cases} \quad (6.38)$$

Aytish kerakki, A matritsani teskarilash uchun (6.38) sistemani $j = \overline{1, n}$ bo‘lgan holda n marta yechish kerak. Sistemaning A matritsasi o‘zgarmaydi, shuning uchun noma’lumlarni yo‘qotish faqat bir marta bajariladi, (5.38) sistemaning o‘ng tomonidagi o‘zgarishlarga mos $(n–1)$ marta teskari amal bajariladi.

2. Uchburchakli matritsa yordamida A matritsaga teskari matritsani topish

Ma’lumki, har qanday teskari matritsa, agar u mavjud bo‘lsa, o‘lchami oldingi matritsa bilan bir xil bo‘ladi. Shunga ko‘ra

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.39)$$

Misol 1. 3-tartibli matritsaga teskari matritsani topaylik:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \ (6.40)$$

Yechilishi. A^{-1} matritsani quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}. \quad (6.41)$$

A va A^{-1} matritsalarni (6.39) tenglikka asosan ko‘paytirib,

$$t_{11} = 1; \ t_{11} + 2t_{21} = 0; \ 2t_{22} = 1$$

larni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} = 0; \\ 2t_{22} + 3t_{32} = 0; \\ 3t_{33} = 1. \end{cases}$$

Sistemadan $t_{11} = 1$; $t_{21} = –1/2$; $t_{31} = 0$; $t_{22} = 1/2$; $t_{32} = –1/3$; $t_{33} = 1/3$ qiymatlarni topamiz, so‘ngra

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{vmatrix}. \ (6.42)$$

(6.42) va (6.40) larni ko‘paytirib, (6.39) ni hosil qilamiz.

Ixtiyoriy A matritsani ikkita uchburchakli matritsa ko‘rinishida yozish mumkin.

Misol 2. Matritsa berilgan bo‘lsin.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix}. \quad (6.43)$$

$$T_1 = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \text{ va } T_2 = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

larni izlaymiz. T_2 matritsaning diagonali sun’iy ravishda 1 ga tenglab olinadi. U holda

$$A = T_1 \cdot T_2 . (6.44)$$

(6. 44) ni matritsalarga tadbiq qilib va (6.43) bilan tenglab, quyidagini olamiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13} \\ t_{21} & t_{21}r_{12} + t_{22} & t_{21}r_{13} + t_{22}r_{23} \\ t_{31} & t_{31}r_{12} + t_{32} & t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} \end{vmatrix}.$$

O’ng va chap qismlardagi qiymatlarni tenglashtiramiz va sodda hisoblashlar bajaramiz:

$t_{11} = 1; t_{11} r_{12} = -1; t_{11} r_{13} = 2;$

$t_{21} = -1;\ t_{21} r_{12} + t_{22} = 5; t_{21} r_{13} + t_{22} r_{23} = 4;$

$t_{31} = 2; t_{31} r_{12} + t_{32} = -1; t_{31} r_{13} + t_{32} r_{23} + t_{33} = 14;$

Hosil bo‘lgan sistemani yechamiz:

$t_{11} = 1;\ t_{21} = -1;\ t_{31} = 2;$

$t_{22} = 4;\ t_{32} = 6;\ t_{31} = 1;$

$r_{12} = -1;\ r_{13} = 2;\ r_{23} = 3/2.$

Shunday qilib,

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \text{ va } T_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

u holda

$$A^{-1} = T_2^{-1} \cdot T_1^{-1} .$$

Teskari matritsa elementlarini aniqlash uchun iteratsiya usulini qo‘llash

Teskari matritsa elementlarini topishning aniqligi quyidagi munosabat bilan baholanadi:

A–1·A = A0 = E.

Biroq umumiy holda teskari matritsa elementlari qandaydir xatolik bilan topiladi, bu xatolik ko’p sonli arifmetik amallarning bajarilishi va hisoblash jarayonida natijalarni yaxlitlash sababli yuzaga keladi.

Xatolikni kamaytirish maqsadida teskari matritsa elementlarini aniqlashning iteratsion usuli qo‘llaniladi.

Aytaylik, determinanti noldan farqli bo‘lgan A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsaning taqribiy qiymatlari topilgan bo‘lsin: $D_0 \approx A^{-1}$.

U holda teskari matritsa elementlarini aniqlash uchun quyidagi iteratsion jarayon quriladi:

$$F_{k-1} = E - AD_{k-1}, \ k = 1,2,3\ldots; \ (*)$$
$$D_k = D_{k-1}(E + F_{k-1}); \ k = 1,2,3\ldots \ (**)$$

Agar boshlang‘ich matritsa D_0 izlanayotgan A^{-1} matritsaga yetarlicha yaqin bo‘lsa, iteratsiyaning yaqinlashishi isbotlanadi.

Ushbu iteratsion sxemada F matritsa har bir qadamda D matritsaning A^{-1} ga yaqinligini baholaydi.

Sxema quyidagicha ishlaydi: Oldin (*) bo‘yicha $k = 1$ bo‘lganda $F_0 = E - AD_0$ topiladi, so‘ngra D_0F_0 ko‘paytma topiladi. (**) iteratsiya bo‘yicha $k = 1$ bo‘lganda $D_1 = D_0 + D_0F_0$ topiladi.

Kerakli aniqlikka erishilganligini tekshirish uchun AD_1 hisoblanadi, (*) ga ko‘ra esa $k = 2$ bo‘lganda $F_1 = E - AD_1$ hisoblanadi, agar matritsaning eng katta elementi $F_1 < \varepsilon$ shartni qanoatlantirsa, iteratsiya to‘xtatiladi va $A^{-1} \approx D_1$ qabul qilinadi.

Nazorat uchun savollar:

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining berilish usullari ayting.
2. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasiga misol keltiring.
3. Taqribiy yechimni aniq yechimdan chetlanish darajasini xarakterlovchi kattaliklar nimalar?
4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullarini sanang.
5. Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulini tushuntiring.
6. Tenglamalar sistemasi modifikatsiyalangan Gauss usuli bilan qanday yechiladi?
7. Progonka usulini tushuntiring.
8. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning iteratsion usullarini sanang.
9. Oddiy iteratsiya usulining mohiyatini tushuntiring.
10. Zeydel usuli qanday amalga oshiriladi?

Misol va masalalar:

1. Quyidagi tenglamalar sistemalarini barcha usullarda yeching (ε=0,001):

a) $\begin{cases} 12x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 22{,}66; \\ -3x_1 + 18x_2 - 3x_3 = 96; \\ -0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 3x_3 = 21. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + x_3 = 7; \\ -1{,}5x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

v) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 14. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\ 1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 15x_3 + 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 11 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 25x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19 \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases}$

2. Berilgan matritsalarga teskari matritsani toping:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4{,}2 & 1{,}6 & -3 \\ 0{,}4 & 3 & -2 & 0 \\ 1{,}6 & -0{,}8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

v) $B = \begin{bmatrix} 30 & 5 & -48 \\ 14 & 3 & -24 \\ 15 & 3 & -25 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 23 & -2 & -9 \\ -2 & -4 & 0 & 23 \\ -9 & -8 & 23 & 0 \\ 23 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$

i) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ j) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

k) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ l) $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

VII BOB. NOCHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

7.1. Masalaning qo‘yilishi

Ko‘pgina amaliy masalalar *n* ta noma’lumli nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ \quad \dots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{array}\right\} \quad (7.1)$$

Chiziqli tenglamalar sistemasidan farqli ravishda ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasidan boshqa nochiziqli tenglamalar sistemalarini yechishning to‘g‘ridan-to‘g‘ri usullari mavjud emas.

Eng ko‘p qo‘llaniladigan ikkita usul mavjud: oddiy iteratsiya usuli; Nyuton usuli.

7.2. Ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun oddiy iteratsiya usuli

Bizga *n* ta noma’lumli *n* ta chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi (7.1) berilgan bo‘lsin. Iteratsiyani qo‘llash uchun (7.1) sistemani biror usul bilan quyidagi kanonik shaklga keltirib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n); \\ \quad \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n); \end{array}\right\} \quad (7.2)$$

Bunda $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ - **iteratsiyalanuvchi funktsiyalar** deyiladi.

Bunday sistemalarni yechish algoritmi chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Zeydel yoki oddiy iteratsiya algoritmlariga o‘xshaydi.

Faraz qilaylik, dastlabki yaqinlashish, ya’ni vektor yechim ma’lum bo‘lsin: $x_i = a_i$, $i = 1,2,\dots,n$, u holda keyingi yaqinlashishlar quyidagicha topiladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(a_1, a_2, ..., a_n); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, a_2, ..., a_n); \\ \quad \dots \\ x_i = \varphi_i(x_1 ..., x_{i-1}, a_i, ..., a_n); \\ \quad \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1 ..., x_{n-1}, a_n). \end{array}\right\} \quad (7.2^*)$$

Iteratsion jarayon barcha noma’lumlarning qiymatlari ketma-ket keluvchi iteratsiyalarda berilgan ε qiymatdan kichik bo‘lmaguncha davom etadi. Shu maqsadda *n* o‘lchovli vektorlar fazosi R_n da $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektor va (7.2) sistemaning o‘ng tomonidagi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funktsiyalarning qiymatlaridan tuzilgan $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ vektorni olib, $y = \varphi(x)$ operatorni aniqlaymiz. Bu operator R_n ni R_n ga yoki R_n ning biror qismiga akslantiradi. Bu operator yordamida (7.2) sistema $x = \varphi(x)$ ko‘rinishda, (7.2*) jarayon esa $x = \varphi(a)$ ko‘rinishda yoziladi.

Dastlabki yaqinlashish haqiqiy qiymatlarga yaqin bo‘lishi kerak, aks holda iteratsion jarayon tugamasligi mumkin. Demak, dastlabki yaqinlashishni izlash muammosi paydo bo‘ladi (ya’ni yaqinlashuvchilik sharti). Uzoqlashuvchi bo‘lgan holda algoritm blok-sxemasida iteratsiyalar sonini cheklovchi mexanizm ishga tushadi.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \dfrac{x_2(x_1-1)-1}{2} - \dfrac{x_1^2 - x_2^2 - 1}{12} \\ y_2 = x_2 - \dfrac{x_2(x_1-1)-1}{2} + \dfrac{x_1^2 - x_2^2 - 1}{4} \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usulida yechishning C++ dasturi quyidagicha:

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
void fun_y1_y2(void)
{ float f1, f2;
f1=x2*(x1-1)-1;
f2=x1*x1-x2*x2-1;
y1=x1-f1/2-f2/12;
y2=x2-f1/2+f2/4;
}
void out put of result (void)
{ clrscr();
printf("x1 =%f d=%f,y1,d);
printf("\nx2=%f",y2);
printf("\n\nPress any key...");
getch();
}
void main()
{ float e;
clrscr();
printf("Input three number n");
printf("first value x10, x20 and ");
printf("e=epsilon/10\n");
do { fun_y1_y2();
d=fabs(y1-x1);
if(fabs(y2-x2)>d) d=fabs(y2-x2);
outputofresult();
x1=y1; x2=y2;}
while(d>=e);
}
 return 0;
}
```

7.2.1. Oddiy iteratsiya usulining yaqinlashish sharti

Umumiy ko‘rinishdagi ikkita tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y)=0; \\ F_2(x,y)=0. \end{aligned}\right\} \quad (7.3)$$

Ushbu tenglamalar sistemasining x va y haqiqiy yechimlarini berilgan aniqlik darajasi ε bilan topish talab qilinsin.

Faraz qilaylik, berilgan sistema yechimga ega va ularni o‘rnatish mumkin. Demak, oddiy iteratsiya usulini qo‘llash uchun (6.3) sistemani quyidagi ko‘rinishga keltirish kerak:

$$\left.\begin{aligned} x=\varphi_1(x,y); \\ y=\varphi_2(x,y); \end{aligned}\right\} ,(7.4)$$

Bunda φ_1 va φ_2 – iteratsiyalanuvchi funktsiyalar. Bu funktsiyalar yordamida iteratsion jarayon quriladi:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n); \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n); \end{aligned}\right\} ,\ n=0,1,2,\ldots \ (7.5)$$

Bu yerda $n = 0$ bo‘lganda, x_0 va y_0 – dastlabki taqribiy yechim.

Quyidagi tasdiq o‘rinli: Qandaydir $R(a\le x\le A;\ b\le y\le B)$ yopiq sohada bitta va faqat bitta yechim $x=\gamma$; $y=\beta$ mavjud bo‘lishi uchun quyidagi 3 ta shart bajarilishi kerak:

1) agar $\varphi_1(x,y)$ va $\varphi_2(x,y)$ funktsiyalar aniqlangan va R da uzluksiz differentsiallanuvchi bo‘lsa;

2) agar dastlabki yechim x_0, y_0 va barcha keyingi x_n, y_n yechimlar R ga tegishli bo‘lsa;

3) agar R da quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$\left.\begin{aligned} \frac{|\partial\varphi_1|}{|\partial x|}+\frac{|\partial\varphi_2|}{|\partial x|}\le q_1<1 \\ \frac{|\partial\varphi_1|}{|\partial y|}+\frac{|\partial\varphi_2|}{|\partial y|}\le q_2<1 \end{aligned}\right\} (7.6)$$

yoki unga teng kuchli tengsizlik o‘rinli bo’lsa:

$$\left.\begin{aligned} \frac{|\partial\varphi_1|}{|\partial x|}+\frac{|\partial\varphi_1|}{|\partial y|}\le q_1<1 \\ \frac{|\partial\varphi_2|}{|\partial x|}+\frac{|\partial\varphi_2|}{|\partial y|}\le q_2<1 \end{aligned}\right\} (7.6^*)$$

U holda iteratsion jarayon (7.5) aniq yechimga yaqinlashadi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\gamma,\quad \lim_{n\to\infty} y_n=\beta.$$

n- yaqinlashishning xatoligi quyidagi tengsizlik bilan baholanadi:

$$|\gamma-x_n|+|\beta-y_n|\le\frac{M}{1-M}(|x_n-x_{n-1}|+|y_n-y_{n-1}|),$$

bunda M – (7.6) va (7.6*) munosabatlardagi q_1 yoki q_2 lardan eng kattasi. Agar M<1/2 bo‘lsa, yaqinlashish yaxshi yaqinlashish deb hisoblanadi. Agar qo‘shni yaqinlashishlarda verguldan keyingi uchta ishonchli raqam ustma-ust tushsa, u holda $\varepsilon = 10^{-3}$ aniqlik ta’minlangan bo‘ladi.

Misol. Berilgan aniqlik bilan uchinchi tartibli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

Yechilishi: Sistemani (7.4) ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^3 + y^3}{6} + \dfrac{1}{2} = \varphi_1(x, y) \\ y = \dfrac{x^3 - y^3}{6} + \dfrac{1}{3} = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

R yopiq soha sifatida $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$ kvadratni olamiz. Agar x_0 va y_0 larni ushbu kvadratdan oladigan bo‘lsak, u holda

$$0 < \varphi_1(x_0, y_0) < 1$$
$$0 < \varphi_2(x_0, y_0) < 1$$

o‘rinli boladi. φ_1 va φ_2 funktsiyalarni tshlil qilib, ularning komponentlarini x=y=1 bo‘lganda berilgan kvadratdan izlaymiz.

$\varphi_1(x, y)$ uchun: $0 < \dfrac{x^3 + y^3}{6} < \dfrac{1}{3}$,

$\varphi_2(x, y)$ uchun esa: $-\dfrac{1}{6} < \dfrac{x^3 - y^3}{6} < \dfrac{1}{6}$,

u holda (x_0, y_0) ni ixtiyoriy tanlaganda (x_k, y_k) kerma-ketlik

1/3+1/2=5/6, 1/3–1/6=1/6, 1/3+1/6=1/2

ga asosan quyidagi to‘g‘ri to‘rtburchak ichida qoladi:

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{6}\ ;\ \frac{1}{6} \le y \le \frac{1}{2}.$$

U holda bu to‘g‘ri to‘rtburchak nuqtalari

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| = q_1 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{25/36 + 1/4}{2} = \frac{34}{72} < 1;$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| = q_2 = \frac{x^2}{2} + \left|-\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1;$$

– shartni qanoatlantiradi va sistemani oddiy iteratsiya usuli bilan yechish mumkin.

x_0 = 1/2, y_0 = 1/2 deb faraz qilsak, u holda birinchi iteratsiya: $x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1/8 + 1/8}{6} = 0{,}542$; $y_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1/8 - 1/8}{6} = 0{,}333$.

Ikkinchi iteratsiya: $x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0{,}14615}{6} = 0{,}533$;

$y_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{0{,}1223}{6} = 0{,}354$;

Uchinchi iteratsiya: x_3=0,533; y_3=0,351 bo‘ladi.

Hisoblashni davom qilib, x_4=0,533; y_4=0,351 larni aniqlaymiz. Ushbu qiymatlar yechim bo‘ladi.

7.3. Iteratsiyalanuvchi funktsiyalarni qurishning umumiy holi

(7.3) tenglamalar sistemasi uchun (7.6) shartni qanoatlantiruvchi (7.4) ko‘rinishdagi iteratsiyalanuvchi funktsiyalarni qurish masalasini qaraylik.

Iteratsiyalanuvchi funktsiyalarni quyidagicha yozib olamiz: $\varphi_1(x, y) = x + \alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y);$

$$\varphi_2(x,y) = y + \gamma F_1(x,y) + \delta F_2(x,y);$$

bunda $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ bo‘lishi kerak. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koeffitsiyantlar (7.6*) shart asosida tuzilgan quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari orasidan izlanadi:

$$1 + \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \qquad (7.7)$$

$$\alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$\gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$$

$$1 + \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Agar F_1 va F_2 xususiy hosilalar (x_0, y_0) nuqta atrofida unchalik tez o‘zgarmasa, parametrlarni bunday tanlashda (7.6*) shart kuzatiladi.

Misol. Berilgan tenglamalar sistemasi uchun iteratsiyalanuvchi funktsiyalarni quring:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0; & \varphi_1(x,y) - ? \\ x^3 - y = 0; & \varphi_2(x,y) - ? \end{cases}$$

Yechilishi: $x_0 = 0,8$ va $y_0 = 0,55$ deb olaylik. Iteratsiyalanuvchi funktsiyalarni quyidagicha izlaymiz:

$$\varphi_1(x,y) = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y);$$

$$\varphi_2(x,y) = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

(7.7) sistemani tuzamiz. Oldiniga (7.7) sistema komponentlarini $x_0 = 0,8$; y_0=0,55 bo‘lgan hol uchun topib olamiz:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} = 1,6;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 1,92;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} = 1,1;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = -1.$$

U holda (7.7) tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

1+1,6α+1,92β=0 α=–0,3

1,1α–β=0 γ=–0,5 uning yechimlari.

1,6γ+1,92δ =0 β=–0,3

1+1,1γ–δ=0 δ=0,4

Iteratsiyalanuvchi funktsiyalar ko‘rinishi aniqlandi:

$$\varphi_1(x,y) = x - 0,3(x^2 + y^2 - 1) - 0,3(x^3 - y);$$

$$\varphi_2(x,y) = y - 0,5(x^2 + y^2 - 1) + 0,4(x^3 - y);$$

Endi (7.5) bo‘yicha iteratsion jarayonni qurish mumkin.

7.4. Ikki noma’lumli tenglamalar sistemasi uchun Nyuton usuli

Umumiy ko‘rinishdagi ikkita tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} F(x,y)=0; \\ G(x,y)=0. \end{cases}$$

Nyuton usuliga ko‘ra (7.5) ko‘rinishdagi yaqinlashish ketma-ketligi quyidagi formuladan topiladi:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\Delta x^{(n)}}{J(x_n,y_n)};\ y_{n+1}=y_n-\frac{\Delta y^{(n)}}{J(x_n,y_n)},$$

bunda

$$\Delta x^{(n)}=\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F_y'(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G_y'(x_n,y_n) \end{vmatrix};$$

$$\Delta y^{(n)}=\begin{vmatrix} F_x'(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G_x'(x_n,y_n) & G(x_n,y_n) \end{vmatrix};\ n=0,1,2,\ ...$$

va agar Yakobian noldan farqli bo‘lsa:

$$J(x_n,y_n)=\begin{vmatrix} F_x'(x_n,y_n) & F_y'(x_n,y_n) \\ G_x'(x_n,y_n) & G_y'(x_n,y_n) \end{vmatrix}\neq 0$$

yechim yagona bo‘ladi.

Dastlabki qiymatlar x_0 va y_0 qo‘pol aniqlanadi (taqribiy – grafik yoki boshqa). Ushbu usul dastlabki taqribiy qiymat sistemaning aniq yechimiga yetarlicha yaqin bo‘lgandagina samarali bo‘ladi.

Misol 1.

$$\begin{cases} F(x,y)=2x^3-y^2-1=0; \\ G(x,y)=xy^3-y-4=0. \end{cases}$$

sistemaning ildizlarini toping.

Yechilishi: Grafiklarni chizib, taqribiy qiymatlarni topish mumkin: x_0 = 1,2 va y_0 = 1,7.

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2-1 \end{vmatrix}.$$

Boshlang’ich nuqtada Yakobian

$$J(1{,}2;1{,}7)=\begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix}=97{,}910.$$

Formulalardan quyidagilarni topamiz:

$$x_1=1{,}2-\frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix}=1{,}2+0{,}0349=1{,}2349;$$

$$y_1=1{,}7-\frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix}=1{,}7-0{,}0349=1{,}6610.$$

Jarayonni x_1 va y_1 bo‘lganda, qolgan qiymatlarni x_2=1,2343; y_2 = 1,6615 va h.k. larni hisoblab, yetarlicha aniqlikka erishguncha davom qilamiz.

Misol 2. $\begin{cases} f(x,y)=x^3+2y^2-1=0; \\ g(x,y)=5y^3+x^2-2xy-4=0. \end{cases}$

sistemaning ildizini 10^{-5} aniqlik bilan toping.

Yechilishi: Berilgan funktsiyalarning grafiklarini chizib, ularning kesishish nuqtalari (–0,7;–0,6) va (0.7;0,8) oraliqlarda yotishiga qarab, taqribiy qiymatlarni topish mumkni: x_0 = –0,6 va y_0 =0,8.

Bu funktsiyalarning xususiy hosilalari quyidagilardan iborat:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=3x^2,\ \frac{\partial f(y)}{\partial y}=4y,\ \frac{\partial g(x)}{\partial x}=2x-2y,\ \frac{\partial g(y)}{\partial y}=15y^2-2x.$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g_y f-f_y g}{f_x g_y-f_y g_x},\ y_{n+1}=y_n-\frac{f_x g-g_x f}{f_x g_y-f_y g_x}.$$

Formulalardan quyidagilarni topamiz:

$x_0=-0{,}6$; $y_0=0{,}8$; $f_0=0{,}064$; $g_0=-0{,}12$;

$\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}=1{,}08$; $\frac{\partial g_0(x)}{\partial x}=-2{,}8$; $\frac{\partial f_0(y)}{\partial y}=3{,}2$; $\frac{\partial g_0(y)}{\partial y}=10{,}8$

$x_1=-0{,}65213$; $y_1=0{,}79760$; $f_1=-0{,}00502$; $g_1=0{,}00254$;

$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}=1{,}127583$; $\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}=-2{,}89946$;

$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}=3{,}19038$; $\frac{\partial g_1(y)}{\partial y}=10{,}84663$;

$x_2=-0{,}64942$; $y_2=0{,}79809$; $f_2=-0{,}00001$; $g_2=-0{,}00001$;

$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}=1{,}26525$; $\frac{\partial g_2(x)}{\partial x}=-2{,}89502$;

$\frac{\partial f_2(y)}{\partial y}=3{,}19234$; $\frac{\partial g_2(y)}{\partial y}=10{,}85296$;

$x_3=-0{,}64942$; $y_3=0{,}79809$.

Demak, sistemaning aniq yechimi 10^{-5} aniqlikda quyidagiga teng bo‘ladi: $x=-0{,}64942$; $y=0{,}79809$.

7.5. n noma’lumli n- tartibli tenglamalar sistemasi uchun Nyuton usuli

n noma’lumli n- tartibli tenglamalar sistemasini Nyuton usuli bilan yechganda (7.1) tenglamalar sistemasidagi $F_i(x_1,x_2,...,x_n)$ funktsiyalar qatorga yoyiladi. Bunda ikkinchi tartibdan boshlab barcha yuqori tartibli hosilalar tashlab yuboriladi.

Aytaylik, (7.1) sistemani yechishda sinov iteratsiya natijasida dastlabki yechim ma’lum bo‘lsin: $\bar{x}=(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Masala ushbu yechimni to‘g‘rilashga keltiriladi: $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.

U holda keyingi iteratsiyada yechimlar quyidagicha bo‘ladi:

$$x_1=a_1+\Delta x_1;\ x_2=a_2+\Delta x_2;\ \ldots,\ x_n=a_n+\Delta x_n. \quad (7.8)$$

Δx_i ni topish uchun $F_i(x_1,x_2,...,x_n)$ ni qatorga yoyamiz:

$$\begin{cases} F_1(x_1,...x_n)\approx F_1(a_1,...,a_n)+\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n; \\ \quad\ldots \\ F_n(x_1,...x_n)\approx F_n(a_1,...,a_n)+\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n. \end{cases} \quad (7.9)$$

(7.1) ga asosan o‘ng tomonlarini nolga tenglaymiz va Δx_i ga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_1; \\
\quad \ldots \\
\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_n.
\end{cases} \tag{7.10}
$$

F_1, $F_2,\ldots,F_n$ funktsiyalarning qiymatlarini va ularning hosilalarini $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$ lar uchun topamiz. Hisoblashlar (7.8), (7.9) va (7.10) formulalar asosida olib boriladi. Jarayon $\max|\Delta x_i| < \varepsilon$ shart bajarilganda to‘xtatiladi. Bunda Yakobian noldan farqli bo‘lsa,

$$
j = \begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots. \\
\frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} \neq 0
$$

sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Yaqinlashishi bo‘yicha Nyuton usuli oddiy iteratsiya usuliga qaraganda tezroq yaqinlashadi.

Nazorat uchun savollar:

1. Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishning qanday usullarini bilasiz?
2. Ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasini yechishning oddiy iteratsiya usulini tushuntiring.
3. Oddiy iteratsiya usulining yaqinlashish shartini asoslang.
4. Iteratsiyalanuvchi funktsiyalar qanday quriladi?

Misol va masalalar:

Quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemalarini iteratsiya usulida yeching:

1. $\begin{cases} x^3 - 5x - y + 2 = 0 \\ y^3 - 2x + 3y^2 + 6 = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 126 \\ x + y = 12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = 36 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (x + y + 1)^2 + (x + y)^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 34 \\ x^2 y + xy^2 = 29 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x^2 - 2xy = -3 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 484 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

VIII BOB.FUNKTSIYALARNI APPROKSIMATSIYALASH (YAQINLASHTIRISH)

8.1. Masalaning qo‘yilishi

Ko‘pincha amaliy masalalarni yechishda qandaydir $y=f(x)$ funktsional bog‘lanishlar qiymatlarini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Bunday masalalarda ikkita holat bo‘lishi mumkin:

1. $[a, b]$ oraliqda x va y orasidagi oshkor bog‘lanish ma’lum bo‘lmasdan, faqat $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{1,n}$ tajriba ma’lumotlari jadvali ma’lum bo‘lib, $[x_i, x_{i/2}] \in [a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ bog‘lanishni aniqlash talab qilinadi. Bu masalaga tajriba ma’lumotlari jadvalidagi qiymatlarni aniqlashtirish vazifasi ham kiradi.

2. $y = f(x)$ bog‘lanish ma’lum va uzluksiz, biroq u shu qadar murakkabki, amaliy hisoblashlar uchun yaramaydi. Bunday holda $y=f(x)$ funktsuyani va uning ($f'(x),\ \max f(x),\ \int_a^b f(x)dx,$ va h.k.) xarakteristikalarini hisoblash ishlarini soddalashtirish masalasi ko‘ndalang bo‘ladi.

Shuning uchun moddiy resurslarni va vaqtni iqtisod qilish maqsadida qandaydir boshqa funktsional bog‘lanish $y=F(x)$ ni tuzish zarurati paydo bo‘ladi. Bu tuzilgan bog‘lanish $f(x)$ ga uning asosiy parametrlari bo‘yicha yaqin bo‘lishi, hisoblash oson va qulay bo‘lishi kerak, ya’ni $y = f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasida **yaqinlashtirish (approksimatsiyalash) masalasi** hal qilinishi kerak. $y = F(x)$ funktsiyaga **approksimatsiyalovchi funktsiya** deyiladi.

Bunday tipdagi masalalarni yechishda **asosiy yondoshuv** quyidagicha, tajribaning qandaydir ozod parametrlariga bog‘liq bo‘lgan $y=F(x)$ funktsiya tanlanadi, ya’ni $y = F(x) = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \varphi(x,\bar{c})$.

$f(x)$ va $F(x)$ funktsiyalarning qandaydir yaqinlik shartidan $\bar{c}$ vektor tanlanadi. $\bar{c}$ vektorni tanlash usullariga ko‘ra approksimatsiyaning turli ko‘rinishlari mavjud.

Agar yaqinlashish biror $\{x_i\}$, $i=\overline{1,n}$ diskret to‘plamda qurilsa, u holda approksimatsiyaga **nuqtaviy approksimatsiya** deyiladi.

Nuqtaviy approksimatsiyalash turlariga: interpolyatsiyalash; o‘rtacha kvadratik yaqinlashish kiradi.

Agar $\{x_i\}$ to‘plam uzluksiz, masalan, $[a, b]$ kesma ko‘rinishida bo‘lsa, bunday approksimatsiyaga **uzluksiz approksimatsiya** yoki **integral** (**Chebishev ko‘phadlari**) deyiladi.

Amaliyotda hozirgi paytda **chiziqli approksimatsiya** yaxshi o‘rganilgan va keng qo‘llaniladi, bunda interpolyatsion funktsiya $\bar{c}$ parametrga chiziqli bog‘langan **umumlashgan ko‘phad** deb nomlanuvchi $\varphi(x,\bar{c})$ funktsiya ko‘rinishida izlanadi:

$$F(x)=\varphi(x,\bar{c})=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x); \quad (8.1)$$

Bu yerda $\varphi_k(x)$ – bazis funktsiyalarning biror chiziqli bog‘liq bo‘lmagan sistemasi.

Bu ko‘phadlar quyidagi ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin:

– algebraik: $1, x, x^2, ..., x^n, ...$;

– trigonometrik: $1, \sin(x), \cos(x), \ldots \sin(nx), \cos(nx), \ldots$;

– eksponentsial: $e^{\alpha 0x}$, $e^{\alpha 1x}$, …, $e^{\alpha nx}$, …;

Bu yerda $\{\alpha_i\}$ – haqiqiy sonlarning biror sonli ketma-ketligi.

Bu sistemaning to‘liq bo‘lishi muhim ahamiyatga ega, ya’ni (8.1) vositasida $y=f(x)$ funktsiyani aniqlashda $[a,b]$ oraliqda berilgan aniqlik bilan approksimatsiyani ta’minlovchi sistema bo‘lishi kerak.

Ko‘pgina amaliy masalalarda oddiy algebraik ko‘phadlardan foydalanish qulay.

8.2. Funktsiyalarni interpolyatsiyalash

Interpolyatsiyalashda berilgan jadval yoki grafikning biror qiymatlari bo‘yicha oraliq qiymatni topishga harakat qilinadi. Bu usul nuqtaviy approksimatsiyalash turlaridan biridir.

Nuqtaviy approksimatsiyalashda interpolyatsiyalash mazmuni quyidagicha bo‘ladi:

$f(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo‘lsin, ushbu oraliqda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalarning yaqinligi ta’minlangan bo‘lsin. Berilgan kesmada $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le$ b shart bo‘yicha nuqtalar to‘plami tanlanadiki, ularni **tugunlar** deb ataladi. Tugunlarning soni (8.1) tenglikdagi $\bar{c}$ parametrlar soniga teng. Bu tugunlarda $f(x)$ funktsiyaning qiymatlari ma’lum, ya’ni $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}.$

Interpolyatsiya masalasi (8.1) ga mos ko‘phadlarni tanlashga olib kelinadi:

$$P(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k}, \quad (8.2)$$

Bunda c_k koeffitsiyentlar haqiqiy sonlardan iborat bo‘lib, quyidagi qoida asosida topiladi:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x_i^{n-k} = f(x_i) = y_i, i = \overline{0,n}. \quad (8.3)$$

Bunday ko‘phadga **interpolyatsion ko‘phad** deyiladi.

(8.3) shart qo‘llanadigan (8.2) amaliyotga **global interpolyatsiya** deyiladi. Agar (8.2) ko‘phad $f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi bo‘lgan $[a, b]$ kesmaning faqat alohida qismlari uchun, ya’ni $m < n$ bo‘lgan m ta interpolyatsion tugun uchun qurilsa, u holda interpolyatsiyani **lokal interpolyatsiya** deyiladi.

Tanlangan nuqtalar to‘plamidagi tugunlar turlicha bo‘lganligi uchun (8.3) sistemaning matritsasi va determinanti quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$G = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1},\ldots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1},\ldots & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1},\ldots & 1 \end{vmatrix}; \ |G| \ne 0, \quad (8.4)$$

(8.3) sistema yagona yechimga ega, ya’ni (8.2) ko‘phadning koeffitsiyentlari bir qiymatli aniqlanadi.

Ko‘rish mumkinki, (8.3) shart $f(x)$ va $F(x)$ funktsiyalarning yaqinligini ta’minlaydi, ya’ni interpolyatsiya tugunlarida $f(x)$ va $F(x)$ funktsiyalarning qiymatlari ustma-ust tushadi.

Agar (8.2) va (8.3) shartlar funktsiya qiymatlarini $x<x_0$ va $x>x_n$ bo‘lgan hol uchun hisoblashda qo‘llansa, bunday yaqinlashishga **ekstropolyatsiya** deyiladi.

8.3. Lokal interpolyatsiya turlari
8.3.1. Chiziqli interpolyatsiya

Chiziqli interpolyatsiyada jadvalda berilgan (x_i, y_i), ($i=\overline{0,n}$) nuqtalar to‘g‘ri chiziqlar bilan birlashtiriladi va dastlabki berilgan f(x) funktsiya [a; b] intervalda uchlari interpolyatsiya tugunlaridan iborat siniq chiziqqa yaqinlashadi.

Umumiy holda qismiy oraliqlar $[x_{i-1}, x_i]\in[a, b]$ turlicha bo‘ladi. Har bir siniq chiziq kesmasi uchun (x_{i-1}, y_{i-1}) va (x_i, y_i) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozish mumkin. Xususiy holda, i- interval uchun 2 nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}.$$

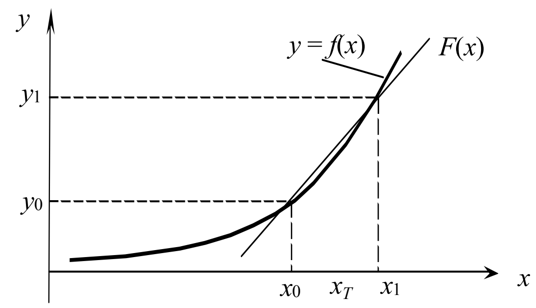
U holda ishchi formula:

$$y=a_i x_T+b_i,\ \ x_{i-1}\le x_T\le x_i, \quad (8.5)$$

bunda

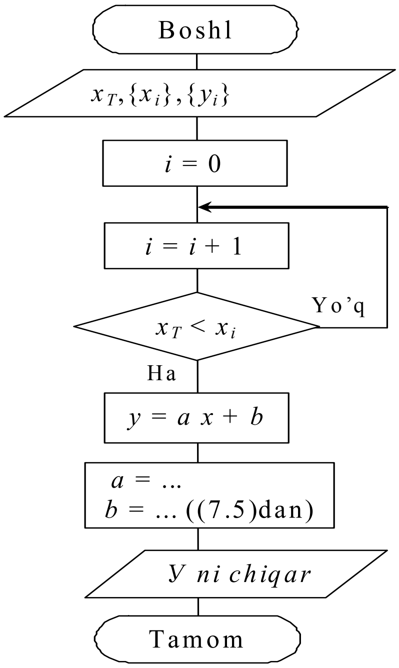
$$a_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, b_i=y_{i-1}-a_i x_{i-1},\ i=\overline{1,n}.$$

8.1-chizmadan ko‘rish mumkinki, (8.5) formulani amalga oshirish uchun oldin x_T qiymat tushadigan intervalni aniqlash kerak, so‘ngra bu oraliq chegaralaridan foydalanish mumkin.



Rasm 8.1. Chiziqli interpolyatsiya

Ushbu algoritmning blok-sxemasi:



Tugunlardan tashqari nuqtalarda nazariy xatolik

$$R(x) = f(x) - F(x) \neq 0.$$

$R_1(x) = \dfrac{M_2}{8} h^2$, bunda $M_2 = \max |f''(x)|$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Misol. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini x = 0,4 bo'lgan hol uchun chiziqli interpolyatsion formuladan foydalanib hisoblang:

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	– 0,5	0	0,2	1

Yechilishi: (8.5) ga asosan ishchi formulani yozib olamiz: $y = a_i x + b_i$ $x_{i-1} \le x_T \le x_i$,

bunda $a_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, $\quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$

x_t = 0,4; 0,3 $\le x_t \le$ 0,5;

Jadvaldagi x_{i-1} = 0,3; x_i = 0,5; y_{i-1} = 0,2; y_i = 1 qiymatlar yordamida koeffitsiyentlarni hisoblaymiz:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1 - 0{,}2}{0{,}5 - 0{,}3} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4;$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 0{,}2 - 4 \cdot 0{,}3 = -1;$$

Demak, $y = 4x$–1 funktsiya ko'rinishi aniqlandi. Endi x=0,4 qiymat uchun hosil bo'lgan chiziqli funktsiyaning son qiymatini aniqlaymiz: $y = 4{\cdot}0{,}4 - 1 = 0{,}6$.

8.3.2. Kvadratik (parabolik) interpolyatsiya

Kvadratik interpolyatsiyada interpolyatsion ko'phad sifatida $[x_{i-1}, x_{i+1}] \in [a, b]$ oraliqdan olingan kvadrat uchhad qaraladi:

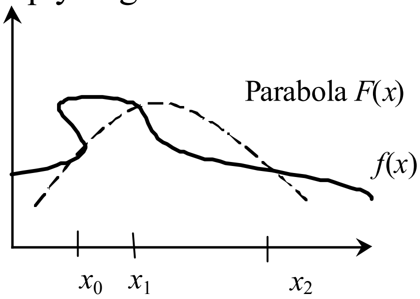
$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i,\ x_{i-1} \le x_T \le x_{i+1}\ (8.6)$$

Bunda a_i, b_i, c_i koeffitsiyentlarni aniqlash uchun (8.3) shart asosida tenglamalar sistemasi tuziladi, masalan:

$$\begin{cases} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}; \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i; \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}. \end{cases} \quad (8.7)$$

Hisoblash algoritmi yuqoridagi mavzuga o‘xshash, biroq (8.5) munosabat o‘rniga (8.7) sistemani yechish maqsadida (8.6) munosabatdan foydalaniladi. Ravshanki, $x_T \in [x_0, x_n]$ uchun 3 ta eng yaqin nuqtalar olinadi.

Usulning grafik tasviri quyidagicha:



Rasm 8.2. Kvadratik interpolyatsiya

Interpolyatsiya tugunlaridan tashqarida nazariy xatolikni topish formulasi:

$$R(x) = (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\ \frac{f'''(x)}{6}.$$

Misol. Jadval bilan berilgan $y=f(x)$ funktsiya qiymatini x=0,4 bo‘lgan hol uchun kvadratik interpolyatsion formuladan foydalanib hisoblang:

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	–0,5	0	0,2	1

Yechilishi: (8.6) ga asosan ishchi formulani yozib olamiz: $y=a_i x^2+b_i x+c_i$ $x_{i-1} \le x_T \le x_{i+1}$.

a_i, b_i, c_i koeffitsiyentlarni aniqlash uchun (8.7) ga ko’ra tenglamalar sistemasini tuzish kerak. Buning uchun x_t = 0,4 nuqtaga eng yaqin bo‘lgan 3 ta nuqtani tanlaymiz:

$$x_{i-1} = 0{,}1;\ x_i = 0{,}3;\ x_{i+1} = 0{,}5.$$
$$y_{i-1} = 0;\ y_i = 0{,}2;\ y_{i+1} = 1.$$

va mos tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1} \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}01a_i + 0{,}1b_i + c_i = 0; \\ 0{,}09a_i + 0{,}3b_i + c_i = 0{,}2; \\ 0{,}25a_i + 0{,}5b_i + c_i = 1; \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini matritsaviy ko‘rinishda yozib olamiz:

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}01 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}09 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix};\ \overline{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}2 \\ 1 \end{vmatrix};\ \overline{X} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \mathrm{A}-\overline{B}.$$

A^{-1} teskari matritsani hisoblab topamiz:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{75}{6} & \frac{-75}{3} & \frac{25}{2} \\ -10 & \frac{45}{3} & -5 \\ \frac{15}{8} & -\frac{10}{8} & \frac{3}{8} \end{vmatrix};$$

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{75}{6} & -\frac{75}{3} & \frac{25}{2} \\ -10 & \frac{45}{3} & -5 \\ \frac{15}{8} & -\frac{10}{8} & \frac{3}{8} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}2 \\ 1 \end{vmatrix};$$

Matritsalarni ko‘paytirib, *a, b, c* koeffitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$a = 0 - \frac{75}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{25}{2} = 7{,}5;\ b = -2;\ c = 0{,}125;$$

Natijada izlangan funktsiya ko‘rinishini olamiz:

$$y = 7{,}5x^2 - 2x + 0{,}125.$$

Endi $x = 0{,}4$ qiymat uchun hosil bo‘lgan kvadratik funktsiyaning son qiymatini aniqlaymiz. Natija $y = 0{,}525$ ga teng.

8.4. Global interpolyatsiya turlari

8.4.1. Umumiy ko’rinishdagi interpolyatsiya

Umumiy ko‘rinishdagi interpolyatsiyada interpolyatsion ko‘phad x_T ning aniqlanish sohasida barcha intervallar uchun (8.2) ko‘rinishda izlanadi, ya’ni $[x_0, x_n]$ uchun:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n. \quad (7.8)$$

a_i koeffitsiyentlarni aniqlash uchun (8.3) tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n = y_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_1^n = y_1; \\ \quad\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + ... + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \quad (7.9)$$

Ma’lumki, agar $i \neq j$ lar uchun $x_i \neq x_j$ shart o‘rinli bo‘lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘ladi. (8.9) tenglamalar sistemasini yechish uchun oldin bayon qilingan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullaridan foydalanish mumkin. (8.9) sistemani to‘g‘ridan to‘g‘ri yechib, $F(x)$ funktsiyani (8.8) ko‘rinishida olgan ma’qul, bunda bir nechta hisoblashlar bitta jadval bo‘yicha bajariladi. $y = f(x_T)$ ni bir martalik hisoblash uchun $\bar{a}$ vektor parametrlarini topish shart bo‘lmagan boshqa algoritmlar tavsiya etiladi, interpolyatsion ko‘phadlar esa $\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{0,n}$ jadval qiymatlari orqali yoziladi. Bular Lagranj va Nyuton interpolyatsion ko‘phadlaridir.

8.4.2. Lagranj interpolyatsion ko‘phadi

1. Ixtiyoriy interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun Lagranj formulasi. Lagranj ko'phadi interpolyatsiya tugunlarida $f(x)$ funktsiyaning qiymatlaridan tuzilgan chiziqli kombinatsiya ko'rinishida izlanadi va interpolyatsiya tugunlari sistemasidan maxsus qurilgan qandaydir n– darajali ko'phaddan iborat bo'ladi:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+...+y_n l_n(x). \quad (8.10)$$

Demak, oldiniga (n+1)– darajali yordamchi ko'phad tuziladi:

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \quad (8.11)$$

va n– darajali ko'phad quyidagicha hosil qilinadi:

$$\varphi_i(x)=\frac{\omega(x)}{x-x_i}=(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n). \quad (8.12)$$

Ko'rinib turibdiki, (8.11) ko'phad x_i interpolyatsiya tugunlarida nolga aylanadi, ya'ni $\omega(x_i)=0$, $i=\overline{0,n}$, (8.12) ko'phad $\varphi_i(x)$ esa x_i tugunlardan tashqari barcha tugunlarda nolga aylanadi, ya'ni:

$$\varphi_i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i;\\ (x_j-x_0)...(x_j-x_{i-1})(x_j-x_{i+1})...(x_i-x_n)\neq 0, & j=i.\end{cases} \quad (8.13)$$

(8.12) va (8.13) tengliklardan yangi begona (chet) ko'phad kelib chiqadi:

$$l_j(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)(x_j-x_0)...(x_j-x_{i-1})(x_j-x_{i+1})...(x_j-x_n)}$$

U j– tugundan boshqa barcha tugunlarda nol qiymatni qabul qiladi, x_j tugunda esa uning qiymati 1 ga teng bo'ladi, ya'ni

$$l_j(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ 1, & i=j;\end{cases} \quad i,j=\overline{0,n}.$$

U holda (8. 10) munosabatga ko'ra, j– ko'phad $l_j(x_i)\cdot y_j$ barcha tugunlarda (x_j dan tashqari) nol qiymatni qabul qiladi va x_j tugunda y_j ga teng bo'ladi:

$$l_j(x_i)\cdot y_j=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ y_j, & i=j;\end{cases} \quad i,j=\overline{0,n}$$

(7.10) ga ko'ra quyidagi ko'phadni tuzamiz:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_j)},$$

bunda $\omega'(x_j)=(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)$.

Yoki yana-da qisqa ko'rinishda quyidagicha bo'ladi:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}; \quad (8.14)$$

(8.14) munosabatning nazariy xatoligini aniqlash mumkin:

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\cdot\omega(x),\ \text{bunda } \xi\in[a,b].$$

(8.8) ko'phaddan farqli ravishda bu yerda barcha koeffitsiyentlarni oldindan aniqlash talab qilinmaydi. Biroq har bir x_T uchun (8.14) texnologiya asosida Lagranj ko'phadini hisoblash kerak. Shuning uchun ham hisoblash hajmi (8.9) hisoblash texnologiyasiga nisbatan farq qilmaydi.

Amaliyotda agar turli x_T lar uchun ko'p sonli takroriy hisoblashlar talab qilinsa, u holda (8.8) sxemadan foydalangan ma'qul. Lagranj ko'phadi boshqa sonli usullarni amalga oshirishda ham keng qo‘llaniladi. Shuni alohida ta’kidlash kerakki, $n = 1$ bo‘lganda bu chiziqli, $n = 2$ bo‘lganda parabolik interpolyatsiya hisoblanadi.

2. Teng uzoqlashgan interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun Lagranj formulasi. Interpolyatsion tugunlar orasidagi masofa $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ o‘zgarmas bo‘lsin. U holda ixtiyoriy tugunni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \ i = \overline{0, n}.$$

Yangi o‘zgaruvchi kiritamiz: $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. U holda

$$x - x_i = x_0 + th - x_0 - ih = (t - i)h. \quad (8.15)$$

(8.15) ayirmani (8.11) tenglikka qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) = th(t-1)h...(t-n)h = . = t(t-1)...(t-n)h^{n+1}$$

So‘ngra, $x_j - x_i = (x_0 + jh) - (x_0 + ih) = (j - i)h$ ekanligidan, (8.15) dan foydalanib, Lagranj formulasini hosil qilamiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{t-i}{j-i}, \quad (8.16)$$

bunda $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

(8.16) munosabatning nazariy xatoligini aniqlash mumkin: $R_n(x) = h^{n+1} t(t-1)...(t-n) \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Misol. Jadval bilan berilgan $y=f(x)$ funktsiya qiymatini $x=0{,}4$ bo‘lgan hol uchun Lagranj interpolyatsion formulasidan foydalanib hisoblang:

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	–0,5	0	0,2	1

Yechilishi: (8.14) ga asosan ishchi formulani yozib olamiz: $L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$;

Bizning holda $n = 3$ gacha, shu sababli:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} =$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_0)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$

$$= \frac{125}{3} x^3 - 30x^2 + \frac{91}{12} x - 0{,}5;$$

$x = 0{,}4$ bo‘lganda $y \approx L(x) = 0{,}3999$.

Berilgan jadval asosida $n=1$ va $x_T = 0{,}4$ bo‘lgan hol uchun Lagranj ko‘phadini tuzamiz:

$$L(x)=\sum_{i=0}^{1} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=$$

$$=0{,}2\frac{x-0{,}5}{0{,}3-0{,}5}+1\frac{(x-0{,}3)}{(0{,}5-0{,}3)}=5x-1{,}5-x+0{,}5=4x-1;$$

Bu esa chiziqli interpolyatsion formula bilan ustma-ust tushadi. Berilgan jadval asosida n=2 va x_T = 0,4 bo‘lgan hol uchun Lagranj ko‘phadini tuzamiz:

$$y \approx L(x)=\sum_{i=0}^{2} y_i \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j};$$

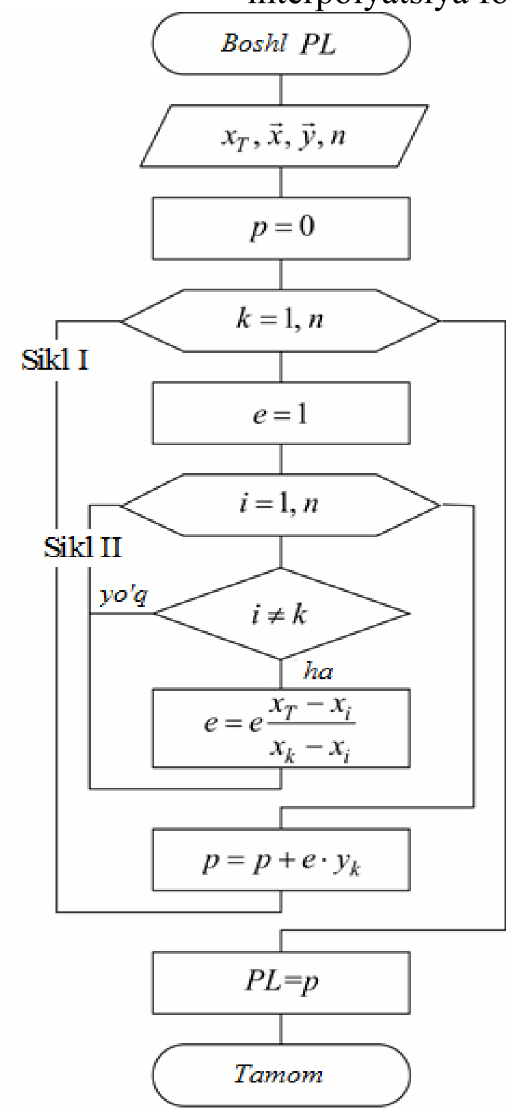
Qaralayotgan $[x_1, x_3]$ intervalda

$x_0 = 0{,}1$; $x_1 = 0{,}3$; $x_2 = 0{,}5$;

$y_0 = 0$; $y_1 = 0{,}2$; $y_2 = 1$

qiymatlarni olamiz. U holda 2–tartibli Lagranj interpolyatsion ko‘phadi hosil bo‘ladi:

$y \approx L(x) = 0{,}2\cdot\frac{(x-0{,}1)(x-0{,}5)}{(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}5)}+1\cdot\frac{(x-0{,}1)(x-0{,}3)}{(0{,}5-0{,}1)(0{,}5-0{,}3)}=7{,}5x^2-2x+0{,}125.$ Bu tenglik kvadratik interpolyatsiya formulasi bilan bir xil.



Rasm 8.3. Lagranj interpolyatsion ko’phadini hisoblash sxemasi.

Lagranj interpolyatsion ko‘phadini hisoblash uchun *PL* funktsiya ko‘rinishida quyidagi parametrlarga bog‘liq algoritm ishlab chiqildi:

x_T – nuqtalar qiymatlari;

$\breve{x}$, $\breve{y}$ – x va $f(x)$ larning ma’lum qiymatlarining bir o’lchamli massivlari;

n – $\breve{x}$, $\breve{y}$ massivlar o‘lchami;

Algoritmning blok-sxemasi 8.3-chizmada keltirilgan.

Sxemada quyidagi belgilashlar kiritilgan:

p – to‘planib boradigan $L(x_T)$ yig‘indi qiymati;

e – navbatdagi hadni ko‘paytirishdan hosil bo‘ladigan qiymat;

PL funktsiyaning oxirgi natijasi p ga teng bo‘ladi.

8.4.3. Nyuton interpolyatsion ko‘phadi

Umumiy ko‘rinishdagi interpolyatsiyaga o‘xshash Nyuton interpolyatsiyasida ham (8.3) shartlar asosida (8.2) ko‘phad tuziladi. Nyuton interpolyatsion ko‘phadi quyidagi ko‘rinishda izlanadi:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... +$$

$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \quad (8.17)$$

(8.8) holdagi kabi Nyutonning ishchi formulasini hosil qilish uchun a_i koeffitsiyentlarni aniqlash kerak. (8.9) hisoblash texnologiyasidan farqli ravishda Nyuton interpolyatsion ko‘phadini tuzishda

a) teng uzoqlashgan interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun **chekli ayirmalar** deb ataluvchi,

b) ixtiyoriy interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun esa **bo‘lingan ayirmalar** deb ataluvchi ishchi apparat kiritiladi.

Teng uzoqlashgan tugunlar berilgan bo‘lsin:

$$x_k = x_0 + kh, \; h = x_{i+1} - x_i = \text{const} > 0.$$

Bu tugunlarda $f(x)$ ning qiymatini quyidagicha ifodalaymiz: $f(x_k) = f_k = y_k$, $k = \overline{0,n}$.

Birinchi tartibli chekli ayirmalar deb quyidagi kattaliklarga aytiladi: $\Delta f(x_i) = \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$; $i = \overline{0,n}$.

Ikkinchi tartibli chekli ayirmalar quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi: $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$, $i=\overline{0,n}$.

$(k+1)$–tartibli chekli ayirmalar k–tartib ayirmalari orqali ifodalanadi:

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i, \; i = \overline{0,n}; \; k = \overline{1,n}. \quad (8.18)$$

8.1-jadvalda har bir keyingi chekli ayirma oldingi katakdagi pastki qatordan yuqori qatorni ayirish bilan hosil qilinadi. Oxirgi katakdagi $\Delta^k f_i$ nolga teng bo‘ladi. Qoidaga ko‘ra chekli ayirmalarni hisoblash sxemasi 8.1-jadvalda ko‘rsatilgan: **Jadval 8.1.**

i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	…
0	f_0				
		Δf_0			
1	f_1		$\Delta^2 f_0$		

		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
2	f_2		$\Delta^2 f_1$		
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
4	f_4				
…	…				

Ko‘rinadiki, chekli ayirmalarni bevosita funktsiya qiymatlari orqali ifodalash mumkin. Bunda i–tugun uchun ishchi formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta^k f_i = f_{k+i} - kf_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} f_{k+i-2} + ... + (-1)^k f_i; \quad (8.\ 19)$$

Bunda $i = \overline{0,n}$; $k = 1,2, ...$

Birinchi tartibli bo‘lingan ayirmalar deb quyidagi kattaliklarga aytiladi:

$$f(x_0, x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0};\ f(x_1, x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1};\ ...$$

bu yerda x_i – ixtiyoriy tugunlar.

Ushbu munosabatdan ikkinchi tartibli bo‘lingan ayirmalarni hosil qilamiz:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0};$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3 - x_1};\ \ldots$$

(k+1), k=1,2, ...–tartibli bo‘lingan ayirmalarni o‘zidan oldingi k–tartibli bo‘lingan ayirmalardan foydalanib hosil qilinadi:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) = \frac{f(x_1,x_2,...,x_{k+1})-f(x_0,x_1,...,x_k)}{x_{k+1} - x_0}.\ (8.20)$$

Teng uzoqlashgan tugunlar $x_k = x_0 + kh$ ($k = \overline{0,n}$) uchun bo‘lingan ayirmalar bilan chekli ayirmalar orasidagi bog‘liqlik formulasi: $f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{\Delta^k f_0}{h^k k!}$; k = 0,1,2, ... (8.21)

n– darajali ko‘phadning n– tartibli chekli ayirmasi ham, bo‘lingan ayirmalasi ham o‘zgarmas kattalikka teng.

Bo‘lingan ayirmalar quyidagi sxema bo‘yicha hosil qilinadi

Jadval 8.2.

i	x_i	f_i	$f(x_i,x_{i+1})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	…
0	x_0	f_0			
			$f(x_0,x_1)$		
1	x_1	f_1		$f(x_0,x_1,x_2)$	
			$f(x_1,x_2)$		
2	x_2	f_2		$f(x_1,x_2,x_3)$	
			$f(x_2,x_3)$		

3	x_3	f_3		$f(x_2,x_3,x_4)$	
...	…	…	…	…	…

1.**Teng uzoqlashgan interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun Nyuton formulasi.** Teng uzoqlashgan interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun turli xil formulalar mavjud, ular interpolyatsiya tugunlariga nisbatan x_T interpolyatsiyalash nuqtalarining qanday joylashganligiga bog‘liq.

Aytaylik, $f(x)$ funktsiya $x_k=x_0+kh$ ($k=\overline{0,n}$),

$h = x_{k+1} - x_k =$ const tugunlarda $f_k = f(x_k) = y_k$ jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

(8.3) shartlar va izlanayotgan (8.17) ko‘phad koeffitsiyentlarini aniqlash uchun tuzilgan chekli ayirmalar asosida quyidagi formula aniqlandi:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h_k},\ k=\overline{0,n};\ (8.22)$$

bunda $\Delta^0 = 1$; $0! = 1$ deb hisoblanadi.

(8.22) ni (8.17) ga qo‘yib, jadval boshida interpolyatsiyalash uchun Nyuton formulasini hosil qilamiz:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \quad (8.23)$$
$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Bunda chekli ayirmalar 8.1-jadval bo‘yicha yoki ixtiyoriy tugun uchun (8.19) formula bo‘yicha hisoblanadi

Amaliy tomondan qulay bo‘lishi uchun (8.23) formulani ko‘pincha boshqacharoq ko‘rinishda yozishadi. Buning uchun yangi o‘zgaruvchi kiritiladi:

$$t = \frac{x-x_0}{h}.$$

U holda $x = x_0 + th$; $\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1$;

$$\frac{x-x_2}{h} = t-2,\ \ldots,\ \frac{x-x_{n-1}}{h} = t-n+1;$$

va (8.23) ga asosan

$$N(x_0+th) =$$
$$= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.\ (8.24)$$

(8.24) ifoda $y = f(x)$ funktsiyani butun $[x_0,\ x_n]$ kesma bo‘yicha approksimatsiyalay oladi. Biroq hisoblash aniqligini oshirish va (8.24) dagi hadlar sonini kamaytirish maqsadida $t<1$ hol bilan chegaralanish, ya’ni (8.24) formulani faqat $x_0 \le x \le x_1$ oraliq uchun qo‘llash maqsadga muvofiq.

Argumentning boshqa qiymatlari uchun, masalan, $x_1 \le x \le x_2$ uchun x_0 o‘rniga x_1 qiymatni olish mumkin. U holda (8.24) ni quyidagicha o‘zgartirishga to‘g‘ri keladi:

$$N(x_i+th) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i;\ (8.25)$$

Bu yerda $i = 0,1,\ldots$

(8.25) ifodaga oldinga interpolyatsiyalash uchun **Nyutonning birinchi interpolyatsion ko‘phadi** deyiladi. Undan qaralayotgan kesmada nuqtaning chap tomonidagi funktsiya qiymatlarini hisoblash uchun foydalaniladi. Chunki $\Delta^k y_i$ bo‘lingan ayirmalar funktsiyaning y_i, y_{i+1}, ..., y_{i+k} qiymatlari orqali hisoblanadi, bunda $i + k \le n$. Shu sababli i ning katta qiymatlarida yuqori tartibli ayirmalarni hisoblash mumkin emas ($k \le n - i$). Masalan, (8.25) da $i = n - 3$ bo‘lganda faqat Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ bo‘lingan ayirmalarni hisoblash mumkin.

Kesmaning o‘ng yarmi uchun bo‘lingan ayirmalarni o‘ngdan chapga tomon hisoblab borish kerak. Bunda $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, ya’ni $t < 0$ va (8.25) lardan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$N(x_n + th) = \; = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 . \quad (8.26)$$

(8.26) ifodaga orqaga interpolyatsiyalash uchun **Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko‘phadi** deyiladi.

Kesmaning o‘rtasiga interpolyatsiyalash uchun Nyuton interpretatsiyalaridan foydalanish munkin bular Stirling, Gauss, Bessel ko‘phadlaridir.

Nyuton usulining nazariy xatoligi:

$$R_N(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot h^{n+1},$$

Bunda $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, ξ – kesmaning biror nuqtasi.

Misol 1. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya ko‘rinishini tiklang va uning qiymatini $x = 0{,}4$ bo‘lgan hol uchun Nyuton interpolyatsion formulasidan foydalanib hisoblang:

	x_n	n
		0,5
	0,1	
	0,3	0,2
	0,5	

Yechilishi: (8.17) ga asosan ishchi formulani yozib olamiz. Teng uzoqlashgan tugunlar uchun, $n = 3$;

$$N_3(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2) +$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

2-jadval bo‘yicha bo‘lingan ayirmalarni hosil qilamiz:

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - (-0{,}5)}{0{,}1} = 5;$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}2 - 0}{0{,}3 - 0{,}1} = 1;$$

$$f(x_2,x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1 - 0{,}2}{0{,}5 - 0{,}3} = 4 \;;$$

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2) - f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{1-5}{0,3-0} = -\frac{40}{3};$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_2,x_3) - f(x_1,x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{4-1}{0,5-0,1} = \frac{15}{2};$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3) - f(x_0,x_1,x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{15}{2} + \frac{40}{3}}{0,5} = \frac{125}{3}.$$

Hisoblash natijalarini jadvalga kiritamiz:

	x_n	n	(x_n, x_{n+1})	$f(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$	$f(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})$
		0,5			
	0,1			–40/3	125/3
	0,3	0,2		15/2	
	0,5				

Birinchi ustundagi bo‘lingan ayirmalardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

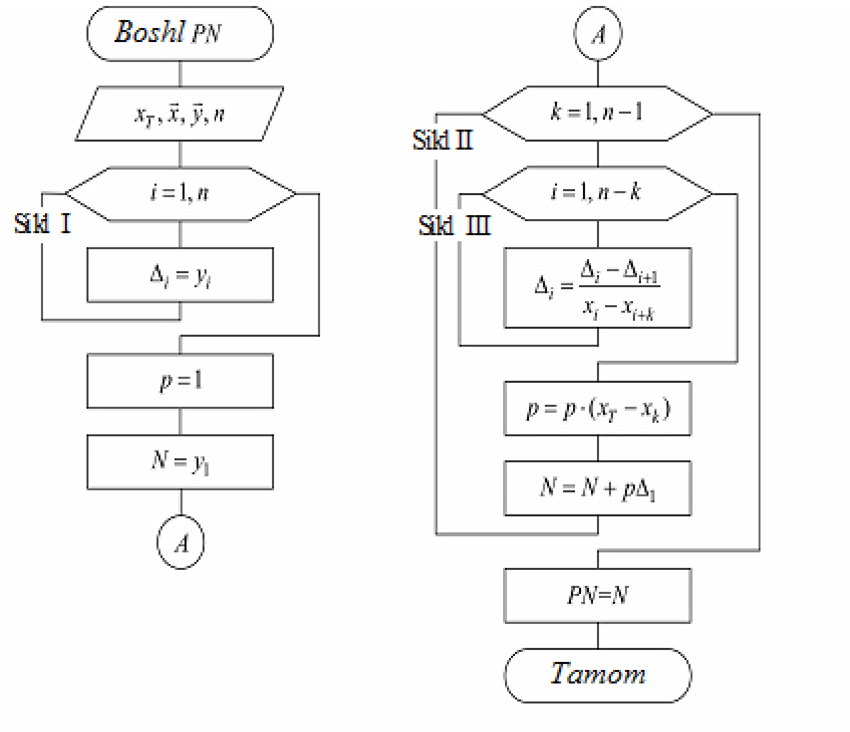
$$N_3(x) = -0,5 + (x-0)\cdot 5 + (x-0)(x-0,1)(-\frac{40}{3}) +$$

$$+(x-0)(x-0,1)(x-0,3)\frac{125}{3} = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{91}{12}x - 0,5.$$

Demak, $y = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{91}{12}x - 0,5.$

$$y(0,4) = \frac{125}{3}\cdot 0,4^3 - 30\cdot 0,4^2 + \frac{91}{12}\cdot 0,4 - 0,5 \approx 3999.$$

Ushbu masalani 8.3.1 paragrafda chiziqli interpolyatsiya funktsiyasi bilan yechganda y=0,6 va 8.3.2 paragrafda kvadratik interpolyatsiya usulida yechganda y=0,525 qiymatlar olingan edi. 8.4.2 da Lagranj interpolyatsion ko’phadi bilan yechilganda esa 0,3999 topilgan edi.



Rasm 8.4. Nyuton ko‘phadini hisoblash sxemasi.

Nyuton interpolyatsion ko‘phadini hisoblash quyidagi formula asosida bajariladi:

$$N_{n-1}(x_T) = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_T - x_1)(x_T - x_2)...(x_T - x_k)\Delta_1^k,$$

bunda x_T – ko‘phadning qiymati hisoblanadigan nuqta;

Δ_1^k – bu yerda k – tartibli bo‘lingan ayirmalar bo’lib, ular quyidagi rekurrent formulalar bilan topiladi:

$$\Delta_i^1 = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \qquad i = 1, ..., (n-1);$$

$$\Delta_i^2 = \frac{\Delta_i^1 - \Delta_{i+1}^1}{x_i - x_{i+2}}, \qquad i = 1, ..., (n-2);$$

$$\Delta_i^k = \frac{\Delta_i^{k-1} - \Delta_{i+1}^{k-1}}{x_i - x_{i+k}}, \quad i = 1, ..., (n-k).$$

Nyuton ko‘phadini hisoblash algoritmi sxemasi 8.3-rasmda *PN* funktsiya ko‘rinishida ishlab chiqildi.

PN funktsiyaning oxirgi natijasi *N* ga teng bo‘ladi.

Misol 2. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini x = 0,1 va x = 0,9 nuqtalarda hisoblang:

i	0	1	2	3	4
Y x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
Y y_i	1,2715	2,4652	3,6443	4,8095	5,96

echilishi: Misolni chekli ayirmalardan foydalanib yechamiz. Chekli ayirmalar uchun jadval tuzamiz:

x	$y=$	Δy	Δ	$\Delta^3 y$	Δ	$\Delta^5 y$

	$f(x)$		^2y		^4y	
0	1,2715					
		1,1937				
0,2	2,4652		–0,0146			
		1,1791		0,0007		
0,4	3,6443		–0,0139		–0,0001	
		1,1652		0,0006		0,0000
0,6	4,8095		–0,0133		–0,0001	
		1,1919		0,0005		
0,8	5,9614		–0,0128			
		1,1391				
1	7,1005					

Hisoblash uchun chekli ayirmalarning yuqori qiymatidan foydalanib, $x = 0,1$ bo‘lganda

$t = (x - x_0)/h = (0,1 - 0) / 0,2 = 0,5$ ni topamiz.

So‘ngra (8.24) formuladan

$$f(0,1) \approx N(0,1) = 1,2715 + 0,5 \times 1,1937 +$$
$$+\frac{0,5(0,5-1)}{2!}(-0,0146)+\frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)}{3!}0,0007+$$
$$+\frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)(0,5-3)}{4!}(-0,0001)=1,8702 \cdot$$

Chiziqli interpolyatsiya formulasiga ko‘ra $f(0,1) \approx 1,8684$ qiymat olingan bo‘lib, absolyut xatolik $\Delta = \{0,0018\}$ ga teng.

Funktsiyaning $x = 0,9$ nuqtadagi qiymatini (8.26) dan topamiz. Bu holda $t = (x - x_n) / h = (0,9 - 1) / 0,2 = -0,5$.

Chekli ayirmalarning quyi qiymatidan foydalanib, quyidagini aniqlaymiz:

$$f(0,9) \approx N(0,9) = 7,1005 - 0,5 \cdot 1,1391 -$$
$$-\frac{0,5(-0,5+1)}{2!}(-0,0128)-\frac{0,5(-0,5+1)(-0,5+2)}{3!}0,0005-$$
$$-\frac{0,5(-0,5+1)(-0,5+2)(-0,5+3)}{4!}(-0,0001)=6,5325 \cdot$$

Agar (8.24) formula bilan hisoblasak, $f(0,9) = 6,532522641$ hosil bo‘ladi. Chiziqli interpolyatsiya formulasiga ko‘ra $f(0,9)=6,53095$ qiymat olingan bo‘lib, absolyut xatolik $\Delta=\{0,00155\}$ ga teng chiqdi.

Misol 3. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini $x = 12{,}5$ nuqtada hisoblang:

x_i	0	5	10	12	13	15	16
y_i	1	151	1051	1789	2263	3451	4177

Yechilishi: Misolni bo‘lingan ayirmalardan foydalanib yechamiz. Bo‘lingan ayirmalar uchun jadval tuzamiz:

x	y	$f(x_0, x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_2, x_3)$
0	1			
		30		
5	151		15	
		180		$\underline{1}$
10	1051		27	
		369		1
12	$\underline{1789}$		35	
		$\underline{474}$		$\underline{1}$
13	2263		$\underline{40}$	
		594		$\underline{1}$
15	3451		44	
		726		
16	4177			

3-ustunning birinchi hadi, 1-tartibli bo‘lingan ayirma:

$f(x_0, x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{151-1}{5-0}=30;$

4-ustunning birinchi hadi, 2-tartibli bo‘lingan ayirma:

$f(x_1, x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_0}=\frac{180-30}{10-0}=15;$

5-ustunning birinchi hadi 2-tartibli bo‘lingan ayirma va h.k.:

$f(x_2, x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_0}=\frac{27-15}{12-0}=1;$

3-tartibli bo‘lingan ayirmalar ustuni o‘zgarmas bo‘lganligi uchun $y = f(x)$ funktsiyaning uchinchi darajali ko‘phad ekanligini aniqlaymiz. Misol shartidagi $x = 12{,}5$ qiymat jadvaldagi $x=12$ va $x=13$ qiymatlar orasida bo‘lganligi uchun tagiga chizilgan bo‘lingan ayirmalardan foydalanib, Nyutonning interpolyatsion formulasini tuzamiz:

$f(x)=1789+474(x-12)+40(x-12)(x-13)+(x-12)(x-13)(x-15)$ Bundan $y=f(x)$ funktsiyaning $x=12{,}5$ nuqtadagi qiymati topiladi:

$$f(12{,}5)=1789+474\cdot 0{,}5+40\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 2{,}5=2016{,}625.$$

2. Ixtiyoriy joylashgan tugunlar sistemasi uchun Nyuton interpolyatsion ko’phadi. Ixtiyoriy interpolyatsion tugunlar sistemasi uchun Nyuton formulasi 8.2-jadval asosida bo‘lingan ayirmalarni topish yo‘li bilan (8.21) munosabatga asosan (8.17) ko‘rinishda izlanadi.

$$N_n(x) = f(x_0) + (x–x_0)\, f(x_0,x_1) + (x–x_0)(x–x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) +\ldots+ \\ + (x–x_0)(x–x_1)\ldots(x–x_{n–1})\, f(x_0, x_1,\ldots, x_n) \quad (8.27)$$

Bu yerda, xuddi oldingidek, $N_n(x_k) = f(x_k)$, $(k = 0, 1, 2,\ldots,n)$.

Qoldiq had

$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)\ (x-x_0)(x-x_1)\ldots\ (x-x_n)$.

$n = 1$ bo‘lgan hol uchun bu chiziqli interpolyatsiya,

$n = 2$ bo‘lgan hol uchun esa kvadratik interpolyatsiya bo‘ladi.

8.5. Splayn – funktsiyalar

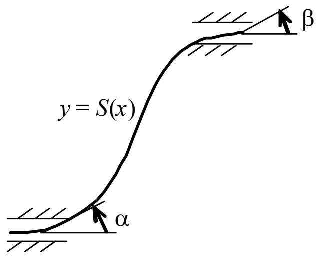
Biz oldingi paragrafda funktsiyani ko‘phadlar bilan yaqinlashtirishning turli usullarini ko‘rib chiqdik. Shuni aytish kerakki, interpolyatsion ko‘phadlar har doim ham interpolyatsiyalanuvchi funktsiyaga yaqinlashavermaydi. Ko‘phadning darajasi ortishi bilan koeffitsiyentlari ham tez o‘sib boradi. So‘nggi yillarda bu kamchiliklardan holi bo‘lgan splayn-funktsiyalar ishlab chiqilmoqda.

$[a,b]$ kesma x_i tugunlar bilan n ta bo‘lakka ajratilgan bo‘lsin, $0 \le i \le n$.

Splayn deb, $[a,b]$ kesmada aniqlangan $C^k[a,b]$ ga tegishli bo‘lgan, ya’ni o‘zi va k–tartibgacha hosilalari $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lgan $S_n(x)$ funktsiyaga aytiladi. Har bir $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$ kesmada bu funktsiya n– darajali ko‘phaddan iborat bo‘ladi.

Xususiy holda, berilgan α va β egilish burchaklari bilan ikkita nuqtaga mahkamlangan egiluvchan nozik sterjenning matematik modeli uchun maxsus tuzilgan 3-tartibli (kubik splayn) ko‘phad bo‘lishi mumkin.

Ushbu fizik modelda sterjen potentsial energiyasini minimallashtiradigan shaklni egallaydi. Sterjenning shaklini qandaydir $y = S(x)$ funktsiya bilan aniqlash mumkin bo‘lsin.



Rasm 8.5. Ikkita nuqtaga mahkamlangan egiluvchan nozik sterjen.

Materiallar qarshiligi kursidan ma’lumki, turg‘unlik tenglamasi $S^{(IV)}(x) = 0$ ko‘rinishda bo‘lib, bu holatga interpolyatsiyaning ikkita qo‘shni tuguniga ega bo‘lgan 3-tartibli ko‘phadi mos keladi. Ushbu ko‘phad quyidagicha tanlanadi:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \ ; \quad (8.28)$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i \ .$$

Bu ko‘phadning a_i, b_i, c_i, d_i koeffitsiyentlarini topish muammosi kelib chiqadi. Ularni aniqlash uchun $[a,b]$ kesmaning barcha n elementar bo‘laklarida $4n$ ta tenglama tuzish kerak. Bu tenglamalarning bir qismini berilgan nuqtalarda $S(x)$ ni aniqlash shartidan $2n$ tarkibda topish mumkin, ya’ni $S(x_{i-1}) = y_{i-1}$; $S(x_i) = y_i$.

Bu shartlarni (8.28) ga qo‘llab, quyidagicha yozish mumkin:

$$S(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}; \quad (8.29)$$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i; \quad (8.30)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$(2n-2)$ ta tenglamani interpolyatsiya tugunlarida uzluksizlik shartidan 1– va 2–tartibli hosila formulalaridan olinadi (silliqlik sharti). (8.28) ko‘phadning 1– va 2–tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$
$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1});\ x_{i-1} \le x \le x_i\ . \quad (8.31)$$

Har bir ichki $x = x_i$ tugunda bu hosilalarni tenglashtirib, qaralayotgan kesmachalarning oxirlarida hisoblab, $(2n–2)$ ta tenglama hosil qilinadi:

$$b_{i+1} = b_i + 2h_ic_i + 3h_i^2\, d_i\ ;\ i=1,2,\ldots,n-1; \quad (8.32)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_id_i\ ;\ i=1,2,\ldots,n-1\ . \quad (8.33)$$

Qolgan 2 ta tenglamani funktsiyaning kesma oxirlaridagi nolinchi egiluvchanlik shartidan topiladi:

$$\left.\begin{aligned} S''(x_0) &= c_1 = 0; \\ S''(x_n) &= 2c_n + 6d_nh_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.34)$$

(8.29) – (8.34) tenglamalardan tuzilgan sistema chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullarining biri yordamida yechiladi.

Mashina hisoblashlarini kamaytirish maqsadida bu tenglamalar sistemasini quyidagi algoritm asosida yanada qulayroq ko‘rinishga keltirish mumkin.

1. (8.29) shartdan a_i topiladi;
2. (8.33) – (8.34) tengliklardan:

$$\left.\begin{aligned} d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}; \quad i = 1,2,\ldots,n-1; \\ d_n &= -\frac{c_n}{3h_n}. \end{aligned}\right\} \quad (8.35)$$

3. (8.35) va (8.29) larni (8.30) ga qo’yib, b_i koeffitsiyent topiladi:

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i); \quad i = 1,2,\ldots,n-1;$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_nc_n. \quad (8.36)$$

4. (8.35) va (8.36) ni hisobga olgan holda (8.32) tenglamada d_i va b_i lar yo‘qotiladi, shundagina dastlabki tenglamalar sistemasi faqat c_i koeffitsiyentlardan iborat diagonal matritsaga keltiriladi. Shunday qilib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_ic_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right),\ (8.37)\ i=2,3,\ldots,n.$$

Bundan $c_1 = 0$, $c_{n+1} = 0$ kelib chiqadi. Hosil bo‘lgan (8.37) sistemani progonka usulida yechish mumkin. (8.35) va (8.36) lardan c_i ni topib, so‘ngra b_i va d_i lar aniqlanadi. U holda kubik ko‘phad butun oraliq bo‘yicha aniqlangan bo‘ladi.

Misol. $f(x)$ funktsiya jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin. (8.37) ko‘rinishdagi splayn-funktsiyani tuzing:

	0	1	2	3	4	5
	0,1	0,15	0,19	0,25	0,28	0,30
$= f(x)$	1,1052	1,1618	1,2092	1,2840	1,3231	0,3499
		0,05	0,04	0,06	0,03	0,02

Yechilishi: $c_1=0$; $0{,}05c_1+0{,}18c_2+0{,}04c_3 =$

$$=3\left[\frac{(1{,}2092-1{,}1618)}{0{,}04}-\frac{(1{,}1618-1{,}1052)}{0{,}05}\right]=0{,}159;$$

(c_2 oldidagi koeffitsiyent topiladi: (0,05+0,04)=0,18);

$0{,}04c_2+0{,}2c_3+0{,}06c_4=$

$$=3\left[\frac{(1{,}2840-1{,}2092)}{0{,}05}-\frac{(1{,}2092-1{,}1618)}{0{,}04}\right]=-0{,}185;$$

$0{,}06c_3+0{,}18c_4+0{,}03c_5=$

$$=3\left[\frac{(1{,}3231-1{,}2840)}{0{,}03}-\frac{(1{,}2840-1{,}2092)}{0{,}06}\right]=-0{,}170;$$

$0{,}03c_4+0{,}1c_5=$

$$=3\left[\frac{(0{,}3499-1{,}3231)}{0{,}02}-\frac{(0{,}3231-1{,}2840)}{0{,}03}\right]=-1{,}50.$$

$c_6=0.$

Natijada $c_2 \div c_5$ ga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} 0{,}18 & 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0{,}04 & 0{,}2 & 0{,}06 & 0 \\ 0 & 0{,}06 & 0{,}18 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 0{,}03 & 0{,}1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}159 \\ -0{,}185 \\ -0{,}170 \\ -1{,}50 \end{vmatrix}.$$

c_i ni topib, (8.35) dan d_i topiladi, so‘ngra (8.36) dan b_i aniqlanadi.

8.6. Tajriba natijalarini ixchamlash

Funktsiya qiymatlarining jadvalini tuzishda, tajriba natijalarini aniq olish mumkin bo‘lmasa, bu ma’lumotlar xatoligini aniqlash kerak. Interpolyatsiyalash bu xatolarning chuqurlashishiga olib keladi. Shunday hollarda approksimatsiya uchun xuddi funktsional yaqinlashish modeli kabi empirik funktsiyalar tuziladi. Empirik bog‘lanish grafigi $\{x_i, y_i\}$ nuqtalardan o‘tmaydi. Empirik funktsiyalarni tanlash vositasida tajriba ma’lumotlari ixchamlanadi.

Empirik formulani tuzish 2 ta bosqichdan iborat:

1) Empirik funktsiyalarni umumiy ko‘rinishda tuzish;

2) ularning parametrlari eng yaxshi qiymatlarini aniqlash.

Umumiy ko‘rinish fizik tavsiflar asosida aniqlanadi. Agar bog‘lanish xarakteri ma’lum bo‘lmasa, u holda formulalar ixtiyoriy tanlanadi. Tanlashda formulalarning ko‘rinishi oddiyroq bo‘lishiga e’tibor beriladi. Dastlab oddiy funktsiyalar orasidan geometrik tavsiflariga qarab tanlanadi.

Agar empirik formula tanlangan bo‘lsa, u holda ular umumiy ko‘rinishda yoziladi:

$$y=\varphi(x, a_0, a_1, ..., a_m); \quad (8.38)$$

bu yerda φ – ma’lum funktsiya;

a_i – eng yaxshi yaqinlashish uchun tanlanadigan noma’lum koeffitsiyentlar.

U holda chetlanish (“*r* ayirma”) aniqlanadi:

$$\varepsilon_i=\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)-y_i;\ i=\overline{0,n}. \quad (8.39)$$

a_i koeffitsiyentni aniqlash vazifasi ε_i ni minimallashtirish masalasiga keltiriladi. Buning uchun bir nechta usullar mavjud: tanlangan nuqtalar usuli, o‘rtacha qiymatlar usuli, eng kichik kvadratlar usuli.

1.Tanlangan nuqtalar usuli.

XOY Dekart koordinata sistemasida nuqtalar to‘plami tanlab olinadi va suzuvchi to‘g‘ri chiziq yoki egri chiziq o‘tkaziladi. O‘tkazilgan chiziqda empirik formulaning noma’lum koeffitsiyentlari soniga teng miqdorda nuqtalar sistemasi tanlanadi. (x^0_j, y^0_j) koordinatalar shunday ehtiyotkorlik bilan o‘lchanadiki, ular orqali chiziqni o‘tish shartini yozishda foydalaniladi.

Navbatdagi sistemadan a_i koeffitsiyentlar topiladi:

$$\varphi(x_j^0, a_0, a_1, ..., a_m) = y_j^0 \ ; j = \overline{0,m} .$$

2.O‘rtacha qiymatlar usuli.

Bu holda (8.38) munosabat uchun a_i parametrlar quyidagicha topiladi:

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i] = 0 . \quad (8.40)$$

(8.40) tenglikni shartli ravishda (m+1) ta tenglamadan iborat sistemaga ajratiladi:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0; \\ \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = 0; \\ \quad \dots \\ \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = 0. \end{cases} \quad (8.41)$$

(8.41) sistemani yechib, a_i koeffitsiyentlar topiladi.

3. Eng kichik kvadratlar usuli.

Bu holda quyidagi ko‘phad vositasida approksimatsiyalanayotgan funktsiyaning o‘rtacha kvadratik yaqinlashishi haqida so‘z boradi.

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m , \quad (8.42)$$

bunda $m \le n$; $m = n$ bo‘lgan hol interpolyatsiyaga mos keladi. Amaliyotda, m = 1,2,3 deb olinadi. (x_i, y_i), (i=0,1,…,n) nuqtalar to‘plamida φ(x) funktsiyaning f(x) dan chetlanishi quyidagi munosabatdan “*r* ayirma” bo‘yicha topiladi:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i]^2 . \quad (8.43)$$

$\bar{a}$ parametrlar erkli o‘zgaruvchilar sifatida $S = S(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ funktsiyaning minimumi shartidan topiladi.

Tenglamalar sistemasi

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0; \right. \quad (8.44)$$

Quyidagicha talqin qilinadi:

$$\min_{\bar{a}} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, \bar{a})]^2 = \min_{\bar{a}} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \min_{\bar{a}} \delta(\bar{a}) . \quad (8.45)$$

(8.44) sistemadan a_0, a_1, …, a_m parametrlar aniqlanadi.

Eng kichik kvadratlar usulining dasturi:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#define L15
int i, j,k,m;
float d1, a[7], b[7], d[7], x[L+1], y[L+1], x1[L+1], y1[[L+1];
void calculoparameters(void)
{
```

```
float k0, b0, a1, b1, a2, b2, f2;
for (a1=b1=a2=b2=0; i=1; i<=m; i++)
{a1=a1+x1[i]; b1=b1+y1[i];
a2=a2+x1[i]*x1[i]; b2=b2+x1[i]*y1[i];
};
d1=m*a2-a1*a1;
k0=(m*b2-a1*b10/d1; b0=(b1*a2-a1*b2)/d1;
for (d1=d2=o, i=1; i<=m; i++)
{ f2=f2+y1[i]*y1[i];
d1=d1+(y1[i]-k0*x1[i]-b0)*(y1[i]-k0*x1[i]-b0);
};
d[j]=sqrt(d1/f2);
a[j]=k0; b[j]=b0;
```

8.7. Ko‘phadlarni hisoblash

Yuqorida aytilgan fikrlarni inobatga olib, approksimatsiyalashda ko‘pincha quyidagi ko‘rinishdagi ko‘phadlarni qiymatlarini hisoblashga to‘g‘ri keladi:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \,. \quad (8.46)$$

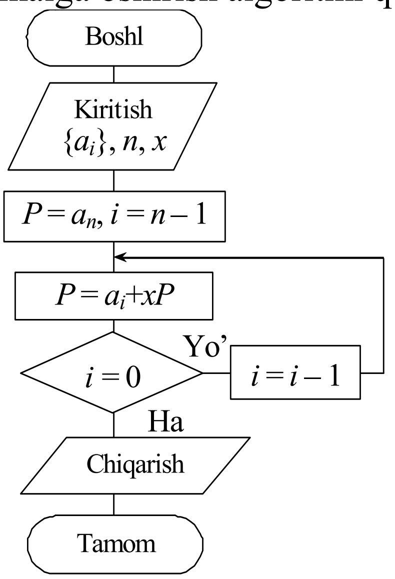
Agar to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblansa, u holda (n^2+n/2) ta ko‘paytirish va n ta qo‘shishni bajarib, yana bu qiymatlarni yaxlitlash ham kerak bo‘ladi.

Shuning uchun hisoblashlarda Gorner sxemasidan foydalaniladi.

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + xa_n) \ldots)) \,. \quad (8.47)$$

Gorner sxemasida n ta ko‘paytirish va n ta qo‘shish amali bajariladi xolos.

(8.46)ni (8.47)ga asosan amalga oshirish algoritmi quyidagicha:



Rasm. 8.6. Ko‘phadlarni hisoblash algoritmining blok-sxemasi.

Nazorat uchun savollar:

1. Approksimatsiyalash deganda nimani tushunasiz?
2. Nuqtaviy approksimatsiyalash va uning turlari.
3. Interpolyatsion ko‘phad qanday tuzilishga ega?
4. Lokal interpolyatsiya va uning turlarini ayting.

5. Global interpolyatsiya va uning turlari.
6. Lagranj interpolyatsion ko‘phadi va uning nazariy xatoligi qanday aniqlanadi?
7. Empirik funktsiyalar yordamida tajriba ma’lumotlari qanday ixchamlanadi?
8. Splayn – funktsiyaga ta’rif bering.
9. Chekli ayirmalar uchun formulalar yozing.
10. Bo‘lingan ayirmalar formulalarini yozing.
11. Nyuton interpolyatsion ko‘phadi va uning turlari.

Misol va masalalar:

1. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini x=0,2 bo‘lgan hol uchun Lagranj interpolyatsion formulasidan foydalanib hisoblang:

x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	–0,5	0	0,2	1

2. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini ayirmaviy munosabatlardan foydalanib, x=3,5 nuqtada hisoblang:

x_i	0	5	10	12	13	15	16
y_i	1	151	1051	1789	2263	3451	4177

3. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini x = 1,6 bo‘lgan hol uchun Nyuton interpolyatsion formulasidan foydalanib hisoblang:

x_i	0	0,2	0,4	0,6
y_i	–0,5	0	0,2	1

4. Jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiya qiymatini x = 0,8 bo‘lgan hol uchun kvadratik interpolyatsion formuladan foydalanib hisoblang:

x_i	0	0,2	0,3	0,6
y_i	–0,5	0,1	0,2	1,2

5. Yuqoridagi 1-4 misollarni approksimatsiyalash formulalarining turli formulalari yordamida yeching va taqqoslang.

6.

x	0	1	2
y	2	0	2

jadval bilan berilgan funktsiyaning interpolyatsion ko‘phadini toping.

7.

x	1	3	6
y	10	16	4

jadval bilan berilgan funktsiyaning Laagranj interpolyatsion ko‘phadini toping.

8. $x_0 = 1$ dastlabki qiymat bo‘yicha interpolyatsiya qadamini $h = 0{,}2$ deb olib, $y = x^2 - 3x + 2$ ko‘phad uchun chekli ayirmalar jadvalini tuzing.

9.

x	0	1	2	8
y	1	-2	0	8

jadval bilan berilgan funktsiyaning interpolyatsion ko’phadini toping.

10.

x	0	1	2
y	1	1	2

jadval bilan berilgan funktsiyaning interpolyatsion ko’phadini toping.

11.

x	0	1	3	4
y	0	2	0	1

jadval bilan berilgan funktsiyaning interpolyatsion ko’phadini toping.

IX BOB. SONLI INTEGRALLASH

9.1. Masalaning qo‘yilishi

Ko‘pgina ilmiy va texnik masalalarda funktsiyalarni integrallash - yuzalar va hajmlarni matematik modellashtirishning muhim qismi sanaladi.

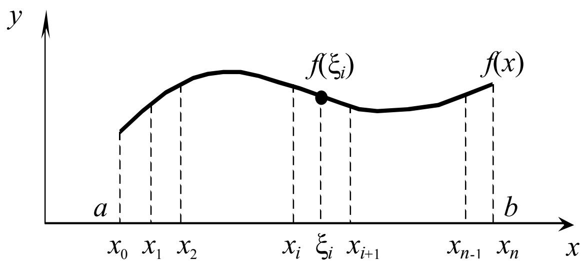
Soddaroq qilib aytganda, nazariy va amaliy masalalarning ko‘pchiligi biror $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lgan $f(x)\geq 0$ funktsiyadan olingan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblashga keltiriladi. Ammo integral hisobning klassik formulasidan har doim ham foydalanib bo‘lmaydi. Chunki shunday funktsiyalar uchraydiki, ularni elementar funktsiyalar kombinatsiyasi orqali ifodalab bo‘lmaydi. Ana shunda sonli usullar bizga yordam beradi.

9.1.1. Sonli integrallash tushunchasi

Geometrik nuqtai nazardan $f(x)\geq 0$ funktsiyadan olingan aniq integralda

$$I = \int_a^b f(x)dx \,, \quad (9.1)$$

I – ifoda $y = f(x)$ egri chiziq, abssissalar o‘qi va $x = a$, $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan yuzani ifodalovchi kattalikdir.



Rasm 9.1. Integrallanuvchi funktsiyani bo’laklarga ajratish

Ko‘p hollarda (9.1) dagi $f(x)$ funktsiya analitik ko‘rinishda beriladi va aniq integral Nyuton-Leybnits formulasi bo‘yicha topiladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \,. \quad (9.2)$$

Biroq (9.2) formuladan har doim ham foydalanib bo‘lmaydi, masalan:

– agar $f(x)$ funktsiyani bevosita integrallab bo‘lmasa, ya’ni $F(x)$ boshlang‘ich funktsiyani elementar funktsiya shaklida ifodalab bo‘lmasa;

– agar $f(x)$ funktsiya qiymatlari jadval shaklida berilgan bo‘lsa, bunday holda boshlang‘ich funktsiya tushunchasining o‘zi ma’noga ega bo‘lmay qoladi.

Shuning uchun ham aniq integrallarni taqribiy, ya’ni sonli usullar bilan hisoblash katta amaliy ahamiyatga ega.

Qo‘yilgan masala yechimini topish uchun universal yondoshuv - turli darajadagi interpolyatsion ko‘phadlar yordamida integral ostidagi funktsiyani approksimatsiyalashga asoslangan **sonli integrallash** usuli hisoblanadi.

Sonli integrallashning asosiy g‘oyasi (9.1) ko‘rinishdagi $f(x)$ funktsiyaning Riman integrali ta’rifida keltirilgan. Bu g‘oyaning mazmunini qarab chiqamiz.

Haqiqiy sonlar maydonida $f(x)$ funktsiya aniqlangan va $[a, b]$ oraliqda chegaralangan bo‘lsin. Ushbu $[a, b]$ oraliqni $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$ bo‘lakka bo‘lamiz.

Har bir bo‘lakda ixtiyoriy ξ, $x_i \le \xi \le x_{i+1}$ nuqtani tanlaymiz va **integral yig‘indilar** deb ataluvchi yig‘indilarni tuzamiz (9.1-rasm):

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (9.3)$$

Agar eng katta oraliq uzunligi nolga intilganda ixtiyoriy ξ_i uchun S yig‘indi mavjud bo‘lsa, u holda bu yig‘indiga $f(x)$ funktsiyaning Riman integrali deyiladi:

$$I = \lim_{\max|x_{i+1} - x_i| \to 0} S. \quad (9.4)$$

Bu holda (9.3) yig‘indi sonli integrallashning oddiy misoli bo‘ladi. Uning yuqori S_2 va quyi S_1 yig‘indilari S xatolikni aniqlab beradi:

$$\begin{cases} |I - S| \le S_2 - S_1; \\ S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i); \;\; m_i = \min_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x); \\ S_2 = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i); \;\; M_i = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x); \end{cases} \quad (9.5)$$

Sonli integrallashning amaliyotda mavjud formulalari (9.3) formuladan faqat usullarning oshkor ko‘rsatmasi bilan farq qiladi:

1) x_i, ξ_I tanlash usuliga ko‘ra;

2) (9.4) da yaqinlashuvchanlikning tezligiga ko‘ra;

3) $f(x)$ ning o‘zini tutishi haqidagi qo‘shimcha axborotlar vositasida xatolikni baholashga ko‘ra (masalan, $f(x) \in C^2[a,b]$).

Sonli integrallashda ishchi qurol sifatida (9.1) uchun **kvadratur formula** tushunchasi kiritiladi. Buning uchun (9.3) integral yig‘indilar tushunchasini umumlashtiramiz. 9.1-chizmadagi $f(x)$ ni hisoblaydigan ξ_I nuqtalarga **tugunlar** deyiladi, (9.3) formuladagi $(x_{i+1} - x_i)$ koeffitsiyentlarni $f(x)$ ga bog‘liq bo‘lmagan biror q_i **vazn** deb ataluvchi qiymatlar bilan almashtiriladi. U holda (9.3) ning ko‘rinishi quyidagicha o‘zgaradi:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i), \quad (9.6)$$

bunda $a \le \xi_i \le b$.

Ravshanki, (9.1) integralni (9.5) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R. \quad (9.7)$$

Bu yerda q_i – kvadratur formulaning korffitsiyentlari;

$\sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i)$ – kvadratur yig‘indi deyiladi.

(9.7) formulaga **kvadratur formula** deyiladi. Bunda R kattalikka kvadratur formulaning qoldiq hadi yoki **xatosi** deyiladi.

Agar integrallash chegaralari a va b lar kvadratur formulaning tugunlaridan iborat bo‘lsa, u holda **yopiq tipdagi kvadratur formula,** aks holda **ochiq tipdagi kvadratur formula** deyiladi.

Integrallashning sonli usullaridan birini tanlashda shunga e’tibor berish kerakki, agar ξ_i ni va q_i mos vaznni qanday tanlash, shuningdek, ma’lum funktsiyalar sinfi uchun R xatolikni baholash uslubi ko‘rsatilgan bo‘lsa, u holda aniq kvadratur formula berilgan deb hisoblanadi.

9.1.2. Aniq kvadratur formula tushunchasi

Biror funktsiyalar sinfi berilgan bo‘lsa, bir varakayiga butun sinf uchun $R \equiv 0$ xatolik bilan kvadratur formulalarni yozish mumkin. Bunday kvadratur formulalarga **aniq kvadratur formulalar** deyiladi.

Masalan, $[a,b]$ oraliqda quyidagi funktsiya berilgan bo‘lsin: $f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$, $[a,b]$ oraliqda juft-juft turlicha bo‘lgan tugunlarni aniqlaymiz ξ_i, $0 \le i \le m$. Berilgan $f(x)$ funktsiya uchun izlanayotgan aniq munosabat (9.7) ga ko‘ra quyidagicha bo‘ladi:

$$\int_a^b P_m(x)dx = \sum_{i=0}^{m} q_i P_m(\xi_i) . \quad (9.8)$$

(9.8) ning chap tomonidagi $P_m(x)$ ko‘phadni interpolyatsion ko‘phad shaklida yozish mumkin:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} P_m(\xi_i) \frac{(x-\xi_0)...(x-\xi_{i-1})(x-\xi_{i+1})...(x-\xi_m)}{(\xi_i-\xi_0)...(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})...(\xi_i-\xi_m)} .$$

U holda (9.8) shartdan $0 \le i \le m$ qiymatlarda q_i vaznni aniqlash mumkin:

$$q_i = \int_a^b \frac{(x-\xi_0)...(x-\xi_{i-1})(x-\xi_{i+1})...(x-\xi_m)}{(\xi_i-\xi_0)...(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})...(\xi_i-\xi_m)} dx , \quad (9.9)$$

(9.9) ko‘rinishida tuzilgan kvadratur formulalarga **interpolyatsion formulalar** deyiladi. Agar $[a,b]$ kesmada turlicha ixtiyoriy ξ_i tugunlarni olsak va (9.9) ni hisoblasak, u holda (9.8) munosabat quyidagiga teng bo‘ladi:

$$I = \sum_{i=0}^{m} q_i P_m(\xi_i)$$

va aniq kvadratur formula hisoblanadi.

Agar (9.7) formula barcha darajali ko‘phadlar uchun aniq bo‘lib, $f(x) = x^{m+1}$ ko‘phad uchun aniq bo‘lmasa, u holda uning **algebraik aniqlik darajasi *m* ga teng** deyiladi.

Eslatib o‘tamiz, (9.8) formula m dan yuqori darajali ko‘phadlar uchun ham aniq kvadratur formula bo‘lishi mumkin. Bunga $[a, b]$, $0 \le i \le m$ kesmada ξ_i tugunlarni maxsus tanlash usuli bilan erishiladi. Bunday tanlash usulini $2m+1$ darajali ko‘phadlar uchun Gauss ko‘rsatib bergan. **Gauss tipidagi kvadratur formulalar** aniqlik darajasi eng yuqori bo‘lgan kvadratur formulalar hisoblanadi.

$[a,b]$ intervalda aniq kvadratur formulalardan foydalanish ko‘phadlar bilan yaxshi approksimatsiyalanuvchi $f(x)$ funktsiyalar sinfi uchun bajarilsa samara beradi. Shunday holdagina $f(x)$ funktsiyaga ahiq formulani qo‘llab, qaralayorgan funktsiyalar sinfi uchun (9.7) da kichik R xatolikka erishish mumkin.

9.2. Eng sodda kvadratur formulalar

Eng sodda kvadratur formulalarning 3 turi mavjud: to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi; trapetsiya formulasi; Simpson formulasi.

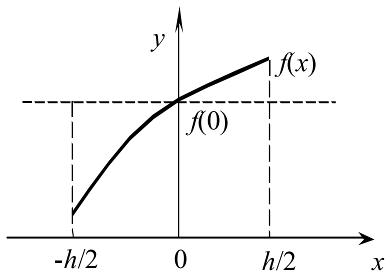
(9.7) ko‘rinishidagi kvadratur formulalarni amaliyotda qo‘llaganda ko‘pincha yordamchi interpolyatsion ko‘phadning turli darajasini aniqlaydigan interpolyatsion tugunlar soniga qarab ixtiyoriy tanlangan **tekis to‘r**dan foydalaniladi. Juda yuqori darajali ko‘phadlar bilan ish ko‘rmaslik uchun odatda, integrallar oralig‘i alohida bo‘laklarga bo‘linadi va har bir bo‘lakda darajasi yuqori bo‘lmagan ishchi formulalar qo‘llaniladi va oxirida hisoblash natijalari hamda xatoliklar qo‘shiladi.

Biz quyida bitta $[x_i, x_{i+1}]$ interval uchun kvadratur formula keltirib chiqarib, uni butun $[a, b]$ interval uchun murakkab kvadratur formula ko‘rinishida umumlashtiramiz.

9.2.1. To‘g‘ri to‘rtburchak kvadratur formulasi

Bizga $[-h/2, h/2]$ interval berilgan bo‘lsin, bunda $h>0$.

Faraz qilaylik, integrallanuvchi $f(x)$ funktsiya ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi, ya’ni $f(x)\in C^2[-h/2, h/2]$.



Rasm 9.2. Integrallash sohasini to’g’ri to’rtburchak bilan almashtirish.

U holda (9.7) munosabat quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = h\cdot f(0)+R, \quad (9.10)$$

bu yerda bitta $\xi = 0$ tugun va unga mos vazn $q = h$ olingan.

Hosil bo‘lgan kvadratur formulaga

$$I = h\cdot f(0) \quad (9.11)$$

bitta qadam uchun to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi yoki **o‘rtacha qiymatlar formulasi** deyiladi. Bunday nomlanishiga sabab, bu kattalik asosi h va balandligi $f(0)$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzasi. 9.2-chizmadan ko‘rinadiki, $f(x)$ silliq funktsiyada h intervalni kichraytirish bilan $h \to 0$ da xatolik $R \to 0$ intilishiga erishish mumkin. (9.10) formulaning aniqligi quyidagi formula bilan isbotlanadi:

$$R(h,f) = \frac{h^3}{24} f''(\xi),$$

bunda $\xi \in [-h/2,h/2]$. Demak,

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = h\cdot f(0)+\frac{h^3}{24} f''(\xi) \quad (*)$$

(*) formulaga **sodda to‘g‘ri to‘rtburchak kvadratur formulasi** deyiladi.

Ko‘rish mumkinki, (9.11) kvadratur formula $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ birinchi darajali ko‘phadlar uchun aniq formula bo‘ladi. Chunki, $\int_{-h/2}^{h/2}(a_0 + a_1 x)dx = a_0 h$.

Ba’zan [–*h*/2, *h*/2] intervalda $I=h\cdot f(-h/2)$ va $I=h\cdot f(h/2)$

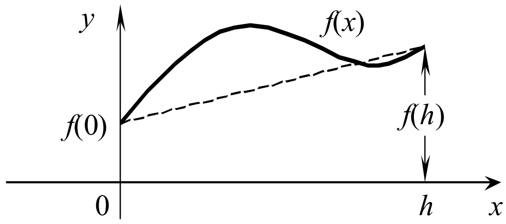
ko‘rinishidagi formulalar ishlatiladi, ularga **o‘ng va chap to‘g‘ri to‘rtburchak formulalari** deyiladi. Bu formulalar faqat nolinchi darajali, ya’ni o‘zgarmaslar uchun aniq formulalardir.

[*0;h*] oraliq uchun to‘g‘ri to‘rtburchak usulining dasturi:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
 const int n=6;
 double a,b,h,s=0,s1=39,e,e1,x[n],y[n];
 cout<<"a=";
 cin>>a;
 cout<<"b=";
 cin>>b;
 h=(b-a)/n;
 for(int i=0;i<n;i++)
 {
 x[i]=a+i*h;
 y[i]=pow(x[i],2);
 }
 for(int i=0;i<n;i++)
 s+=y[i];
 s=s*h;
 cout << "S=" <<s<< endl;
 e=fabs(s-s1);
 cout<<"abs xatolik e="<<e<<endl;
 e1=e/s1*100;
 cout<<"Nisbiy xatolik e1="<<e1<<"%"<<endl;
 return 0;
}
```

9.2.2. Trapetsiya kvadratur formulasi

Bizga [0, *h*] interval berilgan bo‘lsin, bunda *h* > 0.



Rasm 9.3. Integrallash sohasini trapetsiyaga almashtirish.

Faraz qilaylik, integrallanuvchi $f(x)$ funktsiya oraliqda ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi, ya'ni $f(x) \in C^2[0, h]$. U holda (9.7) munosabat quyidagicha yoziladi:

$$\int_0^h f(x)dx = h\frac{f(0)+f(h)}{2} + R, \quad (9.12)$$

bu yerda ikkita $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = h$ tugunlar va ularga mos vaznlar $q_0 = q_1 = h/2$ olingan.

Hosil bo'lgan kvadratur formulaga

$$I = h\frac{f(0)+f(h)}{2}, \quad (9.13)$$

bitta qadam uchun trapetsiya formulasi deyiladi. Bunday nomlanishiga sabab, (9.13) munosabat $f(0)$ va $f(h)$ larning musbat qiymatlarida asoslari $f(0)$, $f(h)$ va balandligi h bo'lgan trapetsiya yuzasini beradi.

(9.12) uchun xatolik quyidagi formula bilan topiladi:

$$R(h,f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad (9.14)$$

bunda ξ – $[0, h]$ oraliqning biror nuqtasi. Ko'rish mumkniki, (9.13) formula xuddi to'g'ri to'rtburchak formulasi kabi birinchi darajali ko'phadlar uchun aniq formuladir.

Demak,

$$\int_0^h f(x)dx = h\frac{f(0)+f(h)}{2} - \frac{h^3}{12}f''(\xi) \quad (**)$$

(**) formulaga **sodda trapetsiya kvadratur formulasi** deyiladi.

[*0;h*] oraliq uchun trapetsiya usulining dasturi:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
 const int n=6;
 double a,b,h,s=0,s1=39,e,e1,x[n],y[n];
 cout<<"a=";
 cin>>a;
 cout<<"b=";
 cin>>b;
 h=(b-a)/n;
 for(int i=0;i<=n;i++)
 {
```

```
x[i]=a+i*h;
y[i]=pow(x[i],2);
}
for(int i=0;i<=n;i++)
s+=y[i];
s=s-(y[0]+y[n])/2;
s=s*h;
cout << "S=" <<s<< endl;
e=fabs(s-s1);
cout<<"abs xatolik e="<<e<<endl;
e1=e/s1*100;
cout<<"Nisbiy xatolik e1="<<e1<<"%"<<endl;
return 0;
}
```

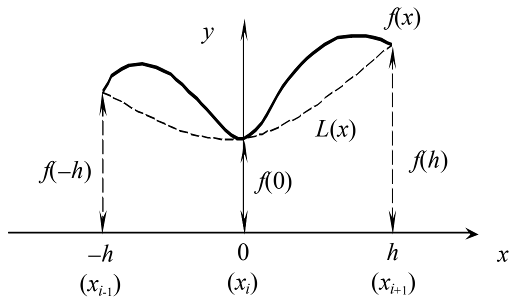
9.2.3. Simpson kvadratur formulasi

Bizga $[-h, h]$ interval berilgan bo‘lsin, bunda $h > 0$.

Faraz qilaylik, integrallanuvchi $f(x)$ funktsiya oraliqda to‘rt marta uzluksiz differentsiallanuvchi, ya’ni $f(x)\in C^4[-h,h]$. U holda (9.7) munosabat uchun uchta

$$\xi_0 = x_{i-1} = -h,\ \xi_1 = x_i = 0,\ \xi_2 = x_{i+1} = h$$

tugun olamiz. Ularga mos vazn koeffitsiyentlarini $f(x)$ funktsiyani $(-h, f(-h))$, $(0, f(0))$, $(h, f(h))$ nuqtalarga qurilgan parabolaga approksimatsiyalash bilan kvadrat ko‘phad $y=ax^2+bx+c$ ko‘rinishida topamiz.



Rasm 9.4. Integral funktsiyasini parabolaga almashtirish.

a, b va c koeffitsiyentlarni aniqlaymiz, buning uchun berilgan nuqtalardan o‘tuvchi ikkinchi darajali Lagranj ko‘phadini tuzamiz:

$$P_2(x) = L_n(x) = f(-h)\frac{x(x-h)}{-h(-h-h)} + f(0)\frac{(x+h)(x-h)}{h(-h)} + f(h)\frac{x(x+h)}{h2h}.$$

Integralni hisoblaymiz:

$$\int_{-h}^{h} P_2(x)dx = \frac{f(-h)}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}h\right)\Big|_{-h}^{h} - \frac{f(0)}{h^2}\left(\frac{x^3}{3} - h^2 x\right)\Big|_{-h}^{h} + \tag{9.16}$$

$$+\frac{f(h)}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}h\right)\Big|_{-h}^{h} = f(-h)\frac{h}{3} + f(0)\frac{4h}{3} + f(h)\frac{h}{3}.$$

U holda (9.7) munosabat quyidagicha ko‘rinish oladi:

$$I = \frac{h}{3}[f(-h) + 4 \cdot f(0) + f(h)] + R \quad (9.17)$$

(9.17) ga Simpson (parabola) kvadratur formulasi deyiladi.

Simpson formulasi uchun xatolik quyidagicha baholanadi:

$$R(h, f) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi), \quad (9.18)$$

bunda $\xi \in [-h, h]$.

(9.18) formuladan ko‘rish mumkniki, Simpson kvadratur formulasi uchinchi darajali ko‘phadlar uchun aniq formuladir. Demak,

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(-h) + 4 \cdot f(0) + f(h)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi) \quad (***)$$

(***) formulaga **sodda Simpson kvadratur formulasi** deyiladi. **Bu formulani ingliz matematigi Simpson 1743 yilda yaratgan.**

Ta’kidlash kerakki, integral ostidagi $f(x)$ funktsiya qiymatini oddiy kvadratur formulalardan foydalanib hisoblash uchun talab qilinadi:

a) bitta nuqtada – to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi;

b) ikkita nuqtada – trapetsiya formulasi;

v) uchta nuqtada – Sipmson formulasi kelib chiqadi.

Biroq, hisoblashlar hajmi kichik bo‘lishiga qaramay oddiy kvadratur formulalarning amaliy qo‘llanish sohasi judayam chegaralangan, chunki h ni orttirish bilan xatolik ham sezilarli darajada ortadi. Buni xatoliklarni baholash formulalaridan ham ko‘rish mumkin. Shu sabab murakkab kvadratur formulalarga ehtiyoj seziladi.

9.3. O‘zgarmas qadamli umumlashgan kvadratur formulalar

Agar qaralayotgan $[a,b]$ kesma uzunligi oddiy kvadratur formulalarni qo‘llash uchun yetarlicha katta bo‘lsa, u holda quyidagicha yo‘l tutiladi:

1) $[a, b]$ kesmani x_i, $0 \le i \le n$ nuqtalar yordamida biror qoidaga asosan n ta bo‘lakka bo‘linadi;

2) $[x_i, x_{i+1}]$ har bir bo‘lakda oddiy kvadratur formulani qo‘llab, integralning taqribiy qiymati topiladi:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx I_i; \quad 0 \le i \le n;$$

3) topilgan I_i ifodalardan butun $[a, b]$ kesma uchun kvadratur formula tuziladi;

4) tuzilgan formulaning R absolyut xatosini R_i xatolarni qo‘shish bilan topiladi.

Ushbu algoritmni amalga oshirish uchun $[a,b]$ intervalni

$$x_{i+1} - x_i = h, \ 0 \le i \le n-1, \ x_0 = a, \ x_n = b$$

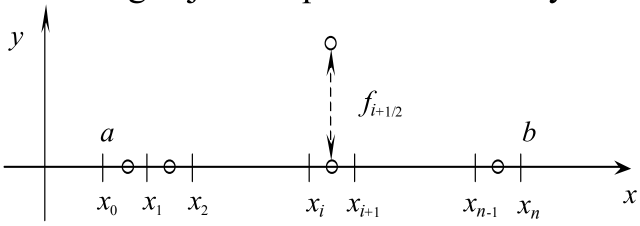
qoida asosida $[x_i, x_{i+1}]$ bo‘laklarga ajratamiz. Bunda qadam uzunligini

$$h = \frac{b-a}{n}$$

deb olamiz.

9.3.1. Umumlashgan to‘g‘ri to‘rtburchak kvadratur formulasi

Bo‘laklarga ajratish qoidasini tasvirlaymiz:



Rasm 9.5. Integrallash sohasini bo’laklarga bo’lish.

U holda har bir oraliq uchun (9.10) sodda to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf_{i+1/2} + \frac{h^3}{24} f''(\xi_i), \quad (9.19)$$

bunda $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $0 \le i \le n-1$.

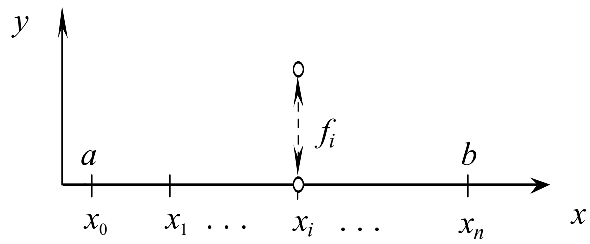
(9.19) ni i bo‘yicha yig‘ib, umumlashgan formulani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + R, \quad (9.20)$$

bunda hisoblash xatoligi $R = \frac{h^2(b-a)}{24} \cdot f''(\xi)$ ga teng bo‘ladi, $\xi \in [a, b]$.

9.3.2. Umumlashgan trapetsiya kvadratur formulasi

$f(x)$ funktsiya qiymatlarini x_i nuqtalarda $f_i = f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$ deb belgilaymiz.



Rasm 9.6. Integrallash sohasini bo’laklarga bo’lish.

U holda to‘g‘ri to‘rtburchak formulasiga o‘xshash (9.12) ga ko‘ra umumlashgan trapetsiya formulasini tuzamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) + R; \quad (9.21)$$

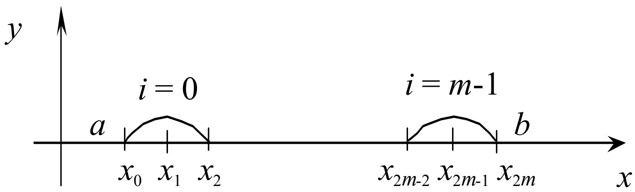
bunda hisoblash xatoligi

$$R = -\frac{h^2(b-a)}{12} \cdot f''(\xi)$$

ga teng bo‘ladi, $\xi \in [a, b]$.

9.3.3. Umumlashgan Simpson kvadratur formulasi

Berilgan $[a, b]$ oraliqni juft sondagi $2m$ ta bo’lakka ajratamiz, bunda $2m = \frac{b-a}{h}$.



Rasm 9.7. Integrallash sohasini bo‘laklarga bo‘lish.

(9.17) ifodalarni yig‘ib, quyidagini tuzamiz:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right), \quad 0 \le i \le m-1;$$

Natijada umumlashgan Simpson formulasini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m} \right) + R; \ (9.22)$$

Bunda xatolik $R = \frac{h^4(b-a)}{180} \cdot f^{IV}(\xi)$ ga teng bo‘ladi, $\xi \in [a, b]$.Ko‘ramizki, sodda kvadratur formulalardan farqli ravishda (9.20), (9.21) va (9.22) formulalarda xatolikni baholashda $\xi \in [a, b]$ nuqtalar bir qiymatli aniqlanmagan.

Aniq misollar yordamida $[a,b]$ oraliqda ξ nuqtani tanlash usullarini ko‘rib chiqamiz.

Misol. $I = \int_0^1 e^x dx$ integralni yuqorida qarab chiqilgan uchta kvadratur formula orqali hisoblang va olingan natijalarni $I = e - 1 = 1{,}7182818$ aniq qiymat bilan taqqoslang.

Yechilishi: Aytaylik, $h = 0{,}1$ bo‘lsin. U holda

1) To‘g‘ri to‘rtburchak formulasiga ko‘ra:

$$I_h = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} =$$

$$=0{,}1(e^{0,05}+e^{0,15}+e^{0,25}+e^{0,35}+e^{0,45}+e^{0,55}+e^{0,65}+e^{0,75}+e^{0,85}+e^{0,95}) = =1{,}7176;$$

(9.20) ga ko‘ra I ning aniq qiymatidan foydalanib, $I = I_{0,1} + \frac{0{,}1^2}{24}e^{\xi}$, $\xi = 0{,}365$ nuqtani aniqlash mumkin.

2) Trapetsiya formulasiga ko‘ra:

$$I_h = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right) =$$

$$= 0{,}05[e^{0,0} + 2(e^{0,1}+e^{0,2}+e^{0,3}+e^{0,4}+e^{0,5}+e^{0,6}+e^{0,7}+e^{0,8}+e^{0,9}) + e^1] = =1{,}7197;$$

(9.21) ga ko‘ra I ning aniq qiymatidan foydalanib, $I = I_{0,1} - \frac{0{,}1^2}{12}e^{\xi}$, $\xi = 0{,}532$ nuqtani aniqlash mumkin.

3) Simpson formulasiga ko‘ra:

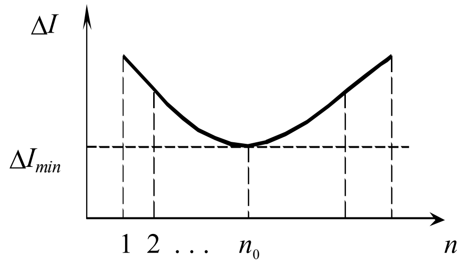
$$I_h = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m} \right) =$$

$$=0{,}1/3\cdot[e^{0,0}+4(e^{0,1}+e^{0,3}+e^{0,5}+e^{0,7}+e^{0,9})+2(e^{0,2}+e^{0,4}+e^{0,6}+e^{0,8})+e^1] = 1{,}7182828.$$

(9.22) ga ko‘ra I ning aniq qiymatidan foydalanib, $I = I_{0,1} - \frac{0{,}1^4}{180} e^{\xi}$, $\xi = 0{,}588$ nuqtani aniqlash mumkin.

Demak, har bir kvadratur formula uchun baholash aniqligidan kelib chiqib, o‘zining ξ nuqtasini tanlash kerak. To‘g‘ridan-to‘g‘ri integralni hisoblashda aniqlikni oshirish uchun h qadamni kichraytirish kerak, degan tasdiq unchalik to‘g‘ri emas ekan.

Amaliyotdan ma’lumki, biror n_0 qiymatdan boshlab, sonlarni yaxlitlash sababli hisoblash xatosi yana kattalasha boshlaydi (9.8-chizma).



Rasm 9.8. n_0 nuqtadan hisoblash hatosining ortishi.

Umumiy holda integrallash xatoligi quyidagi ko‘rinishda berilishi mumkin:

$$\Delta I = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\Delta q_i \max |f(\xi_i)| + q_i \max \left| \frac{\partial f(\xi_i)}{\partial x} \right| \Delta \xi_i + |R| \right),$$

bunda Δq_i – vaznlarning absolyut xatosi;

$\Delta \xi_i$ – tugunlarning absolyut xatosi;

R – kvadratur formulalar xatosi.

Yuqorida aytilgan fukrlarni inobatga olib, berilgan ε aniqlik bilan biror tanlangan formulaning integralini taqribiy hisoblashda h qadamni tanlash quyidagi tengliklardan aniqlanadi:

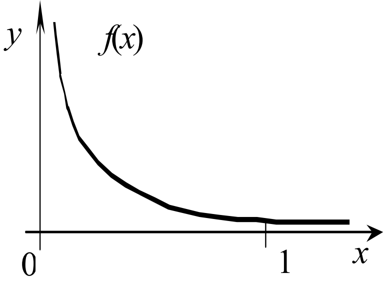
$$\left. \begin{aligned} R_{To'rt} &= \frac{h^2}{24}(b-a) \max_{a \le x \le b} |f''(x)| = \varepsilon; \\ R_{\grave{O}rapet} &= \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{a \le x \le b} |f''(x)| = \varepsilon; \\ R_{Simpson} &= \frac{h^4}{180}(b-a) \max_{a \le x \le b} |f^{IV}(x)| = \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

(9.23) munosabat $f(x)$ funktsiya hisoblanayotgan h qadam va n nuqtalar R xatolik nuqtai nazaridan $f(x)$ funktsiyaning o‘zini tutishiga qarab x ning qiymatlari bilan aniqlanadi.

Biroq integrallash oralig‘ini bunday qoida asosida bo‘laklarga ajratish, agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesma bo‘yicha o‘zini “yomon” tutishi bilan faqat xususiy oraliqlarga ega bo‘lsa, u holda noto‘g‘ri natijaga olib kelishi mumkin.

Masalan, [0, 1] kesmada $h = \sigma\sqrt{24\varepsilon}$ qadam bilan $f(x)=e^{-x/\sigma}$ funktsiyani integrallash so‘ralgan bo‘lsin.

(9.23) formulaga ko‘ra butun [0, 1] kesmada berilgan aniqlikni ta’minlash uchun integrallash qadami juda kichiklik qiladi, ya’ni ortiqcha hisoblashlarni kamaytirish maqsadida $[a,b]$ intervalni $f(x)$ ning xossalariga va integrallashning berilgan aniqligiga ko‘ra turli xil uzunlikdagi bo‘laklarga ajratish talab qilinadi.



Rasm 9.9. $f(x)=e^{-x/\sigma}$ funktsiya grafigi.

Shunday qilib, $[a,b]$ intervalda o'zgaruvchan qadam bilan integrallashning sodda kvadratur formulalarini qo'llash masalasi yuzaga keladi.

9.4. Tekis to'r uchun integrallash qadamini tanlash

Masalaning mohiyati sonli usullar bilan integralni hisoblashda ε aniqlikni ta'minlaydigan h qadamni tanlashdan iborat. Bunday masalalarni yechishning 2 xil usuli ma'lum:

1) Integrallash qadamini xatolikning nazariy bahosi bo'yicha tanlash;
2) Integrallash qadamini tajriba sxemasi bo'yicha tanlash.

9.4.1.Integrallash qadamini xatolikning nazariy bahosi bo'yicha tanlash

Deylik, integralni ε aniqlikda hisoblash so'ralgan bo'lsin. U holda R ni topish formulasi (9.23) dan foydalanib,

$|R| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan qadamni tanlaymiz, bunda xatolikni yaxlitlaganda $\frac{\varepsilon}{2}$ dan yuqori bo'lmasligi uchun verguldan keyingi sonlar ham hisobga olinadi.

Misol. Simpson formulasidan foydalanib, $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ integralni $\varepsilon=10^{-3}$ aniqlikda hisoblang.

Yechilishi: h qadamni tanlaymiz.

$R_{Simpson} = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{IV}(\xi)$; $\xi\in[a,b]$, ya'ni $\xi\in[\pi/4,\pi/2]$;

(9.23) formulaga ko'ra

$$\frac{h^4(b-a)}{180} \max_{[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right| < 0{,}5\cdot10^{-3}$$

ni hosil qilamiz.

$f^{IV}(x)$ ni hisoblaymiz:

$$f^{IV}(x) = \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5} \quad (9.24)$$

$[\pi/4,\ \pi/2]$ kesmada $|\ f^{\ IV}|$ ni baholaymiz. Buning uchun (9.24) dagi kattaliklardan foydalanamiz:

$$\frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) \text{ va } \frac{4\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right).$$

Ushbu ifodalar musbat va kamayuvchi bo'lganligi uchun ular maksimal qiymatiga $x = \pi/4$ nuqtada erishadi. Bundan

	x 0 i	i	in x	0, y_6	2m	2m–1
	4 5° 00′	,7854	,7071	,9003		
	5 2° 30′	,9163	,7934			,8659
	6 0° 00′	,0472	,8660		,8270	
	6 7° 30′	,1781	,9239			,7843
	7 5° 00′	,3090	,9659		,7379	

$$\left|f^{(IV)}(x)\right| \le \frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{12}{x^2}+\frac{24}{x^4}\right)+\frac{4\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2}-1\right)< 81.$$

Demak, $R \le \frac{h^4 \cdot \pi/4}{180}\cdot 81 < 0{,}5\cdot 10^{-3}$; $h^4 < 14\cdot 10^{-4}$; $h \le 0{,}19$.

Boshqa tomondan bu metodda h ni [π/4, π/2] kesmaning juft bo‘laklarga bo‘linishiga qarab ham tanlash mumkin. Bu ikki talabga $n=\frac{b-a}{h}=6$ bo‘lganda $h=\pi/24=0{,}13<0{,}19$ qiymat to‘g‘ri keladi. U holda xatolikni yaxlitlaganda $0{,}5\cdot 10^{-3}$ dan yuqori bo‘lmasligi uchun hisoblashni verguldan keyingi 4 xona bilan hisoblash yetarli.

$h=\pi/24=7°30′=0{,}1309$ qiymat uchun $y=\frac{\sin x}{x}$ funktsiya jadvalini tuzamiz:

	8 2° 30′	,4399	,9914			,6885
	9 0° 00′	,5708	,0000	,6366		
Yig‘indi				,5369	,5649	,3386

Simpson formulasiga ko‘ra n = 6 bo‘lganda

$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}=\frac{h}{3}\left[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\right]=0{,}6118\approx 0{,}612$ yechimni topamiz.

9.4.2. Integrallash qadamini tajriba sxemasi bo‘yicha tanlash

1. Ikki qayta hisoblash:

Absolyut qiymat bo‘yicha k- tartibli hosilaning maksimal qiymatini topish juda katta hisoblashlarni talab qiladi. Amaliyotda berilgan aniqlikka erishish uchun sun’iy usullardan foydalaniladi. Masalan, aniq integralni biror kvadratur formula yordamida h va h/2 qadamlar bilan ikki marta hisoblanadi, ya’ni n marta oshiriladi.

Agar $| I_n - I_{2n} | < \varepsilon$ bo‘lsa, u holda $I = I_{2n}$ o‘rinli;

Agar $| I_n - I_{2n} | > \varepsilon$ bo‘lsa, u holda $h/4$ qadam olinadi; (9.25)

Agar $| I_{2n} - I_{4n} | < \varepsilon$ bo‘lsa, u holda $I = I_{4n}$ o‘rinli deb hisoblanadi.

Dastlabki to‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari uchun h qadam sifatida $h = \sqrt[m]{\varepsilon}$, m=2, Simpson formulasi uchun m=4 qiymatlar tavsiya qilinadi.

2. Eytkin sxemasi:

Amaliyotda sonli integrallash aniqligini oshirish uchun Eytkin sxemasi keng qo‘llaniladi. Bu usulda hisoblashlar h_1, h_2, h_3 qadamlar bilan 3 marta bajariladi va qadamlar o‘zaro $\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = q$ nisbatda olinadi. Demak, 3 ta natija olinadi: I_1, I_2, I_3.

Yechim empirik formulalar bilan aniqlashtiriladi:

$$I = I_1 - \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 - 2I_2 + I_3}. \quad (9.26)$$

Aniqlik darajasi quyidagiga teng bo‘ladi: $\rho = \frac{1}{\ln g} \ln \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}$.

3. Runge qoidasi:

Bu usul to‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari uchun $f(x) \in C^4[a, b]$ deb, Simpson formulasi uchun $f(x) \in C^6[a,b]$ deb olingan farazlarga asoslangan. Bunday holda $R(h, f)$ xatoliklar $h \to 0$ da quyidagiga teng bo‘ladi:

$$R^{To'rt} = \left(\frac{1}{24} \int_a^b f''(x)dx \right) h^2 + O(h^4);$$

$$R^{Òrapet} = \left(-\frac{1}{12} \int_a^b f''(x)dx \right) h^2 + O(h^4); \qquad (9.27) \quad R^{Simpson} = \left(-\frac{1}{180} \int_a^b f^{IV}(x)dx \right) h^4 + O(h^6).$$

Bu usulda ham ikkita tugunlar oilasi uchun integralning ikkita qiymati hisoblanadi va olingan natijalar xatoliklar baholari bo‘yicha taqqoslanadi.

(9.27) formulalarni birlashtirib, ishchi formulani hosil qilish mumkin:

$$I = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2k - 1} + O(h^{k+m}), \quad h \to 0; \quad (9.28)$$

bunda k=2, m=2 – to‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari uchun; $k = 4$, $m = 2$ – Simpson formulasi uchun.

4. Xatoliklarning boshqa baholari:

1. Xatolikning taqribiy bahosi quyidagicha bo‘lishi mumkin:

$\Delta \approx \frac{1}{3}|I_n - I_{2n}|$ – to‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari uchun;

$\Delta \approx \frac{1}{15}|I_n - I_{2n}|$ – Simpson formulasi uchun.

2. Shuni ta’kidlash kerakki, (9.25), (9.26), (9.28) empirik formulalar faraz qilinadi va h integrallash qadami o‘zgartiriladi. Buning uchun boshqa bir hisoblash sxemasi ma’lum bo‘lib, u quyidagicha:

$I_{To'rt}$, I_{Trapet}, $I_{Simpson}$ umumlashgan formulalarini tahlil qilish shuni ko‘rsatadiki, integralning aniq qiymati $I_{To'rt}$ bilan I_{Trapet} orasida joylashgan bo‘ladi. Bunda quyidagi munosabat o‘rinli bo’ladi:

$$I_{Simpson} = \frac{2 \cdot I_{To'rt} + I_{Trap}}{3} \quad (9.29)$$

(9.29) tenglik hisoblash xatoligini nazorat qilish uchun ham ishlatiladi.

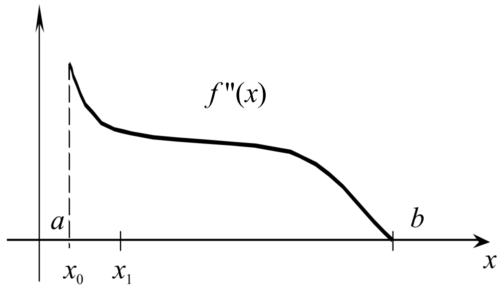
Agar $|I_{Simp} - I_{Trap}| \geq \varepsilon$ bo‘lsa, u holda qadam 2 marta kichraytiriladi va hisoblash takror bajariladi.

Agar kerakli aniqlikka erishilgan bo‘lsa, u holda (9.29) formuladan integralning oxirgi natijasi olinadi.

9.5. O‘zgaruvchan qadamli umumlashgan kvadratur formulalar

Mavzuni to‘g‘ri to‘rtburchak kvadratur formulasi uchun ko‘rib chiqamiz.

Bizga $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan $f(x)\in C^2[a,b]$ funktsiya $f''(x)$ – monoton kamayuvchi, musbat funktsiya degan qo‘shimcha cheklashlar bilan berilgan bo‘lsin (9.10-chizma).



Rasm 9.10. $f(x)$ funktsiya grafigi

Faraz qilaylik, $x_0=a$. (9.23) shartdan x_1 eng katta qiymatni aniqlaymiz, ya’ni

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + R_{To'rt}\ ;$$

$$R_{To'rt} = \frac{(x_1 - x_0)^3}{24} \cdot \ (9.30)$$

$$f''(\xi) = \varepsilon;\ \ x_0 \le \xi \le x_1$$

tenglik uchun xatolik ε dan oshmaydigan x_1 ni topamiz. Buning uchun (9.24) ni x_1 ga nisbatan hisoblash yetarli:

$$x_1 = \left(\frac{24\varepsilon}{f''(x_0)}\right)^{1/3} + x_0 \,.$$

Keyingi oraliqlar ham shunga o‘xshash topiladi.

Cizmadah ko‘rish mumkinki, keyingi oraliqlar uzunligi kattalashib boradi. Buni quyidagi formuladan topish mumkin:

$$x_{i+1} = \left(\frac{24\varepsilon}{f''(x_i)}\right)^{1/3} + x_i;\ 0 \le i \le k\ .\ (9.31)$$

Oraliqlar soni k ma’lum, uni ε ga o‘xshab topish ham mumkin, shuningdek, $f''(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ oraliqda o‘zini tutishiga qarab ham aniqlash mumkin. Biroq k uchun yuqori chegarani quyidagi formuladan topish oson:

$$k \le \left[\frac{(b-a)(f''(x_0))^{1/3}}{(24\varepsilon)^{1/3}}\right].$$

(9.30) ni yig‘ib, umumlashgan to‘g‘ri to‘rtburchak kvadratur formulasini o‘zgaruvchan qadam uchun hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = (24\varepsilon)^{1/3}\sum_{i=0}^{k}\frac{f\left(x_1+\frac{1}{2}\left(\frac{24\varepsilon}{f''(x_i)}\right)^{1/3}\right)}{(f''(x_i))^{1/3}}+R\ ;$$

bunda x_i (9.31) formuladan topiladi.

R xatolik uchun $|R| \le k\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli.

Umumiy holda ixtiyoriy $f(x)$ funktsiya uchun, agar $f''(x)$ – monoton o‘suvchi musbat funktsiya bo‘lsa, u holda integrallash bo‘laklari o‘ngdan chapga qarab aniqlanadi, ya’ni b dan a ga tomon.

Manfiy hosilaga ega bo‘lgan $f''(x)$ va monoton o‘suvchi funktsiya bo‘lsa, chapdan o‘ngga, ya’ni a dan b ga tomon hisoblanadi, kamayuvchi funktsiya uchun o‘ngdan chapga qarab, ya’ni b dan a ga tomon aniqlanadi.

Misol. [0;1] kesmada $f(x) = e^{-x/\sigma}$, $\sigma = 10^{-2}$ funktsiyani $\varepsilon = 10^{-4}$ aniqlik bilan har bir bo‘lakda hisoblang.

Yechilishi:

(9.31) dan intervallar chegaralarini aniqlaymiz:

$x_0 = 0{,}0000;$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{24\cdot10^{-4}}{f''(x_0)}}+x_0 = 0{,}0062;$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{24\cdot10^{-4}}{f''(x_1)}}+x_1 = 0{,}0138;$$

$x_3 = 0{,}0237; x_4 = 0{,}0374;\ x_5 = 0{,}0590;\ x_6 = 0{,}1030;$

$x_7 = 0{,}2990; x_8 = 1{,}0000.$

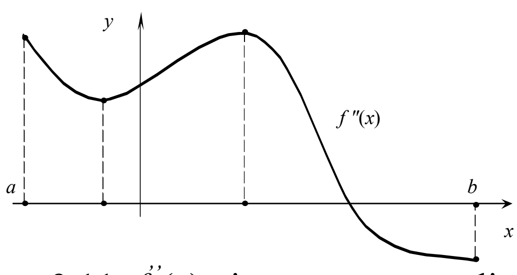
Umumiy xatolik $R \le 8\cdot10^{-4}$. Agar h qadam butun interval uchun $\frac{h^2}{24}(1-0)\max\limits_{0\le x\le1}(e^{-x/\sigma})'' = R$ shartga ko‘ra hisoblansa, to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi yordamida o‘zgarmas qadam uchun bunday chetlanishga erishish mumkin: Demak, 721- bo‘lakda bunga erishildi:

$$K = \frac{1}{\sigma\sqrt{24R}} \approx 721\cdot$$

Umumiy holda, agar butun $[a,b]$ oraliqda $f''(x)$ qabul qilingan qo‘shimcha cheklashlarni qanotlantirmasa, u holda

– avvalo $[a,b]$ oraliqni $f''(x)$ monoton va ishoralarini aniqlash mumkin bo‘lgan bo‘laklarga bo‘lish kerak;

– so‘ngra har bir bo‘lakda o‘zgaruvchi qadam uchun kvadratur formula tuzish kerak



Rasm 9.11. $f''(x)$ ning monoton oraliqlari

Xuddi shuningdek, Simpson formulasi uchun ham $f^{IV}(x)$ ning monotonligiga qarab, integralni hisoblash mumkin.

Biroq, o‘zgaruvchan h qadamga o‘tish har doim ham o‘zini oqlamaydi, chunki $f''(x)$ ni hisoblash va uni monotonligini, ishorasini aniqlash ishni murakkablashtiradi. Bu usul faqat seriyali hisoblashlarda samarali hisoblanadi.

Yuqori algebraik aniqlikdagi kvadratur formulalar (Gauss formulasi)

Yuqorida qarab o‘tilgan to‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson kvadratur formulalari darajasi uncha yuqori bo‘lmagan $f(x)$ funktsiyalar uchun qo‘llaniladi ($f(x)\in C^2[a, b]$ dan yuqori bo‘lmagan). Bunday funktsiyalar sinfi uchun ular oddiy va qulay. Bu usullarda natija aniqligini oshirish uchun integrallash oralig‘ini iloji boricha ko‘p sonli kichik bo‘laklarga bo‘lishga harakat qilinadi. Amalda shunday funktsiyalar sinflari borki ($f(x)\in C^k[a,b]$, $k>2$ tekislikdan tashqarida), ularda k ni, ya’ni bo‘laklar sonini oshirgan bilan kvadratur formula aniqligini oshirib bo‘lmaydi. Bunday funktsiyalar sinflari uchun oldingi tipdagilarga o‘xshash, lekin undagi $(2n+1)$ parametr (n ta x_i tugun, n ta q_i koeffitsiyent va n sonining o‘zini) ni tanlash bilan ularning strukturalarini o‘zgartirish mumkin bo‘lgan boshqa kvadratur formulalar ishlab chiqilgan:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R\cdot$$

Bunda parametrlar shunday tanlanishi kerakki, kvadratur yig‘indi biror sinfning barcha f funktsiyalari uchun hisoblangan integralning aniq qiymatidan juda kam farq qilsin. Maqsadga erishish uchun $[-1, 1]$ kesmada qurilgan Lejandr ko‘phadi deb nomlanuvchi ko‘phaddan foydalanib, barcha $N = 2n - 1$ darajali ko‘phadlar uchun aniq ($R = 0$) bo‘lgan Gauss ishchi kvadratur formulasini hosil qilamiz:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} q_i f(\xi_i) + R, \quad (9.33)$$

Lejandr ko‘phadining ildizlari nolga nisbatan simmetrik joylashgan, mos vaznlari ustma-ust tushadi va ular har doim musbat.

(9.33) formuladagi izlanayotgan koeffitsiyentlar q_i va ξ_i abssisalarning ixtiyoriy n uchun jadvali tuzilgan.

n	ξ_i	q_i
... 4	$-\xi_1 = \xi_4 =$ 0,861136312 $-\xi_2 = \xi_3 =$ 0,339981044	$q_1 = q_4 =$ 0,347854845 $q_2 = q_3 =$ 0,652145155
5	$-\xi_1 = \xi_5 =$ 0,906179846 $-\xi_2 = \xi_4 =$ 0,538469310 $\xi_3 = 0$	$q_1 = q_5 =$ 0,236926885 $q_2 = q_4 =$ 0,478628670 $q_3 =$

		0,568888889
. . .		

$\int_a^b f(t)dt$ integralni hisoblashda almashtirish bajarishga to‘g‘ri keladi: $t = \frac{x(b-a)}{2} + \frac{a+b}{2}$.

U holda

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k f(t_k) + R, \quad (9.34)$$

Bunda $t_k = \frac{x_k(b-a)}{2} + \frac{a+b}{2}$,

x_k – (9.33) formuladan olingan [–1;1] kesmadagi tugunlar va q_k – jadvaldan olingan ularga mos koeffitsiyentlar.

Misol. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni n = 5 bo‘lganda Gauss formulasidan foydalanib yeching.

Yechilishi: Almashtirish bajaramiz: $x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}$, u holda $I = 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{4+(t+1)^2}$.

Integral ostidagi funktsiya uchun qiymatlar jadvalini tuzamiz:

	ξ_i	$f(\xi_i)$	q_i
	–0,9061179846	0,24945107	0,236926885
	–0,5384693310	0,23735995	0,478628670
	0	0,2	0,568888889
	0,538469310	0,15706211	0,478628670
	0,906179846	0,13100114	0,236926885

(9.33) Gauss formulasiga ko‘ra:

$I = 2[q_1 f(\xi_1) + q_2 f(\xi_2) + ... + q_3 f(\xi_3)] = 0{,}78539816$;

Demak, bu qiymat Simpson formulasidan h = 0,1 qadam bilan 6-hisoblashda olingan I_{Aniq}= π/4 = 0,785398163… qiymatga mos keladi.

Monte-Karlo usuli

Masalalarni tasodifiy miqdorlar yordamida yechish usullari umumiy nom bilan **Monte-Karlo usuli** deyiladi. Monte-Karlo usulining mohiyati quyidagicha:

Biror o‘rganilayotgan tasodifiy miqdorning a qiymatini topish talab qilinsin. Buning uchun nazariy jihatdan matematik kutilishi a ga teng bo‘lgan X miqdor tanlanadi: $M(X)=a.$ Amaliyotda esa: n ta sinov o‘tkaziladi va sinov natijasida topilgan X ning n ta mumkin bo‘lgan qiymati olinib, ularning o‘rta arifmetik qiymati hisoblanadi:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

va $\overline{X}$ ni izlanayotgan a sonning $\overline{a}$ bahosi, ya’ni taqribiy qiymati deb qabul qilinadi: $a\approx\overline{a}=\overline{X}.$

Monte-Karlo usuli ko‘p sondagi sinovlar o‘tkazilishini talab etganligi uchun uni **statistik sinovlar usuli** deb ham yuritiladi. Bu usulda X tasodifiy miqdorni qanday qilib eng maqsadga muvofiq ravishda tanlash, uning mumkin bo‘lgan qiymatlarini qanday qilib topish ko‘rsatiladi.

Tasodifiy sonlar deb, (0,1) qraliqda tekis taqsimlangan R tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan r qiymatlariga aytiladi.

Aslida esa mumkin bo‘lgan qiymatlari, cheksiz sondagi raqamlarga ega bo‘lgan tekis taqsimlangan R tasodifiy miqdordan emas, balki mumkin bo‘lgan qiymatlari chekli sondagi raqamlardan iborat bo‘lgan R^* kvazi tekis tasodifiy miqdordan foydalaniladi. R ni R^* ga almashtirish natijasida miqdor aniq taqsimotga emas, balki taqribiy taqsimotga ega bo‘ladi.

X tasodifiy miqdor matematik kutilishi a ning bahosini hosil qilish uchun n ta erkli sinov o‘tkazilgan, ular asosida X tanlanmaning o‘rta qiymati topilgan bo‘lsin va izlanayotgan baho sifatida qabul qilingan bo‘lsin: $\overline{a}=\overline{X}.$

Agar sinov takrorlanadigan sinov bo‘lsa, u holda X tanlanmaning boshqa mumkin bo‘lgan qiymatlari olinishi ravshan, ya’ni boshqa o‘rtacha qiymat va boshqa baho hosil bo‘ladi. Bundan matematik kutilishning aniq bahosini hosil qilish mumkin emasligi kelib chiqadi. Natijada yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan xatolik haqidagi masala yuzaga keladi. Biz faqat berilgan γ ehtimollik (ishinchlilik) bilan yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan xatolikning yuqori chegarasi δ^* ni izlash bilan kifoyalanamiz: $P\left(\left|\overline{X}-a\right|\le\delta\right)=\gamma.$

Demak, xatolikning yuqori chegarasi δ matematik kutilish a ni tanlanma o‘rta qiymati $\overline{X}$ bo‘yicha ishonchlilik oraliqlari γ yordamida baholaydi.

Quyidagi 3 ta holatni ko‘rib chiqamiz:

a) X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan va uning σ o‘rtacha kvadratik chetlanishi ma’lum bo‘lsin. U holda γ ishonchlilik bilan xatolikning yuqori chegarasi

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \quad (9.35)$$

ga teng bo‘ladi.

Bu yerda n – sinovlar soni; $t-$Laplas funktsiyasi argumentining $\hat{O}(t)=\frac{\gamma}{2}$ bo‘ladigan qiymati; $\sigma-$ shu X tanlanmaning ma’lum o‘rtacha kvadratik chetlanishi.

Misol 1. O‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,5 ga teng bo‘lgan X normal taqsimlangan miqdorning matematik kutilishini baholash uchun 100 ta sinov o‘tkazilgan bo‘lsa, xatolikning yuqori chegarasini 0,95 ishonchlilik bilan toping.

Yechilishi: Shartga ko‘ra $n = 100$, $\sigma = 0,5$ va $\gamma = 0,95$ lar ma’lum. $\hat{O}(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$ ni hisoblab, Laplas funktsiyasi jadvalidan $t = 1,96$ ga ega bo‘lamiz. U holda xatolikning izlanayotgan yuqori chegarasi quyidagiga teng ekanligi kelib chiqadi: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = 0,098.$

b) X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan va uning σ o‘rtacha kvadratik chetlanishi noma’lum bo‘lsin. U holda γ ishonchlilik bilan xatolikning yuqori chegarasi

$$\delta = t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (9.36)$$

ga teng bo‘ladi. Bu yerda *n* – sinovlar soni; S – tanlanma o’rtacha kvadratik chetlanish; t_γ –jadvaldan topiladi.

Misol 2. Agar X normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishini baholash uchun 100 ta sinov o‘tkazilgan bo‘lib, unda tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,5 ekanligi aniqlangan bo‘lsa, xatolikning yuqori chegarasini 0,95 ishonchlilik bilan toping.

Yechilishi: Shartga ko‘ra n=100, S=0,5 va $\gamma = 0,95$ lar ma’lum. Jadvalidan $t_\gamma = 1,984$ ni topamiz. U holda xatolikning izlanayotgan yuqori chegarasi quyidagiga teng ekanligi kelib chiqadi: $\delta = t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 1,984 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}} = 0,099.$

v) X tasodifiy miqdor normal taqsimotdan farqli taqsimotga ega bo‘lsin. Bu holda agar X tasodifiy miqdoruning σ o‘rtacha kvadratik chetlanishi ma’lum bo‘lsa, sinovlar soni yetarlicha katta ($n > 30$) bo‘lganda xatolikning yuqori chegarasini γ ishonchlilik bilan (9.35) formuladan, agarda σ o‘rtacha kvadratik chetlanishi noma’lum bo‘lsa (9.36) formuladan topish mumkin.

n qancha katta bo‘lsa, ikkala formula beradigan natijalar orasidagi farq shuncha kichik bo‘ladi.

Xatolining oldindan berilgan yuqori chegarasi δ ni ta’minlaydigan eng kichik sondagi sinovlar sonini aniqlash uchun *n* ni (9.35) va (9.36) formulalardan topish kerak:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} \text{ yoki } n = \frac{t_\gamma{}^2 S^2}{\delta^2}.$$

Uzluksiz X tasodifiy miqdorning $f(x)$ taqsimot zichligini bilgan holda uning mumkin bo‘lgan $X_i (i = 1,2,...)$ qiymatlari ketma-ketligini topish talab qilingan bo‘lsin.

X tasodifiy miqdor ustida sinov o‘tkazish qoidasi quyidagicha: $f(x)$ taqsimot zichligi ma’lum bo‘lgan uzluksiz X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan X_i qiymatlarini topish uchun r_i tasodifiy sonni tanlash va

$\int_{-\infty}^{X_i} f(x)dx = r_i$ tenglamani yoki $\int_{c}^{X_i} f(x)dx = r_i$ tenglamani

X_i ga nisbatan yechish kerak, bu yerda c soni X tasodifiy miqdorning mumkin boʻlgan eng kichik qiymati.

Misol 3. Uzluksiz X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Koʻrsatkichli qonun boʻyicha taqsimlangan X ning mumkin boʻlgan qiymatlarini olish uchun oshkor formulani toping.

Yechilishi: Masala shartida keltirilgan qoidaga koʻra

$$\lambda \int_{0}^{X_i} e^{-\lambda x} dx = r_i$$

tenglamaga egamiz. Uni integrallab,

$$-\left(e^{-\lambda X_i} - e^0\right) = r_i; \; e^{-\lambda X_i} = 1 - r_i$$

$$\ln e^{-\lambda X_i} = \ln(1 - r_i); \; X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$$

natijani olamiz. r_i tasodifiy son (0;1) oraliqqa tegishli, demak, $1 - r_i$ ham tasodifiy son boʻladi va (0;1) oraliqqa tegishli boʻladi. Boshqacha aytganda *R* va *1-R* miqdorlar bir xil taqsimlangan. Shu sababli X_i ni izlash uchun yana ham soddaroq formulani yozish mumkin: $X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i$.

9.6.1. Aniq intagrallarni Monte-Karlo usuli bilan hisoblash

Aniq integrallarni Monte-Karlo usuli boʻyicha hisoblashning koʻplab usullari yaratilgan. Ulardan biri – integral ostidagi funktsiyaning oʻrta qiymatini topish usulidir.

Ushbu $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx$ aniq integralni hisoblash talab etilgan boʻlsin.

(a,b) integrallash oralig'ida $f(x) = \frac{1}{b-a}$ zichlik bilan tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorni qaraylik. U holda berilgan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi quyidagiga teng boʻladi:

$$M[\varphi(X)] = \int_{a}^{b} \varphi(x) f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \varphi(x)dx.$$

Bundan $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = (b-a)M[\varphi(X)]$ tenglik kelib chiqadi.

$M[\varphi(X)]$ matematik kutilishni uning bahosi bilan, ya'ni tanlanma oʻrta qiymati bilan almashtirib, izlanayotgan integral uchun ushbu taqribiy tenglikni hosil qilamiz:

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx \approx (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)}{n}$$

Bu yerda X_i – tasodifiy X miqdorning mumkin bo‘lgan qiymati.

X tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda $f(x)=\frac{1}{b-a}$ zichlik bilan tekis taqsimlanganligi uchun X_i quyidagi formula bilan topiladi:

$$\int_a^{X_i} f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^{X_i} dx=r_i.$$

$$\frac{1}{b-a}(X_i-a)=r_i$$

$$X_i-a=r_i(b-a);\ X_i=a+(b-a)r_i.$$

Bu yerda r_i – tasodifiy son. Hisoblash natijalari jadvalga yoziladi.

Misol. $\int_1^3 (x+1)dx$ ni Monte-Karlo usuli bilan hisoblang: a) hisoblash absolyut xatoligini toping;

b) xatolikning yuqori chegarasi $\delta=0{,}1$ bo‘lishini $\gamma=0{,}95$ ishonchlilik bilan ta’minlab beradigan sinovlarning eng kichik sonini toping.

Yechilishi: $\int_1^3 (x+1)dx \approx (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)}{n}$ formuladan foydalanamiz. Soddalik uchun sinovlar sonini 10 deb olamiz.

$$\int_1^3 (x+1)dx \approx \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}(X_i+1).$$

Bu yerda X_i ning mumkin bo‘lgan qiymatlari $X_i=a+(b-a)r_i$ yoki $X_i=1+2r_i$ formuladan topiladi. Natijalar jadvalga yoziladi.

i	r_i	$2r_i$	$X_i=1+2r_i$	$\varphi(X_i)=X_i+1$
1	0,100	0,200	1,200	2,200
2	0,973	1,946	2,946	3,946
3	0,253	0,506	1,506	2,506
4	0,376	0,752	1,752	2,752
5	0,520	1,040	2,040	3,040
6	0,135	0,270	1,270	2,270
7	0,863	1,726	2.726	3,726
8	0,467	0,934	1,934	2,934
9	0,354	0,708	1,708	2,708
10	0,876	1,752	2,752	3,752
$\sum$				29,834

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, $\sum_{i=1}^{10}\varphi(X_i)=\sum_{i=1}^{10}(X_i+1)=29{,}834$.

Demak, izlanayotgan integral:

$$\int_1^3 (x+1)dx \approx \frac{1}{5}\cdot 29{,}834 = 5{,}967.$$

Integralning aniq qiymati: $\int_1^3 (x+1)dx=\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_1^3=6$.

Shuning uchun absolyut xatolik 6-5,967=0,033 ga teng bo‘ladi.

a) Xatolikning yuqori chegarasi $\delta = 0{,}1$ bo‘lishini $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan ta’minlab beradigan sinovlarning eng kichik sonini $n = \dfrac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$ formuladan topamiz. $\hat{O}(t) = \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ ni hisoblab, Laplas funktsiyasi jadvalidan $t = 1{,}96$ ga ega bo‘lamiz. X tasodifiy miqdor (1;3) oraliqda tekis taqsimlanganligi uchun uning dispersiyasi

$$D(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

ekanligini hisobga olib, o‘rta qiymati topiladigan $\varphi(x) = x + 1$ funktsiyaning dispersiyasini topamiz:

$\sigma^2 = D(X+1) = D(X) = \dfrac{1}{3}$. Endi eng kichik sinovlar sonini topaylik:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}1^2} = 128.$$

Nazorat uchun savollar:

1. Sonli integrallash usuli qanday printsipga asoslangan?
2. Kvadratur formula va uning turlari.
3. Interpolyatsion formulalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Eng sodda kvadratur formulalarni tushuntiring.
5. Umumlashgan kvadratur formulalarning sodda kvadratur formulalaridan farqi nimada?
6. Umumlashgan kvadratur formulalarning turlari.
7. Simpson kvadratur formulasini keltirib chiqaring.
8. Monte Karlo usuli mohiyatini tushuntiring.

Misol va masalalar:

1. $I = \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+x}$ ni umumlashgan to‘g‘ri to‘rtburchak kvadratur formulasi bilan yeching. (Javob: 0,692836)

2. $I = \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t} dt$ integralning x =1 nuqtadagi qiymatini umumlashgan Simpson formulasida 6 xona aniqligida yeching. (J: 0,946082)

3. Quyidagi integrallarni barcha kvadratur formulalar yordamida $\varepsilon = 10^{-4}$ aniqlikda hisoblang:

a) $I = \int\limits_2^3 x \ln x dx$; b) $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+x)dx}{x}$;

v) $I = \int\limits_{0,1}^1 \dfrac{\ln(1+x^2)dx}{1+x^2}$; g) $I = \int\limits_{0,3}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

d) $I = \int\limits_2^3 \ln(1+x^2)dx$ i) $I = \int\limits_0^1 \sin x^2 dx$.

4. Simpson formulasidan foydalanib, $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2x} dx$

integralni $\varepsilon = 10^{-3}$ aniqlikda hisoblang.

5. $I = \int_0^1 e^{1-x} dx$ ni kvadratur formulalar orqali hisoblang.

6. $\int_1^4 (3x-2)^2 dx$ integralni Monte-Karlo usuli bilan hisoblang.

X BOB. SONLI DIFFERENTSIALLASH

10.1. Masalaning qo‘yilishi

Ko‘pgina amaliy masalalarni hal qilishda jadval shaklida yoki murakkab analitik ifoda shaklida berilgan $y=f(x)$ funktsiyaning turli tartibli hosilalarini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Bunday hollarda differentsial hisob usullarini bevosita tatbiq etishning yo iloji bo‘lmaydi yoki bu juda qiyin bo‘ladi. Shuning uchun ularga **taqribiy sonli differentsiallash usullari** qo‘llaniladi.

Sonli differentsiallash formulalarini keltirib chiqarish uchun avval berilgan $y = f(x)$ funktsiyani biror $[a,b]$ kesmada $P_n(x)$ ko‘phad bilan interpolyatsiyalanadi, so‘ngra $f'(x) \approx P_n'(x)$ deb olinadi.

Funktsiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lgan x nuqtada differentsialini hisoblash uchun $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ formulalarni lokal hamda global interpolyatsiyalarda interpolyatsiya ko‘phadlarini differentsiallash operatorini approksimatsiyalash vositasida olinadi.

Buning uchun x nuqtada unga yaqin bo‘lgan bir nechta **andoza** deb ataluvchi x_1, x_2, …,x_n ($n \geq m$+1) tugunlar olinadi. Andoza tugunlarida $y_i = f(x_i)$ qiymatlar hisoblanadi va interpolyatsion ko‘phad quriladi:

$$y = f(x) \approx \varphi(x;\overline{a}) = P_{n-1}(x).$$

U holda

$$\frac{d^m f}{dx^m} \approx \frac{d^m P_{n-1}}{dx^m}$$

ifoda biz izlayotgan natijani beradi.

Ishchi formulalarni keltirib chiqarish va ularning realizatsiyasini soddalashtirish maqsadida interpolyatsiyalash tekis to‘rda bajariladi, hosilalar va mos xatoliklar baholari, odatda, x_i tugunlarda olinadi. $n=m+1$ – sonli differentsiallash formulasi x nuqtaning andoza ichida yotishiga bog‘liq emas, chunki m – darajali ko‘phadning m–hosilasi o‘zgarmas songa teng. Bunday formulalar **sodda sonli differentsiallash formulalari** deyiladi.

10.2. Lokal interpolyatsiya vositasida hosilalarni approksimatsiyalash

Funktsiya jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, hosilalar quyidagi formulalardan foydalanib topiladi:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

Bundan

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (10.1)$$

deb faraz qilamiz.

(10.1) munosabatga chekli ayirmalar nisbatlari yordamida **hosilani approksimatsiyalash** deyiladi. $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{0,n}$ jadval ko‘rinishida va interpolyatsion tugunlarning joylashish qadami h=const o‘zgarmas bo‘lganda i – tugun uchun chekli ayirmalarni hisoblash usuliga bog‘liq holda (10.1) ni topish algoritmi quyidagicha: i = 1 bo‘lsin.

1. Chap ayirmalar formulasi

$\Delta y_1 = y_1 - y_0$; $\Delta x = h$;

$$y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}. \quad (10.2)$$

2. O‘ng ayirmalar formulasi

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$; $\Delta x = h$;

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}. \quad (10.3)$$

3. Markaziy ayirmalar formulasi

$\Delta y_1 = y_2 - y_0$; $\Delta x = 2h$;

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}. \quad (10.4)$$

(10.2), (10.3), (10.4) munosabatlardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni approksimatsiyalash formulalarini topish mumkin. Masalan, (10.3) ga asosan:

$$y''_1 = (y'_1)' = \frac{y'_2 - y'_1}{h} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{h} = \frac{y_2 - 2y + y_0}{h^2}. \quad (10.5)$$

10.3. Sonli differentsiallash xatoligi

Tadqiq qilinayotgan funktsiyani approksimatsiyalashda uni quyidagicha deb faraz qilinadi:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x). \quad (10.6)$$

Bunda $\varphi(x)$ sifatida yoki interpolyatsion funktsiyani yoki qatorning qismiy yig‘indisini olish mumkin. U holda approksimatsiyalash xatoligi $R(x)$ qatorning qoldiq hadidan topiladi yoki $P_{n-1}(x)$. (10.6) ni differentsiallab zarur tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = \varphi'(x) + R'(x); \quad f''(x) = \varphi''(x) + R''(x) \ \cdots$$

U holda h qadam bilan jadval asosida berilgan funktsiyani sonli differentsiallashda approksimatsiyalash xatoligi h ga bog‘liq bo‘ladi: $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)$ va uni $O(h^k)$ deb belgilanadi. k daraja ko‘rsatkichini hosilani **approksimatsiyalash xatoligining tartibi** deyiladi. Bunda $|h|<1$ deb faraz qilinadi.

(10.2) – (10.5) formulalar xatoliklarini Teylor qatori yordamida baholash mumkin.

Aytaylik, biror ikki karra uzluksiz differentsiallanuvchi $f(x)$ funktsiya jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

	0	1	2		n
	0	1	2		n

Bunda $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Tugunlar teng uzoqlashgan bo‘lsin: $h = (x_n - x_0)/n$, $x_i = x_0 + ih$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Teylor qatori umumiy ko‘rinishda quyidagicha bo‘ladi:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \ldots \quad (10.7)$$

(10.7) ni $x = x_1$, $\Delta x = -h$ bo‘lganda h^1 aniqlikkacha quyidagicha yozamiz:

$$y_0 = y_1 - y'_1 h + O(h^2).$$

U holda $y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$ ga teng bo‘ladi.

Bu ifoda (10.2) bilan ustma-ust tushadi va birinchi tartibli approksimatsiya hisoblanadi ($k = 1$). U holda ixtiyoriy tugun uchun

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Butun $[a,b]$ oraliq bo‘yicha esa $f'(x)$ uchun $h = \frac{b-a}{n}$ bo‘lgandagi xatolik $R = \frac{h}{2}\max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$ dan oshmaydi.

(10.7) da $\Delta x = h$ deb faraz qilib, yuqoridagi natijani (10.3) uchun ham olish mumkin. (10.4) va (10.5) lar xatoligini baholash uchun Teylor qatorida $\Delta x = -h$ va $\Delta x = h$ deb olib, mos ravishda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$y_0 = y_1 - y'_1 h + \frac{y_1''}{2!}h^2 - \frac{y_1'''}{3!}h^3 + O(h^4); \quad (10.8)$$

$$y_2 = y_1 + y'_1 h + \frac{y_1''}{2!}h^2 + \frac{y_1'''}{3!}h^3 + O(h^4);$$

Farazga ko‘ra $f(x)$ uch karra uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya.

Ikkinchi tenglikdan birinchi tenglikni ayirib:

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2), \text{ bu yerda } k = 2.$$

Ixtiyoriy tugun uchun:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

(10.7) ga ko‘ra butun oraliq bo‘yicha approksimatsiyalash xatoligi

$$R_1 \le \frac{h^2}{6}\max_{a \le x \le b}\left|f'''(x)\right|$$

qiymatdan oshmaydi.

(10.8) tenglikni soddalashtirib, quyidagini topamiz:

$$y''_1 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h^2), \ k = 2.$$

$[x_{i-1}, x_{i+1}]$ kesma uchun bu qiymat quyidagiga teng:

$$y''_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \ i = \overline{1, n-1}.$$

Butun $[a, b]$ oraliqdagi xatolik esa 2-tartibli hosila uchun qiyudagi munosabatdan aniqlanadi:

$$R_2 \le \frac{h^2}{12} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(IV)}(x) \right| .$$

10.4. Global interpolyatsiya vositasida hosilalarni approksimatsiyalash

10.4.1. Nyuton ko‘phadi vositasida approksimatsiyalash

Deylik, $f(x)$ funktsiya jadval ko‘rinishida o‘zgarmas

$$h = x_i - x_{i-1} \ (i = 1,2,\ldots, n)$$

qadam bilan Nyuton interpolyatsion ko‘phadi vositasida approksimatsiyalangan bo‘lsin:

$$y \approx N(x_0 + th) = \ = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (10.9)$$

$$t = \frac{x - x_0}{h} .$$

(10.9) murakkab funktsiyani x o‘zgaruvchi bo‘yicha differentsiallab:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dN}{dt},$$

ixtiyoriy tartibli hosilalarni olish formulasini hosil qilish mumkin:

$$y' \approx$$

$$\approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots \right);$$

$$y'' \approx \quad (10.10)$$

$$\approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2 - 36t + 22}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots \right);$$

Tanlangan x uchun sonli differentsiallash aniqligi ko‘pchilik tugunlarda funktsiya qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi. Bu hol (10.2) – (10.4) munosabatlarda inobatga olinmagan.

Misol 1. Quyidagi jadval bilan biror funktsiya qiymatlari berilgan bo‘lsin. x = 0,1 nuqtada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni hisoblang.

Bunda h=0,1; $t = \frac{0,1-0}{0,1} = 1$ deb oling.

Yechilishi: Avvalo (10.10) uchun chekli ayirmalarni hisoblaymiz.

,4	,5969	,6392	,0472			
		y	^2y	^3y	^4y	^5y
,5	,2833	,6864				
	,2833					
,1	,8107	,5274	,0325	,0047	,0002	,0000
,2	,3606	,5599	,0372	,0049	,0002	
,3	,9577	,5971	,0421	,0051		

(10.10) dan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$y' \approx 10\cdot(0{,}5274+((2\cdot1-1)/2)\cdot0{,}0325+0{,}0047\cdot(3\cdot1-6\cdot1+2)/6+$
$+0{,}0002\cdot(4\cdot1-18\cdot1+22\cdot1-6)/24) = 5{,}436;$

$y'' \approx 100\cdot(0{,}0325+0{,}0047\cdot(6\cdot1-6)/6+0{,}0002\cdot(12-36+22)/24) = =3{,}25.$

Eslatma. Amaliyotda Nyuton, Gauss, Stirling va Bessel interpolyatsion ko‘phadlarini sonli differentsiallashda boshqacharoq yo‘l tutiladi.

Ma’lumki, sonli differetnsiallash formulalari teng uzoqlashgan tugunlar $x_i=x_0+ih$ (i=0, ±1, ±2, …)da hosilalarni topishda qo‘llaniladi, u holda to‘rning ixtiyoriy nuqtasini boshlang‘ich nuqta deb olish va sonli differentsiallash formulalarini x_0 nuqtalar uchun aniqlash mumkin. Bu esa formulalarda tugunlar o‘rniga $t=\dfrac{x-x_0}{h}=0$ almashtirish bajarishga teng kuchli. U holda ko‘phadlarni differentsiallash quyidagi formulalarga keltiriladi.

Nyuton bo‘yicha:

$$y'_0 = f'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n y_0; \ (a)$$

$$y''_0 = f'(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + ...);$$

$$y'_0 = f'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_{-1} - \frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3} + ... + \frac{1}{n}\Delta^n y_{-n}; \ \text{(b)}$$

$$y''_0 = f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-2} - \Delta^3 y_{-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 y_5 + ...)\,.$$

(a) formulalarni jadvalning boshidagi qatorlar uchun, (b) – esa jadvalning oxirgi qatorlari uchun qo‘llaniladi.

Stirling bo‘yicha:

$$y'_0 = f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + ...\right);$$

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-4} + ...\right). \ (c)$$

(c) – formulalar jadvalning o‘rta qatorlari uchun ishlatiladi.

Misol 2. y = sh2x funktsiya uchun h = 0,05 qadam bilan (a) va (c) formulalarni qo’llang. x = 0,00 va x = 0,1 nuqtalarda y' va y'' hosilalarni toping.

$y = f(x)$ uchun quyidagi jadvalni tuzib olamiz:

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,00	0,0000					
		10017				
0,05	0,10017		100			
		10117		101		
0,10	0,20134		201		3	

		103 18		1 04		0
0, 15	0,304 52		3 05		3	
		106 23		1 07		
0, 20	0,410 75		4 12			
		110 35				
0, 25	0,521 10					

Yechilishi: Interpolyatsion ko‘phadlarga asoslangan sonli differentsiallash formulalaridan foydalanamiz. Buning uchun chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz. Jadval 4-tartibgacha davom qiladi, undan keyin «0» ga teng bo‘ladi.

$x = 0{,}0$ nuqta uchun (a) formulalari qo‘llaymiz, bunda $x_0 = 0{,}0$ deb hisoblaymiz:

$$y'\,|_{\,x=0,0} \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0\right) =$$

$= 20 \cdot (0{,}10017 – 0{,}00050 + 0{,}0034 – 0{,}00001) = 2{,}0000;$

$$y''\,|_{\,x=0,0} \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0\right) =$$

$= 400 \cdot (0{,}00100 – 0{,}00101 + 0{,}00003) = 0{,}008.$

$x = 0{,}1$ nuqta uchun (c) formulani qo‘llaymiz, bunda $x_0=0{,}1$ deb hisoblaymiz:

$$y'|_{x=0,1} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right) =$$

$=20 \cdot (0{,}10217 – 0{,}00017) = 2{,}0400;$

$$y''|_{x=0,1} \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right) = 400 \cdot (0{,}00201 – 0{,}0000) = 0{,}804.$$

Taqqoslab ko‘rish maqsadida $y = \mathrm{sh}2x$ funktsiyaning 1- va 2- tartibli hosilalarining aniq qiymatlarini keltiramiz:

$y' = 2\mathrm{ch}2x$: $x = 0{,}0$ uchun $y'=2$; $x=0{,}1$ uchun esa $y'=2{,}0401$;

$y'' = 4\mathrm{sh}2x$: $x = 0{,}0$ uchun $y''=0$; $x=0{,}1$ uchun esa $y''= 0{,}8052$.

Misol 3. $z = \dfrac{\sin(x+y) - \sin x}{y}$ ni Nyuton ko‘phadi bilan hosilalarini hisoblang.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#define A 10
float derivf(float x, y)
{float z; z=(sin(x+y)-sin(x))/y; return z;}
void main()
{ float deltax, der1, der2, e, e1, x;
clrscr();
printf(" x ning qiymatini va epsilon\n aniqlikni kiriting");
```

```
scanf("%f%f", &x, &e);
deltax=0.1; der1=derivf((x, deltax);
do
{ deltax=deltax/A; der2=derivf(x,deltax);
e1=fabs(der1-der2); der1=der2;
}
while (e1>=e);
printf("\n\nx=%f hosila f'=%f",x, der2);
printf("\n yaqinlashish xatoligi =%f\n",e1);
printf("\n davom qilishi uchun ixtiyoriy klavishni bosing . . . ");
}
```

Kesmaning o‘rtasida va oxirida hosilalarni hisoblash uchun (10.9) interpolyatsion ko‘phad va uning (Stirling, Gauss) interpretatsiyalari chekli ayirmalar $\Delta^k y \ (k=1,2,...)$ orqali ifodalanadi. Ammo amaliyotda ba’zan hosilalarni bevosita y_i ning qiymatlari bilan ifodalash qulay.

Bu savolga interpolyatsion tugunlarning teng taqsimlangan to‘ri uchun Lagranj interpolyatsion ko‘phadi javob beradi.

10.4.2. Lagranj ko‘phadi asosida hosilalarni hisoblash

Lagranj interpolyatsion ko‘phadini $L(x)$ va uning qoldiq hadini $R_L(x)$ interpolyatsiyaning 3 ta tuguni bo‘lgan hol uchun ($n = 2$) yozamiz, bunda $x_i - x_{i-1} = h$ $= \text{const}$ ($i = 1,2, ..., n$) deb hisoblaymiz:

$$L(x)=\frac{1}{2h^2}[(x-x_1)(x-x_2)y_0-2(x-x_0)(x-x_2)y_1+(x-x_0)(x-x_1)y_2];$$

$$R_L(x) = \frac{y_*'''}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Ularning hosilalarini topamiz:

$$L'(x) = \frac{1}{2h^2}[(2x-x_1-x_2)y_0-2(2x-x_0-x_2)y_1+(2x-x_0- x_1)y_2];$$

$$R'_L(x)=\frac{y_*'''}{3!}[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)].$$

Bu yerda y_*''' – qandaydir $x_*\in [x_0, x_n]$ ichki nuqtadagi hosilaning qiymati.

y'_0 hosilaning $x = x_0$ bo‘lgandagi ifodasini yozamiz:

$$y'_0=L'(x_0)+R'_L(x_0)=\frac{1}{2h^2}[(2x_0-x_1-x_2)y_0-2(2x_0-x_0-x_2)y_1+$$

$$+(2x_0-x_0-x_1)y_2]+\frac{y_*'''}{3!}[(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(x_0-x_0)(x_0-x_2)+$$

$$+(x_0- x_0)(x_0-x_1)]= \frac{1}{2h}(-3y_0+4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}y_*'''.$$

Shunga o‘xshash, y'_1, y'_2 hosilalarni $x = x_1$, $x = x_2$ dagi qiymatlarini yozish mumkin.

Demak, 3 ta tugun bo‘lgan hol uchun (n=2) ishchi formulalr quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'_0 = \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right) + \frac{h^2}{3} y'''_*$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h}\left(y_2 - y_0\right) - \frac{h^2}{6} y'''_* \quad (10.11)$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h}\left(y_0 - 4y_1 + 3y_2\right) + \frac{h^2}{3} y'''_*$$

Qo‘llanmalarda n=3,4,… uchun Lagranj formulalari berilgan. Demak, 4 ta tugun bo‘lgan holda (n = 3):

$$y'_0 = \frac{1}{6h}\left(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{4} y^{IV}_*$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3\right) - \frac{h^3}{12} y^{IV}_*$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h}\left(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{12} y^{IV}_* \quad (10.12)$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3\right) - \frac{h^3}{4} y^{IV}_*$$

(10.11) va (10.12) fomulalarni tahlil qilib, shuni ta’kidlash mumkinki, (n+1) ta tugundagi funktsiya qiymatidan foydalamib, hosila uchun n-tartibli aniqlikdagi approksimatsiyani olish mumkin. Bu formulalarni nafaqat x_0, x_1, x_2, … tugunlar uchun, balki (10.11) va (10.12) larda mos indekslarni o‘zgartirish bilan hosil bo‘lgan ixtiyoriy $x= x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$, … tugunlar uchun qo‘llash mumkin.

Lagranj ko‘phadi yordamida yuqori tartibli hosilalarning ham approksimatsiyalari olingan.

Demak, 4 ta tugun bo‘lgan holda (n = 3):

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + O(h^2)_*;$$

$$y''_1 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2)_*;$$

$$y''_2 = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) + O(h^2)_*;$$

$$y''_3 = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + O(h^2)_*;$$

va h.k..

Lagranj ko‘phadi bilan hosilalarni hisoblash dasturi:

```
#include <math.h>
*define P15
void main()
{ int i,n;
double a, b, h, h1, h2, x, y1, y2, y[P+1];
clrscr();
 printf(“[a,b]\n kesmani bo‘laklarga ajratish soni n ni kiriting”);
scanf(“%i”,&n);
if ((n>=3)&&n<=15))
{printf (“[a, b]\n kesma oxirlari koordinatalarini kiriting”);
scanf(“%lf%lf”,&a, &b);
printf(“tugunlardagi y(i) funktsiya qiymatini kiriting”);
```

```
printf("bunda y(0)=f(a), y(n)=f(b)\n");
for (i=0; i<=n; scanf("%lf", &y[i]), i++);
printf("x\n ning qiymatini kiriting");
scanf("%lf",&x);
h=(b-a)/n; i=floor((x–a)/h+h/2);
h1=2*h; h2=h*h;
if(i==0)
{ y1=(–3*y[0]+4*y[i]–y[2])/h1;
 y2=(2*y[0]–5*y[i]+4*y[2]–y[3])/h2;
};
if ((i>0)&&(i<n))
{ y1=(–y[i–1]+y[i+1])/h1;
 y2=(y[i–1]–2*y[i]+y[i+1])/h2;
};
if (i==0)
{y1=(y[n–2]–4*y[n–1]+3*y[n]/h1;
 y2=(–y[n–3]+4*y[n–2]–5*y[n–1]+2*y[n])/h2;
};
printf("x %f hosila1=%f", x, y1);
printf(" hosila2=%f",y2);
};
printf("\n Press any key to continue…");
getch();
}
```

Xuddi shunday formulalarni tugunlarning ixtiyoriy joylashgan to‘ri uchun ham olish mumkin. Biroq bunda hosilalarni hisoblash formulalari murakkablashib ketadi. Shuning uchun aniqmas koeffitsiyentlar deb nomlangan sun’iy usuldan foydalanish maqsadga muvofiq.

10.4.3. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli

Asosan ushbu usuldan interpolyatsion tugunlar ixtiyoriy tartibda joylashgan hollarda foydalaniladi. Bunda biror $x = x_i$ nuqtada k-tartibli hosilani hisoblash uchun uni $j=\overline{0,n}$ tugunlarda berilgan $y_j = f(x_j)$ funktsiya qiymatlaridan tuzilgan quyidagi chiziqli kombinatsiya ko‘rinishida izlanadi:

$$y_i^{(k)} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + ... + c_n y_n ,\ i=\overline{1,n}\ . \quad (10.13)$$

Agar $y = f(x)$ finktsiya n dan yuqori bo‘lmagan darajali ko‘phad bo‘lsa, (10.13) munosabat albatta o‘rinli bo‘ladi deb, faraz qilinadi, ya’ni agar uni quyidagi ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lsa:

$$y = b_0 + b_1(x - x_j) + ... + b_n(x - x_j)^n,\ j=\overline{0,n}\,.$$

Bundan ko‘rinadiki, (10.13) munosabat

$$y = 1,\ y = x - x_j,\ y = (x - x_j)^2,\ y = (x - x_j)^n$$

ko‘phadlar uchun bajarilishi kerak. Ularning hosilalari mos ravishda quyidagilarga teng bo‘ladi:

$$y' = 0; y' = 1; y' = 2(x - x_j),\ \ldots,\ y' = n(x - x_j)^{n-1}.$$

Bu ifodalarni (10.13) tenglikning chap va o‘ng tomonlariga qo‘yib, c_0, c_1, …,c_n qiymatlarni hisoblash uchun (n+1)-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi.

Misol. n=3, h = const, ya’ni 4 ta tugun bo‘lgan hol uchun y'_1 hosilani toping.

Yechilishi: (10.13) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$y'_1 = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3.$$

Quyidagi ko’phadlardan foydalanamiz:

$$y = 1;\ y = x - x_0;\ y = (x - x_0)^2;\ y = (x - x_0)^3\ ; \quad (10.14)$$

$$y' = 0;\ y' = 1;\ y' = 2(x - x_0);\ y = 3(x - x_0)^2. \quad (10.15)$$

(10.14) va (10.15) larni $x = x_1$ uchun izlanayotgan tenglamaga olib borib qo‘yamiz:

$0 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1;$

$1 = c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0) + c_3(x_3 - x_0);$

$2(x_1 - x_0) = c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2 + c_3(x_3 - x_0)^2;$

$3(x_1 - x_0)^2 = c_0(x_0 - x_0)^3 + c_1(x_1 - x_0)^3 + c_2(x_2 - x_0)^3 + c_3(x_3 - x_0)^3.$

Bir nechta shakl almashtirishlardan keyin ushbuni olamiz:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ hc_1 + 2hc_2 + 3hc_3 = 1; \\ hc_1 + 4hc_2 + 9hc_3 = 2; \\ hc_1 + 8hc_2 + 27hc_3 = 3. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, quyidagi qiymatlarni topamiz:

$$c_0 = -\frac{1}{3h};\ c_1 = -\frac{1}{2h};\ c_2 = \frac{1}{h};\ c_3 = -\frac{1}{6h};$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3\right).$$

Hosil bo‘lgan ifoda y'_1 hosilani hisoblash formulasi (10.12) bilan aynan bir xil, faqat nazariy xatolik ko‘rsatilmagan.

10.5. Sonli differentsiallashda approksimatsiya aniqligini oshirish

Hosilalarni hisoblash uchun yuqorida qarab chiqilgan chekli ayirmali munosabatlardan ko‘rinadiki, ularning aniqlik darajasi interpolyatsiya tugunlari soniga to‘g‘ri proportsional ekan. Biroq interpolyatsiya tugunlari soni oshgani sari hisoblash hajmi ortadi va ularni aniqligini baholash murakkablashadi. Bu kamchiliklarni bartaraf qilish maqsadida chekli ayirmali yondoshuv uchun tugunlar soni chekli bo‘lganda oddiy va effektiv bo‘lgan usul – Runge-Romberg usuli ishlab chiqilgan.

$F(x)$ approksimatsiyalash kerak bo‘lgan hosila bo‘lsin, $f(x,h)$ – uning h qadamli tekis taqsimlangan to‘rdagi chekli ayirmali approksimatsiyasi bo‘lsin. U holda approksimatsiyaning qoldiq hadini quyidagicha yozish mumkin: $R = h^{\rho}\varphi(x) + O(h^{\rho+1})$,

bunda birinchi had xatolikning asosiy qismi.

Hosilaning qiymati quyidagiga teng bo‘ladi:

$$F(x)=f(x,h)+h^p\varphi(x)+O(h^{p+1}).(10.16)$$

Shu nuqtada (10.16) ifodani h emas $h_1 = kh$ qadam uchun yozamiz:

$$F(x)=f(x,kh)+(kh)^p\varphi(x)+O[(kh)^{p+1}].\ (10.17)$$

(10.16) va (10.17) tengliklarni o‘ng tomonlarini tenglab, xatolikning asosiy hadini aniqlash formulasini topamiz:

$$h^\rho\varphi(x)\approx\frac{f(x,h)-f(x,kh)}{k^\rho-1}+O(h^{\rho+1}).\ (10.18)$$

(10.18) ni (10.16) ga qo‘yib, ishchi formulani keltirib chiqaramiz:

$$F(x)=f(x,h)+\frac{f(x,h)-f(x,kh)}{k^\rho-1}+O(h^{\rho+1}).\ (10.19)$$

Topilgan (10.19) formula h va kh qadamlar bilan hisoblangan hosila qiymatlariga qarab, aniqlik darajasini h^ρ dan $h^{\rho+1}$ gacha oshirish imkonini beradi.

Misol. x=1 nuqtada $y = x^3$ funktsiya hosilasini hisoblang.

Yechilishi: Ravshanki, hosilaning aniq qiymati $y'(1)=3$ ga teng. Berilgan x=1 nuqta atrofida funktsiyaning qiymatlari jadvalini tuzamiz:

	0 ,8	0 ,9	,0
	0 ,512	0 ,729	,0

ρ=1 tartibli chap ayirmalar approksimatsiyasidan foydalanamiz.

$h_1 = 0{,}1$; $h_2 = 0{,}2$; ya’ni $k = 2$ deb qabul qilamiz

$$f(x,h)=y'(1;\ 0{,}1)=\frac{y(1)-y(0{,}9)}{0{,}1}=2{,}71;$$

$$f(x,kh)=y'(1;\ 0{,}2)=\frac{y(1)-y(0{,}8)}{0{,}2}=2{,}44;$$

U holda $F(x)=y'(1)=2{,}71+\dfrac{2{,}71-2{,}44}{2^1-1}=2{,}98$.

Nazorat uchun savollar:

1. Qanday masalalrda sonli differentsiallash usulidan foydalaniladi?
2. Hosilani approksimatsiyalash formulasini keltiring.
3. Chap, o‘ng va markaziy ayirmalar formulalarini yozing.
4. Sonli differentsiallash xatoligi qanday topiladi?
5. Hosilani Nyuton ko’phadi vositasida approksimatsiyalang.
6. Hosilani Lagranj ko‘phadi vositasida approksimatsiyalang.

Misol va masalalar:

1. Quyidagi jadval bilan berilgan $y=\lg x$ funktsiyaning $y'(50)$ hosilasini toping.

x	50	55	60	65
$\lg x$	1,699 0	1,740 4	1,778 2	1,812 9

2. Quyidagi jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiyaning $f'(3,5)$ va $f''(3,5)$ hosilalarni toping.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	10	30	68	130	222

3. Quyidagi *h*=0,1 qadamli jadval bilan berilgan $y = f(x)$ funktsiyaning $f'(1,06)$ hosilasini hisoblang:

0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
1,8221	2,0138	2,2255	2,4596	2,7183	3,0042

XI BOB. ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

11.1. Masalaning qo‘yilishi

Fan va texnikaning ko‘pgina sohalarida turli xil masalalar matematik modellashtirish maqsadida differentsial tenglama ko‘rinishiga keltiriladi.

Bir yoki bir nechta erkli o‘zgaruvchilarning no’malum funktsiyalaridan va ularning hosilalaridan tuzilgan tenglamaga **differentsial tenglama** deyiladi.

Agar tenglamadagi noma’lum funktsiya bir o‘zgaruvchili bo‘lsa, unga **oddiy** d**ifferentsial tenglama**, aks holda **xususiy hosilali differentsial tenglama** deyiladi.

x o‘zgaruvchiga bog‘liq $Y = Y(x)$ funktsiya va uning n- tartibgacha bo‘lgan hosilalaridan iborat

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0, \quad (11.1)$$

tenglamaga n- tartibli **oddiy** d**ifferentsial tenglama** deyiladi.

(11.1) tenglamani yechish bu tenglikni ayniyatga aylantiruvchi $Y=Y(x)$ funktsional bog‘lanishni topish demakdir.

Umumiy ko‘rinishdagi (11.1) differentsial tenglamani amalda qo‘llash uchun soddaroq ko‘rinishda yozishga harakat qilinadi: $n = 1$ bo‘lganda (11.1) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$Y' = f(x, Y)$; (11.2)

Agar $n = 2$ bo‘lsa, $Y'' = f(x, Y, Y')$ tenglik o‘rinli.

(11.1) tenglamaning umumiy ko‘rinishi:

$$Y = Y(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n),$$

bunda c_i – qandaydir o‘zgarmas son.

Agar biror shartlar asosida c_i ni aniqlash mumkin bo‘lsa, u holda tenglamaning xususiy yechimlari topiladi:

$$Y = Y(x, c_{10}, c_{20}, c_{30}, \dots, c_{n0}). \quad (11.3)$$

Bu shartlarning berilishiga qarab, oddiy differentsial tenglamaning ikki turi farqlanadi: Koshi masalasi; chegaraviy masala.

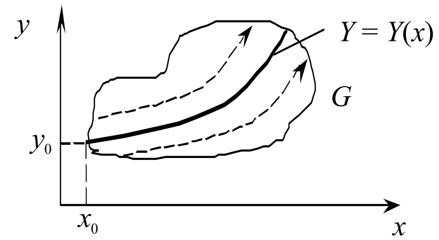
Qo‘shimcha shartlar sifatida izlanayotgan funktsiyani yoki uning hosilalarini qiymatlari berilishi mumkin.

Agar shartlar funktsiya aniqlangan $Y(x) \in [a, b]$ kesmaning bitta $x=x_0=a$ nuqtasida berilgan bo‘lsa, bunday masala boshlang‘ich nuqtali **Koshi masalasi** deyiladi.

Agar qo‘shimcha shartlar $x=a$ va $x=b$ nuqtalarda berilgan bo‘lsa, bunday masalaga chegaraviy shartli **chegaraviy masala** deyiladi.

Birinchi tartibli differentsial tenglamaning umumiy yechimi $Y = f(x, c)$, xususiy yechimi esa $Y = f(x, c_0)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

(11.2) ko‘rinishdagi birinchi tartibli differentsial tenglamaning geometrik interpretatsiyasini qaraymiz. Tenglama yechimini XOY tekislikda egri chiziqlar to‘plami shaklida tasvirlash mumkin:



Rasm 11.1. 1-tartibli differentsial tenglamaning geometrik tasvirlanishi.

Faraz qilaylik, (11.2) tenglamaning o‘ng tomonidagi $f(x,y)$ oshkormas funktsiya *XOY* ttekislikning *G* sohasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. $f(x,$y) funktsiya *G* tekislikda yo‘nalishlar maydonini, ya’ni tekislikning $f(x,$y) funktsiya mavjud bo‘lgan har bir nuqtasida bu nuqta orqali o‘tuvchi integral egri chiziqning yo‘nalishini aniqlaydi.

Umumiy yechimda yo‘nalishlar maydonidagi barcha integral egri chiziqlar topiladi.

Eng sodda differentsial tenglamalar uchun ham yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradigan yechimni chekli sondagi matematik amallarni qo‘llab yechish mumkin emas. Shuning uchun ham differentsial tenglamalrni taqribiy yechishning bir nechta sonli usullari yaratilgan. Bu usullarni ularning yechimlari qanday ko‘rinishda berilishiga qarab, 4 turga bo‘lish mumkin: grafik usul; analitik usul; taqribiy analitik usul; sonli usul.

Birinchi 3 ta usul differentsial tenglamalar kursida o‘rganiladi. Ko‘pgina ilmiy-texnikaviy masalalarning taqribiy yechimlarini **sonli usullar** yordamida EHM vositasida olish mumkin.

Sonli usullarning eng ko‘p tarqalgan turi **chekli ayirmalar usulidir**, bu usulda argumentning uzluksiz sohasini “tugun” deb ataluvchi nuqtalarning diskret to‘plami bilan almashtirish printsipiga asoslangan. Bu tugunlar ayirmalar to‘rini hosil qiladi. Unda izlanayotgan uzluksiz funktsiya qiymati taqribiy yechim bilan almashadi. Yechim jadval usulida olinadi. Topilgan yechimlar faqat xususiy yechimlarni olish imkonini beradi.

11.2. Oddiy differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi

(11.1) differentsial tenglamaning berilishiga qarab Koshi masalasi quyidagicha shakllarda bo‘ladi:

1. Agar n=1 bo‘lsa, ya’ni 1-tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasi

$$\frac{dY}{dX} = f(x,Y) \quad (11.4)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi va $x = x_0$ da berilgan Y_0 qiymatni qabul qiluvchi:

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (11.5)$$

$Y = Y(x)$ funktsiyani topish talab qilinadi,

Aniqlik uchun yechimni $x > x_0$ qiymatlar uchun topish kerak deb hisoblaymiz. Boshlang‘ich shart sifatida ixtiyoriy x olinadi, biroq ko‘pchilik holatlarda (11.4) tenglikni sonli usullari ishlanmalariga ta’sir qilmasligi uchun $x_0 = 0$ deb qabul qilinadi.

2. n-tartibli oddiy differentsial tenglama uchun Koshi masalasi $Y^{(n)} = f(x, Y, Y', ..., Y^{(n-1)})$; (11.6)

(11.6) va boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi

$Y(x_0) = Y_0$, $Y'(x_0) = Y_0'$, …, $Y^{(n-1)}(x_0) = Y_0^{(n-1)}$; (11.7)

$Y = Y(x)$ ni toppish talab qilinadi, bunda $Y_0, Y'_0, ..., Y_0^{(n-1)}$ – berilgan sonlar.

3. Differentsial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi:

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = f_1(x, Y_1, Y_2, ..., Y_n); \\ \dfrac{dY_2}{dx} = f_2(x, Y_1, Y_2, ..., Y_n); \\ \quad \ldots \\ \dfrac{dY_n}{dx} = f_n(x, Y_1, Y_2, ..., Y_n). \end{cases} \quad (11.8)$$

(11.8) tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechishda (11.8)ni va boshlang‘ich shartlarni

$Y_1(x_0) = Y_{10}$; $Y_2(x_0) = Y_{20}$; … ; $Y_n(x_0) = Y_{n0}$. (11.9)

qanoatlantiruvchi $Y_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) funktsiyani topish talab qilinadi.

(11.4) va (11.5) ko‘rinishdagi oddiy differentsial tenglamalarni yechish uchun qo‘llanilgan sonli usullarni (11.8) va (11.9) tenglamalar uchun qo‘llash mumkin.

n-tartibli (11.6) differentsial tenglamani $Y_i(x)$, $i = \overline{1, n-1}$ yangi noma’lum funktsiyalarni

$$y_1 = y', \; y_2 = y'', \; \ldots, \; y_{n-1} = y^{(n-1)}. \quad (11.10)$$

kiritish bilan (11.8) tenglamalar sistemasi ko‘rinishiga olib kelish mumkin. U holda (11.6) quyidagi shaklda yoziladi:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = Y_1; \\ \dfrac{dY_1}{dx} = Y_2; \\ \quad \ldots \\ \dfrac{dY_{n-2}}{dx} = Y_{n-1}; \\ \dfrac{dY_{n-1}}{dx} = f(x, Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}). \end{cases}$$

Agar (11.4), (11.6) tenglamalar yoki (11.8) sistema uchun umumiy yechim topilsa, u holda Koshi masalasi ixtiyoriy o‘zgarmaslarning qiymatlarini topishga keltiriladi. Albatta u taqribiy yechiladi.

11.3. Koshi masalasini yechishning sonli usullari

Chekli ayirmalar texnologiyasi bilan (11.4) va (11.5) Koshi masalasini yechish uchun x_0, x_1, ..., x_n nuqtalar ketma - ketligini va $h_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0,1,..., n-1$) qadamlarni kiritamiz.

Har bir x_i tugunda $Y(x_i)$ funktsiya qiymatlari oʻrniga berilgan nuqtalar toʻplamida approksimatsiyaning natijasi $Y(x)$ ning aniq yechimi sifatida y_i son kiritiladi. $\{x_i, y_i\}$ jadval shaklida berilgan y funktsiyani **toʻrli funktsiya** deyiladi.

(11.4) tenglamada hosila qiymatini chekli ayirmali munosabatlar bilan almashtirib, $Y(x)$ ga bogʻliq (11.4), (11.5) differentsial masalalardan toʻrli funktsiyaga bogʻliq boʻlgan chekli ayirmali masalalarga oʻtamiz:

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ...y_{i-k+1}), \quad i = 1,2,...; \quad (11.11)$$

$$y_0 = Y_0 \,. \quad (11.12)$$

Bu **umumiy koʻrinishdagi ayirmaviy masala** hisoblanadi, (11.11) ning oʻng tomonidagi ifodaning mukammal koʻrinishi hosilani approksimatsiyalash usuliga bogʻliq boʻladi. Har bir sonli usul uchun oʻzining (11.11) koʻrinishi mavjud.

Agar (11.11) ning oʻng qismida y_{i+1} had boʻlmasa, ya’ni y_{i+1} ning qiymati oldingi k ta y_i, y_{i-1}, ..., y_{i-k+1} qiymatlar boʻyicha hisoblansa, u holda **ayirmaviy sxema oshkor** deyiladi. Shuning uchun k- qadamli usul mavjud: k=1 boʻlsa, bir qadamli usul; k=2 boʻlsa, ikki qadamli usul va h.k.

Agar y_{i+1} (11.11) ning oʻng tomoniga tegishli boʻlsa, u holda bu oshkormas usul boʻladi va uni amalga oshirish faqat iteratsion xarakterga ega boʻladi.

11.3.1. Koshi masalasini yechishning bir qadamli usuli

Oddiy differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasini yechishning oddiy sonli usullariga quyidagilar kiradi:

***1*. Eyler usuli.** Bu usul izlanayotgan $Y(x)$ funktsiyani tizimning $x=x_i$ (i= 0, 1, 2, …, n) tugunlari atrofida Teylor qatoriga yoyishga asoslangan. Bunda 2- va undan yuqori tartibli hosilalarga ega barcha hadlar tashlab yuboriladi. Qoidaga koʻra, tekis taqsimlangan $\Delta x = x_{i+1} - x_i = h$=const ($i=\overline{0,n}$) toʻrdan foydalaniladi.

U holda yoyilmani quyidagicha yozish mumkin:

$$Y(x_i + \Delta x) = Y(x_i) + Y'(x_i) \cdot \Delta x_i + O(\Delta x_i^2)\,. \quad (11.13)$$

$Y(x)$ funktsiya qiymatlarini toʻrning x_i tugunlarida toʻrli funktsiyaning qiymatlari bilan almashtirib va (11.4) tenglikni qoʻllab, quyidagiga ega boʻlamiz:

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i, y_i)\,.$$

U holda (11.13) dan

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i); \quad i = 0,1,2,...,n-1 \quad (11.14)$$

ni hosil qilamiz.

i=0 boʻlganda $x=x_1$ tugun uchun: $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ bo’ladi. (11.14) algoritm boʻyicha davom qilib,

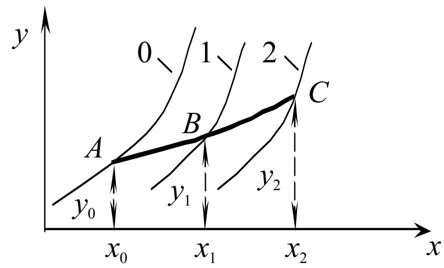
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1);$$

$$\cdots$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})\,.$$

qiymatlarni topish mumkin.

Geometrik interpretatsiyasi 11.2-chizmada keltirilgan.

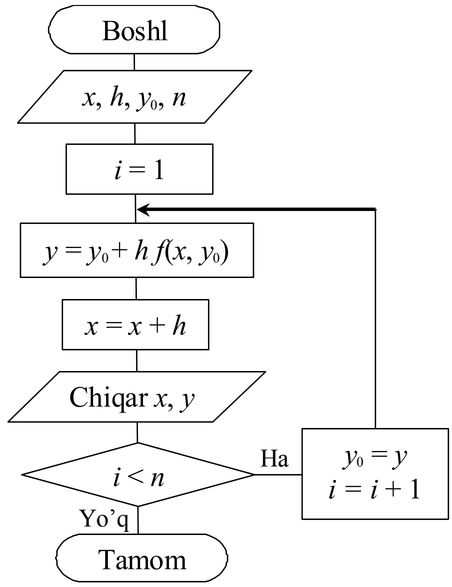


Rasm 11.2. Eyler usulining geometrik tasvirlanishi.
«0» – chiziq aniq yechim; «1» va «2» – taqribiy yechimlardir.

(x_0, y_0) nuqtadan o‘tuvchi izlanayotgan $y(x)$ integral egri chizig‘i uchi (x_i, y_i) nuqtada bo‘lgan siniq chiziq bilan almashtiriladi. Har bir siniq chiziq zvenosi (x_i, y_i) nuqtadan o‘tuvchi (11.4) integral egri chizig‘i bilan mos yo‘nalishga ega. Shuning uchun ham bu usulni **Eylerning siniq chiziqlar usuli** deb ham yuritiladi.

Mazkur algoritmning blok-sxemasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Olingan natijalar har bir qadamda ma’lum qilinadi, agar natijalarni saqlash kerak bo‘lsa, u holda y_0, y_1, ..., y_n qiymatli massiv kiritishga to‘g’ri keladi.



(11.13) dan ko‘rinadiki, Eyler usulining lokal xatoligi $O(h^2)$ kabi baholanadi. Butun [a, b] oraliq n ta bo‘lakka bo‘linadi, u holda umumiy xatolik

$$n\,O(h^2) = \frac{1}{h}O(h^2) = O(h) \text{– 1-tartibli.}$$

Mashinada hisoblashning xatoligini aniqlash 2 karrali hisob bilan olib boriladi, ya’ni [x_i, x_{i+1}] kesmada hisoblash $h/2$ qadam bilan takror bajariladi va y^*_{i+1} ($h_i/2$ qadam bo‘lganda) aniqroq yechimning xatoligi $\left|y^*_{i+1} - y_{i+1}\right|$ ayirma bilan baholanadi.

2. Eylerning qayta hisoblash usuli. Ushbu usulda (11.14) rekurrent munosabatdagi $f(x_i, y_i)$ ning o‘rniga $f(x_i, y_i)$ va $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ larning o‘rta arifmetigi olinadi. U holda

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right], \quad i = 0,1,... \quad (11.15)$$

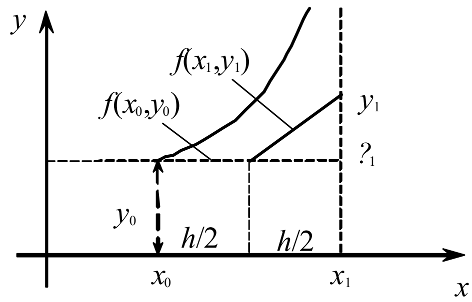
Bu oshkormas sxema hisoblanib, uni ikkita iteratsiya bilan amalga oshiriladi: avvalo y_i ni dastlabki qiymat deb hisoblab, (11.14) bo‘yicha birinchi yaqinlashish topiladi:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad ,(11.16)$$

So‘ngra (11.16) ni (11.15) ning o‘ng qismidagi y_{i+1} ning o‘rniga olib borib qo‘yiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{1+i})], \qquad i = 0,1,... \quad (11.17)$$

Eylerning qayta hisoblash usulining geometrik tasviri 11.3-chizmada keltirilgan.



Rasm 11.3. Eylerning qayta hisoblash usuli tasviri.

Eylerning qayta hisoblash usuli yordamida y_{i+1} va $\tilde{y}_{i+1}$ larni taqqoslash bilan aniqlikni nazorat qilish mumkin. Buning asosida qadamni tanlash mumkin. Agar $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}|$ kattalik berilgan ε aniqlik bilan bir xil bo‘lsa, u holda qadamni kattalashtirish mumkin, agar $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| > \varepsilon$ bo‘lsa, qadamni kichraytirish, ya’ni ikki karrali hisoblash sxemasini qo‘llash kerak bo‘ladi, bunda $\frac{1}{3}\left|y_i^* - y_i\right| \approx \left|y_i^* - y(x_i)\right|$ bo‘yicha xatolik baholanadi, bunda $y(x_i)$ kattalik $x = x_i$ nuqtadagi aniq qiymat, y_i va y^*_i lar esa mos ravishda h va $h/2$ qadamlar bilan olingan taqribiy qiymatlar.

3. Eylerning ketma-ket iteratsion qayta ishlash usuli.

Har bir olingan y_i qiymat uchun iteratsion qayta ishlashni qo‘llab, Eyler usulini yanada aniqlashtirish mumkin.

Xususan, oldiniga (11.16) bo‘yicha hisoblangan

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$$

birinchi qo‘pol yaqinlashishdan kelib chiqib, (11.15) ga asosan quyidagi sxema bo‘yicha iteratsion jarayon quriladi

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}). \quad (11.18)$$

Ikkita ketma-ket $y_{i+1}^{(k)}$, $y_{i+1}^{(k+1)}$ yaqinlashishlarning mos o‘nlik belgilari ustma-ust tushmaguncha iteratsiya davom qildiriladi va $y_{i+1}^{(k)} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$ deb faraz qilinadi.

Qoidaga ko‘ra, yetarlicha h kichik qadamlarda iteratsiya tezroq yaqinlashadi. Agar 3-4 iteratsiyadan keyin ham mos o‘nlik belgilari ustma-ust tushmasa, hisoblash qadami h kichraytiriladi. y_i qiymatni bunday qayta ishlashdan keyin navbatdagi x_{i+1} tugunga o‘tiladi.

Misol 1. [0;1] kesmada $y' = y - \frac{2x}{y}$ tenglamaning yechimlari jadvalini Eyler usuli yordamida tuzing. Bunda qadamni h = 0.2, boshlang‘ich shartni $y(0)$ = 1 deb oling.

Hisoblash natijalarini jadvalga joylashtiramiz:

	i	y i	y_i	Aniq yechim $y = \sqrt{2x+1}$
		1 ,0000	,2000	1,000 0
	,2	1 ,2000	,1733	1,183 2
	,4	1 ,3733	,1561	1,341 6
	,6	1 ,5294	,1492	1,483 2
	,8	1 ,6786	,1451	1,612 4
	,0	1 ,8237		1,732 0

Birinchi satrda i = 0 bo‘lganda x_0 = 0, y_0 =1,000 deb yoziladi va shular asosida $f(x_0, y_0)$ = 1 hisoblanadi, so‘ngra $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0)$= 0,2 topiladi. U holda (11.14) formuladan y_1=1+0,2 = 1,2 qiymatni olamiz.

i = 1 bo‘lgandagi x_1 = 0,2 va y_1 = 1,2000 qiymatlar 2-satrga yoziladi. Ulardan foydalanib, quyidagilarni hisoblash mumkin: $f(x_1,y_1)$ = 0,8667; $\Delta y_1 = hf(x_1,y_1)$=0,2·0,8667=0,1733.

U holda $y_2 = y_1 + \Delta y_1$ = 1,2 + 0,1733 = 1,3733.

i=2,3,4,5 bo‘lgan hollar uchun ham shunga o‘xshash hisoblashlar bajariladi. Jadvalning oxirgi ustuniga taqqoslash maqsadida aniq yechim joylashtirilgan. Jadvaldan ko‘rinadiki, y_5 uchun absol’yut xatolik $\varepsilon = 1{,}8237 - 1{,}7320 = 0{,}0917$ ga teng, ya’ni 9% foizni tashkil etadi.

Eyler usulida Koshi masalasini yechish dasturi:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
 const int n=5;
 double a=0, b=1, h,x[n], y[n],z[n],e[n];
 h=(b-a)/n;
 x[0]=0; y[0]=1;
 for(int i=0;i<=n;i++)
 {
 x[i+1]=x[i]+h;
```

```
y[i+1]=y[i]+h*(y[i]-2*x[i]/y[i]);
}
for(int i=0; i<n;i++)
{
z[i]=pow(2*x[i]+1,1/2);
e[i]=(z[i]-y[i]);
cout<<i+1<<"-ayirma e["<<i<<"]="<<e[i]<<endl;
}
return 0;
}
```

Eslatma. Eyler usulini differentsial tenglamalar sistemalarida va 1–tartibli differentsial tenglamalar sistemalariga keltirilgan yuqori tartibli differentsial tenglamalarda qo‘llash mumkin.

Boshlang‘ich shartlari $y(x_0) = y_0$ va $z(x_0) = z_0$ bo‘lgan 1–tartibli ikkita differentsial tenglama sistemasini qaraylik:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z); \end{cases} \quad (11.19)$$

Bu sistema uchun taqribiy qiymatlar $y(x_i) \approx y_i$ va $z(x_i) \approx z_i$ quyidagi formuladan topiladi:

$$\left.\begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i)\ , \\ z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i), \quad i = 0,1,2,... \end{array}\right\} \quad (11.20)$$

Misol 2. Eyler usulini qo‘llab, [1;1.5] kesmada

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0 \quad (11.21)$$

tenglamaning qiymatlari jadvalini tuzing. Boshlang‘ich shartlar $y(1) = 0.77$ va $y'(1) = –0.44$, qadamni $h = 0,1$ deb oling.

Yechilishi: (11.21) tenglamani $y'=z$, $y''=z'$ almashtirishlar yordamida boshlang‘ich shartlari $y(1) = 0,77$ va $z(1) = –0,44$ bo‘lgan birinchi tartibli tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = -\dfrac{z}{x} - y; \end{cases}$$

Shunday qilib, quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = z; \\ f_2(x, y, z) = -\dfrac{z}{x} - y. \end{cases}$$

(11.20) formulaning hisoblash natijalari jadvalga kiritilgan:

	i	i	Y_i	$_{1i} = z_i$	z_i	$f_{2i} = -$

	,0 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5	,77 ,726 ,679 ,629 ,576 ,521	0,044 0,047 0,050 0,053 0,055	0,44 0,473 0,503 0,529 0,551	0,033 0,030 0,026 0,022	–0,33 –0,296 –0,260 –0,222

Jadvalning 1-satriga $i = 0$, x_0=1,0; y_0 = 0,77; z_0 = –0,44.

So'ngra f_{10}, f_{20} larni aniqlaymiz:

$$f_{10} = f_1(x_0, y_0, z_0) = z_0 = -0{,}44;$$

$$f_{20} = f_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{z_0}{x_0} - y_0 = -0{,}33.$$

(11.20) ni qo'llab, quyidagilarni topamiz:

$$\Delta y_0 = hf_{10} = 0{,}1 \cdot (-0{,}44) = -0{,}044; \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0{,}726;$$

$$\Delta z_0 = hf_{20} = 0{,}1 \cdot (-0{,}33) = -0{,}033; \qquad z_1 = z_0 + \Delta z_0 = -0{,}473.$$

Demak, 2-satrga i=1; x_1 =1,1; y_1 = 0,726; z_1 = –0,473 larni yozish mumkin. Bu qiymatlardan foydalanib, f_{11}, f_{21} larni aniqlaymiz:

$$f_{11} = f_1(x_1, y_1, z_1) = z_1 = -0{,}473;$$

$$f_{21} = f_2(x_1, y_1, z_1) = -\frac{z_1}{x_1} - y_1 = -0{,}296.$$

Shundan keyin quyidagilarni topish mumkin:

$$\Delta y_1 = hf_{11} = 0{,}1 \cdot (-0{,}47) = -0{,}047; \qquad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}679;$$

$$\Delta z_1 = hf_{21} = 0{,}1 \cdot (-0{,}30) = -0{,}030; \qquad z_2 = z_1 + \Delta z_1 = -0{,}503.$$

i =2, 3, 4, 5 hollar uchun ham xuddi shunga o'xshash hisoblanadi.

4. Ikkinchi tartibli Runge-Kutta usuli (Eyler-Koshi usuli). Ushbu usul asosida turli aniqlik darajalariga ega bo'lgan ayirmaviy sxemalarni qurish mumkin. Usul g'oyasi izlanayotgan $y=y(x)$ funktsiyani to'rning tugunlari atrofida Teylor qatoriga yoyishdan iborat.

Ushbu usulda y_{i+1} qiymatlar quyidagi formulalardan topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;$$

$$\Delta y_i = \Delta y_{i1} + \Delta y_{i2},$$

$$\Delta y_{i1} = \frac{h}{2} f(x_i, y_i),$$

$$\Delta y_{ia} = \frac{h}{2} f(x_i + h,\ y_i + h\, f(x_i, y_i)).$$

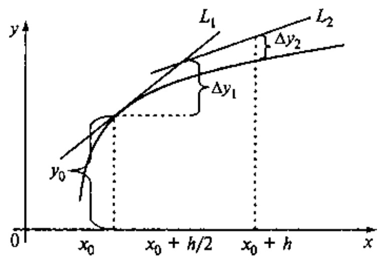
U holda

$$y_i = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + 1, y_i + hf(x_i, y_i))}{2}.$$

Belgilash kiritamiz: $y^*_{i+1} = y_i + h\,f\,(x_i, y_i)$,

shunda $y_{i+1} = y_1 + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1}))}{2}$.

Geometrik nuqtai nazardan bu usul orqali dastlabki $(x_i, y_i,)$ nuqtada integral egri chiziqning yo‘nalishi aniqlanadi va (x_{i+1}, y^*_{i+1}) yordamchi nuqtada bu yo‘nalishlarning o‘rtachasini tanlaymiz.



Rasm 11.4. Eyler-Koshi usulining geometrik ko’rinishi

y'=x^2+y^2 tenglama uchun Eyler-Koshi usulida Koshi masalasini yechish dasturi:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
 const int n=5;
 double a=0, b=1, h,x[n], y[n],y1[n],z[n],e[n];
 h=(b-a)/n;
 x[0]=0; y[0]=0;
 for(int i=0;i<=n;i++)
 {
 x[i+1]=x[i]+h;
 y1[i+1]=y[i]+h*pow(x[i]+y[i],2);
 y[i+1]=y[i]+h/2*(pow(x[i]+y[i],2)+pow(x[i]+y1[i+1],2));
 }
 for(int i=0; i<n;i++)
 {
 z[i]=tan(x[i])-x[i];
 e[i]=(z[i]-y[i]);
 cout<<i+1<<"-ayirma e["<<i<<"]="<<e[i]<<endl;
 }
 return 0;
}
```

5. To‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli. Amaliyotda ko‘pincha 4-tartibli Runge-Kutta usulidan foydalaniladi. Bu usulda y_{i+1} kattaliklar quyidagi formulalardan topiladi:

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;$

$\Delta y_i = \dfrac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$**,** bunda i=1,2,…;

$k_1=f(x_i,y_i);$

$k_2=f(x_i+h/2,\ y_i+hk_1/2);$

$k_3=f(x_i+h/2,\ y_i+hk_2/2);$

$k_4=f(x_i+h,\ y_i+hk_3);$

Misol 3. $y' = y - x$ differentsial tenglama y(0)=1,5 boshlang‘ich shart bilan berilgan bo‘lsin. Runge-Kutta usuli bilan x= 1,5 uchun ε = 0,01 aniqlikda tenglamani yeching.

Yechilishi: h=0,25 bo‘lsin deylik. Butun integrallanuvchi [0; 1,5] kesmani 6 ta nuqta bilan bo‘laklarga ajratamiz:

$x_0=0;\ x_1=0,25;\ x_2=0,5;\ x_3=0,75;\ x_4=1;\ x_5=1,25;\ x_6=1,5.$

Boshlang‘ich shartlardan x_0=0; y_0=1,5 larga egamiz.

Birinchi yaqinlashishni topamiz:

$$y_1=y_0+\Delta y_0, \text{ bunda } \Delta y_0 = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6};$$

Runge-Kutta usulidan foydalanib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$k_1=(y_0+x_0)h= 1.5\bullet 0.25=0.375;$$

$$k_2=[(y_0+k_1/2)-(x_0+h/2)]h=[(1.5+0.187)-0.125]\bullet 0.25=0.39;$$

$$k_3 =[(y_0+k_2/2)-(x_0+h/2)]= 0.392;$$

$$k_4 =[(y_0+k_3)-(x_0+h)]h= 0.41.$$

Bulardan $\Delta y_0 = \dfrac{1}{6}(0.375 + 2 \bullet 0.39 + 2 \bullet 0.392 + 0,41) = 0,392.$

Shunday qilib, $y_1 = 1.5 + 0.392 = 1.892$ va h.k.

Xulosa qilib shuni ta’kidlaymizki, bir qadamli Runge-Kutta usulidan 1–tartibli differentsial tenglamalar sistemalarini yechishda foydalanish mumkin.

4–tartibli Runge-Kutta usuli bilan y'=x²+y² tenglamani yechish dasturi:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
 const int n=5;
 double a=0, b=1, h,x[n], y[n],y1[n],z[n],e[n],k0,k1,k2,k3;
 h=(b-a)/n;
 x[0]=0; y[0]=0;
 for(int i=0;i<n;i++)
 {
 k0=pow(x[i]+y[i],2);
 k1=pow(x[i]+h/2+y[i]+h/2*k0,2);
 k2=pow(x[i]+h/2+y[i]+h/2*k1,2);
 k3=pow(x[i]+h+y[i]+h*k2,2);
 y[i+1]=y[i]+h/6*(k0+2*k1+2*k2+k3);
```

```
 x[i+1]=x[i]+h;
 }
 for(int i=0; i<n;i++)
 {
 z[i]=tan(x[i])-x[i];
 e[i]=fabs(z[i]-y[i]);
 cout<<i+1<<"ayirma e["<<i<<"]="<<e[i]<<endl;
 }
 return 0;
}
```

11.3.2. Koshi masalasini yechishning ko‘p qadamli usuli

Ushbu usulda (11.11) ayirmaviy hisob sxemasini qurish uchun y_{i+1} qiymatlarni aniqlashda bitta qadamning natijalaridan emas, balki k ta oldingi qadamlar y_{i-k+1}, y_{i-k+2},..., y_i natijalaridan foydalaniladi, shuning uchun ham usulga ***k* qadamli usul** deyiladi.

Ko‘p qadamli usullar quyidagicha quriladi:

Oldingi mavzudagi (11.4) tenglamani Koshi masalasi uchun $dY(x) = f(x,y)dx$ ko‘rinishida yozib olamiz. Tenglikning har ikki tomonini $[x_i,\ x_{i+1}]$ kesmada integrallaymiz. Chap tomonidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dY(x) = Y(x_{i+1}) - Y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i, \quad (11.23)$$

bunda y_{i+1}, y_i – izlanayotgan funktsiyaning to‘rdagi qiymatlari.

O‘ng tomondagi integralni hisoblash uchun oldiniga berilgan kesmada $f(x,Y)$ funktsiya uchun $f(x_{i-k+1},Y_{i-k+1})$,

$f(x_{i-k+2},Y_{i-k+2})$, ..., $f(x_i,Y_i)$ qiymatlar bo‘yicha $(k–1)$ darajali $P_{k-1}(x)$ interpolyatsion ko‘phadni quramiz. U holda

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,Y)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx\ . \quad (11.24)$$

(11.23) va (11.24) larni tenglab, to‘rdagi y_{i+1} funktsiyaning x_{i+1} tugundagi noma’lum qiymatini topish formulasini hosil qilamiz.

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx\,. \quad (11.25)$$

(11.25) tenglik yordamida har xil aniqlikdagi turli ko‘p qadamli usullarni qurish mumkin. Aniqlik darajasi oldingi k ta tugunda hisoblangan to‘r y_i, y_{i-1},..., y_{i-k+1} funktsiyalari qiymatlaridan tuzilgan $P_{k-1}(x)$ ko‘phadning darajasiga bog‘liq.

Amaliyotda Adams usuli keng qo‘llaniladi.

Adams usullari to‘plami:

Adamsning k-tartibli usullari keng tarqalgan. Ularning eng soddasi $k = 1$ bo‘lganda aniqligi bo‘yicha 1-tartibli Eyler usuli bilan aynan bir xil. 4-tartibli usulni amaliyotda **Adams usuli** deb atashadi. Uning uchun ishchi formulani keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik, 4 ta ketma-ket tugunda ($k = 4$) to‘r y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i funktsiyalari ma’lum va oldiniga (11.4) tenglikning o‘ng tomonidagi f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i qiymatlar hisoblangan bo‘lsin. Interpolyatsion ko‘phad sifatida $P_3(x)$ Nyuton ko‘phadini olamiz. h = const bo‘lganda o‘ng tomon uchun x_i tugunda chekli ayirmalar quyidagicha bo‘ladi:

$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$;

$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$;

$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$.U holda Adams usulining ayirmaviy sxemasi:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i. \quad (11.26)$$

Runge-Kutta usuli bilan taqqoslaganda aniqlik bir xil bo‘lganda Adams usulida kamroq hisob-kitob bajariladi. Faqat bu yerda hisobni x_4 tugundan boshlash mumkin. y_4 ni hisoblash uchun zarur bo‘lgan y_1, y_2, y_3 qiymatlarni bir qadamli usul bilan aniqlash kerak, bu esa hisoblash algoritmini hech qanday murakkablashtirmaydi. Bundan tashqari, Adams usuli hisoblash jarayonida h qadamni o‘zgartirish kerak emas.

Nazorat uchun savollar:

1. Differentsial tenglama ta’rifini ayting.
2. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?
3. 1-tartibli differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi qanday tuziladi?
4. Eyler usulida Koshi masalasini yechish dasturini yozing.

Misol va masalalar:

1. $y(0)=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan $y' = \frac{xy}{2}$ differentsial tenglama integralining [0,1] kesmadagi qiymatlari jadvalini Eyler usulidan foydalanib, tuzing. h=0,1 deb oling.

2. $y(0)=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan $y' = y - \frac{2x}{y}$ differentsial tenglama integralining [0,1] kesmadagi qiymatlari jadvalini Eyler-Koshi usulidan foydalanib, tuzing. h=0,2 deb oling.

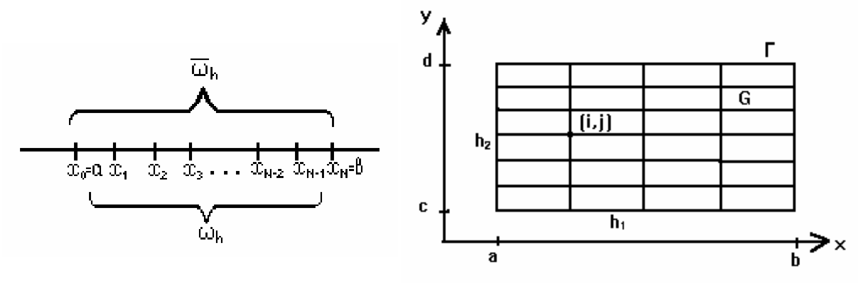
3. $y(0)=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan $y' = x + y$ differentsial tenglamaning [0; 0,5] kesmadagi qiymatini Runge-Kutta usulidan foydalanib, toping. h=0,1 deb oling.

XII BOB. CHEKLI AYIRMALAR USULI

12.1. To‘rlar va hosilalarning ayirmali approksimatsiyasi

Chekli ayirmalar usulida taqribiy yechim to‘r tugunlarida aniqlanadi. Bir nechta sodda tekis taqsimlangan to‘rga misollar keltiramiz.

$[a,b]$ kesmada tekis taqsimlangan to‘r hosil qilish uchun uni N ta teng bo‘laklarga bo‘lamiz. Qo‘shni tugunlar orasidagi masofa $h=x_i-x_{i-1}=(b-a)\,/N$ **to‘r qadami** deyiladi, bo‘linish nuqtalari esa $x_i=a+ih$ **tugunlar** deyiladi.



a) b)

Rasm 12.1. *(a)* kesmada va *(b)* tekislikda tekis taqsimlangan to’rlar.

Kesmaning oxirlariga tegishli bo‘lmagan $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$ nuqtalar **to‘rning ichki nuqtalari** deyiladi va quyidagi to‘plam shaklida yoziladi:

$$\omega_h=\{x_i=a+ih,\ i=1,\ 2, ...,\ N-1\}.$$

Agar berilgan to‘plamga $x_0=a$ va $x_N=b$ chegaraviy nuqtalar ham kiritilsa, u holda $\bar{\omega}_h=\{x_i=a+ih,\ i=0,\ 1, ...,\ N\}$ to‘plamga ega bo‘lamiz (12.1-chizma, *a*)).

Tekislikda tekis taqsimlangan to‘rni hosil qilish uchun aniqlanish sohasi chegarasi Γ bo‘lgan $G^*=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ to‘g‘ri to‘rtburchak G dan iborat ikki argumentli $u(x,y)$ funktsiyani qaraymiz (12.1-chizma, b)). *Ox* o‘qdagi $[a,b]$ kesmani va *Oy* oqdagi $[c,d]$ kesmani mos ravishda $h_1=(b-a)/N_1$ va $h_2=(d-c)\,/N_2$ qadamlar bilan N_1 va N_2 bo‘laklarga bo‘lamiz. Bo’linish nuqtalaridan o‘qlarga mos parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Natijada to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtalarida $\omega^*_h=\{(x_i,y_j)\in G^*\}$ to‘rni hosil qiluvchi (x_i,y_j) koordinatali (i,j) tugunlarga ega bo‘lamiz.

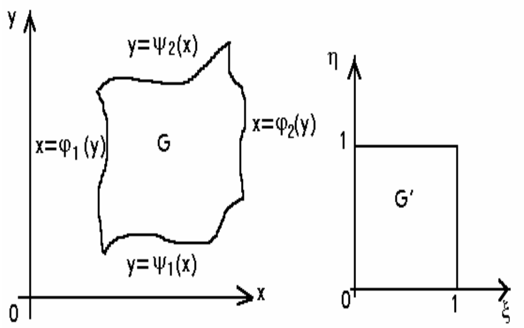
G sohaning Γ chegarasida yotuvchi tugunlarni **chegaraviy tugunlar**, qolgan tugunlarni esa **ichki tugunlar** deyiladi.

Masalaning qo‘yilishida ko‘pincha chegaraviy shartlar ma’lum bo‘ladi, shuning uchun chegaraviy tugunlarda to‘rli funktsiya ham ma’lum deb hisoblanadi. Sohaning murakkab tuzilishlarida, ya’ni chegaraviy nuqtalar to‘r tugunlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda x=const va y=const chiziqlarning chegara bilan kesishish nuqtalarida qo‘shimcha tugunlar kiritiladi yoki chegarani unga yaqin bolgan tugunlardan o‘tuvchi siniq chiziq bilan almashtiriladi. Hosil qilingan siniq chiziqqa chegaraviy shartlar ko‘chiriladi.

Ba’zi holatlarda egri chiziqli sohani o‘zgaruvchilarni almashtirish bilan ham oddiy ko‘rinishga keltirish mumkin. Masalan, 12.2-chizmada G egri chiziqli chegarani x va y larning o‘rniga yangi ξ, η o‘zgaruvchilarni kiritib, G^1 birlik kvadratga almashtirish mumkin:

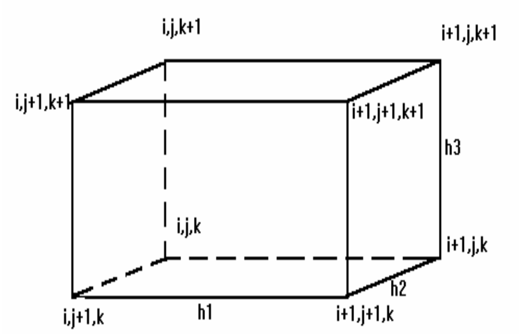
$$\xi=\frac{x-\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)-\varphi_1(y)},\quad \eta=\frac{y-\psi_1(x)}{\psi_2(x)-\psi_1(x)},\ 0\le x,\ \eta\le 1.$$

Differentsial tenglamaga ham yangi o'zgaruvchilarga nisbatan boshlang'ich va chegaraviy shartlar o'tkaziladi. G^1 sohada to'g'ri to'rtburchakli to'r hosil qilinadi, G sohada unga egri chiziqli yacheykali tekis taqsimlanmagan to'r mos keladi.



Rasm 12.2. Hisoblash sohasini almashtirish.

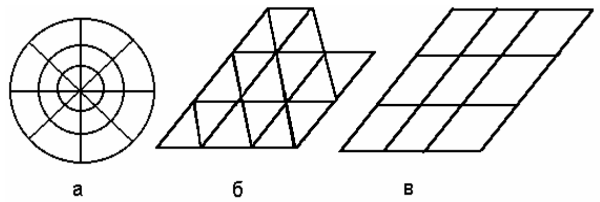
Uch o'lc… [illegible] Ox, Oy, Oz o'qlar bo'yicha h_1, h_2, h_3 qadamlar bilan to'g'ri to'rtburchakli to'r hosil qilinadi. Bunday to'rning elementi qirralari h_1, h_2, h_3 bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped hisoblanadi (12.3-chizma).



Rasm 12.3. Uch o'lchovli to'r elementi.

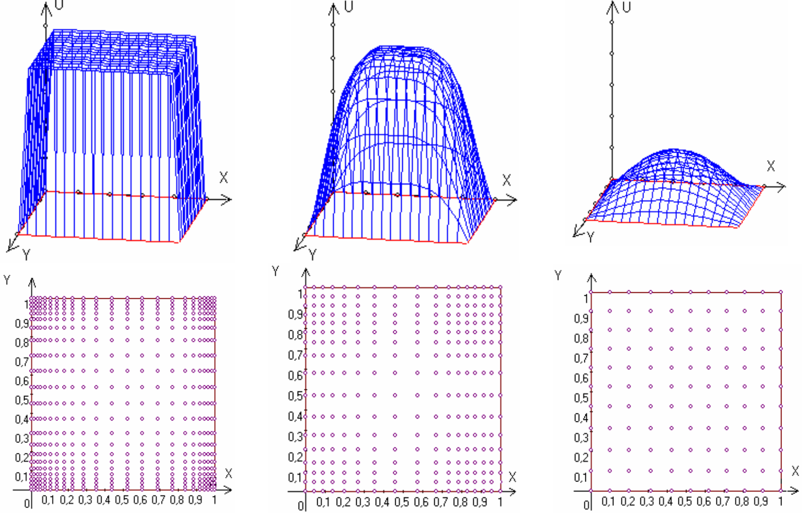
Ba'zi hollarda masalani dekart koordinata sistemasida emas, boshqa sistemalarda, masalan, qutb, silindrik, sferik kabi koordina sistemalarida yechishga to'g'ri keladi. Bularda ham to'r xuddi (11.6) formulaga o'xshab tuziladi. Masalan, agar masala qutb koordinatasi (r,φ) ga nizbatan yechiladigan bo'lsa, u holda radius-vektor bo'yicha Δr va qutb burchagi bo'yicha $\Delta\varphi$ qadam bilan to'r hosil qilinadi (12.4-cizma, a)). Ba'zan to'g'ri to'rtburchakli to'r o'rniga uchburchakli yoki parallelogrammli to'rlardan foydalaniladi (12.4-chizma, в)).

Bundan kelib chiqadiki, to'r yacheykalarining shakliga qarab, uchburchakli, to'rtburchakli va h.k. turlarga bo'linadi.



Rasm 12.4. Qutb *(a)*, uchburchakli *(b)*, parallelogramli *(в)* to'rlar

Yacheykalarni chegaralab turgan yuzani yoki chiziqning shakliga qarab, to'rlar **egri chiziqli** yoki **to'g'ri chiziqli** bo'lishi mumkin.



Rasm 12.5. Vaqtning 3 momenti uchun o‘zgaruvchi notekis ayirmali

to‘rda tugunlarning joylashishi.

Agar barcha yacheykalarning o‘lchami bir xil bo‘lsa, to‘rga **tekis taqsimlangan** deyiladi, aks holda **notekis taqsimlangan** bo‘ladi.

Agar vatq o‘tishi bilan to‘rning yacheykalari o‘lchami o‘zgarmasa, **fiksirlangan to‘r**, aks holda **o‘zgaruvchi to‘r** deyiladi (12.5-chizma).

Agar to‘r egri chiziqli koordinata tekisliklarining kesishishidan hosil bo‘lgan bo‘lsa, unga **strukturali (regulyar) to‘r**, aks holda **nostrukturali (noregulyar) to‘r** deyiladi.

Agar to‘rning bir bo‘lagi regulyar boshqa bir bo‘lagi noregulyar bo‘lsa, **gibrid to‘r** deyiladi.

Strukturali to‘rlar blokli bo‘lishi mumkin, ya’ni sohaning turli qismlari uchun to‘rlar alohida quriladi va yoriqlar interpolyatsiyalar yordamida to‘ldiriladi (murakkab shakldagi sohalarda, masalan, aerokosmik sanoatda qo‘llaniladi).

Strukturali to‘rlarda yacheykalar ikki o‘lchovli tizimda to‘rtburchakli, umumiy holda egri chiziqli chegarali bo‘lgan uch o‘lchovli tizimda esa olti burchakli bo‘ladi. Bunday to‘rlar oddiy strukturali ma’lumotlar uchun ishlatiladi va differentsial masalalar approksimatsiyasini soddalashtiradi.

Nostrukturali to‘rlarda yacheykalar ikki va uch o‘lchovli tizimda mos ravishda uchburchakli va tetraedr bo‘lib, boshqa shakllar bilan almashtirilishi ham mumkin. Bunday to‘rlar murakkab chegarali masalalarni yechish uchun qo‘llanilafi. Masalalarni yechishda sohaning ba’zi qismlarida aniq hisob-kitob qilish kerak bo‘ladi. Bunda oddiy sohalar uchun ham notekis taqsimlangan to‘rdan foydalaniladi, ya’ni bunday sohalarda tugunlar orasidagi masofa kichraytiriladi. Vaqt o‘tishi bilan funktsiya holatiga qarab berilgan aniqlikka erishish uchun avtomatik qayta quriladigan to‘rga **moslashuvchan to‘r** deyiladi. Agar katta gradiyentlar zonasi vaqt o‘tishi bilan o‘z holatini o‘zgartirsa, ular juda samarali bo‘ladi, masalan, oqim bo‘yicha harakatlanayotgan neft tomchisi va b.

12.2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi

Xususiy hosilali tenglamalarni yechishda to‘rni tanlab olgandan keyin hosilalar chekli-ayirmali munosabatlar bilan almashtiriladi, natijada izlanayotgan U funktsiyaning aniq qiymati o‘rniga ayirmali to‘r tugunlarida to‘rli u funktsiyaning qiymatlari qaraladi. Differentsial masalani ayirmali masalaga almashtirish usuliga

ayirmali sxema deyiladi.

Misol sifatida bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini qaraylik. Quyidagi aralash chegaraviy masalani yechish so‘ralgan bo‘lsin:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1,\ t > 0,\ a > 0,$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\ U(0,t) = \psi_1(t),\ U(1,t) = \psi_2(t), \quad (12.1)$$

bunda $\varphi(x)$ – haroratning dastlabki taqsimoti $U(x,t)$;

$\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – vaqtning ixtiyoriy t momentida kesmaning oxirlaridagi harorat.

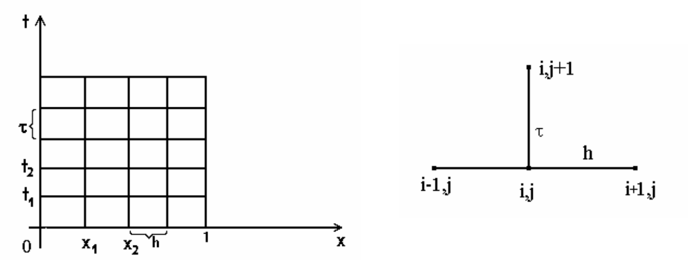
Ravshanki, dastlabki va chegaraviy shartlar kelishilgan bo‘lishi kerak, u holda quyidagi munosabatlar bajarilishi kerak: $U(0,0)=\varphi(0)=\psi_1(0)$, $U(1,0)=\varphi(1)=\psi_2(0)$.

O’zgaruvchilarni $t'=at$ tenglik bilan almashtirib, tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{\partial U}{\partial t'} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Soddalik uchun (12.1) da a=1 deb hisoblaymiz. $x_i=ih$ (i=0, 1,..., n), $t_j=j\tau$ (j=0, 1,..., N) koordinata chiziqlari yordamida x va t yo‘nalishlar bo‘yicha h va τ qadamli tekis taqsimlangan to‘g‘ri to‘rtburchakli to‘rni hosil qilamiz (12.6-chizma, a)).

Noma’lum $U(x,t)$ funktsiyaning tugunlardagi aniq qiymatlarini $U_i^j=U(x_i,t_j)$



a) b)

Rasm 12.6. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun hisoblanadigan soha *(a)* va uni yechish uchun oshkor sxema andozasi *(b).*

bilan belgilaymiz. Differentsial masalani ayirmalar bilan almashtirganimiz sababli, keyingi ishimiz yechimni to‘rli funktsiya u_i^j ko’rinishida izlashdan iborat bo‘ladi. Bu funktsiya ayirmali sxemani qanoatlantiradi, lekin (12.1) dagi aniq yechim U_i^j bilan ustma-ust tushmaydi. (12.1) tenglamadagi xususiy hosilalarni ularning chekli-ayirmali approksimatsiyalari bilan almashtiramiz va a=1 da ayirmali sxemani hosil qilamiz (12.6-chizma, b)):

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},\quad i=1,2,...,n-1;\ j=0,1,...,N-1. (12.2)$$

t=const bo‘lganda tugunlar to‘plami fiksirlangan j qiymatlardagi **qatlam** deyiladi. (12.2) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \tau\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

$\sigma = \frac{\tau}{h^2}$ belgilash kiritamiz. U holda oxirgi munosabat quyidagi ko’rinishga keladi:

$$u_i^{j+1} = \sigma u_{i+1}^j + (1-2\sigma)u_i^j + \sigma u_{i-1}^j. \quad (12.3)$$

Amaliyotda ko‘pincha bu sxemaning 2 shakli ishlatiladi:

$$\sigma = \frac{1}{2} \text{ da: } u_i^{j+1} = \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2}; \quad (12.4)$$

$$\sigma = \frac{1}{6} \text{ da: } u_i^{j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1}^j + 4u_i^j + u_{i-1}^j). \quad (12.5)$$

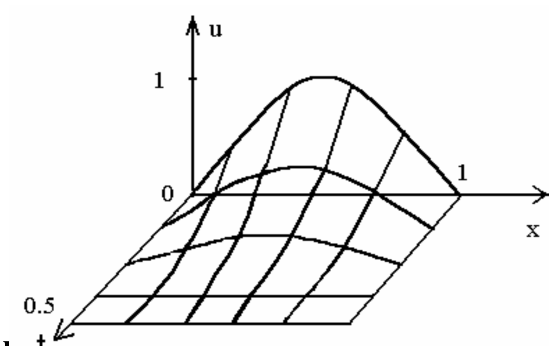
(12.3) dan ko‘rinadiki, (12.2) sxema qatlamlar bo‘yicha ketma-ket (j+1)-qatlamda u_i^{j+1} (i=1, 2,..., n-1) qiymatni j-qatlamda u_i^j qiymatni olish imkonini beradi. 1-qatlamdagi, ya’ni j=0 dagi qiymatni olish uchun boshlang‘ich qatlamdagi yechimga ega bo’lish kerak. U boshlang‘ich shartlar $u_i^0=\varphi(x_i)$, i=0, 1,..., n aniqlanadi.

Avvaliga barcha u_i^1 (i=1, 2,..., n-1) qiymatlarni aniqlaymiz. Kesma oxirlaridagi u_0^1 va u_n^1 qiymatlar $u_0^j=\psi_1(t_j)$, $u_n^j=\psi_2(t_j)$ chegaraviy shartlardan ma’lum. Shundan so‘ng 2-qatlamga o‘tamiz va u_i^2 (i=1, 2,..., n-1) ni aniqlaymiz. Shunday qilib, qadamma-qadam taqribiy qiymatlarni hosil qilamiz.

j+1-qatlamdagi taqribiy yechim j-qatlamdagi yechim orqali oshkor topilgani uchun (12.2) ayirmali sxemani **oshkor sxema** yoki **ikki qatlamli sxema** deyiladi.

Misol 1.

$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0)=\sin\pi x$, $U(0,t)=0$, $U(1,t)=0$. (12.6) tenglama bilan berilgan masalaning taqribiy yechimini toping. (12.7-chizma):

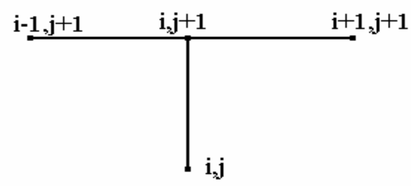


Rasm 12.7. Taqribiy yechim sxemasi.

Yechimi. x argument bo‘yicha qadamni h=1/4 deb olamiz. Masalani (12.2) oshkor sxema bo‘yicha yechamiz.

Oshkor sxemaning barqarorligi x argument va t vaqt bo‘yicha $\sigma=\tau/h^2\leq 1/2$ qadamlarga bog‘liq bo‘ladi. σ=1/2 deb olib va h=1/4 bo‘lganda τ=1/32 vaqt bo‘yicha qadamni topamiz. Natijada hosil qilingan to‘r 12.8-chizmada tasvirlangan.

Har bir qatlam (x_0, t_j), (x_1, t_j), (x_2, t_j), (x_3, t_j), (x_4, t_j) koordinatali 5 ta tugunga ega, bunda x_0=0, x_1=1/4, x_2=1/2, x_3=3/4, x_4=1, t_j larning qiymatlari esa t_0=0, $t_1 = \frac{1}{32}$,



Rasm 12.8. Oshkormas sxema andozasi

$t_2 = 2 \cdot \frac{1}{32}$, $t_3 = 3 \cdot \frac{1}{32}$ va h.k. j-qatlamda 5 tugunga to‘rli funktsiyaning 5 ta qiymati mos keladi: u_0^j, u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j. Ulardan chetkilari (u_0^j va u_4^j) ma’lum va chegaraviy tugunlar yordamida topiladi. Bizning holda ular 0 ga teng. Nolinchi qatlamda 5 ta qiymat ham ma’lum u_i^0 hamda ular boshlang‘ich shartlar asosida topiladi.

$U(x,0)=\sin\pi x$: $u_0^0=\sin(\pi*0)=0$, $u_1^0=\sin(\pi*1/4)=0.7$, $u_2^0=\sin(\pi*1/2)=1$,
$u_3^0=\sin(\pi*3/4)=0.7$, $u_4^0=\sin(\pi*1)=0$.

1-qatlamdagi to‘rli funktsiya qiymatlarini topamiz.

Chegaraviy shartlardan $u_0^1=0$, $u_4^1=0$ kelib chiqadi. σ=1/2 deb oldik, u holda (12.2) formulani xususiy hol uchun qo‘llash mumkin - bu (12.4) bo‘ladi. Uning yordamida 1-qatlamning qolgan 3 ta qiymatini topish mumkin:

$$u_1^1 = \frac{u_2^0 + u_0^0}{2} = \frac{1}{2},\ u_2^1 = \frac{u_3^0 + u_1^0}{2} = \frac{0.7+0.7}{2} = 0.7, \quad u_3^1 = \frac{u_4^0 + u_2^0}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Shunga o‘xshash 2-qatlam uchun qiymatlar olinadi. Chegaraviy shartlardan $u_0^2=u_4^2=0$ kelib chiqadi. (12.4) formuladan quyidagilarni topamiz:

$$u_1^2 = \frac{u_2^1 + u_0^1}{2} = \frac{0.7+0}{2} = 0.35,$$
$$u_2^2 = \frac{u_3^1 + u_1^1}{2} = \frac{0.5+0.5}{2} = 0.5,$$
$$u_3^2 = \frac{u_4^1 + u_2^1}{2} = \frac{0+0.7}{2} = 0.35.$$

Keyingi qatlamlar uchun ham xuddi shunga o‘xshash amallar bajariladi. 1-qatlam uchun olingan natijalar 12.1-jadvalda keltirilgan.

Agar Berilgan misolda qadamlarning umumiy soni integrallash kesmasi [0,0.5] va tanlangan qadam τ=1/32 bilan aniqlansa, u holda yechimni 16 ta qatlamda hisoblash kerak bo‘ladi.

Oshkor usul bilan (12.6) masalaning yechimi. 12.1-jadval.

i j					
		.7		.7	
		.5	.7	.5	
		.35	.5	.35	
		.25	.35	.25	
		.175	.25	.175	
		.125	.175	.125	

Bir tenglama uchun bir nechta ayirmali sxema qurish mumkin.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun (12.1) masalani yana qarab chiqamiz. Hosilani *j*- qatlamda emas, balki (*j*+1) –qatlamda approksimatsiyalaymiz. (12.8-chizma).

Ayirmali sxemani olamiz:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2},\ i=1,2,...,\ n-1. \quad (12.7)$$

Agar *j*-qatlamda u_i^j to'rli funktsiyaning qiymatlari ma'lum bo'lsa, uning qiymatlarini keyingi (*j*+1)-qatlamda hisoblash kerak bo'lsa, u holda (12.7) ning o'ng tomonidagi funktsiya qiymatlari noma'lum bo'ladi. $\sigma=\tau/h^2$ deb olib (12.7) ni boshqacha yozib olamiz:

$$-\sigma u_{i-1}^{j+1}+(1+2\sigma)u_i^{j+1}-\sigma u_{i+1}^{j+1}=u_i^j,\ i=1,2,...,\ n-1. \quad (12.8)$$

Bu munosabatlar *j*+1-qatlamning ichki nuqtalardagi to'rli funktsiya qiymatlaridan tuzilgan *n*-1 noma'lumli *n*-1 ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tashkil qiladi:

$$\begin{cases} -\sigma u_0^{j+1}+(1+2\sigma)u_1^{j+1}-\sigma u_2^{j+1}=u_1^j \\ -\sigma u_1^{j+1}+(1+2\sigma)u_2^{j+1}-\sigma u_3^{j+1}=u_2^j \\ \quad .... \\ -\sigma u_{n-3}^{j+1}+(1+2\sigma)u_{n-2}^{j+1}-\sigma u_{n-1}^{j+1}=u_{n-2}^j \\ -\sigma u_{n-2}^{j+1}+(1+2\sigma)u_{n-1}^{j+1}-\sigma u_n^{j+1}=u_{n-1}^j. \end{cases}$$

Sistemaning 1- va oxirgi tenglamalarda chegaraviy nuqtalar x_0, x_n dagi funktsiya qiymatlari chegaraviy shartlardan ma'lum:

$$u_0^{j+1}=\psi_1(t_{j+1}),\ u_n^{j+1}=\psi_2(t_{j+1}).$$

Bu kattaliklarni $u_0^{j+1}=\alpha$, $u_n^{j+1}=\beta$ deb belgilaymiz va ularni sistemaning 1- va oxirgi tenglamalariga qo'yamiz:

$$(1+2\sigma)u_1^{j+1}-\sigma u_2^{j+1}=u_1^j+\sigma\alpha$$

$$-\sigma u_1^{j+1}+(1+2\sigma)u_2^{j+1}-\sigma u_3^{j+1}=u_2^j$$

$$...$$

$$-\sigma u_{n-2}^{j+1}+(1+2\sigma)u_{n-1}^{j+1}=u_{n-1}^j+\sigma\beta.$$

Sistemani matritsa ko'rinishida yozamiz:

$$\begin{pmatrix} 1+2\sigma & -\sigma & & & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & & \\ & & .... & & \\ & & -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma \\ 0 & & & -\sigma & 1+2\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ ... \\ u_{n-2}^{j+1} \\ u_{n-1}^{j+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1^j+\sigma\alpha \\ u_2^j \\ ... \\ u_{n-2}^j \\ u_{n-1}^j+\sigma\beta \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

Shunday qilib, har bir vaqt qatlamida (12.9) tenglamalar sistemasini oshkormas usulda yechish kerak. Sistemani to'g'ri yoki iteratsion usullar bilan yechish mumkin.

Misol 2. $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0)=\sin\pi x$, $U(0,t)=0$, $U(1,t)=0$,

$0\le x\le 1$, $0\le t\le 1/2$ chegaraviy masalani oshkormas usulda yeching.

Yechilishi: Qadamlarni *x* va *t* argumentlar bo'yicha oldingi masaladagidek olamiz: $h=1/4$, $\tau=1/32$.

Boshlang'ich shartlardan foydalanib, 0-qatlamda to'rli funktsiya qiymatlarini topamiz:

$u_0^0=0$; $u_1^0=0.7$; $u_2^0=1$; $u_3^0=0.7$; $u_4^0=0$.

1-qatlamda to'rli funktsiyaning 5 ta qiymatidan 2 ta chetki qiymatlari boshlang'ich shartlardan ma'lum: $u_0^1=0$; $u_4^1=0$. Qolgan 3 tasini aniqlash uchun (12.9) ko'rinishdagi 3 noma'lumli tenglamalar sistemasini tuzamiz, bunda $\sigma=1/2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.7 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}.$$

Uni yechib, $u_1^1=0.54$, $u_2^1=0.77$, $u_3^1=0.54$ qiymatlarni olamiz. Ko'rinib turibdiki, bu qiymatlar oldingi misoldagidan farq qiladi. Bunga sabab h va τ qadamlarning kattaligi va aniqlikning pastligidir.

2-qatlamda to'rli funktsiyaning qiymatlarini topish uchun (12.9) ko'rinishdagi 3 noma'lumli tenglamalar sistemasini tuzamiz;

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.77 \\ 0.54 \end{pmatrix}$$

Shunga o'xshash keyingi qatlamlarda izlanayotgan funktsiya qiymatlari topiladi.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini to'rlar usuli bilan yechish dasturi:

```
#pragma hdrstop
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
const int N = 10;
const int M = 30;
double eps = 0.001;
double F0[N][M], F[N][M], Xl[N];
void exchange(double **mas, int o'lchov,int from, int to){
for(int i=0; i < o'lchov; i++){
mas[from][i] = mas[from][i] + mas[to][i];
mas[to][i] = mas[from][i] - mas[to][i];
mas[from][i] = mas[from][i] - mas[to][i];
}
}
// dioganaldan pastdagi 0 bo'lmagan eng yaqin satrni aniqlaymiz
int get_n_no_empty(double **a, int o'lchov, int begin){
for(int i=begin+1; i <o'lchov; i++){
if(a[i][i] != 0){
```

```
return i;
}
}
}
double *Gauss(double **a, double *b)
{
int o‘lchov; //matritsa o‘lchami
double *x;
/* Bu yerda o‘zgaruvchi “o‘lchov” matritsa o‘lchamini berishi zarur */
// dinamik o‘zgaruvchilarni hosil qilish
/* Bu yerda a matritsa qiymatini topish kerak va b ozod hadlarni to‘ldirish */
// to’g’ri yondoshuv
// chapdan o’ngga x koeffitsiyentlar bo‘yicha yuramiz
for(int k=0; k <o’lchov-1; k++){
// satr bo‘yicha ayiramiz
for(int m=k+1; m < o’lchov; m++){
// agar dioganalda element = 0, u holda satr o‘rnini almashtiramiz
if(a[m][m] == 0) exchange(a, o‘lchov, m, get_n_no_empty(a, o‘lchov, m));
double koeficent=a[m][k]/a[0][k];
//tenglamaning yangi koeffitsiyentlarini hisoblash
b[m] = b[m] - b[0] * koeficent;
for(int z=0; z < o’lchov; z++){
a[m][z] = a[m][k] - a[0][k] * koeficent;
}
}
}
// yechimni izlaymiz
for(int m=o’lchov-1; m >= 0; m--){
double sum=0;
//yig’indini hisoblab, o’ngdan chapga tomon satr bo’yicha yuramiz
ildiz*koeffitsiyent, joriy ildizgacha
for(int i=o’lchov-1; i > m; i--){
sum += x[i] * a[m][i];
}
x[m] = (b[m] - sum)/a[m][m];
}
//yechimni chiqarish
// cout « "###Yechim:" « endl;
return x;
}
double Fn(double t)
{
double x = t*t-1;
return x;
}
```

```
void progon(double E[N][M], double D[N])
{
int i;
// double znam;
double a[N],b[N],c[N],f[N],alpha[N],beta[N];
// int nn;
double X[N];
// double G[N][M];
for (i=0;i<=N;i++)
{
a[i] = E[i+1][i];
c[i] = E[i][i];
b[i] = E[i-1][i];
}
for (i=0;i<=N;i++)
{
f[i] = D[i];
}
c[0] = 1;
c[N] = 1;
alpha[0] = 1;
beta[0] = 0;
for (i=1;i<=N-1;i++)
{
alpha[i+1] = b[i]/(c[i]-a[i]*alpha[i]);
beta[i+1] = (a[i]*beta[i] + f[i])/(c[i]-a[i]*alpha[i]);
}
for (i=N-1;i>=0;i--)
{
X[i] = alpha[i+1]*X[i+1] + beta[i+1];
}
for (i=0;i<=N;i++)
{
Xl[i] = X[i];
}
}
void main(){
int i,j,k;
double h,tau;
double a,b,Xi,Tj,a1;
double E[N][M];
double D[N],*Ms;
a = 0; b = 1;
h = (b-a)/N;
tau = h/2;
```

```
for (i=1;i<=M;i++)
{
F[0][i] = 0.01;
F[N][i] = 0;
}
for (j=0;j<=N;j++)
{
F[j][0] = 0.01*(1-j*h);
}
for (j=1;j<=M;j++)
{
E[0][0] = 0;
E[0][1] = 1;
E[N][N] = 1;
E[N-1][N] = 0;
D[0] = 0.01;
D[N] = 0;
for (i=1;i<=N-1;i++)
{
Xi = i*h;
Tj = tau*j;
a1 = 3.3-1.5*Xi;
E[i-1][i] = -(a1*a1)/(2*h*h);
E[i][i] = 1/tau + (a1*a1)/(h*h);
E[i+1][i] = -(a1*a1)/(2*h*h);
D[i] = Fn(Tj) + (a1*a1)/(2*h*h)*F[i+1][j] + (1/tau -
 (a1*a1)/(h*h))*F[i][j] + (a1*a1)/(2*h*h)*F[i-1][j];
}
// Ms = Gauss(E,D);
progon(E,D);
for (k = 1;k<=N-1;k++)
{
F[k][j] = Xl[k];
}
for (i=0;i<=N;i++)
{
for (j=0;j<=M;j++)
{
printf("\n%f", F[i][j]);
}
}
}
getch();
}
```

Nazorat uchun savollar:

1. Teng taqsimlangan to‘r deganda nimani tushunasiz?
2. Tugun deb nimaga aytiladi?
3. To‘r qadamiga ta’rif bering.
4. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini yozing.
5. To‘r qatlamini tushuntiring.

Misol va masalalar:

1. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun $G\{0<x<1;\quad 0<t<0{,}1\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda $0\le x\le 1$ da $u(x,0)=x(1-x)$ boshlang‘ich shartlar va $0\le t\le 0{,}1$ da $u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$ chegaraviy shartlar bilan berilgan masalani yeching.

2. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ torning tebranishi tenglamasi uchun $G\{0<x<1;\quad 0<t<0{,}6\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda $0\le x\le 1$ da $u(x,0)=x(1-x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0}=0$ boshlang‘ich shartlar va $0\le t\le 0{,}6$ da $u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$ chegaraviy shartlar bilan berilgan masalani yeching.

3. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining $u(x,0)=(1{,}1x^2+2{,}3)e^{-x}, u(0,t)=2{,}3;\quad u(1,t)=3{,}4e^{-1}$ shartlarni qanoatlantiradigan taqribiy yechimni $0\le t\le 0{,}01$ qiymatlar uchun toping. x argument bo‘yicha qadamni $h=0{,}1$ va $r=\frac{1}{6}$ deb oling.

4. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining $u(x,0)=(1{,}1x^2+1{,}1)\sin\pi x$, $u(0,t)=0;\quad u(1,t)=0$ shartlarni qanoatlantiradigan taqribiy yechimni $0\le t\le 0{,}02$ uchun toping. x argument bo‘yicha qadamni $h=0{,}1$ va $r=\frac{1}{2}$ deb oling.

XIII BOB. OPTIMALLASH MASALALARI

13.1. Masalaning qo‘yilishi

Insonlar o‘z faoliyati davomida har bir ishning mumkin bo‘lgan variantlaridan eng maqbulini tanlashga harakat qiladi. Agar bu ish harajatlar bilan bog‘liq bo‘lsa, harajatlarni kamaytirish, agar ish daromad bilan bog‘liq bo‘lsa, daromadlarni ko‘paytirish maqsad qilinadi. Demak, masala shartidan kelib chiqib, harajat yoki daromadni ifodalovchi maqsad funktsiyasi tuziladi. So‘ngra shu maqsad funktsiyasining eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topish kerak bo‘ladi. Bunday masalalarga **optimallash masalalari** deyiladi.

Misol 1. 200 m uzunlikdagi kabeldan yuzasi eng katta bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak yasang.

Yechilishi: Agar to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlarini a va b deb belgilasak, to‘g‘ri to‘rtburchak perimetri $2a+2b=200$ ga teng bo‘ladi. $S=ab$ yuzaning ekstremumini topish uchun S dan olingan 1–tartibli hosilani 0 ga tenglab olamiz. Buning uchun oldin bir noma’lumni ikkinchisi orqali ifodalaymiz:

$a+b=100$; $a=100–b$; $S=(100–b)b=100b–b^2$.

$S^{/}=100–2b=0$; $b=50$, demak, $a=50$.

Topilgan $S=ab=50^2=2500$ yuzaning eng katta ekanligini tekshiramiz. Buning uchun 2–tartibli hosilani topamiz: $S^{//}=(100\text{-}2b)^{/}=–2$, 2–tartibli hosila manfiy, demak, $S=2500$ m^2 eng katta yuza ekan.

Xulosa: Perimetrlari teng to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasida yuzasi eng kattasi – kvadrat.

Misol 2. Hajmi 2000π m^3 bo‘lgan bo‘yoq solinadigan bankalar tayyorlashda eng kam material sarflanadigan usulni toping.

Yechilishi: Bankalar silindr shaklida bo‘lib, hajmi

$$V=S_{as}H=\pi R^2H=2000\pi;\ R^2H=2000.$$

Kam material ketishi uchun bankaning to‘la sirti minimum bo‘lishi kerak, ya’ni $S_t=2S_{as}+S_{yon}–min$, $S_t^{/}=0$ ni topamiz. Buning uchun $H=2000/R^2$ ni to‘la sirt formulasiga qo‘yamiz:

$$S_t=2S_{as}+S_{yon}=2\pi R^2+2\pi RH=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2000/R^2=$$
$$=2\pi R^2+4000\pi/R;$$
$$S_t^{/}=4\pi R–4000\pi/R^2=0;\ R^3=1000;\ R=10;\ H=20.$$

Demak, o‘q kesimi kvadrat shaklda bo‘lgan silindr hajmi eng katta bo‘ladi.

Optimallash masalalari bilan inson faoliyatining istalgan doirasida, shaxsiy ishlardan tortib umumdavlat ishlarigacha bo‘lgan darajada oshkor yoki oshkormas shaklda duch kelamiz. Iqtisodiy rejalashtirish, boshqarish, chegaralangan resurslarni taqsimlash, ishlab chiqarish jarayonini tahlil qilish, murakkab ob’yektlarni loyihalash doim mo‘ljallangan maqsad nuqtai nazaridan eng yaxshi variantni izlashga qaratilgan bo‘lishi lozim.

Ko‘pgina optimallash masalalari **maqsad funksiyasi** yoki **sifat kritereysi** deb ataladigan funksiyaning eng kichik (eng katta) qiymatini izlashga keltiriladi. Masalaning qo‘yilishi va tekshirish usullari maqsad funksiyasining xossalariga hamda yechish jarayonida foydalanish mumkin bo‘lgan, shuningdek, apriori ma’lum bo‘lgan axborotga qat’iy bog‘liq bo‘ladi.

Matematik nuqtai nazardan maqsad funksiyasi oshkor formula bilan berilgan va differentsiallanuvchi funksiyadan iborat bo‘lgan hol eng sodda optimallash masalasidir. Bu holda funksiyaning xossalarini tekshirish, uning o‘sish va kamayish yo‘nalishlarini aniqlash, lokal ekstremum nuqtalarini izlashda hosiladan foydalanish mumkin.

So‘nggi o‘n yilliklarda fan-texnika taraqqiyoti sababli optimallash masalalari doirasi ham kengaydi. Ularning ko‘plarida maqsad funksiyasi formula bilan berilmaydi, uning qiymatlari murakkab hisoblashlar natijasida topilishi, tajribadan olinishi mumkin va h.k. Bunday masalalar ancha murakkab hisoblanadi, chunki ularda maqsad funksiyasini hosila yordamida topib bo‘lmaydi. Ularning matematik qo‘yilishini aniqlashga va yechishning EHMdan foydalanishga mo‘ljallangan maxsus usullarini ishlab chiqishga to‘g‘ri keladi. Masalaning murakkabligi maqsad funksiyasining argumentlari soniga jiddiy bog‘langan.

Biror optimallash masalasini yechishda tadqiqotchi avvalo natijaga olib boradigan eng kam mehnat va hisoblash talab qiladigan, shuningdek, izlanayotgan yechim haqida eng katta hajmli axborot olish imkonini beradigan matematik usulni tanlashi kerak. U yoki bu usulni tanlash optimallash masalasining qo‘yilishi va optimallash ob’yektiga qo‘llaniladigan matematik model bilan aniqlanadi.

Hozirgi kunda optimallash masalalarini yechish uchun asosan quyidagi usullar qo‘llaniladi:

- Klassik analiz funktsiyalarini tadqiq qilish usullari;
- Lagranj noaniq ko‘phadlarini qo‘llashga asoslangan usullar;
- variatsion hisoblash;
- dinamik dasturlash;
- maksimum printsipi;
- chiziqli dasturlash;
- nochiziqli dasturlash.

So‘nggi yillarda biror aniqlangan masalalar sinfi uchun **geometrik dasturlash usuli** ishlab chiqildi va muvaffaqiyatli qo‘llanilmoqda.

Amaliyotdan ko‘rinadiki, ma’lum bir usulni barcha masalalarni yechish uchun qo‘llash mumkin emas. Ba’zi usullar umumiyroq xarakterda bo‘lsa, ba’zilarini ma’lum tip masalalar uchun ishlatish mumkin xolos.

Demak, butun bir usullar guruhini (klassik analiz funktsiyalarini tadqiq qilish usullari, Lagranj ko‘phadlarini usuli, nochiziqli dasturlash) optimallash masalasining ma’lum bir bosqichida boshqa usullar bilan birgalikda, masalan, dinamik dasturlash yoki maksimum printsipi bilan birga qo‘llash mumkin.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, ba’zi usullar ma’lum turdagi matematik modelli optimallash masalalariga juda mos tushadi yoki ular uchun maxsus ishlab chiqilgan. Masalan, chiziqli dasturlash usuli optimallikning chiziqli kriteriylariga ega bo‘lgan masalalarini yechish uchun maxsus yaratilgan.

Geometrik dasturlash ham optimallik kriteriylari va cheklovlariga ega bo‘lgan ko‘phad shaklidagi funktsiyalarning maxsus turlari uchun qo‘llaniladi.

Dinamik dasturlash ko‘p pog‘onali jarayonlarni optimallash masalalari uchun mos tushadi. Masalan, holatning har bir bosqichida kam sonli o‘zgaruvchi qatnashgan bir nechta bosqichlarga bo‘lingan jarayonlar bo‘lishi mumkin. Biroq o‘zgaruvchilar soni ko‘payib ketsa, hisoblash mashinasining xotirasi yetmasligi va tezligi pasayib qolishi sababli dinamik dasturlash qiyinchilik tug‘diradi.

13.2. Shartsiz optimallash usullari

Ko‘pgina nazariy va amaliy masalalarni yechish n-o‘lchovli vektor argumentli *f(x)* skalyar funktsiya ekstremumi (eng katta yoki eng kichik qiymati) ni izlashga keltiriladi. Bundan keyin x deganda n–o‘lchovli fazodagi nuqtani, ya’ni vektor-ustunni tushunamiz:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}$$

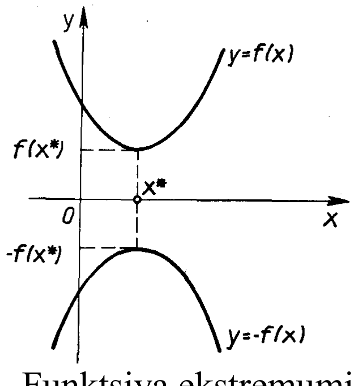
Vektor-satr esa vektor-ustunni transponirlash bilan hosil qilinadi:

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Optimallanuvchi *f(x)* funktsiyaga **maqsad funktsiyasi** yoki **optimallash kriteriysi** deyiladi.

Maqsad funktsiyasining minimumini aniqlovchi x* vektorga **optimal vektor** deyiladi.

Ta’kidlash kerakki, *f(x)* funktsiyani maksimallash masalasini unga ekvivalent bo‘lgan minimallash masalasiga almashtirish mumkin yoki aksincha. Buni bir o‘zgaruvchili funktsiya misolida qarab chiqamiz (13.1-chizma).



Rasm 13.1. Funktsiya ekstremumini topish.

Agar x^* nuqta $y = f(x)$ funktsiyaning minimumi bo‘lsa, u holda *f(x)* va *-f(x)* funktsiyalarning grafiklari abssisa o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lganligi sababli $y=-f(x)$ funktsiya uchun bu nuqta maksimum nuqtasi bo‘ladi. Demak, o‘zgaruvchining bitta qiymatida *f(x)* funktsiya minimumga;

–f(x) funktsiya esa maksimumga erishadi, ya’ni

$$\min f(x) = -\max f(x).$$

Bir o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun o‘rinli bo‘lgan ushbu holatni ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun ham qo‘llash mumkin. Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiyani minimallash masalasini $-f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiyani maksimallash masalasi bilan almashtirishga to‘g‘ri kelsa, u holda maksimumni topish o‘rniga $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiya minimumini topish yetarli bo‘ladi, ya’ni

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_n) = -\max f(x_1, x_2, ..., x_n)\,.$$

Ushbu tasdiqdan bundan keyin faqat minimallash masalalari haqida gapirish mumkin degan xulosa kelib chiqadi.

Haqiqiy amaliy masalalarda $x_i, i = 1,2,...,n$ o‘zgaruvchiga va ob’yekt, tizim, jarayonlar sifat xossalarini xarakterlovchi ba’zi funktsiyalar $g_i(x),\ h_i(x)$ larga quyidagicha chegaralar (shartlar) qo‘yilishi mumkin:

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1,2,...,n;$$
$$h_i(x) = 0, \quad i = 1,2,...,n;$$
$$a \le x \le b,$$

bunda

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_3 \end{vmatrix}$$

Bunday masalalarga **shartli optimallash masalalari** deyiladi. Cheklovlari bo‘lmagan masalalar **shartsiz optimallash masalalari** deyiladi.

Shartsiz ekstremum masalasining yechimini topish talab qilingan bo‘lsin, ya’ni $f(x_i) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiyaning maksimumini (minimumini) $x_i, i = 1,2,...,n$ nuqtalarda qidirish mumkin bo‘lsin.

$f(x_i)$ funktsiya 1-tartibli hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo‘lsa, uning ekstremumi quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n} \quad (13.1)$$

Demak, berilgan $f(x_i)$ funktsiya X_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lishi uchun bu nuqta (13.1) sistemaning yechimi bo‘lishi kerak:

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n} \quad (13.22)$$

(13.2) tengliklar X_0 nuqtada $f(X_0)$ funktsiya maksimum yoki minimumga ega bo‘lganda, shu nuqtada undan n ta $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$ noma’lumlar bo‘yicha olingan xususiy hosilalar 0 ga teng bo‘lishi kerakligini ko‘rsatadi. Lekin bundan (13.1) shartni qanoatlantiruvchi har qanday nuqta ham funktsiyaga mahalliy maksimum yoki minimum qiymat beradi degan xulosa kelib chiqmaydi.

(13.1) sistemaning yechimlarini **statsionar nuqtalar** deyiladi. Berilgan $f(X)$ funktsiya ekstremumga erishadigan nuqta **statsionar nuqta** bo‘ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funksiya ekstremumga erishavermaydi.

Demak, (13.1) shart funktsiya ekstremumi bo‘lishining zaruriy sharti, lekin u yetarli emas. Quyidagi teorema statsionar nuqtaning 1- va 2-tartibli xususiy hosilalari uzluksiz bo‘lgan, ***n*** o‘zgaruvchili uzluksiz $f(x_i)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funktsiyaning ekstremal nuqtasi bo‘lishi uchun yetarli shartni ko‘rsatadi.

Teorema 1. ***X_0*** statsionar nuqta ekstremal nuqta bo‘lishi uchun shu nuqtada quyidagi **Gesse matritsasi**

$$H[X_0]=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} & \Lambda & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2\partial x_n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

musbat aniqlangan (bu holda ***X_0***-minimum nuqta), yoki manfiy aniqlangan (bu holda ***X_0***-maksimum nuqta) bo‘lishi yetarlidir.

Misol 1. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechilishi. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti:

$$\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2},\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_3}\right)=0$$

Bundan $\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3=0$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi ***X_0=(1/2,2/3,4/3)*** statsionar nuqta bo‘ladi.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun Gesse matrisasini ***X_0*** nuqtada tuzamiz:

$$H[X_0]=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda –2, 4, –6. Ma’lumki, agar matrisaning bosh minorlaridan tuzilgan sonlar ketma-ketligida ishora almashinuvchi bo‘lsa, berilgan matritsa manfiy aniqlangan bo‘ladi. Demak, ***X_0*** nuqtada ***$f(x_1,x_2,x_3)$*** funksiya maksimumga erishadi. Masalan, yuqorida ko‘rilgan misoldagi ***$f(x_1,x_2,x_3)$*** ni ***$-f(x_1,x_2,x_3)$*** ga almashtirib, ***X_0=(1/2,2/3,4/3)*** nuqtani minimum nuqta ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Agar ***H[X_0]*** noaniq matritsa bo‘lsa, ***X_0*** nuqta **egilish nuqtasi** bo‘ladi, ya’ni bu nuqtada funksiya ekstremumga erishmaydi.

Misol 2. $f(x_1,x_2)=8x_1x_2+x_2^2$ funksiyaning ekstremumi toping.

Yechilishi. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartiga ko‘ra:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=8x_2=0,\frac{\partial f}{\partial x_2}=8x_1+2x_2=0.$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemani yechib, ***X_0=(0,0)*** statsionar nuqtani hosil qilamiz.

Endi statsionar nuqtaning ekstremal nuqta bo‘lishlik shartini tekshirish uchun Gesse matritsasini tuzamiz:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning bosh minorlari: $M_{11}=2>0$, $M_{22}=0$. Matritsa determenanti esa $-64<0$. Bundan Gesse matritsasining ishorasi aniqlanmaganligi ko‘rinadi. Bu holda $X_0=(0,0)$ nuqta egilish nuqtasi bo‘ladi.

Yuqorida ko‘rilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining yetarlilik shartlari bir argumentli $f(X)$ funksiya uchun quyidagicha bo‘ladi:

Faraz qilaylik, X_0 stasionar nuqta bo‘lsin, u holda $f''(X_0)<0$ bo‘lsa, X_0 nuqtada funksiya maksimumga, $f\,'\,(X_0)>0$ bo‘lganda esa minimumga erishadi. Agar bir argumentli $f(X)$ funksiya uchun X_0 statsionar nuqtada $f\,''(X_0)=0$ bo‘lsa, yuqori tartibli xosilalarning X_0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema 2. X_0 statsionar nuqtada $f'(X_0)=0, f''(X_0)=0,..., f^{(n-1)}(X_0)=0$ va $f^{(n)}(X_0)\neq 0$ bo‘lsa, bu nuqta

a) n toq son bo‘lganda egilish nuqtasi;

b) n juft son bo‘lganda ekstremal nuqta bo‘ladi, hamda $f^{(n)}(X_0)>0$ da minimumga erishadi.

Misol 3. $f(x)=x^4$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechilishi. $f\,'(x)=4x^3=0$, $x=0$ statsionar nuqta bo‘ladi.

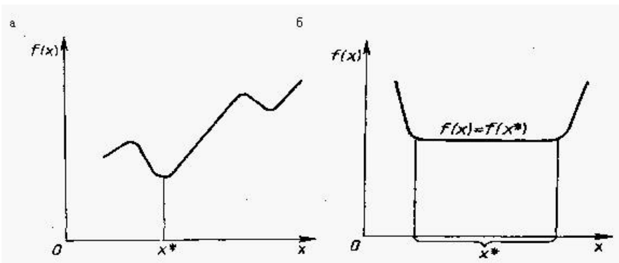
$$f\,'(0)=f\,''(0)=f\,'''(0)=0;\ f^{(4)}(0)\neq 0.$$

$n=4$ juft son. Demak, $x=0$ nuqta funktsiya uchun ekstremal nuqta bo‘ladi. $f^{(4)}(0)=24>0$ bo‘lgani uchun $x=0$ nuqtada berilgan funktsiya minimumga erishadi.

Misol 4. $g(x)=x^3$ funktsiyaning ekstremumi topilsin.

Yechilishi. $g'(x)=3x^2=0$, $x=0$ statsionar nuqta, $g'(0)=g''(0)=0$, $g'''(0)=6$. $n=3$ toq son. Demak, $x=0$ nuqta funktsiyaning egilish nuqtasi bo‘ladi.

Agar barcha $x^*\in X$ lar uchun $f(x^*)<f(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, x^* nuqtaga bir o‘zgaruvchili $f(x)$ funktsiyaning **global minimum nuqtasi** deyiladi (chizma 13.2, a)). Agar tengsizlik qa’tiy bo‘lsa, x^* qa’tiy global minimum nuqtasi bo‘ladi. Agar $f(x^*)\le f(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda noqa’tiy minimum aniqlanadi va $x^*=[x^*\in X\!: f(x^*)=f(x)]$ to‘plam o‘rinli bo‘ladi (chizma 13.2, b)).



Rasm 13.2. Global minimum: a – qa’tiy; b – noqa’tiy.

Agar yetarlicha kichik $\varepsilon>0$ da $|x-x^*|\le\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x, x^* nuqtalar uchun $f(x^*)<f(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $x^*\in X$ nuqta $f(x)$ funktsiyaning **lokal minimum nuqtasi** deyiladi.

13.3. Oltin kesim usuli

Optimallash jarayonini qurishda hisoblash hajmini va vaqtni kamaytirishga harakat qilinadi. Bunga odatda, $y = f(x)$ funktsiya qiymatini hisoblash sonini kamaytirib erishiladi. Eng samarali usullardan biri – $f(x)$ ni hisoblashlar soni chekli bo‘lganda eng yaxshi aniqlikka erishishdir. Bu usulga **oltin kesim usuli** deyiladi.

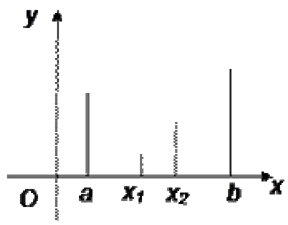
Aytaylik, $y = f(x)$ funktsiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik qiymatini topish kerak bo‘lsin. Bu oraliqda bir nechta minimum nuqtalar bo‘lishi mumkin. U holda lokal minimumlar va chegara qiymatlar $f(a), f(b)$ orasidan eng kichigini topish kerak bo‘ladi. Bunday hollarda $[a;b]$ ni **unimodal**, ya’ni faqat bitta ekstremumni o‘z ichiga olgan oraliqlarga ajratiladi. Har bir oraliqning ekstremumi topiladi va ularni taqqoslash asosida eng kichigi olinadi.

Unimodallik sharti quyidagicha:

Agar biror $[a;b]$ oraliqda $y=f(x)$ funktsiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari uzluksiz bo‘lib, $f'(a)\cdot f'(b)<0$ va $f''(x)$ ishorasi $[a;b]$ da o‘zgarmasa, $y=f(x)$ funktsiya $[a;b]$ oraliqda **unimodal bo‘ladi** va yagona ekstremumga ega bo‘ladi.

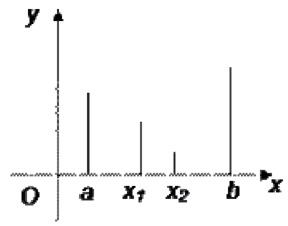
Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funktsiya faqat bitta minimumga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ ning qiymatini kesmaning ikkita ichki nuqtasida hisoblab, minimum nuqtasining joyini aniqlash mumkin. Bunda 2 holat bo‘lishi mumkin:

1. $f(x_1)<f(x_2)$ bo‘lsa, minimum nuqta $[a;x_2]$ kesmada bo‘ladi (13.4-chizma).



Rasm 13.4.

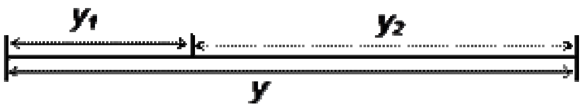
2. $f(x_1)>f(x_2)$ bo‘lsa, minimum $[x_1;b]$ kesmada bo‘ladi (13.5-chizma).



Rasm 13.5.

Oltin kesim usulida x_1 va x_2 nuqtalarning har biri dastlabki intervalni shunday 2 bo‘lakka bo‘ladiki, butun qismining katta bo‘lakka nisbati katta bo‘lakning kichik bo‘lakka nisbatiga teng bo‘ladi, ya’ni “oltin nisbat” hosil qiladi: $\frac{y}{y_2}=\frac{y_2}{y_1}$ yoki $\frac{y}{y-y_1}=\frac{y-y_1}{y_1}$.

Bu munosabat quyidagicha geometrik tasvirlanadi (13.6-chizma):



Rasm 13.6. Oltin nisbat.

$\frac{y_1}{y} = z$ deb belgilab, $\frac{1}{1-z} = \frac{1-z}{z}$ tenglikni hosil qilamiz. Ushbu tenglamani yechsak, $z = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$ qiymatni topamiz.

Demak, $[a;x_1]$ va $[x_2;b]$ kesmalar uzunliklari bir xil bo‘lib, u (*a, b*) kesmaning 0,382 qismiga teng ekan. $f(x_1)$ va $f(x_2)$ funktsiyalar qiymatlaridan minimumni o‘z ichiga olgan yangi $[a;x_2]$ yoki $[x_2;b]$ oraliq aniqlanadi. Topilgan interval yana ikkita nuqta bilan oldingi nisbatda bo‘linadi, bunda bo‘linish nuqtalarining biri oldingi qadamda qo‘llangan nuqtalarning biri bilan ustma-ust tushadi.

Shunday qilib, interval uzunligi har bir qadamda kichrayib boradi. 1-qadamda funktsiyaning 2 ta qiymati zarur bo‘ladi, keyingi qadamlarda bitta qiymati yetarli.

Funktsiyani minimallashtirish uchun oltin kesim usulining algoritmi quyidagicha:

1. $f(x_1)$ ni hisoblash, bunda $x_1 = a+0{,}382(b-a)$.
2. $f(x_2)$ ni hisoblash, bunda $x_2=b-0{,}382(b-a)$.
3. Minimum nuqtani o‘z ichiga olgan yangi $[a;x_2]$ yoki $[x_2;b]$ oraliqni aniqlash.
4. Topilgan oraliq ichida uzunligining 0,382 qismini tashkil qiluvchi nuqtada yangi (1-holda x_1 nuqta) yoki (2-holda x_2 nuqta) nuqtani topish. Bu nuqtada *f(x)* ning qiymati aniqlanadi. So‘ngra 3-bosqichdan boshlab, yana hisoblash takrorlanadi, toki oraliq uzunligi ε ga teng yoki kichik bo‘lmaguncha, bunda $\varepsilon>0$ juda kichik musbat son.

Misol. $y = 2x^2 - \ln x$ **funktsiya minimumini topish uchun oltin kesim usulining dasturi:**

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#define K (sqrt(5)-2)
float a, b, x1, x2, y1, y2;
 float f (float x)
{ float y; y=2*x*x-log(x); return y;}
void pausa ()
{ printf("\n\nPress any key to continue…");
getch();
}
Void frombeginning()
{float c, d1;
c=(a+b)/2; d1=K*(b-a)/2;
x1=c-d1; x2=c+d1;
y1= f(x1); y2=f(x2);
}
```

```
void main()
{float d, d2, e;
clrscr();
printf("Oxirlari qiymatini kiriting n");
printf("[a,b] kesmada f(x)\n funktsiyaning unimodallgi");
scanf("%f%f",&a,&b);
printf("min f(x)\n nuqta uchun aniqlikni bering ");
scanf("%f",&e);
frombeginning();
do
{ d=b-a; d2=x2-x1;
clrscr();
printf("[a,b]\n unimodallik kesmasi";
printf("a=%f b=%f", a,b);
pausa();
if(y1<y2)
{ b=x2; x2=x1; y2=y1; x1=a+d2; y1=f(x1);}
else
{ if(y1>y2)
{a=x1; x1=x2; y1=y2; x2=b-d2; y2=f(x2);}
Else
{a=x1; b=x2; frombeginning();}
};
}
while(d>=e);
printf("\n\nminimum nuqtasi x=%f xatolik =%f", a,d);
pausa();
}
```

13.4. Kesmani o‘rtadan bo’lish usuli

Usulning maqsadi bir o‘zgaruvchili *f(x)* funktsiyaning shartsiz minimumini, ya’ni $f(x^*)=min f(x),\ x\in R$ bo‘ladigan $x^*\in$ R nuqtani topishdan iborat.

Bu usulda har bir qadamda ketma-ket oldingi oraliqning teng yarmiga teng bo‘lgan oraliqni olish usuliga asoslangan. Bunda dastlabki interval va talab qilingan aniqlik beriladi.

Usul algoritmi funktsiya qiymatini intervalni teng 4 ta bo‘lakka bo‘luvchi 3 ta nuqtada tahlil qilishdan iborat. Jarayon oraliq uzunligi berilgan kattalikdan kichik bo‘lguncha davom qiladi.

1-qadam. Boshlang‘ich noaniq interval $L_0=[a_0, b_0]$ ni va talab qilingan aniqlik ε>0 ni kiritish.

2-qadam. k=0 deb faraz qilish.

3-qadam. Kesma o‘rtasini $x_k^c=\dfrac{a_k+b_k}{2}$, interval uzunligini $|L_{2k}|=b_k-a_k$ va $f(x_k^c)$ funktsiya qiymatini topish.

4-qadam. $y_k = a_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$ nuqtalarni hisoblash, $f(x_k)$, $f(z_k)$ qiymatlarni hisoblash.

5-qadam. $f(x_k)$ va $f(x_k^c)$ qiymatlarni taqqoslash:

a) agar $f(x_k^c) < f(y_k)$ bo‘lsa, $(x_k^c, b_k]$ oraliqni tashlab, $b_k = x_k^c, a_{k+1} = a_k$ deb olish. Yangi oraliqning o‘rtasi $y_k : x_{k+1}^c = y_k$ nuqta bo‘ladi. 7-qadamga o‘tish.

b) agar $f(y_k) \geq f(x_k^c)$ bo‘lsa, 6-qadamga o‘tish.

6-qadam. $f(z_k)$ va $f(x_k^c)$ qiymatlarni taqqoslash:

a) agar $f(z_k) < f(x_k^c$ bo‘lsa, $[a_k, x_k^c)$ oraliqni tashlab, $a_{k+1} = x_k^c, b_{k+1} = b_k$ deb olish. Yangi oraliqning o‘rtasi $z_k : x_{k+1}^c = b_k$ nuqta bo‘ladi. 7-qadamga o‘tish.

b) agar $f(z_k) \geq f(x_k^c)$ bo’lsa, $[a_k, y_k), (z_k, b_k]$ oraliqlarni tashlab, $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = z_k$ deb olish. Yangi oraliqning o‘rtasi $x_k^c : x_{k+1}^c = x_k^c$ nuqta bo’lib qoladi. 7-qadamga o‘tish.

7-qadam. $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ va tugatish shartlarini tekshirish:

a) agar $|L_{2(k+1)}| \leq \varepsilon$ bo‘lsa, jarayon to‘xtatiladi va $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Taqribiy qiymat sifatida bu oraliqning o‘rtasini olish mumkin: $x^* = x_{k+1}^c$.

b) agar $|L_{2(k+1)}| > \varepsilon$ bo‘lsa, u holda k=k+1 deb olib, 4-qadamga o‘tish.

Kesma o‘rtasini topish usulida dastlabki noaniq oraliqni nisbatan kichraytirish xarakteristikasi $R(N) = 1/2^{0.5N}$ formuladan topiladi, bunda N – funktsiyani hisoblash soni.

Misol 1. Berilgan Δ=[1,3] kesmada $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ funktsiya minimumini toping, bunda ε=0.1 deb oling.

Yechilishi: $x^c = \frac{(a+b)}{2} = 2;$ L=2; $f(x^c) = 2;$

1-iteratsiya. $y_1 = a + \frac{L}{4} = 1{,}5;\ z_1 = b - \frac{L}{4} = 2{,}5;$

$$f(y_1) = 1{,}5625;\ f(z_1) = 11{,}5625;$$

Bu yerda $f(y_1) < f(x^c)$, shuning uchun b=2 va $x^c = 1{,}5;$

|L|=|b–a|=1, |L|>ε.

2-iteratsiya. $f(x^c) = 1{,}5625;$

$$y_2 = a + \frac{L}{4} = 1{,}25;\ z_2 = b - \frac{L}{4} = 1{,}75;$$

$$f(y_2) = 3{,}06641;\ f(z_2) = 1{,}00391;$$

Bu yerda $f(y_2) > f(x^c)$, va $f(z_2) < f(x^c)$, u holda a=1,5; $x^c = 1{,}75;$ b=2. |L|=|b–a|=0,5; |L|>ε.

3-iteratsiya. $f(x^c) = 1{,}00391;$

$$y_3 = a + \frac{L}{4} = 1{,}625;\ z_3 = b - \frac{L}{4} = 1{,}875;$$

$$f(y_3) = 1{,}12915;\ f(z_3) = 1{,}26587;$$

Bu yerda $f(y_3) > f(\mathrm{x^c})$, va $f(\mathrm{z_3}) > f(\mathrm{x^c})$, u holda a=1,625; $x^c = 1{,}75;$ b=1,875. |L|=|b–a|=0,25; |L|>ε.

4-**iteratsiya.** $f(x^c) = 1{,}00391;$

$$y_4 = a + \frac{L}{4} = 1{,}625; \quad z_4 = b - \frac{L}{4} = 1{,}8125;$$

$$f(y_4) = 1{,}02321; \quad f(z_4) = 1{,}08131;$$

Bu yerda $f(y_4) > f(x^c)$ va $f(z_4) > f(x^c)$, u holda a=1,6875; $x^c = 1{,}75$; b=1,8125.

|L|=|b–a|=0,125; |L|>ε.

5-iteratsiya. $f(x^c) = 1{,}00391$;

$$y_5 = a + \frac{L}{4} = 1{,}71875; \quad z_5 = b - \frac{L}{4} = 1{,}78125;$$

$$f(y_5) = 1{,}00211; \quad f(z_5) = 1{,}02988.$$

Bu yerda $f(y_5) < f(x^c)$, u holda a=1,6875; $x^c = 1{,}71875$; b=1,75. |L|=|b–a|=0,0625; |L|<ε.

Demak, x^*=1,71875, $f(x^*)$=1,00211 va ekstremum 5 ta iteratsiyada topildi.

Sekin yaqinlashishi uchun bu usul ildizni topishda kam ishlatiladi, odatda bu usuldan ildizni ajratishda foydalaniladi va keyingi bosqichlarda ildizni aniqlashtirish uchun boshqa usullar ishlatiladi.

Misol 2. $y = 2x^2 - \ln x$ **funktsiya minimumini topish uchun kesmani o‘rtadan bo‘lish usulining dasturi:**

```
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define K 0.1
float f(float x)
{ float y; y=2*x*x-log(x); return y; }
void pausa()
{ printf("\n\nPress any key to continue …");
getch();
}
void main()
{ float a,b,c,d,d1,e,x1,x2,y1,y2;
clrscr();
printf(" Oxirlari qiymatini kiriting n");
printf("f(x)\n funktsiyaning unimodallik [a,b] kesmasi ");
scanf("%f%f", &a,&b);
printf("min f(x)\n nuqtalarni topish aniqligini kiriting");
scanf("%f", &e);
do
{d=b-a;
clrscr();
printf("[a,b]\n unimodallik kesmasi");
printf("a=%f b=%f", a,b);
pausa();
c=(a+b)/2; d1=K*(b-a)/2;
x1=c-d1; x2=c+d1;
y1=f(x1); y2=f(x2);
```

```
if (y1<y2) b=x2;
if(y1>y2) a=x1;
if(y1==y2) { a=x1; b=x2; };
}
while (d>=e);
printf("\n\n minimum nuqtasi x=%f aniqlik=%f", a,d);
pausa();
}
```

Nazorat uchun savollar:

1. Optimallash masalalarini yechish usullarini sanang.
2. Shartsiz optimallash usullariga qaysi usullar kiradi?
3. Maqsad funktsiyasi nima?
4. Kesmani teng ikkiga bo‘lish usulini tushuntiring.
5. Kesmani teng ikkiga bo‘lish algoritmini ayting.
6. Oltin kesim algoritmini tushuntiring.

XIV BOB. CHIZIQLI DASTURLASH MASALALARI

14.1 Optimallash turlari

Axborot texnologiyalari bilan optimallash masalalarini yechishda optimal loyihalash usullaridan foydalaniladi.

Optimallash usullari quyidagi bo‘limlarga ajratiladi:

- Chiziqli va dinamik loyihalash (resurslarni taqsimlash nasalasi);
- Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi (tizimda tasodifiy xarakterli arizalar va xizmatlar masalasi);
- Imitatsion modellashtirish (haqiqiy tajriba imitatsion model bilan almashtiriladigan masalalar);
- Statistik modellashtirish (natijalari turli faktorlarga bog‘liq bo‘lgan matematik statistika usullari bilan katta sonli hisoblashlar yordamida yechiladigan masalalar);
- Markov jarayonlari nazariyasi (tasodifiy boshqarilmaydigan faktorli masalalar);
- O‘yinlar nazariyasi (noaniq shartlarda bellashuv masalalari);
- Jadvallar nazariyasi (Ishni kalendar tartiblash masalalari);
- Tarmoqli loyihalash va boshqarish (turli shakldagi ishlarni bajarish vaqtini baholash masalasi);
- Vektorli optimallash (ko‘p kriteriyli masalalar);
- Obrazlarni tanish nazariyasi va boshqalar.

Umumiy holdagi optimallash masalalari

Umumiy holda optimallash masalalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{MF} & F = f(x_j) \to \max(\min, const); \\ \text{Chegara} & \left\{\begin{array}{l} g_1(x_j) \le (=;\ge) b_1 \\ \quad\ldots. \\ g_i(x_j) \le (=;\ge) b_i \\ .\quad\ldots \\ g_m(x_j) \le (=;\ge) b_m \end{array}\right. \\ \text{Chegaraviy shart} & \mathrm{d_j} \le x_j \le D_j; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n} \end{array}\right\} \quad (14.1)$$

(14.1) sistema 3 ta tashkil qiluvchidan iborat:

1. Maqsad funktsiyasi (MF) yoki optimallash kriteriysi – yechim qanday ma’noda optimal bo‘lishi, ya’ni eng yaxshi bo‘lishi kerakligini ko‘rsatadi. Vazifasiga qarab maqsad funktsiyasi 3 xil bo‘ladi:

- maksimallash;
- minimallash;
- berilgan qiymatni hisoblash.

2. Chegara – o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘liqlikni belgilaydi. Bu chegaralar bir tomonli $g_i(x_j) \le b_i$ yoki ikki tomonli $(a_i \le g_i(x_j) \le b_i$ bo’lishi mumkin. Ikki tomonli chegarani bir tomonli chegara ko’rinishida ham yozish mumkin: $(g_i(x_j) \ge a_i),\ (g_i(x_j) \le b_i)$.

3. Chegaraviy shartlar – topish kerak bo‘lgan o‘zgaruvchining qiymati optimal yechimda qanday oraliqda bo‘lishi kerakligini ko‘rsatadi.

Optimallash masalasining asosiy xarakteristikasi – o‘zgaruvchilar soni *n* va chegaralar soni *m* bilan aniqlanadigan o‘lchamliligidir. Bu kattaliklar orasidagi munosabatlar optimallash masalasining qo‘yilishini aniqlovchilar hisoblanadi. Umumiy holda chegaraviy shartlar quidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$g_i(x_j) \le b_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n};$$

Ularni boshqacha yozish ham mumkin:

$$g_i(x_j) + y_i = b_i;\ y_i \ge 0;\ i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

Bu holda x_j va y_i o‘zgaruvchilarning umumiy soni N ga teng: $N=n+m$, tenglamalar soni esa oldingidek qoladi, ya’ni *m* ga teng. Ravshanki, $N=n+m>m$ da sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Demak, agar chegaralar tengsizlik shaklida bo‘lsa, u holda sistema har doim cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Shunday qilib, $n>m$ shart optimallash masalasining eng kerakli sharti hisoblanadi.

Optimal yechim – eng yaxshi yechim. Yechim to‘liq ma’noda eng yaxshi bo‘lishi mumkin faqat bitta holda, qa’tiy qo‘yilgan ma’noda. Yechimni qabul qilishda qaysi kriteriy bo‘yicha qabul qilinayotgan yechim optimal bo‘lishi kerakligi ko‘rsatilishi kerak.

Maqsad funktsiyasiga **kriteriy** deyiladi. Kriteriy yordamida kerakli (masalan, foyda, ishlab chiqarish samaradorligi, chidamlilik), shuningdek, keraksiz (masalan, chiqim, zarar) sifatlarni baholash mumkin. Bunda birinchi holatda kriteriyni maksimallashga, ikkinchi holatda esa minimallashga harakat qilinadi.

14.2. Chiziqli dasturlash masalalarini yechish

Chiziqli dasturlash masalasi optimallash masalasining xususiy holidir.

Minimallash (yoki maksimallash) talab qilinayotgan chiziqli shakl

$$\sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \min\ (\max)$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j$ yoki $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i;\ \ j = m+1, \dots, p;\ \ \ x_i > 0;\ i = 1, \dots, n,$

shartlarda **umumiy shakldagi chiziqli dasturlash masalasi** deyiladi.

Matritsaviy ko‘rinishdagi masala

$$\left.\begin{array}{c} \bar{c}^T \bar{x} \to \min(max), \\ A\bar{x} \le \bar{b}, \\ \bar{x} \ge \bar{0} \end{array}\right\}$$

chiziqli dasturlashning **kanonik shakldagi masalasi** deyiladi.

Chiziqli dasturlashning istalgan masalasini kanonik shaklga keltirish mumkin.

Agar chegaralar sistemasi $A\bar{x} \le \bar{b}$ shaklda berilgan bo‘lsa, u holda qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi shaklga keltirish mumkin:

$$A\bar{x} + E\bar{y} = \bar{b},\ \ \bar{x} \ge 0,\ \ \bar{y} \ge 0, \text{ bunda } \bar{y} = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T.$$

Agar chegaralar $A\overline{x} \geq \overline{b}$ shakldа berilgan bo‘lsa, u holda $A\overline{x} - E\overline{y} = \overline{b}, \quad \overline{x} \geq 0$, $\overline{y} \geq 0$.

Chegaralari $A\overline{x} \leq \overline{b}$ ko’rinishda bo‘lgan masalani qaraymiz. Bu chegaralarni quyidagi sistema shaklida yozish mumkin:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \overline{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}, \overline{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{A}_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Shunda chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha berish mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min(\max);$$

$$x_1\overline{A}_1 + x_2\overline{A}_2 + \ldots + x_n\overline{A}_n + x_{n+1}\overline{A}_{n+1} + \ldots + x_{n+m}\overline{A}_{n+m} = A_0, \ \overline{x} \geq 0$$

$\overline{A}_i$ vektorlar **shart vektorlari** deyiladi, chiziqli dasturlash masalasining o‘zi esa – dastlabki masalaga nisbatan **kengaytirilgam masala** deyiladi.

Aytaylik, D va D_1— dastlabki va kengaytirilgam masalalarning ruxsat etilgan to‘plamlari bo‘lsin.

U holda D_1 to‘plamning ixtiyoriy nuqtasiga D to‘plamdan yagona nuqta mos keladi va aksincha. Umumiy holda dastlabki masalaning ruxsat etilgan D to‘plami dastlabki o‘zgaruvchilar qism fazosining kengaytirilgan masalaning D_1 to‘plamining proyektsiyasidir.

Chiziqli dasturlash chegaralarini qanoatlantiruvchi $\overline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ sonlar to‘plamiga uning **rejasi** deyiladi.

Chiziqli shaklni minimallashtiruvchi yoki maksimallashtiruvchi rejasiga **chiziqli dasturlash masalasining yechimi** deyiladi.

Bazis yechim tushunchasini kiritamiz. Kengaytirilgan masalaning $A_p = [\overline{A}_1, \overline{A}_2 \ldots, \overline{A}_{n+m}]$ matritsasidan chiziqli bog‘liq bo‘lmagan m ta vektor-ustunni olamiz va uni $B_{m\times n}$ deb, qolgan ustunlarni esa $D_{m\times n}$ matritsa bilan belgilaymiz. U holda chiziqli dasturlashning kengaytirilgan masalasi A_p=[B,D] chegaralari

$$\overline{A}_p\overline{x} = B\overline{x}_B + D\overline{x}_D = \overline{A}_0$$

ko‘rinishga keladi. Ravshanki, B ustun matritsa m-o‘lchovli fazo bazisini ifodalaydi. Shuning uchun $\overline{A}_0$ vektor va istalgan D ustun matritsani B ustun matritsalarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlash mumkin:

$$B^{-1} \cdot B \cdot \overline{x_B} + B^{-1} \cdot D \cdot \overline{x_D} = B^{-1} \cdot \overline{A_0}.$$

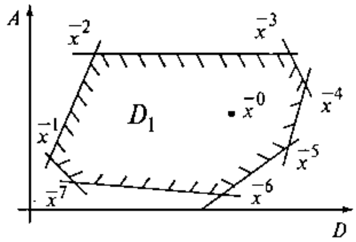
Bundan $\overline{x_B} = B^{-1} \cdot \overline{A_0} - B^{-1} \cdot D \cdot \overline{x_D}$ kelib chiqadi.

$\overline{x}_D$ ga turli qiymatlarni berib, $\overline{x}_B$ ning turli yechimlarini olamiz.

Agar $\overline{x}_D = \overline{0}$ deb faraz qilsak, u holda $\overline{x_B} = B^{-1} \cdot \overline{A_0}$ ga teng bo‘ladi.

$\overline{x_B} = B^{-1} \cdot \overline{A_0}$ yechimni m+n noma’lumli m ta tenglamalar sistemasininng **bazis yechimi** deyiladi.

Agar yechimlar faqat musbat tashkil qiluvchilardan iborat bo‘lsa, u holda **mumkin bo‘lgan bazis yechim** deyiladi. Ruxsat etilgan bazis yechimlar kengaytirilgan masalaning ruxsat etilgan D_1 to‘plamining chegaraviy nuqtalarini aniqlaydi. (14.1-chizma).



Rasm 14.1. Ruxsat etilgan bazis yechimlar.

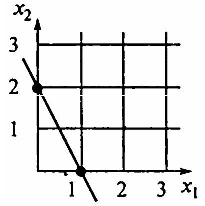
Agar $\overline{A_i}$ shart vektorlari musbat koeffitsiyentli chiziqli bog‘lanmagan bo‘lsa, chiziqli dasturlash masalasining $\overline{X}$ rejasi **tayanch reja** deyiladi, ya’ni tayanch reja – kengaytirilgan sistemaning mumkin bo‘lgan bazis yechimi **yechimlar ko‘pyog’ining uchi** bo‘ladi.

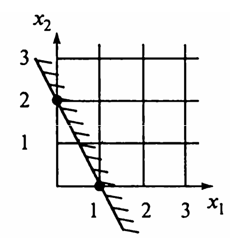
O‘zgaruvchilar (maqsad funktsiyasi, chegaralar) chiziqli yoki nochiziqli bog‘langan bo‘lishi mumkin. Agar o‘zgaruvchilar daraja ko‘rsatkichi 1 ga teng bo‘lib, ular faqat qo‘shish va ayirish amallari bilan bog‘langan bo‘lsa, bu bog‘lanishga **chiziqli bog‘liqlik** deyiladi, aks holda **nochiziqli bog‘liqlik** deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalalarini analitik va grafik usullarda yechish mumkin. Grafik usulda hamma narsa ko‘z oldida turadi, bu usul o‘zgaruvchilar soni 2 ta bo‘lganda samarali hisoblanadi.

Misol 1. $2x_1 + x_2 = 2$ tenglamaning mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plamini toping.

Yechilishi: Umumiy ko‘rinishda berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi shaklida yozib olamiz: $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} = 1$. Bunda kasr maxrajidagi sonlar to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlarini qaysi nuqtada kesib o‘tganini bildiradi (14.2-chizma). Agar dastlabki tenglamadan tengsizlik ko‘rinishiga o‘tilsa, $2x_1 + x_2 \le 2$ ushbu tengsizlikning grafik yechimi 14.3-chizmada keltirilgan, ya’ni ikki o‘zgaruvchili chiziqli tengsizlikning yechimi yarim tekislikdan iborat bo‘ladi.





Rasm 14.2. Dastlabki to’g’ri chiziq. Rasm 14.3. Tengsizlik yechimi.

14.3-chizmada shtrixlangan sohada tengsizlik yechimga ega emas. Shtrixlanmagan sohada tengsizlik x_1; x_2 yechimlarga ega bo‘lib, bu yarim tekislik mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi bo‘ladi.

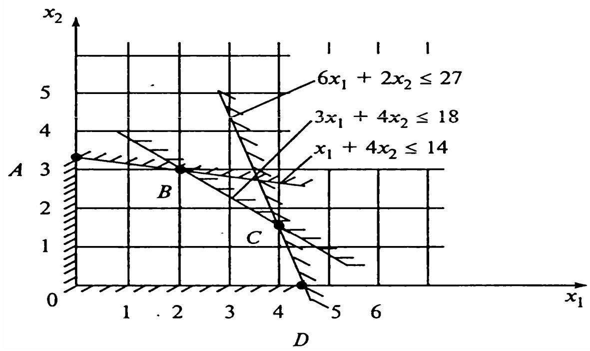
Misol 2. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 18; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 27; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Yechilishi: Qulaylik uchun berilgan tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{7/2} \le 1; \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{9/2} \le 1; \\ \frac{x_1}{9/2} + \frac{x_2}{27/2} \le 1; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

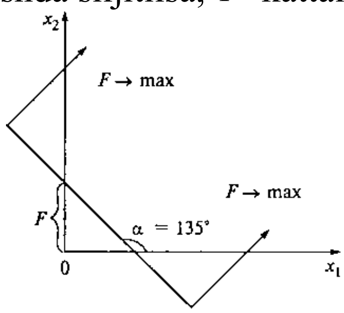
Sistemaning grafik yechimi 13.4-chizmada keltirilgan:



Rasm 14.4. Sistemaning grafik yechimi.

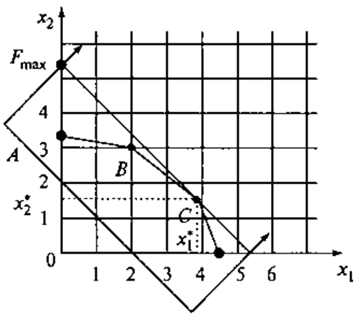
Sistemaning yechimi ABCDO ko‘pburchakka tegishli bo‘lgan barcha nuqtalardan iborat, ya’ni ko‘pburchak mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi bo‘ladi. Yechimlar sohasi cheksiz nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lgani uchun sistema ham cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Agar optimal yechim so‘ralgan bo‘lsa, u holda maqsad funktsiyasini $F = x_1 + x_2 \to \max$ deb olish kerak. Bu bog‘liqlik 14.5-chizmada $x_2 = F - x_1$ to‘g‘ri chiziq shaklida ko‘rsatilgan bo‘lib, uning burchak koeffitsiyenti $tg\alpha = -1$ ekanini ko’rish mumkin. Bundan $\alpha = 135^0$, F esa to‘g‘ri chiziqning ordinata o‘qini kesishidan hosil bo‘lgan kesma uzunligiga tengligi kelib chiqadi. Agar to‘g‘ri chiziqni chizmada strelkalar bilan ko‘rsatilgan yo‘nalishda siljitilsa, F kattalik oshadi.



Rasm 14.5. Sistemaning maqsad funktsiyasi.

Endi 14.4- chizmadagi mumkin bo‘lgan yechimlar sohasini 14.5-chizmadagi maqsad funktsiyasi bilan birlashtiramiz va 14.6-chizmani hosil qilamiz.



Rasm 14.6. Maqsad funktsiyasi grafigi.

Maqsad funktsiyasi $F = x_1 + x_2 \to \max$ bo‘lgan sistemaning optimal yechimni topish uchun maqsad funktsiyasi grafigini o‘sish yo‘nalishi bo‘yicha siljitamiz. Chizmadan ko‘rinadiki, C nuqtaning x_1^* va x_2^* koordinatalari optimal yechim bo‘lar ekan. Bundan $F = F^*$ ekanligi kelib chiqadi..

Yuqoridagi masaladan shunday xulosa qilish mumkin: **optimal yechim mumkin bo‘lgan yechimlar sohasining uchlaridan iborat.**

Demak, chiziqli dasturlash masalasini analitik usulda yechish uchun quyidagi bosqichlarni bajarish kerak:

- mumkin bo‘lgan yechimlar sohasining uchlarini, ya’ni chegaralarning kesishish nuqtalarini topish;
- Shu uchlarda maqsad funktsiyasining qiymatlarini aniqlash;
- Maqsad funktsiyasi maksimal yoki minimal qiymatga erishgan uchni oprimal yechim deb olish.

14.3. Simpleks usul

Geometriyada “simpleks” tushunchasi ishlatiladi.

k – o‘lchovli fazoda **jismning simpleksi** deb, uning (*k*+1) uchlari to‘plamiga aytiladi.

Masalan, tekislikda uchburchakning uchta uchi simpleks bo‘ladi;

3 o‘lchovli fazoda to‘rt yoqlining 4 ta uchi simpleks bo‘ladi va h.k.

Ushbu tushunchani hisobga olsak, chiziqli dasturlash masalasini analitik usulda yechishga **simpleks usul** yoki **rejani bosqichma-bosqich yaxshilash usuli** deyiladi. Bitta uchdagi o‘zgaruvchi va maqsad funktsiyasi qiymatlari **iteratsiya** deyiladi.

Quyidagi masala: $Q(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$

chegaralar sistemasi bilan

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n + x_{n+1} = b_1;$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n + x_{n+2} = b_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n + x_{n+m} = b_m;$$

berilgan bo‘lsin. Sistemani $x_1, x_2, ..., x_m$ o‘zgaruvchilarga nisbatan yechamiz:

$$x_1 = a'_{1,m+1} + \cdots + a'_{1,n} + b'_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = a'_{m,m+1} + \cdots + a'_{m,n} + b'_m$$

$x_1, x_2, ..., x_m$ ga mos shart vektorlari bazis tashkil qiladi. $x_1, x_2, ..., x_m$ o‘zgaruvchilarni **bazis o‘zgaruvchilar** deyiladi, qolgan o‘zgaruvchilar esa **nobazis o‘zgaruvchilar** bo‘ladi.

Bazis o‘zgaruvchilar yordamida maqsad funktsiyasini yozish mumkin:

$$Q(\overline{x}) = c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n + c'_0 \to min.$$

Agar bazis o‘zgaruvchilarni nolga tenglasak:

$$x_{m+1} = 0,\ x_{m+2} = 0,\ ...,\ x_n = 0,$$

u holda mos nobazis o‘zgaruvchilar quyidagiga teng bo‘ladi:

$$x_1 = b'_1;\ x_2 = b'_2;\ ...;\ x_m = b'_m$$

Bunday komponentlarga ega bo‘lgan $\overline{x}$ vektor ko‘pyoqning uchlarini, ya’ni b'_i≥0 (tayanch reja) shartida mumkin bo‘lgan yechimni ifodalaydi.

Endi maqsad funktsiyasi kichik bo‘lgan uchga o‘tish kerak. Buning uchun shunday nobazis va bazis o‘zgaruvchilarni tanlash kerakki, ularning o‘rnini almashtirganda maqsad funktsiyasi ning qiymati kichraysin. Ana shu yo‘l bilan masala yechimini topish mumkin.

Simpleks usulning shakllantirilgan algoritmi 2 ta asosiy bosqichdan iborat: tayanch rejani qurish; optimal rejani qurish.

Misol 1. $Q(\overline{x}) = x_4 – x_5 \to$ min masala

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1; \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2; \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

chegaralar sistemasi bilan berilgan bo‘lsin. Ushbu chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yeching.

Yechilishi: Bazis sifatida $\{x_1, x_2, x_3\}$ o‘zgaruvchilarni olamiz va sistemani yechamiz.

Chegaralar sistemasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

$\{x_4, x_5\}$ lar bazis o‘zgaruvchilar hisoblanadi. Agar x_4=0 va x_5=0 deb olsak, u holda uchni topamiz, ya’ni tayanch reja topiladi: $\overline{x}^1 = [1\ 2\ 3\ 0\ 0]^T$. U $Q(\overline{x}^1)$=0 maqsad funktsiyasiga mos keladi.

Maqsad funktsiyasini x_5 ni kattalashtirish evaziga kichraytirish mumkin. x_5 ni kattalashtirganda x_1 ham kattalashadi, x_2 va x_3 lar esa kichrayadi. Oldin x_2 manfiy bo‘lishi mumkin edi, shuning uchun bazisga x_5 ni kiritib va bir vaqtda x_2 ni basizdan chiqarib tashlaymiz. Natijada bir nechta almashtirishlarni bajarib, yangi bazis sistemani va maqsad funktsiyasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_5 = 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4 \end{cases}$$

$$Q(\overline{x}) = –2 – x_4 + x_2 \to min.$$

Bu sistemaga mos tayanch reja quyidagicha bo‘ladi:

$\overline{x}^2 = [5\ 0\ 1\ 0\ 2]^T$. Bunga $Q(\overline{x}^2)$ =–2 maqsad funktsiyasi mos keladi.

Maqsad funktsiyasini x_4 ni kattalashtirish evaziga kichraytirish mumkin. x_4 ni kattalashtirish x_3 ni kichraytirish evaziga bo‘ladi. Shuning uchun bazisga x_4 ni kiritib,

x_3 ni basizdan chiqarib tashlaymiz. Natijada bir nechta almashtirishlarni bajarib, yangi bazis sistemani va maqsad funktsiyasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{5}x_3; \\ x_1 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3; \\ x_5 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{3}x_3; \end{cases}$$

$$Q(\overline{x}) = -\frac{11}{5} + \frac{4}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \to min.$$

U holda mos tayanch reja: $\overline{x}^3 = \left[\frac{28}{5}\ 0\ 0\ \frac{1}{5}\frac{12}{5}\right]^T$.

Maqsad funktsiyasi esa: $Q(\overline{x}^2) = -2$.

Maqsad funktsiyasining koeffitsiyentlari nobazis o‘zgaruvchilarda manfiymas, shuning uchun maqsad funktsiyasini x_2 yoki x_3 larni kattalashtirish bilan kichraytirib bo‘lmaydi, bundan olingan $\overline{x}^3$ rejaning optimal ekanligi kelib chiqadi.

Misol 2. $Q(\overline{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow$ min masala

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ x > 0 \end{cases}$$

chegaralar sistemasi bilan berilgan bo‘lsin. Ushbu chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yeching.

Yechilishi: $\{x_3, x_4\}$ – nobazis, $\{x_1, x_2\}$ – bazis o‘zgaruvchilar. U holda tayanch reja $\overline{x}^0$ =[0 0 1 2] va maqsad funktsiyasi $Q(\overline{x}^0)$ =0 bo‘ladi.

Endi x_1 ni bazisdan chiqarib, x_4 ni bazisga kiritamiz. Natijada yangi bazis sistemani va maqsad funktsiyasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 3 + x_2 - x_4 \\ Q(\overline{x}) = -2 - 3x_2 + x_4 \end{cases}$$

Tayanch reja $\overline{x}^1 = [2\ 0\ 3\ 0]^T$ ga teng, maqsad funktsiyasi $Q(\overline{x}^0)$ =–2. Ko‘rish mumkinki, x_2 ni kattalashtirish bilan x_1 va x_3 lar ham kattalashadi, ya’ni $x_2 \to -\infty$ da mumkin bo‘lgan sohada $Q(\overline{x}) \to -\infty$ bo‘lib, masala yechimga ega emas.

Eslatma: Mumkin bo‘lgan rejani izlash jarayonida chegara sistemasida qarama-qarshiliklar kelib chiqishi mumkin.

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks-jadval usulida yechish:

Quyidagi masala: $Q(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow$ min (max)

chegaralar sistemasi bilan berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m; \\ a_{m+1,1}x_1 + \cdots + a_{m+1,n}x_n \le b_{m+1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m+p,1}x_1 + \cdots + a_{m+p,n}x_n \le b_{m+p}. \end{cases}$$

Chegara-tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritamiz. Chegara-tenglamalardagi qo‘shimcha o‘zgaruvchilar nolga teng bo‘lishi kerak. Shunda shegara sistemasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} 0 = b_1 - a_{1,1}x_1 - \cdots - a_{1,n}x_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = b_1 - a_{1,1}x_1 - \cdots - a_{1,n}x_n; \\ x_{n+1} = b_{m+1} - a_{m+1,1}x_1 - \cdots - a_{m+1,n}x_n; \\ x_{n+p} = b_{m+p} - a_{m+p,1}x_1 - \cdots - a_{m+p,n}x_n. \end{cases}$$

Bu yerda $x_{n+i} \geq 0$, $i=1,\dots,p$.

Bazis o‘zgaruvchilar sifatida qo‘shimcha kiritilgan o‘zgaruvchilar sistemasini olamiz. U holda almashtirilgan masala uchun simpleks jadval 14.1-jadval ko‘rinishida bo‘ladi.

Almashtirilgan masala uchun simpleks jadval1. 4.1-jadval.

	$-x_1$	$-x_2$	.	$-x_s$	.	$-x_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	.	$a_{1,s}$	.	$a_{1,n}$	b_1
...	...	...	.	...	.	...	...
0	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	.	$a_{m,s}$	.	$a_{m,n}$	b_m
x_{m+1}	$a_{m+1,1}$	$a_{m+1,2}$	.	$a_{m+1,s}$	.	$a_{m+1,n}$	b_{m+1}
...	...	...	.	...	.	...	...
x_{m+p}	$a_{m+p,1}$	$a_{m+p,2}$	.	$a_{m+p,s}$	.	$a_{m+p,n}$	b_{m+p}
$Q($	$-c_1$	$-c_2$	.	$-c_s$	.	$-c_n$	0

Maqsad funktsiyasini minimallash bilan hosil qilingan tayanch reja optimal bo‘lishi uchun maqasad funktsiya satridagi koeffitsiyentlar nomusbat (maksimallashda esa nomanfiy) bo‘lishi kerak, ya’ni minimumni izlashda $Q(\overline{x})$ satridagi musbat koeffitsiyentlardan qutulishimiz kerak

Agar minimumni izlashda maqsad funktsiyasi satrida noldan katta koeffitsiyentlar bo‘lsa, shu satrdagi musbat koeffitsiyentli ustunni tanlaymiz. Bu musbat element **yo‘naltiruvchi element** deyiladi. Aytaylik, bu l raqamli ustun bo‘lsin.

Yo‘naltiruvchi ustunning musbat koeffitsiyentlari orasidan yo‘naltiruvchi satr(yo‘naltiruvchi element)ni tanlash uchun ozod hadlar ustunidagi koeffitsiyentning yo‘naltiruvchi ustundagi koeffitsiyentga nisbati minimum bo‘ladiganini olamiz:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = min\left\{\frac{b_i}{a_{il}} | a_{il} \geq 0\right\},$$

bunda a_{rl} – yo‘naltiruvchi element; r – yo‘naltiruvchi satr.

Simpleks jadvalga, ya’ni maqsad funktsiyasi kichik bo‘lgan keyingi tayanch rejaga o‘tish uchun yo‘naltiruvchi a_{rl} elementni yo‘qotadigan modifikatsiyalangan Jordan usulidan foydalanamiz.

Agar yo‘naltiruvchi ustunda musbat koeffitsiyent bo‘lmasa, u holda maqsad funktsiyasi quyidan chegaralanmagan (maksimallashda esa – yuqoridan chegaralanmagan) bo‘ladi..

Yo‘naltiruvchi element o‘rniga 1 qo‘yiladi. Yo‘naltiruvchi ustunning qolgan elementlarini ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgartirilib, yo‘naltiruvchi elementga bo‘linadi. Yo‘naltiruvchi satrning ham qolgan elementlarini yo‘naltiruvchi elementga bo‘linadi.

Simpleks jadvalning qolgan barcha elementlari quyidagi formuladan hisoblaniladi (14.2-jadval):

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rl} - a_{rj}a_{il}}{a_{rl}} a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{il}}{a_{rl}}.$$

Misol 4. Tayyorlash uchun ishchi kuchi, xom ashyo, moliyaviy resurslar kerak bo‘ladigan 4 xildagi Tovar1, Tovar2, Tovar3, Tovar4 mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarish kerakligini aniqlang.

Bir dona ma’lum turdagi mahsulot tayyorlash uchun zarur bo’ladigan har bir resurs soni **harajat normasi** deyiladi.

Har bir mahsulot uchun ketadigan harajatlar normasi va undan olinadigan foyda quyidagi jadvalda keltirilgan (14.3-jadval).

Dastlabki simpleks jadval. 14.3-jadval

	A						
	R esurs	ovar 1	ovar 2	ovar3	ovar4	elgi	
	F oyda	0	0	20	30	акс	
	I shchi kuchi						6
	X om ashyo						10
	m oliyavi y			0	3		00

Yechilishi:

1. Masalaning matematik modelini qurish.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

x_j – j-turdagi ishlab chiqariladigan mahsulot soni, j = 1, 2, 3,4;

b_i – i-xildagi rejalashtirilgan resurs soni, i=1, 2, 3;

a_{ij} –j-turdagi mahsulot birligi uchun i-resursning harajat normasi;

c_j – j-turdagi mahsulot birligidan olinadigan foyda.

Bitta Tovar1 ni itayyorlash uchun 6 birlik xom ashyo ketadi, demak, barcha Tovar1 mahsuloti uchun $6x_1$ birlik xom ashyo kerak, bunda x_1 – ishlab chiqariladigan

Tovar1 soni. Boshqa mahsulotlarni ham xuddi shunga o‘xshash hisoblab, xom ashyo chegarasini topib olamiz:

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110.$$

Tengsizlikning chap tomoni kerak bo‘ladigan resurs sonini, o‘ng tomoni esa mavjud resurs sonini bildiradi.

Sunga o‘xshash boshqa resurslar uchun ham maqsad funktsiyasining bog‘lanishini yozish mumkin. U holda masalaning matematik modeli:

$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow$ max;
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16;$
$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110;$ (14.1)
$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100;$
$x_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3, 4.$

2. Dastlabki ma’lumotlarni kiritish. Masala shartiga asosan dastlabki ma’lumotlarni 14.4-jadval ko‘rinishida kiritamiz.

Ma’lumotlarni kiritish shakli. 14.4-jadval.

	O’zgaruvchilar							
	om	ova r1	ovar 2	ova r3	ova r 4			
	iym at							
	uyi che ga.							
	uqo ri ch.					F	o’n al	
	aqs ad fun k. koe ffit.	0	0	20	30		ax	
	Chegaralar							

	esurs turi					ha p to m on	elgi	’ng tomo n
	shchi							6
0	om ashy o							10
1	oliya viy			0	3			00

3. Matematik modeldagi bog‘liqliklarni kiritish. (14.1) formuladagi bog‘liqliklarni jadvalga kiritamiz.

Bog‘liqliklarni kiritish. 14.5-jadval.

						F		
	O’zgaruvchilar							
	om	1	2	3	4			
	iym at							
	uyi che.							
	uq. ch.					MF	o‘n	
	F koef f.	0	0	20	30	=СУ ММПРОИЗ В(B$3:E$3; B6:E6)	ax	
	Chegaralar							
	esur					Chap qism	elgi	‘ng

	s turi						qis m
	shch i				=СУ ММПРОИЗ В(B$3:E$3; B9:E9)		6
0	om ashy o				=СУ ММПРОИЗ В(B$3:E$3; B10:E10)		10
1	oliy aviy		0	3	=СУ ММПРОИЗ В(B$3:E$3; B11:E11)		00

Maqsad funktsiyasini $F$6 deb kiritamiz.

O‘zgaruvchilar adreslarini kiritish: $B$3:$E$3.

Chegaraviy shartlarni kiritish: $B$3:$E$3 >=$B$4:$E$4.

Chegaralarni kiritish: $F$9:$F$11 <=$H$9:$H$11.

Shu tarzda masalaning optimal yechimini topamiz. Bu 14.6-jadzvalda keltirilgan. Jadvaldan ko‘rish mumkinki, optimal yechim Tovar1=10, Tovar2=0, Tovar3=6, Tovar4=0. Shunda maksimal foyda 1320 pul birligiga teng bo‘ladi, foydalanilgan resurslar soni esa ishchi =16, xom ashyo=84, moliyaviy =100.

Masalaning optimal yechimi. 14.6-jadval.

							G	
	O‘zgaruvchilar							
	om	1	2	3	4			
	iymat	0						
	uyi che.							
	uq. ch.					F	Y o‘nalish	
	F koeff.	0	0	20	30	320	M акс	
	Chegaralar							
	esurs turi					hap qism	B elgi	‘ng qis m
							≤	

	shchi					6		6
0	om ashyo					4	$\leq$	10
1	oliya viy			0	3	00	$\leq$	00

Misol va masalalar.

1. Quyidagi chiziqli dasturlash masalalarini simpleks usulda yeching:

$$a)\quad \begin{cases} 3x_1 + 4{,}5x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1{,}2{,}3),$$

$$Y = 7{,}5x_1 + 9x_2 - 15x_3 \to \max.$$

$$b)\quad \begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1{,}6}),$$

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 \to \min.$$

$$c)\quad \begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1{,}6}),$$

$$Y = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min.$$

2. A, B, C temir yo‘l stansiyalarida mos ravishda 80, 70 va 50 vagonlar zahirasi mavjud. Bu vagonlarni g‘alla ortishga shaylangan 4 ta punktga yuborish kerak. Jumladan 1- punktga 60 ta, 2-punktga 45 ta, 3-punktga 65 va 4-punktga 30 ta vagon kerak. Vagonlarni taqsimlash uchun sarf qilinadigan harajatlar matrisasi quyidagi ko‘rinishda berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 16 & 11 \\ 12 & 17 & 14 & 18 \\ 15 & 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Vagonlarni iste’molchilarga optimal taqsimlash rejasini tuzing.

3. Agar uskunalar miqdori mos ravishda 45, 30, 50 birlikda bo‘lib, ish maydonlarining ularga bo‘lgan talablari mos ravishda 20, 40, 45, 20 birlik bo‘lsa, to‘rt xil ish maydoniga uch xil turdagi uskunalarni optimal taqsimlang. Har bir uskunaning tayin ish maydonidagi mehnat unumdorligi quyidagi matrisa bilan xarakterlanadi.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

ADABIYOTLAR:

1. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари. “Ўзбекистон”, Тошкент, 2003, -440 б.
2. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари. 2-кисм. “Iqtisod-moliya”, Тошкент, 2008, -320 б.
3. Қобулов В.К. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1976.
4. Шоҳамидов Ш.Ш. Амалий математика унсурлари. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1997.
5. Сиддиков А.М., Бабакаев С.Н., Утебаев Д. Сонли усуллар алгоримлари ва программалари. “Билим”, Нукус, 1996.
6. Mirzayev A.N., Abduraxmanova Yu.M. Sonli usullar va dasturlash fanidan ma’ruzalar matni. “TATU bosmaxonasi”, 2015 y. – 110 b.
7. Соатов Ё.У. Олий математика. 5-жилд. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1998. – 350 б.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970, 664 с.
9. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Из – во “Физ. – мат.лит.”, 1962, 355с.
10. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. М.: Наука, 1991.
11. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М.:“Высшая школа”, 1990, 208 с.
12. Алексеев В.Е., Ваулин А.С., Петрова Г.Б. Вычислительная техника и програмирование. Практикум по программированию. М.: “Высшая школа” 1991, 400с.
13. Светозарова Г.И., Сигитов Е.В., Козловский А.В. Практикум по программированию на алгоритмических языках. М.: Наука, 1980, 320с.
14. Светозарова Г.И., Мельников А.А., .Козловский А.В Практикум по программированию на языке Бейсик. М.: Наука, 1988,368с.
15. Турчак Л.И. Основы численных методов. - М.: Наука, 1987. - 320 с.
16. Лукьяненко С.А. Основы вычислительных методов решения дифференциальных уравнений // Уч. пособие. - К.: ІСДО, 1998. -212с.
17. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / - М.: Наука, 1986. - 288 с.
18. Волков Е.А.Численные методы.-М.:Наука, 1987.-240 с.
19. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ.-М.: Мир, 1982. -253с.
20. Калиткин Н.Н. Численные методы.– М.: Наука, 1978.–512 с.
21. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.-432с.
22. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб.пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.
23. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А. Методы вычислений.–К.: Научная мысль, 1991.–264 с.
24. Петренко А.І. Вычислительная математика. Сумы.: Вмурол “Украина”, 2002. – 212 с.

25.Колдаев В.Д. Численные методы и программирование: учебное пособие.ИД «Форум»: ИНФРА-М, Москва, 2009.-336 стр.
26.Березин И.С., Жидков Н.П. Метод вычислений. Том1. Физматгиз.Москва, 1966.
27.Юдин Д.Б., Гольдитейн Е.Т. Линейное программирование. Физматгиз. Москва, 1969.
28.Демидович Б.П., Марон И.А.,Шувалова Э.З. Численные методы анализа, М. Наука, 1967 г.
29.Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений, М. Высшая школа, 1998, 384 с.
30.Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах, М. Наука, 1972 г.
31.Кузменко Е.А., Кривцова Н.И., Мойзес О.Е. Информатика. Численные методы решения прикладных задач, Лабораторный практикум:учебное пособие. –Томск:изд. Томского политехнического университета, 2012, - 144 с.
32.Верлань А.Ф., Лукьяненко С.А., Эшматов Х. Численные методы в моделировании, Т. 2010, 280 с.