СЎЗ БОШИ

“Алгебра ва математик анализ асослари” синов дарслиги икки қисмдан иборат бўлиб, академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари учун мўлжалланган ҳамда шу фан бўйича академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари ўқув режасига асосан, аниқ фанлар йўналиши; табиий фанлар йўналиши, шунингдек математика умумтаълим фани сифатида ўрганиладиган гуруҳларининг алгебра ва математик анализ асослари курсининг ўқув дастуридаги барча материалларни ўз ичига олади. Синов дарслиги муаллифларнинг СамДУ академик лицейида тўплаган иш тажрибалари асосида яратилган ва унинг I қисми саккиз бобдан иборат бўлиб, қуйидаги мавзулар ёритилган:

— тўпламлар назарияси ва математик мантиқ элементлари;
— ҳақиқий сонлар;
— комплекс сонлар ва улар устида амаллар;
— кўпҳадлар;
— алгебраик ифодалар;
— алгебраик тенгламалар ва тенгсизликлар;
— функциялар;
— кўрсаткичли ва логарифмик функциялар.

Ҳар бир боб параграфларга, параграфлар эса бандларга бўлинган.

Материаллар баёнида муаллифлар назарида зарур деб ҳисобланган ўринларда тўпламлар назарияси ва математик мантиқ элементлари тилидан фойдаланилган.

Синов дарслигининг яратилиш жараёнида ўзларининг қимматли маслаҳатларини аямаган СамДУ академик лицейининг математика ўқитувчилари Р. Нарзуллаевага, Ф. Хўжаевага, Самарқанд вилояти Иштихон тумани 21-ўрта мактабнинг олий тоифали математика ўқитувчиси, Ўзбекистон Республикасида хизмат кўрсатган Халқ таълими ходими А. А. Насимовга ҳамда уни нашрга тайёрлашда катта ёрдам берган И. Ҳ. Насимовга ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Муаллифлар

I боб

ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари

1.Тўплам ҳақида тушунча. Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич (таърифланмайдиган) тушунчаларидан биридир. У чекли ёки чексиз кўп объектлар (нарсалар, буюмлар, шахслар ва ҳ.к.) ни биргаликда бир бутун деб қараш натижасида вужудга келади.

Масалан, Ўзбекистондаги вилоятлар тўплами; Ўзбекистондаги академик лицейлар тўплами; бутун сонлар тўплами; тўғри чизиқ кесмасидаги нуқталар тўплами; синфдаги ўқувчилар тўплами ва ҳоказо. Тўпламни ташкил этган объектлар унинг *элементлари* дейилади.

Тўпламлар одатда лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан, унинг элементлари эса шу алифбонинг кичик ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, $A=\{a, b, c, d\}$ ёзуви А тўплам a, b, c, d элементлардан ташкил топганлигини билдиради.

x элемент X тўпламга *тегишли* эканлиги $x \in X$ кўринишда, x элемент X тўпламга *тегишли эмаслиги* эса $x \notin X$ кўринишда белгиланади.

Масалан, барча натурал сонлар тўплами N ва 4, 5, $\frac{3}{4}$, π сонлари учун $4 \in N$, $5 \in N$, $\frac{3}{4} \notin N$, $\pi \notin N$ муносабатлар ўринлидир.

Биз, асосан, юқорида кўрсатилганидек буюмлар, нарсалар тўпламлари билан эмас, балки сонли тўпламлар билан шуғулланамиз. Сонли тўплам дейилганда, барча элементлари сонлардан иборат бўлган ҳар қандай тўплам тушунилади. Бунга N — натурал сонлар тўплами, Z — бутун сонлар тўплами, Q — рационал сонлар тўплами, R — ҳақиқий сонлар тўплами мисол бўла олади.

Тўплам ўз элементларининг тўлиқ рўйхатини кўрсатиш ёки шу тўпламга тегишли бўлган элементларгина қаноатлантирадиган шартлар системасини бериш билан тўлиқ аниқланиши мумкин. Тўпламга тегишли бўлган элементларгина қаноатлантирадиган шартлар системаси шу тўпламнинг *характеристик хоссаси* деб аталади. Барча x элементлари бирор b хоссага эга бўлган тўплам $X=\{x|\ b(x)\}$ каби ёзилади. Масалан, рационал сонлар тўпламини $Q=\{r|r=\frac{p}{q},\ p\in Z$ ва $q\in N\}$ кўринишда, $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама илдизлари тўпламини эса $X=\{x\ |\ ax^2+bx+c=0\}$ кўринишда ёзиш мумкин.

Элементлари сонига боғлиқ ҳолда тўпламлар чекли ва чексиз тўпламларга ажратилади. Элементлари сони чекли бўлган тўпламга *чекли тўплам*, элементлари сони чексиз бўлган тўпламга *чексиз тўплам* дейилади.

1 - мисол. $A=\{x|x\in N,\ x^2>7\}$ тўплам 2 дан катта бўлган барча натурал сонлардан тузилган, яъни $A=\{3,4,5,6,7,8,9,...\}$. Бу тўплам — чексиз тўпламдир.

Биророта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам *бўш тўплам* дейилади. Бўш тўплам $\varnothing$ орқали белгиланади. Бўш тўплам ҳам чекли тўплам ҳисобланади.

2 - мисол. $x^2+3x+2=0$ тенгламанинг илдизлари $X=\{-2;-1\}$ чекли тўпламни ташкил этади. $x^2+3x+3=0$ тенглама эса ҳақиқий илдизларга эга эмас, яъни унинг ҳақиқий ечимлар тўплами $\varnothing$ дир.

Айни бир хил элементлардан тузилган тўпламлар *тенг тўпламлар* дейилади.

3 - мисол. $X=\{x|x\in N, x = 3\}$ ва $Y=\{x|(x-1)(x-2)(x-3)=0\}$ тўпламларнинг ҳар бири фақат 1, 2, 3 сонларидан тузилган. Шунинг учун бу тўпламлар тенгдир: $X=Y$.

Агар В тўпламнинг ҳар бир элементи А тўпламнинг ҳам элементи бўлса, В тўплам А тўпламнинг *қисм-тўплами* дейилади ва $B\subset A$ кўринишида белгиланади. Бунда $\varnothing\subset A$ ва $A\subset A$ ҳисобланади. Бу қисм-тўпламлар *хосмас қисм-тўпламлар* дейилади. А тўпламнинг қолган барча *қисм-тўпламлари хос қисм* тўпламлар дейилади. Масалан: $N\subset Z\subset Q\subset R$. Агар $A=\{3,4,5\}$, $B=\{x|x^2-7x+12=0\}$ бўлса, $B\subset A$ бўлади.

4 - мисол. A — икки хонали сонлар тўплами, B — икки хонали жуфт сонлар тўплами бўлсин. Ҳар бир икки хонали жуфт сон А тўпламда ҳам мавжуд. Демак, $B\subset A$.

$A=B$ бўлса, $A\subset B$, $B\subset A$ ва аксинча $A\subset B$, $B\subset A$ бўлса, $A=B$ бўлишини тушуниш қийин эмас.

5 - мисол. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,\frac{4}{2},\sqrt{9},2^2\}$ бўлса,

$B=\{1,\frac{4}{2},\sqrt{9},2^2\}=\{1,2,3,4\}=A$. Бундан кўринадики $A\subset B$,

$B\subset A$ бўлади.

X чекли тўплам элементлари сонини $n(X)$ орқали белгилаймиз. k та элементли X тўпламни *k элементли тўплам* деб атаймиз.

6 - мисол. X тўплам 10 дан кичик туб сонлар тўплами бўлсин: $X=\{2;3;5;7\}$. Демак, $n(X)=4$.

Машқлар

1.1. Ўзбекистон Республикасининг Давлат герби қабул қилинган санада қатнашган рақамлар тўпламини тузинг.

1.2. $B=\{10; 12\frac{3}{4}; 17{,}3; -7; 136\}$ тўплам берилган. Қайси натурал сонлар бу тўпламга киради? Шу тўпламга тегишли бўлмаган учта сон айтинг. Жавобни $\in$, $\notin$ белгилари ёрдамида ёзинг.

1.3. S тўплам $-3;-2;-1;4$ элементларидан тузилган. Шу тўпламни ёзинг. Шу сонларга қарама-қарши сонларнинг S_1 тўпламини тузинг.

1.4. “Бўш вақтдан унумли фойдалан” жумласидаги ҳарфлар тўпламини тузинг.

1.5. Қуйидаги ёзувларни ўқинг ва ҳар бир тўпламнинг элементларини кўрсатинг:

а) $E=\{x|x\in N, -1<x<5\}$; б) $F=\{x|5x=x-7\}$;
в) $Q=\{x|x(x+12)=0\}$; г) $U=\{x|x\in R, x^2=2\}$;
д) $V=\{x|x\in N, x^2<9\}$; е) $W=\{x|x\in N, x^2\leq 9\}$.

1.6. Қуйидаги тўпламларни сон ўқида белгиланг:

а) $\{x|x\in N, x\leq 3\}$; б) $\{x|x\in Z, -2\leq x\leq 2\}$;
в) $\{x|x\in R, x>4{,}1\}$; г) $\{x|x\in R, -2{,}7\leq x\leq 1\}$;
д) $\{x|x\in R, x<6\}$; е) $\{x|x\in R, 3{,}4<x\leq 8\}$;
ж) $\{x|x\in R, -3\frac{1}{4}\leq x\leq -1\}$;
з) $\{x|x^2=4\}$;
к) $\{x|(x^2-1)(x^2-4)=0\}$.

1.7. Қуйидаги тўплам қайси элементлардан тузилган:

а) 1 ва 3 билангина ёзиладиган барча уч хонали сонлар тўплами;
б) 1,3,5 рақамларидан (фақат бир марта) фойдаланиб ёзиладиган барча уч хонали сонлар тўплами;
в) рақамларининг йиғиндиси 5 га тенг бўлган уч хонали сонлар тўплами;
г) 100 дан кичик ва охирги рақами 1 бўлган барча натурал сонлар тўплами?

1.8. Қуйидаги тўпламлардан қайсилари бўш тўплам:

а) симметрия марказига эга бўлмаган квадратлар тўплами;

б) $\{x|x^2+1=0\}$; в) $\{x|x\in R, |x|=3\}$; г) $\{x|x\in R, x^3=1\}$?

1.9. Қуйидаги тўпламнинг нега бўш тўплам эканлигини тушунтиринг:

а) $\{x|x\in N, x<-1\}$; б) $\{x|x\in N, 15<x<16\}$;

в) $\{x|x\in N, x=\frac{3}{5}\}$; г) $\{x|x>7, x<5\}$.

1.10. Тенгламанинг ҳақиқий илдизлари тўпламини топинг. Бу тўпламларнинг қайсилари бўш тўплам эканлигини аниқланг:

а) $3x+15=4(x-8)$, б) $2x+4=4$, в) $2(x-5)=3x$,

г) $x^2-4=0$, д) $x^2+16=0$, е) $(2x+7)(x-2)=0$.

1.11. Қуйидаги тўплам элементларини ва элементлар сонини кўрсатинг:

а) $\{l, f, g\}$; б) $\{a\}$; в) $\{\{a\}\}$; г) $\varnothing$; д) $\{\varnothing\}$;

е) $\{\{a, b\},\{c, d\}\}$; ж) $\{\{a, b, c\}, a\}$.

1.12. 5 та элементи бор бўлган тўплам тузинг.

1.13. 5 та натурал сон қатнашган сонли тўплам тузинг.

1.14. $A=\{a, b, c, d, e, f, g, k)$, $B=\{a, l, k\}$, $C=\{b, d, g, k, t\}$, $D=\{a, l\}$, $E=\{e, f, k, g, a\}$ тўпламлар берилган.

а) Уларнинг қайсилари А тўпламнинг хос қисм-тўплами бўлади?

б) D тўплам C тўпламнинг қисм-тўпламими?

в) B тўплам қайси тўпламнинг қисм-тўплами бўлади?

г) n(A), n(B), n(C), n(D), n(E) сонларни ўсиш тартибида жойлаштиринг.

1.15. $A=\{3,6,9,12\}$ тўпламнинг барча қисм-тўпламларини тузинг.

1.16. Тўпламлар жуфти берилган:

а) A={ Навоий, Бобур, Фурқат, Нодирабегим} ва B — барча шоир ва шоиралар тўплами.

б) C — қавариқ тўртбурчаклар тўплами ва D — тўртбурчаклар тўплами.

в) E — Самарқанд олимлари тўплами, F — Ўзбекистон олимлари тўплами.

г) K — барча туб сонлар тўплами, M — манфий сонлар тўплами.

Жуфтликдаги тўпламлардан қайси бири иккинчисининг қисм-тўплами бўлишини аниқланг.

1.17. Қуйидаги тўпламлар учун $A \subset B$ ёки $B \subset A$ муносабатлардан қайси бири ўринли:

а) $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{a, c, d\}$;
б) $A=\{a, b\}$, $B=\{a, c, d\}$;
в) $A=\varnothing$, $B=\varnothing$;
г) $A=\varnothing$, $B=\{a, b, c\}$;
д) $A=\varnothing$, $B=\{\varnothing\}$; е) $A=\{\{a\},a, \varnothing\}$, $B=\{a\}$;
ж) $A=\{\{a,b\},\{c,d\},c,d\}$, $B=\{\{a,b\},c\}$;
з) $A=\{\{0\},0\}$, $B=\{\varnothing,\{\{0\},0\}\}$?

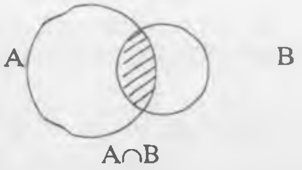
1.18. Тасдиқ тўғри ёки нотўғри эканлигини аниқланг:

а) $\{1;2\}\subset\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$;
б) $\{1;2\}\in\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$;
в) $\{1;3\}\subset\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$;
г) $\{1;3\}\in\{\{1;2;3\};\{1;3\};1;2\}$.

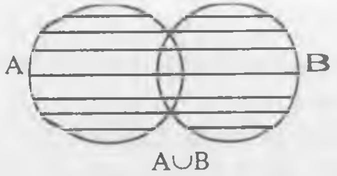
1.19. Қуйидаги тўпламлар тенгми:

а) $A=\{2;4;6\}$ ва $B=\{6;4;2\}$;
б) $A=\{1;2;3\}$ ва $B=\{1;11;111\}$;
в) $A=\{\{1;2\},\{2;3\}\}$ ва $B=\{2;3;1\}$;
г) $A=\{\sqrt{256};\sqrt{81};\sqrt{16}\}$ ва $B=\{2^2;3^2;4^2\}$?

1.20. $x=\{x|x^2-5x+6=0\}$ ва $A\{2;3\}$ тўпламлар ҳақида нима дейиш мумкин?



1-расм.



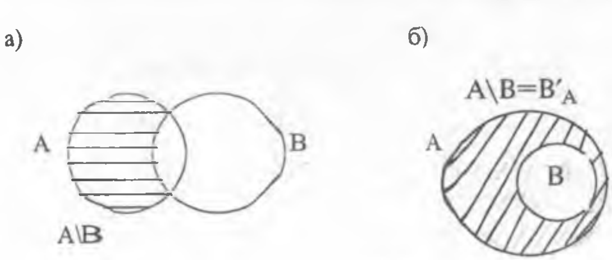
2-расм.

2. Тўпламлар устида амаллар. *A* ва *B* тўпламларнинг иккаласида ҳам *x* элемент мавжуд бўлса, *x* элементга шу тўпламларнинг *умумий* элементи дейилади. *A* ва *B* тўпламларнинг *кесишмаси* (ёки *кўпайтмаси*) деб, уларнинг барча умумий элементларидан тузилган тўпламга айтилади. *A* ва *B* тўпламларнинг кесишмаси $A\cap B$ кўринишда белгиланади: $A\cap B=\{x|x\in A \text{ ва } x\in B\}$. 1-расмда Эйлер-Венн диаграммаси номи билан аталадиган чизмада *A* ва *B* шаклларнинг кесишмаси $A\cap B$ ни беради (чизмада штрихлаб кўрсатилган).

A ва *B* тўпламларнинг *бирлашмаси* (ёки *йиғиндиси*) деб, уларнинг камида биттасида мавжуд бўлган барча элементлардан тузилган тўпламга айтилади. *A* ва *B* тўпламларнинг бирлашмаси $A\cup B$ кўринишида белгиланади: $A\cup B=\{x|x\in A \text{ ёки } x\in B\}$ (2-расм).

A ва *B* тўпламларнинг *айирмаси* деб, *A* нинг *B* да мавжуд бўлмаган барча элементларидан тузилган тўпламга айтилади. *A* ва *B* тўпламларнинг айирмаси $A\setminus B$ кўринишда белгиланади: $A\setminus B=\{x|x\in A \text{ ва } x\notin B\}$ (3-расм).

Топшириқ: 3-*а* расмда $B\setminus A$ ни кўрсатинг.



3-расм.

Агар $B \subset A$ бўлса, $A \setminus B$ тўплам B тўпламнинг *тўлдирувчиси* дейилади ва B' ёки B'_A билан белгиланади (3-*б* расм).

1 — мисол. $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ ва $B=\{b, d, e, g, h\}$ тўпламлар берилган. Уларнинг кесишмаси, бирлашмасини топамиз ва Эйлер-Венн диаграммасида талқин этамиз.

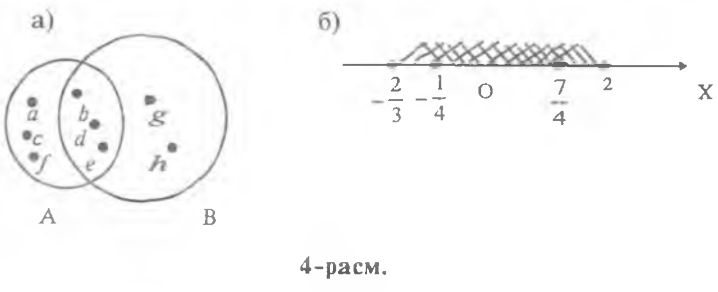
b, d, e элементлари A ва B тўпламлар учун умумий, шунга кўра $A \cap B=\{b, d, e\}$. Бу тўпламларнинг бирлашмаси эса $A \cup B=\{a,b,c,d,e,f,h\}$ дан иборат (4-*а* расм).

2 - мисол. $A=\{x| -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\}$, $B=\{x| -\frac{1}{4} \le x \le 2\}$ тўпламларнинг кесишмаси, бирлашмаси ва айирмасини топамиз. Бунинг учун, сонлар ўқида $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{7}{4}$, 2 нуқталарни белгилаймиз (4-расм). $A \cap B=\{x|-\frac{1}{4} \le x \le\}$, $A \cup B=\{x| -\frac{2}{3} \le x \le 2\}$, $A \setminus B=\{x| -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{4}\}$

3 - мисол. $A=\{0;2;3\}$, $C=\{0;1;2;3;4\}$ тўпламлар учун $A'=C \setminus A$ ни топамиз. $A \subset C$ бўлгани учун $A'=C \setminus A=\{1;4\}$ бўлади.

4 - мисол. Агар $A \subset B$ бўлса, $A \cup B=B$ бўлишини исбот қиламиз.

Исбот. $A \subset B$ бўлсин.



4-расм.

а) $A\cup B\subset B$ ни кўрсатамиз. $x\in A\cup B$ бўлсин. У ҳолда $x\in A$ ёки $x\in B$ бўлади. Агар $x\in A$ бўлса, $A\subset B$ эканидан $x\in B$ экани келиб чиқади, иккала ҳолда ҳам A∪B нинг ҳар қандай элементи B нинг ҳам элементидир. Демак, $A\cup B\subset B$.

б) $B\subset A\cup B$ ни кўрсатамиз. $x\in B$ бўлсин. У ҳолда, тўпламлар бирлашмасининг таърифига кўра $x\in A\cup B$ бўлади. Демак, B нинг ҳар қандай элементи $A\cup B$ нинг ҳам элементи бўлади, яъни $B\subset A\cup B$.

Шундай қилиб, $A\cup B\subset B$, $B\subset A\cup B$. Бу эса $B=A\cup B$ эканини тасдиқлайди.

Тўпламлар устида бажариладиган амалларнинг *хоссалари* сонлар устида бажариладиган амалларнинг хоссаларига ўхшаш. Ҳар қандай X,Y ва Z тўпламлар учун:

1) $X\cup Y=Y\cup X$;
1′) $X\cap Y=Y\cap X$;
2) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup (Y\cup Z)$;
2′) $(X\cap Y)\cap Z=(X\cap Y)\cap Z=X\cap (Y\cap Z)$;
3) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup (Y\cap Z)$;
3′) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap (Y\cup Z)$ тенгликлар бажарилади.

Агар қаралаётган тўпламлар айни бир U тўпламнинг қисм-тўпламлари бўлса, U тўпламга *универсал* тўплам дейилади.

U универсал тўплам қисм-тўпламларининг кесишмаси, бирлашмаси, шунингдек, U тўплам ихтиёрий қисм-тўпламининг тўлдирувчиси ҳам U нинг қисм тўплами бўлади. Бирор X тўпламнинг U га тўлдирувчисини X'_U ёки X' шаклида белгилаш мумкин. Тўлдириш амалининг айрим *хоссалари*ни кўрсатиб ўтамиз:

1) $\varnothing'=U$, 2) $U'=\varnothing$, 3) $(X')'=X$, 4) U дан олинган ҳар қандай X ва Y тўплам учун $(X\cap Y)'=X'\cup Y$; $(X\cup Y)'=X'\cap Y'$.

Шунингдек, агар $X\subset Y$ бўлса, $X\cap Y=X$, $X\cup Y=Y$ бўлади. Хусусан, $\varnothing\subset X$ ва $X\subsetneq X$ бўлганидан, $\varnothing\cap X=\varnothing$, $\varnothing\cup X=X$, $X\cap X=X$, $X\cup X=X$ бўлади.

5-мисол. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{1,5,9\}$ тўпламлар берилган. $D=\{1,2,3,4,5,9\}$ тўплам универсал тўплам бўладими? $E=\{1,2,3,4,5,9,15\}$ ва $M=\{1,3,4,5,9\}$ тўпламлар-чи?

$A\subset D$, $B\subset D$, $C\subset D$ бўлгани учун D тўплам универсал тўплам бўлади. $D\subset E$ бўлгани учун E тўплам ҳам универсал тўплам бўлади. $B\subset M$, $C\subset M$, лекин $A\not\subset M$ бўлгани учун M тўплам универсал тўплам бўла олмайди.

Машқлар

1.21. $M=\{36;29;15;68;27\}$, $P=\{4;15;27;47;36;90\}$, $Q=\{90;4;47\}$ тўпламлар берилган. $M\cap P$, $M\cap Q$, $P\cap Q$, $M\cap P\cap Q$ ларни топинг.

1.22. A — 18 нинг ҳамма натурал бўлувчилари тўплами, B — 24 нинг ҳамма натурал бўлувчилари тўплами. $A\cap B$ тўплам элементларини кўрсатинг.

1.23. P икки хонали натурал сонлар тўплами, S барча тоқ натурал сонлар тўплами бўлса, $K=P\cap S$ тўпламга қайси сонлар киради?

а) $21\in K$; б) $32\in K$; в) $7\notin K$; г) $17\notin K$ дейиш тўғрими?

1.24. "Математика" ва "грамматика" сўзларидаги ҳарфлар тўпламини тузинг. Бу тўпламлар кесишмасини топинг.

1.25. $[1;5]$ ва $[3;7]$ кесмаларнинг кесишмасини топинг.

1.26. $P=\{a, b, c, d, e, f\}$ ва $E=\{a, g, z, e, k\}$ тўпламлар бирлашмасини топинг.

1.27. $A=\{n|n\in N, n<5\}$ ва $B=\{n|n\in N, n>7\}$ тўпламлар бирлашмасини топинг. а) $4\in A\cup B$; б) $-3\in A\cup B$; в) $6\in A\cup B$ дейиш тўғрими?

1.28. Агар а) $A=\{x|x=8k,\ k\in Z\}$, $B=\{x|x=8l-4,\ l\in Z\}$;
б) $A=\{x|x=6k-1,\ k\in Z\}$, $B=\{x|x=6l+4,\ l\in Z\}$ бўлса, $A\cup B$ ни топинг.

1.29. $A=\{2;4;6;8;\cdots;40\}$, $B=\{1;3;5;7;\cdots;37\}$, $C=\{\{a;b\},\{c;d\},\{e;f\},g,h\}$ тўпламларнинг ҳар биридаги элементлар сонини аниқланг. $A\cup B$ да нечта элемент мавжуд?

1.30. $A=\{2;3;4;5;7;10\}$, $B=\{3;5;7;9\}$, $C=\{4;9;11\}$ бўлсин. Қуйидаги тўпламларда нечтадан элемент мавжуд:
а) $A\cup(B\cup C)$; б) $(C\cup B)\cup A$; в) $A\cap(B\cup C)$;
г) $A\cup(B\cap C)$; д) $A\cap(B\cap C)$; е) $B\cap(A\cup C)$?

1.31. $A=\{x|\ -5\le x\le 10\}$, $B=\{x|x\in N,\ 3\le x\le 15\}$ бўлсин. $A\setminus B$ ва $B\setminus A$ тўплам элементларини топинг.

1.32. P — икки хонали натурал сонлар тўплами, Q — жуфт натурал сонлар тўплами бўлсин. $P\setminus Q$ ва $Q\setminus P$ тўпламларни тузинг.

1.33. C ва D кесишувчи тўпламлар бўлсин. Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида $C\setminus D$, $D\setminus C$, $(C\setminus D)\cup(D\setminus C)$ ларни тасвирланг.

1.34. N' билан натурал сонлар тўплами N нинг бутун сонлар тўплами Z га тўлдирувчисини белгилаймиз. Қуйидагилар тўғрими:
а) $-4\in N'$; б) $0\in N'$; в) $13\in N'$;
г) $-8\notin N'$; д) $-5,3\notin N'$; е) $0\notin N'$?

1.35. $A=\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}$ тўпламнинг Z тўпламга тўлдирувчисини топинг.

1.36. $A=\{x|x=3k,\ k\in Z\}$ тўпламнинг Z тўпламга тўлдирувчисини топинг.

1.37. Агар $A\subset U$, $B\subset U$ бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлишини исботланг:
а) $(A\cup B)'=A'\cap B'$, б) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

1.38. Агар A тўплам $x^2-7x+6=0$ тенгламанинг ечимлари тўплами ва $B=\{1;6\}$ бўлса, $A=B$ бўлишини исботланг.

1.39. $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$ тенгликни исботланг.

1.40. $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$ тенгликни исботланг.

1.41. $A\subset U, B\subset U, A\cap B=\varnothing$ бўлсин. Қуйидагиларни Эйлер-Венн диаграммалари ёрдами билан тасвирланг ва улардан тенгларини кўрсатинг:

1) $(A'\cap B)'$; 2) $A'B'$; 3) $A'\cup B$; 4) $A\cup B'$; 5) $(A'B)'$; 6) $A'\cup B'$.

1.42. а) Муносабатларни исбот қилинг:

1) $(A\cup B)\setminus B=A$;
2) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$;
3) $A\cup(B\cap C)\cup(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
4) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

б) A ва B лар U универсал тўпламнинг қисмтўпламлари. Исбот қилинг: 1) $(A\cap B)'=A'\cup B'$; 2) $(A\cap B)=A\setminus(A\cap B')$.

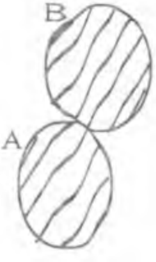
1.43. Ифодаларни соддалаштиринг: 1) $B\cap(A\cup B)$; 2) $(A\cap B)\cap(AF\cap B)$.

3.Тўплам элементларининг сони билан боғлиқ айрим масалалар.

Тўпламлар назариясининг муҳим қоидаларидан бири — жамлаш қоидасидир. Бу қоида кесишмайдиган тўпламлар бирлашмасидаги элементлар сонини топиш имконини беради.

1-теорема (жамлаш қоидаси.) ***Агар А ва В чекли тўпламлар кесишмаси бўш бўлса, у ҳолда уларнинг бирлашмасидаги элементлар сони А ва В тўпламлар элементлари сонларининг йиғиндисига тенг*** бўлади: (5-расм)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B) \qquad (1)$$



5-расм.

Бу теореманинг исботи олий математика курсида ўрганилади. Биз бу теорема(жамлаш қоидаси)нинг моҳиятини мисол ёрдамида тушунгирамиз Бир қутида икки хил детал бор бўлсин. Биринчи хил деталлар сони 60 та, иккинчи хил деталлар 40 та. У ҳолда қутида 60+40=100 та детал мавжуд бўлади. Мисолда теорема шартлари тўлиқ бажарилаётганини кўрамиз. A — биринчи хил деталлар тўплами, B — иккинчи хил деталлар тўплами ва $A \cap B = \varnothing$, $n(A)=60$, $n(B)=40$, $n(A \cup B)=100$, яъни $n(A \cup B)=n(A)+n(B)$.

A ва B тўпламлар кесишмаси бўш бўлмаган ҳолда теорема қуйидагича таърифланади:

2-теорема. ***Ихтиёрий A ва B чекли тўпламлар учун ушбу тенглик ўринли:***

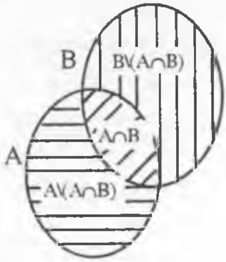
$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B) \qquad (2)$$

Исбот. $A \cup B$ тўплам учта жуфт-жуфти билан кесишмайдиган тўпламларнинг бирлашмасидан иборат: $A \setminus (A \cap B)$ тўплам, яъни фақат A тўпламга қарашли элементлар, $B \setminus (A \cap B)$ тўплам, яъни фақат B тўпламга қарашли элементлар, $A \cap B$ тўплам, яъни иккала тўпламга қарашли элементлар (6-расм). Бу тўпламлар мос равишда $n(A)-n(A \cap B)$ та, $n(B)-n(A \cap B)$ та, $n(A \cap B)$ та элементга эга. (1) формулага мувофиқ уларнинг йиғиндиси (2) кўринишда бўлади.

Масалан, $A=\{1,2,3,4,5\}$ ва $B=\{4;5;6\}$ тўпламлар учун $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B=\{4;5\}$, $n(A)=5$, $n(B)=3$, $n(A \cap B)=2$, $n(A \cup B)=6$ га эга бўламиз. (2) формула бўйича $n(A \cup B)=5+3-2=6$, яъни олдинроқ бевосита ҳисоблаб топилган натижа билан бир хил.

(1) ва (2) формулаларни тўпламлар сони иккитадан кўп бўлган ҳолларда ҳам қўллаш мумкин.

Масала. Жами 50 кишидан 20 таси инглиз, 25 киши



6-расм.

француз, 15 киши немис тилини, 10 киши ҳам инглиз тилини, ҳам француз тилини, 5 киши ҳам инглиз, ҳам немис тилини, 11 киши ҳам француз тили, ҳам немис тили, 6 киши уччала тилни билади. Қолганлар фақат рус тилини билади. Рус тилини билувчилар неча киши экан?

Ечиш. Барча одамлар тўплами U, инглиз тилини билувчилар қисм-тўплами — A, шу каби B — француз тилини, C — немис тилини, D — рус тилини билувчилар қисм-тўпламлари бўлсин. Шарт бўйича $U=A\cup B\cup C\cup D$, $D\cap(A\cup B\cup C)=\varnothing$, $n(U)=50$, $n(A)=20$, $n(B)=25$, $n(C)=15$, $n(A\cap B)=10$, $n(A\cap C)=5$, $n(B\cap C)=11$, $n(A\cap B\cap C)=6$. $n(A\cup B\cup C)=20+25+15-10-5-11-6=28$. Демак, фақат рус тилини билувчилар сони $n(D)=n(U)-n(A\cup B\cup C)=50-28=22$ киши экан.

Машқлар

1.44. Синфдаги бир неча ўқувчи марка йиғдилар. 15 ўқувчи Ўзбекистон маркаларини, 11 киши чет эл маркаларини, 6 киши ҳам Ўзбекистон маркаларини, ҳам чет эл маркаларини йиғди. Синфда неча ўқувчи марка тўплаган?

1.45. 32 ўқувчининг 12 таси волейбол секциясига, 15 таси баскетбол секциясига, 8 киши эса иккала секцияга ҳам қатнашади. Синфдаги неча ўқувчи ҳеч бир секцияга қатнашмайди?

1.46. 30 ўқувчидан 18 таси математикага, 17 таси эса физикага қизиқади. Иккала фанга ҳам қизиқадиган ўқувчилар сони нечта бўлиши мумкин? (Кўрсатма. Иккала фанга ҳам қизиқмайдиган ўқувчилар сони $k\in\{0,1,2,3,\cdots,12\}$).

1.47. 100 одамдан иборат туристлар гуруҳида 10 киши немис тилини ҳам, француз тилини ҳам билмайди, 75 таси немис тилини, 83 таси эса француз тилини билади. Иккала тилни ҳам биладиган туристлар сонини топинг.

1.48. 26 ўқувчининг 14 таси шахматга, 16 таси шашкага қизиқади. Ҳам шашкага, ҳам шахматга қизиқадиган ўқувчилар нечта?

2-§. Математик мантиқ элементлари

Математик мантиқ математиканинг бир бўлими бўлиб, унда “мулоҳаза”лар ва улар устидаги мантиқий амаллар ўрганилади.

Чин ёки *ёлғон*лиги ҳақида фикр юритиш мумкин бўлган ҳар қандай дарак гапга *мулоҳаза* дейилади. Мулоҳазалар устида бажариладиган мантиқий амаллар махсус белгилар ёрдамида ифодаланади. Бу белгилар ҳозирги замон математикасининг барча бўлимларида қўлланилади.

Бу белгилар қуйидагилардир:

1) $\Rightarrow$ — агар ···· бўлса, у ҳолда ···· бўлади,

$P\Rightarrow Q$ — агар P бўлса, Q бўлади. (P дан Q келиб чиқади);

2) $\Leftrightarrow$ — тенг кучлилик,

$P\Leftrightarrow Q$ – P ва Q тенг кучли. (P дан Q келиб чиқади ва аксинча);

3) $\vee$ — дизъюнкция (“ёки” амали);

4) $\wedge$ — конъюнкция (“ва” амали);

5) $\forall$ — ихтиёрий, барча, ҳар қандай;

6) $\exists$ — шундай, мавжуд.

7) $\nexists$ — мавжуд эмас.

Бу амалларни (белгиларни) қўллашга доир мисоллар келтирамиз.

$P=\{a$ сон 15 га бўлинади$\}$ ва $Q=\{a$ сон 5 га бўлинади$\}$ мулоҳазалари қуйидагича боғланган:

P мулоҳазанинг чинлигидан Q мулоҳазанинг чинлиги келиб чиқади. Мулоҳазаларнинг бундай боғланиши *мантиқий келиб чиқиш* дейилади ва ⇒ белги ёрдамида ёзилади: P⇒Q.

Бу ерда "a сони 15 га бўлинади" шарти a сонининг 5 га бўлиниши учун *етарли*дир. Шу билан бирга "a сонининг 5 га бўлинади" шарти унинг 15 га бўлиниши учун етарли эмас, у *зарурий* шартдир холос, чунки a сон 5 га бўлинмаса, унинг 15 га бўлиниши мумкин эмас.

Умуман, P мулоҳазанинг чинлигидан Q мулоҳазанинг чинлиги келиб чиқса ($P \Rightarrow Q$), P мулоҳаза Q мулоҳаза учун етарли шарт ва Q мулоҳаза P мулоҳаза учун зарурий шарт дейилади.

Агар $A \Rightarrow B$ ва $B \Rightarrow A$ бўлса, B мулоҳаза A мулоҳаза учун зарурий ва етарли шартдир. Бу эса қуйидагича ёзилади: A⇔B. "⇔"- мантиқий тенг кучлилик белгисидир.

A — "a сони жуфт сон" мулоҳазаси бўлсин.

B — "a^2 — жуфт сон" мулоҳазаси бўлсин.

Бу мулоҳазалар тенг кучли мулоҳазалар бўлади, яъни $A \Leftrightarrow B$.

Бошқача айтганда, соннинг квадрати жуфт сон бўлиши учун соннинг ўзи жуфт бўлиши зарур ва етарли.

Бирор A мулоҳазанинг *инкори* деб, A чин бўлганда ёлғон, A ёлғон бўлганда чин бўладиган янги мулоҳазага айтилади ва $\overline{A}$ билан белгиланади.

A — "етти — мураккаб сон", у ҳолда $\overline{A}$ — "етти туб сон". Бу ерда A— ёлғон, $\overline{A}$ — чин мулоҳазалардир.

A ва B мулоҳазаларнинг *дизъюнкцияси* деб, A ва B мулоҳазалардан камида биттаси чин бўлганда чин бўладиган янги мулоҳазага айтилади ва $A \vee B$ билан белгиланади.

Масалан, A — "6·4=24", B="6·4=25" бўлса, $A \vee B$ мулоҳаза "6·4 кўпайтма 24 ёки 25 га тенг".

A ва B мулоҳазаларнинг конъюнкцияси деб, бу иккала мулоҳаза ҳам чин бўлгандагина чин бўладиган янги мулоҳазага айтилади ва $A \wedge B$ билан белгиланади.

Масалан, C — “13 сони тоқ ва тубдир” мулоҳазаси қуйидаги иккита мулоҳазанинг конъюнкциясидир. A — “13 сони — тоқ”, B—“13 сони — туб”. Демак, $C = A \wedge B$.

Математик мулоҳазаларни юқоридаги белгилар ёрдамида ифода этишга доир мисоллар келтирамиз.

1 - мисол. Агар $a>b$ ва $b>c$ бўлса, $a>c$ бўлади. $(a>b) \wedge (b>c) \Rightarrow (a>c)$.

2 - мисол. $a>b$ бўлса, $a+c>b+c$ бўлади. $(a>b) \Rightarrow (a+c>b+c)$.

3 - мисол. $a=0$ ёки $b=0$ бўлса, $ab=0$ бўлади ва аксинча, $ab=0$ бўлса, $a=0$ ёки $b=0$ бўлади. $(ab=0) \Leftrightarrow ((a=0) \vee (b=0))$.

4 - мисол. $a>0$ ва $b>0$ бўлса, $ab>0$ бўлади. $(a>0) \wedge (b>0) \Rightarrow (ab>0)$.

5 - мисол. Ихтиёрий x ҳақиқий сон учун $|x| \geq x$. $\forall\ x \in \mathrm{R}: |x| \geq x$.

6 - мисол. Ихтиёрий $a \geq 0$ сон учун, шундай $x \in \mathrm{R}$ сон мавжудки, $x^2=a$ бўлади, яъни $\forall\ a \geq 0, \exists\ x \in \mathrm{R}: x^2=a$.

Машқлар

Жумлаларни юқоридаги белгилар ёрдамида ёзинг.

1.49. Ихтиёрий $a \geq 0$ учун, $\sqrt{a} = x$ тенглик ўринли бўладиган x ҳақиқий сон мавжуд бўлади.

1.50. $a<0$ ва $b>0$ бўлса, $ab<0$ бўлади.

1.51. Ҳар қандай a, b ҳақиқий сонлар учун $a+b=b+a$ бўлади.

1.52. Агар a бутун сон 9 га бўлинса, у ҳолда бу сон 3 га ҳам бўлинади.

1.53. 2 ҳам, 3 га ҳам бўлинадиган бутун сон 6 га ҳам бўлинади ва аксинча 6 га бўлинадиган бутун сон 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинади.

1.54. Агар $a^2+b^2+c^2=0$ бўлса, $a=b=c=0$ бўлади ва аксинча, $a=b=c=0$ бўлса, $a^2+b^2+c^2=0$ бўлади.

1.55. Ихтиёрий натурал сон n ни олмайлик, $n=2k-1$ ёки $n=2k$ бўладиган k натурал сон мавжуд бўлади.

1.56. Ихтиёрий n натурал сон учун $n^2+n^3 \in \mathrm{N}$ бўлади.

1.57. Ихтиёрий n, $к$ натурал сонлари учун, n^2-k^3 сони бутун сон бўлади.

1.58. $a<0$ бўлса, $x^2=a$ тенглик тўғри бўладиган ҳақиқий x сон мавжуд эмас.

Такрорлашга доир машқлар

1.59. Тўпламлар кесишмасини ва бирлашмасини топинг. Эйлер — Венн диаграммаси ёрдамида график талқин қилинг.

а) $A=\{5,6,7,8,9,10\}$, $B=\{8,9,10,11\}$;

б) $A=\{x|x=2n, n\in N\}$, $B=\{x|x=\frac{n+1}{2}, n\in N\}$;

в) $A=\{x|x=5n, n\in N\}$, $B=\{x|x=2n, n\in N\}$;

г) $A=\{x|x=\frac{1}{n}, n\in N\}$, $B=\{x|x=\frac{2}{n}, n\in N\}$.

1.60. P ва Q тўпламлар кесишмаси ва бирлашмасини сонлар тўғри чизиғида тасвирланг:

а) $P=\{x|\ \frac{10}{3}<x<\sqrt{8}\}$, $Q=\{x|\ \frac{26}{47}<x<3{,}2\}$;

б) $P=\{x|\ -\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}\}$, $Q=\{x|\ \sqrt{2}<x\leq\frac{40}{27}\}$;

в) $P=\{x|\ \frac{11}{4}\leq x\leq\frac{19}{3}\}$, $Q=\{x|\ \frac{19}{7}<x\leq\frac{32}{5}\}$;

г) $P=\{x|\ \frac{4}{11}\leq x<\frac{18}{5}\}$, $Q=\{x|\ \sqrt{2}<x<10\}$.

1.61. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $A\cup B=B\cup A$; б) $(A\cup B)\cup C=A\cap(B\cup C)$;

в) Агар $A\subset B$ бўлса, $A\cup B=A$; г) $A\cup\varnothing=\varnothing$;

д) $A\cup A=A$.

1.62. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $A\cap B=B\cap A$; б) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

в) $A\cap A=A$; г) $A\cap\varnothing=\varnothing$.

1.63. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ тенглик тўпламларни кўпайтириш амалининг тўпламларни қўшиш амалига нисбатан дистрибутивлик хоссасини, $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cap(B\cap C)$ тенглик эса тўпламларни қўшиш амалининг тўпламларни кўпайтириш амалига нисбатан дистрибутивлик хоссасини ифодалайди. Бу хоссаларни исботланг.

1.64. Айириш ва тўлдириш амалларининг қуйидаги хоссаларини исботланг ($A\subset B$, $B\subset C$, $C\subset U$ деб ҳисобланг):

а) $A'\cap A=\varnothing$; г) $\varnothing'=U$;

б) $A'\cup A=U$; д) $U'=\varnothing$;

в) $(A'\cap B')=A'\cup B'$; е) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

1.65. $\varnothing$, $\cup$, $\cap$, $\subset$, белгилардан фойдаланиб, тўпламлар орасидаги муносабатларни ёзинг:

а) $X_1=\{-5;6\}$, $X_2=\{x|x\in Z,-5\leq x\leq 6\}$,

$X_3=\{x|x\in Z,\ -5<x<6\}$, $X_4=\{x|x\in Q,-5\leq x\leq 6\}$;

б) $A=\{1;3;5;7\}$, $B=\{1;5;7\}$;

в) $A=\{\{0\};1;3\}$, $B=\{1;3\}$;

г) $A=\varnothing$, $B=\{k,\ l,\ m\}$;

д) $A=\{x,\ y,\ z\}$, $B=\{y,\ z,\ x\}$;

е) $A=\{0\}$,$B=\varnothing$;

ж) $A=\{\{x\},\ x,\ \varnothing\}$, $B=\{x\}$;

з) $A=\{\{1;3\};\{2;4\};2;4\}$, $B=\{\{1;3\},2\}$;

и) $A=\{\{3\},3,\varnothing\}$, $B=\varnothing$.

1.66. а) $A=\{2n-1|\,n\in N\}$,$B=\{4n+1|\,n\in N\}$,$C=\{3n+1|\,n\in N\}$ бўлсин. Ушбу тўпламларни топинг: 1) $A\cap B$; 2) $A\cap C$; 3) $A\cap B\cap C$; 4) $(A\cap B)\cup C$;

б) қуйидаги муносабатлар тўғрими?

1) $\{a,c\} \subset \{\{a,b,c\},\{a,c\},a,b\}$;

2) $\{a,b,c\}\in\{\{a,b,c,d\},\{a,c\},a,b\}$;

3) $\{1,2,3\} \subset \{\{1,2,3,4\},\{1;3\},1,2\}$.

1.67. а) Сонли тўпламларни топинг:

1) $\{(-1)^n -1|\ n\in N\}$; 2) $\{1-(-1)^n\cdot 2|\ n\in N\}$;

б) Берилган: $A=\{-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$, $B=\{3;4;5;6\}$, $C=\{-3;-2;-1;0;2;3\}$, $D=\{2;3;4;5;6;7\}$, $M=\{5\leq x-10 \leq 12 [\ x\in N\}$, $K=\{x+10\leq 30|\ x\in N\}$.

Қуйидаги тўпламлар элементларини кўрсатиб ёзинг:

1) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$; 2) $(A\cap B\cap C)\cup D$;

3) $(A\cap B)\cup(C\cap D)\cup M$; 4) $(A\cup C)\cap(A\cup B)$;

5) $(B\setminus A)\cup(A\setminus B)$; 6) $D'_B\cup(C\setminus D)$;

7) $M\cap N$; 8) $M\cup N$.

II боб

ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1-§. Натурал сонлар

1. Туб ва мураккаб сонлар. Нарсаларни санашда ишлатиладиган сонлар *натурал сонлар* дейилади. Барча натурал сонлар чексиз тўпламни ҳосил қилади. Бу тўплам N ҳарфи билан белгиланади: $N=\{1,2,...,n,...\}$. Бирор n сонининг натурал сон эканлиги $n\in N$ кўринишда, натурал сон эмаслиги эса $n\notin N$ кўринишда ёзилади. Масалан, $5\in N$, $35{,}6\notin N$.

Натурал сонлар тўпламида энг катта сон (элемент) мавжуд эмас, лекин энг кичик сон (элемент) мавжуд, у 1 сони. 1 сони фақат битта бўлувчига эга (1 нинг ўзи). 1 дан бошқа барча натурал сонлар камида иккита бўлувчига эга (сонни нг ўзи ва 1).

1 ва ўзидан бошқа натурал бўлувчига эга бўлмаган 1 дан катта натурал сонлар *туб сонлар* дейилади. Масалан, 2,3,5,7,11,13,17,19 сонлар 20 дан кичик бўлган барча туб сонлардир. 1 ва ўзидан бошқа натурал бўлувчига эга бўлган 1 дан катта натурал сонлар *мураккаб сонлар* дейилади. Масалан, 4,6,8,9,10,12,14,15,16,18 сонлар 20 дан кичик бўлган барча мураккаб сонлардир.

Туб ва мураккаб сонларга берилган таърифлардан, 1 сони на туб, на мураккаб сон эканлиги маълум бўлади. Бундай хоссага эга натурал сон фақат 1 нинг ўзидир.

Натурал сонларнинг айрим хоссаларини қараймиз.

1-хосса. $p>1$ натурал сонининг 1 га тенг бўлмаган бўлувчилари орасида энг кичиги туб сон бўлади.

Исбот: $p>1$ натурал соннинг 1 га тенг бўлмаган энг кичик бўлувчиси q бўлсин. Уни мураккаб сон деб фараз қилайлик. У ҳолда мураккаб соннинг таърифига кўра, q сони $1<q_1<q$ шартга бўйсунувчи q_1 бўлувчига эга бўлади ва бу q_1 сони p нинг ҳам бўлувчиси бўлади. Бундай бўлиши эса мумкин эмас. Демак, q - туб сон.

2 - хосса. Мураккаб p сонининг 1 дан фарқли энг кичик бўлувчиси $\sqrt{p}$ дан катта бўлмаган туб сон бўлади.

Исбот: p-мураккаб сон, q эса унинг 1 дан фарқли энг кичик бўлувчиси бўлсин. У ҳолда $p=q\cdot q_1$ (бунда q_1 бўлинма) ва $q_1\geq q$ бўладиган q_1 натурал сон мавжуд бўлади. Бу муносабатлардан $p=q\cdot q_1\geq q\cdot q$ ёки $\sqrt{p}\geq q$ ни оламиз.

3 - хосса (Евклид теоремаси). Туб сонлар чексиз кўпдир.

Исбот: чекли сондаги, масалан, n та туб сон мавжуд ва $q_1, q_2, \ldots, q_n$ сонлари шу туб сонлар бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $b=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n+1$ сони мураккаб сон бўлади, чунки $q_1, q_2, \ldots, q_n$ сонлардан бошқа туб сон йўқ (фаразга кўра). b нинг 1 га тенг бўлмаган энг кичик бўлувчиси q бўлсин. 1 - хоссага кўра, q туб сондир. Шунинг учун q сони $q_1, q_2, \ldots, q_n$ сонларининг биортасига тенг бўлиши шарт. b ва $q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$ сонларининг ҳар бири q га бўлинганлиги учун 1 сони ҳам q га бўлинади. Бундан, $q=1$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса $q\neq 1$ эканлигига зид. Фаразимиз нотўғри. Демак, туб сонлар чексиз кўп.

Бирор n сонидан катта бўлмаган туб сонлар жадвалини тузишда *Эратосфен ғалвири* деб аталадиган оддий усулдан фойдаланадилар. Унинг моҳияти билан танишамиз:

$$1, 2, 3, \ldots , n \qquad (1)$$

сонларни оламиз.

(1) нинг 1 дан катта биринчи сони 2; у фақат 1 га ва ўзига бўлинади, демак, у туб сон бўлади. (1) да 2 ни қолдириб, унинг карралиси бўлган ҳамма мураккаб сонларни ўчирамиз; 2 дан кейин турувчи ўчирилмаган сон 3 дир; у 2 га бўлинмайди, демак, 3 фақат 1 га ва ўзига бўлинади,шунинг учун у туб сон бўлади. (1) да 3 ни қолдириб, унга каррали бўлган ҳамма сонларни ўчирамиз; 3 дан кейин турувчи ўчирилмаган биринчи сон 5 дир; у на 2 га ва на 3 га бўлинади. Демак,5 фақат 1 га ва ўзига бўлинади, шунинг учун у туб сон бўлади ва ҳ.к.

Агар p туб сон бўлиб, p дан кичик туб сонларга бўлинадиган барча сонлар юқоридаги усул билан ўчирилган бўлса, p^2 дан кичик барча чизилмай қолган сонлар туб сонлар бўлади.

Ҳақиқатан, бунда p^2 дан кичик ҳар бир мураккаб a сон,ўзининг энг кичик туб бўлувчисининг карралиси бўлгани учун ўчирилган бўлади. Шундай қилиб:

а) Туб сон p га бўлинадиган сонларни ўчиришни p^2 дан бошлаш керак;

б) n дан катта бўлмаган туб сонларнинг жадвалини тузиш, $\sqrt{n}$ дан ошмайдиган туб сонларнинг бўлинувчиларини ўчириб бўлгандан кейин тугалланади.

1-мисол. 827 сонининг энг кичик туб бўлувчисини топинг.

Ечиш. $\sqrt{827}$ дан кичик бўлган туб сонлар 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. эканлигини аниқлаб, 827 ни шу сонларга бўлиб чиқамиз. 827 у сонларнинг ҳеч қайсисига бўлинмайди, бундан 827 ни туб сон эканлиги келиб чиқади.

2-мисол. 15 ва 50 сонлари орасида жойлашган туб сонларни аниқланг.

Ечиш. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 сонларни олиб 2, 3, 5, 7 га каррали сонларни тагига чизамиз. Натижада 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47 сонларга эга бўламиз.

Натурал сонлар қаторида туб сонлар турлича тақсимланган. Баъзан қўшни туб сонлар бир-биридан 2 гагина фарқ қилади, масалан, 11 ва 13, 101 ва 103 ва ҳоказо. Бу сонлар *эгизак туб сонлар* дейилади. Эгизак туб сонлар тўпламининг чекли ёки чексизлиги ҳозиргача ноъмалум бўлиб қолмоқда.

Математиклар тез ишловчи ҳисоблаш машиналари ёрдами билан жуда катта туб сонларни топганлар. Масалан, 25000 рақамли $2^{86243}-1$ сон туб сондир.

Шу пайтгача туб сонлар ҳақидаги кўп маълумотлар жуда катта сонлар учун текширилган, лекин исботланган эмас. Масалан, исталган жуфт сонни икки туб соннинг айирмаси (масалан, 14=127-113. 20=907-887 ва ҳоказо) кўринишида ёзиш мумкинми ёки йўқми, буни биз билмаймиз. Ҳар қандай жуфт сон учун бундай тасвирланишлар чексиз кўп бўлади, дейилган тахминлар ҳам бор.

1-теорема (арифметиканиннг асосий теоремаси): ***1 дан катта ҳар қандай сон туб сонлар кўпайтмасига ёйилади ва агар кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби назарга олинмаса, бу ёйилма ягонадир.***

Исбот. a_1 — мураккаб сон, q_1 эса унинг энг кичик туб бўлувчиси бўлсин. a_1 ни q_1га бўламиз: $a_1 = q_1 \cdot a_2$ ($a_2 < a_1$).

Агар a_2 туб сон бўлса, a_1 сон туб кўпайтувчиларга ёйилган бўлади. Акс ҳолда, a_2 ни ўзининг энг кичик туб бўлувчиси q_2 га бўламиз:

$a_2 = q_2 \cdot a_3$ ($a_3 < a_2$).

Агар a_3 туб сон бўлса, $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot a_3$ бўлади. q_1, q_2, a_3 сонлари туб сонлар бўлгани учун, a_1 сони туб кўпайтувчиларга ёйилган бўлади. Агар a_3 мураккаб сон бўлса, юқоридаги жараён давом эттирилади.

$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ эканлигидан кўринадики,бир неча қадамдан сўнг албатта a_n туб сони ҳосил бўлади ва a_1 сони $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ шаклни олади. Демак, ҳар қандай натурал сон туб кўпайтувчиларга ёйилади.

a сони икки хил кўринишдаги туб кўпайтувчилар ёйилмасига эга бўлади, деб фараз қилайлик:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \qquad (2).$$

$$\sqrt{a} = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n \qquad (3).$$

У ҳолда: $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ (4). (4) тенгликнинг икки томонида ҳеч бўлмаганда биттадан туб сон топиладики, у сонлар бир-бирига тенг бўлади. $p_1 = q_1$ деб фараз қилайлик. Тенгликнинг иккала томонини $p_1 = q_1$ га қисқартирсак $q_2 \cdot \ldots \cdot q_n = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ бўлади. Бу тенглик устида ҳам юқоридагидек мулоҳаза юритсак, $q_3 \cdot \ldots \cdot q_n = p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$ бўлади ва ҳоказо. Бу жараённи давом эттирсак, $n-1$ қадамдан сўнг $1 = p_{n+1} \cdot \ldots \cdot p_k$ тенгликни оламиз. Бундан $p_{n+1} = 1, \ldots, p_k = 1$ эканлиги келиб чиқади. Демак, ёйилма ягона экан.

a сонини туб кўпайтувчиларга ёйишда баъзи кўпайтувчилар такрорланиши мумкин. Кўпайтувчиларнинг $q_1, q_2, \ldots, q_n$ такрорланишларини мос равишда $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ орқали белгиласак, $a = q_1^{\alpha} \cdot q_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot q_n^{\gamma}$ ҳосил бўлади. Бу a сонининг *каноник ёйилмасидир.* Масалан,

$$105840 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Натурал сонларнинг каноник ёйилмасидан фойдаланиб, унинг бўлувчиларини ва бўлувчилар сонини топиш мумкин.

2-теорема. ***а натурал сонининг каноник ёйилмаси*** $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ***бўлсин. У ҳолда а нинг ҳар қандай бўлувчиси*** $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ ***кўринишда бўлади, бунда*** $0 \le \beta_k \le \alpha_k$ $(k = \overline{1,n})$.

Исбот. a сони d га бўлинсин, $a=dq$. У ҳолда a нинг ҳамма туб бўлувчилари мавжуд ва уларнинг даражалари d нинг каноник ёйилмасидаги даражаларидан кичик бўлмайди. Шунга кўра, d бўлувчи $d=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$ ёйилмага эга ва a нинг d га бўлиниши аён.

Мисол тариқасида 48 нинг бўлувчиларини топайлик. $48=2^4\cdot 3$ бўлганлигидан, унинг бўлувчилари қуйидагича топилади: $2^0\cdot 3^0$, $2^1\cdot 3^0$, $2^2\cdot 3^0$, $2^3\cdot 3^0$, $2^4\cdot 3^0$, $2^0\cdot 3^1$, $2^2\cdot 3^1$, $2^3\cdot 3^1$, $2^4\cdot 3^1$, $2^1\cdot 3^1$.

a натурал сонининг натурал бўлувчилари сони $\tau(a)$ билан белгиланади.

3-теорема. ***Агар а натурал сонининг каноник ёйилмаси*** $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ ***бўлса,*** $\tau(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$ ***тенглик ўринли бўлади.***

Исбот. 2-теоремага асосан $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ сонининг ҳар бир бўлувчиси $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$ кўринишда бўлади. β_1 ифода 0; 1; 2;...; α_1 қийматларни қабул қилади. Шу каби β_2 ифода α_2+1 та қийматни қабул қилади ва ҳоказо. Бу қийматларнинг ихтиёрий комбинацияси a сонининг барча бўлувчилар сонини беради.

Кўп ҳолларда натурал сон бўлувчиларининг йиғиндисини топишга тўғри келади. Бундай ҳолларда, натурал сон бўлувчиларининг йиғиндиси $\delta(a)$ ни ҳисоблаш формуласи $\delta(\alpha)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$ дан фойдаланиш мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

3-мисол. 20 нинг бўлувчилари сонини ва бўлувчилари йиғиндисини топинг.

Ечиш. 20 нинг бўлувчилари сони:

$$20=2^2\cdot 5^1,\quad \tau(20)=(2+1)(1+1)=6.$$

Ҳақиқатан, $5^0 \cdot 2^0=1$, $5^1 \cdot 2^0=5$, $5^0 \cdot 2^1=2$, $5^1 \cdot 2^1=10$, $5^1 \cdot 2^2=20$, $5^0 \cdot 2^2=4$.

Бўлувчилар йиғиндиси эса $\delta(20) = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} =$

$=7 \cdot 6=42$ бўлади.

Машқлар

$k \in N$ сонига бўлинадиган барча натурал сонлар тўпламини A_k билан белгилаймиз [2.1-2.7].

2.1. Тасдиқ тўғрими:

а) $2 \in A_3$;
б) $2 \in A_4$;
в) $6 \notin A_5$;
г) $11 \in A_6$;
д) $25 \notin A_5$;
е) $36 \in A_2$;
ё) $41 \in A_3$;
ж) $422 \notin A_9$;
з) $15342749 \in A_9$;
и) $15342724 \in A_4$;
к) $15342824 \in A_8$;
л) $4343242 \in A_{11}$?

2.2. $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$ сони A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} тўпламларнинг қайсиларига тегишли?

2.3. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \notin A_k$ бўлса, $k=2431$ бўлиши мумкинми?

$k \in \{15; 18\}$ бўлиши мумкинми?

2.4. $3 \cdot 5 \cdot 7 \in A_k$ бўлса, k нинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларини топинг.

2.5. $A_2 \cap A_6$, $A_2 \cap A_3$, $A_3 \cap A_5$ ларни топинг.

2.6. $A_2 \cup A_3 = A_6$ тенглик тўғрими?

2.7. $a \in A_3$, $b \in A_4$ бўлса $a+b \notin A_7$ бўлиши мумкинми?

2.8. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратинг: 10;100;1000;10000;100000;1000000. Қандай хулосага келиш мумкин?

2.9. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратинг: 250;300;340;3700;48950;4725000.

2.10. Сонларни каноник шаклда ёзинг:

а) 36;
б) 72;
в) 81;
г) 96;
д) 125;
е) 36;
ё) 512;
ж) 680;
з) 946;
к) 1001;
л) 3125;
м) 4500;
н) 13860;
о) 2431;
п) 6783;
р) 36363.

2.11. Сонларни каноник шаклда ёзинг:

а) $2\cdot3^2\cdot2^4\cdot6^2$; д) $18\cdot18\cdot15\cdot5$; з) $15^2\cdot17\cdot21^3$;
б) $4\cdot5\cdot7\cdot9$; е) $17\cdot19\cdot25$; к) $27^3\cdot11\cdot3^4$;
в) $3\cdot5\cdot7\cdot11$; ё) $3^4\cdot4^3\cdot53$; л) $33\cdot34\cdot43^2$;
г) $13\cdot13\cdot27$; ж) $31^2\cdot33\cdot37^2\cdot39$; м) $117\cdot118\cdot119^2$.

2.12. Қуйидагиларни топинг:

а) $\tau(81)$, $\delta(81)$; д) $\tau(2^3\cdot6\cdot7)$;
б) $\tau(91)$, $\delta(91)$; е) $\tau(2^3\cdot3^2\cdot5)$;
в) $\tau(400)$; ж) $\tau(11\cdot13\cdot17)$;
г) $\tau(680)$; з) $\tau(19^2\cdot23\cdot29)$.

2.13. Қуйидагиларни топинг:

а) $\tau(512)$, $\delta(512)$; д) $\tau(4^2\cdot6\cdot15)$;
б) $\tau(1001)$; е) $\tau(13\cdot100\cdot55)$;
в) $\tau(13860)$; ж) $\tau(121\cdot11^2)$;
г) $\tau(13800)$; з) $\tau(144\cdot11^3)$.

2.Энг катта умумий бўлувчи. Энг кичик умумий каррали. Евклид алгоритми.

$a, b\in\mathbb{N}$ сонларнинг ҳар бири бўлинадиган сонга шу сонларнинг *умумий бўлувчиси* дейилади. Масалан, $a=12$; $b=14$ бўлсин. Бу сонларнинг умумий бўлувчилари 1; 2 бўлади.

$a, b\in\mathbb{N}$ сонларнинг умумий бўлувчиларининг энг каттаси шу сонларнинг *энг катта умумий бўлувчиси* дейилади ва $Б(a;b)$ орқали белгиланади.

Масалан, $Б(12;14)=2$.

Агар $Б(a;b)=1$ бўлса, a ва b сонлар *ўзаро туб сонлар* дейилади.

Масалан, $Б(16;21)=1$ бўлгани учун 12 ва 21 ўзаро туб сонлардир.

$a,b\in\mathbb{N}$ сонларнинг *умумий карралиси* деб, a га ҳам b га ҳам бўлинувчи натурал сонга айтилади.

a ва b сонларнинг умумий карралилари ичида энг кичиги мавжуд бўлиб, у a ва b сонларининг, *энг ки-*

чик умумий карралиси дейилади ва К(a;b) орқали белгиланади.

Масалан: К(6;8)=24.

Натурал сонларнинг каноник ёйилмалари бир нечта соннинг энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий карралиларини топишда ҳам қўлланилади.

a, b ва *c* сонлари берилган бўлиб,

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \text{ ва } b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$$

$$c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$$

бўлсин. t_k деб α_k, β_k ва γ_k ларнинг энг кичик қийматини, s_k деб α_k, β_k ва γ_k ларнинг энг катта қийматини олайлик. У ҳолда:

$$Б(a,b,c) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}; \quad К(a,b,c) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$$

бўлади.

Мисол. $126=2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $540=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ ва $630=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ бўлгани учун

Б(126;540;630)=$2 \cdot 3^2=18$,

К(126,540,630)=$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7=3780$ ларга эга бўламиз.

$a, b \in N$ ва $a \geq b$ бўлсин. У ҳолда a ва b сонлари учун $a=bq+r$ $(0 \leq r < b)$ тенглик ўринли бўладиган $q \in N$, $r \in N$ сонлари мавжуд ва q, r сонлари бир қийматли аниқланади.

1-теорема. ***Агар a ≥ b бўлиб,*** $a=bq+r$ $(0 \leq r < b)$ ***бўлса, a ва b сонларининг барча умумий бўлувчилари b ва r сонларининг ҳам умумий бўлувчилари бўлади ва, аксинча, a=bq+r (0 ≤ r < b) бўлса, b ва r сонларининг барча умумий бўлувчилари a ва b сонларининг ҳам умумий бўлувчилари бўлади.***

Исбот. $a=bq+r$ бўлиб, c сони a ва b сонларининг бирор умумий бўлувчиси бўлсин.

$r=a-bq$ бўлганлигидан r ҳам c га бўлинади, яъни c сони b ва r сонларининг умумий бўлувчиси. Аксинча, c' сони b ва r сонларининг умумий бўлувчиси бўлсин, унда $a=bq+r$ ҳам c' га бўлинади яъни, c' сони a ва b сонларининг умумий бўлувчиси. Шундай қилиб, a ва b нинг умумий бўлувчиси билан b ва r нинг умумий бўлувчиси бир хил экан.

Натижа: ***$a=bq+r$* бўлса, *Б*$(a;b)=$*Б*$(b;r)$ бўлади.**

Исботланган теорема ва унинг натижаси асосида, Б$(a;b)$ ни топишнинг Евклид алгоритми деб аталувчи қуйидаги усулига эга бўламиз.

a, $b\in$N, $a>b$ бўлсин. a ни b га қолдиқли бўламиз:

$$a=bq_1+r_2,\ 0\le r_2<b.$$

Агар $r_2=0$ бўлса, Б$(a;b)=b$ бўлади. $r_2\neq0$ бўлса, натижага кўра Б$(a;b)=$Б$(b;r_2)$ (1) бўлади.

b ни r_2 га қолдиқли бўламиз:

$b=r_2q_2+r_3,\ 0\le r_3<r_2$

Агар $r_3=0$ бўлса, Б$(a;b)=$Б$(b;r_2)=r_2$ бўлади. $r_3\neq0$ бўлса, натижага кўра Б$(a;b)=$Б$(b;r_2)=$Б$(r_2;r_3)$ (2) бўлади.

r_2 ни r_3 га қолдиқли бўламиз:

$$r_2=r_3q_3+r_4,\ 0\le r_4<r_3$$

Агар $r_4=0$ бўлса, Б$(a;b)=$Б$(b;r_2)=$Б$(r_2;r_3)=r_3$ бўлади; $r_4\neq0$ бўлса, натижага кўра, Б$(a;b)=$Б$(b;r_2)=$Б$(r_2;r_3)=$ $=$Б$(r_3;r_4)$ бўлади ва юқоридаги жараённи давом эттирамиз. Бу жараёнда қолдиқлар натурал сонлар бўлиб, кичиклашиб боради ($r_2>r_3>r_4>$...). Шу сабабли, бирор қадамдан сўнг қолдиқ 0 га тенг бўлади, яъни бирор n натурал сон учун $r_{n+1}=0$ бўлади ва $r_{n-1}=r_n\,q_n+0=r_n\,q_n$ тенглик бажарилади. Бу ҳолда Б$(r_{n-1};r_n)=r_n$ ва $r_n\neq0$, $r_{n-1}\neq0$, $r_{n-2}\neq0$, ..., $r_2\neq0$ муносабатларга эга бўламиз. Юқоридаги мулоҳазалардан, Б$(a;b)=$Б$(b;r_2)=$ $=$Б$(r_2;r_3)=$Б$(r_3;r_4)=$ . . .$=$Б$(r_{n-1};r_n)=r_n$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, Б$(a;b)$ ни топиш учун қолдиқли бўлиш жараёни 0 га тенг қолдиқ ҳосил бўлгунча давом эттирилади, 0 дан фарқли энг охирги қолдиқ, a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси бўлади.

Мисол. Б(1515;600)ни топинг.

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{r|l} -1515 & 600 \\ \cline{2-2} \underline{1200} & \end{array} \\
\begin{array}{r|l} -600 & 315=r_2 \\ \cline{2-2} \underline{315} & 1 \end{array} \\
\begin{array}{r|l} -315 & 285=r_3 \\ \cline{2-2} \underline{285} & 1 \end{array} \\
\begin{array}{r|l} -285 & 30=r_4 \\ \cline{2-2} \underline{270} & 9 \end{array} \\
\begin{array}{r|l} -30 & 15=r_5 \\ \cline{2-2} \underline{30} & 2 \end{array} \\
\quad 0=r_6
\end{array}
$$

Демак, Б(1515;600)=15.

Иккитадан ортиқ, яъни a_1, a_2, ... , a_n сонларининг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралисини топиш қуйидагича амалга оширилади. Б(a_1,a_2)=d_2; Б(d_2,a_3)=d_3, ... , Б(d_{n-1},a_n)=d_n. Бу ерда d_n=Б(a_1, a_2, ... , a_n) бўлади. Худди шундай К(a_1,a_2)= k_2, К(k_2, a_3)=k_3, ... , К(k_{n-1},a_n)=k_n бўлиб, К(a_1, a_2, ... , a_n)=k_n бўлади.

Энди Б(a;b) ва К(a;b) орасидаги боғланишни кўрамиз.

2 - теорема. **Б(a;b)·К(a;b)=a·b.**

Исбот. М сони a ва b сонларининг бирор умумий карралиси бўлсин. У ҳолда

$$\mathrm{M}=ak \ (k\in \mathrm{N}) \qquad (1)$$

бўлади. Бундан akb га бўлинади деган хулосага келамиз. Б(a;b)=d ва $a=a_1d$; $b=b_1d$ бўлса, Б(a_1; b_1)=1 бўлади.

ak b га бўлинганлигидан a_1kd ҳам b_1d га бўлиниши, бундан эса a_1k нинг b_1 га бўлиниши келиб чиқади. Аммо Б(a_1;b_1)=1 бўлгани учун k b_1 га бўлинади.

Демак, $$k=b_1t=\frac{b}{d}\cdot t,\ t\in N. \qquad (2)$$

(2) ни (1) га қўйсак,

$$M = \frac{ab}{d} \cdot t \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. (3) кўринишдаги ҳар бир сон a ва b сонларининг умумий карралиси бўлади.

К$(a;b)$ ни топиш учун t=1 деб олиш етарли.

Демак, К$(a;b) = \frac{a \cdot b}{d}$ ёки $a \cdot b$=К$(a;b)\cdot$Б$(a;b)$.

Машқлар

2.14. Соннинг бўлувчиларини топинг:
а) 209; б) 143; в) 2431; г) 2717.

2.15. Сонларнинг умумий бўлувчиларини топинг:
а) 209 ва 143;
б) 209 ва 2431;
в) 143 ва 2717;
г) 2431 ва 2717.

2.16. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:
а) 40 ва 45;
б) 130 ва 160;
в) 121 ва 143;
г) 31 ва 93;
д) 50, 75 ва 100;
е) 74, 45 ва 60;
ё) 84, 63 ва 42;
ж) 72, 48 ва 36;
з) 63, 130, 143 ва 1001;
и) 74, 60, 84 ва 480;
к) 750, 800, 865 ва 1431;
л) 143, 209, 1431 ва 2717.

2.17. Қуйидаги сонлар ўзаро туб ми:
а) 15 ва 95;
б) 144 ва 169;
в) 143 ва 144;
г) 250 ва 131;
д) 121 ва 143;
е) 11, 12 ва 25;
ё) 14, 16 ва 19;
ж) 63, 130 ва 800;
з) 169 ва 1443;
и) 111 ва 121;
к) n, n+1 ва n+2 ($n \in$ N);
л) n, n+2 ва n+4 ($n \in$ N)?

2.18. Сонларнинг энг кичик умумий карралисини топинг:
а) 84, 42 ва 21;
б) 70, 80 ва 90;
в) 17, 51 ва 289;
г) 11, 12 ва 13;
д) 50, 125 ва 175;
с) 48, 92 ва 75;

ё) 10, 21 ва 3600;
ж) 18, 19 ва 24;
з) 33, 36 ва 48;
и) 100, 150 ва 250;
к) 80, 240 ва 360;
л) 34, 51 ва 65.

2.19. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини топинг (натижани каноник кўринишда ёзинг):

а) 2^3, 3^2 ва 15;
б) 2^3, 3^4 ва 7;
в) 8, 13^2 ва 5^2;
г) 12^2, 15 ва 1;
д) $7^2 \cdot 3$; 46 ва 15;
е) $3^2 \cdot 4$; $3 \cdot 6$ ва $7 \cdot 9$;
ё) 3^4, 11^2 ва 13^3;
ж) 11^4, 13^5 ва 100^4.

2.20. Сонларнинг умумий бўлувчиси нечта:

а) 18 ва 54;
б) 42 ва 56;
в) 96 ва 92;
г) 84 ва 120;
д) 63 ва 72;
е) 120 ва 96;
ё) 102 ва 170;
ж) 26, 65 ва 130;
з) 150 ва 180;
и) 12, 18 ва 30;
к) 54, 90 ва 162;
л) 40, 60 ва 100?

2.21. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} Б(x, y) = 45, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{11}{7} \end{cases}$; б) $\begin{cases} xy = 20, \\ К(x, y) = 10. \end{cases}$

2.22. Ҳисобланг:

а) $\tau(\tau(Б(К(250;500);100)))$;
б) $Б(\tau(100);\tau(Б(25;5)))+\tau(К(10;35))$;
в) $К(К(\tau(144);51);18)-\tau(42)$;
г) $\tau(18\text{-}91+15(Б(10;21)))\cdot\tau(142)$.

2.23. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:

а) 8104 ва 5602;
б) 5555 ва 11110;
в) 980 ва 100;
г) 5345 ва 4856;
д) 187 ва 180;
е) 2165 ва 3556;
ё) 5400 ва 8400;
ж) 78999 ва 80000;
з) 795 ва 2585;
и) 42628 ва 33124;
к) 71004 ва 154452;
л) 1000 ва 999.

2.24. Қуйидаги сонлар ўзаро тубми:

а) 60 ва 72; б) 55 ва 71;
в) 732 ва 648; г) 111 ва 11 ?

2.25. Б(a;b)·К(a;b)=$a\cdot b$ ($a\in$N, $b\in$N) тенгликдан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг энг кичик умумий карралисини топинг:

а) 821 ва 934; д) 28 ва 947; и) 75 ва 1853;
б) 743 ва 907; е) 56 ва 953; к) 23 ва 1785;
в) 109 ва 1005; ж) 419 ва 854; л) 113 ва 9881;
д) 827 ва 953; з) 887 ва 6663; м) 875 ва 1346.

2.26. Сонларнинг ўзаро туб эканлигини исботланг:

а) 911 ва 130177; б) 811 ва 10403.

2.27. Ҳисобланг: τ (Б(991;659;647+367)).

3. Сонларнинг бўлиниш белгилари. Математикада сонларнинг бўлиниш белгилари жуда муҳим аҳамиятга эга. Бу белгилар асосида сонларнинг бўлувчиларини, бўлинувчиларини топиш, уларнинг хоссаларини ўрганиш мумкин.

$$a=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ .\ .\ .+\ a_1 10+a_0 \qquad (1)$$

натурал соннинг берилган b натурал сонга бўлиниш-бўлинмаслигини аниқлаш керак бўлсин. 10 нинг даражаларини b га қолдиқли бўламиз:

$$10=bq_1+r_1;\ 10^2=bq_2+r_2;\ .\ .\ .\ ;\ 10^n=bq_n+r_n.$$

Бу тенгликларни (1)га қўйиб, шакл алмаштирсак,

$$a=\mathrm{A}b+\mathrm{B} \qquad (2)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда

$$\mathrm{A}=a_n q_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ \ldots\ +a_1 q_1,\ \mathrm{B}=a_0+a_1 r_1+\ \ldots\ +a_n r_n.$$

Ҳосил бўлган (2) тенгликдан кўриниб турибдики, В сони b га бўлинганда ва фақат шу ҳолда a сони b га бўлинади.

Бу хулосадан сонларнинг бўлиниш белгиларини топишда фойдаланилади.

1. **2 га бўлиниш белгиси.** 10^k ($k=1,2,...,n$) ни $b=2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқлар нолга тенг. Шунинг учун $B=a_0$ бўлади. Бундан *а соннинг охирги рақами 2 га қолдиқсиз бўлинса, бу сон 2 га қолдиқсиз бўлинади* деган хулосага келамиз.

2. **3 ва 9 га бўлиниш белгиси.** 10 нинг даражаларини $10^n=(9+1)^n=9A_n+1$ куринишда ифодаласак (бу ерда $A_n \in N$), 10^n даражаларни $b=9$ (ёки $b=3$) га бўлишдан чиқадиган қолдиқлар 1 га тенглиги келиб чиқади. Шунинг учун $B=a_0+a_1+ \ldots +a_n$ ҳосил бўлади. Бу ердан ушбу қоида келиб чиқади: *агар берилган а соннинг рақамлари йиғиндиси 9 га (3 га) қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда бу сон 9 га (3 га) қолдиқсиз бўлинади.*

3. **5 га бўлиниш белгиси.** 10^k ($k=1,2,..., n$) даражалар $b=5$ га қолдиқсиз бўлинади: $r_1=r_2=. . . =r_n=0$. $B=a_0$ бўлгани учун ушбу қоида келиб чиқади: *охирги рақами 5 га қолдиқсиз бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар 5 га қолдиқсиз бўлинади.*

4. **4 ва 25 га бўлиниш белгилари.** $b=4$ бўлганда $10=2b+2$, $10^2=25b+0$, $10^3=250b+0$, $\ldots$], $r_1=2$, $r_2=r_3=. . . =r_n=0$ бўлиб, $B=a_0+2a_1$ бўлади, яъни соннинг 4 га бўлиниши учун, унинг бирлик рақами билан ўнлик рақами иккилангани нинг йиғиндиси 4 га бўлиниши зарур ва етарлидир. $B=a_0+2a_1$ ифодани бундай ёзамиз:

$$B_1=a_0+2a_1+8a_1=B+8a_1=10a_1+a_0=\overline{a_1\ a_0}.$$

$B=a_0+2a_1=(a_0+10a_1)-8a_1=\overline{a_1\ a_0}-8a_1$ ёки $B+8a_1=\overline{a_1a_0}$ бўлгани учун B сон $\overline{a_1\ a_0}$ сони 4 га бўлинганда ва фақат шу ҳолдагина 4 га қолдиқсиз бўлинади.

Бундан, *охирги иккита рақамидан тузилган сон* 4 *га бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар* 4 *га бўлиниши келиб чиқади.*

Масалан, 14024 сонининг охирги 2 ва 4 рақамларидан тузилган 24 сони 4 га бўлинади, демак, 14024 сони ҳам 4 га бўлинади.

Худди шундай, *охирги икки рақамидан тузилган сон 25 га бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар 25 га бўлинади.*

Масалан, 1350 сонида охирги икки рақамидан иборат сон 50, бу 25 га қолдиқсиз бўлинади. Демак, 1350 ҳам 25 га қолдиқсиз бўлинади. 2^2 ва 5^2 учун олинган хулосани 2^m, 5^m ($m \in N$) сонлари учун ҳам умумлаштириш мумкин.

Агар берилган соннинг охирги m та рақамидан тузилган сон 2^m га (5^m га) қолдиқсиз бўлинса, берилган сон ҳам 2^m га (5^m га) қолдиқсиз бўлинади.

5. 7 га бўлиниш белгиси. Бизда $b=7$ ва

$10=7+3$, $r_1=3$;
$10^2=7\cdot 14+2$, $r_2=2$;
$10^3=7\cdot 142+6$, $r_3=6$;
$10^4=7\cdot 1428+4$, $r_4=4$;
$10^5=7\cdot 14285+5$, $r_5=5$;
$10^6=7\cdot 142857+1$, $r_6=1$.

10^7 да $r_7=3=r_1$ қолдиқлар қайтадан такрорланаяпти. Топилган натижаларни (1) га қўйсак, у ҳолда $a=\text{A}\cdot 7+\text{B}$ да $\text{B}=a_0+3a_1+2a_2+6a_3+4a_4+5a_5+a_6+3a_7+a_8+\ldots$ ёки коэффициентларни 7 га нисбатан ёзсак:

$$\text{B}=a_0+3a_1+2a_2+(7a_3-a_3)+(7a_4-3a_4)+(7a_5-2a_5)+$$
$$+\ldots=7(a_3+a_4+a_5+a_9+a_{10}+a_{11}+\ldots)+$$
$$+(a_0+3a_1+2a_2+a_6+3a_7+2a_8+\ldots)-$$

$-(a_3+3a_4+2a_5+a_9+3a_{10}+2a_{11}+\ldots)$ни ҳосил қиламиз. Охирги ифодада $a_0+3a_1+2a_2+a_6+3a_7+2a_8+\ldots=\text{B}_2$, $a_3+3a_4+a_9+3a_{10}+2a_{11}+\ldots=\text{B}_1$ деб белгиласак,

$a=7\cdot A+B_2-B_1$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, B_2-B_1 айирма 7 га қолдиқсиз бўлинса, берилган *a* сон ҳам 7 га қолдиқсиз бўлиниши келиб чиқади.

1-мисол. 675056742 сонининг 7 га бўлиниш ёки бўлинмаслигини аниқланг.

Ечиш.

7 4 2	0 5 6	6 7 5
2 3 1	2 3 1	2 3 1
$14+12+2=28$	$0+15+6=21$	$12+21+5=38$

$38+28-21=66-21=45$ сони 7 га бўлинмайди.

Демак, берилган сон 7 га бўлинмайди.

6. 11 га бўлиниш белгиси. Берилган *a* сонда қатнашаётган 10 нинг даражаларини 11 га бўлишдаги қолдиқ ҳар доим 10 ёки 1 бўлади. Демак, *берилган сонниng жуфт ўринда турган рақамлари йиғиндисидан тоқ ўринда турган рақамлари йиғиндиси айирилганда ҳосил бўладиган айирма* 11 *га бўлинса, сон* 11 *га қолдиқсиз бўлинади.*

2-мисол. 4788 сонининг 11 га бўлинишини аниқланг.

$(7+8)-(4+8)=15-12=3$. 3 сони 11 га бўлинмайди, демак,берилган сон ҳам 11 га бўлинмайди.

3-мисол. 3168 нинг 11 га бўлинишини текширинг.

$(1+8)-(3+6)=0$. Демак, сон 11 га бўлинади.

Натижа. ***Агар*** **Б(*p*, *q*)=1** ***бўлиб, а сони ҳам р га, ҳам q га бўлинса, у pq га бўлинади.***

Масалан, бирор сон ҳам 2 га, ҳам 3 га бўлинса, у 6 га бўлинади, 3 га ва 4 га бўлинадиган сонлар 12 га ҳам бўлинади ва ҳоказо.

Қадимги Самарқанд мадрасаларида *a* сонни бирор *b* (масалан, 9) га бўлишдан чиқадиган қолдиқ *r* ни шу сонниng *мезони* (ўлчами) деб атаганлар ва ундан сонлар устида амаллар тўғри бажарилганини текширишда фойдаланганлар. Масалан, $378 \cdot 4925 = 1861650$ даги натижа тўғри ҳисобланганлигини текширамиз.

Мезонлар (9 га бўлиниш белгиси бўйича):

378 учун: $3+7+8=18$, $1+8=9$;

4925 учун: $4+9+2+5=20$, $2+0=2$.

Мезонлар кўпайтмаси: $9 \cdot 2=18$, $1+8=9$;

1861650 учун: $1+8+6+1+6+5+0=27$, $2+7=9$.

Мезонлар ва берилган сонлар кўпайтмаларининг мезонлари тенг, яъни $9=9$. Демак, топилган кўпайтма тўғри.

Машқлар

2.28. 1 дан 25 гача бўлган натурал сонлар қаторидаги 6 га бўлинмайдиган натурал сонлар тўпламини тузинг.

2.29. 1 дан 25 гача бўлган натурал сонлар қаторидаги 7 га бўлинадиган натурал сонлар тўпламини тузинг.

2.30. 15121, 117342, 1897524, 2134579, 31445698 сонлари орасидан 6 га бўлинадиган натурал сонлар тўпламини тузинг.

2.31. Иккита кетма-кет тоқ сонларнинг йиғиндиси 4 га бўлинишини исботланг.

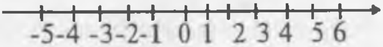
2.32. $\overline{1234xy}$ сони 8 га ва 9 га бўлинса, x ва y рақамларни топинг.

2.33. 13 га бўлиниш белгисини чиқаринг.

2-§. Рационал сонлар

1. Бутун сонлар. Оддий касрлар. Нол сонини натурал сонлар тўпламига киритиб, бутун *манфиймас сонлар тўплами* деб аталадиган янги сонли тўплам ҳосил қиламиз ва бу кенгайтирилган тўпламни $N_0=\{0,$

1, 2, 3, ... , n, ...} орқали белгилаймиз. Катта сонни кичик сондан айириш мумкин бўлиши учун N_0 сонлар тўпламини янги сонлар киритиш йўли билан янада кенгайтириш зарур.



7–расм.

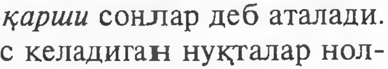
Тўғри чизиқни олиб, унда йўналиш, 0 бошланғич нуқта ва масштаб бирлигини оламиз (7-расм). Бошланғич нуқтага 0 сонини мос қўямиз. Бошланғич нуқтадан ўнг томонда бир, икки, уч ва ҳ.к. масштаб бирлиги масофада жойлашган нуқталарга 1, 2, 3, . . . натурал сонларни мос қўямиз, бошланғич нуқтадан чап томонда бир, икки, уч ва ҳ. к. бирлик масофада жойлашган нуқталарга −1, −2, −3, . . . символлари билан белгиланадиган янги сонларни мос қўямиз.

Бу сонлар *бутун манфий сонлар* деб аталади. Сонлар белгиланган бу тўғри чизиқ *сон ўқи* деб аталади. Ўқнинг стрелка билан кўрсатилган йўналиши *мусбат йўналиш*, бунга қарама-қарши йўналиш эса *манфий йўналиш* деб аталади. Натурал сонлар сон ўқида бошланғич нуқтадан мусбат йўналишда қўйилади, шунинг учун улар *мусбат бутун* сонлар деб аталади.

Бутун манфиймас сонлар тўплами билан бутун манфий сонлар тўпламининг бирлашмаси янги сонли тўпламни ҳосил қилади, бу тўплам *бутун сонлар* тўплами деб аталади ва Z символи билан белгиланади:

$$Z=\{. . . , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .\}.$$

а ва −*а* сонлар *қарама-қарши* сонлар деб аталади. Сон ўқида бу сонларга мос келадиган нуқталар нолга нисбатан симметрик жойлашади (8-расм).



8–расм.

Ўлчаш натижаси бутун сонларда, ўнли ёки оддий касрларда ифодаланади. Агар миқдор қарама-қарши (ўсиш-камайиш, юқорига-қуйига, фойда-зарар, иссиқ-совуқ ва ҳоказо) маънога ҳам эга бўлса, унинг қийматлари олдига мос равишда мусбатлик («+») ёки манфийлик («-») ишораси қўйилади: $x=-8$, $y=8$, $t=+5°$.

$\frac{m}{n}$ ифода оддий каср деб аталади, бунда $m\in Z$, $n\in N$.

Агар $\frac{p}{q}$ *ва* $\frac{m}{n}$ касрлар учун $pn=mq$ шарти бажарилса, у ҳолда бу оддий касрлар *тенг* дейилади ва $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$ кўринишида ёзилади.

Оддий касрлар учун қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1. Ҳар қандай каср ўз-ўзига тенг: $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$, чунки $ab=ba$.

2. Агар $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ бўлса, у ҳолда $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ бўлади.

3. Агар $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ бўлиб, $\frac{c}{d}=\frac{l}{n}$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}=\frac{l}{n}$ бўлади.

4. Агар $\frac{p}{q}$ касрнинг сурат ва махражи $m \neq 0$ сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, унинг қиймати ўзгармайди, яъни: $\frac{p}{q}=\frac{p\cdot m}{q\cdot m} \Rightarrow p\cdot q\cdot m = q\cdot p\cdot m$ ёки $\frac{p}{q}=\frac{p : m}{q : m}$ бўлади.

Кўпайтмаси бирга тенг бўлган сонлар *ўзаро тескари* сонлар деб аталади. Булар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{n}{m}$ кўринишидаги сонлардир.

Бир неча касрни умумий махражга келтириш деб, бу касрларнинг қийматларини ўзгартирмасдан уларни бир хил махражга олиб келувчи алмаштиришга айтилади.

$\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ касрларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари қуйидаги тенгликлар билан аниқланади:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Натурал сон билан мусбат оддий касрнинг йиғиндисини «+» ишорасиз ёзиш қабул қилинган. Масалан,

$$45 + \frac{1}{2} = 45\frac{1}{2}, \qquad 58\frac{3}{7} = 58 + \frac{3}{7}$$ ва ҳоказо.

Машқлар

2.34. Амалларни бажаринг:

а) $\frac{8}{45} + \frac{16}{45}$;

б) $\frac{17}{48} - \frac{7}{48}$;

в) $\frac{17}{35} + \frac{18}{35}$;

г) $\frac{18}{69} + \frac{59}{69}$;

д) $\frac{1112}{150} - \frac{338}{150}$;

е) $\frac{17}{18} + \frac{13}{36}$;

ё) $\frac{32}{15} - \frac{17}{148}$;

ж) $\frac{15}{17} - \frac{7}{18}$;

з) $\frac{37}{113} - \frac{9}{131}$;

и) $\frac{1}{151} + \frac{9}{153}$;

к) $\frac{8}{15} \cdot \frac{19}{151}$;

л) $\frac{12}{121} \cdot \frac{11}{144}$;

м) $\frac{9}{113} \cdot \frac{15}{101}$;

н) $\frac{19}{38} : \frac{15}{49}$;

о) $\frac{121}{49} : \frac{11}{7}$.

2.35. Ифоданинг қийматини топинг.

а) $\left(45\frac{1}{2} - 2\frac{3}{8}\right) - \left(5\frac{5}{6} + 6\frac{3}{4}\right) + \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{5}{8}\right)$;

б) $\left(36\frac{4}{5}-12\frac{3}{10}\right)-\left(4\frac{2}{15}+1\frac{1}{30}\right)-\left(20\frac{11}{12}-10\frac{3}{8}-\frac{3}{16}-\right.$

$\left.-3\frac{1}{48}\right);$

в) $\left(12\frac{1}{2}-3\frac{5}{6}\right)-\left(2\frac{8}{9}+1\frac{4}{5}\right)-\left(5\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}\right)-\left(6\frac{9}{40}-5\frac{11}{90}\right);$

г) $56\frac{2}{21}-\left\{\left(1\frac{5}{6}+2\frac{13}{14}\right)+\left[27\frac{13}{30}-\left(15\frac{5}{12}-12\frac{13}{20}\right)\right]\right\};$

д) $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3};$ е) $3\frac{1}{3}\cdot3\frac{13}{53}\cdot3\frac{1}{88};$

ё) $5\frac{1}{4}:1\frac{2}{7}:5\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{22};$ ж) $\left(1\frac{11}{24}+1\frac{13}{56}\right)\cdot9:1\frac{2}{5};$

з) $\dfrac{8\frac{1}{2}}{15:\frac{5}{17}};$ и) $\dfrac{\frac{28}{29}:\frac{7}{29}}{\frac{7}{9}:\frac{1}{9}};$

к) $\dfrac{4\frac{4}{5}:\frac{4}{17}}{3\frac{2}{5}};$ л) $8\frac{13}{16}\cdot\frac{47}{64}:1\frac{1}{35}:3\frac{1}{2}.$

2.36. **а)** $2:\frac{3}{5}+\frac{3}{5}:2+1\frac{1}{2}:6+6:\frac{1}{2};$

б) $6\frac{1}{4}\cdot8-3\frac{2}{3}\cdot5\frac{1}{2}+2\frac{2}{5}\cdot4\frac{7}{12};$

в) $2\frac{1}{2}\cdot48-3\frac{3}{8}:\frac{1}{18}+5\frac{5}{12}:\frac{7}{36};$

г) $13\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}+16\frac{1}{2}\cdot1\frac{5}{11}+19\frac{1}{4}:\frac{4}{25}.$

2.37. а) $\left(3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}+5\frac{5}{6}+4\frac{3}{5}\right)\cdot 24;$

б) $\left(5\frac{5}{8}+18\frac{1}{2}-7\frac{5}{24}\right):16\frac{2}{3};$

в) $\left(12\frac{5}{12}+1\frac{2}{3}-3\frac{5}{6}+2\frac{2}{3}\right):\left(2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{7}{9}\right);$

г) $48\frac{3}{8}\cdot 6\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}-2\frac{5}{6}+1\frac{75}{94}\cdot\left(1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-13:26\right).$

2.38. а) $\left(\frac{5}{7}\cdot 2\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}-1\right):\left(1-\frac{7}{8}\cdot 1\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{14}\right);$

б) $\left(8\frac{7}{15}-3\frac{3}{4}+4\frac{2}{3}-8\frac{7}{60}\right):\left(4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}\right);$

в) $\left(1\frac{8}{13}\cdot\frac{13}{42}+5\frac{5}{7}:\frac{8}{21}\right):\left(8\frac{1}{8}+3\frac{1}{3}\right);$

г) $2\frac{3}{5}:6\frac{1}{15}+1\frac{1}{14}-1\frac{39}{73}\cdot\left(5\frac{5}{7}-5\frac{5}{16}\right).$

2.39. а) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}:4\frac{4}{7}};$

б) $\dfrac{28\frac{4}{5}:13\frac{5}{7}+6\frac{3}{5}:\frac{2}{3}}{1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}};$

в) $\dfrac{2\frac{3}{8}:\frac{3}{4}+24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8}-175\frac{4}{8}:24};$

г) $\dfrac{\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3\frac{3}{5}}{14-15\frac{1}{8}:2\frac{1}{5}}$;

д) $\dfrac{14\frac{4}{5}-6\frac{11}{12}+12\frac{3}{4}-7\frac{2}{15}}{1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}}$;

е) $\dfrac{1\frac{9}{16}\cdot 3\frac{1}{5}+16\frac{2}{3}-9:2\frac{2}{5}}{17\frac{7}{12}-6\frac{1}{3}}+\dfrac{12\frac{2}{3}-61\frac{1}{2}:6\frac{3}{4}}{2\frac{2}{3}}$.

2. Ўнли касрлар. Агар оддий касрнинг махражи 10 нинг бирор натурал кўрсаткичли даражасига тенг бўлса, у ҳолда бундай каср *ўнли каср* дейилади.

Масалан, $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{11}{100}, \frac{125}{1000}$ ва ҳоказо касрлар ўнли касрлардир. Ўнли касрларни махражсиз ёзиш қабул қилинган. Масалан, юқоридаги касрларни мос равишда 0,1; 0,2; 0,11; 0,125 кўринишда ёзиш мумкин. Бундай ўнли касрлар *чекли ўнли касрлар*дир.

Агар $\frac{a}{b}$ *қисқармас каср*нинг махражини $2^m \cdot 5^n$ ($m, n \in N_0$) кўринишда тасвирлаш мумкин бўлса, у ҳолда бу каср чекли ўнли касрга айланади.

Масалан,

$$\frac{3}{40}=\frac{3}{2^3\cdot 5}=\frac{3\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}=\frac{75}{10^3}=0,075$$

ёки

$$\frac{8}{625}=\frac{8}{5^4}=\frac{7\cdot 2^4}{5^4\cdot 2^4}=\frac{112}{10^4}=0,0112.$$

Агар $\frac{a}{b}$ қисқармас каср махражини $2^m\cdot5^n$ $(m, n\in\mathbf{N}_0)$ кўринишда тасвирлаш мумкин бўлмаса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ каср чекли ўнли касрга айланмайди. Масалан, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{11}$ ва $\frac{35}{44}$ касрларни чекли ўнли касрлар кўринишида ёзиш мумкин эмас. Оддий касрни ўнли касрга айлантириш касрнинг суратини унинг махражига бўлиш билан ҳам бажарилиши мумкин. Бундан келиб чиқадики, агар a ва b лар ўзаро туб бўлса, a ни b га бўлиш жараёни b сонни $2^m\cdot5^n$ кўринишда тасвирлаш мумкин бўлган ҳолдагина чеклидир.

Таъриф. *$\frac{m}{n}$ кўринишида ёзиш мумкин бўлган ҳар қандай сон рационал сон деб аталади*, бунда $m\in Z$ ва $n\in N$. Рационал сонлар тўпламини Q билан белгилаймиз: $Q=\{a|\ a=\frac{m}{n},\ m\in Z,\ n\in\mathrm{N}\}$. Рационал сонлар тўплами барча бутун ва каср сонлардан ташкил топган бўлиб, уни манфий рационал сонларнинг Q_-, фақат 0 дан иборат бир элементли $\{0\}$ва мусбат рационал сонларнинг Q_+ тўпламлари бирлашмаси (йиғиндиси) кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$\mathrm{Q=Q\_\cup\{0\}\cup Q_+}.$$

Ҳар қандай рационал сонни чексиз ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин. $\frac{m}{n}$ сонини шундай ёзиш учун m ни n га «бурчакли» бўлиш керак. Масалан, 1 ни 3 га бўлиб, 0,333. . . 3 . . . чексиз ўнли касрни ҳосил қиламиз. Демак, $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots3\ldots$ Шу каби

$\frac{1}{3} = 0,333...3...$ Шу каби $\frac{1}{7} = 0,14857142857...$ ва $\frac{8}{45} =$

$= 0,1777...$ бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Бу мисолларнинг ҳар бирида, бирор жойдан бошлаб, бирор рақами ёки рақамлари маълум бир тартибда такрорланадиган чексиз ўнли каср ҳосил бўлди.

Агар чексиз ўнли касрнинг бирор жойидан бошлаб, бирор рақам ёки рақамлар гуруҳи маълум бир тартибда чексиз такрорланса, бундай ўнли каср *даврий ўнли каср* дейилади. Такрорланувчи рақам ёки рақамлар гуруҳи шу касрнинг *даври* деб аталади.

Одатда, даврий ўнли касрнинг даври қавс ичига олинган ҳолда бир марта ёзилади: 0,666...=0,(6), 0,131131131131...=0,(131), 0,1777...7...=0,1(7).

Шундай қилиб, ҳар қандай оддий каср ва демак, ҳар қандай рационал сон *даврий ўнли каср* билан ифодаланади.

Машқлар

Ифоданинг қийматини топинг.

2.40. а) 4,735:0,5+14,95:1,3-2,121:0,7;
б) 589,72:16-18,305:7+0,0567:4;
в) 3,006-0,3417:34-0,875:125;
г) 22,5:3,75+208,45-2,5:0,004.

2.41. а) (0,1955+0,187):0,085;
б) 15,76267:(100,6+42697);
в) (86,9+667,6):(37,1+13,2);
г) (9,09-900252)·(25,007-12,507).

2.42. а) (0,008+0,992)·(5·0,6-1,4);
б) (0,93+0,07)·(0,93-0,805);
в) (50000-1397,3):(20,4+33,603);
г) (2779,6+8024):(1,98+2,02).

2.43. а) $\dfrac{4{,}06 \cdot 0{,}0058 + 3{,}3044895 - (0{,}7584 : 2{,}37 + 0{,}0003 : 8)}{0{,}03625 \cdot 80 - 2{,}43}$;

б) $\dfrac{2{,}045 \cdot 0{,}033 + 10{,}518395 - 0{,}464774 : 0{,}0562}{0{,}00309 : 0{,}0001 - 5{,}188}$;

в) $\dfrac{57{,}24 \cdot 3{,}55 + 430{,}728}{2{,}7 \cdot 1{,}88 - 1{,}336} + \dfrac{127{,}18 \cdot 4{,}35 + 14{,}067}{18 + 2{,}1492 : 3{,}582}$;

г) $52 : \left(\dfrac{6 : (0{,}4 - 0{,}2)}{2{,}5 \cdot (0{,}8 + 1{,}2)} + \dfrac{(34{,}06 - 33{,}81) \cdot 4}{6{,}48 : (28{,}57 - 25{,}15)}\right) - 8.$

2.44. Оддий каср махражини туб кўпайтувчиларга ажратиш билан уни ўнли касрга айлантиринг.

$\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{8}; \frac{5}{16}; \frac{7}{25}; \frac{23}{25}; \frac{6}{125}; 3\frac{9}{40}; 11\frac{7}{80}; 4\frac{3}{200}; 7\frac{31}{500}.$

2.45. Оддий касрни унинг суратини махражига бўлиш ёрдамида касрни ўнли касрга айлантиринг:

а) $\frac{9}{15}; \frac{18}{252}; \frac{11}{28}; \frac{39}{65}; \frac{30}{75}; \frac{6}{48}; 2\frac{3}{48}; 5\frac{192}{575}; 12\frac{177}{1500};$

б) $\frac{8}{5}; \frac{25}{16}; \frac{47}{32}; \frac{263}{250}; \frac{312}{125}; 1\frac{711}{625}; 5\frac{2541}{2000}; 4\frac{7359}{5000}; 3\frac{23}{25000}.$

3. Даврий ўнли касрларни оддий касрларга айлантириш. Чексиз ўнли даврий касрларни 10, 100, 1000 ва ҳ. к. ларга кўпайтириш амалини чекли ўнли касрлардаги каби вергулни кўчириш билан бажариш мумкин. Бундан фойдаланиб, ҳар қандай даврий касрни оддий касрга айлантириш мумкин.

Масалан, $x=0,(348)=0,348348348\ldots$ даврий касрни оддий касрга айлантирайлик. Давр уч рақамли бўлганлиги учун касрни 1000 га кўпайтирамиз: $1000x=348,348348\ldots=348+x$. Бундан $999x=348$ ёки $x = \frac{348}{999} = \frac{116}{333}$.

0,00(348) ўнли каср эса 0,(348) дан 100 марта кичик, шунга кўра $0,00(348)=\frac{348}{99900}$ бўлади. 0,96(348) касрни эса 0,96+0,00(348) йиғинди кўринишида ёзиш мумкин, у ҳолда:

$$\frac{96}{100}+\frac{348}{99900}=\frac{96\cdot 999+348}{99900}=\frac{96000+348-96}{99900}=\frac{96348-96}{99900}.$$

Даврий ўнли касрларни оддий касрларга айлантиришнинг умумий қоидасини таърифлаймиз.

Соф даврий каср шундай оддий касрга тенгки, унинг сурати даврдан, махражи эса даврда нечта рақам бўлса, шунча марта такрорланадиган 9 рақами билан ифодаланадиган сондан иборат.

Масалан, $0,(5)=\frac{5}{9}$; $0,(45)=\frac{45}{99}$.

Аралаш даврий каср шундай оддий касрга тенгки, унинг сурати иккинчи давргача турган сон билан биринчи давргача бўлган сон айирмасидан, махражи эса даврда нечта рақам бўлса, шунча марта такрорланган 9 рақами ва бунинг охирига вергул билан биринчи давр орасида нечта рақам бўлса, шунча марта ёзилган ноллар билан ифодаланадиган сондан иборат.

Масалан, $0,3(45)=\frac{345-3}{990}=\frac{342}{990}=\frac{171}{495}$.

Машқлар

2.46. Қуйидаги сонлар берилган:

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{12};\ \frac{3}{32};\ \frac{4}{21};\ \frac{5}{54};\ \frac{11}{90};\ 12\frac{7}{50};\ \frac{3}{6};\ \frac{15}{45};\ \frac{9}{27}.$$

а) Чекли ўнли касрга айланадиган сонлар тўпламини тузинг;

б) Чексиз ўнли касрга айланадиган сонлар тўпламини тузинг.

2.47. Қуйидаги сонларни даврий ўнли каср кўринишида ёзинг:

$$1;\ 1,4;\ \frac{7}{8};\ \frac{13}{26};\ \frac{81}{243};\ \frac{15}{43};\ \frac{71}{16};\ \frac{1}{25};\ \frac{15}{39};\ \frac{41}{43};\ 19.$$

2.48. Даврий ўнли касрни оддий касрга айлантиринг:

а) 0,(3);
б) 0,3(2);
в) 0,71(23);
г) 11,(75);
д) 13,0(48);
е) 0,(4);
ё) 0,(45);
ж) 3,1(44);
з) 2,(123);
и) 2,333(45);
к) 41,8519(504);
л) 35,73(4845).

2.49. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $$\frac{0,8333...-0,4(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\frac{1,125+1,75-0,41(6)}{0,59};$$

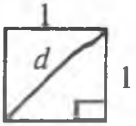
б) $$\frac{\left(\frac{5}{8}+2,708333...\right):2,5}{(1,3+0,7(6)+0,(36))\cdot\frac{110}{401}}\cdot\frac{1}{2};$$

в) $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot0,(26)}{(18,5-13,777...)\cdot\frac{1}{85}}\cdot0,5;$$

г) $$\frac{\frac{3}{4}+0,8(5)\cdot\frac{1}{2}}{9:(0,9(23)-0,7(9))}+\frac{41}{43}.$$

3-§. Ҳақиқий сонлар ва улар устида амаллар

1. Иррационал сонлар. Қисқармас каср шаклида ифодалаб бўлмайдиган сонлар, яъни *иррационал сонлар* ҳам учрайди.



8-а расм.

1 - мисол. Томони 1 га тенг бўлган квадратнинг d диагонали ҳеч қандай рационал сон билан ифодаланмаслигини исбот қиламиз (8-а расм).

Исбот. Пифагор теоремасига мувофиқ $d^2=1^2+1^2=2$. Диагоналнни m/n қисқармас каср кўринишида ёзиш мумкин, деб фараз қилайлик. У ҳолда $(m/n)^2=2$ ёки $m^2=2n^2$. Бунга кўра m-жуфт сон, $m=2k$. Шунингдек, $(2k)^2=2n^2$ ёки $2k=n$, яъни n ҳам жуфт сон. m/n касрнинг сурат ва махражи 2 га қисқармоқда, бу эса қилинган фаразга зид. Демак, d нинг узунлиги, яъни $\sqrt{2}$ сони рационал сон эмас.

2 - мисол. 0.101001000100001000001.... сони иррационал сон эканини исботланг. (Биринчи бирдан кейин битта нол, иккинчи бирдан кейин иккита нол ва ҳоказо).

Исбот. Берилган каср даврий ва унинг даври n та рақамдан иборат деб фараз қилайлик (тескари фараз). $2n+1$ инчи 1 ни танлаймиз. Бу бирдан кейин $2n+1$ та кетма-кет ноллар келади:

$$\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{та}}\ \boxed{0}\ \underbrace{0\ldots00}_{n\ \text{та}}1\ldots$$

Шу ўртада турган 0 ни қараймиз. Бу нол бирор даврнинг ё бошида, ёки ичида, ёки охирида келади. Бу ҳолларнинг ҳаммасида бу давр ажратилган ноллардан тузилган «кесма»да тўла жойлашади. Демак, давр фақат ноллардан тузилган. Бундай бўлиши эса соннинг тузилишига зид. Демак, қилинган фараз нотўғри.

Барча рационал ва иррационал сонлар биргаликда *ҳақиқий сонлар* дейилади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R орқали белгиланади. Манфий ва мусбат ҳақиқий сонлар тўпламларини мос равишда R_-, R_+ лар билан белгилаб, $\mathbf{R}=R_-\cup\{0\}\cup R_+$ тенгликка эга бўламиз.

Сонларнинг илдиз ишораси орқали ёзилиши уларнинг катталигини аниқ билишга етарли эмас. Масалан, ҳисоблашларсиз $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$ лардан қайси бирининг катталигини айтиш қийин. Бу ҳолда $\sqrt[3]{3}=$ $=1,442...$, $\pi=3,141...$ каби *даврий бўлмаган чексиз ўнли каср* кўринишдаги ёзув ойдинлик киритади, лекин ҳисоблашларни қийинлаштиради. Шунга кўра иррационал сонни унга яқин рационал сон орқали тақрибий ифодалашга ҳаракат қилинади. Чунончи:

1) α иррационал сонни ундан кичик a_1 (қуйи чегара) ва ундан катта a_2 (юқори чегара) рационал сонлар орқали $a_1<\alpha<a_2$ кўринишда ёзиш. Бу ҳолда вужудга келадиган хато $\varepsilon\leq|a_2-a_1|$ дан ошмайди. Масалан, $-1,41<\sqrt{2}<1,42$, $\varepsilon\leq|1,42-1,41|=0,01$.

2) Баъзан α учун $a=(a_2+a_1)/2$ ўрта қийматни оладилар, $\alpha\approx a$. Ўрта қийматдаги *абсолют хато* $\Delta a\leq(a_2-$ $-a_1)/2$, иррационал сон эса $\alpha\approx a\pm\Delta a$ кўринишда ёзилади. Масалан,

$$\sqrt{2}=\frac{1,42+1,41}{2}=1,415,\quad \Delta=\frac{1,42-1,41}{2}=0,005.$$

Шунга кўра $\sqrt{2}\approx1,415\pm0,005$. Сонни яхлитлашдан вужудга келадиган ҳақиқий хато қолдирилаётган рақам хонаси 1 бирлигидан ошмайди. $\sqrt{2}\approx1,42$ тақрибий сон хатоси $\varepsilon=1,4142..-1,42=-0,0057\approx-0,6\cdot10^{-2}$.

$1,41<\sqrt{2}<1,42$ бўлганидан $\sqrt{2}$ нинг $(1,41;\ 1,42)$ дан олинадиган қийматлари тўплами *чегараланган*дир. Шу каби узунлиги C га тенг бўлган айлана ичига чизилган барча қавариқ n-кўпбурчакларнинг $p=p_n$

периметрлари С дан кичик, яъни $P=\{p|p=p_n, n=3,4,5, ...; p_n<C\}$ тўплам чегараланган ва сон кўринишда берилади.

3 - мисол. π сони каттами ёки $\sqrt{10}$ ми?

Ечиш. Масала $\pi=3,14159...$ ва $\sqrt{10}$ $=3,16227...$ сонларининг мос хоналари рақамларини (ўнли яқинлашишларини) таққослаш орқали ҳал бўлади. Уларнинг бутун қисмлари ва ўндан бирлар хонаси рақамлари бир хил, лекин 0,01 лар хонаси рақами $\sqrt{10}$ дан катта. Демак, $\pi<\sqrt{10}$.

4 - мисол. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ — иррационал сон эканлигини исботланг.

Исбот: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ рационал сон деб фараз қилайлик, яъни $\sqrt{2}+\sqrt{5}=r, r\in Q. \sqrt{5}=r-\sqrt{2} \Rightarrow 5=r^2-2\sqrt{2}r+2 \Rightarrow$

$3=r^2-2\sqrt{2}r \Rightarrow r^2-3=2\sqrt{2}r \Rightarrow \sqrt{2}=\dfrac{r^2-3}{2r} \in Q$; лекин $\sqrt{2} \notin Q$. Зидлик ҳосил бўлди. Фараз нотўғри.

Демак, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ иррационал сон.

Машқлар

2.50. Қуйидаги сонларнинг иррационал сон эканини исбот қилинг:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; д) $\sqrt[3]{2}$; е) $\sqrt[3]{4}$; ж) $\sqrt[3]{2,1}$.

2.51. $5^r=2$ тенгликни қаноатлантирувчи ҳеч қандай r рационал сони мавжуд эмаслигини исбот қилинг.

2.52. Агар бирор a бутун сон бошқа ҳеч қандай бутун соннинг квадрати бўлмаса, у ҳеч қандай рационал соннинг квадрати бўлолмаслигини исбот қилинг.

2.53. а) a ва b сонлар рационал сонлар;

б) a ва b сонлар иррационал сонлар;

в) a рационал сон, b иррационал сон бўлса, $a+b$ ва $a \cdot b$ сонларнинг рационал ёки иррационал эканлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

2.54. а) Агар p, q — бутун сонлари учун $p+q\sqrt{3}=0$ бўлса, $p=q=0$ бўлишини исботланг.

б) Агар p, q — бутун сонлари учун $p^2\text{-}9q^2=6q$ бўлса, $p=q=0$ бўлишини исботланг.

в) Агар p, q — бутун сонлари учун $p^2\text{-}4q^2=4pq$ бўлса, $p=q=0$ бўлишини исботланг.

г) a, b, c рационал сонлари учун $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ бўлса, $a=b=c=0$ бўлишини исботланг.

2.55. α, β лар иррационал сонлар, r эса рационал сон бўлсин. Қуйидаги сонларнинг қайсилари рационал сон бўлиб қолиши мумкин:

а) $\alpha+\beta$; б) $\alpha+r$; в) $\sqrt{\alpha}$; г) $\sqrt{r}$;

д) $\alpha \cdot \beta$; е) $\sqrt{\alpha+r}$; ж) $\sqrt{\alpha+\sqrt{r}}$?

2.56. Ушбу сонларнинг рационал сон эмаслигини исбот қилинг:

а) 0,81881888188881... ;

б) -3,57557755577755557777... .

2. Сонли тўпламларни ажратувчи сон. X ва Y сонли тўпламлар бўш бўлмасин. Агар X нинг $\forall$ x элементи Yнинг $\forall y$ элементидан кичик бўлса, Y тўплам X тўпламдан ўнгда жойлашган бўлади, бунда $\forall$ -их-

9-расм.

тиёрийлик белгиси. Агар $\forall x\in X$ ва $\forall y\in Y$ элементлар учун $x<c<y$ тенгсизлиги бажарилса, c сони шу тўпламларни *ажратувчи сон* дейилади. Бу ҳолда Y тўплам c дан ўнгда жойлашади. Масалан, $X=\{3;7\}$ ва $Y=\{9;12\}$ тўпламларни $c=8$ сони ажратади ва бунда Y тўплам c нинг ўнг томонида, X эса c нинг чап томонида жойлашади. Агар Y тўплам X тўпламдан ўнгда жойлашса, бу тўпламларни ажратувчи камида битта сон мавжуд бўлади.

Теорема. ***Натурал сонлар тўпламида берилган $Y=\{y_n\}$ тўплам $X=\{x_n\}$тўпламдан ўнгда жойлашган, яъни $x_n<y_n$ бўлсин. X ва Y ларни ажратувчи фақат битта c сони мавжуд бўлиши учун y_n-x_n айирмалар ҳар қанча кичик бўла оладиган, яъни X ва Y лар бир-бирларига ҳар қанча яқин жойлаша оладиган бўлиши зарур ва етарли.***

Исбот. Теореманинг шарти бажарилса-да, X ва Y ларни ажратувчи иккита c ва d рационал сон мавжуд, деб фараз қилайлик, бунда $c<d$ бўлсин. $A=\{x_n\}\cap\{y_n\}$ умумий кесмаларнинг ҳар бирида ҳам X, ҳам Y нинг нуқталари борлигидан $[c;d]\subset A$ бўлади (9-расм). Натижада $|d-c|\leq|y_n-x_n|$ бўлади ва y_n-x_n айирмалар ҳар қанча кичик бўлолмайди. Энди X ва Y ларни ажратувчи фақат битта c сони мавжуд, дейлик. $f<c<e$ ва ихтиёрий кичик ε сони учун $e-f<\varepsilon$ бўлсин.

Бу ҳолда $[f;c]$ кесмада ҳеч бўлмаса битта $x\in X$ нуқта бўлиши керак. Акс ҳолда f ҳам X ва Y ларни ажратувчи бўлиб қолади. Шу каби $[c;e]$ да ҳам ҳеч бўлмаса битта $y\in Y$ нуқта бўлади. Акс ҳолда e сони ҳам X ва Y ларни ажратувчи бўлади. Шундай қилиб, $[f;e]$ да ҳам X га, ҳам Y га қарашли нуқталар мавжуд. Лекин бу кесманинг узунлиги ε дан кичик. Демак, фақат битта ажратувчи сон мавжуд бўлсагина x ва y нуқталарга эга бўлган ва ҳар қанча кичик узунликдаги $[x_n;y_n]$ кесмалар мавжуд бўлади.

1 - мисол. (3;5) ва (7;9) оралиқлар (5;7) оралиққа қарашли ихтиёрий сон билан ажралади. (3;5) ва (7;9) оралиқларнинг нуқталаридан тузилган ихтиёрий оралиқ узунлиги (5;7) оралиқ узунлигидан, яъни 7-5=2 дан кичик бўлолмайди.

2 - мисол. [2;5] ва [5;8] кесмалар фақат 5 сони билан ажралади, чунки ихтиёрий n натурал сон учун $\left[5-\frac{1}{n}; 5+\frac{1}{n}\right]$ оралиқ узунлиги $2/n$ га тенг. n нинг етарлича катта қийматларида бу узунлик ҳар қанча кичик бўлади.

Машқлар

2.57. Тўпламлар жуфтларини ажратувчи барча сонларни топинг:

а) X={«$\sqrt{5}$ сонининг ками билан ўнли яқинлашишлари»},Y={«$\sqrt{2}$ сонининг ортиғи билан ўнли яқинлашишлари»};

б) X= {«$\sqrt{2}$ сонининг ками билан ўнли яқинлашишлари»},Y={«$\sqrt{5}$ сонининг ортиғи билан ўнли яқинлашишлари»};

в) X={«R радиусли айланага ички чизилган қавариқ кўпбурчаклар периметрлари»}, Y={«Шу айланага ташқи чизилган қавариқ кўпбурчаклар периметрлари»};

г) X={«$r<R$ радиусли айланага ички чизилган қавариқ кўпбурчаклар периметрлари»}, Y={«$r<R$ радиусли айланага ташқи чизилган қавариқ кўпбурчаклар периметрлари»};

д) $X=\{3-1/n \mid n\in N\}$, $Y=\{3+1/n \mid n\in N\}$;

е) $X=\{5-10/n \mid n\in N\}$, $Y=\{6+10/n \mid n\in N\}$.

3. Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар. $\sqrt{2}$ сонининг 10^{-n} гача ками (қуйи чегара) ва ортиғи (юқори чегара) билан олинган бир неча яқинлашишларини кузатайлик: $1,4<\sqrt{2}<1,5$, $1,41<\sqrt{2}<1,42$, $1,414<\sqrt{2}<1,415$. Ками билан олинган ўнли яқинлашишлар ўсувчи, ортиғи билан олинганлари эса камаювчи кетма-кетлик ташкил этмоқда. Унинг ҳадларидан иборат икки тўпламни ягона $\sqrt{2}$ сони ажратиб туради. Арифметик амалларни бажариш ва топилган натижаларни баҳолашда сонларнинг бу хусусияти эътиборга олинади.

Агар A, B ва ҳоказо сонлар $a_n<A<a_n'$ каби кўринишда берилган бўлса, улар устида амалларни бажаришда тенгсизликларнинг маълум хоссаларидан фойдаланамиз, бунда a_n ва a_n' лар A нинг 10^{-n} гача ками ва ортиғи билан олинган ўнли яқинлашишлари, $n\in N$. Натижа $x_n<X<x_n'$ қўштенгсизлик ёки $X=x\pm\Delta x$, ёки $X\approx x$ кўринишда ёзилади. Бу ёзувларнинг биридан иккинчисига ўтиш мумкинлигини биламиз. Хусусан, $x_n<X<x_n'$ бўйича X нинг $x=\frac{x_n+x_n'}{2}$ уртача (тақрибий) қиймати ва унинг $\Delta x=\frac{x_n'-x_n}{2}$ чегаравий (энг катта) абсолют хатосини ҳисоблаш орқали $X=x\pm\Delta x$ га ўтиш ва аксинча, $X=x\pm\Delta x$ бўйича $x-\Delta x<X<x+\Delta x$ қўштенгсизликка ўтиш мумкин. $X\approx x$ ёзувда x нинг қандай аниқликда берилганлиги назарга олинади. Масалан, $\pi\approx 3,14$ сони $3,14<\pi<3,15$, $\pi\approx 3,145\pm 0,005$ кўринишда ёзилиши мумкин. Шуни эсда тутиш керакки, тақрибий сон қуйи чегара қиймати фақат ками билан, юқори чегара қиймати эса фақат ортиғи билан яхлитланиши мумкин.

1) Қўшиш:

$$+\begin{array}{c} a_n < \alpha < a'_n \\ b_m < \beta < b'_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \hline x < X < x' \end{array}$$ ёки қисқароқ $$+\begin{array}{c|c} a_n & a'_n \\ b_m & b'_m \\ \dots & \dots \\ \hline x & x' \end{array}$$

Бунда $x=a_n+b_m+\dots$, $x'=a'_n+b'_m+\dots$.

α ва β сонларининг $\alpha+\beta$ *йиғиндиси* деб, уларнинг ками билан олинган кетма-кет ўсувчи α_n ва β_n ($n\in N$) яқинлашишлари йиғиндилари A тўплами ва ортиғи билан олинган a'_n ва b'_n кетма-кет камаювчи ўнли яқинлашишларининг йиғиндилари **В** тўпламини ажратувчи $\alpha+\beta$ сонга айтилади: $a_n+b_n < \alpha+\beta < a'_n+b'_n$. 2-банд (қисқача б.) теоремасига кўра A ва B тўпламларни ажратувчи камида битта сон мавжуд. Лекин у ягона. Ҳақиқатан, $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, $b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}$, $\varepsilon = (a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) = \frac{2}{10}$ бўлади ва n нинг катта қийматларида ε исталганча кичраяди.

2) Қарама-қарши маънода ёзилган α ва β сонларни айириш:

$$-\begin{array}{c} a_n < \alpha < a'_n \\ b_n > \beta < b_n \\ \hline a_n - b'_n < \alpha - \beta < a'_n - b_n \end{array}$$

3) α ва β мусбат сонларнинг $\alpha\beta$ *кўпайтмаси* деб, a_nb_n кўпайтмалар A тўплами ва $a'_nb'_n$ кўпайтмаларнинг B тўпламини ажратувчи $\alpha\beta$ сонга айтилади, яъни $a_nb_n < \alpha\beta < a'_nb'_n$, $n\in N$.

4) α мусбат ҳақиқий сонга *тескари* сон, деб $a_n \neq 0$, $a_n' \neq 0$ бўлганда $\frac{1}{a'_n}$ сонларнинг А тўплами ва $\frac{1}{a_n}$ сон-

ларнинг *B* тўпламини ажратувчи $\frac{1}{\alpha}$ сонга айтилади: $\frac{1}{a'_n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{a_n}$ · Бундай сон мавжуд ва ягона. Ҳақиқатан, $0<\alpha_n<\alpha'_n$, бундан $\frac{1}{a'_n} < \frac{1}{a_n}$, бу эса *B* тўпламнинг *A* тўпламдан ўнгда жойлашганлигини билдиради.

Демак, *A* ва *B* ни ажратувчи сон мавжуд. У ягона ҳамдир. Ҳақиқатан, $a'_n=a_n+\frac{1}{10^n}$, $0< a_n< <a'_n$ эканидан $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_n}{a_n a_n}=\frac{1}{10^n\ a_n a_n}<\frac{1}{10^n\ a_1^2}$ бўлади ва *n* катталашган сари каср кичраяди. Демак, $1/\alpha$ — ягона ажратувчи сон.

5) а ни $\beta\neq0$ га бўлишдан ҳосил бўладиган *бўлинма* деб, $\alpha\frac{1}{\beta}$ кўпайтмага айтилади, яъни $a_n\cdot\frac{1}{b'_n}<\frac{\alpha}{\beta}<a'_n\cdot\frac{1}{b_n}$.

$\alpha=a\pm\Delta a$ кўринишдаги сонлар устида амал икки усулда бажарилади:

1-усул: сонлар қўштенгсизлик кўринишда қайтадан ёзилади, сўнг амал бажарилади;

2-усул: олдин амал a, b,... тақрибий қийматлар устида бажарилиб, x, сўнг алоҳида формулалар бўйича Δx хато қиймати топилади:

1) йиғинди хатоси $\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b$; чунки

$\alpha+\beta=(a\pm\Delta a)+(b\pm\Delta b)=(a+b)\pm(\Delta a+\Delta b)$;

2) айирма хатоси: $\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b$.

Чунки $\alpha-\beta=(a\pm\Delta a)-(b\pm\Delta b)=(a-b)\pm(\Delta a+\Delta b)$;

3) кўпайтма хатоси $\Delta(ab)\approx b\Delta a+a\Delta b$.

Чунки $a\beta=(a\pm\Delta a)(b\pm\Delta b)=ab\pm(b\Delta a+a\Delta b)$, бунда нисбатан кичик бўлганлигидан $\Delta a\Delta b$ кўпайтма олиб ташланади. Хусусан, $\Delta(a^n)=na^{n-1}\cdot\Delta a$ ва $\Delta\left(\sqrt[n]{a^m}\right)=\frac{m}{n}\cdot$ $\cdot a^{\frac{m}{n}-1}\cdot\Delta a$;

4) бўлинмадаги хато $\Delta\left(\frac{a}{b}\right)\approx\frac{b\cdot\Delta a+\ a\cdot\Delta b}{b^2}$ (мустақил исбот қилинг!).

Агар a тақрибий сонниң ε четланиши (хатоси) шу сонниң бирор хонаси 1 бирлигидан катта бўлмаса, шу хонада турган рақам ва ундан чапда жойлашган барча рақамлар *ишончли рақамлар*, ўнг томонда турган рақамлар эса *ишончсиз рақамлар* дейилади. Ишончсиз рақамлар яхлитлаб ташланади ва улар ўрнига 0 лар ёзилади. Сон $\alpha\approx a$ кўринишда ёзилади. Масалан, $\alpha\approx$ 28,8569±0,01 сонида 28,85 ишончли рақамлардан иборат, 5, 6, 9 лар эса ишончсиздир. Шунга кўра $\alpha\approx28{,}86$.

Рационал сонлар устида бажариладиган арифметик амалларнинг барча хоссалари ҳақиқий сонлар ҳолида ҳам ўз кучида қолади. Уларни эслатиб ўтамиз:

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; 2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$; 3) $\alpha+0=\alpha$; 4) $\alpha+(-\alpha)=0$; 5) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. .

Шу каби: 1′) $\alpha\beta=\beta\alpha$; 2′) $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$; 3′) $\alpha\cdot1=\alpha$; 4′) $\frac{\alpha}{\alpha}=1, \alpha\neq0$.

1-мисол. Кучланиши 215±15В бўлган электр тармоғига ток кучи 5А дан ошмаслик шарти билан 44±0,5 Ом қаршиликни улаш мумкинми?

Ечиш. $I=\frac{U}{R}=\frac{215\pm15}{44\pm0{,}5}=..=4{,}896...\ \ \pm0{,}293...\approx$ $\approx4{,}89\pm0{,}30$А ёки $4{,}59<I<5{,}2$А, яъни I нинг юқори чегара қиймати 5А дан ошмоқда, демак, улаш мумкин эмас.

2-мисол. ABC учбурчак томонлари: $AB=\sqrt{58}$, $BC=\sqrt{85}$, $AC=9$, унинг P периметрини 0,01 аниқликда топамиз.

Ечиш. 1 - усул. Қўшилувчиларнинг аниқ қийматини 0,001 гача аниқлик билан оламиз ва натижани 0,01 гача аниқликда яхлитлаймиз:

$$P = AB + BC + AC = \sqrt{58} + \sqrt{85} + 9 \approx$$

$$\approx 7{,}615 + 9{,}219 + 9 = 25{,}834 \approx 25{,}83.$$

2-усул. Қўштенгсизликлар усули. Сонларни қуйи ва юқори чегара қийматлари бўйича ёзамиз ва амални бажарамиз:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 7{,}61 < \sqrt{58} < 7{,}62 \\ 9{,}21 < \sqrt{85} < 9{,}22 \\ \;\;9 \qquad\quad 9 \qquad\quad 9 \end{array} \\ \hline 25{,}82 < P < 25{,}84. \end{array}$$

3-усул. Δ абсолют хато (ёки нисбий хато) катталигини ҳам ҳисоблаш:

$$P=AB+BC+AC=(7{,}612\pm0{,}005)+(9{,}220\pm0{,}001)+9=$$

$=25{,}832\pm0{,}006\approx25{,}83\pm0{,}01$. Агар 2-усул натижалари бўйича ўртача қийматлар топилиши талаб қилинса, у ҳолда:

$$P = \frac{25{,}84 + 25{,}82}{2} = 25{,}83, \quad \Delta P = \frac{25{,}84 - 25{,}82}{2} = 0{,}01,$$

$$P \approx 25{,}83 \pm 0{,}01.$$

3 - мисол. Қадимги Самарқанд мадрасалари дарсликларида $\pi \approx \frac{22}{7}$ тақрибий сон учрайди. Ундаги хато катталигини баҳолайлик.

Ечиш. $\varepsilon = |\pi - \frac{22}{7}| = |3{,}1415... - 3{,}1428...| = 0{,}0013... <$ $< 0{,}002$.

4 - мисол. $a \approx 3{,}2 \pm 0{,}08$ берилган. $\sqrt[3]{a^2}$ ни ҳисоблаймиз.

Ечиш. 1) $\sqrt[3]{3,2^2}=\sqrt[3]{10,24}\approx 2,172$; 2) $\Delta=\frac{2}{3}\cdot\frac{0,08}{3,2^{\frac{1}{3}}}\approx 0,04$.

Жавоб: $2,17\pm0,04$.

Машқлар

2.58. $a=\sqrt{3,87}$, $b=\sqrt{3,86}$ бўлса, $a+b$, $a-b$, ab, a/b лар 0,01 гача аниқликда топинг. Айирмада аниқликнинг йўқолишига сабаб нима?

2.59. Ҳажми $710<V<720$ (см³), зичлиги $8,4<\rho<8,7$ (кг/м³) бўлган модданинг массаси топилсин.

2.60. Кубнинг қирраси $12,8<a<12,9$ (см). Унинг тўлиқ сирти ва ҳажмини топинг. Жавобни қўштенгсизликлар ва тақрибан 0,1 гача аниқликда ёзинг.

2.61. Кубнинг ҳажми $1450<V<1460$ (см³). Унинг қиррасини топинг.

2.62. Ҳақиқий сонлар қуйидаги хоссаларга эга эканлигини исбот қилинг:

а) агар $b-a>0$ бўлса ва фақат шу ҳолдагина $a<b$ бўлади;

б) ҳеч қандай a сони учун $a<a$ тенгсизлиги бажарилмайди;

в) агар $a<b$ ва $b<c$ бўлса, $a<c$ бўлади;

г) ихтиёрий иккита a ва b сонлари учун $a=b$, $a<b$, $a>b$ муносабатлардан фақат бири бажарилади;

д) агар $a<b$ бўлса, $a+c<b+c$ бўлади; агар $a<b$ ва $c<d$ бўлса, $a+c<b+d$ бўлади;

е) агар $a<b$ ва $c>0$ бўлса, $ac<bc$ бўлади; агар $a<b$ ва $c<0$ бўлса, $ac>bc$ бўлади;

ж) агар $0<a<b$ ва $0<c<d$ бўлса, $ac<bd$ бўлади;

з) агар $a<b$ бўлса, $-a>-b$ бўлади;

и) агар $0<a<b$ бўлса, $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ бўлади.

2.63. Кўп босқичли ракета биринчи босқич двигателининг тортиш кучи $10^6 \pm 10^4$ Н га тенг. Шу босқич ишининг охирида ракета 3000+15 м/с тезлик билан учаётган бўлсин. Ўша онда двигател қандай қувватга эга бўлган? Жавобни млн.квт ларда беринг.

4. Ҳақиқий соннинг модули. *a* ҳақиқий соннинг модули деб,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ агар } a \geq 0 & \text{бўлса,} \\ -a, \text{ агар } a < 0 & \text{бўлса} \end{cases}$$

муносабат билан аниқланадиган $|a|$ сонига айтилади. Унинг асосий хоссаларини келтирамиз:

$$1)\ \alpha \leq |\alpha|\ ;\ 2)\ |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|;\ 3)\ |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|;$$

$$4) \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|};\ 5)\ |\alpha-\beta| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

1) хоссанинг тўғрилиги модулнинг таърифидан келиб чиқади;

2) хоссани исбот қиламиз:

$\alpha \leq |\alpha|, \beta \leq |\beta| \Rightarrow |\alpha + \beta|^2 = (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Rightarrow |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. Тенглик белгиси $\alpha\beta \geq 0$ бўлгандагина ўринлидир.

Машқлар

2.64. Ҳақиқий сон *a* нинг модули номанфий сон эканини исботланг.

2.65. Таққосланг.

а) $|8{,}7|$ ва 8;

б) $|0|$ ва 0;

д) $-|-3{,}2|$ ва $-3{,}2$;

е) $|a|$ ва 0;

в) $|-15,2|$ ва $15,2$;

г) $\left|-6\frac{3}{4}\right|$ ва $-6\frac{3}{4}$;

ж) $-5\,|a|$ ва 0;

з) $|a|$ ва a.

2.66. Ҳарфларнинг кўрсатилган қийматларида ифоданинг қийматини ҳисобланг:

а) $|a|+2|b|$, $a=-3$, $b=5$; б) $|-a|-2|b|$, $a=-1$, $b=-2$;

в) $\dfrac{-1-|-3a|+4|b|}{2|a|+|b|}$, $a=-4$, $b=0$;

г) $\dfrac{4-|a|+2|b+1|}{|-a|\cdot|b+3|\cdot|b+1|}$, $a=2$, $b=-4$.

д) $(-|-a|)^3+2|-b|^3$, $a=1$, $b=2$.

2.67. Агар а) $|a|=b$, б) $|a|=-b$ бўлса, b сони ҳақида нима дейиш мумкин?

2.68. Агар а) $|a|=|b|$, б) $|a|=a$, в) $|b|=-b$ бўлса, a ва b сонлари ҳақида нима дейиш мумкин?

2.69. Модулнинг қуйидаги хоссаларини исботланг.

а) $a \le |a|$;

б) $-a \le |a|$;

в) $|-a|=|a|$;

г) $-|a| \le a \le |a|$;

д) $|a+b| \le |a|+|b|$;

е) $|a-b| \le |a|+|b|$;

ж) $|a+b| \ge |a|-|b|$;

з) $|a-b| \ge ||a|-|b||$.

2.70. Тенгликни исботланг:

а) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

б) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b \ne 0)$;

в) $|a^2|=|a|^2=a^2$;

г) $|a^{2n}|=|a|^{2n}=a^{2n}$, $n\in N$.

2.71. Ифодани модул белгисисиз ёзинг:

а) $|x-2|$;

б) $|x+2|$;

в) $|-x+3|$;

г) $|-x-4|$;

д) $|3x+7|$;

е) $|-3x+7|$;

ж) $|-3x-9|$;

з) $|4x|$;

и) $a+|a|$;

к) $2x+|a-1|$;

л) $3|xy|+a$;

м) $2|x-y|+y$.

2.72. Ифодани модул белгисисиз ёзинг:

а) $|x+1|+|x-1|$;

б) $|x-1|-2|x+2|$;

д) $|4x-8|+|x-2|+|x|$;

е) $|7x-5|+|2x-1|+|x-2|$;

в) $|2x-1|-|x-2|$; ж) $|7x+5|-|3x-2|+|x-3|$;
г) $|3x-7|+|4x-5|$; з) $|3x-6|+|8x-4|-|13x-20$.

2.73. Ифодани модул белгисисиз ёзинг:

а) $||x|-2|$; д) $||6x-1|-|4x+1||$;
б) $||x-3|-x|$; е) $||x-3|-|x||-|x-1|$;
в) $|x-3-|x||$; ж) $|x^2-|x|^2+|x|-|x-3||$;
г) $||x-3|-|x|$; з) $||3x+1|-|x||-|x-2|$.

2.74. a, b, c, d ҳақиқий сонлар бир вақтда нолга тенг эмаслигини модул белгисидан фойдаланиб қандай ёзиш мумкин?

2.75. a, b, c сонларидан камида иккитаси ўзаро тенг эмаслигини модул белгиси ёрдамида қандай ёзиш мумкин?

2.76. a, b, c лар ўзаро тенг эканини модул қатнашган тенгсизлик билан ифодаланг.

5. Ҳақиқий соннинг бутун ва каср қисми. a сонининг *бутун қисми* деб, a дан катта бўлмаган бутун сонларнинг энг каттасига айтилади ва $[a]$ ёки $E(a)$ орқали белгиланади. Ўқилиши: «a нинг бутун қисми» ёки «антье a» (французча entiere — бутун).

1 - мисол. $[3{,}2]=[3{,}8]=3$; $[0{,}2]=[0{,}99]=[0]=0$; $[-1{,}2]=[-1{,}5]=-2$; шу каби $10\frac{4}{5}+5\frac{2}{5}=16\frac{1}{5}$ бўлгани учун

$$\left[10\frac{4}{5}+5\frac{2}{5}\right]=\left[16\frac{1}{5}\right]=16;\ 28\cdot[0{,}7]=28\cdot 0=0;\quad 8:\left[2\frac{4}{5}\right]=4;$$

$[\pi]=3$; $[-\pi]=-4$.

Соннинг бутун қисми қуйидаги хоссаларга эга:

1 - хосса. $a, b\in Z$ бўлганда, $[a+b]=[a]+[b]$ бўлади.

2 - хосса. $a, b\in R$ бўлганда, $[a+b]\geq[a]+[b]$ бўлади. $[9+10]=[9]+[10]=19$. $[9{,}8]+[9{,}9]=9+9=18$. $[9{,}8+9{,}9]=[19{,}7]=19$; $18<19$.

$a-[a]$ айирмага a сонининг *каср қисми* дейилади ва $\{a\}$ орқали белгиланади: $\{a\}=a-[a] > 0$, $0\leq\{a\}<1$, бунда $a=[a]+\{a\}$.

2 - мисол. $\{16\frac{1}{5}\}=\frac{1}{5}, \{-1{,}5\}=\{-2+0{,}5\}=0{,}5;$

$\{\pi\}=0{,}14...$

3 -мисол. Агар $[a]=[b]$ бўлса, $-1<a-b<1$ бўлишини исбот қиламиз.

Исбот. $a=[a]+\{a\}$ ва $b=[b]+\{b\}$ бўлганидан $a-b=([a]+\{a\})-([b]+\{b\})=([a]-[b])+(\{a\}-\{b\})=\{a\}-\{b\}$. Лекин $0\leq\{a\}<1$, $0\leq\{b\}<1$.

Шунга кўра (ва қарама-қарши маънодаги тенгсизликларни ҳадлаб айириш мумкинлигига асослансак):

$$\begin{array}{l} 0 \leq \{a\} < 1 \\ \underline{1 > \{b\} \geq 0} \\ -1 \leq \{a\}-\{b\}<1. \end{array}$$

4 - мисол. Агар a сони бутун ва номанфий бўлса, $[na]\geq n[a]$ бўлишини исботланг.

Исбот. $[na]=[n([a]+\{a\})]=n[a]+n\{a\}$, бунда $n\{a\}\geq0$.

Демак, $[na]\geq n[a]$.

5 - мисол. $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2001$ кўпайтма нечта нол билан тугайди?

Ечиш. Агар бу кўпайтмани туб кўпайтувчиларга ажратсак, у $2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot...\cdot p^{\alpha_n}$ кўринишда бўлиб, 2 билан 5 кўпайтмасида 0 ҳосил бўлади. Демак, кўпайтмада нечта 2 ва нечта 5 қатнашишини аниқлаш зарур, яъни α_1, α_3 ни топиш зарур.

$[2001:5]=400$, $[2001:25]=80$,
$[2001:125]=16$, $[2001:625]=3$,
$[2001:2]=1000$, $[2001:4]=500$,
$[2001:8]=250$, $[2001:16]=125$;

$\alpha_3=400+80+16+3=499$,
$\alpha_1=1000+500+250+125+3+2=1880$.

Бундан кўринадики, 499 та 5 ва 2 сонлари кўпайтмаси 10 ҳосил қилади. Демак, кўпайтма 499 та нол билан тугайди.

Машқлар

2.77. Ҳисобланг.

а) $[2{,}8]$; в) $[0]$; д) $[-1{,}5]$; ж) $[\pi]$; и) $[\sqrt{15}]$;

б) $[2]$; г) $[0{,}9]$; е) $[-0{,}2]$; з) $[-\pi]$; к) $\left[\frac{100}{7}\right]$.

2.78. Ҳисобланг.

а) $100\cdot\left[\frac{1}{7}\right]$; д) $8\cdot\left[3\frac{2}{3}\right]$;

б) $\left[12\frac{2}{7}+5\frac{3}{7}\right]$; е) $\left[\frac{100}{7}\right]\cdot 7$;

в) $\left[12\frac{2}{7}\right]+\left[5\frac{6}{7}\right]$; ж) $\left[\frac{100}{7^2}\right]\cdot 7$;

г) $\left[12\frac{2}{7}\right]+\left[5\frac{6}{7}\right]$; з) $\left[\frac{490}{100}\right]^2$.

2.79. Тенгламани ечинг:

а) $\left[\frac{3x-1}{4}\right]=5$; в) $[2x+4]=-5$;

б) $\left[\frac{3x}{4}-1\right]=15$; г) $[3x-1]=-4$.

2.80. Тенгламани ечинг:

а) $\left[\frac{x-1}{2}\right]=x$; в) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=2x$;

б) $\left[\frac{3x+1}{2}\right]=-x$; г) $[3x+1]=\frac{x}{4}$.

2.81. 1, 2, 3, ..., n натурал сонлар кетма-кетлигида p натурал сонга бўлинувчи $\left[\frac{n}{p}\right]$ та ҳад бўлади. Исбот қилинг.

2.82. $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ бўлса, 600! сони нечта нол билан тугайди?

2.83. 600! ёйилмасида ҳар қайси 2,5,7 туб сони ва уларнинг даражаларига бўлинувчиларнинг умумий сони топилсин.

2.84. $n!$ сони туб кўпайтувчилари ёйилмасида p туб сони $x=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]$ марта қатнашади, бунда $p^m<n<p^{m+1}$. Шуни исбот қилинг.

6. Пропорция. $a\in R$, $b\in R\setminus\{0\}$ бўлса, $\frac{a}{b}$ ифода нисбат дейилади. Икки нисбатнинг тенглигини пропорция дейилади. Пропорция умумий ҳолда

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади, бунда $b\neq 0$, $d\neq 0$. a, b лар пропорциянинг *четки* ҳадлари, b, c лар эса *ўрта* ҳадлари дейилади.

Пропорция қуйидаги хоссаларга эга:

1. $ad=bc$;

2. $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a};\\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.\end{array}\right.$$

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{am}{b}=\frac{cm}{d}\\ \frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}\end{cases}$ $m,\ n\neq 0.$

(1) пропорциядан ҳосилавий пропорциялар деб аталувчи қуйидаги пропорцияларни ҳосил қилиш мумкин.

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\quad(2);\qquad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\quad(3);$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\quad(4);\qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}\quad(5);$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\quad(6).$$

Исбот: (2) ни исботлаймиз $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+$ $+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. Бу эса (2) пропорциядан иборат.

Мисол. $\frac{3+x}{3-x}=\frac{5}{6}$, $x-?$

(6) дан фойдалансак, $\frac{3+x+3-x}{3+x-3+x}=\frac{5+6}{5-6}$; $\frac{6}{2x}=\frac{11}{-1}$; $x=-\frac{3}{11}$.

Машқлар

2.85. Қуйидаги нисбатлардан пропорция тузиш мумкинми:

а) 42:14 ва 72:24; в) 3,5:21 ва $2\frac{1}{4}:13\frac{1}{2}$;

б) 78:13 ва 60:12; г) 0,1:0,02 ва 4:0,8 ?

2.86. Пропорциянинг номаълум ҳадини топинг:

а) $x:12=4\frac{3}{4}:7\frac{1}{8}$;

б) $x:1\frac{1}{7}=1\frac{3}{15}:1\frac{1}{3}$;

в) $6\frac{1}{2}:x=6\frac{5}{6}:4{,}1$;

г) $0{,}38:x=4\frac{3}{4}:1\frac{7}{8}$;

д) $13\frac{1}{2}:0{,}4=x:1\frac{1}{7}$;

е) $10{,}4:3\frac{5}{7}=x:\frac{5}{11}$;

ж) $15{,}6:2{,}88=2{,}6:x$;

з) $1{,}25:1{,}4=0{,}75:x$.

2.87. Пропорциядан x ни топинг:

а) $7x:42=45:27$;

б) $84:6x=28:14$;

в) $21:7=2\frac{1}{2}:x$;

г) $13\frac{1}{3}:1\frac{1}{3}=26:0{,}2x$;

д) $3\frac{1}{3}x:1{,}5=4\frac{2}{7}:\frac{3}{14}$;

е) $11\frac{1}{3}:1\frac{8}{9}=5\frac{1}{3}x:\frac{5}{8}$;

ж) $4x:31=44:11$;

з) $85:17x=105:84$;

и) $\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}=3\frac{1}{4}x:13$;

к) $3.3:7\frac{1}{3}=4\frac{2}{7}:1\frac{3}{7}$;

л) $3\frac{7}{19}:1\frac{1}{2}=2\frac{3}{8}:0{,}8x$;

м) $6\frac{2}{3}:1\frac{7}{9}x=0{,}48:1{,}2$.

2.88. Қуйидаги тенгликлар ёрдамида пропорциялар тузинг:

а) $15\cdot42=35\cdot18$;

б) $54\cdot55=66\cdot45$;

в) $2{,}5\cdot0{,}018=0{,}15\cdot0{,}3$;

г) $2\frac{1}{2}\cdot1\frac{2}{7}=\frac{5}{7}\cdot4\frac{1}{2}$.

2.89. Пропорциядан x ни топинг:

а) $$\frac{\left(4-3.5\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{x}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}};$$

б) $\dfrac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0,8} = \dfrac{0,016 : 0,12 + 0,7}{x}$;

в) $\dfrac{0,125x}{\left(\frac{19}{24} - \frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}} = \dfrac{\left(1\frac{28}{63} - \frac{17}{21}\right)\cdot 0,7}{0,675\cdot 2,4 - 0,02}$;

г) $\dfrac{x}{10,5\cdot 0,24 - 15,15 : 7,5} = \dfrac{9\cdot\left(1\frac{11}{20} - 0,945 : 0,9\right)}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} : 7}$.

7. Процент (фоиз) лар. Турмушда кўп ишлатиладиган $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ каср сонларнинг махсус номлари мавжуд. $\frac{1}{2}$-ярим, $\frac{1}{4}$-чорак, $\frac{1}{8}$-ярим чорак. Худди шундай касрлардан бири $\frac{1}{100}$дир.

Берилган соннинг бир проценти (фоизи) деб, унинг юздан бир қисмига айтилади ва % билан белгиланади.

Масалан, p соннинг 1% и $\frac{p}{100}$ касрни билдиради.

Демак, $1\% = \frac{1}{100}, 15\% = \frac{15}{100}, 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Соннинг $\frac{1}{1000}$ қисмига «промилле» дейилади ва %о билан белгиланади. 2000 нинг 5%о си $\frac{2000}{1000}\cdot 5 = 10$, $1\% = 10\%o$.

Процентларга доир 4 хил масала учрайди:

1) соннинг процентини топиш;

2) процентига кўра сонни топиш;
3) икки соннинг процент нисбатини топиш;
4) мураккаб процентга доир масалалар.

1-масала. a сонининг p % и x ни топинг.

$$p\% = \frac{p}{100}, x = \frac{ap}{100}.$$

Масалан, 340 нинг 15 % и қуйидагича топилади:

$$x = \frac{340 \cdot 15}{100} = \frac{102}{2} = 51.$$

2-масала. Соннинг p % и P га тенг. Шу сонни топинг.

$\frac{p}{100}$ бўлаги P га тенг бўлган x сон $x = \frac{P \cdot 100}{p}$ дир.

Соннинг 60% и 24 бўлса, соннинг ўзи $x = \frac{24 \cdot 100}{60} = 40.$

3-масала. m сони a сонининг неча процентини ташкил этади. Бу ерда m сонининг a сонига нисбатини процентларда ифода қилиш керак: $x = \frac{m}{a} \cdot 100.$

Академик лицейда 600 нафар ўқувчи бўлиб, 120 нафари қизлар. Қизлар академик лицей ўқувчиларининг неча процентини ташкил этади?

$$x = \frac{120 \cdot 100}{600} = 20\%.$$

4-масала. Халқ банки мижозларга 25 % фойда беради. Мижоз халқ банкига 4500 сўм пул топширса, 2 йилдан сўнг қанча сўм олади?

Ечиш: 1-йилда $4500 + \frac{4500}{100} \cdot 25 = 4500 + 45 \cdot 25 =$

$= 4500 + 1125 = 5625.$

2-йилда $5625 + \frac{5625}{100} \cdot 25 = 7031{,}25$

3-йилдан, 4= йилдан сўнг қанча сўм олишини топиш учун шу жараённи такрорлаш керак. Шунинг учун умумий формула чиқарамиз.

Халқ банкига a сўм қўйган мижоз p % фойда билан n йилдан сўнг қанча пул олиши $N_n = a(1+0{,}01p)^n$ формула билан ҳисобланади.

$$n=1 \text{ бўлса, } N_1 = a + \frac{a}{100}p\,,$$

$$n=2 \text{ бўлса, } N_2 = a\left(1 + \frac{1}{100}p\right)^2. \qquad (1)$$

(1) тенгликни исботлаймиз.

$$n=1 \text{ да } N_1 = a + \frac{a}{100}p$$

$$n=2 \text{ да } N_2 = a + \frac{a}{100}p + \left(a + \frac{a \cdot p}{100p}\right) \cdot \frac{p}{100} = \left(a + \frac{a}{100}p\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Машқлар

2.90. Каср кўринишида ифодаланг:

а) 7%; д) 6,8%; и) $1\frac{1}{4}$%;

б) 0,75%; е) 0,48%; к) $4\frac{3}{7}$%;

в) 255%;
г) 300%;
ж) 29%;
з) $4\frac{3}{7}\%$;
л) $225\frac{3}{4}\%$;
м) 0,099%.

2.91. Фоизларда ифодаланг:

а) 0,5;
б) 2,15;
в) 1,75;
г) 3;
д) $4\frac{3}{7}$;
е) $14\frac{1}{5}$;
ж) 43;
з) 5,7;
и) 15,2;
к) $4\frac{17}{43}$;
л) $8\frac{5}{9}$;
м) 0,79.

2.92. а) 1 нинг 4 га; д) 3,2 нинг 1,28 га;
б) 3 нинг 5 га; е) 15 нинг 18 га;
в) 5 нинг 2 га; ж) 0,43 нинг 5 га;
г) 12,5 нинг 50 га; з) $\frac{1}{7}$ нинг $\frac{3}{8}$ га процент нисбатини топинг.

2.93. a нинг p % ва q %о ни топинг:

а) $a=75$; $p=4$, $q=3$;
б) $a=84$; $p=15$, $q=20$;
в) $a=330$; $p=18\frac{1}{3}$, $q=15$;
г) $a=82,25$; $p=160$, $q=13$.

2.94. p %и a га тенг бўлган сонни топинг:

а) $p=1,25$; $a=55$;
б) $p=40$; $a=12$;
в) $p=0,8$; $a=1,84$;
г) $p=15$; $a=1,35$.

2.95. Пол сиртининг 72% ини бўяш учун 4,5 кг бўёқ кетди. Полнинг қолган қисмини бўяш учун қанча бўёқ керак бўлади?

2.96. Тўғри тўртбурчакнинг эни 20% узайтирилди, бўйи эса 20% қисқартирилди. Унинг юзаси ўзгарадими? Агар ўзгарса, қанчага ўзгаради?

2.97. Ишчи иш кунида 360 та детал тайёрлади ва кунлик режани 150% га бажарди. Ишчи режа бўйича бир кунда нечта детал тайёрлаши керак эди?

2.98. Мева қуритилганда ўз оғирлигининг 82% ини йўқотади. 36 кг қуритилган мева олиш учун неча кг ҳўл мева олиш керак?

2.99. 10% га арзонлаштирилган товар 18 сўмга сотилди. Товарнинг дастлабки нархини топинг.

2.100. Шахмат турнирида 16 ўйинчи иштирок этди ва ҳар бир ўйинчилар жуфтлиги фақат бир партия шахмат ўйнади. Ўйналган партияларнинг 40% ида дуранг қайд этилди. Нечта партияда ғалаба қайд этилган?

2.101. Маҳсулот нархи a сўм эди. Аввал унинг нархи $p\%$ га туширилди, сўнгра $q\%$ га оширилди. Маҳсулотнинг кейинги нархини топинг.

2.102. Узунлиги 19,8 м бўлган арқон икки бўлакка бўлинди. Бўлаклардан бирининг узунлиги иккинчисиникидан 20% ортиқ бўлса, ҳар бир бўлакнинг узунлигини топинг:

2.103. Тўғри тўртбурчакнинг катта томони 10% га камайтирилиб, кичик томони 10% га орттирилса, тўғри тўртбурчакнинг юзи қандай ўзгаради?

2.104. Халқ банки йилига 20% фойда тўлайди. Омонатчи кассага 15000 сўм қўйди. Икки йилдан кейин унинг кассадаги пули неча сўм бўлади?

2.105. Халқ банки 30% фойда тўлайди. Омонатга қўйилган пул неча йилдан кейин 2,197 марта кўпаяди?

8. Таққосламалар. a ва b бутун сонларини m натурал сонига бўлишда бир хил r ($0 \leq r < m$) қолдиқ ҳосил бўлса, a ва b сонлари *m модул* бўйича *таққосланадиган* (тенг қолдиқли) *сонлар* дейилади ва $a \equiv b \pmod{m}$ кўринишда белгиланади. a сони b сонига m модул бўйича таққосланишини ифодаловчи $a \equiv b \pmod{m}$ боғланиш *таққослама* деб ўқилади.

Мисол. $27=5\cdot 5+2$, $12=5\cdot 2+2$ бўлгани учун $27 \equiv 12 \pmod{5}$.

1-теорема. ***$a \equiv b \pmod{m}$ таққослама $a-b$ айирма m га қолдиқсиз бўлингандагина ўринли бўлади.***

Исбот: $a \equiv b \pmod{m}$ таққослама ўринли бўлсин, яъни a ва b сонларини m сонига бўлишда айни бир хил r қолдиқ ҳосил бўлсин. У ҳолда $a=mq+r$, $b=mq'+r$ тенгликлар ўринли бўлади, бу ерда $q,q' \in Z$. Бу тенгликларни ҳадма-ҳад айириб, $a-b=mq-mq'=m(q-q')$ га эга бўламиз. Демак, $a-b$ сони m га бўлинади.

Аксинча, $a-b$ сони m га бўлинсин, яъни $a-b=km$, $k \in Z$ (1) бўлсин. b сонини m сонига қолдиқли бўламиз: $b=mq+r$, $0 \leq r < m$ (2).

(1) ва (2) лардаги тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб, $a=(k+q)m+r$ тенгликка эга бўламиз, бу ерда $0 \leq r < m$. Бундан a сонини m сонига бўлишдаги қолдиқ b ни m сонига бўлишдаги қолдиққа тенглиги келиб чиқади. Демак, $a \equiv b \pmod{m}$ таққослама ўринли.

2-теорема. ***Ҳар бири c сони билан таққосланадиган a ва b сонлари бир-бири билан ҳам таққосланади.***

Исбот: $a=c \pmod{m}$ ва $b=c \pmod{m}$ бўлсин. У ҳолда 1-теоремага кўра $a-c=mq_1$, $b-c=mq_2$ тенгликлар ўринли бўлади, бу ерда $q_1,q_2 \in Z$. Бу тенгликлардан $a-b=m(q_1-q_2)$ ни оламиз. Демак, $a \equiv b \pmod{m}$ таққослама ўринли.

3-теорема. ***Модули бир хил таққосламаларни ҳадма-ҳад қўшиш мумкин.***

Исбот. $\begin{cases} a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\ m), \\ a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\ m), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 = mq_1, \\ a_2 - b_2 = mq_2, \end{cases} \Rightarrow (a_1 + a_2) -$

$-(b_1 + b_2) = m(q_1 + q_2) \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2\ (\mathrm{mod}\ m).$

3-теоремадан таққосламада қўшилувчини бир қисмдан иккинчи қисмга қарама-қарши ишора билан ўтказиш мумкин эканлиги келиб чиқади.

Ҳақиқатан, $a+b \equiv c$ (mod m) га аён $-b=-b$ (mod m) таққосламани қўшсак, $a \equiv c-b$(mod m) ҳосил бўлади.

4-теорема. ***Таққосламанинг ихтиёрий бир қисмига таққосламанинг модулига бўлинадиган ҳар қандай бутун сонни қўшиш мумкин.***

Исбот. $a \equiv b$(mod m) ва $mk \equiv 0$(mod m) бўлсин. Бу таққосламаларни ҳадма-ҳад қўшсак, $a+mk=b$ (mod m) ҳосил бўлади.

Масалан, 27=12(mod 5) ⇒ 27+35 ≡12(mod 5) ⇒ 62 ≡12(mod 5).

5-теорема. ***Бир хил модулли таққосламаларни ҳадлаб кўпайтириш мумкин.***

Ҳақиқатан, $a \equiv b$(mod m), $c \equiv d$(mod m) таққосламалар ўринли бўлса, улардан мос равишда $a-b=mq_1$ ва $c-d=mq_2$ тенгликлар келиб чиқади. Бу тенгликлар асосида $ac-bd=ac-bc+bc-bd=m(cq_1+bq_2)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, $ac \equiv bd$(mod m) таққослама ўринли (1-теорема).

5-теоремадан таққосламанинг ҳар иккала қисмини бир хил натурал кўрсаткичли даражага кўтариш мумкинлиги келиб чиқади, яъни $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^n \equiv$ $\equiv b^n$(mod m).

Таққосламаларнинг амалиётда кенг қўлланиладиган қуйидаги хоссаларини исботсиз келтирамиз:

а) таққосламанинг иккала қисмини бирор бутун сонга кўпайтириш мумкин;

б) таққосламанинг иккала қисмини ва модулни бирор бутун сонга кўпайтириш мумкин;

в) таққосламанинг иккала қисми ва модулини уларнинг умумий бўлувчиларига бўлиш мумкин;

г) агар а ва b сонлари $m_1, m_2, ..., m_n$ модуллар бўйича таққосланса, у ҳолда улар $K(m_1, m_2, ..., m_n)$ модул бўйича ҳам таққосланади;

д) агар d сони m нинг бўлувчиси бўлиб, $a\equiv b(mod\ m)$ бўлса, у ҳолда $a\equiv b(mod\ d)$ бўлади.

1-мисол. 3^{30} ни 8 га бўлишдан чиқадиган қолдиқни топамиз.

Ечиш: $3^2 = (9-8)(\mathrm{mod}\ 8) \Rightarrow (3^2)^{15}\equiv 1^{15}(\mathrm{mod}\ 8) \Rightarrow \Rightarrow 3^{30}\equiv 1(\mathrm{mod}8) \Rightarrow 3^{30}=8q+1$. Демак, изланаётган қолдиқ $r=1$.

2-мисол. $\Sigma = 30^{n+2}+23^{n+1}+9^n$ ($n\in\mathrm{N}$) сонининг 7 га бўлинишини исбот қилинг.

Ечиш: $\left|\begin{array}{l}30\equiv 2(\mathrm{mod}\,7),\\ 23\equiv 2(\mathrm{mod}\,7),\\ 9\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}30^{n+2}\equiv 2^{n+2}(\mathrm{mod}\,7),\\ 23^{n+1}\equiv 2^{n+1}(\mathrm{mod}\,7),\\ 9^n\equiv 2^n(\mathrm{mod}\,7)\end{array}\right.$

$\Rightarrow 30^{n+2}+23^{n+1}+9^n(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow \Sigma \equiv 2^n(2^2+2'+2^0)(\mathrm{mod}\ 7)$ $\Rightarrow$ (Σ йиғинди 7 га бўлинади).

3-мисол. 2222^{5555} сонини 7 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. 2222 ни 7 га қолдиқли бўламиз: $2222= =7\cdot 317+3$. Бундан, $2222\equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$ ни оламиз. Ҳосил бўлган таққосламанинг ҳар икки томонини 5555-даражага кўтарамиз: $2222^{5555}\equiv 3^{5555}(\mathrm{mod}\ 7)$.

Бу таққослама изланаётган қолдиқ 3^{5555} ни 7 га бўлишдан ҳосил бўладиган қолдиқ билан бир хил эканлигини кўрсатади. 3^{5555} ни 7 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топамиз. Бунинг учун 3 нинг дастлабки бир нечта даражаларини 7 га бўлишда қандай қолдиқлар ҳосил бўлишини кузатайлик:

$3^1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3^2 \equiv 3\cdot 3 \equiv 9 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3^3 \equiv 2\cdot 3 \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3^4 \equiv 6\cdot 3 \equiv 18 \equiv 4 (\mathrm{mod} 7)$; $3^5 \equiv 4\cdot 3 \equiv 12 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3^6 \equiv 5\cdot 3 \equiv 15 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$; $3^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$ га эга бўлдик. Бундан, $3^{6k} \equiv 1^k (\mathrm{mod}\ 7)$ $k \in N$ (2) ни оламиз.

Энди 5555 ни 6 га бўламиз. $5555 = 6\cdot 925 + 5$.

У ҳолда $3^{5555} = 3^{6.925+5} = 3^{6.925}\cdot 3^5 \equiv 1\cdot 3^5 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 7)$.

Шундай қилиб, изланаётган қолдиқ 5 га тенг.

4-мисол. $2^{60}+7^{30}$ сони 13 га бўлинади. Исботланг.

Исбот: $2^4 = 13+3$ ва $7^2 = 49 = 13\cdot 4 - 3$ бўлгани учун $2^4 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 13)$, $7^2 \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 13)$ ларга эгамиз. Охирги ҳар бир таққосламани 15-даражага кўтариб, уларни ҳадма-ҳад қўшамиз: $2^{60}+7^{30} \equiv 0.\ (\mathrm{mod}\ 13)$.

Демак, $2^{60}+7^{30}$ сони 13 га бўлинади.

5-мисол. 7^{7^7} нинг охирги рақамини топинг.

Ечиш: 7 нинг дастлабки бир нечта даражаларининг охирги рақамини кузатамиз.

$$\begin{array}{ll} 7^1 = 7 & 7^5 = {*7} \\ 7^2 = 49 & 7^6 = {*9} \\ 7^3 = {*3} & 7^7 = {*3} \\ 7^4 = {*1} & 7^8 = {*1} \end{array}$$

Такрорланиш содир бўлди (қадам 4 га тенг). Кузатув қуйидаги хулосани чиқаришга имкон беради:

$$7^n = \begin{cases} {*7}, & \text{агар} \quad n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \\ {*9}, & \text{агар} \quad n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ {*3}, & \text{агар} \quad n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \\ {*1}, & \text{агар} \quad n = 0 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases} \qquad (3)$$

Энди $n = 7^{7^7}$ ни 4 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни аниқлаймиз:

$7^1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$; $7^2 \equiv 3\cdot 7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$; $7^{2k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$; $7^{77} = 7^{2\cdot 38+1} = 7^{2.38}\cdot 7 \equiv 1\cdot 7 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$

$7^{77} \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ бўлгани учун, (3) га асосан $7^{7^{77}} = *3$.

Шундай қилиб, охирги рақам 3 экан.

6 - мисол. Ихтиёрий n натурал сон учун n^5-n сони 5 га бўлинишини исботланг.

Исбот: n — ихтиёрий натурал сон бўлсин. n ни 5 га бўламиз.

Агар $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 5)$ бўлса, $n^5-n \equiv 0^5-0 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ бўлади.

Агар $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$ бўлса, $n^5-n \equiv 1^5-1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ бўлади.

Агар $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$ бўлса, $n^5-n \equiv 2^5-2 \equiv 30 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ бўлади.

Агар $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$ бўлса, $n^5-n \equiv 3^5-3 \equiv 240 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ бўлади.

Агар $n \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$ бўлса, $n^5-n \equiv 4^5-4 \equiv 1020 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ бўлади.

n нинг ҳар қандай қийматида, $n^5-n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ эканини кўрамиз. Демак, $\forall n \in \mathrm{N}$ учун n^5-n сони 5 га қолдиқсиз бўлинади.

Машқлар

2.106. a ни b га қолдиқли бўлинг:

а) $a=70$, $b=3$; в) $a=200$, $b=17$;
б) $a=180$, $b=9$; г) $a=76$, $b=9$.

2.107. a ни b га қолдиқли бўлинг:

а) $a=5$, $b=9$; в) $a=9$, $b=18$;
б) $a=11$, $b=23$; г) $a=4$, $b=75$.

2.108. a ни b га қолдиқли бўлинг:

а) $a=-81$, $b=75$; д) $a=-33$, $b=7$; з) $a=15$, $b=43$;
б) $a=-5$, $b=9$; е) $a=-48$, $b=6$; и) $a=27$, $b=9$;
в) $a=-41$, $b=7$; ё) $a=-6$, $b=48$; к) $a=33$, $b=32$;
г) $a=-35$, $b=7$; ж) $a=-8$, $b=24$; л) $a=108$, $b=36$.

2.109. $a \in \mathrm{N}$, $b \in \mathrm{N}$ бўлиб, $a=bq+r$ ($q \in \mathrm{Z}$, $r \in \mathrm{N}$, $0 \leq r < b$) бўлсин. $-a$ ни b га бўлишда ҳосил бўладиган тўлиқсиз бўлинма q_1 ни ва қолдиқ r_1 ни топинг.

2.110. a ни b га бўлишдаги қолдиқни топинг:

а) $a=81932$, $b=9$;
б) $a=25$, $b=75$;
в) $a=-4$, $b=49$;
г) $a=-49$, $b=4$;
д) $a=4341$, $b=3$;
е) $a=144$, $b=6$;
ё) $a=-15$, $b=11$;
ж) $a=-13$, $b=35$;
з) $a=111$, $b=11$;
и) $a=-11$, $b=111$;
к) $a=-9$, $b=3$;
л) $a=-3$, $b=9$.

2.111. Қуйидаги тенглик қолдиқли бўлишни ифодалайдими:

а) $21=3\cdot4+9$;
б) $-18=9\cdot2-36$;
в) $35=2\cdot17+1$;
г) $11=2\cdot4+3$;
д) $26=4\cdot5+6$;
е) $-15=11\cdot(-2)+7$;
ё) $-49=7\cdot8+(-7)$;
ж) $84=2\cdot42$;
з) $81=81\cdot0+81$;
и) $-40=4\cdot(-11)+4$;
к) $-35=(-7)\cdot8+21$;
л) $49=4\cdot11+5$?

2.112. Таққослама тўғрими:

а) $125\equiv-35(\mathrm{mod}\ 4)$;
б) $44\equiv-32(\mathrm{mod}\ 25)$;
в) $-58\equiv11(\mathrm{mod}\ 5)$;
г) $111\equiv13(\mathrm{mod}\ )$;
д) $113\equiv13(\mathrm{mod}\ 100)$;
е) $842\equiv42(\mathrm{mod}\ -5)$;
ё) $31\equiv-20(\mathrm{mod}\ 17)$;
ж) $1\equiv18(\mathrm{mod}\ 0)$?

2.113. $n\in\{3,5,9\}$ бўлсин. n нинг қайси қийматларида таққослама тўғри бўлади:

а) $33\equiv3(\mathrm{mod}\ n)$;
б) $134\equiv-25(\mathrm{mod}\ n)$;
в) $-223\equiv41(\mathrm{mod}\ n)$;
г) $34\equiv72(\mathrm{mod}\ n)$;
д) $43\equiv-2(\mathrm{mod}\ n)$;
е) $-121\equiv13(\mathrm{mod}\ n)$;
ё) $155\equiv11(\mathrm{mod}\ n)$;
ж) $-48\equiv11(\mathrm{mod}\ n)$?

2.114. 5^{20} ни 24 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

2.115. 3333^{6666} ни 5 га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

2.116. Соннинг охирги рақамини топинг:

а) $8^{8^{87}}$; д) $555^{222^{22}}$; з) 10001^{9^n}, $n\in N$;

б) $113^{8^{91}}$; е) $333^{444^{555}}$; и) 1005^{1005n}, $n\in Z$;

в) $144^{5^{555}}$; ё) $1111^{9^{99}}$; к) $8^{8^{95}}$;

г) $2002^{9^{95}}$; ж) $999^{2^{888^{999}}}$; л) $6^{7^{89}}$.

2.117. n нинг барча бутун қийматларида (n^3+11n) сони 6 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

2.118. n нинг барча бутун қийматларида (n^3-n) 3 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

2.119. n^2+1 сони n нинг ихтиёрий бутун қийматида 3 га бўлинмаслигини исботланг.

2.120. (3299^5+6^{18}) сонини 56 га бўлинишини исботланг.

2.121. $12^{2n+1}+11^{2n+2}$ сони n нинг ҳар қандай натурал қийматида 133 га бўлинишини исботланг.

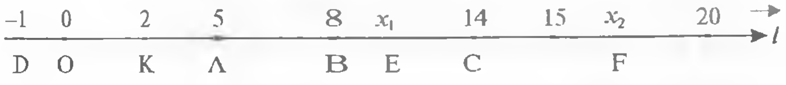
2.122. p сони 3 дан катта туб сони бўлса, p^2-1 сони 24 га бўлинади. Исботланг.

2.123. p ва q сонлари 3 дан катта туб сонлар бўлса, p^2-q^2 сони 24 га бўлинади. Исботланг.

4-§. Координаталар ўқи ва координаталар текислиги

1. Йўналтирилган кесма, тўғри чизиқдаги координаталар. Бирор l тўғри чизиқда йўналиш киритиб, уни *мусбат йўналиш*, тескарисини эса *манфий йўналиш* сифатида қабул қилайлик (10-расм).

Йўналтирилган $\vec{l}$ тўғри чизиқда O, A, B, ... нуқталарни белгилаймиз. A ва B нуқталар ҳосил қилган кесманинг бир учини унинг боши, иккинчи учини эса унинг охири сифатида қабул қилиб, йўналтирилган (йўналишга эга бўлган) кесмани ҳосил қиламиз.



10-расм.

Боши A, охири эса B бўлган йўналтирилган кесмани $\vec{AB}$ билан белгилаймиз. У ҳолда $\vec{AB}$ ва $\vec{BA}$ кесмалар қарама-қарши йўналтирилган кесмалар бўлади: $\vec{AB}=-\vec{BA}$. Агар $\vec{AB}$ кесманинг йўналиши l тўғри чизиқ йўналиши билан бир хил бўлса, уни мусбат йўналтирилган, акс ҳолда эса манфий йўналтирилган кесма деб атаймиз.

Йўналтирилган $\vec{l}$ тўғри чизиқда координаталар боши сифатида бирор O нуқтани (10-расм) ва узунлик ўлчов бирлигини танлайлик. Йўналтирилган $\vec{AB}$ кесманинг *катталиги* деб модули шу кесманинг узунлигига тенг AB сонга айтилади; агар AB нинг йўналиши $\vec{l}$ нинг йўналиши билан бир хил бўлса, $AB>0$, акс ҳолда $AB<0$ бўлади. Боши ва охири устма-уст тушган кесманинг узунлиги нолга тенг бўлади. 10-расмда AB=3, $BA=-3$, $BC=6$, $CA=-9$ тасвирланган. Унда AB+BC+CA=0 бўлишини кўрамиз. Бу мулоҳаза $A_1,...,A_n$ нуқталарнинг ихтиёрий чекли тўплами учун ўринли бўлиши тушунарли. $\vec{OA}$ кесманинг катталиги А нуқтанинг *координатаси* дейилади ва $A(x)$ кўринишида ёзилади $\vec{l}$ тўғри чизиққа *координаталар тўғри чизиғи* (*ўқи*) дейилади.

Сонлар ўқида ҳар битта нуқтага битта аниқ сон мос келади ва аксинча. $\forall a,b\in R$ сонлари учун қуйидаги муносабатлардан биттаси албатта бажарилади: $a=b$; $a>b$; $a<b$.

Таъриф. $a>b$, $a<b$ муносабатларга сонли тенгсизлик дейилади. Сонли тенгсизликлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. *Агар $a>b$ бўлса, у ҳолда $b<a$ бўлади.*

2. *Агар* $a>b$ *ва* $b>c$ *бўлса, у ҳолда* $a>c$ *бўлади.*

3. *Агар* $a>b$ *бўлса,* $\forall\ c\in R$ *учун* $a\pm c>b\pm c$ *бўлади.*

4. *Агар* $a>b$ *бўлса,* $\forall c>0$ *учун* $ac>bc$ *ва* $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ *бўлади.*

5. *Агар* $a<b$ *бўлса,* $\forall c<0$ *учун* $ac>bc$ *ва* $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ *бўлади.*

$a>b$ ва $c>d$ ёки $a<b$ ва $c<d$ тенгсизликлар *бир хил маънoли тенгсизликлар* дейилади.

6. $a>b$ *ва* $c>d$ *бўлса,* $a+c>b+d$ *бўлади.*

7. $a>b$ *ва* $c<d$ *бўлса,* $a-c>b\text{-}d$ *бўлади.*

8. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ *бўлиб,* $a>b$ *ва* $c>d$ *бўлса,* $ac>bd$ *бўлади.*

9. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ *бўлиб,* $a>b$ *ва* $c<d$ *бўлса,* $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ *бўлади.*

10. $a>0$, $b>0$, $a<b$ *бўлса,* $n\in\mathbb{N}$ *учун* $a^n<b^n$ *бўлади.*

11. $a>0$, $b>0$ *учун* $a<b$ *бўлса,* $\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$ *бўлади.*

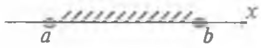
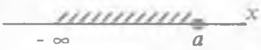
$a>b$, $c<d$ тенгсизликлар *қатъий тенгсизликлар*, $a\geq$ $\geq b$, $c\leq d$ тенгсизликлар эса *ноқатъий тенгсизликлар* дейилади.

4-хоссани исботлаймиз:

$c>0$ ва $a-b>0$ бўлганлиги учун $c(a-b)=ac-bc>0$ бўлади. Демак, $ac>bc$.

Сон ўқида x ўзгарувчи турли оралиқларда жойлашган бўлиши мумкин, бу оралиқлар *сонли оралиқлар* дейилади. Сонли оралиқлар аниқ бир сонли тўпламни аниқлайди. Сонли оралиқлар $a<x<b$ ёки бошқа кўринишдаги тенгсизликларнинг геометрик талқинидан иборат.

Қуйидаги жадвалда энг кўп қўлланиладиган сонли оралиқлар берилган.

№	Оралиқ номи	Тенгизлик шаклда ёзилиши	Символик белгиланиши	Геометрик талқини
1	«*a*» дан «*b*» гача ёпиқ оралиқ	$a\leq x\leq b$	$[a,b]$	
2	«*a*» дан «*b*» гача очиқ оралиқ	$a<x<b$	(a,b)	
3	«*a*» дан «*b*» гача ярим очиқ оралиқ	$a<x\leq b$	$(a,b]$	
4	«*a*» дан «*b*» гача ярим очиқ оралиқ	$a\leq x<b$	$[a,b)$	
5	«*a*» дан $+\infty$ гача сонли нур	$x\geq a$ $(a\leq x)$ $(a\leq x<+\infty)$	$[a,+\infty)$	
6	«*a*» дан $+\infty$ гача очиқ оралиқ	$x>a$ $(a<x)$ $(a<x<+\infty)$	$(a,+\infty)$	
7	$-\infty$ дан «*a*» гача сонли нур	$x\leq a$ $(a\geq x)$ $(-\infty<x\leq a)$	$(-\infty,a]$	
8	$-\infty$ дан «*a*» гача очиқ оралиқ	$x<a$ $(a>x)$ $(-\infty<x<a)$	$(-\infty,a)$	
9	Сон ўқи	$-\infty<x<+\infty$	$(-\infty,+\infty)$	

1 - мисол. Координаталар тўғри чизиғида $E(x_1)$ ва $F(x_2)$ нуқталар орасидаги масофани топамиз.

Ечиш. Чизмага қараганда (10-расм) $OE+$ $+EF+FO=0$, бундан $EF=-FO-OE=OF-OE=x_2$-x_1. Демак, $EF=|EF|=|x_2-x_1|$.

2-мисол. Координаталар тўғри чизиғида (10-расм.) B(8) нуқтадан 6 бирлик узоқликда жойлашган нуқталарни топамиз.

Ечиш. Изланаётган нуқтанинг координатаси x бўлсин. Уни топамиз:

$$|x-8|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-8>0, \\ x-8=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x-8<0, \\ -x+8=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>8, \\ x=14; \end{cases} \\ \begin{cases} x<8, \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=14, \\ x=2. \end{array}\right.$$ Жавоб: K(2), C(14).

3-мисол. Координаталар тўғри чизиғида ушбу тенгсизликлар ечимини тасвирлаймиз: а) $|x-8| \leq 6$; б) $|x-8| > 6$.

Ечиш. а) $|x-8|$ сони N(x) нуқтадан (10-расм) B(8) нуқтагача масофага тенг ва 6 дан ортиқ эмас. Шунга кўра: $|x-8| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x-8 \leq 6$ ёки $2 \leq x \leq 14$. Изланаётган нуқталар тўплами K(2) ва C(14) нуқталар орасидаги KC кесмадан иборат; б) координаталар тўғри чизиғининг [2;14] кесмадан ташқаридаги қисми жавобни беради: $(-\infty;2) \cup (14;+\infty)$.

4-мисол. Учлари $A(x_1)$, $B(x_2)$ нуқталарда бўлган AB кесмани $AM{:}MB = 1:1$ нисбатда бўлувчи $M(x)$ нуқтани топамиз.

Ечиш. $$\frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Агар (1) да $\lambda=1$ десак, AB кесма ўртасининг координатаси: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ ҳосил бўлади. Шунингдек, (1) формулага $l=m_2{:}m_1$ ни қўйиб, AB кесмани $m_2{:}m_1$ нисбатда бўлувчи нуқта координатасини ҳосил қилиш мумкин: $x \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$.

Умуман, m_1, m_2, ..., m_n массалар мос тартибда $A_1(x_1),\ldots,A_n(x_n)$ нуқталарга қўйилган бўлса, бу массалар $M(x)$ марказининг координатаси

$$x\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n} \qquad (2)$$

бўлади.

5 - мисол. 2, 4, 6, 8 га тенг массалар мос тартибда A(2), B(9), C(−6), D(3) нуқталарга жойлаштирилган. Массалар марказини топамиз.

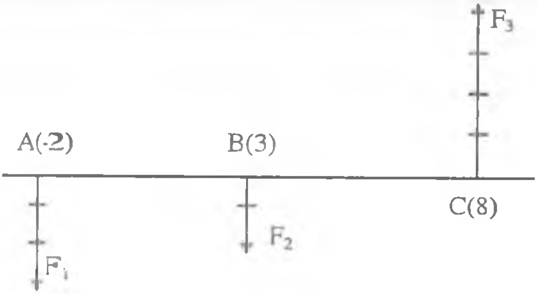
Ечиш. (2) формула бўйича:

$$x=\frac{2\cdot2+4\cdot9+6\cdot(-6)+8\cdot3}{2+4+6+8}=1{,}4.$$

6 - мисол. Координата тўғри чизиғининг A, B, C нуқталарига (11-расм) тик қўйилган F_1, F_2, F_3 кучлар тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта координатасини топамиз.

Ечиш. Чизмада $A(-2), B(3), C(8)$, $F_1=-3$, $F_2=-2$, $F_3=4$. (4) формула бўйича:

$$x=\frac{(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot3+4\cdot8}{-3-2+4}=-32.$$



11-расм.

Машқлар

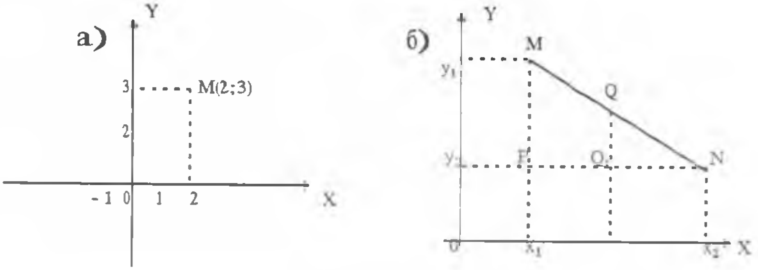
2.124. Тўпламларни координаталар тўғри чизиғида тасвирланг:
а) $A=\{x|-5 \le x \le 20\}$; б) $B=\{x| -4<x< 6\}$;
в) $C=\{x| |x+1|<5\}$.

2.125. а) Координаталар тўғри чизиғида шундай нуқталарни топингки, улардан $A(-4)$ гача масофа $B(6)$ гача масофадан 4 марта катта бўлсин.
б) $A(2)$, $B(4)$, $C(5)$, $D(9)$ моддий нуқталарнинг массалари мос тартибда 3, 5, 7, 9 га тенг. Массалар марказининг координатасини топинг.

2.126. а) $A(-3)$ ва $B(6)$ нуқталарда 4 Кл ва 2 Кл электр заряди жойлаштирилган. Координаталар ўқида шундай нуқтани топингки, унда бу зарядлар тортишув кучларининг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлсин.
б) A(-4) ва B(2) нуқталарда мос тартибда 2 Кл ва 1 Кл заряд жойлаштирилган. Сон ўқининг қайси нуқтасида бу зарядлар таъсири тенглашади?

2. Координата текислиги. Текисликнинг белгиланган O нуқтаси (саноқ боши) орқали ўзаро перпендикуляр бўлган Ox (абсциссалар) ва Oy (ординаталар) ўқларини ўтказамиз. O нуқта бу иккала ўқ бўйича ҳам 0 (нол) координатага эга: $O(0;0)$. O нуқтадан мусбат ва манфий йўналишлар бошланади. Текисликдаги ҳар қандай M нуқта битта $(x;y)$ координаталар жуфтига эга бўлади (12-*а*, расм). Текисликда координаталар системасининг киритилиши кўпгина геометрик масалаларни алгебраик усулда ечиш имконини беради.

1 - мисол. Текисликнинг $M(x_1;y_1)$ ва $N(x_2;y_2)$ нуқталари орасидаги MN масофани топинг (12–*б*, расм).



12-расм.

Ечиш. Агар $x_1=x_2$ бўлса, MN кесма MP кесма билан устма-уст жойлашган бўлади ва $MN=|y_2-y_1|$ бўлиши аён. Шу каби $y_1=y_2$ да $MN=|x_2-x_1|$ бўлади.

$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ бўлсин. Пифагор теоремасига мувофиқ $MN^2=PN^2+MP^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. Демак,

$$MN=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\ . \qquad (1)$$

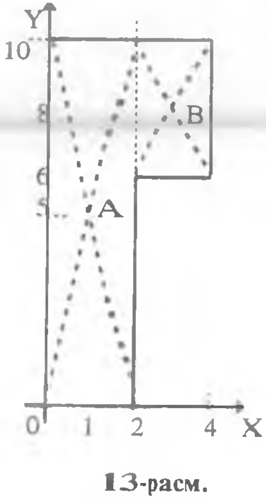
2 - мисол. Текисликда ётган $M(x_1;y_1)$ ва $N(x_2;y_2)$ нуқталар орасидаги масофани $\lambda:1, \lambda>0$, нисбатда бўлувчи $Q(x,y)$ нуқтани топинг (12-расм).

Ечиш. Учбурчакларнинг ўхшашлигига кўра $PQ:QN=MQ::QN=\lambda:1$, бундан ва 1-банддаги (2) формула бўйича:

$$x=\frac{x+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Бу формулалар $\lambda \leq 0, \lambda \neq -1$ да ҳам ўринли.

3 - мисол. 13-расмда тасвирланган бир жинсли пластинканинг массалар марказини топинг.



13-расм.

Ечиш. Пластинкани икки тўртбурчакка ажратамиз. Бир жинсли бўлганидан пластинка юзини массасига мутаносиб (коэффициентини эса 1 га тенг) деб оламиз. У ҳолда тўртбурчаклар массалари маркази диагоналлари кесишган нуқтада,юзалари эса $S_1=m_1=2\cdot 10=20$, $S_2=2\cdot 4=8$ бўлади. 1-банддаги (2) формулалар бўйича:

$$x=\frac{20\cdot 1+\ 8\cdot 3}{20+\ 3}=1\frac{4}{7},\ \ y\frac{20\cdot 5+8\cdot 8}{20+8}=5\frac{6}{7}.$$

Машқлар

2.127. а) Ординаталар ўқида A(1;-3) нуқтадан 4 бирлик узоқликдаги *Y* нуқта топилсин.

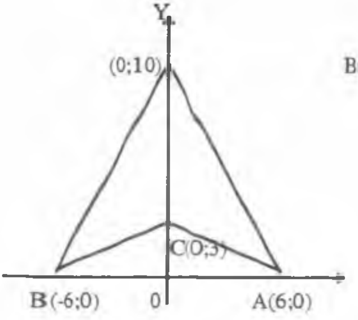
б) *ABC* учбурчак берилган, *A*(-5;-3), *B*(6;2), *C*(3;-1). *BC* ва *AC* томонларнинг ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг.

в) Трапециянинг учлари *A*(-3;2), *B*(8;2), *C*(6;5), *D*(-1;5) нуқталарда ётади. Трапеция ўрта чизиғининг узунлигини топинг.

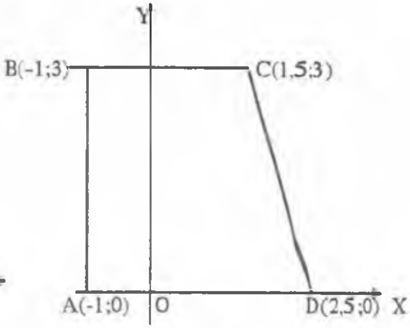
г) Учбурчакнинг учлари: *A*(0;-2), *B*(3;0), *C*(-1;4). Унинг: 1) медианалари кесишган *N* нуқтани; 2) *AB* томонининг *A* учидан бошлаб 3:1 нисбатда бўлувчи *M* нуқтани топинг; 3) *KN* тўғри чизиқ кесмасининг узунлигини топинг.

2.128. Агар *A*(-4;–3), *B*(-4;4), *O*(0;0), бўлса, *AOB* учбурчакнинг *AK* биссектрисаси билан *BC* томонининг кесишув нуқтасини топинг.

2.129. а) 14-расмда тасвирланган стерженлар системасининг; б) 15-расмда тасвирланган шаклдаги бир жинсли пластинканинг массалар марказини топинг.



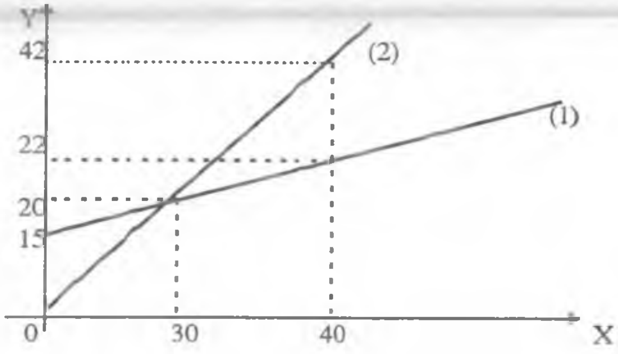
14-расм.



15-расм.

2.130. а) Йиғувчи линза учун $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$ тенглик ўринли, бунда F=2 м — линзанинг фокус оралиғи, d ва f — линзадан буюмгача ва унинг тасвиригача масофалар; линза $A(6;3)$ нуқтада, буюм $B(2;0)$ нуқтада жойлаштирилган. Тасвирнинг координаталари топилсин.

б) Абсциссалар ўқида (16-расм) корхона ишлаб чиқараётган буюмлар миқдори (тонналарда), ординаталар ўқида харажат ва даромад (ўн минг сўмларда), (1) тўғри чизиқ маҳсу-



16-расм.

лотни ишлаб чиқариш учун харажат, (2) тўғри чизиқ маҳсулотни сотишдан олинадиган даромадни тасвирлайди. Саволларга жавоб беринг: 1) корхонада ишлаб чиқариш бошлангунча (x=0 ҳоли) қанча харажат бўлган? 2) ишлаб чиқарилган маҳсулотдан қанчаси сотилгандан кейин дастлабки харажатлар қопланган ва корхона соф фойда ола бошлаган? с) 2 т маҳсулотни тайёрлашга қанча маблағ сарф бўлади, сотишдан қанча даромад олинади, соф фойда қанча бўлади?

5-§. Индукция. Математик индукция методи.

1. Индукция. X тўплам берилган бўлсин. Мулоҳаза юритишнинг қуйидаги икки усулини қараймиз:

а) Бирор тасдиқ баъзи $x \in X$ элементлар учун тўғри бўлса, бу тасдиқ барча $x \in X$ лар учун тўғри бўлади.

б) Бирор тасдиқ ҳар бир $x \in X$ элемент учун ўринли бўлса, бу тасдиқ барча $x \in X$ лар учун ўринли бўлади.

Мулоҳаза юритишнинг а) усули *тўлиқмас индукция*, б) усули эса *тўлиқ (мукаммал) индукция* дейилади (индукция сўзи лотинча сўз бўлиб, ўзбек тилида «ҳосил қилиш», «яратиш» маъносини билдиради).

1-мисол. N={1;2;3;4;... } натурал сонлар тўпламида аниқланган $A(n)=n^2+n+17$ ифодани қараймиз. $A(1)=19$, $A(2)=23$, $A(3)=29$ ва $A(4)=37$ сонлари туб сонлардир. Шунинг учун, барча $n \in N$ сонлари учун, $A(n)=n^2+n+17$ ифоданинг қиймати туб сон бўлади.

Бу ерда тўлиқмас индукция ёрдамида хулоса чиқарилди. Чиқарилган бу хулоса нотўғридир, чунки $A(16)=289=17^2$ сони туб сон эмас.

2-мисол. X={10;20;30;40;50;...} тўплам, ёзуви 0 рақами билан тугайдиган барча натурал сонлар тўплами бўлсин. 10;20;30;40;50 сонларининг ҳар бири 2 га қолдиқсиз бўлинади. Шунинг учун, X тўпламнинг ҳар қандай x элементи 2 га бўлинади. Тўлиқмас индукция ёрдамида чиқарилган бу хулоса тўғри хулосадир, чунки X тўпламнинг ҳар қандай элементи жуфт сондир.

3 - мисол. $N=\{1;2;3;...;1000000001;..\}$ натурал сонлар тўпламида аниқланган $B(n)=991n^2+1$ ифодани қараймиз. $B(1)$, $B(2)$, . . . , $B(1000000001)$ сонлари бутун соннинг квадрати эмас (бу тасдиқ исботланган!). Шунинг учун, барча $n\in N$ лар учун $B(n)$ сони бутун соннинг квадрати бўла олмайди.

Тўлиқмас индукция ёрдамида чиқарилган бу хулоса нотўғридир. Замонавий ҳисоблаш машиналари ёрдамида n нинг $B(n)$ сони бутун соннинг квадрати бўладиган қиймати аниқланган (бу қиймат 29 хонали сондан иборат).

Тўлиқмас индукция баъзан нотўғри хулосага олиб келсада (1-мисол, 3-мисол), унинг математикадаги ва бошқа фанлар (физика, кимё, биология ва ҳ.к.) даги, шунингдек, амалиётдаги аҳамияти жуда каттадир. У хусусий хулосалар ёрдамида умумий хулоса (фараз, тахмин) қилиш имконини беради.

Тўлиқ индукция ҳамма вақт тўғри хулосага олиб келади, лекин уни қўллашда ҳисоблаш ишларига ёки тўпламдаги элементлар сонига боғлиқ булган баъзи қийинчиликлар пайдо бўлади.

4 - мисол. $X=\{1;2;3;4;...;9\}$ тўпламни қараймиз. $C(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)$ ифода ҳар бир $x\in X$ да нолга тенг қиймат қабул қилади:

$$C(1)=(1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)(1-8)(1-9)=0;$$
$$C(2)=(2-1)(2-2)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-7)(2-8)(2-9)=0;$$
$$C(3)=(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)(3-5)(3-6)(3-7)(3-8)(3-9)=0;$$
$$C(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)(4-6)(4-7)(4-8)(4-9)=0;$$

$$C(5)=(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-5)(5-6)(5-7)(5-8)(5-9)=0;$$
$$C(6)=(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)(6-6)(6-7)(6-8)(6-9)=0;$$
$$C(7)=(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)(7-6)(7-7)(7-8)(7-9)=0;$$
$$C(8)=(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)(8-5)(8-6)(8-7)(8-8)(8-9)=0;$$
$$C(9)=(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)(9-7)(9-8)(9-9)=0.$$

Демак, барча $x\in X$ лар учун, $C(x)=0$ тенглик ўринли.

Агар X тўплам чексиз тўплам бўлса ёки ундаги элементлар сони жуда катта бўлса, тўпламнинг ҳар бир элементи учун берилган тасдиқнинг тўғри эканлигини кўрсатиш мумкин бўлмайди ёки жуда қийин бўлади. Шу сабабли, тўлиқ индукциядан жуда кам ҳолларда фойдаланилади.

5-мисол. Тўлиқмас индукциядан фойдаланиб, «Агар m хонали $N=a_1\cdot10^{m-1}+a_2\cdot10^{m-2}+...+a_{m-1}\cdot10+a_m$ сонининг охирги n та (бу ерда $n\leq m$) рақамидан тузилган сон 5^n га бўлинса, N сони ҳам 5^n га бўлинади» деган фаразни айтиш мумкинми?

Ечиш. $n=1$ бўлиб, N сонининг охирги битта рақамидан тузилган сон 5 га бўлинсин. У ҳолда, берилган m хонали N натурал сонни $N=(a_1\cdot10^{m-1}+a_2\cdot10^{m-2}+$ $+...+a_{m-1}\cdot10)+5\cdot k$ кўринишда ёзиш мумкин. Ўнг томондаги иккита қўшилувчининг ҳар бири 5 га бўлингани учун, уларнинг йиғиндиси бўлган N сони ҳам 5 га бўлинади.

$n=2$ бўлиб, N сонининг охирги иккита рақамидан тузилган сон 25 га бўлинсин: $a_{m-1}\cdot10+a_m=25\cdot t$.

У ҳолда, берилган m хонали N натурал сонни

$$N=(a_1\cdot10^{m-1}+a_2\cdot10^{m-2}+...+a_{m-2}\cdot100)+25\cdot t$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ўнг томондаги иккита қўшилувчиларнинг ҳар бири 25 га бўлингани учун, уларнинг йиғиндиси бўлган N сони ҳам 25 га бўлинади.

Юқорида юритилган мулоҳазалардан фойдаланиб (тўлиқмас индукция қўлланилмоқда!), «Агар берилган m хонали натурал $N=a_1 \cdot 10^{m-1}+a_2 \cdot 10^{m-2}+...+a_{m-1} \cdot 10+a_m$ соннинг охирги n та (бу ерда $n \leq m$) рақамидан тузилган сон 5^n га бўлинса, N сони ҳам 5^n га бўлинади» деган фаразни айтиш мумкин.

6 - мисол. 2 дан катта бўлган дастлабки бир нечта жуфт сонларни иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин: 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7=5+5,...,50=13+37.

Тўлиқсиз индукция ёрдамида «2 дан катта бўлган ҳар қандай жуфт сонни иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин» деган хулосага келамиз. Бу хулосанинг тўғри ёки нотўғри эканлиги ҳозиргача исботланмаган. Бу муаммо Л. Эйлер — Х. Гольдбах муаммоси деб юритилади.

Машқлар

2.131. Қуйидаги тенгликларнинг тузилишидаги қонуниятни аниқланг ва уни умумлаштиринг: $1^3=1^2$; $1^3+2^3=(1+2)^2$; $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$; ... .

2.132. $a_4+a_5+ ... +a_n$ йиғиндини юнон ҳарфи Σ («сигма») дан фойдаланиб, $\sum_{i=4}^{n} a_i$ кўринишда белгилаш мумкин: $\sum_{i=4}^{n} a_i = a_4+a_5+ ... +a_n$.

Қуйидаги йиғиндиларни ёйиб ёзинг:

а) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2}$; б) $\sum_{i=1}^{n} i^3$; в) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$; г) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i^3}$.

2.133. Σ белгиси ёрдами билан ёзинг:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2}+ \frac{1}{2 \cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;

б) $1 \cdot 4+2 \cdot 7+3 \cdot 10+...+n(3n+1)$.

2.134. $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \ldots \cdot a_n$ кўпайтмани юнон ҳарфи П («пи») дан фойдаланиб, $\prod\limits_{i=4}^{n} a_i$ кўринишда белгилаш мумкин: $\prod\limits_{i=4}^{n} a_i = a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Кўпайтмаларни ёйиб ёзинг:

а) $\prod\limits_{i=1}^{4} \frac{i}{3 - i + i^2}$;
б) $\prod\limits_{i=1}^{5} \frac{i+1}{(i-1)i}$;

в) $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{3}{i^3}\right)$;
г) $\prod\limits_{i=1}^{n} i^3$.

2.135. Кўпайтмаларни $\prod$ белгиси ёрдами билан ёзинг:

а) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{14}$.

2.136. Тўлиқмас индукция ёрдамида «*m* хонали натурал сон К нинг охирги *n* та рақамларидан тузилган сон 2^n га (3^n га) бўлинса, К сонининг ўзи ҳам 2^n га (3^n га) бўлинади», деган фаразни айтиш мумкинми?

2.137. Қадимги Самарқанд мадрасалари ўқув қўлланмаларида сонлар устида бажарилган амаллар натижаларини текширишда *мезон* усулидан фойдаланганлар. *Мезон* арабча сўз бўлиб, ўзбек тилида «ўлчам», «ўлчов» каби маъноларни беради. Эслатилган ўқув қўлланмаларида соннинг мезони сифатида, шу сонни 9 сонига бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқ олинган. Масалан, 8 сонининг мезони 8 сонига, 21 сонининг мезони 3 сонига тенг деб олинган. Индукциядан ва 9 га бўлиниш белгисидан фойдаланиб, қуйидаги тасдиқларни исбот қилинг:

а) кўп хонали соннинг мезони шу сон таркибидаги рақамлар йиғиндисининг мезонига тенг. Масалан, 467 нинг мезони 4+6+7=17, 1+7=8;

б) икки сон кўпайтмаси (айирмаси, бўлинмаси)нинг мезони шу сонлар мезонларининг кўпайтмасига (айирмасига, бўлинмасига) тенг.

2. Математик индукция методи. Юқорида биз тўлиқсиз индукция ва тўлиқ индукция билан танишдик. Уларнинг биринчисини тадбиқ этиш нотўғри хулосага олиб келиши мумкин, иккинчисини тадбиқ этиш эса кўп ҳолларда катта қийинчилик туғдиради. Шу боис, уларнинг тадбиқ доираси тордир. Энди тадбиқ доираси бирмунча кенгроқ бўлган ва *математик индукция методи* деб аталувчи исботлаш усулини қараймиз. Бу методнинг моҳиятини баён этишдан олдин, бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. Агар $4^n > n^2$ ($n \in N$) тенгсизлик n нинг $n=k$ ($k \in N$) қийматида тўғри бўлса, у ҳолда бу тенгсизлик n нинг $n=k+1$ қийматида ҳам тўғри бўлишлигини исботланг.

Исбот. Берилган тенгсизлик n нинг $n=k$ қийматида тўғри бўлгани учун, $4^k > k^2$ (1) тўғри тенгсизликка эгамиз. $n=k+1$ бўлса, берилган тенгсизлик $4^{k+1} > (k+1)^2$ (2) кўринишини олади.

Биз (1) тенгсизликнинг тўғри эканлигидан фойдаланиб, (2) тенгсизликнинг тўғри эканлигини кўрсатамиз.

$4^k > k^2$ бўлгани учун,

$$4^{k+1}=4 \cdot 4^k > 4k^2 = k^2+2k^2+k^2 \qquad (3)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. $k^2 \geq k$, $k^2 \geq 1$ бўлгани учун, (3) дан $4^{k+1}>k^2+2k+1=(k+1)^2$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

Демак, (1) тенгсизликнинг тўғри эканлигидан (2) тенгсизликнинг ҳам тўғри эканлиги келиб чиқади, яъни $4^n>n^2$ тенгсизлик n нинг $n=k$ $(k \in N)$ қийматида тўғри бўлса, у ҳолда бу тенгсизлик n нинг $n=k+1$ қийматида ҳам тўғри бўлади.

2-мисол. Агар $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ тенглик n нинг $n=k$ $(k \in N)$ қийматида тўғри бўлса, у ҳолда бу тенглик n нинг $n=k+1$ қийматида ҳам тўғри бўлишини исботланг.

Исбот. Берилган тенглик $n=k$ бўлганда

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2 \qquad (4)$$

кўринишни, $n=k+1$ бўлганда эса

$$1+3+5+...+ +(2k+1)=(k+1)^2 \qquad (5)$$

кўринишни олади.

Биз (4) тенгликнинг тўғри эканлигидан, (5) тенгликнинг ҳам тўғри эканлиги келиб чиқишини кўрсатамиз.

(4) тенглик тўғри бўлсин. У ҳолда, $1+3+ +5+...+(2k+1)=(1+3+5+...+(2k-1))+(2k+1)=k^2+ +(2k+1)=(k+1)^2$ тенглик, яъни (5) тенглик ҳам тўғри бўлади.

Демак, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ тенглик n нинг $n=k$ $(k \in N)$ қийматида тўғри бўлса, у ҳолда бу тенглик n нинг $n=k+1$ қийматида ҳам тўғри бўлади.

Энди қуйидаги тасдиқларни қараймиз:

1) $4^n>n^2$, $(n \in N)$;
2) $1+3+5+...+(2n-1)^2=n^2$, $(n \in N)$.

Бу тасдиқларнинг ҳар бири натурал сон n га боғлиқ бўлган тасдиқдир. $n=1$ бўлганда уларнинг иккаласи ҳам тўғри эканлигини кўриш қийин эмас.

$4^n>n^2$ тенгсизлик $n=k$ $(k\in N)$ да тўғри деб фараз қилайлик. У ҳолда бу фараздан, $4^n>n^2$ тенгсизликнинг $n=k+1$ бўлганда ҳам тўғри бўлиши келиб чиқади (1-мисол). Худди шунга ўхшаш, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ тенглик $n=k$ да тўғри деган фараздан, бу тенгликнинг $n=k+1$ учун ҳам тўғри эканлиги келиб чиқади (2-мисол).

Қаралаётган тасдиқларнинг ҳар бири $n=1$ да тўғри ва тасдиқ $n=k$ учун тўғри деган фараздан, унинг $n=k+1$ учун ҳам тўғри эканлиги келиб чиқади. Шу сабабли, тасдиқ n нинг барча натурал қийматларида ўринли бўлади. Бундай хулоса чиқаришда математик индукция аксиомаси (ёки математик индукция принципи) асос қилиб олинади.

Математик индукция аксиомаси: агар натурал сон n га боғлиқ бўлган $A(n)$ тасдиқ $n=k_0$ $(k_0\in N)$ учун тўғри бўлса ва $A(n)$ тасдиқ $n=k$ да(бу ерда $k> k_0$) тўғри эканлигидан унинг $n=k+1$ да ҳам тўғри эканлиги келиб чиқса, у ҳолда $A(n)$ тасдиқ барча $n\geq k_0$ натурал сонлар учун тўғри бўлади.

Математик индукция аксиомаси, натурал сон n га боғлиқ бўлган $A(n)$ тасдиқнинг барча натурал n ларда тўғри эканлигини исботлашнинг қуйидаги усулини беради:

1) $A(n)$ тасдиқнинг $n=1$ да тўғрилигини кўрсатамиз (индукция базиси);

2) $A(n)$ тасдиқ $n=k$ да тўғри деб фараз қиламиз (индукция фарази);

3) Қилинган фараздан фойдаланиб, $A(n)$ тасдиқ $n=k+1$ да ҳам тўғри бўлишлигини кўрсатамиз (индукция қадами).

$A(n)$ тасдиқнинг барча натурал n сонлари учун тўғри эканлигини исботлашнинг бу усули *математик индукция методи* деб аталади. Бу методнинг қўлланишига доир мисол қараймиз.

3 - мисол. n нинг барча натурал қийматларида n^3+11n ифоданинг қиймати 6 га бўлинишини исботланг.

Исбот. Математик индукция методини қўллаймиз.

1) $n=1$ бўлсин. У ҳолда, $n^3+11n=1^3+11\cdot 1=12$ га эга бўламиз. 12 сони 6 га бўлинади.

2) $n=k$ бўлса, $n^3+11\,n$ ифоданинг қиймати k^3+11k сонига тенг бўлади. Бу сон 6 га бўлинади деб фараз қиламиз.

3) $n=k+1$ бўлсин. У ҳолда, $n^3+11n=(k+1)^3+3(k+1)= =(k^3+11k)+3k(k+1)+12$ тенглик ўринли бўлади.

Фаразимизга кўра, k^3+11k сони 6 га бўлинади. Кетма-кет келувчи иккита натурал соннинг кўпайтмаси бўлган $k(k+1)$ сони 2 га бўлингани учун, $3k(k+1)$ сони 6 га бўлинади. Шунинг учун, $(k^3+11k)+3k(k+1)+12$ сони 6 га бўлинади.

Демак, n нинг барча натурал қийматларида n^3+11n ифода 6 га бўлинади.

Математик индукция методи бирор-бир тасдиқни *ҳосил қилиш* усули эмас, балки *берилган* (*тайёр*) *тасдиқни* исботлаш усули эканлигини эслатиб ўтамиз.

Баъзан бу метод нотўғри ҳам қўлланилиши мумкин. Бир мисол.

3-мисол. Ҳар қандай n натурал сони ўзидан кейин келувчи $n+1$ натурал сонига «тенгдир».

Исбот. Ҳар қандай k натурал сони учун тасдиқ тўғри, яъни $k=k+1$ бўлади деб фараз қилайлик. Агар энди бу тенгликнинг ҳар икки қисмига 1 сони қўшилса, $k+1=k+2$ бўлади. Демак,тасдиқ барча n ларда «ўринли». Бунда исботнинг базис қисми «унутиб» қўйилган. Бошидаёқ $1=2$ бўлиб қолаётгани маълум эди.

Машқлар

2.138. n нинг барча натурал қийматларида тенгсизлик ўринли бўлишлигини исботланг:

а) $2^n \geq n+1$;

б) $\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} \le n$;

в) $(1+a)^n \ge 1+na$, (бу ерда $a \ge -1$).

2.139. n нинг барча натурал қийматларида тенглик ўринли бўлишини исботланг:

а) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$;

г) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}{3}$.

n нинг барча натурал қийматларида a_n сони b сонига бўлинишини исботланг, бунда:

2.140. $a_n=4^n+15n-1$, $b=9$.

2.141. $a_n=n^3+5n$, $b=6$.

2.142. $a_n=7^n+3n-1$, $b=9$.

2.143. $a_n=6^{2n}+19^n-2^{n+1}$, $b=17$.

2.144. $a_n=(2n-1)^3-(2n-1)$, $b=24$.

2.145. $a_n=n^3+11n$, $b=6$.

2.146. $a_n=n^2(n^2-1)$, $b=4$.

2.147. $a_n=n(2n-1)(7n+1)$, $b=6$.

2.148. $a_n=2^n+2^{n+1}$, $b=6$.

2.149. $a_n=n^2(n^2-1)$, $b=12$.

2.150. $a_n=18^n-1$, $b=17$.

2.151. $a_n=3^{3n+2}+7^n$, $b=10$.

2.152. $a_n=7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$, $b=19$.

2.153. $a_n=5^{n+3}\cdot 2^n-125$, $b=45$.

III боб

КОМПЛЕКС СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

1-§. Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар ва улар устида амаллар

Комплекс сонлар таълимоти илму фанда, хусусан, математикада алоҳида ўрин тутади. Тез ривожланаётган бу соҳа техникада, шунингдек ишлаб чиқаришнинг кўплаб соҳаларида ғоят кенг қўлланишга эга. Шу сонлар ҳақида айрим маълумотларни келтирамиз.

Хусусий бир мисолдан бошлайлик.

$x^2+4=0$ тенгламани ечиш жараёнида $x_1=2\sqrt{-1}$ ва $x_2=-2\sqrt{-1}$ «сонлар» ҳосил бўлади. Ҳақиқий сонлар орасида эса бундай «сонлар» мавжуд эмас. Бундай ҳолатдан қутулиш учун $\sqrt{-1}$ га сон деб қараш зарурати пайдо бўлади.

Бу янги сон ҳеч қандай реал катталикнинг ўлчамини ёки унинг ўзгаришини ифодаламайди. Шу сабабли уни *мавҳум* (хаёлий, ҳақиқатда мавжуд бўлмаган) *бирлик* деб аташ ва махсус белгилаш қабул қилинган: $\sqrt{-1}=i$. Мавҳум бирлик учун $i^2=-1$ тенглик ўринлидир.

$a+bi$ кўринишдаги ифодани қараймиз. Бу ерда a ва b лар исталган ҳақиқий сонлар, i эса мавҳум бирлик. $a+bi$ ифода *ҳақиқий* сон a ва *мавҳум* сон bi лар «комплекси»дан иборат бўлгани учун уни комплекс сон деб аташ қабул қилинган.

$a+bi$ ифода *алгебраик шаклдаги комплекс* сон деб аталади, бу ерда $a\in R$, $b\in R$, $i^2=-1$. Бу параграфда $a+bi$

ни қисқалик учун “алгебраик шаклдаги комплекс сон” дейиш ўрнига “комплекс сон” деб ишлатаверамиз.

Комплекс сонларни битта ҳарф билан белгилаш қулай. Масалан, $a+bi$ ни $z=a+bi$ кўринишда белгилаш мумкин. $z=a+bi$ комплекс соннинг *ҳақиқий* қисми a ни Re(z) (французча reele-ҳақиқий) билан, *мавҳум* қисми b ни эса Im(z) (французча imaginaire — мавҳум) билан белгилаш қабул қилинган: a=Re(z), b=Im(z).

Агар $z=a+bi$ комплекс сон учун b=0 бўлса, ҳақиқий сон $z=a$ ҳосил бўлади. Демак, ҳақиқий сонлар тўплами R барча *комплекс сонлар тўплами* C нинг қисм тўплами бўлади: $R\subset C$.

1 - мисол. $z_1=1+2i$, $z_2=2\text{-}i$, $z_3=2{,}1$, $z_4=2i$, $z_5=0$ комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топамиз.

Ечиш. Комплекс сон ҳақиқий ва мавҳум қисмларининг аниқланишига кўра, қуйидагиларга эгамиз:

$\mathrm{Re}(z_1)=1$; $\mathrm{Re}(z_2)=2$; $\mathrm{Re}(z_3)=2{,}1$; $\mathrm{Re}(z_4)=0$; $\mathrm{Re}(z_5)=0$;
$\mathrm{Im}(z_1)=2$; $\mathrm{Im}(z_2)=-i$; $\mathrm{Im}(z_3)=0$; $\mathrm{Im}(z_4)=2i$; $\mathrm{Im}(z_5)=0$.

Комплекс сонлар учун « < », « > » муносабатлари аниқланмайди, лекин тенг комплекс сонлар тушунчаси киритилади.

Ҳақиқий ва мавҳум қисмлари мос равишда тенг бўлган комплекс сонлар *тенг комплекс сонлар* деб аталади.

Масалан, $z_1=1{,}5+\frac{4}{5}i$ ва $z_2=\frac{3}{2}+0{,}8i$ сонлари учун

$\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=1{,}5$, $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=0{,}8$. Демак, $z_1=z_2$.

Бир-биридан фақат мавҳум қисмларининг ишораси билан фарқ қиладиган икки комплекс сонга *ўзаро қўшма комплекс сонлар* дейилади. $z=a+bi$ комплекс сонга қўшма комплекс сон $\bar{z}=a-bi$ кўринишда ёзилади. Масалан, $6+7i$ ва $6\text{-}7i$ лар қўшма комплекс сонлардир: $\overline{6+7i} = 6-7i$. Шу каби $\bar{z}$ сонига қўшма сон $\bar{\bar{z}}=z$ бўлади. Масалан, $\overline{\overline{6+7i}} = \overline{6-7i} = 6+7i$. a ҳақиқий сонга қўшма сон a нинг ўзига тенг: $\bar{a} = \overline{a+0\cdot i} = a-0\cdot i = a$. Лекин bi мавҳум сонга қўшма сон $\overline{bi} = -bi$ дир. Чунки $\overline{bi} = \overline{0+bi} = 0-bi = -bi$, $a,b\in R$.

Комплекс сонлар устида арифметик амаллар қуйидагича аниқланади:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\ ; \tag{1}$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i\ ; \tag{2}$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\ ; \tag{3}$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ . \tag{4}$$

(1) ва (2) тенгликларни бевосита қўллаш қийин эмас. Комплекс сонларни кўпайтириш амалини $i^2=-1$ эканлигини эътиборга олиб, кўпҳадларни кўпайтириш каби бажариш мумкин.

2 - мисол. $(2-i)\cdot(\frac{3}{4}+2i)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-$ $-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{4}+\frac{13}{4}i$.

(4) формулани эслаб қолиш ва амалиётда бевосита қўллаш анча қийин. Шу сабабли, $\frac{a+bi}{c+di}$ ни ҳисоблаш учун, унинг сурати ва махражини $c-di$ га кўпайтириб, тегишли амалларни бажариш қулайдир.

3 - мисол. $\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=$

$$=\frac{-6-4i+3i-2}{9+6i-6i+4}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i.$$

Комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари хоссалари ҳақиқий сонларникига ўхшаш:

1) $z+w=w+z$;	1′) $zw=wz$;
2) $(z+w)+t=z+(w+t)$;	2′) $(zw)t=z(wt)$;
3) $z+0=z$;	3′) $z\cdot 1=z$.
4) $z(w+t)=zw+zt$;	

$z+w=0$ тенгликни қаноатлантирувчи z, w комплекс сонлари ўзаро қарама-қарши сонлар дейилади. z комплекс сонига қарама-қарши сонни $-z$ билан белгилаш қабул қилинган.

$z=a+bi$ комплекс сонга *қарама-қарши* бўлган ягона комплекс сон мавжуд ва бу сон $-z=-a-bi$ комплекс сонидан иборат.

$zw=1$ тенгликни қаноатлантирадиган z ва w комплекс сонлари ўзаро тескари комплекс сонлар дейилади . $z=0$ сонига тескари сон мавжуд эмас. Ҳар қандай $z\neq0$ комплекс сонга тескари комплекс сон мавжуд. Бу сон $\frac{1}{z}$ сонидан иборат.

$z=a+bi$ комплекс сонга тескари бўлган $\frac{1}{z}$ сонини топамиз:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a}{a^2+a^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

1 - теорема. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$.

Исбот. $z=a+bi$, $w=c+di$ бўлсин. У ҳолда $\bar{z}=a-bi$, $\bar{w}=c-di$ ва

$$\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=$$

$$=a+c-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\bar{z}+\bar{w}$$

2-теорема. $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

Исбот. Ҳақиқатан,

$\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=ac-bd-$ $(ad+bc)i$. Иккинчи томондан, $\overline{z}\cdot\overline{w}=(a-bi)(c-di)=$ $=ac-bd-(ad+bc)i$. Натижалар бир хил. Демак, $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.

Хусусан, $z\neq0$ бўлса, z га тескари бўлган $\frac{1}{z}$ сонга қўшма сон $\overline{z}$ га қўшма соннинг тескариси бўлади. Ҳақиқатан, 2-теоремага кўра $z\cdot\frac{1}{z}=1$ тенгликдан $\overline{z}\cdot\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{1}=1$ олинади. Бундан: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

Натижа. ***Комплекс соннинг натурал кўрсаткичли даражасига қўшма сон, берилган сонга қўшма соннинг шу натурал кўрсаткичли даражасига тенг:*** $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

Машқлар

3.1. Комплекс сон z нинг ҳақиқий қисми $\mathrm{Re}(z)$ ни ва мавҳум қисми $\mathrm{Im}(z)$ ни топинг:

а) $z=-5+8i$;
б) $z=6+\frac{1}{2}i$;
в) $z=-15+2i$;
г) $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$;
д) $z=0,5+3i$;
е) $z=2+0,3i$
ё) $z=-4,1+2i$;
ж) $z=-3-4i$;
з) $8i$;
и) 4;
к) 0;
м) $-3i$.

3.2. Агар:

а) $Re(z)=-4$, $Im(z)=8$;
б) $Re(z)=0$, $Im(z)=1,2$;
в) $Re(z)=1,2$, $Im(z)=0$;
г) $Re(z)=0$, $Im(z)=0$.

бўлса, z комплекс сонини алгебраик шаклда ёзинг.

3.3. Тенг комплекс сонларни топинг:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$; $0,5+3i$; $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}i$; $\sqrt{9}-4i$; $\sqrt{9}-\sqrt{81}\,i$; $3-4i$.

3.4. а) Комплекс сонлардан қайсилари тенг:

$3i$; $-4+5i$; $\frac{1}{3}+i$; $-\frac{1}{4}-8i$; $0,(3)+i$; $-\frac{2}{8}-\sqrt{64}\,i$; $\sqrt[4]{81}\,i$?

б) $(4x-3y)+(3x+5y)i=10-(3x-2y-30)i$ бўлса, x ва y ларни топинг ($x,y\in R$).

3.5. Агар:

а) $z=-3+5i$;
б) $z=3-5i$;
в) $z=-3-5i$;
г) $z=3+5i$;
д) $z=-3i$;
е) $z=4,2$;
ё) $z=4i$;
ж) $z=4,(3)$;
з) $z=\frac{1}{3}+3,4i$;
и) $z=0$;
к) $z=\sqrt{81}+4i$;
л) $z=-0,(3)-2,(3)i$

бўлса, $\bar{z}$ ни топинг.

3.6. Йиғиндини топинг:

а) $(-3+2i)+(4-i)$;
б) $(4+5i)+(4-5i)$;
в) $(5+2i)+(-5-2i)$;
г) $4+(-3+i)$;
д) $(1,4-3i)+(2.6-4i)$;
е) $(3+8i)+(3-8i)$;
ё) $(-7+3i)+(7-3i)$;
ж) $4,3+(1,7-9i)$;
з) $8i+(4-6i)$;
и) $-15i+(-4+5i)$;
к) $(14+2i)+8i$;
л) $81+(43-17i)$.

3.7. Йиғиндини топинг:

а) $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{3}i\right)+\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{3}i\right)$;

б) $(\cos^2\alpha+i\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+i\cos^2\alpha)$, $(\alpha\in R)$;

в) $(0,(3)+i\cdot 1,(5))+(0,(6)+i\cdot 1,(55))$;
г) $(\mathrm{Re}(1+2i)+15i)+(3-i\cdot \mathrm{Im}(1+2i))$.

3.8. Айирмани топинг:

а) $(-5+2i)-(8-9i)$;
б) $(5+21i)-(9i+8)$;
в) $4-(42-3i)$;
г) $(14+3i)-(21+3i)$;
д) $(32+4,(5)i)-(32+i)$;
е) $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}i\right)-(1+i)$;
ё) $4,8-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}-i\right)$;
ж) $i-(3i+8)$.

3.9. Кўпайтмани ҳисобланг:

а) $(3+5i)(2+3i)$;
б) $(4+7i)(2-i)$;
в) $(5-3i)(2-5i)$;
г) $(-2+i)(7-3i)$;
д) $(\frac{1}{2}+i)(\frac{1}{4}-i)$;
е) $(\frac{4}{7}+3i)(\frac{7}{4}+4,7i)$;
ё) $(2+3i)(2-3i)$;
ж) $4\cdot(8,3-i)$;
з) $(5-2i)(2i+5)$;
и) $(-3+i)(3-i)$;
к) $0\cdot(4,5-i)$;
л) $(\frac{1}{3}-0,3)\cdot i$.

3.10. Икки комплекс соннинг бўлинмасини топинг:

а) $\frac{1+i}{1-i}$;
б) $\frac{3-4i}{2+i}$;
в) $\frac{2+3i}{2-3i}$;
г) $\frac{1+2i}{3-2i}$;
д) $\frac{5-4i}{-3+2i}$;
е) $\frac{-7+2i}{5-4i}$;
ё) $\frac{3-4i}{-3+2i}$;
ж) $\frac{14-3i}{3i+2}$;
з) $\frac{51}{4-i}$;
и) $\frac{4-i}{51}$;
к) $\frac{31i}{17+i}$;
л) $\frac{14+i}{31i}$;
м) $\frac{0}{3i}$;
н) $\frac{1+4i}{1-5i}$;
о) $\frac{1}{1+5i}$.

3.11. Қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмаси шаклида ёзинг ($a,b\in R$):

а) a^2+4b^2; ё) $11a^2+48b^6$;
б) $9a^2+25b^2$; ж) $13a^4+29b^8$;
в) $8a^2+16b^2$; з) $a^{2n}+33b^{2n}$ ($n\in N$);
г) $81a^2+5b^2$; и) $a^{2n}+b^{2n}$; (k, $n\in N$);
д) $3a^2+45b^4$; к) $\sqrt{3}\,a^2+b^{18}$;
е) $10a^2+56b^4$; л) $9a^2+\sqrt{5}\,b^{20}$.

Намуна: $\sqrt{7}\,a^8+81b^4=(\sqrt[4]{7}\,a^4)^2-(9b^2i)^2=(\sqrt[4]{7}\,a^4-9b^2i)(\sqrt[4]{7}\,a^4+9b^2i)$.

3.12. Мавҳум бирлик i нинг қуйидаги даражаларини ҳисобланг ва хулоса чиқаринг:

а) i^1; в) i^3; д) i^5; ё) i^7; з) i^9; к) i^{11};
б) i^2; г) i^4; е) i^6; ж) i^8; и) i^{10}; л) i^{12}.

3.13. Амалларни бажаринг:

а) $-3i+5+8i(3-i)$; ё) $4(0{,}5-2{,}5i)(3+i)+5i$;
б) $(4+2i)(-1-3i)+5-8i$; ж) $4{,}2(3-i)(1+i)+2+3i$;
в) $3i(1+i)+3i(3-i)$; з) $3+5i+2i^{1999}$;
г) $\frac{1}{2}i(5-2i)+\frac{1}{3}i(9-8i)$; и) $35-i^{2000}+i^{1997}$;
д) $(5-3i)(4+i)+15i$; к) $i^{2001}(3+5i^4)$;
е) $16-(15-i)(1+i)$; л) $i^{2002}-i^{2001}-i^{1999}$.

3.14. Ҳисобланг:

а) $\frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}$; ё) $\frac{13}{1-4i}+\frac{11}{1+4i}$;

б) $\frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; ж) $\frac{1-i}{1+i}+\frac{3-i}{3+i}$;

в) $\frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$; з) $\frac{i^{18}+i^{19}}{2-3i}+\frac{1}{3+4i}$;

г) $\frac{2-3i}{(1-i)(3+i)}$; и) $\frac{2-3i}{2+3i}\cdot i^{18}+\frac{i}{1+i}$;

д) $\frac{11}{1-2i}-\frac{13}{2-i}$; к) $\frac{4i^{8}}{9}+i(1+i^{9})$;

е) $\frac{3-5}{3+i}+\frac{2+3i}{2-i}$; л) $i^{3}(1-i^{4})+i^{21}$.

3.15. Амалларни бажаринг:

а) $(3-2i)^2$; д) $(3+2i)^2-(3-2i)$;

б) $(4+3i)^2$; е) $(-3+5i)+(-3-5i)$;

в) $\left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2$; ё) $\left(\frac{i^6+1}{i^8-1}\right)^2$;

г) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$; ж) $\left(\frac{4+i^7}{3-i^4}\right)^2$.

3.16. Қўшма комплекс сонлар йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳақиқий сонлардан иборат эканлигини исбот қилинг.

3.17. $z=a+bi$, $w=c+di$ комплекс сонлар берилган. а) агар $z+w=A\in R$ ва $zw=B\in R$ бўлса, $w=\bar{z}$ бўлади; б) агар $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=C\in R$ ва $\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{w}=D\in R$ бўлса, $w=\bar{z}$ бўлади. Шуни исбот қилинг.

3.18. а) x ва y нинг қандай ҳақиқий қийматларида $6-ixy$ ва $x+y+5i$ комплекс сонлар ўзаро қўшма бўлади ?

б) олдинги масаланинг шартида x ва y ларнинг ҳақиқий сон бўлиши талаб қилинмаса, масала нечта ечимга эга бўлади? Мисол келтиринг.

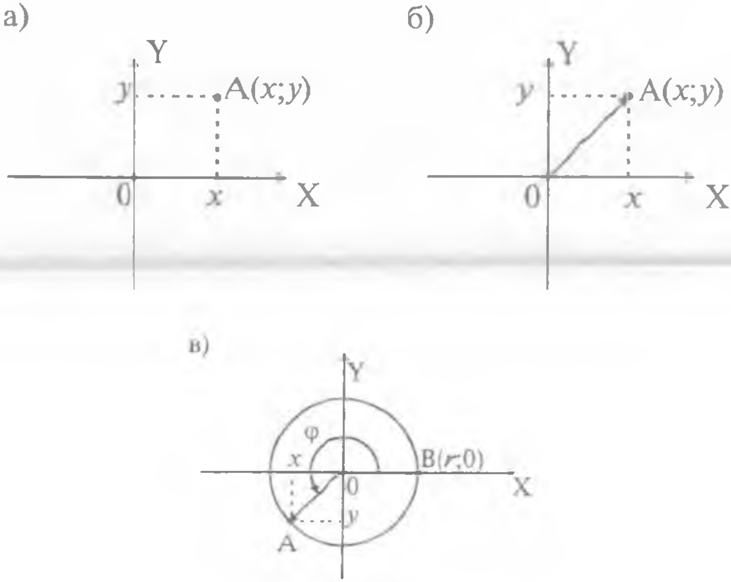
3.19. Илдизларидан бири а) $2i$; б) $1-i$; в) $2-i$; г) $1-i\sqrt{5}$ бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг.

3.20. Квадрати шу соннинг қўшмасига тенг бўлган комлекс сонни топинг.

2-§. Тригонометрик шаклдаги комплекс сонлар ва улар устида амаллар

1. Комплекс соннинг тригонометрик шакли. Комплекс сонларга оид кўпгина тушунчалар аёний бўлиши учун комплекс сонни бирор геометрик шакл (фигура, тасвир) сифатида қараш қулайдир.

Биз $z=x+yi$ комплекс соннинг геометрик шакли сифатида, XoY координата текислигидаги A(x;y) нуқтани ёки боши O(0;0) нуқтада, охири эса A(x;y) нуқтада бўлган $\overrightarrow{OA}$ векторни қабул қиламиз (17-а,б) расмлар). Бунда координата текислигининг ҳар бир нуқтаси фақат битта комплекс сонни тасвирлайди ва аксинча, ҳар қандай комплекс сон фақат битта нуқта билан тасвирланади. Ҳақиқий сонларга абсциссалар ўқининг нуқталари, bi ($i\in R$) соф мавҳум сонларга эса ординаталар ўқининг нуқталари мос кела-



17-расм.

ди. Шунга кўра, координаталар текислиги *комплекс текислик,* абсциссалар ўқи *ҳақиқий ўқ*, ординаталар ўқи эса *мавҳум ўқ* деб ҳам аталади.

$z=x+iy$ комплекс сонининг геометрик тасвири бўлган вектор унинг *радиус вектори* дейилади. Ҳар қандай $z=x+iy$ комплекс сон ягона радиус-векторга эга, чунки x, y сонлари ягона $A(x;y)$ нуқтани (векторнинг охирини) аниқлайди. Комплекс сон радиус векторининг узунлиги шу *сонниинг модули* дейилади. $z=x+iy$ комплекс соннинг модулини $|z|$ билан ёки r билан белгилаймиз. $|z|$, x, y ҳақиқий сонлари қуйидаги тенглик билан боғланган:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (1)$$

Ҳақиқатан ҳам, икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра, $|z|=OA=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ тенглик ўринлидир (17-*б* расм).

1-мисол. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ комплекс соннинг модулини топинг.

Ечиш: $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ бўлгани учун,

$$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2.$$

$\vec{OA}$ вектор $z=x+iy\neq 0$ комплекс сонининг радиус-вектори бўлсин (17-в, расм). Маркази $O(0;0)$ нуқтада бўлган $r=|z|$ радиусли айлананинг $B(r;0)$ нуқтасини, O нуқта атрофида бу нуқта A (x, y) нуқта билан устма-уст тушадиган қилиб бурамиз (17, *в*-расм). Бу ишни, бир-биридан 2π га каррали бўлган буриш бурчагига фарқ қиладиган чексиз кўп буриш бурчаклари ёрдамида амалга ошириш мумкин. Шу буриш бурчакларининг ҳар бири *$z=x+iy$ комплекс соннинг аргументи* деб аталади.

17-*в* расмда $z=x+iy$ комплекс сонининг аргументларидан бири бўлган φ бурчак кўрсатилган.

$z=x+iy$ комплекс сонининг барча аргументлари тўпламини Arg(z) билан белгилаймиз.

Юқоридаги мулоҳазалардан кўринадики, агар $\varphi\in$ Arg(z) бўлса, *у* ҳолда ихтиёрий k∈Z сон учун $\varphi+2\pi k\in$ Arg(z) бўлади. Шу сабабли, Arg(z) тўпламни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$Arg(z)=\{\varphi+2\pi k \mid k\in \mathrm{Z}\}.$$

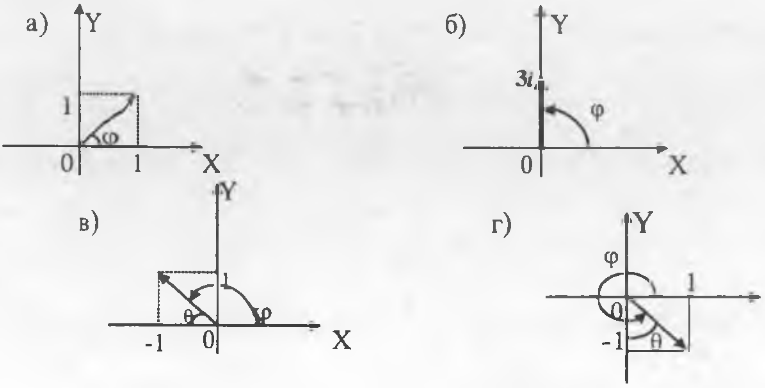
Буриш бурчагининг косинуси ва синуси таърифларидан кўринадики, $z=x+iy$ комплекс сонининг ҳар қандай φ аргументи учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|},\qquad \sin\varphi=\frac{y}{|z|}.$$

Бу тенгликлар асосида, $z=x+iy$ комплекс сонини $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ кўринишида ёзиб олиш мумкин. Бундай ёзиш *комплекс сонни тригонометрик шаклда тасвирлаш* деб юритилади.

Комплекс сон чексиз кўп аргументларга эга бўлгани учун, уни чексиз кўп усуллар билан тригонометрик шаклда ёзиш мумкин. Шу сабабли, комплекс соннинг тригонометрик шаклини тайин бир оралиқда ётадиган аргумент орқали ёзиш мақсадга мувофиқдир. Биз ана шундай оралиқ сифатида $[0;2\pi]$ оралиқни оламиз. Бу оралиқда ҳар қандай $z(z\neq 0)$ комплекс сонининг фақат битта аргументи ётади.

$z=x+iy$ комплекс сонининг $[0,2\pi]$ оралиқда ётадиган аргументи шу соннинг *бош аргументи* дейилади ва arg(z) билан белгиланади. Шунга мувофиқ равишда, $z=|z|(\cos(\arg(z))+i\sin(\arg(z))$ ни z комплекс соннинг *бош тригонометрик шакли* деб атаймиз. Бундан кейин, комплекс соннинг аргументи ва комплекс соннинг тригонометрик шакли дейилганда, мос



18-расм.

равишда комплекс соннинг бош аргументи ва бош тригонометрик шакли назарда тутилади.

Энди z=0 сони устида тўхталамиз. Бу соннинг модули 0 га тенг, лекин аргументи аниқланмайди.

2 - мисол. а) $1+i$; б) $3i$; в) $-1+i$; г) $1-i$ сонларини тригонометрик шаклда ифодаланг.

Ечиш.

а) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \ \ \varphi = \frac{\pi}{4},$

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (18-а расм).

б) $|3i| = 3, \ \ \varphi = \frac{\pi}{2}, \ \ 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. (18-б расм).

в) $|-1+i| = \sqrt{2}, \ \ \theta = \frac{\pi}{4}, \ \ \varphi = \pi - \theta = \frac{3\pi}{4}, \ \ -1+i =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (18-в расм).

г) $$|1-i| = \sqrt{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2} + \theta \begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{3\pi}{2} + \\ \theta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$+ \theta = \frac{7\pi}{4}, \ 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$ (18-г расм).

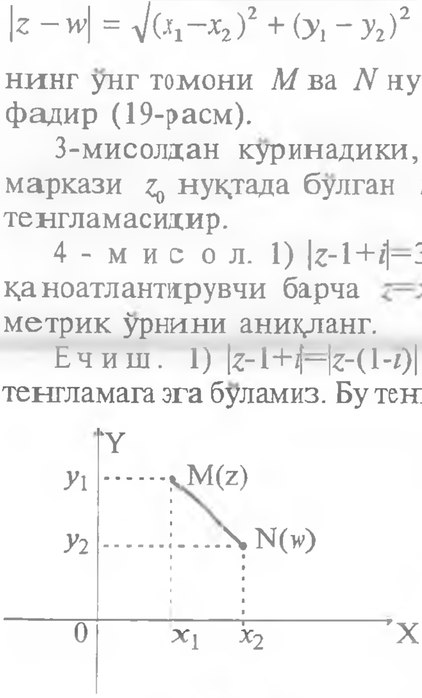
3-мисол. $M(z)$ ва $N(w)$ нуқталар орасидаги масофа $|z-w|$ га тенглигини исботланг.

Исбот. $z=x_1+iy_1$ ва $w=x_2+iy_2$ сонлари учун $|z-w| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ га эгамиз. Бу тенгликнинг ўнг томони M ва N нуқталар орасидаги масофадир (19-расм).

3-мисолдан кўринадики, $|z-z_0|=r$ $(r>0)$ тенглама маркази z_0 нуқтада бўлган r радиусли айлананинг тенгламасидир.

4-мисол. 1) $|z-1+i|=3$; 2) $|z-1+i| \leq 3$ шартни қаноатлантирувчи барча $z=x+iy$ нуқталарнинг геометрик ўрнини аниқланг.

Ечиш. 1) $|z-1+i|=|z-(1-i)|$ бўлгани учун $|z-(1-i)|=3$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама маркази $z_0=1-i$ нуқтада бўлган $r=3$ радиусли айлананинг тенгламасидир.



19-расм.

2) $|z-1+i| \leq 3$ шартни қаноатлантирувчи барча $z=x+iy$ нуқталарнинг геометрик ўрни $|z-1+i|=3$ айлана билан чегараланган доирадан иборат.

Машқлар

3.21. Комплекс текисликнинг z комплекс сонга мос келувчи нуқтасини ясанг, бунда:

а) $z=1+2i$;
б) $z=-1+2i$;
в) $z=-1-2i$;
г) $z=1-2i$;
д) $z=2i$;
е) $z=1$;
ё) $z=-2i$;
ж) $z=-1$;
з) $z=0$;
и) $z=3-2i$;
к) $z=-3+2$;
л) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
м) $z=2+3i(1+2i)$;
н) $z=i-4i(1+i)$;
о) $z=i^4+i^5$;
п) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

3.22. z комплекс сонга мос келувчи векторни ясанг:

а) $z=2+3i$;
б) $z=2-3i$;
в) $z=-2+3i$;
г) $z=-2-3i$;
д) $z=3i$;
е) $z=-4i$;
ё) $z=2$;
ж) $z=-2$;
з) $z=0$;
и) $z=-3+2i$;
к) $z=3-i$;
л) $z=\sqrt{4}$;
м) $z=\frac{1+i}{1-i}$;
н) $z=(1+i)(1+2i)$;
о) $z=(1-i)(1+i)$;
п) $z=i^3-4i$.

3.23. Комплекс сон z нинг модулини топинг:

а) $z=3+4i$;
б) $z=-3-4i$;
в) $z=1+\sqrt{8}\,i$;
г) $z=2\sqrt{2}+i$;
д) $z=3+3i$;
е) $z=1+2\sqrt{3}\,i$;
ё) $z=1+i$;
ж) $z=\sqrt{2}+i$;
з) $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(\alpha\in R)$;
и) $z=1+i\cos^2\alpha$ $(\alpha\in R)$;
к) $z=(2+3i)(3-4i)$;
л) $z=\sqrt[4]{81}+3\sqrt{2}\,i$;
м) $z=-4$;
н) $z=bi\ \beta\in R$;
о) $z=i$;
п) $z=0$.

3.24. z комплекс сонининг аргументини топинг:

а) $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$;

в) $z=3i$;

г) $z=3$;

д) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$;

е) $z=-2\sqrt{3}\,i$;

ё) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}\,i$;

ж) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$;

з) $z=1$;

и) $z=i$;

к) $z=-1$;

л) $z=-i$.

3.25. Комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг:

а) $z=-1-i$;

б) $z=1-i$;

в) $z=\sqrt{3}+i$;

г) $z=-1+\sqrt{3}\,i$;

д) $z=-2$;

е) $z=i$;

ё) $z=1$;

ж) $z=-i$;

з) $z=1+i$;

и) $z=-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\,\frac{\sqrt{11}}{2}$;

л) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$;

м) $z=2i$;

н) $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$;

о) $z=-i$;

п) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}\,i$.

3.26. $z=-3-4i$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

3.27. $z=2\cos\frac{7\pi}{4}-2i\sin\frac{7\pi}{4}$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

3.28. $z=-\cos\frac{\pi}{17}+i\sin\frac{\pi}{17}$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

3.29. $z=2+\sqrt{3}+i$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

3.30. $z=1+\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ ни тригонометрик шаклда ёзинг.

3.31. Қуйидаги сонларни алгебраик шаклда ёзинг:

а) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; б) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.32. Агар $|z|=3$ бўлса, z нуқталар ўрнини аниқланг.

3.33. Ҳар қандай z ва w комплекс сонлар учун $|z|-|w|\le$ $\le |z+w| \le |z|+|w|$ қўш тенгсизликнинг бажарилишини исбот қилинг.

3.34. Ихтиёрий u ва v комплекс сонлар учун $|u+v|^2+|u-v|^2$ ни топинг.

3.35. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини чизмада кўрсатинг:

а) $|z-10i| \le 20$; д) $|z-2+i| \le 4$;

б) $\mathrm{Re}z > 4$; е) $|z|=\mathrm{Re}z+3$;

в) $\mathrm{Im}z < -1$; ж) $z\bar{z}+4\bar{z}+4z=0$;

г) $|z-2i|=5$; з) $\left|\frac{z-2}{z-3}\right|=1$.

2. Тригонометрик шаклда берилган комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш. Тригонометрик шаклда ёзилган комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш ва даражага кўтариш қоидаларини келтириб чиқариш учун асос бўладиган теоремаларни қараймиз.

1-теорема. ***Комплекс сонлар кўпайтмасининг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг, кўпайтувчиларнинг ҳар қандай аргументлари йиғиндиси шу комплекс сонлар кўпайтмасининг бирор аргументи бўлади.***

Исбот. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ва $w=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$лар z, w комплекс сонларнинг бирор тригонометрик шакли бўлсин. У ҳолда, z ва w сонлар кўпайтмасини кўпҳадларни кўпайтириш қоидаси ёрдамида топсак,

$zw = rR(cos(\varphi+\alpha)+i\ sin(\varphi+\alpha))$ ҳосил бўлади. Демак, $|zw| = rR = |z|\,|w|$ ва $\varphi+\alpha$ сони zw нинг бирор аргументидан иборат.

2-теорема. ***Комплекс сонлар нисбатининг модули бўлинувчи ва бўлувчи модулларининг нисбатига тенг, бўлинувчи ва бўлувчи ҳар қандай аргументларининг айирмаси бўлинманинг бирор аргументи бўлади.***

Исбот. $z=r(\cos\varphi+i\ \sin\varphi)$ ва $w=R(\cos\alpha+i\ \sin\alpha)$ лар z ва ω комплекс сонларининг бирор тригонометрик шакли бўлсин. У ҳолда $\frac{z}{w} = \frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{R(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$

$= \frac{r}{R}\left(\cos(\varphi-\alpha) + i\sin(\varphi-\alpha)\right)$ тенглик бажарилади. Бу

ердан эса $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ эканлиги ва $\varphi - \alpha$ соннинг $\frac{z}{w}$ учун

аргумент бўлишлиги келиб чиқади.

Энди тригонометрик шаклда берилган сонларни кўпайтириш, бўлиш ва даражага кўтариш қоидаларини келтирамиз.

Тригонометрик шаклда (бош тригонометрик шаклда бўлиши шарт эмас!) берилган $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ва $w=R(\cos\alpha+i\ \sin\alpha)$ комплекс сонларни:

а) кўпайтириш учун, $zw=rR(cos(\varphi+\alpha)+i\ sin(\varphi+\alpha))$ тенгликни тузиш ва $\varphi+\alpha$ ни бош аргумент билан алмаштириш;

б) бўлиш учун, $\frac{z}{w} = \frac{r}{R}\left(\cos(\varphi-\alpha) + i\sin(\varphi-\alpha)\right)$

тенгликни тузиш ва $\varphi-\alpha$ ни бош аргумент билан алмаштириш керак.

Тригонометрик шаклда берилган комплекс сонларни кўпайтириш қоидасини $z^n = z\cdot z\ \cdots z$ (n та кўпайтувчи) кўпайтма учун кетма-кет татбиқ этиб, z^n ни ҳисоблаш қоидасини ҳосил қиламиз:

$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n$ни ҳисоблаш учун, $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ тенгликни тузиш ва $n\varphi$ аргументни бош аргумент билан алмаштириш керак.

Агар $z=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ бўлса, даражага кўтариш формуласи қуйидаги кўринишни олади: $(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$.

Бу тенглик *Муавр формуласи* дейилади.

Мисол.

$$A=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{19}\cdot\left(2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{5}}{\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{14}\cdot\left(2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right)^{6}}$$

ифоданинг қийматини топинг.

Ечиш. Суратдаги кўпайтувчилар бош тригонометрик шаклдаги, махраждаги кўпайтувчилар эса бош тригонометрик шаклда бўлмаган комплекс сонларнинг даражаларидан иборат. Бу ҳол амалларни бажариш қоидаларини татбиқ этишда халақит бермайди.

Даражага кўтариш, кўпайтириш ва бўлиш қоидаларини ўз ўрни билан қўллаш натижасида $A=2^{\frac{19}{2}+5-14-6}$

$$\cdot\left(\cos\left(\frac{19\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)-\left(-\frac{14\pi}{3}\right)-(-5\pi)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)-\left(-\frac{14\pi}{3}\right)-(-5\pi)\right)\Big)=2^{\frac{-11}{2}}\left(\cos\frac{185\pi}{12}+i\sin\frac{185\pi}{12}\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томони комплекс соннинг бош тригонометрик шаклини ифодаламайди, чунки $\frac{185\pi}{12}>2\pi$.

$\frac{185\pi}{12}$ ни бош аргумент билан алмаштирамиз:

$$A = 2^{\frac{-11}{2}}\left(\cos\left(14\pi + \frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(14\pi + \frac{17\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 2^{\frac{-11}{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Машқлар

3.36. Тригонометрик шаклда берилган сонларнинг кўпайтмасини топинг:

а) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ва $z_2 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$;

б) $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

ва $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$;

в) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)$

ва $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $z_1 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$

ва $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

3.37. $\frac{z_1}{z_2}$ ни ҳисобланг:

а) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{19} + i\sin\frac{\pi}{19}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{21} + i\sin\frac{\pi}{21}\right)$;

б) $z_1=9\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=9\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $z_2=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$;

г) $z_1=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$,

$z_2=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

3.38. Даражани ҳисобланг:

а) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)\right)^7$; д) $\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{20}$;

б) $\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)^{18}$; е) $\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)^{16}$;

в) $\left(\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^6$; ж) $\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{15}$;

г) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{13}+i\sin\frac{\pi}{13}\right)\right)^2$; з) $\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{17}$.

3.39. Муавр формуласидан фойдаланилиб, ифодаларни $\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ орқали ифодаланг:
1) $\cos 8\varphi$; 2) $\sin 8\varphi$; 3) $\cos 9\varphi$; 4) $\sin 9\varphi$.

3.40. $\frac{1}{1+z}$ ни ҳисобланг, бунда $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

3.41. Қуйидаги ифодаларни ҳисобланг:

а) $\frac{(1-i)^9\left(\sqrt{2}+i\right)^6}{(1+i)\left(1-i\sqrt{2}\right)^6}$; б) $\frac{(1-i)^{11}\left(-\sqrt{2}-i\right)^8}{(1-i)^{11}}$;

в) $\dfrac{(1-i)^{148}}{(1+i)^{102}-(1-i)^{102}i}$.

3.42. $(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)^{12}$ ни ҳисобланг.

3. Комплекс сондан илдиз чиқариш. z комплекс соннинг *n -натурал даражали илдизи* деб, $w^n=z$ тенглик бажариладиган ҳар қандай w комплекс сонга айтилади.

Агар $z=0$ бўлса, $w^n=0$ $(n\in N)$ тенглик $w=0$ сони учунгина бажарилади.

Агар $z\neq 0$ бўлса, $w^n=z$ $(n\in N)$ тенглик w нинг n та ҳар хил қийматида бажарилишини, яъни $z\neq 0$ сони n та ҳар хил комплекс илдизларга эга бўлишини исботлаймиз.

Теорема. ***$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\neq 0$ комплекс сони n та ҳар хил w_k комплекс илдизларга эга ва бу илдизлар қуйидаги формула билан топилади:***

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1.$$

Исбот. $w=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ комплекс сони $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\neq 0$ соннинг n-даражали илдизи бўлсин. У ҳолда $R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ тенглик уринли булади. Иккита комплекс соннинг модуллари тенг ва аргументлари бир-биридан $2\pi k$ (бу ерда $k\in Z$) қўшилувчига фарқ қилсагина, улар тенг бўлади. Шу сабабли

$$R=\sqrt[n]{r}, \tag{1}$$

$$\varphi=\frac{\alpha+2k\pi}{n},\ k\in Z \tag{2}$$

тенгликлар бажарилади. Ҳосил қилинган бу тенгликларни w нинг тригонометрик шаклига қўямиз:

$$w=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n}+\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right),\ k\in Z. \tag{3}$$

Бу ердан кўринадики, $z=r(\cos\alpha+i\ \sin\alpha)$ комплекс сонининг ҳар қандай n-даражали илдизи (3) кўринишда бўлади. Аксинча, (3) кўринишдаги ҳар қандай комплекс сон $z=r(\cos\alpha+i\ \sin\alpha)$ комплекс сонининг n-даражали илдизи бўлади. Буни даражага кўтариш ёрдамида бевосита текшириб кўриш мумкин.

Шундай қилиб, (3) кўринишдаги сонлар ва фақат шу сонларгина $z=r(\cos\alpha+i\ \sin\alpha)$комплекс сонининг n-даражали илдизи бўлади.

Энди (3) формула $z\neq 0$ сонининг n та ҳар хил илдизини аниқлашини кўрсатамиз. Қулайлик учун (3) формуладаги w нинг k га боғлиқ эканлигини ошкор кўринишда ёзиб олайлик:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n}+\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right),\ k\in Z \tag{4}$$

$k=0$, $k=1,\ldots,k=n-1$ бўлганда бу формула ёрдамида $w_0,\ w_1,\ldots,w_{n-1}$ сонлари ҳосил қилинади. Бу сонларнинг аргументлари бир-биридан 2π га *каррали бўлмаган* қўшилувчи билан фарқ қилади. Шунинг учун бу сонлар орасида тенглари мавжуд бўлмайди, яъни улар n тадир

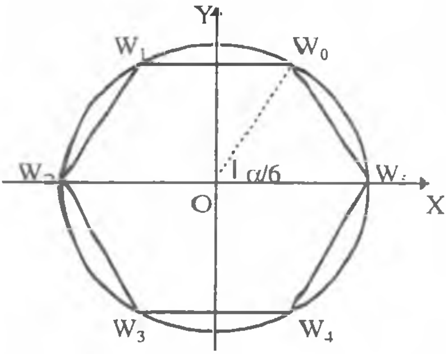
Энди ихтиёрий $k\in Z$ сонини $n\in N$ сонига қолдиқли бўламиз:

$k=n\cdot m+s$, бу ерда $m\in Z$, $s\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

У ҳолда,

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2(nm+s)\pi}{n}+\sin\frac{\alpha+2(nm+s)\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\ \cdot$$

$$\cdot\left(\cos\frac{\alpha+2s\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2s\pi}{n}\right)=w_s.$$



20-расм.

Бу ердан кўринадики, (4) формуладаги k нинг ўрнига ҳар қандай бутун сон қўйилганда ҳам, w_0, w_1,...,w_{n-1} сонларнинг бирортаси ҳосил бўлади. Демак, теореманинг тасдиғи ўринли.

Марказ координаталар бошида бўлган, $\sqrt[n]{r}$ радиусли айланани қараймиз. W_0, W_1, ... , W_{n-1} нуқталар шу айланада ётади ва уни n та тенг ёйларга ажратади, чунки қўшни W_k нуқталарнинг аргументлари бир-бирларидан $\frac{2\pi}{n}$ га фарқ қилади. Демак, бу нуқталар айланага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг учлари бўлади (20-расмда бу мунтазам олтибурчак, чизмада n=6, $\angle W_0OW_5=\frac{\alpha}{6}$).

1 - мисол. $\sqrt[3]{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ нинг барча w_k қийматларини топамиз.

Ечиш. $\left|-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2,$

$$\alpha=\arg\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

бўлгани учун $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ га эгамиз.

(3) формулага кўра w_k қиймат учун,

$$w_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2.$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$k{=}0 \text{ да } \ w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[6]{2^5}}{2}(1+i),$$

$$k{=}1 \text{ да } \ w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right),$$

$$k{=}2 \text{ да } \ w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right).$$

2-мисол. 1) $z^2+4=0$; 2) $z^4-16=0$; 3) $z^3-1=0$; 4) $z^3+1=0$; 5) $z^5-1=0$ тенгламаларни ечинг.

Ечиш. Тенгламаларни ечишда кўпҳадларни биринчи ва иккинчи даражали кўпайтувчиларга ажратишдан фойдаланамиз:

1) $z^2+4=(z-2i)(z+2i)=0$, бундан $z_1=2i$; $z_2=-2i$;

2) $z^4-16=(z^2-4)(z^2+4)=0 \Rightarrow (z-2)(z+2)(z+2i)(z-2i)=0$, бундан $z_{1,2}=\pm 2, z_{3,4}=\pm 2i$;

$$3) \ z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z-1=0 \\ z^2+z+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1, \\ z_{2,3} = \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. ;$$

4) $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=0$, бундан $z_1=-1$, $z_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$;

5) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$; $z-1=0$ бўйича $z_1=1$, шу каби

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0 \Rightarrow \frac{z^4}{z^2}+\frac{z^3}{z^2}+\frac{z^2}{z^2}+\frac{z}{z^2}+\frac{1}{z^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Агар $z+\frac{1}{z}=t$, $z^2+2+\frac{1}{z^2}=t^2$, ёки $z^2+\frac{1}{z^2}=t^2-2$, алмаштириш киритилса, $t^2+t-1=0$ тенглама ҳосил бўлади. Унинг илдизлари: $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. У ҳолда:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ бундан } z_{2,3}=\frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \text{ бундан } z_{4,5}=\frac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

3-мисол. $z^6-28z^3+27=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $z^3=u$ алмаштириш $u^2-28u+27=0$ квадрат тенгламага келтиради. Унинг илдизлари 1 ва 27. Энди $z^3=1$ ва $z^3=27$ тенгламаларни ечиб, жавобни топамиз:

$$z_1=1,\ z_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ z_4=3,\ z_{5,6}=\frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}.$$

Машқлар

3.43. $\sqrt{z}$ ни ҳисобланг:

а) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$;

в) $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$;

г) $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$.

3.44. $z = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ сонининг учинчи ва тўртинчи даражали илдизларини топинг.

3.45. $x^5 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тенгламанинг барча илдизлари кўпайтмасини топинг.

3.46. Квадрат тенгламаларни ечинг:

а) $x^2+8ix+12=0$;

б) $x^2 + \sqrt{15}ix + 51,5 = 0$;

в) $x^2 - 10ix + 24 = 0$.

3.47. Икки ҳадли тенгламаларни ечинг:

а) $27z^3-8=0$; **в)** $z^5+243=0$;

б) $z^{18}-1=0$; **г)** $z^{10}-59049=0$.

3.48. $z^8-12z^4+11=0$ уч ҳадли тенгламани ечинг.

3.49. $z^{12}-65z^6+64$ тенгламани ечинг.

Такрорлашга доир машқлар

3.50. Ҳисобланг:

а) $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$;

б) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$, $x \in R$;

в) $\frac{(1+2i)^2}{1-3i}$;

г) $(1-4i)-(i(3-4i)+3i)$;

д) $(1+4i)^2-(3+i^9)$;

е) $3+8i+9i^2+10i^3$;

ё) $8-4(i^{15}-1)+13i$;

ж) $21i^4+23i^{91}-17i^{17}$;

3.51. Тенгламани ечинг (бунда $x \in R$):

а) $-2x+4i=3x(\frac{1}{3}+i^2)+2i-2i^2$; б) $3+xi=(\frac{18}{9}+x)+1+i$.

в) $5+(3+x)i=3x+2+4i$; г) $x+5-(3+x^2)i=7-7i$.

3.52. Агар $(5x-3y)+(x-2y)i=6+(8-x+y)i$ бўлса, x, y ҳақиқий сонларни топинг.

3.53. Даража асосини тригонометрик шаклда ёзмасдан даражани ҳисобланг:

а) $(1+i)^{20}$; б) $(1-i)^{21}$.

3.54. Қуйидагиларни $\sin x$ ва $\cos x$ орқали ифодаланг:
а) $\sin 3x$; б) $\cos 3x$; в) $\sin 4x$; г) $\cos 4x$; д) $\sin 5x$; е) $\cos 5x$; ж) $\sin 2x$.

3.55. Комплекс сонларни тригонометрик шаклда ёзиб, ҳисоблашларни бажаринг:

а) $(1+i)^{26}$; д) $(1+i)^9(1-i)^{15}$;

б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$; е) $(1+2i)^8(2+3i)^3$;

в) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; ё) $(2+i)^{26}(2+3i)^9$;

г) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{(1-i)^{20}}\right)^{20}$; ж) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{(1-i)^{21}}\right)^{15}$.

3.56. $\sqrt[n]{z}$ ни ҳисобланг:

а) $z=1$, $n=3$; ё) $z=-9$, $n=3$;
б) $z=-1$, $n=4$; ж) $z=-15$, $n=4$;
в) $z=-4+\sqrt{48}i$, $n=3$; з) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $n=3$;
г) $z=1+i$, $n=8$; и) $z=1-i$, $n=6$;
д) $z=i$, $n=3$; к) $z=5i$, $n=2$;
е) $z=-i$, $n=3$; л) $z=-9i$, $n=2$.

3.57. Тенгламани ечинг:

а) $z^4=-1$; б) $z^3=1+i$; в) $z^2=-9$; г) $z^2=16$.

3.58. а) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ тенгламада $b^2-4ac<0$. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг.

б) $z^4+z^2+1=0$ тенгламани ечинг.

3.59. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;

в) $\sqrt[5]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}}$.

3.60. Тенгламадан x ва y ни топинг ($x\in$R, $y\in$R):

а) $(x-y)+(3x+y)i=3-3i$;

б) $(5x+3yi)+(2y-xi)=3-i$;

в) $(\frac{3}{4}x-2yi)-(\frac{1}{3}y+6xi)=21i$;

г) $(2-3i)(x+yi)=-1-5i$.

3.61. Берилган комплекс сонларни қўшинг. Қўшилувчиларнинг ва йиғиндининг геометрик тасвирини ясанг:

а) $(2+3i)+(4+2i)$;
б) $(-4+5i)+(3-2i)$;
в) $(-7+6i)+(-3-8i)$;
г) $(-5-2i)+(-6+8i)$;
д) $(-4-7i)+(4+7i)$;
е) $(-3+2i)+(3-2i)$;
ё) $3i+(4-5i)$;
ж) $4i+(-8i)$.

3.62. Айиришни бажаринг. Камаювчи, айрилувчи ва айирманинг геометрик тасвирини ясанг:

а) $(3+2i)-(2-2i)$;
б) $i-5i$;
в) $(4+3i)-(2-3i)$;
г) $(4-2i)-(3+3i)$;
д) $8-(4-3i)$;
е) $i-(2-3i)$.

3.63. Бўлишни бажаринг:

а) $6(\cos70^\circ+i\sin70^\circ):3(\cos25^\circ+i\sin25^\circ)$;

б) $2(\cos120^\circ+i\sin120^\circ):4(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$;

в) $\sqrt{6}(\cos160^\circ+i\sin160^\circ):\sqrt{3}(\cos40^\circ+i\sin40^\circ)$;

г) $4(\cos75°+i\sin75°):\frac{1}{2}(\cos(-15°)+i\sin(-15°))$;

д) $8i+(1+\sqrt{3}i)$;

е) $-6i+(-4-4i)$;

ё) $(6-6i):3(\cos15°+i\sin15°)$;

ж) $(2+2\sqrt{3}i):(4-4i)$.

3.64. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2+4; б) x^4-16; в) x^2+3-4i; г) $7+\sqrt{5}$.

3.65. Тенгликни текширинг:

а) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4=1$;

б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5=-\sqrt{2}$;

в) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^5+\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^5=\sqrt{3}$;

г) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=2$.

3.66. Комплекс текисликда қуйидаги шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини штрихланг:

а) $\mathrm{Re}(z)<5$;

б) $\frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{\pi}{3}$;

в) $\mathrm{Re}(z)=2$;

г) $\mathrm{Im}(z)=-2$;

д) $\mathrm{Re}(z)<0$;

е) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$;

ё) $|z|>5$;

ж) $1<|z|<3$;

з) $|z-4|<2$;

и) $|z+2i|\geq 4$;

к) $|z+1-i|<2$;

л) $|z-i|<|z-1|$.

3.67. $z=(p+qi)(p-qi)$ комплекс соннинг модулини топинг ($p\in R$, $q\in R$).

3.68. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3i}$ ва $z_1 = 1 - i$ сонларни тригонометрик шаклга келтириб, қуйидаги ифодаларни ҳисобланг:

а) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1^3}{z_2}$; д) $\sqrt[4]{z_1}$; ё) $z_1^2 \cdot z_2$;

б) $\frac{z_2}{z_1}$; г) z_2^6; е) $\sqrt[3]{z_2}$; ж) $z_1 \cdot z_2^2$.

3.69. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; в) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;

б) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; г) $z - \bar{z} = 2Ie(z) \cdot i$.

3.70. а) Текисликда $z_1=3+2i$ ва $z_2=5-i$ комплекс сонларга мос $M_1(3;2)$ ва $M_2(5;-1)$ нуқталар ясалган. $z_3=2(z_1+z_2)^2$ сонга мос нуқта текисликнинг қандай $M_3\ (x_3;y_3)$ нуқтасида жойлашади?

б) Параллелограммнинг учта учи $z_1=0$, $z_2=2+0{,}5i$, $z_3=0{,}7+1{,}8i$ комплекс сонларга мос нуқталарда жойлашган. Параллелограммнинг тўртинчи учига мос z_4 комплекс сонни топинг.

IV боб

КЎПҲАДЛАР

1-§. Бирҳадлар ва кўпҳадлар

1. Алгебраик ифода. Натурал кўрсаткичли даража. Бирҳад. Алгебрада қўлланиладиган ҳарфий белгилашлар бир хил турдаги кўплаб масалаларни формулалар кўринишида берилган умумий қоида асосида ечишга имконият яратади. Агар сонли ифодадаги айрим ёки барча сонлар ҳарфлар билан алмаштирилса, *ҳарфий ифода* ҳосил бўлади. Биз ҳарфий ифодалашдан математика, физика ва бошқа фанларни ўрганишда кенг фойдаланамиз.

Тўрт арифметик амал, бутун даражага кўтариш ва бутун кўрсаткичли илдиз чиқариш ишоралари орқали бирлаштирилган ҳарфлар ва сонлардан иборат ифодаларга *алгебраик ифода* дейилади. Агар алгебраик ифодада сонлар ва ҳарфларнинг илдиз ишоралари қатнашмаса, унга *рационал алгебраик ифода*, илдиз ишоралари қатнашса, *иррационал алгебраик ифода* дейилади. Агар рационал ифодада ҳарфли ифодага бўлиш амали қатнашмаса, у — *бутун алгебраик ифода* дейилади.

Мисоллар. 1) $6b-3a+dc$ — бутун алгебраик ифода;

2) $\frac{bc+a}{c}$ — каср алгебраик ифода;

3) $5+c$ — иррационал алгебраик ифода;

4) $(a-b)^2=(b-a)^2$ — айният.

Иррационал ифода бирор рационал ифодага айнан тенг бўлиши ҳам мумкин. Масалан, $\sqrt{(a^2+2)^2}-2=a^2$.

Алгебраик ифодаларни шакл алмаштиришлар ҳақида V бобда алоҳида тўхталамиз .

Ҳар бири a га тенг бўлган, n ($n \geq 2$) та кўпайтувчининг кўпайтмасига a сонининг *n-даражаси* дейилади ва a^n деб белгиланади. Шундай қилиб,

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{марта}} \quad (n \geq 2).$$

Таърифга асосан, $a^1 = a$. Натурал кўрсаткичли даража хоссалари:

1°. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $m, n \in N$.
2°. $a^m : a^n = a^{m-n}$; $m, n \in m > n$.
3°. $(a^m)^n = a^{mn}$; $m, n \in N$.
4°. $(ab)^n = a^n b^n$; $m, n \in N$.
5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a, b \in R$, $b \neq 0$, $n \in N$.

3°-хоссани исботлаймиз (қолган хоссалар ҳам шу каби исботланади):

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\ \text{марта}} = \underbrace{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{марта}}\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{марта}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{марта}}}_{n\ \text{марта}} =$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{mn\ \text{марта}} = a^{mn}.$$

Бутун мусбат даражали ҳарф, сон ёки улардан тузилган кўпайтувчилар кўпайтмасидан иборат бутун алгебраик ифодага *бирҳад* дейилади. Коэффициентлари билангина фарқ қиладиган бирҳадлар *ўхшаш бирҳадлар* дейилади. Масалан, $3ab$ ва $-4{,}2ab$ лар ўхшаш бирҳадлардир.

Ҳар қандай бирҳад турли кўринишда ёзилиши мумкин. Масалан, $7a^6 \cdot b^5 = 3{,}5 \cdot 2a^6 \cdot b^5 = 7a^4 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = \cdots$

Лекин $7a^6b^5$ бирҳадда сонли кўпайтувчи биринчи ўринда, ҳарфлар алфавит тартибида даража кўрсаткичи орқали бир марта ёзилган бўлиб, у *стандарт (каноник)* кўринишда ёзилгандир.

Бирҳаддаги барча ҳарфлар даражаларининг йиғиндиси шу бирҳаднинг *даражаси* дейилади.

Сон ёки битта ҳарф ҳам бирҳаддир. Масалан, x; y; $\frac{3}{4}$; 0; 3,(9) — бирҳадлардир.

Машқлар

4.1. Ифодани x асосли даража кўринишида ёзинг:

а) $x^3 \cdot x^5$; д) $(x^2)^3$; з) $x^3 \cdot x^a$;
б) $x^4 \cdot x^5 \cdot x^6$; е) $(x^3)^2$; и) $(x^2 \cdot x^3)^a$;
в) $-x^3 \cdot x^4$; ё) $(x^2 \cdot x^4)^3$; к) $x^2 \cdot (x^3)^4$;
г) $-x^3 \cdot x^3$; ж) $((x^3)^4)^5$; л) $(x^4)^2 \cdot (x^2)^4$.

4.2. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\frac{2^5 \cdot 11^8}{22^{10}} \cdot \frac{34^4 \cdot 2^{10}}{17^5 \cdot 8^4}$; д) $\frac{12^8}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{10}{2^6 \cdot 5^7}$;

б) $\frac{2^8 \cdot 7^9}{14^{10}} \cdot \frac{26^5}{13^6 \cdot 8^4}$; е) $\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7}$;

в) $\frac{14^{10}}{2^8 \cdot 7^9} \cdot \frac{13^6 \cdot 8^4}{26^5}$; ё) $\frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7} \cdot \frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4}$;

г) $\frac{12^5}{2^3 \cdot 4^4}$; ж) $\frac{10^5}{2^7 \cdot 5^6} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^3}{12^5}$.

4.3. Бирҳаднинг даражасини аниқланг:

а) $3x^4xy^5$; д) $3xy^9z$; и) 15;
б) $-31xy^4$; е) $14x^2y^3z^4$; к) x^4y^2z;
в) $0,8x^2y^2$; ё) $13yz^{15}$; л) $x \cdot x^2 \cdot \cdot \cdot x^9$;
г) 15; ж) $43x^2y^3z^{19}$; м) $xyx^2y^2x^4y^4x^6y^6 \cdot \cdot \cdot x^{20}y^{20}$;

4.4. Бирҳадни стандарт шаклга келтиринг.

а) $13xy \cdot 14x^2y^3$; д) $3xy(-1,5)y^3$;

б) $x^2y^2xzy^4$; е) $\frac{2}{3}ax^2y^2 \cdot 6,5x^3$;

в) $3x^2z^2y^2\cdot xz^5$; ё) $a\cdot xy^2z\cdot y^4\cdot x^5$;

г) $11x^2y\cdot 13x^3y^4$; ж) $a(x^2)^3yz^2x^3$.

4.5. A^n ни топинг:

а) $A=3x^2yz$, $n=3$; д) $A=2x^2yz^2$, $n=4$;

б) $A=13xy^2$, $n=2$; е) $A=3xz^4$, $n=5$;

в) $A=x^2y^4z$, $n=14$; ё) $A=4y^2z^3$, $n=4$;

г) $A=41xyz^2$, $n=3$; ж) $A=14xy^3z^3$, $n=2$.

4.6. Бирҳаднинг коэффициентини аниқланг:

а) $1{,}5xy^2\left(\frac{2}{3}\right)x^2$; д) $1{,}(51)x^2yz^2\cdot\frac{3}{4}xy$;

б) $\frac{4}{7}xz\cdot\frac{13}{8}x^2y$; е) $1\frac{3}{7}xy^2\cdot\frac{4}{10}z^2$;

в) $\frac{14}{15}x\cdot\frac{15}{28}y\cdot 2y^3$; ё) $\frac{11}{13}x^2y^3z$;

г) $0{,}(3)xy\cdot\frac{1}{9}z$; ж) $\frac{13}{14}xy\cdot\frac{17}{13}z^2$.

4.7. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(13a+15b)-(14a-7b)$;

б) $(11x^3-12x^2)+(x^3-x^2+x^4)$;

в) $(3a^2x-11x^2)-(3a^2x+6x^2)$;

г) $(4x^2y+8xy)-(3x^2y-5xy)$;

д) $(23x-11y+10a)-(-15x+10y-15a)$;

е) $(7a^2-5ax-x^2)+(-2a^2+ax-2x^2)$;

ё) $(13x^2-8xy+y^2)+(-11x^2-9xy)$;

ж) $(11xy+13y^2)-(9xy+x^2)$.

4.8. Амалларни бажаринг:

а) $a(a^2+x)-x(a-x)$;

б) $13(x^2+y)+5(x^2-y)$;

в) $2(a-3x)+3(a-2x)$;

г) $13(2a-3x)+11(a+x)$;

д) $-3(a^2-x^2)-2(a^2+x^2)$;

е) $-(3a-2x)+5(a-2x)$;

ё) $17(x^2-y^2)-15(y^2-x^2)$;

ж) $19(x^3y-xz^2)+17(-x^3y+3xz^2)$.

4.9. Ифодани соддалаштиринг ва ўзгарувчининг кўрсатилган қийматида ифода қийматини топинг:

а) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$; $a=1,75$;

б) $(2a-5)(a+1)-(a+2)(a-3)$; $a=-2,6$;

в) $(a-5)(a-1)+(a-2)(a-3)$; $a=1,3$;

г) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$; $x=-0,4$.

2. Кўпҳадлар. Бирҳадлар йиғиндиси *кўпҳад* дейилади.

Масалан, $3a^2b+7b^2c$, $9x^2y+xy^2$ ифодаларнинг ҳар бири кўпҳаддир.

Кўпҳад таркибидаги энг катта даражали бирҳаднинг даражаси шу *кўпҳаднинг даражаси* дейилади. Масалан, $P(x)=c+ax^2+bx$, $3xy+z$ иккинчи даражали кўпҳаддир.

$P(x)=c+ax^2+bx$ ва $P(x)=ax^2+bx+c$ кўпҳадларни қарайлик, улар битта кўпҳаднинг икки кўринишли ёзуви. Улардан иккинчиси x ўзгарувчи даража кўрсаткичларининг камайиб бориши тартибида, яъни *стандарт* кўринишдаги ёзувдир. Кўп аргументли кўпҳадлар ҳам стандарт кўринишда ёзилиши мумкин. $x, y, \dots, z$ — ўзгарувчилар, a,b лар нолдан фарқли сонлар бўлсин. $ax^{k_1}y^{k_2}\dots z^{k_n}$ ва $bx^{m_1}y^{m_2}\dots z^{m_n}$ бирҳадларни солиштирайлик. $k_1=m_1$, $k_2=m_2,\dots$, $k_i=m_i$, лекин $k_{i+1}>m_{i+1}$ бўлса, биринчи бирҳад иккинчисидан катта, чунки улардаги x ва y лар даража кўрсаткичлари бир хил бўлса-да, z нинг кўрсаткичи биринчи бирҳадда катта.

Агар кўп ўзгарувчили кўпҳадда ҳар қайси қўшилувчи ўзидан ўнгда турган барча қўшилувчилардан катта бўлса, қўшилувчилар *луғавий (лексикографик)* тартибда жойлаштирилган дейилади. Масалан, $P(x,y,z)=8x^5y^6z^2-5x^4y^8z+16x^4y^5z^4$ кўпҳаднинг қўшилувчилари луғавий тартибда жойлаштирилган.

Агар кўпҳаднинг барча ҳадларида $x,y,\ldots,z$ ўзгарувчиларнинг кўрсаткичлари йиғиндиси m га тенг бўлса, уни *m-даражали бир жинсли кўпҳад* дейилади. Масалан, $8x-5y+z$ — биринчи даражали бир жинсли (бунда $m=1$), $x^3+y^3+z^3-7xy^2-5xyz$ — учинчи даражали ($m=3$) бир жинсли кўпҳад.

Агар $ax^{k_1}\ldots z^{k_n}$ бирҳад $m=k_1+\ldots+k_n$ даражали бўлса, ихтиёрий умумий λ кўпайтувчи учун $a(\lambda x)$ га эга бўламиз.

Агар ихтиёрий λ сони учун $f(\lambda x,\ldots,\lambda z)=\lambda^m f(x,\ldots,z)$ тенглик бажарилса, $f(x,\ldots,z)$ кўпҳад (функция) m-даражали бир жинсли кўпҳад (функция) бўлади. Масалан, $f(x,y)=y^3+y^2\cdot\sqrt{xy+\frac{x^3}{y}}$ фукция 3-даражали бир жинсли функциядир, чунки $f(2x,2y)=8y^3+4x^2\cdot\sqrt{4\left(xy+\frac{x^3}{y}\right)}=2^3f(x;y)$.

Шу каби, $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3+x^2\sqrt{xy+\frac{x^3}{y}}$ — учинчи даражали ($m=3$), $f(x,y,z)=\frac{y+z}{3x+y}$ нолинчи даражали ($m=0$), $f(x,y,z)=z\cdot\frac{y+z}{3x+y}$ биринчи даражали ($m=1$) *бир жинсли функция*лардир. Агар x^3y+xy^3 кўпҳадда x ўрнига y, y ўрнига x ёзилса (яъни x ва y лар ўрин алмаштирилса), олдинги кўпҳаднинг ўзи ҳосил бўлади.

Агар $P(x,y,\ldots,z)$ кўпҳад таркибидаги ҳарфларнинг ҳар қандай ўрин алмаштирилишида унга айнан тенг кўпҳад ҳосил бўлса, P кўпҳадга *симметрик кўпҳад* дейилади. Симметрик кўпҳадда қўшилувчилар ўрин алмаштирилганда йиғинди, кўпайтувчилар ўрин алмаштирилганда кўпайтма ўзгармайди.

Агар $(\lambda+x)(\lambda+y)....(\lambda+z)$ ифодадаги қавслар очилса, λ даражаларининг коэффициентлари сифатида $x,y,...,z$ ўзгарувчиларнинг симметрик кўпҳадлари турган бўлади. Уларга *асосий симметрик кўпҳадлар* дейилади. Масалан, ўзгарувчилар сони $n=2$ бўлса, $(\lambda+x)(\lambda+y)=\lambda^2+(x+y)\lambda+xy$ бўлиб, асосий симметрик кўпҳадлар $x+y$ ва xy бўлади. Уларни $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ орқали ифодалаймиз. Шу каби, $n=3$ да $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+xz+yz$, $\sigma_3=xyz$ бўлади.

Булардан ташқари, қуйидаги кўринишдаги $\sigma_1=x+ +y+...+z$ (n та қўшилувчи), $\sigma_2=x^2+y^2+...+z^2$, . . . , $\sigma_k=x^k+y^k+ +...+z^k$ *даражали йиғиндилар* ҳам симметрик кўпҳадлардир.

1 - теорема. ***Ихтиёрий*** $\mathbf{s_k=x^k+y^k}$ ***даражали йиғинди*** $\sigma_1=x+y$ **ва** $\sigma_2=xy$ ***ларнинг кўпҳади кўринишида тасвирланиши мумкин.***

Исбот. Ҳақиқатан, $k=1$ да $s_1=x+y=\leq\sigma_1$, $k=2$ да $s_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1{}^2-2\sigma_2$. Теорема s_{n-1} ва s_n (бунда $1\leq n\leq k$, $k\leq 2$) учун тўғри бўлсин. Унинг s_{n+1} учун тўғрилигини исботлаймиз:

$s_{n+1}=x^{n+1}+y^{n+1}=(x^n+y^n)(x+y)-x^ny-xy^n=(x^n+y^n)(x+y)-(x^{n-1}+ +y^{n-1})xy=s_n\sigma_1-s_{n-1}\sigma_2$. Фараз бўйича s_n ва s_{n-1} лар учун теорема тўғри эди. Демак, теорема s_{n+1} учун ҳам тўғри.

2 - теорема. ***$x,...,z$ ўзгарувчили ҳар қандай симметрик P кўпҳад ягона равишда шу ўзгарувчилардан тузилган асосий симметрик кўпҳадлардан иборат бўлиши мумкин.***

Исбот: $n=2$ бўлган ҳолни қараймиз. $P(x,y)$ симметрик кўпҳад ax^my^k қўшилувчига эга бўлсин. Агар $m=k$ бўлса, бу қўшилувчи $a(xy)^k$ га, яъни $a\sigma^k$ га тенг, $k>m$ бўлса, $P(x,y)$ нинг таркибида ax^my^k билан бир қаторда x ва y ларни ўрин алмаштиришдан ҳосил бўлувчи ay^mx^k қўшилувчи ҳам бўлади: $ax^ky^m+ +ax^my^k=a(xy)^m(x^{k-m}+y^{k-m})=a\sigma_2^m s_{k-m}$. Лекин 1-теоремага мувофиқ ихтиёрий s_{k-m} даражали йиғинди, демак, P симметрик кўпҳад ҳам, ҳар доим σ_1 ва σ_2 орқали ифодаланади.

1 - мисол. $P(x,y)= x^3+y^3 +2x^2y+2xy^2$ симметрик кўпҳадни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодалаймиз.

Ечиш. $P(x,y)= (x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)= (x+y)(x^2-xy+y^2+2xy)= (x+y)((x+y)^2-xy)=\sigma_1(\sigma_1{}^2-\sigma_2)$.

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_i\ a_n\neq0$ кўринишдаги бутун рационал ифодага бир *ўзгарувчили n-даражали кўпҳад дейилади.* Ҳар қандай сон 0-даражали кўпҳаддан иборат. 0 сони эса даражага эга бўлмаган кўпҳад. a_nx^n қўшилувчи кўпҳаднинг *бош ҳади*, a_0 эса унинг *озод ҳади* дейилади.

3 - теорема. ***Ўзгарувчи х бўйича тузилган ҳар қандай бутун рационал ифода***

$$a_nx^n+ a_{n-1}x^{n-1}+ \dots + a_1x+a_0 \qquad (1)$$

кўринишдаги ифодага айнан тенгдир, бунда $a_n,\dots,a_0$ — ҳақиқий сонлар, $a_n\neq0$.

Исбот . Теорема сонлар ва x ифода учун ҳар доим ўринли. У $A(x)$ ва $B(x)$ ифодалар учун ўринли, дейлик: $A(x)=a_mx^m+...+a_0(m>n)$, $B(x)=b_nx^n+...+b_0$. У ҳолда $A(x)+B(x)=(a_mx^m+...+a_0)+(b_nx^n+...+b_0)= (a_mx^m+.. ...+a_0)+(0\cdot x^m+..+0\cdot x^{n+1}+b_nx^n+...+b_0)=(a_m+0)x^m+...+(a_0+b_0)$ йиғинди (1) кўринишда бўлади. Шу каби,

$$A(x)B(x)=(a_mx^m+...+a_0)(b_nx^n+...+b_0)=...=, \quad \sum_{i=0}^{m+n} c_ix^i \qquad (2)$$

$c_i=a_ib_0+a_{i-1}b_1+...+a_1b_{i-1}+a_0b_i$ (агар $i>m$ бўлса, $a_i=0$ бўлади).

Шундай қилиб, теорема барча сонлар ва x ифода учун ўринли, унинг $A(x)$ ва $B(x)$ учун ўринли бўлганидан $A(x)+ B(x)$ ва $A(x)\cdot B(x)$ учун ўринли бўлиши келиб чиқади. Демак, теорема барча рационал ифодалар учун ўринли.

(2) тенгликка қараганда, икки кўпҳад кўпайтмасининг бош ҳади кўпаювчилар бош ҳадларининг кўпайтмасига, озод ҳади озод ҳадларининг кўпайт-

масига тенг, кўпайтманинг даражаси кўпаювчилар даражаларининг йиғиндисига тенг. Бир хил даражали кўпҳадларни қўшганда кичик даражали кўпҳад ҳосил бўлиши мумкин, турли даражали кўпҳадларни қўшганда эса даражаси катта даражали қўшилувчининг даражаси билан бир хил бўлган кўпҳад ҳосил бўлади. Масалан, $(4x^2-x+3)+(-4x^2-2x+1)=-3x+4$, $(4x^2-x+3)+(-2x+1)=-4x^2-3x+4$.

Икки кўпҳаднинг айнан тенг бўлиш шартини ифодаловчи теоремани исботсиз келтирамиз.

3-теорема. ***Агар $P(x)$ кўпҳаднинг ҳеч бўлмаса битта коэффициенти нолдан фарқли бўлса, шундай $x_0 \in R$ сони топиладики, унда кўпҳад нолга айланмайди, яъни $P(x_0) \neq 0$ бўлади.***

1-хулоса. Агар x нинг ҳар қандай қийматида $P(x)$ кўпҳад нолга тенг бўлса, у ҳолда унинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлади.

Исбот. Барча $x \in R$ учун $P(x)=0$ бўлсин. Агар $P(x)$ нинг бирор коэффициенти нолга тенг бўлмаса, 3-теоремага мувофиқ шундай $x=b$ сони топиладики, унда $P(b) \neq 0$ бўлади. Бу эса $\forall x \in R$ учун $P(x)=0$ бўлишлик шартига зид. Демак, барча коэффициентлар нолга тенг.

2-хулоса. *Айнан тенг $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадларда x нинг бир хил даражалари коэффициентлари тенг бўлади.*

Исбот. $P(x)=Q(x)$ бўлгани учун $P(x)-Q(x)=0$ бўлади. 1-хулосага кўра, бу айирманинг барча коэффициентлари нолга тенг. Бундан, $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадларнинг мос коэффициентлари тенг бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. Агар $P(x)=(x^2+2)^3-6(x^2-2)^2-4x^3-$ $-36x^2+20$ ва $Q(x)=(x^3-2)^2$ бўлса, $P(x)=Q(x)$ бўлишини исбот қиламиз.

Исбот. $P(x)=(x^6+3\cdot 2x^4+3\cdot 4x+8)-6(x^4-4x^2+4)-$ $-4x^3-36x^2+20=x^6-4x^3+4$, $Q(x)=x^6-4x^3+4$. Демак,

$P(x)=Q(x)$. Амалда (масалан, калькуляторда ҳисоблашлар сонини камайтириш мақсадида) бутун рационал ифодаларни қуйидаги кўринишдаги ёзувидан фойдаланиш қулай:

$$(\ldots((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots)+a_0. \qquad (3)$$

2 - м и с о л. $P(x)=5x^4+4x^3-7x^2-2x+4$ ифоданинг $x=3{,}89$ даги сон қийматини ҳисоблаш зарур бўлсин. Шу ёзув бўйича жами 14 марта, $P(x)=(((5x+4)x-7)x-2)x+4$ кўриниши бўйича эса 9 марта амал бажарилади.

Машқлар

4.10. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $7ax+14ay$;
б) $3a^2x+6a^4x^3$;
в) $ax+bx+x$;
г) a^3-2a^2-a;
д) $x(a-c)+y(c-a)$;
е) $a(x-y)-c(y-x)$;
ё) $2y(x-3)-5c(3-x)$;
ж) $5(x-3)-a(3-x)$;
з) $5x^{a+2}+10x^2$;
и) $a^{3x}-a^{2x}$;
к) $a^cx^{2c}+a^cx^c$;
л) $15x^{2c+3}-25x^{c+1}$.

4.11. Исботланг:

а) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
в) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
г) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;
д) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;
е) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
ё) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
ж) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

4.12. Касрнинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{35^5-18^8}{72^{10}-16^2}$;
б) $\dfrac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$;
в) $\dfrac{856^2-44^2}{406}$;
г) $\dfrac{71^2-23^2+94\cdot 42}{62^2-32^2}$;

д) $\frac{63^2-23^2}{71^2-15^2+86\cdot24}$; е) $\frac{\left(4^{k-1}+6\cdot4^k\right)^3}{\left(8^{k+1}+2\cdot8^k\right)^2}$, $k\in N$;

ё) $\frac{\left(8^{k+1}+8^k\right)^2}{\left(4^k+4^{k-1}\right)^3}$, $k\in N$; ж) $\frac{\left(13^2-11^2\right)\left(13^2+11^2\right)}{36^2-12^2}$.

4.13. Кўпайтувчиларга ажратинг:
а) x^2-y^2-x-y;
б) x^2-$2xy$+y^2-c^2;
в) $(x$-$5)^2$-16;
г) $2x^2$-$4x$+2;
д) ax^2-a-x^2+x;
е) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
ё) x^3-y^3-$5x(x^2+xy+y^2)$;
ж) $a^4+ax^2-a^3x-x^4$;
и) $(x+y)(x^2+y^2)-x^3-y^3$;
к) $36a^2-(a^2+9)^2$;
л) $8x^3-27y^{18}$;
м)$(x-y)(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)-(x^6-y^6)$.

4.14. k нинг исталган натурал қийматида
а) $(k+1)^2$-$(k-1)^2$ нинг қиймати 4 га;
б) $(2k+3)^2$-$(2k-1)^2$ нинг қиймати 8 га;
в) k^3-k нинг қиймати 6 га;
г) $(3k+1)^2$–$(3k-1)^2$ нинг қиймати 12 га бўлинишини исботланг.

4.15. Агар $a+b+c=0$ бўлса, $a^3+b^3+c^3=3abc$ бўлишини исботланг.

4.16. Сонларни taққосланг:
а) 45^2-31^2 ва 44^2-30^2; б) $297\cdot299$ ва 298^2;
в) 26^3-24^3 ва $(26$-$24)^3$; г) $(17+13)^2$ ва 17^3+13^3.

4.17. $ab=0$ бўлса, $|a+b|$ нинг қиймати нимага тенг бўлиши мумкин? ($\sqrt{x^2}=|x|$ дан фойдаланинг).

4.18. $|a|^2+|b|^2+|c|^2=0$ бўлса, $(a+b+c)^2$ нинг қийматини топинг.

4.19. $(x+y+z)^2$-$2xy$-$2xz$ ни соддалаштиринг.

4.20. $(x\text{-}y\text{-}z)^2$ ни кўпҳадга айлантиринг.

4.21. $f(x)=x^2\text{-}3x^2+2x\text{-}1$ кўпҳад берилган. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $f(2)$;
б) $f(i)$;
в) $f(i+1)$;
г) $f\left(\sqrt{2}\right)$;
д) $f(\text{-}i)$;
е) $f(i+1)$;
ё) $f(-i)$;
ж) $f\left(\sqrt{3}-1\right)$;
з) $f(x\text{-}1)$;
и) $f(a)$;
к) $f(2^n)$;
л) $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4.22. Кўпҳад коэффициентларининг йиғиндисини топинг:

а) $f(x)=(4x-1)^{1999}(2x\text{-}1)^{2000}+(8x\text{-}1)^2(4x\text{-}1)$;
б) $f(x)=(3x-2)^{2000}(3x\text{-}1)^{199}+(8x+1)^2+2$;
в) $f(x)=(x\text{-}2)^{200}(2\text{-}x)+(4\text{-}x)^{99}(x\text{-}1)^{20}+3$;
г) $f(x)=(x\text{-}1)(x\text{-}2)^{20}+(4\text{-}4x)^{18}(x+3)^2+17$.

4.23. $f(x)$ кўпҳад коэффициентларининг йиғиндиси m га тенг. a ни топинг:

а) $f(x)=x^3+ax^2+3x+1;\ m=5$;
б) $f(x)=7x^3+2x^2+ax+2;\ m=4$;
в) $f(x)=12x^4+2x^3+ax^2+1;\ m=12$;
г) $f(x)=ax^5+4x^4+8x+1;\ m=\text{-}4$.

4.24. Кўпҳаднинг озод ҳадини топинг:

а) $f(x)=(3x^2-1)^{20}(4x+1)^{15}\text{-}x^{20}+15$;
б) $f(x)=(3x-4)^{18}(13x\text{-}1)^{16}+x^{17}\text{-}15$;
в) $f(x)=(2x+1)^{15}(3x^2+2)^4+(x-2)^2+17$;
г) $f(x)=(3x+1)^2(3x+4)^3(x+1)^{200}+(x\text{-}1)^{20}+19$.

4.25. $f(x)$, $g(x)$ лар тенг кўпҳадлар бўлса, a, b ларни топинг:

а) $f(x)=ax^7+3x^6+x^2+1$, $g(x)=3x^6+bx^2+1$;
б) $f(x)=ax^3+bx^2+3x+2$, $g(x)=x^3+bx^2+3x+2$;
в) $f(x)=ax^3+2x+3$, $g(x)=4x^3+bx+3$;
г) $f(x)=ax^8+bx^3+9$, $g(x)=ax^{10}+4x^3+ax^2+9$.

4.26. $x+5=a(x\text{-}2)(x\text{-}3)+b(x\text{-}1)(x\text{-}3)+c(x\text{-}1)(x\text{-}2)$ тенглик айният бўлса, a, b, c ларни топинг.

4.27. Кўпҳадлар йиғиндисини топинг:

а) $f(x)=x^{88}+3x^{77}+4x^2+1$, $g(x)=4x^{88}+3x^{65}+15$;
б) $f(x)=x^4\text{-}5x^3+4x^2\text{-}1$, $g(x)=-x^4+6x^3+x+2$;

в) $f(x)=x^6+5x^2+11x+4$, $g(x)=2x^6+x^4+3x^3+5$;

г) $f(x)=x^7+x^6+5x^4+12$, $g(x)=7x^3+8x^2-11$.

4.28. Кўпҳадлар йиғиндисининг даражасини топинг:

а) $f(x)=(x-1)^7(x-2)^5+3x$, $g(x)=(2x-4)^{12}+4x^2$;

б) $f(x)=(2x+5)^{15}+3x^4+4$, $g(x)=(2x+3)^{16}-4x^3+x+1$;

в) $f(x)=(3x+5)^{15}+31x^5+2$, $g(x)=-(3x+11)^{15}+33x^6+4$;

г) $f(x)=x^7+x^6+3x^2+x+3$, $g(x)=-x^7+2x^6+4x^5+2$.

4.29. 4.27-мисолдаги кўпҳадлар учун $f(x)-g(x)$ ни топинг.

4.30. Кўпҳадларни кўпайтиринг:

а) $f(x)=5x^4+4x^2+x+2$, $g(x)=4x$;

б) $f(x)=4x^4+3x^3+2$, $g(x)=4x^3+7x+1$;

в) $f(x)=11x^4+3x^2+3x+5$, $g(x)=5x^6+7x^2+4x+2$;

г) $f(x)=13x^3+4x^2+x+2$, $g(x)=2x^2+5x+6$.

4.31. Айниятларни исботланг:

1) $(x^2+y^2+z^2)(u^2+v^2+w^2)=(xu+yv+zw)^2+(zv-yw)^2+(xw-zu)^2+(xv-yu)^2$;

2) $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.

4.32. а) x, y, z нинг s_2, s_3, s_4 даражали йиғиндиларини σ_1 ва σ_2 асосий симметрик кўпҳадлар орқали ифодаланг;

б) $x^4+y^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_1^2$ тенгликни исбот қилинг.

4.33. а) $x^2-4x+3=0$ квадрат тенгламани ечмай, 1) шундай янги квадрат тенглама тузингки, унинг илдизлари берилган тенглама x_1, x_2 илдизлари квадратларидан иборат бўлсин; 2) янги квадрат тенглама илдизлари $\alpha_1=x_1+2x_2$ ва $\alpha_2=x_2+2x_1$ бўлсин;

б) $x^2+x-2=0$ тенгламани ечмасдан, унинг илдизларининг учинчи даражалари йиғиндисини топинг.

4.34. 1) $x^3+4x^2y+4xy^2+y^3$; 2) $x^4-5x^4y+6x^3y^2+6x^2y^3-5xy^4+y^5$ симметрик кўпҳадларни α_1 ва α_2 лар орқали ифодаланг.

4.35. σ_1 ва σ_2 лардан иборат кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x^4-12x^3y+15x^2y^2-12xy^3+y^4$;

б) $16x^4+13x^3y+8x^2y^2+13xy^3+16y^4$;

в) бутун коэффициентли $P(x,y)=Ax^2+2Bxy+$ $+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ кўпҳад рационал коэффициентли $ax+by+c$ учҳаднинг аниқ квадрати бўлиши учун A, B, C, D, E, F коэффициентларга нисбатан қандай шартлар қўйилиши керак?

3. Қисқа кўпайтириш формулаларининг умумлашмалари. Агар кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш қоидаларидан фойдаланиб, зарур соддалаштиришларни бажарсак, қуйидаги формулалар ҳосил бўлади:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2,$$

$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^2,$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2,$$

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3,$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3,$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

ва ҳоказо.

Энди $x+a$ иккиҳадни m натурал кўрсаткичли даражага кўтариш қонунияти билан танишамиз. Шу мақсадда $(x+a)$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$ ва ҳоказо даражаларга кўтаришларни бажариб, ҳосил бўлган *ёйилма*нинг коэффициентларини кузатайлик:

$$(x + a)^1 = 1x + 1a,$$

$$(x + a)^2 = 1x^2 + 2ax + a^2,$$

$$(x + a)^2 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3.$$

Ёйилмалардан бош коэффициентлар 1 га тенглигини кўрамиз. Охирги кўпҳадни $x+a$ га кўпайтириб,

$$(x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4a^3x + 1a^4$$

ни ҳосил қиламиз. Шу каби

$$(x+a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$$

ва ҳоказоларни ҳосил қиламиз.

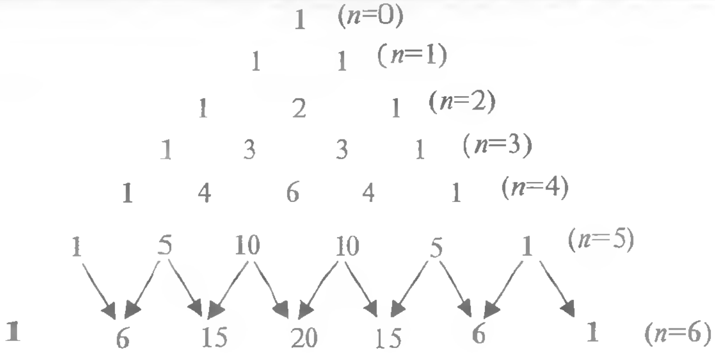
$(x+a)^n$ учун қуйидагига эга бўламиз:

1) Ёйилмадаги барча ҳадларнинг сони $x+a$ иккиҳад кўтарилаётган даража кўрсаткичидан битта ортиқ, яъни ҳадлар сони $n+1$ га тенг;

2) x ўзгарувчининг кўрсаткичи n дан 0 гача 1 тага кетма-кет камайиб, a ўзгарувчининг даражаси эса 0 дан n гача кетма-кет ўсиб боради. Ҳар бир ҳадда x ва a нинг даражалари йиғиндиси n га тенг.

3) Ёйилма бошидан ва охиридан тенг узоқликдаги ҳадларнинг коэффициентлари ўзаро тенг, бунда биринчи ва охирги ҳадларнинг коэффициентлари 1 га тенг;

4) $(x+a)^0$, $(x+a)^1$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$, $(x+a)^5$ ва $(x+a)^6$ ёйилмалари коэффициентларини учбурчаксимон кўринишда жойлаштирайлик:



Ҳар бир сатрнинг коэффициенти ундан олдинги сатр қўшни коэффициентлари йиғиндисига тенг (стрелка билан кўрсатилган).

Коэффициентларнинг бу учбурчак жадвали *Паскаль учбурчаги* номи билан аталади. Ундан фойдаланиб, $(x+a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 +$

$+ 6xa^5 + a^6$ эканини кўрамиз.

n нинг катта қийматларида Паскаль учбурчагидан фойдаланиш анча ноқулай. Масалан, n=20 да ҳисоблаш учун дастлабки 19 қаторни ёзиш керак бўларди.

Умумий ҳолда ушбу Ньютон биноми формуласидан фойдаланилади:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \tag{1}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + n\cdot ab^{n-1} + b^n.$$

Масалан:

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4y^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3y^3 +$$

$$+ \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4y^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}xy^5 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}y^6 =$$

$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

(1) ни математик индукция методидан фойдаланиб исботлаймиз.

n=1 да $a+b=a+b$,
n=2 да $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

. . . .

$n=m$ да
бўлсин
$n=m+1$ да

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m\cdot(a+b)=\Big(a^m+ma^{m-1}b+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}a^{m-k}\cdot b^k+\ldots+$$

$$+mab^{m-1}+b^m\Big)(a+b)=a^{m+1}+(m+1)a^mb+$$

$$+\frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2+\ldots+$$

$$+\frac{(m+1)m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}a^mb^{k+1}+\ldots+$$

$$+(m+1)ab^m+b^{m+1}$$

бўлади. Демак, (1) формула ўринли.

Машқлар

4.36. Кўпқад шаклида ёзинг

а) $(x+y+z)^2$; б) $(x+y-z)$; ж) $(a+b)^7$;
в) $(x+y+z)^3$; г) $(x+y-z)^3$; з) $(2x+3y)^8$;
д) $(a+b+c+d)^2$; е) x^6+y^6; и)$(5x-4y)^6$.

4.37. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) a^4-1; б) $a^{12}-2a^6+1$;
в) $a^2-2a^3b-2ab^3+b^2$; г) $a^3-7a^3+7a+15$;
д) a^3-5a^2-a+5; е) a^4-10a^2+169;
ж) $a^{10}+a^5+1$; з) $(x+3)^4+(x+5)^4-16$;
и) $a^3+b^3+c^3$-$3abc$.

4.38. Айниятларни исбот қилинг:

а) $(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=x^8-1$;
б) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$;
в) $(x^2-3x+1)^2-1=(x-3)(x-2)(x-1)x$;
г) $x+1=(x+1)[x(x-1)(x^2+1)+1$.

4.39. Ифодаларни соддалаштиринг:

1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$;

2) $(x+y+z)^2-(x+y-z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2$.

4.40. Айниятларни исбот қилинг:

а) $(x^2-y^2)(a^2-b^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$;

б) $x^4-8x+63=(x^2+4x+9)(x^2-4x+7)$;

в) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

г) $x^4+2x^3+4x^2+3x-10=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$;

д) $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$;

е) $x^6-2x^5+4x^4+2x^3-5x^2=x^2(x-1)(x+1)(x^2-2x+5)$.

4. Кўпҳадларни бўлиш. Бир ўзгарувчили $A(x)$ ва $B(x)$ кўпҳадлар учун

$$A(x)=B(x)\cdot Q(x) \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўладиган $Q(x)$ кўпҳад мавжуд бўлса, $A(x)$ кўпҳад $B(x)$ кўпҳадга бўлинади (ёки қолдиқсиз бўлинади) дейилади. Бунда $A(x)$ кўпҳад бўлинувчи, $B(x)$ кўпҳад бўлувчи, $Q(x)$ кўпҳад эса бўлинма дейилади.

$x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$ айниятдан, $A(x)=x^3-1$ кўпҳаднинг $B(x)=x^2+x+1$ кўпҳадга (қолдиқсиз) бўлинишини ва бўлинма $Q(x)=x-1$ кўпҳадга тенглигини кўрамиз.

Бутун сонни бутун сонга (бутун) бўлиш амали каби, кўпҳадни кўпҳадга қолдиқсиз бўлиш амали ҳамма вақт ҳам бажарилавермайди. Шу сабабли, кўпҳадни кўпҳадга қолдиқсиз бўлишга нисбатан янада умумийроқ бўлган амал, кўпҳадни кўпҳадга қолдиқли бўлиш амали киритилади.

$A(x)$ кўпҳадни $B(x)$ кўпҳадга қолдиқли бўлиш деб, уни қуйидаги кўринишда тасвирлашга айтилади:

$$A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x). \qquad (2)$$

(2) тенгликдаги $Q(x)$ ва $R(x)$ лар бир ўзгарувчили кўпҳадлар бўлиб, $R(x)$ кўпҳаднинг даражаси $B(x)$ кўпҳаднинг даражасидан кичик ёки $R(x)=0$.

(2) тенгликдаги $A(x)$ кўпҳад бўлинувчи, $B(x)$ кўпҳад бўлувчи, $Q(x)$ кўпҳад бўлинма (ёки тўлиқсиз бўлинма), $R(x)$ кўпҳад эса қолдиқ дейилади.

Агар (2) тенгликда $R(x)=0$ бўлса, (1) тенглик ҳосил бўлади, яъни $A(x)$ кўпҳад $B(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинади. Шу сабабли, қолдиқсиз бўлишни қолдиқли бўлишнинг хусусий ҳоли сифатида қараймиз.

Олий математика курсида, ҳар қандай $A(x)$ кўпҳаднинг ҳар қандай $B(x)$ кўпҳадга (бу ерда $B(x)\neq0$) қолдиқли бўлиниши ҳақидаги қуйидаги теорема исботланади.

Теорема. ***$A(x)$ ва $B(x)$ кўпҳадлар ҳақиқий коэффициентли ва $B(x)\neq0$ бўлсин. У ҳолда шундай $Q(x)$ ва $R(x)$ кўпҳадлар топиладики, улар учун $A(x)=$ $=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$ тенглик ўринли бўлади ва бунда $R(x)$ нинг даражаси $B(x)$ никидан кичик ёки $R(x)=0$ бўлади ҳамда $Q(x)$, $R(x)$ кўпҳадлар бир қийматли аниқланади.***

Бу теорема кўпҳадни кўпҳадга бўлишнинг амалий усулини бермайди. Кўпҳадни кўпҳадга бўлишнинг амалий усуллари «*аниқмас коэффициентлар усули*» ва «*бурчакли бўлиш*» усулини мисолларда қараймиз.

1-мисол. $A(x)=x^3+x+1$ кўпҳадни $B(x)=x^2+x+1$ кўпҳадга аниқмас коэффициентлар усули билан бўламиз.

Ечиш. $A(x)$ купҳад 3-даражали, $B(x)$ эса 2-даражали кўпҳад бўлгани учун $Q(x)$ кўпҳад 1-даражали кўпҳад бўлиши керак. $A(x)$ кўпҳадни $B(x)$ кўпҳадга бўлишдаги қолдиқнинг даражаси кўпи билан 1 га тенг бўлади. Шу сабабли, $Q(x)$ ни $Q(x)=ax+b$ кўринишда, $R(x)$ ни эса $R(x)=px+q$ кўринишда излаймиз. Бу ердаги a, b, p, q лар топилиши керак бўлган аниқмас коэффициентлардир.

$A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$ тенгликни $x^3+x+1=(x^2+x+1)\cdot$ $\cdot(ax+b)+(px+q)$ кўринишда ёзиб, унинг ўнг томонидаги амалларни бажарамиз. Ихчамлаштиришлардан сўнг, $x^3+x+1=ax^3+(a+b)x^2+(a+b+p)x+(b+q)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Кўпҳадларнинг тенглик шартига кўра,

$$\begin{cases} a = 1, \\ a + b = 0, \\ a + b + p = 1, \\ b + q = 1 \end{cases}$$ системага эга бўламиз. Бундан $a=1$,

$b=-1$, $p=1$, $q=2$ эканлиги аниқланади.

Демак, $Q(x)=x-1$, $R(x)=x+2$.

2-мисол.

Ушбу $A(x) = \dfrac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}$

ифодадан бутун қисм ажратамиз. Бунинг учун, суратдаги кўпҳадни махраждаги кўпҳадга бўлиш лозим. Бўлишни «бурчакли бўлиш» усулида бажарамиз.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4 & x^2-2ax+3a^2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4-6ax^3+9a^2x^2} & 3x^2-4ax+5a^2 \\
\quad -4ax^3+13a^2x^2-24a^3x & \\
\quad \underline{-4ax^3+\;8a^2x^2-12a^3x} & \\
\qquad\qquad 5a^2x^2-12a^3x+10a^4 & \\
\qquad\qquad \underline{5a^2x^2-10a^3x+15a^4} & \\
\qquad\qquad\quad -2a^3x-5a^4. &
\end{array}$$

Демак, $A(x) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 +$

$$+\frac{-2a^3x - 5a^4}{x^2-2ax + 3a^2}$$

n-даражали $A(x)$ ва m- $(m \leq n)$ даражали $B(x)$ иккита кўпҳад берилган бўлиб уларнинг *энг катта умумий бўлувчисини* топиш талаб қилинсин. Уни топишда *Евклид алгоритми*дан фойдаланамиз: олдин $A(x)$ ни $B(x)$ га бўламиз, сўнг $B(x)$ ни биринчи $r_1(x)$ қолдиққа, ундан сўнг $r_1(x)$ ни иккинчи $r_2(x)$ қолдиққа бўламиз ва ҳоказо. Бўлинмаларни q_k орқали белгилайлик, бунда $k=1,2,3,\ldots$. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)\cdot q_1(x)+r_1(x),\\
&\mathrm{B}(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x),\\
&r_1(x)=r_2(x)\cdot q_3(x)+r_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)\cdot q_n(x)+r_n(x),\\
&r_{n-1}(x)=r_n(x)\cdot q_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Агар $A(x)$ ва $B(x)$ лар умумий бўлувчига эга бўлмасалар (яъни энг катта умумий бўлувчи доимий сон бўлса), улар *ўзаро туб кўпҳадлар* дейилади.

Тенгламаларнинг каррали илдизларини топиш каби масалаларни қал қилишда Евклид алгоритмидан фойдаланадилар. Кетма-кет бўлишлардан қоладиган қолдиқларнинг даражалари (улар натурал сонлар) камайиб, бир неча қадамдан сўнг 0 га тенг бўлади ($r_{n+1}(x)=0$).

Ундан олдинги нолдан фарқли $r_n(x)\neq 0$ қолдиқ $A(x)$ ва $B(x)$ нинг энг катта умумий бўлувчиси бўлади.

3 - мисол. $A(x)=x^3-3x^2+3x-1$ ва $B(x)=x^2-x$ кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини топамиз.

Ечиш. 1)
$$\begin{array}{l|l}
x^3-3x^2+3x-1 & x^2-x \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x-2 \\
-2x^2+3x & \\
\underline{-2x^2+2x} & \\
r_1=x-1 &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l}
x^2-x & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2-x} & x \\
r_2=0 &
\end{array}$$

Энг катта умумий бўлувчи: $x-1$.

4 - мисол. $A(x)=x^3-3x^2+3x-1$ ва $B(x)=x^2-x-1$ ларнинг энг катта умумий бўлувчисини топамиз.

Ечиш. Кетма-кет бўлишлар натижасида қуйидаги оралиқ натижаларни топамиз: $r_1(x)=2x-3$, $r_2=-0,25\neq 0$. Демак, $A(x)$ ва $B(x)$ кўпҳадлар умумий бўлувчига эга эмас, яъни улар ўзаро тубдир.

Машқлар

4.41. $P(x)$ ни $D(x)$ га қолдиқли бўлишни бажаринг:

а) $P(x)=x^3+5x^2+5x+3$, $D(x)=x^2+4x+1$;

б) $P(x)=x^3+5x^2+5x+3$, $D(x)=x+1$;

в) $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+11x+6$, $D(x)=x^2+3x+1$;

г) $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+11x+6$, $D(x)=x^2+2x+1$;

д) $P(x)=3x^5+2x^4-10x^3+5x^2+x+10$, $D(x)=x^3-x^2+x-1$;

е) $P(x)=3x^5+2x^4-10x^3+5x^2+x+10$, $D(x)=x^2+3x-4$;

ё) $P(x)=4x^6+3x^5-15x^2+4x+5$, $D(x)=x^3+4x^2-1$;

ж) $P(x)=4x^6+3x^5-15x^2+4x+5$, $D(x)=x^4-4x+2$;

з) $P(x)=3x^4+3x^2+5x+4$, $D(x)=x^2+3x+2$;

и) $P(x)=x^5+3x^4+9x^3+12x^2+20x$, $D(x)=x^3+4x$;

к) $P(x)=x^5+3x^4+9x^3+12x^2+20x$, $D(x)=x^2+3x+5$;

л) $P(x)=4x^4+5x^2+6x+11$, $D(x)=x^2+5x-4$.

4.42. Евклид алгоритми ёрдамида кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:

а) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$; x^3+x^2-x-1;

б) $x^5+x^4-x^3-2x-1$; $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;

в) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$; $3x^5-7x^3+3x^2-7$;

г) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$; $3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$;

д) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$; x^5+x^2-x+1;

е) $x^5+3x^4-12x^3-5\,2x^2-52x-12$; $x^4+3x^3-6x^2-22x-12$;

ж) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$; $x^4-2x^3-x^2-2x+1$;

з) x^4-4x^3+1; x^3-3x^2+1.

4.43. a ва b нинг қандай қийматларида $x^4-4x^3-x^2+ax-b$ кўпҳад x^2-5x+4 учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

V боб

АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР

1-§. Рационал ифодалар

1. Бутун кўрсаткичли даража. Ҳар қандай a ҳақиқий соннинг *α бутун кўрсаткичли даражаси* ёки *α- даражаси* деб, a^{α} сонга айтилишини биламиз, бунда a — даража асоси, α — даража кўрсаткичи,

$$a^{\alpha}=\begin{cases} a, \text{ агар } \alpha=1 \text{ бўлса,} \\ \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ марта}}, \text{ агар } \alpha=n,\ n\in N,\ n\geq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ҳар қандай $a\neq 0$ ҳақиқий соннинг нолинчи даражаси 1 га тенг, $a^0=1$. Нолнинг нолинчи даражаси, яъни 0^0 маьнога эга эмас.

Ихтиёрий $a\neq 0$ ҳақиқий соннинг бутун манфий кўрсаткичли даражаси $\frac{1}{a^n}$ сонидан иборат, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

Лекин 0^{-n} белги маънога эга эмас.

Бутун кўрсаткичли даражанинг хоссалари (a,b — нолдан фарқли ҳақиқий сонлар, α, β — бутун сонлар):

1)

$$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}. \tag{1}$$

Ҳақиқатан, $\alpha=n\in$N бўлса, ҳақиқий сонларни кўпайтиришнинг асосий қонунларига мувофиқ: $(ab)^{\alpha}=(ab)^{n}=(ab)(ab)\ldots(ab)$($n$ та кўпаювчи)$=aa\ldots a$ (n марта) $\cdot$ $bb\ldots b$ (n марта)$=a^n\cdot b^n=a^{\alpha}b^{\alpha}$; агар $\alpha=0$ бўлса, $(ab)^{\alpha}=(ab)^0=1=1\cdot 1=a^0\cdot b^0=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$; агар $\alpha=-n$, $n\in$N, бўлса, $(ab)^{\alpha}=(ab)^{-n}=\frac{1}{(ab)^n}=\frac{1}{a^nb^n}$. Хусусан,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}, \qquad (2)$$

2)

$$a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}. \qquad (3)$$

Ҳақиқатан, агар $\alpha=n$, $\beta=m$, $n\in N$, $m\in N$, бўлса, у ҳолда:

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta} = a^{n}\cdot a^{m} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{ta}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{ta}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m+n\ \text{ta}} =$$

$$= a^{m+n} = a^{\alpha+\beta}.$$

$\alpha=n$, $\beta=-m$ ва $\alpha=-n$, $\beta=m$ бўлган ҳоллар ҳам шу каби исботланади. $\alpha=-n$, $\beta=-m$ ҳолининг исботини қуйидагича бажариш мумкин:

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{-n}a^{-m}=\frac{1}{a^{n}}\cdot\frac{1}{a^{m}}=\frac{1}{a^{n}a^{m}}=\frac{1}{a^{n+m}}=a^{-(n+m)}=a^{-n-m}= =a^{(-n)+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

3) $$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}. \qquad (4)$$

4)

$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}. \qquad (5)$$

Хусусан, $\alpha=n, \beta=m$, $n, m\in \mathrm{N}$, бўлганда: $(a^{\alpha})^{\beta}=(a^{n})^{m}=$ $=a^{n}\cdot a^{n}\cdot\ldots\cdot a^{n}$ (m та)$=aa\ldots a$ (nm та)$=a^{nm}=a^{\alpha\beta}$.

Мисол. $\frac{116^{8}\cdot 87^{4}}{58^{9}\cdot 174^{3}}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{(2\cdot 58)^{8}\cdot 87^{4}}{58^{9}\cdot(2\cdot 87)^{3}}=\frac{2^{8}\cdot 87}{58\cdot 2^{3}}=\frac{2^{5}\cdot 3\cdot 29}{2\cdot 29}=48.$

Машқлар

5.1. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(0{,}25x^{-1}y^{-3})^2 \cdot \left(\dfrac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3}$;

б) $\left(\dfrac{a^{-3}b^4}{9}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$;

в) $\left(\dfrac{c^{-1}}{10a^5b^2}\right)^{-2} \cdot (5a^3bc^2)^{-2}$;

г) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{x^2y^{-2}}{9z}\right)^2$.

5.2. Ўзгарувчиларнинг истаган қийматида ифода айни бир қиймат қабул қилишини исботланг ($m, n \in Z$):

а) $\dfrac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$;

в) $\dfrac{5^m \cdot 4^n}{5^{m-2} \cdot 2^{2n} + 5^m \cdot 2^{2n-1}}$;

б) $\dfrac{5^{n+1} \cdot 2^{n-2} + 5^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$;

г) $\dfrac{21^n}{3^{n-1} \cdot 7^{n+1} - 3^n \cdot 7^n}$.

2. Рационал ифодаларни айний шакл алмаштириш. Бирор $X(x_1,\ldots,x_n)$ алгебраик ифодани *айнан алмаштириш* деб, уни, умуман олганда, X га ўхшамайдиган шундай $Y(x_1,\ldots,x_n)$ алгебраик ифодага алмаштириш тушуниладики, барча $x_1,\ldots,x_n$ қийматларда X ва Y қийматлари тенг бўлсин. Масалан, $A(x) = = \dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x^2-1}$, $B(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $C(x) = \dfrac{(x^2+1)(x-1)(x+3)}{(x^2-1)(x+3)}$ лардан $A(x)$ ифода барча $x \neq -1$, $x \neq 1$ қийматларда, $B(x)$ ифода $x \neq -1$ қийматларда, $C(x)$ эса $x \neq -1$, $x \neq 1$, $x \neq -3$ қийматларда аниқланган. Уларнинг умумий мавжудлик соҳаси $x \neq \pm 1$, $x \neq -3$ қийматлардан иборат, унда улар бир хил қийматлар қабул қилишади, яъни *айнан тенгдир.* Умумий мавжудлик соҳасида бир рационал ифодани унга айнан тенг ифода билан алмаштиришга шу ифодани *айний алмаштириш* дейилади. Айний алмаштиришлардан тенгламаларни ечишда, теоремалар ва айниятларни исботлаш, масала ва мисолларни ечишда фойдаланилади. Айний алмаштиришлар касрларни қисқартириш, қавсларни очиш, умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш, ўхшаш ҳадларни ихчамлаш ва шу кабилардан иборат бўлади. Айний алмаштиришларда арифметик амалларнинг хоссаларидан фойдаланилади. Қуйидаги айниятлар ўринли:

1) $(AB)^n = A^n B^n$;
2) $A^m A^n = A^{m+n}$;
3) $(A^m)^n = A^{mn}$;
4) $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$, $B \neq 0$, $D \neq 0$;
5) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $B \neq 0$, $D \neq 0$;
6) $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$, $B \neq 0, C \neq 0$, $D \neq 0$;
7) $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$;
8) $\frac{A^m}{A^n} = \begin{cases} A^{m-n}, m > n \\ 1, m = n, A \neq 0 \end{cases}$ да;
9) $|AB| = |A| \cdot |B|$;
10) $|A^n| = |A|^n$.

Рационал ифодаларнинг каноник шакли қисқармас $\frac{P(x)}{Q(x)}$ касрдан иборат бўлади. Бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$

лар кўпҳадлар бўлиб, Q(x) кўпҳаднинг бош коэффициенти эса 1 га тенг.

Мисол. $\frac{16-x^2}{2x^4+9}:\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}\cdot\frac{(x-3)}{2x+1}\right)$ рационал ифодани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}\cdot\frac{(x-3)}{2x+1}=\ldots=\frac{x+4}{(x-3)(2x+1)}$,

$$\frac{16-x^2}{2x^4+9}:\frac{x+4}{(x-3)(2x+1)}=\left(\frac{(4-x)(4+x)(x-3)(2x+1)}{(2x^4+9)(x+4)}\right)=$$

$$=\frac{-2x^3+13x^2-17x-12}{2x^4+9}=\frac{-x^3+\frac{13}{2}x^2-\frac{17}{2}x-6}{x^4+\frac{9}{2}}$$

Машқлар

5.3. Ўзгарувчининг ифода маънога эга бўлмайдиган барча қийматлари тўпламини топинг:

а) $\frac{5-x}{x-2}$; б) $\frac{x^2+3}{x^2+4}$; в) $\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}$;

г) $\frac{x^2-4}{x^2-9}$; д) $\frac{3a}{3+2a}$; е) $\frac{a-4}{5}$;

ё) $\frac{a^2-5}{a-4,5}$; ж) $\frac{13a+2}{26-2a}$; з) $\frac{3x}{x(x+2)}$;

и) $\frac{x-2}{a^2-x^2}$; к) $\frac{x}{x^2-16}$; л) $\frac{y}{3y(y-5)}$;

м) x^2+x+2; н) $\frac{x-1}{x}+\frac{7}{x-3}$; о) $\frac{4x}{x+5}-\frac{8x^2}{x-9}$;

п) $\frac{31x^2}{9x-9}+x^2-x$.

5.4. Ўзгарувчининг ифода маънога эга бўладиган барча ҳақиқий қийматлари тўпламини тузинг:

а) $\frac{3}{x+2}$;

б) $\frac{x^3+13}{x^2+5}$;

в) $\frac{x+5}{x^2-9}$;

г) $\frac{3x+5}{4x^2-9}$;

д) $\frac{11a}{13-a^2}$;

е) $\frac{a+5}{4-a}$;

ё) $\frac{3a+13}{4a^2-1}$;

ж) $\frac{17a}{(a-1)(a-2)(a-3)}$;

з) $\frac{x+4}{x-3}+\frac{1}{x+2}$;

и) $\frac{7x-4}{x^2-16}+x+2$;

к) $\frac{x+2}{7x-7}+\frac{13}{x-2}$;

л) $\frac{x^2+x-3}{x^2-5x}+\frac{1}{x}$;

м) x^2-x-1;

н) $\frac{x-2}{x^2-a^2}$;

о) $\frac{7}{x^2+x+1}+x^2$;

п) $x^2-\frac{1}{(x-1)(x-4)}$.

5.5. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\frac{2x-y}{x(x-y)}$;

б) $\frac{x}{x^2-y^2}$;

ё) $\frac{y}{x-y}-\frac{x}{x+y}$;

ж) $\frac{3x+y}{x^3-y^3}-\frac{y}{3x-3}$;

в) $\frac{x+y}{x-y}$;

г) $\frac{x-2y}{x^2-y}$;

д) $\frac{x}{x-2}+\frac{y}{y(x-3)}$;

е) $\frac{x-1}{x}+\frac{y}{3x-y}$;

з) $x+y+\frac{x}{y-4}$;

и) $xy+x^2y-\frac{y}{x+3}$;

к) $1+x^3y+x^4y^2$;

л) $13-2x^2+(x-y)^2$.

5.6. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{21a^3-6a^2b}{12ab-42a^2}$;

б) $\frac{6m^3-3mn^2}{2m^3n+mn^2}$;

в) $\frac{x^2-2mx+3x-6m}{x^2+2mx+3x+6m}$;

г) $\frac{8ab+2a-20b-5}{4ab-8b^2+a-2b}$;

д) $\frac{16a^2-8ab+b^2}{16a^2-b^2}$;

е) $\frac{9x^2-25y^2}{9x^2+30xy+25y^2}$;

ж) $\frac{a^2-3a}{a^2+3a-18}$;

з) $\frac{4x^2-8x+3}{4x^2-1}$;

и) $\frac{m^2+4m-5}{m^2+7m+10}$;

к) $\frac{x^2+10x+25}{(x+5)^2}$;

л) $\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$;

м) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$.

Қуйида келтирилган ифодалар орасидаги бутун рационал ифодалар тўпламини тузинг:

5.7. а) $3x^2+y$;

б) $3x^2+\frac{1}{y}$;

е) $\frac{x^3}{4}$;

ж) $6x-\frac{1}{2}$;

в) $3x^2+\frac{1}{2}$;

з) $\frac{x^2+y}{1\frac{1}{2}-0,(5)x}$;

г) $4a^2-x(a-3x)$;

и) $\frac{xyz-\frac{1}{z}}{3-1\frac{1}{4}}$;

д) $\frac{x^2}{x-4}$;

к) $xy+\sqrt{z}-\frac{z^2}{14}$.

5.8. а) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$;

д) $c-\frac{(x+c)^2}{2x}$;

б) $\frac{a+x}{4}-a+x$;

е) $a+x\frac{a^2+x^2}{a-x}$;

в) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

ж) $\frac{a}{4x}+\frac{5}{12y}-\frac{c}{9xy^2}$;

г) $\frac{(a-x)^2}{2a}+x$;

з) $1-\frac{x}{x-y}-\frac{1}{x+y}$.

5.9. а) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$;

д) $\frac{x-25}{5x-25}-\frac{3x+5}{5x-x^2}$;

б) $\frac{x^2-4xy}{2y^2-xy}+\frac{4y}{x-2y}$;

е) $\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}$;

в) $\frac{x}{2a^2-ax}+\frac{4a}{2ax-x^2}$;

ж) $3x\frac{x-y}{2-x}+\frac{x+y}{4}$;

г) $\frac{4y}{3x^2+2xy}+\frac{9x}{3xy+2x^2}$;

з) $\frac{x-12a}{x^2-16a^2}-\frac{4a}{4ax-x^2}$.

5.10. а) $\dfrac{a^2+3a}{ax-5x+8a-40}$;

б) $\dfrac{y}{3x-2}-\dfrac{3y}{6xy+9x-4y-6}$;

в) $\dfrac{x^2}{3ax-2-x+6a}-\dfrac{x}{3a-1}$;

г) $\dfrac{3x}{2y+3}+\dfrac{x^2+3x}{4xy-3-2y+6x}$.

5.11. Каср кўринишида ифодаланг:

а) $\dfrac{x^2-xy}{y}\cdot\dfrac{y^2}{x^3}$;

б) $\dfrac{3a}{b^2}\cdot\dfrac{ab+b^2}{9}$;

в) $\dfrac{x-y}{xy}\cdot\dfrac{2xy}{xy-y^2}$;

г) $\dfrac{4ab}{cx+bx}\cdot\dfrac{ax+bx}{2ab}$;

д) $\dfrac{xa-xy}{3c^2}\cdot\dfrac{2x}{cy-ca}$;

е) $\dfrac{ax-ay}{5x^2y^2}\,\dfrac{5xy}{by-bx}$;

ж) $\dfrac{kx+k^2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x+k}$;

з) $\dfrac{ax+ay}{xy^2}\cdot\dfrac{x^2y}{3x+3y}$;

и) $\dfrac{xy}{a^2+a^3}\cdot\dfrac{a+a^2}{x^2y^2}$;

к) $\dfrac{6a}{x^2-x}\cdot\dfrac{2x-2}{3ax}$;

л) $\dfrac{x^2-y^2}{2xy}\cdot\dfrac{2x}{x+y}$;

м) $\dfrac{4x^2}{x^2-9}\cdot\dfrac{3a-ax}{4x}$.

5.12. Соддалаштиринг:

а) $\dfrac{x^2-4x}{x^2+7x}:\dfrac{24-6x}{49-x^2}$;

б) $\dfrac{y^3-16y}{2y+18}:\dfrac{4-y}{y^2+9y}$;

в) $\dfrac{(a+b)^2-2ab}{4a^2}:\dfrac{a^2+b^2}{ab}$;

д) $\dfrac{(x+3)^2}{2x-4}:\dfrac{3x+9}{x^2-4}$;

е) $\dfrac{(x-3)^2}{x-8}:\dfrac{4x-12}{3x-24}$;

ж) $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}:\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^3}$;

г) $\dfrac{5c^3-5}{c+2}:\dfrac{(c+1)^2-c}{13c+26}$; з) $\dfrac{(3c-b)^2}{3c+b}:\dfrac{3c-b}{(3c+b)^2}$.

5.13. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\dfrac{7(m-2)}{m^3-8}-\dfrac{m+2}{m^2+3m+4}\right)\cdot\dfrac{2m^2+4m+8}{m-3}$;

б) $\dfrac{a+5}{a^2-9}:\left(\dfrac{a+2}{a^2-3a+9}-\dfrac{2(a+8)}{a^3+27}\right)$;

в) $\left(\dfrac{x+2}{3x}-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x-14}{3x^2-6x}\right):\dfrac{x+2}{6x}\cdot\dfrac{1}{x-5}$;

г) $\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{3m}{1-3m}+\dfrac{2m}{3m+1}\right)\cdot\dfrac{9m^2-6m+1}{6m^2+10m}$;

д) $\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{y^2}{xy^2-x^3}\right):\left(\dfrac{x-y}{x^2+xy}-\dfrac{x}{x^2+xy}\right)-\dfrac{x}{x-y}$;

е) $\dfrac{2a+3}{2a-3}\cdot\left(\dfrac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9}-\dfrac{3a+2}{2a+3}\right)+\dfrac{4a-1}{2a-3}-\dfrac{a-1}{a}$;

ж) $\left(\dfrac{a+3}{a^2+2a+1}+\dfrac{a-1}{a^2-2a-3}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a-3}{a+2}-1$;

з) $\dfrac{3(m+3)}{m^2+3m+9}+\dfrac{m^2-3m}{(m+3)^2}\cdot\left(\dfrac{3m}{m^3-27}+\dfrac{1}{m-3}\right)$.

5.14. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right):\left(\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{a-b}{a}\right)$;

б) $\left(2x+1-\dfrac{1}{1-2x}\right):\left(2x-\dfrac{4x^2}{2x-1}\right)$;

в) $\left(p-q+\dfrac{4q^2-p^2}{p+q}\right):\left(\dfrac{p}{p^2-q^2}+\dfrac{2}{q-p}+\dfrac{1}{p+q}\right)$;

г) $\left(\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-y}-\frac{3y}{y^2-4x^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{8x^2}-\frac{1}{2}\right)$;

д) $\left(\frac{5x+y}{x^2-5xy}+\frac{5x-y}{x^2+5xy}\right)\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$;

е) $\frac{9a^2-16b^2}{7a}\cdot\left(\frac{3b-4a}{4b^2-3ab}-\frac{3b+4a}{4b^2+3ab}\right)$;

ж) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

з) $\frac{a-2}{a^2+2a}:\left(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$;

и) $\frac{4a-5}{a^2-9}+\frac{9(a-3)}{15-7a-4a^2}\cdot\frac{4a^2-17a+15}{a-2}-\frac{7}{a+3}$;

к) $(a^2-y^2-x^2+2xy):\frac{a+y-x}{a+y+x}$;

л) $\frac{a^2-1}{x^2+ax}\cdot\left(\frac{x}{x-1}-1\right)\cdot\frac{a-ax^3-x^4+x}{1-a^2}$, $(x=-1)$;

м) $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)$.

5.15. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$;

б) $\frac{x^{14}-x^7+1}{x^{21}+1}$;

в) $\frac{x(y-a)-y(x-a)}{x(y-a)^2-y(x-a)^2}$;

г) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$.

5.16. k нинг қандай қийматларида $\frac{(k-3)^2}{k}$ ифода натурал қийматлар қабул қилади?

5.17. Ифодани соддалаштиринг ва ўзгарувчиларнинг кўрсатилган қийматларида ифоданинг қийматини ҳисобланг:

а) $\left(\frac{x-2y}{x^3+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right)\cdot\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$;

$x=0,2$; $y=0,8$;

б) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

$a=\frac{1}{3}$; $b=\sqrt{3}$; $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.18. $m=a-\frac{1}{a}$ бўлганда $a^4+\frac{1}{a^4}=m^2\left(m^2+4\right)+4$ бўлишини исбот қилинг.

5.19. Рационал ифодаларни каноник кўринишга келтиринг:

а) $\dfrac{2x-\frac{x+2}{x+1}}{\frac{x(x+1)}{x-1}-1}$;

б) $\dfrac{\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}}{\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}}$;

в) $\dfrac{1-\dfrac{1-\frac{1-x}{1+2x}}{1+2.\frac{1-x}{1+2x}}}{1+2.\dfrac{1-\frac{1-x}{1+2x}}{1+2.\frac{1-x}{1+2x}}}$;

г) $\frac{(x+1)^2-x^4}{x^2-\left(x^2-1\right)^2}-\frac{\left(x^2+1\right)^2-x^2}{1-\left(x(x-1)\right)^2}-\frac{1-\left(x(x+1)\right)^2}{(x+1)^2-x^4}$.

2-§. Иррационал ифодаларни айний алмаштиришлар

1. Арифметик илдиз. Рационал кўрсаткичли даража. $a \geq 0$ соннинг n-даражали *арифметик илдизи* деб ($n \in N$), n-даражаси a га тенг бўлган $b \geq 0$ сонга айтилади ва $b=\sqrt[n]{a}$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича: $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

$a>0$ ва $r=\frac{m}{n}$ ($m \in Z$, $n \in N$) бўлса, $\sqrt[n]{a^m}$ сони a нинг *рационал кўрсаткичли даражаси* деб айтилади, яъни $a^r= a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Хусусан, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Рационал кўрсаткичли даражанинг хоссалари бутун кўрсаткичли даража хоссаларига ўхшаш. a, b — ихтиёрий мусбат сонлар, r ва q — ихтиёрий рационал сонлар бўлсин. У ҳолда:

1) $(ab)^r = a^r b^r$ (1′). Ҳақиқатан, $r=m/n$, $n \in N$, бўлсин. У ҳолда:

$\left((ab)^r\right)^n = \left((ab)^{\frac{m}{n}}\right)^n$ =(рац.кўрсаткич. даража таърифи) $\left(\sqrt[n]{(ab)^m}\right)^n$ = (арифметик илдиз таърифи) $(ab)^m$=((5) муносабат) $a^m b^m$= (арифм.илд.) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n$ = (натур.кўрс. даража таърифи) $\left(a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(a^r b^r\right)^n$, демак, (1′) ўринли.

Хусусан,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}. \qquad (2')$$

2) $a^r\cdot a^q = a^{r+q}$, бунда $r=\frac{k}{n}$, $q\,\frac{m}{n}\cdot$(3′). Ҳақиқатан,

$$\left(a^{\frac{k}{n}}\cdot a^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n\cdot\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n=$$

$$=a^k\cdot a^m=a^{k+m}=\left(a^{\frac{k+m}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{n}}\right)^n.$$

3) $\frac{a^r}{a^q}=a^{r-q}$ (4′) ((2′) каби исботланади).

4) $(a^r)^q=a^{rq}$, бунда $r=p/k$, $q=m/n$. (5′). Ҳақиқатан,

$$((a^{p/k})^{m/n})^{nk}=(((a^{p/k})^{m/n})^n)^k=((a^{p/k})^m)^k=(a^p)^m=a^{pm}==\left(a^{\frac{pm}{kn}}\right)^{kn}.$$

Бундан (5′) нинг ўринли экани маълум бўлади.

Мисол. $5\sqrt{\frac{3}{5}}-2^{-1}\cdot 60^{0,5}+6$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $5\cdot 0,6^{0,5}-0,5\cdot 10\cdot 0,6^{0,5}+6=5\cdot 0,6^{0,5}-5\cdot 0,6^{0,5}+6=6$.

Машқлар

5.20. Ифодалар маънога эгами:

а) $3^{-\frac{4}{3}}$; б) $(-3)^{-\frac{1}{3}}$; в) $4^{-\frac{1}{9}}$; г) $(-3)^{-\frac{2}{3}}$;

д) $\left(\sqrt[3]{-4}\right)^{\frac{1}{2}}$; е) $\left(\sqrt{4}\right)^{\frac{2}{5}}$; ж) $(x-1)^{\frac{1}{3}}$, $(x<1)$;

з) $(x+2)^{\frac{1}{4}}$, $(x\geq -2)$?

5.21. Ўзгарувчининг ифода маънога эга бўладиган барча қийматларини топинг.

а) $4{,}5^{\frac{x}{2}}$, бунда $x\in Q$;

б) $(-4{,}5)^{\frac{x}{2}}$, бунда $x\in Q$;

в) $(3+x)^{\frac{1}{5}}$; г) $\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}$;

д) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$; е) $(|x|+1)^{\frac{2}{3}}$;

ж) $(1-|x|)^{\frac{4}{5}}$; з) $(1-|x|)^{-3}$.

5.22. Ҳисобланг:

а) $49^{\frac{1}{2}}$; б) $1000^{\frac{1}{3}}$; в) $4^{-\frac{1}{2}}$;

г) $8^{-\frac{1}{3}}$; д) $9^{2\frac{1}{2}}$; е) $0{,}16^{-1\frac{1}{6}}$;

ж) $0{,}008^{1\frac{1}{3}}$; з) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; и) $9^{-1,5}$;

к) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{4}}$; л) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{4}{3}}$; м) $(25)^{-\frac{3}{2}}$;

н) $27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5}$; о) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

п) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; р) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

5.23. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)\right)^{-0,5} - 7,5 \cdot 4^{-\frac{2}{3}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$;

б) $0,027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} - 256^{0.75} - 3^{-1} + (5,5)^{0}$;

в) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$;

г) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{2,5}\right)^{-0,1} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^{0} : 36^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$;

д) $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0,25} - \left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$;

е) $(0,04)^{-1,5} \cdot (0,125)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

ж) $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

5.24. Амалларни бажаринг:

а) $c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{1}{12}}$; д) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{14}} \cdot x^{\frac{2}{7}}$;

б) $b^{-0,2} : b^{-0,7}$; е) $(m^{0,3})^{1,2} \cdot (m^{-0,4})^{0,4}$.

в) $(m^{0,4})^{2,5}$; ж) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}}$;

г) $y^{0,8} \cdot y^{-5} \cdot y^{7,2}$; з) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$ ·

2. Илдиз. Юқорида арифметик илдизга таъриф берилган эди. $a \geq 0$ да $x = \sqrt[n]{a}$ сон $x^n = a$ тенгламанинг ягона номанфий ечими эканлиги, шунингдек, $a \in R$ ва n — тоқ натурал сон бўлса, $x^n = a$ тенгламанинг ягона ечимга эга эканлиги қуйида исботланади.

$x^n = a$ тенгламанинг (бу ерда $a \in R$, $n \in N$) ҳар қандай илдизи a сонининг n-даражали илдизи дейилади.

1-теорема. ***Ҳар қандай $a \geq 0$ ҳақиқий сон учун ҳар доим $x^n = a$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона $x \geq 0$ ҳақиқий сон мавжуд.***

Исбот. Номанфий бутун сонларнинг $0, 1^n$, $2^n, \ldots, k^n, \ldots$ n-даражалари кетма-кетлигини қарайлик. Унда албатта n-даражаси a дан катта бутун сонлар мавжуд бўлади. Улардан энг кичиги $(p+1)$ сони бўлсин: $p^n \leq a < (p+1)^n$.

Энди $[p; p+1]$ оралиқни координаталари p; $p,1$; $p,2$; ...,$p,9$; $p+1$ бўлган нуқталар билан тенг ўн бўлакка ажратамиз. Бу сонлар ичида a дан катталаридан энг кичиги $p,(q_1+1)$ бўлсин:

$(p,q_1)^n \le a \le (p,(q_1+1))^n$, бунда q_1 — ўндан бирлар рақами. Бу оралиқ x нинг қийматини $[p;p+1]$ оралиққа нисбатан аниқ ифодалайди. Энди бу оралиқни ўнга бўламиз ва иккинчи яқинлашишни топамиз: $(p,q_1q_2)^n \le a \le (p,q_1(q_2+1))^n$, q_2 — юздан бирлар рақами. Шу йўл билан m — қадамдан сўнг $(p,q_1q_2...q_m)^n \le$ $\le a \le (p,q_1q_2...(q_m+1))^n$ ёки $a_1^n \le a \le a_2^n$ га эга бўламиз, бунда a_1 орқали a нинг қуйи (ками билан олинган) ва a_1 орқали a нинг юқори (ортиғи билан олинган) чегаравий қийматлари, яъни ўнли яқинлашишлари белгиланган.

Иккинчи томондан, кўпайтириш қоидасига мувофиқ $a_1^n \le x^n \le a_2^n$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи ягона x ҳақиқий сони мавжуд. Демак, $x^n=a$. Бошқача бўлиши, яъни x дан фарқли бирор y учун $y^n=a$ бўлиши мумкин эмас. Масалан, $y < x$ бўлса, кўпайтиришнинг монотонлик хоссасига мувофиқ $y^n < x^n$, яъни $y^n < a$ бўларди. Шу каби, $y > x$ бўлганда $y^n > a$ га эга бўлар эдик. Демак, теорема тўғри.

2-теорема. ***Агар A натурал сони бошқа ҳеч қандай натурал соннинг n-даражаси бўлмаса,*** $\sqrt[n]{A}$ ***сони иррационал сондир.***

Исбот. Шарт бўйича A сони номанфий сонларнинг

$$0^n, 1^n, 2^n, \dots, k^n, \dots$$

n - даражалар кетма-кетлигида учрамайди, демак, $\sqrt[n]{A}$ бутун сон эмас. У каср ҳам эмас. Ҳақиқатан, $\sqrt[n]{A}=\frac{p}{q}$ бўлсин, деб фараз қилайлик, бунда p ва q лар ўзаро туб ва $q\neq 1$, $q\neq 0$. У ҳолда $A=\frac{p^n}{q^n}$ ва p^n ва q^n-ўзаро туб, $q^n\neq 1$ бўлганидан A сони қисқармас каср бўлади. Бу эса шартга зид. Демак, $\sqrt[n]{A}$ сони фақат иррационалдир. Теорема исбот қилинди.

3-теорема. ***Агар p/q , q≠1, қисқармас касрнинг сурати ва махражи аниқ n-даража бўлмаса,*** $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ ***илдиз иррационал сондир.***

Исбот. Тескарича, илдиз рационал сон, деб фараз қилайлик, яъни $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{a}{b}$, Б$(a,b)=1$. У ҳолда $\frac{p}{q}=\frac{a^n}{b^n}$, Б$(a^n, b^n)=1$, ва бундан $p=a^n$, $q=b^n$ бўлиши келиб чиқади. Лекин шарт бўйича p ва q n-даража эмас. Демак, $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ — иррационал сон. Исбот қилинди.

4-теорема. ***Ҳақиқий сонлар соҳасида тоқ даражали илдиз фақат бир қийматли ва унинг учун ушбу тенглик ўринли:***

$$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}\,.$$

Исбот. $x^{2n+1}=a$, $a\geq 0$, (1) тенглама $\forall a\in R$ учун ягона ечимга эга эканлигини кўрсатамиз.

а) $a\geq 0$ бўлсин. У ҳолда, $\forall x<0$ сон учун $x^{2n+1}<0\leq a$. Демак, (1) нинг, мавжудлиги 1-теоремадан кўринадиган, $x=\sqrt[2n+1]{a}\geq 0$ илдизи унинг ягона ҳақиқий илдизидир.

б) $a<0$ бўлса, (1) ни $(-x)^{2n+1}=-a$ кўринишда ёзиб олиш мумкин. $-a>0$ бўлгани учун, а) ҳолга кўра, охирги теглама ва, демак, (1) тенглама ҳам ягона $x=\sqrt[2n+1]{-a}$ ечимга эгадир.

$\forall a \in R$ учун $x_1 = -\sqrt[2n+1]{a}$ ва $x_2 = \sqrt[2n+1]{-a}$ сонлари (1) нинг илдизлари бўлади. Юқорида исботланганларга кўра, $x_1 = x_2$. Теорема исбот қилинди.

Теоремадан кўринадики, $\sqrt[n]{a^n} = a$ айният n нинг 1 дан катта тоқ натурал қийматларида, ихтиёрий $a \in R$ учун ўринли. Агар $n=2m$ (бу ерда $m \in N$) бўлса, $\sqrt[2m]{a^{2m}} = \sqrt[2m]{|a|^{2m}} = |a|$ бўлади. Демак, $a \geq 0$ бўлса, $\sqrt[2m]{a^{2m}} = a$ тенглик, $a<0$ бўлганда эса $\sqrt[2m]{a^{2m}} = -a$ тенглик ўринли.

1-мисол.

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{|-7|^2} = |-7| = 7\ ,\ \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Агар $a \leq 0$, $b \leq 0$ бўлса, $ab \geq 0$ ва $\sqrt{ab} = \sqrt{|a||b|} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$ бўлади.

2-мисол. $\sqrt{(-3)(-12)} = \sqrt{|-3||-12|} = \sqrt{36} = 6$.

Машқлар

5.25. Ифодалар маънога эгами:

а) $\sqrt[3]{-9}$;	и) $\sqrt[3]{i}$;
б) $\sqrt{-9}$;	к) $\sqrt[3]{-i}$;
в) $\sqrt[3]{9}$;	л) $\sqrt[4]{i}$;
г) $\sqrt{9}$;	м) $\sqrt[4]{-i}$;

д) $\sqrt[6]{-0,25}$;

е) $\sqrt{0,25}$;

ж) $\sqrt[4]{-81}$;

з) $\sqrt[7]{-2}$;

н) $\sqrt[8]{x-y}$, бунда $x<y$;

о) $\sqrt[7]{x-y}$, бунда $x\leq y$;

п) $\sqrt[8]{y-x}$, бунда $x\leq y$;

р) $\sqrt[9]{y-x}$, бунда $x\geq y$?

5.26. Ифодалар ўзгарувчининг қандай қийматларида маънога эга:

а) $\sqrt{-x}$;

б) $\sqrt[4]{x^2}$;

в) $\sqrt[6]{x^2+4}$;

г) $\sqrt[8]{(x+4)^2}$;

д) $\sqrt[3]{x-1}$;

е) $\sqrt[5]{(x+1)^2}$;

ж) $\sqrt[7]{16x}$;

з) $\sqrt[3]{-x+2}$;

и) $\sqrt[4]{-x^2}+\sqrt[4]{x^2-1}$;

к) $\sqrt{x^2-6x+9}$;

л) $\sqrt{x^2+2x+2}$;

м) $\sqrt[6]{-(x-3)^2}$?

5.27. Тengликлар ўзгарувчининг қандай қийматларида тўғри:

а) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$;

б) $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$;

в) $\sqrt{(x-3)^2}=x-3$;

г) $\sqrt{(x-4)^2}=4-x$;

д) $\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{3-x}$;

е) $\sqrt[3]{x-3}=0$;

ж) $\sqrt{x^2-1}=-1$;

з) $\sqrt{x}=1$;

и) $\sqrt[3]{-x}=2$;

к) $\sqrt[3]{-x}=-2$;

л) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$;

м) $\sqrt[3]{x-2}=1$?

3. Арифметик илдизларни шакл алмаштириш. Кўпайтманинг *n*-даражали илдизи кўпаювчилар *n*-даражали илдизларининг кўпайтмасига тенг:

$$\sqrt[n]{ab....c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}...\sqrt[n]{c}\,, \qquad (1)$$

бу ерда $a \geq 0$, $b \geq 0$, ..., $c \geq 0$.
Ҳақиқатан,

$$\sqrt[n]{ab...c} = (ab...c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}...c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot ....\sqrt[n]{c}\,. \quad (2)$$

$$\text{Хусусан, } \sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} |a|\sqrt[n]{b}, \text{агар } n \text{ - жуфт бўлса;} \\ a\sqrt[n]{b}, \text{агар } n \text{ - тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Кўпайтувчини илдиз ишораси остига киритиш:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}\,, \qquad (a \geq 0, b \geq 0). \qquad (3)$$

Касрдан илдиз чиқариш:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,, \qquad (a \geq 0, b > 0). \qquad (4)$$

Илдизни даражага кўтариш учун илдиз остидаги ифодани шу даражага кўтариш кифоя:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\,, \qquad (a \geq 0). \qquad (5)$$

$$\text{Ҳақиқатан, } \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,;$$

a сони *m*-даражасининг илдизини топиш учун *a* дан чиқадиган илдизни *m*–даражага кўтариш кифоя, яъни

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \qquad (a > 0). \qquad (6)$$

Илдиздан илдиз чиқариш учун илдиз остидаги ифода ўзгартирилмай қолдирилади, илдизлар кўрсаткичлари эса кўпайтирилади:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \qquad (a \geq 0). \qquad (7)$$

Ҳақиқатан, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[nm]{a}.$

Ҳар хил кўрсаткичли $\sqrt[n]{a}, \sqrt[m]{b}, \ldots, \sqrt[k]{c}$ илдизларни бир хил кўрсаткичли илдизларга айлантириш учун n, m, . . . , k сонларининг умумий карралиси (бўлинувчиси) бўлган α сони топилади. $\alpha = nu = mv = \ldots = kw$ бўлсин, бунда u, v, . . . , w — қўшимча кўпайтувчилар. Натижада илдизлар қуйидаги кўринишга келади:

$$\sqrt[\alpha]{a^u}, \sqrt[\alpha]{b^v}, \ldots, \sqrt[\alpha]{c^w}.$$

Мисол. $\sqrt[8]{10} > \sqrt[4]{3}$, чунки $\sqrt[8]{10} > \sqrt[8]{3^2}$, $10 > 9$.

Машқлар

5.28. Кўпайтмадан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt{16 \cdot 121}$; б) $\sqrt[3]{-125 \cdot 27}$;

в) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$; г) $\sqrt[5]{32 \cdot 243}$;

д) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49}$; е) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64 \cdot 125}$;

ж) $\sqrt[4]{81 \cdot 625 \cdot 256}$; з) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}25}$.

5.29. Бўлинмадан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; г) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$;

д) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; е) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; ж) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; з) $\sqrt{\frac{0,01}{0,09}}$.

5.30. Даражадан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt[4]{15^8}$; б) $\sqrt[4]{(-15)^8}$; в) $\sqrt[3]{-5^6}$; г) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^4}$;

д) $\sqrt[4]{x^4}$, бунда $x \geq 0$; е) $\sqrt[3]{x^6}$, бунда $x \in R$;

ж) $\sqrt{(x^2+1)^2}$, бунда $x \in R$;

з) $\sqrt{x^6}$, бунда $x \geq 0$.

5.31. Илдиздан илдиз чиқаринг:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{76}}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}$; г) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{25}}$;

д) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2}}$, бунда $x \geq 0$; е) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$, бунда $x \geq 0$;

ж) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$, бунда $x \geq 0$; з) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$, бунда $x \in R$.

5.32. Илдизни даражага кўтаринг:

а) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3$; б) $(\sqrt[6]{16})^3$; в) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^5$; г) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$; е) $\left(\sqrt[4]{x^2}\right)^6$; ж) $\left(\sqrt[4]{x+2}\right)^5$; з) $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)^6$.

5.33. Берилган илдизларни бир хил кўрсаткичли илдизларга айлантиринг.

а) $\sqrt{3}$ ва $\sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[4]{4}$;

в) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[4]{6}$; г) $\sqrt[5]{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$;

д) $\sqrt{x}$ ва $\sqrt[8]{y}$; е) $\sqrt[3]{x+1}$ ва $\sqrt[7]{y}$;

ж) $\sqrt{x^2+1}$ ва $\sqrt[6]{y^2-1}$; з) $\sqrt[5]{x-y}$ ва $\sqrt[4]{y}$.

5.34. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг:

а) $\sqrt{12}$;

б) $\sqrt[4]{1250}$;

в) $\sqrt[3]{81}$;

г) $\sqrt[3]{24}$;

д) $\sqrt{98}$;

е) $\sqrt[3]{375}$;

ж) $\sqrt[4]{48}$;

з) $\sqrt{243}$;

и) $\sqrt{(x^2-2)^2\cdot y}$;

к) $\sqrt[4]{x^4y^3}$;

л) $\sqrt[7]{(x-1)^7z^2}$;

м) $\sqrt[5]{(y+1)^{10}x^2}$.

5.35. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

а) $4\sqrt{5}$;

б) $-3\sqrt[3]{2}$;

в) $-3\sqrt[4]{2}$;

г) $2\sqrt[5]{3}$;

д) $x\sqrt{y^3}$, бунда $x \le 0$;

е) $x\sqrt[5]{y^3}$, бунда $x \le 0$;

ж) $x^2\sqrt[4]{y^3}$, бунда $x \le 0$;

з) $x^3\sqrt[4]{y^5}$, бунда $x \le 0$;

и) $(x-1)^2\sqrt[4]{y-2}$, бунда $x \le 1$;

к) $(x-1)^3\sqrt[4]{y-2}$, бунда $x \le 1$;

л) $-x\sqrt[4]{y}$, бунда $x \ge 0$;

м) $(\sqrt{3}-2)\sqrt{xy^3}$.

5.36. Ҳисобланг:

а) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$;

б) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}$;

в) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}+3\sqrt{12}-2\sqrt{243}$;

г) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$;

д) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+0{,}5\sqrt{128}-6\sqrt{18}$;

е) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;

ж) $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}-2{,}5\sqrt{180}$;

з) $2\sqrt{3}+\sqrt{192}-2\sqrt{75}+\sqrt[4]{128}$.

5.37. Соддалаштиринг:

а) $\sqrt[3]{16\sqrt{2}}$; г) $\sqrt[4]{12\sqrt{9\sqrt[3]{4}}}$; ж) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}$;

б) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; д) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$; з) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$.

в) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$; е) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}$;

5.38. Сонларни таққосланг:

а) $2\sqrt{3}$ ва $3\sqrt{2}$; д) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$;

б) $2\sqrt[3]{3}$ ва $3\sqrt[3]{2}$; е) $\sqrt[3]{12}$ ва $\sqrt{5}$;

в) $5\sqrt{7}$ ва $8\sqrt{3}$; ж) $\sqrt{8}$ ва $\sqrt[3]{19}$;

г) $3\sqrt[3]{4}$ ва $3\sqrt[3]{2}$; з) $\sqrt[12]{2}$ ва $\sqrt[15]{3}$.

5.39. Ифоданинг қийматларини топинг:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}$; д) $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[15]{a^4}$, $a=3$;

б) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{32}$; е) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}$, $a=2$;

в) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}$; ж) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{5}$, $a=2$;

г) $\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{2}$; з) $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}$, $x=3$, $y=2$.

5.40. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{4}}$;

г) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}$; д) $\sqrt[12]{a^2}:\sqrt[4]{a}$; е) $\sqrt[9]{a^8}:\sqrt[6]{a^5}$;

ж) $\frac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$; з) $\frac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$.

5.41. Даражага кўтаринг:

а) $\left(\sqrt[3]{4x^2}\right)^2$; д) $\left(a^2x\sqrt[3]{3a^2x}\right)^4$;

б) $\left(2\sqrt[3]{3x^2}\right)^3$; е) $\left(\sqrt[3]{2+xy^2}\right)^2$;

в) $\left(3\sqrt{4x^2-1}\right)^2$; ж) $\left(\sqrt{xy+z}\right)^3$;

г) $\left(\sqrt[3]{x^8}\right)^6$; з) $\left(\sqrt[6]{xy}\right)^2$.

5.42. Каср махражидаги иррационалликни йўқотинг:

а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; л) $\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$;

б) $\frac{5}{\sqrt[3]{12}}$; ж) $\frac{2}{\sqrt[3]{75}}$; м) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}$;

в) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; з) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; н) $\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$;

г) $\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; и) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; о) $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$;

д) $\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$; к) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$; п) $\frac{x+y}{\sqrt{x-y}}$.

5.43. Ҳисобланг:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{37}+\sqrt{36}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{22}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$;

г) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

5.44. Тенглик тўғрими:

а) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$;

б) $-\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}=-\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{11}}$;

в) $-\frac{8\sqrt{7}}{\sqrt{5\sqrt{7}}-2\sqrt{7}}+\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{5\sqrt{7}}+\sqrt{8\sqrt{7}}}=-4\sqrt[4]{175}$;

г) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3\sqrt{5}}-\sqrt{2\sqrt{5}}}-\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{2\sqrt{5}}-3\sqrt{3\sqrt{5}}}=-\sqrt[4]{45}$?

4.Иррационал ифодаларни соддалаштириш. Сонлар, ҳарфлар ва алгебраик амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш) билан тузилган ифодага *алгебраик ифода* дейилади. Илдиз чиқариш амали қатнашган ифодага шу аргументга нисбатан *иррационал ифода* дейилади. Масалан, $3-\sqrt{5}, \sqrt{5+\sqrt{a}}, \sqrt{a^2-\sqrt{ab}}$ ифодалар иррационал ифодалардир.

Иррационал ифодалар устида амаллар арифметик амаллар қонунларига ва илдизлар устида амал қоидаларига мувофиқ бажарилади.

1 - мисол. Даражани илдиз остидан чиқаришда даража кўрсаткичи илдиз кўрсаткичига бўлинади. Чиққан бўлинма ва қолдиқ мос тартибда илдиз остидан чиққан ва илдиз остида қолган сонларнинг даража кўрсаткичларини беради, $\sqrt[5]{a^7b^9c^{-10}} = abc^{-2}\sqrt[5]{a^2b^4}$.

2 - мисол. $a^u b^v ... c^w$ ифодали махражни m-даражали илдиз остидан чиқариш (касрни иррационалликдан қутқазиш) учун илдиз остидаги касрнинг сурат ва махражи $a^{m-u}\, b^{m-v} ... c^{m-w}$ га кўпайтирилиши кифоя.

$$x=\sqrt[3]{\frac{a^5}{c^u d^v}}=\sqrt[3]{\frac{a^5\cdot c^{3-u}d^{3-v}}{c^u d^v\cdot c^{3-u}d^{3-u}}}=\sqrt[3]{\frac{a^5\cdot c^{3-u}d^{3-v}}{c^3d^3}}=\frac{1}{cd}\sqrt[3]{a^5c^{3-u}d^{3-v}}.$$

3 - мисол. $\sqrt[n]{a}$ $(a\geq 0)$ илдизни m-даражага кўтарамиз: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$. Агар $m=kn+l$ бўлса, $\sqrt[n]{a^{kn+l}}=$ $=a^k\sqrt[n]{a^l}$ бўлади.

4 - мисол. Ўхшаш илдизларни келтирамиз: $a\sqrt[n]{A}+b\sqrt[m]{B}+c\sqrt[n]{A}+d\sqrt[n]{A}=(a+c+d)\sqrt[n]{A}+b\sqrt[m]{B}$.

5-мисол. Илдизларни кўпайтириш ва бўлиш:

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[n]{B}=\sqrt[mn]{A^n}\cdot\sqrt[nm]{B^m}=\sqrt[mn]{A^nB^m}\ ;\quad \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[mn]{\frac{A^n}{B^m}}\,.$$

6-мисол. Мураккаб квадрат илдизни алмаштириш

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},\qquad (1)$$
$$A>0,\ B>0,\ A^2>B$$

формуласини исботлаймиз.

Исбот. $x=\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}$ белгилашни киритиб, уни квадратга кўтарсак: $x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$, $x=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$. У ҳолда $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=$ $=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$. Шу каби $\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=$ $=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$. Кейинги икки тенгликни қўшсак ва айирсак, (1) формула ҳосил бўлади.

$S=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ иррационал ифодадаги илдизларни йўқотиш учун $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ айниятдан фойдаланиш мумкин. Бизда $x=\sqrt[3]{A}$, $y=\sqrt[3]{B}$. Шунга кўра S ни $M=\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{A^2}$ ифодага кўпайтириш керак бўлади.

7 - мисол. $x=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ ифодани соддалаштирамиз.

Ечиш. Олдин квадрат илдизлар остидаги ифодаларнинг мусбат эканини, яъни илдизлар ҳақиқий сонлар соҳасида маънога эгалигини билишимиз керак.

а) $29-12\sqrt{5}>0 \ (?) \ \Rightarrow \ 29>12\sqrt{5} \ (?) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ 841>144\cdot 5 \ (?) \ \Rightarrow \ 841>720 \ (\,!\,);$

$3-\sqrt{29-12\sqrt{5}} > 0 \ (\,?\,) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ 3 > \sqrt{29-12\sqrt{5}} \ (\,?\,) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ 9 > 29-12\sqrt{5} \ (\,?\,) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\sqrt{5} > 29-9=20 \quad (?) \ \Rightarrow 720>400 \ (!) \ ;$

$\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} > 0 \ (?) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 > 3-\sqrt{29-12\sqrt{5}} \ (?) \ \Rightarrow \ 2+\sqrt{29-12\sqrt{5}} > 0 \ (!).$

Демак, ҳақиқий сонлар соҳасида алмаштиришларни бажариш мумкин.

б) Мураккаб илдиз формуласидан фойдаланамиз:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-\sqrt{720}}=\sqrt{\frac{29+\sqrt{841-720}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{29-\sqrt{841-720}}{2}}=\sqrt{20}-3;$$

$$\sqrt{33-\left(\sqrt{20}-3\right)}=\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-20}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{6-\sqrt{36-20}}{2}}=\sqrt{5}-1,\ x=\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)=1.$$

8-мисол. x нинг қандай қийматларида $\sqrt{(x-8)^2}=x-8$ тенглик ўринли бўлишини аниқлаймиз.

Ечиш. $\sqrt{(x-8)^2}=|x-8|$ бўлгани учун, берилган тенглик $x-8\geq 0$ бўлганда, яъни $x\in[8;+\infty)$ ларда ўринли бўлади.

9-мисол. x нинг қандай қийматларида $\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-9}$ тенглик ўринли бўлишини аниқлаймиз.

Ечиш. Тенглик $\{x-3\geq 0,\ x+3\geq 0,\ x^2\text{-}9\geq 0\}$ бўлса, яъни $[3;+\infty)$ да ўринли.

Машқлар

5.45. Мураккаб илдиз формулаларидан фойдаланиб, ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; в) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;

б) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; г) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$.

5.46. Даражага кўтаринг:

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2.$$

5.47. Ифодани соддалаштиринг:

а) $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b};$$

б) $$\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^{3}-a\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}+1\right)^{2}-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}\right);$$

в) $$\left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^{2}}+a-1}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{a^{2}}-1}-\frac{1}{a}\right);$$

г) $$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{3}+2a^{2}:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b};$$

д) $$\frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{x^{2}}}+\frac{\sqrt[3]{ax^{2}}-\sqrt[3]{a^{2}x}}{\sqrt[3]{a^{2}}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^{2}}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}};$$

е) $$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+\frac{3}{a}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{2};$$

ж) $$\left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1};$$

з) $$\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

5.48. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ифоданинг қийматини топинг.

5.49. $x=13, y=5$ бўлса, $\left(x+y^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)$ ифоданинг қийматини топинг.

5.50. Айниятни исботланг:

а) $\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}-a=-1;$

б) $\left(\frac{\left(a+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(x+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6=\frac{a^2}{x^4}.$

VI боб

АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1-§. Бир ўзгарувчи тенгламалар

1. Тенглама. Тенг кучли тенгламалар. Бир ўзгарувчили $A(x)$ ва $B(x)$ ифодалардан тузилган

$$A(x)=B(x) \tag{1}$$

тенглик *бир ўзгарувчили тенглама*, x нинг уни тўғри сонли тенгликка айлантирувчи ҳар қандай қиймати эса шу *тенгламанинг ечими* (*илдизи*) деб аталади.

Бир ўзгарувчили тенглама ечимга эга бўлмаслиги, битта ёки бир нечта илдизга эга бўлиши, ёки чексиз кўп илдизларга эга бўлиши мумкин.

Масалан, $x^2+4=0$ тенглама ечимга эга эмас, $x+4=0$ тенглама битта ($x=-4$) ечимга эга, $(x+1)(x-2)(x+3)=0$ тенглама учта ($x=-1$, $x=2$, $x=-3$) ечимга эга ва ниҳоят, $0\cdot x=0$ тенглама чексиз кўп ечимга эгадир.

Тенгламани ечиш унинг *барча илдизлари тўпламини* топиш демакдир. Агар $A_1(x)=B_1(x)$ тенгламанинг ечимлари тўплами $A_2(x)=B_2(x)$ тенгламанинг ечимлари тўпламига тенг бўлса, улар *тенг кучли тенгламалар* дейилади. Бундан, ечимга эга бўлмаган ҳар қандай айни бир ўзгарувчили тенгламаларнинг тенг кучли эканлиги келиб чиқади.

1-мисол. $x^2-5x+6=0$ ва $(x-2)(x-3)=0$ тенгламалар тенг кучли тенгламалар эканлигини кўрсатамиз.

$x^2-5x+6=0$ квадрат тенглама $x_1=2$, $x_2=3$ илдизларга эга. Унинг ечимлар тўплами $X_1=\{2;3\}$ дан иборат.

$(x-2)(x-3)=0$ тенглама ҳам $x_1=2$, $x_2=3$ илдизларга эга. Шу сабабли, унинг ечимлари тўплами $X_2=\{2;3\}$ дан иборат. Бундан $X_1=X_2$ га эга бўламиз. Демак, берилган тенгламалар тенг кучлидир.

2-мисол. x^2-5x+6=0 ва $\frac{x-2}{x-3}=0$ тенгламалар тенг кучли тенгламалар эмас (ишонч ҳосил қилинг!).

x ўзгарувчининг $A(x)$ ифода маънога эга бўладиган барча қийматлари тўплами $A(x)$ ифоданинг аниқланиш соҳасини (мавжудлик соҳасини) ташкил этади. $A(x)$ ва $B(x)$ ифодалар аниқланиш соҳаларининг *умумий қисми* $A(x)=B(x)$ тенгламанинг ***аниқланиш соҳаси (x ўзгарувчининг жоиз қийматлари соҳаси)*** деб аталади.

Тенгламанинг ечимлар тўплами унинг аниқланиш соҳасининг қисм тўплами бўлиб, унга тенг бўлиши шарт эмас. Масалан, $\sqrt{-(x-1)^2}=0$ тенгламанинг ечимлар тўплами ҳам, аниқланиш соҳаси ҳам {1} тўпламдан иборат, лекин $x^2-5x+6=0$ тенгламанинг (1-мисолга қаранг) ечимлар тўплами {2;3} дан, аниқланиш соҳаси эса R=(-∞;+∞) дан иборатдир.

Энди тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги баъзи теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. ***Агар $C(x)$ ифода барча $x\in X$ да аниқланган бўлиб, $A(x)+C(x)=B(x)+C(x)$ (2) бўлса, (1) ва (2) тенгламалар тенг кучли бўлади, бу ерда X — (1) тенгламанинг аниқланиш соҳаси.***

Исбот: a сони (1) тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда $A(\alpha)=B(\alpha)$ чин сонли тенглик ҳосил бўлади. Иккинчи томондан, $\alpha\in X$ эканлигидан $C(\alpha)$ сони мавжуд ва шунга кўра $A(a)+C(\alpha)=B(\alpha)+C(\alpha)$ ҳам чин тенглик. Демак, $x=\alpha$ сони (2) тенгламанинг ҳам илдизи. (2) нинг ҳар бир илдизи (1) учун ҳам илдиз бўлиши шу каби кўрсатилади.

Теоремадан кўринадики $A(x)=B(x)$ тенгламани унга тенг кучли бўлган $f(x)=0$ кўринишдаги тенглама билан алмаштириш мумкин.

2-теорема. ***Агар $C(x)$ ифода барча $x\in X$ қийматларда нолдан фарқли қийматлар қабул қилса, (1) тенглама $A(x)C(x)=B(x)C(x)$ тенгламага тенг кучли бўлади, бу ерда X — (1) тенгламанинг аниқланиш соҳаси.***

Бу теорема 1-теорема каби исботланади: $A(\alpha)=B(\alpha)$ тенгликдан $A(\alpha)C(\alpha)=B(\alpha)C(\alpha)$ тенглик келиб чиқади, кейинги тенгликдан эса $C(\alpha)\neq 0$ бўлганидан $A(\alpha)=B(\alpha)$ тенглик ҳосил бўлади.

Кўпайтиришда (демак, бўлишда ҳам) $C(x)\neq 0$ бўлиши муҳим. Акс ҳолда, *чет илдизлар* пайдо бўлиши мумкин.

Тенглама иккала қисмига x нинг айрим қийматларида сонли қийматга эга бўлмайдиган ифода қўшилса ёки иккала қисм шундай ифодага кўпайтирилса, илдиз йўқолиши мумкин.

3-мисол. $(2x+1)(x^2+3)+x^3=(x-3)(x^2+3)+x^3$ ва $2x+1=x-3$ тенгламалар тенг кучли, чунки R тўпламда x^2+3 кўпайтувчи нолдан фарқли, x^3 қўшилувчи эса барча R да аниқланган.

4-мисол. $\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=-4$ ва $x-2=-4$ тенгламалар тенг кучли эмас, чунки, $x=-2$ да биринчи тенглама маънога эга эмас, иккинчи тенглама эса маънога эга ва тўғри сонли тенгликка айланади. $x-2=-4$ тенгламанинг ягона илдизидир.

5-мисол. $x^2-9=x-3$ тенгламанинг илдизлари $x_1=-2$ ва $x_2=3$. Агар тенгламанинг иккала қисми $x-3$ га бўлинса, унга тенг кучли бўлмаган $x+3=1$ тенглама ҳосил бўлади. Чунки, унинг фақат битта, яъни $x=-2$ илдизи мавжуд. Бу ерда, тенгламани ўзгарувчили ифодага бўлиш натижасида, берилган тенгламанинг $x=3$ дан иборат илдизи йўқолганини кўрамиз.

Машқлар

6.1. x^3-$4x^2$+$7x$-28=0 ва $2x+9=6x-7$ тенгламалар бир хил *рационал* илдизларга эга эканини исбот қилинг.

6.2. Тенгламанинг аниқланиш соҳасини топинг ва уни ечинг:

а) $x^2 +4x+5=1-\frac{1}{x^3-x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x}$;

б) $x^2+4a^2x^2-12a^4+\frac{9a^4}{x^2-2a^2}=0.$

2. Тенгламаларни ечиш усуллари. Биз мактаб математика курсидан айрим содда тенгламаларни, жумладан, квадрат тенгламани ечишни биламиз. Бу ўринда умумий ҳолда кенг қўлланиладиган *кўпайтувчиларга ажратиш* ва *янги ўзгарувчи киритиш* усулларини баён қиламиз.

Теорема. ***P(x)=P₁(x)·...·Pₙ(x)* ва *Pₖ(x)*, *1 ≤ k ≤ n*, *X* тўпламда аниқланган бўлсин. У ҳолда *P(x)=0* тенгламанинг ҳар қандай илдизи *Pₖ(x)=0*, *1 ≤ k ≤ n* тенгламалардан ақалли бирининг илдизи бўлади (ва аксинча).**

Исбот. $P(x)=0$ тенгламанинг илдизларидан бири $\alpha \in X$ бўлсин: $P(\alpha)=0$, ёки $P_1(\alpha)\cdot ... \cdot P_n(\alpha)=0$ (1).

Кўпайтма нолга тенг бўлиши учун кўпайтувчилардан ақалли бири нолга тенг бўлиши, яъни α сони $P_k(x)=0$, $1 \le k \le n$, тенгламалардан ақалли бирининг илдизи бўлиши керак. Аксинча, агар α сони $P_k(x)=0$ тенгламалардан бирининг илдизи бўлса, яъни $P_k(x)$ кўпайтувчилардан бирини нолга айлантирса, (1) даги кўпайтма нолга айланади. Теорема исботланди.

1 - мисол. $P(x)=(3x+1)(3x-1)(2x+5)=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенглама мос равишда $x_1=-\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{1}{3}$; $x_3=-\frac{5}{2}$ илдизларга эга бўлган $3x+1=0$, $3x-1=0$, $2x+5=0$ тенгламаларга ажралади. 1- теоремага кўра $\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{5}{2}\right\}$ тўплам берилган тенгламанинг ечими бўлади.

2 - мисол. $x^4-9x^2+20=0$ тенгламани ечинг.

Бу *биквадрат тенглама* деб аталувчи $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ тенгламанинг хусусий ҳолидир. Бундай кўринишдаги тенгламаларни ечиш учун $x^2=y$ алмаштиришни бажариш керак. Бундай алмаштириш берилган тенгламани $y^2-9y+20=0$ квадрат тенгламага олиб келади. Бу тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечамиз.

Ечиш. Тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^4-9x^2+20=(x^4-4x^2)-(5x^2-20)=x^2(x^2-4)-5(x^2-$$
$$-4)=(x^2-4)(x^2-5)=(x-2)(x+2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0.$$

Энди $x-2=0$, $x+2=0$, $x-\sqrt{5}=0$, $x+\sqrt{5}=0$ тенгламаларни ечиб, берилган тенглама ечимларини топамиз:

$$\{-2;2;-\sqrt{5};\sqrt{5}\}.$$

3- мисол. $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонида 4-даражали кўпҳад турибди. Уни квадрат учҳадлар кўпайтмаси шаклида тасвирлашга ҳаракат қиламиз:

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=(x^2+px+q)(x^2+bx+c).$$

Чап ва ўнг томонларда турган кўпҳадларнинг мос коэффициентларини тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} p+b=-4, \\ c+q+pb=-10, \\ pc+qb=37, \\ qc=-14. \end{cases}$$

Бу системанинг бирор бутун қийматли ечимини топамиз. $qc=-14$ дан q ва c лар 14 нинг бўлувчилари эканини кўриш қийин эмас. Демак, улар учун ±1, ±2, ±7, ±14 ларни синаб кўриш керак.

Агар $q=1$ бўлса, $c=-14$ бўлади. Иккинчи ва учинчи тенгламалар $\begin{cases} pb=3, \\ -14p+b=37 \end{cases}$ системани беради. Бу системадан b учун b^2-3 $7b$-42=0 тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама эса ечимга эга эмас.

Шунинг учун, $q=1$ да система бутун ечимга эга эмас.

Агар $q=2$ бўлса, $c=-7$ га эга бўламиз. Бу ҳолда система $q=2$, $c=-7$, $b=1$, $p=-5$ лардан тузилган бутун ечимга эга бўлади (текшириб кўринг).

Шундай қилиб,

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=(x^2-5x+2)(x^2+x-7)\cdot$$

Демак, берилган тенглама $x^2-5x+2=0$ ва $x^2+x-7=0$ тенгламаларга ажралади. Бу тенгламаларни ечиб, берилган тенгламанинг ҳам ечимлари бўладиган $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$ сонларни топамиз.

4- мисол. $(x^2+x+4)^2+3x(x^2+x+4)+2x^2=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Чап томонни $y=x^2+x+4$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қараб, кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$y^2+3xy+2x^2=(y+x)(y+2x).$$

Бундан $(x^2+2x+4)(x^2+3x+4)=0$ тенглама ҳосил булади. Охирги тенглама ечимга эга эмас. Демак, берилган тенглама ҳам ечимга эга эмас.

5- **мисол.** $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=$ $=[(x+1)(x-4)]\cdot[(x+2)(x-5)]=(x^2-3x-4)\cdot(x^2-3x-10)$ булгани учун берилган тенгламани қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)=-30.$$

Бу тенгламада $y=x^2-3x$ алмаштириш орқали янги ўзгарувчи y ни киритамиз:

$$(y+1)(y-4)(y-10)=-30.$$

Бу тенгламадан $y_1=5$, $y_2=4+\sqrt{30}$, $y_3=4-\sqrt{30}$ ларни топиб, қуйидаги учта квадрат тенгламаларга эга буламиз:

$$x^2-3x=5; \quad x^2-3x=4+\sqrt{30}; \quad x^2-3x=4-\sqrt{30}.$$

Бу тенгламаларни ечсак, берилган тенгламанинг барча илдизлари ҳосил булади:

$$\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}; \quad \frac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}; \quad \frac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$$

6- **мисол.** $x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{2}=a$ деб, $x^4-2ax^2-x+a^2-2=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани a га нисбатан квадрат тенглама сифатида қараб, унинг $a=x^2-x$, $a=x^2+x+1$ илдизларини топиш мумкин. $a=\sqrt{2}$ эканини эътиборга олсак, қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$x^2 - x = \sqrt{2}; \qquad x^2 + x + 1 = \sqrt{2}\cdot$$

Бу тенгламалар берилган тенгламанинг ҳамма илдизларини аниқлаш имконини беради:

$$x_{1,2}\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}; \quad x_{3,4}\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}.$$

7-мисол. $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. x=0 сони тенгламанинг ечими эмас. Шу сабабли, берилган тенглама қуйидаги тенгламага тенг кучли:

$$\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1} + \frac{5}{x+\frac{3}{x}-5} = -\frac{3}{2}.$$

$y = x + \frac{3}{x}$ деб олсак, $\frac{4}{y+1} + \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2}$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама y_1=-5, y_2= 3 илдизларга эга бўлгани учун берилган тенглама $x + \frac{3}{x} = -5$, $x + \frac{3}{x} = 3$ тенгламалар мажмуасига тенг кучлидир. Уларни ечиб, берилган тенгламанинг илдизларига эга бўламиз:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ечилган бу тенглама $\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} =$ =D кўринишдаги тенгламанинг хусусий ҳолидир. Бундай кўринишдаги барча тенгламалар, шунингдек

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}\pm\frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c}=A$$

ва

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}=\frac{Ax}{ax^2+b_3x+c},\ A\neq 0$$

кўринишдаги (бу ерда $ac\neq 0$) тенгламаларнинг ечиш схемаси 7–мисолни ечиш схемаси кабидир.

Четки ҳадларидан бир хил узоқликдаги ҳадлар коэффициентлари тенг $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ $(a\neq 0)$ кўринишдаги тенгламага тўртинчи даражали *қайтма тенглама* дейилади. Бундай тенгламаларни ечиш учун унинг иккала қисмини x^2 га бўлиб, $x+\frac{1}{x}=z$ алмаштиришни бажарамиз: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$, бунда $z^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ бўлганидан, $a(z^2-2)+$ $+bz+c=0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг иккала илдизи бўйича $x+\frac{1}{x}=z_1$, $x+\frac{1}{x}=z_2$ тенгламалар тузилиб, бу тенгламалар ечилади.

8 - мисол. $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини x^2 га бўламиз, сўнг $z=x+\frac{1}{x}$ ва $z^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$ ўрнига қўйишларни бажарамиз. $5z^2-3z-14=0$ тенглама ҳосил бўлади. Унинг ечими: $\{1,4;\ 2\}$. $x+\frac{1}{x}=1{,}4$ тенглама $x^2-1{,}4x+1=0$ кўринишга келади. Тенглама дискриминанти манфий, демак, ҳақиқий сонлар соҳасида ечим мавжуд эмас. $x+\frac{1}{x}=2$ тенглама эса x^2-$2x+1=0$ ёки $(x-1)^2=0$ кўринишга келади. Бу тенглама икки каррали $x=1$ илдизга эга. Берилган тенгламанинг ечими: {1}.

9-мисол. $(x^2+27)^2-5(x^2+27)(x^2+3)+6(x^2+3)^2=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $\frac{(x^2+27)^2}{(x^2+3)^2}-5\cdot\frac{x^2+27}{x^2+3}+6=0$. $y=\frac{x^2+27}{x^2+3}$ деб олсак, $y^2-5y+6=0$ тенглама ҳосил бўлади. $y_1=2$, $y_2=3$ ларга эгамиз. $\frac{x^2+27}{x^2+3}=2$, $\frac{x^2+27}{x^2+3}=3$ тенгламалар мос равишда $\pm\sqrt{21}$ ва ± 3 илдизларга эга.

10-мисол. $f[f(x)]=x$ кўринишидаги тенгламани ечамиз.

$$(x^2-4x+6)^2-4(x^2-4x+6)+6=x \qquad (*)$$

Ечиш. $x^2-4x+6=x$ тенглама $x_1=2$, $x_2=3$ илдизларга эга бўлгани учун $(x^2-4x+6)^2-4(x^2-4x+6)-x$ кўпҳад $(x-2)(x-3)$ га қолдиқсиз бўлинади. Бўлишни бажариб, x^2-3x+3 бўлинмани топамиз. (*) ни $(x^2-3x+3)(x-2)\cdot(x-3)=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама $x=2$, $x=3$ лардан бошқа ҳақиқий илдизларга эга эмас. (*) тенгламанинг ҳамма илдизлари: 2; 3.

Машқлар

6.3. Чизиқли тенгламаларни ечинг.

а) $3x+1=a$;

б) $5+x=ax$;

е) $a+x=a^2x-1$;

ж) $ax-b=1+x$;

в) $4=ax$;

г) $x=a^2x$;

д) $ax-a^2=4-2x$;

з) $x=b-a^2x$;

и) $ax-b^2=7$;

к) $3-a^2x=x-b$.

6.4. $m\cdot x=n$ тенглама:

а) фақат битта илдизга;

б) фақат иккита ҳар хил илдизга;

в) фақат 1000 та ҳар хил илдизга;

г) чексиз кўп ҳар хил илдизга эга бўлиши мумкинми?

6.5. $ax=1+b^2$ тенглама чексиз кўп ҳар хил илдизларга эга бўлиши мумкинми?

6.6. $(a-1)x=a^2-3a+2$ тенглама илдизга эга бўлмаслиги мумкинми?

6.7. Ота 45 ёшда, ўғли 15 ёшда. Неча йилдан кейин ўғли отасидан икки марта кичик бўлади.

6.8. Тенгламани ечинг:

а) $3x(x-1)-17=x(1+3x)+1$;

б) $2x-(x+2)\cdot(x-2)=5-(x-1)^2$;

в) $\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-3}{5}$;

г) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$.

6.9. m нинг қандай қийматларида берилган тенгламалар R да тенг кучли бўлади:

а) $2x+3=12$ ва $2x+3=12(3m-\frac{1}{2})+15$;

б) $3x+5=12$ ва $(3x+5)(3m-\frac{1}{2})=12$;

в) $4-3x=5$ ва $-3x+4=3m-8$;

г) $10x-mx=1$ ва $(10-m)x=0$?

6.10. Тенгламани ечинг:

а) $(x+2)(a-1)+1=a^2$; б) $x=a^2x$;

в) $ax-a^2=4-2x$; г) $a+x=a^2x-1$;

д) $ax-b^2=7$; е) $ax-b=1+x$.

6.11. Тенгламанинг ечимлари тўпламини тузинг:

а) $\frac{3-2x}{15}=\frac{x-2}{3}+\frac{x}{5}$;

б) $\frac{1-3x}{12}=\frac{5x-1}{3}-\frac{7x}{4}$;

в) $\frac{6x-5}{3}-\frac{11}{5}=\frac{4x+3}{5}-0{,}6$;

г) $\frac{8x+1}{2}-\frac{9x}{5}=\frac{6x-1}{5}+0{,}1$;

д) $\frac{5x-2}{3}=\frac{2x+3}{2}-\frac{x+2}{3}$;

е) $3(x+8)=4(7-x)$;

ж) $(x+3)(x-6)=(x+2)(x+1)+4$;

з) $(x-3)(x-4)=(x-5)(x-6)-7{,}5$.

6.12. Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратинг:

а) $2x^2+4x-3$;

б) $\frac{1}{3}x^2-4x+16$;

в) $-5x^2+20x-13$;

г) $-0{,}5x^2-0{,}25x-2{,}25$;

д) x^2-6x+8;

е) $ax^2-4a^2x+4a^3+3$;

ж) $6a^2x-9a^3-ax^2+a-1$;

з) $x^2+(a+b)x+ab$.

6.13. x нинг барча қийматларида x^2+x+1 квадрат учҳад мусбат қийматлар қабул қилишини исботланг.

6.14. x нинг барча қийматларида $-3x^2+12x-13$ квадрат учҳад манфий қийматлар қабул қилишини исботланг.

6.15. 15 сонини кўпайтмаси 70 га тенг бўладиган иккита соннинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкинми?

6.16. x_1 ва x_2 лар $x^2-7x+10=0$ тенгламанинг илдизлари бўлсин. Бу илдизларни топмай, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $x_1^2+x_2^2$;

д) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$;

б) $x_1^3 + x_2^3$;

в) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

г) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$;

е) $x_1x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$;

ж) $(x_1x_2)^2 - x_1^3 - x_2^3$;

з) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.

6.17. 6.16. даги тенгламани $-3x^2+x+24=0$ тенглама билан алмаштиринг ва ҳисоблашларни бу тенглама учун бажаринг.

6.18. x_1, x_2 лар $ax^2+bx+a=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, x_1 ва x_2 сонлари ўзаро тескари сонлар эканини исботланг.

6.19. Берилган тенгламани ечмай, унинг илдизлари ишорасини аниқланг:

а) $x^2-4x+3=0$;

б) $x^2-6x+5=0$;

в) $x^2-x-42=0$;

г) $x^2-x-6=0$;

д) $x^2+x+1=0$;

е) $6x^2-x-1=0$;

ж) $-20x^2-3x+2=0$;

з) $x^2-6x+10=0$;

и) $-3x^2+17=0$;

к) $-5x^2+x-7=0$.

6.20. Илдизлари:

а) 2 ва -3; д) 2 ва 2;

б) -1 ва -5; е) $\frac{1}{3}$ ва $\frac{1}{3}$;

в) $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{6}$; ж) 0 ва 5;

г) $-\frac{1}{2}$ ва $-\frac{1}{3}$; з) α ва β.

бўлган квадрат тенглама тузинг.

6.21. Илдизлари $\frac{5}{7}$ ва $-\frac{1}{2}$ бўлган шундай квадрат тенглама тузингки, унинг барча коэффициентлари бутун сонлар бўлиб, уларнинг йиғиндиси 36 га тенг бўлсин.

6.22. Илдизлари 3 ва -2 бўлган шундай квадрат тенглама тузингки, унинг бош коэффициенти $\frac{1}{2}$ бўлсин.

Илдизларидан бири а) $2+\sqrt{3}$ га, б) $3-\sqrt{2}$ га, в) $2-\sqrt{5}$ га, г) $3+\sqrt{5}$ га тенг бўлган бутун коэффициентли келтирилган квадрат тенглама тузинг.

Каср рационал тенгламаларни ечинг:

6.23. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3.$ **6.24.** $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}.$

6.25. $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}.$ **6.26.** $\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{x+5}.$

6.27. $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}.$

6.28. $\frac{3-7x}{2x+4}=\frac{1{,}5-3{,}5x}{x+2}.$ **6.29.** $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{c}.$

6.30. $\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}.$ **6.31.** $\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3(x+1)}{7-x}.$

6.32. $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}+\frac{36}{x^2-9}.$

6.33. $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}-\frac{18x+7}{x^3-1}=0.$ **6.34.** $\frac{x^2}{x+3}=\frac{x}{x+3}.$

6.35. $\frac{x^2-6x}{x-5}=\frac{5}{5-x}.$ **6.36.** $\frac{x^2-6x}{x-5}-\frac{5}{x-5}=0.$

6.37. $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}.$ **6.38.** $\frac{8}{x}=3x+2.$

6.39. $\frac{3x+1}{x+2}=1+\frac{x-1}{x-2}$.

6.40. $\frac{2x-2}{x+3}-\frac{x+3}{3-x}=5$.

6.41. $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}=\frac{5}{1-3y}$.

6.42. $\frac{4}{x+3}+1=\frac{1}{x-3}+\frac{5}{3-x}$.

Тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечинг:

6.43. $x^3-3x=a^3+\frac{1}{a^3}$ $(a\neq0)$.
6.44. $x^3-8x^2-x+8=0$.
6.45. $x^3-0{,}1x=0{,}3x^2$.
6.46. $9x^3-18x^2-x+2=0$.
6.47. $y^4-y^3-16y^2+16y=0$.
6.48. $x^3-x^2=x-1$.
6.49. $x^4-x^2=6x^3-6x$.
6.50. $3x^3-x^2+18x-6=0$.
6.51. $2x^4-18x^2=5x^3-45x$.
6.52. $3y^2-2y=2y^3-3$.
6.53. $x^3-3x-2=0$.
6.54. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.
6.55. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0$.
6.56. $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$.
6.57. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\cdot\frac{x^2+36}{x^2-36}$.
6.58. $x^3+7x^2+14x+8=0$.
6.59. $x^3-5x+4=0$.
6.60. $x^3-8x^2+40=0$.
6.61. $x^3-2x-1=0$.
6.62. $x^4-4x^2+x+2=0$.

Тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг:

6.63. $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$.
6.64. $(x^2+3)^2-11(x^2+3)+28=0$.
6.65. $t^4-2t^2-3=0$.
6.66. $2x^4-9x^2+4=0$.
6.67. $5y^4-5y^2+2=0$.

6.68. $x^4-4x^2+4=0$.

6.69. $(x^2-2x)^2-(x-1)^2+1=0$.

6.70. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

6.71. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.

6.72. $(x^2-5x+7)-(x-2)(x-3)=0$.

6.73. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$.

6.74. $2x^8+x^4-15=0$.

6.75. $(2x-1)^6+3(2x-1)^3=10$.

6.76. $(x-2)^6-19(x-2)^3=216$.

6.77. $\frac{x-4}{x+5}+\frac{x+5}{x-4}=2$.

6.78. $\frac{x-4}{x-5}+\frac{6x-30}{x-4}=5$.

6.79. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

6.80. $x^4-\frac{50}{2x^4-7}=14$.

6.81. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$.

6.82. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

Қайтма тенгламани ечинг:

6.83. $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$. **6.84.** $x^4-3x^3+3x+1=0$.

6.85. $x^4-4x^3+x^2-4x+1=0$. **6.86.** $2x^4-4x^3+2x^2-4x+2=0$.

6.87. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$. **6.88.** $x^4+2x^3+x^2-2x+1=0$.

Қайтма тенгламаларнинг барча ҳақиқий илдизларини топинг:

6.89. $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$.

6.90. $4x^4+2x^3+3x^2+x+1=0$.

6.91. $2x^4+3x^3-13x^2-6x+8=0$.

6.92. $3x^4-2x^3+x^2-6x+27=0$.

6.93. Тенгламани ечинг:

а) $8x^3-36x^2+54x=28$;
б) $16x^4+32x^3+12x^2+8x-80=0$;
в) $x^4-8x^3+24x^2-8x=65$;
г) $(x^2-1)^2+5(x^4-1)-6(x^2+1)^2=0$;
д)$(x-2)^2+(x-2)(x+1)+(x+1)^2=0$;
е) $(x^2-3)^2-7(x^4-9)+6(x^2+3)^2=0$.

6.94. $f[f(x)]=0$ кўринишидаги тенгламани ечинг:

а) $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$;
б) $(x^2-8x+18)^2-8(x^2-8x+18)+18=x$;
в) $(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$;
г) $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$;
д) $(x^2-9x+16)^2-9(x^2x+16)+1$.

3. Модул белгиси қатнашган тенгламалар. Агар тенглама модул ишорасига эга бўлса, олдин модулларни очиш керак:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ -f(x) = g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \tag{2}$$

1 - мисол. $|3x-2| = 6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенглама қуйидаги иккита системага тенг кучли:

$$\begin{cases} 3x-2 \ge 0, \\ 3x-2 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-2 < 0, \\ 3x-2 = -6. \end{cases}$$

Биринчи системадан $x_1 = \frac{8}{3}$, иккинчи системадан $x_2 = -\frac{3}{4}$.

Бу тенгламани қуйидагича ечиш ҳам мумкин: $|3x-2|^2 = 36$.

$|a|^2 = a^2$ бўлганлиги учун $(3x-2)^2=36$. $9x^2-12x+4=36$.

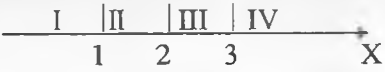
Бундан $9x^2-12x-32=0$. Бу тенгламани ечиб $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$ ларга эга бўламиз.

2 - м и с о л. $|2x-3| = |x+1|$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак, $(2x-3)^2 = (x+1)^2$ ёки $4x^2 - 12x + 9 = x^2 +$ $+ 2x + 1$, бундан $3x^2 - 14x + 8 = 0$, $x_1=4$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

3 - м и с о л. $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$ тенгламани "оралиқлар усули"да ечинг.

Ечиш. Сонлар ўқида модул белгиси остидаги ифодалар 0 га айланадиган барча нуқталарни белгилаймиз (21-расм).



21-расм.

Бу нуқталар сонлар ўқини тўртта (I, II, III, IV) оралиққа ажратади. Берилган тенгламани шу оралиқларнинг ҳар бирида ечамиз:

1) $x \le 1$ да $1-x+2(x-2)-3(x-3)=4 \Rightarrow x=1$;

2) $1< x \le 2$ да $x-1+2(x-2)-3(x-3)=4 \Rightarrow 1< x \le 2$;

3) $2< x \leq 3$ да $x-1-2(x-2)-3(x-3)=4$ тенглама ечимга эга эмас;

4) $x>3$ да $x-1-2(x-2)-3(x-3)=4 \Rightarrow x=5$.

4 - мисол. $|x^3+6x^2+11x+6| = x^2+4x+3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. (1) муносабатдан фойдалансак:

1) $x^3+6x^2+11x+6=x^2+4x+3$, $x^3+5x^2+7x+3=0$,

$(x^3+x^2)+(4x^2+4x)+(3x+3)=(x+1)(x^2+4x+3)=$

$=(x+1)(x+1)(x+3)=0$; ечим: $\{-1;-3\}$;

2) $-(x^3+6x^2+11x+6)=x^2+4x+3$,
ёки $(x+1)(x+3)(x+3)=0$; ечим $\{-1; -3\}$;

3) $x^2+4x+3\geq 0$ ни ечамиз. $x^2+4x+3=0$ тенглама илдизлари $x_1=-3$, $x_2=-1$. Квадрат учҳад бош ҳади коэффициенти мусбат. Учҳад номанфий қийматларни $(-\infty;-3]\cup[-1;+\infty)$ да қабул қилади. Юқорида топилган натижаларни умумлаштириб, тенгламанинг ечимини топамиз: $\{-3;-1\}$.

Машқлар

$|f(x)|=a(a\in R)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.95. $|x|=-2$.
6.96. $|x|=2$.
6.97. $|x|=0$.
6.98. $|x-1|=-2$.
6.99. $|x-1|=2$.
6.100. $|x-1|=0$.
6.101. $|2x-5|=-1$.
6.102. $|2x-5|=1$.
6.103. $|2x-5|=0$.
6.104. $|3-x|=-1$.
6.105. $|a+x|=-2$.
6.106. $|4-x|=0$.
6.107. $|x^2-3x+1|=1$.
6.108. $|x^3-x|=0$.
6.109. $|x^4-x|=0$.
6.110. $|x^2|=9$.
6.111. $|x^2-1|=0$.
6.112. $|x-|x||=0$.

$|f(x)|=f(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.113. $|3x^2-7x+4|=3x^2-7x+4$.
6.114. $|x^2-14x-15|=x^2-14x-15$.
6.115. $|2-x-x^2|=2-x-x^2$.

6.116. $|3x^2-7x+6|=3x^2-7x+6$.

$|f(x)|=-f(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.117. $|3x^2-7x+6|=7x-6-3x^2$ **6.118.** $|x^4-x^2|=x^2-x^4$.

6.119. $|-x^2-4x-4|=x^2+4x+4$.

6.120. $|(x-1)^2(x-2)(x-3)|=(x-1)^2(2-x)(x-3)$.

$f(|x|)=g(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.121. $|x|=3x-5$. **6.122.** $|x^2+|x|-6=0$.

6.123. $|x|=x^2-3x+5$. **6.124.** $x+|x|+5=x^2$.

$|f(x)|=g(x)$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.125. $|x+2|=2(3-x)$. **6.126.** $|3x-2|=11-x$.

6.127. $2|x^2+2x-5|=x-1$. **6.128.** $|3x+1|=5+6x$.

Тенгламани оралиқлар усули билан ечинг:

6.129. $|3x-8|-|3x-2|=6$. **6.130.** $|x-1|+|x-3|=2$.

6.131. $|x-1|+|x-3|=3$. **6.132.** $|x|-|x-2|=2$.

6.133. $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$.

$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.134. $|7-2x|=|5-3x|+|x+2|$.

6.135. $\left|\frac{x^2}{x-1}\right|=\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|$.

6.136. $|5x-4|=|x|+4|x-1|$.

6.137. $|6x+13|+|7-6x|=20$.

6.138. $|6x|-|6x-5|=5$.

6.139. $13-|-x+13|=|x|$.

Ичма-ич модуллар қатнашган тенгламани ечинг:

6.140. $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1$. **6.141.** $\left||x|-3\right|=3-|x|$.

6.142. $\left||6x|-|6x-3|\right|=3$. **6.143.** $\left|x-|4-x|\right|-2x=4$.

$|f(x)|=|g(x)|$ кўринишдаги тенгламани ечинг:

6.144. $|3x-5|=|5-2x|$. **6.145.** $|x+1|=|x-1|$.

6.146. $\left|1-|2-x|\right| = |3+x|$. **6.147.** $\left||3-2x|-1\right| = |x-1|$.

Параметр қатнашган тенгламани ечинг:

6.148. $2|x+a|-|x-2a|=3a$. **6.149.** $a-\dfrac{2a^2}{|x+a|}=a$.

6.150. $|x^2-a^2|=(x+3a)^2$. **6.151.** $x=2|x-a|-2|x-2a|$.

4. Муҳаммад ал-Хоразмий —алгебра фанининг асосчиси. Улуғ алломаларимиздан бири, алгебра фанининг асосчиси, Абу Абдаллоҳ Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий (Хоразм 780 — Бағдод 847) ўзининг “Ал-Жабр вал-муқобала” китобида $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+c=bx$, $bx+c=ax^2$, $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $bx=c$ кўринишдаги тенгламаларнинг номанфий илдизларини топишнинг алгебраик усулини кўрсатган, уни геометрик таҳлил этган. Масалан, биздан $6x^2$-$22x$-4=$4x^2$-$2x$-46 тенгламани ечиш талаб этилган бўлсин. Дастлаб тенгламани содда кўринишга келтирамиз. Сўнгра:

1) тенгликнинг бирор томонидан, бирор сон ёки ифодани *Ал-жабр*: (арабча жабр — ўтказиш) тенгликнинг иккинчи томонига ўтказамиз. Ифода айрилаётган бўлса, ўша сонни (ифодани) тенгликнинг иккала томонига қўшамиз. Натижада манфий ишорали ҳадлар алмашади:

$$6x^2-22x-4=4x^2-2x-46; \qquad (+22x,\ +4,\ +2x,\ +46);$$
$$6x^2+2x+46=4x^2+22x+4.$$

Биз ҳозир бу амални манфий ишорали ҳадни тенгликнинг иккинчи томонига мусбат ҳад қилиб ўтказиш, деб атаймиз;

2) *ал-ҳатт* (қўйиш, ортиқчасини олиб ташлаш), яъни зарур бўлса, тенгликнинг икки томонини бирор умумий бўлувчига қисқартирамиз:

$$3x^2+x+23=2x^2+11x+2.$$

3) *ал-муқобала* (муқобил қўйиш, тengликнинг бир томонининг ортиши иккинчи томоннинг ўшанча камайишига тенг кучли). Бу бизда тенгликнинг иккала томонидан $2x^2$ ни, x ни, 4 ни айиришга тенг кучли:

$$x^2+21=10x. \qquad (1)$$

(1) тенгламани ечамиз.

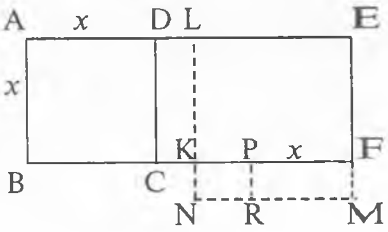
1) Юзи x^2 (юза бирлиги) га тенг бўлган ABCD квадрат ва юзи 21 (юза бирлиги) га тенг бўлган CDEF тўғри тўртбурчак ёрдамида ABEF тўғри тўртбурчак ясаймиз (22-расм):

ABFE тўғри тўртбурчакнинг юзи $10x$ (юза бирлиги) га (тенгламанинг ўнг томонидаги ифода) тенг бўлсин. У ҳолда *AE* томоннинг узунлиги 10 (узунлик бирлиги) га тенг бўлади.

2) *L* нуқта *AE* томоннинг ўртаси бўлсин. У ҳолда $AL=LE=5$ ва $x \leq AL$ (шакл бўйича!) бўлади.

Энди томони 5 (узунлик бирлиги) га тенг бўлган *LNME* квадратни ва $PF=x$ томонли *PRMF* тўғри тўртбурчакни ясаймиз. $CK=PK=5-x$ бўлгани учун *PRMF* тўғри тўртбурчакнинг юзи *CDLK* тўғри тўртбурчакнинг юзига, *LNME* квадратнинг юзи эса *DCFE* тўғри тўртбурчак ва *KNRP* квадрат юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Шу сабабли, *KNRP* квадратнинг юзи 5^2-$21=4$ (юза бирлиги) га, томони эса $KN=\sqrt{4}=2$ (узунлик бирлиги) га тенгдир. $LN=x+KN=5$ тенгликдан, $x=3$ эканлиги келиб чиқади.



22-расм.

$x \geq AL$ ҳолни қараш билан иккинчи илдиз $x=7$ ни ҳам топиш мумкин.

Агар AE нинг узунлиги b га, $ABFE$ тўғри тўртбурчакнинг юзи эса c га тенг деб ҳисобласак, $x^2+c=bx$ тенглама илдизи учун $x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$, яъни

$x=\frac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ формула ҳосил бўлар эди.

Ал-жабру вал-муқобаладан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни ечинг ва унга геометрик таҳлил беринг:

а) $x+8=16$; б) $x-5=7$; в) $\frac{2}{3}-x=1$;

г) $4x=5$; д) $8x-6=3$; е) $8x-19=10x-27$.

2-§. Юқори даражали алгебраик тенгламалар

1. Безу теоремаси. Горнер схемаси. Кўпҳаднинг илдизлари. (Этьен Безу (1730—1783) — француз математиги). $P(x)$ кўпҳадни $x-\alpha$ иккиҳадга бўлганда бўлинмада $Q(x)$, қолдиқда $R(x)$ қолсин:

$$P(x)=(x-\alpha)\,Q(x)+R(x). \qquad (1)$$

Агар бу муносабатга $x=\alpha$ қўйилса, $P(\alpha)=0\cdot Q(\alpha)+R(\alpha)=R(\alpha)=r$ ҳосил бўлади. Шу тариқа ушбу теорема исботланади:

1-теорема ***(Безу). $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ $(\alpha\neq 0)$ кўпҳадни $x-\alpha$ га бўлишдан чиқадиган r қолдиқ шу кўпҳаднинг $x=\alpha$ даги қийматига тенг, $r=P(\alpha)$.***

Натижалар. $n\in N$ бўлганда:

1. x^n-a^n иккиҳад $x-a$ га бўлинади. Ҳақиқатан, $P_n(a)=a^n-a^n=0$.

2. x^n+a^n иккиҳад x-a га бўлинмайди. Ҳақиқатан, $P(a)=a^n+a^n==2a^n\neq 0$.

3. x^{2n}-a^{2n} иккиҳад $x+a$ га бўлинади. Ҳақиқатан, $P(-a)==(-a)^{2n}--a^{2n}=0$.

4. x^{2n+1}-a^{2n+1} иккиҳад $x+a$ га бўлинмайди. Ҳақиқатан, $P(-a)=(-a)^{2n+1}$ иккиҳад $-a^{2n+1}=-2a^{2n-1}\neq 0$.

5. $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ иккиҳад $x+a$ га бўлинади. Ҳақиқатан, $P(-a)=(-a)^{2n+1}+a^{2n+1}=0$.

6. $x^{2n}+a^{2n}$ иккиҳад $x+a$ га бўлинмайди. Ҳақиқатан, $P(-a)=a^{2n}+a^{2n}=2a^{2n}\neq 0$.

Бўлиш бажариладиган ҳолларда бўлинмаларнинг кўринишини аниқлаймиз.

$$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4);$$

$$x^5+a^5=(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4);$$

$$x^6-a^6=(x-a)(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^5x+a^5);$$

$$x^6-a^6=(x+a)(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5).$$

Булардан кўринадики, бўлинма албатта бир жинсли кўпҳад бўлиб x нинг даражалари камайиб, a нинг даражалари ўсиш тартибида жойлашган ва агар бўлувчи $a+x$ бўлса, коэффициентлар +1 ва -1 алмашиб келади, агар бўлувчи x-a бўлса бўлинмада ҳосил бўлган кўпҳаднинг коэффициентлари 1 га тенг бўлади. Бу хулосаларни истаган даражали кўпҳадлар учун умумлаштириш мумкин.

1-мисол. 1) x^5+x+20 ни $x+2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $r=(-2)^5+(-2)+20=-14$; 2) x^5+x+34 ни $x+2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $r=(-2)^5+(-2)+$ $+34=0$. Демак, $x=-2$ сони шу кўпҳаднинг илдизи; 3) x^5-$ax+4$ ни $x+3$ га бўлишда қолдиқда $r=4$ қолса, a нимага тенг?

Ечиш: $(-3)^5-a\cdot(-3)+4=4$, бундан $a=81$.

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ кўпҳадни x-α иккиҳадга бўлишдаги қолдиқни ҳисоблашнинг Горнер (Хорнер Уильям (1786—1837) — инглиз математиги) схемаси деб аталувчи усулини кўрсатамиз.

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha) + r \qquad (1)$$

бўлсин. Бунда

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + ... + b_{n-1}.$$

(1) да x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб қуйидагига эга бўламиз.

$$a_0 = b_0$$
$$a_1 = b_1 - \alpha b_0$$
$$a_2 = b_2 - \alpha b_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}$$
$$a_n = r - \alpha b_{n-1}$$

Бундан кўринадики, $b_0 = a_0$, $b_k = \alpha b_{k-1} + a_k$, $k = 1,2,...,n-1$, $r = a_n + \alpha b_{n-1}$.

Бўлинма ва қолдиқни ҳисоблаш қуйидаги жадвал ёрдамида топилади.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α		αb_0+a_1	αb_1+a_2	...	$\alpha b_{n-2}+a_{n-1}$	$\alpha b_{n-1}+a_n$
	$b_0=a_0$	b_1	b_2	...	b_{n-1}	r

2-мисол. x^3+4x^2-3x+5 кўпҳадни Горнер схемасидан фойдаланиб x-1 га бўлишни бажарамиз.

	1	4	-3	5
1	1	5	2	7

Демак, $x^3+4x^2-3x+5=(x-1)(x^2+5x+2)+7$.

Безу теоремасидан $P(x)$ кўпҳадни $ax+b$ кўринишдаги иккиҳадга бўлишда ҳосил бўладиган r қолдиқ $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ га тенг бўлишлиги келиб чиқади.

3 - мисол. $P_3(x)=x^3-3x^2+5x+7$ ни $2x+1$ га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқни топинг.

Ечиш. Қолдиқ $r = P_3\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot$

$\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7=\frac{29}{8}$ га тенг.

2 -теорема. Агар α сони $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $P(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ иккиҳадга қолдиқсиз бўлинади.

Исбот. Безу теоремасига кўра, $P(x)$ ни $x-\alpha$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $P(\alpha)$ га тенг, шарт бўйича эса $P(\alpha)=0$. Исбот бажарилди.

Бу теорема $P(x)=0$ тенгламани ечиш масаласини $P(x)$ кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш масаласига келтириш имконини беради.

1 - натижа. ***Агар $P(x)$ кўпҳад ҳар хил $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ илдизларга эга бўлса, у $(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ кўпайтмага қолдиқсиз бўлинади.***

2 - натижа. ***n-даражали кўпҳад n тадан ортиқ ҳар хил илдизга эга бўла олмайди.***

Исбот. Агар n-даражали $P(x)$ кўпҳад $n+1$ та ҳар хил $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1}$ илдизларга эга бўлганда, у $n+1$-даражали $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{k+1})$ кўпайтмага бўлинарди. Лекин бундай бўлиши мумкин эмас.

Юқорида қаралган теоремалардан фойдаланиб, Франсуа Виет (француз олими, 1540—1603) томонидан берилган ҳамда $P(x)=0$ бутун алгебраик тенгламанинг a_i ҳақиқий коэффициентлари ва α_i илдизлари орасидаги муносабатни ифодаловчи формулаларни келтирамиз:

1) $a_2x^2+a_1x+a_0=b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=bx^2-b(\alpha_1+\alpha_2)x+b\alpha_1\alpha_2$. Агар x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлари тенглаштирилса, $b=a_2$ бўлади. Натижада ушбу формулалар топилади:

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{a_1}{a_2},\ \alpha_1\alpha_2=\frac{a_0}{a_2}\ ;$$

2) шу тартибда $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ учун:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{a_2}{a_3},\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{a_1}{a_3},\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_0}{a_3}$$

формулалар топилади.

Ҳосил қилинган тенгликларнинг бажарилиши $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ сонларининг $P_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ кўпҳад илдизлари бўлиши учун зарур ва етарлидир. Агар $P(x)$ кўпҳад $(x-\alpha)^k$ га қолдиқсиз бўлинса, лекин $(x-\alpha)^{k+1}$ га қолдиқсиз бўлинмаса, α сони $P(x)$ учун k *каррали илдиз* бўлади.

4 - мисол. α_1, α_2, α_3 лар $x^3+x^2+x-2=0$ тенгламанинг илдизлари бўлсин. $\sum_1^3 \alpha_i^3=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$ йиғиндини топамиз.

Ечиш. Виет формулалари бўйича: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-1$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=1$. У ҳолда: $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2=(-1)^2$ бўйича $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+1=-2\cdot 1+1=-1$. Иккинчи томондан α_1, α_2, α_3 илдиз, уларда ифода нолга айланади:

$$\begin{array}{c}
\alpha_1^3+\alpha_1^2+\alpha_1-2=0,\\
\alpha_2^3+\alpha_2^2+\alpha_2-2=0,\\
\alpha_3^3+\alpha_3^2+\alpha_3-2=0,\\
\hline
\sum\alpha_i^3+\sum\alpha_i^2+\sum\alpha_i-6=0,
\end{array}$$

бундан $\sum a_i^3 = -(-1)-(-1)+6=8$, бунда қисқа ёзиш учун $\sum$ орқали $\sum\limits_{i=1}^{3}$ белгиланган.

Машқлар

6.152. $P(x)$ кўпҳад $D(x)$ кўпҳадга бўлинадими:

а) $P(x)=x^{100}-3x+2$, $D(x)=x-1$;

б) $P(x)=x^{100}-3x+2$, $D(x)=x+1$;

в) $P(x)=x^{100}-3x^2+2$, $D(x)=x^2-1$;

г) $P(x)=x^{100}-3x+2$, $D(x)=2x^2-1$?

6.153. $x^{2n-1}+a^{2n-1}$ кўпҳад $x+a$ га бўлинишини исботланг, бунда $a\neq0$, $n\in N$.

6.154. x^n-a^n кўпҳад $x-a$ га бўлинишини исботланг, бунда $a\neq0$, $n\in N$.

6.155. а) x^4-3x^2+1 ни $x-2$ га; б) $x^5-4x^3+x^2$ ни $x-3$ га; в) $x^5-4x^3-x^2+1$ ни $2x-3$ га; г) $x^4-3x^3+x^2-1$ ни $3x-4$ га бўлишдаги қолдиқни топинг.

6.156. m нинг қандай қийматларида $3x^4-2x^2-m^2x-2$ кўпҳад $x-2$ га қолдиқсиз бўлинади?

6.157. m нинг қандай қийматларида $3x^3-4x^2-mx-1$ кўпҳад $x+1$ га бўлинмайди?

6.158. a ва b нинг қандай қийматларида $2x^4+ax^3+bx-2$ кўпҳад x^2-x-2 учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

6.159. m ва n нинг қандай қийматларида x^3+mx+n кўпҳад $x^2+3x+10$ учҳадга қолдиқсиз бўлинади?

6.160. $P(x)$ кўпҳадни $x-1$ га бўлишда қолдиқда 3, $x-2$ га бўлишда эса қолдиқда 5 ҳосил бўлади. $P(x)$ ни x^2-3x+2 бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

6.161. $P(x)$ кўпҳадни $x-a$ га бўлишда қолдиқда r_1, $x-b$ га бўлишда эса r_2 ҳосил бўлади ($a\neq b$). $P(x)$ ни

$x^2-(a+b)x+ab$ га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

6.162. Горнер схемаси ёрдамида $P(x)$ кўпҳадни $D(x)$ икки ҳадга қолдиқли бўлинг:

а) $P(x)=x^2-5x-7,\ D(x)=x-1;$

б) $P(x)=x^3-3x^2+5x-6,\ D(x)=x-2;$

в) $P(x)=2x^4-3x^2-5x+2,\ D(x)=x+1;$

г) $P(x)=3x^5-4x^3-x+1,\ D(x)=x+3;$

д) $P(x)=3x^6-4x^5-x^4+x^3-x^2-1,\ D(x)=x-3;$

е) $P(x)=x^5-x^2-5x-6,\ D(x)=x-2;$

ж) $P(x)=x^4-x^3+2x^2-5x-42,\ D(x)=x+2;$

з) $P(x)=x^5-4x^2+5x-3,\ D(x)=x-3;$

и) $P(x)=x^4-3x^3+2x^2-4x-1,\ D(x)=x+4;$

к) $P(x)=x^5-4x^3-3x^2+1,\ D(x)=x-4;$

л) $P(x)=x^6-5x^4+3x^2-5x+6,\ D(x)=x+2;$

м) $P(x)=x^5-4x^3+2x^2-3,\ D(x)=x-1.$

6.163. Горнер схемасидан фойдаланиб, $f(x)$ кўпҳаднинг $x=a$ нуқтадаги қийматини топинг:

а) $f(x)=x^3-x^2+2,\ a=1;$

б) $f(x)=x^4-3x^3-x+10,\ a=2;$

в) $f(x)=x^5-x^4+3x^2-x+1,\ a=-1;$

г) $f(x)=x^6-7x^2+3x^2-3,\ a=3;$

д) $f(x)=x^6-5x^3-4x^2+8,\ a=4;$

е) $f(x)=x^8+7x^7+x^6+3x^5+3x^4+2x^3+x^2-x+1,\ a=5.$

6.164. Горнер схемасидан фойдаланиб, $a^3+b^3+c^3-3abc$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

2. Алгебраик тенгламаларнинг комплекс илдизлари. Алгебранинг асосий теоремаси (Гаусс теоремаси):

n-даражали (бу ерда $n \geq 1$) ҳар қандай кўпҳад ақалли битта комплекс илдизга эга.

Теорема. ***Агар $\alpha+\beta i$ ($b\neq0$) комплекс сони $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $\alpha-\beta i$ комплекс сони ҳам $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлади.***

Натижа: *n-даражали $P_n(x)$ кўпҳад x-a кўринишидаги иккиҳадлар ва x^2+px+q кўринишидаги манфий дискриминантли квадрат учҳадлар даражаларининг кўпайтмасидан иборат:*

$P_n(x)=a_0(x-\alpha)^k\cdot\cdot\cdot(x^2+px+q)^m\cdot\cdot\cdot$ бу ерда $k\in\{0, 1, 2, \ldots\}$, $m\in\{0,1,2, \ldots\}$.

Машқлар

6.165. Тенгламанинг барча комплекс ечимларини топинг:

а) $x^2 -2x+2=0$;	ж) $9x^2+6x+10=0$;
б) $x^2-4x+5=0$;	з) $4x^2+4x+5=0$;
в) $x^2+6x+13=0$;	и) $9x^2-12x+5=0$;
г) $x^2+4x+13=0$;	к) $16z^2-32z+17=0$;
д) $x^2+2x+17=0$;	л) $z^2+4z+7=0$;
е) $x^2-8x+41=0$;	м) $z^2-6z+11=0$.

6.166. Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2+2x+5;	в) $4z^2+8z+5$;
б) $x^2-3x+10$;	г) $25z^2+50z+26$.

6.167. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

а) $z^4+5z^2-36=0$;	д) $x^4+3x^2-18=0$;
б) $x^4-8x^2-9=0$;	е) $x^4+4x^2-32=0$;
в) $y^4-y^2-6=0$;	ж) $z^4+z^2+1=0$;
г) $t^4+2t^2-15=0$;	з) $z^6-2z^3+4=0$.

6.168. Илдизларидан бири $2-3i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг.

6.169. Илдизлари $2-3i$, $2-i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли тўртинчи даражали тенглама тузинг.

6.170. Илдизлари 2, $2-3i$, $2-i$ бўлган ҳақиқий коэффициентли бешинчи даражали тенглама тузинг.

6.171. $x=1$ сони $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ кўпҳаднинг неча каррали илдизи эканини аниқланг.

6.172. Қуйидаги кўпҳадларни чизиқли ва квадратик кўпайтувчилар кўпайтмаси шаклида тасвирланг.

а) x^6+27; в) x^6+64;

б) x^4+16x^2; г) x^4+7x^2.

3. Бутун коэффициентли тенгламаларнинг рационал илдизларини топиш. Рационал коэффициентли ҳар қандай $a_n x^n+...+a_0=0$ тенглама унга тенг кучли бутун коэффициентли тенгламага келтирилиши мумкин. Масалан, $\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x^2-x+1=0$ тенгламанинг иккала қисми 6 га кўпайтирилса, унга тенг кучли бутун коэффициентли $5x^3+4x^2-6x+6=0$ тенглама ҳосил бўлади. Энди бутун коэффициентли тенгламалар билан шуғулланамиз.

Теорема. ***$x=\frac{p}{q}$ қисқармас каср бутун коэффициентли***

$$a_n x^n+...+a_0=0, a_n\neq 0, \tag{1}$$

тенгламанинг илдизи бўлиши учун p сони a_0 озод ҳаднинг, q эса a_n бош ҳад коэффициентининг бўлувчиси бўлиши зарур.

Ҳақиқатан, $\frac{p}{q}$ сони (1) тенгламанинг илдизи бўлсин: $a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0$ ёки тенгликнинг иккала қисми q^n га кўпайтирилса, $a_n p^n+a_{n-1}+$ $+p^{n-1}q+...+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$ тенглик ҳосил бўлади. Бундан: $a_0q^n=-a_np^n-a_{n-1}p^{n-1}q-\ldots-a_1pq^{n-1}=-p(a_np^{n-1}+$ $+a_{n-1}p^{n-2}q+...+a_1q^{n-1})$. Тенгликнинг ўнг қисми p га бўлинади. Демак, чап қисмдаги a_0q^n ҳам p га бўлиниши керак. Лекин, $\frac{p}{q}$ қисқармас каср, яъни p ва q^n лар ўзаро туб. Демак, p сони a_1 нинг бўлувчиси. Шу каби q сони a_n нинг бўлувчиси экани исбот қилинади.

Агар (1) тенглама *келтирилган тенглама* бўлса, яъни бош ҳад коэффициенти $a_n=1$ бўлса, тенгламанинг рационал илдизлари озод ҳаднинг бўлувчилари орасидан изланади.

1-мисол. $2x^3+x^2-4x-2=0$ тенгламанинг рационал илдизларини топинг.

Ечиш. Озод ҳаднинг барча бутун бўлувчилари: $-2; -1;\ 1;\ 2.$

Бош коэффициентнинг барча натурал бўлувчилари: 1; 2.

Тенгламанинг рационал илдизларини қуйидаги сонлар орасидан излаймиз:

$$-2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 2.$$

Бу сонларни берилган тенгламага бевосита қўйиб кўриш билан, уларнинг илдиз бўлиш ёки бўлмаслигини аниқлаймиз.

Текшириш кўрсатадики, $-\frac{1}{2}$ сони берилган тенгламанинг илдизи бўлади, қолган сонлар эса илдиз бўлмайди.

Шундай қилиб, берилган тенглама фақат битта рационал илдизга эга: $x=-\frac{1}{2}$.

Жавоб. $-\frac{1}{2}$.

2-мисол. Тенгламанинг бутун илдизларини топинг: $2x^4-x^3+2x^2+3x-2=0$.

Ечиш. Озод ҳаднинг барча бутун бўлувчилари: -2; -1; 1; 2. Тенгламанинг барча бутун илдизларини шу сонлар орасидан излаймиз.

Бу сонларнинг ҳар бирини тенгламага қўйиб кўриб, улар орасидан фақат — 1 сонигина тенгламанинг ечими бўлишлигини аниқлаймиз.

Демак, берилган тенглама фақат битта бутун ечимга эга.

Жавоб. $x=-1$.

3-мисол. $x^3+3x^2-1=0$ тенгламанинг бутун илдизларини топинг.

Ечиш. Бутун илдизларини -1; 1 сонлари орасидан излаймиз. Бу сонларнинг иккаласи ҳам тенгламанинг илдизи эмаслигини кўриш қийин эмас.

Жавоб. Тенглама бутун илдизга эга эмас.

4-мисол. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2=0$ ($x\in R$) тенгламани ечинг.

Ечиш. Олдинги мисоллардан фарқли, бу мисолда тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилиняпти.

Дастлаб, рационал илдизларни излаймиз. Рационал илдизлар (агар улар мавжуд бўлса) эса -2; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2 сони орасида бўлади. -1 ва $\frac{1}{2}$ сонлар рационал илдизлар эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шунинг учун, тенгламанинг чап томонидаги кўпҳад $(x+1)(x-\frac{1}{2})=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ га қолдиқсиз бўлинади.

Бўлишни бажариб,

$$2x^4-x^3+2x^2+3x-2=\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2x^2-2x+4\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2x^2-2x+4\right)=0.$$

$2x^2-2x+4=0$ тенгламага янги ҳақиқий илдизларни бермайди.

Жавоб: $x_1=-1$; $x_2=\frac{1}{2}$.

5 - мисол. $2x^3-7x^2+5x-1=0$ тенгламанинг $\frac{p}{q}$ рационал илдизларини топамиз, бунда p ва q лар ўзаро туб, $Б(p,q)=1$.

Ечиш. p сонини озод ҳаднинг, q ни эса бош коэффициентнинг бўлувчилари орасидан излаймиз. Улар ±1 ва ±2. Демак, рационал илдизлар ±1, $\pm\frac{1}{2}$ сонлари ичида бўлиши мумкин. Бу сонларни тенгламага кетма-кет қўйиб ҳисоблаш, $\frac{1}{2}$ нинг илдиз эканини кўрсатади. Тенгламанинг қолган илдизларини топиш учун унинг чап қисмини $x-\frac{1}{2}$ га ёки $2x-1$ га бўламиз. Бўлинмада x^2-3x+1 учҳад ҳосил бўлади. Унинг илдизлари: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Изланаётган ечим: $x_1=-\frac{1}{2}$,

$$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Машқлар

6.173. Тенгламанинг рационал илдизларини топинг:

а) $3x^3-4x^2+5x-18=0$; д) $4x^4+8x^3-3x^2-7x+3=0$;

б) $x^3-4x^2-27x+90=0$; е) $x^4+x^3+x^2+3x+2=0$;

в) $x^4-x^3+x+2=0$; ж) $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$;
г) $2x^3-5x^2+8x-3=0$; з) $3x^4+4x^2+5x-12=0$.

6.174. Тенгламанинг бутун илдизларини топинг:

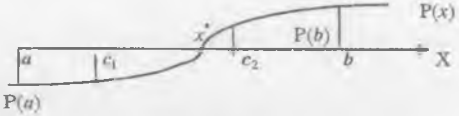
а) $x^4+2x^3+4x^2+3x-10=0$; б) $x^3+7x^2+14x+8=0$;
в) $x^4-x^3+2x^2-x+1=0$; г) $x^4+x^2+x+2=0$;
д) $2x^5+6x^4-7x^3-21x^2-4x-12=0$.

6.175. Тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топинг:

а) $2x^4+3x^3-8x^2-9x+6=0$; б) $2x^4-5x^3-x^2+5x+2=0$;
в) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$; г) $4x^4-3x^3-8x^2+3x+4=0$;
д) $3x^4-4x^3-7x^2+4x+4=0$; е) $2x^4-7x^3-5x^2+7x+3=0$.

4. Тенгламаларни тақрибий ечиш. $P(x)=a_nx^n+...+a_0$ бўлсин, $P(x)=0$ (1) тенгламани тақрибий ечиш дейилганда унинг номаълум x^* илдизи ётган $[a;\ b]$ оралиқни олдиндан тайинланган $\varepsilon=|\ b-a\ |$ дан ошмайдиган катталикда (қисқача: ε гача аниқликда) топиш тушунилади. $[a;\ b]$ да ётган ихтиёрий c нуқта илдизнинг тақрибий қиймати сифатида олиниши мумкин: $x^*\approx c\pm\ \varepsilon$. $P(x)$ кўпҳад графиги абсциссалар ўқини x^* нуқтада кесиб ўтиши туфайли унда $P(x^*)=0$, нуқтанинг икки томонида эса кўпҳад қарама-қарши ишорага эга бўлади. Бунга қараганда агар $P(x)$ кўпҳад $[a;\ b]$ оралиқнинг чекка нуқталарида ҳар хил ишорага эга бўлса, яъни $P(a)P(b)<0$ (2) тенгсизлиги бажарилса, шу оралиқда (1) тенглама илдизга эга.

Демак, ҳисоблашларнинг 1-қадамида (2) шартдан фойдаланиб, илдиз ётган $[a;b]$ оралиқ топилади. Кейинги қадамларда бирор усул қўлланилиб, бу оралиқ кетма-кет кичрайтирилади. Агар бирор k -қадамда $\varepsilon_k=|b_k-a_k|\leq\varepsilon$ аниқликка эришилган бўлса, $[a_k;b_k]$ оралиғидаги ихтиёрий c_k сон, масалан, $c_k=(b_k+a_k)/2$ ўрта қиймат илдиз учун қабул қилинади ва ҳисоблашлар тўхтатилади. Тенгламаларни тақрибий ечишнинг иккита усули билан танишамиз.



23-расм.

1) *Кесмани тенг иккига бўлиш (дихотомия) усули* қўлланилганда $[a;b]$ оралиқ c_1 нуқта билан $[a;c_1]$, $[c_1;b]$ тенг оралиқларга ажратилади (23-расм). Улардан (2) шарт бажариладигани, демак, илдиз мавжуд бўлгани олинади. Уни $[a_1; b_1]$ орқали белгилаймиз. Унинг узунлиги $\varepsilon_1=|b_1-a_1|=\frac{|b-a|}{2}$. Агар $\varepsilon_1\leq\varepsilon$ бўлса, масала ҳал, акс ҳолда $[a_1;b_1]$ оралиқ иккига бўлинади ва ҳоказо.

Энди *Жамшид ибн Маъсуд ибн Маҳмуд Ғиёсуддин ал-Коший (кўпинча Ғиёсуддин ал-Коший номи билан машҳур)* (Мирзо Улуғбек илмий мактаби намоёндаларидан бири, Улуғбекнинг устози, Самарқандда яшаб ижод этган, 1430 йилда вафот этган) нинг тақрибий қийматларни илдизга *кетма-кет яқинлаштиришлар (итерация) усули*ни келтирамиз. Ал-Коший $x^3-kx+m=0, k\neq0$, кўринишдаги тенгламани ечиш учун уни тенг кучли

$$x=\frac{m+x^3}{k} \tag{3}$$

кўринишга келтиради. $\frac{m}{k}=q_1$ (қолдиқда r_1), яъни $m=kq_1+r_1$ бўлганидан, (3) тенглик

$$x=\frac{kq_1+r_1+x^3}{k}, \text{ ёки } x=q_1+\frac{r_1+x^3}{k} \tag{4}$$

кўринишга келади. 1-яқинлашиш учун $x_1=q_1$ қабул қилинади. (4) тенгликнинг ўнг қисмига $x=x_1$ қўйилади, $\frac{r_1+x_1^3}{k}=q_2$ (қолдиқда r_2) бўйича $r_1=kq_2+r_2-x_1^3$ топилади. Натижада:

$$x=q_1+q_2+\frac{r_2+(x^3-x_1^3)}{k}. \qquad (5)$$

Иккинчи яқинлашиш: $x_2=q_1+q_2$ ва ҳоказо. Амалда биз r қолдиқларни ҳисоблаб ўтирмай, Ал-Коший усулининг ушбу нисбатан содда модификациясидан (кўриниши ўзгартирилган рекуррент формуладан) фойдаланамиз:

$$q_n=(x^3_{n-1}-x^3_{n-2})/k,\ x_{n+1}=x_n+q_n. \qquad (6)$$

Бу формулалар бўйича топилган ҳар қайси x_n яқинлашиш хатоси (яъни унинг изланаётган илдиздан фарқи) $\varepsilon_n < x_n-x_{n-1}=q_n$ бўлади ва $q_1>q_2>...>q_n>...$ бўлганидан хато қиймати кейинги қадамларда камайиб боради. Ҳисоблашларда МК ёки ЭҲМ дан фойдаланиш маъқул.

Ал-Коший (модификацияланган) усули билан $x^3-kx+m=0$ тенгламани ечиш программасидан фрагмент (парча):

```
10 X0=0: I=1                 70 IF ABS(Q)<=E THEN
                                GOTO 120
20 K= (киритилсин)           80 1=I+1
30 M= (киритилсин)           90 X2=X1+Q
40 E= (аниқлик)              100 X0=X1: X1=X2
50 X1=M/K                    110 PRINT I,X1: GOTO 60
60 Q=(X1^3-X0^3)/K           120 PRINT I, X1
```

Программаланадиган МК-56 микрокалькулятор кодида:

x_0 ни $Rg0$ a, m ни Rga га, k ни Rgb га, ÷ бўлинмани $Rg1$ га жойлаштирамиз. Ҳисоблашлар ушбу программа бўйича бажарилади:

```
П→x1 В↑ В↑ × × П→x0 В↑ В↑ × × - П→ xb ÷
x →Пс П→1 + x→П2 С/П П→x1 - x→П3 Fx<0 27
П→x2 С/П Cx П→x1 x→П0 П→x2 x→П1 БП 00
```

1 - мисол. $P(x)=x^3-6,2x-5,712=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $P(-1,5)>0$, $P(1,5)<0$, яъни (-1,5; 1,5) интервалга нисбатан (2) шарт бажарилмоқда, унда илдиз мавжуд. (6) формулалардан фойдаланайлик.

n	x_n
2	-1,047414
3	-1,106628
4	-1,139872
...	....
18	-1,199673

Жавоб: $x\approx -1,2$.

$f(x)=0$ тенгламани бирор ε аниқликда ечиш учун оддий итерация усули қўлланилганда: а) $f(x)=0$ тенглама унга тенг кучли бўлган $x=\varphi(x)$ кўринишга келтирилади; b) x нинг изланаётган қийматига x_0 бошланғич қиймат (яқинлашиш) танланади. Бу қиймат шундай $[a;b]$ оралиқдан олиниши маъқулки, унинг чекка нуқталарида $f(x)$ функция қарама-қарши ишорали бўлсин, яъни $f(a)f(b)<0$ шарт бажарилсин. Қолган ҳисоблашлар $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ рекуррент формула бўйича кетма-кет такрорланади.

1-қадам: $x_1=\varphi(x_0)$ биринчи яқинлашиш топилади ва $\varepsilon_1=|x_1-x_0|$ фарқ ҳисобланади. Агар $\varepsilon_1<\varepsilon$ бўлса, масала ҳал, ҳисоблашлар тўхтатилади ва x_1 сон илдизнинг тақрибий қиймати сифатида қабул қилинади. $\varepsilon_1>\varepsilon$ бўлса, ҳисоблашлар давом эттирилади;

2-қадам: $x_2=\varphi(x_1)$, $\varepsilon_2=|x_2-x_1|$ ва ҳоказо. Қолган ҳисоблашлар ҳам шу тариқа

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ \varepsilon_{n+1}=|x_{n+1}-x_n|,\ n=0,1,2,... \qquad (1)$$

формулалар бўйича бажарилади. Бирор k-қадамда $\varepsilon_k\leq\varepsilon$ рўй берса, ҳисоблашлар тўхтатилади ва x_k сон x нинг ε гача аниқликдаги тақрибий қиймати сифатида қабул қилинади.

Итерация усули ҳар вақт ҳам сонларнинг илдизга яқинлашувчи кетма-кетлигини беравермайди. Бу масала билан кейинроқ функция ҳосиласини ўрганиш жараёнида алоҳида шуғулланамиз.

1 - мисол. $x^4-5x^2+8x-8=0$ тенгламанинг илдизларини $\varepsilon=0,001$ аниқликда топинг.

Ечиш. ЭҲМ $f(1,5)\cdot f(1,8)<0$ ни кўрсатади. Тенгламанинг илдизларидан бири (1,5 ; 1,8) ораликда ётиши аниқланди. Тенгламани $x=\varphi(x)$, бунда $\varphi(x)= =(-x^4+5x^2+8)/8$, рекуррент муносабат кўринишида ёзамиз. Бошланғич яқинлашиш сифатида илдиз ётган ораликдан ихтиёрий бир сонни, масалан, 1,7 ни оламиз, $x_0=1,7$. Оралиқ ҳисоблаш натижалари жадвалга ёзиб борилиши керак.

1 - қадам. $x_1=\varphi(1,7)=1,762238$, $\varepsilon_1=0,06... > \varepsilon$.
2 - қадам. $x_2=\varphi(x_1)=1,73424$, $\varepsilon_2=2,68\cdot10^{-2} > \varepsilon$.
. . . .
7 - қадам. $x_7=\varphi(x_6)=1,74430$, $\varepsilon_7=6,51\cdot10^{-4} < \varepsilon$.

Жавоб: $x=1,7443 \pm 6,51\cdot10^{-4}$.

Машқлар

6.176. Тенгламаларни ораликни тенг иккига бўлиш усулидан фойдаланиб ечинг:

а) $x-\frac{1}{(x+1)^2}=0$, $\varepsilon \leq 1\cdot10^{-6}$;

б) $x-(x+1)^3=0$, $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$;
г) $x^3-1,5x^2+0,58x-0,057=0$, $\varepsilon \leq \cdot1\cdot 10^{-4}$;
д) $x^3+9x^2+11x-21=0$.

6.177. Ал-Коший усулидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни ечинг:
а) $x^3-3x+1,888=0$, $\varepsilon=1\cdot10^{-5}$;
б) $x^3-3x+0,1046719131717587=0$

(Салоҳиддин Мусо ибн Муҳаммад Қозизода Румий тенгламаси);
Қозизода Румий — Мирзо Улуғбекнинг устозларидан, Самарқандда яшаб ижод этган, 1436 йилда вафот этган);
в) $x^3+5x+1{,}9170038=0$, $\varepsilon \leq 0{,}000001$.

6.178. $f(x)=0$ тенгламанинг илдизлари оралиқни тенг иккига бўлиш, оддий итерация ва ал-Коший усуллари қўлланилиб, $\varepsilon=1\cdot10^{-4}$ аниқликда топилсин (ҳисоблашларда ЭҲМ дан фойдаланинг):

а) $x=\frac{x^3-5}{7}$;

б) $x=x^3-1$;

в) $x=\sqrt[3]{x^2}-3$;

г) $x=\frac{x^3-4}{9}$;

д) $x-(x+1)^3$;

е) $x=4+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$:

ж) $x^3-0{,}4x+0{,}08=0$;

з) $x^4+7{,}18x^3+8{,}2445=0$.

6.179. Абу Райҳон Беруний (973—1048) бирлик айланага ички чизилган мунтазам тўққиз бурчак томонининг x узунлиги $x^3=1+3x$ тенгламанинг илдизи бўлишини аниқлаган. x ни топинг.

3-§. Тенгсизликлар

1. Бир ўзгарувчили тенгсизликлар. $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geq B(x)$, $A(x)\leq B(x)$ муносабатларга *x ўзгарувчили тенгсизликлар* дейилади. x нинг тенгсизликни чин сонли тенгсизликка айлантирувчи ҳар қандай қиймати тенгсизликнинг *ечими* дейилади.

1-мисол. 1) $4x-8\leq 0$ тенгсизлик $x\leq 2$ қийматларда бажарилади. Демак, тенгсизликнинг ечими: $(-\infty;2]$;

2) $x^{2\alpha} \geq 0$ ($\alpha \in Z$) тенгсизлик x нинг ҳар қандай қийматида бажарилади. Ечим бутун сон ўқидан иборат;

3) $x^{2\alpha} < 0$ ($\alpha \in Z$) тенгсизлиги x нинг ҳеч бир қийматида бажарилмайди: $X = \varnothing$.

$A(x) < B(x)$ тенгсизликдаги $A(x)$ ва $B(x)$ ифодалар биргаликда аниқланган x қийматларининг X тўплами, яъни шу ифодалар мавжудлик соҳаларининг X кесишмаси x ўзгарувчининг $A(x) < B(x)$ тенгсизлик учун *жоиз қийматлари соҳаси* деб аталади. Бунга қараганда тенгсизликнинг T ечими X нинг қисм-тўпламидан иборат: $T \subset X$.

Энди тенгсизликларни ечиш жараёнида бажариладиган айний алмаштиришлар масаласига ўтамиз.

1-теорема. ***Агар $C(x)$ ифода барча $x \in X$ ларда аниқланган бўлса,*** $A(x) < B(x)$ ***ва*** $A(x) + C(x) < B(x) + C(x)$ ***тенгсизликлар тенг кучлидир.***

2-теорема. ***Агар барча $x \in X$ ларда $C(x) > 0$ бўлса, $A(x) < B(x)$ ва $A(x)C(x) < B(x)C(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлади.***

Теореманинг исботи $C(\alpha) > 0$ дан $A(\alpha)C(\alpha) < B(\alpha)C(\alpha)$ нинг келиб чиқишига асосланади.

Агар X тўпламда $C(x)$ манфий бўлса, $A(x) < B(x)$ ва $A(x)C(x) > B(x)C(x)$ тенгсизликлар тенг кучли бўлади. Шунга кўра, тенгсизликнинг иккала қисми X да мусбат бўлган ифодага кўпайтирилса, тенгсизликнинг ишораси ўзгармайди, X да манфий бўлган ифодага кўпайтирилса, тенгсизлик ишораси қарама-қаршисига ўзгаради. Тенгсизликнинг иккала қисмига x нинг айрим қийматларида сонли қийматга эга бўлмайдиган ифода қўшилса ёки иккала қисм шундай ифодага кўпайтирилса, ечим йўқолиши мумкин.

2. Чизиқли тенгсизликлар ва квадрат тенгсизликлар. $ax > b$ ($ax \geq b$) ёки $ax < b$ ($ax \leq b$) кўринишдаги ёки шу кўринишга келтирилиши мумкин бўлган тенгсизлик бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизлик дейилади (бунда x — ўзгарувчи, $a \neq 0$ ва b — ўзгармас ҳақиқий сонлар).

$ax>b$ тенгсизликнинг ҳар икки қисми $a\neq0$ га бўлинса, $a>0$ бўлганда $x>\frac{b}{a}$, $a<0$ бўлганда эса $x<\frac{b}{a}$ бўлади. $ax>b$ тенгсизликнинг ечими $a>0$ бўлганда $(\frac{b}{a};+\infty)$ оралиқдан, $a<0$ бўлганда эса $(-\infty;\frac{b}{a})$ оралиқдан иборат бўлади.

1-мисол. $5x+0,7>3x-15,3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Айний алмаштиришлар тенгсизликни $2x>-16$ кўринишга келтиради. Тенгсизликнинг ҳар икки томонини 2 га бўламиз: $x>-8$.

Жавоб: $(-8;+\infty)$.

2-мисол. $3(x-2)>x+2(x-8)$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Айний алмаштиришлар тенгсизликни $0\cdot x>-10$ кўринишга келтиради. Бу тенгсизлик барча $x\in R$ ларда ўринли.

$ax\geq b$, $ax<b$, $ax\leq b$ кўринишдаги тенгсизликлар ҳам юқоридаги мулоҳазаларга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида ечилади.

3-мисол. $2(x+4)<6x-4(x-1)$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Айний алмаштиришлардан сўнг, $0\cdot x<-4$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизлик ечимга эга эмас.

$ax^2+bx+c>0$ $(ax^2+bx+c\geq0)$ ёки $ax^2+bx+c<0$ $(ax^2+bx+c\leq0)$ кўринишдаги тенгсизлик квадрат тенгсизлик дейилади (бунда x — ўзгарувчи, $a\neq0$, b, c — ўзгармас сонлар).

Квадрат тенгсизликларни ечишнинг асосида қуйидаги теорема ётади:

Теорема. ***ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг дискриминанти $D=b^2-4ac>0$ бўлиб, x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ лар квадрат учҳаднинг илдизлари бўлса, ax^2+bx+c квадрат учҳад қийматининг ишораси $x\in(x_1,x_2)$ бўлганда a нинг ишорасига қарама-қарши, $x\notin[x_1,x_2]$ бўлганда эса a нинг ишораси билан бир хил бўлади. ax^2+bx+c квадрат уч-***

ҳаднинг дискриминанти $D<0$ бўлса, $\forall x\in R$ учун квадрат учҳад қийматларининг ишораси a нинг ишораси билан бир хил бўлади.

Исбот. $D>0$ бўлсин. Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратамиз: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Агар $x>x_2$ ёки $x<x_1$ бўлса, $x-x_1$ ва $x-x_2$ иккиҳадлар бир хил ишорали бўлиб, уларнинг кўпайтмаси мусбат сон бўлади. Шу сабабли, $a(x-x_1)(x-x_2)$ кўпайтманинг ва демак, ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг ҳам, ишораси a нинг ишораси билан бир хил бўлади.

Агар $x\in(x_1,x_2)$ бўлса, $x-x_1>0$, $x-x_2<0$ бўлгани учун уларнинг кўпайтмаси манфий бўлади. Шу сабабли, $a(x-x_1)(x-x_2)$ кўпайтманинг ва демак, ax^2+bx+c нинг ишораси a нинг ишорасига қарама-қарши бўлади.

ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг дискриминанти $D<0$ бўлсин. У ҳолда $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2}\right)$ тенгликдан ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг ишораси барча $x\in R$ лар учун a нинг ишораси билан бир хил бўлишлиги келиб чиқади.

4 – мисол. $x^2-5x+6>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6>0$, $a=1>0$, $x_1=2$ ва $x_2=3$ ларга эгамиз. x^2-5x+6 квадрат учҳад мусбат қийматлар қабул қиладиган барча $x\in R$ лар қидирилмоқда Исботланган теоремага кўра, $x\notin[2;3]$ бўлиши керак.

Жавоб. $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

5 – мисол. $x^2-4x+5>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$ бўлгани учун, исботланган теоремага кура, барча $x\in R$ ларда x^2-4x+5 квадрат учҳад қийматининг ишораси a нинг ишораси билан бир хил бўлади. $a=1>0$ эканидан кўринадики, барча $x\in \mathrm{R}$ лар учун $x^2-4x+5>0$ бўлади.

Демак, берилган тенгсизлик барча $x\in R$ лар учун ўринли.

Жавоб. $(-\infty;+\infty)$.

6 - мисол. $-x^2+4x-5>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $D=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-4<0$ бўлгани учун барча $x\in R$ ларда $-x^2+4x-5>0$ нинг ишораси $a=-1$ нинг ишораси билан бир хил, яъни барча $x\in R$ лар учун $-x^2+4x-5<0$ бўлади. Демак, берилган тенгсизлик x нинг ҳеч бир қийматида бажарилмайди.

Жавоб. $\varnothing$.

Машқлар

Тенгсизликларни ечинг:

6.180. $7x-3(2x+3)>2(x-4)$.

6.181. $\frac{x+1}{4}<2\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{3}$.

6.182. $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x$.

6.183. $\frac{7x}{4}<0,3(x+7)+2\frac{1}{5}$.

6.184. $-x(x-1)-6>5x-x^2$

6.185. $7x-6<x+12$.

6.186. $1-2x\geq 4-5x$.

6.187. $1-x\geq 2x+3$.

6.188. $\frac{2}{3-x}<0$.

6.189. $\frac{4}{2+x}\leq 0$.

6.190. $\frac{x^2}{3x+5}<0$.

6.191. $3(x-2)+x<4x+1$.

6.192. $5(x+1)\geq 2(x-1)+3x+3$.

6.193. $\frac{5x+3}{2}-1\geq 3x-\frac{x-7}{2}$.

6.194. $2-\frac{x-4}{3}\leq 2x-\frac{7x-4}{3}$.

6.195. $(x-1)^2+7>(x+4)^2$

6.196. $(x+1)^2+3x^2<(2x-1)^2+7$.

6.197. $(x+3)(x-2)\geq(x+2)(x-3)$.

6.198. $(x+1)(x-4)+4\geq(x+2)(x-3)-x$.

6.199. $\frac{2}{3x+6}<0.$

6.200. $\frac{3}{2x-4}>0.$ **6.201.** $\frac{-1,7}{0,5x-2}>0.$

Параметр қатнашган чизиқли тенгсизликларни ечинг:

6.202. $(a^2+1)y > 3.$ **6.203.** $-(b^2+2)z < 0.$
6.204. $ax > -3.$ **6.205.** $ax < b.$
6.206. $(a-5)x > 2.$ **6.207.** $ax > b.$
6.208. $(2m+1)x > 2n-7.$ **6.209.** $a(x-1) > x-2.$
6.210. $(a-1)x < 5a+1.$ **6.211.** $ax > a(a-1).$
6.212. $(2b-1)y < 4.$ **6.213.** $(2a+1)x < 3a-2.$

6.214. y нинг қандай қийматларида:

а) $\frac{7-2y}{6}$ касрнинг қиймати $\frac{3y-7}{12}$ касрнинг мос қийматларидан катта бўлади?

в) $\frac{4.5-2y}{5}$ касрнинг қиймати $\frac{2-3y}{10}$ касрнинг мос қийматларидан кичик бўлади?

г) $5y-1$ иккиҳаднинг қиймати $\frac{3y-1}{4}$ касрнинг мос қийматидан катта бўлади?

д) $\frac{5-2y}{12}$ касрнинг қиймати $1-6y$ иккиҳаднинг мос қийматидан кичик бўлади?

6.215. a нинг қандай қийматларида $(a-1)x^2-(a+1)x+(a+1)>0$ тенгсизлик x нинг барча ҳақиқий қийматлари учун бажарилади?

6.216. a нинг қандай қийматларида $(2-a)x^2+2(3-2a)x-5a+6 \leq 0$ тенгсизлик x нинг ҳеч бир қийматида бажарилмайди?

6.217. a нинг $(a-3)x^2-2(3a-4)\cdot x+7a-6=0$ тенглама ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг.

Параметрли тенгсизликларни ечинг:

6.218. $kx^2-x-1 > 0$. **6.219.** $kx^2+12x-5 < 0$.

6.220. $x^2+kx+3 < 0$. **6.221.** $x^2-2x+k > 0$.

6.222. $kx^2+kx-5 < 0$. **6.223.** $x^2 > a$.

6.224. $x^2+(2k+3)x+k^2+4k+3 < 0$.

6.225. $kx^2+(2k+1)x+k+2 > 0$.

6.226. $(k+2)x^2+2(k+1)x+k-1 > 0$.

6.227. $\frac{x^2+x-6}{2k+1} > x+6(2k-1)$.

Қуйидаги тенгсизликларни график усулда ечинг:

6.228. $x^2-4x+45 > 0$. **6.229.** $x^2+2x > 6x-15$.

6.230. $x^2-11x+30 > 0$. **6.231.** $3x^2-4x+3 > 0$.

6.232. $3x^2-5x-2 > 0$. **6.233.** $5x^2-7x+2 < 0$.

6.234. $3x^2-7x-6 < 0$. **6.235.** $3x^2-2x+5 > 0$.

3. Рационал тенгсизликларни оралиқлар усули ёрдамида ечиш. $a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n$ сонлар ҳақиқий сонлар ва $a_1<a_2<a_3<...<a_{n-1}<a_n$ бўлсин. Қуйидаги тенгсизликни қараймиз:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ ...\ (x-a_{n-1})(x-a_n)>0 \qquad (1)$$

$a_1,a_2,a_3,...,a_n$ сонлари сон тўғри чизиғини $(-\infty;a_1)$, $(a_1;a_2)$, $(a_2;a_3)$, ... , (a_{n-1},a_n), $(a_n;+\infty)$ оралиқларга ажратади.

Шу оралиқлардан, *ихтиёрий* иккита *қўшни* оралиқни, масалан $(a_k; a_{k+1})$ ва $(a_{k+1};a_{k+2})$ оралиқни, ажратиб олайлик.

(1) тенгсизликнинг чап томонидаги кўпайтма бу оралиқларнинг биридан иккинчисига ўтганда ўз ишорасини ўзгартиради.

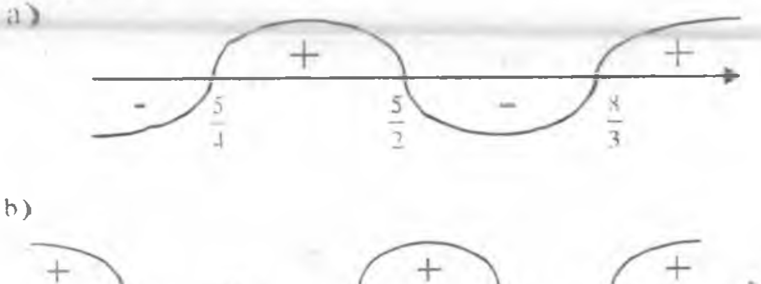
Ҳақиқатан ҳам, агар $x\in(a_k;a_{k+1})$ бўлса, $x-a_{k+1}<0$ ва агар $x\in(a_{k+1};a_{k+2})$ бўлса, $x-a_{k+1}>0$ бўлади, яъни $x-a_{k+1}$ иккиҳад $(a_k;a_{k+1})$ ва $(a_{k+1};a_{k+2})$ оралиқларда ҳар хил ишорали бўлади. (1) тенгсизликнинг чап томонидаги қолган кўпайтувчилар кўпайтмаси бу оралиқларда бир хил ишорага эга.

Шу сабабли, (1) нинг чап томонидаги кўпайтманинг ишораси бу оралиқларда ҳар хил бўлади. Бу эса (1) тенгсизликни ечишнинг қуйидаги усулини беради.

(1) тенгсизлик $(a_n;+\infty)$ оралиқда ўринли бўлгани учун $(a_{n-1};a_n)$ оралиқда ўринли эмас; $(a_{n-1};a_n)$ оралиқда ўринли бўлмагани учун $(a_{n-2};a_{n-1})$ оралиқда ўринли ва ҳоказо.

1 - мисол. $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликни $2\cdot 2\cdot 3\cdot(-4)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)<0$ ёки $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)>0$ кўринишга келтирамиз. $a_1=\frac{5}{4}$, $a_2=\frac{5}{2}$ ва $a_3=\frac{8}{3}$ нуқталар сон ўқини $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2};\frac{8}{3}\right)$ ва $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ оралиқларга ажратади (24 a–расм). Охирги тенгсизлик $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$, $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)$ оралиқларда ўринли.



24 - расм.

Жавоб: $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$.

2-мисол. $\frac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. $x=2$, $x=4$ сонлари тенгсизликнинг ечими эмас. $x\neq2$, $x\neq4$ бўлганда $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ бўлади. Шу сабабли, тенгсизликнинг ҳар икки томонини $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ га кўпайтириш натижасида берилган тенгсизликка тенг кучли қуйидаги тенгсизлик ҳосил бўлади:

$$(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0.$$

Охирги тенгсизликнинг чап томонидаги ифода $(4;+\infty)$ оралиқда мусбат, $(3;4)$ оралиқда манфий, $(2;3)$ оралиқда мусбат, $(0;-2)$ оралиқда манфий қийматлар қабул қилади.

$(x-0)^2$ кўпайтувчи жуфт даража билан қатнашмоқда. Шунинг учун охирги тенгсизликнинг чап томонидаги кўпайтма $(-1;0)$ ва $(0;2)$ оралиқларнинг биридан иккинчисига ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмайди (24 *b*-расм), яъни бу оралиқларнинг иккаласида ҳам манфий қийматлар қабул қилади. Охирги тенгсизликнинг чап томонидаги ифода $(-\infty;-1)$ оралиқда мусбат қийматлар қабул қилади.

Берилган тенгсизликнинг барча ечимлари тўпламини аниқлаймиз.

Жавоб: $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.

Машқлар

Рационал тенгсизликларни ечинг:

6.236. $(x-2)(x-5)(x-12) > 0$.

6.237. $(x+7)(x+1)(x-4) < 0$.

6.238. $x(x+1)(x+5)(x-8) > 0$.

6.239. $(x+48)(x-37)(x-42) > 0$.

6.240. $(x+0,7)(x-2,8)(x-2,9) < 0$.

6.241. $(x^2-16)(x+17) > 0$.

6.242. $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x^2-121\right) < 0$. **6.243.** $x^3-25x < 0$.

6.244. $x^3-0,01 > 0$. **6.245.** $(x^2-9)(x^2-1) > 0$.

6.246. $(x^2-1,5x)(x^2-36) < 0$.

6.247. $(x^2+17)(x-6)(x+2) < 0$.

6.248. $x(2x^2+1)(x-4) > 0$. **6.249.** $(x-1)^2(x-24) < 0$.

6.250. $(x+7)(x-4)^2(x-21) > 0$. **6.251.** $\frac{x-8}{x+4}>0$.

6.252. $\frac{x+16}{x-11}<0$. **6.253.** $\frac{x+1}{3-x}\geq 0$.

6.254. $\frac{6-x}{x-4}\leq 0$.

6.255. $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5 > 0$.

6.256. $(x-1)^2(x+1)^3(x-2)^4(x-4)^5 \geq 0$.

6.257. $(x+2)^2(x-1)^3(x-2)^7 \leq 0$.

6.258. $x^3(x+1)^2(x-4)^3 \geq 0$.

6.259. $(x-1)^4(x+1)^2 < 0$.

6.260. $(x-0,5)(x+0,5)^2(x-2) > 0$.

6.261. $x^2(x^2-1)(x+1) < 0$

6.262. $\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^2}{(x-4)^3}>0$.

6.263. $\frac{(x-1)^4(x-2)^3(x+5)}{(x-7)^2}\geq 0$.

6.264. $\frac{(x-2)^4(x+2)^3(x-1)}{(x-3)^2}\leq 0$.

6.265. $\frac{(x-2)(x-3)^4(x-4)}{x+2}< 0$.

6.266. $\frac{(1-x)(x-2)}{12-3x} > 0.$

6.267. $(11-x)^3(x-1{,}5) \geq 0.$

6.268. $(2-3x)(4x+5) \leq 0.$

6.269. $(2-3x)(4x+5)(3-4x) \geq 0.$

6.270. $(3-4x)(5-6x)(x-7) \leq 0.$

6.271. $(3-4x)^2(4-7x)^3(x+5) > 0.$

6.272. $(13-9x)^3(11-8x)^4(5-x) \leq 0.$

6.273. $\frac{(3x-5)(7-4x)^3}{4x+7} > 0.$

6.274. $\frac{(4x-7)(3-5x)^2}{(7x-4)^3} < 0.$

6.275. $\frac{(4{,}5x-9)^2}{7x-21} < 0.$

6.276. $\frac{0{,}5}{x-x^2-1} < 0.$

6.277. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1} < 0.$

6.278. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0.$

6.279. $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1} > 0.$

6.280. $x^4-5x^2+4 < 0.$

6.281. $x^4-2x^2-63 \leq 0.$

6.282. $\frac{3}{x-2} < 1.$

6.283. $\frac{1}{x-1} \leq 2.$

6.284. $\frac{4x+3}{2x-5} < 6.$

6.285. $\frac{5x-6}{x+6} < 1.$

6.286. $\frac{5x-1}{x^2+3} < 1.$

6.287. $\frac{x-2}{x^2+1} < -\frac{1}{2}.$

6.288. $\frac{x+1}{(x-1)^2} < 1.$

6.289. $\frac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5} > 0.$

6.290. $\frac{x^2+6x-7}{x^2+1} \leq 2.$

6.291. $\frac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0.$

6.292. $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0.$

6.293. $2x^2 + \frac{1}{x} > 0.$

6.294 $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x} \geq 0.$

6.295. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0.$ **6.296.** $\frac{x-1}{x+1}<0.$

6.297. $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}.$ **6.298.** $\frac{14x}{x+1}-\frac{9x-30}{x-4}<0.$

6.299. $\frac{15-4x}{x^2-x-12}<4.$ **6.300.** $\frac{1}{x^2-5x+6}\geq\frac{1}{2}.$

6.301. $\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geq 0.$ **6.302.** $\frac{4}{1+x}+\frac{2}{1-x}<1.$

6.303. $2+\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x}.$ **6.304.** $\frac{2(x-3)}{x(x-6)}\leq\frac{1}{x-1}.$

6.305. $\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x+3}+1<0.$

6.306. $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geq 5.$

6.307. $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5.$

4. Модул белгиси қатнашган тенгсизликларни ечиш

1 - мисол. $|x-2|<1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

1-*усул*. Тенгсизликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз: $(x-2)^2<1$ ёки $x^2-4x+3<0$. Ҳосил бўлган квадрат тенгсизликнинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб, оралиқлар усулини татбиқ этсак, берилган тенгсизликнинг барча ечимлари тўплами (1;3) оралиқдан иборат эканлигини кўрамиз.

2-*усул*. Тенгсизликнинг чап томонидаги модул белгиси остида қатнашган $x-2$ иккиҳад $x=2$ да нолга айланади. $x=2$ нуқта сон тўғри чизиғини $(-\infty;2)$ ва $(2;+\infty)$ оралиқларга ажратади. Бу оралиқларнинг ҳар бирида $x-2$ иккиҳад ўз ишорасини сақлайди. Берилган тенгсизликни шу оралиқларнинг ҳар бирида алоҳида-алоҳида ечамиз: $\begin{cases} x\geq 2, \\ x-2<1; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ -(x-2)<1. \end{cases}$

Биринчи системадан $2 \leq x < 3$, иккинчи системадан $1 < x < 2$. Бу иккала ечимларни бирлаштирсак: $(1;2)\cup[2;3)=(1;3)$.

2 - мисол. $|2x-1| \leq |3x+1|$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг иккала томонини квадратга кўтарсак: $(2x-1)^2 \leq (3x+1)^2$ ёки $x(x+2) \geq 0$. Бундан $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

3 - мисол. $|x|+1 \leq 2|x-1|+3x$ тенгсизлигини ечинг.

Ечиш. Модул ишораси остида турган ифодалар $x=0$ ва $x=1$ да нолга айланади. Бу нуқталар сон ўқини $(-\infty;0],[0;1],[1;+\infty)$ оралиқларга ажратади. Ифодаларнинг бу интервалллардаги ишоралари жадвалини тузамиз:

Ифодалар	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
x	-	+	+
x-1	-	-	+

Берилган тенгсизлик биринчи $(-\infty;0]$ оралиқда $-x+1 \leq -2(x-1)+3x$ кўринишга келади. Ихчамлаштиришлардан сўнг, $-2x\leq 1$ тенгсизлик ҳосил бўлади, бундан $-0,5\leq x\leq 0$ ни топамиз. Иккинчи интервалда берилган тенгсизлик $x+1\leq-2(x-1)+3x$ га ёки айний алмаштиришлардан сўнг $0\leq x\leq 1$ кўринишга келади. Бу оралиқда ҳам тенгсизлик бажарилади. Учинчи интервалда тенгсизлик $x+1\leq 2(x-1)+3x$ ёки $x\geq 0,75$ кўринишга келади. Лекин учинчи интервал $(1;+\infty)$ эди. $[0,75;+\infty)\cap[1;+\infty)=[1;+\infty)$. Топилган учта натижани умумлаштириб, берилган тенгсизликнинг ечимини ёзамиз: $0,5 \leq x \leq +\infty$.

Машқлар

Модул қатнашган тенгсизликларни ечинг:

6.308. $|a|<1.$

6.309. $|a|\le 1.$

6.310. $|a|>1.$

6.311. $|a|\ge 1.$

6.312. $|a|<0.$

6.313. $|a|\le 0.$

6.314. $|a|<-3.$

6.315. $|a|>-1.$

6.316. $|a|\ge -1.$

6.317. $|a|\le -3.$

6.318. $|x-1|\le 0.$

6.319. $|2x-3|\le 0.$

6.320. $-3|x-4|<0.$

6.321. $3|x-4|\le 0.$

6.322. $3|x-4|\ge 0.$

6.323. $13|x-4|>0.$

6.324. $|x^2-1|\le 0.$

6.325. $|x^2-1|>0.$

6.326. $|x^3-8|>0.$

6.327. $\sqrt{x^2}\le 1.$

6.328. $2|x+10|>x+4.$

6.329. $3|x-1|\le x+3.$

6.330. $x^2-7x+12<|x-4|.$

6.331. $x^2-5x+9>|x-6|.$

6.332. $|x^2+3x|\ge 2-x^2.$

6.333. $|x^2-6x+8|<5x-x^2.$

6.334. $|x-2|<2x-10.$

6.335. $|x^2-x-3|<9.$

6.336. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3.$

6.337. $\left|\frac{x^2-1}{x}+12\right|<3x-1.$

6.338. $|2x-7|\le 5.$

6.339. $|2x-1|\le|x-1.$

6.340. $\left|\frac{x+4}{x+2}\right|\le 1.$

6.341. $|13-2x|\ge|4x-9|.$

6.342. $|x+1|+4\ge 2|x|.$

6.343. $|2x+3|>|x|-4x-1.$

6.344. $|x-2|+|3-x|>2+x.$

6.345. $|x-1|>|x+2|-3.$

6.346. $|5-x|<|x-2|+|7-2x|.$

6.347. $|x-6|\le|x^2-5x+9|.$

6.348. $|x^3-1|>1-x.$

6.349. $\frac{2x-5}{|x-3|}>-1.$

6.350. $\frac{|4-x|}{x+6}<3.$

6.351. $\frac{|x-2|}{x^2-5x+6}\ge 3.$

6.352. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1.$

6.353. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\ge 1.$

6.354. $\frac{x^2-|x|-6}{x-2}\ge 2x.$

6.355. $\frac{4x-1}{|x-1|}\ge|x+1|.$

6.356. $\frac{2x}{|x-3|} \le |x|$. **6.357.** $x^2 \le \left|1-\frac{2}{x^2}\right|$.

6.358. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \ge 1$. **6.359.** $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \ge 1$.

6.360. $|x-1|-|x-2|+|x+1|>|x+2|+|x|-3$.

6.361. $|x-1|-|x-2|+|x-3| \le 3+|x-4|-|x-5|$.

6.362. $|x+2|-|x+1|+|x| \ge \frac{5}{2}+|x-1|-|x-2|$.

5. Айниятлар ва тенгсизликларни исботлаш. Айният ва тенгсизликларни исботлашнинг умумий усули мавжуд эмас. Айният ва тенгсизликларни исботлашда қўлланиладиган энг самарали усуллардан бири математик индукция методидир.

$A(n)=B(n)$ айниятни математик индукция методи ёрдамида исботлаш учун, дастлаб $A(1)=B(1)$ эканига ишонч ҳосил қилиш ва $A(n+1)$-$A(n)=B(n+1)$-$B(n)$ ёки $\frac{\mathrm{A}(n+1)}{\mathrm{A}(n)}=\frac{\mathrm{B}(n+1)}{\mathrm{B}(n)}$ айниятни исбот қилиш етарли.

1 - мисол. Барча $n \in N$ ларда қуйидаги айниятнинг ўринли бўлишини исбот қилинг:

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Исбот: $A(n)=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $B(n)=\frac{n}{3n+1}$ белгилашларни киритиб, математик индукция методини қўллаймиз:

а) $n=1$ да $A(1)=\frac{1}{4}$, $B(1)=\frac{1}{3\cdot1+1}=\frac{1}{4}$, яъни $A(1)=B(1)$ тенглик тўғри;

б) $n=k$ учун, $A(k)=B(k)$ тенглик тўғри деб фараз қиламиз, бунда $A(k)=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$, $B(k)=\frac{k}{3k+1}$;

в) $n=k+1$ бўлсин. У ҳолда, $A(k+1)=A(k)+$ $+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=A(k)+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ ва $B(k+1)=$ $=B(k)+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ муносабатлар ўринли бўлади.

Бундан, $A(k+1)-A(k)=\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=B(k+1)=B(k)$ эканини кўрамиз. Юқоридаги фаразимизга кўра, $A(k)=B(k)$. Шундай қилиб, $A(k+1)=B(k+1)$. Демак, айният барча $n\in N$ ларда тўғри.

2-мисол. $\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$ айниятни исботланг.

Исбот. Тенгликнинг чап қисмини $A(n)$, ўнг қисмини $B(n)$ орқали белгилайлик. а) $A(1)=B(1)=$ [illegible];

б) тенглик $n=k$ учун тўғри, дейлик. У ҳолда $n=k+1$ учун $\frac{A(k+1)}{A(k)}=\frac{B(k+1)}{B(k)}=\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$. Айният исботланди.

3-мисол. Барча $x>-1$ ва $n\in N$ сонлар учун $(1+x)^n\geq 1+nx$. (1) *Бернулли тенгсизлигини* исбот қилинг.

Исбот. а) $n=1$ да $1+x\geq 1+x$, яъни (1) тенгсизлик ўринли;

б) тенгсизлик $n=k$ учун тўғри деб фараз қилайлик: $(1+x)^k\geq 1+kx$.

в) (1) тенгсизлик $n=k+1$ учун ҳам тўғри эканлигини исботлаймиз: $x+1>0$ ва $(1+x)^k\geq 1+kx$ тенг сизликларга асосан, $(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\ge(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\ge 1+(k+1)\cdot x$ тенгсизликка эга бўламиз. Демак, (1) тенгсизлик $n=k+1$ учун ҳам тўғри.

Математик индукция аксиомасига кўра, (1) тенгсизлик n нинг барча натурал қийматларида тўғри.

$P(x)\le Q(x)$ тенгсизликни исботлашнинг яна бир усули, тўғрилиги олдиндан маълум бўлган $P_1(x)\le Q_1(x)$ тенгсизликда айний шакл алмаштиришлар бажариб, исботланиши керак бўлган $P(x)\le Q(x)$ тенгсизликни ҳосил қилишдан иборат.

4 - м и с о л. $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ бўлишини исбот қилинг, бунда $x\neq 0$.

И с б о т. $x^2+\frac{1}{x^2}-2=x^2+\frac{1}{x^2}-2x\cdot\frac{1}{x}=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2$ тенгликка эгамиз. Бу тенгликнинг ўнг томони барча $x\neq 0$ ларда номанфийдир: $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2\ge 0$.

Охирги тенгсизликда айний алмаштиришлар (чап томонидаги қавсларни очиш, ўхшаш қўшилувчиларни ихчамлаш ва ҳоказо) бажариб, $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шу билан тенгсизлик исботланди.

5 - м и с о л. Ихтиёрий $x\ge 0$, $y\ge 0$ сонларининг ўрта арифметик қиймати уларнинг ўрта геометрик қийматидан кичик эмаслигини, яъни $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилинг.

И с б о т. Ихтиёрий $x\ge 0$, $y\ge 0$ сонлари учун $(x-y)^2\ge 0$ тенгсизлик бажарилиши равшан. Бу тенгсизликда шакл алмаштиришлар бажарамиз: $(x-y)^2\ge 0\Rightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Rightarrow x^2+2xy+y^2-4xy\ge 0\Rightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow\frac{(x+y)^2}{4}\ge xy.$

Охирги тенгсизликнинг икки томони ҳам номанфий бўлганлиги учун тенгсизликни ҳар икки томонидан квадрат илдиз чиқариш мумкин. Илдиз чиқариш натижасида исботланиши керак бўлган $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

Исбот қилинган бу тенгсизлик *Коши тенгсизлиги* (Огюстен Луи Коши, 1789—1857 француз математиги) деб аталувчи қуйидаги тенгсизликнинг хусусий ҳолидан иборат:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ . \qquad (2)$$

Бу тенгсизлик ҳар қандай $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, ... , $a_n \geq 0$ сонлари учун ўринли ва ундаги тенглик ишораси $a_1=a_2=\ldots=a_n$ бўлганда ўринли бўлади.

Бу тенгсизликдан қуйидаги иккита муҳим натижа келиб чиқади:

1) йиғиндиси ўзгармас бўлган мусбат қўшилувчиларнинг кўпайтмаси, бу сонлар ўзаро тенг бўлганда энг катта бўлади;

2) кўпайтмаси ўзгармас бўлган мусбат кўпайтувчиларнинг йиғиндиси, бу кўпайтувчилар ўзаро тенг бўлганда энг кичик бўлади.

6 - мисол. $y=\frac{x^5+8}{x}$ функциянинг (0; +∞) интервалдаги энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Функцияни $y= x^4 +\frac{2}{x}+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}$ элементар қўшилувчилар йиғиндиси кўринишида ёзайлик. Бу қўшилувчиларнинг кўпайтмаси доимий: $x^4\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x}=16$. Шу сабабли, $x^4=\frac{2}{x}$ ёки $x=\sqrt[5]{2}$ бўлганда уларнинг йиғиндиси энг кичик бўлади. Демак, $x=\sqrt[5]{2}$ бўлганда, берилган функция ўзининг $(0;+\infty)$ оралиқдаги энг кичик қиймати $y=(\sqrt[5]{2})=\frac{(\sqrt[5]{2})^5+8}{\sqrt[5]{2}}=\frac{10\sqrt[5]{16}}{2}=$ $=5\sqrt[5]{16}$ га эришади.

7 - мисол. $y(x)=x^4(27-x^4)$ функциянинг энг катта қийматини топамиз.

Ечиш. Функция $x<\sqrt[4]{27}$, $x\neq0$ бўлганда мусбат қийматлар қабул қилади. Шу сабабли, функция ўзининг энг катта қийматига x нинг $x<\sqrt[4]{27}$, $x\neq0$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи бирор қийматида эришиши мумкин. x нинг $x<\sqrt[4]{27}$, $x\neq0$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида функция ифодасидаги кўпайтувчиларнинг ҳар бири мусбат бўлади. Бу кўпайтувчиларнинг йиғиндиси доимий: $x^4+(27-x^4)=27$. Шу сабабли, уларнинг кўпайтмаси $x^4=27-x^4$ ёки $x=\sqrt[4]{\frac{27}{2}}$ бўлганда энг катта бўлади. Демак, $x=\sqrt[4]{\frac{27}{2}}$ бўлганда берилган функция ўзининг энг катта қиймати $y=\left(\sqrt[4]{\frac{27}{2}}\right)=\left(\frac{27}{2}\right)^2$ ни қабул қилади. Изланаётган энг катта қиймат $\left(\frac{27}{2}\right)^2$.

8 - мисол. Тенг периметрли учбурчаклар ичида тенг томонли учбурчак энг катта юзага эга бўлишини исбот қилинг.

Исбот. Периметри $2p$ ($p=const$) бўлган барча учбурчакларни қараймиз. Бу учбурчакларнинг юзаси-ни Герон формуласи S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ орқали ифодалаймиз, бу ерда a, b, c лар учбурчакнинг томонлари.

Илдиз остидаги кўпайтувчилар мусбат ва уларнинг йиғиндиси $(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=p=const$ бўлгани учун, $p(p-a)(p-b)(p-c)$ кўпайтма $p-a=p-b=p-c$ бўлганда энг катта бўлади. Бу ердан $a=b=c$ бўлганда юза энг катта бўлиши келиб чиқади. Исбот бўлди.

Машқлар

6.363. Айниятларни исбот қилинг:

а) $$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1};$$

б) $$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)};$$

в) $$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)};$$

г) $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, бунда $x\neq 1$.

6.364. Агар $a > b > 0$ бўлса, $a^n > b^n$ бўлишини исбот қилинг.

6.365. Ҳар қандай $n\in N$ да: 1) $2^n > n$; 2) $2^n > 2n+1$ бўлиши исбот қилинсин.

а) $$s=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3.4\ldots n}<2{,}75,$$

$n\in\mathbb{N}$;

б) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3, n\in \mathrm{N};$

в) $(m+1)^{m}<\ m^{m+1},\ \ m\geq 3, m\in N;$

г) $99^{66}<66^{99};$

д) $x^4+x^2+1\ \geq \frac{1}{3}(x^2\ +x+1)^2, x\in R;$

е) $a^n+\ \ b^n\geq \frac{(a+b)^n}{2^{n-1}}, a>0, b>0, n\in N.$

6.366. Тенгсизликларни исботланг:

а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>1;$

б) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<3,\ \ n\in N;$

в) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n};$

г) $1+\frac{1}{1\,1}+\frac{1}{21}+\ldots+\frac{1}{n1}<\ \ 3\sqrt{n};$

д) $\frac{a^6+b^6}{2}\geq a^3b^3;$

е) агар $1+x>0$, $n\in N$ бўлса, $(1+x)^n>1+nx$ бўлишини;

ж) агар $a+b+c=1$ бўлса, $a^2+b^2+c^2\geq\ \ \frac{1}{3}$, $(a,b,c\in R);$

з) $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc\ \ (a,b,c>0);$
и) $a^2+ab+b^2\ \geq 0\ (a,b\in R);$
к) $a^3+b^3\geq\ a^2b+\ \ ab^2\ (a,b\in R);$

л) $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$ ($a,b,c>0$);

м) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ($a,b,c>0$);

н) $a+b+c \geq \sqrt{ab+ac+bc}$ ($a,b,c>0$);

о) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ ($a,b,c>0$);

п) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2$ ($a,b \geq 0$).

6.367. Кўрсатилган оралиқда функциянинг энг катта қийматини топинг:

а) $y=25x^3-8x^4$, $0<x<5$;

б) $y=100x^3-3x^4$, $0<x<33\frac{1}{3}$;

в) $y=4x^3-x^4$, $0<x<4$.

6.368. Функцияларнинг энг кичик қийматларини топинг:

а) $y=\frac{x+a}{x}, a>0, \ x>0$; б) $y=x+\frac{20}{x-3}, x>3$;

в) $y=7x+\frac{100}{x-3}, x > 3$; г) $y=\frac{(x+2)(x+18)}{x}$, $x>0$.

4-§. Тенгламалар системаси

1. Тенгламалар системалари ва мажмуалари. x ва y ўзгарувчили

$$\begin{cases} f_1(x,y)=\varphi_1(x,y), \\ f_2(x,y)=\varphi_2(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

системани ечиш — бу шундай $x=a$ ва $y=b$ сонларини топишки, улар системага қўйилганда тўғри тенгликлар ҳосил бўлсин. Агар системанинг ечими $(a_1;b_1)$,$(a_2;b_2)$,... $(a_n;b_n)$ сонлар жуфтлари бўлса, жавоб $\{(a_1;b_1), \ldots,(a_n;b_n)\}$ ёки $x_1=a_1$, $y_1=b_1$; ... ; $x_n=a_n$, $y_n=b_n$ кўринишда ёзилади. Бу кўп ўзгарувчили тенгламалар системаларига ҳам тааллуқли. Одатда система тенгламалари сони ўзгарувчилар сонига тенг бўлади.

Ўзгарувчилар системани қаноатлантирувчи қийматларга эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, $\begin{cases} x+y=7, \\ 3x+3y=8 \end{cases}$ система ечимга эга эмас. Ягона ечимга эга системага *аниқ система*, ечимлар сони чексиз кўп бўлса, *аниқмас система*, ечимга эга бўлмаса (яъни ечимларнинг бўш тўпламига эга бўлса), *биргаликда бўлмаган (ноўриндош) система* дейилади. Кўпинча тенгламалари сони ўзгарувчилари сонидан кўп бўлган тенгламалар ноўриндош бўлади.

1 - мисол. Икки ўзгарувчили уч тенгламадан иборат ушбу

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=1, \\ x^2+y^2=12 \end{cases}$$

системанинг ноўриндош эканини исбот қилинг.

Ечиш. Олдинги икки тенгламадан ($x=4$; $y=3$) ни топамиз. У учинчи тенгламага қўйилса, $4^2+3^2\neq12$ бўлади, яъни учинчи тенглама қаноатланмайди. Геометрик маъноси: $x^2+y^2=12$ айлана $x+y=7$ ва x-$y=1$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $A(4;3)$ дан ўтмайди.

Тенгламалари сони ўзгарувчилари сонидан кам бўлган системалар кўп ҳолларда ноўриндош ёки аниқмас бўлади. Масалан, $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ 2x+2y+4z=5 \end{cases}$ система ноўриндош системадир.

2 - мисол. Ушбу системанинг аниқмас система эканлигини кўрсатинг: $\begin{cases} x^2 + 4y = 10, \\ x^2 + y - 2z = 3. \end{cases}$

Ечиш. Биринчи тенгламадан $x^2=10-4y$ ни топиб, иккинчи тенгламага қўйсак: $-3y-2z=-7$ ёки $z=-$ $-1,5y+3,5$. Ўзгарувчи y га ихтиёрий қиймат берилиб, x ва z нинг мос қийматлари топилади. Система чексиз кўп ечимга эга. $x^2=10-4y\geq 0$, демак, y нинг қийматлари $(-\infty\ ;2,5]$ оралиқдан олинади.

Тенгламалари сони ўзгарувчилари сонига тенг ёки ундан ортиқ бўлган тенгламалар системалари ҳам аниқмас система бўлиши мумкин. Масалан,

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 3x^2 - 3y^2 = 15 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 3x^2 - 3y^2 = 15, \\ 6x^2 - 6y^2 = 30 \end{cases}$ системалар чексиз кўп ечимга эгадир.

Агар тенгламалар системаси *симметрик* бўлса (ўзгарувчиларни ўрин алмаштириш, бир ёки бир неча ўзгарувчи олдида турган ишораларни алмаштиришдан система таркибидаги тенгламалар ўзгармаса), унинг *ечимлар тўплами* ҳам *симметрик* бўлади.

3 - мисол. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20 \end{cases}$ системанинг ечимларидан бири (4; 5). Ўзгарувчиларнинг симметриясига кўра (5; 4) ҳам системани қаноатлантиради. Ўзгарувчилар ишоралари алмаштирилса тенгламалар ўзгармайди. Демак, (-4;-5) ва (-5;-4) ҳам ечим.

Жавоб. {(4; 5), (5; 4), (-4;-5), (-5:-4)}.

f_1 $(x, y)=0$ ва f_2 $(x, y)=0$ тенгламалар берилган бўлсин, уларнинг камида биттасини қаноатлантирадиган барча $(x; y)$ жуфтларни топиш масаласи қўйилган бўлсин. Бундай ҳолда f_1 $(x, y)=0$ ва f_2 $(x, y)=0$ тенгламалардан тузилган тенгламалар мажмуаси берилган дейилади. *Тенгламалар мажмуаси* тенгламалар системасидан фарқли равишда $\left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right.$ ёки $f_1(x,y)= =0$, $f_2(x,y)=0$ кўринишда ёзилади. Мажмуа тенгламалардан ақалли бирини қаноатлантирувчи $(a;b)$ сонлар жуфтларини топиш талаб қилинаётганини англатади. Агар ҳар қайси тенглама бирор чизиқни берса, мажмуа шу чизиқлар бирлашмасини, уларнинг $\left\{\begin{array}{l} f_1(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0 \end{array}\right.$ системаси шу чизиқларнинг кесишмасини (умумий қисмини) беради, $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f_1(x,y)=0, \\ \varphi_1(x,y)=0, \end{array}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left\{\begin{array}{l} f_n(x,y)=0, \\ \varphi_n(x,y)=0 \end{array}\right. \end{array}\right.$ мажмуа барча $\left\{\begin{array}{l} f_k(x,y)=0, \\ \varphi_k(x,y)=0 \end{array}\right.$ $1 \leq k \leq n$, системаларни ечиш ва ечимларни бирлаштириш кераклигини англатади.

4 - мисол. $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x+y=3, \\ xy=2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=10, \\ xy=3 \end{array}\right. \end{array}\right.$ тенгламалар системалари мажмуасини ечинг.

Ечиш. Биринчи система ечими: {(2; 1),(1; 2)}, иккинчиники {(3;1), (1; 3),(-1;-3),(-3;-1)}. Жавоб. {(1;2), (2;1), (3;1), (1; 3),(-1;-3);(-3;-1)}.

Агар чизиқли тенгламалар системасида озод ҳадлардан ақалли бири нолдан фарқли бўлса, уни *бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системаси*, озод ҳадларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлса, *бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси* дейилади.

Машқлар

Тенгламалар системалари мажмуаларини ечинг:

6.369. $$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}2x-y=3,\\ xy=2,\end{cases}\\ &\begin{cases}x^2-y^2=8,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

6.370. $$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x^2=4x+5y,\\ y^2=5x+4y,\end{cases}\\ &\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ xy=2.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

6.371. $$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}2x+y-3z+2u=0,\\ 3x+3y-3z+u=0,\end{cases}\\ &\begin{cases}4x-3y+3z-u=0,\\ 5x+2y-4z+2u=0.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

6.372. $$\begin{cases}x+8y=25,\\ x-y=1,\\ x+y^2=15\end{cases}$$ системанинг ноўриндош эканини исбот қилинг.

6.373. Системалар битта ечими билан берилган. Системаларнинг симметриклигидан фойдаланиб, уларнинг қолган ечимларини топинг:

а) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{43}{12}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^3 + y^3 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

д) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 5, \\ x^5 + y^5 = 275. \end{cases} \end{array} \right.$

2. Тенгламалар системаларининг геометрик маъноси. Ҳар қандай f узлуксиз функцияга Г чизиқ — унинг графиги мос келади. Лекин, ҳар қандай чизиқ ҳам бирор функциянинг графиги бўлавермайди. Масалан, маркази координаталар бошида бўлган R радиусли айлана ҳеч бир функциянинг графиги бўла олмайди, чунки айланада айни бир x абсциссали иккита $(x, \sqrt{R^2 - x^2})$ ва $(x, -\sqrt{R^2 - x^2})$ нуқта мавжуд. Бу эса x нинг ҳар бир жоиз қийматига y нинг иккита $+\sqrt{R^2 - x^2}$, $-\sqrt{R^2 - x^2}$ қиймати тўғри келишини кўрсатади.

$y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ ва $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ функцияларнинг графиклари маркази координаталар бошида бўлган

R радиусли айланани ҳосил қилади. Бу айлананинг тенгламаси $x^2+y^2=R^2$ дан иборат.

Маркази $A(a;b)$ нуқтада бўлган R радиусли айланани қараймиз. Унинг ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасидан A марказгача бўлган масофа ҳам R га, ҳам $\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2}$ га тенг. Шунинг учун, $\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2}=R$. Бу тенгликдан, айлана тенгламаси

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

ни ҳосил қиламиз. (1) тенглама маркази $A(a;b)$ нуқтада бўлган R радиусли айлананинг *каноник* (содда) *тенгламаси* дейилади. Бу тенгламани қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$x^2+y^2-2ax-2by=C. \qquad (2)$$

Бу ерда, $C=R^2-a^2-b^2$.

1 - мисол. Маркази $M(-2;\ 3)$ ва радиуси $R=8$ бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. (1) ёки (2) формула бўйича: $(x+2)^2+(y-3)^2=64$ ёки $x^2+y^2+4x-6y+13=0$.

$(x-a)^2+(y-b)^2=0$ тенглама “ноль радиусли” айланани, яъни $A(a;b)$ нуқтани ифодалайди

Ҳар бири бирор чизиқнинг тенгламаси бўлган тенгламалар системасини ечиш, геометрик жиҳатдан, шу тенгламалар ифодалаган чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топишни англатади.

2 - мисол. $\begin{cases} \left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16} \\ y=0{,}5x+2 \end{cases}$ тенгламалар системасини қараймиз.

Биринчи тенглама маркази $\left(-\frac{7}{4};\frac{1}{2}\right)$ нуқтада бўлган $R=\sqrt{\frac{85}{16}}$ радиусли айлананинг, иккинчи тенглама эса тўғри чизиқ тенгламасидир. Бу системани ечиш, геометрик жиҳатдан, эслатилган чизиқлар кесишиш нуқталарини топиш демакдир.

Чизиқлар $A(0;2)$, $B(-4;0)$ нуқталарда кесишади. Шунинг учун, берилган система (0;2), (−4;0) ечимларга эга бўлади.

Текисликнинг координаталари $f(x;y)\cdot\varphi(x;y)=0$ тенгламани қаноатлантирувчи барча $(x;y)$ нуқталарининг геометрик ўрни текисликнинг координаталари $f(x;y)=0$ ёки $\varphi(x;y)=0$ тенгламани қаноатлантирувчи барча $(x;y)$ нуқталаридан ташкил топади.

3-мисол. Тенгламаси $(x-8)(y+9)=0$ бўлган геометрик ўринни топинг. Бунинг учун $\left[\begin{array}{l} x-8=0, \\ y+9=0 \end{array}\right.$ тенгламалар мажмуасидан фойдаланамиз. $x-8=0$ тенгламанинг ечими $x=8$ дан, $y+9=0$ нинг ечими $y=-9$ дан иборат. Геометрик жиҳатдан мажмуа $A(8;0)$ нуқтадан ўтувчи ва Оy ўққа параллел бўлган $x=8$ тўғри чизиқ ҳамда В(0;—9) нуқтадан ўтувчи ва Оx ўқига параллел бўлган $y=-9$ тўғри чизиқларга тегишли нуқталар тўпламини ифодалайди.

Машқлар

6.374. а) Шундай тенгламани тузингки, уни фақат учта А(1;1), В(-2;2), С(0;0) нуқталар қаноатлантирадиган бўлсин;

б) Айлананинг марказини ва радиусини топинг:

1) $x^2+y^2+6x-4y=3$; 2) $x^2+y^2-10x-2y+1-0$;

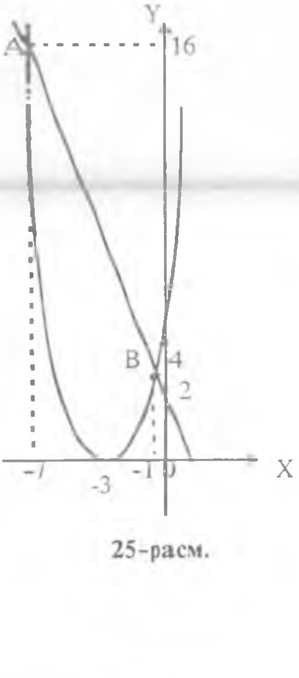
3) $x^2+y^2+12x-6y=4$; 4) $x^2+y^2+10x-6=0$.

в) Маркази $A(a;b)$ ва радиуси R булган айлананинг тенгламасини тузинг:
1) $a=2$, $b=-1$, $R=4$; 2) $a=-5$, $b=4$, $R=8$.

3. Тенгламалар системасини график усулда ечиш.

Геометрик жиҳатдан икки ўзгарувчили $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечиш $f(x,y)=0$ ва $\varphi(x,y)=0$ тенгламалар билан берилган Γ_1 ва Γ_2 чизиқларнинг кесишиш нуқталари координаталарини излашдан иборат. График усулдан ечимни тақрибий баҳолашда фойдаланилади. Чизмалар мумкин қадар аниқ чизилиши керак. Миллиметрли қоғозлардан фойдаланиш маъқул.

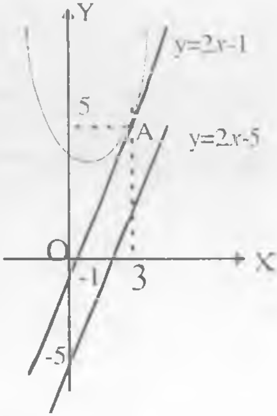
1 - мисол. $\begin{cases} x^2+6x-y=-9, \\ 2x+y=2 \end{cases}$ тенгламалар системасини график усулда ечинг.



25-расм.

Е ч и ш. Биринчи тенглама $y=x^2+6x+9$, яъни $y=(x+3)^2$ параболани (Γ_1 ни), иккинчи тенглама эса $y=-2x+2$ тўғри чизиқни (Γ_2 ни) беради (25-расм). Бу чизиқлар $A(-7;16)$ ва $B(-1;4)$ нуқталарда кесишади. Системанинг ечими: $\begin{cases} x_1=-7, \\ y_1=16 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=4. \end{cases}$

2-мисол. 26-расмда $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8, \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ тенгламалар системасини график ечиш тасвирланган. $y=2x-1$ тўғри чизиқ $A(3;5)$ нуқтада $y=x^2-4x+8=(x-2)^2+4$ параболага уринади. Демак, система ягона ечимга эга: $x=3$, $y=5$.



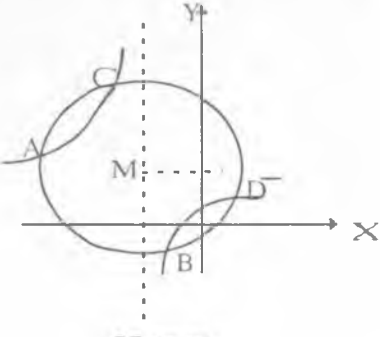
26-расм.

3-мисол. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8, \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ системани график усулда ечинг.

Ечиш. Ечим 26-расмда тасвирланган. $y=x^2-4x+8$ парабола ва $y=2x-5$ тўғри чизиқ кесишмайди. Система ечимга эга эмас

4-мисол.

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 6y = 7, \\ xy - 3x + 3y = 5 \end{cases}$ тенгламалар системасини график усулда ечинг.



27-расм.

Ечиш. Биринчи тенглама $(x+3)^2+(y-3)^2= =25$ кўринишга келади. У радиуси $R=5$ ва маркази $M(-3;3)$ нуқтада жойлашган айланани, иккинчи тенглама $y=\frac{3x+5}{x+3}$ ёки $y= =3-\frac{4}{x+3}$ гиперболани беради (27-расм). Гипербола $y=-\frac{1}{x}$ гиперболани 4 га тенг коэффициент билан Oy ўқи бўйича чўзиш, Ox ўқига нисбатан симметрия, марказни $M(-3;3)$ нуқтага ўтказадиган параллел кўчириш билан ҳосил қилинади. Айлана ва гиперболанинг кесишув нуқталари жавобни беради: $A(-7;4)$, $B(-2;-1)$ ва кесишув нуқталарининг М нуқтага нисбатан симметрик жойлашганлигига кўра, $C(-4;7)$ ва $D(1;2)$.

Машқлар

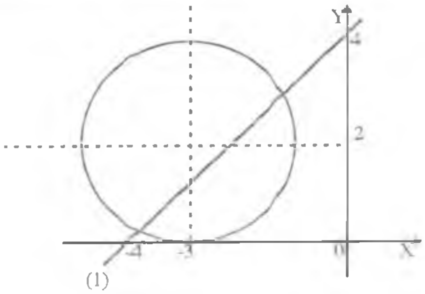
6.375. Қуйидаги тенгламалар системаларини график усулда ечинг, топилган жавобларни ўрнига қўйиш усули билан текширинг:

а) $\begin{cases} x^2 = y-4, \\ y^2 = x+10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-4x-9y=14, \\ y^2+6y-x=-10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ xy=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+6x-3y=-14, \\ x^2+4y=13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+y^2=-8, \\ x^2+(y-9)^2=125; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-(y-1)^2=-1, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

6.376. 28-расмда тасвирланган (1) тўғри чизиқ координата ўқларини x=-4 ва y=4 нуқталарда ке-



28-расм.

сади, айлана Ox ўққа x=-3 нуқтада уринади. Уларнинг тенгламаларини тузинг ва кесишиш нуқталари координаталарини топинг.

4. Тенг кучли системалар. Кўпайтувчиларга ажратиш усули. Тенгламалар системаларини ечишда уларни $\begin{cases} x=a, \\ y=b \end{cases}$ кўринишдаги энг оддий тенгламалар системасига ёки системалар мажмуасига келгунча тенг кучли системалар билан алмаштирилади. Агар икки тенгламалар системаси бир хил ечимга эга бўлса, уларга *тенг кучли системалар* дейилади. Агар уларнинг X_1 ва X_2 ечимлари ҳар хил, лекин бу ечимларнинг бирор Y тўплам билан кесишмалари бир хил бўлса, уларга *Y тўпламда тенг кучли бўлган системалар* дейилади. Ҳар қандай икки ноўриндош система ҳам ўзаро тенг кучлидир, чунки уларнинг иккаласи ҳам $\varnothing$ бўш тўпламдан иборат ечимга эга. Одатда тенг кучлиликни ~ белги орқали ёзилади.

Тенгламалар системаларини ечишда бир ўзгарувчили тенгламаларни ечишдаги каби кўпайтувчиларга ажратиш усули ҳам қўлланилади. Бу усул қуйидаги теоремага асосланади:

Теорема. ***Бирор X тўпламда аниқланган $f_1(x,y)$, . . . , $f_n(x, y)$ функциялар қатнашган***

$$\begin{cases} f_1(x,y)\cdot\ldots\cdot f_n(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

тенгламалар системаси шу тўпламда

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0; \end{cases} \ldots; \begin{cases} f_n(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \quad (2)$$

тенгламалар системалари мажмуасига тенг кучлидир.

Исбот. $(a;\, b)$ сонлар жуфти (1) системани қаноатлантирсин. У ҳолда кўпаювчилар орасида ҳеч бўлмаса биттаси нолга тенг бўлиши керак, $f_k(a,b)=0$, $1 \le k \le n$. Шунга кўра, $(a;b)$ жуфт $\begin{cases} f_k(x,y)=0, \\ \varphi\,(x,y)=0 \end{cases}$ тенгламалар системасини, демак, (2) тенгламалар системалари мажмуасини ҳам қаноатлантиради. Аксинча, агар $(a;b)$ сонлар жуфти (2) мажмуани қаноатлантирса,у ҳолда шундай k — кўпайтувчи мавжуд бўладики, унда бу сонлар жуфти $\begin{cases} f_k(x,y)=0, \\ \varphi\,(x,y)=0, \quad 1 \le k \le n \end{cases}$ системани ҳам қаноатлантиради, яъни $f_k(a,b)=0$, $j(a,b)=0$ бўлади. Барча f_k функциялар X тўпламда аниқланганлигидан, улар $M(a,\, b)$ нуқтада ҳам аниқлангандир ва шунинг учун $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ кўпайтма ҳам нолга айланади. Демак, $(a;b)$ жуфт (2) системани қаноатлантиради.

1 - мисол.

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2-13\right)\left(x+y-7\right)=0, \\ xy=6 \end{cases} \tag{3}$$

системани ечинг.

Ечиш. $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-13=0, \\ xy=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-7=0, \\ xy=6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{(2;3),(3;2),(-2;-3),(-3;-2)\}; \\ \{(1;6),(6;1)\}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\{(2;3),(3;2),(-2;-3),(-3;-2),(1;6),(6;1)\}$

ёки $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_5 = 1, \\ y_5 = 6; \end{cases}$

$\begin{cases} x_6 = 6, \\ y_6 = 1. \end{cases}$

Агар система $\begin{cases} f_1(x,y)\cdot\ldots\cdot f_n(x,y) = 0, \\ \varphi_1(x,y)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(x,y) = 0 \end{cases}$ кўринишда берилса, уни ечиш $\left[\begin{array}{l} f_k(x,y) = 0, \\ \varphi_l(x,y) = 0 \end{array}\right.$ системалар мажмуасини ечишга келади, $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$.

Ушбу $\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ системада f ва g кўпҳадлардан бири, масалан, $f(x,y)$, x ва y га нисбатан бир жинсли бўлсин ва унинг барча ҳадлари x^k га бўлинсин. У ҳолда x^k умумий кўпайтувчи қавсдан ташқарига чиқарилади, кўпҳад $f(x,y)=x^k\cdot f_1(x,y)$ кўпайтма кўринишга келади ва берилган системани ечиш масаласи $\begin{cases} x^k = 0, \\ g(x,y) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ мажмуани ечишга келади.

2 - мисол. $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Системанинг биринчи тенгламаси бир жинсли, чап қисми x га бўлинади. x ни қавсдан ташқарига чиқарамиз. Масала ушбу мажмуани ечишга келади:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 9. \end{cases}$$

Биринчи система $x=0$, $y^2=\frac{9}{2}$ системага тенг кучли, ундан $x_1=0$, $y_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ёки $x_2=0$, $y_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ни топамиз. Иккинчи система ечими: (1;2), (-1;-2).

Иккала система ечимлари мажмуаси $\left\{\left(0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right); \left(0;-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right); (1;2); (1;-2)\right\}$ берилган система ечимини беради.

Машқлар

6.377. Системалар тенг кучлими:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 4 = 1 \end{cases}$ ва

$$\begin{cases} (2x + y)(x^2 + y^2) = 7(x^2 + y^2), \\ (3x - 4)(x - y) = x - y ; \end{cases}$$

б) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 4 = 1 \end{cases}$ ва $\begin{cases} \dfrac{2x+7}{x^2+y^2} = \dfrac{7}{x^2+y^2}; \\ \dfrac{3x-4}{x-y} = \dfrac{1}{x-y}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2 = y + 2, \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x^2 = 4, \\ y = -\sqrt{x}; \end{cases}$

г) $\begin{cases}\sqrt{x} = y^2, \\ \sqrt{y} = x^2\end{cases}$ ва $\begin{cases}x^2 = y^4, \\ y^2 = x^4\ ?\end{cases}$

5. Тенгламалар системасини алгебраик қўшиш усули ёрдамида ечиш. Бу усул бизга таниш. Унинг асосида ушбу теорема ётади:

Теорема *(a;b) сонлар жуфтларида аниқланган $\psi(x,y)$, $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ функцияларнинг*

$$\begin{cases}f(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0\end{cases} \tag{1}$$

системаси

$$\begin{cases}f(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) + \psi(x,y) f(x,y) = 0\end{cases} \tag{2}$$

системага тенг кучлидир.

Исбот. Агар (a,b) сонлар жуфти (1) системани қаноатлантирса, яъни $f(a,b)=0$, $\varphi(a,b)=0$ бўлса, $\psi(a,b)\cdot f(a,b)=0$ бўлади, бундан $\varphi(a,b)+\psi(a,b)\cdot f(a,b)=0$ келиб чиқади. Демак, (a,b) жуфт (2) тенгламалар системасини қаноатлантиради. Аксинча, (a,b) сонлар жуфти (2) системани қаноатлантирса, яъни $f(a,b)=0$, $\varphi(a,b)+\psi(a,b)\cdot f(a,b)=0$ бўлса, $\varphi(a,b)=0$ тенглик ҳам тўғри бўлади. Шунга кўра (a,b) жуфт (1) системани қаноатлантиради. Теорема исбот қилинди.

Мисол.

$$\begin{cases}x^2 + 3y^2 + 2x - y = 7, \\ 2x^2 + 6y^2 - 2x + 4y = 2\end{cases} \tag{3}$$

тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. Иккинчи тенгламани —2 га бўлиб, биринчи тенгламага ҳадлаб қўшамиз ва алмаштиришларни бажарамиз:

$$(3)\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y^2+2x-y=7, \\ -x^2-3y^2+x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y^2+2x-y=7, \\ 3x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3(x-2)^2+2x-(x-2)=7, \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-11x+7=0, \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{(1;-1),\left(1\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Машқлар

6.378. Системаларни ечинг:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2+xy+2y^2=7, \\ 2x^2+2xy+y^2=2; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x^2+xy=12, \\ xy-y^2=2. \end{cases}$$

6. Номаълумларни чиқариш усули. Гаусс усули. Бу усул асосида тенгламалар системаси ёки мажмуасини айний алмаштиришлар билан ўзгарувчилар сони битта кам бўлган тенг кучли тенгламалар системаси ёки мажмуаси келтириш ҳақидаги фикр ётади:

$\begin{cases} y = f(x), \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x), \\ \varphi(x, f(x)) = 0. \end{cases}$ Масала $\varphi(x; f(x))=0$ тенгламадан x ни аниқлаш, сўнг $y=f(x)$ бўйича y ни топиш билан ҳал бўлади. $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ кўринишдаги системани ечиш учун, олдин тенгламалардан бири ўзгарувчилардан бирига нисбатан ечилади.

1-мисол. $\begin{cases} xy = 8, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламадан $y=\frac{8}{x}$ ни топиб, иккинчи тенгламага қўйсак: $x^2 + \frac{64}{x^2} = 20$ ёки соддалаштиришлардан сўнг $x^4-20x^2+64=0$ биквадрат тенглама олинади. Унинг илдизлари $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=2$, $x_4=-4$. У илдизларга $y_1=4$, $y_2=2$, $y_3=-4$, $y_4=-2$ мос келади.

2-мисол. Уч номаълумли икки тенгламадан иборат $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy - z^2 = 9 \end{cases}$ (1) системани ечинг.

Ечиш. (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ xy = 9 + z^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ xy \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x(6 - x) \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x^2 - 6x + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ (x - 3)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 6 - x, \\ (x-3)^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \{x = 3,\ y = 3,\ z = 0\}.$$

Чизиқли тенгламалар системасини ечишда, хусусан,тенгламалар сони кўп бўлган ҳолда, *Гаусснинг номаълумларни кетма-кет чиқариш усули*дан фойдаланиш маъқул (Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), буюк немис математиги). Усулнинг моҳиятини мисол ёрдамида тушунтирамиз.

3 - мисол. $\begin{cases} 2x + 7y - 4z = -13, \\ 5x + 10y - z = -7, \\ 4x - 6y + z = 12 \end{cases}$ системани Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. 1 - қадам. а) Биринчи тенгламадаги x ўзгарувчи олдидаги коэффициентни 1 га айлантирамиз. Бунинг учун шу тенгламани 2 га бўламиз. Натижада тенглама $x + \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{13}{2}$ (2) кўринишни олади.

б) Системанинг иккинчи тенгламасидан бешга кўпайтирилган (2) тенгламани, учинчи тенгламасидан эса 4 га кўпайтирилган (2) тенгламани айирилса,

ушбу система ҳосил бўлади: $\begin{cases} x + \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{13}{2}, \\ \frac{15}{2}y - 9z = -\frac{51}{2}, \\ 20y - 9z = -38. \end{cases}$ 3)

Бу системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларида x ўзгарувчи қатнашмайди.

2 - қадам. *а*) (3) система иккинчи тенгламасини 15/2 га бўлсак, бош коэффициенти 1 га айланади, сўнг

тенгламани 20 га кўпайтириб, учинчи тенгламадан айирамиз. Учинчи тенгламадан y ўзгарувчи чиқарилган бўлади ва система учбурчаксимон шаклга келади:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{13}{2}, \\ y - \frac{6}{5}z = -\frac{17}{5}, \\ -15z = -30. \end{cases} \tag{4}$$

Тескари қадам: (4) системанинг учинчи тенгламасидан z=2 топилади, бу қиймат иккинчи тенгламага қўйилиб y=−1, сўнг z=2, y=−1 лар биринчи тенгламага қўйилиб x=1 топилади. Жавоб: (1; −1; 2). Албатта, (3) системада иккинчи ва учинчи тенгламаларда z нинг бир хил коэффициентлигидан фойдаланиб, уларнинг биридан иккинчисини айириш ҳам мумкин эди.

Гаусс усули қўлланилиши жараёнида $0 \cdot x=5$ ёки ўзгарувчиларнинг изланаётган қийматлари мусбат бўлиш шарти қўйилган ҳолда $5x+4y=-1$ каби зид маъноли ифодалар ҳосил бўлса, система ноўриндош бўлади. Шунингдек, натижа трапециясимон системани ҳосил қилиш билан тугаса, система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

4 - мисол. $\begin{cases} x + y - z = 3, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x - 2y - 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3, \\ 3y + z = 7, \\ 3y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y + z, \\ z = 3 - 2y. \end{cases}$$

Ечим чексиз кўп. Масалан, y=0 бўлса, z=3, x = 6 бўлади.

Машқлар

6.379. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x+4y-z=-7, \\ 5x+10y-z=-7, \\ 4x-6y+z=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y+5z=17, \\ 2x+4y-3z=-8, \\ x-6y+8z=23; \end{cases}$

в) $\begin{cases} z+5=3x, \\ 2x+6y+4z=10, \\ 8y-5x+8=19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+y-z=-4, \\ 3x-y+z=4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+z=14, \\ x+2y+t=7, \\ y+2z+2t=30, \\ x+z+t=15; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+2y-z+2t=-7, \\ 3x-y+2z+6t=1, \\ 2x+8y-3z+5t=-23, \\ 4x+y+12z-3t=49; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2{,}8x+3{,}4y+1{,}4z=2{,}2, \\ 3{,}6x-1{,}8y+2{,}9z=1{,}8, \\ 4{,}2x+5{,}2y-1{,}7z=0{,}9; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x+3y+z-2t=-2, \\ 3x+2y-2z+3t=1, \\ 4x-2y+2z-3t=6. \end{cases}$

7. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. Тенгламаларни ечишда бу усулдан фойдаланганмиз. Усул қўлланилганда берилган системадаги айрим ифодалар янги ўзгарувчилар сифатида қабул қилинади. Натижада система нисбатан содда системага келади. Янги система ечилгач, танланган ифодаларнинг қийматлари, сўнг улар бўйича олдинги ўзгарувчиларнинг изланаётган қийматлари топилади. Хусусан, бу алмаштиришлар симметрик тенгламалар системаларига нисбатан бажарилади.

1 - мисол.

$$\text{Ушбу}\quad \begin{cases} x^3y + xy^3 = 10, \\ xy + x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \qquad (1)$$

системани ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламада xy ни қавсдан ташқарига чиқарсак, $xy(x^2+y^2)=10$ тенглама ҳосил бўлади. $xy=u$, $x^2+y^2=v$ алмаштириш киритамиз. Берилган системага нисбатан содда система ҳосил бўлади: $\begin{cases} uv = 10, \\ u + v = 7. \end{cases}$ Бу системанинг ечими: $(u=2; v=5), (u=5; v=2)$.

$$\text{(1) система} \begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} (2), \begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} (3)$$

тенгламалар системалари мажмуасига келади:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ (x+y)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = -3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -3. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \{(2;1), (-1;-2), (1;2), (-2;-1)\}$$

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=-3,\\ (x+y)^2=12\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$. Бу система ноўриндош.

2 - мисол. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=39,\\ x+xy+y=17\end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Тенгламаларнинг чап қисми x ва y га нисбатан симметрик. $u=x+y$, $v=xy$ ўзгарувчиларни киритамиз, $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v$, $x+xy+y=u+v$. Система $\begin{cases}u^2-v=39,\\ u+v=17\end{cases}$ кўринишга келади. Бу тенгламаларни қўшсак, $u^2+u-56=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Ундан $u=7$ ёки $u=-8$ топилади. Системанинг иккинчи тенгламасидан $v=10$ ёки $v=25$ олинади. Натижада берилган тенгламалар системаси икки система мажмуасига келади: $\begin{cases}x+y=7,\\ xy=10;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-8,\\ xy=25.\end{cases}$ Биринчи системани ечиб, жавобни оламиз: {(2; 5), (5; 2)}. Иккинчи система ечимга эга эмас.

Машқлар

6.380. Системани ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases}x-y=5,\\ 2x+3y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-y=1,\\ 3x+4y=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y=5,\\ 2x+2y=10;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=5,\\ x-9y=31;\end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6, \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 3\frac{9}{20}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}y = \frac{23}{168}, \\ 2x + 6y = \frac{21}{169}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0{,}3 - y = \frac{4}{7}, \\ 30x - 10y = \frac{40}{7}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 0{,}3 - 4y = \frac{1}{3}, \\ 0{,}7x - 7y = 43. \end{cases}$

6.381. Системани алгебраик қўшиш усулида ечинг.

а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ 4x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ -2x - y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ -4x - 6y = -14; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ \frac{1}{2}x + 3y = -\frac{11}{8}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x + 3y = \frac{281}{143}, \\ 3x + 4y = \frac{405}{143}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3{,}1x + \frac{1}{13}y = 1, \\ 3{,}1x + \frac{1}{11}y = 3. \end{cases}$

6.382. Системани Гаусс усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y - 2z = 7, \\ 3x + 2y + 5z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = -1, \\ 3x - 2y + 4z = 9, \\ 2x + 3y + 2z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y + z = -1, \\ 2x + 3y + 4z = 5, \\ 3x - 2y - 2z = -7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 4x + 5y - 3z = 6, \\ 2x + 3y - 2z = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -x+y+z=-3, \\ 2x+2y-3z=3, \\ 3x+4y+5z=-6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x-y+z=3, \\ 5x+2y+3z=-4, \\ 3x+4y-2z=-9. \end{cases}$

6.383. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=2, \\ x+2y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y-2x=2, \\ 5x^2-y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ 5xy+y^2=16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y=4, \\ y+xy=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2-xy=33, \\ 4x-y=17. \end{cases}$

6.384. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy+4=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=5, \\ xy=-6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y=9, \\ xy=-20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=10, \\ xy=-21. \end{cases}$

6.385. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{25}+\dfrac{y}{9}=1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+7y=56, \\ x^2+y^2-4y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+xy+y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y=-3, \\ -2y^2+xy+3y=0. \end{cases}$

6.386. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ xy = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(x+y) = 9, \\ y(x+y) = 16; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12; \end{cases}$

е) $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = 28; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy, \\ y(x+y) = 10; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 5(x+y) + 2xy == -19, \\ 15xy + 5(x+y) = -175; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 5(x+y) + 2xy = -19, \\ 3xy + x + y = -35; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x-y)y = y. \end{cases}$

6.387. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y^2 - xy + 3x^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy+3y^2-x+4y-7=0, \\ 2xy+y^2-2x-2y+1=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2xy+y^2-4x-3y+2=0, \\ xy+3y^2-2x-14y+16=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x^2+xy-2x+y-5=0, \\ 2x^2-xy-3x-y-5=0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ 2(x+y)^2-y^2=14. \end{cases}$

6.388. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} xy-x+y=1, \\ x^2y-xy^2=30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+x-y=3, \\ x^2y-xy^2=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+xy+x=10, \\ y^2+xy+y=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=37, \\ 2x^2+2xy+y^2=26. \end{cases}$

6.389. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (x^2+y^2)xy=78, \\ x^4+y^4=97; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ x-y=5. \end{cases}$

6.390. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1, \\ \dfrac{xz}{x+z}=2, \\ \dfrac{yz}{y+z}=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx, \\ x^3+y^3+z^3=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x^4+y^4+z^4=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy=2, \\ yz=3, \\ zx=6. \end{cases}$

6.391. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x - 1 = 0, \\ |y| - x - 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3u - v = 1, \\ |u - 2v| = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x - 1| + y = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3, \\ 5y + 7x = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$

8. Детерминант ҳақида тушунча. Чизиқли тенгламалар системасини детерминантлар ёрдамида ечиш. *Детерминант* — математиканинг муҳим тушунчаларидан бири, бирор қоида ёки қонуният бўйича тузилган кўпайтмаларнинг алгебраик йиғиндисидан иборат. Лотинча: determinans (determinants) — аниқловчи. Масалан, $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ чизиқли тенгламалар системасини ечиш талаб қилинсин. Биринчи тенгламани b_2 га, иккинчисини — b_1 га кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшамиз. Натижада: $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Шу каби биринчи тенгламани a_2 га, иккинчисини $-a_1$ га кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшсак: $y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Системада номаълумлар коэффициентларини уларнинг ёзилиш тартиби бўйича параллел чизиқчалар ёрдамида квадрат шаклда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ кўринишда ёзсак, детерминант ҳосил бўлади. Уни D орқали белгилайлик. a_1, a_2, b_1,

b_2 сонлари детерминант *элементлари*. Улар икки сатр ва икки устунда жойлашган. Шунга кўра детерминант *иккинчи тартибли* ($n=2$) деб аталади. Унинг қийматини топиш учун квадратнинг a_1b_2 диагоналида жойлашган элементлари кўпайтмасидан b_1a_2 диагонал элементлари кўпайтмасини айириш керак. Коэффициентлар ва озод ҳадлардан тузилган детерминантлар ҳам шу каби ҳисобланади:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2,\ D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-b_1c_2,\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-c_1a_2.$$

$D=a_1b_2-b_1a_2$ сони системанинг асосий детерминанти, $D_x=c_1b_2-b_1c_2$ ва $D_y=a_1c_2-c_1a_2$ сонлари эса системанинг ёрдамчи детерминантлари дейилади. D_x детерминант D да x коэффициентлари устунини ва D_y детерминант D да y коэффициентлари устунини озод ҳадлар устунига алмаштириш орқали ҳосил қилинади.

Агар $D=0$ бўлиб, D_x ва D_y лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, система ечимга эга бўлмайди. Агар $D=D_x=D_y=0$ бўлса, система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Агар $D\neq0$ бўлса, берилган система ягона (x,y) ечимга эга бўлади ва бу ечим қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D}. \tag{1}$$

(1) формулалар *Крамер формулалари* дейилади.

1 - мисол. $\begin{cases}-x+6y=3,\\ 2x-y=5\end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: $D=\begin{vmatrix}-1 & 6\\ 2 & -1\end{vmatrix}=(-1)(-1)-6\cdot 2=-11,$

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-3-30=-33,$$

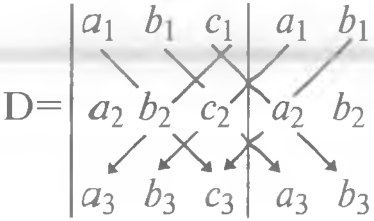
$$D_y=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-5-6=-11;$$

$$x=\frac{-33}{-11}=3,\ y=\frac{-11}{-11}=1.$$

Бу усул уч ва ундан ортиқ номаълумли системаларни ечишда ҳам қўлланилади. Масалан,

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_3z=d_2, \\ c_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

системанинг асосий детерминанти квадрат шаклида, учинчи (n=3) тартибли, яъни уч сатр ва уч устунга эга. Ҳисоблаш йўлини тушунтириш мақсадида уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:



Стрелкалар элементларни кўпайтириш тартибини кўрсатади. Бунда чап-юқоридан ўнгу пастга йўналишдаги кўпайтмалар қўшилиб, ўнг юқоридан чапу пастга йўналишдаги кўпайтмалар йиғиндисидан айрилади: $D=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3-c_1b_2a_3$. $n=2$ ҳолидагидек, D_x детерминанти D да a лар устунини, D_y детерминант b лар устунини, D_z детерминант эса c лар устунини d лар (озод ҳадлар) устуни билан алмаштиришдан ҳосил қилинади:

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_y=\begin{vmatrix} d_1 & d_1 & c_1 \\ d_2 & d_2 & c_2 \\ d_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Натижада ушбу формулалар ҳосил бўлади:

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D},\ z=\frac{D_z}{D}$$

Детерминантнинг айрим хоссалари:

1) *агар детерминантнинг устунлари сатрлари билан (ва тескарича) алмаштирилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Масалан, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot2-3\cdot1=1,\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot2-1\cdot3=1;$

2) *агар икки сатр (ёки устун) элементлари бир хил ёки ўзаро пропорционал, ёки бири иккинчисининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, бу детерминант нолга тенг бўлади.*

Масалан, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot4-2\cdot6=0;$

3) *бирор сатр (устун) элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.*

Масалан, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4(3\cdot2-5\cdot1)=4\cdot1=4;$

4) *бир сатр элементларини бирор доимий сонга кўпайтирилиб, иккинчи сатр элементларига бирма-бир қўшилса (... дан айрилса) детерминант қиймати ўзгармайди.*

Масалан, $\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4-3 & 2-5\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-5\cdot1=-14;$

5) *агар n-тартибли детерминантнинг бирор k-сатр элементлари m та қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, детерминантни m та n-тартибли детерминант йиғиндиси кўринишига келтириш мумкин, бунда k-сатр элементлари алоҳида қўшилувчилардан иборат бўлади* ($n\in\{2;\ 3\}$).

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ p_1+q_1 & p_2+q_2 & p_3+q_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ p_1 & p_2 & p_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ q_1 & q_2 & q_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Масалан,

$$\begin{vmatrix}4 & 7\\ 3 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=(2\cdot5-3\cdot4)+(2\cdot5-$$

$$-\ 3\cdot3)=-2+1=-1.$$

2-мисол. $\begin{cases}2x+7y-4z=-13,\\ 5x+10y-z=-7,\\ 4x-6y+z=12\end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш: $D=\begin{vmatrix}2 & 7 & -4\\ 5 & 10 & -1\\ 4 & -6 & 1\end{vmatrix}=$ (3-сатрни 2-сатрга қўшамиз) $\begin{vmatrix}2 & 7 & -4\\ 9 & 4 & 0\\ 4 & -6 & 1\end{vmatrix}=$ (3-сатрни 4 га кўпайтириб, 1-сатрга қўшамиз) $\begin{vmatrix}18 & -17 & 0\\ 9 & 4 & 0\\ 4 & -6 & 1\end{vmatrix}=18\cdot4\cdot1+(-17)|0|4+0\cdot9\cdot(-6)-$ $-0|4|-(-17)|9|1-18\cdot0\cdot(-6)=225,$

$$D_x=\begin{vmatrix}-13 & 7 & -4\\ -7 & 10 & -1\\ 12 & -6 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}35 & -17 & 0\\ 5 & 4 & 0\\ 12 & -6 & 1\end{vmatrix}=35\cdot4\cdot1+(-17)\cdot$$

$\cdot0\cdot12+0\cdot5\cdot(-6)-0|4|12-(-17)\cdot5\cdot1-35|0|(-6)=$ $=140+0+0-0+85-0=225.$ $x=\frac{D_x}{D}=\frac{225}{225}=1.$ Шу каби, $D_y=$ $=-225$, $D_z=450$ ва $y=-1$, $z=2$ ни аниқлаймиз.

Машқлар

6.392. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 7 & 5\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix}-5 & -7\\ 13 & -6\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -2 & 3\end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix}$.

6.393. *а* нинг қандай қийматларида детерминантнинг сатрлари пропорционал бўлади:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & 3a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & a \end{vmatrix}$?

6.394. Тенгламани ечинг:

а) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}=0$;

в) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+2 & a \end{vmatrix}=0$.

6.395. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & -a & -1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

6.396. Тенгламани ечинг:

а) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0$;

б) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x^4 & x & x \end{vmatrix}=0$.

6.397. Ҳисобланг:

а) $2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, бунда $x=3,1(73)$;

б) $2,(7)\cdot\begin{vmatrix} x & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+3,(13)$, бунда $x=2,(71)$.

6.398. Детерминантларни ҳисобланг:

$$а)\ \begin{vmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix};\ б)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix};\ в)\ \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix};$$

$$г)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix};\ д)\ \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix};\ е)\ \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix}.$$

6.399. Тенгламани ечинг:

$$а)\ 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$б)\ 2\cdot\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=16;$$

$$в)\ \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{4x-6}=-\frac{67}{4};$$

г) $$\frac{3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} - x = 1$$

6.400. Системанинг асосий детерминантини ҳисобланг:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 2x - 5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}2x - 4y = 3, \\ 3x - 5y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax - y = 1, \\ 5x + 2y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} ax - by = 1, \\ 13x - 4y = 2. \end{cases}$

6.401. Системанинг ёрдамчи детерминантларини ҳисобланг:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x - y - 7 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 1{,}7y = 2, \\ 4x - 4{,}3y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 5y = 2, \\ 4x + 3y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 6x - 7y = 0. \end{cases}$

6.402. Системани Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3y = 16, \\ x + 2y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 4x - 8y = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x - 0{,}5y = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} -x+3y=-2, \\ 2x-6y=-1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{5}{7}y=\frac{23}{168}, \\ 2x+6y=\frac{31}{165}; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x-y=1, \\ 3y-3x=-3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3x-5y=0, \\ -15x+25y=0; \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 4x-6y=1; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 7x-2y=16, \\ 3{,}5x-y=8. \end{cases}$

6.403. $\begin{cases} 3x-5y=-7, \\ 4x+7y=18 \end{cases}$ система берилган:

а) Системанинг ҳар бир тенгламаси нечта ечимга эга?

б) Система нечта ечимга эга?

6.404. Системани Крамер формулалари ёрдамида ечинг:

а) $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1-4x_2-13x_3=0, \\ -3x_1+5x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z=-4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x+3y+2z=1, \\ 3x+y+2z=2, \\ 10x+12y+8z=4. \end{cases}$

6.405. $\begin{cases} a^2x-ay=a-1, \\ bx+(3-2b)y=3+a \end{cases}$ система (1;1) дан иборат ягона ечимга эга. a ва b ларни топинг.

6.406. a ва b ларнинг қуйидаги система чексиз кўп ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг: $\begin{cases} a^2x-by=a^2-b, \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$

6.407. a нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} ax-4y=a+1, \\ 2x+(a+6)y=a+3 \end{cases}$$

система ечимга эга бўлмайди?

6.408. a нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} 2x-ay=a+2, \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$$

система чексиз кўп ечимга эга бўлади?

6.409. Системани ечинг:

а) $\begin{cases} 5x+2y+3z=-7, \\ 5x+2y+3z=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-3y=7, \\ -2x+9y=4, \\ 2x+4y=-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x+5z=6, \\ y-6z=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3y-2z=-1. \end{cases}$

6.410. a нинг $\begin{cases} 2x+2(a-1)y=a-4, \\ 2|x+1|=ay+2 \end{cases}$ система ягона ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг. Системанинг ечимини топинг.

6.411. a нинг $\begin{cases} ax+(a-1)y=2+4a, \\ 3|x|+2y=a-5 \end{cases}$ система ягона ечимга эга бўладиган барча қийматларини топинг. Системанинг ечимини топинг.

5-§. Тенгламалар тузишга доир масалалар

1-масала. Икки ишчи бирга ишлаб смена давомида 72 та детал тайёрлади. Ишлаб чиқариш унумдорлигини биринчи ишчи 15% га, иккинчи ишчи эса 25 % га оширгач, улар смена давомида биргаликда 86 та детал тайёрлай бошлашди. Меҳнат унумдорлиги ошгач, ҳар бир ишчи смена давомида нечтадан детал тайёрлаган?

Ечиш. Меҳнат унумдорлигини оширгунга қадар биринчи ишчи смена мобайнида x та детал, иккинчиси эса y та детал тайёрлаган бўлсин. У ҳолда меҳнат унумдорлиги ошгандан сўнг, биринчи ишчи $x+0,15x$ та детал, иккинчи ишчи эса $y+0,25y$ та детал тайёрлай бошлаган.

Қуйидаги системага эгамиз: $\begin{cases} x+y=72, \\ 1,15x+1,25y=86. \end{cases}$

Бундан $x=40$, $y=32$ ларни топамиз. Меҳнат унумдорлиги ошгач биринчи ишчи смена мобайнида $1,15x=1,15\cdot40=46$ та, иккинчи ишчи эса $1,25y=$ $=1,25\cdot32=40$ та детал тайёрлаган.

Жавоб. 46 та ва 40 та.

2-масала. Икки соннинг йиғиндиси 60 га, нисбати эса 4 га тенг. Шу сонларни топинг.

Ечиш. x ва y изланган сонлар бўлиб, $x>y$ бўлсин. Қуйидаги системага эгамиз:

$$\begin{cases} x+y=60, \\ x:y=4 \end{cases}$$

Бу системадан, $x=48$, $y=12$ ни топамиз.

Жавоб. 48 ва 12.

3-масала. Икки ишчининг иккинчиси биринчисидан $1\frac{1}{2}$ кун кейин ишга тушса, улар биргаликда бир ишни 7 кунда тамомлай оладилар. Агар бу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи бажарса, у ҳолда биринчи ишчи иккинчи ишчига қараганда 3 кун ортиқ ишлаши керак бўлади. Ҳар қайси ишчининг ёлғиз ўзи бу ишни неча кунда тамомлай олади?.

Ечиш. Биринчи ишчи ёлғиз ўзи ишлаб ишни x кунда, иккинчи ишчи эса ёлғиз ўзи ишлаб y кунда бажарсин. У ҳолда биринчи ишчи бир кунда ишнинг $\frac{1}{x}$ қисмини, иккинчи ишчи бир кунда ишнинг $\frac{1}{y}$ қисмини бажаради.

Биринчи ишчи $1\frac{1}{2}$ кун ишлаб, ишнинг $1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{2x}$ қисмини бажаргач, иккинчи ишчи ишлашни бошлади. Улар биргаликда 7 кун ишлаган. Шу 7 кунда ишнинг $7\cdot\frac{1}{x}+7\cdot\frac{1}{y}=\frac{7x+7y}{xy}$ қисми бажарилган. $\frac{3}{2x}+\frac{7x+7y}{xy}=1$ тенгламага эга бўламиз. Ёлғиз ўзи ишлаган биринчи ишчи иккинчисига қараганда 3 кун кўп ишлаб, ишни тамомлайди. Демак, x-3=y.

$$\begin{cases} \frac{3}{2x} + \frac{7x + 7y}{xy} = 1 \\ x - 3 = y \end{cases}$$ системани ҳосил қиламиз. Бу

системани ечсак, x=17, y=14 бўлади.

Жавоб. Биринчи ишчи 17 кунда, иккинчи ишчи 14 кунда.

4-масала. Олтин ва кумушдан ҳосил қилинган икки хил қотишмаларнинг биринчисида олтин ва кумуш 2:3 нисбатда, иккинчисида эса 3:7 нисбатда эканлиги маълум. Олтин ва кумуш 5:11 нисбатда бўладиган янги қотишма ҳосил қилиш учун кўрсатилган металларни қандай нисбатда олиш керак?

Ечиш. Биринчи қотишманинг $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ қисми олтин ва $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$ қисми кумушдан иборат. Иккинчи қотишманинг $\frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}$ қисми олтин ва $\frac{7}{3+7} = \frac{7}{10}$ қисми эса кумушдир.

Янги қотишма ҳосил қилиш учун олинган биринчи қотишманинг миқдорини x билан ва иккинчи қотишманинг миқдорини y билан белгилайлик (x ва y лар оғирликни ифодалайди).

x миқдордаги биринчи қотишмадаги олтиннинг ва кумушнинг миқдори мос равишда $\frac{2}{5}x$ ва $\frac{3}{5}x$ га тенг. y миқдордаги иккинчи қотишмадаги олтиннинг миқдори $\frac{3}{10}y$ га, кумушнинг миқдори эса, $\frac{7}{10}y$ га тенг.

Янги қотишмага $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y$ миқдорда олтин ва $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y$ миқдорда кумуш киради. Шартга кўра, $\frac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y}{\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y}=\frac{5}{11}$.

Бу тенгликдан $\frac{x}{y}$ нисбатни топамиз:

$$\frac{4x+3y}{6x+7y}=\frac{5}{11} \Rightarrow 44x+33y \Rightarrow 30x+35y \Rightarrow 14x=2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{7}.$$

Жавоб. Қотишмаларни 1:7 нисбатда олиш керак.

5 - масала. Маҳсулот дастлаб 20 % га арзонлаштирилди. Янги нарх яна 10 % камайтирилгач, ҳосил бўлган кейинги нарх яна 5% га камайтирилди. Маҳсулотнинг дастлабки нархи неча фоиз камайтирилди?

Ечиш. Маҳсулотнинг дастлабки нархи x (сўм) бўлсин. Бу нарх 20% камайтирилгач, маҳсулотнинг нархи x-0,20x=0,80x (сўм) бўлади. Бу нарх 10 % камайтирилса, 0,80x-0,10·0,80x=0,72x сўмдан иборат бўлган янги нарх пайдо бўлади. Бу нарх 5 % камайтирилса, маҳсулотнинг охирги нархи 0,72x-0,05·0,72x=0,684x сўм эканлиги келиб чиқади.

Дастлабки нарх x сўм, энг охирги нарх 0,684x сўм бўлди. Маҳсулот x-0,684x=0,316x сўмга арзонлаштирилди. 0.316x сўм x сўмнинг неча фоизини ташкил этишини топамиз.

Пропорция тузамиз: $\frac{x}{0{,}316x}=\frac{100}{p}$. Бундан, p=31,6 экани келиб чиқади.

Жавоб. 31,6 %.

6 - масала. Икки хонали номаълум сон рақамларининг йиғиндиси 12 га тенг. Шу икки хонали номаълум сонга 36 сони қўшилса, номаълум соннинг рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўладиган сон келиб чиқади. Номаълум сонни топинг.

Ечиш. Икки хонали номаълум соннинг рақамлари x, y бўлсин, яъни $\overline{xy} = 10x + y$ изланган сон бўлсин. Қуйидагиларга эгамиз:

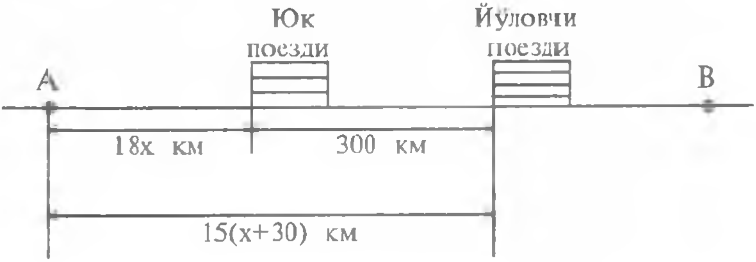
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \overline{xy} + 36 = \overline{yx} \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x + y = 12 \\ 10x + y + 36 = 10y + x \end{cases}.$$

Бу системадан x=4, y=8 экани келиб чиқади. Демак, изланган сон 48 экан.

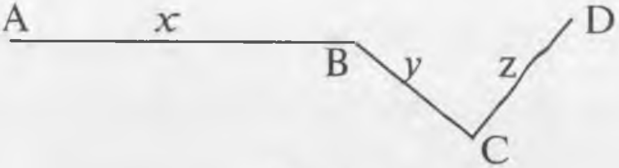
Жавоб. 48.

7 - масала. Юк поезди *А* шаҳардан *В* шаҳарга қараб жўнади. Орадан 3 соат ўтгач, *А* шаҳардан *В* шаҳарга қараб, йўловчи поезди йўлга чиқди ва орадан 15 соат ўтгач юк поездидан 300 км ўзиб кетди. Агар йўловчи поездининг тезлиги юк поездининг тезлигидан 30 км/соат ортиқ бўлса, юк поездининг тезлигини топинг (29-расм.).

Ечиш. Юк поездининг тезлиги x км/соат бўлсин. У ҳолда йўловчи поездининг тезлиги x+30 км/соат бўлади. Йўловчи поезди 15 соат юриб, 15(x+30) км



29-расм.



30-расм.

масофани босиб ўтади. Юк поезди 18 соатда $18x$ км масофани босиб ўтган.

$18x+300=15(x+30)$ тенгламага эга бўламиз. Уни ечиб, $x=50$ эканини аниқлаймиз.

Жавоб. 50 км/соат.

8 - масала. A ва D нуқталар орасидаги масофа 75 км. Велосипедчи A нуқтадан D нуқтага боришда AB масофани 20км/соат, BC масофани 10 км/соат, CD масофани 5 км/соат тезлик билан 7 соатда, қайтишда эса DC масофани 15 км/соат, CB масофани 12км/соат, BA масофани 10 км/соат тезлик билан 6 соат 15 минутда ўтган. AB, BC, CD масофаларни топинг.

Ечиш. $AB=x$, $BC=y$, $CD=z$ бўлсин.

Масала таҳлилини жадвал орқали ифодалаймиз:

1) Бориш:

	AB	BC	CD
масофа, км	x	y	z
тезлик, км/соат	20	10	5
вақт, соат	$x/20$	$y/10$	$z/5$

2) Қайтиш:

	DC	CB	BA
масофа, км	z	y	x
тезлик, км/соат	15	12	10
вақт, соат	$z/15$	$y/12$	$x/10$

Тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} x+y+z=75, \\ \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{5}=7, \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{15}=6\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=75, \\ x+2y+4z=140, \\ 6x+5y+4z=400. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $\begin{cases} x=40, \\ y=20, \\ z=15 \end{cases}$ ечимни оламиз.

Жавоб: АВ=40 км, ВС=20 км ва CD=15 км.

Машқлар

6.412. Тўғри тўртбурчакнинг баландлиги асосининг 75 % ига тенг. Агар шу тўғри тўртбурчакнинг юзи 48 $м^2$ бўлса, унинг периметрини топинг.

6.413. 15 т сабзавотни ташиш учун маълум миқдорда юк ортадиган бир неча машина сўралган эди. Гаражда тайёр турган машиналар бўлмагани учун, гараж сўралгандан битта ортиқ, лекин 0,5 т кам юк ортадиган машиналар юборди. Юборилган машиналарнинг ҳар бирига неча тоннадан сабзавот ортилган?

6.414. Жамоа хўжалиги 200 га ерга маълум муддатда чигит экиб бўлиши керак эди, аммо у ҳар куни режадагидан 5 га ортиқ экиб, ишни муддатидан 2 кун олдин тугатди. Чигит экиш неча кунда тугатилган?

6.415. Томоша залида 320 та ўрин бор эди. Ҳар бир қатордаги ўринлар сони 4 та орттирилиб, яна бир қатор қўшилгандан сўнг 420 та жой бўлди. Томоша залидаги жойлар энди неча қатор бўлди?

6.416. Кема оқимга қарши 48 км ва оқим бўйича ҳам шунча йўл босди, ҳамма йўлга 5 соат вақт сарф қилди. Дарё оқимининг тезлиги 4 км/соат бўлса, кеманинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

6.417. Икки пристань орасидаги масофа дарё йўли билан 80 км. Кема шу пристанларнинг биридан иккинчисига бориб келиш учун 8 соат 20 минут вақт сарф қилади. Дарё оқимининг тезлиги 4 км/соат бўлса, кеманинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

6.418. Қайиқ дарё оқимига қарши 22,5 км, оқим бўйича эса 28,5 км юриб, бутун йўлга 8 соат вақт сарфлади. Оқимнинг тезлиги 2,5 км/соат. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

6.419. Дарё ёқасидаги қишлоқдан сол оқизилди. Орадан 5 соат 20 минут ўтгач, ўша қишлоқдан моторли қайиқ жўнатилди. Моторли қайиқ 20 км йўл босиб, солга етиб олди. Агар моторли қайиқнинг тезлиги солнинг тезлигидан 12 км/соат ортиқ бўлса, солнинг тезлигини топинг.

6.420. Сув иккита қувурдан келганда сув ҳайдаш қозони 2 соат 55 минутда тўлади. Биринчи қувурнинг ёлғиз ўзи сув ҳайдаш қозонини иккинчисига қараганда 2 соат олдин тўлдира олади. Ҳар қайси қувурнинг ёлғиз ўзи сув ҳайдаш қозонини қанча вақтда тўлдиради?

6.421. Икки ишчи айни бир ишни биргалашиб ишласа, 12 кунда тамом қилади. Агар олдин биттаси ишлаб, ишнинг ярмини тамом қилгандан кейин унинг ўрнига иккинчиси ишласа, иш 25 кунда тамом бўлади. Шу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи ишласа, неча кунда тамом қилади?

6.422. Қувватлари ҳар хил иккита трактор 4 кун бирга ишлаб жамоа хўжалиги ерининг $\frac{2}{3}$ қисмини ҳайдади. Агар бутун ерни биринчи трактор иккинчисига қараганда 5 кун тезроқ ҳайдай олса, бутун ерни ҳар қайси трактор ёлғиз ўзи неча кунда ҳайдай олади?

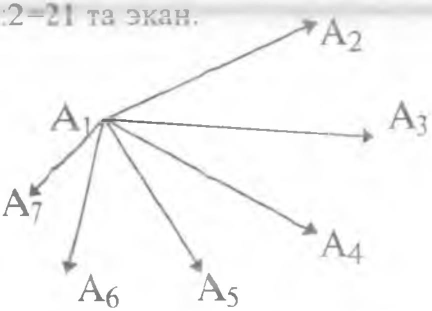
6.423. Портдаги икки кема бир вақтда, бири шимолга қараб, иккинчиси шарққа қараб жўнади. 2 соатдан кейин улар орасидаги масофа 60 км бўлди. Бу кемалардан бирининг тезлиги иккинчисиникидан 6 км/соат ортиқ. Ҳар қайси кеманинг тезлигини топинг.

6.424. Ҳар қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган 7 та нуқтадан нечта турли тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

Ечиш: 31-расмга қаранг.

Боши A_1 нуқтада бўлган 6 та векторга эгамиз. Боши қолган нуқталарда бўлган векторлар ҳам 6 тадан бўлади. Ҳаммаси бўлиб 7·6=42 та турли векторлар ҳосил бўлади. Бу векторлар 21 жуфт қарама-қарши векторлардир. Қарама-қарши векторлар жуфти битта тўғри чизиқда ётади. (Бизнинг мисолда.)

Шундай қилиб, айтилган тўғри чизиқлар 42:2=21 та экан.



31-расм.

Топшириқ. Ҳар қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган n та нуқта орқали ўтувчи турли тўғри чизиқлар сони $\frac{n(n-1)}{2}$ га тенглигини исботланг. Бу тасдиқдан фойдаланиб, [6.425-6.429.] масалаларни ечинг.

6.425. Футбол ўйини мусобақасида ҳаммаси бўлиб 55 та ўйин ўйналди. Бунда ҳар бир команда қолган командалар билан фақат бир мартадан ўйнади. Мусобақада нечта команда қатнашган?

6.426. Шахмат турнирида ҳаммаси бўлиб 231 партия шахмат ўйналди. Агар ҳар бир шахматчи қолган шахматчиларнинг ҳар бири билан фақат бир партия шахмат ўйнаган бўлса, турнирда неча киши қатнашган?

6.427. Мактаб битирувчилари бир-бирлари билан расм амаштирди. Агар 870 та расм алмаштирилган бўлса, мактабни неча ўқувчи битирган?

6.428. Қаварик кўпбурчакнинг 14 та диагонали мавжуд. Унинг томонлари нечта?

6.429. Қандай кўпбурчак диагоналларининг сони томонларининг сонидан 12 та ортиқ бўлади?

6.430. Поезд йўлда 6 минут тўхтаб қолди ва 20 км йўлда тезлигини соатига жадвалдагидан 10 км ошириб, кечикишни йўқотди. Поезд шу йўлда жадвалга мувофиқ қандай тезлик билан юриши керак эди?

6.431. A ва B станциялар орасидаги йўлнинг ўртасида поезд 10 минут тўхтаб қолди. В станцияга кечикмасдан бориш учун, ҳайдовчи поезднинг дастлабки тезлигини 6 км/соат оширди. Агар станциялар орасидаги масофа 60 км бўлса, поезднинг дастлабки тезлигини топинг.

6.432. Периметри 28 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг қўшни томонларига ясалган квадратлар юзларининг йиғиндиси 116 см^2 га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

6.433. Юзи 120 см^2, диагонали эса 17 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

6.434. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 41 см, юзи 180 см^2. Катетларини топинг.

6.435. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 48 см, юзи 96 см^2. Учбурчакнинг томонларини топинг.

6.436. Икки мусбат соннинг ўрта арифметиги 20, ўрта геометриги эса 12. Шу сонларни топинг.

6.437. Икки шаҳар орасидаги масофа 480 км; шу масофани йўловчи поезди юк поездига қараганда 4 соат тез босади. Агар йўловчи поездининг тезлиги 8 км/соат оширилса, юк поездининг тезлиги эса 2км/соат оширилса, пассажир поезди шу масофани юк поездига қараганда 5 соат тез ўтади. Ҳар қайси поезднинг тезлигини топинг.

6.438. Ораларидаги масофа 180 км бўлган *A* ва *B* шаҳарлардан икки поезд бир вақтда бир-бирига қараб йўлга чиқди. Улар учрашгандан кейин *A* шаҳардан чиққан поезд *B* шаҳарга 2 соатда етиб боради, иккинчиси эса *A* шаҳарга 4,5 соатда етиб боради. Поездлар тезлигини топинг.

6.439. Велосипедчилар пойгаси учун 6 км узунликдаги масофа белгиланди. Акмал Шавкатдан ўтиб кетиб, маррага 2 минут олдин келди. Агар Акмал тезлигини 0,1 км/минут камайтириб, Шавкат тезлигини 0,1 км/минут га оширса, унда Акмал маррага Шавкатдан 2 минут олдин етиб келарди. Акмал ва Шавкатларнинг тезлигини топинг.

6.440. Икки экскаватор бирга ишлаб, бирор ҳажмдаги ер ишларини 3 соату 45 минутда бажаради. Бир экскаватор алоҳида ишлаб, бу ҳажмдаги ишни иккинчисига қараганда 4 соат тезроқ бажаради. Шундай ҳажмдаги ер ишларини бажариш учун ҳар бир экскаваторга алоҳида қанча вақт керак бўлади?

6.441. Бир комбайнчи майдондаги буғдой ҳосилини иккинчи комбайнчидан 24 соат тезроқ ўриб олиши мумкин. Иккала комбайнчи биргаликда ишлаганда эса ҳосилни 35 соатда йиғиб олишади. Ҳар бир комбайнчи алоҳида ишлаб, ҳосилни ўриб олиши учун қанча вақт керак бўлади?

6.442. Иккита мусбат соннинг йиғиндиси уларнинг айирмасидан 5 марта катта. Агар шу сонлар квадратлари айирмаси 180 га тенг бўлса, бу сонларни топинг.

6-§. Тенгсизликлар системаси

1. Бир ўзгарувчили рационал тенгсизликлар системаси ва мажмуаси. Бир ўзгарувчили бир нечта тенгсизликнинг барчасини бир пайтда қаноатлантирадиган ечимларини топиш масаласи *тенгсизликлар системаси* тузиш масаласига келади. Масалан, $\begin{cases}5x+2>3x-1,\\3x+1>7x-4.\end{cases}$ Бу тенгсизликлар системасини ечиш учун ҳар қайси тенгсизликни алоҳида ечиб, сўнгра яна системага бирлаштирсак $\begin{cases}x>-\frac{3}{2},\\x<\frac{5}{4}\end{cases}$ ни оламиз. Бу тенгсизликнинг ечимини топиш учун ечимлар тўпламининг умумий қисмини оламиз. Яъни тенгсизликлар системасининг ечими $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)\cap\left(-\frac{3}{2};\infty\right)=\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right)$ дан иборат. Биз бир ўзгарувчили бир нечта *тенгсизлик-*

лар мажмуаси берилган тенгсизликлардан камида биттасини қаноатлантирадиган ечимлар тўплами эканлигини биламиз. Мажмуа квадрат қавс «$\left[\vphantom{\frac{a}{b}}\right.$ » билан белгиланади. Юқоридаги мисолни мажмуа сифатида қарасак $\left[\begin{array}{l}5x+2>3x-1,\\ 3x+1>7x-4.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x>-\frac{3}{2},\\ x<\frac{5}{4}\end{array}\right.$ ни оламиз. Бу мажмуанинг ечимини топиш учун $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\infty\right)$ ечимлар тўпламини бирлаштириш зарур бўлади, яъни: $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\infty\right)=(-\infty;\infty)$.

Машқлар

6.443. Тенгсизликлар системасини ечинг.

а) $\left\{\begin{array}{l}(2x+3)(2x+1)(x-1)<0,\\ (x+5)(x+1)(1-2x)(x-3)>0;\end{array}\right.$

б) $\left\{\begin{array}{l}x^2+12x+35)(2x+1)(3-x)\geq 0,\\ (x^2-2x-8)(2x-1)\geq 0;\end{array}\right.$

в) $\left\{\begin{array}{l}\frac{x+3}{3-x}<2,\\ x^3<16x,\\ 4\geq x^2;\end{array}\right.$ г) $\left\{\begin{array}{l}\frac{(x+2)(x^3-3x+8)}{x^2-9}\leq 0,\\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geq 0.\end{array}\right.$

2. Икки ўзгарувчили тенгсизликлар. Ҳар қандай $y=f(x)$ тўғри чизиқ унда ётган нуқталарнинг тўпламини — шу чизиқни, $y>f(x)$ тенгсизлик координата текислигининг чизиқдан юқорида жойлашган, $y<f(x)$ тенгсизлик эса чизиқдан пастда жойлашган қисмини ифодалайди. Агар бу қисмларга чизиқнинг ўзи ҳам қўшилса, уни $y\leq f(x)$ ёки $y\geq f(x)$ тенгсизликлар ифодалайдиган бўлади. Аксинча, $f(x)\leq a$ ёки $f(x)\geq a$ тенгсизликнинг ечимини текисликнинг уларга мос қисмлари соҳалар беради. Шу каби $f(x)<g(x)$ тенгсизлигининг ечимини текисликнинг $f(x)$ чизиқдан юқори ва $g(x)$ чизиқдан пастда ётган қисмлари кесишмаси беради:

$$\begin{cases} y \geq f(x), \\ y \leq g(x). \end{cases}$$

Кўпинча системани

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases} \tag{1}$$

ёки

$$\begin{cases} c \leq y \leq d, \\ f(y) \leq x \leq g(y) \end{cases} \tag{2}$$

кўринишда ёзиш қулай.

1 - мисол. $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq x+2 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан берилган соҳани (1) кўринишга келтирамиз.

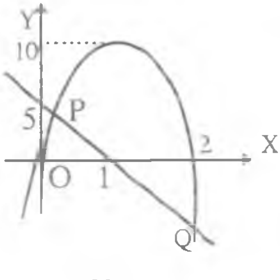
Ечиш. Олдин $y=x+2$ тўғри чизиқ ва $y=x^2$ параболанинг кесишиш нуқталарини топамиз. Бунинг учун $\begin{cases} y=x+2, \\ y=x^2 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз. Унинг ечими (-1;1),(2;4). Изланаётган соҳани (1) система кўринишида ёзамиз: $\begin{cases} -1\le x\le 2, \\ x^2\le y\le x+2. \end{cases}$

2 - мисол. Радиуси $R=4$, маркази $A(-1;\ 2)$ нуқта бўлган айлана ички қисмини (1) тенгсизликлар системаси кўринишида ифодаланг.

Ечиш. Айлана тенгламаси: $(x+1)^2+(y-2)^2=16$. Бундан пастки ва юқори ярим айланаларнинг тенгламаларини топамиз:

$y=2-\sqrt{16-(x+1)^2}$, $y=2+\sqrt{16-(x+1)^2}$. Аргумент $a=-1-4=-5$ дан $b=-1+4=3$ гача ўзгаради. Изланаётган система: $\begin{cases} -5\le x\le 3, \\ 2-\sqrt{16-(x+1)^2}\le y\le 2+\sqrt{16+(x+1)^2} \end{cases}$ дан иборат.

3 - мисол. 32-расмда тасвирланган парабола ва тўғри чизиқнинг кесишувидан ҳосил бўладиган ёпиқ шаклни ифодаловчи тенгламалар системасини тузамиз.



32-расм.

Ечиш. Парабола (0;0), (2;0), (1;10) нуқталар устидан ўтади. Унинг $y=Ax^2+Bx-C$ тенгламасини тузиш учун A, B, C параметрларни топамиз. Бунинг учун уч номаълумли уч тенглама системасини тузамиз ва ундан A, B, C ларни аниқлаймиз.

(0; 0) нуқта бўйича: $0=A\cdot 0^2+B\cdot 0+C$, бундан $C=0$,

(2; 0) нуқта бўйича: $0=A\cdot 2^2+B\cdot 2+C$, бундан $2A+B=0$,

(1; 10) нуқта бўйича: $10=A\cdot 1^2+B\ 1+C$, бундан $A+B=10$.

Кейинги икки тенгламалар системасидан $A=-10$, $B=20$ аниқланади.

Параболанинг тенгламаси: $y=-10x^2+20x$. Тўғри чизиқ (0;5),(1;0) нуқталардан ўтади.Тенгламаси: $y=-4x+5$. Кесишувдан ҳосил бўлувчи ёпиқ шакл параболадан пастда, тўғри чизиқдан юқорида жойлашган.

Шунга кўра $\begin{cases} y\geq -4x+5, \\ y\leq -10x^2+20x. \end{cases}$

Машқлар

6.444. Тенгсизликлар системалари билан берилган соҳаларни чизинг:

а) $\begin{cases} -5\leq x\leq 2, \\ x^2-9\leq y\leq 1-2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -1\leq y\leq 3, \\ y-1\leq x\leq 8-y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2\leq x\leq 2, \\ x^2-2\leq y\leq x+6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3\leq x\leq 4, \\ 0\leq y\leq \sqrt{16-x^2}. \end{cases}$

6.445. Тенгсизликлар билан ифодаланг:

а) учлари $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;1)$ нуқталар бўлган тўртбурчакни;

б) учлари $A(1;3)$, $B(2;6)$, $C(10;6)$ нуқталар бўлган учбурчакни;

в) маркази $M(1;1)$ да ва ёйининг учлари $A(\sqrt{5};2)$ ва $B(-\sqrt{5};20)$ нуқталарда бўлган AOB доиравий секторни;

г) AOB парабола ёйи ва $A(-1;\ 8)$ ва $B(1:\ 8)$ нуқталарни туташтирувчи ватар билан чегараланган AOB парабола сегментини, бунда $O(0;0)$.

6.446. D соҳа тенгсизлик билан ёки тенгсизликлар системаси билан берилган. Уни (1) кўринишдаги тенгсизликлар системаси билан беринг:

а) $x \geq 0$, $y \leq 0$, x-4 $\geq y$, яъни $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ x-4 \geq y; \end{cases}$

б) $4x^2+y^2 \leq a$;

в) $x^2 + y^2 \leq 4x$;

г) $y \geq 2x$, $x \geq 1$, $y \leq 4$;

д) $\begin{cases} y \leq x \leq y+6, \\ 1 \leq y \leq 3. \end{cases}$

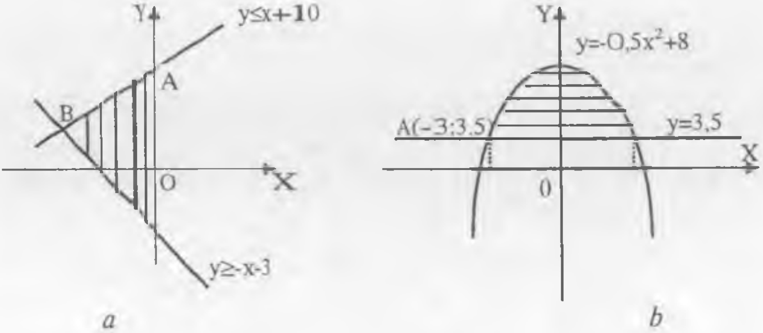
6.447. D соҳа (1) кўринишдаги тенгсизликлар системаси билан берилган. Уни (2) кўринишдаги тенгсизликлар системасига келтиринг:

а) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ 2x^2 \leq y \leq 10x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x \leq y \leq 4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{5-x^2} \leq y \leq 5-x. \end{cases}$

6.448. Тенгсизликлар системасининг ечимлар тўпламини координата текислигида тасвирланг, ҳосил қилинган шаклнинг юзини топинг:

а) $\begin{cases} y \geq |x|-4, \\ x^2+y^2 < 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy > 16, \\ x^2+y^2 \leq 16x. \end{cases}$



33-расм.

6.449. а) икки тўғри чизиқ ва О*у* ўқи; б) парабола ва тўғри чизиқ билан чегараланган шаклни тенгсизликлар билан ифодаланг (33-*a*, *b* расм):

6.450. Тенгсизликлар билан ифодаланган соҳани топинг ва координата текислигида тасвирланг:

а) $\left(x^2-2x\right)\left(x^2+y^2-15\right)\geq 0;$

б) $(x^2-y+1)(-x^2-y+3)<0.$

7-§. Иррационал тенгламалар ва тенгсизликлар

1. Иррационал тенгламалар. Агар $A(x)=B(x)$ тенгламадаги $A(x)$ ёки $B(x)$ ифодалардан ҳеч бўлмаса бири иррационал бўлса, унга *иррационал тенглама* дейилади. Уларни ечишда тенг кучли алмаштиришлардан фойдаланилади.

Теорема. ***Агар n сони мусбат ва тоқ бўлса, у ҳолда A(x)=B(x) ва A"(x)=B"(x) тенгламалар тенг кучли бўлади. Агар n сони мусбат ва жуфт бўлса, A"(x)=B"(x) тенгламанинг илдизи A(x)=B(x) ва A(x)=***

$=-B(x)$ тенгламалардан ҳеч бўлмаса бирини қаноатлантиради.

Исбот. α сони $A(x)=B(x)$ тенгламанинг илдизи, яъни $A(\alpha)=B(\alpha)$ бўлсин. У ҳолда $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$, яъни α сони $A^n(x)=B^n(x)$ тенгламанинг ҳам илдизи. Аксинча, α сони $A^n(x)=B^n(x)$ нинг илдизи, яъни $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$ бўлса, тоқ n ларда $A(\alpha)=B(\alpha)$ бўлади, яъни $A(x)=B(x)$ $\Leftrightarrow$ $A^n(x)=B^n(x)$. Жуфт n ларда $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$ тенглик $A(\alpha)=B(\alpha)$ бўлганда ёки $A(\alpha)=-B(\alpha)$ да ўринли ва шунга кўра α сони $A(x)=B(x)$ ва $A(x)=-B(x)$ тенгламалардан ҳеч бўлмаса бирининг илдизи бўлади.

Буларга қараганда $A(x)=B(x)$ иррационал тенгламанинг иккала қисми жуфт даражага кўтарилганда *чет илдизлар*, яъни $A(x)=-B(x)$ тенгламанинг илдизлари пайдо бўлиши мумкин. Жуфт даражага кўтарганда чет илдизларнинг пайдо бўлиши мавжудлик соҳасининг ўзгаришидан ҳам бўлиши мумкин. Уларни аниқлаш учун топилган илдизларни берилган тенгламага қўйиб текшириш, шунингдек, тенг кучлилик шартларига риоя қилинганлигини текшириш керак. Чунончи, $A(x)$, $B(x)$ ифодалар рационал ифода ва $\sqrt[2k]{A(x)} \geq 0$, $k \in \mathrm{N}$ бўлганда қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

1-мисол. $\sqrt{x^2+3x+1} = x-2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x^2+3x+1 = (x-2)^2, \\ x-2 \geq 0. \end{cases}$$

$x^2+3x+1=(x-2)^2$ тенглама ягона $x=3/7$ илдизга эга. Лекин у $x-2 \ge 0$ тенгсизлигини қаноатлантирмайди.Тенглама ечимга эга эмас.

2-мисол. $\sqrt{-3x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-10}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенглама ушбу системага тенг кучли:

$$-3x^2+3x-2=-2x-10,\ -2x-10 \ge 0.$$

$-3x^2+3x-2=-2x-10$ тенгламанинг илдизлари -1 ва $2\frac{2}{3}$.

Лекин бу қийматларда $-2x-10 \ge 0$ тенгсизлиги бажарилмайди. Демак, берилган тенглама илдизга эга эмас.

3-мисол. $x^2-3x-11+\sqrt{x^2-3x-9}=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y=\sqrt{x^2-3x-9}$ алмаштириш тенгламани $y^2-2+y=0$ кўринишга келтиради. Унинг илдизлари $y_1=-2$, $y_2=1$ сонлари бўлгани учун, эски ўзгарувчига қайтиш натижасида ечимга эга бўлмаган $\sqrt{x^2-3x-9}=-2$ тенғламага ҳамда $x_1=-2$ ва $x_2=5$ илдизларга эга бўлган $\sqrt{x^2-3x-9}=1$ тенгламага эга бўламиз. Демак, берилган тенглама $x_1=-2$ ва $x_2=5$ илдизларга эга.

4-мисол. $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-4x+4}=2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x^2-8x+16}=|x-4|$ ва $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ бўлгани учун берилган тенглама $|x-4|+|x-2|=2$ кўринишга келади. Модул қатнашган бу тенглама барча $x\in[2;4]$ лардагина тўғри тенгликка айланади.

Машқлар

Тенгламаларни мантиқий мулоҳазалар юритиб ечинг:

6.451. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}=-3$.

6.452. $4+\sqrt{2y-3}=1$.

6.453. $6-\sqrt{x+\sqrt{2}}=7$.

6.454. $\sqrt{10+\sqrt{x-\sqrt{3}}}=3$.

6.455. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=5$.

6.456. $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=1$.

6.457. $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=-1$.

6.458. $\sqrt{x+4}+\sqrt{-x-5}=0$.

Тенгламаларни аниқланиш соҳасини топиш билан ечинг:

6.459. $x+\sqrt{x-1}+2=\sqrt{x-1}$.

6.460. $\sqrt{-x^2+x+6}=2x-7$.

6.461. $\sqrt{-x^2-3x-2}=x-1$.

6.462. $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{5x-6-x^2}$.

6.463. $\sqrt{2x^2-7x+3}=\sqrt{5x-2-x^2}$.

6.464. $\sqrt{y-3}-6\sqrt{2-y}=8$.

6.465. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.

6.466. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

6.467. $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$.

6.468. $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0$.

Тенгламаларни $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ тенглама билан $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ системанинг тенг кучлилигидан фойдаланиб ечинг:

6.469. $\sqrt{12-x}=x.$ **6.470.** $\sqrt{7-x}=x-1.$

6.471. $x-\sqrt{x+1}=5.$ **6.472.** $21+\sqrt{2x-7}=x.$

6.473. $1-\sqrt{1+5x}=x.$ **6.474.** $2\sqrt{x+5}=x+2.$

6.475. $4\sqrt{x+6}=x+1.$ **6.476.** $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$

6.477. $\sqrt{37-x^2}+5=x.$ **6.478.** $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4.$

6.479. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-16.$

Тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиб ечинг:

6.480. $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

6.481. $2x^2+3x-5\sqrt{x^2+3x+9}+3=0.$

6.482. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x.$

6.483. $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8.$

6.484. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$

6.485. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3.$

6.486. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0.$

6.487. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2.$

6.488. $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2.$

6.489. $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2.$

6.490. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4.$

6.491. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1.$

Тенгламаларни даражага кўтариш усули билан ечинг:

6.492. $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}\cdot$

6.493. $\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

6.494. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+3}=3.$

6.495. $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5.$

6.496. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}\cdot$

6.497. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}\cdot$

6.498. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

6.499. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}\cdot$

6.500. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}\cdot$

6.501. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}\cdot$

6.502. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

6.503. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1.$

6.504. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

6.505. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1\cdot$

6.506. $\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt[3]{2x^2-7x+6}=0.$

6.507. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

Тенгламаларни “қўшмасига кўпайтириш” усули билан ечинг:

6.508. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

6.509. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

6.510. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$

6.511. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

Тенгламаларни ечинг:

6.512. $\sqrt{x^2+3x-3}=2x-3.$

6.513. $\sqrt{9x^2+2x-3}=3x-2.$

6.514. $(x+2)(x-5)+3\sqrt{x(x+3)}=0.$

6.515. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

6.516. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1.$

6.517. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}.$

6.518. $\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+20}.$

6.519. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}.$

6.520. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}.$

6.521. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$

6.522. $\sqrt{x+1}=a.$ **6.523.** $\sqrt{x+3}=\sqrt{a-x}.$

6.524. $\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=3.$ **6.525.** $\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}=a.$

6.526. $\sqrt{2x-1}-x+a=0.$ **6.527.** $x+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}.$

2. Иррационал тенгсизликлар. a ва b сонлари номанфий бўлгандагина $a<b$ дан $a^n<b^n$ келиб чиқади

(ва аксинча $a^n<b^n \Rightarrow a<b$). Шунга кўра $A(x)$, $B(x)$ иррационал ифодали тенгсизликларни ечишда уларнинг ишоралари эътиборга олиниши керак. Умуман,

$$\sqrt[2k]{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) > 0, \\ A(x) < B^{2k}(x) \end{cases} \qquad (1)$$

бўлади. Системадаги биринчи тенгсизлик илдиз остидаги ифоданинг номанфийлигини, иккинчисининг мусбатлигини ифодалайди, учинчиси $a \geq 0$, $b \geq 0$ да $a<b$ ва $a^{2k} < b^{2k}$ тенгсизликлар бир вақтда бажарилишидан келиб чиқади.

$\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$ тенгсизлиги $B(x) \geq 0$, $A(x) > B^{2k}(x)$ бўлганда ёки $A(x) \geq 0$, $B(x) < 0$ бўлганда ўринли. Шунга кўра

$$\begin{cases} B(x) \geq 0, \\ A(x) > B^{2k}(x) \end{cases} \text{ва} \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

тенгсизликлар системаларини ечиш ва уларнинг ечимларини бирлаштириш керак.

1-мисол. $\sqrt{x^2+6x-16} > x-1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликдан ушбу тенгсизликлар системалари ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x^2+6x-16 > x^2-2x+1 \end{cases} \text{ва} \begin{cases} x^2+6x-16 \geq 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

Биринчи системанинг ечими $\left(2\frac{1}{8};+\infty\right)$ тўпламдан, иккинчи системаники $(-\infty;\ -8)$ тўпламдан иборат. Жавоб. $(-\infty\ ;\ -8\ )\cup\left(2\frac{1}{8};+\infty\right)$.

Агар иррационал тенгсизлик $\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}<C(x)$ (4) кўринишда берилган бўлса, $A(x)\geq 0$, $B(x)\geq 0$ ва $\sqrt{B\ (x)}<C\ (x)$ (ёки $\sqrt{A(x)}<C(x)$) шартлар бажарилганда берилган тенгсизлик $A(x)<(C(x)-\sqrt{B(x)})^2$ (ёки $B(x)<\left(C(x)-\sqrt{A(x)}\right)^2$) тенгсизликка тенг кучли бўлиб, юқорида қаралган турлардан бирига келади.

2 - мисол. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}<5$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x+4\geq 0, \\ \sqrt{x-1}<5, \\ x+4<\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x\geq -4, \\ x<26, \Rightarrow\ 1\ \leq x\ \leq\ 5 \\ x<5 \end{cases}$$

Ечим. $1\leq x\leq 5$.

Тенгсизликларни мантиқий мулоҳазалар юритиб ечинг:

6.528. $\sqrt{x+3}\geq -5$.   **6.529.** $\sqrt{x^2+1}>-1$.

6.530. $\sqrt{x^2-2x+4}>-\frac{1}{2}$.   **6.531.** $\sqrt{x^2-2x+4}<0$.

6.532. $\sqrt{x^2-6x+9} \geq 0$.

6.533. $\sqrt{|x-2|+x^2+4} < 0$.

6.534. $\sqrt{x^2-2x+3} \geq -0,3$.

6.535. $\sqrt{x^2} > 0$.

6.536. $\sqrt{x-4}+\sqrt{3-x} > 0$.

6.537. $\sqrt{x-4}+\sqrt{3+x} < 0$.

6.538. $\sqrt{x^2-3x+2} \geq 0$.

6.539. $\sqrt{4y^2+4y+1} > 0$.

6.540. $\sqrt{x^2+x+1} > 0$.

6.541. $\sqrt{5x-6-x^2} > 0$.

6.542. $\sqrt{x-1-x^2} > 0$.

6.543. $\sqrt{5x-18-x^2} > 0$.

6.544. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.

6.545. $(3-x)\sqrt{x^2+x-2} \leq 0$.

6.546. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

6.547. $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \geq 0$.

6.548. $\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x-3} > 0$. **6.549.** $\dfrac{x^2-3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}} < 0$.

Тенгсизликларни ечинг:

6.550. $\sqrt{x+7} < x$.

6.551. $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$.

6.552. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

6.553. $\sqrt{x+78} < x+6$.

6.554. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

6.555. $1-\sqrt{13+3x^2} > 2x$.

6.556. $\sqrt{x^2+x-12} < x$.

6.557. $\sqrt{2x+4} > x+3$.

6.558. $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

6.559. $\sqrt{9-24x+16x^2} > 8$.

6.560. $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

6.561. $\sqrt{x^2-5x-24} > x+2$.

6.562. $\sqrt{x^2-4x} > x-4$.

6.563. $\sqrt{x^2-x-6} \le x+5$.

6.564. $\sqrt{x^2-5x+6} \le x+1$.

6.565. $\sqrt{x^2-7x+12} \ge 1-x$.

6.566. $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3} > 1$.

6.567. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4} > 0$.

6.568. $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x} \ge 1$.

6.569. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

6.570. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

6.571. $\sqrt{1-x}\le\sqrt[4]{5-x}$.

6.572. $\sqrt[4]{5x-1}\le\sqrt{x\sqrt{6}}$.

6.573. $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$.

6.574. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}$.

6.575. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{3}{2}$.

6.576. $\sqrt{x^2-x-12}<7-x$.

6.577. $\sqrt{x^2-5x+6}<2x-3$. **6.578.** $\frac{\sqrt{x+2}}{x}<1$.

6.579. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>1{,}5\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

6.580. $\sqrt{x^2-5x+6}+\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}\ge 2$.

6.581. $\frac{1}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2}>2$.

6.582. $\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}>2$.

6.583. $\sqrt{3-4x}+\frac{1}{\sqrt{3-4x}}<2$.

6.584. $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6$.

6.585. $\sqrt{16x^2-24x+9}<\sqrt{4x^2+12x+9}$.

6.586. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}<8$.

6.587. $\sqrt{x^4+2x^2+1}+\sqrt{4x^4-4x^2+1}\le 2x-1$.

6.588. $\sqrt{x}-3\le\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$. **6.589.** $5\sqrt{x}>x+6$.

6.590. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}>4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$. **6.591.** $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}>\dfrac{1}{x-1}$.

6.592. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}>\dfrac{1}{2-x}$. **6.593.** $\dfrac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1}\ge 4$.

6.594. $a\sqrt{x+1}<1$. **6.595.** $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

VII боб

ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Сонли функциялар

1. Функция ва аргумент. Амалиётда вақт, температура, босим, куч, тезлик, юза, ҳажм ва ҳоказо миқдорлар (катталиклар) билан иш кўришга, улар орасидаги боғланишларнинг хусусиятларини ўрганишга тўғри келади. Бунга кўплаб мисолларни физика, геометрия, биология ва бошқа фанлар беради. Жисм ўтган S масофанинг t вақтга, айлана C узунлигининг R радиусга боғлиқ равишда ўзгариши бунга оддий мисол.

Агар x ўзгарувчи миқдор X сонли тўпламдан қабул қила оладиган ҳар бир қийматга бирор f қоида бўйича y ўзгарувчи миқдорнинг Y сонли тўпламдаги аниқ бир қиймати мос келса, y ўзгарувчи x ўзгарувчининг *сонли функцияси* деб аталади. y ўзгарувчининг x ўзгарувчига боғлиқ эканлигини таъкидлаш мақсадида уни *эрксиз ўзгарувчи* ёки функция, x ўзгарувчини эса *эркли ўзгарувчи* ёки аргумент деб атаймиз. y ўзгарувчи x ўзгарувчининг функцияси эканлиги $y=f(x)$ кўринишда белгиланади.

Аргумент x нинг X тўпламдан қабул қила оладиган барча қийматлар тўплами f функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва $D(f)$ орқали белгиланади. $\{f(x)|x\in D(f)\}$ тўплам f функциянинг *қийматлар соҳаси (тўплами)* деб аталади ва $E(f)$ орқали белгиланади.

Ихтиёрий $x\in D(f)$ қийматда функция фақат $y=b$ (ўзгармас миқдор — *constanta*), $b\in R$ қийматга эга бўлса, унга X тўпламда берилган *доимий функция* дейилади. Масалан, координаталар системасида Оx ўққа параллел тўғри чизиқни ифодаловчи $y=3$ функция $D(f)=\{x|\ -\infty<x<+\infty\}$ да доимийдир.

1 - мисол. Агар $y=x^2$ функция R тўпламда берилган бўлса, у ҳолда $D(f)=R$ ва $E(f)=R_+\cup\{0\}$ бўлади.

2 - мисол. $y=x^2$ функция $D(f)=[-3;4]$ да берилган бўлсин. Бу функциянинг қийматлар соҳаси $E(f)=$ $=[0;\ 16]$ дан иборат.

Машқлар

Функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

7.1. $f(x)=\frac{3}{x-2}$.

72. $f(x)=\frac{3x}{x-3{,}4}$.

7.3. $f(x)=\frac{4x-1}{3x-2}$.

7.4. $f(x)=\frac{4x+13}{7x+14}$.

7.5. $f(x)=\frac{4x}{(x-1)(x-2)}$.

7.6. $f(x)=\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

7.7. $f(x)=\frac{4x^2-1}{x^2-7x+12}$.

7.8. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2-8x+15}$.

7.9. $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$.

7.10. $f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$.

7.11. $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$.

7.12. $f(x)=\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x^2+x+1}$.

7.13. $f(x)=x+x^2+\frac{1}{x-3}$.

7.14. $f(x)=x^2+x-3$.

7.15. $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-1}$.

7.16. $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{x^2-1}$.

7.17. $f(x)=x+x^{-1}+x^{-2}$.

7.18. $f(x)=x^{-1}+\frac{2}{x}$.

7.19. $f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x^2-3x)^2}$.

7.20. $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$.

7.21. $y=\sqrt{3-5x}$.

7.22. $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{3-2(7-5x)}}$.

7.23. $y=\sqrt{2(3x-1)-7x+2}$.

7.24. $y=\frac{3+4x}{\sqrt{3-2x-4(1-5x)}}$.

7.25. $y=\sqrt{-\sqrt{2}(2-3x)}$.

7.26. $y=\frac{1}{\sqrt{(3x-1)\sqrt{2}-3x+2}}$.

7.27. $y=\frac{2}{\sqrt{(x-\sqrt{3})\sqrt{3}-2x+1}}$.

7.28. $y=\sqrt{60x-25x^2-36}$.

7.29. $y=\frac{1}{\sqrt{112x+64+49x^2}}$.

7.30. $y=\sqrt{5x^2+6x+1}+\frac{1}{3x+5}$.

7.31. $y=\sqrt{3x+4}-\dfrac{1}{\sqrt{-2x^2-5x-2}}$.

7.32. $y=\sqrt{4-x|x|}$.

7.33. $y=\sqrt{|x|(x-1)}$.

7.34. $y=\sqrt{(x-2)\sqrt{x}}$.

7.35. $y=\sqrt{(1-x)\sqrt{x-2}}$.

7.36. $y=\sqrt{\dfrac{-x^2+6x-8}{x^2+5x+6}}$.

7.37. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+x-20}}+\sqrt{x^2+5x-14}$.

7.38. $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$.

7.39. $y=\sqrt{\dfrac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$.

7.40. $y=\sqrt{\dfrac{-4x^2+4x+3}{\sqrt{2x^2-7x+3}}}$.

7.41. $y=\sqrt{12x^2-4x^3-9x}-\sqrt{2-|x|}$.

7.42. $y=\sqrt{|x-1|(3x-6)}+\dfrac{3}{x^2+4x-21}$.

7.43. $y=\sqrt{5-\sqrt{4x^2-20x+25}}-\sqrt{|x|(2x-10)}$.

Функцияларнинг қийматлар соҳаларини топинг:

7.44. $y=1$. **7.45.** $y=x$. **7.46.** $y=x^2$. **7.47.** $y=-x^2$.
7.48. $y=x^2+2$. **7.49.** $y=3-4x^2$. **7.50.** $y=3x-x^2$.

7.51. $y=3x^2-6x+1$.

7.52. $y=\frac{5}{x-2}$.

7.53. $y=\frac{x}{x+1}$.

7.54. $y=\frac{2}{x^2+2}$.

7.55. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

7.56. $y=\sqrt{x-2}+3$.

7.57. $y=|x-4|-2$.

7.58. $y=5-\sqrt{2x+1}$.

7.59. $y=3-|2x+3|$.

7.60. $y=\sqrt{x^2+4}$.

7.61. $y=4-2\sqrt{x^2+9}$.

7.62. $y=\sqrt{3x^2-6x+4}$.

7.63. $y=\sqrt{8x-2x^2-7}$.

7.64. $y=1-\frac{5}{\sqrt{x-1}+1}$.

7.65. $y=2-\frac{3}{2x^2-8x+9}$.

7.66. $y=1-\sqrt{9-\sqrt{2x^2+6\sqrt{2}x+9}}$.

7.67. $y=3-\sqrt{16-\sqrt{4x^2-4\sqrt{3}x+3}}$.

7.68. $y=\frac{x^3+8}{x+2}$.

7.69. $y=\frac{(x^3+8)(x-4)}{x^2-2x-8}$.

7.70. $y=\frac{x^3-27}{x-3}$.

7.71. Қуйида кўрсатилган катталикларнинг қайси бири иккинчисига, қайси ҳолда иккинчиси биринчисига функционал боғлиқ бўлиши мумкин:

а) шахтадаги кўмир лавасининг узунлиги ва меҳнат унумдорлиги;

б) ҳавонинг иссиқлиги ва унда товушнинг тарқалиш тезлиги;

в) айлана узунлиги ва радиуси;

г) квадратнинг диагонали ва юзи?

7.72. Металл стержен қиздирилганда унинг чўзилиши қандай катталикларга функционал боғлиқ бўлади?

7.73. Геометрия ва физика курсларидан сизга таниш икки ва уч ўзгарувчили функцияларга мисоллар келтиринг.

7.74. Қуйида кўрсатилган (1), (2), (3), (4) муносабатлар функционал боғланишми? Уларда қандай ўзгарувчи миқдорлар қатнашмоқда? Қайсилари аргумент вазифасини бажаради? Аниқланиш ва қийматлар соҳаларини топинг:

а) Ньютон иккинчи қонунининг ифодаси

$$F=ma, \tag{1}$$

бунда F — жисмга таъсир этаётган куч, m — жисм массаси, a — жисм олган ҳаракат тезланиши;

б)
$$a=\frac{V-V_0}{t}, \tag{2}$$

бунда V_0 ва V — жисмнинг бошланғич ва t вақтдан кейинги тезлиги;

в)
$$F=\frac{m(V-V_0)}{t}. \tag{3}$$

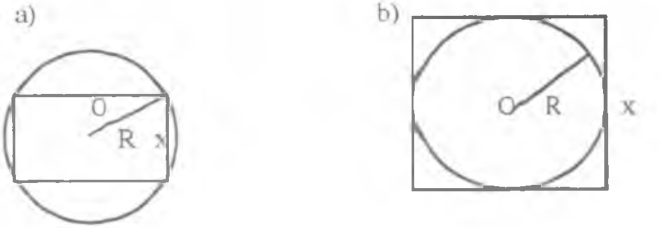
Бу муносабат (1) ва (2) муносабатлардан қандай ҳосил қилинган?

г) (3) муносабат бўйича

$$Ft = mV - mV_0 \tag{4}$$

ҳосил қилинган. (3) ва (4) муносабатлар тенг кучлими? Бунда Ft— куч импульси (зарба), $mV\text{-}mV_0$ —жисм импульсининг (ҳаракат миқдорининг) ўзгариши;

д) агар m=100 г, a=15 см/сек^2, V_0=2 см/сек, t=10 сек бўлса, F (дина), V, Ft, $mV\text{-}mV_0$ ларнинг қийматини топинг.



34-расм.

7.75. $f(x)=3-x^2-|x|$ функциянинг $f(3)$, $f(0)$, $f(-4)$, $f(c-1)$ қийматларини топинг.

7.76. Радиуси R га тенг бўлган доирага: а) ички; б) ташқи чизилган тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бири x га тенг (34-a,b-расм). Тўғри тўртбурчак юзини x га боғлиқ функция сифатида ифодаланг. Бу функциянинг аниқланиш ва қийматлар соҳаларини топинг.

7.77. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасига туширилган баландлик h га тенг. Унинг юзи ва периметрини катетларидан бирининг x узунлиги функцияси сифатида ифодаланг.

7.78. V л идишдаги p % ли эритмадан x л олиниб, ўрнига x л сув қўшилган. Шу иш яна уч марта такрорланган. Натижада ҳосил бўладиган эритма концентрациясини x нинг функцияси сифатида ифодаланг.

2. Функцияни бўлакларга ажратиб бериш. Аниқланиш соҳасининг турли қисмларида турли хил қоида билан берилган функцияни *бўлакларга ажратиб берилган функция* (ёки *бўлакли берилган функция*) деб атаймиз.

1-мисол. Жисм ҳаракатни бошлаб, дастлабки t_1 вақт давомида текис тезланувчан (a_1 тезланиш билан), сўнг t_2 вақт давомида текис секинланувчан ($-a_2$ тезланиш билан) ҳаракат қилган. Унинг v ҳаракат тезлигини t нинг функцияси сифатида ифодалаймиз.

Ечиш. 1) Жисмнинг ҳаракат бошидаги тезлиги $v_0=0$, жисм t_1 вақт давомида текис тезланувчан ҳаракат қилган: $v=v_0+a_1t=a_1t$, $0 \le t \le t_1$; 2) t_1 вақт моментидаги тезлиги $v_1=a_1t_1$; кейинги t_2 вақт давомида текис секинланувчан ҳаракат қилган: $v=v_1-a_2t=a_1t_1-a_2t$, $t_1 \le t \le t_1+t_2$. Шундай қилиб,

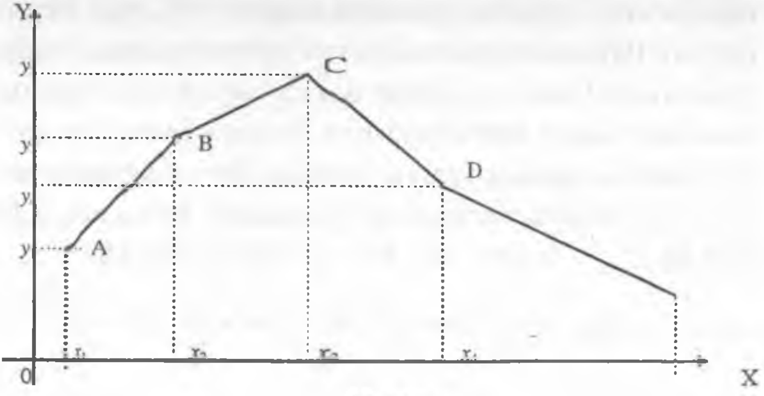
$$v = \begin{cases} a_1t,\ 0 \le t \le t_1\ , \\ a_1t_1 - a_2t,\ \ t_1 < t \le t_2\ . \end{cases}$$

2-мисол. Координаталар текислигида $f(x)$ функция $ABCD$ синиқ чизиқ кўринишида тасвирланган (35-расм). Унинг тугунлари $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$ нуқталарда ётади. Функциянинг ифодасини ёзинг.

Ечиш. Икки нуқта устидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидан фойдаланамиз. AB бўғин учун:

$$\frac{y-y_{11}}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{ёки} \quad y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,(x-x_1) \qquad (1)$$

Қолган бўғинларнинг тенгламалари ҳам шу каби аниқланади. Натижада функция ифодаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:



35-расм.

$$f(x)=\begin{cases} y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\ x_1\le x\le x_2, \\ y_2+\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2),\ x_2\le x\le x_3, \\ y_3+\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}(x-x_3),\ x_3\le x\le x_4. \end{cases}$$

3 - мисол. Қуйида Мирзо Улуғбекнинг 60 ли саноқ системасида ёзилган жадвалу-л-жайбидан (синуслар жадвалидан) бир парча келтирилган (олтмишли рақамларнинг ости чизилган):

i	*xi*	$y_i=sinx_i$	$\Delta y=y_{i+1}-y_i$
1	9°42′	$\underline{0},\underline{10}\ \underline{6}\ \underline{53}\ \underline{42}\ \underline{22}$	$\underline{0},\underline{0}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{55}\ \underline{55}$
2	43′	$\underline{0},\underline{10}\ \underline{7}\ \underline{55}\ \underline{38}\ \underline{17}$	$\underline{0},\underline{0}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{55}\ \underline{44}$
3	44′	$\underline{0},\underline{10}\ \underline{8}\ \underline{57}\ \underline{34}\ \underline{1}$	

Бу функция графиги икки бўғинли синиқ чизиқ, тугунлари $(x_i;y_i)$ нуқталарда жойлашган. Функция ифодасини тузамиз (ҳисоблашларни ЭҲМда бажарамиз). Шу мақсадда 2-мисол (1) формуласидан фойдаланамиз. Олдин олтмишли касрларни бизга таниш ўнли касрларга айлантирамиз. Бунинг учун соннинг ҳар қайси k-хонада турган рақами 60^k га кўпайтирилади ва топилган натижалар қўшилади. Масалан, $0,\underline{10}\ \underline{7}\ \underline{55}\ \underline{38}\ \underline{17}_{(60)}=0\cdot60^0+10\cdot60^{-1}+7\cdot60^{-2}+55\cdot60^{-3}+38\cdot60^{-4}+17\cdot60^{-5}=\frac{1}{60}\left(10+\frac{1}{60}\left(7+\frac{1}{60}\left(55+\frac{1}{60}\left(38+\frac{17}{60}\right)\right)\right)\right)=$

$=0,1685819725.$

Жавоб: $$f(x)=\begin{cases}0{,}1685819725+\dfrac{0{,}0002867218}{1'}, \\ 0{,}1685819725+\dfrac{0{,}0002867077}{1'},\end{cases}$$

$$(x-9^\circ\ 42'),\ 9^\circ\ 42' \le x \le 9^\circ\ 43',$$
$$(x-9^\circ\ 42'),\ 9^\circ\ 42' \le x \le 9^\circ\ 44'.$$

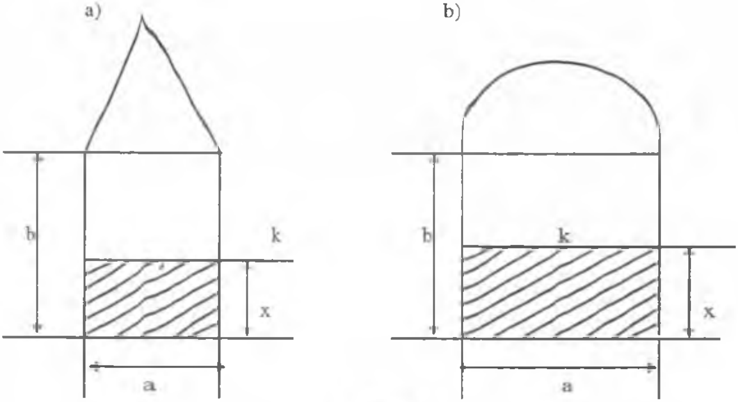
Машқлар

7.79. Агар $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2, & -2 \le x < -1, \\ x(5-x), & -1 \le x < 0, \\ \dfrac{x+3}{x+1}, & 0 \le x < 1\end{cases}$

бўлса, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(-0{,}5)$, $f(\sqrt{2}/2)$ ларни топинг.

7.80. Тўғри тўртбурчак билан тенг ёнли учбурчак ва тўғри тўртбурчак билан ярим доирадан иборат шаклларнинг (36-*a*, *b* расм) асосларига параллел ҳолда силжийдиган тўғри чизиқ остидаги S(x) юзни (штрихланган) ўзгарувчан x узоқликнинг функцияси сифатида ифодаланг, бунда *a*, *b* лар берилган.

7.81. Агар 36-*a* расмда силжийдиган *k* тўғри чизиқ тўғри тўртбурчакнинг асосига параллел ва ундан x узоқликда бўлса, S(x) юзни x нинг функцияси сифатида ифодаланг.



36-расм.

7.82. Термодинамикада газнинг бажарган A иши унинг идишга P босими ва газ V ҳажмининг V_{i-1} дан V_i гача $\Delta V = V_i - V_{i-1}$ ўзгаришига боғлиқлиги $A=P\cdot\Delta V$ муносабат орқали ифодаланади. Агар

$$A = \begin{cases} 3\cdot DV, & 2 \le V < 4, \\ P\cdot DV, & 4 \le V < 8,\ P = \dfrac{12}{V} \end{cases}$$

бўлса, A(3), A(4), A(5) ларни топинг.

7.83. Мирзо Улуғбекнинг "Жадвалу-л-жайб"идан бир парча:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x)$
8°42′	0,08 04 32 20 14	0,00 01 02 06 27
43′	0,09 05 34 26 41	0,00 01 02 06 17
44′	0,09 06 36 32 58	0,00 01 02 06 07
45′	0,09 07 38 39 05	

а) $f(x)$ синус функциянинг жадвалда берилган олтмишли каср қийматларини ўнли касрлар-

37-расм.

га айлантиринг ва уларни бирор жадвал ёки ЭҲМ нинг кўрсатиши билан солиштиринг;
б) графиги тўрт (x_i; $f(x_i)$) тугунли синиқ чизиқдан иборат $f(x)$ функция ифодасини тузинг.

7.84. Улуғбек тақвими (календари) бўйича ўртача ҳижрий-қамарий 1 йил $\approx$ 354,63671 кун, ўртача милодий 1 йил $\approx$365,25 кун. Ҳижрий-қамарийнинг мадхали (H_0 ҳисоб боши) милодий 622 йил 16 июлига тўғри келади (37-расм). Милодийдан ҳижрий йилга (аксинча) ўтиш тенгламасини тузинг.

Функция графигини ясанг:

7.85 $$y = \begin{cases} 3, \text{ агар } x \le -4, \\ \left|x^2 - 4|x| + 3\right|, \text{ агар } -4 < x \le 4, \\ 3-(x-4)^2, \text{ агар } x > 4 \end{cases}$$

7.86. $$y = \begin{cases} 8-(x+6)^2, \text{ агар } x < -6, \\ \left|x^2 - 6|x| + 8\right|, \text{ агар } -6 \le x < 5, \\ 3, \text{ агар } x \ge 5 \end{cases}$$

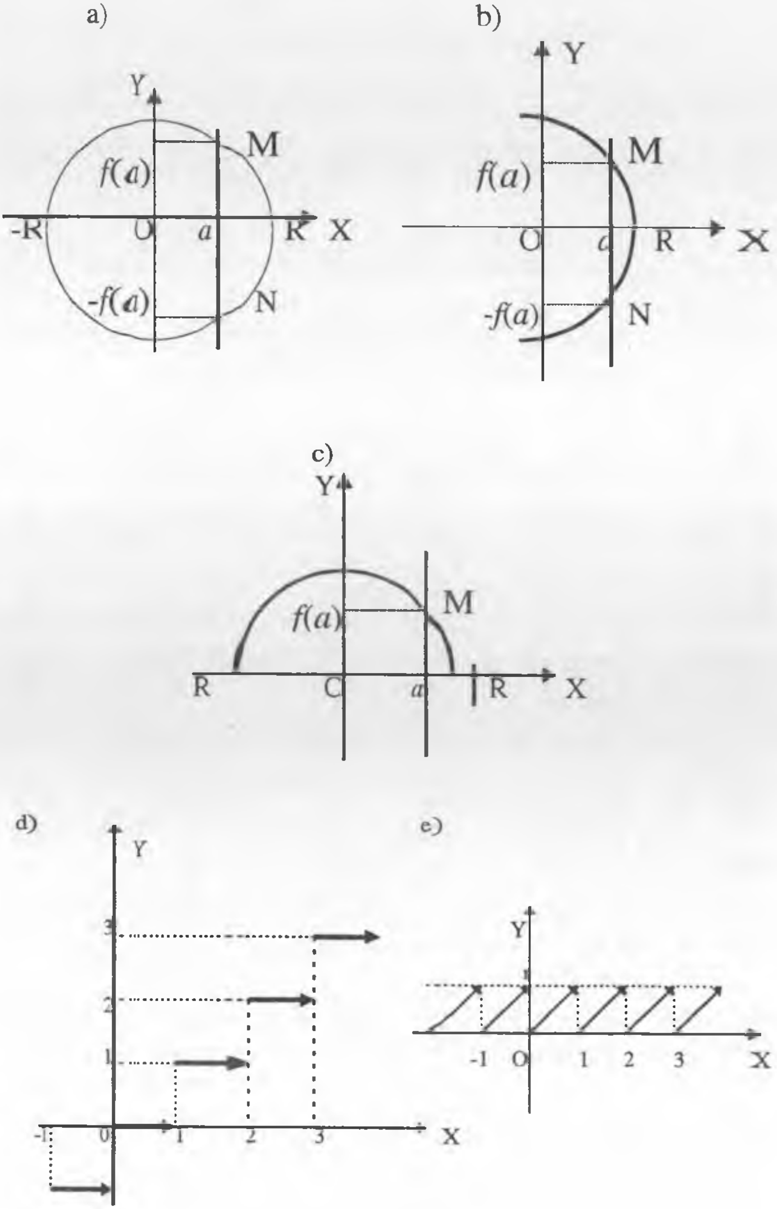
7.87. $$y = \begin{cases} x^3, \text{ агар } \le -1, \\ \frac{1}{x}, \text{ агар } -1 < x < 0, \\ x^2, \text{ агар } x \ge 0 \end{cases}$$

7.88. $$y = \begin{cases} x^2, & \text{агар} \quad x \le -1, \\ 2x-1, & \text{агар} \ -1 < x \le 1, \\ \sqrt{x}, & \text{агар} \quad x > 1. \end{cases}$$

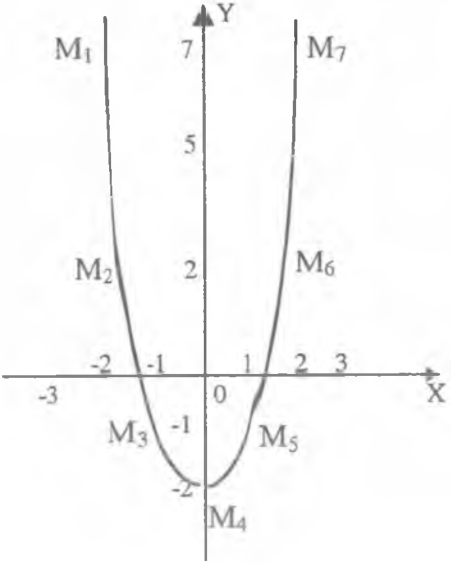
3. Функция графигини нуқталар бўйича ясаш. Бирор X сонли оралиқда берилган $y=f(x)$ сонли функция графиги $Г$ ни “нуқталар усули” билан ясаш учун X оралиқдан аргументнинг бир неча $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қиймати танланади, функциянинг уларга мос $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ қийматлари ҳисобланади, координаталар текислигида $M(x_1;f(x_2)), \ldots, M(x_n;f(x_n))$ нуқталар белгиланади ва бу нуқталар устидан силлиқ чизиқ ўтказилади. Бу чизиқ $f(x)$ функция графигини тақрибан ифодалайди.

Агар ордината ўқига параллел бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ $Г$ чизиқни кўпи билан битта нуқтада кесса, у ҳолда $Г$ чизиқ бирор $f(x)$ функциянинг графиги бўлади. Шунга кўра $x^2+y^2=R^2$ айлана ҳеч қандай функциянинг графиги эмас, чунки Оy ўқига параллел бўлган $x=a$ тўғри чизиқ (38-a расм) бу айланани биттадан ортиқ (айнан иккита M ва N) нуқталарда кесади, демак, $x=a$ қийматга y нинг икки қиймати тўғри келади, яъни $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, $-R \le x \le R$. Шу каби $y = =\pm\sqrt{R^2-x^2}$, $0 \le x \le R$, ярим айлана ҳам функция графиги эмас. Лекин, $y=+\sqrt{R^2-x^2}, -R \le x \le R$, ярим айлана шу ифодали функциянинг графиги (37-b,c расм) ($Г$— юнонча гамма, бош ҳарф).

Функция графиги узилишга эга бўлиши мумкин. $y=[x]$ ва $y=\{x\}$ функциялар графиклари узилишлидир (37-d,e расм). Бу ерда $y=[x]$ — x нинг бутун қисми ва $y=\{x\}$ — x нинг каср қисми. Улардан биринчиси поғанасимон жойлашган бирлик кесмалардан, ик-


a)
Y
M
f(a)
-R
O
a
R
X
-f(a)
N
b)
Y
M
f(a)
O
a
R
X
-f(a)
N
c)
Y
M
f(a)
R
O
a
R
X
d)
Y
3
2
1
-1
0
1
2
3
X
e)
Y
1
-1
O
1
2
3
X

38-расм.



39-расм.

кинчиси эса $y=x+n$ ($-n\leq x<-n+1 \mid n\in Z$) тўғри чизиқлардан иборат.

1 - мисол. $y=x^2-2$ функция графиги эскизини чизамиз, бунда $-3\leq x\leq 3$ (эскиз — хомаки, асбоб ёрдамисиз чизилган чизма).

Ечиш. Аргументнинг $x=-3;-2;-1;\ 0;1;2;3$ қийматларини танлайлик. $f(x)$ қийматларини ҳисоблаймиз: $f(-3)=f(3)=9-2=7$, $f(-2)=f(2)=4-2=2$, $f(-1)-f(1)=1$, $f(0)=-2$. Координаталар текислигида $M_1(-3;7)$, $M_2(-2;2)$, $M_3(-1;-1)$, $M_4(0;-2)$, $M_5(1;-1)$, $M_6(2;2)$, $M_7(3;7)$ нуқталарни белгилаб, уларни қўл билан туташтириб силлиқ чизиқ чизамиз (39-расм).

Машқлар

7.89. Қуйидаги функциялар графикларини “нуқталар бўйича” ясанг:

а) $y=x^2+2$; б) $y=x^3-1$; в) $y=x^4-1$;

г) $y = \frac{1}{x} - 1$; д) $y = \frac{4}{x^2+1}$; е) $y = \frac{x-1}{x^2-1}$;

ж) $y = |x-2|$; з) $y = |x^2-1|$; и) $y = |x|-|x-1|$;
к) $y = x-|x|$; л) $y = |x-|x+2||$; м) $y = 3x^2-4x$.

7.90. 7.79-мисолда берилган функциянинг графигини ясанг.

7.91. Иккала учи A ва B нуқталарда эркин жойлаштирилган $AB = k$ узунликдаги стержен унинг ўртасига қўйилган Q катталикдаги юкнинг таъсири остида эгилади (40-расм). A учидан x узоқликдаги y эгилиш ушбу формулалар бўйича аниқланади:

$$y = \begin{cases} \frac{Qk^3}{48EI}\left(\frac{3x}{k} - \frac{4x^3}{k^3}\right), & 0 \le x \le \frac{k}{2}, \\ \frac{Qk^3}{48EI}\left(\frac{3(k-x)}{k} - \frac{4(k-x)^3}{k^3}\right), & \frac{k}{2} \le x \le k \end{cases}$$

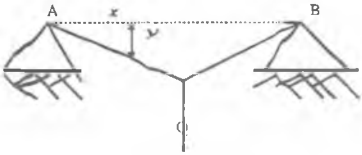
E,I — доимий сонлар

а) $x = \frac{k}{6}; \frac{k}{4}; \frac{k}{2}; \frac{3k}{4}$ нуқталардаги эгилишни топинг.

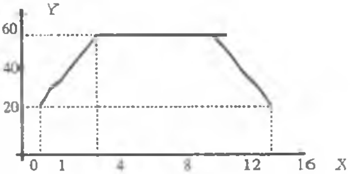
Нима учун $x = \frac{k}{2}$ да иккала ифода бир хил натижани беради?

б) Q=48, $k=1$ бўлган ҳол учун (1) формула графиги эскизини чизинг ва y бўйича эгилишнинг $x = \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}$ даги қийматини топинг.

7.92. 41-расмда x (кГ) ўғитга боғлиқ ҳолда $y=f(x)$ (кГ) ҳосилнинг олиниши график тасвирланган. 1) x нинг қандай қийматларида ҳосил муттасил ошган (“лимитик соҳа”), қачон ва қандай миқдорда энг юқори бўлган? 2) Қачон ўғит ҳар қанча берилса ҳам ҳосил ўзгармаган (“стационар, яъни турғунлик соҳаси”); 3) Қачондан бошлаб ўғитнинг ортиқча бе-



40-расм.



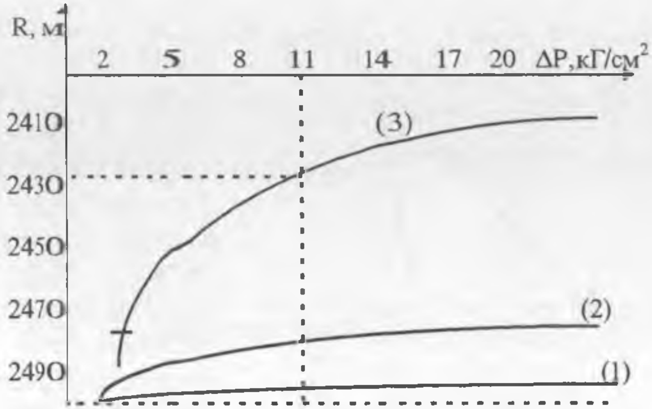
41-расм.

рилганлиги ва натижада ҳосилнинг пасайиши кузатилган (“ингибация соҳаси”, лат. *inhibare* — сусайтириш)? 4) x=2;4;5;6;8;10 (кГ) ўғит берилиб, қанча ҳосил олинган? 5) агар 28 (кГ) ҳосил режанинг 36% ни ташкил этса, режа бўйича қанча ҳосил олиниши кўзда тутилган?

7.93. Ўзбек олими Н. М. Муҳитдинов ер остидан газни қазиб олиш мақсадида депрессия 2, 5, 10 йил давомида доимий ΔP кГ/см^2 ҳолатида тутиб турилганда газ-сув чегарасининг ер устига томон R м га кўчишини текширган ва асарларидан бирида $R=f(\Delta P)$ боғланишни график тасвирлаган (42-расм). Агар депрессия ΔP=11 кГ/см^2 бўлса, 10 йил қазиб олишлардан сўнг ((3) график) газ-сув чегараси қанча силжийди? 5 йилда-чи ((2) график)? 2 йилда-чи ((1) график)? Агар ΔP=2;8;14 (кГ/см^2) даражада тутиб турилса-чи? (лат. depressus - пастлаштириш; газни қазиб олиш учун уни ўраб турган сув босимини камайтириш).

4. Функциялар устида амаллар. D(f) тўпламда берилган $f(x)$ ва D(g) тўпламда берилган g(x) функцияларнинг *йиғиндиси* деб D(φ)=D(f)∩D(g) тўпламда берилган янги $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ функцияга айтилади.

1 - мисол. $f=x^2-4$, $-3 \le x \le 2$ ва $g=x+2$, $-2 \le x \le 3$ функциялар йиғиндиси $\varphi(x)=(x^2-4)+(x+2)$, $-2 \le x \le 2$, функциядан иборат. Унинг графигини чизишда f ва



42-расм.

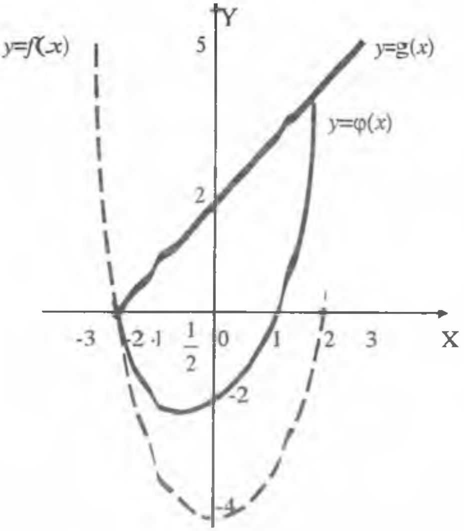
g функциялар мос ординаталарини қўшишдан фойдаланиш мумкин (43-расм).

$f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг *кўпайтмаси* $D(\varphi)=D(f)\cap D(g)$ тўпламда берилган $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ функциядан иборат.

$\frac{1}{g(x)}$ функция $D(g)$ тўпламнинг $g(x)\neq 0$ бўлган барча сонларида аниқланган. $f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ (қисқача ёзувда $f\cdot\frac{1}{g}$) функция f ва g функциялар *бўлинмаси* деб аталади. Уни $\frac{f}{g}$ орқали белгилаймиз.

2-мисол. $f(x)=(x-1)^3-3$ берилган. $\frac{4}{f^2-3}$ функция ифодаси $\frac{4}{\left((x-1)^3-3\right)^2-3}$ кўринишда ёзилади:

$$\frac{4}{f^2-3}=\frac{4}{\left((x-1)^3-3\right)^2-3}.$$



43-расм.

f ва g сонли функциялар берилган ва $E(f)\subset D(g)$ бўлсин. f ва g функциялар *композицияси* деб $D(f)$ да берилган ва ҳар қайси $x\in D(f)$ сонга $g(f(x))$ сонни мос қўювчи янги $F(x)$ функцияга айтилади (лат. *compositio* — тузиш). F функция $g\circ f$ орқали ҳам белгиланади: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$. Композиция ифодасини тузиш учун $g(x)$ даги x ўрнига f функция ифодаси қўйилади.

3 - мисол. $f(x)=x^3-2$ ва $g(x)=\frac{1}{x}$ функцияларнинг $g\circ f$ ва $f\circ g$ композицияларини тузинг.

Ечиш. 1) $g\circ f=g(f(x))=\frac{1}{x^3-2}$;

2) $f\circ g = f(g(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^3-2.$

Машқлар

7.94. $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ бўлса, $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ни топинг.

7.95. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ бўлса, $f(\sqrt[3]{x^2+1})$ ни топинг.

7.96. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ бўлса, $f(tgx)$ ни топинг.

7.97. $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

7.98. $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

7.99. $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

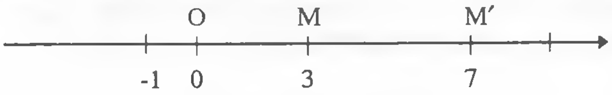
7.100. $f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

7.101. $2f\left(\frac{x}{x-1}\right)-3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)=\frac{13x-4}{2x-3x^2}$ бўлса, $f(x)$ ни топинг.

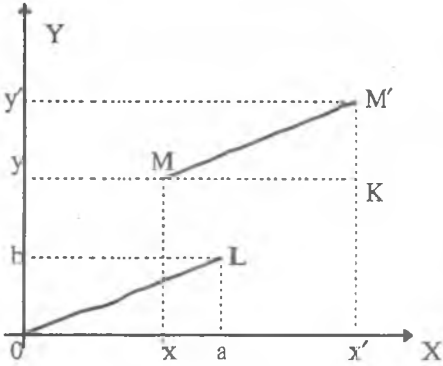
2-§. Графикларни алмаштириш

1. Геометрик алмаштиришларда нуқта координаталарининг ўзгариши.

1) Силжитиш. Бирор l тўғри чизиқда координаталар системаси ўрнатилган ва унинг боши O нуқтада бўлсин (44-расм). l нинг ҳар қайси нуқтаси a бирлик қадар силжитилсин. Агар бунда $a>0$ бўлса, силжитиш O нуқтага нисбатан мусбат йўналишда, $a<0$ да манфий йўналишда бажарилади, $a=0$ да нуқта ўз жойидан силжимайди. Агар x координатали



44-расм.



45-расм.

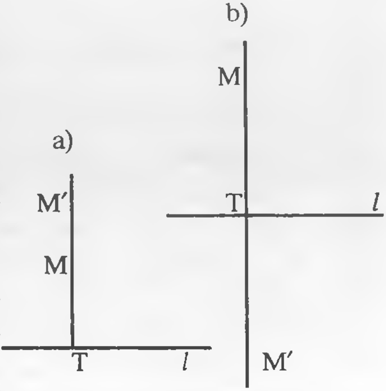
$M=M(x)$ нуқта $M'(x')$ нуқтага ўтган бўлса, M' нуқта координатаси $x'=x+a$ формула бўйича аниқланади. M нуқта M' нинг *асли* (*прообрази*), M' эса M нинг *нусхаси (образи)* дейилади. Масалан, $M(3)$ нуқта $a=4$ бирлик силжитилса, $x'=x+a=3+4=7$ координатали $M'(7)$ нуқтага кўчади.

2) Чўзиш. l тўғри чизиқда $M(x)$ нуқта O координата бошидан k марта узоқлаштирилиб (ёки O га яқинлаштирилиб) $M'(x')$ нуқтага ўтказилган бўлсин. M' нуқта координатаси $x'=kx$ формула бўйича ҳисобланади. Агар бунда $k>0$ бўлса, M' нуқта M билан биргаликда O нуқтанинг бир томонида, $k<0$ да M' нуқта O нинг иккинчи томонида жойлашади, $|k|<1$ да $x=OM$ кесма k марта қисқаради, $|k|>1$ да эса k марта чўзилади, $k=1$ да M ва M' нуқталар устма-уст тушади, $k=-1$ да улар О нуқтага нисбатан симметрик жойлашадилар.

3) Параллел кўчиришда xOy координата текислигидаги барча нуқталар бир хил йўналишда бир хил масофага кўчади (45-расм). Чунончи, $O(0;0)$ координата боши $L(a;b)$ нуқтага кўчирилган бўлса, $M(x;y)$ нуқта $M'(x';y')$ га кўчади ва бунда $MM'=OL$, $MM'||OL$ бўлади.

Чизмага қараганда тўғри бурчакли $\Delta MKM'=\Delta OaL$ ва $MK=0a=a$, $KM'=aL=b$, $x'-x=a$, $y'-y=b$. Булардан M' нуқта координаталарини ҳисоблаш учун ушбу формулалар ҳосил қилинади:

$$x'=x+a\ ,\ y'=y+b.$$



46-расм.

4) Гомотетия (юнонча *homos* — бир хил, тенг; *thetos* — ўринлашган). Гомотетияда текисликдаги ҳар қайси $M(x;y)$ нуқта OM нурда ётувчи ва координаталари $x'=kx$, $y'=ky$ бўлган $M'(x';y')$ нуқтага ўтади, бунда O — гомотетия маркази, k — гомотетия коэффициенти. $k=-1$ да гомотетия O нуқтага нисбатан ($x'=-x$; $y'=-y$) *марказий симметрия* бўлади (юнонча *symmetria* — мослик, мувофиқлик).

5) Текисликни тўғри чизиққа нисбатан чўзиш. Текисликдаги бирор M нуқтадан l тўғри чизиққа MT перпендикуляр туширилган (лот. *perpendicularis* — тик) (46-расм *a, b*) ва M нуқта MT да ётувчи $M'(x';y')$ нуқтага ўтказилган бўлсин, бунда $M'T=k\cdot MT$. Агар бунда $k>0$ бўлса, M ва M' лар биргаликда l нинг бир томонида, $k<0$ бўлса, унинг турли томонларида жойлашадилар. Жумладан, Ox ўққа нисбатан k коэффициент билан чўзиш $M(x,y)$ нуқтани координаталари $x'=x$, $y'=ky$ бўлган $M'(x',y')$ нуқтага, Oy ўққа нисбатан чўзиш эса координаталари $x'=kx$, $y'=y$ бўлган нуқтага ўтказади. Тўғри чизиққа нисбатан $k=-1$ коэффициент билан чўзиш шу тўғри чизиққа нисбатан симметриядир. Жумладан, Ox ўққа нисбатан симметрия $M(x;y)$ нуқтани $M'(x;-y)$ нуқтага, Oy ўққа нисбатан симметрия эса $M'(-x;y)$ нуқтага ўтказади.

Машқлар

7.102. Параллел кўчиришда координаталар боши $L(-1;4)$ нуқтага кўчган. $M(-2;6)$, $N(0;-8)$ нуқталарнинг образларини ва $P'(-1;5)$, $Q'(1;3)$ нуқталарнинг прообразларини топинг.

7.103. Параллел кўчиришда $K(-3;4)$ нуқта $L(-2;2)$ нуқтага кўчсин. $M(-2;6)$, $N(0;-5)$ нуқталарнинг образларини ва $A(-4;3)$, $B(4;-2)$ нуқталарнинг прообразларини топинг.

7.104. φ орқали координаталар бошини $L(-3;1)$ нуқтага ўтказувчи параллел кўчириш, g орқали ординаталар ўқига нисбатан симметрик белгиланган бўлсин. $\varphi \circ \gamma$ ва $\gamma \circ \varphi$ алмаштиришларнинг формулаларини ёзинг. Ҳосил бўладиган алмаштиришлар бир хилми? Шу алмаштиришлардаги K(5;-1), M(0;-3) нуқталарнинг образларини ва P(-3;4), Q(-2;-2) нуқталарнинг прообразларини топинг.

7.105. f орқали ординаталар ўқидан $k=3$ коэффициент билан чўзиш, φ-орқали координаталар бошини $L(3;2)$ нуқтага ўтказадиган параллел кўчириш белгиланган бўлсин. $f \circ \varphi$ ва $\varphi \circ f$ алмаштиришлар ифодасини ёзинг. $f \circ \varphi$ алмаштиришда $ABCD$ тўғри тўртбурчак қандай шаклга ўтади? Бунда $A(1;0)$, $B(6;0)$, $C(6;2)$, $D(1;2)$.

7.106. $x'=k(x-a)+a$, $y'=k(y-b)+b$ алмаштириш $L(a;b)$ нуқтага нисбатан гомотетия экани исбот қилинсин.

7.107. Қуйидаги формулалар билан берилган геометрик алмаштиришларни тавсифланг (арабча тавсиф, тушинтириб ёзиш, характеристика):

$$а)\begin{cases} x' = 3(x-6)+4, \\ y' = 3(y+1)-5; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x' = 5x-1, \\ y' = 5y+4. \end{cases}$$

2 .Функция графигини алмаштириш. 1) xOy координаталар системаси унда чизилган $y=f(x)$ функция графиги билан биргаликда $x=a$, $y=b$ бирлик қадар *параллел кўчирилган* бўлсин (45-расм, $a=4$, $b=7$). $O(0;0)$ координаталар боши $L(a;b)$ нуқтага кўчади. f графикнинг образи янги $X'LY'$ системада $y'=f(x')$ орқали ифодаланади. Бу олдинги xOy системага нисбатан $y=f(x-a)+b$ га мос. Ҳақиқатан, бирор $M(x_0;y_0)$ нуқта $f(x)$ графикда ётган ва $y_0=f(x_0)$ бўлса, унинг образи, яъни $M'(x_0+a;y_0+b)$ нуқта $y=f(x-a)+b$ графигида ётади. Чунки бу муносабатдаги x ва y лар ўрнига x_0+a, y_0+b лар қўйилса, $y_0+b=f(x_0+a-a)+b$ ёки $y_0=f(x_0)$ тенглик қайтадан ҳосил бўлади. Шу каби, агар M' нуқта $y=f(x-a)+b$ графигида ётган бўлса, унинг прообрази $y=f(x)$ графигида ётади.

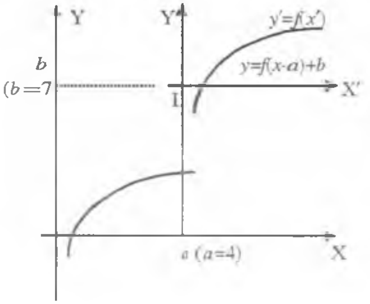
1-мисол. 46-расмда $y=f(x)$ функция графигини $x=4$ ва $y=7$ бирлик параллел кўчириш орқали $y=f(x-4)+7$ функция графигини ясаш тасвирланган.

2) Чўзиш. М$(x_0;y_0)$ нуқта f графикда ётган бўлсин: $y_0=f(x_0)$.

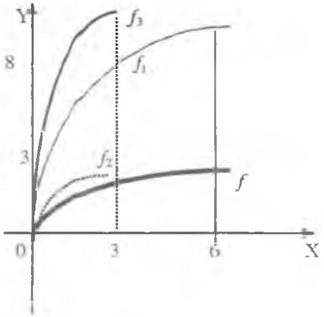
Агар f график абсциссалар ўқидан $l\neq0$ коэффициент марта, ординаталар ўқидан $k\neq0$ марта чўзилса, $y=l\,f\left(\frac{x}{k}\right)$ функция графиги ҳосил бўлади. Унда $M(x_0;y_0)$ нуқтанинг образи бўлган $M'(kx_0;\ l\,y_0)$ нуқта ётади: $l\,y_0=l\,f\left(\frac{kx_0}{k}\right)$ ёки $y_0=f(x_0)$. Аксинча, M' нуқта $y=lf\left(\frac{x}{k}\right)$ да ётган бўлса, M нуқта f графикда ётади.

Демак, Ox ўққа нисбатан l марта, Oy ўққа нисбатан k марта чўзиш орқали $y=f(x)$ функция графигидан $y=l\,f\left(\frac{x}{k}\right)$ функция графиги ҳосил қилинади.

Тўғри чизиққа нисбатан -1 га тенг коэффициент билан чўзиш шу тўғри чизиққа нисбатан симметрия бўлганидан, $y=-f(x)$ функция графиги $y=f(x)$ графигини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик



47-расм.



48-расм.

алмаштиришдан, $y=f(-x)$ графиги f графикни ординаталар ўқига нисбатан, $y=-f(-x)$ график эса fни координаталар бошига нисбатан симметрик алмаштириш билан ҳосил қилинади.

2-мисол. f функция графиги бўйича $f_1(x)=3f(x)$, $f_2(x)= f(2x)$, $f_3(x)=3f(2x)$ функциялар графикларини ясаймиз (48-расм).

Ечиш. f_1 функция графиги f графикни Ox лар ўқидан $l=3$ коэффициент билан чўзиш, яъни fдаги нуқталар ординаталарини 3 марта чўзиш орқали, f_2 график f графикни Oy ўқидан $k=\frac{1}{2}$ марта чўзиш (яъни 2 марта қисқартириш, қисиш), бунинг учун f нуқталари абсциссаларини 2 марта қисқартириш орқали, f_3 графиги эса f графигини абсциссалар ўқидан $l=3$ марта узоқлаштириш ва ординаталар ўқига $k=\frac{1}{2}$ коэффициент билан яқинлаштириш орқали ясалади.

3-мисол. $f(x)$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $y=5f(3x+6)+1$ функция графигини ясаш тартибини келтиринг.

Ечиш. Функцияни $y=5f(3(x+2))+1$ кўринишда ёзамиз.

1) Координаталар бошини L(-2;0) га ўтказадиган параллел кўчиришни; 2) Oy ўқидан $k=3$ марта чўзиш-

ни; 3) абсциссалар ўқидан $l=5$ коэффициент билан чўзишни; 4) абсциссалар ўқидан $b=1$ бирлик юқорига параллел кўчиришни бажарамиз.

Изоҳ: Функция ифодасини бошқа кўринишга келтирмай, ишни $f(3x+6)$ графигини ясаш билан бошлаш ҳам мумкин эди.

Машқлар

7.108. 49-расмда тасвирланган $y=f(x)$ функция графигидан фойдаланиб, қуйидаги функциялар графикларини ясанг:

а) $g(x)=f(x)-3$;
б) $g(x)=f(x-2)$;
в) $g(x)=-f(x)$;
г) $g(x)=f(-x)$;
д) $g(x)=-f(-x)$;
е) $g(x)=3f(x)$;
ж) $g(x)=3f(x-2)$;
з) $g(x)=f(3x)+1$;
и) $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$;
к) $g(x)=3f\left(\frac{x}{2}\right)$;
л) $g(x)=0,5f(x)$;
м) $g(x)=0,5f(2x)$;
н) $g(x)=3f(2x-4)+5$;
о) $g(x)=|f(x-3)|$;
п) $g(x)=-3f(2x-4)-5$;
р) $g(x)=f(3-x)$.

7.109. $y=|x|$ функциянинг графигидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=|x|-3$;
б) $y=|x+1|-3$;
в) $y=-|x|$;
г) $y=|-x|$;
д) $y=|-2-3x|$;
з) $y=3\left|\frac{x}{2}\right|$;
и) $y=3|x-2|-4$;
к) $y=-2|-3x|-4$;
л) $y=3|2x-4|+5$;
м) $y=-5|2x-4|+1$;

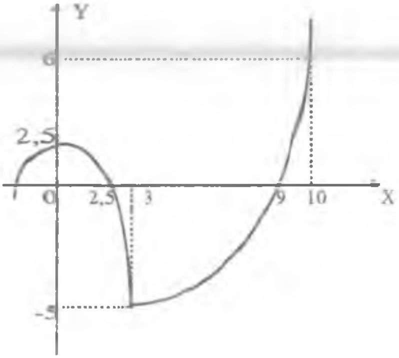
е) $y=3|x|$; н) $y=|3-x|$;

ж) $y=\left|\frac{x}{2}\right|$; о) $y=|2-4x|+3$.

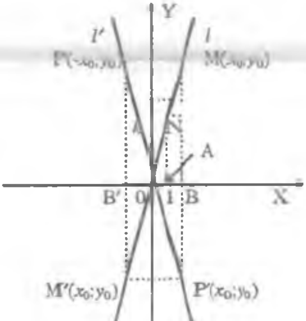
3. Чизиқли функция графиги. 1) l тўғри чизиқ координаталар текислигининг биринчи ва учинчи чораклари ва O(0;0) координаталар бошидан ўтсин (50-расм). Унда O нуқтага нисбатан симметрик $M(x_0;y_0)$, $M'(-x_0;-y_0)$ нуқталарни ва $N(1;k)$ нуқтани белгилаймиз. $\alpha=<l0x$ — тўғри чизиқ билан абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши орасидаги ўткир бурчак,

$k=\frac{y_0}{x_0}=tg\,\alpha>0$ – тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти. ΔOAN ва $\Delta OB'M'$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{k}{1}=\frac{y_0}{x_0}$ ёки $y_0=kx_0$ бўлади. Шу каби ΔOAN ва $\Delta OB'M'$ ўхшашлигидан $y_0=kx_0$, $k>0$ ни оламиз.

l тўғри чизиққа ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлган l' тўғри чизиқни қарайлик. P нуқта M га, P' нуқта M' га симметрик бўлсин. $\frac{k}{1}=\frac{y_0}{-x_0}=\frac{-y_0}{x_0}$



49-расм.



50-расм.

пропорцияга эга бўламиз. $y_0 = -kx_0$ бўлади, бунда $k= =-tga$, $a=Pl'Ox$ — ўтмас бурчак.

Шундай қилиб, координаталар бошидан ўтувчи ва $k>0$ да абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ўткир бурчак, $k<0$ да эса ўтмас бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ $y = kx$ функциянинг графигидан иборат;

2) $y = kx+l$ *чизиқли функция* графиги $y = kx$ функция графигини ордината ўқи бўйича l бирлик параллел кўчириш билан ҳосил қилинади. Бундан бир хил k коэффициентли чизиқли функцияларнинг графиклари ўзаро параллел бўлиши келиб чиқади.

Координата текислигидаги $L(a;b)$ нуқта орқали бурчак коэффициенти k га тенг бўлган фақат битта тўғри чизиқ ўтади, бунда k — олдиндан берилган сон. Унинг тенгламаси $y = k\,(x-a)+b$. Чизиқ $y = kx$ функция графигини параллел кўчириш билан ҳосил қилинади, бунда $O\,(0;0)$ координаталар боши $L(a;b)$ нуқтага ўтади.

Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш учун тўғри чизиққа қарашли $M(x_1;y_1)$ ва $N(x_2;y_2)$ нуқталарнинг координаталари тўғри чизиқ тенгламасига қўйилиб, ҳосил бўладиган система ечилади:

$$\begin{cases} y = k\,(x - x_1) + y_1, \\ y = k\,(x - x_2) + y_2, \end{cases} \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

$M(x_1;y_1)$ ва $N(x_2;y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламаси $y=k(x-x_1)+y_1$ муносабатга $k=\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ифодани қўйиш билан ҳосил қилинади:

$$y=\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ ёки } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

бунда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

1 - мисол. $M(2;-3)$ нуқтадан ўтувчи ва $y=5x-6$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизиқ $y=5x-6$ тўғри чизиққа параллел, демак, унинг бурчак коэффициенти ҳам $k=5$. Тўғри чизиқ $M(2;-3)$ нуқтадан ўтади. Демак, унинг тенгламаси $y=5(x-2)-3$ ёки $y=5x-13$.

2 - мисол. $M(-2;-3)$ ва $N(4;-1)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузамиз.

Ечиш. (2) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{y-(-3)}{-1-(-3)}=\frac{x-(-2)}{4-(-2)},\ \text{бундан}\ y=\frac{1}{3}x-2\frac{1}{3}.$$

Машқлар

7.110. Координаталар боши ва M нуқта устидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг:

1) $M(3;-4)$; 2) $M(0;-3)$; 3) $M(3;0)$; 4) $M(2;5)$.

7.111. Чизиқли функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=x-2$; б) $y=-x+3$; 3) $y=4x-2$; 4) $y=-2x-5$.

7.112. $M(-2;7)$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти $k=3$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва чизинг.

7.113. M нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти k бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг:

а) $M(-2;-1)$, $k=2$; б) $M(0;-4)$, $k=-3$;

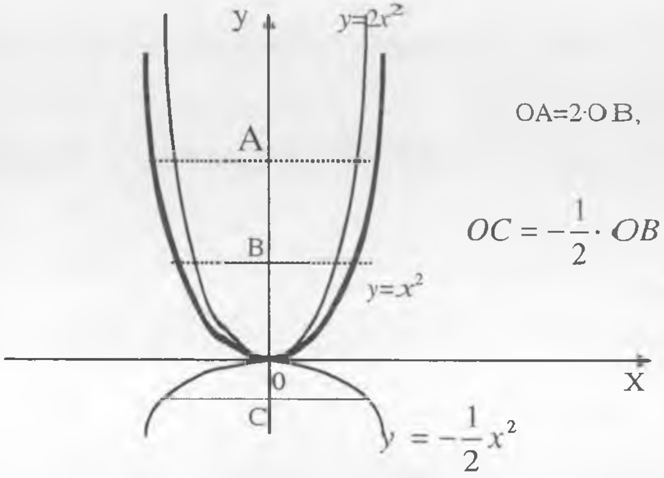
в) $M(-1;-2)$, $k=\frac{1}{3}$; г) $M(5;2)$, $k=\frac{1}{3}$.

7.114. $A(-4;6)$ нуқтадан ўтиб, $y=3x+5$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

7.115. Учлари $A(-2;0)$, $B(7;-2)$, $C(4;5)$ нуқталарда бўлган ABC учбурчакнинг:

а) томонларининг тенгламаларини;

б) медианаларининг тенгламаларини тузинг.



51-расм.

7.116. $y=|x+2|+|x-5|$ функция графигини ясанг.

7.117. а) $y\leq-2x+7$ ва $y\geq x+6$; б) $y\geq 4x-3$ ва $y\leq-2x+2$ лар ўринли бўлган соҳаларни тасвирланг.

4. Квадрат функция графиги. $y=x^2$ функция бизга қуйи синфлардан таниш. Унинг графиги, учи координаталар боши $O(0;0)$ нуқтада ва тармоқлари юқорига йўналган парабола (51-расм). $y=ax^2$ функция графиги эса x^2 параболани абсциссалар ўқидан a коэффициент билан чўзиш ($|a|>1$ да) ёки қисиш ($|a|<1$ да) орқали ҳосил қилинади. $a<0$ да $y=ax^2$ парабола Ox ўқига нисбатан симметрик аксланади. Ихтиёрий $a\neq0$ да $y=ax^2$ функция графиги параболадан иборат.

$y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ функция графигини ясаш мақсадида ифодани $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ ёки $y=a(x\alpha)^2+$ $+b$ кўринишга келтирамиз, бунда $-\alpha=\frac{b}{2a}$, $\beta=\frac{4ac-b}{4a}$.

Бундан кўринадики, $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги $y=ax^2$ параболани Oy ўққа нисбатан α қадар ва

Ox ўққа нисбатан β қадар параллел кўчириш орқали ҳосил қилинади, бунда параболанинг *O* (0;0) учи $L(\alpha;\beta)$ нуқтага ўтади.

Машқлар

7.118. Функцияларнинг графикларини ясанг:
а) $y=x^2+6x-20$; б) $y=-x^2-6x+20$;
в) $y=3x^2-6x+4$; г) $y=2x-x^2$;
д) $y=6-4x-x^2$; е) $y=2x^2+8x-1$.

7.119. A, B, C нуқталардан ўтувчи параболани ясанг ва тенгламасини тузинг:
а) A(2;-1), B(1;3), C(0;2);
б) A(1;1), B(2;3), C(0;2);
в) A(-2;1), B(5;-1), C(4;2);
д) A(2;0), B(3;-6),C(4;1).

7.120. $y=ax^2$ параболадаги $M(x_0;y_0)$ нуқтадан k бурчак коэффициентли кесувчи тўғри чизиқ ўтказилган. Парабола ва тўғри чизиқнинг иккинчи кесишиш нуқтаси x_1 абсциссасини x_0 ва k орқали топинг. k нинг қандай қийматида кесувчи *M* нуқтада параболага уринувчи бўлиб қолади?

7.121. x_0 абсциссали нуқтада $y=ax^2+b$ параболага уринувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг, бунда:
а) $a=-1, b=1, x_0=3$; б) $a=4$, $b=2$, $x_0=2$.

5. Каср-чизиқли функция графиги. Икки чизиқли функциянинг нисбатидан иборат

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (1)$$

каср-чизиқли функция графиги қуйи синфлардан маълум бўлган $y=\frac{1}{x}$ гиперболани алмаштириш орқали ясалиши мумкин:

1) агар $c=0$, $d\neq0$ бўлса, (1) муносабат $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ чизиқли функцияга айланади, унинг графиги тўғри чизиқдан иборат;

2) $c\neq0, \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=m$ бўлса, $y=\frac{mcx+md}{cx+d}=m$ ва (1) функция графиги Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ бўлади. Лекин ундан $M\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ нуқта чиқарилиши керак, чунки $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$ да (1) муносабат маънога эга бўлмайди;

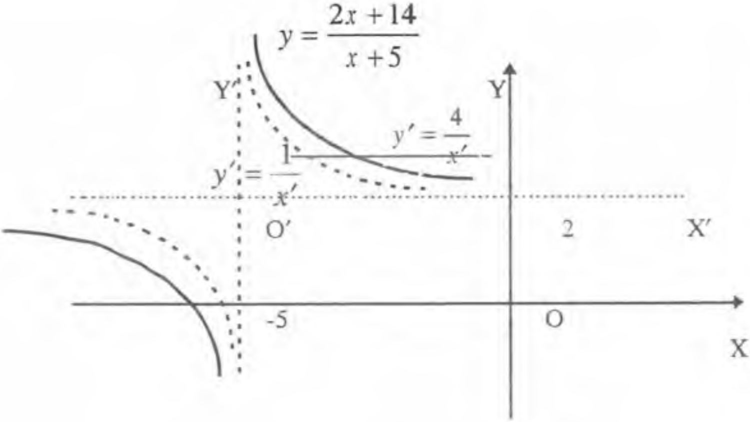
3) $a\neq0$, $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$. Олдин $\frac{ax+b}{cx+d}$ касрдан бутун қисм ажратамиз: $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}=\beta+\frac{k}{x-\gamma}$, бунда

$$b=\frac{a}{c},\ k=\frac{bc-ad}{c^2},\ g=-\frac{d}{c}. \qquad (2)$$

Бундан кўринадики, $y=\frac{x+b}{cx+d}$ функция графиги $y=\frac{k}{x}$ функция графигини параллел кўчиришлар билан ҳосил қилинади, бунда координаталар боши $L(\gamma;\beta)$ нуқтага ўтади, γ, β ва k лар (2) формулалар бўйича топилади.

1-мисол. $y=\frac{2x+14}{x+5}$ функция графигини ясанг (52-расм).

Ечиш. Касрдан бутун қисмни ажратамиз: $\frac{2x+14}{x+5}=2+\frac{4}{x+5}$, унда $k=4$, $\gamma=-5$, $\beta=2$. O′(-5:2) нуқта-



52-расм.

дан ёрдамчи $O'x'$, $O'y'$ координаталар ўқларини ўтказамиз. Уларда $y=\frac{1}{x}$ функция графигини, сўнг $y=\frac{k}{x}$ функция графигини ясаймиз. Бу график xOy координаталар системасида $y=\frac{2x+14}{x+5}$ нинг графиги бўлади.

Машқлар

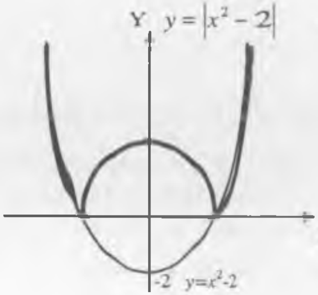
7.122. Функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=\frac{2x-5}{x+1}$; б) $y=\frac{-3x+2}{2x-3}$; в) $y=\frac{4x+1}{2x-3}$;

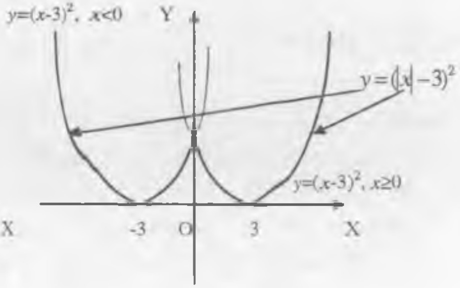
г) $y=\frac{3x+4}{2x-1}$; д) $y=\frac{x+9}{-3x+1}$; е) $y=\frac{6x+1}{4x-2}$.

7.123. A, B, C нуқталар устидан ўтувчи $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ функция графигини ясанг:

а) A(-2;0), B(1;4), C(0;2);
б) A(1;-3), B(3;2), C(-1;3);



53-расм.



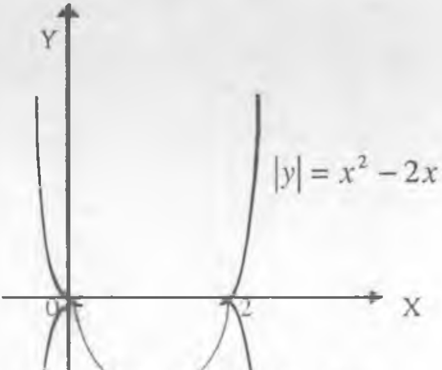
54-расм.

в) A(4;-3), B(2;1), C(3;-4);
г) A(-5;1), B(-2;3), C(-1;5).

6. Ифодаси модул ишорасига эга функцияларнинг графиги.

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{агар } f(x)\geq 0 \text{ бўлса,}\\ -f(x), & \text{агар } f(x)<0 \text{ бўлса,}\end{cases}$$

эканини биз биламиз. Бундан кўринадики, $|f|$ графигини ясаш учун олдин f графигини ясаш, сўнг унинг $y\geq0$ ярим текисликдаги қисмини ўз жойида қолдириб, $y<0$ ярим текисликдаги қисмини эса Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш керак. 53-расмда $y=|x^2-2|$ графигини $y=x^2-2$ графигидан фойдаланиб ясаш тасвирланган.



55-расм.

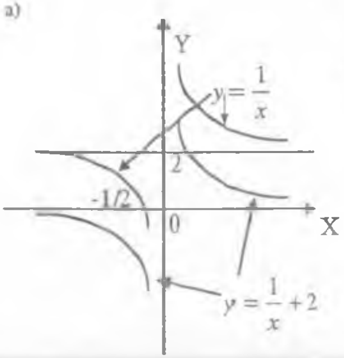
$$2)\ f(|x|)=\begin{cases} f(x), & x \le 0, \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

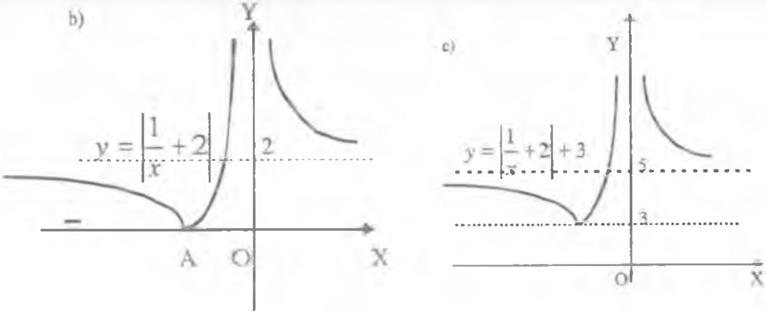
муносабатдан кўринадики $y=f(|x|)$ графиги $f(x)$ функция графигининг $x \geq 0$ ярим текислигидаги қисми ҳамда унинг Оy ўқига нисбатан симметрик аксидан ташкил топади. 54-расмда $y=(|x|-3)^2$ графигини $y=(x-3)^2$ графигидан фойдаланиб ясаш тасвирланган.

3) 55-расмда $|y|=x^2-2x$ боғланиш графигини $y=x^2-2x$ графигидан фойдаланиб ясаш тасвирланган.

1 - мисол. $y=\left|\frac{1}{x}+2\right|+3$ функция графигини ясаймиз.

Ечиш. а) Даставвал $y=\frac{1}{x}$ функция графигини, сўнгра шу график бўйича $y=\frac{1}{x}+2$ графигини ясаймиз (56-*а* расм); б) x нинг ҳар қандай қийматида $y=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geq 0$. Шунга кўра, $y=\frac{1}{x}+2$ графигининг -1/2<





56-расм.

$<x<2$ да Ox ўқи остида турган қисмини Ox ўқига нисбатан симметрик акслантирамиз (56-*b* расм). Бунда $x=-\frac{1}{y}$ қиймат $y=0$, яъни $\frac{1}{x}+2=0$ бўйича топилади; с) талаб қилинаётган $y=\left|\frac{1}{x}+2\right|+3$ графикни ясаш учун $y=\left|\frac{1}{x}+2\right|$ графиги 3 бирлик юқорига параллел кўчирилади (56-*c* расм).

Машқлар

7.124. Функциялар графигини ясанг:

а) $y=|x^2-3x+2|$;

б) $y=x^2-2|x|-3$;

в) $y=|x^2-3x|+2$;

г) $y=||x-2|-3x|$;

д) $y=|x-1|+|x-3|$;

е) $y=\left|\frac{x+4}{x+1}\right|$;

ж) $y=\frac{|x|-4}{|x|-2}$;

з) $y=\left|x+\frac{1}{x}-1\right|$;

и) $y=\frac{|x|-4}{x+1}$;

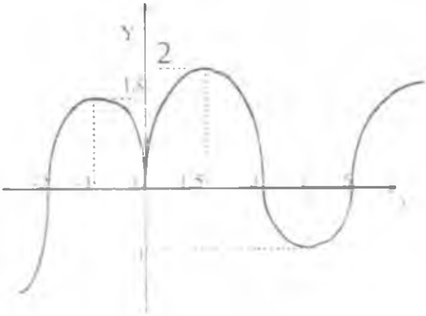
к) $y=\frac{x-3}{|x|+1}$;

л) $y=\frac{1}{|3x-1|+|x|}$;

м) $y=\frac{1}{|x|+|x-2|-3}$.

7.125. Қуйидаги тенгликларни қаноатлантирувчи $M(x;y)$ нуқталар тўпламини ясанг:

а) $x-2|x|=y-2|y|$; б) $x+2|x|=y-2|y|$;



57-расм.

в) $x-2|x|=y+2|y|$;

г) $x+2|x|=y+2|y|$;

д) $x-2[x]=y-2[y]$;

с) $[x]=2[y]$.

7.126. Қуйидаги тенгликларни қаноатлантирувчи М(х;y) нуқталар тўпламини топинг:

а) $|y|=x^2-3x+2$; б) $|y|=\frac{x+1}{x-2}$;

в) $|y|=\frac{|x|+2}{|x|-2}$ г) $|y|=\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$

7.127. 57-расмда $y=f(x)$ функция графиги тасвирланган. Ундан фойдаланиб,қуйидаги функциялар графикларини ясанг:

а) $y=|f(x)|$; б) $y=-|f(x)|$; в) $y=f(|x|)$;

г) $y=|f(|x|)|$; д) $y=-|f(|x|)|$; е) $y=-|f(-|x|)$;

ж) $y=|f(-|x|)$; з) $y=|-f(-|x|)|$.

7.128. 57-расмда тасвирланган $f(x)$ функция графигидан фойдаланиб, ушбу тенгликларни қаноатлантирувчи М(x;y) нуқталар тўпламларини тасвирланг:

а) $|y|=f(x)$; б) $|y|=f(-x)$;

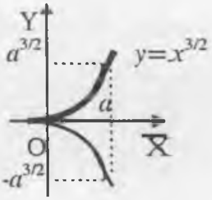
в) $|y|=-f(x)$; г) $|y|=-|f(x)|$;

д) $|y|=f(|x|)$; е) $|y|=-f(|x|)$.

Бу тенгликлар функцияни ифодалайдими?

7. Даражали функция графиги. α ҳақиқий сон ва ихтиёрий x мусбат сон учун x^α сони ҳар вақт аниқланган бўлади. $x<0$ ва $\alpha=\frac{m}{n}$ бўлганда у=x^α функция аниқланмаган. Биз $x>0$ ҳол билан шуғулланамиз.

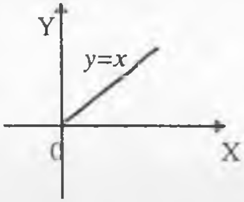
Ҳар қандай α ҳақиқий сон учун (0; +∞) мусбат сонлар тўпламида аниқланган $y=x\alpha$ функция мавжуд. Унга α кўрсаткичли *даражали функция* дейилади, бунда x—даражанинг асоси. Даражали функция $x=1$ да $y=1$ дан иборат *доимий функция*га айланади. Даражали функциянинг хоссалари ҳақиқий кўрсаткичли даражанинг хоссаларига ўхшашдир. Улардан айримларини эсга келтирамиз:



58-расм.

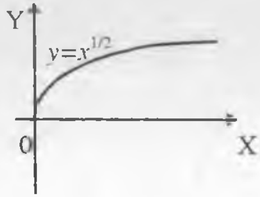
1. Даражали функция барча $x>0$ қийматларда аниқланган.

2. Даражали функция (0; +∞) да мусбат қийматлар қабул қилади.



59-расм.

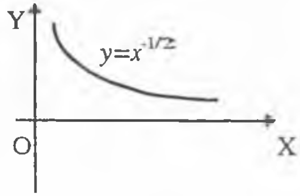
3. $\alpha>0$ да даражали функция (0;1) оралиқда монотон камаяди, [1;+∞) да монотон ўсади.



60-расм.

Даражали функция ўзининг аниқланиш соҳасида бир қийматли, фақат α кўрсаткич жуфт махражли қисқармайдиган каср сон бўлган ҳолдагина икки қийматли бўлади. Кўп ҳолларда даражали функциянинг икки қийматидан манфий бўлмаган (арифметик) қиймати танлаб олинади.

$x>0$ да a даража кўрсаткичи турлича бўлган даражали функция графиклари 58—59-расмларда тасвирланган. 58-расмда —$y=x^{3/2}$ ярим кубик парабола тасвирланган.



61-расм.

Машқлар

7.129. Функциялар графикларининг эскизларини чизинг:

а) $y=x^{1/5}$;
б) $y=x^{-1/5}$;
в) $y=x^{5}$;
г) $y=x^{-5}$;
д) $y=|x^{1/5}|$;
е) $y=(x-1)^{1/5}$;
ж) $y=(x+1)^{1/5}$;
з) $y=|x-1|^{1/3}$;
и) $y=|x-1|^{1/3}+1$;
к) $y=|81x-243|^{1/4}$;
л) $y=(2x)^{3}$;
м) $y=(2x)^{1/3}$.

7.130. $f(x)=\sqrt{x^4}-x$ нинг $x=-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ -8;\ 8$ га мос қийматларини топинг ва графигини ясанг.

7.131. R радиусли доирага ички чизилган тенг ёнли учбурчакнинг юзини унинг баландлигининг функцияси сифатида ифодаланг.

7.132. Юзи S га тенг бўлган учбурчак юзини унинг: 1) асоси узунлигининг ва 2) баландлиги узунлигининг функцияси сифатида ифодаланг.

7.133. Мунтазам олтибурчак юзини унинг томони узунлигининг функцияси сифатида ифодаланг.

3-§. Функцияларни текшириш

1. Жуфт ва тоқ функциялар. Агар X тўпламнинг ҳар қандай x элементи учун $-x\in X$ бўлса, X тўплам O(O;0) нуқтага нисбатан симметрик тўплам дейилади. Масалан, $(-\infty+\infty)$, $[-2;2]$, $(-3;3)$, $(-8;-2)\cup[2;8)$ тўпламларнинг ҳар бири $O(0;0)$ нуқтага нисбатан симметрик тўпламдир. $(-3;2)$ тўплам эса $O(0;0)$ нуқтага нисбатан симмегрик бўлмаган тўпламдир.

Аниқланиш соҳаси $O(0;0)$ нуқтага нисбатан симметрик бўлган тўпламда $y=f(x)$ функция учун $\forall x\in B(f)$ ларда $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ функция *жуфт функция*, $f(-x)=-f(x)$ тенглик бажарилганда эса *тоқ функция* дейилади. Масалан, $f(x)=2x^2+3$ — жуфт функция, чунки $f(-x)=2(-x)^2+3=2x^2+3=f(x)$. Шунингдек, $y=|x|$, $y=x^4$ лар ҳам жуфт функциялардир. $(-x)^5=-x^5$, демак, $y=x^5$ - тоқ функция. Умуман, $x^{2n}, n\in N$, функциялар жуфт, x^{2n-1}, $n\in N$ функциялар тоқ функциялардир. Таърифларга қараганда тоқ функция графиги координата бошига нисбатан, жуфт функция графиги эса ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашади. Жуфт ва тоқ функция аниқланиш соҳаси координата бошига нисбатан симметрик жойлашади.

1 - мисол. x^7 функциянинг $-4 \le x \le 5$ ва $-6 \le x \le 6$ да симметриклигини текширинг.

Ечиш. Функция берилган $[-4;5]$ оралиқ координаталар бошига нисбатан симметрик эмас. Демак, функция ҳам бу соҳада симметрик эмас. $[-6;6]$ оралиқда $O(0;0)$га нисбатан симметрик, $(-x)^7=-x^7$. Демак, бу соҳада функция тоқ.

Функцияларни жуфт-тоқликка текширишда қуйидаги таъкидлардан ҳам фойдаланамиз:

а) $f(x)$ функция $D(f)$ да, $g(x)$ функция $D(g)$ да аниқланган бўлсин. Агар умумий $x\in D(f)\cap D(g)$ аниқланиш соҳасида $f(x)$ ва $g(x)$ функция бир вақтда жуфт (ёки тоқ) бўлса, уларнинг $(f+g)(x)$ йиғиндиси ҳам жуфт (тоқ) бўлади. Ҳақиқатан, $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$; $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f-g=-(f+g)(x)$;

б) иккита жуфт (тоқ) функция кўпайтмаси жуфт функция, тоқ ва жуфт функциялар кўпайтмаси эса тоқ функция бўлади. Ҳақиқатан, f ва g функциялар жуфт бўлса, $(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=(fg)(x)$. Қолган ҳоллар ҳам шу каби исботланади.

2 - мисол. $f(x)=a$, $a\in R$ доимий функция жуфт функциядир. Чунки $y=a$ функция графиги Ox ўқига параллел ва Oy ўқига нисбатан симметрик жойлашган тўғри чизиқдан иборат. Шунга кўра, агар f функция жуфт (тоқ) бўлса, af функция ҳам жуфт (тоқ) функ-

ция бўлади. Агар f ва g функциялар жуфт (тоқ) бўлса, $af+bg$ функция ҳам жуфт (тоқ) функция бўлади.

3 - мисол. x^6-$2x^2$+6 — жуфт функция, чунки x^6, $2x^2$ ва 6 лар жуфт, x^5-$2x$ — тоқ функция, чунки x^5 ва $2x$ — тоқ; $(x-2)^2$ на тоқ, на жуфт, чунки унинг ёйилмаси бир турли бўлмаган (яъни жуфт ва тоқ) функциялар йиғиндиси x^2-$4x$+4 дан иборат. Кейинги хулосани яна қуйидагича ҳам исботлаш мумкин:

$$(-x-2)^2=(x+2)^2\neq(x-2)^2.$$

4 - мисол. $\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+7}$ функция $f=x^2$-4 ва $g=\frac{1}{x^6-2x^4+7}$ жуфт функцияларнинг кўпайтмаси сифатида жуфт функциядир.

Агар X сонли тўплам координаталар бошига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда шу тўпламда берилган f функцияни $\varphi=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ жуфт функция ва $\psi=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан,

$$\varphi+\psi=\frac{(f(x)+f(x))+(f(x)-f(x))}{2}=f(x)\ .$$

Машқлар

Функцияни жуфтликка текширинг.

7.134. а) $f(x)=19$; в) $g(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;
б) $\varphi(x)=0$; г) $h(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$.

7.135. а) $f(x)=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$;

б) $\varphi(x)=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

в) $g(x)=\frac{|x-7|}{x+1}+\frac{|x+7|}{x-1}$; г) $h(x)=\frac{|x-4|}{x+2}-\frac{|x+4|}{x-2}$.

7.136. а) $f(x)=(x+2)(x+3)(x+4)-(x-2)(x-3)(x-4)$;

б) $\varphi(x)=(x-5)^8(x+7)^{11}+(x+5)^8(x-7)^{11}$;

в) $g(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$;

г) $h(x)=(x^2-3x+5)(x^3-8x^2+2x-1)-(x^2+3x+5)\cdot$
$\cdot(x^3+8x^2+2x+1)$.

7.137. а) $f(x)\dfrac{x^3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$;

б) $\varphi(x)=\dfrac{x^5-2x^2+3}{x-4}+\dfrac{x^5+2x^2+3}{x+4}$;

в) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}+\dfrac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$;

г) $h(x)=\dfrac{(x-2)^3(x+1)^5(x-5)^7}{2x+1}+\dfrac{(x+2)^3(x-1)^5(x+5)^7}{2x-1}$.

7.138. а) $f(x)=8^{x^2}$;

б) $f(x)=4{,}3^x$;

в) $f(x)=x^3+3x^2-5$;

г) $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2+1$.

Функцияни жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланг:

7.139. а) $f(x)=|x+1|\cdot x^2-1$;

б) $f(x)=|2x-3|+x^2-1$;

в) $\varphi(x)=(x+3)|x-1|+|x+1|x$;

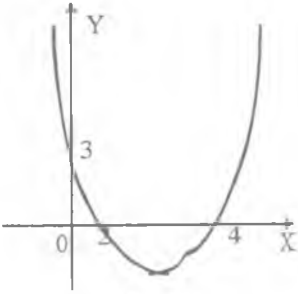
г) $g(x)=|x-1||x+1||x+2|x+3|x|(x-1)$.

7.140. а) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+3)^3}{2x+1}-\dfrac{(x+2)^2}{x-1}$;

б) $f(x)=2(x-2)|x+3|+\dfrac{5|x|+4x^2}{x-1}$;

в) $\varphi(x) = 3|x-2|(x-1) + \dfrac{x^2-2x+1}{|x+1|}$;

г) $g(x) = 3|x^2-4x+1| + |x^2-x| + 8x^2$.



62-расм.

7.141. Графиги 62-расмда тасвирланган параболанинг тенгламасини тузинг ва уни жуфт-тоқликка текширинг.

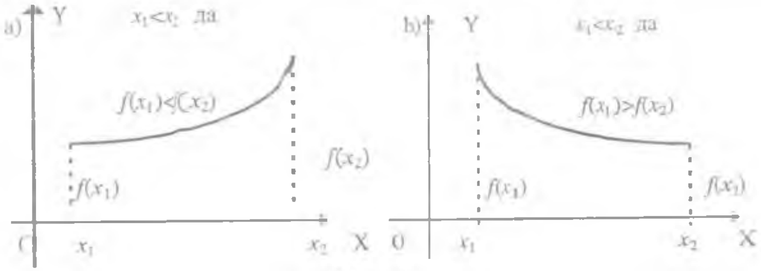
7.142. Қандай шартларда f функция графиги:

а) $x=a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади?

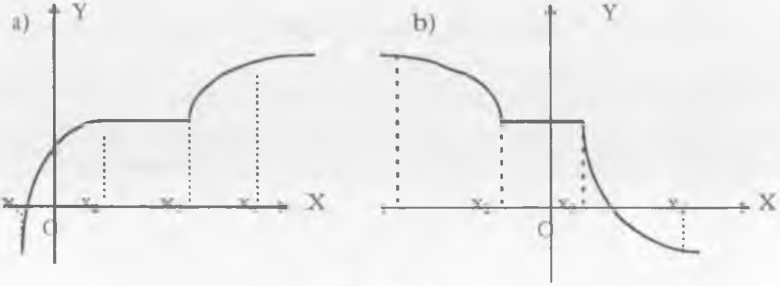
б) $M(a;b)$ нуқтага нисбатан симметрик бўлади?

2. Функция қийматларининг ўзгариши. Агар X тўпламда x аргумент қийматининг ортиши билан f функциянинг қийматлари ҳам ортса (камайса), функция шу тўпламда *ўсувчи (камаювчи) функция* дейилади. Бошқача айтганда, $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_1< x_2$ қийматларда $f(x_1)<f(x_2)$ бўлса, f функция X тўпламда ўсувчи, агар $f(x_1)> f(x_2)$ бўлса, функция камаювчи бўлади (63-*a*, *b* расм).

Агар $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_1<x_2$ да $f(x_1)\le f(x_2)$ (мос равишда $f(x_1)\ge f(x_2)$) бўлса, f функцияга X тўпламда *ноқатъий ўсувчи* (мос равишда *ноқатъий камаювчи*) дейилади.



63-расм.



64-расм.

Бундай функция графиги ўсиш (камайиш) оралиқларидан ташқари горизонталлик оралиқларига ҳам эга бўлишлари мумкин (64-*a*,*b* расм).

X тўпламда ўсувчи ёки камаювчи функцияларга шу тўпламда *монотон*, ноқатъий ўсувчи ёки ноқатъий камаювчи функцияларга шу X тўпламда *ноқатъий монотон* функциялар дейилади.

$y=x^2$ функция $(-\infty;0]$ оралиқда монотон, чунки унда камаювчи, $[0;+\infty)$ оралиқда ҳам монотон, унда ўсади, лекин $(-\infty;+\infty)$ да монотон эмас, чунки унда камаювчи ҳам эмас, ўсувчи ҳам эмас.

Функцияларнинг монотонлигини исботлашда қуйидаги таъкидлардан фойдаланиш мумкин:

1) агар X тўпламда f функция ўсувчи бўлса, ҳар қандай c сонида $f+c$ функция ҳам X да ўсади;

2) агар f функция X тўпламда ўсувчи ва $c>0$ бўлса, cf функция ҳам X да ўсади;

3) агар f функция X тўпламда ўсса, $-f$ функция унда камаяди;

4) агар f ($f(x)\neq 0$) функция X тўпламда ўсса ва ўз ишорасини сақласа, $1/f$ функция шу тўпламда камаяди;

5) агар f ва g функциялар X тўпламда ўсувчи бўлсалар, уларнинг $f+g$ йиғиндиси ҳам шу тўпламда ўсади;

6) агар f ва g функциялар X тўпламда ўсувчи ва номанфий бўлсалар, уларнинг fg кўпайтмаси ҳам шу тўпламда ўсувчи бўлади;

7) агар f функция X тўпламда ўсувчи ва номанфий, n эса натурал сон бўлса, f^n функция ҳам шу тўпламда ўсувчи бўлади;

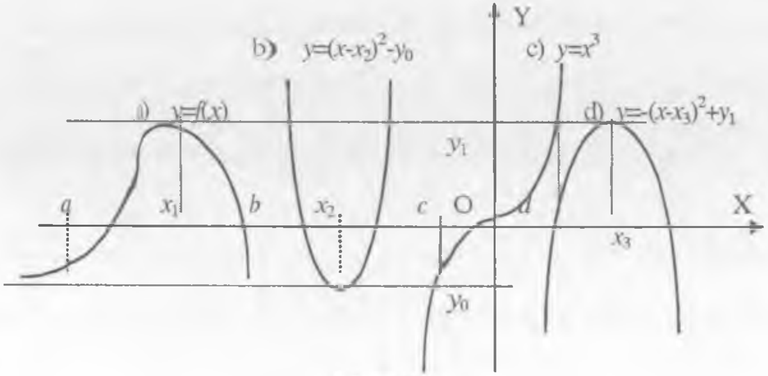
8) агар f функция X тўпламда ўсувчи, g функция эса f функциянинг $E(f)$ қийматлари тўпламида ўсувчи бўлса, бу функцияларнинг gof композицияси ҳам X да ўсувчи бўлади.

Бу таъкидлар тенгсизликларнинг хоссалари ва функцияларнинг ўсиши ва камайиши таърифларидан келиб чиқади (23-машққа ва 2-боб, 4-§, 2-в. га ҳам қаранг). Масалан, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ да $f(x_1) < f(x_2)$, $g(x_1) < g(x_2)$ бўлсин. Тенгсизликларнинг е) хоссасига мувофиқ $f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2)$ га эга бўламиз. Бу эса $f+g$ функциянинг X да ўсувчи бўлишини кўрсатади.

1-мисол. $f=\frac{1}{x^6+4x^3+1}$ функциянинг $[0; +\infty)$ ярим ўқда камаювчи эканини исбот қиламиз.

Ечиш. $y=x$ функция $[0;+\infty)$ ярим ўқда номанфий ва ўсувчи. 2) ва 7) таъкидларга кўра, x^6 ва $4x^3$ функциялар ҳам шу ярим ўқда ўсади. У ҳолда 1) ва 5) таъкидларга кўра x^6+4x^3+1 функция $[0;+\infty)$ да ўсади, 4) таъкидга кўра $\frac{1}{x^6+4x^3+1}$ функция камаяди.

Агар функция $[a;x_1]$ да ўсиб, $[x_1;b]$ да камаювчи бўлса, унинг x_1 даги $f(x_1)$ қиймати $[a;b]$ даги қолган барча қийматларидан катта бўлади (65-*a* расм). Масалан, $y=-(x-x_3)^2+y_1$ функция $(-\infty\ ;+\infty)$ да энг катта қийматга эришади, $y_{\text{энг катта}}=y_1$ (65-*d* расм). Аксинча, $y=(x-x_2)^2+y_0$ функция $(-\infty\ ;x_2]$ ораликда камайиб, $[x_2;+\infty)$ да ўсади (65-*b* расм). Унинг x_2 даги y_0 қиймати $(-\infty;+\infty)$ даги қолган барча қийматларидан кичик: $y_{\text{энг кичик}}= y_0$. 65-*a* расмда графиги $y=y_0$ ва $y=y_1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $f(x)$ функция тасвирланган. 65-*b* расмда параболанинг тармоқлари юқорига чексиз йўналган: $y=+\infty$ ёки $y\to+\infty$. Бу функ-



65-расм.

ция юқоридан чегараланган эмас, қуйидан $y=y_0$ тўғри чизиқ билан чегараланган. Шу каби, 65-расмда тасвирланган функция юқоридан $y=y_1$ билан чегараланган, $y=x^3$ функция эса (65-c расм) юқоридан ҳам, қуйидан ҳам чегараланган эмас. Лекин $[c;d]$ оралиқда бу функция $y=y_1$ ва $y=y_0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган бўлади.

Агар шундай M ҳақиқий сони мавжуд бўлиб, барча $x\in X$ сонлари учун $f(x) \geq M$ (мос равишда $f(x) \leq M$) тенгсизлик бажарилса, f функция X тўпламда *қуйидан чегараланган* (*юқоридан чегараланган*) дейилади. Агар функция X тўпламда ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у шу тўпламда *чегараланган* дейилади.

2-мисол. $y=-x^2$ функцияни қараймиз. Барча $x\in(-\infty;+\infty)$ сонлари учун $-x^2 \leq 0$ бўлгани учун бу функция $(-\infty;+\infty)$ оралиқда юқоридан чегаралангандир.

3-мисол. $y=x^2$ функция $(-\infty;+\infty)$ оралиқда қуйидан чегараланган функциядир, чунки барча $x\in(-\infty;+\infty)$ сонлари учун $y(x)=x^2\geq 0$ тенгсизлик бажарилади.

4-мисол. $y=x$ функция $(0;1)$ оралиқда қуйидан 0 сони билан, юқоридан эса 1 сони билан чегараланган эканини кўриш қийин эмас. Демак, бу функция $(0;1)$ оралиқда чегаралангандир.

Агар ихтиёрий M ҳақиқий сони учун, шундай бир $x \in X$ сон топилиб, $f(x)>M$ ($f(x)<M$) тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда қуйидан (мос равишда, юқоридан) чегараланмаган дейилади.

Агар f функция X тўпламда ё қуйидан, ё юқоридан, ёки ҳар икки томондан чегараланмаган бўлса, бу функция X тўпламда чегараланмаган функция дейилади.

Машқлар

7.143. Функцияларнинг чегараланганлигини исбот қилинг:

а) $y=\frac{1}{1+x^2}$; б) $y=\frac{2}{4+x^2}$.

7.144. Функцияларнинг чегараланмаганлигини исбот қилинг:

а) $y=\frac{1}{1-x^2}$; б) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$.

7.145. а) $y=\frac{5}{2x+1}$ функция (-∞;-0,5) да камайишини;

б) $y=\frac{4}{2-x}$ функция (2;+∞) да ўсишини;

в) $y=\frac{21x-9}{3x-1}$ функция (-∞;1/3) да ўсишини;

г) $y=\frac{4x+31}{x+7}$ функция (-7; ∞) да камайишини

исботланг.

7.146. а) $y=3x^2-4x+7$ функция (-∞; 2/3] да камайишини;

б) $y=-5x^2+6x+19$ функция (-∞; 0,6] да ўсишини;

в) $y=3\sqrt{4x+1}-1$ функция [-0,25; +∞) да камайишини;

г) $y = 2+\sqrt{3-5x}$ функция (-∞; 0,6] да камайишини исботланг.

7.147. а) $y=x^3$-$3x$ функция [1;+ ∞) да ўсишини;
б) $y=12x$-x^3 функция [2;+ ∞) да камайишини;
в) $y = 0{,}5x^2 - 2\sqrt{x}$ функция [1; ∞) да ўсишини ва [0; 1] да камайишини;
г) $y = \sqrt{x} - 2x^2$ функция [0;0,25] да ўсишини ва [0,25;+ ∞) да камайишини исботланг.

7.148. $f(x)=x^2$ функция берилган. Аргументнинг ҳар қандай x_1 ва x_2 қийматларида $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ бўлишини исботланг.

7.149. $f(x) = \sqrt{x}$ функция берилган. Аргументнинг ҳар қандай x_1 ва x_2 қийматларида $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ бўлишини исботланг.

7.150. $f(x)=x^2-4x+4$ ва $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$ функциялар берилган:
а) $f(x)$ функция [2;+ ∞) да ўсишини исботланг;
б) $g(x)$ функция [2;+ ∞) да камайишини исботланг;
в) aнинг $f(3)=g(3)$ бўладиган барча қийматларини топинг;
г) $(x-2)^2 = \frac{6}{x+3}$ тенгламани [2;+∞) оралиқда ечинг.

7.151. $f(x)=(x-3)^2$ ва $g(x)=\frac{a^2+1}{4-x}$ функциялар берилган:

а) $f(x)$ функция $(-\infty;3]$ да камайишини исботланг;

б) $g(x)$ функция $(-\infty;3]$ да ўсишини исботланг;

в) a нинг $f(2)=g(2)$ бўладиган барча қийматларини топинг;

г) $x^2-6x+9=\frac{2}{4-x}$ тенгламани $(-\infty;3]$ оралиқда ечинг.

7.152. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи), $g(x)$ функция эса X тўпламда камаювчи (ўсувчи) бўлса, $f(x)=g(x)$ тенглама X тўпламда кўпи билан битта илдизга эга бўлишини исботланг.

7.153. Функцияларнинг нолларини топинг:

а) $f(x)=3x^2-4$;

б) $f(x)=2x^2-5x+6$;

в) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$;

г) $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}$;

д) $f(x)=|x-1|\cdot\left|\frac{x+1}{x^2-1}\right|$;

е) $f(x)=x^3+8x-x$;

ж) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$;

з) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-11x+30}$.

Функцияларнинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

7.154. $y=1-2x$.

7.155. $y=3-2x-x^2$.

7.156. $y=x^3$.

7.157. $y=\frac{1}{x+1}$.

Функцияларнинг энг катта қийматини ва аргументнинг унга мос қийматларини кўрсатинг:

7.158. $y=5-|x+8|$.

7.159. $y=2-\sqrt{x-2}$.

7.160. $y=x^2-2x+3,\quad x\in[1;5]$.

7.161. $y=-x^2-4x+1,\quad x\in[-3;0]$.

7.162. $y=\dfrac{2}{5+|3x-2|}$.

7.163. $y=\dfrac{2}{x^2-2x+2}$.

7.164. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

7.165. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

7.166. $y=\dfrac{x}{4x^2+9}$.

Функциянинг энг кичик қийматини ва аргументнинг функция бу қийматга эришадиган қийматларини топинг:

7.167. $y=\sqrt{4x^2-12x+9}-2$.

7.168. $y=3+\sqrt{x^2-3x+2}$.

7.169. $y=x^2+6x+11,\quad x\in[-4;2]$.

7.170. $y=-x^2+2x+2,\quad x\in[-1;2]$.

7.171. $y=-\dfrac{3}{|x+1|+1}$.

7.172. $y=-\dfrac{2}{x^2+1}$.

7.173. $y=-\dfrac{x}{2x^3+3}$.

7.174. $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$.

Функциялар графигини ясанг:

7.175. $f(x)$ жуфт функция учун $x\le 0$ да $f(x)=\sqrt{x}$ бўлса, $f(x)$ функция графигини ясанг.

7.176. $f(x)$ жуфт функция учун $x \le 0$ да $f(x)=x^2-3x$ бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг.

7.177. а) $f(x)$ тоқ функция учун $x \le 0$ да $f(x)=x^2$ бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг;

б) $f(x)$ тоқ функция учун $x \le 0$ да $f(x)=x^2-2x$ бўлса, $f(x)$ функция графигини ясанг.

7.178. $y=\frac{x+2}{|x+2|}(x^2+4x+3)$. **7.179.** $y=\big||\,|x|-2|-1\big|$.

7.180. $y=\big|2-|1-|x||\big|$. **7.181.** $y=\left|x^2-5|x|+6\right|$.

7.182. $y=\sqrt{4x^2-4x^2|x|+x^4}$. **7.183.** $y=\big||1-x^2|-3\big|$.

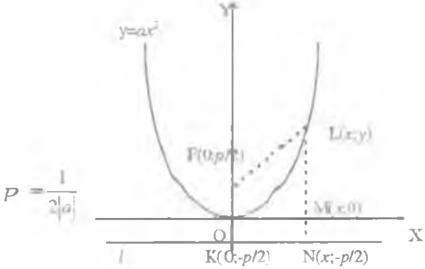
7.184. $y=\big||x^2-2x|-3\big|$. **7.185.** $y=2-\sqrt{|x-3|}$.

7.186. $y=2-\sqrt{3-|x|}$. **7.187.** $y=\left|2-\sqrt{|x-3|}\right|$.

7.188. $y=\left|2-\sqrt{3-|x|}\right|$. **7.189.** $y=\frac{|x|}{x-1}$.

7.190. $y=\frac{|x|}{|x|-1}$. **7.191.** $y=\left|\frac{x}{x-1}\right|$.

7.192. 66-расмда $y=ax^2$ парабола ва Ox ўқига параллел (l) тўғри чизиқ (*парабола директрисаси*), $F(0;p/2)$ — *парабола фокуси* тасвирланган $p=\frac{1}{2|a|}$. а) параболадаги ихтиёрий $L(x,\ y)$ нуқта учун $FL=LN$ бўлишини исбот қилинг; б) параболани $y=x$ биссектрисага нисбатан геометрик алмаштиринг, ҳосил бўладиган $x=\varphi(y)$, $y\ge 0$



66-расм.

боғланишнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини топинг; квадратик функция чекли айирмаларининг хоссаси қайси ўзгарувчига нисбатан сақланади? с) боғланишни $y=f(x)$ кўринишга келтиринг.

3. Даврий функция. Табиатда ва амалиётда маълум бир T вақт ўтиши билан қайтадан такрорланадиган жараёнлар учраб туради. Масалан, ҳар $T=12$ соатда соат стрелкаси бир марта тўлиқ айланади ва олдин бирор t вақт моментида қандай ўринда турган бўлса, кейинги $t+T$, $t+2T$, умуман, $t+kT$, $k\in Z$, вақт моментларида яна шу ўринга қайтади. Қуёш билан Ер орасидаги масофа $T=1$ йил давомида ўзгаради, иккинчи йилда ўзгариш шу кўринишда такрорланади.

Умуман, шундай Т сони мавжуд бўлсаки, $y=f(x)$ функциянинг $D(f)$ аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай x учун $x+T$, x-Т сонлари ҳам $D(f)$ га тегишли бўлса ва $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$ тенгликлар бажарилса, f функцияга *даврий функция*, T сонга шу функциянинг *даври*, энг кичик мусбат давр эса функциянинг *асосий даври* дейилади.

1-теорема. ***Агар Т сони f функциянинг даври бўлса, -Т ҳам унинг даври бўлади. Агар T_1 ва T_2 лар f функциянинг даврлари бўлса, T_1+T_2 ҳам шу функциянинг даври бўлади.***

Исбот. -Т сони f функциянинг даври экани таъриф бўйича $f(x)=f(x-T)=f(x+T)$ тенгликнинг бажарилаётганлигидан келиб чиқади. T_1+T_2 нинг давр экани шу каби исботланади: $f(t+(T_1+T_2))=f(t+T_1+T_2)=f(t+T_1)=f(t)$, $f(t-(T_1+T_2))=f(t-T_1-T_2)=f(t-T_1)=f(t)$.

Натижа. ***Агар Т сон f функциянинг даври бўлса, kT сон ҳам унинг даври бўлади, бунда k — бутун сон.***

Исбот. Математик индукция методидан фойдаланамиз. $k=1$ да теорема тўғри: $kT=T$, T эса шарт бўйича давр. Агар kT функциянинг даври булса, 1-

теоремага асосан, $kT+T=(k+1)T$ ҳам давр. У ҳолда индукция бўйича барча k бутун сонларда kT лар функциянинг даври бўлади.

2-теорема. ***Агар Т сони f функциянинг асосий даври бўлса, функциянинг қолган барча даврлари Т га бўлинади.***

Исбот. Исботни мусбат даврлар учун кўрсатиш етарли. T сони функциянинг асосий даври, T_1 эса унинг ихтиёрий мусбат даври бўлсин. T_1 нинг T га бўлинишини кўрсатамиз. Аскинча, T_1 сони T га бўлинмайди, деб фараз қилайлик. У ҳолда $T_1=kT+m$ га эга бўламиз, бунда $k\in N$, $0<m<T$. Лекин T ва T_1 сонлари давр бўлгани учун $m=T_1-kT$ сони ҳам давр бўлади (1-теоремага мувофиқ). $0<m<T$ экани ва m сони давр бўлганидан T сони асосий давр бўлолмайди. Зидлик ҳосил бўлди. Демак, фараз нотўғри. Бундан кўринадики T_1 сон T га бўлинади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Агар f даврий функция графигининг бирор $[a; a+T]$ оралиқдаги қисми ясалган бўлса, бу қисмни Ox ўқи бўйича кетма-кет параллел кўчиришлар билан қолган қисмларни ясаш мумкин.

Мисол. $y=\{x\}$ функциянинг даврийлиги ва асосий даври $T=1$ бўлишини исбот қиламиз, бунда $\{x\}=x-[x]$.

Исбот. x га ҳар қандай T бутун сон қўшилса ҳам x нинг каср қисми ўзгармайди: $\{x+T\}=\{x\}$. Демак, $\{x\}$ функция даврий функция ва ҳар қандай бутун сон унинг даври. $T=1$ сони шу функциянинг асосий даври эканини исбот қиламиз. Бунинг учун $T_1\in(0;1)$ сони $\{x\}$ нинг даври бўлолмаслигини кўрсатишимиз керак. Аскинча, у ҳам давр бўлиши мумкин, дейлик. У ҳолда $\{x+T_1\}=\{x\}$ бўлади. Хусусан, $x=0$ да $\{0+T_1\}=\{T_1\}=T_1$ га эга бўламиз. Кейинги икки тенгликдан $T_1= 0$ экани келиб чиқади. Бу эса $T_1 \in (0;1)$ бўлишига зид. Демак, T_1 сони $\{x\}$ функциянинг даври, унинг асосий даври 1 сонидан иборат.

Машқлар

7.193. Функцияларни даврийликка текширинг:

а) $y=x$; б) $y=\{x\}+1$; в) $y=5$;
г) $y=x^2$; д) $y=[x]-1$; е) $y=5+x$;
ж) $y=\{x\}$; з) $y=x^2+\{x\}$; и) $y=\{5+x\}$;
к) $y=[x]$; л) $y=[x]+x$; м) $y=[5+x]$.

7.194. Даврлари T га тенг икки функциянинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг ҳам даври T га тенг бўлишини исбот қилинг.

7.195 Агар $\frac{5}{3}$ ва $\frac{2}{7}$ сонлари f функциянинг даврлари бўлса, $\frac{17}{21}$ сони ҳам унинг даври бўлишини исбот қилинг.

7.196. Агар f ва g функциялар бир хил Т даврга эга бўлсалар, у ҳолда $F(x)= f\left(\frac{x}{k}\right)+g\left(\frac{x}{l}\right)$ функциянинг даври mT бўлишини исбот қилинг, бунда m сони k ва l нинг энг кичик умумий бўлинувчиси.

7.197. Функцияларнинг даврини топинг:

а) $y=2\left\{\frac{x}{2}\right\}+4\left\{\frac{x}{3}\right\}$; б) $y=\{2x\}+7\{3x\}$,

в) $y=\sqrt{1+\{5x\}}$, г) $y=\dfrac{2\{6x\}-\{4x\}}{3\{6x\}+\{4x\}}$;

д) $y=\{x\}+8\{5{,}1x\}$, е) $y=\sqrt{\{6x\}+\{4x\}-1}$;

ж) $y=\{3x-0{,}2\}+\{2x+0{,}3\}$;

з) $y=\sqrt{\{2{,}8x\}-\{13x+0{,}4\}+5}$.

7.198. Ҳар қандай рационал сон ушбу

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x - \text{иррационал сон.}\end{cases}$$

Дирихле функциясининг даври бўлиши, лекин унинг энг кичик мусбат даври йўқлигини исботланг.

7.199. Қуйидаги функцияларнинг даврий эмаслигини исбот қилинг:

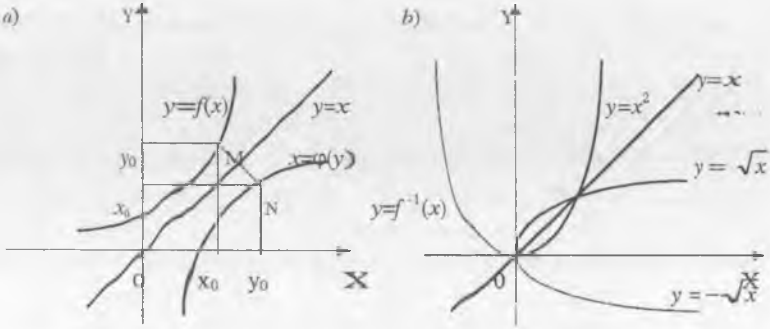
а) $y=\left\{\sqrt{2|x|}\right\}$; б) $\{x^2\}$; в) $\{x\}+\left\{x\sqrt{3}\right\}$.

7.200. $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{агар } 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & \text{агар } 1\le x<2\end{cases}$ функция берилган.

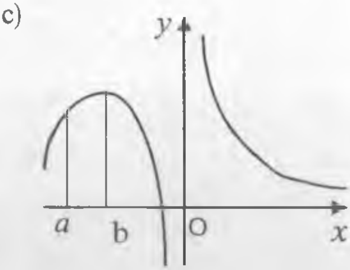
Шу функция ёрдамида даврий функция қуринг.

4. Тескари функция. Агар $b=f(a)$ тенгликни қаноатлантирувчи $(a;b)$ қийматлар жуфти $a=\varphi(b)$ тенгликни ҳам қаноатлантирса, аксинча, $a=\varphi(b)$ ни қаноатлантирувчи шу жуфт $b=f(a)$ ни ҳам қаноатлантирса, $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар *ўзаро тескари функциялар* дейилади. Бу икки функциядан ихтиёрий бирини *тўғри функция*, иккинчисини эса биринчисига нисбатан *тескари функция* деб олиш мумкин. f функцияга тескари функция f^{-1} орқали белгиланади: $f^{-1}(x)=g(x)$ ва $g^{-1}(x)=f(x)$.

Тўғри функция $y=f(x)$ бўлсин. Уни x га нисбатан ечиб, $x=\varphi(y)$ кўринишга келтирамиз. $y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ — тенг кучли муносабатлар, *битта график* би-



67-расм.



лан тасвирланадилар (67-*a* расм). Одатга кўра, функцияни *y* орқали, аргументни *x* орқали белгиласак, $x=\varphi(y)$ боғланишда *x* ва *y* ларни алмаштириб, таърифда кўрсатилганидек, $y=\varphi(x)$ ёзувни оламиз. Бу ҳолда *f* графигида ётган ҳар бир $M(x;y)$ нуқта $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан ўзига симметрик ҳолатда φ графигида ётган $N(y;x)$ нуқтага ўтади. Умуман, ўзаро тескари $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар графиклари $y=x$ биссектрисага нисбатан симметрик жойлашадилар. Лекин ҳар қандай функция тескари функцияга эга бўлавермайди. Масалан, $y=x^2$ функция бўйича функционал боғланиш бўлмаган (ҳар бир $y>0$ қийматга x нинг икки қиймати мос келадиган) $x=\pm\sqrt{y}$ муносабатга эга бўламиз. Лекин $y=x^2$, $0\le x<+\infty$ ва $x=+\sqrt{y}$ ёки $y=x^2$, $-\infty<x\le 0$, ва $x=-\sqrt{y}$ лар ўзаро тескари боғланишлардир. $x=\sqrt{y}$ ни (ҳарфларни алмаштириб) $y=\sqrt{x}$ кўринишда ёзамиз.

Уларнинг графиклари 67-*b* расмда тасвирланган.

Агар X тўпламга қарашли $x_1 \neq x_2$ қийматларда функциянинг мос қийматлари $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлса, f функция X тўпламда *тескариланувчи функция* дейилади.

Агар $f(x)$ функция X тўпламда *монотон* бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция тескариланувчи функция бўлади. Ҳақиқатан, f функция X да ўсувчи бўлсин. У ҳолда $x_1 < x_2$ ларда $f(x_1) < f(x_2)$-1, яъни $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлади. Бундай ҳол f функция X тўпламда камаювчи бўлганда ҳам ўринли. f функциянинг моногонлигидан унга тескари f^{-1} функциянинг мавжудлиги келиб чиқади. Агар f функция $[a;b]$ оралиқда ўсса (ёки камайса) ва узлуксиз бўлса, у $[f(a);f(b)]$ оралиқда (камаювчи бўлганда $[f(b);f(a)]$ оралиқда) f^{-1} тескари функцияга эга бўлади.

Машқлар

7.201. 67-*с* расмда f функция графиги тасвирланган. Шу функция $(-\infty;+\infty)$ интервалда тескари функцияга эга бўла оладими? Қандай оралиқларда тескари функцияга эга ва нима учун? Тескари функциялар графикларининг эскизларини чизинг.

7.202. Функцияга тескари функцияни топинг:

а) $f(x) = 2x+3$; б) $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$;

в) $f(x) = x^2, \quad x \in [0;+\infty]$;

г) $f(x) = x^2, \quad (-\infty;0]$;

д) $f(x) = -x^2, \ x \in (-\infty;0]$;

е) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ агар } x \in [0;1), \\ 3-x, \text{ агар } x \in [1;2). \end{cases}$

7.203. Функция тескариланувчими:

а) $f(x) = 3x^2+1$; б) $f(x) = 3x+4$;

в) $f(x) = 4x - 5$; г) $f(x)=\dfrac{3x+1}{4x-2}$;

д) $f(x)=\dfrac{7x-4}{3x+5}$; е) $f(x)=\dfrac{dx+b}{cx+d}$;

ж) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } x \in [0;1), \\ x - 1, \text{ агар } x \in [1;2]; \end{cases}$

з) $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \in [0;1), \\ -3x+1, & x \in [1;2]; \end{cases}$

и) $f(x) = \begin{cases} x^3, \ x \le 0 \text{ бўлса}, \\ x, \ x > 0 \text{ бўлса}; \end{cases}$ к) $f(x) = \dfrac{3x^2}{1-3x}$?

5. Жадвал билан берилган функция ифодасини тузиш.

1) $y=ax+b$, $a\neq 0$, чизиқли функциянинг бир хил $h=x_i-x_{i-1}$ қадам билан тузилган жадвали берилган бўлсин:

i	x_i	y_i	$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$
1	x_1	$y_1=ax_1+b$	$\Delta y_1=a(x_2-x_1)=ah$
2	x_2	$y_2=ax_2+b$	$\Delta y_2=...=ah$
3	x_3	$y_3=ax_3+b$	$\Delta y_3=...=ah$
...	...	.....	.....

Δy қийматлар функциянинг 1-тартибли *чекли айирмалари* (1-§, 2-банд, 3-мисол). $y=ax+b$ чизиқли функциянинг Δy чекли айирмалари *ўзгармас* ва ah сонга тенг. Бу хусусиятдан функция тенгламасини тузишда фойдаланамиз.

1 - мисол. Тўрт $(x_i; y_i)$ нуқтали (жуфтли) жадвал берилган:

x	1	2	3	4
y	14	14,6	15,2	15,8

$y=f(x)$ функция тенгламасини тузинг.

Ечиш. Жадвални Δy чекли айирмаларгача давом эттирайлик:

x	1	2	3	4
y	14	14,6	15,2	15,8
Δy	0,6	0,6	0,6	$=ah$

жадвал қадами $h=1$ да Δy чекли айирмалар бир хил, $\Delta y=0,6$. Демак, жадвал $y=ax+b$ чизиқли функцияни ифодалайди. a ва b коэффициентларни аниқлаймиз.

1 - усул. Номаълумлар сони иккита. Жадвалдан ихтиёрий икки жуфтни, масалан, (1;14),(3;15,2) ни $ax+b=y$ га қўйиб системани тузамиз: $\begin{cases} a\cdot 1+b=14, \\ a\cdot 3+b=15,2. \end{cases}$

Бу системадан, $a=0,6$ ва $b=13,4$ сонларини топамиз. Демак, $y=0,6x+13,4$ тенглама $y=f(x)$ функция тенгламасидир.

2 - усул. $\Delta y=ah$ бўйича $0,6=a\cdot 1$, бундан $a=0,6$. Бу қийматни ва ихтиёрий жуфтни, масалан, (1;14) ни $ax+b=y$ га қўйиб, натижадан b ни топамиз: $0,6\cdot 1+b=$ $=14$, $b=13,4$. Тенглама: $y=0,6x+13,4$.

Топилган муносабатнинг аниқлигини билиш учун унга x нинг жадвал қийматларидан қўйиш, топилган натижа билан y нинг жадвал қиймати орасидаги ε четланишни (хатони) ҳисоблаш керак. Масалан, $\varepsilon_1=(0,6\cdot 1+13,4)-14=14-14=0$. Формула аниқ натижани берган.

2 - мисол. Асоси $a=60$ мм, баландлиги $h=16$ мм бўлган ўткир бурчакли учбурчак ичига бир неча тўғри тўртбурчак шундай чизилганки, уларнинг икки учи учбурчакнинг асосида, қолган икки учи ён томонларида ётади. Тўртбурчак x (мм) баландлигининг ўзгаришига боғлиқ ҳолда асоси y (мм) нинг ўзгариши

кузатилган ва натижалар $h=5$ мм қадамли жадвалда берилган: $h=5$, $\Delta y=54-60—48-54=...=-6$,

x	0	5	10	15
y	60	54	48	42
Δy	-6	-6	-6	

$y=f(x)$ боғланишнинг тенгламасини тузамиз ва ундан фойдаланиб, $x=6$, 12, 14 га мос y нинг қийматини топамиз. Чекли айирмалар 1-мисолда мусбат эди. Қандай сабабга кўра ушбу мисолда улар манфий бўлмоқда?

Ечиш. $\Delta y=-6=const$. Боғланишни $y=ax+b$ кўринишда излаймиз. $\Delta y=ah$ бўйича $-6=a\cdot 5$, $a=-6/5$. Бу қийматни ва ихтиёрий тартибда (0;60) жуфтни $ax+b=y$ га қўямиз. Ундан $b=60$ топилади. Изланаётган боғланиш: $y=\frac{6}{5}x+60$. Унга кетма-кет $x=6$, 12, 14 лар қўйилса, $y=52,8$; 45,6; 43,2 топилади. 1-мисолда қаралган функция ўсувчи, шунга кўра унинг чекли айирмалари мусбат. Ушбу мисолда эса камаювчи функция қаралмоқда. Унинг чекли айирмалари манфий бўлади.

$h=x_i-x_{i-1}=const$ қадам билан $y=ax^2+bx+c$ квадрат функциянинг жадвалини тузайлик (лот. *constans* ёки *constantis* — константа, доимий катталик, ўзгармас):

x_1	$y_1=ax^2{}_1+bx_1+c$	$\Delta y_1=y_2-y_1=(2ax_1+b)h+ah^2$
$x_2=x_1+h$	$y_2=ax^2{}_2+bx_2+c$	$\Delta y_2=y_3-y_2=(2ax_1+b)h+3ah_2$
$x_3=x_1+2h$	$y_3=ax^2{}_3+bx_3+c$	$\Delta y_3=y_4-y_3=(2ax_1+b)h+5ah_2$
$x_4=x_1+3h$	$y_4=ax^2{}_4+bx_4+c$	

Чекли айирмалар бир хил эмас. Улар айирмаси $2ah^2$ га тенг бўлган арифметик прогрессия ташкил этмоқда.

Иккинчи айирмаларни қараймиз: $\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1=2ah^2$, $\Delta^2 y_2=\Delta y_3-\Delta y_2=2ah^2$ ва ҳоказо. Шундай қилиб, агар $y=ax^2+bx+c$ квадрат функция жадвали ўзгармас $h=x_i-x_{i-1}$ қадам билан тузилган бўлса, иккинчи айирмалар ўзгармас бўлиб, $2ah^2$ га тенг бўлади ва, аксинча, ўзгармас қадамли жадвалда иккинчи тартибли айирмалар доимий бўлса, жадвал квадрат учҳад орқали ифодаланиши мумкин.

3 - мисол. Тебраниш Т (сек) тебраниш даврининг h (m) узунлигига боғлиқлиги кузатилган ва қуйидаги жадвал тузилган (қадам $t=1$ секунд):

T	0	1	2	3	4
h	0	0,236	0,944	2,124	3,776
Δh	0,236	0,708	1,180	1,652	
$\Delta 2h$	0.472	0,472	0,472		

$h=f(T)$ функция формуласини тузинг.

Ечиш. Δ^2 айирмалар ўзгармас. $T=0$ да $h=0$ бўлган. Демак, функция графиги координаталар бошидан ўтувчи парабола. Унинг тенгламасини $h=aT^2+bT=T(aT+b)$ кўринишда излаймиз. Унда a ва b коэффициентлар номаълум. Бундаги a ни $\Delta^2 y=2ah^2$ бўйича топамиз: $0{,}472=2\cdot ah^2$, $a=0{,}236$. Энди b ни топиш учун жадвалдан ихтиёрий $(T;h)$ жуфтни, масалан, (0;0) ни тенгламага қўямиз: $a\cdot 0+b=0$, бундан $b=0$.

Демак, изланаётган тенглама $h=0{,}236\text{T}^2$ ёки $\text{T}=0{,}206\sqrt{h}$. Топилган формула физика курсидан маълум $T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ формулага жуда яқин.

4 - мисол. Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг x миқдорига унинг y таннархининг боғлиқлиги жадвали тузилган, қадами доимий эмас:

x	0,5	1	2	3	10	20
y	8,4	4,6	2,5	1,6	0,9	0,8

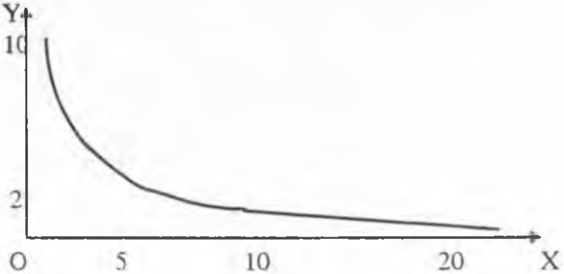
$y=f(x)$ боғланишнинг формуласини тузамиз.

Ечиш. Жадвал қадами $h=const$. Бу ҳолда чекли айирмалардан фойдалана олмаймиз. Боғланишнинг графигини нуқталар бўйича чизамиз (68-расм). Чизма гиперболанинг бир тармоғига ўхшайди. Формулани $y=a+\frac{b}{x}$ кўринишида излаймиз, унда a ва b номаълумлар қатнашмоқда. Жадвалдан ихтиёрий тартибда иккита, масалан, (0,5; 8,4) ва (4; 1,6) жуфтларни формула ифодасига қўямиз:

$$\begin{cases} 8{,}4 = a + \dfrac{b}{0{,}5}, \\ 1{,}6 = a + \dfrac{b}{4}, \end{cases}$$

бундан $a \approx 0,62$, $b \approx 3,89$, тенглама

$y \approx 0,62+\frac{3,89}{x}$ бўлади. Формула боғланишни тақрибий ифодалайди. Масалан, $x=4$ да формула бўйича $y=1,59$ ни топамиз, жадвалда эса $y=1,6$. Формула хатоси $\varepsilon=1,59-1,6=-0,01$. Аниқликни ошириш масалалари билан кейинроқ шуғулланамиз.



68-расм.

Машқлар

7. 204. Подадан таваккалига 5 та қўй ажратилиб, бўйин елкасидан думғазасигача ўлчанган (*l* , см) ва тарозида тортилган (Р, кГ). Натижа қуйидагича бўлган:

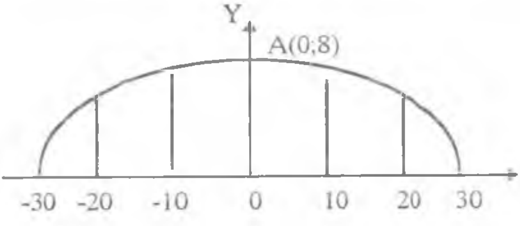
l	51	52	53	54	55
Р	37	39	41	43	45

Шу зотдаги қўйларнинг *Р* оғирлигини *l* узунликлари бўйича аниқлаш учун формула тузинг. Формуладан фойдаланиб, l =52,3; 54,5 (см) да Р (кГ) ни тақрибан аниқланг.

7.205. Уста ўз ишини x % га бажарса, ишхона ўз ишини y % га бажарган бўлади (жадвалга қаранг). Боғланиш формуласини тузинг.

x	7	14	21	28	35
y	2	4	6	8	10

7.206. Кўприк арки парабола ёйи шаклида бўлиб, аркнинг *А* учи ёйнинг ўртасида жойлашган (69-расм). Арк вертикал устунга эга, улар аркни тортиб турувчи ватар бўйича ҳар 10 м дан сўнг жойлаштирилганлар. Аркнинг баландлиги 8 м. Устунларнинг узунлиги топилсин.



69-расм.

7.207. $I(A)$ ток кучининг R (*Ом*) қаршиликка боғлиқлиги кузатилган (жадвалга қаранг), кучланиш доимий. $I=f(R)$ боғланишнинг тенгламасини тузинг.

R	20	40	60	80
I	4,99	2,49	1,67	1,25

7.208. 45-машқда агар A(0;20000) ва B(18;42000) бўлса, $y=kx+l$ (1) харажат ва $y=ax$ (2) даромад функциялари ифодаларини тузинг. Агар корхона 2592 минг сўмлик буюм ишлаб чиқарган ва уни сотган бўлса,қанча соф фойда олган бўлади?

Такрорлашга доир машқлар

7.209. Функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар соҳасини топинг:

а) $y=\sqrt{x-1}$; б) $y=\frac{x^2-4}{x^2-9}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$;

г) $y=\sqrt[3]{1+x}$; д) $y=\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+4}$; е) $y=\sqrt{x^2-1}$.

7.210. $y=x$ ва $y=\frac{x^2}{x}$ функцияларнинг аниқланиш соҳалари устма-уст тушадими? Агар устма-уст тушмаса, аниқланиш соҳаларининг умумий қисмини топинг.

7.211. Жумланинг маъносини тушунтиринг:

а) функция юқоридан (қуйидан) чегараланган;

б) функция юқоридан (қуйидан) чегараланмаган;

в) функция чегараланган;

г) функция чегараланган эмас.

7.212. Исботланг:

а) $y=\frac{1}{x}$ функция юқоридан чегараланган эмас;

б) $y=\frac{1}{x}$ функция қуйидан чегараланган эмас;

в) $y=x^2$ функция юқоридан чегараланган эмас;

г) $y=x^2$ функция чегараланган эмас.

7.213. Шундай функция қурингки, бу функция жуфт ҳам бўлмасин ва тоқ ҳам бўлмасин.

7.214. Ҳар қандай функцияни ҳам жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкинми? $y=\sqrt{x}$ функцияни мисол сифатида қаранг.

7.215. Функциянинг монотонлигини исботланг:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=x^3$.

7.216. Функция монотон функция бўла оладими (агар бўла олмаса, монотонлик оралиқларини топинг):

а) $y=\frac{1}{|x|}$; б) $y=x-[x]$;

в) $y=\sqrt[3]{x^2}$; г) $y=\sqrt{5-4x}$;

д) $y=\frac{x+1}{x-2}$; ж) $y=\left|x^2-3x+2\right|$;

з) $y=\sqrt{1-x^2}$.

7.217. Иккита монотон функциянинг йиғиндиси монотон бўлмаслиги мумкинми?

7.218. Монотон ўсувчи функцияларнинг кўпайтмаси ҳамма вақт ҳам монотон ўсувчи функция бўладими?

7.219. [0;2] оралиқда берилган функцияни иккита монотон ўсувчи функцияларнинг айирмаси шаклида тасвирланг:

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{агар } 0\le x<1, \text{ бўлса,} \\ 5, & \text{агар } x=1, \text{ бўлса,} \\ x+3, & \text{агар } 1<x\le 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

7.220. Монотон бўлмаган функцияни иккита монотон функцияларнинг айирмаси шаклида тасвирлаш мумкинми?

7.221. $y=\{x\}$ функция даврий функция эканлигини исботланг. Унинг даврини топинг ва графигини ясанг.

7.222. Даври Т=2 бўлган $f(x)$ даврий функция [-1;1] оралиқда $y=\begin{cases} x+1, & \text{агар } -1\le x\le 0, \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 0<x\le 1 \text{ бўлса} \end{cases}$

функция билан устма-уст тушади. $f(x)$ функция графигини ясанг.

7.223. Даври $T=3$ бўлган f функция (0;3] оралиқда $y=2-x$ функция билан устма-уст тушади. $f(x)$ функция графигини ясанг.

7.224. Функцияларнинг графикларини айни бир координаталар системасида ясанг:

а) $y=x$, $y=x^2$, $y=x^{-3}$, $y=x^4$, $y=x^5$;

б) $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sqrt[5]{x}$.

7.225. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=\sqrt{\frac{1}{x}}$; б) $y=\left[\frac{1}{x}\right]$; в) $y=\left[x^2\right]$;

г) $y = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x \geq -2 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{x}, & \text{агар } -2 < x < -1 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } -1 \leq x < 2 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x}, & \text{агар } x \geq 2 \text{ бўлса} \end{cases}$

д) $y = x^2 + 5|x-1| + 1$;

е) $y = |-3x+2| - |2x-3|$;

ж) $y = |x^2 - 3x+2| - |2x-3|$;

з) $y = (x+1)(|x| - 2)$; и) $y=\frac{2x+1}{2-x}$;

к) $y = 1 - \frac{1}{|x|}$; л) $y=\frac{2x-6}{|3-x|}$;

м) $y=\frac{|x-1|}{1-x^2}$.

7.226. Функцияга тескари функцияни гопинг ва тескари функциянинг графигини ясанг:

а) $y=3x-2$; б) $y=-(x+2)^2-2$, $x\in(-\infty;-1)$;

в) $y = \frac{x+1}{x-1}$, $y\in(1;+\infty)$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x\in[2;+\infty)$.

7.227. Агар A(1;2) нуқта $y=x^2+px+q$ параболанинг учи бўлса, p ва q ларни топинг.

7.228. Агар M(-1;-7) нуқта ординаталар ўқини N(0;-4) нуқтада кесувчи $y=ax^2+bx+c$ параболанинг учи бўлса, a, b, c ларни топинг.

7.229. Агар $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги A(1;4), B(-1;10), C(2;7) нуқталар орқали ўтса, $y=ax^2+bx+c$ функцияни топинг.

7.230. Учи A(1;1) нуқта бўлган $y=ax^2+bx+c$ парабола B(-1;5) нуқта орқали ўтади. Бу параболанинг абсциссаси 5 га тенг бўлган нуқтасининг ординатасини топинг.

7.231. $x=2$ тўғри чизиқ $y=ax^2-(a+6)x+9$ квадрат учҳад графигини ясанг.

7.232. $y=x^2-6x+a$ функциянинг энг кичик қиймати 1 га тенг. Функция графигини ясанг.

7.233. $y=-x^2+4x+a$ функциянинг энг катта қиймати 2 га тенг. Функция графигини ясанг.

7.234. $y=2x^2+(a+2)x+a$ функциянинг x_1 ва x_2 ноллари учун $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ муносабат ўринли бўлса, унинг графигини ясанг.

7.235. a нинг қандай қийматларида $y=-x^2+4x+a$ функциянинг қийматлари тўплами $y=\sqrt{2x-a}$ функциянинг аниқланиш соҳаси билан уст-ма-уст тушади?

7.236. b нинг қандай қийматларида $y=2bx^2+2x+1$ ва $y=5x^2+2bx-2$ функцияларнинг графиклари битта нуқтада кесишади?

7.237. $y=x^2+6x-3$ ва $y=(x+3)^2-25$ функцияларнинг графиклари $x=a$ тўғри чизиқ билан кесишган. Кесишиш нуқталари орасидаги масофани топинг.

7.238. c нинг қандай қийматларида $y=cx^2-x+c$ ва $y=cx+1-c$ функцияларнинг графиклари умумий нуқтага эга бўлмайди?

7.239. Функциянинг графигини ясанг ва унинг ёрдамида функциянинг ноллари, ишораси сақланадиган оралиқларини, функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини, қийматлари соҳасини кўрсатинг:

а) $$y=\begin{cases} 3,\ \text{агар},\ x\le -4\ \text{булса}, \\ \left|x^2-4|x|+3\right|,\ \text{агар},\ -4<x\le 4\ \text{бўлса}, \\ 3-(x-4)^2,\ \text{агар},\ x>4\ \text{бўлса} \end{cases}$$

б) $$y=\begin{cases} 8-(x+6)^2,\ \text{агар},\ x<-6\ \text{бўлса}, \\ \left|x^2-6|x|+8\right|,\ \text{агар},\ -6\le x<5\ \text{бўлса}, \\ 3,\ \text{агар},\ x\ge 5\ \text{булса} \end{cases}$$

в) $$y=\begin{cases} \left|\left||x|-1\right|-1\right|,\ \text{агар},\ |x|<2\ \text{бўлса}, \\ \sqrt{|x|-2},\ \text{агар},\ |x|\ge 2\ \text{бўлса}, \end{cases}$$

г) $$y=\begin{cases} 2-\sqrt{4-|x|},\ \text{агар},\ |x|\le 4\ \text{бўлса}, \\ \dfrac{8}{|x|},\ \text{агар},\ |x|>4\ \text{бўлса} \end{cases}$$

7.240. $f(x)=x^2-6x$ функция берилган. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=f(x)-2$; б) $y=f(x-2)$; в) $y=2f(x)$;

г) $y=f(2x)$; д) $y=-f(x)$; е) $y=f(-x)$;

ж) $y=f(|x|)$; з) $y=|f(x)|$; и) $y=|f(|x|)|$.

7.241. Функциянинг энг катта қийматини топинг:

а) $y=\frac{x}{1+x^2}$;   б) $y=\frac{x}{1+x+x^2}$.

7.242. $y=\frac{x^2+3}{1+x}$ $(x>-1)$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

7.243. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(t)=\frac{t^2}{t-1}$ бўлса, $f(g(t))$ ни топинг.

7.244. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$. $g(t)=\frac{2t^2-2t+1}{(t-1)^2}$ бўлса, $f(g(t))$ ни топинг.

7.245. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x}+1}$, $g(t)=\frac{t^2-\sqrt{t}}{t}$ бўлса, $f(g(t))$ ни топинг.

VIII боб

КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Кўрсаткичли функция

1. Иррационал кўрсаткичли даража. $a>0$, $a\neq 1$ сони ва $x>0$ иррационал сон берилган бўлсин. r_n рационал сонлар x га ками билан, s_m рационал сонлар ортиғи билан (ўнли) яқинлашсин, $r_n<x<s_m$, $n,m\in N$. У ҳолда $a>1$ да $a^{r_n}<a^{s_m}$ бўлади. Бу эса барча a^{r_n} сонларнинг A тўплами a^{s_m} сонлар B тўпламининг чап томонида ётишини ва бу тўпламларни ҳеч бўлмаса битта сон ажратишини билдиради (унинг бир қийматли аниқланганлиги олий математика курсида қаралади). Бу сон иррационал кўрсаткичли a^x даражанинг қиймати сифатида қабул қилинади.

$0<a<1$ ҳоли ҳам шундай қаралади. Фақат бунда A ва B тўпламларнинг роллари алмашади.

Иррационал кўрсаткичли a^x даражанинг *хоссалари* рационал кўрсаткичли даражанинг хоссаларига ўхшаш. (a,b лар мусбат, α ва β лар иррационал ёки рационал сонлар):

1) $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}$; 3) $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$;

4) $\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$; 5) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

Даражаларни таққослашда ушбу таъкиддан ҳам фойдаланилади:

Агар $a>1$ ва $m\in N$ бўлса, $a^m>1$ ёки $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}>1$, шу каби $a>1$ ва ихтиёрий $r>0$ да $a^r>1$ бўлади. Агар

$a>1$, $r<s$ бўлса, $a^r < a^s$ бўлади. Ҳақиқатан, $a^s=a^r\cdot a^{s-r} > > a^r\cdot 1=a^r$. Аксинча, $a>1$ ва $0<a^r<a^s$ бўлса, $r<s$ бўлади (исбот қилинг). Шунингдек, $0<a<1$ ва $r<s$ бўлган ҳолда $a^r > a^s$ бўлиши ҳам шу каби исботланади.

Мисол. $0{,}5^\alpha > 0{,}5^\beta$ бўлса, α каттами ёки β ?

Ечиш. $a=0{,}5$, яъни $0<a<1$ бўлгани учун $\beta>\alpha$.

Машқлар

8.1. Нолга тенг бўлмаган a ва b сонлари учун $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$, $\alpha\in R$ муносабатни исбот қилинг.

8.2. Қуйидаги сонлардан қайси бири катта: а) $2^{1,41}$ ми ёки $0{,}125^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$? б) $3^{\sqrt{5}}$ ми ёки $3^{\sqrt[3]{9}}$ ми?

8.3. Сонларни ўсиб бориш тартибида жойлаштиринг: $\pi^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}^{\pi}$.

8.4. $\left(\frac{3}{7}\right)^{2\sqrt{2}}-1$ айирманинг ишорасини аниқланг.

8.5. Агар: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}=2$ бўлса, α нинг; б) $a+4^{0.3\sqrt{2}}=5$ бўлса, a-1 нинг ишорасини аниқланг.

8.6. $3^{\sqrt{3}}<7$ тенгсизликни исботланг.

2. Кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари. $a>0$, $a\neq 1$ бўлсин. $f(x)=a^x$ тенглик билан аниқланган функция a асосли *кўрсаткичли функция* дейилади. Бу функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган, $D(f)=R$, чунки $a>0$ бўлганда a^x даража барча $x\in R$ учун маънога эга. x нинг исталган ҳақиқий қийматида $a^x>0$ бўлгани учун ва ихтиёрий $b>0$ сонда $a^x=b$ бўладиган биргина $x\in R$ сони мавжуд бўлгани учун $E(f)=R_+$ бўлади.

Хоссалари:

1) $a>1$ *бўлса,* $f(x)=a^x$ *функция* R да ўсади. $0<a<1$ *бўлса,* $f(x)=a^x$ *функция* R *да камаяди.*

Исбот. $a>1$ ҳолни қараш билан чекланамиз. $a>1$ ва $\alpha<\beta$ бўлсин, бу ерда α,β сонлари ихтиёрий ҳақиқий сонлар. У ҳолда $\beta-\alpha>0$, $a>1$ бўлгани учун $a^{\beta-\alpha}>a^0$ ёки $a^{\beta-\alpha}>1$ тенгсизликка эга бўламиз. Бундан, $a^{\beta-\alpha}\cdot a^{\alpha}>1\cdot a^{\alpha}$ ёки $a^{\beta}>a^{\alpha}$ ҳосил бўлади. Демак, $\alpha<\beta$ дан $a^{\alpha}<a^{\beta}$ экани келиб чиқади. Бу эса a^x функция ўсувчи эканлигини билдиради.

70-расмда $y=a^x$ кўрсаткичли функциянинг схематик графиги тасвирланган.

Агар $a>1$ бўлса, $x\to+\infty$ да a^x чексиз ортади, $x\to-\infty$ да a^x нолгача камаяди. Демак, a^x графиги $y=0$ тўғри чизиққа томон чексиз яқинлашади, Ox ўқи функция графигининг *горизонтал асимптотаси*. Шу каби $0<a<1$ бўлганда a^x функция $+\infty$ дан 0 гача камаяди, Ox ўқ — горизонтал асимптота;

2) f функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. Ҳақиқатан, $f(-x)=a^{-x}=$

$$=\frac{1}{a^x}\neq\begin{cases}a^x,\\-a^x;\end{cases}\quad f(-x)\neq\begin{cases}f(x),\\-f(x).\end{cases}$$

3) f даврий функция эмас, чунки ихтиёрий $T\neq0$ да $a^x\neq a^{x+T}$

70-расм.

4) x нинг ҳеч қандай қийматида a^x нолга айланмайди;

5) *функционаллик хоссаси*: ҳар қандай x ва z да $f(x+z)=f(x)\cdot f(z)$ тенглик ўринли. Чунки $a^{x+z}=a^x\cdot a^z$. Худди шундай $f(x)/f(z)=f(x-z)$ эканлиги исботланади.

1 - мисол. $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$) кўринишдаги узлуксиз функциянинг айрим қийматлари жадвалда берилган:

x	1	2	3	4
y	3	9	27	81

Функциянинг аналитик ифодасини тузинг.

Ечиш. $f(1)=3$, $f(2)=9$, $f(1+2)=f(3)=27$ ва $f(1)\cdot f(2)=3\cdot9=27$, яъни (5) хосса бажарилмоқда. Қолган қийматлар ҳам шу натижани беради. Демак, $f(x)$ боғланиш кўрсаткичли функция. Унинг асоси a ни аниқлаймиз: $y=a^x$ тенгликдаги x ва y ўрнига жадвал қийматларидан бирор жуфтни, масалан, (1;3) ни қўйсак, $a^1=3$, яъни $a=3$ олинади. Демак, изланаётган ифода $y=3^x$.

Машқлар

8.7. $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ геометрик прогрессиянинг $u_k=\sqrt{u_{k-j}u_{k+j}}$ асосий хоссаси $f(x)=a^x$ кўрсаткичли функциянинг $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$ хоссасидан фойдаланиб исбот қилинсин. Бу ерда k, $j\in\mathbb{N}$, $k>j$.

8.8. Қуйидаги функциялар графикларини [-2;1] оралиқда ясанг:

a) $y=4^x$; b) $y=3^x$; c) $y=2^x$;
d) $y=-3\cdot3^x$; e) $y=-2\cdot3^x$.

8.9. Тенгламаларни ечинг:

a) $5^x=125$; b) $3^{1+x}=81$; c) $0{,}01^{\,x}=100$.

8.10. Ифодаларни соддалаштиринг:

а) $(9^x)^2-3\cdot 9^{2x}+9^{2x+1}=0$; б) $2^{8x}\cdot 3^x+12^x-2^{8x+1}\cdot 6^x$;
в) $a^{2x}+2a^xb^x+b^{2x}-(a^x-b^x)^2$.

8.11. Жадвалда $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) кўринишдаги узлуксиз функциянинг бир неча қийматлари келтирилган. Шу функциянинг аналитик ифодасини тузинг:

а)

x	1	2	3
y	0,2	0,04	0,008

b)

x	1	3	5	7
y	-2	-8	-32	-128

8.12. а) Омонат банкига 1000 сўм пул ҳар йили 10% га ўсиш шарти билан қўйилган. Маблағнинг ўсиш тенгламасини тузинг. Тенгламадан фойдаланиб, маблағнинг 3, 5,10 йилдан кейин қанчага тенг бўлиши топинг.

б) Корхонанинг ҳар t йилда пул қадр-қиймати ўзгариши ҳам эътиборга олинган, яъни дисконтланган D_t даромадини билиш учун $D_t=D\cdot K_d$ тенгликдан фойдаланилади, бунда D— мўлжал бўйича ҳар йилги даромад, K_d — дисконтлаш коэффициетни, $K_d=\frac{1}{(1+k)^t}$, k — пул қийматининг ўзгариш суръати (одатда банк кредитлари бўйича ўртача % ларда).

Банк $k=10\%$ ҳисобидан кредит берган бўлсин. $t=1,2,3,4$ йиллар учун K_d коэффициентларни топинг.

1) Кредитлар бўлмаган корхона 1 йилда 30000 сўм, 2 йилда 40000 сўм, 3 йилда 50000 сўм, 4 йилда 60000 сўм даромад оларди. Лекин

унинг t=1,2,3,4 йиллардаги дисконтланган даромади қандай бўлади?

3) Агар корхона банкдан 100000 сўм кредит олган бўлса, уни қанча вақтдан кейин қайтара олади?

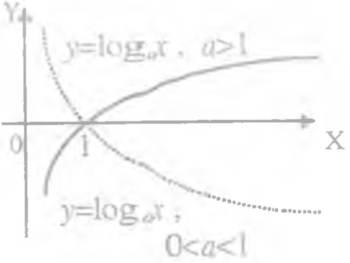
8.13. Радиоактив модданинг массаси 1 йилда 8 г га,4-йилда 1 г га тенг бўлган. Бу масса бир йилда қанча мартага ўзгарган? Массанинг бошланғич, ундан 4 йил олдинги, 7,5-йилдаги қиймати қанча бўлган?

8.14. 10 см узунликдаги хира муҳитдан ўтишда ёруғлик кучи уч мартага камайган. У 5, 20, 25 см узунликдаги оралиқларда неча марта камаяди?

2-§. Логарифмик функция

1.Логарифмлар. Логарифмик функция. $a>0$, $a\neq1$ бўлсин. N сонининг a асос бўйича *логарифми* деб, N сонини ҳосил қилиш учун a сонини кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади ва $\log_a N$ билан белгиланади. Таърифга кўра, $a^x=N$ ($a>0$, $a\neq1$) тенгламанинг x ечими $x=\log_a N$ сонидан иборат. Ифоданинг логарифмини топиш амалига шу ифодани *логарифмлаш*, берилган логарифмига кўра шу ифоданинг ўзини топишга эса *потенцирлаш* дейилади. $x=\log_a N$ ифода потенцирланса, қайтадан $N=a^x$ ҳосил бўлади. $a>0$, $a\neq1$ ва $N>0$ бўлган ҳолда $a^x=N$ ва $\log_a N=x$ тенгликлар тенг кучлидир.

Шу тариқа биз ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз ва монотон бўлган $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$) функцияга эга бўламиз. Бу функция *а асосли логарифмик функция* дейилади. $y=\log_a x$ функция $y=a^x$ функцияга тескари функциядир. Унинг графиги $y=a^x$ функция графигини $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш билан ҳосил қилинади (71-расм). Ло-



71-расм.

гарифмик функция кўрсаткичли функцияга тескари функция бўлганлиги сабабли, унинг хоссаларини кўрсаткичли функция хоссаларидан фойдаланиб ҳосил қилиш мумкин. Жумладан, $f(x)=a^x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=\{-\infty<x<+\infty\}$, ўзгариш соҳаси $E(f)=\{0<y<+\infty\}$ эди. Шунга кўра $f(x)=\log_a x$ функция учун $D(f)=\{0<x<+\infty\}$, $E(f)=\{-\infty<y<+\infty\}$ бўлади. $a>1$ да $\log_a x$ функция $(0;+\infty)$ нурда узлуксиз, ўсувчи, $0<x<1$ да манфий, $x>1$ да мусбат, $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўсади. Шу каби $0<a<1$ да функция $(0;+\infty)$ да узлуксиз, $+\infty$ дан 0 гача камаяди, $0<x<1$ оралиқда мусбат, $x>1$ да манфий қийматларни қабул қилади. Ординаталар ўқи $\log_a x$ функция учун *вертикал асимптота.*

Логарифмик функциянинг қолган хоссаларини исботлашда ушбу *асосий логарифмик айният*дан ҳам фойдаланилади:

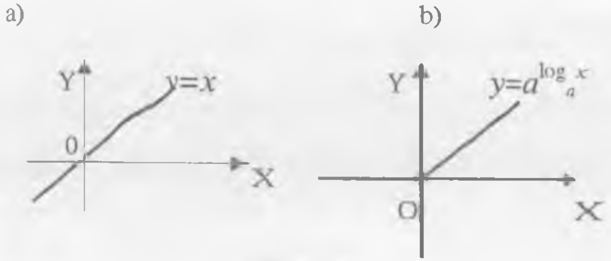
$$a^{\log_a N}=N. \tag{1}$$

(1) айният $a^x=N$ тенгликка $x=\log_a N$ ни қўйиш билан ҳосил қилинади. Ўзгарувчи қатнашган $a^{\log_a x}=x$ тенглик x нинг $x>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларидагина уринли бўлади. $x\leq 0$ да $a^{\log_a x}=x$ ифода ҳам ўз маъносини йўқотади. $y=x$ ва $y=a^{\log_a x}$ муносабатлар ўртасидаги фарқни 72-расмдан тушуниш мумкин.

1) $\log_a 1=0$, чунки $a^0=1$;

2) $\log_a a=1$, чунки $a^1=a$;

3) $\log_a N=\dfrac{\log_c N}{\log_c a}$ $(c>0,\ c\neq 1)$. (2)



72-расм.

Бу тенглик $N=a^c$ тенгликка $N=c^{\log_c N}$, $a=c^{\log_c a}$, $c=\log_a N$ ларни қўйиш ва алмаштиришларни бажариш орқали ҳосил бўлади;

4) $\log_a(NM)=\log_a N+\log_a M.$ (3)

Ҳақиқатан, $NM=a^{\log_a N}\cdot a^{\log_a M}=a^{\log_a N+\log_a M}$. Иккинчи томондан, $NM=a^{\log_a NM}$. Тенгликларнинг ўнг қисмлари тенглаштирилса, (3) тенглик ҳосил бўлади.

Агар N ва М бир вақтда манфий бўлса, у ҳолда:

$\log_a(NM)=\log_a|N|+\log_a|M|.$

5) $\log_a\frac{1}{N}=-\log_a N.$ (4).

Ҳақиқатан, $N\cdot\frac{1}{N}=1$ тенгликни логарифмласак:

$\log_a\left(N\cdot\frac{1}{N}\right)=\log_a 1$ ёки $\log_a N+\log_a\frac{1}{N}=0$, бундан (4) тенглик ҳосил бўлади;

6) $\log_a\frac{N}{M}=\log_a N-\log_a M.$ (5)

Ҳақиқатан,

$$\log_a\frac{N}{M} = \log_a N + \log_a\frac{1}{M} = \log_a N - \log_a M.;$$

7) $\log_a N^\beta = \beta\log_a N$, (6), β—ҳақиқий сон. Ҳақиқатан, $x=\log_a N^\beta$ ва $y=\log_a N$ бўлсин. Таърифга кўра $N^\beta=a^x$ ва $N=a^y$ ёки $N^\beta=a^{\beta y}$. Булардан $a^x=a^{\beta y}$ ёки $x=\beta y$ ва (6) тенглик ҳосил бўлади;

8) $\log_{a^\beta} N = \frac{1}{\beta}\log_a N$. (7)

Ҳақиқатан, a^β асосдан a асосга ўтилса,

$$\log_{a^\beta} N = \frac{1}{\log_a a^\beta}\cdot\log_a N = \frac{1}{\beta\log_a a}\log_a N = \frac{1}{\beta}\log_a N;$$

9) агар $a>1$ бўлса, $M<N$ дан $\log_a M<\log_a N$ келиб чиқади (ва аксинча). Ҳақиқатан, $(M<N)\Rightarrow\left(a^{\log_a M} < a^{\log_a N}\right)\Rightarrow$

(даражанинг хоссаси) $(\log_a M<\log_a N)$ (ва аксинча). Шу каби агар $0<a<1$ бўлса, $\log_a M<\log_a N$ бўлганда $M>N$ бўлади (ва аксинча);

10) Агар $\log_a M=\log_a N$ бўлса, $M=N$ бўлади (ва аксинча).

Ҳақиқатан, $(M = N)\Rightarrow\left(a^{\log_a M} = a^{\log_a N}\right)\Rightarrow(M = N)$.

1 - мисол. $A = \log_3 9 - \log_{\sqrt{3}} 9 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{9}\right) - \log_{\frac{1}{3}} 9$ ифоданинг сон қийматини топинг.

Ечиш. Логарифмнинг юқорида исботланган хоссаларидан фойдаланиб, ифодадаги ҳар бир логарифмнинг қийматини топиб оламиз:

$$\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\cdot 1= 2;$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}}.\log_3 3 = 2\cdot 2\cdot 1 = 4;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{2}{-1} =-2;$$

$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{9}\right)= \frac{\log_3\left(\frac{64}{9}\right)}{\log_3 \frac{\sqrt{3}}{2}} =\frac{\log_3 64-\log_3 9}{\log_3 \sqrt{3}-\log_3 2} =\frac{6\log_3 2-2\cdot 1}{\frac{1}{2}\log_3 3-\log_3 2} =$$

$$=\frac{4(3\log_3 2-1)}{1-2\log_3 2}.$$

Демак, $A= \frac{4(3\log_3 2-1)}{1-2\log_3 2}$.

Амалиётда асоси 10 бўлган (*ўнли* логарифмлар) ва асоси e=2,7182818... га тенг бўлган (*натурал* логарифмлар) логарифмлар кенг қўлланилади. Уларни мос равишда $\lg N$ ва $\ln N$ кўринишда белгилаш қабул қилинган. Сон ўнли логарифмининг бутун қисмига логарифмнинг *характеристика*си, каср қисмига логарифмнинг *мантисса*си дейилади. Масалан, lg2= =0,3010 да характеристика 0 га, мантисса 0,3010 га тенг. $\lg 2000=\lg 2\cdot 10^3=3\lg 10+\lg 2=3,3010$ да характеристика 3 га, мантисса 0,3010 га тенг. $\lg 0,2=\lg 2\cdot 10^{-1}=\lg 2-1=0,3010-1=-1+0,3010$ да характеристика -1, мантисса 0,3010. Одатда, мантисса мусбат қийматларда ёзилади. Агар логарифм қиймати манфий бўлса, мантиссани мусбат қилиш учун шу қийматга 1 қўшилади, умумий қиймат узгармаслиги учун характеристикадан 1 олинади ва логарифм қиймати *сунъий* кўринишда ёзилади. Масалан,

$\lg 0,2=-0,6990+1-1=\bar{1},3010$, бунда характеристика -1 га, мантисса эса 0,3010 га тенг.

2 - мисол. а) $\ln 10=\frac{\lg 10}{\lg e}=\frac{1}{\lg e}=2,30259...$;

$$\lg e=\frac{\ln e}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}=0,43429....$$

3 - мисол. а) $\lg 1000^{67}$; b) $\ln e^{4,8}$ ларни ҳисобланг.

Ечиш: а) $\lg 1000^{67}=\lg 10^{3\cdot 67}=\lg 10^{201}=201\lg 10=201\cdot 1=201$;

b) $\ln e^{4,8}=4,8\ln e=4,8\cdot 1=4,8$.

4 - мисол. Жадвалда $\lg 3=0,4771$. $\lg 270$ ни топинг.

Ечиш: $\lg 270=\lg 3^3\cdot 10=3\lg 3+\lg 10=3\cdot 0,4771+$ $+1=2,4313$.

5 - мисол. Ушбу $X=\sqrt[3]{\frac{\left(x^3+1\right)^4\left(y^6+1\right)^7}{\left(x^4+y^2\right)^5}}\cdot c^{3\sin x}\cdot\sqrt{c}$

ифодани c асос буйича логарифмланг.

Ечиш. $\log_c X=\log_c\frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{4}{3}}\left(y^6+1\right)^{\frac{7}{3}}}{\left(x^4+v^2\right)^{\frac{5}{3}}}\cdot c^{3\sin x}\cdot c^{\frac{1}{2}}=$

$$=\frac{4}{3}\log_c\left(x^3+1\right)+\frac{7}{3}\log_c\left(y^6+1\right)-\frac{5}{3}\left(x^4+y^2\right)+3\sin x+\frac{1}{2}$$

6 - мисол. $\lg x=\frac{3}{4}\lg(x^2+4y-1)-\frac{3tg4x}{4}-2\lg(x-3)$

ифода буйича X ни топинг.

Ечиш. Логарифмнинг хоссаларидан ва $\lg 4x = \lg 10^{\lg 4x}$ эканлигидан фойдаланиб, $\lg^x = \frac{3}{4}\ \lg(x^2+4y-1) - \frac{3}{4}\lg 10^{\lg 4x} - \frac{8}{4}\lg(x-3) = \frac{1}{4}\lg\frac{\left(x^2+4y-1\right)^3}{10^{3\lg 4x}(x-3)^8}$ га эга бўламиз. Бундан, $X = \sqrt[4]{\frac{(x^2+4y-1)^3}{10^{3\lg 4x}\cdot(x-3)^8}}$ ҳосил бўлади.

Машқлар

8.15. $a>0$, $a\neq 1$ бўлса, ифоданинг қийматини топинг:

а) $\log_{a^3} a$; в) $\log_{\frac{1}{2}} a^7$; д) $\log_{a^{-1}}\sqrt{a}$;

б) $\log_{a^4} a^{\frac{1}{3}}$; г) $\log_{\sqrt{a}}\sqrt[3]{a}$; е) $\log_{a^2} a^{-5}$.

8.16. x ни топинг:

а) $\log_{0,1} x = -2$; в) $\log_x 9 = -1$;

б) $\log_{36} x = \frac{1}{2}$; г) $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3$.

8.17. $a>0$, $a\neq 1$ ва $x_1>0$, $x_2>0$, . . . , $x_n>0$ бўлса, $\log_a(x_1 x_2\ .\ .\ .\ x_n) = \sum_{i=1}^{n}\log_a x_i$ ни исботланг.

8.18. $\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|$ $(a>0,\ a\neq 1,\ n\in N)$ муносабатни исботланг.

8.19. $\frac{\log_a x}{\log_b x} = \log_a b$ тенгликни исботланг ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$).

8.20. Ҳисобланг:

а) $\log_{\sqrt[4]{3}} 81$;　б) $\log_{16} \sqrt{2}$;　в) $\log_{0,001} \sqrt[6]{10}$;

г) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64}$;　д) $\frac{9^{\log_9 48}}{8^{\log_8 16}}$;

е) $(\log_2 \log_4 \log_8 16) \cdot 10^{\frac{1}{2}\lg 4 - \lg 2 + \lg 0,1}$;

ж) $\frac{\lg 81 + \lg 64}{2\lg 3 + 3\lg 2}$;

з) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2$;

и) $\lg 6$;　к) $\lg 72$.

8.21. Агар: а) $\log_6 8 = c$ бўлса, $\log_{24} 72$;

b) $\log_{36} 8 = b$ бўлса, $\log_{36} 9$;

c) $\log_{1000} 9 = a$ ва $\log_{1000} 4 = b$ бўлса, $\log_5 6$ ни топинг.

8.22. Тенгсизлик a нинг қандай қийматларида ўринли:

а) $\log_5 a < \log_5 3a$;　b) $\log_{0,6} a > \log_{0,6} \frac{a}{2}$;

c) $\log_a \sqrt{8} < \log_a 2,2$?

8.23. Функцияларнинг ва уларга тескари функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

а) $y = \lg(x^2 + 6x)$;　b) $y = \lg(10^{3x} + 3)$;

c) $y = 10^{x^2 + 2x}$;　d) $y = \frac{1}{\lg\sqrt{x + 2}}$;

е) $y = \log_2(x - 8) + \log_2(8 - x)$.

8.24. $x \to +\infty$ да қайси функция тезроқ ўсади:

a) $\log_4 x$ ми ёки $\log_2 x$?

b) $\log_{1/5} x$ ми ёки $\log_{1/2} x$?

Улардан қайсилари $0<x<1$ да иккинчисидан катта?

8.25. Функцияларнинг графигини ясанг:

a) $\log_{0,5}|x|$ b) $|\log_3 x|$; c) $|\lg(x+1)|$.

8.26. Қуйидаги ифодалар билан берилган чизиқларни чизинг:

a) $|y|=\lg(x+3)$; b) $|y|=|\lg(x+1)|$.

8.27. Агар $a^2+b^2=18ab$ $a>b$, бўлса, $\lg\frac{a-b}{4}=$

$=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$ бўлишини исбот қилинг.

8.28. Икки N ва M соннинг исталган асос бўйича логарифмлари нисбатлари тенг, яъни

$$\frac{\log_a N}{\log_a M}=\frac{\log_b N}{\log_b M}=\ldots=\frac{\log_c N}{\log_c M}$$

бўлишини исбот қилинг.

8.29. Агар бирор $y=f(x)$ функциянинг тенг қадамли жадвалида функциянинг ёнма-ён турган қийматлари нисбатлари тенг бўлса, жадвал $y=A\cdot a^x$ функцияни ифодалайди. Шуни исбот қилинг (бунда логарифмларнинг хоссаларидан фойдаланинг).

8.30. Тебрангич x (см) эркин тебраниш амплитудасининг тебраниш бошлангандан ўтган t (сек) га боғлиқлиги кузатилиб, ушбу жадвал тузилган:

t	0	1	2	3	4	5
x	30,3	15,0	7,50	3,75	1,875	0,9375

$x=f(t)$ боғланиш графигини чизинг ва аналитик ифодасини тузинг.

2. Кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни айний алмаштиришлар. Олдинги бандларда логарифмнинг ва логарифмик функциянинг, шунингдек даражанинг ва кўрсаткичли функциянинг хоссалари билан танишган эдик. Бу хоссалардан логарифмик ва кўрсаткичли ифодаларни шакл алмаштиришларда фойдаланилади.

1 - мисол. $3^{2+\log_3 2}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $3^{2+\log_3 2} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 2} = 9 \cdot 2 = 18$.

2 - мисол. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,$ $b \neq 0,\ c > 0)$ тенгликни исботланг.

Исбот. Логарифмнинг $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ p \in R)$ хоссасидан фойдалансак, $\log_b a \cdot \log_b c = \log_b a \cdot \log_b c$ тенгликдан $\log_b(a^{\log_b c}) = \log_b(c^{\log_b a})$ тенгликни ҳосил қиламиз. Логарифмик функциянинг монотонлик хоссасидан $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ эканлиги келиб чиқади.

3 - мисол. $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$ ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. $a^{\sqrt{\log_a b}}$ ифодада шакл алмаштириш бажарамиз:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = a^{\frac{\log_a b}{\sqrt{\log_a b}}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\sqrt{\log_a b}}} = b^{\frac{1}{\sqrt{\log_a b}}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

Демак, $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$.

4 - мисол. $A = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4(4x^4)$ ифодани соддалаштиринг ва унинг $x = -2$ даги қийматини топинг.

Ечиш. $\log_a b^{2n} = 2n\log_a|b|$ $(a > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 0,$ $n \in N)$ бўлгани учун $\log_4 \frac{x^2}{4} = \log_4 x^2 - \log_4 4 =$ $= 2\log_4|x| - 1$ ва $\log_4(4x^4) = \log_4 4 + \log_4 x^4 = 1 + 4\log_4|x|$ тенгликлар ўринли.

У ҳолда, $A = 2\log_4|x| - 1 - 2(1 + 4\log_4|x|) = -3-$ $-6\log_4|x|$. $x = -2$ бўлса $A = -3 - 6\log_4|-2| = -3-$ $-6\log_4 2 = -6$.

5-мисол. $A = \dfrac{(\lg b\cdot 2^{\log_2(\lg b)})^{\frac{1}{2}}\cdot\lg^{-\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0.5\lg(\lg b^{\frac{1}{2}})}}}$ ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. Мусбат сонларгина логарифмга эга бўлгани учун $\lg b > 0$ ёки $b > 1$ муносабатга эга бўламиз. Даражанинг ва логарифмнинг тегишли хоссаларидан фойдаланиб, шакл алмаштиришлар бажарамиз:

$$A = \frac{(\lg b\cdot\lg b)^{\frac{1}{2}}\cdot\lg^{-\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\dfrac{(\lg b+1)^2}{2\lg b}-\sqrt{\lg\sqrt{b}}}} = \frac{\lg b\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lg b^2}}}{\dfrac{\lg b+1-\sqrt{2\lg b}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\lg b}}{\sqrt{\lg b^2}}} =$$

$$= \frac{\lg b}{\lg b+1-\lg b} = \lg b$$

6 - м и с о л. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$

функциянинг графигини ясанг.

Ечиш. Функция ифодасини соддалаштирмай, графикни ясашга ҳаракат қилиш мақсадга мувофиқ эмас эканлиги кўриниб турибди. Шу сабабли, дастлаб функциянинг ифодасини соддалаштирамиз:

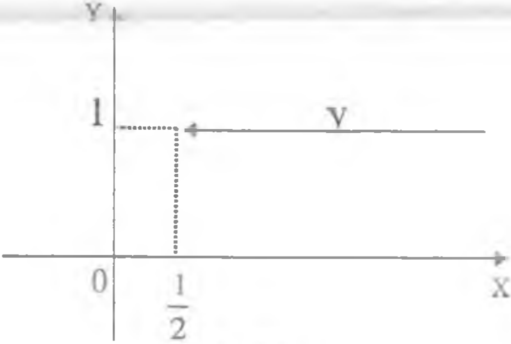
$$\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=\log_2\sqrt{(2x-1)^2}=\log_2|2x-1|=$$

$$=\log_2\left(2\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)=1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда функциянинг аниқланиш соҳаси $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ оралиқдан иборатлигини кўрамиз.

$x>\frac{1}{2}$ да эса $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ бўлгани учун

$$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$



73-расм.

$+\left(1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)=-\log_2\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|+1+\log_2\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|=1$ га эга бўламиз.

Энди функция графигини ясаш (73-расм) қийинчилик туғдирмайди.

Машқлар

8.31. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;

б) $81^{\frac{1}{\log_9 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

в) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$;

г) $\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}+2\right)^{\frac{1}{2}}-\log_b a-\log_a b$.

8.32. x ни топинг:

а) $\log_3 x=2\log_3(a+b)-\frac{2}{3}\log_3(a-b)+\frac{1}{2}\log_3 a$;

б) $\log_4 x=\log_4(a-b)+\frac{1}{3}(2\log_4 a+3\log_4 b)$;

в) $\log_5 x=5\log_5 m+\frac{1}{2}\Big(\log_5(m+n)+\frac{1}{3}\log_5$

$(m-n)-\log_5 m-\log_5 n\Big)$;

г) $\log_6 x = -\log_6(a+b) + \frac{2}{5}\left[2\log_6 a + \frac{1}{2}\log_6 b -\right.$

$\left. - \frac{1}{3}(\log_6 a - \log_6 b) - \log_6 a\right]$.

8.33. Сонниңг мусбат ёки манфий эканини аниқланг:

а) $\lg 2 + \lg 3 + \lg 0{,}16$;

г) $\log_{\frac{1}{5}} 7 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 1{,}2 - 3\log_{\frac{1}{5}} 2$;

б) $\frac{1}{2}\lg_{11} 5 + \frac{1}{2}\lg_{11} 3 - \log_{11} 4{,}5$;

д) $\lg 4 + \lg 12 - 2\lg 7$;

в) $\log_3 3 + \log_3 1{,}4 - \frac{1}{2}\log_3 16$;

е) $1 + 2\lg 2 - 3\lg 5 + \lg 3$.

8.34. Ҳисобланг:

а) $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$;

б) $\lg\mathrm{tg}1^\circ \cdot \lg\mathrm{tg}2^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\mathrm{tg}89^\circ$;

в) $\lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$;

г) $\lg\sin 1^\circ \cdot \lg\sin 2^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\sin 90^\circ$;

д) $\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5}$;

е) $\lg\mathrm{tg}1^\circ + \lg\mathrm{tg}2^\circ + \ldots + \lg\mathrm{tg}89^\circ$;

ж) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

з) $7^{\log_3 5}+3^{\log_5 7}-5^{\log_3 7}-7^{\log_5 3}$;

и) $4^{5\log_{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{6})}-6\log_8(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

к) $2^{\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})}+8\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

8.35. Функция графигини ясанг:

а) $y=x^{\frac{1}{\lg x}}$; б) $y=9^{\log_{\sqrt{3}}\left|x^2-5x+6\right|}$;

в) $y=3^{2\log_3(x-1)}$; г) $y=x+x^{\frac{1}{\lg x}}$.

8.36. $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3}-\frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$ ни жадвалсиз ҳисобланг.

8.37. $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$ бўлса, $\lg 56$ ни топинг.

8.38. $\lg 3=a$, $\lg 2=b$ бўлса, $\log_5 6$ ни топинг.

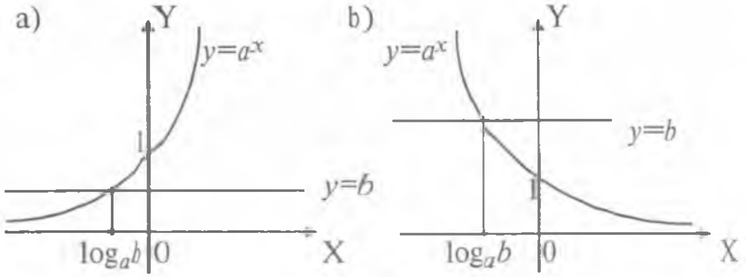
8.39. $\log_3 7=a$, $\log_7 5=b$, $\log_5 4=c$ бўлса, $\log_3 12$ ни топинг.

8.40. Агар $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ ва $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$ бўлса, $\log_8 a$ ни $\log_8 c$ орқали ифодаланг.

3-§. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

1. Кўрсаткичли тенгламалар ва тенгсизликлар. $a^x=b$ ($a,b\in R$) тенглама *энг содда кўрсаткичли* тенгламадир. Бу ерда $a>0$, $a\neq 1$.

Кўрсаткичли функциянинг қийматлар тўплами $(0;+\infty)$ оралиқдан иборат бўлгани учун, $b\leq 0$ бўлганда қаралаётган тенглама ечимга эга бўлмайди. Агар



74-расм.

$b>0$ бўлса, тенглама ягона ечимга эга ва бу ечим $x=\log_a b$ сонидан иборат бўлади (74-расм).

Теорема. ***Агар $a>0$, $a\neq1$ бўлса,***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

ва $f(x)=g(x)$ (2) тенгламалар тенг кучлидир.

Исбот. Агар α сони (2) тенгламанинг илдизи бўлса, $f^{(\alpha)}=g^{(\alpha)}$ бўлади. У ҳолда $a^{f(\alpha)}=a^{g(\alpha)}$. Аксинча, α (1) тенгламанинг илдизи бўлса, $a^{f(\alpha)}=a^{g(\alpha)}$ ва a^x функциянинг монотонлигидан $f^{(\alpha)}=g^{(\alpha)}$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

1-мисол. $8^{5x^2-46}=8^{2(x^2+1)}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенглама (1) кўринишда берилган. Унга тенг кучли (2) кўринишга ўтамиз: $5x^2$-$46=2(x^2+1)$, бундан $x=-4$, $x=4$ аниқланади.

Агар тенглама

$$a^{f(x)}= b^{g(x)} \qquad (3)$$

(бу ерда $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq0$) кўринишда бўлса, $b^{g(x)}=a^{\log_a(b^{g(x)})}=a^{g(x)\log_a b}$ эканидан фойдаланиб, тенгламани

$$a^{f(x)}=a^{g(x)\log_a b}$$

кўринишга келтирамиз. Бундан унга тенг кучли $f(x)=g(x)\log_a b$ тенгламага ўтилади.

2-мисол. $5^{3x-1}=3^x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $5^{3x-1}=5^{x\log_5 3} \Rightarrow 3x-1=x\log_5 3 \Rightarrow x=\frac{1}{3-\log_5 3}$.

Агар тенглама $f(a^x)=0$ кўринишда бўлса, $a^x=t$ алмаштириш орқали $f(t)=0$ тенгламага ўтилади. Ҳар вақт $a^x>0$ бўлгани учун $f(t)=0$ тенгламанинг мусбат илдизларигина олинади, сўнг $a^x=t$ боғланиш ёрдамида берилган тенглама илдизлари топилади.

3-мисол. $4^x+2^x-6=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $2^x=t$ алмаштириш $(2^x)^2+2^x-6=0$ тенгламани $t^2+t-6=0$ квадрат тенгламага келтиради. Унинг ечимлари $t=-3$, $t=2$. Мусбат ечим бўйича $2^x=2$ ни тузамиз. Бундан $x=1$.

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечишда $y=a^x$ функциянинг монотонлигидан фойдаланилади. $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ тенгсизлик, $a>1$ бўлса $f(x)>g(x)$ тенгсизликка, $0<a<1$ бўлганда эса, $f(x)<g(x)$ тенгсизликка тенг кучли.

4-мисол. $0{,}5^{x^2+3x+7}<0{,}5^{x^2+1}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $0<0{,}5<1$ бўлгани учун тенгсизлик $x^2+3x+7>x^2+1$ алгебраик тенгсизликка тенг кучли. Ундан $x>-2$ аниқланади.

5-мисол. $4^{0{,}75x^2-2x+1}>16^{x^2}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. $4^{0{,}75x^2-2x+1}>16^{x^2}$ тенгсизликни $4^{0{,}75x^2-2x+1}>4^{2x^2}$ кўринишида ёзиб оламиз. $a=4>1$ бўлгани учун, тенгсизлик ўзига тенг кучли бўлган $0{,}75x^2-2x+1>2x^2$ тенгсизликка келади. Ечим: $-2<x<0{,}4$.

Агар тенгсизлик $f(a^x)<0$ кўринишида бўлса, $a^x=t$ алмаштириш уни $f(t)<0$ кўринишга келтиради.

6-мисол. $9^x-3^{x+1}-4<0$ тенгсизлигини ечамиз.

Ечиш. $3^x=t$ алмаштириш тенгсизликни $t^2-3t-4<0$ тенгсизликка келтиради. Охирги тенгсизликнинг ечими $(-1;\ 4)$ бўйича $-1<3^x<4$ тенгсизлигини тузамиз ва ечамиз. Жавоб: $-\infty<x<\log_3 4$.

7 - мисол. $a^{x-1} < a^{2x}$ ($a>0$) тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Даражаларнинг умумий асоси бўлган a параметрнинг фақат мусбат қийматларини қараш етарли экани кўриниб турибди.

$0<a<1$ бўлса, берилган тенгсизлик $x-1>2x$ тенгсизликка ёки $x<-1$ тенгсизликка тенг кучли. Демак, бу ҳолда, $(-\infty;-1)$ оралиқдаги барча сонлар ва фақат шу сонлар тенгсизликнинг ечими бўлади.

$a=1$ бўлса, $1^{x-1} < 1^{2x}$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик ечимга эга эмас.

$a>1$ бўлса, берилган тенгсизлик $x-1<2x$ ёки $x>-1$ тенгсизликка тенг кучлидир. Демак, $a>1$ бўлса, $(-1; +\infty)$ оралиқдаги барча сонлар ва фақат шу сонлар тенгсизликнинг ечими бўлади.

Жавоб: $0<a<1$ бўлса, $x\in(-\infty;-1)$; $a=1$ бўлса, $\varnothing$;
$a>1$ бўлса, $x\in(-1;+\infty)$.

Машқлар

8.41. Кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

а) $4^{x-1} - 2^{x} = 0$;

б) $5^x-125 \cdot 5^{-x}=20$;

в) $3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2x} - 2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x} - 1 = 0$;

г) $9^{-|x-2|} - 4\cdot 3^{-|x-2|} - a = 0,\ a\in R$;

д) $0{,}5^{x^2-20x-23{,}5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$;

е) $9^x+4^{x-0{,}5}=9^{x+0{,}5}-2^{2x}$;

ж) $4^{\sqrt{x-8}} + 16 = 10 - 2^{\sqrt{x-8}}$;

з) $4^{1+3+5+\ldots+(2x-1)} = 0{,}25^{-64}$;

и) $a^x = |x+2|$, a — параметр;

к) $3^{2x-3} \cdot 5^{3x-2} = \frac{5}{3}$; л) $3^{x} \cdot 5^{x-1} = 1$;

м) $2^{x+4} + 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 120$;

н) $4^{x} - 7^{x+2} = 7^{x+1} - 2 \cdot 4^{x+1}$;

о) $\frac{1}{2^{x^2-1}} + 2^{1-x^2} = 2$;

п) $9 \cdot 4^{x} - 13 \cdot 6^{x} + 4 \cdot 9^{x} = 0$;

р) $10 \cdot 4^{x} - 9 \cdot 2^{x}(4^{x} + 1) + 2(16^{x} + 2 \cdot 4^{x} + 1) = 0$;

с) $4^{x} - 2 \cdot 6^{x} = 9^{x+\frac{1}{2}}$;

т) $3 \cdot 4^{x} + 2 \cdot 25^{x} = 5 \cdot 10^{x}$;

у) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x} + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x} = 8$;

ф) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3^{2x-7}}$; х) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} + \left(\frac{3}{5}\right)^{x} = 1$;

ц) $3^{x+1} = 11 - 2x$; ч) $2^{x} + 5^{x} = 7^{x}$;

ш) $2^{x+2} = \frac{5x+3}{x}$; э) $2^{|x|+1} = 2 - x^{2}$.

8.42. Кўрсаткичли тенгсизликларни ечинг:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^4-5x^2} > 2^{-8x^2+6}$; б) $4^{x} - 4 \cdot 2^{x} + 3 > 0$;

в) $3^{2(x+1)} - 5 \cdot 3^{x} + 2 < 0$;

г) $|5^{x} - 5| - |5^{x} - 4| \geq |5^{x} + 4| - 8$;

д) $a^{\frac{x-3}{x+1}} > a^{\frac{2x-1}{x+1}}$. е) $2^{x^2+4x+4} > 2$;

ж) $2^x \cdot 3^{x-2} \geq \frac{2}{3}$; з) $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2^{x+1} \geq 3^{-x} - 2$;

и) $2^{x+4} + 3 \cdot 2^{x-2} \geq 67$; к) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \geq 0$;

л) $0{,}1^{4x^2-2x-2} \leq 0{,}1^{2x-3}$; м) $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$;

н) $(0{,}3)^{2+4+6+...+2x} > (0{,}3)^{72}$, $x \in N$;

о) $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$;

п) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$;

р) $x^2 \cdot 2^{2x} + 9(x+2) \cdot 2^x + 8x^2 \leq (x+2) \cdot 2^{2x} + 9x^2 \cdot$

$\cdot 2^x + 8x + 16$;

с) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} > \frac{1}{\sqrt{27}}$; т) $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$;

у) $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$; ф) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

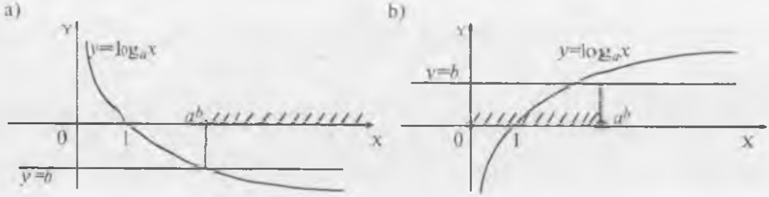
8.43. a нинг қандай қийматларида $|x+1| - |3x+15| =$ $= a^x$ тенглама:

а) ягона ечимга эга? b) биттадан ортиқ ечимга эга бўлади? с) ечимга эга бўлмайди?

2. Логарифмик тенгламалар ва тенгсизликлар

$\log_a x = b$ ($a>0$, $a \neq 1$) тенгламани қараймиз. Бу тенглама энг содда логарифмик тенглама дейилади. $x=a^b$ сон қаралаётган тенгламанинг илдизи бўлишини кўриш қийин эмас.

Берилган тенглама $x=a^b$ дан бошқа илдизга эга эмаслигини $y=\log_a x$ логарифмик функциянинг монотонлигидан фойдаланиб исботлаш мумкин (75-расм).



75-расм.

$\log_x N=b$ кўринишдаги тенгламани қараймиз. Бу тенгламанинг аниқланиш соҳаси x нинг $x>0$, $x\neq 1$ муносабатларни қаноатлантирувчи барча қийматларидан ташкил топади. Агар $N\leq 0$ бўлса, бу тенглама ечимга эга бўлмайди. $N>0$ бўлса, $x=N^{\frac{1}{b}}$ дан иборат ягона ечимга эга бўлади.

$\log_a x<b$, $\log_a x>b$, $\log_a x\leq b$, $\log_a x\geq b$ кўринишдаги (бу ерда $a>0$, $a\neq 1$) тенгсизликлар энг содда логарифмик тенгсизликлардир. Уларни ечишда $y=\log_a x$ функциянинг монотонлигидан фойдаланилади.

$\log_a x<b$ логарифмик тенгсизликни қараймиз. Агар $0<a<1$ бўлса, бу тенгсизликнинг барча ечимлари тўплами $(a^b;+\infty)$ оралиқдан иборат бўлади (75-*a* расм). Агар $a>1$ бўлса, қаралаётган тенгсизликнинг барча ечимлари тўплами $(0;\ a^b)$ оралиқдан иборат бўлади (75-*b* расм).

$\log_a x>b$, $\log_a x\leq b$, $\log_a x\geq b$ тенгсизликлар ҳам шунга ўхшаш ечилади.

1-мисол. а) $\log_3 x=9$; б) $\log_x 64=2$ тенгламаларни ечамиз.

Ечиш. а) тенгламани потенцирлаймиз. Натижада: $x=3^9$;

б) тенгламани потенцирлаймиз: $x^2=64$, бундан $x=8$.

2-мисол. а) $\log_3 x<9$; б) $\log_{1/3} x<9$ тенгсизликларни ечамиз.

Ечиш. а) олдинги мисолда $\log_3 x=9$ тенгламанинг $x=3^9$ илдизи топилган эди. Асос $a=3>1$, $b=9$. Ечим: $(0;\ 3^9)$ ёки $0<x<3^9$.

б) $a=\frac{1}{3}\in(0;1)$ бўлгани учун ечим $\left(3^{-9};+\infty\right)$ оралиқдан иборат.

1-теорема. ***$\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$, тенглама***

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \ \text{ёки}\ g(x)>0 \end{cases} \qquad (1)$$

системага тенг кучлидир.

Исбот. $a>0$, $a\neq 1$ да логарифмик функция монотон. Шунга кўра $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ тенглигининг бажарилиши учун $f(x)=g(x)$ бўлиши керак. Демак, $f(x)>0$, $g(x)>0$ бўлганда $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ тенглама $f(x)=g(x)$ тенгламага тенг кучли.

2-теорема. ***Агар $0<a<1$ бўлса, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ тенгсизлик $0<f(x)<g(x)$ қўш тенгсизликка, $a>1$ бўлса, $f(x)>g(x)>0$ қўш тенгсизликка тенг кучлидир.***

Бу теореманинг исботи логарифмик функциянинг монотонлигидан келиб чиқади.

3-мисол. $\frac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)}=-1$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. 1) Тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases} x+7>0, \\ x-5>0, \\ \lg 8-\lg(x-5)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-7, \\ x>5, \\ x-5\neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5, \\ x\neq 13. \end{cases}$$

2) Ифодани содда кўринишга келтириш мақсадида айний алмаштиришларни бажарамиз:

$$\lg\sqrt{x+7}-\lg 2=\lg(x-5)-\lg 8 \Rightarrow \lg\frac{\sqrt{x+7}}{2}=\lg\frac{x-5}{8}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+7}}{2} = \frac{x-5}{8} \Rightarrow \left(\sqrt{x+7}\right)^2 = \left(\frac{x-5}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2-26x-87=0$. Бундан x=29 экани аниқланади.

4 - мисол. $\log_x \frac{3x+5}{x-3} < 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликни $\log_x \frac{3x+5}{x-3} < \log_x 1$ кўринишда ёзиб оламиз ва қуйидаги ҳолларни қараймиз:

1) $0<x<1$ бўлсин. У ҳолда $\frac{3x+5}{x-3}>1$ тенгсизликка ёки $\frac{x+4}{x-3}>0$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик (0;1) оралиқда ечимга эга эмас.

2) $x>1$ бўлсин. У ҳолда $0< \frac{3x+5}{x-3} >1$ қўш тенгсизликка эга бўламиз. Бу қўш тенгсизлик $x>1$ шартни қаноатлантирувчи ечимга эга эмас. Шундай қилиб, берилган тенгсизлик ечимга эга эмас.

5 - мисол. $\log_{\frac{x}{3}} x^2 - 18\log_{81x} x^3 + 20\log_{9x} \sqrt{x} = 0$ (2) тенгламани ечинг.

Ечиш. Логарифмни бошқа асосга ўтказиш формуласидан фойдаланиб, барча логарифмларни 3 асосга ўтказамиз:

$$\frac{2\log_3 x}{\log_3 x} - 18 \cdot \frac{3\log_3 x}{4+\log_3 x} + 20 \cdot \frac{\frac{1}{2}\log_3 x}{2+\log_3 x} = 0.$$

Бу тенгламада $\log_3 x = t$ алмаштириш бажарамиз ва $\frac{t(7t^2+2t-14)}{(t-1)(t+4)(t+2)} = 0$ тенгламага эга бўламиз. Уни ечиб,

$t_1=0$, $t_2=\frac{-1-3\sqrt{11}}{7}$, $t_3=\frac{-1+3\sqrt{11}}{7}$ ечимларни топамиз. $\log_3 x=t$ боғланиш ёрдамида берилган тенгламанинг илдизлари топилади: $x_1=1$, $x_2=3^{\frac{-1-3\sqrt{11}}{7}}$, $x_3=3^{\frac{-1+3\sqrt{11}}{7}}$.

Машқлар

8.44. Тенгламани ечинг:

а) $2\cdot\ln(x-3)=\ln x-\ln 4$;

б) $x^{\lg x}=x^{10}$;

в) $0{,}1x^{\lg x-4}=100^3$;

г) $4^{\frac{1}{\log_{16} x}}=\frac{1}{64}$;

д) $x^{2\log_a^{x}}=ax,\ a>0$;

е) $\log_{25}(x^2-10x+9)=2$;

ж) $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\,\log_{\frac{1}{2}} x=1$;

з) $\log_{\frac{x^3}{a}} a^{-2}+\log_{a^2} x=a$;

и) $2\log_x x^4+\log_2 x=4$;

к) $(1+\log_c a)\log_a x\,\log_b c=\log_b x\,\log_a x\,\log_a c$;

л) $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x)))=\frac{1}{2}$;

м) $\log_3(1+\log_3(2^x-7))=1$;

н) $\log_3(3^x-8)=2-x$;

о) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;

п) $3^{\log_3 \lg\sqrt{x}}-\lg x+\lg^2 x-3=0$;

р) $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$;

с) $x^{\log_3 x}=9$;

т) $2(\log_x\sqrt{5})^2-3\log_x\sqrt{5}+1=0$;

у) $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$;

ф) $1+2\log_{(x+2)}5=\log_5(x+2)$;

х) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$;

ц) $\lg_2 x=6-x$;

ч) $\log_2 x=3^{-x}+\frac{8}{9}$;

ш) $\log_3(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}x+4$;

э) $\log_2(3^x+4)=2-5^x$;

ю) $x\log_2 x=24$.

8.45. Тенгсизликни ечинг:

а) $\lg^2 x^2+5\lg x>-1,25$;

б) $\log_x\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\geq 1$;

в) $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1;$

г) $\log_{\frac{49-x^2}{16}} \frac{46-4x-x^2}{14} > 1;$

д) $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1000;$

е) $\log_x (24-2x-x^2) < 1;$

ж) $\log_{x-1} 9 < \log_x 3;$ з) $\log_{1/3}((x+5)(x-6)) > 2;$

и) $(\log_{2x} 0{,}5)^2 \le \log_{2x}(2x^2);$

к) $2^x \log_3 x + \log_3 x \le 2^{x+1} + 2;$

л) $\log_{\frac{1}{3}} (5x-1) > 0;$

м) $\log_5 (3x-1) < 1;$

н) $\log_2 x \le \frac{2}{\log_2 x - 1};$

о) $\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2;$

п) $\log_{0,2}(x^2 - x - 2) > \log_{0,2}(-x^2 + 2x + 3);$

р) $\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1;$

с) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1;$

т) $\log_{x^2} (2 + x) < 1;$

у) $(0{,}5)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} < 1;$

ф) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \frac{1}{2}.$

3. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар системалари. Бу тур системаларни ечишда олдинги бандларда баён қилинган алгебраик қўшиш, ўрнига қўйиш, янги ўзгарувчи киритиш, кўпайтувчиларга ажратиш, график ечиш усулларидан, шунингдек, функцияларнинг хоссаларидан фойдаланилади.

1-мисол. $\begin{cases}\log_{\sqrt{3}} x + \log_3 y = \log_{\sqrt[5]{3}} 3,\\ \log_3 x - \log_{\sqrt{3}} y = -\log_3 243\end{cases}$ (1)

ни ечинг.

Ечиш. Логарифмларни бир асосга (a=3 га) келтирилиб, потенцирлашлар ва соддалаштиришлар бажарилади:

$$\log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x; \quad \log_3 3 = 1; \quad \log_{\sqrt[5]{3}} 3 = 5\log_3 3;$$

$$\log_3 x = u; \quad \log_3 y = v.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}2u + v = 5,\\ u - 2v = -5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y = 3^3 = 27,\\ x = 3.\end{cases}$$

2-мисол.

$$\begin{cases}2^{1+2\log_2(y-x)} = 32,\\ 2\log_5(2y - x - 12) = \log_5(y - x) + \log_5(y + x)\end{cases} \qquad (2)$$

ни ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламадан $(y-x)^2=16$ тенгламани ва бундан $y-x>0$ эканлигини эътиборга олиб, $y-x=4$ ни оламиз. Система қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ 2\log_5(2y - x - 12) = \log_5(y - x) + \log_5(y + x). \end{cases} \qquad (2')$$

(2′) системадаги 1-тенгламадан $y=4+x$ ни топиб, 2-тенгламага қўйсак, фақат x номаълум қатнашадиган тенглама ҳосил бўлади, уни ечиб, x ни топамиз:

$$2\log_5(x-4) = \log_5 4 + \log_5(4+2x) \Rightarrow \log_5(x-4)^2 =$$
$$= \log_5 4(4+2x) \Rightarrow (x-4)^2 = 4(4+2x) \Rightarrow x^2 - 16x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{x_1 = 0, x_2 = 16\}.$$

Бу тенгламани фақат $x=16$ сони қаноатлантиради. $y=4+x$ дан $y=20$ экани келиб чиқади.

Жавоб: (16;20).

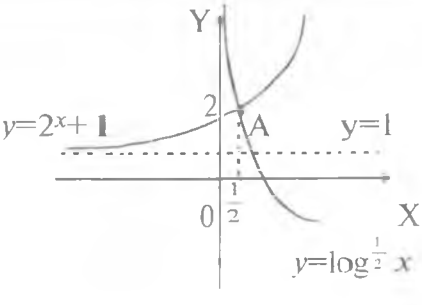
3 - мисол. $\begin{cases} y - 2^x = 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - y = 0 \end{cases}$ системани график усулда ечинг.

Ечиш. Координаталар системасида $y=2^x+1$ ва $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ функциялар графикларини ясаймиз (76-расм).

Иккала график тақрибан A(0,5;2,2) нуқтада кесишади.

Жавоб: $x \approx 0,5$, $y \approx 2,2$.

4 - мисол. $n>0$, $n \neq 1$, $\frac{\lg n}{10^{2n}-1} > 0$ бўлган-



76-расм.

да $\begin{cases} \lg x - \lg y = m, \\ 10^{x^2 - y^2} = n \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Логарифмик функция таърифига кўра $x>0$, $y>0$. Иккинчи тенгламадан $(x^2-y^2)\lg 10=\lg n$; $x^2-y^2=\lg n$. Берилган система $\begin{cases} \frac{x}{y} = 10^m, \\ x^2 - y^2 = \lg n, \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases}$ тенглама ва тенгсизликлар системасига келади. Бундан $x=10^m y$, $10^{2m}y^2-y^2=\lg n$, $y^2=\frac{\lg n}{10^{2m}-1}$, $y=\sqrt{\frac{\lg n}{10^{2m}-1}}$, $x=10^m\sqrt{\frac{\lg n}{10^{2m}-1}}$.

Машқлар

Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

8.46. $\begin{cases} x + y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$ **8.47.** $\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^x + 2^y = 18. \end{cases}$

8.48. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

8.49. $\begin{cases} 3^{x+y} = 9, \\ \log_2(x + 1) + \log_2(y + 1) = 2. \end{cases}$

8.50. $\begin{cases} \log_3(x - y) = 1, \\ 10 \cdot 25^y - 5^{x-1} = 125. \end{cases}$

8.51. $$\begin{cases} \log_2 x + 2\log_4 y = 3, \\ 3\log_8 (x+1) - \log_{\sqrt{2}} (y-1) = \log_{\frac{1}{2}} 3. \end{cases}$$

8.52. $$\begin{cases} \log_{x-2}(xy - x - 2y + 2) + \frac{1}{2}\log_{y-1}\left(x^2 - 4x + 4\right) = 3, \\ \log_{x+1}(y + x - 2) - \log_{y+2}\left(x^2 + y^2\right) = -1. \end{cases}$$

8.53. $$\begin{cases} \log_{x-2}(xy + x + y + 1) + \log_{x+y}(y+2) = -4, \\ 2\log_{x+1}(y+1) - \log_{x+y}(y^2 + 2x + xy + 2y) = 2. \end{cases}$$

8.54. $$\begin{cases} x^y = y^{2x}, \\ x^3 = y^2 \end{cases} \quad (x > 0, y > 0).$$

8.55. $$\begin{cases} x^y = y^{4x}, \\ x^x = y^y \end{cases} \quad (x > 0, y > 0).$$

8.56. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $$\begin{cases} 5^{2x} - 2^y = 21, \\ 2\log_{,} x + \log_{,} v = 2; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 4^{3x} - 3^y = -26, \\ 4^x - 3^{\frac{y}{3}} = -2, \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\lg u + 1} = -2^v + \dfrac{1}{\lg u - 1}, \\ \lg^2 u = 2^v + 5; \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} \lg|x| + \lg|y| = 1 + \lg 4, \\ |x|^{\lg|v|} = 4. \end{cases}$$

8.57. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 9, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{a^2} x + \log_a y = \dfrac{3}{2}, \\ \log_b x + \log_{b^2} y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3 x^2 + \log_3 y^2 = 2, \\ y - 5x = -2. \end{cases}$

8.58. a ва b параметрларнинг қандай қийматлари-да $\begin{cases} a^x + a^y = 2^{-1}, \\ x + y = -\log_a 16 \end{cases}$ система ечимга эга бўлади ?

8.59. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_{0.3} x^3 + \log_{0.3} y^2 = -2, \\ x - 3y = 0{,}1. \end{cases}$$

8.60. Агар $3^{y+5}=9^x$ ва $x+y=1$ бўлса, x-y ни топинг.

8.61. Агар 1 м^3 тахта сотувдаги нархидан тўрт марта арзон, 1 қути ранг икки марта қиммат, 1 т цемент уч марта арзон бўлганда қилинган харид 750 сўм турган бўларди. Агар тахта беш марта арзон, ранг тўрт марта арзон, цемент икки марта арзон бўлганда харид учун 400 сўм тўланган бўларди. Қанчага харид қилинган?

8.62. Жами 228 сўмга 3, 5, 7 сўмлик уч хил қалам келтирилган. 7 сўмликлари 3 сўмликларидан 6 дона кам, 3 сўмликлари 5 сўмликларидан 2,2 марта кўп, 3 сўмлик ва 5 сўмликларининг умумий сони 7 сўмликлари сонидан икки марта ортиқ. Ҳар қайси қаламдан қанчадан келтирилган?

Такрорлашга доир машқлар

8.63. Кўрсаткичли функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, сонларни таққосланг:

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,8}$ ва 1;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ва 1;

в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3}$ ва $\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$;

г) $(0,4)^{-2}$ ва $(0,4)^{3}$;

д) $(2,56)^{0}$ ва $(0,312)^{0}$;

е) $(1,7)^{-3}$ ва $(1,7)^{-5}$;

ж) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2.7}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{5.2}$;

з) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}$ ва $\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$;

и) $(0,2)^{-6,5}$ ва $5^{5,6}$;

к) $3^{-1,2}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2,8}$;

л) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$ ва 1;

м) $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$.

8.64. Агар:

а) $a^{-\frac{2}{3}} > a^{\frac{5}{3}}$;

б) $a^{\frac{7}{8}} > a^{\frac{11}{8}}$;

в) $a^{\frac{3}{5}} > a^{0.6}$;

г) $a^{-\frac{1}{3}} > a^{0.2}$

бўлса, a ўзгарувчи қандай қийматларни қабул қилиши мумкинлигини аниқланг.

8.65. Агар:

а) $1,34\alpha<1,34\beta$;

б) $\sqrt{0,364^{\alpha}} < \sqrt{0,364^{\beta}}$;

в) $\sqrt[20]{1,6^{\alpha}} < \sqrt[20]{1,6^{\beta}}$

бўлса, α ва β ларни таққосланг.

8.66. $\alpha^{0,4}<\alpha^{0,5}$ бўлса, 1 ва α сонларини таққосланг.

8.67. а) $\pi^{1,5}$ ва $3,14^{1,5}$; б) $2,71828...^{-0,8}$ ва $2,72^{-0,8}$ сонларини taққосланг.

8.68. x ўзгарувчи -5 дан 0 гача ўзгарса, $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ функция қандай ўзгаради?

8.69. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=16^{\frac{1}{9-x}}$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{18}\right)^{\sqrt{x^2-9}}$;

в) $g(x)=\frac{19}{14^{x^2}}$; г) $\varphi(x)=\frac{1}{2^{x^2}-4}$.

8.70. Функциянинг қийматлар соҳасини топинг:

а) $y=3^{|x|}$; б) $y=-9^{x}$;

в) $y=\left|13^{x}-13\right|$; г) $y=\frac{1}{\left|4^{x^2}+1\right|}$.

8.71. Логарифмик функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, сонларни taққосланг:

а) $\log_4 5$ ва $\log_4 9$; в) $\log_9 7$ ва $\log_8 7$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} 8$ ва $\log_{\frac{1}{5}} 15$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 7$ ва $\log_{\frac{1}{9}} 7$.

8.72. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

а) $\log_{0,8}4\ \log_{\frac{1}{2}}5$; б) $\log_3 10-2$;

в) $\log_{0,2}18-\log_{0,2}17$; г) $\log_4 8-1$.

8.73. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=\log_3(3x+10)$; д) $y=\log_{11}(9-x^2)$;

б) $y=\log_{30}(-12x)$; е) $y=\log_{13}(13x^2+11)$;

в) $y=\log_5 x^2$;　　　　ж) $y=\log_4\sqrt{9x^2-16}$;

г) $y=\log_3(x^2-\sqrt{3})$;　　　　з) $y=\log_5|x^2-3x+10|$.

8.74. Агар барча $x>0$ сонлар учун

а) $\log_a(x^2+3)>\log_a x$; б) $\log_a(x^2+3)<\log_a x$ бўлса, a қандай қийматлар қабул қилиши мумкин?

8.75. Ҳисобланг:

а) $15^{1+\log_{15}2}$;　　　　д) $\log_{\sqrt{5}}\sqrt{625}$;

б) $4^{2+\log_4 9}$;　　　　е) $\log_2 0{,}125+\log_{\sqrt{3}}9$;

в) $17^{3\log_{17}2}$;　　　　ж) $\log_{\sqrt[3]{7}}\sqrt{49}$;

г) $8^{1-\log_2 3}$;　　　　з) $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

8.76. $\log_4 125=a$ бўлса, lg64 ни топинг.

8.77. Ифодани соддалаштиринг:

$$a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}+\lg b^2+\log_{100}a.$$

8.78. Агар $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ ва $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$ бўлса, $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$ бўлишини исботланг

Тенгламани ечинг (8.79-8.102):

8.79. $\left(2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$.

8.80. $\sqrt{2^{x^2-2x-10}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1$.

8.81 $\sqrt[x-1]{5^{x+3}}\cdot\sqrt[x-1]{125^{2(x-1)}}=\sqrt[x+1]{25^{x+4}}$.

8.82. $3^x+\sqrt{3^{x+2}\cdot 7^x} = 3\cdot 7^x+\sqrt{21^x}.$

8.83. $8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101 = 0.$

8.84. $0{,}5\lg(x+3)-2\lg 2 = 1-\lg\sqrt{25x+375}.$

8.85. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)+\lg^2 x = 14.$

8.86. $\log_{2x^2-2}(3x^2+x-4) = \log_8 16-\log_{27} 3.$

8.87. $\log_3(3^x-8) = 2-x.$

8.88. $2x+1 = 2\log_2(9^x+3^{2x-1}-2^{x+3{,}5}).$

8.89. $x(1-\lg 5) = \lg(2^x+x-1).$

8.90. $2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}}+5).$

8.91. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3) = 6.$

8.92. $x+\lg(1+2^x) = x\lg 5+\lg 6.$

8.93. $\log_6(2^{\sqrt{x+1}}-3) = \log_6\log_{\sqrt[3]{3}} 9^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\log_6 4.$

8.94. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1} = 3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}.$

8.95. $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4) = 2-\frac{1}{\log_{\frac{3}{4}}(2-2x^2)}$

8.96. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3) =$

$= x^2+2x.$

8.97. $\log_3 2+\log_3\log_3(4-x) = \log_3\log_3(19-6x).$

8.98. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0.$

8.99. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$

8.100. $\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2.$

8.101. $\log_{x+1}(1-3x)=\log_{\sqrt{1-3x}}(1-2x-3x^2)-1.$

8.102. $\sqrt{4-x}\cdot 4^{\log_2 x}+\log_3(x-2)=9,\quad x-$бутун сон.

Тенгсизликни ечинг (8.103 - 8.110):

8.103. $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}<3\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2^x.$

8.104. $\left|3^x-2\right|\le 1.$

8.105. $2^{|x+2|}>16.$

8.106. $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\ge(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

8.107. $\log_3\sqrt{x^2+x-2}<1.$

8.108. $\sqrt{\log_2\left(\frac{3x-1}{2-x}\right)}<1.$

8.109. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)}>1.$

8.110. $\left(3^{x+3}+3^{-x}\right)^{3\lg x-\lg(2x^2+3x)}<1.$

Тенгламалар системасини ечинг (8.111 - 8.114):

8.111. $\begin{cases} y^2 = 4^x + 8; \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

8.112. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

8.113. $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 (x \cdot y); \\ \lg^2 (x - y) + \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases}$

8.114. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7; \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$

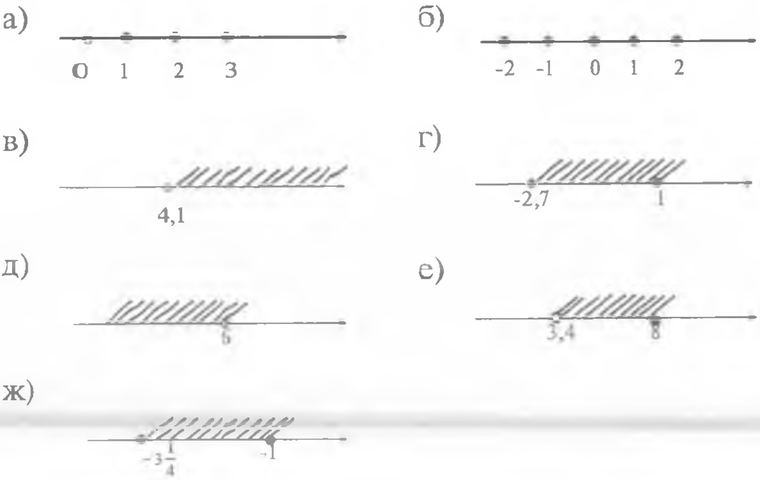
8.115. Тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 2{,}25y - \sqrt{x} - 1{,}5\sqrt{y} + 0{,}5 \leq 0; \\ \sqrt{\log_x y} + \sqrt{\log_y x} \geq 2. \end{cases}$$

ЖАВОБЛАР

I боб.

1.1. {1,9,2}. **1.2.** $10 \in B, 136 \in B$. **1.3.** $S=\{-3;-2;-1;4\}$, $S_1=\{3;2;1;-4\}$. **1.4.** {Б, Ў, Ш, В, А, Қ, Т, Д, Н, У, М, И, Л, Ф, О, Й}. **1.5. а)** {1,2,3,4}; б) $\{-\frac{7}{4}\}$; в) {0:12}; г) $\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$; д) {1;2}; е) {1;2;3}. **1.6.** (77-расм.)



77-расм.

1.7. а) {111,113,131,133,311,313,331,333}; б){135, 153,315,351,513,531}; в) {104,140,203,302,320,401,410,500}; г){1, 11,21,31,41,51,61,71,81,91}; **1.8.** а); б). **1.10.** д). **1.14.** а) $E \subset A$; б) $D \not\subset C$. **1.15.** {3}; {6}; {9}; {12}; {3;6}; {3;9}; {3;12}; {6;9}; {6;12};{9;12};{3;6;9};{3;6;12}; {3;9;12};{6;9;12}; $\varnothing$; A. **1.16.** а) $A \subset B$; б) $C \subset D$; в) $E \subset F$; г) $K \not\subset M$; $M \not\subset K$. **1.17.** а) $B \subset A$; б) $A \subset B$; в) $A \subset B$; $B \subset A$. г) $A \subset B$; д) $A \subset B$; е) $B \subset A$; ж) $B \subset A$.

1.18. а) тўғри; б) нотўғри; в) нотўғри; г) нотўғри. **1.19.** а) $A=B$; б) $A\neq B$; в) $A\neq B$; г) $A=B$. **1.25.** $[3;5]$. **1.26.** $P\cup E=\{a,b,c,d,e,f,g,z,k\}$. **1.28.** а) $A\cup B=\{x|\ x=4k,\ k\in Z\}$. **1.31.** $A\backslash B==\{x|x\in[-5;3)\cup(3;4)\cup(4;5)\cup(5;6)\cup(6;7)\cup(7;8)\cup(8;9)\cup(9;10)\}$. **1.35.** $A=\{x|x=2k,\ k\in Z\}$. **1.44.** 20 киши. **1.45.** 13 киши. **1.47.** 68 киши. **1.48.** 4 та.

II боб.

2.2. Ҳаммасига. **2.3.** $k=2431$ бўлиши мумкин, $k\notin\{15;18\}$. **2.4.** $k=1,3,5,7,15,21,35,105$. **2.23.** а) 2; б) 5555; в) 20; г) 1; д) 1; е) 1; ё) 600. **2.27.** 1. **2.29.** $\{7;14;21\}$. **2.30.** $\{117342;1897524\}$. **2.49.** а) $\frac{5}{6}$; б) 1; в) 9. **2.50.** а) Фараз: $\sqrt{3}$ – рационал сон, $\sqrt{3}=\frac{m}{n}>0$, бунда $m,\ n\in N$ ва Б $(m;n)=1$. У ҳолда $3n^2=m^2$, бундан m^2 нинг, демак, m нинг ҳам 3 га бўлиниши маълум бўлади; $m=3k$; $3n^2=9k^2$; n^2 ҳам, демак, n ҳам 3 га бўлинади. $\frac{m}{n}$ каср 3 га қисқармоқда. Бу эса шартга зид, демак, $\sqrt{3}$ сони рационал сон эмас. **2.51.** Рационал сон мавжуд ва у $r=\frac{m}{n}$, Б $(m;n)=1$ деб фараз қилинса, $5^{\frac{m}{n}}=2$ бўлади. У ҳолда $5^m=2^n$ ва ҳоказо. **2.55.** а); г); д); ж). **2.57.** Ажратувчи сонлар: б) 2; в) $2\pi R$; д) 3. **2.68.** а) $a=b$ ёки $a=-b$; в) $b\in(-\infty;0]$. **2.74.** $|a|+|b|+|c|+|d|\neq 0$. **2.75.** $|a-b|+|b-c|+|a-c|\neq 0$. **2.76.** $|a-b|+|b-c|+|a-c|\leq 0$. **2.77.** ж) 3; з) -4; и) 3; к) 14. **2.79.** а) $x\in\left[7;8\frac{1}{3}\right)$; в) $x\in[-4,5;-4]$. **2.80.** $\{-2;-1\}$. а) Кўрсатма: $0\leq\frac{x-1}{2}-x<1$ нинг бутун ечимларини топинг; г) $\varnothing$. **2.81.** Агар $p=n$ бўлса, $\left[\frac{n}{p}\right]=1$.

Агар $p<n$ бўлса, $1\cdot p,\ 2\cdot p,\ \ldots\ ,\left[\frac{n}{p}\right]\cdot p$ сонларигина p га бўлинади. $\left(\left[\frac{n}{p}\right]+1\right)\cdot p$ сони эса n дан катта. Демак, $\left[\frac{n}{p}\right]$ та ҳад p га бўлинади. Агар $p>n$ бўлса, $\left[\frac{n}{p}\right]=0$. **2.82**. Ноллар сони 2 ва 5 туб сонлардан тузилган жуфтлар сонига тенг. **2.83**. $600!=$ $=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 600$ ёйилмада 2 туб сонининг 600! сони бўлинадиган энг катта даражаси $\left[\frac{600}{2}\right]+\left[\frac{600}{2^2}\right]+\left[\frac{600}{2^3}\right]+\left[\frac{600}{2^4}\right]+\left[\frac{600}{2^5}\right]+$ $+\left[\frac{600}{2^6}\right]+\left[\frac{600}{2^7}\right]+\left[\frac{600}{2^8}\right]+\left[\frac{600}{2^9}\right]=300+150+75+37+18+9+4+2+1+0=594$, жавоб 594. Шу каби 7 туб сонининг энг катта даражаси $\left[\frac{600}{7}\right]+\left[\frac{600}{7^2}\right]+\left[\frac{600}{7^3}\right]+\left[\frac{600}{7^4}\right]=$ $85+12+1+0=98$, жавоб 98. 5 сони учун $\left[\frac{600}{5}\right]+\left[\frac{600}{5^2}\right]+\left[\frac{600}{5^3}\right]=120+24+4=148$, жавоб: 148.

2.84. $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ натурал сонлар ёйилмасида p туб сонга бўлинувчилар сони $\left[\frac{n}{p}\right]$ та, p^2 га бўлинувчилар сони $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ та, p^3 га бўлинувчилар сони $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ та ва ҳоказо. $n!$ ёйилмада p туб сон ва унинг даражаларига бўлинувчиларнинг умумий сони $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]$, бунда $p^m<n<p^{m+1}$. **2.89**. а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 5.

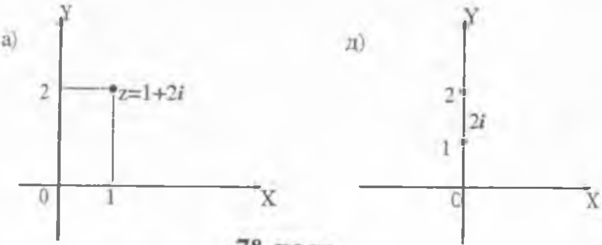
2.92. а) 25%; б) 60%; в) 250%. **2.95.** 1,75 кг. **2.97.** 240 та. **2.102.** 9 м ва 10,8 м. **2.103.** 8,8 м ва 11 м. **2.105.** 2 йилдан кейин. **2.106.** а) $70=23\cdot 3+1$; б) $180=20\cdot 9$; в) $200=11\cdot 17+13$; г) $76=8\cdot 9+4$. **2.107.** а) $5=0\cdot 9+5$; в) $9=0\cdot 18+9$. **2.109.** $q_1=-q-1$; $r_1=b-r$. **2.113.** а) $n=3$,

$n=5$; б) $n=3$; в) ҳеч бир қийматида; г) $n=3$, $n=9$; д) $n=3$, $n=5$, $n=9$; е) ҳеч бир қийматида; ё) $n=3$, $n=9$; ж) $n=3$, $n=5$.

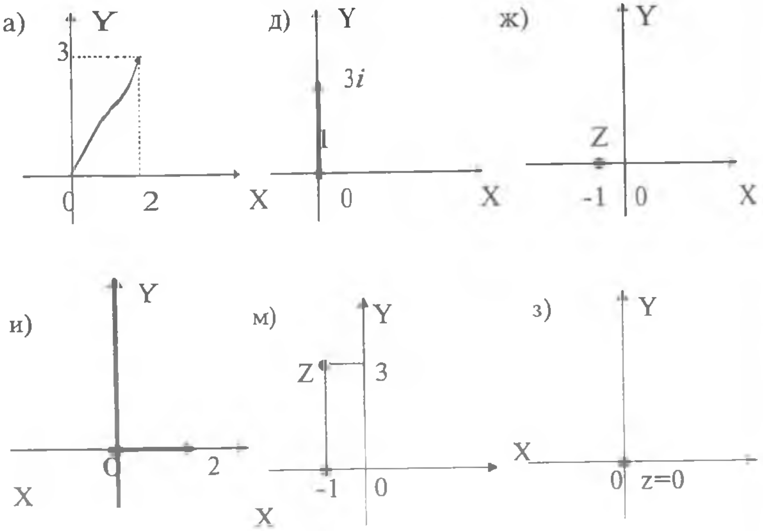
III боб

3.1. а) $Re(z)=-5$, $Im(z)=8$; з) $Re(z)=0$, $Im(z)=8$; к) $Re(z)=4$, $Im(z)=0$. **3.2** а) $-4+8i$; в) 1,2. **3.5.** а) $\overline{Z}=-3-5i$; в) $\overline{Z}=-3+5i$; г) $\overline{Z}=3-5i$; д) $\overline{Z}=3i$; е) $\overline{Z}=4,2$. **3.6.** а) $1+i$; б) 8; в) 0; ж) $6-9i$; з) $4+2i$. **3.7.** а) $1+\frac{2}{3}i$; б) $1+i$; в) $1+3\frac{1}{9}i$; г) $4+13i$; **3.8.** а) $-13+11i$; д) $3\frac{5}{9}i$; е) $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}+\frac{-1-\sqrt{2}}{2}i$; ё) $\frac{67+5\sqrt{2}}{15}+i$. **3.9.** а) $-9+19i$; ё) 13. **3.10.** б) $2-0,6i$; з) $12+3i$; и) $\frac{4}{51}-\frac{1}{51}i$. **3.11.** а) $a^2+4b^2=(a-2bi)(a+2bi)$; и) $a^{2n}+b^{2k}=(a^n-ib^k)(a^n+ib^k)$.

$$\mathbf{3.12.}\ i^n=\begin{cases} i, \text{агар } n=4k+1,\ k=0,1,2,\cdots \\ -1, \text{ агар } n=4k+2,\ k=0,1,2,\cdots \\ -i, \text{ агар } n=4k+2,\ k=0,1,2,\cdots \\ 1, \text{агар } n=4k,\ k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$



78-расм.

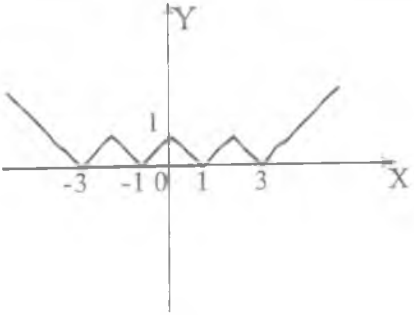


79-расм.

3.13. а) $13+21i$; в) $12i$, к) $8i$. **3.14.** а) $12,5-12,5i$; д) $-3+1,8i$; л) i.

3.20. $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.21.** (78-расм.)

3.22. (79-расм)



80-расм.

3.23. а) $|z|=5$; д) $|z|=3\sqrt{2}$; ё) $|z|=\sqrt{2}$; з) $|z|=1$; м) $|z|=4$; н) $|z|=|b|$; о) $|z|=1$. **3.24.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 0; д) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{3\pi}{2}$; ё) $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$; з) 0; и) $\frac{\pi}{2}$; к) π; л) $\frac{3\pi}{2}$. **3.25.** а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; в) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; д) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; е) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; ё) $\cos 0+i\sin 0$; ж) $\cos\pi+\ +i\sin\pi$; з) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; и) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\ \sin\frac{2\pi}{3}$; к) $\sqrt{11}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; л) $\cos\frac{5\pi}{6}+i\ \sin\frac{5\pi}{6}$; м) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

3.26. $-3-4i=5\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\ \sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$. **3.27.** $z=$ $=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. **3.28.** $z=\cos\frac{16\pi}{17}+i\ \sin\ \frac{16\pi}{17}$. **3.34.** $2\left(|u|^2+|u|^2\right)$. **3.35.** Кўрсатма. а) $|z-(0+10i)|\leq 20$, $w=0+10i=(0;10)$. Жавоб: маркази (0;10) нуқтада жойлашган ва радиуси $R=20$ бўлган айлана билан чегараланган доира; б) $Re(z)=Re(x+yi)=x>4$. Координата текислигининг барча шундай нуқталари тўпламики, улар $x=4$ тўғри чизиқдан ўнгда жойлашган бўлади; е) ечилиши: $z=x+yi$, Re $z=x$. У ҳолда $\sqrt{x^2+y^2}=x+3$, ёки $x^2+y^2=$ $=x^2+6x+9$, ёки $y^2=6x+9$. Бу парабола, учи $z=-1{,}5+0\cdot i=-1{,}5$, ўқи парабола учидан ўнг томонда ётган ҳақиқий ўқнинг бир қисмидан иборат. **3.36.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$;

б) $3\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$. **3.37.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{399}+i\sin\frac{2\pi}{399}\right)$;

г) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **3.43.** а) $Z_0=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

$Z_1=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; в) $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

3.45. $x=\sqrt[5]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{5}\right)$ га $k=0,1,2,3,4$ ларни қўйиб $x_1,x_2,\dots,x_5$ ларни ҳисоблаймиз ва $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ни топамиз. **3.51.** а) $x\in R$; б) $x\in\varnothing$; в) 1; **г)** 2. **3.52.** $x=-\frac{2}{3}$; $y=-\frac{28}{9}$. **3.53.** а) -2^{10}; б) $-2^{10}(1-i)$; **3.58.**

а) $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$; б) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

IV боб

4.2. б)$59\frac{3}{7}$; в) $\frac{7}{416}$. **4.3.** л) 45; м) 222. **4.5.** а) $27x^6y^3z^3$; е) $243x^5z^{20}$. **4.6.** г) $\frac{1}{27}$; ё) $\frac{11}{13}$; ж)$1\frac{3}{14}$. **4.8.** а) a^3+x^2; в) $5a-12x$; ж) $2x^3y+32xz^2$. **4.12.** б) $\frac{1}{2}$; г) 3; ё) 192. **4.15.** $a+b+c=0\Rightarrow c=-a-b\Rightarrow a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3= =-3a^2b-3ab^2=3ab(-a-b)=3abc$.

4.17. $|a+b| = \begin{cases} |a|, \ a \neq 0, \ b = 0 \text{ бўлса,} \\ |b|, \ a = 0, \ b \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \ a = b = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$ **4.22.** а) $3^{1999}+147$; г) 17.

4.23. б) a=-7; г) a=-17. **4.24.** а) 16; г) 84. **4.25.** б) a=1; $\forall b \in C$; г) a=0; b=4. **4.26.** a=3; b=-7; c=4. **4.28.** а) 12; в) 14. **4.30.** а) $f(x)g(x)=20x^5+16x^3+4x^2+8x$; г) $f(x)g(x)=26x^5+73x^4+100x^3+33x^2+12$. **4.35.** в) A, B, C лардан ҳеч бўлмаса бирортаси 0 га тенг бўлмаслиги керак, акс ҳолда берилган кўпҳад 2-даражали бўлмай қолади. $A \neq 0$ бўлсин. Кўпҳадни $P(x,y)=Ax^2+2(By+D)x+(Cy^2+2Ey+F)$ кўринишда ёзайлик. Уни иккита чизиқли ҳақиқий кўпайтувчиларга ажратиш учун $P(x)=0$ тенглама илдизларини билиш керак:

$$x_{1,2} = \frac{-(By+D) \pm \sqrt{(By+D)^2 - A(Cy^2+2Ey+F}}{A} =$$

$$= \frac{-(By+D) \pm \sqrt{(B^2-AC)y^2 + 2(BD-AE)y + (D^2-AF)}}{A}.$$

Бу ифода нолдан фарқли аниқ квадрат бўлгандагина изланаётган кўпайтма ҳосил бўлади. Бунинг учун ушбу шартлар бажарилиши керак: 1) $B^2-AC>0$, 2) $(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-EF)=0$. Қолган ҳолларда ҳам кўрсатилганлар каби шартлар бажарилиши зарур ва етарли. **4.39.** а) a^8+a^4+1; б) $8xz$. **4.41.** а) $P(x)=D(x)(x+1)+2$; б) $P(x)=D(x)(x^2+4x+1)+2$; в) $P(x)=D(x)(x^2+2x+2)+3x+4$; г) $P(x)=D(x)(x^2+3x+1)+3x+4$; д) $P(x)=D(x)(3x^2+5x-8)-5x^2+14x+2$; и) $P(x)=D(x)\cdot(x^2+3x+5)$; к) $P(x)=D(x)\cdot(x^3+4x)$. **2.12.** а) $x+1$; б) x^2+1; в) x^3+1; г) x^2-2x+2; д) x^3-x+1; е) $x+3$; ж) x^2+x+1; з) 1. **4.43.** a=4, b=0.

V боб

5.1. а) $4x$; б) 36; в) $4a^4b^2c^4$; г) $\frac{8}{3}x^{-2}y^5z$. **5.3.** а) $\{2\}$; б) $\varnothing$; в) $\{1;2\}$; г) $\{-3;3\}$; д) $\{-\frac{3}{2}\}$; е) $\varnothing$; ё) $\{4,5\}$; ж) $\{13\}$; з) $\{0;-2\}$; и) $\{-a;a\}$; к) $\{-4;4\}$; л) $\{0;5\}$; м) $\varnothing$; н) $\{0;3\}$; о) $\{-5;9\}$; п) $\{1\}$. **5.4. а)** $\{x|x\neq-2\}$; б) R; в) $\{x|x\neq R,\ x\neq\pm3\}$; ж) $\{a|a\in R,\ a\neq1,\ a\neq2,\ a\neq3\}$; и) $\{x|x\in R,\ x\neq\pm4\}$; к) $\{x|x\in R,\ x\neq1,\ x\neq7\}$; м) R; о) R. **5.5.** а) $\{(x;y)|x\in R,\ y\in R,\ x\neq0,\ x\neq y\}$; б) $\{(x;y)|x\in R,\ y\in R,\ |x|\neq|y|\}$; в) $\{(x;y)|x\in R, y\in R,\ y\neq x^2\}$; д) $\{(x;y)|x\in R, y\in R, x\neq2,\ x\neq3,\ y\neq0\}$; е) $\{(x;y)|x\in R,\ y\in R,\ x\neq0,\ y\neq3x\}$; ё) $\{(x;y)|x\in R,\ y\in R,\ x\neq\pm y\}$; к) $\{(x;y)|x\in R, y\in R\}$. **5.6.** а) $-\frac{a}{2}$; в) $\frac{x-2m}{x+2m}$; г) $\frac{2a+5}{a+2b}$; к) $\frac{1}{x+5}$; л) 1; м) x^2. **5.7.** $\{3x^2+y;\ 3x^2+\frac{1}{2};\ 4a^2-x(a-3x);\ \frac{x^3}{4};\ 6x-\frac{1}{2}\}$. **5.8.** а) $\frac{a-6}{6}$; б) $\frac{5x-3a}{4}$; в) $\frac{41a-5}{12}$; г) $\frac{a^2+x^2}{2a}$; д) $-\frac{x^2+c^2}{2x}$. **5.9.** а) $\frac{a+x}{x}$; б) $\frac{2y-x}{y}$; в) $-\frac{2a+x}{ax}$; д) $\frac{x-5}{5x}$.

5.10. в) $\frac{2x}{(1-3a)(x+2)}$; г) $\frac{7x^2}{(2x-1)(2y+3)}$. **5.11.** а) $\frac{y(x-y)}{x^2}$; б) $\frac{a(a+b)}{3b}$; е) $-\frac{a}{xyb}$; л) $\frac{1}{axy}$. **5.12.** в) $\frac{b}{4a}$; д) $\frac{x+2}{6}$; ж) $\frac{a-b}{a+b}$; з) $9c^2-b^2$. **5.14.** б) $-2x$; в) q^2-pq; г) $-\frac{1}{4x}$; д) $\frac{30x^2+6y^2-16xy}{x(x^2+y^2)}$; е) 2; ж) $2x(x+y)$; з) $a-2$. **5.15.** а) $\frac{1}{x^2+x+1}$; б) $\frac{1}{x^7+1}$; в) $\frac{a}{xy-a^2}$; г) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$. **5.16.** 1 ва 9. **5.19.** в) $\frac{1-x}{1+2x}$. **5.20.** а) ҳа; б) йўқ; в) ҳа;

г) йўқ; д) йўқ; е) ҳа; ж) йўқ; з) ҳа. **5.21.** а) $x\in Q$; б) $\{x\,|\,x=2k, k\in Z\}$; в) $x\geq -3$; г) $x\in R$; д) $x>0$; е) $x\in R$; ж) $x\in[-1; 1]$; з) $x\neq \pm 1$. **5.23.** е) 1989; ж) $\frac{1}{8}$. **5.24.** а) $c^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{b}$; в) $\frac{1}{m}$; г) y^3. **5.26.** а) $x\leq 0$; б) $x\in R$; в) $x\in R$; г) $x\in R$; д) $x\in R$; е) $x\in R$; ж) $x\geq 0$; з) $x\in R$; и) $x\in\varnothing$; к) $x\in R$; л) $x\in R$; м) $x=3$. **5.27.** а) $x\leq 2$; б) $x\geq -3$; в) $x\geq 3$; г) $x\leq 4$; д) $x=3$; е) $x=3$; ж) $x\in\varnothing$; з) $x=1$; и) $x=-8$; к) $x=8$; л) $x\in\{2;4\}$; м) $x=3$. **5.28.** а) 44; б) -15; в) 6; г) 6; д) 630; е) 120; ж) 60; з) 0,015. **5.29.** а) $\frac{6}{7}$; б) $-\frac{4}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{5}{8}$; е) $\frac{4}{5}$; ж) $\frac{3}{5}$; з) $\frac{1}{3}$. **5.30.** а) 225; б) 225; в) -25; г) $\frac{1}{9}$; д) $-x$; е) x^2; ж) x^2+1; з) x^3. **5.31.** а) $\sqrt[9]{16}$; б) $\sqrt[12]{76}$; в) $\sqrt[15]{4}$; г) $\sqrt[21]{25}$; д) $\sqrt[21]{x^2}$; е) $\sqrt[6]{x}$; ж) $\sqrt[12]{x}$; з) $\sqrt[9]{x}$. **5.32.** а) $\sqrt[4]{8}$; б) 4; в) $\sqrt[3]{-32}$; г) 2; д) $\sqrt[4]{x^3}$; е) x^4; ж) $\sqrt[4]{(x+2)^5}$; з) x^8. **5.33.** а) $\sqrt[6]{27}$ ва $\sqrt[6]{16}$; в) $\sqrt[4]{25}$ ва $\sqrt[4]{6}$; з) $\sqrt[20]{(x-y)^4}$ ва $\sqrt[20]{y^5}$. **5.34.** д) $7\sqrt{2}$; ж) $2\sqrt[4]{3}$; и) $|x^2-2|\sqrt{y}$; л) $(x-1)\sqrt[7]{z^2}$; м) $(y+1)^2\sqrt[5]{x^2}$. **5.35.** а) $\sqrt{80}$; б) $\sqrt[3]{-54}$; в) $-\sqrt[4]{162}$; г) $\sqrt[5]{96}$; д) $\sqrt{x^2y^3}$; е) $\sqrt[5]{x^5y^3}$; ж) $\sqrt[4]{x^8y^3}$; з) $-\sqrt[4]{x^{12}y^3}$; и) $\sqrt[4]{(x-1)^8(y-2)}$; к) $-\sqrt[4]{(x-1)^{12}(y-2)}$; л) $-\sqrt[4]{x^4y}$; м) $-\sqrt{(7-4\sqrt{3})xy^3}$. **5.36.** а) $\sqrt{2}$; б) $6\sqrt[3]{3}$; з) $2\sqrt[4]{8}$. **2.19.** а) $2\sqrt{2}$; в) $\sqrt[10]{3^{13}}$; е) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$; з) $\sqrt[9]{32}$. **5.38.** а) $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; г) $3\sqrt[3]{4}<3\sqrt[3]{2}$; д) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$; ж) $\sqrt{8}<\sqrt[3]{19}$. **5.39.** а) 20; б) $2\sqrt[12]{2}$; в) 6; з) $\sqrt[4]{12}$.

5.40. а) $\sqrt[6]{2}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt{6}$; г) $\sqrt[12]{\frac{16}{27}}$; д) $\sqrt[6]{a}$; е) $\sqrt[18]{a}$.

5.41. а) $x\sqrt[3]{16x}$; б) $24x^2$; в) $36x^2-9$, $\left(|x|\geq\frac{1}{2}\right)$; г) x^{16}; е) $\sqrt[3]{(12+xy^2)^2}$;

ж) $(xy+z)\sqrt{xy+z}$. **5.42** а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{18}$; в) $5+2\sqrt{6}$; г) $2-\sqrt{2}+\sqrt{6}$; д) $4+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}$; л) $\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{a-x}$; н) $\frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{x+y}$; о) $(1+\sqrt{a})\sqrt{1-\sqrt{a}}$. **5.43.** а) $\sqrt{37}-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{23}-\sqrt{6}$; в) 2; г) $2\sqrt{5}$. **5.44.** а) тўғри; б) нотўғри; в) тўғри; г) туғри. **5.45.** г) $\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}$. **5.46.** 2. **5.47.** а) $a\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$; б) 27; в) -1, агар $0<a\leq1$ ва $-\left(\frac{\sqrt{1-a^2}+1}{a}\right)^2$, агар $-1<a<0$; г) 3; д) $\sqrt[6]{a}$; е) $9a$; ж) $\frac{x^2}{2x-1}$; з) $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **5.48.** 1. **5.49.** 4.

VI боб

6.2. а) $x\neq0$, $x=\pm1$, $x=-2$. **6.3.** а) $\frac{a-1}{3}$; б) $a=1$ да ечим йўқ, $a\neq1$ да $\frac{5}{a-1}$; г) $a=\pm1$ да x ихтиёрий сон, $a\neq\pm1$ да $x=0$. **6.5.** йўқ. **6.6.** йўқ. **6.7.** 15 йилдан кейин. **6.8.** а) -4,5; б) исталган сон; в) -1; г) илдизи йўқ. **6.10.** а) $a\neq1$ да $x=a-1$, $a=1$ да x — исталган сон; б) $a\neq\pm1$ да $x=0$, $a=\pm1$ да x — исталган сон; е) $a\neq1$ да $x=\frac{b+1}{a-1}$; $a=1$, $b=-1$ да x — исталган сон; $a=1$, $b\neq-1$ да илдизи йўқ. **6.12.** д) $(x-3)^2-1$; е) $a(x-2a)^2+3$; з) $\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}$. **6.17.** йўқ. **6.16.** Курсатма: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$. **6.20.** з) $a(x^2-$

$-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)=0$, $a\in R$, $a\neq 0$. **6.21.** $84x^2-18x-30=0$. **6.22.** $\frac{1}{2}x^2-$ $-\frac{1}{2}x-3=0$. **6.23.** -4,5. **6.24.** 1. **6.25.** 15. **6.26.** $x=5$. **6.27.** $x\in R$, $x\neq\frac{2}{3}$. **6.28.** $x\in R$, $x\neq -2$. **6.29.** $a\neq -c$, $c\neq 0$ да $x=\frac{a-c}{a+c}$, $a=-$ $-c$, $c=0$ да $\varnothing$. **6.30.** $a\neq 1$, $a\neq 2{,}25$, $a\neq -0{,}4$ да $x=\frac{31-2a}{4a-9}$; $a=2{,}25$, $a=-0{,}4$ да $\varnothing$; $a=1$ да маънога эга эмас. **6.31.** $-\frac{11}{7}$ ва 2. **6.32.** $\varnothing$.

6.33. -4 ва 9. **6.34.** 0 ва 1. **6.35.** 1. **6.43.** Кўрсатма: $a^3+b^3=(a+b)^3-3(a+b)ab$. **6.44.** -1; 1; 8. **6.53.** -1;2. **6.54.** -2; 1. **6.55.** $y=x^2+6x+1$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қаранг. **6.56.** $y=(x^2-x+1)^2$ га нисбатан квадрат учҳад сифатида қаранг. **6.57.** Кўрсатма: $2\cdot\frac{x^2+36}{x^2-36}=\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}$. **6.58.** –4; -2;-1. **6.59.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. **6.60.** Кўрсатма: 40=8+32. **6.63.** -1 ва 6. **6.69.** 0, 2, $1\pm\sqrt{2}$. **6.72.** Кўрсатма: $x^2-5x+6=t$ деб олинг. **6.73.** Кўрсатма: $x^2+5x=t$ деб олинг. **6.77.** $\varnothing$. **6.78.** 5,5 ва 6. **6.79.** -5; 1; $-1\pm\sqrt{6}$. **6.80.** ± 2; $\pm\frac{\sqrt[4]{24}}{2}$.

6.81. Кўрсатма: $x^2+2x=t$ деб олинг. **6.82.** -4; 2. **6.93.** а) 1; б) 2; в) 1,-2; г)5,-1; д) $\pm\sqrt{21}$; ± 3; е) $\varnothing$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$. **6.94.** *а*) 2; 3; б) $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; в) -1; 3; $\pm\sqrt{3}$. **6.113.** $[1;\frac{4}{3}]$. **6.114.** $(-\infty;-1]\cup[15;+\infty)$. **6.115.** [-2;1]. **6.116.** *R*. **6.117.** $\varnothing$. **6.118.** [-1;1].

6.119. R. **6.120.** $\{1\}\cup[2;3]$. **6.121.** $x=-5/2$. **6.122.** $x=\pm2$. **6.125.** $x=4/3$. **6.126.** $x=-4{,}5$; $x=3{,}25$. **6.127.** $x=\frac{\sqrt{113}-5}{4}$. **6.128.** $x=-\frac{2}{3}$.

6.129. $(-\infty;2/3]$. **6.130.** $[1;3]$. **6.131.** $x=0{,}5$, $x=3{,}5$. **6.132.** $[2;+\infty)$. **6.133.** а) $x=2$; $x=-6$. **6.134.** $[-2;\ 1\frac{2}{3}]$. **6.135.** $\{0\}\cup(1;+\infty)$.

6.136. $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **6.137.** $[-2\frac{1}{6};\ 1\frac{1}{6}]$. **6.138.** $[\frac{5}{6};\ +\infty)$.

6.139. $[0;13]$. **6.140.** $\{-4;\ -2;0;2;4\}$. **6.141.** $[-3;3]$. **6.142.** $(-\infty;0]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$ Кўрсатма: $|a-b|=|a|-|b|\Leftrightarrow(a-b)\,b\geq0$. **6.143.** $\{0\}$.

6.144. $\{0;2\}$. **6.145.** $\{0\}$. **6.146.** $\{-1\}$. **6.148.** $a\leq0$ да $x=-a$; $a>0$ да $x=-7a$, $x=a$. **6.149.** $a>0$ да $\{-3a;a\}$; $a=0$ да $x\neq0$; $a<0$ да $\varnothing$. **6.150.** $a\neq0$ да $\{-\frac{5a}{3}\}$; $a=0$ да $(-\infty;+\infty)$. **6.151.** $a\leq0$ да $x=\frac{6a}{5}$;

$a>0$ да $x=\pm2a$. **6.156.** $m=\pm\sqrt{15}$. **6.157.** $m\neq2$ бўлса. **6.158.** $a=b=-3$ **6.159.** $m=-1$ $n=-30$ **6.160.** $2x+1$. **6.161.** $\frac{r_1-r_2}{a-b}x+\frac{r_1b-r_2a}{b-a}$. **6.162.** б) $P(x)=D(x)(x^2-x+3)$;

в) $P(x)=D(x)(2x^3-2x^2-x-4)+6$; ж) $P(x)=D(x)(x^3-3x^2+8x-21)$; м) $P(x)=D(x)(x^4+x^3-3x^2-x-1)-4$. **6.163.** а) 2; б) 0, в) 3. **6.164.** $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$. **Кўрсатма:** $a^3+b^3+c^3-3abc$ ни a га нисбатан кўпҳад деб қаранг ва $a=-b-c$ сони шу кўпҳаднинг илдизи эканини текшириб кўринг. **6.165.** б) $x=2\pm i$; г) $x=-2\pm3i$; е) $x=4\pm5i$; з) $x=-0{,}5\pm i$; к) $x=1\pm\frac{1}{4}i$;

м) $x=3\pm\sqrt{2}\,i$. **6.166.** а) $(x+1-2i)(x+1+2i)$; б) $(x-1--3i)\ (x-1+3i)$; г) $(5z+5-i)(5z+5+i)$ **6.167.** а) $\pm3i$; ±2; ж) $z_{1,2}=\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_{3,4}=\pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. **6.168.** $ax^2-4ax+13a=0$, $a\neq0$, $a\in R$.

6.169. $ax^4-8ax^3-34ax^2-72ax+65=0$, $a\neq0$, $a\in R$. **6.171.** 3 каррали.

6.172. а)$(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$; б) $x^2(x-4i)(x+4i)$. **6.173.** а) 2; б) -5; 3; 6; в) рационал илдизи йўқ; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; е) -1; ж) -3; 2.

6.174. а) -2; 1; б) –4; -2; -1; в) бутун ечимлари йўқ. **6.175.** *а*) $-2, \pm\sqrt{3}, \frac{1}{2}$; б) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2; в) 1; г) ±1, $\frac{3\pm\sqrt{73}}{8}$; д) ±1, $-\frac{2}{3}$, 2; е) ±1, $\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}$. **6.177.** а) 0,79998; б) 0,03490482872567; в) -0,324617. **6.180.** $(-\infty; -1)$. **6.181.** $(-4,6;+\infty)$. **6.182.** $(2\frac{13}{15}; +\infty)$. **6.183.** $(-\infty; 2\frac{28}{29})$. **6.184.** $(-\infty; -1,5)$. **6.185.** $(-\infty; 3)$. **6.186.** $[1;+\infty)$. **6.187.** $(-\infty;-\frac{2}{3}]$. **6.188.** $(3;+\infty)$. **6.189.** $(-\infty; -2)$. **6.190.** $(-\infty;-1\frac{2}{3})$. **6.202.** $y>\frac{3}{a^2+1}$.

6.205 $$\begin{cases} a>0 \quad \text{да} \quad x<\frac{b}{a}, \\ a=0, \ b\le0 \quad \text{да} \quad \varnothing, \\ a=0, \ b>0 \quad \text{да} \quad x\in R, \\ a<0 \quad \text{да} \quad x>\frac{b}{a}. \end{cases}$$

6.214. а) $y<3$ да; б) $y>7$ да; в) $y>\frac{3}{17}$; г) $y<0,1$ да; **6.215.** $a\in(5/3;\infty)$.

6.218. $$\begin{cases} k>0 \quad \text{да,} \quad x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right); \\ k=1 \quad \text{да,} \quad x\in(-\infty;-1); \\ -\frac{1}{4}<k<0 \quad \text{да,} \quad x\in\left(\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k};\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right); \\ k\le-\frac{1}{4} \quad \text{да,} \ \varnothing. \end{cases}$$

6.220. $$\begin{cases} |k| > 2\sqrt{6} \quad \text{да,} \quad x \in \left(\dfrac{-k-2\sqrt{6}}{4}; \dfrac{-k+2\sqrt{6}}{4} \right); \\ |k| \le 2\sqrt{6} \quad \text{да,} \quad \varnothing. \end{cases}$$

6.221. $$\begin{cases} k < 1 \quad \text{да,} \quad x \in (-\infty; 1-\sqrt{1-k}) \cup (1+\sqrt{1-k}; +\infty); \\ k = 1 \quad \text{да,} \quad x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty); \\ k > 1 \quad \text{да,} \quad x \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

6.229. $x \in (-\infty; +\infty)$. **6.231.** $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **6.232.** $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup$ $\cup (2; +\infty)$. **6.235.** $x \in (-\infty; +\infty)$. **6.236.** $x \in (2; 5) \cup (12; +\infty)$. **6.237.** $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 4)$. **6.238.** $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty)$. **6.239.** $x \in$ $\in (-48; 37) \cup (42; +\infty)$. **6.240.** $x \in (-\infty; -0{,}7) \cup (2{,}8; 9{,}2)$. **6.241.** $x \in (-17;$ $-4) \cup (4; +\infty)$. **6.242.** $x \in (-\infty; -11) \cup (\frac{2}{3}; 11)$. **6.243.** $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 5)$.

6.244. $x \in (-0{,}1; 0) \cup (0{,}1; +\infty)$. **6.245.** $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$. **6.246.** $x \in (-6; 0) \cup (6; 15)$. **6.247.** $x \in (-2; 6)$. **6.248.** $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **6.249.** $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 24)$. **6.250.** $x \in (-\infty; -7) \cup (21; +\infty)$. **6.251.** $x \in (-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$. **6.252.** $x \in (-16; 11)$. **6.253.** $x \in [-1; 3)$. **6.254.** $x \in \in (-\infty; -4) \cup [6; +\infty)$. **6.255.** $x \in (1; 2) \cup (4; +\infty)$. **6.256.** $x \in (-\infty; -1] \cup \cup \{1; 2\} \cup [4; +\infty)$. **6.257.** $x \in \{-2\} \cup [1; 2]$. **6.261.** $x \in (-\infty; 1)$. **6.262.** $(-\infty; -2) \cup$ $\cup (-2; 1) \cup (4; +\infty)$. **6.263.** $x \in (-\infty; -5] \cup \{1\} \cup [2; 7) \cup (7; +\infty)$. **6.276.** $(-\infty; +\infty)$. **6.277.** $(2; 3)$. **6.278.** $(-3; 1)$. **6.279.** $(-\infty; -2) \cup (-2;$ $\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$. **6.280.** $(-2; -1) \cup (1; 2)$. **6.281.** $[-3; 3]$. **6.282.** $(-\infty;$ $2) \cup (5; +\infty)$. **6.283.** $(-\infty; 1) \cup (1.5; +\infty)$. **6.284.** $(-\infty;$ $2{,}5) \cup (\frac{33}{8}; +\infty)$. **6.285.** $(-6; 3)$. **6.286.** $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. **6.287.** $(-3; 1)$. **6.288.** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **6.290.** $(-\infty; +\infty)$. **6.291.** $(-\frac{1}{2}; 2)$.

6.299. $(-\infty;\ -3)\cup(-\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{7}}{2})\cup(4;+\infty)$. **6.300.** $[1;2)\cup(3;4]$. **6.302.** $(-\infty;-1\cup(1;+\infty)$. **6.303.** $(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(\frac{1}{2};+\infty)$. **6.306.** $(-\infty;-4]\cup[-2;-1]$. **6.307.** $(-2;-1)\cup(2;3)$. **6.318.** $\{1\}$. **6.319.** $\{\frac{3}{2}\}$. **6.320.** $(-\infty;+\infty)$. **6.321.** $x=4$. **6.322.** $(-\infty;+\infty)$. **6.323.** $(-\infty;\ 4)\cup(4;+\infty)$. **6.324.** $\{\pm 1\}$. **6.325.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **6.326.** $R\setminus\{2\}$. **6.327.** $[-1;\ 1]$. **6.328.** $(-\infty;\ -2)\cup(2;+\infty)$. **6.329.** $[0;3]$. **6.330.** $(2;4)$. **6.331.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ **6.332.** $(-\infty;-\frac{2}{3}]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$ **6.333.** $\left(\frac{11-\sqrt{57}}{4};\ \frac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$. **6.334.** $(8;+\infty)$. **6.335.** $(-3;4)$. **6.336.** $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$. **6.338.** $[1;6]$. **6.339.** $\varnothing$. **6.340.** $(-\infty;-3]$. **6.341.** $[-2;3\frac{2}{3}]$. **6.342.** $[-3;\ 5]$. **6.343.** $(-\frac{4}{7};\ +\infty)$. **6.344.** $(-\infty;1)\cup(7;+\infty)$. **6.345.** $(-\infty;\ 1)$. **6.346.** $(-\infty;\ 2)\cup(3,5;+\infty)$. **6.347.** $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. **6.348.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. **6.349.** $(2;3)\cup(3;+\infty)$. **6.350.** $(-\infty;-6)\cup(-3,5;+\infty)$. **6.351.** $(3;\ 3\frac{1}{3})$. **6.352.** $[0;\ 1\frac{3}{5}]\cup[2,5;+\infty)$. **6.353.** $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$. **6.354.** $(-\infty;2)$. **6.355.** $[\sqrt{6}-2;1)\cup(1;4]$. **6.356.** $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$. **6.359.** $(-\infty;\frac{1+\sqrt{17}}{4}]$. **6.360.** $(1;3)$. **6.361.** $(1-\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2})$. **6.362.** $(-\infty;\frac{4-\sqrt{19}}{3})\cup(\frac{4+\sqrt{19}}{3};+\infty)$. **6.380.** а) $(4;\ -1)$; б) $\varnothing$; в) $(t;5-t)$, $t\in$R; г) $(4;-3)$; д) $(6;9)$; е) $\varnothing$; ж) $\left(t;\ \frac{21t-40}{7}\right)$, $t\in$R.

6.381. а) $(1;2)$; б) $\varnothing$; в) $\left(t;\ \frac{7-2t}{3}\right)$, $t\in$R; г) $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$;

д) $\left(\frac{7}{11};\frac{3}{13}\right)$. **6.382.** а) (1;1;-1); б) (1;-1;1); в) (-1; 1;1); г) (1;1;1); д) (1;-1;-1); е) (-1;-1;1). **6.383.** а) (1;0); (0;-1); б) (5/4;-1/8); (-1;1); е) (-4;-5); (6;-5). **6.384.** а) (2;3),(3;2); г) (2;-3), (3;-2). **6.385.** а) ∅; б) ∅; в) $(1-t;t)$, $t\in R$. **6.386.** а) (-2;-4),(-4;-2),(2;4),(4;2); б) (2;8),(8;2),(-2;-8),(-8;-2); в) $\left(-\frac{9}{5};-\frac{16}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{5};\frac{16}{5}\right)$; г) (-3;-2),(3;2); д) (-7;-3), (7;3); е) Кўрсатма. Бир жинсли тенглама ҳосил қилинг; ж) (-3;-2), (3;2). **6.387.** а) (1;2),(2;1); б) $(-3;-5)$, $\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3}\right)$, $(3;5)$; в) (-4;-5), $(-3\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$, (4;5); г) (1;-1), (3;-3), $\left(\sqrt{157}-13;\frac{\sqrt{157}-13}{2}\right)$, $\left(-13-\sqrt{157};-\frac{13+\sqrt{157}}{2}\right)$; д) (2;-3),$(t;1)$, $t\in R$; е) (-1;3),$(t;2)$, $t\in R$; ж)(2;-1), $(-1;t)$, $t\in R$; з) (-1;-2), $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, (1;2), $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; **6.388.** а) (5;1),(1;5),(3;2),(2;3); б) (2;1), (-1;-2), $(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; в) (-2;-4), $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$; г) (1;4),(-5;-4),(5;-4),(-1;-4).

6.389. а) (2;3),(3;2); б) (-1;-2), (2;1); в) (-1;2),(2;-1). Кўрсатма. Иккинчи тенгламани 3 га кўпайтириб,биринчи тенгламага қўшинг; г) (4;8), (8;4); д) (-3;-1), (-1;-3), (1;3), (3;1); е) (2;-1), (-1;2); ж) (-3;-2), (-2;-3), (2;3), (3;2). Кўрсатма. Биринчи тенгламадан $x^2+y^2=\frac{78}{xy}$ экани топилади. Бу тенгламани квадратга кўтаринг. **6.390.** а) (1;3;9), (9;3;1); б) $\left(\frac{12}{7};\frac{12}{5};-12\right)$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$; г)(2; 1; 3), (-2; -1; -3). **6.392.**

а) -15; б) 3; д) 0; е) 0; ж) 1; з) $x^2(x^2-1)$. **6.393.** а) $a=6$; б) $a=-2$; в) 0; г) a – ихтиёрий сон. **6.394.** а) ±2; б) 0; в) $\varnothing$. **6.396.** в) $x\in R$; г) $x\in R$. **6.397.** а) $8\frac{172}{495}$; б) 3,(13). **6.398.** а) -80; б) 6; в) -72; г) 0; д) 36; е) -90. **6.399.** а) $\frac{2}{3}$; б) 0 ва 6; г) $\varnothing$. **6.400.** а) –23; б) 6; в) $2a-5$; г) $-4a+13b$. **6.401.** а) $\Delta_x=7$; $\Delta_y=-1$; г) $\Delta_x=-35$; $\Delta_y=30$. **6.402.** а) (-5; 2); б) (2;1); в) (6;5); г) (5;-2); д) $\varnothing$; е) $\varnothing$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$; и) $(t;t-1)$, $t\in R$; к) $\left(t;\ \frac{3t}{5}\right)$, $t\in R$. **6.405.** $a=1$, $b=-1$. **6.406.** (1;-1), (1;-2), (-1;-1), (-1;2). **6.407.** $a=4$. **6.408.** $a=3$. **6.409.** а) $\varnothing$; г) $\left(3-2y;\ y;\ \frac{3y+1}{2}\right)$, $y\in R$. **6.410.** $a\in[\frac{2}{3};\ 3-\sqrt{5}]$ да $\left(\frac{4a-a^2}{2a-4};\ \frac{a-4}{a-2}\right)$, $a\in(3-\sqrt{5};\ 2]$ да, $\left(\frac{a^2-12a+8}{6a-4};\ \frac{a}{3a-2}\right)$. **6.411.** $a=7-4\sqrt{3}$ да $(0;\ 1-2\sqrt{3})$, $a=7+4\sqrt{3}$ да $(0;1+2\sqrt{3})$ $a=1$ да (6;-11). **6.412.** 28 м. **6.413.** 2.5 т. **6.414.** 8 кунда. **6.415.** 21 қатор. **6.416.** 20 км/соат. **6.417.** 20 км/соат. **6.418.** 7 км/соат. **6.420.** 5 соат, 7 соат. **6.421.** 30 кунда, 20 кунда. **6.423.** 18 км/соат, 24 км/соат. **6.425.** 11 та. **6.426.** 22 киши. **6.427.** 30 ўқувчи (Эслатма: 12.13. масалада 42 та вектор ҳосил бўлади). **6.428.** 7 та. **6.429.** Саккизбурчак. **6.430.** 40 км/соат. **6.431.** 30 км/соат. **6.432.** 10 см ва 4 см. **6.433.** 15 см; 8 см. **6.435.** 12 см; 16 см; 20 см. **6.436.** 36;4. **6.437.** 40 км/соат; 30 км/соат. **6.438.** 36 км/соат; 24 км/соат. **6.439.** 36 км/соат; 30 км/соат. **6.440.** 10 соат; 6 соат. **6.441.** 60 соат; 84 соат. **6.442.** 18 ва 12. **6.443.** а) $\left(-5;-\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2};1\right)$; б) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; в) $(0;1)$;

г) $(-4;-3)\cup[-2;-1]\cup[1;2)$. **6.451.** $\varnothing$. **6.452.** $\varnothing$. **6.453.** $\varnothing$. **6.454.** $\varnothing$. **6.455.** $\varnothing$. **6.456.** $\varnothing$. **6.457.** $\varnothing$. **6.458.** $\varnothing$. **6.459.** $\varnothing$. **6.460.** $\varnothing$. **6.461.** $\varnothing$. **6.462.** $x=3$. **6.463.** $x=0,5$. **6.464.** $\varnothing$. **6.465.** $\{\frac{1}{2};1\}$. **6.466.** $\{-1; 2\}$. **6.467.** $\{-3; 2\}$. **6.468.** $\{-4; 3\}$. **6.469.** $x=3$. **6.470.** $x=3$. **6.471.** $x=8$. **6.472.** $x=28$. **6.473.** $x=0$. **6.474.** $x=4$. **6.475.** $x=19$. **6.476.** $x=3$. **6.477.** $x=6$. **6.478.** $x=-1$. **6.479.** $x=3$. **6.480.** $x=2$. **6.482.** $x=-1\pm2\sqrt{17}$. **6.483.** $\varnothing$. **6.484.** $x=-5$, $x=0$. **6.485.** $-3\frac{3}{8}$; 1. **6.486.** -8;27. **6.487.** 8; 27. **6.488.** $x=3$. **6.489.** $x=1$. **6.490.** $\{-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\}$. **6.491.** $x=2,5$. **6.492.** $x=8$. **6.493.** $x=5$. **6.494.** $x=\frac{7\pm\sqrt{153}}{16}$. **6.495.** $x=2$. **6.496.** $x=3$. **6.497.** $\varnothing$. **6.498.** $x=-61$, $x=30$. **6.499.** $x=8$, $x=8\pm4\sqrt{3}$. **6.500.** $x=-6$; $x=-5$, $x=-\frac{11}{2}$. **6.501.** $x=-1$. **6.502.** $x=0$. **6.503.** $x=3$, $x=4$. **6.504.** $x=0$. **6.505.** $x=9$. **6.506.** $x=2$; $x=3$. **6.507.** $x=-61$, $x=30$. **6.508.** $x=-2\frac{2}{3}$; $x=1$. **6.509.** $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$. **6.510.** $x=\pm4$. **6.511.** $x=-1$. **6.512.** $x=4$. **6.513.** $\varnothing$. **6.514.** $x=-1$, $x=4$. **6.515.** $[2;+\infty]$ **6.516** $[5;8]$ **6.517.** $x=-\frac{1}{11}$ **6.518** $x=\frac{5}{11}$ **6.519** $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **6.520.** $x=2$. **6.521.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **6.522.** $a<0$ да $\varnothing$, $a\geq0$ да $x=a^2-1$. **6.523.** $a<-3$ да $\varnothing$, $a\geq-3$ да $x=\frac{a-3}{2}$. **6.524.** $a\neq0$ да $x=\frac{5a}{3}$; $a=0$ да $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **6.525.** $a\in(-\infty;2)\cup(2\sqrt{2};+\infty)$ да $\varnothing$: $a\in[2;2\sqrt{2}]$ да $x=5\pm\frac{a\sqrt{8-a^2}}{2}$. **6.526.** $a<0$ да $\varnothing$, $0\leq a\leq\frac{1}{2}$ да $x=a+1\pm\sqrt{2a}$;

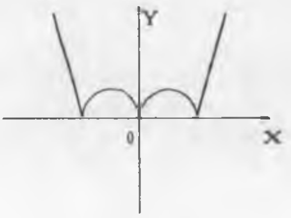
$a>\frac{1}{2}$ да $x=a+1+\sqrt{2a}$. **6.527.** $x=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$. **6.528.** [-3;+∞). **6.529.** (-∞;+∞). **6.530.** (-∞;+∞). **6.531.** ∅. **6.532.** (-∞;+∞). **6.533.** ∅. **6.534.** (-∞;+∞). **6.535.** $x\neq0$. **6.536.** ∅. **6.537.** ∅. **6.538.** (-∞;1]∪[2;+∞). **6.539.** $y\neq-1/2$. **6.540.** (-∞;+∞). **6.541.** (2;3). **6.542.** ∅. **6.543.** ∅. **6.544.** {-1}∪[2;+∞). **6.545.** {-2; 1}∪[3;+∞). **6.547.** (-∞;-8,5]∪[1;10).

VII боб

7.1. $x\neq2$. **7.2.** $x\neq3,4$. **7.4.** $x\neq-2$. **7.6.** $x\neq1$, $x\neq2$, $x\neq3$. **7.7.** $x\neq3$, $x\neq4$. **7.10.** R. **7.12.** $x\neq2$. **7.13.** $x\neq3$. **7.14.** R. **7.16.** $x\neq0$, $x\neq\pm1$. **7.18.** $x\neq0$. **7.19.** $x\neq0$, $x\neq2$, $x\neq3$. **7.26.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};+\infty\right)$. **7.27.** $(-\infty;-2(\sqrt{3}+2))$. **7.28.** {1;2}. **7.29.** $x\neq-8/7$. **7.32.** (-∞;2]. **7.33.** {0}∪[1;+∞). **7.34.** {0}∪[2;+∞). **7.35.** {2}. **7.40.** [-0,5;0,5]. **7.41.** [-2;0]∪{1,5}. **7.42.** {1}∪[2;3)∪(3;+∞). **7.43.** {0,5}. **7.49.** (-∞; 3]. **7.50.** (-∞;2,25]. **7.52.** (-∞;0)∪(0;+∞). **7.53.** (-∞; 1)∪(1;+∞). **7.54.** (0;1]. **7.55.** (-∞;-2]∪[2;+∞). **7.57.** [-2;+∞). **7.58.** (-∞;5]. **7.60.** [2;+∞). **7.61.** (-∞;-2]. **7.62.** [1;+∞). **7.63.** [0;1]. **7.64.** [-4;1). **7.65.** [-1;2). **7.66.** [-2;1]. **7.67.** [-1;3]. **7.68.** [-3;∞). **7.69.** [3;12)∪(123;+∞). **7.70.** [6,75;+∞). **7.84.** $\frac{\text{1мил.йил}}{\text{1х.–кам.йил}}=\frac{365,25}{354,3671}\Longrightarrow$ 1 ҳ.-қ.йил ≈ 0,9702 м.йил ёки 1 м.йил ≈ 1,0307 ҳ.-қ.йил. М милодий (йил,ой,кун) дан Н(t) ҳижрий (йил, ой, кун) га ўтиш: Н(t)=1,0307·t, бунда t=М·622-йил 16-июл; Н ҳижрий-қамарий (йил,ой,кун)дан М(t)=0,9702t+622 йил 16 июл, бунда 622 йил 16 июл ҳижрий ҳисобнинг боши. **7.97.** Кўрсатма: $\frac{3x-1}{x+2}=t$ деб олинг ва $f(t)$ ни топинг. **7.102.** $M'(-3;10)$, $N'(-1;-4)$, $P(0;1)$, $Q(2;-1)$. **7.106.** Координаталар бошини $L(a;b)$ нуқтага параллел кўчириш ва $k=2$ коэффициентли гомотетиядан фойдаланинг. **7.119.** а) тенглама $y=ax^2+bx+c$ ифодадаги номаълум a,b,c коэффициентларни топиш учун x ва y лар ўрнига A,B,C нуқталарнинг координаталари қўйилади ва $\begin{cases}-1=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c,\\ 3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c,\\ 2=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c\end{cases}$ система тузилади.Ундан $c=2$, $a=-2{,}5$, $b=-1{,}5$. Жавоб: $y=-2{,}5x^2--1{,}5x+2$. **7.120.** $M(x_0;y_0)$ нуқта $y=ax^2$ да ётганлигидан $y_0=ax_0^{\,2}$, шу каби $M'(x_1;y_1)$ нуқта $y=k(x-x_0)+y_0$ кесувчи тўғри чизиқда ётади. Шунга кўра, $y_1=k(x_1-x_0)+y_0$ ёки $ax_1^{\,2}=k(x_1-x_0)+ax_0^{\,2}$, бундан $x_1=\frac{k}{a}-x_o$. Кесувчи уринмага айланганида M ва M′ нуқталар устма-уст тушади. Шунга кўра $x_1=x_0$ ва $x_0=\frac{k}{a}-x_o$ ёки $k=2ax_0$.

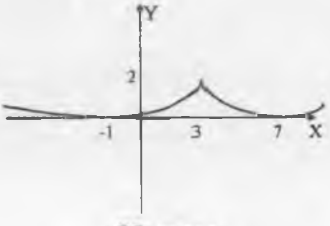
7.134. а) жуфт; б) жуфт; в) жуфт; г) жуфт. **7.135.** в) тоқ; г)жуфт. **7.136.** а) жуфт; б) тоқ; в) жуфт; г) тоқ. **7.137.** а) тоқ; б) жуфт; в) жуфт; г) жуфт. **7.152.** а) 2; б) 1; в) 2; г) -1; д) 1; е) -1; ж) 3; з) -1. **7.153.** а) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\varnothing$; д) $\varnothing$; ж) 1. **7.154.** $(-\infty;+\infty)$ да камаяди. **7.155.** $(-\infty;+\infty)$ да ўсади. **7.164.** $y_{max}=1$, $x_{max}=1$. **7.166.** $y_{max}=\frac{1}{12}$, $x_{max}=1{,}5$. **7.174.** $y_{max}=0$, $x_{max}=-2$. **7.141.** $y=\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{4}x+3$, на тоқ, на жуфт. **7.204.** Масалан, $y=1{,}75x-51{,}25$, $y=1{,}8x-54{,}2$. **7.205** $y=\frac{2}{7}x$. **7.207.** Жадвал қийматлари бўйича чизилган шакл гиперболага ўхшаш. Тенгламани $I=\frac{a}{R}+b$ ифода кўринишида

7.179



81-расм.

7.182.



82-расм.

излаш мумкин. Номаълум a ва b ларни топиш учун жадвалдан ихтиёрий икки $(x;y)$ жуфт қиймат ифодага қўйилиб, система тузилади ва ундан a ва b лар аниқланади. Масалан, (20;4,99), (80;1,25) лар бўйича тузилган $\begin{cases} 4{,}99 = \frac{a}{20} + b, \\ 1{,}25 = \frac{a}{80} + b \end{cases}$ системадан a=100, b=-0,01 аниқланади. Натижада $I=\frac{100}{R}-0{,}01$ олинади.

VIII боб

8.4. Манфий. **8.11.** а) $y=0{,}2^x$; b) $(-2)^x$, x — бутун тоқ сон. **8.12.** б) $K_d=1/(1+0{,}1)^1=0{,}9091$, $K_d=1(1+0{,}1)^2=0{,}8264$, $K_d=1/(1+0{,}1)^3=0{,}7513$, $K_d=1/(1+0{,}1)^4=0{,}6830$. 2) $D_1=30000\cdot 0{,}9091=27273$ сўм, $D_2=40000\cdot 0{,}8264=33056$ сўм, $D_3=5000\cdot 0{,}7513=37565$ сўм, $D_4=60000\cdot 0{,}6830=40980$ сўм. 3) Корхонанинг олдинги йилдаги даромади жами 97794 сўм. Кредитга тўлов учун корхона даромадидан кетади. Бунинг учун 4 - йилнинг олдинги 2206/40980=0,605 йили ёки 0,05·12=0,6 ой 18 кундаги даромадини ҳам беради ва олган кредитини батамом тўлайди. **8.15.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$; в) -7; г) $\frac{2}{3}$; д) $-\frac{1}{2}$; е) -2,5.

8.16. а) 100; б) 6; в) $\frac{1}{9}$; г) 4. **8.20.** д) 3. **8.29.** $\frac{y_{n+1}}{y_n}=k, 0<k\neq 1$

бўлсин. Ифодани логарифмлаб, $\lg|y_{n+1}| - \lg|y_n| = \lg k$ ни оламиз. Демак, z=lg|*y*| функциянинг чекли айирмалари доимий: $\Delta z = c$. Функцияни $z=\alpha x+\beta$ ёки $\lg|y|=\alpha x+\beta$ кўринишида бериш мумкин. Бундан $y = 10^{\alpha x+\beta}$ ёки $y=\mathrm{A}\cdot a^x$, бунда $\mathrm{A}=10\beta$, $a=10\alpha$. **8.31.** а) 10; б) 890; в) $a+b$. **8.32.** а) $x = \frac{(a+b)^2\sqrt{a}}{(a-b)^{\frac{2}{3}}}$; б) $x = (a-b)a^{\frac{2}{3}}b$. **8.41.** б) 2; к) $x=1$; л) $x=\log_{15}5$; м) $x=2$; о) $x=\pm 1$; п) $x=0$, $x=2$; р) $x=0$, $x=\pm 1$; с) $x = \frac{\lg 3}{\lg\frac{2}{3}}$; т) $x=0$; $x=\log_{2,5}1,5$; у) $x=\pm 2$; ф) $x=3$. Кўрсатма: х, ц, ч, ш, э тенгламаларни ечишда функцияларнинг монотонлик хоссаларидан фойдаланинг. **8.42.** е) $(-\infty;-3)\cup\cup(-1;+\infty)$; ж) $[1;+\infty)$; з) $[-\log_3 2;0]$; и) $[2;+\infty)$; к) $(-\infty;0]\cup\cup[2;+\infty)$; л) $(-\infty;+\infty)$; м) $(x\in R)$; н) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$; о) $(-\infty;\log_{0.4}2)$; п) $(-2;+\infty)$; р) $[-1;0]\cup[2;3]$; с) $(-\infty;1)\cup(0;2)$; т) $(-\infty;\log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$; у) $(\frac{5}{3};2)$; ф) $(1;4)$. **8.44.** а) $\frac{25\pm\sqrt{7}}{8}$; л) $x=2$; м) $x=4$; н) $x=2$; о) $x=0$; п) $x=100$; р) $x=-2-\sqrt{10}$; с) $x = 3^{-\sqrt{2}}$; $x = 3^{\sqrt{2}}$; т) $x=\sqrt{5}$, $x=5$; у) $x=-1$, $x=0$; ф) $x=-\frac{9}{5}$, $x=23$; х) $x=10$. Кўрсатма: ц, ч, ш, э, ю тенгламаларни ечишда функцияларнинг монотонлик хоссаларидан фойдаланинг. **8.45.** д) $x > 1000$; л) $(\frac{1}{5};\frac{2}{5})$; м) $\left(\frac{1}{3};2\right)$; н) $(0;\frac{1}{2}]\cup(2;4]$; о) $(-\frac{4}{3};-\frac{17}{22})$; п) $(2;2,5)$; р) $(\log_3 10;+\infty)$;

с)$(0;\frac{1}{2})\cup(1;2)\cup(3;6)$; т) $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$; у) $(-1;-\frac{2}{\sqrt{5}})\cup(\frac{2}{\sqrt{5}};1)$; ф) $(0;\frac{1}{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$. **8.46.** (2;4). **8.47.** (2;1). **8.48.** (8;2). **8.49.** (1;1). **8.50.** (4;1). **8.51.** (2;4). **8.52.** (4;3). **8.53.** (2;8). **8.54.** (1;1). **8.55.** (9;27). **8.56.** а) (1;2); б) (0;3); в) (2;1000), (2;0,001); г) (Кўрсатма: системани $\begin{cases} \lg|x| + \lg|y| = 1 + \lg 4, \\ \lg y \cdot \lg x = \lg 4 \end{cases}$ кўринишга келтиринг.) (10;4), (4;10), (-10;-4), (-4;-10). **8.57.** к) $x=1$, $y=3$; л) $1 \le x \le \frac{3\pi}{4}$; м) $\frac{1}{16} \le a < 1$; н) $x=1, y=0{,}3$; о) 0,616, 0,788. **8.79.** 9. **8.80.** -3; 5, Кўрсатма: $33+\sqrt{128}=(\sqrt{32}+1)^2$. **8.81.** 5. **8.82.** 0. **8.83.** ±2; -1. **8.84.** 1. **8.85.** 0,001; 10. **8.86.** -2. **8.87.** 2. **8.88.** 1. **8.89.** 1. **8.90.** 9. **8.91.** $\log_3 10$; $\log_3 28-3$. **8.92.** 1. **8.93.** 1. **8.94.** 100. **8.95.** $\pm\frac{1}{2}$; **8.96.** $-\frac{13}{5}$; -2; 3. **8.97.** -1. **8.98.** -64; -1. **8.99.** $-\frac{1}{4}$; **8.100.** $\frac{1}{4}$. **8.101.** $-\frac{2}{3}$. **8.102.** 3. **8.103.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **8.104.** $[0;1]$. **8.105.** $(-\infty;-6)\cup\cup(2;+\infty)$. **8.106.** $[-2;-1)$. **8.107.** $\left(-\frac{3\sqrt{5}+1}{2};-2\right)\cup\cup\left(1;\frac{3\sqrt{5}+1}{2}\right)$. **8.108.** $\left[\frac{3}{4};1\right)$. **8.109.** $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5};-1\right)\cup\left(1;\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$. **8.110.** (0;3). **8.111.** (0;-3). **8.112.** (1;2). **8.113.** $\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (2;1). **8.114.** (125;4), (625;3). **8.115.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{9}\right)$.

МУНДАРИЖА

I-БОБ. ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

II БОБ. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

III БОБ. КОМПЛЕКС СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

IV БОБ. КЎПҲАДЛАР

V БОБ. АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР

VI БОБ. АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

VII БОБ. ФУНКЦИЯЛАР

VIII БОБ. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

АБДУҲАМЕДОВ АБДУҲАКИМ, НАСИМОВ ХУСАН,
НОСИРОВ УМАРҒУЛ МИСИРОВИЧ,
ҲУСАНОВ ЖУМАНАЗАР

АЛГЕБРА ВА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ АСОСЛАРИ УЧУН

I қисм

Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари
учун синов дарслиги

Тошкент, “Ўқитувчи” 2001

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррир *И. Ғ. Аҳмаджонов*
Бадиий муҳаррир *М. Кудряшова*
Техн. муҳаррир *С. Турсунова*
Мусаҳҳиҳ А. *Иброҳимов*

ИБ № 7970

Оригинал-макетдан босишга рухсат этилди 3.10.2001.
Бичими 84×108 $^1/_{32}$. Кегли 10 шпонли. Таймс. гарн.
Офсет босма усулида босилди. Шартли б. т. 24,36.
Шартли кр.-отт. 24,78. Нашр. т. 13,35.
5000 нусхада босилди. Буюртма № **2008**

“Ўқитувчи” нашриёти. Тошкент, 129, Навоий кўчаси, 30.
Шартнома 09-95-2001.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг
1-босмахонасида босилди.
Тошкент, Сағбон кўчаси, 1-берк кўча, 2-уй. 2001.

22.14
А 65

Алгебра ва математик анализ асослари. I қисм: Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун синов дарслиги /А.У.Абдуҳамедов, Ҳ.А. Насимов, У. М.Носиров, Ж. Ҳ. Ҳусанов.— Ўқитувчи 2001.—464 б.

I. **Абдуҳамедов А.У.** ва бошқ.

22.14я722+22.16я722