С. А. АҲМЕДОВ, Н. С. АҲМЕДОВА

ЎРТА ОСИЁДА АРИФМЕТИКА ТАРАҚҚИЁТИ ВА УНИНГ ЎҚИТИЛИШ ТАРИХИ

Ўзбекистон ССЖ Халқ таълими вазирлиги тавсия этган

Қайта ишланган ва тўлдирилган иккинчи нашри

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ“ 1991

Махсус муҳаррир тарих фанлари доктори А. Аҳмедов

Тақризчилар: педагогика фанлари доктори профессор Х. Х. Тиллашев, профессор И. Т. Мақсудов, доцент
С. Х. Сиддиқов

Ушбу китобча Ўрта Осиёда математика, хусусан, арифметика тараққиёти ва унинг ўқитилиш тарихини ёритишга бағишланган. Унда Ўрта Осиё математиклари асарларида бутун сонлар ва улар устида амалларни, худди шунингдек, каср сонлар ва улар устида амалларни ўқитиш қандай баён этилганлиги ҳақида ҳикоя қилинади.

Китобча ўрта мактаб ўқитувчилари, университетларнинг ва педагогика институтларининг талабалари учун мўлжалланган. Шунингдек, ундан математика тарихига қизиқувчи барча китобхонлар фойдаланишлари мумкин.

А 98

Аҳмедов С. А., Аҳмедова Н. С.
Ўрта Осиёда арифметика тараққиёти ва унинг ўқитилиш тарихи /Махсус муҳаррир А. Аҳмедов. — 2-қайта ишланган ва тўлдирилган нашр. — Т.: Ўқитувчи, 1991. — 284 б.

1. Автордош.

Ахмедов С. А., Ахмедова Н. С. История развития арифметики и её преподавание в Средней Азии.

ББК 22. 130 г

Тираж 4000
Карт. тиражи 8000

$А \frac{1602010000-69}{353(04)-91}$ 174—90

ISBN 5—645—00851—0

СЎЗ БОШИ

Ўтмиш аждодларимиз фан ва маданиятнинг турли соҳаларида яратган ва ҳақли равишда фахрланса арзигудек беқиёс бойликлар асрлар оша бизгача етиб келди. Фақат Улуғ Октябрь революциясидан кейингина бу бойликларга юксак баҳо берилди ва улар чинакам халқ бойлиги бўлиб қолди. Эндиликда Ўрта Осиё халқларининг аждодлари томонидан яратилган бу илмий ва маданий ёдгорликлар фақат Ўрта Осиё халқлари учунгина эмас, балки кўп миллатли Советлар ўлкасида яшовчи барча миллатлар ва элатлар учун ҳам муҳим аҳамият касб этадиган улкан бойлик бўлиб қолаяпти. Шунинг учун ҳам бу илмий меросни ўрганиш ва уни оммалаштириш совет олимларининг ва айниқса фан тарихи мутахассисларининг интернационал бурчидир. Лекин шуни ҳам айтиш керакки, фаннинг турли соҳаларига, айниқса, математик фанлар, жумладан, арифметика, алгебра, геометрия ва тригонометрияга тааллуқли қўлёзмалар тўлиқ ва ҳар томонлама ўрганилган деб бўлмайди. Шу билан бирга бу фанларнинг баён этилиш ва ўқитилиш усуллари тўлиқ тадқиқ этилган деб бўлмайди. Ундан ташқари ўрта аср мадрасалари ва мактабларида математик фанлар қандай тарзда ва қандай ҳажмда ўргатилганлиги ҳам ҳозирги тадқиқотлар доирасидан четда қолиб кетаяпти. Ваҳоланки, сақланиб қолган кўплаб математик асарлар мазмуни ва баён этилиш услуби жиҳатидан ўз даврининг шу фан соҳасидаги дарслиги ва педагогик қўлланмаси бўлганлиги шубҳасиздир. Шунинг учун ҳам математика ўқитувчилари ва педагоглар ўз диққат доираларига шу масалаларни ҳам киритсалар ва ўз дарсларида, дарсдан ташқари машғулотларида баён этилаётган масалаларига тарихий ёндашиб математика тарихидан ҳам маълумотлар бериб турсалар, ўқувчиларнинг билимлари чуқурлашиб, уларда математикага ва унинг тарихига катта қизиқиш уйғонарди. Шу айтилганлар нуқтаи назаридан шу кунгача рус ва ўзбек тилларида чоп этилган арифметика тарихига оид манбалар асосида шу фанни ўтмишда ўқитилиш тарихи ҳақида ушбу қўлланма тарзидаги асарни ёзиш мақсадга мувофиқ деб топилди.

Асар, асосан, икки бўлим ва беш бобдан иборат бўлиб, унинг биринчи бўлими С. А. Аҳмедовнинг 1978 йилда „Ўқитувчи“ нашриётида чоп этилган “Ўрта Осиёда математика ўқитиш тарихидан“ китобининг қисқартирилган ва қисман ўзгартирилган вариантидир. Унда „Ўрта Осиёда бутун сонлар арифметикасининг ўқитилиш тарихи“ баён қилинади. Биринчи бўлимда:

1) Ўрта асрларда Ўрта Осиё олимларининг математика соҳасида битган асарлари ҳақида, хусусан, уларнинг арифметикани қандай мазмунда ва қандай усулда баён этганликлари ҳақида маълумот берилади.

2) Ўрта аср Шарқ математикларининг арифметик асарлари асосида XVIII — XIX асрларда Ўрта Осиё мадрасаларида ўқитилган арифметиканинг мазмуни, ўқитиш усули ва бу соҳадаги изланишлар ҳақида баён этилади.

3) X — XI асрларда Ўрта Осиё ва унга қўшни ўлкаларда яшаган математиклар ўзларининг арифметик асарларида ўнли позицион ҳисоблаш системаси ва арифметик амалларнинг бажариш усуллари ва уларга берилган таърифларнинг эволюцияси, арифметик амалларни ҳозирги усул билан бажаришга ўтилган босқичлар ва бунга оид тарихий маълумотлар берилади.

Асарнинг иккинчи бўлимида эса муаллиф Н. С. Аҳмедова „Ўрта Осиёда каср сонлар арифметикасининг ўқитилиш тарихи“ ни баён қилади. Унда:

1) Ўрта Осиё математиклари мисрликлар, юнонлар ва ҳиндларнинг оддий каср ғоясини илмий ва методик томондан такомиллаштирганликлари, уларнинг асарлари асосида мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида амалларни бажариш усули такомиллаштирилганлиги ҳақида баён этилади.

2) Ўрта аср шарқ математиклари бобилликларнинг олтмишли позицион ҳисоблаш системасини тараққий эттириб, ягона абсолют олтмишли ҳисоблаш системасини ижод этганликлари, бу системада касрларни ифода-

лаш ва улар устида амаллар бажариш усуллари ҳақида баён этилади.

3) Улуғбек мадрасасининг атоқли арбоби Жамшид Коший 1427 йилда ёзган „Арифметика калити“ китобида қандай усул билан ўнли касрни кашф этганлиги, ўнли касрни арифметик амалларни бажаришга ва геометрик миқдорларни ўлчашга системали татбиқ қилганлиги, олтмишли касрни ўнли касрга ва унинг тескарисиға айлантириш усуллари ва бунга оид тарихий маълумотлар берилади.

Муаллифлар ҳурматли китобхонларнинг ушбу китоб ҳақидаги танқидий фикр-мулоҳазаларини чуқур мамнуният билан қабул қиладилар.

Муаллифлар.

1-бўлим. ЎРТА ОСИЁДА БУТУН СОНЛАР АРИФМЕТИКАСИНИНГ ЎҚИТИЛИШ ТАРИХИ

I боб. ЎРТА ОСИЁ МАТЕМАТИКАСИ ТАРИХИГА УМУМИЙ ОБЗОР

1- §. Ўрта Осиё халқлари маданияти ва математика тарихи ҳақида қисқача маълумот

Ўрта Осиё халқлари ҳам бошқа халқлар қатори жаҳон маданияти хазинасига катта ҳисса қўшган. Бу моддий ва маданий бойликларнинг кўпи, айниқса, кўплаб қўлёзма асарлар чет эл босқинчиларининг кўп асрлар давомида Ўрта Осиё халқларига қарши босқинчилик урушлари оқибатида йўқолиб кетган. Шу сабабли бу халқларнинг ўрта асрлардаги маданиятининг ҳақиқий манзарасини ўрганиш анча мушкул.

Совет давлати Ўрта Осиё халқларининг маданий ва илмий меросларини ўрганиш учун кенг имконият яратиб берди ва бу меросларни тўла-тўкис ўрганишни совет олимлари олдига муҳим вазифа қилиб қўйди.

Совет олимларининг бу соҳадаги қатор илмий-текшириш ишлари Ўрта Осиё энг қадимги илм ва маданият ўчоқларидан бири бўлганлигини кўрсатади. Ўрта Осиё халқлари ҳам бошқа халқлар сингари маданият ва илм хазинасига катта ҳисса қўшганлар. Совет олимларидан С. П. Толстов, М. Е. Массон, Я. Ғуломов, В. А. Шишкин ва бошқаларнинг Ўрта Осиёда олиб борган кўп йиллик археологик текширишлари натижасида топилган (эрамиздан аввалги ва эрамизнинг V—VI асрларигача) қадимий ёдгорликлар Ўрта Осиё халқлари маданияти юксак бўлганлигидан далолат беради.

Ислом динининг асосчиси Муҳаммад сиёсий-диний душманлари устидан Ҳижозда ғалаба қозонгач, ислом байроғи остида ҳарбий юришларни бошлайди. Унинг халифалари Жиҳод, яъни „Муққаддас уруш“ шиори билан VII аср 30 йилларидан то 715 йилларигача Шарқий Туркистон ва Ҳиндистоннинг шимоли ғарбидан то Африканинг ғарбий соҳиллари ва Испаниянинг шимолигача бўлган ерларни босиб олди. Улар Ўрта Осиёга VII аср иккинчи ярмидан бошлаб бир неча марта юриш қилиб, 712 йилга келиб, халқнинг қаттиқ қаршилик кўрсатишига қарамай, катта куч билан Ўрта Осиёни тўла истило қиладилар. Араблар ўз ҳукмронликларини мустаҳкамлаш мақсадида Ўрта Осиё халқлари ўртасида қаттиқ жазо тадбирларини қўллайдилар ва меҳнаткашларни эзиш қуроли—ислом динини зўрлик билан ўрнатадилар. Араб истилочилари босиб олган ерларида ўзлариникидан бирмунча устун бўлган юксак маданиятга дуч келдилар. Хусусан, Ўрта Осиёда, айниқса, Хоразм, Зарафшон воҳаси, Фарғона ва Сурхон водийларида қадимдан юксак маданият бўлганлигига аввало Тупроқ қалъа, Қўй Қирилган қалъа, Афросиёб, Панжикент, Далварзин тепа ва бошқа жойлардаги археологик қазилмалар ва тарихий солномалар гувоҳлик берса, иккинчидан, унга ўрта асрларда Шарқ мамлакатларида насаблари „Хоразмий“, Самарқандий“, „Бухороий“, Фарғоний, „Тирмизий“ ва ҳоказо деб аталган олимларнинг ниҳоятда кўп бўлганлиги гувоҳлик беради.

Қутайба бошчилигидаги ислом лашкарлари Ўрта Осиёни ваҳшийларча хонавайрон қилган ва унинг қадимий маданиятига мислсиз зарба берган бўлсалар ҳам уни бутунлай йўқота олмадилар. Ўрта Осиё халқлари тезда ўзининг қадимий маданиятини янги асосда тиклаб олдилар IX аср охирига келиб, кескин синфий курашлар ва бўйсундирилган халқларнинг озодлик ҳаракатлари туфайли, Ўрта Осиёда араб ҳукмронлиги йўқотилди.

IX—X асрларда Ўрта Осиё ва Хуросонда маҳаллий феодал аристократиясидан чиққан Сомонийлар давлати ўрнатилди. Сомонийлар давлатининг пойтахти Бухоро шаҳри эди. X аср иккинчи ярмига келиб Сомонийлар давлатидаги феодал тарқоқлик, синфий зиддият ва феодаллар ўртасидаги ўзаро курашларнинг кучайиши натижасида Сомонийлар ҳукмронлиги заифлашди. Шу шароитдан фойдаланиб, Мовароуннаҳрни Қорахонийлар, Хуросонни Маҳмуд Ғазнавий осонгина босиб олди. Қорахонийлар ва Хоразмшоҳ давлатларида фан ва санъат ривожланган бўлса ҳам, бу тараққиёт даври узоқ давом этмади.

Чингизхон (тах. 1155—1227) ва унинг авлодларининг бир ярим аср давомида қилган қонли урушлари Ўрта Осиё хўжалигини вайрон қилиб, фан ва маданиятига путур етказди. Ўрта Осиё халқларининг мўғул босқинчиларига карши қаҳрамонона кураши натижасида вужудга келган сарбадорлар (деҳқонлар, ҳунармандлар ва қуллар) ҳаракати натижасида 1365 йилда Самарқанд истилочилардан озод қилинди. 1366 йилда Темур ҳарбий ҳийла ишлатиб, сарбадорлар ҳаракатини бостириб, Самарқандни ишғол қилди. Қисқа муддатда жуда катта феодал давлатини бунёд этди.

Темур ўз империясининг шуҳратини орттириш ва мустаҳкамлаш мақсадида турли мутахассис олимларни сарой атрофига йиғди. Хусусан, адабиётга ва нафис тасвирий санъатга катта аҳамият берди. Ундан кейин набираси Мирзо Улуғбек (1394 — 1449) ўз атрофига олимлар ва шоирларни тўплаб, фан-адабиёт ва санъатнинг тараққий этишига ҳомийлик қилди.

Улуғбек раҳбарлигида Самарқанд расадхона (обсерватория) си қурилади ва шу расадхона заминида астрономия мактаби ташкил қилинади. Улуғбек мактабининг улуғ намояндалари Салоҳиддин Мусо ибн Маҳмуд Қозизода Румий, Ғиёсиддин Жамшид Коший, „Замонининг Птолемейи“ деб ном чиқарган Аловуддин Али Қушчи, Хусайн Биржандийлар математика, астрономия ва бошқа фанларга доир кўпгина асарларнинг муаллифларидир.

Машҳур намояндалардан Лутфий, Саккокий, Ҳаким Мавлоно Нафисий ва Тафтазонийлар ҳам мана шу даврда яшаб ижод киладилар.

Улуғбек мактабида математика ва астрономия тарихида чуқур из қолдирган бир қанча илмий ишлар яратилди. Астрономия соҳасида қилинган илмий ишлардан энг муҳими „Янги Кўрагон“ астрономия жадвали („Зижи Кўрагоний“) дир.

Бу асарда астрономия назарияси ва кузатиш натижасида аниқланган жадвал акс эттирилади. Астрономия соҳасида Улуғбек мактаби эришган муваффақиятлар Ислом ақидаларига тамомила зид бўлганлиги учун Улуғбек 1449 йил 27 октябрда реакцион руҳонийлар ва феодал аристократлар томонидан ўлдирилади.

Улуғбекдан кейинги даврда феодал тарқоқлик ва ўзаро урушларнинг кучайиши ҳамда диний мутаассиблик, руҳонийлар ва феодалларнинг зулми ортиши натижасида Ўрта Осиё фани ва маданиятига қақшатқич зарба берилди ва бу соҳада қарийб уч аср давом этган тушкунлик ва турғунлик даври ҳукм сурди.

Ўрта Осиё математикаси тарихи эса математика тарихини ўрганишнинг иккинчи даврига тегишлидир. Демак, Ўрта Осиё математикаси тарихи математика тарихининг бир тармоғидир. Шуни ҳисобга олиб, математика тарихига қисқа обзор беришни лозим топдик.

Математика тарихи математик фанлардан биридир. Математика тармоқлари турлича бўлишига қарамасдан, улар маълум умумий қонуниятлар асосида биргина предметга мужассамланади. Бу предметлар ҳақида Ф. Энгельс „Математика ҳақиқий борлиқдаги миқдорий муносабатлар ва фазовий формалар ҳақидаги фандир“,— дейди. Математик фанларнинг турлича тармоқлари, ўзига хос метод билан шу миқдорий муносабат ва фазовий формаларнинг хусусий ҳоли билан шуғулланади. Демак, математика тарихи — математиканинг объектив қонун бўйича тараққиёти ҳақидаги фандир.

Математиканинг тарихий тараққиётида тўпланган фактларни тўла-тўкис ўрганиш учун уларни бир-биридан ўзига хос характер билан фарқ қилувчи алоҳида даврларга бўлиш зарурдир.

Академик А. Н. Колмогоров катта Совет Энциклопедиясининг XXVI томида ёзган „Математика“ номли мақоласида математика тарихини қуйидагича тўрт даврга бўлади:

I. Математиканинг вужудга келиш даври. Бу давр ибтидоий даврлардан эрамиздан олдинги VI—V асрларгача бўлган вақтни ўз ичига олади. Бу даврда математика ҳали алоҳида фан тариқасида ўзининг предмети ва методига эга бўлмай, балки математикадан фақат айрим фактлар тўпланади. Математик тушунча — миқдор эса инсон тажрибасидан олиниб, тажрибадан ажратилган ҳолда, мустақил абстрактлашган текшириш методи доирасига киритилмаган. Умуман олганда, бу давр математикаси илмий назариясиз практик характерда бўлган. Бунга мисол тариқасида қадимги Миср, Шумер-Бобил, Хитой ва Ҳинд математикасини кўрсатиш мумкин.

II. Элементар математика даври. Бу эрамиздан олдинги VI—V асрлардан бошлаб эрамизнинг XVII асригача бўлган вақтни ўз ичига олади. Бу даврда математика алоҳида фан тариқасида ўзининг предмети ва методи билан вужудга келади. Масалан:

1. Эрамиздан олдинги VI—V асрларда қадимий юнон математикасида абстрактлашган ва қатъий ман-

тиқлашган геометрия вужудга келади, бу Евклид геометрияси номи билан аталади. Бундан ташқари, бутун ва рационал сонлар арифметикаси, Дедекинд кесими назариясига ўхшаш нисбатларнинг умумий назариясининг асослари, лимитлар назариясининг элементлари, юз ва ҳажмни ҳисоблашдаги „Етарли метод“ каби математика тармоқлари вужудга келади.

2. Ўрта Осиё математикларидан Муҳаммад Хоразмий (IXа) алгебрани ижод этиш билан уни алоҳида фан даражасига кўтаради.

3. Ўрта Осиё математикларидан Хоразмий (IX а) ва Абу Ҳасан Жилий (Xа) ўнли ва олтмишли позицион саноқ системасига асосланган арифметикани яратадилар.

4. Хуросонлик математик Насириддин Тусий XIII асрда текис ва сферик тригонометрияни системага солади ва тригонометрияни алоҳида фан даражасига кўтаради.

III. **Ўзгарувчи миқдорлар математикасининг вужудга келиш даври.** Бу XVII асрдан XIX асрнинг иккинчи ярмигача бўлган вақтни ўз ичига олади. Шу давр бошланишининг улуғлиги шундаки, улуғ француз олими Рене Декартнинг математикага ўзгарувчи миқдорларни киритиши ва И. Ньютон ҳамда Г. В. Лейбницлар асарларида дифференциал ва интеграл ҳисобининг ижод этилишидир. Бу ҳақда Ф. Энгельс шундай дейди: „XVII асрда математикага Декартнинг ўзгарувчи миқдорларининг кириши билан математикада бурилиш нуқтаси (революция) ҳосил бўлади. Шу туфайли математикага ҳаракат ғояси ва диалектика киради. Шунинг натижасида дифференциал ва интеграл ҳисоби вужудга келади“ („Диалектика природы,“ 1948, стр. 208). Бу даврдаги математика „Классик олий математика“ номи билан аталади. Бу давр математикада ўзгаришлар кириши билан ҳозирги замон математикаси ҳолатига етганда тугайди.

IV. **Ҳозирги замон математикаси даври.** XIX ва XX асрларда математик метод билан текшириладиган фазовий форма ва миқдорий муносабатларнинг ҳажми ниҳоятда кенгаяди. Жуда кўп математик назариялар вужудга келади ва математиканинг татбиқ қилиш соҳаси ҳаддан ошиқ кенгаяди. Математикада янги-янги тармоқлар вужудга келади ва математика ҳаддан зиёд абстрактлашади. Ҳозирги замон математика предметининг шундай бой ва катта мазмунга эга бўлиши унинг энг муҳим проблемалар мажмуасини қайта қуришга олиб келади. Математика асослари деганда, тарихий, мантиқий, фалсафий проблема ва математик назариялар системаси тушунилади.

Математика тараққиётининг биринчи даврида Ўрта Осиёда қандай математик тушунчалар юзага келганлиги ҳақида ҳозирча аниқ маълумот йўқ. Ўрта Осиёлик олимларнинг математикага қўшган ҳиссалари кўпроқ элементар математика даврига тааллуқлидир.

Профессор А. П. Юшкевич ўзининг „Ўрта асрлардаги математика тарихи“ китобида ўрта аср ислом мамлакатларидаги математика тараққиётини сезилмас даражада бири иккинчисига ўтувчи уч даврга бўлади. Ўрта Осиё математикаси тарихи эса ислом мамлакатлари математикаси тарихининг таркибий қисми бўлганлиги учун буни ҳам шундай уч даврга бўлиш мумкин.

Ўрта Осиё математикаси тараққиётининг биринчи даври VIII асрдан X асрнинг бошларигача бўлган вақтни ўз ичига олади. Шу давр бошланишининг улуғлиги шундаки, араб халифаларидан ал-Мансур (754—775), Ҳорун ар-Рашид (786-809) ва ал-Маъмун (813—833) ларнинг ташаббусида Ироқнинг маркази Боғдод шаҳри биринчи йирик ва маданий марказга айланади. Боғдодда „Бейтул ҳикмат“, яъни „Донишмандлар уйи“ ва унинг негизида астрономия расадхонаси қурилади. „Донишмандлар уйи“ га Шарқ ва қадимги юнон олимларининг асарлари Византиядан келтирилади. Муҳаммад Хоразмий академия, расадхона ва кутубхонага раҳбарлик қилади. Биринчи давр Ўрта Осиё математиклари қадимий меросларини ўрганиш натижасида қуйидаги хулосаларга келдик:

1) Ўзига хос математик маданиятни вужудга келтириш билан ҳисоблаш математикасидаги проблемаларга юнонларнинг тушунча ва методларини қўллайдилар.

2) Ҳисоблаш алгоритмини юқори даражада такомиллаштириб, уни мисол ва масалалар ечишга умумлаштириб татбиқ қиладилар.

3) Алгебра ва ўнли позицион саноқ системасида арифметикани алоҳида фан даражасига кўтарадилар.

4) Гарчи Хоразмийдан аввал мерос тақсим қилиш масаласи билан қадимги бобиллик, мисрлик ва юнон-

ликлар шуғулланган булсалар-да, Хоразмий бу масалани мусулмон ҳуқуқи нормалари асосида мерос тақсим қилиш назарияси ва амалий асосларини биринчи бўлиб курсатади.

Халифалик даврида Боғдод шаҳри ягона илмий марказ бўлмасдан халифаликка тобе бошқа илмий марказлар ҳам бўлган. Шу илмий марказларда Ўрта Осиё ҳамда қўшни мамлакатлар олимлари ишлаганлар ва фан соҳасига салмоқли ҳисса қўшганлар. Масалан:

1) Боғдод академиясида, Ўрта Осиё математикларидан Муҳаммад Хоразмий (IX), Абул Аббос Фарғоний (IX), Аббос ибн Саид Жавҳарий (IX), Аҳмад ибн Абдулло Марвазий (IX), Абу Абдулло ал-Моҳоний (IX), Абу Наср ал-Фаробий (IX—X), Ироқ ва Хуросондан Абу Ҳасан Сабит ибн Қурра (IX), Абул-Вафо (X), ал-Кухий (X) ва Ҳосиб Кархий (X) лар ишлайдилар.

2) IX—X асрларда Ҳиротдаги ар-Раққа расадхонасида ал-Батоний (IX), Теҳронга яқин Рей шаҳрида Маҳмуд Хўжандийлар (X) ишлаганлар ва ижод қилганлар.

Ўрта Осиё математика тараққиётининг иккинчи даври X асрдан XII асргача бўлган вақтни уз ичига олади. Бу даврда математиканинг айрим тармоқларида бир бутун системалашган назария вужудга келади. Қадимги юнонликларнинг конус кесимлар назарияси асосида Ўрта Осиё математикларидан Умар Хайём учинчи даражали тенгламаларни ечишнинг геометрик назариясини қуради. Хоразмийдан кейинги даврларда Абу Комил (X), Ҳосиб Кархий (X) ва Сирожиддин Сижовандий (XII) лар алгебрани тараққий эттириш билан алгебранинг амалий татбиқи булмиш мерос тақсим қилиш булимининг илмий назариясини бойитдилар. Улар, алгебранинг рационал ва иррационал ифодалар устида айний алмаштириш бўлимини кенгайтирадилар ва айниятлар тўғри эканлигининг умумий куринишдаги исботини берадилар. Алгебрани геометрия масалаларига татбиқ қилиб, мунтазам купбурчакларнинг томонларини топиш масаласини квадрат ва биквадрат тенгламалар тузиш билан ҳал қиладилар. Кархий уч хил куринишдаги квадрат тенгламаларга келтириладиган юқори даражали тенгламаларни ечишни, арифметик ва геометрик прогрессияларни ва натурал қатордаги сонлар даражаларининг йиғиндисини топишни баён этади.

Ўрта Осиёда математика тараққиётининг учинчи даври XIII асрдан XV асргача бўлган вақтни ўз ичига олади. Бу даврнинг улуғлиги шундаки, Ўрта Осиё ва қўшни мамлакатлар олимлари математикани тараққий эттириш билан бу соҳада қуйидаги янгиликларни ижод қиладилар:

1) Шарққа машҳур Марога расадхонасининг асосчиси ва раҳбари „Элхон зижи“ нинг муаллифи Насириддин Тусий (1201—1274) „Тўла тўртбурчак ҳақида рисола“ („Китоб аш-шакл ал-қитаъ) номли тригонометрияга доир асар ёзиб, систематлашган тўғри чизиқли ва сферик тригонометрияни яратади ҳамда тригонометрияни алоҳида фан даражасига ўтишидаги муҳим масалани тўла-тўкис ҳал қилади.

2) Тусий нисбатлар назариясини ишлаб чиқиб, биринчи бўлиб, бир хил исмдаги миқдордан бирининг иккинчисига нисбати—исмсиз сонлар нисбати деган тушунчани фанга киритади ва ўлчовсиз миқдорларнинг нисбатини сон деб хисоблайди.

3) Улуғбек расадхонасининг илмий ходими Жамшид Коший (XIV) „Арифметика калити“ (Мифтоҳ ал-ҳисоб“) номли асарида биринчи бўлиб фанга ўнли касрни киритади ва уни математиканинг бошқа тармоқларига татбиқ қилади.

Шундай қилиб, ўрта асрда яшаган Ўрта Осиёлик олимлар математикани тараққий эттириб, бу соҳага ўзларининг бой мазмундаги салмоқли хиссаларини қўшдилар. Улар астрономия, математика, география ва бошқа фанлар соҳасида оригинал асарлар яратдилар. Ўрта Осиёлик олимлар математиканинг бир тармоғи бўлмиш арифметикани тараққий эттиришга катта аҳамият берадилар. Улар арифметикага доир ўз асарларида арифметик амалларни бажаришнинг энг содда усулига келгунча бўлган босқичларни кўрсатадилар ва ҳозирги йўлда амал бажариш энг содда эканлигини уқтирадилар.

Ўрта Осиё математиклари ўз асарларида математик жумлаларни муҳокама йўли билан исботлашга, материалларни системали жойлашишига ва унинг тўлалигига катта эътибор берадилар. Агар муаллиф бирор математик жумланинг исботини келтирмаса, бу жумлага асосли равишда таъриф беришга ҳаракат қилади Ўрта Осиё математиклари асарларининг охирги бўлимида, яъни „Васият ҳақида мақола“ деб аталган қисмида математиканинг амалий татбиқи—ислом ҳуқуқи нормаларига қараб, меросхўрлар ўртасида мулк тақсимлашга доир масалалар берадилар ва уларни ечиш усулини кўрсатадилар.

Ўрта асрнинг охирлари, яъни XVI асрдан XX асргача бўлган даврда ўзаро феодал урушлар ва реакцион руҳонийларнинг қаршилиги натижасида фан ва илм тараққиётининг ривожланиш тезлиги сусаяди. Шунга қарамасдан замон илмий прогрессив кучларни тўхтата олмади.

XVI асрдан кейинги даврларда яшаган олимлар Ўрта аср олимларининг ишларини илмий ва методик томондан ривожлантириб Ўрта Осиё мадрасалари учун дарслик ва машқ дафтарлари яратадилар * Машқ дафтари математика ўқитувчиси ёки талабаларининг ўрта аср Шарқ математикларининг илмий асарлари юзасидан кенгайтирилиб тузилган, ҳар бир темани ўтиш методи ва шу темага тегишли мисол ва масалалар билан тўлдирилган конспект тариқасидаги қўлёзмалардир. Бунга ЎзССР ФА Шарқшунослик институти қўлёзмалар фондининг 2818-номерли инвентарида сақланган, 1851 йилда ёзилган, 735-номерли инвентарида сақланган Ҳисомиддин Хўжанинг 1859 йилда ёзилган, муаллифнинг шахсий кутубхонасида сақланган Сирожиддин Аҳмадхўжа ўғли Тошкентликнинг 1890 йилда ва Аҳрор Махсум Тошкентликнинг 1892 йилда ёзилган форс тилидаги машқ дафтарлари мисол бўла олади.

Мадрасада машқ дафтарларидан ташқари, ўрта асрда яшаган Ўрта Осиё математикларининг илмий асарлари айрим математиклар томонидан шарҳланиб дарслик сифатида ҳам ишлатилган. Бунга ЎзССР ФА Шарқшунослик институтидаги қўлёзмалар фондининг 2245-номерли инвентарида сақланган Ўрта Осиё математикларидан Бобокалон Муфтий Самарқандий, Жамшид Коший ва бошқаларнинг асарларидан 1674 йилда Соқий Муҳаммад Амин Эшонхон ўғли шарҳ билан кўчириб тўплаган „Математика тўплами“ („Мажмуаи илми ҳисоб“) номи билан аталган қўлёзма ва 2848-номерли инвентарида сақланган суриялик Баҳоуддин Муҳаммад Ибн Ҳусайн

---

* С. А. Аҳмедов. Ўрта Осиёда математика ўқитиш тарихидан. “Ўқитувчи“ нашриёти, Т. , 1977, 73—80-бетлар.

Омилий (XVIIаср) нинг „Ҳисоб хулосалари“ („Хулосатул ҳисоб“) номли китобидан унинг замондоши Ҳусайн ал-Халхолий қилган шарҳи мисол бўлади. Бу китобларда арифметика ва геометрияга доир темалар тулиқ системали баён этилган. Бундан ташқари, китобда математиканинг амалий татбиқи — меростақсим қилишга доир бир қанча мисол ва масалалар берилади.

Математика тарихига доир китобларда Ўрта аср Шарқ олимларининг математика соҳасида қилган ишлари ҳақида умумий маълумот берилган. Партия ва давлатимизнинг ташаббуси билан Улуғ Ватан урушидан кейин Иттифоқдош республикаларда Фанлар Академияси қошида Шарқшунослик институти, араб, форс ва ҳинд тиллари уқитиладиган мактаблар жорий бўлиши билан Ўрта Осиё халқлари илмий-маданий меросларини ўрганишга қизиқиш анча кучайди. Кейинги йилларда совет олимларидан А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд, Т. Н. Қори-Ниёзов (1896-1970), С. Х. Сирожиддинов, Г. П. Матвиевская, Г. Д. Жалолов, Г. Д. Мамадбейли, Х. Сиддиқов, С. Н. Краснова, Г. П. Булгаков, А. Аҳмедов, А. Абдураҳмонов, О. Файзуллаев, М. А. Аҳадова, Х. М. Муҳаммадиев, Р. И. Ибодов (1912—1976), Г. С. Собиров (1930—1974) ва бошқаларнинг Ўрта Осиё олимларидан Муҳаммад Хоразмий, Абул Вафо, ан-Насавий, Беруний, Ибн Сино, Хосиб Кархий, Умар Хайём, Чағминий, Насириддин Тусий, Улуғбек, Жамшид Коший, Али Қушчи, Баҳоуддин Омилий ва бошқаларнинг математика ва астрономия соҳасида қилган ишлари юзасидан олиб борган илмий тадқиқотлари шу олимлар ижоди ҳақидаги маълумотни яна кенгайтиради ва уларнинг методлари билан таништиради.

А. П. Юшкевич ўзининг „IX—XV асрларда Ўрта Осиё халқларидаги математика ҳақида“ деган мақоласида Ўрта Осиё халқларининг математикага қўшган ҳиссаси ҳали тулиқ ўрганилмаганлиги, фақат ўрта аср математиклари қилган ишларнинг бир қисмигина маълум эканлигини уқтириб, Ўрта Осиё халқларининг фан соҳасида қилган ишларини ўрганиш совет олимлари олдидаги муҳим вазифа эканлигини кўрсатди. Ҳақиқатан, ҳозирги биз билган маълумотлар ўрта аср математиклари қилган ишларнинг бир қисмидир. Биз ўрганиб улгурган қўлёзмалардан бошқа ҳали ўрганилмаган ва ҳатто, топилмаганлари ҳам куп албатта.

Баъзи топилган қўлёзмалар ва дарсликларнинг муаллифлари бошқа манбалардан ҳамда тахмин қилиш билан аниқланади. Бундан ташқари, бу олимлар ва педагогларимизнинг асарларигина эмас*, балки кўпларининг номи ҳам бизгача етиб келмаган, борларининг эса номи чалкаш булиб юрган. Мисол тариқасида шуни айтиш мумкинки, Ўзбекистон Фанлар Академияси Шарқшунослик институтида ва бошқа кутубхоналарда сақланадиган айрим қўлёзмаларнинг бошланғич ва охирги саҳифалари йуқдир. Бу саҳифаларнинг йуқлиги улар муаллифларининг номларини аниқлаш имконини бермайди, чунки уша саҳифаларда, одатда унинг номи ва муаллифи ҳақида маълумотлар булади. Лекин бу асарлар ўзининг физик хусусиятларига кура жуда қадимгидир.

2- §. Ўрта осиёлик машҳур олимлар

Урта асрларда яшаган ва араб тилида илмий асарлар ёзган машҳур математик, астроном, табиатшунос ва файласуфлар ҳақида сўзлаганда биз Муҳаммад ибн Мусо Хоразмий (783—850), Абул Аббос Фарғоний (IX асрда яшаган), Абул Вафо (940—998), Хужандий (тахминан 1000 йилда вафот этган), Кўҳий (99[illegible] йилда ҳаёт булган), Ҳосиб Кархий (1025 йилга яқин вафот этган), Абу Райҳон Беруний (973—1048), Абу Али ибн Сино (980—1037), ан Насавий (тахминан 1030 йилда вафот этган), Умар Хайём (тахминан 1048—1122), Насириддин Тусий (1201—1274), Ғиёсиддин Жамшид Коший (1442 йилда вафот этган) каби буюк олимларимизни назарда тутамиз. Мазкур олимлар Ўрта Осиё ва унга қўшни ерлардан келиб чиқишига қарамай, ватанидан узоқ жойларда ижод қилиб, бошқа мамлакат халқлари билан яқиндан алоқада булган, фан ва маданият хазинасига қимматбаҳо дурдоналар қўшган ва шуҳрати бутун оламга тарқалган. Бу олимларнинг математикага қўшган ҳиссалари ҳақида қисқача тўхтаб ўтишни лозим топдик.

---

* Масалан, Али Қушчининг „Тажрид ал-Калом“ номли фалсафага оид йирик асари Шарқшунослик институтида борлиги 1952 йилгача номаълум булган.

Муҳаммад ибн Мусо Хоразмий. Улуғ олимнинг тўлиқ исми Абу Абдуллоҳ Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий ал-Мажусийдир. У 783 йилда Хоразмда туғилганлиги ва 850 йилларда Боғдод шаҳрида вафот этганлигини тахмин қилинади. Олим номининг ёзилиши араб тили тартибида бўлиб, ўзбек тилида Мусо ўғли Абу Абдулла Муҳаммад хоразмлик Мажусий деган маънодадир. Олимнинг тўлиқ исмидаги „ал-Мажусий“ деган сўз унинг лақаби бўлиб, бу унинг Хоразмда исломдан илгари ҳукм сурган ўтпарастлик дини қоҳинлари—мажуслар (ёки муглар) оиласидан келиб чиққанлигини кўрсатади. Хоразмий ҳақида аниқ биографик маълумотлар йуқ. Лекин у бошланғич таълимни ўз ватани Хоразмда олгани шубҳасиз, IX аср бошларига келиб биз уни Марвда—халифа Ҳорун ар-Рашиднинг ўғли ва ноиби ал-Маъмун ар—Рашид саройида учратамиз Турк фан тарихчиси Солиҳ Закийнинг маълумотига кўра. Хоразмий IX аср бошида ал-Маъмуннинг буйруғига кўра ташкил қилинган бир экспедиция билан шарқий Афғонистонга, яъни ўша пайтдаги Ҳиндистоннинг ғарбига боради ва у ерда ҳинд ҳисоби ва рақамлари билан танишади. Бу экспедициянинг фан тарихидаги роли мислсиз ва бебаҳодир, чунки бу кейинчалик бутун дунёга „араб рақамлари“ деб аталган хинд рақамларининг ва ўнли позицион хисоб системасининг тарқалишига сабаб бўлди 819 йилда ал-Маъмун Боғдодда халифалик лавозимига ўтиргач, у билан бирга Марвда унинг саройида бўлган барча олимлар Боғдодга келади Улар қаторида Хоразмий хам бўлади. Тез орада ал-Маъмун Боғдодда „Байтул ҳикмат“, яъни „Донишмандлик уйи“ ни ташкил қилиб, у ерга Марвдан келган олимлардан ташқари барча мусулмон мамлакатларидан олимларни тўплайди. Хоразмий „Донишмандлик уйи“ негизида ташкил этилган астрономия расадхонасига мудирлик қилади. „Донишмандлик уйи“га Шарқ олимларининг асарлари ва қадимий юнон олимларидан Евклид, Архимед, Аполлоний, Менелай, Феодосий, Герон, Птолемей, Диофант ва бошқаларнинг илмий асарлари Византиядан келтирилади, Боғдодда катта кутубхоналар, мадраса ва бошқа ўқув муассасалари ташкил қилинади. „Донишмандлик уйи“ нинг бир қисми кутубхона бўлиб, унга ҳам Муҳаммад Хоразмий раҳбарлик қилади. „Донишмандлик уйи“да кўплаб олимлар, таржимонлар ва қўлёзмаларни кўчириб ёзув чи котиблар хизмат қилади. Шулар қатори, „Донишмандлик уйи“ ва расадхонада математика, астрономия ҳамда бошқа фанларга катта ҳисса қўшган Ўрта Осиёнинг атоқли олимларидан Аҳмад ибн Абдуллоҳ Марвазий, Холид ибн Абдул Малик Марваррудий, Аббос ибн Саид Жавҳарий, Абул Аббос Аҳмад ибн Муҳаммад Фарғонийлар ишлаган. Тарихий маълумотларга қараганда Хоразмий „Донишмандлик уйи“ да ишлаган йирик математик ва астрономлар орасида ўзининг илмий қобилияти билан ажралиб турган, кейинчалик у Боғдодда ташкил топган математика ва астрономия мактабига раҳбарлик қилган.

Муҳамад Хоразмий ижоди асосан ислом динигача бўлган хоразм фанига ва қўшни мамлакатлар—Ҳиндистон ва Яқин Шарқ мамлакатларининг илмий фикрларига асосланган.

Муҳаммад Хоразмий асарларининг сони ҳозиргача маълум бўлмасада, унинг фан тарихида муҳим ўрин тутган арифметика, алгебра, астрономия ва географиядан ёзган 5 та асари бизгача етиб келган. У халифа ал-Маъмун (813—833) даврида „Ал-китоб ал-мухтасар фи ҳисоб ал-жабр ва ал-муқобала“. „Зиж“ ва „Ҳисоб ал-Ҳинд“ номли асарларни ёзади. Халифа ал-Муътасим (833—842) даврида эса „Суратул арз“ ни ва халифа ал-Восиқ (842—847) даврида яҳудийлар календари ҳақидаги рисоласини ёзади. Бу асарлар дастлаб араб тилида ёзилган бўлиб, сўнгра лотин тилига бир неча марта таржима қилинади. Хоразмийнинг бу асарлари бир неча асрлар давомида ўша замон олимлари ва кейинги давр олимлари учун ҳам асосий қўлланма бўлиб хизмат қилади.

Муҳаммад Хоразмийнинг арифметик асари Европада XII асрдан бошлаб лотин тилига таржима қилиниб, ўрганилади. Кейинги асрларда эса немис ва инглиз тилларига таржима қилинади. Унинг арифметикага оид асарининг араб тилида ёзилган асл нусхаси бизгача етиб келмаган. Ю. Х. Копелевич ва Б. А. Розенфельдлар* асарнинг Кембриж университети кутубхонасида сақланадиган XIV асрда кўчирилган лотинча таржимасининг

---

* Муҳаммад аль-Хоразми, Математические трактаты, Ю Х. Копелевич ва Б. А. Розенфельд таржимаси. Б. А. Розенфельд изоҳи. Т. 1964.

фотонусхасидан 1964 йили рус тилига таржима ва нашр қилганлар.

Хоразмий арифметик асарининг кириш қисмида: „Ҳиндлар тўққизта рақам билан уларнинг ўзлари урнатган тартибга асосан жойлашишига кўра, ҳар қандай сонни ёза билганлар, мен.. . урганувчилар учун тушунарли ва содда бўлишини назарда тутиб, бу рақамлардан нималар хосил бўлишини кўрсатмоқчиман“. дейди. Шу билан Хоразмий ўнли позицион саноқ системани баён этишга киришади. Аввал у, тўққизта рақамнинг ёзилиш шаклини,* бу рақамларнинг айримлари, масалан, беш, олти, етти ва саккиз ҳамма муаллифларда ҳам бир хил эмаслигини уқтиради. Сунгра сонларни ҳосил қилишдаги „бир“нинг аҳамиятига тухтаб, у „бир ҳар қандай сонда мавжуд ва сонларни ҳосил қилувчидир“, дейди. Хоразмий „бир“ни асос деб у сонлардан ташқарида эканлигини ўқитиради. Икки—бу иккита бир, ёки бирнинг иккилангани, уч—бирнинг учлангани деб, тўққизгача бўлган соннинг қандай ҳосил бўлганлигини кўрсатади.

Хоразмий сонларни ифодалашда зарур бўлган хоналар ҳақида тушунча бергач, саноқнинг ўнли позицион системасининг асосий принципларини баён этади. Сунгра мисол тариқасида ўндан юзгача, юздан минггача бўлган ўнликлар ва улар орасидаги сонларнинг рақамлар билан ёзилиш шаклини беради.

Муҳаммад Хоразмий арифметик рисоласида олтита амал (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш) дан ташқари, иккилантириш ва ярмлатишни алоҳида амал ҳисоблаган. Хоразмий арифметик асарининг лотин тилига қилинган таржимасида арифметик амалларнинг таърифи берилмайди. Хоразмийдан кейинги даврларда унинг асари ҳақида ёзган бир неча муаллифлар Хоразмийнинг амалларга берган таърифларини турлича шаклда келтирадилар. Асарнинг асл нусхаси топилмаганлиги учун ҳозирча бу масала ҳақида бирор нарса дейиш қийин.

Хоразмий қўшиш ва айириш амалини ҳозирда биз қандай бажарсак, шу йўлда бажарган, фақат амални юқори хонадан бошлаб тавсия қилади, йиғинди ёки айирмани, қушилувчи ёки камаювчи рақамларни ўчириб

---

* Беруний ҳам „Ҳиндистон“ асарида ҳинд қабилаларида беш билан олтининг ёзилиш шакли бир хил эмаслигини кўрсатади.

ўрнига ёзади. Демак, йиғинди ёки айирманинг ёзилиш формасида фарқ бор.

Хоразмий кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш амалларини бажариш қоидасини умумий кўринишда бергандан сўнг бу қоида бўйича ҳар бир амалга тегишли мисол кўрсатади. Масалан, 2326 ни 214 га кўпайтириш учун улар $\begin{matrix}214\\ 2326\end{matrix}$ кўринишда жойлаштирилади ва кўпайтувчи 214 юқори хонасидан бошлаб кўпаювчи 2326 нинг юқори хонасидаги 2 га кўпайтирилиб, биринчи хусусий кўпайтма 428 ни 214 нинг устига 2 нинг ўрнига ёзилади ва 214 нинг рақамлари бир хона ўнгга сурилади. Бунда шундай кўриниш ҳосил бўлади: $\begin{matrix}428326\\ 214\end{matrix}$. Сўнгра 214 ни кўпаювчининг юзлар хонасидаги 3 га кўпайтириб, кўпайтма 642 биринчи хусусий кўпайтма 428 га ёдда қуйидаги тартибда қўшилади: $\begin{array}{r}428\\ 642\\ \hline 4922\end{array}$. Йиғинди 4922 ни 4283 нинг ўрнига ёзилади ва 214 нинг рақамлари бир хона ўнгга сурилади, у ҳолда ушбу кўриниш ҳосил бўлади: $\begin{matrix}492226\\ 214\end{matrix}$.

Шу тарзда 214 кўпаювчининг ўнлар хонасидаги 2 га ва бирлар хонасидаги 6 га кўпайтирилса, ҳар бир босқич қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{array}{r}4922\\ +\ \ 428\\ \hline 49648\end{array}\qquad \begin{array}{r}496486\\ 214\end{array}\qquad \begin{array}{r}49648\\ +\ \ 1284\\ \hline 497764\end{array}$$

Охирги натижа 497764 эса 2326 нинг 214 га кўпайтмасидир.

Хоразмий сонлардан квадрат илдиз чиқаришни иккиҳад йиғиндисининг квадратини ёйиш асосида баён этади.

Хоразмий квадрат илдиздан рационал сон чиқмаса, унинг тақрибий қийматини $\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$ қоида асосида ҳисоблайди. Бунда N—берилган сон, a^2— унинг таркибидаги энг катта квадрат, b—квадратни N гача тўлдирувчи қолдиқдир.

Хоразмий ўзининг арифметик асари орқали бутун дунёга ҳинд рақамларини ва уларга асосланган ўнли позицион ҳисоблаш системасини тарқатди. Ҳисоблашда рим рақами ва сонларни сўз орқали ёзиб бажаришдаги ноқулайликларни бартараф қилди, бу билан ҳисоблашни ихчамлаштирди. Хоразмий ўзининг асари билан фанга алгоритм тушунчасини киритди.

Алгоритм олимнинг номидаги „ал-Хоразмий“ иборасининг Европа тилларида бузилиб ўзгартирилган талаффузидир. Европада бир неча асрлар давомида Муҳаммад Хоразмийнинг арифметик асарини ўрганиб, бу асар асосида ёзилган китобларда ал-Хоразмий исми „Алхоризмус“ „Алгоризмус“, „Алгоритмус“ ва ҳоказо кўринишда ўзгариб, охирида алгоритм ёки алгорифм номини олади. Олимнинг мазкур шакллардаги ўзгартирилган исми ўрта асрда Европада ўнли саноқ системасининг синоними бўлиб қолади.

Айрим буржуа математика тарихчилари Хоразмий арифметик асаридаги методлар ва усулларнинг оригиналлиги ва мустақиллигини камситишга уринадилар. Улар Хоразмий ҳиндлардаги тайёр ўнли саноқ системасини „кўчирувчи“ деган маънода тушунтирмоқчи бўладилар. Бунга жавобан А. П. Юшкевич „Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмийнинг арифметик рисоласи“* номли асари билан уларнинг нотўғри фикрларига зарба бериб, ҳақиқатан Муҳаммад Хоразмийнинг асари оригинал ва мустақил эканлигини кўрсатиб берди.

Хоразмий математика тараққиётида яна муҳим ўрин тутган алгебрага доир „Ал-китоб ал-мухтасар фи ҳисоб ал-жабр ва ал-муқобала“ номли асарни яратади. У бу асари билан алгебрага асос солади ва алгебрани алоҳида фан даражасига кўтаради.

Хоразмий алгебраик асарининг 1145 йилда араб тилида кўчирилган нусхаси Оксфорд университетининг Бодлян кутубхонасида сақланади. Шу қўлёзмадан Испаниянинг Сеговия шаҳрида Роберт Честерлик (XII) ва Герардо Кремоналик (1114—1187) лар лотин тилига таржима қиладилар. Кейинги йилларда лотин тилидаги таржимадан Ф. Розен (1831 й.), А. Ч. Карпинский (1915 й) инглиз тилига, Г. Лори (1838 й.) француз тилига қилган таржималари нашр этилди. Бундан ташқари, бу асар Европа тилларига шарҳи билан таржима қилиниб, унинг асосида қўлёзма ёки конспект тариқасида асарлар ёзилади ва ўрганилади.

---

* Труды института истории естествознания и техники, т. 1. 1954 г.

Совет олими Б. А. Розенфельднинг араб тилидаги қўлёзманинг фотонусхасидан рус тилига қилган таржимаси, Хоразмийнинг арифметик асари билан биргаликда, 1961 йилда Тошкентда „Фан“ нашриётида „Математик рисолалар“ („Математические трактаты“) номи билан босилиб чиқди.

Хоразмийнинг алгебраик асаридан кейин Шарқда алгебра фани кенг тараққий этади. Масалан, X—XI асрларда Абул Вафо Хоразмийнинг алгебрасини тўлдириб, янги усуллар киритиш билан алоҳида асарлар ёзади. Умар Хайём эса Хоразмий асарини тараққий эттириб, ўзининг алгебрага доир асарида, учинчи даражали тенгламаларнинг таснифини ва уларнинг геометрик ечиш усулини баён этади. Хоразмийдан кейин ўрта аср Шарқ олимлари Хоразмий алгебрасини тараққий эттириш ва ривожлантириш билан математикага ўз ҳиссаларини қўшадилар ва натижада Шарқда алгебра бир хил системада баён этиладиган математик фан сифатида шаклланиб, такомиллашади.

Хоразмийнинг алгебраик асари, асосан уч бўлимдан иборат бўлиб, биринчи бўлимда ал-жабр ва ал-муқобала (тиклаш ва қарама-қарши қўйиш) ёрдамида биринчи ва иккинчи даражали бир номаълумли тенгламаларни ечиш, рационал ва иррационал ифодалар билан амаллар бажариш ҳамда тенглама ёрдамида сонли масалаларни ечиш йўллари берилади. Иккинчи бўлим геометрияга тегишли бўлиб, бунда миқдорларни ўлчаш ва ўлчашга доир масалаларга алгебранинг баъзи бир татбиқлари кўрсатилади. Учинчи бўлимда алгебранинг амалий татбиқи, яъни мерос бўлишга доир масалалар берилади.

Муҳаммад Хоразмий алгебраик асарининг кириш қисмида фан тараққиётида ўтмишдаги олимларнинг қўшган ҳиссаси ва халифа ал-Маъмун илм-фанга катта эътибор берганлигини уқтириб, ўз асарининг аҳамиятини гапириб, унинг ал-жабр ва ал-муқобала ҳақидаги қисқача китоби арифметиканинг содда ҳамда мураккаб масалаларини ўз ичига олганлиги, улар мерос улашиш, васиятнома тузиш, мол-дунё тақсимлаш учун, суд ҳамда савдо ишларида, ер ўлчашларида, каналлар ўтказиш ва юз ўлчашларда зарурлигини таъкидлайди.

Ҳақиқатан, Хоразмий асари, ўз мазмуни билан назариянинг элементларини ўз ичига олган амалий математиканинг бир қисмидир. Олим асарининг „Васият ҳақида мақола“ деб аталган охирги қисмида ислом ҳуқуқи нормаларига қараб, меросхўрлар ўртасида мулк тақсимлаш ҳақида турлича мазмунда 60 дан ортиқ мураккаб масалаларни тенглама ёрдамида ечиш йўлларини кўрсатади. Хоразмийдан кейинги даврларда ёзилган ўрта аср Шарқ олимларининг математикага доир асарларида ва XX асргача мадрасада ўқитилган дарсликларда „Мерос тақсимлаш“ бўлимига катта ўрин берилади.

Муҳаммад Хоразмий алгебраик асарининг асосий мақсади мусулмон ҳуқуқи нормаларига қараб, меросхўрлар ўртасида мулкни тақсимлаш масаласини назарий ва амалий жиҳатдан ёритишга қаратилган. Бу масалани соф арифметик усулда ҳал қилиш қийин бўлганлиги сабабли, у объектив равишда алгебраик усулни қўллайди ва алгебранинг асосий бўлими—тенгламаларни мерос тақсимлашга моҳирлик билан татбиқ қилади. Гарчи Хоразмийдан аввал мерос тақсим қилиш масаласи билан қадимий Бобил, Миср ва Юнонистонликлар шуғулланган бўлсалар-да, Хоразмий бу масалани мусулмон ҳуқуқи нормалари асосида мерос тақсим қилишнинг назарий ва амалий асосларини биринчи бўлиб кўрсатади. Шунинг учун Хоразмийни мерос тақсим қилиш назарияси ва амалиётига асос солувчи дейиш мумкин. Хоразмийдан кейинги даврларда ўрта аср Шарқ олимлари Кархий, Насавий, Абу Комил, Сирожиддин Сижовандий, Тусий, Жамшид Коший ва бошқалар алгебрани тараққий эттириш билан мерос тақсим қилиш бўлимининг илмий ва амалий назариясини бойитадилар. Масалан, XII асрда яшаган математик ва ҳуқуқшунос Сирожиддин Сижовандийнинг алгебрага доир асарларида ва 1203 йилда алоҳида ёзилган („Сирожиддиннинг ворислик ҳуқуқи“) („Ал-восиқа ас-Сирожия“) номли асарида мерос тақсим қилишнинг умумий илмий ва амалий назарияси берилади Сижовандийдан кейин мутахассислар унинг бу асарини Шарқ ва Ғарб тилларига шарҳи билан таржима қиладилар ва бу асар узоқ вақт ислом мамлакатларида асосий қўлланма вазифасини бажариб келди.

XX асргача мадрасада математика ўқитишдан асосий мақсад математиканинг амалиётга татбиқи, чунончи, мерос тақсим қилишнинг илмий ва амалий назариясини билувчи мутахассислар тайёрлашдан иборат эди. Бундай мутахассис „фаройизийун“ („Мерос бўлувчи“ маънода) номи билан аталиб, у мадрасани битиргандан сўнг маҳаллий суд идораларида мерос тақсим қилиш масаласи билан шуғулланарди. Юқорида айтганлардан шундай хулосага келиш мумкин: Ўрта асрдан XX асргача ислом мамлакатларида мерос тақсим қилишнинг илмий ва амалий назарияси математика ва уни уқитиш усулини тараққий эттиришнинг асосий стимулларидан бири булган.

— Хоразмийнинг арифметика, алгебра ва геометрияга доир асари кундалик амалий мақсадлар (мерос тақсим қилиш, ер ўлчаш, ариқлар қазиш ва ҳоказо) га мослаб тузилган, назарий элементларни уз ичига олган амалий элементар математикадан иборат.

Юқорида айтиб ўтилганидек, Хоразмий астрономияга доир ҳам асар ёзган.

Ўрта Осиёдан чиқиб, номи оламга таралган буюк олимлардан яна бири, фарғоналик машҳур математик ва астроном **Абул Аббос Аҳмад ибн Муҳаммад Касир Фарғонийдир** У IX асрда яшаган, Сурия ва Мисрда илмий тадкиқотлар олиб борган. Фарғоний астрономияга доир бир қанча асарлар ёзган. Бу асарлар астрономия тараққиётида катта аҳамиятга эга. Фарғонийнинг „Китоб фи ҳаракати самовия ва жавомиъ илми нужум" деган катта асари ўша даврга нисбатан астрономия илми соҳасида яратилган энг яхши асарлардан биридир. Бу асар Европа тилларига таржима қилиниб, XVI асргача Европа университетларида қулланма сифатида фойдаланилган Фарғонийнинг исми эса „Альфраганус" шаклида, ҳатто XVIII асрда ҳам машҳур булган.

X асрда Ҳирот билан Нишопур шаҳри орасидаги Бузжон шаҳрида туғилган математик ва астроном **Абул Вафо Муҳаммад Бузжоний** Бағдоддаги математика ва астрономия мактабининг атоқли олимларидан ҳисобланган.

Абул Вафо математика ва астрономияга доир кўпгина илмий асарлар ёзганлиги маълум бўлса ҳам, лекин унинг арифметика ва алгебрага доир қатор асарлари бизгача етиб келмаган ёки ҳали топилмаган. Унинг "Савдогар ва котибларга арифметика санъатидан нималар зарурлиги ҳақидаги китоб" номли асарини математика тарихчиларидан М. И. Медовой ва геометрияга доир „Ҳунармандларга геометрик ясашдан нималар зарурлиги ҳақида китоб" номли асарини С. А. Карповлар урганиб, текширганлар ва рус тилига тажрима қилганлар.

Абул Вафо ўз давридаги ҳисобдонларнинг иш тажрибаларини тараққий эттириш билан уни умумлаштитириб, шу асосда арифметикага доир асар ёзган ва унда каср сонларни ўқитиш усулларини мукаммал курсатиб берган.

Абул Вафо геометрия ва тригонометриянинг айрим соҳаларида муҳим илмий ишлар олиб борган. У Хоразмийнинг геометрия соҳасидаги ишларини бойитиб, унга миқдорни ўлчаш учун янги ҳисоблаш усулларини киритган. Абул Вафо ҳисоблаш геометриясига турли ихтисосдаги шахслар (танобчилар, архитекторлар ва бошқалар) учун зарур бўлган жуда кўп амалий масалаларни киритади ва бу масалаларни геометрик ясаш йўли билан исботсиз ҳал қилади. Асарнинг аҳамияти ҳақида у „Мен бу асарда ҳунармандларнинг кундалик талабларини ва улар учун тушунарли бўлишини ҳисобга олиб геометрик ясашга доир масалаларни исботсиз ёзишга журъат этдим“ — дейди.

Абул Вафонинг асари, асосан ўн бир бобдан иборат бўлиб, I бобда геометрик ясашларда зарур бўлган чизғич, циркуль ва гўния каби асбоблардан фойдаланиш усули ва аҳамиятига тўхтайди. II бобда кесма ва бурчакларни тенг бўлакларга бўлиш, перпендикуляр ва параллель тўғри чизиқлар ясаш, айланага уринмалар ўтказиш ва айланани тенг бўлакларга бўлиш каби элементар ясашларни, III—VI бобларда мунтазам, кўпбурчаклар, айланага ички ва ташқи шакллар ясашни, VII—XI бобларда учбурчак, тўртбурчак ва сфераларни тенг бўлакларга бўлишни баён этади Охирги бобда аввал сферада бир қатор элементар ясашлар бажаргандан сўнг, сферани маълум сонда сферик кўпбурчакларга бўлиш ёки шу билан тенг кучли бўлган ички чизилган мунтазам кўпёқларни ясаш йўлини кўрсатади. Абул Вафо асарни ихчам ва методик томондан тушунарли қилиб баён этиб, темаларнинг жойлашиш системасини ҳунармандларнинг ўзлаштириш қобилиятига мослаштирган.

Абул Вафо Хоразмийнинг алгебраик рисоласини ва юнон олимларидан Евклид, Диофант ва Птолемейларнинг асарларини шарҳлайди. Бундан ташқари, у сонлардан учинчи, тўртинчи ва еттинчи даража илдиз чиқариш усули ҳақида асар ёзганлиги маълум. Лекин бу асар ҳозиргача топилмаган.

Абул Вафо астрономияга доир „Китоби ал-комил“ номли асарида тригонометрияни мунтазам равишда баён этади. У бурчак ярмининг синуси учун аниқлиги 10^{-8} бўлган тўққиз-ўн хонали жадвал тузади. Тангенс ва котангенс функцияларнинг жадвалини беради. Абул Вафо олтита тригонометрик чизиқлар ва улар орасидаги алгебраик муносабатни бирлик доирада кўради.

Буюк олим Абу Райҳон Берунийнинг замондоши X асрнинг иккинчи ярмида яшаган хўжандлик (ҳозирги Ленинобод) математик ва астроном **Абул Муҳаммад Ҳомид ибн ал-Хизр Хўжандий** астрономия соҳасида ёзган асарлари каторида, сонлар назариясидаги муҳим масала ҳисобланадиган „Ферманинг кичик теоремаси“ ни, яъни $x^3+y^3=z^3$ тенгламанинг бутун рационал илдизи йўқ эканлигини исбот этган. У сферик тригонометрияни астрономияга тадбиқ қилиш масалалари билан шуғулланади. Хўжандий ан-Найризий, Абул Вафо ва Абу Насрлар каби синуслар теоремасини ҳам исбот қилади.

Хўжандийнинг замондоши **Абу Саҳл Вайжон ибн Рустам ал-Кўҳий** геометриядан айланма жисмнинг ҳажми ва сиртини ҳисоблашга доир масалаларни ҳал қилади. Масалан, ихтиёрий диаметр ва ордината кесмаси билан чегараланган парабола қисмининг диаметр атрофида айланишидан ҳосил бўлган ҳажмни ҳисоблайди. Ал-Кўҳий геометрик ясашга доир „Мукаммал циркуль ҳақида“ („Фи биркар-ат-тамми) номли алоҳида асар ёзади. Бу асарнинг арабча қўлёзмаси Лейден университети кутубхонасида сақланганлиги маълум. Уни математика тарихчиси Вёпке француз тилига таржима қилиб, 1874 йилда нашр қилган, ҳажми 45 бет.

X—XI асрларда яшаган математик ва астроном **Абу Бакр Муҳаммад ибн Ҳасан Кархий ал-Ҳосибийнинг*** математикадан ёзган „Ҳисоб фанидан етарли китоб“ (Китоб ал-кофи фи-л-ҳисоб“) номли 70 бобдан иборат бўлган катта ҳажмли асари Хоразмий, Абул Вафо ва Абу Комилларнинг арифметика, алгебра ва геометрияга доир ишларини ижодий ва методик томондан бойитган. Китобнинг алгебра қисми Боғдод халифасининг вазири Фаҳр ал-Мулк (1017 йилда ўлган) га бағишланган бўлиб, у „Ал-Фаҳрий“ номи билан аталади.

Кархийнинг китобида материалнинг жойланиш системаси ва уларни баён этиш методи Хоразмий ва Абу Комилларнинг (X—XI) алгебраик асарларига қараганда методик томондан афзалроқ. Хоразмий ва Абу Комил-

---

* Ал-Ҳосибий—ҳисоб ўқитувчиси деган маънони билдиради.

ларнинг асарларида олти типдаги квадрат тенгламани ечишнинг геометрик исботи кўрсатилганидан сўнг алгебраик ҳисоблашларнинг элементлари баён этилади. Кархий эса ҳозирги замон элементар алгебра курсида қўлланиладиган рационал ва иррационал алгебраик ифодалар устида айнан алмаштиришлар бажаргандан сўнг олти типдаги нормал квадрат тенгламаларни ечишни геометрик исботсиз кўрсатади.

Ўрта асрда яшаб ижод этган машҳур олимлардан яна бири хоразмлик буюк аллома **Абу Райҳон Муҳаммад ибн Аҳмад Беруний** (973 –1048) дир. У илк ўрта асрда, Ўрта Осиё халқларининг иқтисодий ва маънавий ҳаётида йирик воқеалар содир бўлаётган бир даврда яшади. Ҳақиқатан, тарих саҳифаларига назар ташласак Ўрта Осиёда бу пайтда бир томондан феодал муносабатлар ва ишлаб чиқариш кучлари юксалганлиги, ҳунармандчилик, суғориш иншоотлари ишга туширилганлиги, сарой ва мадрасалар бунёд этилганлиги, меъморчилик, мусиқа санъатининг ривож топганлиги, ташқи мамлакатлар (Ҳиндистон, Хитой, Византия, Яқин ва Ўрта Шарқ, Жанубий Сибирь, Волга бўйи, Киев Руси) билан савдо алоқалари кенгайганлиги, иккинчи томондан, меҳнаткашларни эксплуатация қилишнинг кучайганлиги, оддий халқнинг хонавайронликка, оч-ночорликка маҳкум этилганлиги, узаро урушлар, феодал сулолалари орасидаги даҳшатли жангларнинг авж олганлигини кўрамиз.

Шундай оғир шароитга қарамай, ўрта аср ақидалари ва тафаккур нормаларига қарши кураш жараёнида маънавий бойликлардан фойдаланиш ва уларни янгича талқин этишга интилиш кучаяди. Бу давр (кейинчалик Италияда юз берган Уйғониш даври каби) фан ва тафаккур соҳасида ўзининг энциклопедист олимларини, буюк кишиларини юзага чиқарди. Улар феодал тузумининг машаққатли зулми остида, сарой бидъатлари шароитда, шаҳарма-шаҳар қувғинда юриб ўша даврнинг барча (ижобий ва салбий) томонларини ўзида акс эттирувчи нодир асарлар яратдилар. Ўрта Осиёнинг Хоразмий, Фарғоний, Форобий, Беруний, Ибн Сино, Абу Саҳл Масиҳий, Абу Наср ибн Ироқ, Хўжандийдек йирик олимлари жаҳон маданияти тараққиётида чуқур из қолдириб, ўша давр дунёвий маданиятининг энг таниқли намояндаларига айландилар. Улар орасида Беруний сиймоси алоҳида ўрин тутади. У 973 йил 4 сентябрда Хоразмнинг қадимий Кот (кейинги Шаббоз, ҳозирги Беруний) шаҳрида туғилди. Х асрнинг охирларида Кот Хоразмшоҳнинг пойтахги бўлиб, у Сомонийлар давлатига қарашли Хоразмда маълум даражада мустақил бўлган катта шаҳарлардан ҳисобланган.

Берунийнинг ҳаёти ва ижоди ҳақидаги маълумотлар атоқли шарқшунос олимлардан В. Р. Розен, В. В. Бартольд, И. Ю. Крачковский, А. А. Семёнов, С. П. Толстов, А. М. Беленицкий, С. Мирзаев, Ю. Н. Завадовский, У. К. Каримов ва чет эл олимлари асарларида ёритилган. Булар билан бир қаторда кейинги йилларда совет фан тарихчилари А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд, Х. А. Содиқов, Ғ. Ж. Жалолов, П. Г. Булгаков, Г. П. Матвиевская, М. М. Рожанская, А. Абдураҳманов, А. Аҳмедов, Ғ. Я. Умаров, Ф. Зикриллаев ва чет эл олимлари —Э. Видеман, Г. Зутер, И. Франк, К. Шой ва бошқалар Берунийнинг астрономия, математика ва бошқа фанлар соҳасида қилган ишлари юзасидан олиб борган илмий текширишлари олимнинг ҳақиқатан ҳам энг улуғ мутафаккир эканлиги, унинг илмий фаолияти фан тараққиётида бутун бир даврни ташкил этишини кўрсатади.

Абу Райҳон Беруний дунё фани тарихида ёрқин из қолдирган улуғ энциклопедист олимлардан бири. Мавжуд адабиётларда ёзилишига кўра, олимнинг қолдирган илмий мероси 150 дан ортиқ бўлиб, булардан бизгача қўл ёзма ҳолида 40 га яқини етиб келган. Улардан айримлари рус, ўзбек, форс, немис, инглиз ва бошқа тилларда нашр этилган ва этилмоқда. Олимнинг қолган асарлари дунёнинг баъзи йирик шаҳарларидаги кутубхоналарда бўлиш эҳтимоли бор ва улар қидирилмоқда. Олимнинг асарлари тематик жиҳатдан турли-туман, улар математика, физика, астрономия, маъданшунослик (минерология), геодезия, математик география, картография, метеорология, доришунослик, этнография, тарихшунослик (маданият ва динлар тарихи), филология ва фалсафа фанлари соҳаларида қолдирилган илмий меросдир.

Шунинг учун академик И. Ю. Крачковский Беруний ижодига „Беруний қизиққан соҳаларни санаб чиқишдан кўра қизиқмаган соҳаларни санаб чиқиш осонроқдир"* деб баҳо берган. Берунийнинг ижоди ўзининг тури ва кўламининг кенглиги билангина эмас, балки теранлиги ва ҳаётийлиги билан ҳам қимматлидир.

Ҳақиқатан, ҳозирги йирик олимларимизнинг эътироф этишларича, Беруний фаннинг ривожланиши ва такомиллашиши устида шундай моҳирона меҳнат қилганки, у яратган илмий тадқиқотлар қадимги ва ўрта аср фанлари ютуқларининг умумлаштирилган дурдонасига айланган ва кўп жиҳатдан илмий тафаккурнинг кейинги ривожланиш йўли ва йўналишига катта таъсир кўрсатган. Илмий тафаккур хазинасига Беруний қўшган улкан ҳиссани баҳолаш қийин. „Унинг билимларнинг хилма-хил соҳаларида олиб борган тинимсиз изланишлари ва қўлга киритган ютуқлари кишини ҳайратга солади"—деб ёзади ЎзССР ФА нинг мухбир аъзоси, фалсафа фанлари доктори М. Хайруллаев.

Берунийнинг астрономия масалаларига бағишланган асарлари ичида энг муҳими „Қонуни Маъсудий" дир. Бу асар ўн битта китобдан иборат бўлиб, ой ва планеталар ҳаракати, ҳаракатсиз юлдузлар, хронология ва календарь, ясси ва сферик тригонометрия, математик география каби бўлимларни ўз ичига олади. Бунда ёритилган масалаларнинг қисқача рўйхати бу чинакам монументал энциклопедиянинг илмий қийматини кўрсатиб бера олади. Беруний астрономиянинг турли соҳаларига жуда катта ҳисса қўшди. У ўз асарларида астрономия тараққиёти учун муҳим аҳамиятга эга бўлган янги ғояларни ўртага ташлайди. Шунинг учун ҳам Беруний ҳақли равишда Шарқ астрономлари ичида энг улуғи ҳисобланади.

Берунийнинг астрономияга доир энг катта ва муҳим илмий асарлари унинг астрономия фанига қўшган дунё аҳамиятига эга бўлган жуда муҳим ҳиссасидир.

Астрономия, география, геодезия ва бошқа табиий фанларнинг ривожланиши учун такомиллашган математик аппарат зарур эди. Бу ҳол математиканинг ва даставвал математик ҳисоблаш методларининг тез тараққий этишига асосий сабаб бўлди. Шундай объектив сабабларга кўра, математика билан шуғулланган Абу Райҳон Беруний уни атрофлича чуқур ўрганади, натижада ма-

---

*. И. Ю. Крачковский. Избранные сочинения. Т. IV, М-Л., 1957, 247-бет.

тематика, астрономия ҳамда бошқа фанлар соҳасида катта ютуқларга эришади.

Беруний ўзининг арифметикадан „Ҳинд рошиклари ҳақида китоб“ деган асарида ўрта аср арифметикасида жуда кенг тарқалган машҳур учламчи қоидани кўриб чиқади ва беш етти ва ундан ҳам ортиқ миқдорларнинг ҳоллари учун учламчи қоидани умумлаштирувчи қоидаларни баён қилади ҳамда уни қатъий асослаб, амалий мисоллар билан тушунтиради. Унинг бу асари арифметиканинг ривожланишида муҳим аҳамиятга эга бўлди. Беруний астрономияга оид „Шакл ва сферик сиртларни билиш калити“ номли асарида бир қанча арифметик масалаларни ечган. Унинг сонлардан учинчи ва юқори даражали илдиз чиқариш ҳақида асар ёзганлиги маълум бўлса-да, лекин бу асар ҳозиргача топилмаган. Беруний ўзининг „Ёдгорликлар“ деган асарида геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисини топиш усулини хусусий мисолда кўрсатади.

Берунийнинг юқорида қайд этилган асарларидаги математикага доир масалалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин:

1. Беруний Евклид ва Муҳаммад Хоразмийнинг гояларини ривожлантириб назарий элементларни ўз ичига олган арифметика ва алгебрани қарайди. У арифметика ва алгебранинг асосий масалаларига таъриф беради ҳамда ўнли ва олтмишли системанинг асосий принциплари, абжад хисоби, бутун ва каср сонлар устидаги амаллар, чизиқли, квадрат ва куб тенгламаларни тақрибий ечиш усулларини баён этади.

2. Беруний геометрик миқдорларни сон деб қараш билан бу миқдорлар устида арифметик амалларни бажаришда сон тушунчасини мусбат ҳақиқий сонларгача кенгайтиради.

3. Муҳаммад Хоразмий арифметик асарида „аралаш система“—ўнли ва олтмишли системани қўллаган бўлса, Беруний ўз асарида биринчи бўлиб бир эрадан иккинчисига ўтишда бутун сонлар учун олтмишли системани қўллайди.

4. Беруний геометриянинг асосчиси Евклиднинг асосий геометрик тушунчалар ва геометрик фигураларга берган таърифларининг айримларини аниқлаш ва тўлдириш билан бу таърифларга тенг кучли таърифлар беради

5. Беруний планиметриянинг асосий теоремаларини

астрономияга татбиқ қилади, масалан, жойнинг тенгламасини аниқлашда, у астурлоб ёрдамида ердаги ўлчашлар ва Қуёшнинг апогейини аниқлашда планиметрия теоремаларини усталик билан татбиқ қилади.

6. Беруний ички чизилган мунтазам етги ва тўққиз бурчакларнинг томонларини ҳисоблашни учинчи даражали тенгламаларга келтиради. Тўққизбурчакнинг томонини, учинчи даражали тенгламанинг тақрибий илдизларини топиш билан ҳал қилади.

7. Беруний геометриясининг иккинчи қисми—стереометрияда, геометрик жисмлар: кўпёқлилар, айланма жисмлар, конус кесимлари ва мунтазам кўпёқларга таъриф беради ва стереометриянинг асосий тушунчаларини баён этади.

8. Беруний ўзининг замондоши Ибн Сино билан мунозарасида „олти томон жисмларнинг ўлчовлари бўйича ҳаракатининг чегараси“ эканлигини таъкидлаб, ўлчов учта эканлигини уқтиради ва планеталарнинг ҳаракатини кўрсатиш билан биринчи бўлиб фазовий координаталар ғоясини беради*. У астурлобнинг турлича конструкциясини ва унинг ёрдамида ечиладиган амалий масалаларни кўрсатади.

9. Беруний чизиқли ва сферик тригонометриядаги асосий масалаларни мунтазам равишда, тўла-тўкис кўриш билан етарли ҳажмдаги систематик тригонометрияни тузади. Махсус усул билан тригонометрик чизиқлар орасидаги муносабатларнинг исботини келтиради. Сферик косинуслар теоремасига тенг кучли бўлган теореманинг исботини кўрсатади.

10. Беруний астрономияга доир асарларида етарли ҳажмда математиканинг тармоқлари—арифметика, алгебра, геометрия ва тригонометрия билан мунтазам шуғулланиб, математик тушунчаларнинг аниқланиши ва кенгайишига ўз ҳиссасини қўшади ҳамда математикани астрономиянинг муҳим масалаларига татбиқ қилади. Бунда келтирилган қисқагина ҳақиқатлар Абу Райҳон Берунийнинг математикага қизиқиш доираси жуда кенг бўлганлигини тасдиқлайди. Шунинг учун Берунийнинг математик меросини ўрганаётган олимларимиз уни ўрта асрнинг энг улуғ математиги деган одилона хулосага келмоқдалар.

---

* А. Абдурахмонов. Математика в астрономических трудах Беруни. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физмат наук, Т., 1970, 12-б.

Илм-фаннинг буюк ҳомийси ва мухлиси бўлган Абу Райҳон Берунийнинг мислсиз бой илмий мероси Ватанимизда Совет давридагина атрофлича ўрганилмоқда ва турли тилларда нашр этилиб, халқимиз ундан баҳраманд қилинмоқда.

Абу Райҳон Берунийнинг замондоши, Ўрта Осиёнинг ўткир зеҳнли буюк олими **Абу Али ал-Ҳусайн ибн Абдуллоҳ ибн Сино** (980—1037) фаннинг турли соҳасида самарали иш олиб борди. У медицина, химия, математика, физика, астрономия, фалсафа, ахлоқ ва одоб, нотиқлик назарияси, музика ва бошқаларга оид 200 га яқин асар ёзган. Афсуски, бу асарлар бизнинг давримизга тўла етиб келмаган. Ибн Сино ўзининг „Китоб ал-қонун фиттибб" („Тиб қонунлари китоби") номли асари билан дунёга машҳур бўлди. Бу китобда қадимги Юнонистон, Ҳиндистон, Миср, Ўрта Осиё ва бошқа мамлакатлар олимларининг ишларини умумлаштириб, ижодий янгиликлар киритиш билан уларни янги босқичга кўтаради. Ибн Сино ўтмиш ва замондош олимлар эришган ютуқларни танқидий синтез қилиб, фаннинг тараққиётига катта ҳисса қўшган.

Сўнгги даврда Ибн Синонинг медицина, фалсафа, адабиёт ва табиий фанлар соҳасида қилган ишлари юзасидан дунё олимлари олиб борган илмий-текшириш ишлари Ибн Сино ҳақиқатан ҳам инсониятнинг улуғ мутафаккир олими эканлигини кўрсатди. Чет эл олимлари Ф. Вёпке, М. Кантор, К. Локоч ва кейинги йилларда Совет математика тарихчилари В. А. Розенфельд, Х. М. Муҳаммадиев, М. А. Аҳадова ва М. С. Шариповалар Ибн Синонинг энциклопедик характердаги „Шифо китоби" („Китоб аш-Шифо"), „Нажот китоби" („Китоб ан-Нажот") ва „Билим китоби" („Донишнома") номли катта ҳажмдаги асарларида физика-математикага доир ишлари юзасидан олиб борилган илмий-текшириш ишларининг натижаси, олимнинг физика математика фанига ҳам ўз ҳиссасини қўшганлигини кўрсатади.

Совет математика тарихчиларининг Ибн Синонинг математика соҳасида қилган ишлари юзасидан олиб борган илмий текшириш ишлари натижасида қуйидагилар аниқланди:

Ибн Сино арифметика соҳасида натурал сонларнинг асосий хоссалари, Эратосфен ғалвирининг тузилиши ҳақида қоида, нисбат ва пропорция назарияси, натурал сонлар устида амаллар ва уларнинг хоссалари, айирмаси бирга тенг бўлган арифметик прогрессиянинг исталган ҳадини ва йиғиндисини топиш ва натурал сонлар даражаси ҳақида тушунча каби масалаларни кўради. Бундан ташқари, у амалларнинг тўғри бажарилганлигини аниқловчи восита „тўққиз билан текшириш усули“ („Мезон“) ни квадрат ва кўбга кўтаришга татбиқ қилишни тавсия қилади.

Ибн Сино, Евклид усулидан фарқ қиладиган, мураккаб нисбатлар ва сонли пропорция назарияси ҳақидаги таълимотни беради, буни геометрияга ва музика назариясига татбиқ қилади. Евклид „Негизлар“ китобида сонли ва геометрик миқдорли пропорцияларни бир-биридан ажратиб, алоҳида назариясини кўрган бўлса, Ибн Сино ҳар икки кўринишдаги пропорцияларни бир-бири билан узвий боғланган ҳолда, уларнинг назариясини баён этади. Ибн Сино икки сон нисбатини каср сон билан алмаштиради. Олимнинг нисбат ва пропорциялар ҳақидаги ғояси келгусида сон тушунчасини кенгайтиришда катта аҳамиятга эга бўлди. Ибн Синодан кейинроқ Умар Хайём ва Насириддин Тусийлар бу ғояни тараққий эттириш билан сон тушунчасини мусбат ҳақиқий сонларгача кенгайтирадилар.

Фақат биргина „Шифо китоби“ номли асарнинг геометрияга доир бобларида Ибн Сино планиметрия ва стереометрияга тегишли темаларни 74 таъриф, 7 постулат, 5 аксиома ва 255 жумла (теорема) лар орқали баён этади. Демак, Ибн Сино ҳам ўз геометриясини Евклид системасига асосланиб баён қилади. Ибн Синонинг геометрияни баён этишда Евклид усулидан фарқ қиладиган томонларидан бири, геометрик тушунчалар — нуқта, чизиқ, сирт ва геометрик жисмларга таъриф беришда ҳамда теоремаларни исботлашда ҳаракатни кенг миқёсда татбиқ қилишидир. Масалан, вертикал бурчакларни таққослашда, учбурчакларнинг тенглигига таъриф беришда, учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ва параллелограммнинг хоссалари ҳақидаги теоремаларни исботлашда ва бошқаларда ҳаракатни қўллайди.

Ибн Синонинг геометрия теоремаларини исбот қилиш усули, Евклиднинг „Негизлар“ асарида теоремаларни исботлашига яқин бўлса ҳам, айрим теоремаларнинг исботи Евклид методидан фарқ қилади, айримлари эса Евклиднинг исботига нисбатан қисқа ва соддадир.

Ибн Сино Евклиднинг V постулатини аксиомалар группасидан чиқариб, уни теорема қаторида „исбот" қилади ва бир қатор ясашга доир масалаларни ҳам кўради.

Ибн Сино юқорида эслатилган асарларида астрономия, физика ва механикага доир муҳим масалаларни ҳал қилади.

XI асрда яшаган Ўрта Осиё халқларининг классик шоири буюк олим энциклопедист **Абу Фатҳ Умар ибн Иброҳим Хайём** 1048 йилда Хуросондаги Нишопур шаҳрида туғилади. Ўрта асрларда Хуросон географик жиҳатдан Эроннинг ҳозирги Хуросон билан биргаликда жанубий Туркманистон ва Ўзбекистон, шимоли-ғарбий Афғонистоннинг ҳам бир қисмини ўз ичига олган. Шу сабабли у ҳақли равишда Эрон, Ўрта Осиё ва Афғонистон халқларининг вакили ҳисобланади.

Умар Хайём Ўрта Осиё, Эрон ва Афғонистонда Қорахонийлар, Ғазнавийлар ва Салжуқийлар каби туркий сулолаларга мансуб салтанатларнинг ҳукмронлик қилиб, уларнинг кучайиши ва улар орасидаги кескинлик ошаётган даврида яшаб ижод қилди.

Умар Хайём мана шу кескин тарихий шароитда Ўрта Осиё ва Эроннинг Самарқанд, Бухоро, Исфаҳон, Нишопур шаҳарларида яшайди ва фаннинг турли соҳалари — астрономия, математика, физика, тарих, медицина, адабиёт, фалсафа, мантиқ, поэзия соҳасида илмий ишлар олиб боради ва бир қанча асарлар яратади.

1074 йилда улуғ вазир Низомул-Мулкнинг таклифига кўра Хайём ўз замонасининг атоқли мунажжимлари Абул Музаффар Исфазорий, Абул Аббос Луқорий, Абдураҳмон Хазиний ва бошқалар билан Исфаҳондаги расадхона қурилишида қатнашади ва унга раҳбарлик қилади. Расадхонада Хайём бошчилигида бир гуруҳ олимларнинг бир неча йиллар давомида олиб борган астрономик кузатишлари натижаси бизгача етиб келмаган „Маликшоҳ астрономик жадвали" („Зижи Маликшоҳий") номли асарда баён этилади. Бу асарда, Хайёмнинг Эрон қуёш календари реформасини ўтказиш натижаси, яъни унинг янги календарь системаси баён этилган. Хайёмнинг ўттиз уч йил давомида тузган янги календарь системаси Григорян календаридан аниқлиги билан фарқ қилади.

Хайёмнинг янги календари ҳақида Насириддин Тусий ва Улуғбекнинг астрономик мактабларида тузилган „Зижи Элхоний“ ва „Зижи Кўрагоний“ астрономик жадвалларида ҳам тушунча берилади.

Хайём султон саройида маслаҳатчи ва табиб бўлишидан ташқари мунажжим ҳам бўлган. Хайём табииёт фанларига ҳам қизиқади, у „Таркибида тилла ва кумуш бўлган жисмда тилла ва кумушни аниқлаш“ номли рисола ёзади. У Ибн Синони ҳурмат билан ўзининг устози деб билади ва унинг фалсафа ва медицинага доир асарларини ўрганади ҳамда 1080 йилда Ибн Синонинг фалсафий қарашларига яқин бўлган фалсафага тегишли иккита асар ёзади.

Умар Хайём астрономиядан қилган ишлари билан бир қаторда алгебра ва геометрияни ижодий тараққий эттиради ва ўлмас асарлар яратади. Хайёмнинг математика ва астрономияга доир ишлари ҳақидаги Европа олимларининг асарлари унинг Европага фақат шоиргина эмас, балки истеъдодли олим сифатида ҳам танитди. Кейинги йилларда совет олимларидан А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд ва бошқаларнинг Умар Хайёмнинг алгебра ва геометрияга оид асарлари юзасидан олиб борган илмий ишлари олим ҳақидаги тушунчани янада кенгайтирди.

Тенглама ва тенгламалар системасини ечиш масаласи узоқ ўтмиш тарихга эга. Қадимги Миср, Бобил, Юнон, Хитой ва Ҳиндистонда ҳам шу масала билан шуғулланганлар. Улар математикага доир айрим масалаларни ҳал қилишни сон коэффицентли биринчи, иккинчи ва учинчи даражали тенгламаларга келтирганлар ҳамда хусусий кўринишдаги учинчи даражали тенгламаларнинг илдизларини мўлжаллаб ёки синаб кўриш, ёки жадвал ёрдамида топганлар. Шундай қилиб, қадимги давр математикасида тенгламаларни систематик ечиш масаласи ҳал қилинмаган. Купгина математик масалаларни ҳал қилиш кубик тенгламаларни ечишни талаб қилганлиги сабабли бу масалалар ўз даврида ҳал этилмай қолган.

Муҳаммад Хоразмийдан кейинги даврда Шарқ математиклари алгебра ва геометриянинг айрим соҳаларини жуда тез ривожлантирадилар. Улар астрономия ва геометрияга оид масалаларни ҳал қилиш кубик тенгламаларни ечишга келтирилишини билдилар. Шунинг учун улар кубик тенгламаларни ечиш масаласи билан шуғулланадилар. Масалан: Моҳоний ал-Ҳозин, ал-Ҳайсам, Кухий ва Берунийлар шу масала билан шуғулланадилар.

Кубик тенгламани ечиш масаласини Умар Хайём ўзининг 1069—1071 йилларда ёзган „Ал-жабр ва ал-муқобала масалаларининг исботи ҳақида“ номли асарида биринчи бўлиб ҳал қилади. Умар Хайём алгебраик асарида Хоразмийнинг тенгламаларни классификациялаш ҳақидаги ғоясини кенгайтириб, квадрат ва кубик тенгламаларни 24 хил каноник кўринишдаги классификациясини беради ва кубик тенгламаларнинг илдизларини конус кесимлари ёрдами билан геометрик усулда топади. Хайёмнинг бу ижоди Ўрта Осиё ва умуман Шарқ математикларининг ўша давргача алгебра соҳасида эришган ютуқларининг чўққисидир.

Хайём Хоразмийга ўхшаш ҳеч қандай формула ва символлар ишлатмасдан тенгламаларни классификация қилади ва ечади.

Хайём $x^n=a$ тенгламани ҳал қилишда, ўзидан олдин ўтган олимларга, квадратнинг юзи берилса, унинг томонини ва куб ҳажми берилса, унинг қиррасини топиш, яъни квадрат ва куб илдиз чиқариш маълум эканлигини билдириб, у бу тушунчани кенгайтириш билан тўртинчи, бешинчи олтинчи ва ҳоказо сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш ҳақида „Ҳисобдаги мушкуллик“ („Мушкулот ал-ҳисоб“) номли асар ёзганлигини кўрсатади. Афсуски бу асар ҳозиргача топилмаган.

Умар Хайём 1077 йилда геометрия соҳасида „Евклид китобининг кириш қисмидаги қийинчиликларга шарҳ“ номли асарини ёзади. У бу асарда параллел чизиқлар ва нисбатлар назариясини ривожлантиради. Унинг ўзидан олдин ва кейин ўтган олимлар қатори Евклиднинг V постулатини теорема деб исботлаши кейинчалик параллеллар назариясининг тараққий этишига ва Евклид геометриясидан фарқ қилувчи ноевклид геометриянинг ижод этилишига замин тайёрлайди. Хайём исботлаган теоремалардан бири эса кейинчалик „Саккери теоремаси“ номи билан ноевклид геометрияга киритилади.

Умар Хайём геометрияга доир асарининг иккинчи ва учинчи китобларида нисбатлар назарияси ва сон ҳақида таълимотни баён этади. Асосан бу бўлимда у Евклид ва ўзидан олдин ўтган ўрта аср Шарқ математикларидан Собит ибн Қурра ан-Найризий, Ибн ал-Ҳайсам, Ибн Сино ва бошқаларнинг нисбатлар назарияси ва сон ҳақидаги таълимотларини тараққий эттириш билан сон тушунчасини кенгайтиради. Хайём иррационал миқдорлар билан рационал сонлар ўртасидаги қатъий ажратувчи принципиал воситани йўқ қилади. У бутун ва каср сонлар қаторида мусбат иррационалликни ҳам сон деб тушунади ва сон тушунчасини мусбат ҳақиқий сонларгача кенгайтиради. Хайёмнинг сон ҳақида берган тушунчаси ўз даврида сон ҳақидаги таълимотни тубдан ўзгартирувчи бошланғич ғоя ҳисобланади. Хайёмдан кейин унинг ғояси бўйича Насириддин Тусий нисбатлар назариясини тараққий эттириб, сон тушунчасини кенгайтиради ва бу тушунчани узлуксиз миқдорларга татбиқ қилади.

Ўрта Осиё олимлари қаторида Шарққа машҳур бўлган, Мароға расадхонасининг асосчиси, XIII асрнинг энг йирик олими—**Абу Жаъфар Муҳаммад ибн Муҳаммад Насириддин ат-Тусий** (1201—1274) ўз асарлари билан дунёга маълумдир. Кўпчилик ўрта аср олимлари каби Тусийнинг илмий ижоди кўп қиррали бўлиб, у фаннинг турли тармоқлари—астрономия, математика, фалсафа, мантиқ, география, музика, медицина, минералогия ва бошқа фанлардан оригинал илмий асарлар ёзади. Тусий асосан астрономия ва математикага катта эътибор бериб, бу соҳада ўлмас оригинал илмий асарлар яратиш билан бирга классик грек математиклари—Евклид, Архимед, Птолемей, Аполлоний ва Феодосийларнинг математикага доир асарларини араб тилига таржима қилади ва шарҳлайди. Г. Д. Мамедбейли Тусий илмий асарларининг кўпчилиги сақланганлигини ва ҳозирча мавжуд бўлган манбаларга асосан дунё кутубхоналарида унинг 76 та асари сақланаётганини айтади.

Тусий 1231—1256 йилларда Қуҳистонда маҳаллий шоҳ Насир муҳташам саройида бўлади. Шоҳ Насирнинг топшириғи билан Тусий 1235 йилда фалсафага доир ўзининг машҳур асари „Ахлоқи Насирий“ ни ёзади. Бу китоб тезликда Шарқ ва бошқа давлатларда омма ўртасида кенг тарқала бошлайди.

Тусий 1256 йилда Қуҳистонни босиб олган Чингизхоннинг набираси Хулогухон саройида маслаҳатчи вазифасини бажаради. Тусий ташаббуси билан 1258—1259 йилларда Мароға шаҳрида катта астрономик расадхона қурилади ва бу расадхонага Тусий илмий раҳбарлик қилади. Расадхонага турли шаҳарлардан атоқли олимлар таклиф қилинади. Кўлёзмаларга бой бўлган катта кутубхона ташкил қилинади. Шундай қилиб, Мароға расадхонаси негизида ўз даврида энг катта ҳисобланган илмий мактаб ташкил қилинади.

Тусийнинг астрономияга оид асарлари ичида энг муҳими „Элхон астрономия жадвали“ („Зижи Элхоний“) дир. „Элхон астрономия жадвали“ Тусий ва расадхона ходимларининг кўп йиллар олиб борган илмий ишларининг натижасидир. Бу асарда астрономия назарияси баён қилинган ва Тусийнинг Мароға расадхонасида олиб борган кузатишлари асосида тузилган жадваллар ҳам берилган.

Насириддин Тусий геометрия ва тригонометриянинг тараққиётида муҳим аҳамиятга эга бўлган асарлар ёзади. У грек олими Евклиднинг „Негизлар“ номли асарини шарҳлаб, қўшимчалар киритиш билан „Таҳрир Уқлидис“ номли асар ёзган. Тусий бу асарда Евклиднинг фикрларини тараққий эттиради ва такомиллаштиради. Тусийнинг энг муҳим қўшимчаларидан бири нисбатлар назариясидир.

Тусий нисбатлар назариясини ишлаб чиқиб, биринчи бўлиб, бир хил исмдаги миқдорлардан бирининг иккинчисига нисбати, исмсиз сонлар нисбати деган тушунчани фанга киритади ва ўлчовсиз миқдорларнинг нисбатини сон деб ҳисоблайди. Европада бундай миқдорлар нисбати ҳақидаги тушунчани XVII—XVIII асрларда Сент-Винцентли ва Ньютонлар ижод этган.

Математика тарихидан сферик тригонометрия асосларини қадимги юнон олимлари Птолемей ва Менелайлар яратганлиги маълум. Ўрта аср математиклари Муҳаммад Хоразмий, Аҳмад Абдулло Марвазий, ал-Баттоний, Абул Вафо, Абу Насир, ал-Хўжандий ва Берунийлар астрономияга доир асарларида тригонометрияни тараққий эттирадилар ва тригонометриянинг астрономияга ёрдамчи вазифасидан, алоҳида фан даражасига ўтишида ўз ҳиссаларини қўшадилар. Улар тригонометрияга аста-секин хусусий ҳолдаги янги-янги теоремаларни киритиш билан тригонометрия мазмунида ва унинг усулида катта ўзгариш яратдилар. Шунинг натижасида астрономия билан тригонометрия орасидаги мустаҳкам боғланишни сақлаган ҳолда, тригонометриянинг мустақил фан бўлиш характери аниқланди. Масалан, Беруний тригонометриядан алоҳида асар ёзмаган бўлса ҳам у тригонометриянинг мустақил фан бўлишини сезиб, астрономияга доир асарларида етарли ҳажмда систематик тригонометрияни яратади.

Тусий эса „Тўла тўртбурчаклар ҳақида рисола“ („Китоб аш-шакл ал қитъа“) ёки қисқача „Тўла тўртбурчаклар“ („Шаклул қитъа“) номли тригонометрияга доир асар ёзиб, системалашган тўғри чизиқли ва сферик тригонометрияни яратади ҳамда тригонометриянинг алоҳида фан даражасига ўтишидаги муҳим масалани тўла-тўкис ҳал қилади. Тусийнинг бу асари ҳақида немис математика тарихчиси Браунмюль (1853—1908) шундай дейди: „Тусийдан олдин Абул Вафо, Абу Наср, Беруний ва бошқалар астрономияга доир асарларида тригонометрияга етарли ўрин берган бўлсалар-да, уларда тригонометрия алоҳида фан бўлмасдан, воситачи ролини ўйнаган. Тусий эса, аксинча, тригонометриянинг математик аҳамиятини билиб, „Тўла тўртбурчаклар“ асари билан тригонометриянинг алоҳида фан эканлигини асослаб берди. Шунинг учун Тусийнинг бу асарини системалашган тригонометрия номи билан аташ мумкин“.

Ҳақиқатан, Тусий „Тўла тўртбурчаклар“ асарида ўзидан олдин ўтган олимларнинг тригонометрияга қўшган ҳиссаларини системага солади ва тригонометрияни тараққий эттиради. Ўрта Осиё математиклари сферик учбурчакни ечишнинг олти ҳолини кўрган бўлсалар, булардан иккита қийин ҳоли: учта томон ёки учта бурчак берилса, сферик учбурчакнинг қолган элементларини қутб учбурчак ёрдамида топишни Тусий ҳал қилади Бу эса, Тусийнинг сферик тригонометрияга қўшган ҳиссаларидан энг муҳими ҳисобланади.

Тусий асарида баён этилган фикрлар Европада XV асрда яшаган немис математиги Региомонтан ва XVI—XVII асрларда яшаган голландиялик математик Снелл ижоди деб кўрсатилади.

Тусий геометрия ва тригонометрия соҳасида қилган ишларидан ташқари 1265 йилда ёзган арифметика ҳақидаги асарида арифметикани тараққий эттириб, сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини ва биномиал теоремани баён этади.

3- §. Шарқ арифметикасининг характери. Хоразмийдан кейин ёзилган арифметик асарларнинг айримлари ҳақида*

Юқорида айтилганидек, араб халифалигига кирган мамлакатларда илмий асарлар араб тилида ёзилади. IX асрдан бошлаб эса юнончадан арабчага таржима қилиш бошланганидан сўнг антик давр муаллифларининг асарлари араб тилида тарқалади. Жумладан Евклиднинг „Негизлари“, Никомах ва Диофантнинг „Арифметика“сини ҳам айтиш мумкин, чунки мазкур асарлар кейинчалик ўрта аср мусулмон мамлакатларида арифметиканинг ривожланишига катта таъсир кўрсатди.

Маълумки, араблар қадим даврлардан бери савдо-сотиқ ва ҳисоб ишларида бармоқ ва қўл ҳисобидан фойдаланиб келганлар ва бу хисобни улар „Ҳисоб ал-ядий“, яъни „Қўл ҳисоби“ деб атаганлар. Бундай ҳисоб фақат амалий аҳамиятгагина эга бўлиб, унда ҳеч қандай рақамнинг ёзма ифодаси бўлмаган ва ёзма белгилар ишлатилмаган. Ҳар қандай бутун сон иккала қўл бармоқлари ёки уларнинг комбинациялари билан ифодаланган. Бундан ташқари араблар, бошқа сомий халқлар каби, ўз алифбеларининг ҳарфларига сонларни мос келтирганлар ва бунга асосланган ҳисобни улар „жуммал ҳисоби“ ёки „абжад ҳисоби“ деб атаганлар. Бу ҳисобда фақат бутун сонларнигина ифодалаш мумкин бўлган ва унинг ўзига хос бир қатор ноқулайликлари бўлган. Бу ноқулайликлардан бири шуки, абжад ҳисоби ҳам бармоқ ҳисоби каби, оғзаки ҳисоблашга асосланган. Унда ҳар қандай сонларни билдирувчи ҳарфлар комбинацияларини, яъни сўзларни ёддан билиш керак бўлган.

VIII ва IX асрларда Бағдод олимлари юнон фани билан танишгунига қадар араб арифметикаси ана шундай ҳолатда эди

Халифа ал-Мансур, Ҳорун ар-Рашид ал-Маъмунларнинг юнон арифметикасини ўрганиш натижасида халифаликда арифметика сифат жиҳатидан бутунлай бошқа босқичга кўтарилди. Иккинчи жиҳатдан бундай сифат ўзгаришида Хоразмийнинг „Ҳинд ҳисоби ҳақида“ рисоласининг ҳамда ҳиндларнинг тўққизта рақам ва нолга асослан-

---

* *Ушбу* параграфда бошқа адабиётлар қатори, муаллифнинг шахсий инвентаридаги қўлёзмалардан ҳам фойдаланилган.

ган позицион ҳисоблаш системасининг тарқалиши муҳим роль ўйнайди.

Шундай қилиб, халифаликда арифметика фани асосан юнон анъаналарини давом эттирди. Форобийнинг классификацияси бўйича арифметика икки турга бўлинади—бири назарий арифметика, иккинчиси амалий арифметика.

Назарий арифметика одатда юнонча номи билан „арисмэтика“ деб аталган бўлиб, юқорида эслатилган Евклид, Никомах ва Диофантларнинг асарларига асосланган. Бунда, кўпроқ, сонлар назариясига тааллуқли масалалар қаралади. Назарий арифметика соҳасида Собит ибн Қурра, Яъкуб ибн Исҳоқ ал-Киндий, Ибн Сино, Ибн ал-Хайсам Форобий, Беруний, Умар Хайём ва бошқа бир қатор шарқ математиклари чуқур изланишлар қилдилар ҳамда катта ютуқларга эришдилар. Жумладан, Беруний ва Умар Хайёмлар сон тушунчасини мусбат ҳақиқий сонларгача кенгайтирдилар.

Амалий арифметика ёки тажрибада қўлланиладиган арифметика рационал сонлар билан бажариладиган арифметик амалларни ўз ичига оларди. Бу соҳада Шарқ математиклари юксак муваффақиятларга эришдилар. Бундай ютуқларга эришишнинг асосий омилларидан бири хинд рақамлари асосида унли позицион системанинг тарқалиши эди. Шу билан бирга Шарқ математиклари олтмишли позицион ҳисоблаш системасини ҳам ривожлантирдилар. Бу борада Муҳаммад Хоразмийдан ташқари Абул Вафо, Беруний, ал-Кархий, Аҳмад ан-Насавий, Умар Хайём, Насириддин Тусий, Жамшид Кошийларнинг қўшган ҳиссаси улкандир.

Амалий арифметикада унли ва олтмишли позицион ҳисоблаш системалари бир-бири билан узвий боғлиқ бўлиб, улар кўпинча параллел қўлланилар эди. Ҳатто бу иккала системанинг биридан иккинчисига ўтиш қоидалари ҳам таърифланарди. Айниқса Абул Вафо ва Жамшид Кошийнинг асарларида буни яққол кўриш мумкин.

Амалий арифметиканинг шу қадар ривожланишига қарамай эски араб усули бўйича бармоқ ҳисоби ва абжад ҳисоби мусулмон мамлакатларида мактаб ва мадрасаларда ҳатто XIX асрнинг охирларигача ҳам қўлланилиб келди. Лекин бу усул энди амалий арифметиканинг таркибий қисмига айланиб қолди ва илк ўрта аср давридаги мавқеини йўқотди.

Шуниси диққатга сазоворки, ўнли позицион система Шарқ мамлакатларида юзага келганига қарамай, бу ерларда Европадагидек тез ва кенг тарқалмади. Ваҳоланки, Хоразмий, ан-Насавий, Тусий ва Кошийларнинг асарларида бу системанинг қулайлиги исботланган ва тарғибот қилинган эди. Шу сабабли ан-Насавий, Тусий, Коший ва бошқа математикларнинг арифметик асарлари ҳақида умумий маълумот беришни мақсадга мувофиқ топдик.

Абу Ҳасан Али ибн Аҳмад ан-Насавий X асрнинг иккинчи ярмида ҳозирги Ашхобод шаҳри яқинидаги Наса шаҳрида туғилди. У Султон Фахр ад-Довула (990—1029) нинг пойтахти, ҳозирги Теҳрон яқинидаги Рай ва Исфаҳон шаҳарларида хизмат қилади ва шу даврда ўзининг „Ҳинд арифметикаси ҳақида етарли ҳисоб“ („ал-муқни фил-ҳисоб ал-ҳинд“) асарини форс тилида ёзади. 1029 йилда Эронни Маҳмуд Ғазнавий олгандан сўнг ан-Насавий янги султоннинг пойтахти Ғазнада, унинг саройида хизмат қилади. Маҳмуд Ғазнавийнинг топшириғига кўра, у 1029 йили арифметик асарини араб тилида қайта ёзади. Ан-Насавийнинг арифметик асаридан ташқари, бизгача етиб келган геометрияга оид „Кесувчилар шаклини шарҳлаш ҳақида тўла тушунча“ („ал-Ишбаъ фи шарҳ аш-шакл ал-Китъа“) номли асари ва Архимеднинг „Лемма“ номли асарига шарҳлари мавжуд. Ан-Насавий тахминан 1030 йили вафот этган.

Ан-Насавийнинг араб тилида ёзилган арифметика рисоласининг асл нусхаси бизгача сақланган 1963 йилда совет математика тарихчиси М. И. Медовой унинг Лейден кутубхонасида сақланган нусхасидан рус тилига таржима қилган.

Ан-Насавийнинг арифметик асари, асосан, тўрт китобдан иборат бўлиб, биринчи китобда бутун сонлар, иккинчи ва учинчи китобда каср сонлар арифметикаси ва охирги тўртинчи китобда олтмишли система устида амаллар баён этилади. Ан-Насавий арифметикасининг мазмуни, баён этиш йўли ва темаларнинг жойланиш системаси ўзидан икки аср олдин ўтган Хоразмийнинг арифметик асарига ўхшаб кетади. Ан-Насавий ўнли позицион ҳисоблаш системасини баён этгандан сўнг, Хоразмий усулида, ҳисоблаш тахтасида арифметик амалларни бажариш йўлини кўрсатади. У Хоразмий каби, қўшиш ва айириш амалларига таъриф бермай, кўпайтириш ва бўлиш амалларига таъриф бериб, бу амалларни бажариш йулини баён этади. Ан-Насавий Хоразмий йулида яримлатиш амалидан бошқа амалларни юқори хонасидан бошлаб бажаради. Ҳар бир амалнинг тўғри бажарилганлигини текширувчи 9 лик билан олинган ёрдамчи восита—„мезон“ ни курсатади. Хоразмий бутун ва каср сонлардан квадрат илдиз чиқариш йулини курсатса, ан-Насавий уни ривожлантириб, сонлардан куб илдиз чиқариш йулини баён этади.

Ан-Насавий каср сонларнинг классификацияси ва улар устида амаллар бажаришда ҳиндларнинг методи билан эски араб арифметикасидаги одатланган йулни биргаликда қуллайди. У китобининг охирги бобида олтмишли позицион системасида амаллар бажаради.

Муҳаммад Хоразмий ва ан-Насавийларнинг арифметик асарлари қаторида Насириддин Тусийнинг арифметика ҳақидаги „Тахта билан тупроқ воситасида ҳисоблашлар тупламиг“ („Жамиъ ул-ҳисоб биттахти ва ат-тураб“) номли асари ҳам катта аҳамиятга эга.

Бу асарнинг асл нусхаси 1265 йил (663 ҳижрий йил 6-рамазон душанба куни) да тугатилган. Араб тилидаги бу нусхадан 1413 (816 ҳижрий) йилда кучирилган 70 бетли қулёзма Ўзбекистон Фанлар Академияси Шарқшунослик институти қулёзмалар фондининг 8990-номерли инвентарида китобнинг охирига (123—159-бетларга) киритилган. Бу китоб ичида Тусийнинг астрономияга доир учта асари, Ҳасан шоҳ ва Мавлоно Низомиддин Нишопурийнинг биттадан илмий асари бор. Тусий бу асари билан Хоразмий ва ан-Насавийларнинг арифметик асарларини илмий ва методик томондан бойитган ва такомиллаштирган.

Қулёзманинг биринчи бети (123-бет) да кучирувчи асарнинг номини ва бу асар Тусийнинг асарларидан бири эканлигини курсатиш билан Тусий ҳақида, „Ҳукамоларнинг подшоҳи, энг кейинги олимларнинг атоқлиси, илм ва динга нусрат берувчи“ дейди. Қулёзманинг охирида Авҳад ибн Асаднинг маълумотига кура Тусий бу асарни 1265 йил (663 ҳижрий йил 6- рамазон, душанба куни) да ёзиб тугатганлигини ва бу қулёзмани 1443 йил (847 ҳижрий) да муаллифнинг асли нусхасидан Муҳаммад Нишопурий кучирган қулёзма билан таққослаб курганлигини билдиради.

Тусийнинг арифметик асари асосан уч китобдан иборат булиб, биринчи китоб „Бутун сонлар арифметикаси“ 12 бобда, иккинчи китоб „Каср сонлар арифметикаси“ 14 бобда, учинчи китоб „Астрономияга тегишли ҳисоблашлар“ (олтмишли система ва улар устидаги амаллар) 9 бобда баён этилади.

Насириддин Тусий бу асарида саноқнинг Муҳаммад Хоразмий усули бўйича позицион системасини баён этишда ҳар қандай катта сонларни аташ учун зарур бўлган тўққизта рақам, ноль ва яна учта белги ашъар—10, миат—100 ва алф—1000 нинг зарур эканлигини уқтиради. У бутун сонлар арифметикасини баён этишда ҳар бир амалга таъриф беради ва турлича бажариш йўлларини кўрсатади. Тусий амалларни турлича бажариш усуллари ичида энг соддаси ҳозирги замон усули эканлигини билиб, амалларни шу усул билан бажариш йўлларини кўрсатади. У каср сонлар арифметикасини баён этишда касрни ҳосил қилувчи сабабларни, каср ҳақидаги тушунчани таърифлайди.

Тусий касрларнинг турларини ўзига хос йўллар билан классификация қилади. Ҳамда каср сонлар устида амаллар бажариш методини беради. У қўшиш ва айириш амалини бажариш учун зарур бўлган энг кичик умумий махражни топишдаги ёрдамчи восита—икки ва ундан ортиқ соннинг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий бўлинувчисини топиш усулларини баён этади.

Муҳаммад Хоразмий ва ундан кейин Абул Вафо, ан-Насавий, Кархий ва бошқалар бутун ҳамда каср сонлардан иккинчи ва учинчи даража илдиз чиқаришнинг аниқ ва тақрибий усулларини кўрсатган бўлсалар, Тусий сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усули ва исталган кўрсаткичли бином формуласини ҳамда унинг коэффициентларини топиш йўлларини тушунтиради Бундан ташқари сонлар устидаги амалларнинг тўғри бажарганлигини текширишнинг мезон 9 ва 11 воситасидаги усулларини баён этади. Бундай арифметика ўз даврида тушунарли ва содда йўлда баён этганлиги ва ихчамлиги Тусийнинг фақат математикгина бўлмасдан, истеъдодли методист ҳам бўлганлигини кўрсатади.

Тусийнинг арифметик асари қаторида унинг замондоши ва шогирди **Мавлоно Низомиддин Нишопурийнинг**[*] арифметика ҳақидаги „Арифметика қуёши“

---

[*] Brockelmann C. geschichte der arabischem Zitterufur Zeiden E. Z. Bruer 1937, II том, 211- бетда, Нишопурийнинг тўлиқ номи

(„Шамсия фил-ҳисоб“) номли асари ҳам катта аҳамиятга эга. XIII асрда ёзилган асарнинг асл нусхасидан кўчирилган араб тилидаги қўлёзма Ўзбекистон Фанлар Академияси Шарқшунослик институтидаги қўлёзмалар фондининг 6023 ва 6425-номерли инвентарларида сақланади. Бу китобларда астрономия, алгебра, геометрия ва мерос бўлиш ишларига доир асарлар қаторида 72 бет ҳажмида Нишопурийнинг арифметик асари** ҳам берилади.

Низомиддин Нишопурийнинг арифметик асари икки қисмдан иборат бўлиб, биринчи қисмда „Ҳисоб фаннинг бошланиши“ („фанни аввал“) номи билан иккита китобда „Бутун сонлар арифметикаси“ уч бобда, иккинчи китобда „Каср сонлар арифметикаси“ олти бобда баён этилади. Иккинчи қисмда „Ҳисобнинг айрим бўлаклари („фуруъ ҳисоб“) номи билан тўрт китобда—биринчи китобда, „Даража ва илдизлар ҳақидаги тушунча“ уч бобда, қолган китобларда алгебра, геометрия ва астрономияга доир ҳисоблашлар баён этилади.

Низомиддин Нишопурий асарнинг кириш қисмида арифметиканинг таърифи, сон ва унинг турлари ҳақида тушунча беради... У, арифметика берилган сонлар бўйича, номаълум сонларни топиш ҳақидаги фандир, унинг предмети сондан иборатдир деб тушунтиради. Бутун ва каср сонлар устида тушунча ва касрларнинг ҳосил бўлишдаги сабабларни кўрсатади. Натурал сонлар қаторини ҳосил қилишда сонлар назарияси элементларини татбиқ қилади. Сўнгра Хоразмий, ан-Насавий ва Тусийлар каби, ўнли позицион системасини баён этади.

Хоразмий, ан-Насавий ва кейинчалик Жамшид Коший ва бошқа муаллифлар сонлардан илдиз чиқаришни, „Бутун сонлар арифметикаси“ ва „Каср сонлар арифметикаси“ ўтиш босқичида кўрсатадилар. Бутун сонлардан тақрибий илдиз чиқаришда, илдизнинг тақрибий

Ҳасан ибн Муҳаммад ибн Ҳусайн Низом ал-Аъраж ан-Нишопурий ва китобнинг тулиқ номи „Ар-рисола аш-шамсия фи-л-хисоб“. Унда Нишопурий Насириддин Тусийнинг шогирди бўлиб 710/1310 йилда ўлганлиги кўрсатилган.

** Инв. № 6023 китобнинг 176—211-бетларида ва инв. № 6425 китобнинг 134 – 170 бетларида берилади. Инв. №6023 китобнинг охиридаги маълумотга қараганда, китобдаги асарларни асл нусхасидан 1195 ҳижрида Бухоро мадрасасида Ғойибқазар Сайидбек ўғли кўчирган.

қиймати, касрлар боби ўтилмасдан каср кўринишида берилади. Демак, бирор янги математик тушунча ҳали номаълум бўлган тушунча орқали аниқланади. Темаларнинг бу тариқа қўйилиши XX асргача мадрасаларда ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида ҳам учрайди. Нишопурий бу методик камчиликка йўл қўймаслик учун темаларни юқорида кўрсатилган тартибда, яъни бутун ва каср сонлар арифметикасидан сўнг, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш амалини баён этади.

Тусий арифметик амалларни, Хоразмий ва Насавийлар каби, тахта устига қум ёки тупроқ сепиб, учи ингичка таёқча ёрдамида бажаради ва оралиқда ишлатиладиган рақамларни ўчириб ўрнига янги рақамни ёзиш билан ҳисоблайди. Нишопурий эса, амалларни бажаришда, „Жадвал усули“ номи билан оралиқдаги ишлатиладиган рақамларни ўчирмасдан ҳамма ёрдамчи ҳисоблашларни жадвалда қоғозга ёзади. Демак, Нишопурий арифметик амалларни бажаришни ўзига хос метод билан „Жадвал усули“ ёрдамида „Ҳисоблаш тахтаси“ дан қоғозга кўчиради. Шундай қилиб, ҳозирча Нишопурийнинг асарини арифметика тараққиётининг иккинчи босқичига кирувчи, бизга маълум бўлган биринчи арифметик асар деса бўлади. Нишопурийдан кейин Жамшид Коший, Али Қубовий, Баҳоваддин Омулий ва бошқалар арифметик амалларни бажаришни Нишопурий усули билан баён этадилар.

Нишопурий арифметик амалларни қуйи хонасидан бошлаб бажариш йўлини ҳам тушунтиради. Сонлардан исталган кўрсаткичли илдиз чиқариш йўлини баён этиб, мисолда иккинчи даражали илдиз чиқаришни кўрсатади.

Ўрта аср Шарқ математикларининг арифметика ҳақидаги асарлари қаторида Улуғбек мадрасасининг энг йирик олимларидан бири – Жамшид Кошийнинг 1427 йилда ёзган „Арифметика калити“ („Мифтоҳ ал-ҳисоб“) номли китоби алоҳида аҳамиятга эга. Кошийнинг асари кириш қисм ва беш китобдан иборат. Кириш қисмида ҳисоб фанининг таърифи, сон ва унинг турлари тушунтирилади. Биринчи китоб—бутун сонлар арифметикаси ўн икки бобда, учинчи китоб—астрономиядаги ҳисоблашлар олти бобда, тўртинчи китоб—геометрик миқдорларни ўлчаш тўққиз бобда, охирги бешинчи китоб—алгебра ёрдами билан номаълумни топиш тўрт бобда баён этилади. Кошийнинг араб тилидаги „Арифметика калитининг хулосалари“ * („Талхис ал-мифтоҳ фи илмиз-ҳисоб“) номли асарида юқорида кўрсатилган биринчи ва иккинчи китобдаги материаллар баён этилади. Бу асар „Арифметика калити“ дан материалларни қисқартириб олинганлиги учун „Арифметика калити нинг хулосалари“ номи билан аталган.

Кошийнинг „Арифметика калити“ Б. А. Розенфельд ва А. П. Юшкевичлар томонидан араб тилидан русчага таржима қилинган. Кошийнинг мазкур асарлари темаларнинг сиқиқлиги, изчиллиги ва тушунарли баён этилиши билан ўрта асрларда ёзилган математикага доир асарлар орасида алоҳида ажралиб туради. А. П. Юшкевич ва Б. А Розенфельдлар Кошийнинг бу асарига шундай баҳо берадилар: „Кошийнинг „Арифметика калити“ ҳисоблаш ишларини олиб борувчилар, қурувчилар, ер ўлчовчилар, молия ходимлари, ҳуқуқшунослар ва бошқаларнинг талабларига мослашган ўз даврининг элементар математика энциклопедиясидан иборатдир.“ Ҳақиқатан, бу асар ўрта асрда ёзилган математикага доир асарлар ичида элементар математиканинг тармоқлари: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия ва олий математика элементларини ўз ичига олади. Коший ўзидан илгари ўтган ўрта аср Шарқ математикларининг арифметика соҳасида қилган ишларини такрорлабгина қолмасдан, уларни такомиллаштиради, янгиликлар ва ҳисоблашларга янги усуллар қўшади.

Тарихда биринчи бўлиб XVII асрда Европада инглиз олими Симон Стевин томонидан ўнли каср кашф этилган деб келинган бўлса, XV асрда Коший „Арифметика калити“ номли асарида, биринчи бўлиб фанга ўнли касрни киритади. Айлана узунлигининг диаметрга нисбатини, яъни π сонини вергулдан сўнг 16 хона аниқлик билан ўнли касрда $\pi \approx 3,1415926535897932$ ҳисоблайди ва ўнли касрларни арифметиканинг бошқа амалларига татбиқ қилади. Коший ҳисоблашда ўнли каср олтмишли касрдан содда эканлиги, астрономиядаги ҳисоблашни билмаганлар учун ҳам ўнли каср тушунарли эканлигини уқтиради. А. П. Юшкевич ва Б. А. Розенфельдлар

---

* Ўзбекистон Фанлар Академияси Шарқшунослик институти инв №2245, қўлёзма араб тилида Муҳаммад Амин Эшон ўғли Муҳаммад Сақий томонидан 1693 йилда (1104 ҳижрий йилнинг иккинчи чорагида) кўчирилган.

Кошийнинг систематик равишда ўнли касрларни тўлиқ баён этишини унинг арифметика соҳасидаги ютуқларининг чўққиси деб баҳолайдилар.

Коший арифметик амалларни бажаришда биз қўллайдиган ҳозирги усулдан фойдаланади, яъни амалларни сонларнинг энг қуйи хонасидан бошлайди ва бу усулнинг соддалигини кўрсатади. Сонлардан юқори кўрсаткичли илдиз чиқариш усули ва кўрсаткичи 3 дан катта натурал сондан иборат бўлган бином формуласи Кошийдан олдин маълум бўлса ҳам, у ҳисоблаш йўлларини такомиллаштириб, бу қоидаларни исталганча натурал кўрсаткичлар учун умумлаштирди ва содда усул бўйича илдизнинг тақрибий қийматини ўнли каср билан ҳисоблайди. Кейинчалик бу усул Европада Руффини—Горнер усули деб аталди.

Коший алгебраик масалаларни ҳал қилиш учун зарур бўлган сонларнинг нисбати ҳақидаги бир қанча қоидаларни ва сонлар кетма-кетлигининг йиғиндисини топиш усулларини кўрсатади. Бирдан n гача бўлган кетма-кет тўртинчи даражадаги натурал сонларнинг йиғиндисини ҳисоблаш усули $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+$ $+10n^3-n)$ ни ихтиро қилади. У тригонометрик ҳисоблашларни такомиллаштиради, юқори даражали тенгламаларни тақрибий ечиш йўлини беради. Бундан ташқари, астрономияда бир қанча янгиликлар яратади. Кошийнинг математика соҳасидаги ютуқлари бир оз кейин Европа олимлари томонидан қайта очилади.

Хоразмийдан кейинги даврларда Шарқ математикларининг айрим тармоқлари ҳақида ёзилган баъзи асарлар ҳам диққатга сазовордир. Бунга Ўзбекистон ССР Фанлар Академияси Шарқшунослик институтида сақланган араб ва форс тилидаги математикага доир асарлардан XII асрда яшаган машҳур астроном ва математик Сирожиддин Абу Тоҳир Муҳаммад ибн Абдурашид Сижовандийнинг „Рисола ал-жабр ва ал-муқобала“ номли қўлёзмаси, XIV — XVII асрларда яшаган Муҳаммад ибн Алий Қубовийнинг „Арифметика ҳақида қисқа рисола“ („Рисола мухтасар дар ҳисоб“), Абдулло ибн Муҳаммад Рафиқ Хужандийнинг „Касрлар қоидаси“ („Қавоид ул-кусур“), муаллифи номаълум бўлган „Рақамлар тўплами“ („Мажмаъ ул-арқом“), „Ҳиндлардаги арифметика илмининг баёни ҳақидаги рисола“ („Рисола дар баёни илмий ҳисоби ҳиндувоний“) қўлёзмалар мисол бўла олади. Булар олдинги муаллифларнинг арифметикада қилган ишларини такрорлабгина қолмасдан, айрим масалаларда уларни такомиллаштирадилар, қисман белги (символ) лар киритадилар. Арифметик амалларни бажаришда замонамиздаги усулга яқин бўлган содда, янги усулларни кўрсатадилар. Зеҳнда турлича ҳисоблаш усулларини қўллаш билан айрим темаларни системали баён этдилар. Масалан, Али Қубовий бутун сонлар арифметикасини баён этишда оғзаки кўпайтириш усулларига мукаммал тўхтайди. Оғзаки ҳисоблашнинг аҳамияти ва унинг арифметика учун зарур эканлигини уқтиради. Арифметик амаллар орасидаги муносабат ва уларнинг хоссаларини баён этади. Сон тушунчасини кенгайтиришдаги босқичлар, бутун сонларни бўлиш босқичида каср сонларнинг ҳосил бўлиши ва каср сонлар билан амаллар бажариш усулларини кўрсатади. Бобокалон Муфтий Самарқандий* (XVII) „Арифметика фани ҳақидаги рисола“ номли форс тилидаги қўлёзмасида каср сонларни Али Қубовий усули бўйича баён этади. Муҳаммад Рафиқ Хўжандийнинг ва муаллифи номаълум бўлган** „Каср сонлар арифметикаси ҳақида рисола“ номли қўлёзманинг кириш қисмида каср сонларни қўшиш ва айириш учун зарур бўлган, икки ва ундан ортиқ сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий бўлинувчисини топиш Евклид алгоритми бўйича аниқланади. Касрлар боби эса Абул Вафонинг биз илгари баён этган арифметик асари асосида баён этилади. Улар сонларнинг уч хил нисбатда (соннинг ўз-ўзига, кичик соннинг катта сонга ва катта соннинг кичик сонга нисбатда) бўлиши, иккинчи хил нисбатда ҳамма вақт каср сон ҳосил бўлишини таъкидлайдилар. Каср сонларни махражига қараб синфларга ажратадилар ва улар устида амалларни бажариш усулларини берадилар. Юқорида кўрсатилган намуналардан ташқари ўзига хос методлари билан баён этилган арифметикага доир қўлёзмалар ҳам жуда кўп.

Қўлёзмаларда арифметикадан ташқари математиканинг бошқа тармоқлари: алгебра, геометрия, тригонометрия ва мерос тақсим қилишга доир амалий масалалар ҳам кўрсатилган. Бу қўлёзмалар ичида ўрта аср

---

* Ўзбекистон Фанлар Академияси Шарқшунослик институти кутубхонаси. Инв. №2245, 1674 йилда Муҳаммад Сақий кўчирган.

** Инв. №2245. 175—180-бетларда, 1703 йилда кўчирган.

Шарқ математикларининг илмий асарлари асосида тузилган катта ҳажмдаги дарслик ва машқ дафтарлари ҳам бор, улар ҳақида кейинги бобда батафсил тўхтаймиз.

II боб. ЎРТА ОСИЁ МАТЕМАТИКЛАРИНИНГ АСАРЛАРИДА БУТУН СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАРНИНГ БАЖАРИЛИШ УСУЛЛАРИ

1-§. Саноқнинг ўнли позицион системаси

Ўрта Осиё математиклари бутун сонлар бобида саноқнинг олтмишли ва ўнли позицион системаси, бутун сонлар устида амаллар, амалларнинг тўғри бажарилганлигини текширувчи восита „мезон“ олиш усули, сонлар кетма-кетлигининг йиғиндисини топиш ва оғзаки ҳисоблаш усулларини баён этадилар. Бутун сонлар устидаги амаллар ва уларни бажариш йўлини кўрсатишдан аввал арифметика фани ҳамда сон ва унинг тури ҳақида тушунча берилади. Уларнинг фикрича, арифметика маълум сон воситасида номаълум сонни топиш усули ҳақидаги фандир, унинг предмети эса сондан иборатдир. Улар санашда ва миқдорларни ўлчашда сонларнинг ҳосил бўлишини кўрсатадилар ва сонларни, асосан иккига бўладилар. Биргина рақамдан бошланиб, ноллар билан тугаган сон „содда“ („муфрад“), икки ёки ундан ортиқ рақамдан тузилган сонлар мураккаб сон дейилган. Сон ва унинг тузилиши ҳақида тушунча берилгандан сўнг „Сонларнинг шакли“ („сурат ададий“) номи билан Муҳаммад Хоразмий йўлида ўнли позицион система баён этилади.

Ўрта Осиё математиклари ўнли позицион системасини баён этишдан аввал, ҳинд олимлари томонидан тўққизта рақам тақдим қилинганлигини, шу рақамлар билан исталган сонларни соддагина ифодалаш мумкинлигини уқтириб, сўнгра ҳиндларнинг ўнли позицион системасини баён этишга киришадилар. Улар ҳинд рақамининг тўққизта шакли билан таништирадилар, яъни чапдан ўнгга қараб, ёзиш тартибида 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ёзилиши ва бу рақамларнинг шакли Ҳиндистоннинг ҳамма ерида бир хил эмаслигини таъкидлайдилар. Масалан, Хоразмий* беш билан олти ва етти билан

---

* Хоразмийнинг лотин тилига таржима қилинган арифметик асарида фақат рим рақамлари кўрсатилган.

саккизнинг турлича шаклда, Беруний ва Тусийлар икки билан учнинг икки хил кўринишда ёзилишини кўрсатадилар. Хоразмий ўзининг арифметик асарида тўққизта рақамнинг турлича ёзилиши ўнли позицион система принципларига зиён етказмаслигини таъкидлайди.

Ўрта Осиё математиклари тўққизта рақам ва рақамнинг йўқлигини кўрсатувчи ўнинчи ишора ноль (сифр) билан ҳар қандай катта сонни ёзиш мумкинлигини ва сонларнинг номини аташ учун тўққизта рақамга қўшимча 7 та сўз: ўн, йигирма, ўттиз, қирқ, эллик, юз ва минг кераклигини кўрсатадилар. Ўрта асрларда мингдан катта сонлар (яъни ҳозирги миллион, миллиард, триллион ва ҳоказо) учун махсус номлар бўлмаганлиги учун улар миллион ва ундан катта сонларни, ўн (ашар), юз (миот) ва минг (алф) номлари* ёрдамида атайдилар. Сонларнинг номини аташ учун керак бўлган юқоридаги 16 та сўз кўрсатилгандан сўнг сонларни ёзиш ва ўқишда зарур булган хоналар ҳақида тушунча берилади. Улар асосан тўртта хонани билганлар: бу хоналарни араб тилидаги бир, ўн ва юз сўзларининг кўплиги: бирликлар (оҳод), ўнликлар (ашарот), юзликлар (миот) билан атаганлар. Тўртинчи—мингликлар хонаси эса кейинги юқори учта хона бирликлари ҳисобланади. Қолган юқори хоналар эса шу учта ном ва мингни такрорлаш ёрдамида аниқланади. Масалан, мингдан миллионгача хоналар: минглар, ўн минглар, юз минглар оходи улуф, ашарати улуф, миоти улуф; миллиондан миллиардгача хоналар: бир миллион, ўн миллион, юз миллион ва миллиардни—бир минг-минг (оходи улуф-улуф), ўн минг-минг (ашароти улуф-улуф), юз минг (миоти улуф-улуф) ва минг-минг (улуфи-улуф-улуф) каби ёзилади.

Сонларни тасвирлашда зарур бўлган хоналар ҳақида тушунча бергандан сўнг, саноқнинг ўнли позицион системасининг принциплари баён этилади. Сонларни ёзишда ёки белгилашда зарур бўлган хоналар ўнгдан чапга қараб, тартиб билан, бирликлар ўнг томондан биринчи ўринга, ўнликлар иккинчи ўринга, юзликлар учинчи ўринга, мингликлар тўртинчи ўринга ва ҳоказо ёзилиши, ҳар бир қуйи хонадаги ўнта бирлик қўшни юқори хонанинг битта бирлигини ташкил этиши ва хоналарда учраган ноль хонада сон йўқлигини билдирувчи

---

* Қавс ичидаги сўзлар, юз ва мингларнинг арабча аталишидир.

ишора эканлиги кўрсатилади. Насавий, Тусий ва Кошийлар ҳар бир тўққизта рақамни бирликлар, ўнликлар, юзликлар ва ҳоказо хоналардаги қийматлари, яъни тўққизта рақам бирликлар хонасида бирдан тўққизгача, ўнликлар хонасида ўндан тўқсонгача, юзликлар хонасида юздан тўққиз юзгача ва ҳоказо сонларни ифода қилишини кўрсатадилар. Сўнгра шу хоналардаги ўндан юзгача, юздан минггача бўлган ўнликларни ва улар орасидаги сонларни рақамлар билан ёзилиш шаклини берадилар. Масалан, ўндан тўқсонгача ўнликларни ёзиш учун бирдан тўққизгача бўлган ҳар бир рақамнинг ўнг қисмига ноль қўйиш зарурлиги кўрсатилиб, буларнинг ёзилиши 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 шаклида берилади. Бу ўнликлар орасидаги сонлар ҳам шу принципда ёзилиши баён этилгандан сўнг, бирдан бошланган кетма-кет сонлар (натурал сонлар қатори) ни ёзиш мумкин эканлиги ва бунинг чеки йўқлиги тушунтирилади. Хоразмий арифметик асарида ўнли позицион системани баён этишда катта сон 180073051492863 ни ўқиш йўлини кўрсатган бўлса, Насавий 987654321 ни, Тусий 59008067200143 ни, Коший 43823004065 ни ўқишни кўрсатади. Масалан, Тусий 59008067200143 ни ўқиш учун уни синфларга ажратади, бунинг учун ўнгдан бошлаб қуйидагича номерлайди:

59	008	067	200	143
4	3	2	1	

Бундаги ҳар бир синф алоҳида ном билан аталмасдан, мингни кетма-кет қайтариш билан қуйидагича ўқилади: 59 минг-минг-минг-минг (59 улуф-улуф-улуф-улуф), 8 минг-минг-минг (8 улуф-улуф-улуф), 67 минг-минг (67 улуф-улуф), 200 минг (200 улуф) 143. Катта сонларни бундай узун номлар билан ўқиш Шарқда узоқ вақт сақланган. XV асрда Европа математикларидан Лука-Пачоли „миллион“ ни, XV аср охирида Никола Шюке „биллион“, „триллион“ ва ҳоказо „ноналлион„ гача терминларни қўллаган бўлсалар ҳам XX асргача Ўрта Осиё мадрасаларида ўқитилган дарсликларда ўрта аср Шарқ математикларининг одатлари бўйича, миллион ва ундан катта сонларни, мингни кетма-кет қайтариб ёзиш усули сақланган. Улар катта сонларнинг ёзилиши, ўқилишини кўрсатгандан сўнг, агар бундай сонларни ўқишни билсанг, сонлар устидаги амалларни яхши билишинг мумкин деб, бутун сонлар устидаги амалларни баён этишга киришадилар.

2-§. Иккилантириш, яримлатиш амаллари ва уларнинг бажарилиш усуллари

Турли даврда ва турли халқларда арифметиканинг мазмуни бир хил бўлмаганидек, арифметик амал тушунчаси ҳам ҳар хил бўлган.

Масалан, ҳиндлар арифметик асарларида олтита арифметик амал—қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқаришни ишлатганлар. Ўрта аср шарқ математиклари ҳиндлардаги олтита арифметик амалга иккилантириш ва яримлатиш амалларини ҳам киритганлар. Шундай қилиб, шарқ мамлакатлари арифметик асарларида саккизта амални ишлатганлар.

Иккилантириш ва яримлатиш қадимги мисрликлардан бошлаб амал ҳисобланган, улар кўпайтириш, бўлиш ва айиришни алоҳида амал ҳисобламасдан, бу амалларни қушиш ва яримлатиш амаллари билан бажарганлар. Масалан, 17 ни 13 га кўпайтириш учун 17 ни уч марта иккилантириб қуйидагича ёзганлар:

1′	17
2	34
4′	68
8′	136
13	221

Кейин чап устундаги, йиғиндиси 13 бўлган сонларнинг рупарасидаги (ўнг устундаги) сонларнинг йиғиндиси (17+68+136) изланган кўпайтма деб олинган. Маълумки ҳинд арифметикасида иккилантириш ва яримлатиш бўлмаган. Лекин ҳинд арифметикасини тарғиб қилувчи Хоразмий ўзининг арифметик асарида иккилантириш ва яримлатишни алоҳида амал ҳисоблайди. Бундан кўринадики, у ушбу ҳолда Яқин ва Ўрта Шарқ математик анъаналарига таянган. Хоразмий бутун сонлар устида амаллар бажаришни биринчи навбатда иккилантириш ва яримлатиш амалидан бошламасдан, қўшиш ва айиришдан сўнг баён этган. Насириддин Тусий, Нишопурий, Коший ва улардан кейинги олимлар эса бутун сонлар устидаги амалларни бажаришни биринчи навбатда иккилантириш ва яримлатиш амалидан бошлайдилар.

Ўрта аср Шарқ математиклари арифметик амалларни икки хил—„сатҳ“ ва „жадвал“ усулида бажарганлар.

Хоразмий, Насавий ва Тусийлар амалларни „ҳисоблаш тахтаси“ да оралиғидаги рақамларни ўчириб ўрнига ёзиш билан бажарадилар. Маълум даврдан сўнг „ҳисоблаш тахтаси“ нинг такомилланиши „сатҳ“ усулига айланган. „Жадвал“ усулида амалларни бажаришда оралиқдаги ҳамма ёрдамчи ҳисоблашлар жадвал кўринишида коғозга ёзилган. Ўрта Осиё математикларидан Нишопурий, Коший, Али Қубовий, Баҳоуддин Омилийлар амалларни жадвал усулида бажарадилар. Ўнли саноқ системасида амалларнинг „ҳисоблаш тахтаси“ да бажарилиши арифметика тараққиётининг биринчи босқичига киритилса, „сатҳ“ ва „жадвал“ усулини арифметика тараққиётининг иккинчи босқичи деб ҳисобласа бўлади.

„Сатҳ“ ва „Жадвал“ усуллари мазмун жиҳатдан бир хил бўлиб, амалларни бажаришда, оралиқдаги ёрдамчи ҳисоблашларда рақамларнинг жойланиш шакли билан бир-биридан фарқ қилади. Бу усулларда амал бажариш Ўрта Осиё мадрасаларида XX асргача давом этади.

Хоразмий арифметик асарининг XIV асрдаги лотинча таржимасида амалларнинг таърифи берилмайди. Хоразмийдан кейинги даврларда унинг асари ҳақида ёзган бир неча муаллифлар Хоразмийнинг амалларга берган таърифини турлича кўринишда келтирадилар. Юқоридаги фикрларга кўра Хоразмийнинг арифметик амалларга берган таърифи ҳозирча аниқ эмас деган хулоса чиқариш мумкин.

Насириддин Тусий ҳар бир амалнинг бажарилиш усулини кўрсатишдан аввал шу амалларга қисқа ва тушунарли қилиб таъриф беради. У амалларнинг бажарилиш усулини тўлиқ умумий (қоида) кўринишида бергандан сўнг мисол кўрсатади. Тусий Ўрта аср Шарқ математикларининг одатича сўз билан берилган таъриф ва қоидаларнинг қисқа ва тушунарли бўлишига катта аҳамият беради.

Тусий иккилантириш ва яримлатиш амалларига шундай таъриф беради: иккилантириш амали (амали тазъиф) деб, бирор сонни ўзига тенг бўлган сонга қўшишга айтилади, яримлатиш амали (амали тансиф) берилган сондан унинг ярмисини айиришдир. Нишопурий, Коший, Омилий ва бошқа муаллифлар яримлатиш амали берилган соннинг ярмисини топиш демакдир. деб таърифлайдилар. Яримлатиш амалига берилган охирги таъриф бўлиш амалининг энг содда кўринишидир. Берилган таърифларга эътибор берилса, иккилантириш ва яримлатиш алоҳида амал бўлмасдан қўшиш ва айириш ёки кўпайтириш ва бўлиш амалларининг хусусий ҳоли эканлиги кўринади.

Тусий иккилантириш ва яримлатиш амалларига таъриф бергандан сўнг, бу амалларнинг бажарилиш усулини умумий кўринишда шундай баён этади: „Ўйланган сонни иккилантириш учун, шу сонни чизиққа ёзиб, ҳар бир хонасидаги рақамни тартиб билан ўнгдан ёки чапдан иккилантириб бориш керак, агар хонадаги рақамни иккилантириш натижасида ўн ёки ўндан катта сон ҳосил бўлса, ўнликларни (дилда сақлаб ёки ёзиб) қўшни чап хонадаги иккиланган сонниг бирлар хонасига қўшиш керак". Бу келтирилган қоида бўйича мисолни ишлаш йўли—амал сўз орқали ёзма равишда ҳеч қандай белгисиз бажарилади. Масалан, 650372 ни иккилантириш талаб қилинса, 650372 ўнг (ёки чап) дан бошлаб ҳар бир рақам иккилантирилади ва натижа берилган сон рақамлари тагига шундай ёзилади.

$$\begin{array}{ccccccc} & 6 & 5 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{7} & & \end{array}$$

иккилантириш натижаси
1300744

Яримлатиш амалини олдин ўнгдан кейин чапдан бажариш йўли кўрсатилади. Ҳар иккала ҳолда, берилган соннинг ҳар бир хонасидаги рақам жуфт бўлса, ярми олинади, тоқ бўлса—яримланган рақамнинг бутун қисми шу рақам тагига ёзилади. Қолдиқ бирни ўн ҳисоблаб, унинг ярми қўшни кичик хонадаги яримланган рақамга қўшилади. Масалан, 1076543 ни ўнгдан (ёки чапдан) яримлатишни юқоридаги қоида бўйича бажаргандан сўнг, охирги натижа рақамлар билан шундай кўринишда берилади:

Ўнг томондан яримлатиш　　Чап томондан яримлатиш

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & \underline{5} & & \underline{5} & & \underline{5} & \underline{\dot{1}} \\ & 5 & & 8 & & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{Ҳосил} \\ 5 & 3 & 8 & 2 & 7 & 1 \\ & & & & & \underline{\dot{1}} \\ & & & & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ \underline{0} & 3 & \underline{3} & 2 & \underline{2} & 1 & \underset{\bullet}{1} \\ 5 & & 8 & & 7 & & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{Ҳосил} \\ 5 & 3 & 8 & 2 & 7 & \underset{\bullet}{1} \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{array}$$

Яримлатиш натижаси ҳозирги белги билан ёзилса, шундай бўлади: 538271 $\frac{1}{2}$.

Ўнг ва чапдан яримлатиш усулларининг ёзилишидаги бир-биридан фарқ шундаки, ўнгдан яримлатишда қолдиқнинг ярми бутун тагига, чапдан яримлатишда бутун устига ёзилади.

Нишопурий иккилантириш ва яримлатишни жадвалда бажаради. Берилган соннинг рақамларини вертикал параллел тўғри чизиқлар орасига олиб, горизонтал чизиқ билан маълум масофада учга бўлинади. Иккинчи бўлакда амал бажарилиб, унинг натижаси учинчи бўлакка кўчирилади. Нишопурий берилган сонни иккилантиришда ҳосил бўлган ўнликларни қўшни чап хонадаги иккиланган соннинг бирлар хонасига оғзаки қўшади. Яримлатишда эса қолдиқнинг ярмини қўшни ўнг хонадаги ярмланган сонга оғзаки қўшиб, ҳар иккала ҳолда натижа чизиқ тагига ёзилади. Масалан, 650372 ни иккилантириш ва 1076543 ни яримлатиш бундай кўринишда бажарилади.

Иккилантириш

	6	5	0	3	7	2
1	1 3	0	0	6 / 7	4	4
1	3	0	0	7	4	4

Яримлатиш

1	0	7	6	5	4	3
	5	3	3 / 8	2	2 / 7	1 / 2
	5	3	8	2	7	$\frac{1}{2}$

Жадвал чизишни назарга олмаганда Нишопурийнинг амалларни бажариш йўли Тусий йўлига нисбатан соддадир. Балки Тусий янги ўрганувчиларга тушунарли бўлишини эътиборга олиб, юқоридаги усулни баён этгандир.

Насириддин Тусий ва Нишопурийлардан бир ярим аср кейин Жамшид Коший сонларни иккилантириш ва яримлатишнинг энг содда йўлини кўрсатади. У иккилантиришда берилган соннинг қуйи хонасидан бошлаб бажаришни тавсия қилади. Берилган соннинг рақамларини иккилантиришда ҳосил бўлган ўнликлар, яримлатишда эса қолдиқнинг ярми дилда сақланиб, тегишлича хоналарга оғзаки қўшилади ва натижа берилган соннинг тагига ёзилади. Бошқача айтганда, Коший ҳозирги усул бўйича берилган сонни иккига кўпайтириш ва иккига бўлишни баён этади. Масалан, у 652078 ни иккилантириш ва 4090527 ни яримлатишни ушбу кўринишда ёзади:

Иккилантириш	Яримлатиш
652078	4090527
1304156	2045263
	$^{1}/_{2}$

Иккилантириш ва яримлатишнинг алоҳида амал тариқасида ўқитилиши Европада XIII—XIV асргача давом этган бўлса, Ўрта Осиё мадрасаларида XX асргача ўқитилган. Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида иккилантириш ва яримлатиш амалига махсус белги* киритилди, яъни иккилантириш арабча „таъзиф“, яримлатиш „тансиф“ сўзлари ёки уларнинг бош ҳарфларини ёзиб, иккиланувчи ва яримланувчи сон шу белги устига, натижа эса тагига ёзилади.

Мадрасада иккилантириш ва яримлатиш амалларини ва абжад ҳисобини яхши ўзлаштиришни назарда тутиб, кетма-кет иккилантириш ва яримлатиш усулида, берилган сонни маълум бир чегарагача кетма-кет иккилантиргандан сўнг, охирги натижадан бошлаб берилган сон келиб чиққунча яримлатилади. Масалан, бирдан бошлаб кетма-кет иккилантириш 2^{10} гача ва унинг тескарисига қаратиб, яримлатиш бир келиб чиққунча давом эттирилади. Натижада ҳосил бўлган ҳар бир ўнинчи ўриндаги сон „абжад“ ҳисобида ўқилади. Масалан, бирдан бошлаб кетма-кет иккилантириш 1024 гача давом эттирилиб, бунинг тескариси бир чиққунга қадар яримлатиш шундай ёзилади:

---

* А. П. Юшкевич. История математики в средние века. М., 1961 й. 259-бетда Шарқ математикларининг асарлари орасида (XV асрда яшаган Абул Ҳасан Али ибн Муҳаммад Қаласадий ўз асарида биринчи бўлиб арифметика ва алгебрага белги киритганлиги айтилади.

Иккилантириш	мезон	Яримлатиш	мезон
1	1	1024	7
2	2	512	8
4	4	256	4
8	8	128	2
16	7	64	1
32	5	32	5
64	1	16	7
128	2	8	8
256	4	4	4
512	8	2	2
1024	7	1	1

Иккилантириш ва яримлатиш ўнгидаги мезонлар 1, 2, 4, 8, 7 ва 5 ларнинг такрорланиши амалнинг тўғри аҳамияти, кетма-кет иккилантириш ва яримлаштириш натижаларини билишда бутун сонларни қолдиқсиз бўлишда, даражага кўтаришда, илдиз чиқаришда ва арифметиканинг бошқа амалларида систематик равишда қўлланишидир.

Мадрасадаги дарслик ва машқ дафтарларида иккилантириш ва яримлатишдан сўнг, кетма-кет учлантириш, тўртлантириш ва ҳоказо, ўнлантириш ва буларнинг тескариси (учга, тўртга ва ҳоказо ўнга бўлиш) ни белгилар билан бажариш яратилади.

А. П. Юшкевичнинг айтишича „математика тарихчиларининг иккилантириш ва яримлатиш амал тариқасида ўрта аср Шарқ математикларига қандайдир йўл орқали қадимги мисрликлардан кириб келган дейишларида аниқлик кам“*, иккилантириш ва яримлатишнинг алоҳида амал тариқасида ўқитилишининг ўзига хос хусусиятлари бор. Ҳақиқатда ўрта аср Шарқ математиклари (Хоразмий, Насавий, Кархий, Насириддин Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар) ва XX асргача мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари иккилантириш ва яримлатиш, кўпайтириш ва бўлиш амалларининг хусусий ҳоли эканлигини яхши билганлар ва мисрликлардек иккилантириш ва яримлатиш амаллари билан кўпайтириш ва бўлишни ҳисоблаган эмас.**

Ўрта Осиё математикларининг арифметик асарларида иккилантириш ва яримлатиш ҳатто учлантириш,

---

* Арифметический трактат Муса ал-Хоразми Труды И. И. Е. и ТАН СССР, т. I. М., 1954, 88–89-бет

** Л. ван дер Варден. Пробуждающаяся наука, М., 1959, 22–24-бетлар.

тўртлантириш ва ҳоказо, ўнлантириш ва унинг тескариси алоҳида амал тариқасида биринчи бўлиб ўқитилишига сабаб фақат сонлардан илдиз чиқаришда қўлланиши бўлмасдан, арифметиканинг асосий амалларини тез ва ихчам бажаришда, сонлар кетма-кетлигининг йиғиндисини ва зеҳнда ҳисоблашда, арифметикадан амалий машғулот (мерос тақсим қилиш) га доир масалаларни ечишда, математиканинг бошқа тармоқлари (геометрик ўлчашлар ва алгебраик масалаларни ечиш) да систематик равишда қўлланишидадир.

Иккилантириш ва яримлатиш амалидан сўнг, бутун сонларни қўшиш ва айириш амали баён этилади.

3-§. Қўшиш, айириш амаллари ва уларнинг бажарилиш усуллари

Ўрта Осиё математикларининг бир группаси қўшишни биринчи амал ҳисоблаб, унинг моҳияти ва бажарилиш усулини тушунтирадилар. Айириш амалини эса қўшишнинг тескариси деб ҳисоблайдилар. Иккинчи бир группа муаллифлар қўшиш ва айириш амалларини бажаришдан аввал бу амалларга таъриф берадилар. Масалан, Насириддин Тусий қуйидагича таъриф беради: „Қўшиш бирор соннинг бирликлари устига иккинчи соннинг бирликларини орттиришдир. Қўшиш амали қушилувчиларнинг йиғиндисини топиш демакдир. Айириш катта сонни кичик сон қадар камайтиришдир. Берилган иккита соннинг фарқини топиш айириш амали дейилади"

Қўшиш ва айириш амалларига берилган бу таърифлар Евклиднинг сонга берган таърифи асосида бўлиб, XX асргача Ўрта Осиё мадрасаларида ўқитилган дарслик ва илмий асарларда сақланган.

Ўрта Осиё мамлакатлари қўшиш амалини ҳозирда биз қандай бажарсак, шу усулда бажарган бўлсалар-да, уларнинг усуллари ҳозирги усулдан йиғиндининг ёзилиш шакли билан фарқ қилган. Улар қўшиш амалини асосан икки хил қоида бўйича бажарганлар. Ҳар иккала қоидада ҳам қўшилувчилар ҳозирдагидек ёзилади. Биринчи қоидада ҳар бир хонадаги сонларни ўнг ёки чапдан бошлаб қўшиш, агар қўшиш натижасида иккита рақам ҳосил бўлса, биринчисини ёзиб, иккинчисини.

кейинги юқори хонага қўшиш учун дилда сақлаш ва қолган хоналардаги рақамларни ҳам шу тартибда бажариш тавсия этилади. Иккинчи қоидада дилда ҳеч нарса сақланмасдан ҳаммаси ёзма бажарилади.

Насириддин Тусий иккинчи қоида билан қўшиш амалини бажаришни қуйидагича баён этади: иккита ва ундан ортиқ сонларни қўшишда, бу сонларни тартиб билан хоналари бўйича бир-бирининг тагига жойлаштириб, сўнг ҳар бир хонадаги рақамларни қўшиш кераклиги, агар хоналардаги рақамларнинг йиғиндиси ўн ёки ундан ортиқ бўлса, қўшилувчи ракамлар тагига ноль (ноль қўйишнинг зарурлиги алоҳида эслатилади, акс ҳолда йиғиндида рақам камайиб кетиши) ёки йиғиндининг бирликларини ёзишни, ўнлар хонасидаги рақамни қўшишни юқори хонадаги йиғиндига ёзиб ёки дилда қўшиш кераклигини уқтиради Сўнгра бу йўл билан ўнг ва чапдан бошлаб қўшишни мисолда кўрсатади. Масалан, у 125403 ни 9867 га қўшишни шундай кўринишда ёзади:

Ўнгдан чапга қараб
қўшиш

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ & 1 & 1 & & 1 & \\ 1 & \underline{2} & \underline{4} & 2 & \underline{6} & 0 \\ & 3 & 5 & & 7 & \end{array}$$

ҳосил
135270

Чапдан ўнгга қараб
қўшиш

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ & & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & & \frac{1}{7} & \end{array}$$

ҳосил
135270

Ўнгдан ёки чапдан қўшишнинг ёзилишидаги бир-биридан фарқи қўшиш натижасида ҳосил бўлган икки хонали соннинг ўнлар хонасидаги бирни қўшни юқори хонадаги йиғинди устига ёки тагига ёзиб қўшишдадир. Тусий янги урганувчилар учун тушунарли бўлишини назарда тутиб, биринчи навбатда ўнлар хонасидаги рақамни ёзиб, сўнгра ёзмасдан оғзаки ҳисоблашга ўтишни тавсия қилади. Тусий чапдан бошлаб қўшишга нисбатан, ўнгдан бошлаб қўшиш янги ўрганувчилар учун методик томондан содда эканлигини уқтиради. Нишопурий ўнликларни ёзмасдан оғзаки қўшиш билан юқоридаги мисолни Тусийга нисбатан соддароқ кўринишда шундай бажаради:

	3	9	8	6	7
1	2	5	4	0	3
	5	4	2	6	0
	—	—		—	
1	6	5		7	

XV асрда яшаган марокашлик математик Абул Ҳасан Али ибн Муҳаммад Қаласадий одатда дилда сақланадиган ўнликни қўшилувчиларнинг пастига, йиғиндини эса устига ёзишни тавсия қилади. Масалан, у 48 га 97 ни қўшишни шундай бажаради:

$$\begin{array}{r} 145 \\ \hline 97 \\ 48 \\ 1 \end{array}$$

Баҳоуддин Омилий буни тескарича ёзади, яъни йиғиндини ҳозирдагича ёзиб, дилда сақланадиган ўнликни қўшилувчилар устига ёзади. Масалан, у 53739 ни 28265 га қўшишни шундай кўринишда бажаради:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 5 & 3 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 2 & 6 & 5 \\ \hline 7 & 1 & 9 & 9 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & \end{array}$$

Жамшид Коший эса қўшиш амалини бажаришда энг содда йўл ҳозирдаги усул эканлигини билиб, у шу усул бўйича исталганча сонларни қўшишни тавсия қилади. Масалан, 67024 га 5294853 ни қўшишни шундай бажаради:

$$\begin{array}{|ccccccc|} \hline & 6 & 7 & 0 & 2 & 4 & \\ 5 & 2 & 9 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ \hline 5 & 3 & 6 & 1 & 8 & 7 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Юқорида баён этилган, ҳозирги усул бўйича қўшиш амалини бажаришга келгунча, бу амал бир неча кўринишда ҳал қилинган бўлса, айириш амали ҳам шу тариқа бир неча босқичлардан сўнг ҳозирги усулда бажарилган. Масалан, Муҳаммад Хоразмий берилган сонларни ҳозирги усулда ёзиб, айиришни юқори хонадан бошлаб бажаришни содда ва фойдали ҳисоблайди ҳамда шу усулни тавсия қилади. У айириш босқичида камаювчининг рақамларини ўчириб улар ўрнига айирманинг рақамларини ёзади. Хоразмий мисолда 12025 дан 3604 ни айиришни кўрсатади. У берилган сонларни $\begin{matrix}12025\\3604\end{matrix}$ кўринишда ёзиб, 12 дан 3 ни айиради, 12 ни ўчириб, унинг ўрнига қолдиқ 9 ни $\begin{matrix}9025\\3604\end{matrix}$ кўринишда ёзади. Сўнгра 9 дан бирни олиб қуйи хонадаги ноль билан ҳосил бўлган ўндан 6 ни айиради, қолдиқ 4 ни нолнинг ўрнига шундай ёзади: $\begin{matrix}8425\\3604\end{matrix}$ Шу тартибда қолган рақамларни айирганда охирги натижа 8421 ҳосил бўлади. Хоразмий амални ҳисоблаш тахтасида (тахтага қум ёки тупроқ сепиб) бажарганлиги учун рақамларни ўчириб, ўрнига ёзиш қулай бўлган. Қоғозда эса бу тартибда ҳисоблаш ўнғайсиздир.

Насириддин Тусий Хоразмий қоидасида айирманинг рақамларидаги камаювчи рақамларини ўчириб, ўрнига ёзмасдан унинг устига ёзади. Айириш амалини бажаришда, қўшишга ўхшаш камаювчини—манқус, айрилувчини—ноқис номлари билан атаб, буларни ҳозирдагича, сўнгра ўнг ёки чапдан бошлаб айиришни тушунтиради. Ҳар икки ҳолда агар айириш мумкин бўлмаса, қўшни юқори хонадан битта ўнлик олиб, қуйи хонадаги рақамга қўшиб айириш кераклигини кўрсатади. Тусий айириш қоидасини бергандан сўнг, камаювчи биргина сондан бошланиб бир ва бир неча ноллар билан тугаган ва истал ган кўп хонали сонлардан иборат бўлганда айиришни мисолда тушунтиради. Масалан, у 85023 дан 7416 ни айиришни юқоридаги йўл билан шундай кўринишда ёзади:

Чап томондан айириш		Ўнг томондан айириш	
7 0 7 8 6 1 7 8 5 0 2 3 -7 4 1 6	ҳосил 77607	77607 85023 7416	ҳосил 77607

Изоҳ: чапдан айиришда юқори хонадаги битта ўнликни олиш натижасида қолган рақам қия чизиқ устига ёзилади.

У ўнг ва чапдан айириш устида бир неча мисоллар кўрсатгандан сўнг ўнг ва чапдан айиришнинг тескариси номи билан камаювчи ва айирманинг ўринларини алмаштириб шундай кўринишда бажаради:

Чапдан айиришнинг тескариси (тафриқи манқус ясоғий)		Ўнгдан айиришнинг тескариси (тафриқи манқус яминий)	
7 4 1 6 8 5 0 2 3 7 8 6 1 7 7 0	ҳосил 77607	7416 85023 77607	ҳосил 77607

Муҳаммад Нишопурий берилган сонларни юқоридагича ёзиб айириш амалини юқори хонадан бошлаб бажаради. Айирмани эса юқоридагича айрилувчининг тагига ёзади. Масалан, у юқоридаги мисол (7416 ни 85023 дан айириш) ни мана бундай бажаради:

$$\begin{array}{|ccccc|} 8 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ & 7 & 4 & 1 & 6 \\ \hline & 7 & \frac{8}{7} & \frac{1}{0} & 7 \\ \hline \end{array}$$

Ҳосил
77607

Коший берилган сонларни юқоридагича ёзмасдан уларнинг ўринларини алмаштириб ёзади. Айиришни юқоридагидек бажаради. Масалан, 7026 ни 985792 дан айиришда уларни қуйидагича жойлаштиради:

айрилувчи	7026
камаювчи	985792
айирма	978766

Ҳозирги кўринишдаги қўшиш ва айириш усули ҳиндларники экани, улар қўшиш ва айиришни чапдан ўнгга йўналишида бажарганликлари, натижани эса берилган сонларнинг тагига ёзмасдан, уларнинг устига ёзганликлари арифметика тарихидан маълум. Ҳиндларнинг ўнли позицион саноқ системасини тарғиб қилувчи Муҳаммад Хоразмий арифметик асарида ҳиндларнинг қўшиш ва айириш усулини баён этади, бу усул араблардан Европага тарқалади. И. Я. Депман XIII асрнинг ўрталарида яшаган парижлик математик ва астроном Сакробоско ўз қўлланмасида „ўнгдан чапга қараб қўшиш ва айириш“ ни киритганлигини, XV асрдан бошлаб эса қўшиш ва айиришни бажариш юқоридаги усулдан фарқ қилмаганлигини уқтиради*.

Насириддин Тусий эса фақат чапдан ўнгга қараб қўшиш ва айиришнигина эмас, балки ўнгдан чапга қараб қўшиш ва айиришни ҳам тўлиқ баён этади. Тусий ва Нишопурийлар кўрсатган ўнгдан бошлаб қўшиш (агар қўшилувчилар тагига тўғри чизиқ чизилмаганлигини ҳисобга олинмаса) ва айириш (айирманинг камаювчи устига ёзилиши ҳисобга олинмаса) юқоридаги қўшиш ва айириш усулидан фарқ қилмайди. Коший эса қўшиш ва айиришнинг мазкур усулини баён этади.

---

* И. Я. Депман. История арифметики, 218—219- бет.

Демак, Тусий, Нишопурий ва Кошийлар қўшиш ва айириш усуллари ичида мазкур усул содда ва қулай эканлигини билганлар ва уни амалий машғулотларга қўллашни тавсия қилганлар. Улар қўшиш ва айириш амалларини ҳеч қандай белгисиз сўз билан тушунтирганлар.

Мадрасада қўшиш ва айириш амалларини бажариш ҳозирги усулда учратилади. Сўнгра турлича кўринишдаги усуллар билан машқ қилинади. Бундан ташқари амалларга белгилар киритилади, яъни қўшиш („жамъ“), айириш („тафриқ“) сўзларининг (араб алифбесидаги) бош ҳарфлари билан белгиланиб, ҳозиргидек йиғинди ва айирма шу белгилар тагига ёзилади. Масалан, юқорида келтиралган мисол ушбу кўринишда ечилади:

$$\begin{array}{r} 9867 \\ +\,125403 \\ \hline 135270 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85023 \\ -\,7416 \\ \hline 77607 \end{array}$$

Мадрасадаги дарслик ва машқ дафтарларида арифметик амалларни қандай ўрганиш лозимлиги ҳам кўрсатилади, яъни талабаларнинг яхши ўзлаштиришини ҳисобга олиб, биринчи навбатда муфрадни* муфрадга қўшиш ва айириш мисолларида тушунтирилади. Сўнгра муфрадни мураккабга ва мураккабни мураккабга қўшиш ва айириш усули берилади. Қушиш ва айириш амалларини ҳозирдаги усул буйича бажариш курсатилгандан сўнг, машқ тариқасида чапдан қўшиш ва айириш ҳамда унинг тескариси, жадвалда қўшиш ва айириш хам ўргатилади. Бундан ташқари, иккилантириш, яримлатиш, қўшиш ва айириш амалларини ҳамда абжад ҳисобини** пухта ўзлаштириш учун шу амаллар билан биргаликда мисоллар ишлатилади. Бу мисоллар мадрасада жами бул-бул, жами кавкаб, жами худ-худ ва жами тўти номи „билан юритилган. Масалан, абжад ҳисобида „бул“ 32 жами бул-бул“ 32 ни 32га қўшиш демакдир. Шу ном билан 32 ни 32 га қўшиб, йиғиндини иккилантириб, яна ўзига қўшилади, йиғиндисини иккилантириб, ўзи-

---

* Муфрадга бир хонали ёки биргина рақамдан бошланиб, бир ва бир нечаноллардан иборат бўлган сонлар киритилади

** С. А. Аҳмедов. Ўрта Осиёда математика ўқитиш тарихидан. „Ўқитувчи“ нашриёти, Т., 1977, 83-84-бетлар.

га қўшиб бориш тартиби маълум бир сонга етгач тўхтатилиб, бунинг тескариси айириш ёки учга булиш ва яримлатиш билан „бул-бул чиқарилади. Бу айтилганлар ҳарфий белгилар киритиш билан ечилса, у ушбу кўринишда булади:

$$
\begin{array}{r}
32\\
+\,32\\
\hline
64\\
+\,128\\
\hline
192\\
+\,384\\
\hline
576\\
+\,1152\\
\hline
1728\\
576\\
192\\
64\\
32
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a\\
+\,a\\
\hline
2a\\
+\,4a\\
\hline
6a\\
+\,12a\\
\hline
18a\\
+\,36a\\
\hline
54a:3=\\
18a:3=\\
6a:3=\\
2a:2=\\
=a
\end{array}
$$

Аслида „жами бул-бул" мана бундай ёзилади:

$$
\begin{array}{r}
32\\
+\,32\\
\hline
64\\
+\,128\\
\hline
192\\
+\,384\\
\hline
576\\
+\,1152\\
\hline
1728\\
-\,576\\
\hline
384\\
-\,192\\
\hline
192\\
-\,128\\
\hline
64\\
-\,32\\
\hline
32
\end{array}
$$

4-§. Кўпайтириш амали ва унинг бажарилиш усуллари

Ўрта Осиё математиклари, масалан, Хоразмий, Тусий, Нишопурий, Коший, Али Қубовий ва бошқалар кўпайтириш амалига ташқи кўринишдан қисман фарқ қилувчи, мазмун жиҳатидан эса бир хил булган икки хил таъриф берадилар. Насириддин Тусий кўпайтириш (зарб — „уриш" маъносида) ҳамма вақт икки сон орқали бажарилишини уқтириб ва булардан бирини кўпаювчи (мазруб), иккинчисини кўпайтирувчи (мазғуб фиҳи) номи билан атаб, шундай таъриф беради: кўпайтириш бутун сонларни қўшиш амалидир, яъни кўпаювчини кўпайтувчининг бирлиги қадар (ёки аксинча) такрорлаб қўшишдир.

Тусий ўз таърифининг мазмунини тушунтириш учун бир хонали сонларни кўпайтиришга мисоллар келтиради. Масалан, 3 ни 4 га кўпайтириш—бу 3 ни 4 марта ёки 4 ни 3 марта такрорлаб қўшиш, яъни $3\cdot4=3+3+3+3=12$ ёки $3\cdot4=4+4+4=12$ эканини сўз билан тушунтиради.

Шуниси диққатга сазоворки, Ғарбий Европада Пётр Рамус ўзининг 1586 йили ёзган арифметика дарслигида кўпайтириш қўшиш амалининг хусусий ҳоли эканини айтган. Насириддин Тусий эса, юқорида келтирилган таъриф орқали кўпайтириш амалининг „коммутатив“ хоссаси, яъни кўпайтувчиларнинг ўринлари алмаштирилса, кўпайтма (ҳосили зарб) ўзгармаслигини кўрсатиш билан кўпайтириш қўшиш амалининг хусусий ҳоли эканини ойдинлаштириб беради. Ўрта Осиё математикларининг кўпчилиги кўпайтиришнинг „умумий таърифи“ номи билан кўпайтириш амалига шундай таъриф берадилар: кўпайтириш амали ёрдамида топилган кўпайтманинг кўпайтувчилардан бирига нисбати, иккинчисининг бирга нисбати (ёки бунинг тескариси) кабидир. Агар кўпайтувчилар „a“ ва „b“ билан белгиланса, юқорида келтирилган таърифни қуйидаги формула кўринишида ёзиш мумкин: $a\times b=ab$, таърифга асосан

$$\begin{array}{l} ab:a=b:1 \\ ab:b=a:1 \end{array} \quad \text{ёки} \quad \begin{array}{l} a:ab=1:b \\ b:ab=1:a \end{array}$$

бўлади. Масалан, $3\times4=12$ таърифга асосан

$$\begin{array}{l} 12:3=4:1 \\ 12:4=3:1 \end{array} \quad \text{ёки} \quad \begin{array}{l} 3:12=1:4 \\ 4:12=1:3 \end{array} \quad \text{бўлади.}$$

Умумий таъриф фақат бутун сонлар учун (тўғри) бўлмасдан, уни каср ва иррационал сонларга ҳам татбиқ қилиш мумкин. Шу сабабли бу ҳозирги кўпайтириш амалига берилган таърифга қараганда умумий характерга эга.

Кўпайтириш амалига таъриф бергандан сўнг, кўпайтириш амалини ўрганиш методи баён этилади. Кўпайтиришни ўрганиш методи сонларнинг тузилишига қараб икки босқичга, яъни бир хонали сонларни бир хонали сонларга (зарби муфрад дар муфрад) ва кўп хонали сонни кўп хонали сонларга (зарби мураккаб дар мураккаб) кўпайтиришга бўлинади. Биринчи босқичда бир хонали сонларни бир хонали сонларга кўпайтириш жадвали ва оғзаки ҳисоблаш элементлари кўрсатилади. Насириддин Тусий биринчи босқични баён этишдан аввал ҳар қандай сонни бирга (ёки аксинча) кўпайтирилса, шу соннинг ўзи келиб чиқиши ва нолни қандай сонга (ёки аксинча) кўпайтирилса ноль ҳосил бўлишини алоҳида уқтириб ўтади. Сўнгра у юқорида баён қилинган амаллар (иккилантириш, яримлатиш, қўшиш ва айириш) ёрдамида бир хонали сонни бир хонали сонга кўпайтиришни тушунтиради. Масалан: 1) 7 ни 2 га кўпайтириш учун 7 ни иккилантириш керак, яъни $7 \cdot 2 = 7 + 7 = 14$; 2) 7 ни 3 га кўпайтириш учун 7 ни иккилантириш натижасига ўзи (7) ни қўшиш керак, яъни $7 \cdot 3 = 7 \cdot 2 + 7 = 21$; 3) 7 ни 4 га кўпайтириш учун 7 ни икки марта иккилантириш керак, яъни $7 \times 4 = (7 \cdot 2) \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28$; 4) ўндан кичик сонни 10 га ёки 10 ни шу сонга кўпайтиришда кўпайтма шу сон қадар ўнликлардан иборат бўлади, яъни $7 \cdot 10 = 70$ ёки $10 \cdot 7 = 70$; 5) ўндан кичик сонни 5 га кўпайтириш учун шу сонни 10 га кўпайтириб, яримлатиш керак, яъни $7 \cdot 5 = (7 \cdot 10) : 2 = 70 : 2 = 35$; 6) кўпайтувчилардан бири 5 дан кичик ($x < 5$) ва иккинчиси 5 дан катта, лекин 10 дан кичик ($5 < y < 10$) бўлганда бу сонларни кўпайтириш $[(x + y) - 5] \cdot 5 - (5 - x)(y - 5) = xy$ формула асосида оғзаки бажарилади. Масалан, 4 ни 8 га кўпайтириш қуйидагича бажарилади: 1) $4 + 8 = 12$; 2) $12 - 5 = 7$; 3) $7 \cdot 5 = 35$; 4) $5 - 4 = 1$; 5) $8 - 5 = 3$; 6) $1 \cdot 3 = 3$; 7) $35 - 3 = 32$, демак, $4 \cdot 8 = 32$; 7) Кўпайтувчиларнинг иккаласи ҳам 5 дан катта, лекин 10 дан кичик ($5 < x < 10$ ва $5 < v < 10$) бўлса, кўпайтириш $[(y - 5) + (x - 5)] \cdot 10 + (10 - x) \cdot (10 - y) = xy$ формула асосида бажарилади. Масалан, 7 ни 8 га кўпайтириш қуйидагича бажарилади:

1) $8 - 5 = 3$; 2) $7 - 5 = 2$; 3) $3 + 2 = 5$; 4) $5 \cdot 10 = 50$; 5) $10 - 8 = 2$; 6) $10 - 7 = 3$; 7) $3 \cdot 2 = 6$; 8) $50 + 6 = 56$, демак, $7 \cdot 8 = 56$.

Юқорида кўрсатилган кўпайтириш йўллари содда бўлмаса ҳам, улар бу усулда амаллар орасидаги муносабатни ва оғзаки ҳисоблаш элементларини кўрсатишни кўзда тутадилар. Кўп хонали сонларни кўпайтиришда, бир хонали сонларни кўпайтириш жадвали алоҳида аҳамиятга эга эканлиги уқтирилиб, квадрат шаклдаги кўпайтириш жадвали берилади:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ўрта аср Шарқ арифметикасида кўпайтириш амали қўшиш ва айириш амаллари каби асосий амал ҳисобланиб, бу амални бажаришнинг турлича усуллари бошқа амалларга нисбатан жуда кўпдир. Кўпайтиришнинг ҳозирги кўпайтириш усулига яқин усулини қадимги ҳиндлар яратганлар. Улар кўпайтиришни берилган сонларнинг юқори хонасидан бошлаб, оралиқдаги кўпайтириш натижалари (хусусий кўпайтмалар) ни ёзмасдан, оғзаки ҳисоблаш билан кўпаювчининг рақамларини „ўчириб“ ўрнига бирданига кўпайтмани ёзганлар. Муҳаммад Хоразмий арифметик асарида, ҳиндларнинг кўпайтириш усулини методик томондан тушунарли қилиб беради, яъни ҳар бир хусусий кўпайтмани кўпаювчининг рақамларини „ўчириб“ ёзади.

Насавий ва Насириддин Тусийлар кўп хонали сонни кўп хонали сонга „маълум усул“ ёки „машҳур усул“

номи билан Муҳаммад Хоразмий* йўлида кўпайтиришни баён этадилар.

Тусий „машҳур усул“ да берилган сонларни қайси тартибда ёзишни, кўпайтиришни қайси хонадан бошлаб бажаришни, ҳар бир хусусий кўпайтмаларни жойлаштириш ва қўшиб бориш йўлларини умумий кўринишда тўлиқ баён этади ва шу йўл бўйича 2076 ни 503 га кўпайтиришни тушунтиради. У амални бажариш учун кўпаювчининг юқори хонаси тагига кўпайтирувчининг бирлигини $\begin{matrix}2076\\503\end{matrix}$ кўринишда ёзади. Кўпайтириш тартибида эса берилган сонларни юқори хонасидан бошлаб кўпаювчининг минглар хонасидаги иккига кўпайтирилади ва ҳар бир кўпайтманинг рақамлари кўпайтувчининг чап қисмига қуйидагича ёзилади:

$$\begin{matrix}10060\ 76\\503\end{matrix}$$

Сўнгра кўпайтувчининг рақамлари икки хона (2 дан кейин рақам бўлмагани учун икки хона рақам бўлганда бир хона) ўнгга сурилади ва 503 юқори хонасидан бошлаб 7 га кетма-кет кўпайтирилади, ҳар бир кўпайтмага тегишли хонада турган биринчи хусусий кўпайтма 10060 нинг рақамлари қуйидаги тартибда қўшилади:

$$\begin{matrix}1\,0\,0\,6\,0\ 7\,6\\5\,0\ 3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1\,0\,4\,1\,0\,7\,6\\5\,0\,3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1\,0\,4\,1\,2\,1\,6\\5\,0\,3\end{matrix}$$

Охирида кўпайтувчининг рақамларини бир хона ўнгга суриб, 503 ни 6 га юқоридаги тартибда кўпайтириб, 104121 нинг рақамларига қўшилса, у ушбу кўринишни олади:

$$\begin{matrix}1\,0\,4\,1\,2\,1\,6\\5\,0\,3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1\,0\,4\,4\,2\ 1\,6\\5\ 0\,3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1\,0\,4\,4\,2\,2\,8\\5\,0\ 3\end{matrix}$$

Демак, $2076 \times 503 = 1044228$.

Бу мисолни ечиш босқичидаги хусусий кўпайтмаларни ёзиш шаклига диққат қилинса, ҳар бир хусусий кўпайтмани қўшиб бориш оғзаки бажарилиб, йиғиндилар эса олдинги рақамларни ўчириб (тахтада) унинг ўрнига ёзилиши кўринади. Шу тартибда хусусий кўпайтмаларни қўшишни оғзаки бажариб, ўчириб ёзиш билан бўлиш ва илдиз чиқариш амаллари ҳам бажарилади. Амалларнинг шу тартибда бажарилиши, Тусийнинг арифметик асарига қўйган номи (жамъул ҳисоб бит-тах-

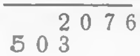
---

* С. А. Аҳмедов. Ўрта Осиёда математика ўқитиш тарихидан. „Ўқитувчи“ нашриёти, Т., 1977 й, 12- бет.

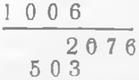
ти ва ат-туроб) нинг маъносини ифодалаб беради, яъни тахта билан тупроқ воситасида тўпланган ҳисоб эканлигини тасдиқлайди. Шу даврдаги арифметик асарларнинг кўпчилиги „ҳисоб ат-тахти ва ат-туроб“ тахтадаги ҳисоблашлар, „китоби ат-тахти-фи ҳисоби ал-ҳиндий „Тахтадаги ҳиндларнинг ҳисоби ҳақидаги китоб“ номлари билан ёзилган.

Кейинги даврларда мадрасада ўқитилган дарсликларда кўпайтириш Хоразмий, Насавий ва Тусийлар усулида ҳисоблаш тахтасида бажарилиб, натижа кўпаювчининг рақамларини ўчириб ўрнига ёзилмасдан, оралиқдаги ҳисоблашлар қоғозда кўрсатилади. Мадрасада юқорида кўрилган кўпайтиришнинг „машҳур усули“нинг такомиллаштирилган (оралиқдаги ҳисоблашлар қоғозга кўчирилган) кўриниши кўпайтувчини суриш билан кўпайтириш („зарби муҳозоти мустақим“) номи билан айтилади. Бу усулда 2076 ни 503 га кўпайтириш қуйидаги босқичларда бажарилади:

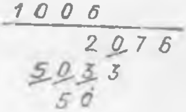
1) Берилган сонлар Хоразмий, Насавий ва Тусийлар каби жойлаштирилиб, бу сонлар устига тўғрич чизиқ чизилади:



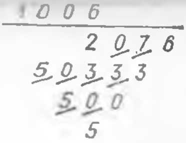
2) 503 сони юқори хонасидан бошлаб кўпаювчининг юқори хонасидаги иккига кўпайтирилади ва биринчи хусусий кўпайтма 1006 чизиқ устига ёзилади:



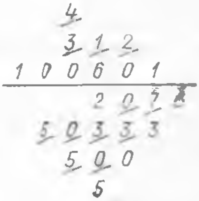
3) Кўпайтувчининг рақамлари бир хона ўнгга қия чизиқ тагига сурилади:



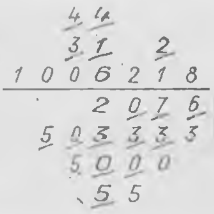
4) 503 кўпаювчининг юзлар хонасидаги нолга кўпайтирилиб 1006 га қўшилса, йиғинди 10060 бўлади. Сўнг кўпайтувчининг рақамларини яна бир хона ўнгга қия чизиқ тагига сурилади.



5) 503 ни 7 га кўпайтирилиб, учинчи хусусий кўпайтма 3521, юқори хонасидан бошлаб, 10060 га оғзаки қўшилади ва йиғинди (104121) нинг рақамлари қия чизиқ устига ёзилади:

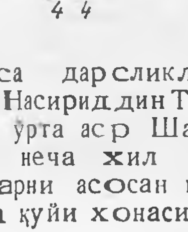


6) Охирида 503 нинг рақамлари бир хона ўнга қия чизиқ тагига сурилиб, 503 ни 6 га кўпайтирилади, тўртинчи хусусий кўпайтма 3018 ни 104121 га қўшилади, йиғинди 1044228 нинг рақамлари қия чизиқ устига ёзилади:



Кўпайтма чапдан устига қия чизиқ чизилмаган ва қия чизиқ устидаги рақамлардан ҳосил бўлган сондан иборат, яъни 2076 × 503 = 1044228. Демак, кўпайтувчини суриш билан бажариладиган кўпайтириш босқичида кўпайтувчининг ҳар бир рақами ўзидан қуйидаги қўшни хонадаги рақам тагига чизилган қия чизиқ устига кўчириб борилади, хусусий кўпайтмаларнинг рақамларини, сурилган кўпайтувчининг бирликлари тўғрисидан бошлаб, кўпаювчи устига чизилган тўғри чизиқ устида қўшиб борилади (қўшиш оғзаки бажарилиб, йиғинди қия чизиқ устига ёзилади). Хусусий кўпайтмалар рақамларининг охирги йиғиндисидан ҳосил бўлган (ярим айлана шаклда жойлашади) сон изланган кўпайтма бўлади.

Бу кўринишда кўпайтиришнинг тескариси „кўпаювчини суриш билан кўпайтиришнинг тескариси“ („зарби муҳозоти мустақим маъкус“) номи билан аталади, чунки кўпайтувчилар билан хусусий кўпайтмаларнинг йиғиндиси горизонтал тўғри чизиққа нисбатан тескари жойлаштирилади. Юқоридаги мисол бундай бажарилади:



кўпайтма 1044228

Мадраса дарсликларида Муҳаммад Хоразмий, Насавий, Насириддин Тусий, Карҳий, Ғиёсиддин Коший ва бошқа ўрта аср Шарқ математикларининг асарларидаги бир неча хил кўпайтириш усуллари берилади. Бу усулларни асосан иккига, яъни кўпайтувчиларнинг юқори ва қуйи хонасидан бошлаб кўпайтиришга ажратиш мумкин. Ҳар бир усул ўз навбатида, кўпайтувчиларнинг рақамларига қараб жойланишига ва уларнинг рақамларини суриб ёки сурмасдан кўпайтирилишига, хусусий кўпайтмаларни ёзиб ёки ёзмасдан оғзаки қўшилишига қараб бир неча кўринишда бўлади. Мадрасада ўқитилган турли кўринишдаги кўпайтириш XVIII ва XIX асрларда ёзилган машқ дафтарларида берилган бўлса ҳам, бу усулларнинг муаллифлари ва асарларнинг номлари кўрсатилмаган. Ҳозирча маълум бўлган ўрта аср Шарқ математикларининг арифметик асарлари ичида мадрасада ўқитилган кўпайтириш усулларини ўз ичига олган асар Тусийнинг арифметик асаридир. Шуни эътиборга олиб, Тусийда ҳозирги кўпайтириш усули қандай кўринишда берилганлиги ва мадрасада унинг усуллари қандай такомиллаштирилганлигини кўрсатиб ўтишни лозим топдик. Тусий кўпайтиришнинг „машҳур усули“ ни кўрсатгандан сўнг, яна тўққиз хил кўринишдаги кўпайтиришни беради. У кўпайтиришнинг мазмуни ва шаклига қараб бу усулларни турлича номлар билан атайди. Масалан: 1. Кўпайтиришнинг машҳур (ёки маълум) усули. 2. „Тиккалаб кўпайтириш“ („Аз-зарб ал-қойим“). 3. „Жевак шаклида кўпайтириш“ („Аз-зарб биттувли тавшиҳ“). 4. „Ноллар билан кўпайтириш“ („Аз-зарб биласфор“). 5. „Жадвалда кўпайтириш“ („Аз-зарби жудул“). 6. „Равоқ шаклида кўпайтириш“ („Аз-зарби муваррақ“). 7. „Кўпайтувчиларни кўчириш билан кўпайтириш“ („Зарбул муҳозот“). 8. „Бир-бирига тўғрилаб кўпайтириш“ („Аз-зарбул нақил“). 9. „Бир-бирига таққослаб кўпайтириш“ („Аз-зарбул тақобил“). 10. „Кўпайтувчиларга ажратиб кўпайтириш“ („Аз-зарбул қисмат“).

Кўпайтиришнинг бошқа усуллари ҳам машҳур усулга ўхшаш ҳеч қандай белгисиз, сўз билан бажарилади ва ҳар бир босқичдаги хусусий кўпайтмаларнинг йиғиндиси олдинги рақамларини (кўпаювчи ва хусусий капайтмани) ўчириб ўрнига ёзилади.

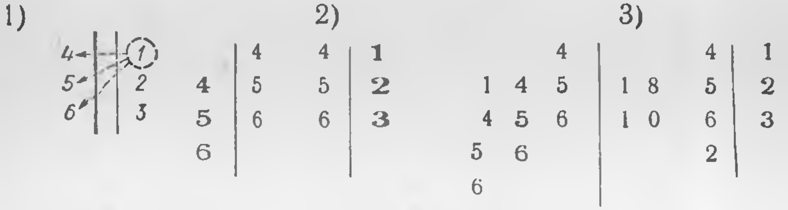
Тусий биринчи навбатда кўпайтиришнинг ҳар бир усулини умумий кўринишда бажаришни, яъни кўпайтувчиларни қандай тартибда ёзишни, кўпайтиришни қайси хонадан бошлашни, кўпаювчи ёки кўпайтувчининг рақамларини суриш йўлларини тўлиқ баён этгандан сўнг, конкрет мисол кўрсатади. Ўқувчиларга тушунарли бўлиши учун айрим кўпайтириш усулини мисолда кўрсатишни лозим топдик.

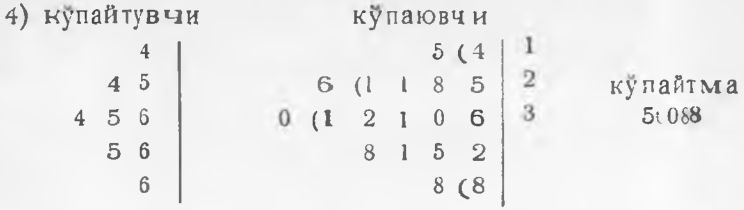
Тусийнинг „Тиккалаб кўпайтириш“ („аз-зарб ал-қойим“) усули машҳур усулни 90° бурчак остида чапга буриб, берилган сонларнинг ўринларини алмаштириш натижасидан иборат.

Тусий „жевак шаклида кўпайтириш“ („аз-зарб бит-тувли тавшиҳ“) номли усулда хусусий кўпайтманинг кўпаювчи ёки кўпайтувчининг рақамларини ўчириб ўрнига ёзмасдан, уларни қоғозда тўлиқ ёзиб қўшиш натижасида йиғиндининг рақами жевак шаклини беришини кўзда тутади. Кўпайтиришнинг бу кўринишида кўпаювчи ўнгга ва кўпайтувчи чапга маълум оралиқда юқори хонасидан бошлаб, вертикал чизиқ бўйлаб, кўпайтмалар эса улар орасига ёзилади. Амал эса тикка турган шаклда кўпайтиришнинг биринчи ва иккинчи кўриниши бўйича юқори хонадан бошлаб бажарилади.

Кўпайтириш босқичида, кўпайтувчининг рақамлари бир хона пастга суриб борилади. Юқоридан бошлаб охирги рақамлар йиғиндисидан ҳосил бўлган сон юқоридан пастга қараб изланган кўпайтма бўлади.

Масалан, 123 ни 456 га кўпайтириш шундай бажарилади:





Насириддин Тусий бу хилдаги кўпайтиришда кўпайтувчиларнинг бирлар хонасидан бошлаб кўпайтириш мумкин эканлигини, бунда ҳар бир хусусий кўпайтма жойланиш тартиби билан фарқ қилишини айтган бўлса-да, мисол кўрсатмаган. Агар Тусий кўрсатиши бўйича кўпайтувчилар бирлар хонасидан бошлаб кўпайтирилса, кўпайтириш ҳозирги усулдан фақат ташқи кўриниши билан фарқ қилади.

Мадрасада, жевак шаклида кўпайтириш, Тусий кўрсатиши бўйича, кўпайтувчиларни бирлар хонасидан бошлаб кўпайтирилади. Кўпайгириш ҳозирги усул бўйича, аввал дилдаги ўнликларни ёзиб, сўнгра ёзмасдан бажарилади. Хусусий кўпайтмалар рақамларининг йиғиндиси кичик қавс ташқарисига ёзилади. Охирги йиғинди изланган кўпайтманинг рақамлари бўлади, у юқоридан бошлаб қизил сиёҳда ёзилади. Кўпайтириш босқичида кўпаювчи кўчирилмайди. Масалан, 2376 ни 523 га кўпайтиришнинг ҳар бир босқичи ҳозирги усул билан бирга ишланса, қуйидагича бўлади:

1)

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 7 & \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \times & 2 & 3 & 7 & 6 \\ & & 5 & 2 & 3 \\ \hline & 7 & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r|rr|r} & & 4 & \\ 2 & 7 & 7 & \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & & 8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} \times & & 2 & 3 & 7 & 6 \\ & & & 5 & 2 & 3 \\ \hline & & 7 & 1 & 2 & 8 \\ & 4 & 7 & 5 & 2 & \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & & & & 1 & \\ & & 2 & & (1 & \\ & & 4 & (8 & 4 & \\ 2 & 2 & (8 & 7 & 7 & \\ 3 & 6 & (0 & 5 & 1 & 5 \\ 7 & & 4 & (2 & 2 & 2 \\ 6 & & & & 8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \times & & & & 2 & 3 & 7 & 6 \\ & & & & & 5 & 2 & 3 \\ \hline & & & & 7 & 1 & 2 & 8 \\ & & & 4 & 7 & 5 & 2 & \\ & 1 & 1 & 8 & 8 & 0 & & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 8 \end{array}$$

Жамшид Коший амални ҳозирги усул бўйича бажаради. Фақат у янги ўрганувчиларга тушунарли бўлиши учун дилдаги ўнликни ёзиб, сўнгра ҳамма хусусий кўпайтмаларни қўшади. Юқоридаги мисол Коший усулида қуйидагича ёзилади:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \times & & & & 2 & 3 & 7 & 6 \\ & & & & & 5 & 2 & 3 \\ \hline & & & & & 2 & 1 & 8 \\ & & & & 6 & 9 & 1 & \\ \hline & & & & 1 & 1 & 2 & \\ & & & 4 & 6 & 4 & & \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & & \\ & & 0 & 5 & 5 & & & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 8 \end{array}$$

Агар ҳар бир хусусий кўпайтманинг рақамлари алоҳида қўшилса, ҳозирги кўпайтириш усули ҳосил бўлади. Демак, бу мадрасада ўргатилган ва ҳозир қўлланилаётган усулнинг асосидир. Коший бу усулнинг бошқа кўпайтириш усулларига нисбатан содда эканлигини ва уни ўзи кашф қилганлигини айтади.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда, ҳозирги кўпайтириш усули бошқа кўпайтириш усулларига нисбатан содда эканлиги назарда тутилиб, у кўпайтиришнинг асосий ёки содда усули номи билан биринчи навбатда ўқитилади, сўнгра бошқа усулларга ўтилади. Дарсликлардан ўрта аср Шарқ математикларининг турли кўринишдаги кўпайтириш усуллари бир неча босқичдан сўнг ҳозирги кўпайтириш усулига келганлигини кўриш мумкин.

Масалан, жевак шаклидаги кўпайтириш бир неча кўринишлардан сўнг ҳозирги кўпайтириш усулига келади.

Биринчи кўринишда кўпайтирувчиларни вертикал чизиқ бўйича ўнгга ёзиб, хусусий кўпайтмалар ва улар рақамларининг йиғиндисини чап томонга узун чизиқ билан ажратиб ёзилади, бу ҳолда юқоридаги мисол (2376×523) шундай кўринишда бўлади:

кўпайтма	хусусий кўпайтмалар			кўпаювчи	кўпайтувчи
1	1				
2	1				
4	8	4			
2	8	7	7	2	
6	0	5	1	3	5
4		2	2	7	2
8			8	6	3

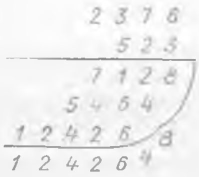
Иккинчи кўринишда кўпайтириш ҳозирги усулдан фақат кўпайтувчиларнинг жойлашиши билан фарқ қилади, яъни кўпайтувчилар аввалгидек, вертикал чизиқлар бўйича жойлаштирилади, хусусий кўпайтмалар ҳозирги усул бўйича вертикал чизиқлар орасига ёзилади. Шу йўлда юқоридаги мисол (2376×523) қуйидагича бўлади:

кўпаювчи	хусусий кўпайтмалар							кўпайтувчи
2	1	1	8	8	0			
3			4	7	5	2		5
7				7	1	2	8	2
6	1	2	4	2	6	4	8	3

```
охирги куриниш |         2 3 7 6 |
               |           5 2 3 |
               |         ------- |
               |         7 1 2 8 |
               |       4 7 5 2   |
               |   1 1 8 8 0     |
               |   ------------- |
               |   1 2 4 2 6 4 8 |
```

Бунда вертикал чизиқ ва хусусий кўпайтмаларни ичига олган чизиқлар чизилмайди.

Мадрасада оғзаки ҳисоблаш савиясини ўстириш ва қоғозни тежаш мақсадида, „Кўпайтириш босқичида қўшиб бориш“ („зарби маъдал жамъ“) номи билан ҳозирги кўпайтиришнинг содда кўриниши, яъни хусусий кўпайтмаларни оғзаки қўшиб бориш билан кўпайтмани топиш берилади. Масалан, 2376 ни 523 га кўпайтиришда биринчи хусусий кўпайтмага иккинчи хусусий кўпайтманинг рақамларини кетма-кет оғзаки қўшиб, натижа ёзилади, бунга учинчи хусусий кўпайтманинг рақамлари оғзаки қўшилса, эгри чизиқ тагидаги охирги йиғинди — изланган кўпайтма ҳосил бўлади:



Ҳақиқатан, агар оғзаки қўшиш техникаси яхши ўзлаштирилса, бу усул ҳозирги усулдан соддароқ бўлади.

Демак, Тусийнинг „жевак шаклида кўпайтириш“ усули маълум тараққиёт давридан кейин кўпайтувчиларнинг юқори хонасидан бошлаб кўпайтиришга ва бундан аста-секин ҳозирги усулга ўтади.

Тусийнинг „ноллар билан кўпайтириш“ („аз-зарб бил-асфср“) усули ҳозирги кўпайтириш усулидан фақат хусусий кўпайтмаларнинг ёзилиши билан фарқ қилади. Ҳозирги кўпайтиришда хусусий кўпайтмалар берилган сонлар тагига ёзилса, унда чап томонига қўйилган ноллар ўрнига ёзилади. Тусий нолларни кўпайтувчиларнинг рақамлари сонидан битта кам қўйишни тавсия қилади. Кўпайтириш босқичида хусусий кўпайтмалар кетма-кет оғзаки қўшилиб, натижалар олдинги рақамни ўчириб, ўрнига ёзилади. Масалан, 123 ни 456 га кўпайтириш қуйидаги босқичларда бажарилади:

```
1) 00000123     2) 01368     3) 10188     4) 56088
        456          912         456
```

Тусийнинг кўрсатишича ҳар бир босқичдаги хусусий кўпайтмаларни оғзаки қўшмасдан уларни ёзиб қўшилса, у ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{array}{r} \underline{01368} \\ 912 \\ \underline{456} \\ 56088 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 123 \\ 456 \end{array}$$

Демак, Тусий оғзаки ҳисоблашни тўлиқ қўллаш билан ҳозирги кўпайтириш усулининг содда (агар хусусий кўпайтмаларнинг ёзилиши эътиборга олинмаса) кўринишини беради.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда бу хилдаги кўпайтириш усулига қисман ўзгариш киритилади, яъни чапга қўйилган ноллар устига хусусий кўпайтмалар ёзилиб, уларнинг йиғиндиси ноллар тагига ёзилади. Масалан, юқоридаги мисол ушбу кўринишни олади:

$$\begin{array}{r} 456 \\ 192 \\ 1368 \\ 00000 \\ 56088 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 123 \\ 456 \end{array}$$

Тусий кўрсатган олдинги 4 хил кўпайтириш усулининг биринчи ва иккинчисининг ҳозирги кўпайтириш усулидан фарқи шундаки, бу усулларда амал юқори хонадан бошлаб бажарилиб, берилган сонлар ва кўпайтма махсус кўринишда ёзилади. Амални бажаришда оғзаки ҳисоблашлар тўлиқ қўлланилади. Учинчи ва тўртинчи хил кўпайтириш ҳозирги кўпайтириш усули бўйича бажарилиб, фақат берилган сонлар ва хусусий кўпайтмалар ёзилиш тартиби билан фарқ қилади.

Тусий „жадвалда кўпайтириш“ („аз-зарби жадвал“) усулида тўғри тўртбурчакни квадратларга ажратиб, ўнгдан битта квадрат ташлаб, кўпайтувчини юқоридан энига, кўпаювчини эса ўнгдан бўйига ёзади. Амал ҳозирги усулда кўпайтувчиларнинг бирлар хонасидан бошлаб бажарилади. Ҳар бир хусусий кўпайтманинг рақамлари тенг хоналари бўйича ёзилмасдан, ўнгдан бошлаб горизонтал чизиқ бўйича бирининг тагига иккинчиси ёзилади. Тусий изланган кўпайтманинг рақамларини ҳосил қилишда тенг хоналари бўйича қўшиш лозим эканлигини уқтиради. Агар бу эътиборга олинса, изланган кўпайтма ўнгдан бошлаб квадратларнинг диагонали бўйича хусусий кўпайтмалар рақамларининг йиғиндисидан ҳосил бўлади. Бу кўпайтманинг рақамлари эса жадвал тагига ўнгдан бошлаб ёзилади.

Масалан, 4312 ни 567 га кўпайтириш қуйидагича бажарилади:

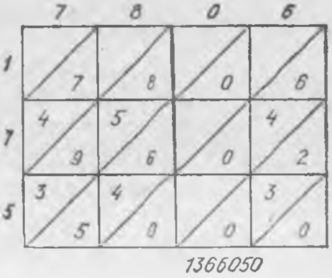
	4	3	1	2	
2	1	5	6	0	5
2	5	8	7	2	6
3	0	1	8	4	7

2444 904

Бу усул қанчалик қизиқарли бўлмасин амалий жиҳатдан ноқулайдир. Математика тарихида биз қўллайдиган ҳозирги кўпайтириш усули XVI асрда Адам Ризе томонидан биринчи марта қўлланилганлиги ва турли кўпайтириш усуллари эса Петценштейнер, Белдоман, Л. Пачиолиларнинг дарсликларида учрашлиги айтилади. Тусий эса улардан уч аср муқаддам юқорида кўрсатилган учинчи, тўртинчи ва бешинчи хил кўринишидаги кўпайтиришда ҳозирги кўпайтириш усулини кўрсатади.

Европада немис ва итальян педагоглари XVI — XVII асрларда турли геометрик (бурчак, учбурчак, ромб ва ҳоказо) шаклда кўпайтириш усулларини кўрсатган бўлсалар, Ўрта Осиё математиклари эса геометрик шаклда кўпайтириш усулларини жадвалда кўпайтириш номи билан берадилар.

Нишопурий ва Кошийлар „Тўр ичида кўпайтириш“ номи билан Тусийнинг „жадвалда кўпайтириш“ усулига қисман ўзгартиш киритадилар, яъни жадвалдаги квадратларни диагонал билан юқори ва қуйи бурчакли учбурчакларга бўладилар. Жадвалга кўпайтирувчи ҳамда кўпаювчи юқори хонасидан бошлаб тўғри тўртбурчакнинг чапдан энига ва бўйига ёзилади. Амал кўпайтувчиларнинг юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб бажарилади. Хусусий кўпайтмаларнинг бирликлари қуйи, ўнликлари юқори учбурчакларга ёзилади. Кўпайтманинг рақамлари тўртбурчакнинг пастки ўнг учидан, диагонал бўйича хусусий кўпайтмалар рақамларини қўшиш билан топилади. Бу рақамлар тўртбурчак тагига ўнгдан бошлаб ёзилади.



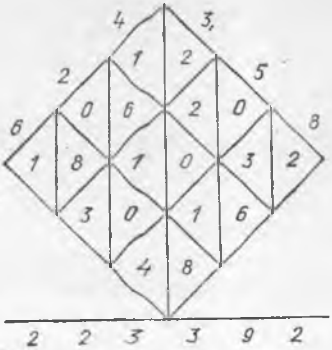
1-шакл.

Масалан, 7806 ни 175 га кўпайтириш 1-шаклдаги каби бажарилади.

Амални бажаришда биринчи навбатда кўпаювчининг мингликлари (7) 175 га юқори хонасидан бошлаб кўпайтирилади. Кўпайтма (1× 7=7, 7×7=49 ва 5×7=35) лар 1 ва 7,7 ва 7,5 ва 7 ларнинг тўғрисидаги учбурчакларга ёзилади. Сўнгра 175 нинг 8 га, 0 га ва 6 га кўпайтмалари ҳам шу тартибда жойлаштирилади. Жадвалнинг пастки ўнг томонидаги квадратнинг диагонали бўйича қўшилса, изланган кўпайтма 1366050 ҳосил бўлади.

Тўр усулида кўпайтиришни XII асрда яшаган ҳинд математиги Бҳаскара кўрсатган, аммо Нишопурий ва Кошийлар бу усулнинг такомиллашган кўринишини берадилар, яъни кўпайтманинг рақамларини топишда қулай бўлишини назарда тутиб, диагоналларни тескари йўналишда чизадилар ва кўпайтмани тўртбурчак тагига ёзиб кўрсатадилар.

Коший юқоридаги тўртбурчакни ўнгга 45° буриш билан иккинчи кўринишдаги кўпайтиришни кўрсатади. Бунда диагоналлар вертикал йўналишда чизилади, хусусий кўпайтмаларнинг бирликлари ўнгдаги, ўнликлари чапдаги учбурчакка ёзилади. Ўнгдан диагонал бўйича қўшишдан ҳосил бўлган сон изланган кўпайтма бўлади.



2-шакл.

Масалан, 358 ни 624 га кўпайтириш 2-шаклдаги каби бажарилади.

Юқоридаги усулда кўпайтирувчиларни юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб кўпайтирганда ҳеч қандай фарқ бўлмаса ҳам, Коший берилган сонларни қуйи хонасидан бошлаб кўпайтиришни тавсия қилади. Чунки бу ҳолда шакл чизмасидан хусусий кўпайтмаларнинг рақамларини „ромб шаклида“ ёзиш қулай бўлиши назарда тутилади.

Масалан, юқоридаги мисолни ечишда, берилган сонларни $\genfrac{}{}{0pt}{}{358}{624}$ кўринишда ёзиб, 8 га 624 нинг бирликларидан бошлаб кўпайтирилади. Ҳосил бўлган (32, 16 ва 48) кўпайтмалар тенг хоналари бўйича (юқоридаги мисолга қаралсин) чапга қараб бир хонадан сурилиб ёзилади.

```
    3  2
 1  6
4  8
```

Сўнгра шу тартибда 624 ни 5 га ва 3 га кўпайтириб, биринчи 20, 10 ва 30 кўпайтмалардаги 20 нинг бирлар хонасидаги нолни 3 нинг устига, 2 ни унинг ўнг қисмига, қолган кўпайтмаларни эса бир хонадан суриб ёзилади.

```
      2  0
   1  0  3  2
8  0  1  6
   4  8
```

Иккинчи 12, 06 ва 18 кўпайтмалар 20 устидан олдинги тартибда ёзилса, у ушбу кўринишни олади:

```
      1  2
   0  6  2  0
1  8  1  0  3  2
   3  0  1  6
      4  8
```

Рақамлари сони тенг бўлмаган сонларни кўпайтиришда, хусусий кўпайтмаларнинг рақамларини жойлаштирганда ромб шакли ҳосил булиши учун кичик соннинг юқори хонаси олдига ноль қуйилади.

Юқоридаги жадвал усулининг методик камчилиги шундаки, кўпайтиришнинг ички мазмунига эътибор бермасдан, шаклига эътибор берилади, яъни кўпроқ жадвал чизиш, берилган сонларни ўрнатиш, хусусий кўпайтмаларни ўрнига қўйиш ва уларни қандай ўқишга эътибор берилади. Шунингдек, жадвал усули каби бу усулдан ҳам амалий машғулотларда фойдаланиш ноқулай.

Тўр ичида кўпайтириш усули содда бўлмаса ҳам Жамшид Коший янги ўрганувчилар учун бу усул тушунарли деб ҳисоблайди, чунки жадвални чизиб, унга берилган сонларни ёзиш йўлини яхши билган ўқувчи, хусусий кўпайтма рақамларининг тегишли хоналар бўйича ўрнини билмаса ҳам кўпайтманинг рақамларини топа олади. Коший тўр ичида кўпайтиришнинг „Ромб усулига“ ўтиш билан ҳозирдаги кўпайтириш усулини беради. Коший бу темани илмий томондангина баён этмасдан методикасига ҳам эътибор беради.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида Тусий, Нишопурий ва Кошийларнинг жадвал билан кўпайтириш усулларининг бир неча кўриниши берилади.

Насириддин Тусийнинг 7, 8 ва 9-хил кўпайтириш усуллари юнонларнинг „Крест усули" га ва ҳиндларнинг бирданига кўпайтириш усулларига ўхшашдир. Булар ҳозирги кўпайтириш усулидан фарқ қилиши билан бирга оғзаки ҳисоблашлар, ортиқча ёзишларни талаб қилмайдиган усуллардир. Ҳозирги кўпайтириш усулида асосий эътибор берилган сонларни хоналари бўйича ёзишга ва қайси хонадан бошлаб кўпайтиришга қаратилади. Кўпайтма эса ўз-ўзидан хусусий кўпайтмаларни қўшиш билан топилади. Бу юқорида номлари курсатилган уч хил (7, 8 ва 9) кўпайтириш усулида, аксинча, амални бажариш босқичида ҳар бир хусусий кўпайтманинг хоналари бўйича қўшишга катта аҳамият берилади. Амал эса берилган сонларнинг юқори хонасидан бошлаб бажарилади, кўпайтириш босқичида берилган сонлар ва айрим кўпайтмаларнинг рақамлари сурилади.

Охирги 10- усул „Кўпайтувчиларга ажратиб кўпайтириш" („аз-зарбул қисмат") да Тусий амални мумкин қадар оғзаки ёки ярим ёзма равишда бажаришни эътиборга олиб, берилган сонларни кўпайтувчиларга ажратиб, группалаб кўпайтиришни тавсия қилади. Масалан, 15 ни 12 га кўпайтириш қуйидагича бўлади:

$$15\times12=(5\times3)\times(6\times2)=(5\times2)\times(3\times6)=10\times18=180.$$

5-§. Бўлиш амали ва унинг бажарилиш усуллари

Ўрта Осиё математиклари бўлиш амалига асосан, икки хил таъриф берадилар. Бир группа олимлар—Муҳаммад Хоразмийнинг бўлиш амалига берган таърифи асосида, „бўлиш кўпайтириш амалига ўхшаш ва унинг тескарисидир" дейишса, иккинчи бир группа олимлар — бўлиш амалига „умумий таъриф" номи билан сон тушунчасини кенгайтириш асосида таъриф беришади. Бўлиш икки сон қатнашувидан ҳосил бўлади, бу сонлардан биринчиси — бўлинувчи (мақсум), иккинчиси — бўлувчи (мақсум алайҳи) деб аталади. Бўлиш амали— бўлинувчини бўлувчи қадар камайтиришдир. Бўлувчининг ҳар бир бирлигига тегишли бўлак бўлинма (ҳорижи қисмат) дейилади. Тусий ва Нишопурийлар бўлинувчини бўлувчи қадар камайтириб бориш деганда бўлинувчи ичида бўлувчи неча марта бор эканлиги ёки бўлинувчидан бўлувчини неча марта айириш мумкин эканлигини билишдир деб уқтирадилар. Улар кўпайтириш амалида тенг сонлар қўшилса, бўлишда бунинг тескариси — айирилади, дейдилар. Шу билан юқорида айтилган бўлиш—кўпайтиришга ўхшайди ва унинг тескарисидир деган фикр тўғри эканлигини исботлайдилар.

Насавий ва Жамшид Кошийлар бутун сонларни бўлиш бўлувчининг бирликларига тегишли бўлакни аниқлаш учун бўлинувчини бўлувчининг бирликлари қадар тенг бўлакларга ажратишдир, деган таъриф берадилар. Коший тўлдириш мақсадида бўлувчининг бирликларига тегишли бўлакни бўлинма деб атайди. Масалан, 8 ни 4 га бўлиш, таъриф бўйича, 8 ни 4 нинг бирлиги қадар тенг бўлакларга ($8 = 2 + 2 + 2 + 2$) ажратишдир, 4 нинг бирлигига тегишли 2 бўлинма дейилади. Тусий, Коший, Али Қубовий, Бобокалон Муфтий, Ҳусайн Омилийлар: бўлиш шундай амалки, берилган иккита сон орқали учинчи номаълум сон — бўлинма топилади, бирнинг топилган сонга нисбати (ёки тескариси) бўлинувчига (ёки тескарисига) нисбати кабидир, деган таъриф берадилар. Бу бўлиш амалининг „умумий таърифи" номи билан аталади. Агар берилган сонларни „a" ва „b", топиладиган сонни „x" билан белгиласак, таърифни мана бундай ёзиш мумкин:

$$a : b = x \text{ бўлса, } \begin{array}{c} 1 : x = b : a \\ x : 1 = a : b \end{array} \text{ ёки } \begin{array}{c} a : x = b : 1 \\ x : a = 1 : b \end{array}$$

Масалан, $6 : 2 = 3$ бўлса, таъриф бўйича

$$\begin{array}{c} 1 : 3 = 2 : 6 \\ 3 : 1 = 6 : 2 \end{array} \text{ ёки } \begin{array}{c} 6 : 3 = 2 : 1 \\ 3 : 6 = 1 : 2 \end{array}$$

Тусий бўлишга айириш амалига асосланиб таъриф берса, Коший қўшиш амалининг хусусий кўриниши сифатида таъриф беради. Яъни бўлинувчини бўлувчининг бирликлари қадар қўшилувчиларга ажратади. У бўлувчининг бирлигига тегишли қўшилувчини бўлинма дейди.

Ҳар икки таъриф ҳам бўлиш амалининг мазмунини аниқлаб беради. Бу таърифлар фақат бутун сонлар учун тўғри бўлса, бўлишнинг умумий таърифи эса рационал ва иррационал сонлар учун ҳам тўғридир. Шу сабабли бўлишнинг умумий таърифи сон тушунчасини кенгайтириш асосида берилган таъриф дейилади.

Мадрасада бўлиш амали Муҳаммад Хоразмий, Насавий, Насириддин Тусий, Коший ва улардан кейин ўтган ўрта аср Шарқ математикларининг асарларидаги бўлишнинг юқорида кўрсатилган икки хил таърифи асосида ўқитилади. Баъзи бир дарсликларнинг муаллифлари бўлиш кўпайтириш амалининг тескариси эканлигини кўрсатиб, унинг тўғрилигини кўпайтириш билан текширишни тавсия этадилар. Шу муаллифлар бўлишга тескари амал тариқасида, ҳозирги даврдаги таърифни берадилар. Масалан, муаллифи номаълум бўлган „Ҳинд арифметикасининг баёни ҳақидаги асар“ („Рисолаи дар баёни илми ҳисоби ҳиндувоний“) номли дарсликнинг 66-бетида шундай дейилган: „бўлиш шундай амалки, унинг натижасида топилган учинчи сонни бўлувчига кўпайтирилганда бўлинувчи келиб чиқади“. Агар берилган сонларни a ва b билан белгиласак, таъриф бўйича $a:b=c$ бўлиши учун $b\cdot c=a$ бўлиши керак. Мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари бўлиш амалига турлича, лекин мазмун жиҳатдан бир хил таъриф бериш билан бирга, Тусийнинг иккинчи таърифининг умумий эканлигини тасдиқлайдилар.

Бўлиш амалига берилган таърифдан сўнг берилган сонлар тенг ёки тенг бўлмаган ҳолда, бўлинма қандай бўлиши қуйидагича тушунтирилади: агар берилган сонлар тенг бўлса, бўлиш натижасида бўлинма ҳамма вақт бирга тенг бўлади, яъни бўлинувчининг ичида бўлувчи бир марта бўлиб, шунинг билан бўлиш амали тугайди, агар бўлинувчи бўлувчидан кичик бўлса, бўлинма каср бўлади, бу ҳолда бўлинувчининг бўлаги аниқланади. Бўлинувчи бўлувчидан катта бўлган ҳол ўз навбатида иккига бўлинади: а) бўлиш натижасида топилган сон бўлувчига кўпайтирилганда бўлинувчи ҳосил бўлса, бўлиш амали тугайди, топилган сон эса бўлинма бўлади, б) топилган сон бўлувчига кўпайтирилганда бўлинувчи чиқмаса, бўлиш амали тугалланмайди, бундай бўлиш қолдиқли бўлиш дейилади. Масалан, 12 ни 5 га бўлганда бўлинма 2 ва 2 қолдиқ бўлиб қолади, бўлинувчини ҳосил қилиш учун 5 ни 2 га кўпайтириб, қолдиқ қўшилади, яъни $5\times2+2=12$. Бўлиш амалининг таърифи ва бўлинмани топиш кўрсатилгандан сўнг, бўлиш амалини ўрганиш тартиби баён этилади.

Ўрта Осиё математиклари бўлиш амали бошқа амалларга нисбатан мураккаб эканини ва бу амални ўзлаштириш учун ўтилган амалларни яхши билиш зарурлигини уқтирадилар. Шуни эътиборга олиб, улар дарслик ва илмий асарларда бўлиш амалини ўрганишни турли босқичларга бўладилар. Масалан, Тусий бўлиш амалини ўрганишни қуйидаги уч босқичга бўлади: 1) Бир хонали сонни бир хонали сонга бўлиш. 2. Кўп хонали сонни бир хонали сонга бўлиш 3. Кўп хонали сонни кўп хонали сонга бўлиш.

Тусий биринчи ва иккинчи босқични бўлишга берилган таъриф асосида тушунтиради. Учинчи босқични эса „бўлишнинг“ машҳур „усули“ номи билан Муҳаммад Хоразмий йўлида баён этади. Тусий машҳур усулда бўлиш амалини бажариш учун берилган сонларни қандай ёзишни ва бўлишни бажариш тартибини умумий кўринишда баён этгандан кейин мисол кўрсатади. Масалан, у 470693 ни 2058 га бўлиш учун берилган сонларни юқори хонасидан бошлаб, бўлинувчининг тагига бўлувчини ёзади. Биринчи бўлинувчи 4706 ни 2058 га бўлиб, бўлинманинг биринчи рақами 2 ни топади, бу топилган 2 ни бўлувчи бирликлари тўғрисига, бўлинувчининг устига ёзади: $\begin{array}{cccccc} & & & 2 & & \\ 4 & 7 & 0 & \dot{6} & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 8 & & \end{array}$. Сўнгра топилган 2 ни бўлувчининг юқори хонасидан бошлаб, унинг рақамлари 2, 0, 5 ва 8 га алоҳида кўпайтириб, ҳар бир кўпайтманинг рақамларини биринчи бўлинувчининг юқори хонасидан бошлаб айиради. Қолдиқ 590 ни 4706 нинг рақамларини ўчириб ўрнига ёзади ва бўлувчининг рақамларини бир хона ўнгга суради, бунда ушбу кўриниш ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ 5 & 9 & 0 & 9 & 3. \\ 2 & 0 & 5 & 8 & \end{array}$$

Иккинчи бўлинувчи 5909 ни 2058 га бўлиш орқали топилган бўлинманинг иккинчи рақами 2 ни, биринчи рақамнинг ўнг томонига ёзади $\begin{array}{ccccc} & & 2 & 2 & \\ 5 & 9 & 0 & 9 & 3, \\ 2 & 0 & 5 & 8 & \end{array}$ сўнгра 2 ни яна 2, 0, 5, 8 ларга кетма-кет кўпайтириб, 5909 ни юқори хонасидан бошлаб айиради. Қолдиқ 1793 ни 5909 нинг рақамлари ўрнига (ўчириб) ёзиб, бўлувчининг ракамларини бир хона ўнгга суради, ушбу кўриниш ҳосил бўлади: $\begin{array}{ccccc} & & 2 & 2 & \\ 1 & 7 & 9 & 3 & 3. \\ 2 & 0 & 5 & 8 & \end{array}$ Охирида топилган бўлинманинг учинчи рақами 8 ни 2, 0, 5 ва 8 ларга кўпайтириб, 17933 ни юқори хонасидан бошлаб айирилса, 1459 қолдиқ қолади. Шундай қилиб, 470693 ни 2058 га бўлганда 228 бўлинма, 1469 қолдиқ қолади. Охирги натижани $\begin{matrix} & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 5 & 8 \end{matrix}$ кўринишда ёзади.

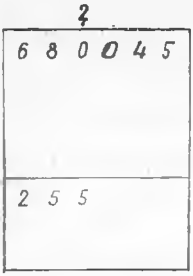
Оралиқдаги амалларни ҳисоблаш тахтасида бажариб, олдинги рақамларни ўчириб ўрнига ёзиш билан бўлиш амалини бажариш ҳиндларга маълум бўлса, Хоразмий ўзининг арифметикага доир асарида бу усулнинг такомиллаштирилган кўринишини беради. Насириддин Тусийгача бўлишнинг бу усули маълум бўлганлиги учун у бу усулни бўлишнинг маълум ёки машҳур усули деб атайди.

XII асрдан бошлаб бўлиш амалини бажариш ҳисоблаш тахтасидан қоғозга кўчирилади, яъни бўлиш амалини бажаришда, олдинги рақамларни ўчириб ўрнига ёзмасдан, ҳамма қилинган ишлар қоғозда тўлиқ акс эттирилади. Бўлишнинг бу усули „Жадвал“ ва „Сатҳ“ усули деб аталади.

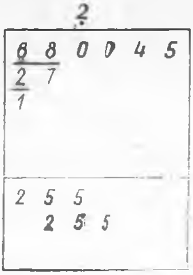
Муҳаммад Нишопурий, Жамшид Коший, Баҳоуддин Омилий, муаллифи номаълум „Ҳинд арифметикаси ҳақидаги қисқа мақола“ китобининг 67-бетида ва бошқа дарсликларда бўлишнинг жадвал усули тўлиқ баён этилади.

Бўлишнинг жадвал усули ҳам бошқа усуллар каби ўзи тараққиёт босқичида аста-секин такомиллашиб боради. Мисол тариқасида Тусийнинг замондоши ва шогирди Муҳаммад Нишопурийнинг жадвал усулида бўлишни қандай бажарганлигини кўрсатамиз.

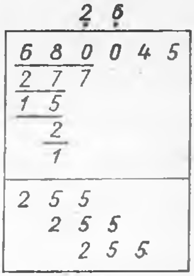
Нишопурий бўлиш амалини бажаришдан аввал бўлинувчининг рақамлари сонига қараб жадвал чизишни ва бу жадвалга берилган сонларни ёзиш тартибини тушунтиради. Сўнгра умумий кўринишда бўлинманинг рақамларини топиш қоидасини кўрсатиб, бу йўл билан мисол ишлайди. Масалан; 680045 ни 255 га бўлиш талаб қилинса, бўлинувчининг устига горизонтал чизиқ чизиб, унинг рақамларини вертикал чизиқлар орасига олади. Сўнгра бўлинувчидан маълум масофада горизонтал чизиқ чизиб унинг тагига бўлинувчининг юқори хонасидаги рақам тўғрисига биринчи бўлинувчи, бўлувчидан кичик бўлганда бир хона ташлаб, бўлувчининг рақамлари ёзилади. Бўлинманинг топилган биринчи рақами 2 ни бўлувчининг бирликлари тўғрисига, бў-



3- шакл.

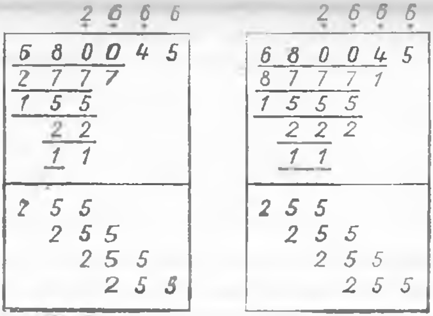


4- шакл.



5- шакл.

линувчи устига ёзилади. Бу 3- шаклда кўрсатилган. Биринчи бўлинувчи 680 ни 255 га бўлишдан топилган бўлинманинг биринчи рақами 2 ни бўлувчининг рақамлари 2, 5 ва 5 га кетма-кет кўпайтириб (4- шакл) ҳар бир кўпайтмани айрим ҳолда 680 нинг тагига ёзмасдан юқори хонасидан бошлаб оғзаки айирилади. 680 тагидаги чизиқ остига қолдиқ 170 ёзилади ва бўлувчининг рақамлари бир хона ўнгга сурилади. Бу ҳолда 4- шаклдаги кўриниш ҳосил бўлади. Қолдиқ ва ундан кейинги хонадаги рақамдан тузилган 1700 ни 255 га бўлиш билан бўлинманинг иккинчи рақами топилади. Топилган иккинчи рақам биринчи рақамнинг ўнг томонига ёзилади (5- шакл). Иккинчи рақам 6 ни юқорида кўрсатилган тартибда бўлувчига кўпайтириб 1700 дан айирилса, 170 қолади, бўлувчининг рақамларини бир хона ўнгга сурилганда жадвал 5- шакл кўринишида бўлади.



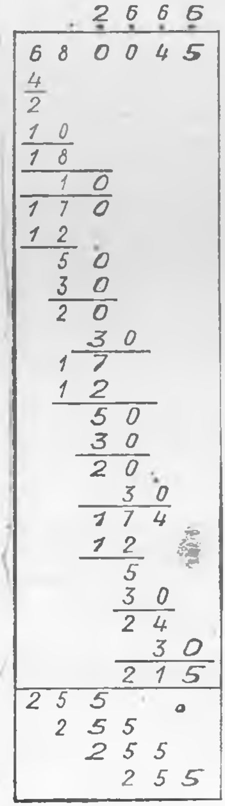
6- шакл.

Худди шу тартибда бўлинманинг учинчи ва тўртинчи рақамлари топилади. Бу рақамларни бўлувчига кўпайтириб, қолдиқ ва унинг ўнг томонидаги рақамдан тузилган сонлардан айирилади. Бу иккала босқичда жадвал 6-шакл кўринишини олади.

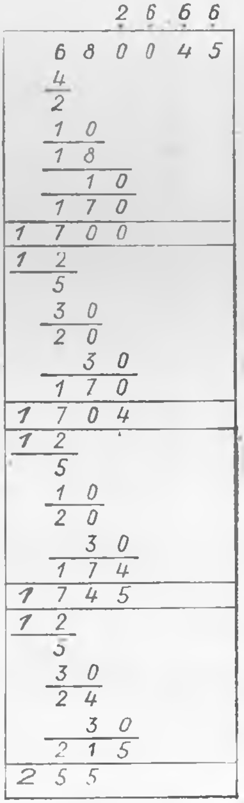
Шундай қилиб, 680 045 ни 255 га бўлганда 2666 бўлинма ҳосил бўлиб, 215 қолдиқ қолади.

Жамшид Коший „Арифметика калити“ китобининг 23—29-бетларида Нишопурийнинг юқорида кўрсатилган „Жадвалда бўлиш“ усулининг бошқа кўринишларини беради. У бўлиш амалини ўқувчиларга тушунтириш осон бўлсин учун аввал уларга айрим кўпайтмаларини бўлинувчи тагига ёзиб айириш, сўнг Нишопурий йўлида бажаришга ўтишни тавсия этади.

Коший усулида мисол ечиш 7-шаклдаги каби бўлади.



7-шакл.

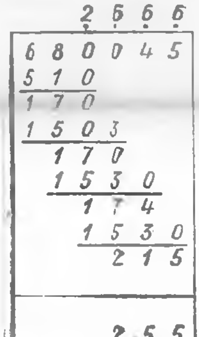


8-шакл.

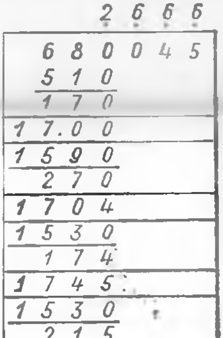
Бундан ташқари, Коший бўлинманинг рақамларини топиш босқичида бўлувчининг рақамларини сурмасдан, айрим бўлинувчиларнинг рақамларини бир хона чапга суриш билан бўлишнинг бошқа кўринишини беради. Масалан, юқоридаги мисол (6800:255) ўша усулда ечилса, у 8-шакл кўринишини олади.

Коший юқорида кўрсатилган усулларни кўрсатиш билан бирга бўлинувчи ва бўлинмаларнинг жойлашишида фарқ қилувчи ҳозирги бўлиш усулини беради. У буни ўзи кашф этганлигини ёзади. Бу кўринишдаги бўлишда бўлувчи қуйи хонасидан бошлаб бўлинманинг рақамларига кўпайтирилади. Кўпайтма эса бўлинувчининг рақамлари тагига ёзилиб, ўнг томондан бошлаб айирилади. Бу усулда юқоридаги мисол 9 ва 10-шаклдаги кўринишни олади.

Нишопурий ва Кошийларнинг бўлишни жадвалда бажаришларига диққат қилинса, юқорида айтилган „бўлишнинг жадвал усули ўзи тараққиёт босқичида аста-секин такомиллашиб боради“, деган фикрнинг тўғри эканлигини кўриш мумкин. Ҳақиқатан, Нишопурий бўлиш босқичида кўпайтириш ва айиришни кўпайтувчиларнинг юқори хонасидан бошлаб бажарса, Коший бунинг тескарисини—кўпайтириш ва айиришни ҳозиргидек бажаради. Шундай қилиб, Коший бўлувчи ва бўлинманинг ёзилишидан фарқ қилувчи ҳозирги бўлиш



9-шакл.



10-шакл.

усулини беради. Кейинги даврларда мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари бўлишнинг жадвал усулини соддалаштириб, ҳозирги бўлиш усулига келтирадилар.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда бўлиш амалини ўрганиш методи турли босқичларга бўлинган: 1. Бир хонали сонни бир хонали сонга бўлиш. 2. Кўп хонали сонни бир хонали сонга бўлиш. 3. Кўп хонали сонни кўп хонали сонга бўлиш. Баъзи дарсликларда юқоридаги иккинчи босқич тушириб қолдирилган. Улар иккинчи босқични баён этиш даврида кўп хонали сонларни бир хонали сонга бўлишни ҳам кўрсатишган. XVIII ва XIX асрларда ёзилган дарслик ва машқ дафтарларида бўлиш амали методик томондан ўқувчиларга тушунарли бўлиши учун, юқоридаги иккинчи босқичнинг тескариси (бир хонали сонни кўп хонали сонга булиш) алоҳида босқич ҳисобланиб, тўрт босқичда ўрганилиши кўрсатилган. Ҳар бир босқичнинг умумий қоидаси баён этилгандан сўнг уларга доир мисол кўрсатилади.

Бўлиш кўпайтириш амалига ўхшаш асосан икки хил „Сатҳ“ ва „Жадвал“ усулида баён этилади. Сатҳ усули Хоразмий, Насавий ва Тусийлар „Машҳур“ усулининг қоғозга кўчирилган кўринишидир. Сатҳ усулида бўлинманинг рақамлари параллел чизиқлар орасига, бўлинувчи уларнинг юқорисига, бўлувчи эса пастига ёзилади. Берилган сонлар ва бўлинма рақамлари машҳур усул бўйича жойлаштирилади. Бўлинманинг рақамлари бўлувчининг юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб кўпайтирилади. Айрим кўпайтмалар бўлинувчи устига ёзиб (ёки ёзмасдан) оғзаки юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб айирилади. Қолдиқ эса бўлинувчи рақамлари устига ёзилади. Агар айириш натижасида қолдиқ қолмаса, бўлинувчининг рақами устига нуқта (ноль) қўйилади. Машҳур усулга ўхшаш бўлиш босқичида бўлинувчининг рақамлари бир хона ўнгга сурилади. Масалан, Тусий келтирган мисол (470693:2058) ни сатҳ усулида ечиш учун берилган сонларни $\dfrac{4\ \ 7\ \ 0\ \ 6\ \ 9\ \ 3}{2\ \ 0\ \ 5\ \ 8}$ кўринишда ёзиб, биринчи бўлинувчи 4706 ни 2058 га бўлиш билан бўлинманинг биринчи рақами 2 топилади. Сўнгра 2058 юқори хонасидан бошлаб топилган 2 га кўпайтирилади. Ҳар бир кўпайтмани алоҳида 4706 нинг юқори хонасидан бошлаб айирилади. Бўлувчининг рақамларини ўнгга бир хона суриб, қолдиқ 590 бўлинувчининг рақамлари устига 1) ҳолдаги каби ёзилади. Бўлинманинг қолган рақамларини топиб, юқоридаги тартибда кўпайтириб айирилса, амал 2) ва 3) ҳоллардаги кўринишга келади.

1)

```
  5
0 6 9 0
4 7 0 6 9 3
-----------
      2
-----------
2 0 5 8 8
  2 0 5
```

2)

```
  1 7
  5 8 9
0 6 9 0 3
4 7 0 6 9 8
-----------
      2 2
-----------
2 0 5 8 8
  2 0 5 5
```

3)

```
  0 1 4
  1 7 5 6
  5 8 9 7
0 6 9 0 3 9
4 7 0 6 9 3
-----------
      2 2 8
-----------
2 0 5 8 8 8
  2 0 5 5
    2 0
```

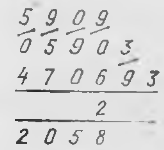
Мадрасада бўлинманинг рақамларини булувчининг юқори хонасидан бошлаб кўпайтириб айиришга қараганда, қуйи хонасидан бошлаб кўпайтириб айириш содда эканлиги уқтирилади. Агар шундай қилинса, юқоридаги мисол ушбу кўринишда бўлади:

```
  0 1 4
  1 7 9 6
0 5 9 0 3 9
4 7 0 6 9 3
-----------
      2 2 8
-----------
2 0 5 8 8 8
  2 0 5 5
    2 0
```

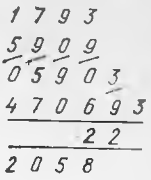
Жадвал усулига ўхшаш „Сатҳ“ усулида ҳам бўлувчининг рақамлари сурилмасдан, бўлинувчининг рақамлари бир хона чапга, бўлувчининг рақамлари тўғрисига сурилади. Сурилган рақам эса қия чизиқ устига ёзилади. Мадрасада бу хилдаги бўлишни „Бўлувчини жойидан сурмасдан айиришни тескари бажариш билан бўлиш“ („Тақсими манқул бо замми қоидаи тафриқ маъкус“) дейилган. Масалан, юқоридаги мисол (470693 : : 2058) қуйидагича: биринчи бўлинувчи 4706 ни 2058 га бўлиб, бўлинманинг топилган биринчи рақами 2 ни 2058 га кўпайтириб, 4706 дан айирганда қолган қолдиқ 590 мана бундай ёзилади:

```
0 5 9 0
4 7 0 6 9 3
-----------
      2
-----------
2 0 5 8
```

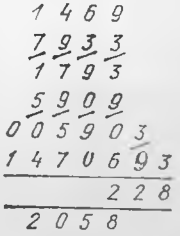
Бўлинувчи 59093 нинг рақамлари бир хона чапга, қия чизиқ устига сурилса, қуйидагича бўлади:



Сўнгра 5909 ни 2058 га бўлиб, бўлинма 2 ни 2058 га кўпайтириб, 5909 дан айирилса бундай бўлади:



Бўлинувчи 1793 нинг рақамлари бир хона чапга суриб бўлинса, у қуйидагича бўлади:



Шундай қилиб, 470693 ни 2058 га бўлганда 228 бўлинма, 1469 эса қолдиқ бўлади. „Сатҳ усули IX асрдан XX асргача Ўрта Осиё мадрасаларида бўлишнинг „Машҳур“ ёки „Сатҳ“ усули номлари билан, Европада эса XIX асргача бўлишнинг „Испан усули“ номи билан аталган. Муҳаммад Хоразмийнинг арифметикага доир асари лотин тилига таржима қилиниши билан у испанлар орқали Ғарбий Европага маълум бўлган. Шунинг учун ҳам у „Испан усули“ номи билан аталгандир.

Хоразмий ва Насириддин Тусий арифметик амалларни тахтада қум ёки тупроқ сепиб оғзаки ҳисоблашлардан фойдаланиб бажарган. Тахтада рақамларни ўчириб ўрнига ёзиш ва бўлинувчининг рақамларини суриш осон бўлганлиги учун бу усул ўз даврида содда ва қулай ҳисобланган. Кейинги асрларда, ҳисоблашлар аста-секин сатҳ усулида қоғозда ҳисоблашга ўтиши билан машҳур усул ўзининг содда ва қулайлигини қисман йўқотган. Машҳур усулда бўлиш босқичида, айириш натижалари бўлинувчининг рақамларини ўчириб ўрнига ёзилган бўлса, сатҳ усулида бўлинувчининг рақамлари устига кетма-кет ёзилади. Натижада бўлинувчининг рақамлари устидаги ёзув катталашиб кетади. Машҳур усулда бўлувчининг рақамларини суриш осон, сатҳ усулида эса ортиқча, Хоразмий ва Тусийларнинг машҳур усули маълум давр ичида, бир оз ўзгаришлар киритилгандан сўнг, бўлишнинг „Сатҳ“ усулига келади. Масалан, XV асрда Улуғбек мадрасасининг атоқли олимларидан бири Салоҳиддин Муса ибн Маҳмуд Қозизода Румий берилган сонларни машҳур усулда ёзиб, бўлиш босқичида бўлувчининг рақамларини суради. Бўлинмани бўлувчининг тагига, оралиқдаги ҳисоблашларни бўлинувчининг устига ёзади. 924 ни 6 га бўлишни қуйидагича бажаради:

$$1)\quad \begin{array}{ccc} 9 & 2 & 4 \\ 6 & & \\ \hline \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{ccc} 3 & & \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & & \\ \hline \end{array} \qquad 3)\quad \begin{array}{ccc} 0 & & \\ 3 & & \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & \end{array} \qquad 4)\quad \begin{array}{ccc} 0 & & \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 5 & 4 \end{array}$$

бўлинма.

XV — XVI асрларда ёзилган ва мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари Муҳаммад Али Қубовий ва Бобокалон Муфтийларнинг арифметикага доир асарларида „Сатҳ“ усули берилади.

Европада XV асрдан бошлаб машҳур усулга бир қанча ўзгаришлар киритилади. Масалан, XV асрда немис педагоги Петценштейнер ва итальян Лука Пачиоли берилган сонларни машҳур усул бўйича ёзиб, оралиқдаги ҳисоблашларни бўлинувчининг устига, бўлинмани унинг ўнг томонига ёзадилар. 467 ни 19 га бўлишдаги оралиқ натижалар мана бундай ёзилади:

$$\begin{array}{r|l} 467 & \\ 19 & ; \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 467 & \\ 19 & 2; \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 08 & \\ 467 & \\ 19 & 2; \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & \\ 081 & \\ 467 & \\ 199 & 24 \\ 1 & \end{array}$$

Натижа: $467:19 = 24\frac{11}{19}$.

Сатҳ усулини XVI аср француз математиги Ла-Рошнинг арифметикага доир асарларида ҳам учратамиз. У бўлишни бўлувчини сурмасдан қуйи хонадан бошлаб айиришни тавсия қилади Масалан, 7985643 ни 1789 га бўлишдаги оралиқ натижалар қуйидагича:

$$
1)\ \begin{array}{r} 0829\\ 7985643\\ \hline 4\\ \hline 1789 \end{array}
\qquad
2)\ \begin{array}{r} 114\\ 08290\\ 7985643\\ \hline 44\\ \hline 1789 \end{array}
\qquad
3)\ \begin{array}{r} 006\\ 1147\\ 082900\\ 7985643\\ \hline 446\\ \hline 1789 \end{array}
\qquad
4)\ \begin{array}{r} 1\\ 0063\\ 11413\\ 0829006\\ 7985643\\ \hline 4463\\ \hline 1789 \end{array}
$$

Натижа: $7985643 : 1789 = 4463\frac{1336}{1789}$.

Ўрта Осиё мадрасаларида XX асргача бўлишнинг „Сатҳ“ усулидан унинг ноқулайликлари сезилгунча фойдаланиб келинган.

Муҳаммад Нишопурийнинг „Жадвал“ усули ҳозирги бўлишнинг асосини берган бўлса, Ғиёсиддин Коший бўлувчи ва бўлинмаларнинг жойланишида фарқ қилувчи ҳозирги бўлиш усулининг ўзини кўрсатади. Кейинги даврларда мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларининг муаллифлари жадвал усулини соддалаштириб, амалий машғулотларда жадвал чизмасдан ечишни кўрсатадилар. Масалан, Аҳрор Махсум дарслигида 65536 ни 256 га бўлиш қуйидагича бажарилади:

$$
1)\ \begin{array}{r} 2\\ 65536\\ -512\\ \hline 143\\ \hline 256 \end{array}
\qquad
2)\ \begin{array}{r} 25\\ 65536\\ -512\\ \hline -1433\\ 1280\\ \hline 153\\ 256 \end{array}
\qquad
3)\ \begin{array}{rl} 256 & \text{бўлинма}\\ 65536 & \\ 512 & \\ \hline 1433 & \\ -\,1280 & \\ \hline 1536 & \\ -\,21536 & \\ \hline 256 & \text{бўлувчи} \end{array}
$$

Натижа: $65536 : 256 = 256$.

Сўнгра у бўлувчини бўлинувчининг ўнг томонига, бўлинмани унинг тагига ёзиш билан ҳозирги бўлиш усулини беради. Шундай қилиб, Ўрта Осиё мадрасаларида бўлишнинг жадвал усули ўзининг тараққиёт босқичида аста-секин ҳозирги бўлиш шаклига айланади. Ҳозирги бўлиш усули содда бўлишига қарамасдан, мадрасада ўқитилган дарсликларда бўлиш амалининг тарихий тараққиёт босқичларини кўрсатиш мақсадида, биринчи навбатда, бўлишнинг „Сатҳ“ ва „Жадвал“ усулини кўрсатиб, сўнгра ҳозирги бўлиш усули берилади.

Бўлишнинг асосий усуллари тушунтирилгандан сўнг кўпайтириш амалига ўхшаш турлича кўринишдаги бўлишнинг бошқа усуллари ҳам берилади. Бу усуллар бир-биридан фақат кўриниши билан фарқ қилади ва уларга турлича ном берилади. Масалан, „Сатҳ“ усулини 90° бурчак остида чапга буриб, уни „чиройли бўлиш“ деб атašади. Чиройли бўлишда бўлинувчи ва айрим кўпайтманинг рақамларини кичик қавс ичига олиб, айирманинг рақамлари унинг ташқарисига ёзилади. Тусийнинг шу усулда ечган мисоли (470693 : : 2058) қуйидаги кўринишда бўлади:

1)

3		
9		
0(66.	2	8
9(10		5
5(17		0
0(44		2

2)

3		
3(69	2	8
9(10(66	2	8)5
7(19(10		5)0
1(45(17		0)2
0(44		2)

3)

9(43	8	8
6(63(69	2	8)5
4(49(10(66	2	8)5)0
1(67(19(10		5)0)2
0(11(45(17		0)2)
0(44		2)

III боб. СОНЛАРДАН ИЛДИЗ ЧИҚАРИШДА ВА БИНОМИАЛ ТЕОРЕМАНИ БАЁН ЭТИШДА ЎРТА ОСИЁ МАТЕМАТИКЛАРИ ҚЎЛЛАГАН УСУЛЛАР

1-§. Сонларни даражага кўтариш

Ўрта Осиё математиклари сонларни даражага кўтариш ва илдиз чиқариш амаллари билан ҳам шуғулланганлар. Масалан, Хоразмий арифметик асарининг III қисмида, икки ҳад йиғиндисининг квадратини ёйиш асосида сонлардан квадрат илдиз чиқаришни ҳисоблаш тахтасида, олдинги рақамларни ўчириб, ўрнига ёзиш билан бажаради. Хоразмийнинг сонлардан квадрат илдиз чиқариш усули ўзидан олдин ўтган математикларнинг усулларига нисбатан содда.

Хоразмийдан кейинги даврларда Ўрта Осиё математикларидан Насавий, Абул Вафо, Абу Райҳон Беруний, Умар Хайём, Насириддин Тусий, Коший ва бошқалар Хоразмийнинг усулини тараққий эттириб, сонлардан учинчи, тўртинчи ва исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини кўрсатадилар. Улар илдизнинг тақрибий қийматини ҳисоблашда зарур бўлган, кўрсаткичи исталган натурал сондан иборат бўлган, бином формуласи ва биномиал коэффициентларини аниқлаш усулини ва буларнинг хоссасини баён этадилар.

Сонлардан илдиз чиқариш темасида, асосан, сонлардан аниқ ва тақрибий иккинчи, учинчи ва ундан ортиқ бутун даражали илдиз чиқариш усули кўрсатилади. Сонлардан илдиз чиқариш бошқа амаллар каби, икки хил „Сатҳ" ва „Жадвал" усулида баён этилади. Арифметикага доир ҳамма асарларда сонлардан илдиз чиқариш темасининг мазмуни ва методи ҳозирча маълум бўлган ўрта аср Шарқ математикларидан Муҳаммад Хоразмий, Насавий, Тусий, Нишопурий, Сижовандий ва Кошийларнинг асарларига асосланган. Теманинг қўйилиши эса кўпчилик дарсликларда берилган соннинг турига қараб икки даврда, яъни бутун сонлар бобидан сўнг „Бутун сондан аниқ ва тақрибий илдиз чиқариш", каср сонлар бобидан сўнг „Касрдан аниқ ва тақрибий илдиз чиқариш" темалари ўтилади. „Бутун сонлардан илдиз чиқариш" темаси қуйидаги тартибда баён этилади:

1. Сонларни даражага кўтариш.
2. Сонлардан квадрат илдиз чиқариш.
3. Сонлардан куб илдиз чиқариш.
4. Сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва илмий асарларда илдиз чиқариш амалига қараб, даражага кўтариш усули тушунтирилади. Яъни сонлардан иккинчи ва учинчи даражали илдиз чиқариш усули баён этилган дарслик ва илмий асарларда фақат сонларни иккинчи ва учинчи даражага кўтариш усули берилади. Сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усули баён этилган дарслик ва илмий асарларда эса сонларни исталган даражага кўтариш усули кўрсатилади. Масалан, Насириддин Тусий, Муҳаммад Нишопурий, Жамшид Кошийлар даражага кўтаришни „бир" дан бошқа ҳар қандай сонларни ўз-ўзига кетма-кет кўпайтириш амали деб қарайдилар ва шу йўлда баён этадилар. Масалан, агар берилган сон ўз-ўзига кўпайтирилса, сўнгра уни биринчи кўпайтмага, кейин иккинчи, учинчи, тўртинчи ва ҳоказо кўпайтмага кетма-кет кўпайтириб борилса, биринчи кўпайтма берилган соннинг иккинчи даражаси ёки квадрати (мол), иккинчи кўпайтма, берилган соннинг учинчи даражаси ёки куби (каъб) дейилади. Кейинги юқори даражалар, квадрат ва кубларнинг йиғиндиси бўйича аталади. Масалан, берилган соннинг тўртинчи даражаси квадрату квадрат (мол ал-мол), бешинчиси квадрату куб (мол ал-каъб), олтинчиси куб-куб (каъб ал-каъб), еттинчиси квадрату квадрату куб (мол ал-мол каъб) ва ҳоказо каби аталади. Бирор кўпайтмадан иккинчисига ўтишда бу номлар қуйидагича ўзгаради. Масалан, иккинчи кўпайтмадан учинчига ўтишда куб квадрату квадратга, учинчи кўпайтмадан тўртинчига ўтишда квадрату квадрат, квадрату кубга, тўртинчи кўпайтмадан бешинчига ўтишда квадрату куб кубу кубга ва ҳ. к. тартибда чексиз алмашиб боради. Берилган сон ҳар бир кўпайтмага нисбатан асос (зиль), биринчи кўпайтмага нисбатан илдиз (жазр), иккинчи кўпайтмага нисбатан куб илдиз (каъб) дейилади. Асос биринчи, квадрат — иккинчи, куб — учинчи ва ҳоказо даражадан иборат эканлиги ва бу даражалар ҳамма вақт бирнинг нисбати илдизга қандай бўлса, илдизнинг нисбати квадратга, квадратнинг нисбати кубга ва ҳоказо ҳам шундай бўлиши ва бу муносабатнинг тескариси ҳам мавжуд эканлиги кўрсатилади.

Масалан, асос уч бўлганда бу даражаларни ушбу кўринишда ёзса бўлади:

3	9	27	81	243	
9	27	81	243	729	ва ҳоказо
квадрат	куб	квадрату квадрат	квадрату куб	кубу куб	

Булар орасида қуйидаги $1:3=3:9=9:27=27:81=$ $=81:243=243:729\ldots$ муносабат ва унинг тескариси мавжуд. Умумий кўринишда асосни x билан белгиласак, даражалар: x^2, x^3, x^4, ... бўлади. Булар орасида $x:x^2=x^2:x^3=x^3:x^4=\ldots$ ёки бунинг тескариси мавжуд.

Ҳар қандай соннинг бўлаги арабчада „жузъ“ деб, илдизнинг бир бўлаги „жузъи жазр“, квадратники

„жузъи мол", кубники „жузъи каъб" ва ҳоказо деб аталади. Булар „Илмлар хазинаси"* („Махзани ал-улум") китобида қуйидагича кўрсатилади:

Даражаси	Кўпайтмалар сони	Мисол
9	Куб-куб-куб	19683
8	Квадрат-куб-куб	6561
7	Квадрат-квадрат-куб	2187
6	Куб-куб	72
5	Квадрат-куб	243
4	Квадрат-квадрат	81
3	Куб	27
2	Квадрат	9
1	Асос	3
1	Жузъи асос	1/3
2	Жузъи квадрат	1/9
3	Жузъи куб	1/27
4	Жузъи квадрат-квадрат	1/81
5	Жузъи квадрат-куб	1/243
6	Жузъи куб-куб	1/729
7	Жузъи квадрат-квадрат-куб	1/2187
8	Жузъи квадрат-куб-куб	1/6561
9	Жузъи куб-куб-куб	1/19683

---

* Муаллифнинг шахсий кут. инв. № 3, 1878 йилда нашр этилган (форс тилида).

7–1250

Сонларнинг даражаси ва унинг аталиши баён этилгандан сўнг номи билан берилган даража асосининг нечанчи даражасини ифода қилиши ва унинг тескариси, яъни даражанинг кўрсаткичи маълум бўлса, унинг қандай ном билан ўқилиши кўрсатилади. Масалан, бирор даража квадрату кубу кубдан иборат бўлса, бу даражанинг кўрсаткичини аниқлаш учун „квадрат" билан „куб" ларни аниқловчи сонлар қўшилади, яъни $2+2+3+3=10$, демак, квадрату квадрату кубу куб 10-даражадан иборат экан. Бунинг тескариси, бирор даражанинг кўрсаткичи маълум бўлса, унинг номини аниқлаш учун, даража сони 2 билан 3 ларнинг йиғиндиси бўйича ажратилиб, сўнг унинг номи аниқланади. Масалан, бирор даражанинг кўрсаткичи 11 бўлса, $11==3+3+3+2$ кўринишда ёзиб, сўнгра тегишлича номлар қўйилса, 11-даражанинг номи кубу кубу кубу квадрат бўлади.

Даражаларга тушунча берилгандан сўнг даража билан асос орасидаги муносабатга кўра даража кўрсаткичи берилган ҳолда рационал ва иррационал сонга тушунча берилган. Даража ҳамма вақт аниқ асосга эга бўлмаслиги, агар даража ўзининг келтириб чиқарувчи аниқ асосга эга бўлса, бу ҳолда, асос рационал сондан, агар даража аниқ асосга эга бўлмаса, иррационал* сондан иборат эканлиги кўрсатилади. Рационал ва иррационал сонларга тушунча берилгандан сўнг, асосни топиш, яъни илдиз чиқариш усули баён этилади.

2-§. Бутун сонлардан квадрат илдиз чиқариш

Ўрта Осиё математикларининг илмий асарларида ва мадрасада ўқитилган дарсликларда илдиз чиқариш амали, даражага кўтариш амалининг тескариси эканлиги уқтирилади. Даражага кўтариш амалига тушунча берилгандан сўнг, илдиз чиқариш амалига умумий таъриф берилади: берилган даража ва даража кўрсаткичига кўра асосни топиш илдиз чиқариш амали дейилади. Агар асос аниқ топилса, рационал, аниқ топиш мумкин бўлмаса, иррационал илдиз эканлиги кўрсати-

---

* Бу ерда рационал деб арабча „мунтиқ", яъни „гапирадиган" ва иррационал деб „асамм", яъни „гапира олмайдиган", „соқов" сўзлари таржима қилиняпти. Иррационал ва рационал сонларнинг бундай аталиши араб тилига хос хусусият бўлиб, бу тўғрида биз тўхталмаймиз.

лади. Квадрат ва куб илдиз чиқариш эса юқорида берилган таърифнинг хусусий ҳолидан иборат эканлиги тушунтирилади.

Ўрта Осиё математикларининг сонлардан квадрат илдиз чиқариш усули мазмун жиҳатидан ҳозирги усул каби бўлиб, фақат бажариш техникаси билан фарқ қилади.

Маълумки, агар берилган „A“ сонининг квадрат илдизини умумий кўринишда $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$ билан белгиласак,

$$\sqrt{A} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \qquad (1)$$

бўлади ($n = 0, 1, 2, \ldots$). У ҳолда илдизнинг таърифи бўйича:

$$A = (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0)^2.$$

Бу тенгликнинг ўнг қисмини квадратга кўтариб, группаланса:

$$\begin{gathered} A = (10^n a_n)^2 + (2 \cdot 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1}) \cdot 10^{n-1} a_{n-1} + \\ + [2 \cdot 10^n a_n + (2 \cdot 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2})] \cdot 10^{n-2} a_{n-2} + \ldots \qquad (2) \\ \ldots + [2 \cdot 10^n a_n + 2 \cdot 10^{n-1} a_{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + \ldots + \\ + (2 \cdot 10a_1 + a_0)]\, a_0. \end{gathered}$$

Илдизнинг рақамлари (2) тенгликдан топилади.

Насириддин Тусий сонлардан квадрат илдиз чиқаришни арифметиканинг бошқа амалларига ўхшаш ҳисоблаш тахтасида Муҳаммад Хоразмий усулида олдинги рақамларни ўчириб ўрнига ёзиш билан бажаради. У бу усулни кўпайтириш ва бўлиш усулига берилган ном билан сонлардан квадрат илдиз чиқаришнинг машҳур усули деб атайди. Шу усул бўйича берилган ҳар қандай сондан квадрат илдиз чиқариш йўли умумий кўринишда (2) тенглик асосида баён этилгандан сўнг конкрет мисол кўрсатилади. Масалан, 104979 дан квадрат илдиз чиқариш учун аввал берилган соннинг илдизи неча хонали эканлиги аниқланади. Илдизи изланган сон 100 000 дан катта ва 1 000 000 дан кичик бўлгани учун бу соннинг квадрат илдизи уч хонали сон бўлиши, буни топиш учун олдин юзлар, ўнлар ва бирлар хонасидаги рақамларни топиш кераклиги кўрсатилади. Шу мақсадда берилган сонни ўнгдан чапга қараб икки рақамдан қилиб, гранларга ажратиб, ҳар бир граннинг бирликлари устига нуқта қўйилади, сўнг илдизнинг рақамлари (2) тенглик асосида топилади. Демак, 104879 нинг квадрат илдизи $100x + 10y + z$

кўринишда ёзилади, яъни $\sqrt{104979} = 100x + 10y + z$. Илдизнинг таърифи бўйича $104979 = (100x + 10y + z)^2$. Тенгликнинг ўнг қисмини квадратга кўтариб группаланса,

$$104979 = (100x)^2 + (2 \cdot 100x + 10y) \cdot 10y + \\ + [2 \cdot 100x + (2 \cdot 10y + z)]\, z. \qquad (3)$$

(3) тенгликда изланган илдизнинг юзлар хонаси квадрати $(100)^2$ 10 000 ичида бўлгани учун илдизнинг юзлар хонасидаги рақам x охирги грандаги 10 дан чиқарилган квадрат илдиз 3 дан иборат бўлади. Тусий топилган илдизнинг рақами 3 ни охирги грандаги бирликлар устига ва тагига шундай ёзади:

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & & & & \\ 1 & \dot{0} & 4 & \dot{9} & 7 & \dot{9}. \\ & 3 & & & & \end{array}$$

Сўнгра у илдизнинг рақами 3 ни ўз-ўзига кўпайтириб, 10 дан айирганда қолган қолдиқ 1 ни 10 ни ўчириб ўрнига, пастдаги 3 ни эса иккилантириб бир хона ўнгга 4 нинг тагига ёзади:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & & & \\ \dot{1} & 4 & \dot{9} & 7 & \dot{9} \\ & 6 & & & \end{array}$$

Агар топилган илдизнинг рақами 3 ни (3) тенгликка қўйиб, илдизнинг юзлар хонасининг квадрати $(100x)^2$ айирилса, ушбу ҳосил бўлади:

$$14979 = (2 \cdot 100 \cdot 3 + 10y) \cdot 10y + [2 \cdot 100 \cdot 3 + (2 \cdot 10y + z)]\, z. \qquad (4)$$

Илдизнинг ўнлар хонасидаги рақамини топиш учун бундай муҳокама қилинади: (4) тенгликдаги биринчи $(2 \cdot 100 \cdot 3 - 10y) \cdot 10y$ йиғинди юзликларни ташкил қилади, агар биз кичик қавс ичидаги иккинчи йиғинди $10y$ ни ташласак, ками билан $6000y$ олган бўламиз. Демак, илдизнинг рақамини 149 юзликлардан излаш керак, яъни $60y$ юзлик = 149 юзлик ёки $y = \frac{149}{60} = 2$ ва қолдиқ. Қолдиқни эътиборга олмаганда топилган 2 илдизнинг ўнлар хонасидаги рақами бўлиши учун $(2 \cdot 100 \times 3 + 10y) \cdot 10y$ ни ҳисоблаганда 14979 дан кичик бўлиши керак, агар „y“ нинг ўрнига 2 ни қўйиб юқоридаги ифодани ҳисобласак, $(2 \cdot 100 \cdot 3 + 10y) \cdot 10y + (2 \times 100 \cdot 3 - 10 \cdot 2) \cdot 10 \cdot 2 = 12400$ бўлади. Демак, изланган илдизнинг рақами 2 бўлади. Тусий илдизнинг ўнлар хонасидаги рақам 2 ни (4) тенгликка кўра 149 нинг ўнликлар сони 14 ни илдизнинг икки баробари 6 га бўлиш билан топади. Топилган 2 ни иккинчи грандаги нуқта устига ва 6 нинг ўнг қисмига ёзади:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & \\ \dot{1} & 4 & \dot{9} & 7 & \dot{9} \\ & 6 & 2 & & \end{array}$$

У илдизнинг рақами 2 ни 6 нинг ўнг қисмига қўйишдан ҳосил бўлган 62 ни шу 2 га кўпайтириб, кўпайтмани 149 дан айиради, қолдиқ 25 ни 149 нинг рақамларини ўчириб, ўрнига ёзади. Сўнгра 62 га 2 ни қўшиб, ҳосил бўлган 64 рақамларини бир хона ўнгга суради, бу ҳолда ушбу кўриниш ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & & \\ \dot{2} & \dot{5} & 7 & \dot{9} \\ & 6 & 4 & \end{array}$$

Топилган илдизнинг биринчи ва иккинчи рақамларини (4) тенгликка қўйиб, 14979 дан биринчи $(2 \cdot 100 \times \times 3 + 10 \cdot 2) \cdot 10 \cdot 2$ йиғиндини айирилса, шундай кўриниш ҳосил бўлади:

$$2579 = [2 \cdot 100 \cdot 3 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + z]\, z. \qquad (5)$$

Тусий (5) тенгликдан юқоридаги шартга кўра илдизнинг бирлар хонасидаги рақам 4 ни топади. Топилган 4 биринчи грандаги нуқта устига ва 64 нинг ўнг қисмига қўйилса, шундай бўлади:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & & 4 \\ \dot{2} & \dot{5} & 7 & \dot{9} \\ & 6 & 4 & 4 \end{array}$$

Охирида (5) тенгликдаги $2 \cdot 100 \cdot 3 + (2 \cdot 10 \cdot 2 + + 4) = 644$ яна 4 га кўпайтирилиб, кўпайтмани 2579 дан айирилади. Натижада берилган соннинг аниқлиги 1 гача бўлган тақрибий илдизи 324 бўлиб, охирги гранда 3 қолдиқ қолади. Тусий охирги гранда қолдиқ қолганлиги учун изланган илдиз иррационал сондан иборат эканлигини уқтириб, унинг тақрибий қийматини топишга киришади.

Ўрта Осиё математиклари иррационал илдизнинг тақрибий қийматини оддий каср кўринишида қуйидаги формула асосида топадилар: агар „a“ аниқлиги 1 гача бўлган квадрат илдизнинг тақрибий қийматидан иборат бўлса, уни $a < \sqrt{A} < a + 1$ кўринишда ёзиш мумкин, бундан

$$\sqrt{A} = a + r. \qquad (6)$$

Бунда r — бирдан кичик бўлган иррационал сон. (6) тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтариб, r аниқланса,

$$r = \frac{A - a^2}{2a - r} \qquad (7)$$

бўлади. (7) тенгликнинг ўнг қисмидаги r нинг ўрнига 1 қўйилса, қуйидаги тақрибий қиймат ҳосил бўлади:

$$r \approx \frac{A - a^2}{2a + 1}. \qquad (8)$$

Демак, квадрат илдизнинг тақрибий қиймати қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sqrt{A}\approx a+\frac{A-a^2}{2a+1}. \tag{9}$$

$\frac{A-a^2}{2a}$ илдиз каср қисмининг ортиғи билан олинган тақрибий қийматидир.

Насириддин Тусий 104979 нинг квадрат илдизининг тақрибий қийматини (9) формула билан ушбу $324\frac{3}{649}$ кўринишда топади. Лекин аралаш касрни $\begin{array}{ccc}3&2&4\\&&3\\6&4&9\end{array}$ кўринишда ёзади.

Хоразмий, Насавий ва Тусийлардан кейинги даврда уларнинг сонлардан квадрат илдиз чиқаришга оид машҳур усули аста-секин бошқа кўринишга ўтади, яъни илдиз чиқаришда оралиқдаги ҳисоблашлар тахтада бажарилиб, олдинги рақамларни ўчириб ўрнига ёзмасдан, ҳамма қилинган иш қоғозда тўлиқ акс эттирилади. Бу кўринишдаги квадрат илдиз чиқариш „Сатҳ“ усули деб номланади. Шундай қилиб, сонлардан квадрат илдиз чиқаришдаги машҳур усул маълум даврдан сўнг сатҳ усулига ўтади. Масалан, Муҳаммад ибн Хусайн Омилий (XVI — XVII асрлар) „Хулосатул ҳисоб“ китобида ва ундан кейинги даврларда мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида сонлардан квадрат илдиз чиқаришни сатҳ усулида бажаради. Сатҳ усулида бўлиш амалига ўхшаш, берилган сон параллел тўғри чизиқлар устига, илдизнинг рақамлари уларнинг орасига, ёрдамчи амаллар эса берилган сон устига ва параллел чизиқлар тагига ёзилади. Тусий келтирган мисол ($\sqrt{104979}$) ни сатҳ усулида ечиш учун у бундай ёзилади: $\begin{array}{c}1\;\;0\;\;4\;\;9\;\;7\;\;9\\\hline\\\hline\end{array}$. Охирги грандан топилган илдизнинг юзлар хонасидаги рақам 3 ни параллел тўғри чизиқлар орасига нолнинг тагига ёзилади. Топилган илдиз 3 ни ўз-ўзига кўпайтириб, 10 дан айирилади, қолдиқ 1 ни 10 ни ўчириб ўрнига ёзмасдан унинг устига ёзилади. Сўнгра илдиз 3 ни иккига кўпайтириб ёки ўз-ўзига қўшиб, параллел тўғри чизиқлар тагига иккинчи грандаги соннинг ўнлар хонасидаги 4 нинг тўғрисига сурилади. Бу ҳолда шундай кўриниш ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{l}01\\104979\\\hline\;3\\\hline\quad\;\;6\end{array}$$

Шу каби 149 дан топилган илдизнинг ўнлар хонасидаги рақам 2 ни 6 нинг ўнг томонига қўйиш натижасида ҳосил бўлган 62 ни яна 2 га кўпайтириб, кўпайтмани 149 дан айирилса, ушбу ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 5 & & \\
1 & 0 & 4 & 9 & 7 & 9 \\
\hline
 & 3 & & 2 & & \\
\hline
 & & 6 & 2 & &
\end{array}$$

Илдизнинг бирлар хонасидаги рақамни 2579 дан топиб, юқоридаги йўл билан ҳисобланса, охирги натижа ушбу кўринишни олади:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 4 & 9 & 7 & 9 \\
\hline
 & 3 & & 2 & & 4 \\
\hline
 & & & 6 & & 4
\end{array}$$

Шундай қилиб, бу ҳолда ҳам 104979 нинг тақрибий илдизи $324\frac{3}{649}$ эканлигини кўрамиз.

Мадрасада талабалар илдиз чиқариш амалини яхши ўзлаштиришларини назарда тутиб, биринчи навбатда икки, уч, тўрт ва ундан кўп хонали сонлардан аниқ квадрат илдиз чиқариш, сўнгра тақрибий квадрат илдиз чиқариш усули баён этилади. Ҳар икки холда ҳам квадрат илдиз чиқариш амалининг тўғри эканлиги бошқа амалларга ўхшаш, мезон билан текширилади.

$\sqrt{\ }$	Ҳозирги усулда	Эски усулда
2	1,414	$\approx 1\frac{1}{3} \approx 1{,}333 \ldots$
3	1,732	$\approx 1\frac{2}{3} \approx 1{,}666 \ldots$
4	2,000	$= 2{,}000$
5	2,236	$2\frac{1}{5} = 2{,}200$
6	2,449	$2\frac{2}{5} = 2{,}400$
7	2,646	$2\frac{3}{5} = 2{,}600$
8	2,828	$2\frac{4}{5} = 2{,}800$

Юқоридаги усул билан тақрибий квадрат илдиз чиқариш натижасини ҳозирги замон усули бўйича квадрат илдиз чиқариш натижаси билан таққослаб кўрилса, юқоридаги жадвалдан қуйидаги хулосага келинади:

а) эски усулда ҳозиргига қараганда, ками билан олинган қийматида кўпроқ хатога йўл қўйилади, лекин аниқлиги 0,1 гача бўлган тақрибий илдизларида қисман фарқ қилади,

б) эски усулда илдиз остидаги сон кат-

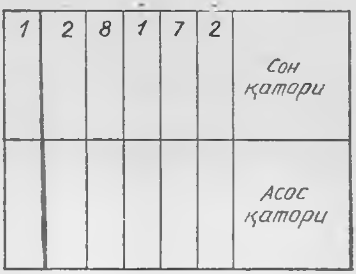
$\sqrt{}$	Ҳозирги усулда	Эски усулда
9	3,000	$= 3,000$
10	3,162	$3\frac{1}{7} \approx 143$
11	3,317	$3\frac{2}{7} \approx 3,285$
143	11.958	$11\frac{22}{23} \approx 11,956$
5321	72,945	$72\frac{137}{145} \approx 72,945$

талашиб борган сари хато камайиб боради,

в) эски усул амалий аҳамиятга эга бўлган ҳисоблашларни тез бажаришга катта ёрдам беради.

Бутун сонларни бўлишнинг асосий йўли жадвал усули деб қабул қилган муаллифлар сонлардан квадрат илдиз чиқаришни биринчи навбатда жадвал усулида баён этадилар. Масалан, Нишопурий, Коший ва бошқа муаллифлар бутун сондан квадрат илдиз чиқаришнинг жадвал усулини қоида кўринишида баён этадилар: бутун сонлардан квадрат илдиз чиқариш учун илдизи изланган сонни бўлинувчига ўхшаш горизонтал тўғри чизиқ тагига жойлаштириб, ҳар бир рақамини вертикал тўғри чизиқлар орасига олинади, сўнгра ўнг томондан чапга қараб икки рақамдан қилиб, гранларга ажратилади, булар икки қават чизиқ билан ажратилади ва гранлардаги қуйи рақам устига нуқта қўйилади. Жадвал эса горизонтал чизиқ билан иккига бўлинади, юқоридан биринчи бўлакка „Сон қатори“ дейилади, бунга илдиз рақамларининг квадратлари ёзилади ва иккинчи бўлакка „Асос қатори“ дейилади, бунга илдиз рақамларининг биринчи даражаси ёзилади. Охирги грандан квадрат илдиз чиқариш билан илдизнинг юқори хонасидан биринчи рақам аниқланади, бу эса бир вақтда охирги грандаги нуқта устига ва унинг тўғриси — асос қаторига ёзилади. Сўнгра топилган илдизнинг рақамларини ўз-ўзига кўпайтириб, кўпайтмани биринчи грандан айирилади. Асос қаторидаги илдизнинг рақамлари ўз-ўзига қўшилади, йиғиндининг рақамлари эса бир хона ўнгга сурилади. Илдизнинг иккинчи рақами асос қаторидаги сурилган соннинг ўнг томонига энг катта рақам қўйиш натижасида ҳосил бўлган сонни, шу рақамга кўпайтирилганда кўпайтма, қолдиқ ва чапдан иккинчи грандаги рақамлардан тузилган сондан кичик бўлиш шарти билан топилади.

Топилган илдизнинг иккинчи рақами чапдан иккинчи грандаги нуқта устига ёзилади. Илдизнинг ундан кейинги рақамлари ҳам шу йўл билан топилади. Агар илдизнинг охирги рақамини топишда сон каторида қолдиқ қолмаса илдиз рационал сондан иборат эканлиги кўрсатилади.



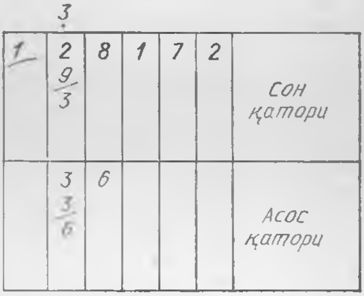
11-шакл.

Муҳаммад Нишопурий мисолда 128 172 дан квадрат илдиз чиқаришни кўрсатади. Илдиз чиқаришдан аввал юқоридаги қоида бўйича жадвал чизиб, берилган сон 11-шаклдагидек жойлаштирилади.

Илдизнинг рақамлари эса

$$128\,172 = (100x)^2 + (2 \cdot 100x + 10y) \cdot 10y + \\ + [2 \cdot 100y + (2 \cdot 10 + z)] \qquad (3')$$

тенгликдан топилади. (3′) тенгликка асосан 12 нинг квадрат илдизи 3 ни биринчи грандаги нуқтанинг устига ва унинг тўғриси — асосга ёзилади (12-шакл), сўнг юқоридаги 3 билан асосдаги 3 ни қўшиб йиғинди 6 ни асосдаги 3 нинг ўнг томонидаги устунга ёзилади. Илдизнинг биринчи рақами 3 ни ўз-ўзига кўпайтириб, биринчи грандаги 12 дан айирилади, қолдиқ қия чизиқ тагига ёзилади. Қолдиқ 3 эса иккинчи грандаги сон билан 381 ни ҳосил қилади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши 12-шаклдагидек бўлади.

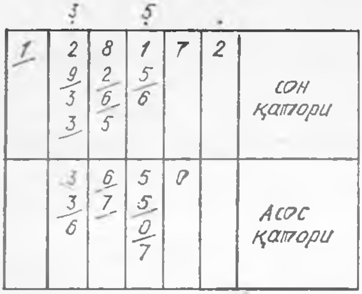


12-шакл.

Агар топилган илдизнинг рақами 3 ни (3′) га қўйилса,

$$38\,172 = (2 \cdot 100 \cdot 3 + 10y) \cdot 10y + [2 \cdot 100 \cdot 3 + (2 \cdot 10y + z)]\,z \qquad (4')$$

ҳосил бўлади. (4′) тенглик асосида топилган илдизнинг иккинчи рақами $y = 5$ ни 6 нинг томонига ва иккинчи грандаги нуқта устига қўйиб, ҳосил бўлган 65 ни юқори хонасидан бошлаб 5 га кўпайтириб, айрим кўпайтмани 381 нинг тагига ёзиб, чапдан айирилади. Сўнг 65 га 5 ни қўшиб ҳосил бўлган 70 ни бир хона ўнгга сурилганда жадвалнинг кўриниши 13-шаклдагидек бўлади.



13- шакл.

Топилган илдиз 5 ни (4) га қўйиб соддалаштирилса:

$$5672 = (700 + z)\,z \qquad (5')$$

бўлади.

(5') тенгликдан топилган илдизнинг охирги рақами 8 ни 70 нинг ўнг томонига қўйиб, ҳосил бўлган 708 ни 8 га кўпайтирилади ва кўпайтмани 5672 дан айирилса, 8 қолдиқ қолади. Бу ҳолда жадвалнинг охирги кўриниши 14- шаклдагидек бўлади. Демак, 128 172 нинг квадрат илдизи иррационал сон бўлиб, бунинг тақрибий қиймати (9) формула бўйича топилганда $358\frac{8}{717}$ бўлади.

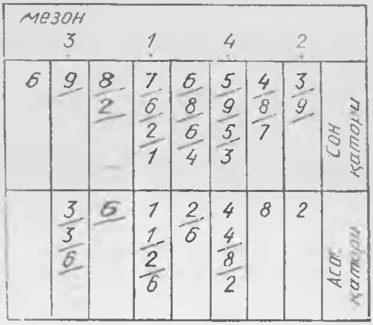
14- шакл.

Коший квадрат илдизни чиқаришни жадвал бўйича ҳозирги усулда бажаради, яъни кўпайтиришни қуйи хонадан бошлайди ва айрим кўпайтмаларни берилган сон тагига ёзиб, сўнгра ўнг томондан айиради. Коший бу усул янги ўрганувчилар учун содда эканини ва уни ўзи кашф этганини қайд қилади. Агар юқоридаги 128 172 дан Коший йўли

15- шакл.

билан илдиз олинса, у 15-шаклдаги каби бўлади.

Ҳақиқатан, Коший ўзидан олдин ўтган Шарқ математикларининг бутун сонлардан квадрат илдиз чиқариш усулини такомиллаштиради ва ҳозирги усулдан фақат ташқи кўриниши билан фарқ қилувчи усулни тавсия қилади. Бу бошқа усулларга нисбатан методик жиҳатдан қулайдир.



16 шакл.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида юқорида баён этилган „Жадвал“ усулида квадрат илдиз чиқаришнинг такомиллаштирилган кўриниши берилади, яъни сон қаторида айириш амалини бажариб, оғзаки айирмани қия чизиқ тагига ёзилади. Агар айириш натижасида қолдиқ қолмаса, қия чизиқ тагига ҳеч нарса ёзилмайди.

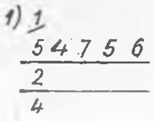
Масалан, Аҳрор Маҳсумнинг машқ дафтарида* 9876543 дан квадрат илдиз чиқариш 16-шаклдаги каби бажарилади.

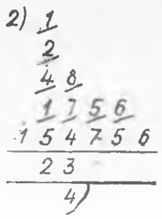
Мадрасада квадрат илдиз чиқаришнинг юқорида баён этилган („Сатҳ“ ва „Жадвал“) усуллари курсатилгандан сўнг машқ тариқасида, содда бўлмаса ҳам, кўринишига қараб, турлича ном қўйилган бошқа усуллар баён этилади. Қуйида Аҳрор Маҳсум ва Ҳисомиддин Хўжанинг машқ дафтарларида ва бошқа дарсликларда баён этилган турли кўринишдаги квадрат илдиз чиқариш усулларидан намуналар келтирамиз.

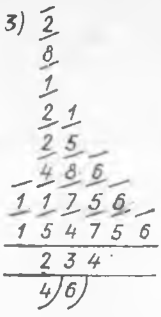
1. Жазри манқул — берилган сонннинг рақамларини илдизнинг рақамлари тўғрисига кўчириш билан илдиз чиқариш. Бу „Сатҳ“ усулида бажарилиб, параллел чизиқлар орасига илдизнинг рақамлари кетма-кет ёзилади. Топиладиган илдизнинг рақамлари тўғрисига тартиб билан берилган сон рақамлари бир хона чапга қия чизиқ устига сурилади. Айириш амали оғзаки бажарилиб натижа ёзилади. Масалан, 51756 дан квадрат илдиз чиқариш ушбу босқичларда бажарилади:

---

* Дафтари машқи фароиз. Форс тилида, қўлёзма, 1892 й, 22-бет.







Натижа: $\sqrt{54756} = 234$.

2. „Жевак шаклида квадрат илдиз чиқариш“ („Жазр батариқаи гавшиқ“). Бу „Сатҳ“ усулининг 90° бурчак остида ўнгга бурилишидан ҳосил бўлган вазиятдан иборат, яъни вертикал параллел тўғри чизиқларнинг чап қисмига, чизиқ бўйлаб, пастдан бирлар хонасидан бошлаб берилган сон, ўнг қисмига иккиланган илдиз рақамлари, параллел тўғри чизиқ орасига илдизнинг рақамлари ёзилади. Ҳар бир айириш амали ярим қавс билан ажратилади. Масалан, 45369 дан квадрат илдиз чиқариш ушбу босқичларда бажарилади:

1)

(4	4	2	
	5		4)
	3		
	6		
	9		

2)

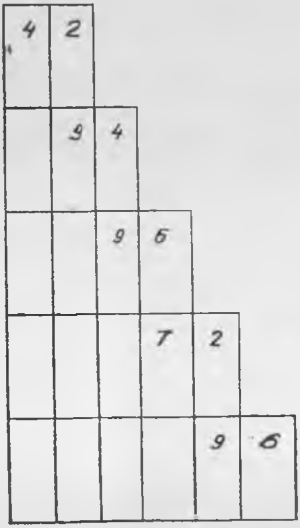
	(44	2	
1	(45		4)
2	(13	1	2)
	6		
	9		

3)

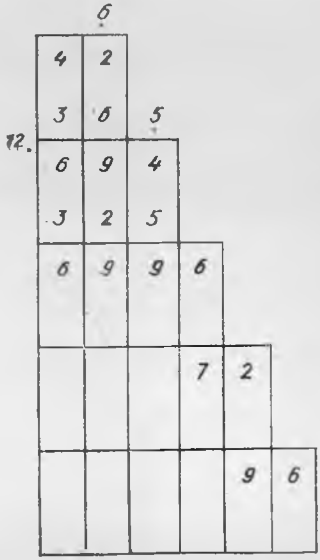
		(4	4	2		
(1	1	(4	5		4)	
(2	2	(1	3	1	2)	4)
		(6	6		2)	
		(9	9	3		

Натижа: $\sqrt{45369} = 213$.

3. Сонлардан минбар шаклида квадрат илдиз чиқариш. Бунда берилган соннинг рақамларини иккитадан қилиб, минбарнинг юқорисидан бошлаб, илдизнинг рақамлари минбарнинг зиналарига жойлаштирилади кўпайтмалар эса қуйи қисмга ёзилади. Масалан, 4294967296



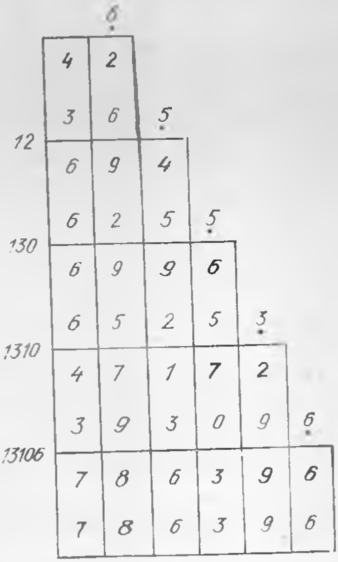
17-шакл.



18-шакл.

дан квадрат илдиз чиқаришда бу сон 17-шаклдаги каби жойлаштирилади.

Сўнгра зинанинг энг юқори қисмига жойлашган 42 дан квадрат илдиз чиқарилади, топилган 6 ни 2 нинг устига қўйиб, бу рақамнинг бир-бирига кўпайтмасини 42 нинг тагига ёзиб (18-шакл) айирилади, айирма 6 эса 94 нинг чап томонига, топилган илдизнинг биринчи рақами 6 ни иккилантиришдан ҳосил бўлган сон жадвал ташқарисига 94 нинг тўғрисига ёзилади. Илдизнинг иккинчи рақами юқоридан иккинчи зина тагида ҳосил бўлган 694 дан аниқланади, топилган 5 ни юқо-



19-шакл

ридан биринчи зинага қўйиб, зина ташқарисидаги 12 билан 125 ўқилади. Сўнгра 125 ни 5 га кўпайтириб, кўпайтма 625 ни 694 дан айирилади (18-шакл).

Илдизнинг қолган рақамлари ҳам шу йўлда топилганда жадвал 19-шаклдаги кўринишни олади.

Натижа: $\sqrt{4\,294\,967\,296} = 65\,536$.

Сонлардан квадрат илдиз чиқариш усули кўрсатилгандан сўнг куб илдиз чиқариш усули баён этилади.

3-§. Бугун сонлардан куб илдиз чиқариш

Ўрта Осиё математиклари сонлардан куб ва юқори даражали илдиз чиқаришни „Машҳур“ ва „Жадвал“ усулида бажарадилар. Улар сонлардан куб илдиз чиқаришни баён этишдан олдин, берилган сонга қараб илдизнинг рақамлар сонини аниқлаш йўлини кўрсатадилар. Бунинг учун бир хонали, икки хонали, уч хонали ва ҳоказо сонлар кубга кўтарилганда ҳосил бўлган сонлар рақамларининг ортиб боришидаги қонуният аниқланади. Яъни бир хонали соннинг куби бир, икки ёки уч хонали, икки хонали соннинг куби тўрт, беш ёки олти хонали сонлардан иборат бўлиш ва шунга ўхшаш берилган соннинг рақамлари биттадан ортиб бориши билан уни кубга кўтариш натижасида ҳосил бўлган соннинг рақамлар сони учтагача ортиб бориши кўрсатилади. Илдиз чиқариш амали даражага кўтариш амалига тескари бўлганлиги учун бир хонали, икки хонали ва уч хонали сонларнинг куб илдизи бир хонали сондан, тўрт хонали, беш хонали ва олти хонали сонларнинг куб илдизи икки хонали сондан ва ҳоказо иборат бўлиши баён этилади. Шунга кўра берилган соннинг куб илдизи неча хонали сон бўлишини осонгина аниқлаш учун берилган сон (квадрат илдиз чиқаришга ўхшаш) ўнг томондан чапга қараб, учта рақамлардан қилиб гранларга ажратилади, шу гранларнинг сони нечта бўлса, берилган соннинг куб илдизи шунча хонали сондан иборат эканлиги аниқланади.

Ўрта Осиё математиклари Насавий, Муҳаммад Хоразмийнинг арифметик асарларидаги ғояни тараққий эттириб, XI асрда араб адабиётида биринчи бўлиб, ҳозирда Руффини — Горнер схемаси деб аталувчи схема бўйича сонлардан куб илдиз чиқариш усулини кўрсатган бўлса, Насириддин Тусий Насавийнинг ғоясини тараққий эттириб, XIII асрда шу схемада сонлардан квадрат, куб ва исталган кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини баён этади. Насавий ва Тусийлар сонлардан куб илдиз чиқаришни машҳур усулда, яъни ҳисоблаш тахтасида, оралиқдаги рақамларни учириб ўрнига ёзиш билан бажарадилар. Улар сонлардан илдиз чиқаришнинг умумий йўлини қоида кўринишида бериб, сўнгра мисол кўрсатадилар. Насавий ва Тусийлардан кейинги даврларда ёзилган Муҳаммад Нишопурий, Абдурашид Сижовандий, Коший, Сирожиддин, Аҳмадхўжа ва бошқаларнинг дарсларида сонлардан куб ва юқори кўрсаткичли илдиз чиқариш жадвал усулида бажарилади.

Ўрта Осиё математиклари берилган сондан куб илдиз чиқариш амалини бажариш учун илдиз кўрсаткичига тенг учта қатор зарурлигини уқдирадилар ва бу қаторларни қуйидагича белгилайдилар. Юқоридаги биринчи бўлагига берилган сон ва изланган илдиз рақамларининг куби, иккинчи бўлагига квадрати ва учинчи бўлагига рақамлари ёзилади. Биринчи бўлаги „Сон қатори“ („Сатри адад“), иккинчи бўлаги „Квадрат қатори“ („Сатри мол“), учинчи бўлаги эса „Асос қатори“ („Сатри зиль“) дейилади. Сўнгра илдиз чиқариш усули умумий (қоида) кўринишда берилади.

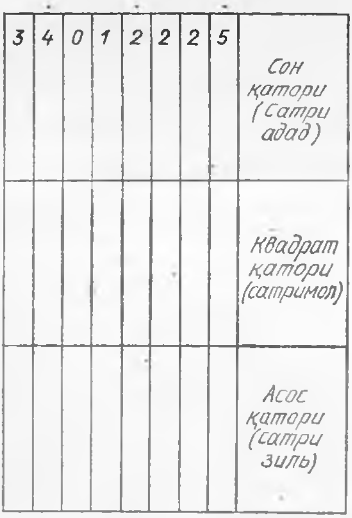
Сонлардан куб ва юқори кўрсаткичли илдиз чиқаришдаги машҳур усул билан жадвал усулидаги асосий фарқни кўрсатиш мақсадида Тусий ва Нишопурийларнинг мисолларини иккала усулда берамиз. 34012225 дан куб илдиз чиқариш талаб қилинса, биринчи навбатда берилган сон рақамларининг сонига қараб жадвал чизиш ва бу жадвалга 34012225 ни жойлаштириш, иккинчи навбатда, қуйидаги формула асосида илдизнинг рақамларини топиш йўли кўрсатилади: 34012225 дан чиқадиган куб илдиз уч хонали сон бўлганлиги учун бу сонни $100x+10y+z$ кўринишда белгиласак, у қуйидагича бўлади:

$$\sqrt[3]{34012225}=100x+10y+z \tag{1}$$

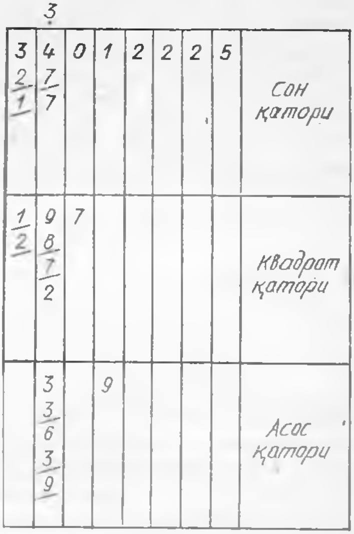
Илдизнинг таърифига кўра $34012225=(100x+10y+z)^3$ бўлади, қавсни очиб, y ва z ларга нисбатан группаласак, ушбу ифода ҳосил бўлади:

$$34012225=(100)^3+[3(100x)^2\cdot 10+100(3\cdot 100x+10y)\,y]\,y+ + \{3(100x+10y)^2+[3(100x+10y)+z]\,z\}\,z. \tag{2}$$

Улар (2) тенглик асосида, илдизнинг рақамлари x, y ва z ни қуйидагича топадилар. Берилган 34012225 ни



20-шакл.



21-шакл.

жадвалга жойлаштириб, гранларга ажратилса, гранлар икки қават вертикал параллел чизиқлар ёки қизил сиёҳ билан ажратилади (шаклда тўқ қора билан ажратилган), ҳар бир грандаги сонларнинг бирлар хонасидаги рақам устига нуқта қўйилади (20-шакл).

Сўнгра (2) тенгликдан илдизнинг юзлар хонасидаги рақам топилади. Изланган илдизнинг юзлар хонасининг куби $(100x)^3$ 1 000 000 ичида бўлгани учун x охирги грандаги 34 дан чиқарилган куб илдиз 3 дан иборат бўлади. Топилган 3 ни грандаги 4 нинг устига ва асосга 4 нинг тўғрисига ёзилади. Асосдаги 3 ни юқоридаги 3 га кўпайтириб, квадрат қаторига ёзилади ва бу кўпайтма 9 ни яна 3 га кўпайтириб, 34 дан айирса, яъни (2) тенгламадаги биринчи йиғинди $(100x)^3$ ни ҳисоблаб, 34012225 дан айирилса 7 қолади.

$$7012225 = [3\,(300)^2 \cdot 10 + 100\,(3 \cdot 100 \cdot 3 + 10y)\,y]\,y + \\ + \{3\,(100 \cdot 3 + 10y)^2 + [3\,(100 \cdot 3 + 10y)\,z]\,z\}\,z. \qquad (3)$$

Илдизнинг ўнлар хонасидаги рақамни топишда зарур бўлган (3) тенгликдаги ўрта қавс ичидаги $3\,(100 \times \times 3)^2 \cdot 10$ ва $3 \cdot 100^2 \cdot 3$ йиғинди ҳисоблаш жадвалида қуйидагича бўлади: асосдаги 3 ни ўз-ўзига қўшиб, йиғинди 6 ни 3 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги сонга қўшилади. Ҳосил бўлган 27 нинг рақамларини бир хона ўнгга, асосдаги 6 га 3 ни қўшиб, йиғинди 9 ни икки хона ўнгга суриб ёзилганда $3(100\cdot3)^2\cdot10=$ $=700\,000$ ва $3\cdot100^2\cdot3=90\,000$ ҳосил бўлади. Бу сонларни Нишопурий жадвалда 21-шаклдагидек кўрсатади.

Тусий ҳисоблаш тахтасида олдинги рақамларни учириб, сон, квадрат ва асос қаторидаги охирги натижаларни шундай ёзади:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 7\dot{0}12\dot{2}25 \\ 2700000 \\ 90000 \end{array}$$

Илдизнинг ўнлар хонасидаги рақам бундай аниқланади: (3) тенгликдаги

$$[3\cdot(100\cdot3)^2\cdot10+100(3\cdot100\cdot3+10y)y]y=$$
$$=[2700\,000+(90\,000+1\,000y)y]y. \qquad (3')$$

Йиғинди ками билан 27 ўн мингликларни ташкил қилади. Демак, уни 70 ўн мингликдан излаш керак, яъни $2700\,000y=700\,000$ дан $y=\frac{70}{27}=2$ қолдиқ билан, қолдиққа эътибор бермаганда топилган 2 илдизни ўнлар хонасида рақам бўлиши учун (3′) тенгликдаги y нинг ўрнига қўйиб, (3′) йиғиндини ҳисоблаганда 7 012 225 дан катта бўлмаслиги керак, акс ҳолда ундан кичик сонлар синаб кўрилади. (3′) ни ҳисоблаб 7 012 225 дан айирилса, (3′) тенглик шундай кўринишга келади:

$$1\,244\,225=\{3(100\cdot3+10\times$$
$$\times2)^2+[3(100\cdot3+10\cdot2)+$$
$$+z]z\}z \qquad (4)$$

ёки

$$1\,244\,225=[307\,200+$$
$$(960+z)z]z. \qquad (5)$$

(3) тенгликдаги ўрта қавс ёки (3′) тенглик жадвалда бундай ҳисобланади: топилган илдизнинг иккинчи рақами 2 ни иккинчи грандаги нуқта устига (22-шакл) ва асосдаги 9 ни ўнг қисмига қўйиш натижасида ҳо-

22-шакл.

сил бўлган 92 ни 2 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги 2700 га қўшилганда 2884 ҳосил бўлади, буни яна 2 га кўпайтириб, сон қаторидаги 7012 дан айирилса, 1244 қолади. Бу эса учинчи грандаги рақамлар билан 1 244 225 ни ҳосил қилади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши 22-шаклдагидек бўлади.

Тусий қаторлардаги охирги натижаларни бундай ёзади:

3			2			
$\dot{1}$	2	4	$\dot{4}$	2	2	5
	2	8	8	4		
			9	2		

Илдизнинг охирги учинчи рақамини топиш учун олдинги усул бўйича, яъни (4) дан (5) тенгликка ўтиш учун асосдаги 92 га 2 ни қўшиб (23-шакл), ҳосил бўлган 94 ни яна 2 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги 2884 га қўшилади. Ҳосил бўлган 3072 нинг рақамлари ўнг томонга бир хона сурилса, (4) тенгликдаги катта қавс ичидаги биринчи йиғинди $3(100\cdot 3+10\cdot 2)^2 = 307\,200$, асосдаги 94 ни яна 2 га қўшиб ҳосил бўлган 96 нинг рақамлари ўнг томонга 2 хона сурилганда, иккинчи йиғинди $3(100\cdot 3-10\cdot 2) = 960$ ҳосил бўлади, бу ҳолда жадвалнинг кўриниши 23-шаклдагидек бўлади. Тусий қаторлардаги охирги натижани қуйидагича ёзади:

3			2			
$\dot{1}$	2	4	$\dot{4}$	2	2	5
	3	0	7	2		
			9	6		

	3			2				
3 2 1	4 7 7 5 2 1	0 7 3 2	1 6 5 4	2 8 4	2	2	5	Сон қатори
1 2	9 8 7 2 3	7 1 8 1 0 3	3 8 7 0	4 8 2 7	2			Квадрат қатори
	3 3 6 3 9		9	2 2 4 2 6	9	6		Асос қатори

23- шакл.

Илдизнинг охирги рақами (5) тенгликка асосан топилади. Бунинг учун (5) тенгликдаги z нинг ўрнига шундай энг катта бир хонали сон z_1 ни қўйиб ҳисоблаганда, ҳосил бўлган сон (5) тенгликнинг ўнг қисмидаги 1 244 225 дан катта бўлмаслиги керак, акс ҳолда ундан кичик сонлар синаб кўрилади. Синаб кўриладиган илдизнинг рақамини бир йўла аниқлаш учун 1 244 225 ни квадрат қаторидаги 307 200 га ёки 12 442 ни 3072 га бўлинади (3 072$z_1 = 12\,442$, бундан $z_1 = 4 + \frac{154}{3072}$) бўлинманинг бутун қисми 4 синаладиган илдизнинг рақами бўлади. Топилган 4 илдизнинг охирги рақами эканлигини тасдиқловчи (5) тенгликнинг ўнг қисми жадвалда шундай ҳисобланади: топилган илдизнинг охирги рақами 4 ни 96 нинг ўнг қисмига (24-шакл) қўйиб, ҳосил бўлган $(960+4) = 964$ ни 4 га кўпайтириб, кўпайтма $(960+4) \cdot 4 = 3\,856$ ни квадрат қаторидаги 307 200 сонга қўшилади, ҳосил бўлган йиғинди $[307\,200 + (960+4) \cdot 4] = 311\,056$ ни яна 4 га кўпайтириб, кўпайтма $[307\,200 + (960+4) \cdot 4]\, 4 = 1\,244\,244$ ни 1 244 225 дан айирилса, қолдиқ 1 бўлади. Демак, берилган 34 012 225 дан 1 гача аниқлик билан тақрибий илдиз 324 чиқиб, сон қаторида 1 қолдиқ қолади. Охирги жадвалнинг кўриниши 24-шаклдагидек бўлади.

	3			2			4	
3 2 1	4 7 7 5 2 1 1	0 7 3 2 2	1 6 5 4 4	2 8 4 4	2 2	2 2	5 4 1	Сон қатори
1 2	9 8 7 2 3	7 1 8 1 0 3	8 8 6 7 0 0 1	4 8 2 7 3 1	2 8 0	5	6	Квадрат қатори
	3 3 6 3 9		9	2 2 4 2 6	9	6	4	Асос қатори

24-шакл.

Сон қаторида қолдиқ қолганлиги учун изланган илдиз иррационал сондан иборат бўлиб, унинг тақрибий қийматини оддий каср билан ифодалаш қуйидагича амалга оширилди: агар берилган A соннинг биргача аниқлик билан олинган куб илдизини a билан белгиласак, уни $a < \sqrt[3]{A} < a + 1$ кўринишда ёзиш мумкин. Бунда

$$\sqrt[3]{A} = a + r \quad (r < 1). \tag{6}$$

Илдиз таърифига асосан, $A = (a + r)^3$ ёки $A = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$; бундан r ни топсак:

$$r = \frac{A - r^3}{3a^2r + 3ar^2 + r^3}. \tag{7}$$

(6) ва (7) дан $\sqrt[3]{A}=a+\frac{A-a^3}{3a^2+3ar+r^2}$. Агар (7) даги r нинг ўрнига 1 қўйилса: $\frac{A-a^3}{3a^2+3ar+r^3}>\frac{A-a^3}{3a^2+3a+1}$

Демак, $\frac{A-a^3}{3a^2+3a+1}$ ифода куб илдизнинг каср қисмининг ками билан олинган тақрибий қийматидир. Шундай қилиб изланган илдизнинг тақрибий қиймати

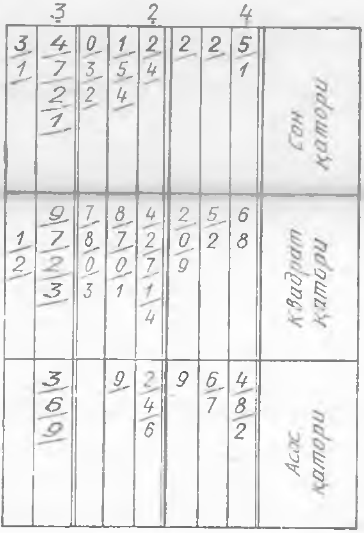
$$\sqrt[3]{A}\approx a+\frac{A-a^3}{3a^2+3a+1} \quad \text{ёки} \quad \sqrt[3]{A}\approx\frac{A-a^3}{3\cdot a(a+1)+1} \qquad (8)$$

формуладан аниқланади.

Шарқ математиклари (8) формулани сўз билан баён этишган.

Юқоридаги мисолда изланган илдиз иррационал сон бўлиб, унинг тақрибий қиймати (8) формулага асосан топилади, яъни 324 ни ўзидан битта катта $324+1=325$ га кўпайтирилса 105300, уни учлантириб, бир қўшилса, касрнинг махражи 315 901 ҳосил бўлади. Демак, изланган илдизнинг тақрибий қиймати $324\frac{1}{315901}$ аралаш сонга тенг. Тусий ва Нишопурийлар шу аралаш сонни $324\frac{1}{315901}$ кўринишда ёзишган.

Тусий (8) формуладаги касрнинг махражини жадвалдан топиш йўлини мана бундай баён этади: асосдаги $3(100x+10y)+z=964$ га илдизнинг охирги рақами 4 ни қўшиб, йиғинди $3(100x+10y)+2z=968$ ни тўртга кўпайтириб, квадрат қаторидаги $3(100x+10y)^2+[3(100x+10y)+z]z=311056$ га қўшилса, квадрат қаторида $z[3(100x+10y)+2z]+3(100x+10y)^2+[3(100x+10y)+z]z=314928$ ҳосил бўлади ва



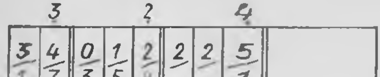
	3			2			4	
3 1	4 7 2 1	0 3 2	1 5 4	2 4	2	2	5 1	Сон қатори
1 2	9 7 2 3	7 8 0 3	8 7 0 1	4 2 7 1 4	2 0 9	5 2	6 8	Квадрат қатори
	3 6 9		9	2 4 6	9	6 7	4 8 2	Асос қатори

25- шакл.

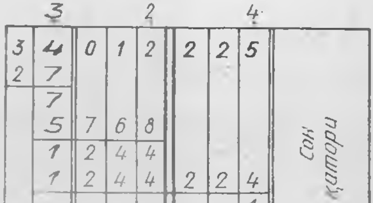
асосдаги 968 га яна 4 ни қўшилса, асосда $[3(100x+10y)+2z]+z=972$ ҳосил бўлади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши 25-шаклдагидек бўлади.

Қаторлардаги охирги натижаларни қўшиб, бу йиғиндини битта орттирилса, (3) формуладаги касрнинг махражи чиқади, яъни $314928+972+1=z[3(100x+10y)+2z]+3(100x+10y)^2+[3(100x+10y)+z]z+[3\times(100x+10y)+2z]+z+1=z[3(100x+10y+z-z)+2z]+3(100x+10y+z-z)^2+[3(100x+10y+z-z)+z]z+[3(100x+10y+z-z)+2z]+z+1=z[3(a-z)+2z]+3(a-z)^2+[3(a-z)+z]z+[3\times(a-z)+2z]+z+1=3az-3z^2+2z^2+3a^2-6az+3z^2+3az-3z^2+z^2+3a-3z+2z+z+1=3a^2+3a+1=3a(a+1)+1=315901.$

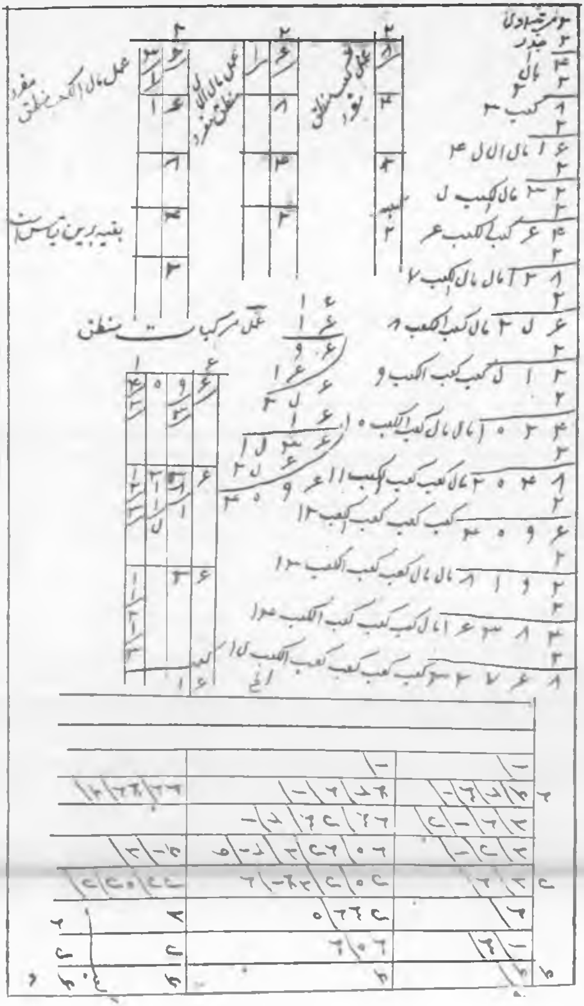
Сонлардан квадрат илдиз чиқаришга ўхшаш, сон, квадрат ва асос қаторларида кўпайтмани ёзиб ёки ёзмасдан қўшиш ва айириш амалининг бажарилишига қараб, сонлардан куб илдиз чиқариш икки хил кўринишда бўлади (26- ва 27-шакллар).



26-шакл.



27- шакл.



28- шакл. 2818 номерли машқ дафтарида даражага кўтариш ва куб илдиз чиқариш усули.

Коший ўзининг китобида сонлардан куб илдиз чиқариш усулини мисол билан кўрсатмайди. Сонлардан иккинчи ва исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқаришда қаторлардаги кўпайтмаларни бирдан ёзиб, қўшиш ва айириш амалини бажаради. Агар юқоридаги мисол Коший усулида ечилса, у 27- шакл кўринишида бўлади.

27- шаклнинг бошқалардан фарқи шундаки, квадрат ва асос қаторларида илдизнинг биринчи рақами жадвал тагига ёзилади. Қолган амаллар ҳам жадвалнинг тагидан юқорига қараб бажарилади, чунки бу усул квадрат қаторидаги сонларни бир хона ўнг томонга суриш учун қулай. Бундан ташқари, бу усул янги ўрганувчилар учун тушунарлидир.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида илдиз чиқариш амалини баён этишда биринчи навбатда Коший усули бўйича ҳар бир қатордаги кўпайтмани бирдан ёзиб, сўнгра бу кўпайтмани ёзмасдан қўшиш ва айиришни бажариш йўли кўрсатилади (28- шакл).

Сонлардан куб илдиз чиқариш усули кўрсатилгандан сўнг, сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усули баён этилади.

4- §. Бутун сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш ва биномиал теоремани баён этиш усуллари

„Сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш“ темасининг қўйилиши ва унинг методи тўғрисида „Сонларни даражага кўтариш, квадрат ва куб илдиз чиқариш“ темасини ўтишда тушунча берилган эди. Дарслик китобларда бу тема юқорида қўйилган ном билан аталмасдан, „Даражанинг биринчи асосини топиш“ („Истеҳрожи амали зиль“) номи билан, машқ дафтарларида эса „Тўртинчи, бешинчи ва ундан ортиқ кўрсаткичли илдиз чиқариш“ номи билан аталади. Сонлардан квадрат ва куб илдиз чиқариш каби сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш ҳам „Машҳур“ ва „ Жадвал“ усулида баён этилади.

Жамшид Кошийнинг „Арифметика калити“ китобига А. П. Юшкевич ва Б. А. Розенфельдлар томонидан кўрсатилган изоҳда ва А. П. Юшкевичнинг „Ўрта асрларда математика тарихи" („История математики в средние века") китобида бутун сонлардан квадрат ва куб илдиз чиқариш ҳиндларга илгари маълум бўлганлиги, лекин кўрсаткичи учинчи даражадан юқори бўлган ҳол ҳинд адабиётида учрамаслиги ва араб адабиётида биринчи бўлиб, кейинчалик „Руффини — Горнер схемаси" деб аталган схемада куб илдиз чиқаришни Насавий кўрсатганлиги айтилади.

А. П. Юшкевич ва Б. А. Розенфельдлар Умар Хайём ва Беруний „Сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш" ҳақида алоҳида асар ёзганлигини, X асрнинг иккинчи ярмида эса Абул Вафо ҳам сонлардан учинчи ва еттинчи даражали илдиз чиқаришни кўрсатганлигини, аммо ҳозиргача бу асарлар топилмаганлигини айтадилар. Улар бу фикрларни якунлаб, араб адабиётида Кошийдан олдин ўтган математикларнинг бу ҳақдаги ижоди очиқ қолади, дейдилар.

Бизнинг текширишларимиздан шу нарса аниқланадики, Жамшид Кошийдан 162 йил олдин (1265 йилда) Насириддин Тусий сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини баён этган*.

Тусий квадрат ва куб илдиз чиқариш усули каби, сонлардан исталган кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини ҳам ҳисоблаш тахтасида олдинги рақамларни ўчириб ўрнига ёзиш билан бажаради. У илдиз курсаткичига қараб қаторлар (хоналар) га бўлиш йўли ва буларнинг номини илдизнинг рақамларини топиш усулларини умумий кўринишда тўлиқ баён этиб, мисолда берилган бутун сондан 6-даражали илдиз чиқаришни курсатади. Тусий иррационал илдизнинг тақрибий қийматини топиш учун зарур бўлган кетма-кет бўлмаган сонларнинг исталган даражасининг айирмасини аниқлаш йўлини кўрсатади.

„Сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш" темаси бошқа темаларга нисбатан мураккаб бўлганлиги учун баъзи машқ дафтарларида ва дарслик китобларида факат сонлардан куб издиз чиқариш билан чегараланилган, қисман дарсликларда сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усули мисолда тушунтирилади. Масалан, Аҳрор Махсум Тошкентликнинг машқ дафтарида тўртинчи даражали ил-

---

* Насириддин Тусий. „Жоми ул-ҳисоб бит-тахти ва ат-тураб". Инв, № 8990/6. Шарқшунослик институти кутубхонаси.

диз чиқариш, муаллифи номаълум бўлган ва Ҳисомиддин Хўжанинг машқ дафтарларида бешинчи даражали илдиз чиқариш баён этилади, сўнгра, умумий ҳолда илдиз чиқариш йўли кўрсатилади. Сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш ҳақида ёзилган асарлар орасида ҳозирча бизга маълум бўлганлари ўрта аср Шарқ математикларидан Насириддин Тусий, Жамшид Коши йлар ва булардан кейинги асрларда яшаган муаллифларнинг асрларидир. Булар сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқараш амалини умумий ҳолда шундай баён этадилар: агар исталган даражанинг биринчи асосини топиш талаб қилинса, берилган сонни куб илдиз чиқаришга ўхшаш жойлаштириб, ҳар бир рақамини вертикал параллел чизиқлар орасига олинади. Илдизнинг даража кўрсаткичига тенг қилиб, ўнгдан чапга қараб гранларга ажратилади ва ҳар бир граннинг бирлар хонасидаги рақам устига нуқта қўйилади. Жадвал маълум оралиқда илдиз кўрсаткичи қадар горизонтал чизиқ билан бўлинади. Юқоридан биринчи қаторга берилган сон ва илдиз рақамларининг энг юқори даражаси, кейинги қаторларга даража кўрсаткичи биринчи даражагача биттадан камайиб борувчи илдиз рақамларининг даражалари ёзилади. Илдизнинг чапдан биринчи рақами охирги грандаги сондан илдиз чиқариш билан топилади. Топилган рақам охирги грандаги нуқтанинг устига ва унинг тўғрисига асос қаторига ёзилади. Сўнгра буларнинг бирбирига кўпайтмаси квадрат қаторига, биринчи кўпайтманинг яна илдизнинг биринчи рақамга кўпайтмаси куб қаторига, иккинчи кўпайтмани яна илдизнинг биринчи рақамига кўпайтириб, тўртинчи даража қаторига худди шу усулда давом этиб ёзилади. Юқоридан иккинчи қатордага сонни илдизнинг биринчи рақамига кўпайтириб, охирги кўпайтмани чапдан биринчи грандаги сондан айирилади. Айирмани машҳур усулда, биринчи грандаги соннинг рақамларини ўчириб ўрнига, жадвалда эса охирги кўпайтма тагига ёзилади. Илдизнинг иккинчи рақамини топиш учун асосдаги сонни ўз-ўзига қўшиб, йиғиндини илдизнинг биринчи рақамига кўпайтириб, квадратлар қаторидаги сонга қўшилади. Ҳосил бўлган йиғиндини яна биринчи рақамга кўпайтириб, кублар қаторидаги сонга қўшилади. Шу тартибда кўпайтириб, қўшиб боришни юқоридан иккинчи қаторгача олиб борилади. Сўнгра асосдаги йиғиндига биринчи рақамни қўшиб, бу йиғиндини яна биринчи рақамга кўпайтириб, қўшиб боришни юқоридан учинчи қаторгача олиб борилади. Юқоридаги тартибда асосдаги охирги йиғиндига юқоридаги биринчи рақамни қўшиб, бу йиғиндини биринчи рақамга кўпайтириб, қўшиб боришни асосга етгунча давом эттирилади. Сўнгра юқоридан иккинчи қатордаги охирги йиғиндининг рақамларини бир хона ўнгга, учинчи қатордаги охирги йиғиндини икки хона ўнгга, худди шу тартибда асосга етгунча бир хонадан ошиб ўнгга суриб борилади. Натижада асосдаги соннинг бирлар хонасидаги рақам чапдаги иккинчи грандаги соннинг ўнлар хонасидаги рақам тўғрисига тушади.

Илдизнинг иккинчи рақами шундай шарт бўйича топилади, яъни асосдаги сурилган соннинг ўнг томонига шундай бир хонали энг катта сон қўйиш натижасида ҳосил бўлган сонни иккинчи рақамга кўпайтириб, квадрат қаторидаги сурилган сонга қўшилади. Йиғиндини яна иккинчи рақамга кўпайтириб, куб қаторидаги сурилган сонга қўшилади. Хидди шу тартибда давом этиб, юқоридан иккинчи қаторда ҳосил бўлган сонни иккинчи рақамга кўпайтириб, охирги кўпайтмани чапдан биринчи ва иккинчи грандаги сондан айирилади. Энг катта бир хонали сон илдизнинг иккинчи рақами бўлиши учун охирги кўпайтма биринчи ва иккинчи грандаги сондан катта бўлмаслиги керак. Акс ҳолда яна бошқа бир хонали сон синаб кўрилади. Агар илдизнинг иккинчи рақамини топиш мумкин бўлмаса, бир хонали сонларнинг энг кичиги 1 ни қўйиб синалганда, охирги кўпайтма биринчи ва иккинчи грандаги сондан катта бўлса, асосдаги соннинг ўнг томонига ва иккинчи грандаги нуқта устига ноль қўйиб, олдинги тартибда қаторлардаги сонларни яна ўнг томонга суриб, юқоридаги йўл билан илдизнинг учинчи рақами изланади Илдизнинг қолган рақамлари ҳам шу йўл билан топилади.

Агар илдизнинг охирги рақамини топишда сон қаторида қолдиқ қолмаса, изланган илдиз рационал сондан, агар қолдиқ қолса, изланган илдиз иррационал сондан иборат бўлади. Иррационал илдизнинг тақрибий қиймати қуйидаги формула асосида аниқланади: агар берилган A соннинг биргача аниқлик билан олинган n-даражали илдизи a билан белгиланса,

$$a < \sqrt[n]{A} < a + 1 \qquad (1)$$

ёки

$$\sqrt[n]{A} = a + r \tag{2}$$

бўлади, бунда $r < 1$. Илдизнинг таърифига асосан

$$A = (a + r)^n. \tag{3}$$

(3) тенглик бином формуласи бўйича ёйилиб, r га нисбатан ечилса:

$$r = \frac{A - a^n}{na^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} \cdot 1 + \ldots + 1^{n-1}} \approx$$

$$\approx \frac{A - a^n}{na^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} \cdot 1 + \ldots + 1^{n-1}} \approx \frac{A - a^n}{(a + 1)^n - a^n}. \tag{3'}$$

(2) ва (3) тенгликдан

$$\sqrt[n]{A} \approx a + \frac{A - a^n}{(a + 1)^n - a^n}. \tag{4}$$

Ўрта аср Шарқ математиклари илдизнинг рақамларини ва (4) формуладаги касрнинг махражини аниқлашда бином формуласи ва биномиал коэффициентлардан фойдаланадилар.

Бином ва биномиал коэффициентларнинг тарихий ривожланиши ҳақида А. П. Юшкевич ва Б. А. Розенфельдларнинг Жамшид Кошийнинг „Арифметика калити“ номли китобига берган изоҳларида қадимги ҳиндларга бином ҳақидаги теореманинг хусусий ҳоли ($n = 3$) маълум эканлигини, XI асрнинг бошларида Абу Бакр Муҳаммад Хосиб Кархий бином кўрсаткичи $n=4$ гача бўлган ҳолни кўрганлигини, 1303 йилда Хитой математиги Чжу Ши-Цзе бином кўрсаткичи $n = 3$ гача бўлганда биномиал коэффициентларнинг жадвалини берганлигини ва Европада 1544 йилда немис алгебрачиси М. Штифель сонлардан илдиз чиқариш учун бином кўрсаткичи 17 гача бўлганда биномиал коэффициентлар жадвалини тузганлигини уқтириб ўтадилар. Бу фикрларни якунлаб Юшкевич ва Розенфельдлар кўрсаткичи исталган натурал сондан иборат бўлган бином формуласини биринчи бўлиб Коший асарида кўрилган бўлса ҳам буни Коший ўзи кашф этмаганлигини, у ўз асарининг муқаддимасида айтиб ўтганлигини кўрсатиб, Кошийдан олдин бу формула Ўмар Хайём асарида берилган бўлса керак, деб тахмин қиладилар.

Насириддин Тусий Кошийдан 162 йил олдин (4) формуладаги касрнинг махражини аниқлаш учун кўрсаткичи исталган натурал сондан иборат бўлган бином формуласини ва биномиал коэффициентларни аниқлаш усулини ва буларнинг хоссасини тўлиқ баён этади.

Юқорида келтирилган мураккаб қоида бўйича Тусийнинг ечган мисолини ҳарфий белги киритиб „Машҳур“ ва „Жадвал“ усулида бажарсак, Ўрта Осиё математикларининг сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш амалини қайси асосда бажарганликларини кўрсатган бўламиз. Масалан, 244 140 626 дан 6-даражали илдиз чиқариш талаб қилинса, буни гранларга ажратилганда, изланган илдиз $10x+y$ кўринишдаги икки хонали сондан иборат бўлади, яъни

$$\sqrt[6]{244\,140\,626} = 10x + y. \qquad (5)$$

Илдизнинг таърифи бўйича,

$$244140626 = (10x + y)^6. \qquad (6)$$

Тенгликнинг ўнг қисми бином формуласи бўйича очилса:

$$\begin{aligned}244140626 = {} & (10x)^6 + 6\,(10x)^5y + 15\,(10x)^4y^2 + \\ & + 20\,(10x)^3\,y^3 + 15\,(10x)^2\,y^4 + 6\,(10x)\,y^5 + y^6. \qquad (7)\end{aligned}$$

Насириддин Тусий (7) тенглик асосида илдизнинг ўнлар хонасидаги рақамни шундай топади: берилган 244 140 626 юқоридаги қоида бўйича жадвалга жойлаштирилиб (29-шакл), гранларга ажратилади, изланган илдизнинг ўнлар хонасининг 6-даражаси $(10x)^6$ чапдан биринчи грандаги 244 миллионнинг ичида бўлганлиги учун илдизнинг ўнлар хонасидаги рақам (x) 244 нинг 6-даражали илдизи 2 дан иборат бўлади. Топилган биринчи грандаги нуқта устига ва унинг тўғрисига, асосга ёзилади. Илдизнинг ўнлар хонасининг 6-даражаси $(10x)^6$ ни ҳисоблаш учун юқоридаги 2 билан асосдаги 2 нинг кўпайтмаси 4 квадрат қаторига, 4 нинг 2 га кўпайтмаси 8 куб қаторига, 8 нинг 2 га кўпайтмаси 16 тўртинчи даража қаторига, 16 нинг 2 га кўпайтмаси 32 бешинчи даража қаторига ёзилади. Охирида 32 нинг 2 га кўпайтмаси 64 сон қаторидаги 244 дан айирилади. Айирма 180 нинг рақамлари қия чизиқ тагига ёзилади. Коший буни жадвалда 29-шаклдагидек кўрсатади.

		2						
1	8	0	1	4	0	6	2	6
	3	2						
	1	6						
		8						
		4						
		2						

Тусий қолдиқ қаторларидаги сонларни ва илдизнинг рақамини жадвалсиз шундай кўринишда жойлаштиради:

$\frac{2}{1}$	4 $\frac{6}{8}$	4 $\frac{4}{.}$	1	4	0	6	2	6	Сон қатори (Сатри адад)
	3	2							Бешинчи даража қатори (Сатри мол-ал-каъб)
	1	6							Тўртинчи даража қатори (Сатри мол-ал-мол)
		8							Куб қатори (Сатри каъб)
		4							Квадрат қатори (Сатри мол)
		2							Асос қатори (Сатри зиль)

29-шакл.

$\frac{2}{1}$	4 $\frac{6}{8}$	4 $\frac{4}{0}$	1	4	0	6	2	6	Сон қатори
1	1 9 3	9 2 2	2						Бешинчи даража қатори
2	4 8 1	2 0 0 6	4	0					Тўртинчи даража қатори
1	6 8 3	0 0 2 8	1	6	0				Куб қатори
	6 4 2 1	0 0 4 2 4			6	0			Квадрат қатори
	1 1	2 0 8 6 4 2				1	2		Асос қатори

30-шакл.

Топилган илдизнинг ўнлар хонасидаги рақам 2 ни (7) тенгликдаги x нинг ўрнига қўйиб, илдизнинг ўнлар хонасининг 6-даражаси $(10x)^6$ ни берилган 2441 40626 дан айирилса:

$$180\,140\,626 = 6\,(10\cdot 2)^5\,y + 15\,(10\cdot 2)^4\,y^2 + 20\,(10\cdot 2)^3\,y^3 + + 15\,(10\cdot 2)^2\,y^4 + 6\,(10\cdot 2)\,y^5 + y^6 \qquad (8)$$

бўлади. Энди

$$180\,140\,626 = \varphi(y) \qquad (9)$$

дейлик, яъни

$$\varphi(y) = 6\,(10\cdot 2)^5\,y + 15\,(10\cdot 2)^4\,y^2 + 20\cdot(10\cdot 2)^3\,y^3 + + 15\,(10\cdot 2)^2\,y^4 + 6\,(10\cdot 2)\,y^5 + y^6. \qquad (10)$$

Насириддин Тусий илдизнинг бирлар хонасидаги рақамини топишдан олдин $\varphi(y)$ нинг коэффициентини ҳисоблаш йўлини кўрсатади, яъни (10) тенгликдаги $(10\cdot 2)^5$, $(10\cdot 2)^4$, $(10\cdot 2)^3$, $(10\cdot 2)^2$ ва $(10\cdot 2)$ лар 29-шаклдаги 32, 16, 8, 4, 2 сонларнинг рақамларини чапдан тартиб билан бир, икки, уч, тўрт ва беш хона ўнгга суриш натижасида ҳосил бўлган 3200000 160000, 8000, 400 ва 20 (жадвалда ноллар қўйилмайди) сонлардан иборатдир. Тусий шуни эътиборга олиб, (10) тенгликдаги биномиал коэффициент 6,15 ва 20 ни жадвалда шундай аниқлайди (30-шакл): асосдаги 2 ни юқоридаги 2 га қўшиб, ҳосил бўлган $4 = 2\cdot 2$ ни 2 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги $4 = 2^2$ га қўшилади. Йиғинди $3\cdot 2 = 12$ ни 2 га купайтириб, куб қаторидаги $8 = 2^3$ га қўшилади. Шу таргибда кўпайтириб қўшиб борилса, бешинчи даража қаторида $192 = 6\cdot 2^5$, сўнгра асосдаги $4 = 2\cdot 2$ га 2 ни қўшиб, йиғинди $6 = = 2\cdot 3$ ни 2 га купайтириб, квадрат қаторидаги $12 = = 3\cdot 2^2$ га қўшилади, шу тартибда купайтириб қўшиб борилса, тўртинчи даража қаторида $240 = 15\cdot 2^4$, асосдаги $6\cdot 3\cdot 2$ га 2 ни қўшиб, йиғинди $8 = 2^3$ ни 2 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги $24 = 3\cdot 2^3$ га қўшилади. Йиғинди $40 = 5\cdot 2^3$ ни 2 га кўпайтириб, куб қаторидаги $80 = 10\cdot 2^3$ га қўшилса, $160 = 20\cdot 2^3$ бўлади. Асосдаги $8 = 4\cdot 2$ ни 2 га қўшиб, йиғинди $10 = 5\cdot 2$ ни кўпайтириб, квадрат қаторидаги $40 = 10\cdot 2^2$ га қўшилса, $60 = 15\cdot 2^2$ бўлади. Охирида асосдаги $10 = 5\cdot 2$ ни 2 га қўшилса, $12 = 6\cdot 2$ ҳосил бўлади. Қаторлардаги ҳосил бўлган $192 = 6\cdot 2^5$ нинг рақамларини бир хона, $240 = 15\cdot 2^4$ ни икки хона, $160 = 20\cdot 2^3$ ни уч хона, $60 = 15\cdot 2^2$ ни тўрт хона, охирида асосдаги 12 ни беш хона ўнгга сурилса, $\varphi(y)$ кўпҳаднинг коэффициентлари ҳосил бўлади. Насириддин Тусий қаторлардаги сонларни 180140626 қолдиқнинг тагига шу кўринишда жойлаштиради:

$$\begin{array}{r} 180140626 \\ 19200000 \\ 2400000 \\ 160000 \\ 6000 \\ 120 \end{array}$$

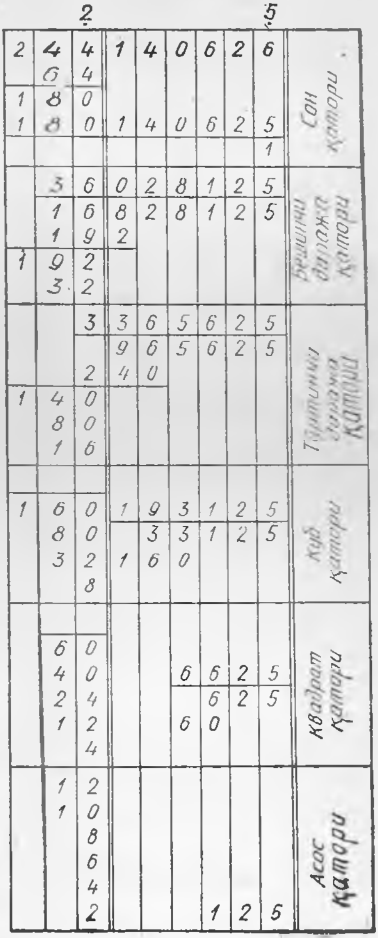
Жадвалда ҳисобланган $\varphi(y)$ нинг коэффициентлари ўрнига қўйилса, у шундай кўринишга келади:

$$\varphi(y) = 19\,200\,000y + 2\,400\,000y^2 + 160\,000y^3 + 6\,000y^4 + 120y^5 + y^6. \qquad (11)$$

y қавсдан ташқарига чиқарилса,

$$\varphi(y) = \{19\,200\,000 + [2\,400\,000 + ['160\,000 + [''6\,000 + (120 + y)\cdot y]''y]'y]''y\}y. \qquad (12)$$

Насириддин Тусий (12) тенгликка асосан, илдизнинг бирлар хонасидаги рақамни жадвалда шундай шарт бўйича топади, яъни асосдаги 12 нинг ўнг қисмига шундай энг катта бир хонали сонни (0, 1, 2, ..., 9 сонлар ичида) қўйиш натижасида ҳосил бўлган $(120 + y_1)$ сонини y_1 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги 6000 га қўшади. Йиғинди $[''6\,000 + (120 + y_1)\,y_1'']$ ни яна y_1 га кўпайтириб, куб қаторидаги 160 000 га қўшади. Шу тартибда кўпайтириб, қўшиб боришни сон қаторигача олиб борилганда, ҳосил бўлган $\varphi(y_1)$ нинг 180 140 626 қолдиқдан катта бўлмаслиги, акс ҳолда y_1 дан кичик сонларни синаб кўриш тавсия қилинади.



31- шакл.

Юқоридаги шарт бўйича топилган илдизнинг бирлар хонасидаги рақам $y_1 = 5$ ни асосдаги 12 нинг ўнг қисмига ((12) тенгликка ва 31-шакл) ва иккинчи грандаги нуқта устига қўйиб, асосда ҳосил бўлган $(120 + y_1) =$

$= 125$ ни 5 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги 600 га қўшилади, йиғинди $|''6000 + (120 + y_1)\, y_1''| = 6625$ ни 5 га кўпайтириб, куб қаторидаги 1600 0 га қўшилади, бу тартибда давом эттириб, охирида бешинчи қаторда ҳосил бўлган $\{\ \} = 36028125$ ни 5 га кўпайтириб, сон қаторидаги 180140626 дан айирилса, $(180140626 - \varphi(y) = = 1)$ қолдиқ қолади. Тусий илдизнинг рақамларини, қолдиқни ва қаторлардаги сонларни бундай кўринишда жойлаштиради:

	2						5
0	0	0	0	0	0	0	1
3	6	0	2	8	1	2	5
	3	3	6	5	6	2	5
		1	9	3	1	2	5
				6	6	2	5
					1	2	5

Сон қаторида қолдиқ қолганлиги учун изланган илдиз иррационал бўлиб, унинг тақрибий қиймати (4) формулага асосан қуйидагича бўлади:

$$25 \frac{1}{26^5 - 25^5},$$

Насириддин Тусий бином ёйилмасини ва унинг коэффициентларини аниқлаш билан илдизнинг тақрибий қиймати бўлган касрнинг махражидаги кетма-кет сонларнинг бир хил исталган даражасининг айирмасини ҳисоблаш йўлини кўрсатади.

Агар кетма-кет сонларнинг бир хил даражасининг айирмасини $(a+1)^n - a^n$ кўринишда ёзиб, биринчи ҳадни бином формуласи билан ёйиб ихчамланса, у бундай кўринишга келади:

$$(a+1)^n - a^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} + \ldots + 1^n - a^n =$$
$$= na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} + \frac{n(n-1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} + \ldots + 1. \quad (13)$$

Илдизнинг тақрибий қиймати бўлган касрнинг махражи $26^6 - 25^6$ ни (13) тенглик билан ҳисобласак:

$$26^6 - 25^6 = (25+1)^6 - 25^6 = 25^6 + 6 \cdot 25^5 + 15 \cdot 25^4 + 20 \cdot 25^3 +$$
$$+ 15 \cdot 25^2 + 6 \cdot 25 + 1 - 25^6 = 6 \cdot 25^5 + 15 \cdot 25^4 + 20 \cdot 25^3 +$$
$$+ 15 \cdot 25^2 + 6 \cdot 25 + 1 = 58593750 + 5859375 +$$
$$+ 312500 + 9375 + 150 + 1. \quad (14)$$

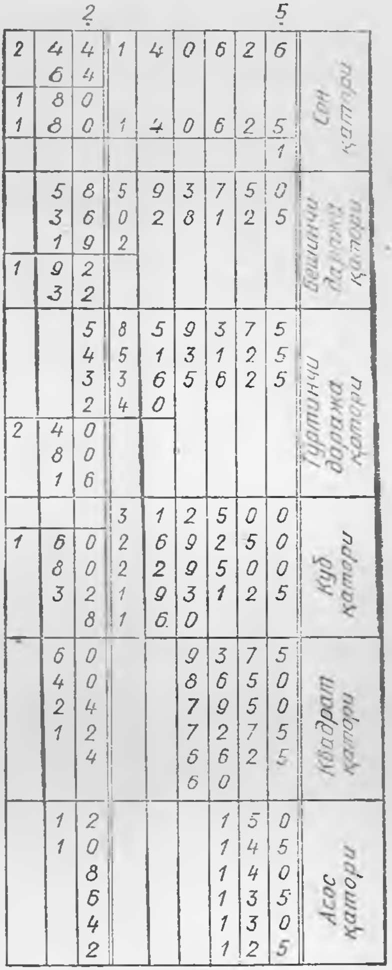
Насириддин Тусий, Жамшид Коший кетма-кет сонларнинг бир хил даражасини ҳисоблашни икки хил усулда бажариш йўлини кўрсатади. Биринчи усулда (14) тенгликнинг ўнг қисмидаги охирги йиғинди жадвалда қуйидагича аниқланади: илдизнинг иккинчи рақами 5 ни топиш учун биринчи рақам 2 ни қаторлардаги сонларга қандай тартибда кўпайтириб қўшилган бўлса, 5 ни ҳам шу тартибда қаторлардаги охирги сонларга кўпайтириб қўшилганда (32-шакл) бешинчи даража қаторида 58593750, тўртинчи даража қаторида 5859375, куб қаторида 312500, квадрат қаторида 9375 ва асосда 150 ҳосил бўлади. Тусий қаторлардаги аниқланган сонларни қуйидагича ёзади:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \overset{2}{\dot{}} & & & & & & \overset{5}{\dot{}} \\
5 & 8 & 5 & 9 & 3 & 7 & 5 & 0 \\
 & 5 & 8 & 5 & 9 & 3 & 7 & 5 \\
 & & 3 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\
 & & & & 9 & 3 & 7 & 5 \\
 & & & & & 1 & 5 & 0
\end{array}$$

Каторлардаги аниқланган сонларнинг йиғиндисига бир қўшилса, изланган айирма ҳосил бўлади: $26^6 - 25^6 = 58\ 593\ 750 + 5\ 859\ 375 + 312\ 500 + 9\ 375 + 150 + 1 = 64\ 775\ 151$. Илдизнинг тақрибий қиймати қуйидагича:

$$25\frac{1}{26^6-25^6} = 25\frac{1}{64775151}$$

(аслида $\begin{matrix}25\\1\\64775151\end{matrix}$ каби ёзилади).



32- шакл.

$26^6 - 25^6$ айирма иккинчи усулда (14) тенгликдаги биномиал коэффициентларни аниқлаш билан ҳисобланади. Масалан, бином кўрсаткичи 6 бўлганда ёйилмадаги биномиал коэффициентларни (ёйилмадаги биринчи ва охирги ҳад олдидаги коэффициентлар ҳисобга

Сон қатори	
Бешинчи даража қатори	6 1
Тўртинчи даража қатори	15 5 1
Куб қатори	20 10 4 1
Квадрат қатори	15 10 6 3 1
Асос қатори	6 5 4 3 2 1

33-шакл.

Бином кўрсаткичи ва унга тегишли биномиал коэффициентлар	Иккинчи даража (мол)											2
	Учинчи даража (каъб)										3	3
	Тўртинчи даража (мол-ал-мол)									4	6	4
	Бешинчи даража (мол-ал-каъб)								5	10	10	5
	Олтинчи даража (каъб-ал-каъб)							6	15	20	15	6
	Еттинчи даража (мол-мол-ал-каъб)						7	21	35	35	21	7
	Саккизинчи даража (мол-каъб-ал-каъб)					8	28	56	70	56	28	8
	Тўққизинчи даража (каъб-каъб-ал-каъб)				9	36	84	126	126	84	36	9
	Ўнинчи даража (мол-мал-каъб-ал-каъб)			10	45	120	210	252	210	120	45	10
	Ўн биринчи даража (мол-каъб-каъб-ал-каъб)		11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
	Ўн иккинчи даража (каъб-каъб-каъд-ал-каъб)	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12

34-шакл.

олмайди) аниқлаш учун жадвал чизиб, жадвални (33-шакл) бином курсаткичига тенг қилиб, горизонтал тўғри чизиқлар билан 6 га бўлинади. Сон қаторига ноль, унинг ташқарисига ва асосга бир қўйилади.

29-шаклда илдизнинг бирлар хонасидаги рақамни топиш учун ўнлар хонасидаги рақам 2 ни қандай тартибда кўпайтириб қўшиш бажарилган бўлса, жадвал ташқарисига қўйилган 1 ни (фақат сон қатори ноллигича қолади) ҳам асосдаги 1 га шундай тартибда купайтириб қўшиш бажарилади. Бу ҳолда асосда 6, квадратда 15, кубда 20, тўртинчи даражада 15 ва бешинчи даража қаторида 6 (булар жадвалда тўқ қора рангда кўрсатилган) ҳосил бўлади. Буларнинг олтинчи даража кўрсаткичининг элементлари биномиал коэффициентлар номи билан аталади. Тусий биномиал коэффициентларни аниқлаш усулини жадвалда даража кўрсаткичи 2 дан 12 ғача бўлган биномнинг учбурчак шаклидаги биномиал коэффициентларининг биринчи ва охирги ҳад коэффициентларини ҳисобга олинмаган ҳолда 34-шаклдаги кўринишда беради.

Жамшид Коший кўрсаткичи 9 гача бўлган биномнинг биномиал коэффициентлари жадвалини кўрсатиб, „қаторлар" ни жадвалдан белгилаб беради. Насириддин Тусий эса ўнг томондан бошлаб, вертикал устундаги сонлар асос қатори, чап устундаги сонлар квадрат, куб ва ҳоказо қаторлардан иборат эканлигини оғзаки баён этади.

Насириддин Тусий биномиал коэффициентлар жадвалини ва уларнинг хоссасини қуйидагича тушунтиради.

„Агар даража элементлари (биномиал коэффициент) ни топишни истасак, квадрат учун битта — икки, куб учун иккита сон — уч ва уч, бундан кейин даража кўрсаткичларининг икки четдаги даража элементлари биттадан ортиб боради. Ҳар биридан икки четдан тенг узоқликда турган даража элементлари тенг булади. Масалан, „квадрат-квадоат" учун икки тарафда тўрт-тўрт ва орасида олти бўлади. Квадрату куб учун икки тарафдан беш—беш орасида ўн —ўн булади. Кубу куб учун икки тарафда олти—олти орасида учта сон бўлиб, булардан четдагиси ўн беш—ўн беш, ўртадагиси йигирма бўлади.

Агар тарафлардаги сонни, бирор даражанинг коэффициентларини билсак, кейинги қатордаги оралиқни топиш учун илгаригидаги қўшни сонларни (қўшни биномиал коэффициентларни) йиғамиз Йиғинди кейинги қатордаги оралиқ сонга тенг бўлади. Масалан, куб уч ва уч, йиғиндиси олти бўлиб, бу квадрат-квадрат учун ўртадир. Квадрат квадрат (тўртинчи даража) нинг коэффициентлари тўрт—олти—тўрт бўлиб, тўрт билан олтининг йиғиндиси (ўн) квадрату куб (бешинчи даража) учун ўрта сондир. Қолган даражаларнинг ўрта коэффициентлари шу тартибда топилади".

Коший ҳам шу тартибда биномиал коэффициентларнинг хоссасини баён этади. Улар бином ёйилмасидаги биринчи ва охирги ҳад коэффициентлари 1 ни жадвалда кўрсатмаган бўлсалар ҳам керакли ўринда ишлатганлар. Тусий юқорида кўрсатилган усул бўйича биномиал коэффициентларнинг хоссаси, яъни тенг узоқликда турган коэффициентлар тенг эканлигини, биномиал коэффициентлар орасидаги $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$ қоида мавжудлигини кўрсатади.

Исталган даражанинг биномиал коэффициентлари аниқлангач ва биномиал коэффициентларнинг жадвали берилгач, кетма кет ва кетма-кет бўлмаган икки рационал соннинг бир хил даражасининг айирмасини топиш усули баён этилиб, бу орқали махраждаги $26^6 - 25^6$ ни хисоблашдаги иккинчи усул кўрсатилади.

Олдин (13) тенглик қоида кўринишида шундай баён этилади: кетма-кет икки рационал соннинг бир хил даражасининг айирмасини топиш учун кичик асосни биринчи, иккинчи, учинчи ва ҳоказо даражасини даража кўрсаткичининг биномиал коэффициентларига тартиб билан кўпайтириб, кўпайтмаларнинг йиғиндисига бир қўшиш керак. Шу келтирилган қоида бўйича $7^4 - 6^4$ ҳисобланади. Бунинг учун 4-даражанинг биномиал коэффициентлари 4, 6 ва 4 ни жадвалдан аниқлаб, кичик асоснинг биринчи, иккинчи ва учинчи даражаси 6, 36 ва 216 ларга тартиб билан кўпайтириб, кўпайтмаларнинг йиғиндиси $4 \cdot 6 + 6 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^3$ га бир қўшилса, изланган айирма чиқади, бу қуйидаги тартибда ёзилади:

4	216	864	864
6	36	216	216
4	6	24	24
			1
			1105

Топилган соннинг тўғри эканлиги ҳар бир соннинг даражасини ҳисоблаб айириш усули билан текширилади. Шу йўл билан юқоридаги мисолнинг махражидаги $26^6 - 25^6$ ҳисобланади, яъни 25 нинг биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва бешинчи даражасини (кичик асоснинг даражаси биномиал коэффициентлар сонига тенг бўлиши керак) 6-даражанинг биномиал коэффициентлари 6, 15, 20, 15 ва 6 га кўпайтирилиб, кўпайтманинг йиғиндиси $6 \cdot 25^1 + 15 \cdot 25^4 + 20 \cdot 25^3 + 15 \cdot 25^2 + 6 \cdot 25$ га бир қўшилса, изланган айирма чиқади. Бу қуйидаги тартибда бажарилади:

$25^5 = 9765625$	$6 \cdot 25^4 = 58593750$	58593750
$25^4 = 390625$	$15 \cdot 25^4 = 5859375$	5859375
$25^3 = 15625$	$20 \cdot 25^3 = 312500$	312500
$25^2 = 625$	$15 \cdot 25^2 = 9375$	9375
$25^1 = 25$	$6 \cdot 25^1 = 150$	150
		1
		64775151

Тусий кетма-кет бўлмаган сонларнинг бир хил даражасининг айирмасини топишда умумий ҳолда бином формуласи $(a+b)$ нинг ёйилмасини оғзаки кўрсатади. У мисолда 9^4-6^4 ни формула асосида шундай аниқлайди:

$$9^4-6^4=(6-3)^4-6^4=6^4+4\cdot6^3\cdot3+6\cdot6^2\cdot3^2+$$
$$+4\cdot6\cdot3^3+3^4-6^4=4\cdot3\cdot6^3+6^2\cdot3^2\cdot6+4\cdot6\cdot3^3+3^4. \quad (15)$$

Аслида (15) тенглик қуйидагича бажарилади:

$$\begin{array}{lllll}
6^3=216 & 4\cdot6^3=864 & 3^1=3 & 4\cdot6^3\cdot3=2592 & 2592 \\
6^2=36 & 6\cdot6^2=216 & 3^2=9 & 6\cdot6^2\cdot3^2=1944 & 1944 \\
6=6 & 4\cdot6=24 & 3^3=27 & 4\cdot6\cdot3^3=648 & 648 \\
 & & & & \underline{81} \\
 & & & & 5265
\end{array}$$

2-бўлим. ЎРТА ОСИЁДА КАСР СОНЛАР АРИФМЕТИКАСИНИНГ ЎҚИТИЛИШ ТАРИХИ

I БОБ ЎРТА ОСИЁ МАТЕМАТИКЛАРИНИНГ АСАРЛАРИДА ОДДИЙ КАСРЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАРНИНГ БАЖАРИЛИШ УСУЛЛАРИ

1-§. Оддий касрларнинг вужудга келиш тарихи

Сон тушунчаси кенгайтирилишининг биринчи босқичи, яъни каср сон тушунчасининг киритилиши кишилик жамияти тараққиётининг дастлабки босқичларидан бошланади. Дастлабки вақтларда кишилар каср сўзини эшитмаса ҳам бирлик касрлар: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{8}$, яъни ярим, чорак ва нимчоракни турмуш эҳтиёжларига татбиқ қилиб келганлар, бунга мисрликларнинг эрамиздан илгариги икки мингинчи йилларга оид қадимий Ахмес қўлланмасида сақланган ёдгорликда бирлик касрлар учун алоҳида белгилар ишлатганлиги далил бўла олади.

Мисрликлар дастлаб асоси 2 бўлган касрлар $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right.$ ва $\left.\frac{1}{32}\right)$ ни билганлар, кейинчалик эса сурати фақат 1 бўлган бирлик каср $\left(\frac{1}{n}\right)$ ни ишлатганлар. Бирлик касрни асосий каср деб қабул қилиб, $\frac{2}{n}$ кўринишдаги касрларни ҳисоблаш ўнғайсиз деб, уларни миқдор жиҳатидан тенг бўлган бирлик касрлар йиғиндиси билан алмаштирганлар. Масалан, $\frac{2}{5}$ ни $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ билан; $\frac{2}{7}$ ни $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ билан; $\frac{2}{9}$ ни $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$ билан; $\frac{2}{11}$ ни $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$ билан; $\frac{2}{13}$ ни $\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$ билан ва ҳ. к. алмаштирганлар.

Сурати 2 дан катта бўлган касрлар эса сурати 2 ва 1 дан тузилган касрлар йиғиндиси бўйича ажратилиб, жадвал орқали ҳисобланган. Мисрликларнинг усули бўйича $\frac{m}{n}$ ни $\frac{1}{n}$ касрларга алмаштиришда умумий қонуният мавжуд бўлганлиги учун бу ҳақида турлича фикрлар бўлса ҳам ҳозирча бу масала тўла ҳал қилинмаган.

Мисрликлар $\frac{m}{n}$ кўринишдаги касрларни ёзишни билмаганлар, бирлик касрни унинг махражидаги сонни аниқловчи белги устига нуқта қўйиш орқали тасвирлаганлар. Масалан, $\frac{1}{10}$ касрнинг махражидаги 10 ни аниқловчи ⁄ белги унинг устига нуқта қўйиш билан i кўринишда ёзилган. Фақат $\frac{2}{3}$ каср алоҳида белги билан ёзилган.

Фан тараққиётида Миср фанининг аҳамияти катта. Уларнинг текшириш методлари ва чиқарган хулосаларининг асосий қисмлари турли халқларда минг йиллар давомида сақланиб келмоқда. Масалан, мисрликларнинг бирлик каср билан ҳисоблаш усули Пифагор даврида юнонларга, булар орқали ўрта аср Шарқ математикларига ўтади.

Юнон ва ўрта аср Шарқ математикларида каср ҳақидаги тушунча мисрликларга нисбатан юқори босқичда бўлса ҳам, улар амалий ишларда бирлик каср билан ҳисоблаш усулидан фойдаланадилар. Бирлик каср билан ҳисоблаш усулини Ўрта Осиё математикларининг арифметик асарларида ва кейинги даврлардаги мадрасада ўқитилган дарсликларда ҳам учратиш мумкин. Бунга Муҳаммад Хоразмий, Абул-Вафо, Ҳосиб Кархий, Насавий, Тусий, Али Қубовий ва бошқаларнинг асарлари мисол бўла олади. Юнонлар бирли ва олтмишли касрни амалий ҳисоблашларда ишлатиш билан тарихда биринчи бўлиб оддий касрнинг бошланғич амалий ва назарий асарларини яратадилар. Юнонлар бирли касрдан бошқа касрларни ёзишни ҳам билганлар ва уларни геометрик миқдорларни ўлчашга татбиқ қилганлар.

Римликлар оддий каср тушунчасини тараққий эттирмасдан бобилликва мисрликларга ўхшаш хусусий ҳолдаги касрларни кўрсатадилар. Улар мустақил равишда, асоси 12 бўлган касрларни тузадилар ва уларни ҳисоблашга татбиқ қиладилар. Римликларнинг ўн иккили системадаги касрлари амалий характердадир, яъни улар оғирлик ўлчови асса* нинг $\frac{1}{12}$ бўлагини унсиа (uncia) номи билан атаб, бундан $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{11}{12}$ касрларни тузганлар. Бу касрлар алоҳида белги ва номлар билан аталган. Қолган касрлар эса ана шу касрлар ёрдамида ҳисобланган. Масалан, $\frac{1}{24}$ каср $\frac{1}{2}$ унсиа; $\frac{1}{48}$ каср $\frac{1}{4}$ унсиа; $\frac{1}{74}$ каср $\frac{1}{6}$ унсиа ва ҳоказо деб ўқилган. Бу системада 12 нинг юқори даражасини ҳисоблаш ва назарий асослаш қийинлиги сабабли уни амалда ишлатиш ноқулай бўлган.

Мисрликлар ва юнонлар оддий касрларнинг бошланғич амалий ва назарий асосларини кўрсатган бўлсалар, ҳиндлар оддий каср ғоясини ривожлантирадилар. Улар ижод этган ўнли позицион система оддий каср ғоясини тез ривожлантиришдаги асосий факторлардан ҳисобланади. Улар амалда бирли касрни ишлатган бўлсалар-да, қадимдан $\frac{m}{n}$ кўринишдаги оддий касрни билганлар. Оддий касрларни тасвирлаш ва улар устида амаллар бажариш ҳозирги усулга жуда яқин бўлган. Ўзаро савдо алоқалари натижасида, ҳиндларнинг оддий каср ғояси, ўнли позицион система билан биргаликда, араблар орқали Ўрта Осиёга ўтади. Ҳиндлар ўнли позицион системасини биринчи бўлиб тарғиб қилувчи Ўрта Осиё математикларидан Муҳаммад Хоразмий ўзининг арифметика ва алгебрага доир асарларида оддий касрларни тасвирлаш ва улар билан тўрт амал бажариш усулларини кўрсатади. Бундан ташқари, сонлардан тақрибий квадрат илдиз чиқаришда оддий касрларни мукаммал татбиқ қилади. Хоразмийдан кейинги даврларда Шарқ математикларидан Абул-Вафо, Ҳосиб Каркий, Насавий, Беруний, Умар Хайём, Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар оддий касрлар ғоясини илмий ва методик томондан тараққий эттирдилар. Уларнинг асарлари асосида мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида амалларни бажариш усули такомиллаштирилади ва белгилар киритилади.

---

* Римликлар жездан ясалган танга пулнинг оғирлигини асса деб атаганлар.

Китобнинг иккинчи булимининг биринчи бобида, юқорида айтиб ўтилган Ўрта Осиё математикларининг асарларида ва шу асарлар асосида мадрасада ўқитилган дарсликларда оддий касрларни ўқитиш тарихини ёритишни мақсад қилиб қўйдик.

2- §. Каср сонлар ҳақида тушунча ва уларнинг тасвирланиши

Ўрта Осиё математиклари ва уларнинг асарлари асосида мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари оддий касрларни ўрганишга катта аҳамият берадилар. Бунинг сабаби, биринчидан, талабаларда оддий касрлар бўйича яхши малака ҳосил қилиш ҳамда математиканинг алгебра ва геометрия каби тармоқларини ўзлаштириш учун зарур бўлса, иккинчидан, оддий касрлар бошқа (олтмишли ва ўнли) касрларга нисбатан тарихан олдин вужудга келиши билан амалиётда илгарироқ қўллана бошланганлигидир. Масалан, ҳали кишилар каср сўзини эшитмаса ва билмаса ҳам $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{8}$ ларни ярим, чорак ва нимчорак номлари билан атаб, буларни амалиётга тадбиқ қилганлар.

Мадрасада ўқитилган математиканинг амалий қисми „Мерос тақсим қилиш“ номи билан аталади. Бунда Ўрта аср Шарқ математикларининг асарлари асосида тузилган, шариат нормаларига қараб, меросхўрлар ўртасида мулкни тақсимлашга доир кўпгина турлича масалалар оддий касрлар ёрдамида ҳал қилинади. Айрим ҳолларда ўнли каср ишлатилади. Юқорида айтилганлардан шундай хулоса чиқариш мумкинки, мадрасада ўқитилган математика курсида оддий касрларни ўқитишга катта эътибор берилади. Шу билан бир қаторда дарслик ва машқ дафтарларидаги каср сонлар бобида, аввал оддий каср, сўнг унинг хусусий ҳоли сифатида ўнли ва олтмишли касрлар ўрганилади.

Мадрасада ўқитилган дарсликлардаги касрларнинг систематик курсида ҳамма айний шакл алмаштиришларга, бутун сонлар билан бажариладиган амалларнинг хоссаларига, сонларнинг бўлиниш белгиларига, сонларни туб купайтувчиларга ажратиш ва ҳоказоларга асосан қоидалар чиқарилади.

Ўрта Осиё математиклари ва мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари каср сонларнинг ҳосил бўлишидаги иккита манбани: 1) бутун сонларнинг бирини иккинчисига бўлиш натижаси каср ҳосил бўлишини, 2) миқдорларни ўлчаш натижаси сифатида каср ҳосил бўлишини бир қанча мисолларда кўрсатиб, сўнг каср сонларга таъриф берадилар. Масалан, Али Қубавий ва айрим дарсликларнинг муаллифлари бутун сонларни бирини иккинчисига бўлишда, агар бўлинувчи бўлувчидан кичик бўлса, бўлинма каср сондан иборат бўлиши, агар бўлувчи нолга тенг бўлмаса, бўлиш амали ҳамма вақт мавжуд эканлигини уқтирадилар. Мисолда 2 ни 3 га, 3 ни 4 га ва ҳоказо бўлганда бўлинма каср эканлиги улушлар ёрдамида тушунтирилади, яъни 2 ни 3 га бўлиш шундай тушунтирилади: бирни тенг 3 булакка бўлсак, учдан бир ҳосил бўлади, шунингдек, иккинчи бирликни ҳам тенг учга бўлсак, яна учдан бир ҳосил бўлади, шундай қилиб, бўлинма учдан икки каср сондан иборат эканлигини кўрамиз. Шу каби бир қанча мисоллар кўрсатилгандан сўнг Ўрта Осиё математиклари касрларни ҳосил қилишдаги биринчи манбага асосланиб каср сонга таъриф берадилар. Уларнинг таърифлари Евклид „Негизлари“ нинг VII китобида берилган таърифга мос келади. Ўрта Осиё математиклари асарларининг кўпчилигида ва мадрасада уқитилган дарсликларда касрга берилган таърифлар турлича иборалар билан айтилса ҳам уларнинг ҳаммасида каср бирнинг бир ёки бир неча улушларини ифодаловчи сон эканлиги тушунтирилади

Баъзи бир машқ дафтарларида ва дарсликларда касрга таъриф берилмасдан каср тушунчаси конкрет характердаги мисолларда берилган.

Ўрта Осиё математикларидан Ғиёсиддин Коший ва бошқа дарсликларнинг муаллифлари, касрларнинг ҳосил бўлишидаги иккинчи манба асосида, касрга таъриф берадилар. Коший „Арифметика калити“ ва „Арифметика калитининг хулосалари“ номли китобларида аввал бутун сон ҳақида „Агар сон мустақил миқдор деб қаралса, у бирор миқдорга қаратилмаган бўлса, у бутун булади“ деган таърифни беради. Сўнгра бунга қиёс қилиб, касрни қуйидагича таърифлайди: „Сон бирор миқдорнинг ифодаси бўлиб, у иккинчи миқдорга қаратилган бўлса, бу сон каср дейилади“. Кошийнинг таърифидаги „қаратилган“ сузининг маъноси, биринчи миқдор иккинчи миқдорнинг бирор бўлаги билан ўлчанишини билдиради. Шуни эътиборга олиб, Коший қаратилган иккинчи миқдорни бирлик деб олиб, уни махраж деб, биринчи миқдорни ўлчаш натижасида ҳосил бўлган сонни сурат деб атайди. У мисолда бирор кесма (бирор миқдор) ни иккинчи кесма (қаратилган миқдор) бўлаклари ёрдамида ўлчаш натижасида ҳосил бўлган сон каср эканлигини кўрсатади.

Араб тилида „каср“ сўзи синдириш маъносини билдиради. Шарқда бу ибора ўзгаришсиз қабул қилинган. Европада эса каср сузи ўрнига „синдириш“ маъносида турлича сўзлар ишлатилган. Масалан, қадимги руслар „синиқ сон“, немислар „bruch“ ва инглизлар „fraction“ сўзларини ишлатганлигини учратамиз.

Оддий касрнинг ҳозирги кўринишда ёзилиши қадимда ҳиндлардан бошланган. Ҳиндлар касрнинг сурати билан махражини ҳозиргидек чизиқ билан ажратмасдан, махраж устига суратни, аралаш сондаги бутунни эса сурат устига ёзганлар Масалан, $5\frac{3}{4}$ каср $\begin{matrix}5\\3\\4\end{matrix}$ кўринишда ёзилган. Ҳинд арифметикасини тарғиб қилувчи Муҳаммад Хоразмий ва ундан кейинги Шарқ математиклари ҳам касрни ҳиндлар каби тасвирлаганлар. Оддий касрларнинг юқоридаги кўринишда тасвирланиш сабаби ёки бундай кўринишда ёзиш нима билан боғлиқ эканлиги ҳақида математика тарихида маълумот берилмаган. Бизнинг мулоҳазамиз бўйича Шарқ математикларининг оддий касрларни шу кўринишда ёзишлари, бугун сонларнинг қолдиқли бўлиш усули билан боғлиқдир. Бутун сонларни қолдиқли бўлиш амали „ҳисоблаш тахтаси“ да ортиқча амалларни ўчириб, ўрнига ёзиш йўли билан бажарилади. Охирги натижа бўлган бутун, қолдиқ ва бўлувчилар тўғридан-тўғри аралаш каср кўринишида ёзилади. Масалан, Тусий бўлишнинг „Машҳур усули“ номи билан 416 ни 18 га қуйидагича булади: аввал у берилган сонни $\begin{matrix}416\\18\end{matrix}$ кўринишда ёзади. Сўнгра 41 ни 18 га бўлиб, бўлинма 2 ни 41 нинг бирликлари устига, қолдиқ 5 ни эса 41 ни ўчириб, унинг ўрнига шундай ёзади: $\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & 5 & 6\\ 1 & 8 & \end{array}$. Охирида 18 нинг рақамларини бир хона ўнгга суради ва 56 ни 18 га бўлиб, бўлинма 3, қолдиқ 2 ва бўлувчи 18 ларни қуйидагича ёзади: $\begin{array}{cc}2&3\\ &2.\\1&8\end{array}$ Демак, 416 ни 18 га бўлганда чиққан бўлинма бутун 23, қолдиқ 2 ва бўлувчи 18 нинг ёзилиши юқорида баён этилган аралаш касрнинг тасвиридир. Бундан шундай хулоса чиқариш мумкин. Ўрта аср Шарқ мамлакатларида оддий касрнинг юқоридаги кўринишда тасвирланиши тасодифий бўлмасдан, балки у бутун сонларнинг қолдиқли бўлиш усули билан боғлиқдир.

XIII асрда Муҳаммад Нишопурий ва ундан кейинги муаллифлар аралаш сондаги касрни алоҳида кўрсатиш учун бутуннинг тагига чизиқ чизганлар. Масалан, $2\frac{2}{3}$ ни $\begin{array}{c}2\\ \hline 2\\3\end{array}$ кўринишда ёзганлар. XIII асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб аралаш сондаги бутуннинг ўрни касрга нисбатан ўзгартирилади ва у касрнинг ўнг ёки чап ёнига ёзилади. Ниҳоят, XVI асрдан бошлаб Европада аралаш сон ҳозирги кўринишда тасвирлана бошланган. Шарқда эса XX асргача эски одат бўйича, касрни чизиқ билан ажратмасдан юқорида кўрсатилгандек тасвирланиб келинган. Буни Ўрта Осиё математикларининг XX асргача ёзилган асарларида ва мадрасада ўқитилган дарсликларда кўриш мумкин. Мадрасада ўқитилган дарсликларда касрни тасвирлашнинг эски кўриниши XX асргача сақланиб қолишининг сабаби дарсликларда бутун сонларни қолдиқли булишнинг эски (машҳур) усулининг кўрсатилиши билан боғлиқдир.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда аралаш соннинг хусусий ҳоли тўғри каср эканлигини кўрсатиш мақсадида аралаш соннинг бутун хонасига ноль қўйиш билан тўғри каср тасвирланган. Масалан, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ ва $\frac{5}{6}$ касрлар бундай ёзилади: $\begin{array}{c}0\\3\\4\end{array}$, $\begin{array}{c}0\\5\\7\end{array}$ ва $\begin{array}{c}0\\5\\6\end{array}$.

Ўрта Осиё математиклари касрда нечта улуш борлигини кўрсатувчи сонни касрнинг сурати деб атамасдан, касрнинг асл маъноси бўйича „каср“ деб атаганлар, касри олинган бирликни эса ҳозиргидек касрнинг махражи деб атаганлар

Ўрта Осиё математиклари каср тушунчасини ўзига хос метод билан баён этадилар. Улар касрнинг махражига қараб, сурат қандай бўлиши ва миқдори тенг бўлган касрнинг турлича кўринишда тасвирланишини тушунтирадилар. Масалан, агар касрнинг махражи 4 бўлса, унинг сурати 1, 2, 3 бўлганда, $\begin{matrix}0\\1\\4\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\2\\4\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\3\\4\end{matrix}$ касрлар бир бирликнинг тўртдан 1, 2 ва 3 бўлагини ифода қилишини, $\begin{matrix}0\\2\\4\end{matrix}$ билан $\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$ касрларнинг миқдори тенг эканлигини, $\frac{3}{4}$ каср ярим билан чоракнинг йиғиндиси $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$дан тузилганлигини ва у чораккам бир деб ўқилишини кўрсатадилар. Ўрта Осиё математикларидан Хоразмий, Насавий Абул-Вафо, Тусий, Коший ва бошқалар сурати фақат бир бўлган касрларни амалий машғулотларда қўллаш қулай бўлишини назарда тутиб, махражи 2 дан 11 гача бўлган тўққизта бирлик касрни араб тилида алоҳида номлар билан атайдилар: $\frac{1}{2}$ — нисф; $\frac{1}{3}$ — сулс; $\frac{1}{4}$ — рубъ; $\frac{1}{5}$ — хумс, $\frac{1}{6}$ — судс, $\frac{1}{7}$ — субъ, $\frac{1}{8}$ сумн, $\frac{1}{9}$ — тусъ, $\frac{1}{10}$ — ъушр.

Муҳаммад Хоразмийдан кейин ёзилган математикага доир асарларда ва мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида мазкур касрларни алоҳида ўринга ёзиб „тўққизта каср“ (кусури тисъа) номи билан атайдилар. Бу тўққизта касрга қўйилган номлар (яримдан бошқа) махраждаги бутун сонлар номининг ўзагидан олинган. Масалан, 3 салоса ва 5 хамса номлари билан аталса, $\frac{1}{3}$ сулс ва $\frac{1}{5}$ хумс номлари билан аталади.

3- §. Касрларнинг классификацияси

Касрларнинг классификацияси амалий машғулотларда аҳамиятга эга бўлмаганлиги учун ҳозирда улар классификация қилинмайди. Фақат касрнинг уч тури: тўғри каср, нотўғри каср ва аралаш сон ҳақида тушунча бериб, сўнг уларнинг ҳосил бўлиш манбалари ва булар орасидаги муносабатлар кўрсатилади. Ўрта асрда эса бундай бўлмасдан Шарқ математиклари бутун сонларнинг тузилишига қиёс қилиб каср сонлар классификациясини кўрсатадилар. Масалан, Тусий, Нишопурий, Коший, Қубовийларнинг асарларида ва муаллифи номаълум „Каср сонлар арифметикаси ҳақидаги рисола" номли асарда ва бошқа дарсликларда каср сонларнинг қуйидагича классификацияси кўрсатилади: 1) Касрнинг махражи биргина рақамдан ёки битта рақам ва бир нечта ноллар билан тугаган сондан тузилса, бундай каср „содда каср", махражи икки ва ундан ортиқ хонали сондан тузилса, бундай каср „мураккаб каср" дейилади. Масалан, $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{40}, \frac{9}{100}, \ldots$ касрлар содда, $\frac{1}{13}, \frac{4}{15}, \frac{3}{127}, \ldots$ лар мураккаб касрлардир. 2) Касрлар суратига қараб иккига бўлинади: сурати бирга тенг булган $\frac{1}{m}$ кўринишидаги касрлар „бирлик", сурати бирдан катта бўлган $\frac{n}{m}$ $(m > n > 1)$ кўринишдаги касрлар „каррали" касрлар дейилади. 3) „Тўққизта каср" билан аниқ ифодалаш мумкин бўлган касрлар ифодаланувчи ёки алмаштириладиган каср, аниқ ифодалаш мумкин бўлмаган касрлар ифодаланмайдиган ёки алмаштирилмайдиган каср дейилади. Масалан, $\frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}, \ldots$ касрларларни „тўққизта каср" билан аниқ ҳисоблаш мумкин, $\frac{3}{11}, \frac{2}{13}, \frac{5}{17}, \ldots$ касрларни эса аниқ ҳисоблаш мумкин эмас, шу сабабли биринчи касрлар „алмаштириладиган", иккинчи касрлар „алмаштирилмайдиган" касрлар дейилади.

Ўрта Осиё математиклари юқорида курсатилган каср турларидан алмаштириладиган касрларни тўрт амал ёрдамида „туққизта каср" билан аниқланишига қараб қуйидаги номлар билан атайдилар: туққизта каср йиғиндисидан тузилган касрлар „такрор каср" („кусури мукаррар") ёки келтирилган каср („кусури таркиб"); айирмадан тузилган касрлар „айирма касрлар" („кусури мустасно", кўпайтмадан тузилган касрлар „ҳосил қилувчи касрлар" („кусури музоф") ва бўлишдан тузилган касрлар „бўлинма каср" („кусур изофа"). Улар масалан, 1) $\frac{3}{5}$ ни учта $\frac{1}{5}$ касрнинг йиғиндиси деб қараб, уни „такрор каср" деганлар. 2) $\frac{10}{21}$ ни „келтирилган каср" деганлар, чунки у $\frac{1}{3}$ ва $\frac{1}{7}$ ларнинг йиғиндиси $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$ билан аниқланади. 3) $\frac{7}{18}$ ни „айирма каср" деганлар, чунки у $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{9}$ ларнинг айирмаси $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)$ билан алмаштирилади. 4) $\frac{1}{105}$ ни „ҳосил қилинувчи каср" деганлар, чунки у $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ва $\frac{1}{7}$ ларнинг кўпайтмаси $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\right)$ билан аниқланади. 5) $\frac{3}{14}$ ни „бўлинма каср" деганлар, чунки у $\frac{1}{7}$ билан $\frac{2}{3}$ нинг бўлинмаси $\left(\frac{1}{7}:\frac{2}{3}\right)$ деб қаралади.

Мураккаб каср номи „тўққизта каср" ва тегишли амал белгилари билан ўқилади. Масалан, тўртинчи мисолдаги $\frac{1}{105}$ ни „105 дан бир" деб ўқиш ўрнига $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ва $\frac{1}{7}$ касрлар номи билан қуйидагича ўқилади: сулс-хумс ас-субъ, яъни учдан бир, бешдан бир ва еттидан бирнинг кўпайтмаси.

Ўрта аср Шарқ математиклари, шахсан араблар тилидаги бир хилликни сақлаб қолиш учун „тўққизта каср" га араб тилида қўйилган ном билан ҳар қандай касрни ифодалашга катта аҳамият берганлар. Натижада юқорида кўрсатилган касрнинг мураккаб классификацияси вужудга келган. Масалан, Абул-Вафо арифметикага доир асарида $\frac{m}{n}$ $(n > m > 1)$ кўринишдаги касрнинг чиройли эмаслиги ва бундай касрдан қочиш кераклигини уқдириб, бу касрни „тўққизта каср" билан аниқ ёки тақрибий белгилашни тавсия қилади. Абул-Вафо $\frac{m}{n}$ кўринишдаги касрнинг чиройли эмас дейишига сабаб, шу даврда Шарқ савдогарлари, бойлар ва молия амалдорлари ҳисоблаш ишларида мураккаб касрни тўғридан-тўғри ишлатмасдан „тўққизта каср" комбинацияси билан белгилаб ҳисоблаганликларидадир. Ҳатто шу даврнинг олимлари ҳисоблашда кўп қўлланиладиган мураккаб касрларни бирлик каср комбинацияси билан белгилаш жадвалини тузганлар.

Шуни ҳам уқдириб ўтиш зарурки, юқорида кўрсатилган касрлар классификациясининг муаллифлари Тусий Нишопурий, Коший, Қубовийларнинг асарларида ва ундан кейинги даврларда ёзилган дарсликларда ҳар қандай касрни „туққизта каср“ билан ифодалаб ҳисобла масалар ҳам, бу асарларда эски одат бўйича касрларнинг юқорида кўрсатилган мураккаб классификацияси берилган. Бу ҳолни XX асргача Ўрта Осиё математикларининг асарларида ва мадрасада ўқитилган дарсликларда кўриш мумкин. Касрлар классификациясининг қисқача якуни тарзида, буни жадвалда шундай кўрсатиш мумкин:

Касрлар	Касрларни суратга қараб бўлиш	Содда (муфрад) касрлар	Мураккаб касрлар
Алмаштириладиган касрлар („Касри мунтақ“)	Бирлик (соф)	$\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{100}, \frac{1}{300} \ldots$	$\frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \ldots$
	Каррали (мукаррар)	$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{100}, \frac{7}{300}, \ldots$	$\frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{13}{18}, \ldots$
Алмаштирилмайдиган касрлар („Касри асам“)	Бирлик (соф)	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ ва $\frac{1}{7}$	$\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{2}{17}, \ldots$
	Каррали (мукаррар)	$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$	$\frac{5}{11}, \frac{7}{13}, \frac{6}{17}, \ldots$

Юқорида айтганлардан шундай хулосага келиш мумкин: 1) Ўрта аср Шарқ математиклари касрнинг асли мазмунига ва унинг қийматига кам эътибор бериб, каср номининг мантиқий мазмунига кўпроқ аҳамият берганлар, натижада касрнинг мураккаб классификациясини яратганлар; 2) қадимги мисрликлар каби ҳар қандай касрни бирлик каср комбинацияси билан ифодалаб ҳисоблаш одат тусига кириб қолган; 3) шарқ халқларининг иқтисодий, ижтимоий ҳамда кундалик турмушида ҳисоблаш ишлари тўққизта каср билан олиб борилган; 4) бутун сонларнинг бўлиниши (муфрад ва мураккаб) даги номларнинг мантиқий мазмунини сақлаб, уларни каср сонларга тадбиқ қилганлар.

4-§ Касрларнинг турлари. Каср миқдорининг ўзгариши ва унинг асосий хоссаларини ўқитиш усуллари

Ўрта Осиё математиклари ва мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари бу борада қуйидаги тартибда шундай масалаларни кўрдилар:

1. Касрларнинг турлари (тўғри каср, нотўғри каср ва аралаш сон) ни ҳосил қилишдаги йуллар.

2. Нотўғри касрни аралаш сонга ва аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш.

3. Каср ҳадларининг ўзгариши билан каср миқдорининг ўзгариши.

4. Касрларнинг асосий хоссаси.

Юқорида санаб ўтилган ҳар бир пункт қандай усулда баён этилганлигига батафсил тухталиб ўтамиз.

1. Ўрта Осиё математиклари бутун сонларни бўлиш натижаси сифатида каср сонларнинг турларини конкрет мисолда баён этадилар. Масалан, улар 3 : 7, 8 : 15, 17 : 19 ва ҳ. к. сонларни бўлиш натижасини каср кўринишда қуйидагича ёзадилар: $\begin{matrix}0&0&0\\3&8&17\\7&15&19\end{matrix}$ ва ҳоказо. Улар кўрсатилган мисоллардан қуйидаги хулосани чиқарадилар: агар юқорида тасвирланган касрларнинг ташқи кўринишига эътибор берилса, ҳар бир касрнинг сурати махражидан кичик эканлиги, ички мазмунига эътибор берилса, касрларнинг ҳар бири бирдан кичик эканлиги кўринади. Бундай касрлар „тўғри“ сўзини қўшмасдан, унинг асл маъноси бўйича „каср“ деб аталади.

Ўрта Осиё математиклари худди шу йўлда, конкрет мисоллар орқали $\frac{a}{a}$, $\frac{ka}{a}$ ва $\frac{a}{b}$ $(a > b)$ кўринишидаги касрлар „нотўғри каср“ номи билан аталишини, нотўғри каср ташқи кўринишдан сурати махражига тенг ёки ундан катта, ички мазмунига кўра эса у бирга тенг ёки бирдан катта бўлишини уқдирадилар.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда эса машқ тариқасида 1 ва исталган бутун сонни каср кўринишида $\left(1 = \frac{a}{a}\right.$ ва $\left.k = \frac{ka}{a}\right)$ ёзишга бир қанча мисоллар кўрсатилади. Касрнинг учинчи тури, яъни аралаш сон эса нотўғри касрнинг суратини махражига бўлиш орқали бутун $\left(\frac{ka}{a}=k\right)$ ва аралаш сон $\left(\frac{a}{b}=c+\frac{d}{b},\ d<b\right)$ ҳосил бўлиши конкрет мисолларда тушунтирилади.

Касрнинг тури ҳақида немис математиги И. Тропфке* бундай дейди: „XVI асргача каср деб фақат тўғри каср тушунилган, касрнинг бошқа турлари: нотўғри каср ва аралаш сонлар ҳақида алоҳида тушунча бўлмаган“. Тропфкенинг бу фикри Европа учун тўғри бўлиши мумкин. Шарқда эса XVI асрдан аввал ҳам касрнинг уч тури ҳақида аниқ тушунча бўлган. Масалан, Тусий** 1265 йилда ёзилган арифметикага доир қўлёзмасининг 140-бетда касрнинг уч тури: тўғри каср, нотўғри каср ва аралаш сонни текширади ва буларни „каср“, „каср роб“ ва „бутунлик каср“ номлари билан атайди. Аралаш сонни нотўғри касрга ва унинг тескарисига айлантириш йўлларини кўрсатади.

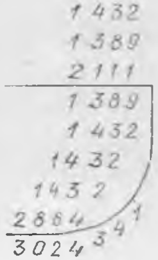
2. Ўрта Осиё математиклари каср сонлар устида амал бажариш учун нотўғри касрни аралаш сонга ва унинг тескарисига айлантириш муҳим ахамиятга эга эканлигини тушунтириб, ҳар иккала ҳолни конкрет мисолларда кўрсатадилар. Тусий, Абдурашид Сижовандий*** ва бошқалар аралаш сонни нотўғри касрга айлантиришни „каср жинсига келтириш“ („амали мужаннаса“) номи билан атайдилар. Масалан, $4\frac{3}{16}$ ни нотўғри касрга айлантиришни қуйидагича баён қиладилар: 4 бирликда ўн олтидан бир улуш $16 \cdot 4 = 64$ дан ибор т, бунга ўн олтидан уч улушни қўшилса, 67 бўлади, буни каср (сурат) хонасига ёзилади, 16 эса махраж қилиб қолдирилади. Натижа сўз орқали шундай кўринишда ёзилади: $\begin{matrix}4\\3\\16\end{matrix}$ аралаш сон $\begin{matrix}0\\67\\16\end{matrix}$ нотўғри касрга айлантирилади. Сўнг аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш йўли қоида кўринишида берилади.

---

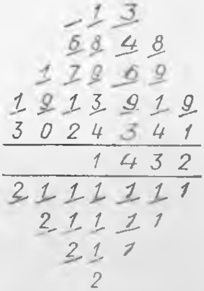
[*] Тропфке. История элементарной математики в систематическое изложение. I том, М., 1941 й. 13-бет.

[**] Насириддин Тусий. „Тахта ва тупроқ воситасида ҳисоблашлар тўплами“ ЎзФА Шарқшунослик институти. Инвентарь №899016, 140-бет.

[***] Абдурашид Сижовандий. — „Тиклаш ва қарама-қарши қўйиш ҳисоблашларига оид рисола“. ЎзФА Шарқшунослик институт. Инв. 5185—IV ва № 6425—IV—V. Араб тилида. 155-бет.



Мадрасада ўқитилган дарсликларда қисман белги киригиш мақсадида, араб алифбесида мужаннаса сўзини аралаш сон тагига ёзиб, сўнг уни нотўғри касрга айлантирганда ҳосил бўлган сон (сурат) мужаннаса белгиси тагига ёзилади. Масалан, $1432\frac{1389}{2111}$ нотўғри касрга шундай кўринишда айлантирилади:
Натижа: нотўғри каср шундай кўринишда ёзилади: $\overset{0}{\frac{3024341}{2111}}$



Нотўғри касрни аралаш сонга айлантириш „амали рафьқ“ номи билан аталиб, бу аралаш сонни нотўғри касрга айлантиришга тескари эканлиги кўрсатилади. Мисолда $\frac{302441}{2111}$ нотўғри касрнинг суратини махражига бўлиш* орқали у қуйидаги кўринишда аралаш сонга айлантирилади:
Натижа: аралаш сон шундай кўринишда ёзилади: $\begin{array}{c}1432\\1389\\2111\end{array}$. Мадрасада мударрис ёки математика ўқитувчиси, талабалари бутун сонлар устида кўпайтириш ва бўлиш амалини системали такрорлашларини назарда тутиб, улар аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш ва унинг тескарисини бажаришда, катта хонали сонлар билан амал бажариладиган мисолларни талабаларга мустақил иш тариқасида берадилар. Ўқитувчи топшириқнинг тўғри бажарилганлигини текширгандан сўнг ҳар бир талаба мустакил ишлаган мисолни ўзининг машқ дафтарига кўчиради.

3. Ўрта Осиё математиклари каср ҳадларининг ўзгариши билан каср миқдорининг ўзгаришини, яъни касрнинг сурати бир неча марта орттирилса ёки махражи бир неча марта камайтирилса, каср миқдори шунча марта ортиши ва касрнинг сурати бир неча марта камайтирилса ёки махражи бир неча марта орттирилса, каср миқдори шунча марта камайишини кон-

---

* С. А Ахмедов. Ўрта Осиёда математика ўқитиш тарихидан. Т., 1977 й. 135—136-бетлар.

крет мисолларда кўрсатадилар. Каср миқдорининг ўзгариши эса иккилантириш (амали тазъиф) — берилган сонни ўзини ўзига қўшиш ва яримлатиш (амали тансиф) — берилган сондан унинг ярмини айириш орқали баён этилади.

Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар каср ҳадларининг ўзгариши билан унинг миқдорининг ўзгаришини, хусусий ҳолда, иккилантириш ва яримлатиш амали ёрдамида қуйидаги тартибда баён қиладилар: 1) Тўғри касрни иккилантириш ва яримлатиш; 2) Аралаш сонни иккилантириш ва яримлатиш.

Улар тўғри касрни иккилантиришни қоида кўринишда шундай баён қиладилар: тўғри касрни иккилантириш (миқдорини икки марта орттириш, яъни унинг суратини икки марта орттириш) учун унинг суратини иккилантириб, ҳосил бўлган касрдан мумкин бўлса, бутун ажратиш керак, агар касрнинг махражи жуфт бўлса, унинг махражини яримлатиб, мумкин бўлса бутун ажратиш керак. Ҳар иккала ҳолда касрнинг миқдори икки марта ортади. Масалан: 1) $\begin{smallmatrix}0\\6\\7\end{smallmatrix}$ ни иккилантириш учун суратидаги 6 ни иккилантириб, чиққан кўпайтма $\begin{smallmatrix}0\\12\\7\end{smallmatrix}$ дан бутун ажратилса, $\begin{smallmatrix}1\\5\\7\end{smallmatrix}$ ҳосил бўлади. 2) $\begin{smallmatrix}0\\5\\8\end{smallmatrix}$ ни иккилантириш учун, махраждаги 8 ни яримталаб, чиққан бўлинма $\begin{smallmatrix}0\\5\\4\end{smallmatrix}$ дан бутун ажратилса, $\begin{smallmatrix}1\\1\\4\end{smallmatrix}$ кўпайтма ҳосил бўлади.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда, тўғри касрни иккилантириш усули кўрсатилгандан сўнг талабаларга, мустақил иш тариқасида, махражи жуфт ва тоқ бўлган касрларни кетма-кет иккилантириш усули баён этилади. Масалан, $\frac{1}{32}=\begin{smallmatrix}0\\1\\32\end{smallmatrix}$ ва $\frac{1}{23}=\begin{smallmatrix}0\\1\\23\end{smallmatrix}$ касрларни кетма-кет 5 марта иккилантириш қуйидаги кўринишда бажарилади:

Махражини
яримлатиш

$$\begin{array}{c}0\\1\\32\\\hline 0\\1\\16\\\hline 0\\1\\8\\\hline 0\\1\\4\\\hline 0\\1\\2\\\hline 0\\1\\1\\\hline 1\end{array}$$

Текшириш
бир бутун
$\frac{1}{32}$ дан 32 марта
катта, яъни

$$\frac{1}{32}\cdot 32 = 1$$

Суратни
иккилантириш

$$\begin{array}{c}0\\1\\23\\\hline 0\\2\\23\\\hline 0\\4\\23\\\hline 0\\8\\23\\\hline 0\\16\\23\\\hline 0\\32\\23\\\hline\end{array}$$

бутун ажратилса

$$\begin{array}{c}1\\9\\23\end{array} = 1\frac{9}{23}$$

Тўғри касрни яримлатиш қоида тарзида шундай баён қилинади: тўғри касрни яримлатиш учун унинг махражини иккилантириш керак, агар касрнинг сурати жуфт бўлса, унинг суратини яримлатиш керак. Ҳар иккала ҳолда касрнинг миқдори икки марта камаяди.

Масалан, 1) $\begin{array}{c}0\\3\\7\end{array}$ ни яримлатиш учун махражи иккилантирилади, бу ҳолда каср $\begin{array}{c}0\\3\\14\end{array}$ кўринишига келади. 2) $\begin{array}{c}0\\18\\21\end{array}$ ни яримлатиш учун сурати яримлантирилади, бу ҳолда каср $\begin{array}{c}0\\9\\21\end{array}$ кўринишига келади. Ҳар иккала мисолда иккиланган ва яримлантирилган касрлар миқдори берилган касрларнинг миқдоридан икки марта кичикдир.

Аралаш сонни иккилантириш ва яримлатиш усули ҳам юқорида кўрсатилгани каби қоида тарзида қуйидагича берилади: аралаш сонни иккилантириш учун бутун иккилантирилиб, каср қисмини юқорида кўрсатилган усул бўйича иккилантирилади. Масалан, қоида бўйича $\begin{smallmatrix}2\\2\\5\end{smallmatrix}$ иккилантирилса, $\begin{smallmatrix}4\\4\\5\end{smallmatrix}$ бўлади.

Бутун қисми жуфт бўлган аралаш сонни яримлатиш учун бутун қисмини яримлатиб, каср қисми олдинги усул билан яримлантирилади. Агар бутун қисми тоқ бўлса, аралаш сонни нотўғри касрга айлантириб, сўнг яримлатиш тавсия қилинади. Масалан, $\begin{smallmatrix}4\\3\\5\end{smallmatrix}$ яримлатилса, $\begin{smallmatrix}2\\3\\10\end{smallmatrix}$ бўлади; $\begin{smallmatrix}3\\1\\4\end{smallmatrix}$ яримлатилса, $\begin{smallmatrix}0\\13\\8\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1\\5\\8\end{smallmatrix}$ бўлади.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда, касрларни иккилантириш ва яримлатиш усуллари қоида тарзида берилгандан сўнг талабаларга мустақил иш тариқасида мисоллар берилади. Бу мисолларнинг ечилишини намуна тариқасида жадвалда шундай кўрсатиш мумкин:

Тўғри касрлар				Аралаш сонлар			
тўғри касрни иккилантириш		тўғри касрни яримлатиш		аралаш сонни иккилантириш		аралаш сонни яримлатиш	
махраж жуфт	махраж тоқ	сурат жуфт	сурат тоқ	махраж жуфт	махраж тоқ	сурат жуфт	сурат тоқ
0 1 32	0 1 23	0 64 65	0 3 4	1 3 64	2 7 61	32 16 17	32 1 2
0 1 16	0 2 23	0 32 65	0 3 8	2 3 32	4 14 61	16 8 17	16 1 4
0 1 8	0 4 23	0 23 65	0 3 16	4 3 16	8 28 61	8 4 17	8 1 8
0 1 4	0 8 23	0 8 65	0 3 32	8 3 8	16 56 61	4 2 17	4 1 16
0 1 2	0 16 23	0 4 65	0 3 64	16 3 4	32 112 61	2 1 17	2 1 32
0 1 1	0 32 23	0 2 65	0 3 128	32 3 2	64 224 61	1 1 34	1 1 64
натижа	натижа	натижа	натижа	64 3 1	натижа	натижа	натижа
1	1 9 23	0 1 65	0 3 128	натижа 67	67 41 61	1 1 34	1 1 64

Илова, амалларнинг охирги натижаси жадвалнинг охирида берилади. Бунда охирги натижа касрдан қанча катта ёки кичик эканлиги кўрсатилади. Масалан, жадвалнинг биринчи устунидаги охирги натижа бир $\frac{1}{32}$ дан 32 марта катта эканини кўрсатади.

Математика тарихидан маълумки, ҳиндларнинг ўнли саноқ системасини биринчи бўлиб тарғиб қилувчи Муҳаммад Хоразмий, гарчи ҳинд арифметикасида иккилантириш ва яримлатиш бўлмаса ҳам, у ўзининг арифметик асарида, иккилантириш ва яримлатишни алоҳида амал ҳисоблаган. Хоразмийдан кейин Шарқ математиклари, шу анъанани саклаб қолган холда, ўзларининг арифметик асарларида бутун сонлар устида амал бажариш учун иккилантириш ва яримлатишни алоҳида амал ҳисоблайдилар ва бу амалларни каср сонларга ҳам татбиқ қиладилар. Касрни иккилантириш ва яримлатиш эса мазмун жиҳатидан касрни иккига кўпайтириш ва бўлиш билан айнан бир хилдир Шуни эътиборга олганда сонларни иккилантириш ва яримлатишни алоҳида амал деб қабул қилишга эхтиёж сезилмайди. Мадрасада ўкитилган дарсликларда, темани тушунтириш методи етарли даражада бўлмаганлиги учун касрни иккилантириш ва яримлатиш техникасига эътибор бериб, унинг ички мазмунини ёритишда кўрсатма қуроллардан кам фойдаланилади.

4. Ўрта Осиё математиклари касрнинг сурат ва махражи бир хил сон марта ўзгартирилса, яъни касрнинг сурати ва махражини иккилантириш ва яримлатиш натижасида касрнинг кўриниши ўзгарса ҳам, миқдори тенг эканлигини баён қиладилар. Улар мисолда $\frac{1}{2}$ билан $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{3}$ билан $\frac{2}{6}$; $\frac{4}{6}$ билан $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{10}$ билан $\frac{1}{5}$ ва ҳ. к. касрлар тенг эканлигини кўрсатадилар.

Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар берилган касрни миқдор жиҳатидан унга тенг турли кўринишдаги чексиз кўп касрлар орқали ифодалаш мумкин эканлигини ва буларнинг ичида ҳисоблаш учун қулайи сурат ва махражлари ўзаро туб („мутабоина“) касрлар эканлигини уқтирадилар. Шу билан улар касрнинг асосий хоссасини баён этадилар. Мадрасада ўқитилган дарсликларда эса талабаларга машқ тариқасида касрнинг сурат ва махражини кетма-кет иккилантириш натижасида ҳосил бўлган касрлар берилган касрга тенг эканлиги ва аксинча, охирги иккиланган касрни кетма-кет яримлатиш орқали берилган касрни ҳосил қилиш кўрсатилади.

5-§. Бир неча сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий бўлинувчисини топиш усуллари

Ўрта Осиё математиклари бу борада қуйидаги масалаларни ҳал этадилар.

1. Бир неча сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топиш.

2. Бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси (касрларни энг кичик умумий махражга келтириш) ни топиш усуллари.

Ўрта Осиё математиклари касрларни энг кичик умумий махражга келтиришнинг амалий моҳиятини ўқувчилар онгига етказиш мақсадида улар касрларни миқдор жиҳатидан таққослашда ва касрларни қўшиш ва айриш амалларини ўтишда бундай янги айнан алмаштиришни баён қиладилар.

Айрим муаллифлар методик томондан талабаларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, ҳеч қандай айнан шакл алмаштириш қилмасдан фақат кўрсатмали равишда касрларни таққослайдилар. Улар фақат кузатиш натижасига асосан ўзаро тенг ёки тенг бўлмаган касрлар ҳақида тушунча берадилар. Сўнг тенг махражли ва тенг суратли касрларни таққослашга ўтадилар. Шунингдек, улар сурати ва махражи турлича бўлган касрларни таққослаш учун махражларини бир хил қилиш мажбурияти туғилганлигини уқтирадилар.

Мадрасада ўқитилган дарслик вамашқ дафтарлари муаллифларининг кўпчилиги махражлари турлича бўлган касрни қўшиш ва айириш учун уларнинг махражларини бир хил қилиш кераклигини эслатиб, сўнг бир хил махражлар ичида ҳисоблаш учун энг қулайи энг кичик умумий махраж эканлиги, яъни умумий махраж деганда ҳамма махражларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси эканлигини тушунтирадилар. Шуни ҳисобга олиб, улар бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини аниқлашни баён этишга киришадилар. Бунинг учун биринчи навбатда икки соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси $[a, b]$ ни

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)} \qquad (1)$$

формула орқали топишни, иккинчи навбатда бир неча сонининг энг кичик умумий бўлинувчиси $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ни (1) формула ёрдамида топишни баён қиладилар.

Ўрта Осиё математиклари (1) формуладаги $[a, b]$ ни топиш учун икки соннинг энг катта умумий бўлувчиси (a, b) ни Евклид алгоритми ёрдамида топадилар. Улар (1) даги $[a, b]$ ва (a, b) ларни назарий арифметика йўлида қатъий мантиқий муҳокама асосида теоремаларни исботлаш йўлида топмасалар ҳам, назарий арифметикадан келтирилиб чиқарилган хулоса асосида аввал (a, b) ни, сўнг $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни топишни ўзига хос метод билан баён этадилар.

1. **Бир неча соннинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топиш усули.** Мадрасада ўқитилган дарсликларда икки соннинг энг катта умумий бўлувчиси (a, b) га ҳозиргидек таъриф берилмаса ҳам „Сонларнинг тўрт хил нисбати ҳақида" сарлавҳасида (a, b) ҳақида тўлиқ тушунча берилади ва уни топиш усули қуйидагича баён этилади:

1) Агар „a" бирдан катта натурал сон бўлса, a нинг 1 ва a дан бошқа бўлувчиларга эга бўлиши мумкинлигини кўрсатиб, сўнг a дан катта бўлган бўлувчига эга бўлиши мумкин эмаслиги ва a сонининг бўлувчилари чекли эканлиги уқдирилади. Сўнг агар икки соннинг нисбати бирга тенг бўлса, бу сонлар бир-бирига тенг бўлиб, улардан бири иккаласи учун энг катта умумий бўлувчи бўлади, деган хулоса чиқарилади. Бу иккита тенг сонлар араб тилида „мутамосила" деб аталади.

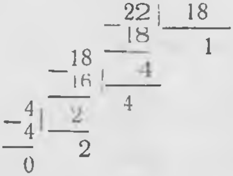
2) Агар иккита соннинг бирдан бошқа энг катта умумий бўлувчиси бўлмаса, араб тилида бу сонларга мутабоина, яъни ўзаро қарама-қарши (шериклик ва боғланиш йўқ маъносида) сонлар деган таъриф берилади. Ҳозирги терминда эса бу сонлар ўзаро туб сонлар дейилади. Бунинг тўғри эканлиги бир қанча мисоллар орқали кўрсатилади.

3) Агар иккита a ва b $(a>b)$ соннинг каттаси кичигига қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда кичик сон иккаласи учун энг катта умумий бўлувчи бўлади деган жумла-

нинг тўғрилиги муҳокама билан қуйидагича баён қилинади. a—катта сон b—кичик сонга қолдиқсиз бўлинганлиги учун b сонининг ҳар қандай бўлувчиси иккала сон учун умумий бўлувчи бўлади ва унинг тескариси, a ва b сонларнинг умумий бўлувчиси b сон учун бўлувчи эканлигини конкрет мисолларда кўрсатилади. Сўнг шу кўрсатилган мисолларга асосланиб, агар $a \vdots b$ бўлса, бу ҳолда (a, b) нинг энг катта умумий бўлувчиси b деган жумланинг туғрилиги тасдиқланади. Бу ҳолда a ва b сонлар каррали (араб тилида мутадохила) дейилади.

4) Агар икки сондан бири иккинчисига қолдиқсиз бўлинмаса ва ўзаро туб бўлмаса, бундай сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси Евклид алгоритми бўйича кетма-кет каттасини кичигига, кичигини биринчи қолдиққа, биринчи қолдиқни иккинчи қолдиққа ва ҳоказо бўлишдан ҳосил бўлган нолга тенг бўлмаган охирги қолдиқ бўлади, деган даъвонинг туғрилиги мисолларда кўрсатилади. Икки сон орасида бундай боғланиш ва яқинликнинг мавжудлиги араб тилида мутавофиқа номи билан аталади. Евклид алгоритми ҳақидаги бу теореманинг умумий ҳолда исботи берилмайди. Ўқитувчи мисолда 22 билан 18 нинг энг катта умумий бўлувчисини юқорида келтирилган қоида бўйича кетма-кет бўлиш орқали топишни кўрсатади. Кетма-кет бўлиш эса „Сатҳ“ усулида қуйидаги тартибда бажарилади: 22 ни 18 га бўлиш учун берилган сонларни $\dfrac{22}{18}$ кўринишида ёзиб 22 ни 18 га бўлиш билан бўлинма 1 топилади. Сўнгра 18 ни 1 га кўпайтириб, кўпайтмани 22 дан айирилади, қолдиқ 4 ва бўлинма 1 шундай кўринишда ёзилади: $\begin{array}{c}\underline{04}\\22\\\hline 1\\\hline 18\end{array}$. Сўнг 18 ни 4 га шу тартибда бўлинса, бундай бўлади: $\begin{array}{c}\underline{22}\\18\\\hline 4\\\hline 4\end{array}$. Охирида 4 ни 2 га бўлинса, $\begin{array}{c}\underline{0}\\4\\\hline 2\\\hline 2\end{array}$ кўринишда бўлади. Охирги қолдиқ 2 берилган 22 ва 18 нинг энг катта умумий бўлувчиси бўлади. Ҳозирги

усулда 22 ни 18 га кетма-кет бўлинса, ушбу кўринишда бўлади:



Охирги қолдиқ 2 дир. Демак, (22, 18) = 2

Шуни ҳам эслатиб ўтиш зарурки, юқорида кўрсатилган бўлишнинг сатҳ усули, ҳозирги усулда методик томондан ноқулай бўлишига қарамай, XX асргача мадрасада ўқитилган дарсликларда эски одатни сақлаш ва бўлиш амалининг тарихий тараққиёт босқичларини кўрсатиш мақсадида биринчи навбатда бўлишнинг „сатҳ“ ва „жадвал“ усули кўрсатилиб, сўнгра ҳозирги бўлиш усули берилади.

Ўқитувчи икки соннинг энг катта умумий бўлинувчисини топганда 3, 4, 5, ..., 10 чиқадиган мисолларни ҳал қилишни „сатҳ“ ва „жадвал“ усулда кетма-кет бўлиш орқали бажаришни талабаларга мустақил иш тариқасида топширади. Ҳал қилинган мисоллар араб тилида алоҳида номлар билан аталади. Масалан,

агар $(a, b) = 2$ бўлса, мутавафикаий биннисф (шериклик икки маъносида),

агар $(a, b) = 3$ бўлса, мутавафикаий биссулс (шериклик уч маъносида),

агар $(a, b) = 4$ бўлса, мутавафикаий биррубъ (шериклик 4 маъносида)

ва ҳоказо худди шунга ўхшаш 10 гача турли номлар билан аталади. Буларга алоҳида ном ва аҳамият берилишининг сабаби ҳам шундаки, индуктив усулда $(a, b) = 2$, $(a, b) = 3, \ldots, (a, b) = 10$ лар орқали (1) формула билан $[a, b]$ ни топишда қўлланишидир. Сўнг (1) формула умумлаштириб берилади.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда (a, b) ни топиш йўли талабаларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, юқорида кўрсатилган тўрт хил нисбат кўрилади. Тусий эса ўзининг арифметик асарида шу тўрт хил нисбатдан биринчиси учинчисининг, иккинчиси тўртинчисининг хусусий холи эканлигини назарда тутиб „Сонларнинг икки хил нисбати ҳақида“ номли сарлавҳада (a, b) ни топишни баён этади. Тусий биринчи нисбатда, асосан, агар $a \vdots b$ бўлса $(a > b)$, яъни a қолдиқсиз b га бўлинса, бу ҳолда $(a, b) = b$ бўлиши, иккинчи нисбатда эса Евклид алгоритмининг тўғри эканлигини бир қанча мисолларда кўрсатади. Тусий мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифларига нисбатан (a, b) ни топишни назарий томондан чуқурроқ, методик томондан содда баён қилади.

Нишопурий ва Кошийлар сон миқдорнинг ифодасидир деб тушунтирганликлари сабабли улар (a, b) ни топишни ҳам геометрик йўлда, яъни икки кесманинг энг катта умумий ўлчовини топиш асосида баён этадилар. Улар (a, b) ни топишдаги ҳолларни қуйидаги усулда баён этадилар: бирдан фарқ қилувчи сонлар тенг бўлиши ёки тенг бўлмаслиги мумкин. Тенг бўлган сонлар „бирлашувчи“ дейилади, яъни улардан бири иккинчиси билан ўлчанади. Тенг бўлмаган сонларнинг каттаси кичиги билан ўлчаниши ёки ўлчанмаслиги мумкин, биринчи ҳолда бу сонлар каррали дейилади. Масалан, 9 билан 3 каррали сонлардир. Иккинчи ҳолда, шундай бирдан фарқ қилувчи учинчи сонни топилади, бу сон билан иккала сон ўлчаниши ёки ўлчанмаслиги мумкин. Агар иккала сон учинчи сон билан ўлчанса, бу сонлар „ўлчовли“ дейилади. Масалан, 12 билан 8 сони 4 билан ўлчанади, 4 эса иккала сон учун энг катта умумий ўлчов дейилади. Агар тенг бўлмаган сонлар учун бирдан бошқа умумий ўлчов бўлмаса, бундай сонлар қарама-қарши сонлар дейилади, деган тушунчалар берилади. Сўнг Нишопурий ва Кошийлар бир қанча мисоллар орқали Евклид алгоритмини баён этадилар. Тусий ва Кошийлар Евклид алгоритми билан (a, b) ни топишда катта сонни кичигига кетма-кет бўлишни, Насавий ва Нишопурийлар эса галма-гал айтишни таклиф қиладилар. (a, b) ни топишда Тусий ва Кошийлар тавсия қилган йўл Насавий ва Нишопурийларникига нисбатан методик томондан соддадир. Мадрасада ўқитилган дарсликларда (a, b) ни топишда ҳар иккала йўл (бўлиш ва галма-гал айириш) ишлатилади.

Ўрта Осиё математиклари (a, b) ни топиш усулини кўрсатганларидан сўнг бир неча сонниг энг катта умумий бўлинувчиси $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни топишни баён қиладилар. Улар теорема орқали $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни топишни назарий арифметика йўлида (a, b) ни топишга келтириш мумкинлигини исботини келтирмасалар ҳам шу теоремада чиққан хулосадан фойдаланиб, қоида шаклида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни топишни мисолларда кўрсатадилар. Масалан, агар $(a_1, a_2) = d_2$ ва $(d_2, a_3) = d_3$ бўлса, бу ҳолда $(a_1, a_2, a_3) = d_3$ бўлиши, агар $(d_3, a_4) = d_4$ бўлса, $(a_1, a_2, a_3, a_4) = d_4$ ва ҳ. к. йўлда ҳисоблайдилар. Мисолда (8, 12, 30, 96) ни топиш кўрсатилади, бунинг учун $(8, 12) = 4$; $(4, 30) = 2$ ва $(2, 96) = 2$ топилади, сўнг юқорида чиқарилган қоида бўйича $(8, 12, 30, 96) = 2$ бўлади.

Мадрасада бир неча сонларнинг энг катта умумий бўлинувчисини топиш методи (Евклид алгоритми) талабаларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, биринчи навбатда бир, икки ва уч хонали сонларнинг, сўнг ундан юқори хонали сонларнинг ЭКУБ ни топиш юзасидан мустақил иш топширилади. Ўқитувчи томонидан мустақил иш текширилиб, сўнг унинг натижасига қараб кейинги тема „Касрларни энг кичик махражларга келтириш“ баён этилади.

2. Бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш усули. Ўрта Осиё математиклари умумий махраж деганда ҳамма махражлардаги сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини тушуниш кераклигини уқтирадилар. Умумий махражни топиш эса, ЭКУБ ни топиш каби, аввал икки соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси $[a, b]$ ни сўнг $[a, b]$ га келтириш билан бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ни топиш каби баён этилади.

Улар икки соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини топишни индуктив методда қуйидагича баён қиладилар:

1. Агар берилган икки сон бир-бирига тенг бўлса, бу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси шу сонлардан бири эканлиги уқтирилиб, энг кичик умумий бўлинувчи ярим қавс ичига олинган ҳолда қуйидаги кўринишда ёзилади: a (a a, бу ҳозирги белгида $[a, a] = a$. Мисолда ҳозирги белгида $[3, 3] = 3$, $[4, 4] = 4$ ва ҳоказо бўлса, аслида: 3 (3 3;, 4 (4 4 ва ҳоказо бўлади.

2. Агар берилган сонлар ўзаро туб бўлса, бу икки соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси шу сонларнинг кўпайтмасидан иборат эканлиги кўрсатилиб, у қуйидагича ёзилади: $a(abb$. Мисолда 5 (20 4, 7 (42 6 ва 9 (72 8 кўрсатилади.

3. Агар берилган сонлардан каттаси кичигига бўлинса ($a \vdots b$), бу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси ($[a, b]$) катта сон бўлади. Бу қуйидаги кўринишда ёзилади: $a(a \cdot b([a, b] = a)$.

4. Агар берилган сонлардан бири иккинчисига бўлинмаса ва ўзаро туб бўлмаса, бу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси

$$[a, b] = \frac{a}{(a\ b)} \cdot b \quad \text{ёки} \quad [a, b] = \frac{b}{(a, b)} \cdot a \qquad (1)$$

формула орқали топилади. Гарчи биринчи формуланинг назарий исботи келтирилмаса ҳам унинг моҳияти талабаларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, биринчи навбатда икки соннинг ЭКУ бўлувчиси (2, 3, 4, . . . , 10 га тенг бўлган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси) ни топиш конкрет мисолда кўрсатилади. Сўнг (1) формула умумлаштирилиб қоида кўринишда берилади. Масалан, 6 билан 4 ва 8 билан 6 нинг ЭКУ бўлинувчиси 2 га тенглигини билиб, шу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси (1) формула асосида шундай кўринишда топилади:

1) $6:2=3,\quad 4\cdot3=12$ ёки $6\,(12\ \ 4$
$\quad 4:2=2,\quad 6\cdot2=12$

2) $8:2=4,\quad 6\cdot4=24$ ёки $8\,(24\ \ 6$
$\quad 6:2=3\quad 8\cdot3=24$

Ҳозирги белги билан ёзилса

$$[6,4] = \frac{6}{(6,4)} \cdot 4 = \frac{6}{2} \cdot 4 = 3\cdot4 = 12$$

ёки

$$[6,4] = \frac{4}{(6,4)} \cdot 6 = 2\cdot6 = 12$$

$$[8,6] = \frac{8}{(8,6)} \cdot 6 = 4\cdot6 = 24$$

ёки

$$[8,6] = \frac{6}{(8,6)} \cdot 8 = 3\cdot8 = 24$$

Мадрасада дарслик сифатида қўлланган қўлёзма (машқ дафтар) ларга эътибор берилса, $[a, b]$ ни топиш қуйидаги усулда баён қилинади: $(a, b) = 2$ ва $(a, b) = 3$ бўлган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш конкрет мисолда кўрсатилгандан сўнг $(a, b) = 4$, $(a, b) = 5, \ldots, (a, b) = 10$ бўлган сонларнинг энг кичик бўлинувчисини топиш талабаларга мустақил иш тариқасида берилади. Ўқитувчи томонидан мустақил иш текширилгандан сўнг талабалар ўзларининг машқ дафтарларига (турлича сиёҳда) кўчирадилар. Сўнг (1) формула умумлаштирилади ва катта хонали сонлар устида мисоллар ечилади. Икки соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини ҳисоблаш устида малака ҳосил қилингандан сўнг бир неча сонларнинг энг кичик бўлинувчисини ҳисоблаш баён этилади.

Ўрта Осиё математиклари бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини* ҳисоблашни икки соннинг

---

*Айрим дарслик ва машқ дафтарларида умумий махраж деб аталади.

энг кичик умумий бўлинувчисини ҳисоблашга келтириш мумкинлигини теорема шаклида исбот қилмасалар ҳам, унинг натижаси асосида буни қоида кўринишда кўрсатадилар. Уларнинг ҳисоблаш методи ҳозирги белги билан баён қилинса, шундай бўлади: агар $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ни топиш талаб қилинса, аввал $[a_1, a_2] = m_2$ топилади, сўнг m_2 билан a_3 нинг энг кичик умумий бўлинувчиси m_3 топилади. Топилган m_3 эса $[a_1, a_2, a_3,]$ бўлади. Худди шу йўлда $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] = m_{n-1}$ топилади, охирида m_{n-1} билан a_n нинг энг кичик умумий бўлинувчиси m_n эса $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лар учун энг кичик умумий бўлинувчи бўлади, яъни $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = m_n$. Бу усул қоида шаклида сўз орқали баён қилинади. Сўнг конкрет мисол орқали учта, тўртта, бешта ва ҳоказо сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш кўрсатилади. Ўқитувчи бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини ҳисоблашда ҳамма ҳолларни ўз ичига олувчи мисолни, у ҳам бўлса 2 дан 11 гача сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топишни талабаларга мустақил ишлаш учун топширади. Машқ дафтарларида [2, 3, 4, ..., 10] ни топиш йўли (қисман ҳозирги белги билан) қуйидаги кўринишда ёзилади:

(2, 3) = 1, энг кичик умумий бўлинувчи 2·3 = 6,2 (6 3
(умумий махраж)
(6, 4) = 2 — " — " — " — " — " — " — " — " — " (6 : 2) · 4 = 12, 6 (12 4
(12, 5) = 1 — " — " — " — " — " — " — " — " — " 12·5 = 60, 12 (60 5
(60, 6) = 6 — " — " — " — " — " — " — " — " — " 60 60 (60 6
(60, 7) = 1 — " — " — " — " — " — " — " — " — " 60·7 = 420 60 (420 7
(420, 8) = 4 — " — " — " — " — " — " — " (420 : 4)·8 = 840 420 (840 8
(840, 9) = 3 — " — " — " — " — " — " (9 : 3)·840 = 2520 844 (2520 9
(2520, 10) = 10 — " — " — " — " — " — " — " — " 2520 (2520 10

Натижа сўз билан ёзилади, ҳозирги белги билан ёзилганда [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] = 2520 бўлади.

Ўрта Осиё математиклари бир неча сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини баён этганларидан сўнг каснинг асосий хоссасига асосланиб касрни энг кичик умумий махражларга келтириш усули кўрсатилади. Умумий махражга келтириш методи эса энг кичик умумий бўлинувчини топиш йўлида баён этилади. Бунда касрларнинг махражлари ўзаро туб, каррали ва ўлчовли бўлган ҳоллар кўрилади. Касрларни умумий махражга келтиришнинг ҳар бир ҳоли конкрет мисоллар орқали қуйидаги метод бўйича тушунтирилади.

Масалан: 1) Махражлари ўзаро туб бўлган $\begin{matrix}0\\3\\5\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\1\\4\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\2\\3\end{matrix}$ касрларнинг умумий махражи 5 · 4 · 3 = 60 га тенг бўлиб, касрнинг асосий хоссасига асосан, берилган касрлар қуйидагича умумий махражга келтирилади: $\begin{matrix}0\\36\\60\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\15\\60\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\40\\60\end{matrix}$. 2) Махражлари каррали бўлган $\begin{matrix}0\\5\\8\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\3\\4\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$ касрларнинг умумий махражи 8, берилган касрлар умумий махражга келтирилса, $\begin{matrix}0\\5\\8\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\6\\8\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\4\\8\end{matrix}$ бўлади. 3) Махражлари ўлчовли бўлган $\begin{matrix}0\\7\\15\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\5\\12\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\3\\10\end{matrix}$ касрларнинг умумий махражи шундай топилади: 15 билан 12 ЭКУБ 3 га тенг, юқоридаги қоида бўйича 15 билан 12 нинг энг кичик умумий бўлинувчиси (15 : 3) · 12 = 60; 60 билан 10 каррали бўлгани учун бу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси 60 бўлади. Демак, берилган касрлар умумий махражга келтирилса, $\begin{matrix}0\\28\\60\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\25\\60\end{matrix}$ ва $\begin{matrix}0\\18\\60\end{matrix}$ бўлади.

Касрларни умумий махражга келтириш йўлини тушунтиргандан сўнг, талабаларнинг малакасини ошириш мақсадида, махражлари бир, икки, уч ва ҳоказо хонали бўлган бир неча касрларни умумий махражга келтириш мустақил иш тариқасида топширилади. Тусий, Нишопурий, Коший асарларида ва машқ дафтарларида махражлари 2 дан 11 гача бўлган касрларни умумий махражга келтириш усулига алоҳида эътибор берилиб, бу мисол ечимининг айрмлари қизил сиёҳ билан кўрсатилади. Сабаби у юқорида кўрсатилган умумий махражга келтириш усулининг тўртта ҳолини ўз ичига олади.

Касрни энг кичик умумий махражга келтириш тарихи ҳақида А. П. Юшкевич ва Б. А Розенфельдлар Ғиёсиддин Кошийнинг „Арифметика калити“ китобига ёзилган изоҳида „Ўрта аср математиклари бир неча касрнинг умумий махражини топиш қоидасида, улар шу касрларнинг махражларининг кўпайтмасини оладилар. Шу асрнинг олимларидан Леонардо Пизалик (1202) биринчи бўлиб умумий махраж учун махраждаги сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини олишни кўрсатади, орадан уч ярим аср ўтгач Н. Тарталья (1556) шу йўлни таклиф қилади. Л. Пизалик йўлида умумий махражни топишни Коший (1427) кўрсатади, лекин Шарқда эса Кошийдан олдин шу йўлни кўрсатган олимлар номаълум" деб ёзганлар. Бизнинг текширишлар натижасида шу нарса аниқландики, Насириддин Тусий* 1265 йилда ёзган арифметикага доир асарида берилган бир неча касрларнинг энг кичик умумий махражини топиш ва уларни бир хил махражга келтиришни юқорида кўрсатилган метод бўйича баён қилади. Ўқитувчи бундай тарихий маълумотларни дарсда ва дарсдан ташқари машғулотларда бериб борса, ўқувчиларда математикага қизиқишни уйғотади.

Ҳозирда ўрта мактабларнинг математикадан V синф дарсликларида касрларни умумий махражга келтириш методи қуйидаги план асосида бажарилади: биринчи навбатда тўплам асосида, икки соннинг энг катта умумий бўлувчиси (a, b) ва икки соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси $[a, b]$ ҳақида тушунча берилади. Сўнг Евклид алгоритми устида тушунча бермасдан ўқувчиларнинг тушуниш қобилиятларини ҳисобга олиб, кўргазмали равишда берилган сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш ёрдамида, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ва $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ларни топиш кўрсатилади. Иккинчи навбатда $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ни топиш йўлида, касрларни умумий махражга келтириш усули баён қилинади. Мадраса ўз даврида олий ўқув юрти ҳисоблангандиги учун унда ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида касрларни умумий махражга келтиришнинг мазмуни ва методи ҳозирги мактаб программасида шу темани ўтишга нисбатан юқори даражада бўлган. Мадрасада талабаларнинг тушуниш қобилиятига мослаб, назарий арифметика элементларини қўллаш билан умумий махраж мавзуси баён қилинади.

Ўрта мактабнинг V синфида касрларни умумий махражга келтириш методига нисбатан мадрасада шу темани ўқитиш методининг назарий томондан устунлиги бордир.

Айрим шахслар мадрасада ўқитилган дарсликларда математикани ўқитиш методига кам эътибор берилганлигини, ўқитувчи талабаларга бирор теманинг мазмуни-

---

*. Насириддин Тусий. „Тахта билан тупроқ воситасида ҳисоблашлар тўплами", ЎзФА Шарқшунослик институти. Инв. 899016. Араб тилида, 130-бет.

ни узоқ муддатли мустақил машқ натижасида тушунтирганлигини уқтирадилар. Лекин ўрта асрда ёзилган Ўрта Осиё математикларининг математикага тегишли асарларига ва шу асарлар асосида мадрасада ўқитилган дарсликлар мазмунига чуқурроқ эътибор берилса, ундан шундай хулоса чиқариш мумкин, ўрта асрдан бошлаб ёзилган математикага доир асарларнинг ва мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари математикадан ҳар бир темани ўқитиш методига катта эътибор берганликларини кўрамиз. Шундай қилиб, ўрта мактабларнинг V синфларида Ўрта Осиё математикларининг касрларни умумий махражга келтириш методидан фойдаланиш темани пухта ўрганишга ёрдам беради.

6- §. Касрларни қўшиш ва айириш амалларининг бажарилиш усуллари

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларининг муаллифлари касрларни қўшиш ва айиришни бутун сонларни қўшиш ва айиришга қиёс қилиб баён этадилар. Улар бир жинсли, исмли сонларни исмли сонларга қўшганда исмли сонлар олдида бирликларни қўшиб, уларнинг номлари йиғинди ёнига ёзилишини уқтирадилар. Сўнг шунга қиёсан касрларни қўшиш ва айиришда уларни олдин бир хил улушлар (бир жинслига келтириш) да ифодалаш, яъни умумий махражга келтириб, фақат сурат (улушларнинг ном) ларини қўшиш ёки айириш зарурлигини, йиғинди ёки айирма ёнига улушларнинг номини ўзгаришсиз ёзиш кераклигини кўрсатадилар. Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар касрларни қўшишни ўрганиш методида тенг махражли ва турли махражли касрларни қўшишнинг мумкин бўлган ҳамма ҳолларини ўз ичига олган қуйидаги машқлар системасини тавсия қиладилар: 1) бутун сонларни қўшиш, 2) бутунни касрга қўшиш, 3) бутунни аралаш сонга қўшиш, 4) аралаш сонни аралаш сонга қўшиш, 5) аралаш сонни касрга қўшиш ва 6) касрни касрга қўшиш. Юқорида кўрсатилган ҳар бир ҳол конкрет мисолда системали равишда баён этилади. Касрларни айиришда эса қўшишдан бир оз фарқ қилувчи 7 хил ҳолни тавсия қиладилар. Касрларни қўшиш ва айиришни шу тартибда ўрганиш ҳозирги методик китобларда* ҳам тавсия қилинади. Тусий каср сонларни қўшиш амалига бутун сонларни киритиш билан бутун сонлар каср сонларнинг хусусий ҳоли эканлигини ва каср сонларни қўшишни юқорида эслатилгандек бутун сонларни қўшишга қиёс қилиб баён этади. Тусий касрларни қўшишда 4 ҳолни асосий ҳисоблаб, бунга бир қанча кўринишдаги мисоллар кўрсатади. У касрларни қўшиш ва айиришнинг мазмуни ўқувчиларга тушунарли бўлишини ҳисобга олиб, биринчи навбатда, махражлари тенг бўлган касрларни қўшиш ва айиришдан бир қанча мисоллар ечгандан сўнг махражлари тенг бўлмаган касрларни қўшиш ва айиришга ўтишни тавсия қилади. Масалан, 1) $\frac{4}{13}$ ни $\frac{7}{13}$ га қўшиш ва $\frac{9}{13}$ дан $\frac{2}{13}$ ни айиришни шундай тушунтиради: касрларда улушлар бир хил ном билан аталганлиги учун ўн учдан 4 билан ўн учдан 7 нинг йиғиндиси ўн учдан 17 бўлади. Худди шундай ўн учдан 9 дан ўн учдан 2 айирилса, ўн учдан 7 ҳосил бўлади. Масалан, 2) $6\frac{5}{6}$ ни $7\frac{3}{4}$ касрга қўшиш учун қўшилувчи касрлар умумий махражга келтирилса, $6\frac{10}{12}$ ва $7\frac{9}{12}$ бўлади, улушлар номи бир хил бўлганлиги учун қўшиш амали бажарилганда $14\frac{7}{12}$ бўлади. Аслида буни $\begin{matrix}6&7\\5&3\\6&4\end{matrix}$ кўринишда ёзиб, сўнг умумий махражга келтирилса, $\begin{matrix}6&7\\10&9\\12&12\end{matrix}$ бўлади, қўшиш амали бажарилиб натижани $\begin{matrix}14\\7\\12\end{matrix}$ кўринишда ёзилади. 3) Бутунни аралаш сонга қўшиш эса, аралаш сонларни қўшишнинг хусусий ҳоли эканлиги мисолда кўрсатилади, агар 3 ни $2\frac{1}{2}$ га қўшиш талаб қилинса, қўшилувчиларни $\begin{matrix}3&2\\0&1\\0&2\end{matrix}$ кўринишда ёзишдан $\begin{matrix}5\\1\\2\end{matrix}$

---

* Я. Ф. Чекмарёв. Арифметика ўқитиш методикаси, Ўқитувчи" нашриёти. Т.; 1965 й, 246—258-бетлар.

кўринишдаги аралаш сон ҳосил бўлади. 4) $\substack{5\\3\\8}$ дан $\substack{4\\5\\6}$ ни айириш учун берилган касрлар умумий махражга келтирилса, $\substack{5\\9\\24}$ ва $\substack{4\\20\\24}$ бўлади. Айрилувчининг каср қисми $\left(\substack{0\\20\\24} = \frac{20}{24}\right)$ камаювчининг каср қисми $\left(\substack{0\\9\\24} = \frac{9}{24}\right)$ дан катта бўлганлиги учун айириш мумкин эмас, камаювчидаги бутундан битта олиб, махраж бўйича жойланса, $\substack{4\\33\\24}$ ва $\substack{4\\20\\24}$ бўлади, улушлар номи бир хил бўлганлиги учун айириш натижасида $\substack{0\\13\\24}$ ҳосил бўлади. Аслида бундай ёзилади:

$$\begin{array}{cc} 0 & 4\\ 13\leftarrow & 33\\ 24 & 24\end{array} \qquad \begin{array}{cc} 4 & 5\\ 20\leftarrow & 9\\ 24 & 24\end{array} \qquad \begin{array}{cc} 5 & 4\\ 3 & 5\\ 8 & 6\end{array}$$

Касрларни қўшиш ва айиришнинг қолган ҳоллари ҳам конкрет мисолларда кўрсатилади.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида махражлари бир хил, ўзаро туб, каррали ва ўлчовли бўлган касрларни қўшиш ва айириш мумкин бўлган ҳамма ҳолларни ўз ичига олган машқлар системаси кўрсатилади. Масалан, касрларни айиришни баён этиш методи унинг турига қараб 6 га бўлинади: 1) тўғри касрдан тўғри касрни айириш, 2) аралаш сондан аралаш сонни айириш, 3) аралаш сондан касрни айириш, 4) бутундан касрни айириш, 5) аралаш сондан бутунни айириш, 6) бутундан аралаш сонни айириш. Касрларни қўшиш ҳам шу тартибда баён қилинади.

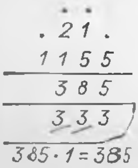
Ўрта Осиё математикларининг асарлари асосида мадрасада ўқитилган дарсликларда касрларни қўшиш ва айиришни такомиллаштирилиб, бир оз белги киритиш билан баён этилади. Масалан, касрларни қўшишда қўшиш сўзи (арабча „жам“) берилган касрлар тагига катталаштириб ёзилади, топилган умумий махраж эса касрларнинг юқорисига арабча „махраж“ сўзининг устига ёзилади, қўшишдаги қолган амаллар четда бажарилади. Намуна тариқасида, мисолда „Махражлари узаро туб бўлган касрларни қўшиш“ („Сувари жамъи кусури мутабоина“) ни кўрсатамиз:

0	0	0		0
1,	2,	3	ва	4
3	5	7		11

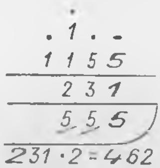
касрларни қўшиш шундай кўринишда ёзилади:

		1155		
		махраж		
0	0	0		0
1,	2,	3	ва	4
3	5	7		11
		қўшиш		

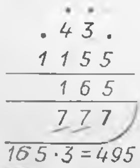
Топилган умумий махраж 1155 (3·5·7·11 = 1155) юқорига, махраж сўзининг устига ёзилади. Касрларни умумий махражга келтиришдаги ёрдамчи амаллар—умумий махражни ҳар бир касрнинг махражига бўлиб, чиққан бўлинмани касрнинг суратига кўпайтириш ва ҳосил бўлган кўпайтмаларни қўшиш қуйидагича бажарилади:



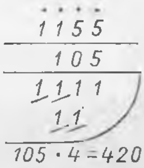
Биринчи каср сурати



Иккинчи каср сурати



Учинчи каср сурати



Туртинчи каср сурати

Касрларнинг умумий махражга келтирилган кўриниши бундай ёзилади:

	1 1 5 5		
	махраж		
0	0	0	0
385	462	495	420
1155	1155	1155	1155
	қўшиш		

Касрлар йиғиндиси	Бутун ажратилса	Ҳосил (бу охирги натижа)
3 8 5	6 0 7	1
4 6 2	1 7 6 2	6 0 7
4 9 5	1	1 1 5 5
4 2 0	1 1 5 5	
1 7 6 2		

Касрларни айириш учун ҳозиргидек камаювчи билан айрилувчи орасига минус ишорасини қўймасдан, камаювчининг арабча „манқус мин“ деб аталган сўзининг охирги сўзи „мин“ ни камаювчининг устига, айрилувчининг арабча „манқус“ деб аталган сўзнинг бош ҳарфи „М“ ни айрилувчининг устига ёзилади. Масалан,

0 0
3 дан 5 касрни айириш бундай ёзилади:
10 8

камаювчи	айрилувчи
0	0
3	5
10	18

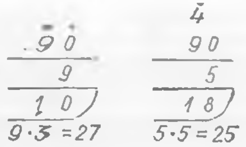
Топилган умумий махраж 90, қўшиш амалига ўхшаш, берилган касрларнинг юқорисига „махраж“ сўзининг устига шундай кўринишда ёзилади:

90

махраж

камаювчи	айрилувчи
0	0
3	5
10	18

Сўнгра касрларни умумий махражга келтириш ва айиришдаги ёрдамчи амаллар четда, қуйидаги кўринишда бажарилади:



Касрлар умумий махражга келтирилса:
0 0 27
27 25 − 25 (айрилса)
90 90 2

Натижа арабча ҳосил деган сўз тагига шундай ёзилади:

ҳосил
0
2
90
0
1
45

Мадрасада ўқитилган дарсликларда касрларни қўшиш ва айиришни ўқитиш методида, ҳозиргидек амалларга белги ишлатилмаганлиги туфайли, уларни бажариш тартиби узун ва ноқулайдир. Фақат амалларни бажаришдаги белгилар араб алифбесида ва уни бажариш эса араб алифбеси тартибидадир. Мадрасада касрларни қўшиш ва айириш учун зарур бўлган умумий махражни топиш методининг ҳозирги методдан назарий томондан устунлиги бор. Шуларни назарда тутиб, мактаб ўқувчиларига дарсда ва дарсдан ташқари машғулотларда, математикани ўқитиш тарихида касрларни қўшиш ва айириш амаллари қандай такомиллашганлиги ҳақидаги маълумотлар бериб борилса, ўқувчиларнинг шу темани пухта ўзлаштиришларига ёрдам берган бўламиз.

7-§. Касрларни кўпайтириш ва бўлиш амалларининг бажарилиш усуллари

Касрларни кўпайтириш ва бўлиш математика тарихининг арифметика курсидаги мураккаб бўлимлардан бири эканлиги ҳар бир даврда эслатиб ўтилади. Бу бўлимнинг мураккаб дейилишининг сабаби, берилган сон (бутун ва каср) ни касрга кўпайтиришнинг мазмуни бутун сонларни кўпайтириш амалининг мазмунига нисбатан тескаридир. Берилган бутун сонни бутун сонларга кўпайтиришда, тенг қўшилувчиларни қўшишдан иборат деб, кўпайтма эса кўпаювчидан катта бўлади деб тушуниб келинган бўлса, бу тушунча берилган сонларни касрга кўпайтиришга тўғри келмайди. Шунинг учун ўқувчиларга берилган сонни касрга кўпайтиришнинг мазмунини тушуниш оғирлик қилади. Шуни ҳисобга олиб Ўрта Осиё математиклари берилган сонларни касрга кўпайтиришнинг ички мазмуни талабаларга тушунарли бўлишини ҳисобга олиб, бу темани тушунтиришни биринчи навбатда бутун соннинг бўлагини топишдан, иккинчи навбатда касрнинг бўлагини топишдан бошлашни тавсия қиладилар.

Ўрта Осиё математиклари касрларни кўпайтириш ва бўлишни ўрганиш тартибини асосан икки босқичга бўладилар. Улар биринчи босқичда берилган сон (бутун ва каср) ни бутун сонга кўпайтириш ва бўлишни иккинчи босқичда эса берилган сонни касрга кўпайтириш ва бўлишни баён қиладилар. Кўпайтиришни ўрганишдаги ҳар бир босқичда қуйидаги ҳоллар бўлади: 1) бутун сонни бутун сонга, 2) касрни бутун сонга, 3) бутун сонни касрга, 4) касрни касрга, 5) аралаш сонни касрга, 6) аралаш сонни аралаш сонга кўпайтириш. Ҳозирда мавжуд бўлган дарслик ва методик қўлланмалардаги касрни кўпайтиришни ўрганиш усули билан Ўрта Осиё математикларининг қўллаган усулларини таққослаганда ҳар иккала усул бир-биридан кескин фарқ қилмаслигини кўрамиз. Бундан шундай хулосага келиш мумкинки Ўрта Осиё олимлари математикани ривожлантириш билан бир қаторда, уни тушунтириш методига ҳам катта аҳамият берганлар. Ўрта Осиё математиклари касрни касрга кўпайтиришнинг бутун сонни бутунга кўпайтиришдан фарқини конкрет мисол ва масалалар орқали кўрсатадилар. Улар буни берилган соннинг бўлагини топиш заминида кўрсатган бўлсалар, ҳозирда ўқувчилар амалнинг маъносини тўғри тушунишларини назарда тутиб, бу кўргазмали ўқитиш ёрдамида ва геометрик усулда баён қилинади. Ҳозирги усулнинг устунлик томони, унинг ўқувчиларнинг тушунишини ва ёшини ҳисобга олганлигидир.

Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар касрларни кўпайтиришнинг биринчи босқичида касрни бутун сонга кўпайтириш амали ҳар бири кўпаювчига тенг бўлган қўшилувчиларни бутуннинг бирликлари қадар қўшишдан иборат эканлигини аниқлашдир деб тушунтирадилар. Улар касрни бутун сонга кўпайтириш натижаси касрни бутун сон марта орттириш билан айнан бир хил эканини уқтирадилар. Мисолда $\frac{3}{4}$ ни 3 га кўпайтириш шундай кўрсатилади:

$$\frac{3}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}=2\,\frac{1}{4},$$

сўнг касрни бутун сонга кўпайтириш қоидаси берилади. Касрни бутун сонга кўпайтириш учун унинг суратини бутун сонга кўпайтириб, махражини аввалгича қолдириш керак. Агар кўпаювчи аралаш сон бўлса, бу ҳолда аралаш сонни нотўғри касрга айлантириб, сўнг юқоридаги қоида бўйича кўпайтириш тавсия қилинади. Айрим дарсликларнинг муаллифлари аралаш сонни бутунга кўпайтириш учун аралаш сонни йиғинди шаклида ёзиб, йиғиндининг ҳар бирини бутун сонга кўпайтириб, ҳосил бўлган сонни аралаш сон кўринишида ёзишни тавсия қиладилар. Масалан, $2\,\frac{4}{5}$ ни 3 га кўпайтириш ҳар иккала ҳолда шундай бажарилади:

1) $2\,\frac{4}{5}\cdot 3=\frac{14}{5}\cdot 3=\frac{14\cdot 3}{5}=\frac{42}{5}=8\,\frac{2}{5}$ ёки

2) $2\,\frac{4}{5}\cdot 3=\left(2+\frac{4}{5}\right)\cdot 3=6+\frac{4\cdot 3}{5}=6+\frac{12}{5}=6+2\,\frac{2}{5}=8\,\frac{2}{5}$

Кўпайтиришнинг иккинчи босқичида, бутун сонни касрга кўпайтириш баён қилинади. Кўпчилик муаллифлар бутунни касрга кўпайтириш шу сонннинг бўлагини топиш деб тушунтирадилар. Улар аввал мисол ва масалаларда бутунни $\frac{1}{n}$ га, сўнг $\frac{m}{n}$ касрларга кўпайтиришни кўрсатадилар. Масалан, 4 танганинг $\frac{1}{2}$ бўлаги китоб олиш учун сарф қилинса, неча танга китобга тўланган? Масала 4 ни $\frac{1}{2}$ га кўпайтириш $(4 \cdot \frac{1}{2})$ орқали ҳал бўлиши кўрсатилади, кўпайтмани топиш учун 4 нинг $\frac{1}{2}$ бўлаги $(4:2=2)$ аниқланади. Натижа $4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$ кўринишда ёзилади. Шу йўлда бир неча мисоллар ечилгандан сўнг бутунни $\frac{m}{n}$ $(m<n)$ касрга кўпайтириш қуйидаги кўринишда бажарилади: Масалан, $8 \cdot \frac{3}{4}$ учун 8 нинг $\frac{3}{4}$ бўлагини топиш керак. Бунинг учун аввал 8 нинг $\frac{1}{4}$ бўлаги $(8 : \frac{1}{4} = 2)$ топилади. Сўнг 8 нинг $\frac{3}{4}$ бўлаги $2 \cdot 3 = 6$ топилади. Натижа $8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 2 \cdot 3 = 6$ кўринишда ёзилади. Агар бутун касрнинг махражи „n“ га қолдиқсиз бўлинмаса, масалан, $13 \cdot \frac{2}{5}$ учун 13 нинг $\frac{1}{5}$ бўлаги $(13:5 = \frac{13}{5})$ топилади. Сўнг 13 нинг $\frac{2}{5}$ бўлаги $\frac{13 \ 2}{5}$ топилади. Натижа $13 \cdot \frac{2}{5} = \frac{13 \cdot 2}{5} = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$ кўринишда ёзилади. Аслида ишлаш йўли сўз орқали баён қилиниб, натижа шундай кўринишда ёзилади:

$$\begin{array}{cccc}13 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 2, & 26, & 1\\ 0 & 5 & 5 & 5\end{array}$$

Бутунни касрга кўпайтириш мисолларда тушунтирилгандан сўнг бутунни касрга кўпайтиришнинг $(a \cdot \frac{m}{n})$ умумий қоидаси $(a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n})$ берилади.

Али Қубовий ва Бобокалон Муфтий сингари айрим муаллифлар бутунни касрга кўпайтиришнинг умумий қоидаси $\left(a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n}\right)$ ни бериб, сўнг мисоллар кўрсатадилар.

Кўпайтиришнинг иккинчи босқичи, яъни касрни касрга кўпайтириш ҳам берилган касрнинг бўлагини топиш асосида тушунтирилади. Масалан, $\frac{4}{5}$ касрни $\frac{3}{4}$ касрга кўпайтириш талаб қилинса, кўпайтмани топиш $\frac{4}{5}$ нинг $\frac{3}{4}$ бўлагини аниқлаш орқали ҳал қилинади. $\frac{4}{5}$ нинг $\frac{3}{4}$ бўлагини аниқлаш учун олдин $\frac{4}{5}$ нинг $\frac{1}{4}$ бўлаги аниқланади. Бунинг учун $\frac{4}{5}$ икки марта кетма-кет яримлантирилади $\left(\frac{4}{5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4}{20}\right)$, сўнгра $\frac{4}{5}$ нинг $\frac{3}{4}$ бўлагини топиш учун $\frac{4}{20}$ учлантирилади. Натижа шундай ёзилади: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Сўнг касрни касрга кўпайтириш $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)$ нинг умумий қоидаси $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)$ сўз орқали берилади. Аслида юқоридаги мисолни ишлаш йўли сўз орқали баён қилиниб, натижа шундай кўринишда ёзилади: $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3; & 4; & 12; & 3 \\ 5 & 4 & 20 & 20 & 5. \end{matrix}$

Аралаш сонни касрга кўпайтириш учун аралаш сонни нотўғри касрга айлантириб, сўнг юқоридаги қоида бўйича кўпайтириш кераклиги кўрсатилади. Масалан, $2\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{33}{20} = 1\,\frac{13}{20}$. Аслида у $\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3\,. & 3; & 11; & 3; \\ 4 & 5 & 4 & 5 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 33; & 13 \\ 20 & 20 \end{matrix}$ кўринишда ёзилади.

Насириддин Тусий, Жамшид Коший, Нишопурий ва бошқа муаллифларнинг дарсликларида учта ва ундан ортиқ касрни кўпайтириш исталган тартибда ёзиб кўрсатилади. Шу билан улар касрларни кўпайтиришнинг группалаш ҳиссасини кўрсатдилар. Масалан, $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}$ касрларнинг кўпайтмасини топиш учун касрларни кетма-кет кўпайтириш ёки бирданига $\frac{2\cdot3\cdot5\cdot1}{3\cdot4\cdot6\cdot7}$ кўринишда кўпайтиришни тавсия қиладилар. Улар касрларни кўпайтиришни бу тартибда бажариш шарт эмас, балки бошқа тартибда ҳам кўпайтирилса, кўпайтма бир хил бўлади деган ибора билан касрларни кўпайтиришнинг группалаш ҳиссасини, яъни $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{28}=\frac{5}{84}$ эканлигини кўрсатадилар.

Ўрта Осиё математиклари каср сонларни бўлиш ва уни ўрганиш тартибини кўпайтириш амалига ўхшаш турлича йўлда баён этадилар. Масалан, Тусий, Нишопурий, Сижовандий, Коший, Омилий ва бошқалар янги ўрганувчиларга тушунарли бўлишини ҳисобга олиб, бўлиш амалини бажаришни қуйидаги тартибда келтирадилар: 1) бутунни касрга бўлиш; 2) касрни касрга бўлиш; 3) аралаш сонни касрга бўлиш; 4) касрни бутунга бўлиш; 5) аралаш сонни бутунга бўлиш; 6) аралаш сонни аралаш сонга бўлиш. Улар ҳар бир бўлимни конкрет мисол орқали, касрларни бўлишни эса икки хил усулда баён қиладилар. Биринчи усулда бўлинувчи билан бўлувчини энг кичик умумий махражга келтириб, бўлинувчининг суратидаги сонни бўлувчининг суратидаги сонга бўлиб, сўнг махражни ташлаш керак деган қоида берадилар Масалан, $\frac{5}{6}$ ни $\frac{3}{4}$ га бўлиш учун қоидага асосан улар умумий махражга келтирилса: $\frac{10}{12}$ ва $\frac{9}{12}$ бўлади. Сўнгра 10 ни 9 га бўлиб, махраж 12 ташланади. Изланган бўлинма $\frac{10}{9}=3\frac{7}{9}$ бўлади.

Юқорида ечилган мисолда 10 ни 9 га бўлиб, махраж 12 ташланади деган иборанинг сабаби бўлиш қоидасида кўрсатилмаган. Албатта, бўлинувчининг махражи 12 ни бўлувчининг махражи 12 га бўлганда бир бўлиши назарда тутилган бўлиши мумкин.

Бўлиш қоидасида аралаш сонни тўғри касрга ёки аралаш сонни аралаш сонга бўлиш учун аввал аралаш сонни нотўғри каср (каср жинси) га айлантириш, сўнг юқорида кўрсатилган касрни касрга бўлиш йулида амал бажариш тавсия қилинади. Бутунни касрга бўлиш ва унинг тескариси—касрни бутунга бўлиш учун бутун каср кўринишда ёзилади. Сўнг бўлинувчи ва бўлувчиларни бир хил махражга келтириб, бўлинувчини бўлувчининг суратига бўлинади. *Масалан,*

$$15 \cdot 2\frac{3}{4} = \frac{15}{1} : \frac{11}{4} = \frac{60}{4} : \frac{11}{4} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11};$$

$$\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{4} : \frac{4}{1} = \frac{3}{4} : \frac{16}{4} = \frac{3}{16}.$$

Ўрта Осиё математиклари касрларни бўлишнинг иккинчи усулини, бўлиш амалини кўпайтириш амалига тескари тарзда баён қиладилар. Уларнинг сўз билан касрларни бўлиш амалини баён қилиш усулларини ҳарфий белгилар киритиш билан бажарсак, бу қуйидагича бўлади. Масалан, $\frac{a}{b}$ касрни $\frac{c}{d}$ касрга булганда, чиққан бўлинма x билан белгиланса, яъни

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x \qquad (1)$$

Бундан

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot x \qquad (2)$$

(1) тенгликнинг иккала қисми $\frac{d}{c}$ касрга кўпайтирилса,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} \cdot x = x \qquad (3)$$

бўлади. (1) тенгликдаги x ўрнига (3) да топилган қиймат қўйилса, изланган бўлинма кўпайтма орқали шундай топилади:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}. \qquad (4)$$

(4) тенглик қоида кўринишда берилади. (4) дан чиқарилган қоида бўйича юқорида кўрсатилган 6 хил кўринишдаги касрларни бўлиш мисоллар орқали кўрсатилади.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида арабча бўлинувчи ва бўлувчи сўзларининг бош ҳарфи белги сифатида бўлинувчи ва бўлувчи устида ёзилиб, сўнг амал бажарилади.

Каср сонларни бўлиш баён этилгандан сўнг бутун сонларни бўлишга қиёс қилиб, каср сонларни бўлишнинг қуйидаги хоссалари кўрсатилади: агар бўлинувчи бир неча марта орттирилса (ёки камайтирилса), бўлинма шунча марта ортади (ёки камаяди), агар бўлувчи бир неча марта орттирилса (ёки камайтирилса), бўлинма шунча марта камаяди (ёки ортади). Бу хоссалар мисолларда кўрсатилади.

8-§. Каср сонлардан илдиз чиқариш усуллари

Насириддин Тусий, Низомиддин Нишопурий, Коший, муаллифи номаълум „Мажмаъул арқом“ китобида ва бошқа дарсликларда касрлардан илдиз чиқариш индуктив метод асосида, иккинчи ва учинчи даражали илдиз чиқариш баён этилгандан сўнг, „исталган натурал кўрсаткичли илдиз“ чиқариш усули кўрсатилади.

Бу муаллифлар касрдан илдиз чиқаришни ўрганиш тартибини асосан 3 га бўладилар: 1) бутундан илдиз чиқариш, 2) тўғри касрдан илдиз чиқариш ва 3) аралаш сондан илдиз чиқариш. Биринчиси олдинги бобларда ўтилган ҳисобланиб, иккинчи ва учинчиси, яъни тўғри касрдан аниқ ва тақрибий илдиз чиқариш ва аралаш сондан аниқ ва тақрибий илдиз чиқариш кўрсатилади.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида касрдан илдиз чиқаришни ўрганиш тартиби эса Тусий ва Нишопурийларнинг усулидан бир озгина фарқ қилади. Машқ дафтарларида олдин тўғри ва аралаш сондан аниқ илдиз чиқариш кўрсатилгандан сўнг, шу сонлардан тақрибий илдиз чиқариш усули баён этилади. Ҳамма дарслик ва машқ дафтарларида оддий касрлардан илдиз чиқариш қуйидаги асосда баён этилади: агар касрнинг ҳар бир ҳади аниқ асосга эга бўлса, касрдан илдиз чиқариш учун сурат ва махраждан илдиз чиқариб, биринчи натижанинг иккинчи натижага нисбати олинади, агар касрнинг ҳар бир ҳади аниқ асосга эга бўлмаса, аввал махраждаги иррационаллик

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-1}}}{b}$ формула орқали йўқотилади. Сўнг суратдаги бутун сондан тақрибий илдиз чиқариш билан изланган илдиз топилади.

Дарсликларда қоида кўринишида илдиздан чиқариш усули берилгандан сўнг, уни бажариш усули мисол билан кўрсатилади.

Ўрта аср ва ундан кейинги 17—19 асрларда ёзилган Ўрта Осиё математикларининг илмий асарлари ва дарслик китоблари анализ қилинганда, касрлардан илдиз чиқариш темасини ўрганиш қуйидаги тартибда қўйилганлигини кўрамиз:

1. Касрдан квадрат илдиз чиқариш.
2. Касрдан куб илдиз чиқариш.
3. Касрдан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш.

1. **Касрдан квадрат илдиз чиқариш.** Юқорида баён этилган тартиб бўйича, биринчи навбатда тўғри касрдан аниқ квадрат илдиз чиқариш қоидаси қуйидагича берилади: касрнинг ҳар бир ҳади тўлиқ квадратдан иборат бўлса, бу ҳолда сурат ва махражидан квадрат илдиз чиқариб, биринчи натижа иккинчи натижага бўлинади. Масалан, $\begin{matrix}0\\4\\9\end{matrix}$ касрнинг квадрат илдизи $\begin{matrix}0\\2.\\3\end{matrix}$ Илдиз ҳозиргидек белги билан ифодаланмасдан, дарсликларда „илдиз“ сўзи араб алифбесида „жизр“ деб касрнинг тагига ёзилади, унинг тагига эса топилган илдиз ёзилади.

Юқоридаги мисол бундай тартибда бажарилади:

$$\begin{matrix}0\\4\\9\\ \text{жизр}\\ 0\\2\\3\end{matrix}$$

Иккинчи навбатда аралаш сондан квадрат илдиз чиқариш усули баён этилади, яъни аралаш сон нотўғри касрга айлантирилганда, касрнинг ҳар бир ҳади тўлиқ квадратдан иборат бўлса, биринчи усул бўйича илдиз чиқариш кераклиги кўрсатилади. Масалан, $\begin{matrix}2\\7\\9\end{matrix}$ аралаш сондан квадрат илдиз чиқариш талаб қилинса, у нотўғри касрга айлантирилади, $\begin{matrix}0\\25\\9\end{matrix}$ нинг ҳар бир ҳади тўлиқ

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & \text{ҳосил}\\ 7, & 25, & 25 & 1\\ 9 & 9 & 9 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{жизр} & \\ 0 & 3\\ 5 & \\ 3 & \end{array}$$

квадратдан иборат бўлганлиги учун илдиздан чиқариш натижаси $\begin{matrix}0\\5\\3\end{matrix}$ бўлади, бутун ажратилса, $\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$ бўлади. Аслида у бундай ёзилади:

Учинчи навбатда қуйидаги қоида бўйича касрдан тақрибий илдиз чиқариш усули $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a\cdot b}{b^2}} = \frac{\sqrt{a\cdot b}}{b}$ формула асосида шундай баён этилади: агар касрнинг ҳар бир ҳади тўлиқ квадратдан иборат бўлмаса, бу ҳолда касрдан тақрибий квадрат илдиз чиқариш учун касрнинг суратини махражига кўпайтириш, сўнгра бу кўпайтмадан

$$\sqrt{A} \approx a + \frac{A-a^2}{2a+1} \tag{1}$$

формула бўйича тақрибий квадрат илдиз чиқариш, натижани махражга бўлиш керак. Масалан, $\begin{matrix}0\\3\\5\end{matrix}$ касрдан тақрибий квадрат илдиз чиқариш талаб қилинса, 3 ни 5 га кўпайтириб, кўпайтма 15 дан тақрибий квадрат илдиз $\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}$ чиқарилади. $\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}$ ни касрнинг махражи 5 га бўлинса

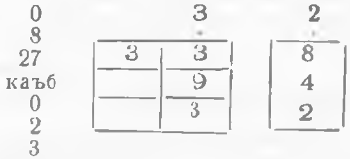
$$\left(\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3\cdot5}{5\cdot5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx \frac{3\frac{6}{7}}{5} = \frac{27}{35}\right),$$ изланган тақрибий илдиз $\begin{matrix}0\\27\\35\end{matrix}$ чиқади.

Тўртинчи навбатда аралаш сондан тақрибий квадрат илдиз чиқариш учун уни нотўғри касрга айлантириб, олдинги усулда илдиз чиқарилади. Масалан, у ҳозирги белги билан ишланса,

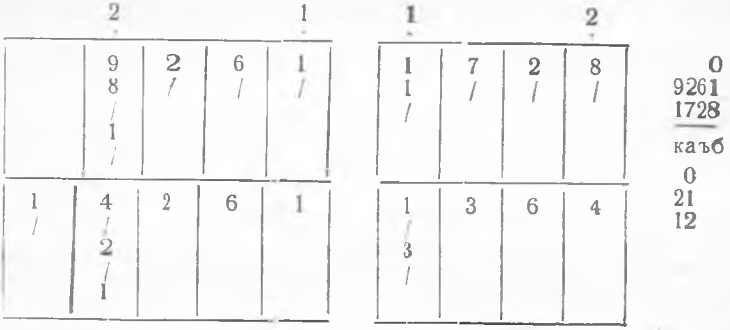
$$\sqrt{2\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{13\cdot5}{5\cdot5}} = \frac{\sqrt{65}}{5} \approx \frac{8+\frac{6}{17}}{5} = \frac{137}{85} = 1\frac{52}{85}$$

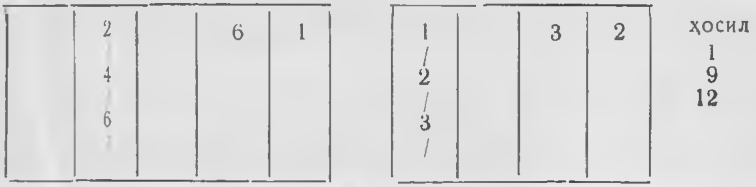
бўлали.

2. **Касрдан куб илдиз чиқариш.** Касрдан куб илдиз чиқариш усулини ўрганиш тартиби, касрдан квадрат илдиз чиқариш каби, олдин тўғри касрдан, сўнг аралаш сондан аниқ ва тақрибий куб илдиз чиқариш тартибида бўлади. Масалан, 1) $\begin{matrix}0\\8\\27\end{matrix}$ дан куб илдиз чиқариш талаб қилинса, касрнинг ҳадлари 8 ва 27 дан жадвал усулида куб илдиз чиқарилади, сўнг биринчи натижа 2 ни иккинчи натижа 3 га бўлинади. Куб илдиз белгиси, „куб“ сўзининг арабча аталиши—„каъб“, каср тагига ёзилиб, унинг тагига илдиздан чиққан сон ёзилади. Юқоридаги мисол бундай ишланади:



2) $\begin{matrix}5\\621\\1728\end{matrix}$ аралаш сондан куб илдиз чиқариш учун у аввал ногўғри касрга айлантирилади: $\begin{matrix}0\\9261,\\1728\end{matrix}$ сўнг касрнинг ҳадлари 9261 ва 1728 дан жадвал орқали куб илдиз чиқарилади:





Иккинчи навбатда тўғри каср ва аралаш сондан тақрибий куб илдиз чиқариш усули $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a\cdot b\cdot b}{b\cdot b\cdot b}} = \frac{\sqrt[3]{a\cdot b^2}}{b}$ формула асосида шундай баён этилади: тўғри касрдан куб илдиз чиқариш учун, касрнинг суратини махражга икки марта кўпайтириб, ҳосил бўлган кўпайтмадан

$$\sqrt[3]{A} \approx a + \frac{A - a^3}{3a(a+1)+1} \qquad (2)$$

формула бўйича тақрибий илдиз чиқариб, касрнинг махражига бўлиш керак. Масалан, $\begin{matrix}0\\3\\7\end{matrix}$ касрдан тақрибий куб илдиз чиқариш учун сурат 3 ни 7 га икки марта кўпайтириб, кўпайтма 147 дан тақрибий куб илдиз $\begin{matrix}5\\22\\91\end{matrix}$ чиқарилади, буни махраж 7 га бўлинса, изланган тақрибий илдиз $\begin{matrix}0\\477\\637\end{matrix}$ чиқади. Мисол ҳозирги белги билан ишланса, шундай бўлади:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 7}{7\cdot 7}} = \sqrt[3]{\frac{21\cdot 7}{49\cdot 7}} = \sqrt[3]{\frac{147}{343}} = \frac{\sqrt{147}}{7} \approx \frac{5+\frac{22}{15\cdot 6+1}}{7} =$$

$$= \frac{5+\frac{22}{91}}{7} = \frac{\frac{477}{91}}{7} = \frac{477}{637}.$$

Мадрасада ўқитилган баъзи дарслик ва машқ дафтарларида, агар аралаш соннинг бутун қисмидан биргача аниқлик билан тақрибий илдиз чиқариш мумкин бўлса, у ҳолда касрдан тақрибий илдиз чиқариш

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{A - a^3}{(a+1)^3 - a^3} = a + \frac{A-a^3}{3a(a+1)+1} \qquad (3)$$

формула асосида баён қилинади. Масалан, $32\frac{3}{4}$ дан тақрибий куб илдиз чиқариш учун аввал 32 нинг биргача аниқлик билан тақрибий илдизи 3 топилади. Топилган 3 ни (3) формуладаги касрнинг бутун хонасига, қолдиқ $5\frac{3}{4}$ ни эса суратига ёзилади, сўнг 3 ни 3 дан битта ортиқ 4 га кўпайтириб, кўпайтма 12 ни учлантириш натижаси 36 га бир қўшилса, (3) даги махраж 37 ҳосил бўлади. Натижа $32\frac{3}{4}$ нинг тақрибий куб илдизи $3+\frac{5\frac{3}{4}}{37}=3\frac{23}{148}$ бўлади. Юқоридаги (1) ва (2) формула асосида $32\frac{3}{4}$ дан тақрибий куб илдиз чиқарилса, $3\frac{23}{127}$ бўлади. Бунда (3) формула асосида чиқарилган тақрибий илдизга нисбатан хато камроқ бўлади. Юқорида ечилган мисолни ҳозирги белги билан ечсак, Ўрта Осиё математикларининг (3) ва (2) формула асосида каср сонлардан илдиз чиқариш амалини сўз билан ечган усулларини кўрамиз:

1. (3) формула асосида:

$$\sqrt[3]{32\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{27+5\frac{3}{4}}\approx 3+\frac{5\frac{3}{4}}{3\cdot 3(3+1)+1}=3+\frac{5\frac{3}{4}}{37}=3+\frac{\frac{23}{4}}{37}=$$

$$=3+\frac{23}{148}=3\frac{23}{148}.$$

2. (2) формула асосида: $\sqrt[3]{32\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{131\cdot 2}{4\cdot 2}}=$

$$\sqrt[3]{\frac{262}{8}}=\sqrt[3]{\frac{262}{2}}\approx\frac{6\frac{46}{127}}{2}=3\frac{23}{127}.$$

3. Касрдан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш. Тусий, Нишопурий, Коший, дарслик ва машқ дафтарларининг муаллифлари касрдан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқаришни касрнинг илдизи рационал ва иррационал сон бўлишига қараб икки ҳолга бўладилар. Улар биринчи ҳолда $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a>0,$

$b > 0$) формула асосида касрдан илдиз чиқариш усулини қуйидаги қоида кўринишида берадилар: агар тўғри касрнинг илдизи рационал бўлса, бу ҳолда касрнинг сурати ва махражидан алоҳида илдиз чиқариш керак, агар илдиз остида аралаш сон бўлса, аввал уни нотўғри касрга айлантириб, сўнг касрнинг сурат ва махражидан илдиз чиқариш керак. Масалан,

1) $\frac{8}{125}$ нинг куб илдизи $\frac{2}{5}$;

2) $\frac{16}{81}$ нинг тўртинчи даражали илдизи $\frac{2}{3}$;

3) $\frac{32}{243}$ нинг бешинчи даражали илдизи $\frac{2}{3}$;

4) $4\frac{52}{243} = \frac{1024}{243}$ нинг бешинчи даражали илдизи $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Агар касрнинг илдизи иррационал сон бўлса, бу ҳолда аввал махраждаги иррационаллик

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a\cdot b\cdot b\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot b}{b\cdot b\cdot b\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot b}} = \sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a\cdot b^{n-1}}}{b}$$

формула билан йўқотилади. Суратдаги $\sqrt[n]{a\cdot b^{n-1}}$ нинг бутун сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усули бўйича биргача аниқлик билан n-даражали илдизи a топилади. $\sqrt{a\cdot b^{n-1}}$ нинг тақрибий қиймати

$$\sqrt[n]{A} \approx a + \frac{A - a^n}{(a-1)^n - a^n} \qquad (4)$$

формула орқали аниқланади. Масалан, $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ нинг тақрибий қийматини топиш талаб қилинса, аввал $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ нинг махражидаги иррационаллик йўқотилади, яъни

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}} = \frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4^4}} = \frac{\sqrt{64}}{4}.$$

Сўнг $\sqrt[4]{64}$ нинг тақрибий қиймати (4) формулага асосан топилади: $\sqrt[4]{64} \approx 2 + \frac{48}{(2+1)^4 - 2^4} = 2 + \frac{48}{81-16} =$

$$= 2 + \frac{48}{65} = 2\frac{48}{65} = \frac{178}{65}.$$

Натижа:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\approx\frac{\frac{178}{65}}{4}=\frac{178}{260}=\frac{89}{130};$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\approx\frac{89}{130}.$$

II боб. ЎРТА ОСИЁ МАТЕМАТИКЛАРИНИНГ АСАРЛАРИДА ОЛТМИШЛИ ВА ЎНЛИ КАСРЛАР ҲАМДА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАРНИНГ БАЖАРИЛИШ УСУЛЛАРИ

1-§. Олтмишли ва ўнли касрларнинг келиб чиқиш тарихи

Математика тарихидан маълумки, олтмишли касрнинг келиб чиқиши олтмишли ҳисоблаш системаси тарихи билан боғлиқдир Эрамиздан тахминан 3000 йил илгари олтмишли системага асос солган бобилликлар махражи 60 нинг даражасидан иборат бўлган касрларни кундалик эҳтиёжларида қўллаганликлари маълум.

Бобилликлар олтмишли системанинг бутун қисмидаги 1 дан 59 гача натурал сонларни ўнли ҳисоблаш системасида тасвирий белги ёрдамида ёзганлар. Улар бирни вертикал михсимон 𒁹 белги билан ва ўнни ◁ қавс билан белгилаб, 1 дан 59 гача натурал сонларни шу белгилар ёрдамида ёзганлар. Масалан, 32 ни 10 нинг белгисини уч марта, бирнинг белгисини икки марта такрорлаб, қуйидаги кўринишда ифодалаганлар:

◁◁◁ 𒁹𒁹 = 32.

Системанинг асоси 60 бирнинг белгиси 𒁹 билан ифодаланиб, олтмишдан катта сонлар 𒁹 ва ◁ белгилар (60 нинг белгисидан ўнг томонда ёзиладиган бир ва ўннинг белгилари бир оз интервал қолдириб ёзилади) орқали шундай ёзилади: 𒁹 𒁹𒁹 = 62,

𒁹𒁹𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 $=163$; 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 $=22\times60+60+$
$+1=1381$.

Юқоридаги сонларнинг ёзилишидан шундай хулоса чиқариш мумкин; бобилликларнинг ҳисоблаш системаси ўнли (1 дан 59 чегарасида) ва олтмишли системаларнинг аралашмасидан тузилган ҳисоблаш системасидир. Шуни ҳам уқтириб ўтиш зурурки, бобилликлар олтмишли ҳисоблаш системаси асоси 60 мих кўринишидаги белги орқали тасвирланганлиги учун улар касрларни ҳам шу мих хат кўринишида ифодалаганлар. Бобилликлар олтмишли системада ёзилган сонларнинг ўнг ва чап қисмида ва хоналар орасида зарур бўлган нолларга узоқ алоҳида белги ишлатмаганлар, шунинг учун улар 1, 60, 60^2, 60^3, ... кўринишидаги сонларни бир хил 𒁹 белгиси билан ифодалаганлар. Шу сабабдан уларнинг ҳисоблаш системасидаги юқори ва қуйи хоналарни аниқ кўрсатиш қийин бўлган.

Масалан, 𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 белги билан

$2\times60+3, 2\times60^2+3$, $2\times60^3+3\times60$,

$\frac{2\times60+3}{60}=2\frac{3}{60}$ $\frac{2\times60+3}{60^2}$ ва ҳ. к. сонлар ифодаланган.

Айрим белгиларнинг аниқ қиймати масала мазмунидан аниқланган. Шунинг учун бобилликларнинг ҳисоблаш системаси ноаниқ позициядаги олтмишли системадан иборат. Ноаниқ позиция дейилишининг сабаби бир хил тасвирий белги билан бир неча сонларнинг аниқланишидир.

Бобилликларнинг системаси ноаниқ позицияда ёки ягона абсолют олтмишли позицион системада бўлмаса ҳам, уларнинг муваффақиятларидан бири шу системада олтмишли касрнинг ижод қилинишидир. Улар $\frac{184}{60}=$
$=\frac{3\cdot60+4}{60}=3\frac{4}{60}$; $\frac{184}{60^2}=\frac{3\cdot60+4}{60^2}=\frac{3}{60}+\frac{4}{60^2}$ ва ҳ. к. кўринишдаги касрларнинг чапдан иккинчиси биринчисидан 60 марта кичик эканлигини билганлар ва амалда татбиқ қилганлар. Бобилликлар яратган олтмишли каср-

нинг тарихий аҳамияти шундаки, бу каср орқали бурчакнинг олтмишли градус ўлчови вужудга келади ва ҳозиргача биз бурчак ва вақтни шу ўлчам билан ўлчаб келамиз.

Олтмишли системанинг келиб чиқиш тарихи ҳақида узоқ ўтмиш даврлардан бери бир қанча илмий фаразлар мавжуддир. Математика тарихчиси М. Я. Вигодский* ва А. Е. Райклар** бу ҳақда мавжуд бўлган фаразлар ичида, бобилликлар олтмишли системасининг келиб чиқиш сабабларини асосли равишда кўрсатувчи қуйидаги фаразларни келтирадилар; математика тарихчиси Кантор ва бошқалар „астрономик" фаразларни келтирадилар, яъни олтмишли системанинг келиб чиқиши бобилликларнинг астрономик кузатишлари билан боғлиқдир. Бу илмий фараз асосида қадимги бобилликлар йилни яхлитлаб 360 кундан иборат деб, айланани ҳам шунча бўлакка бўлганлар. Айлана узунлиги эса 6 „секстант" га бўлиниб, ҳар бир секстант ёйи 60 га бўлинган, натижада олтмишли система вужудга келган деб тасдиқламоқчи бўладилар. М. Я. Вигодский бу фаразнинг унчалик тўғри эмаслигини тасдиқлайди.

Айрим математика тарихчилари бобилликларнинг ҳисоблаш системаси ўнли (1 дан 59 чегарасида) ва олтмишли системаларнинг аралашмасидан тузилган система эканлигини назарда тутиб, улар бу аралаш система бир-бирига боғлиқ бўлмаган бобил территориясида ўтган халқлардан шумерликларнинг ўнли системаси билан аққадларнинг олтмишли системаларининг аралашмасидан вужудга келган дейдилар. Ҳақиқатан ҳам, бу илмий фаразиянинг тарихий асоси бор.

Юқорида айтиб ўтилган фаразларга нисбатан асосли қилиб, 1927 йилда математика тарихчиси Нейгебауэра ўз лекциясида, олтмишли системанинг келиб чиқиши ҳақида қуйидаги назарияни келтиради: бобилликларнинг олтмишли системаси уларнинг олтмишли ўлчов системасидан келиб чиққан. Бунга далил тариқасида қадимги бобилликларнинг текстларида оғирлик ўлчов бирлиги талант, мин ва шекел орасида шундай муно-

---

*М. Я. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире, Наука, М., 1967 г. 99—104-бетлар.

**А. Е. Райк. Очерки по истории математики в древности. Молдавское книжное издательство. Саранск, 1977, 50—54-бетлар.

сабат борлигини кўрсатади: 1 талант $= 60$ мин. 1 мин $=$ $= 60$ шекел. Бундан $\frac{1}{6}$ мин $= 10$ шекел ёки $\frac{1}{60}$ мин $= 1$ шекел ва ҳ. к. келиб чиқади.

Қадимги бобилликларда савдо-сотиқ ишларида зарб этилган пул бирлиги бўлмаганлиги учун савдода кумушнинг оғирлиги билан муомала қилинган. Шундай қилиб, Нейгебауэра назарияси бўйича олтмишли ҳисоблаш системаси пул ва оғирлик ўлчов системасининг ҳосилидир.

Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай ҳисоблаш системаси жамият талабига қараб ривожланиб боради. Бобилликларнинг олтмишли системаси ҳам жамиятда савдо-сотиқ ишларининг ривожланиш талаблари асосида вужудга келган деган фикр ишонарлидир.

Бобилликлар яратган олтмишли системада касрни амалда татбиқ қилиш методи қулай бўлганлигидан уни эллинизм даври астрономлари ўз илмий ишларида систематик ишлатиб тараққий эттирадилар. Эллинизм даври астрономларининг ишлари орқали олтмишли каср Ҳинд, Араб ва Ўрта Осиё фанига ва булар орқали Европа фанига киради.

Олтмишли ҳисоблаш системасини ривожлантиришда Ўрта Осиё математиклари ҳам ўз ҳиссаларини қўшганлар. Ҳиндларнинг ўнли позицион системасини биринчи бўлиб араб адабиётида тарғиб қилувчи Муҳаммад Хоразмий арифметик асарларида тўққизта рақам ва ноль ўрнида ишлатиладиган нуқта белгиси билан аралаш олтмишли позицион ҳисоб системасини баён этади. Олтмишли позицион система билан бутун ва каср сонларни тасвирлаш ҳамда улар устида амаллар бажариш усулларини кўрсатади.

971—1024 йилларда яшаган эронлик математик Абу Ҳасан Жилий Хоразмий арифметикасини методик томондан такомиллаштирди. У ўзининг арифметик асарида ягона абсолют олтмишли позицион системани баён этади. Бу системада бутун ва каср сонларни тасвирлаш ва улар устида кўпайтириш, бўлиш ва квадрат илдиз чиқариш амалларини бажариш методини кўрсатади. Ан Насавий* олтмишли касрлар устида амалларни бажаришни янги ўрганувчиларга тушунарли содда ва

---

*Ан Насавий. Достаточное об индийской арифметике. В сбор. Историко-математ. исслед. Вып. XV 1963 г. 413—430- бетлар.

осон бўлишини назарда тутиб, каср сонларни ҳинд рақамида ёзиб ўзининг арифметик асарининг тўртинчи китобида „(Даража ва дақиқалар билан амаллар ҳақида") ги 7-бобда олтмишли позицион системани баён қилади. У каср сонлар устида амаллар бажариш билан бир қаторда, сонлардан куб илдиз чиқариш усулини ҳам кўрсатади. Насириддин Тусий ва Низомиддин Нишопурийлар эса олтмишли позицион системани ривожлантириб, шу системада каср сонларнинг хоналарини кенгайтирадилар ва улар устида амалларни бажариш билан бирга сонларни исталган даражага кўтариш ва исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини ҳам кўрсатадилар.

XV асрда яшаган Ғиёсиддин Жамшид Коший олтмишли системани янада ривожлантириш билан уни баён этиш методини такомиллаштиради. Бу системада арифметик амалларни Нишопурий каби „Жадвал усули" да бажаради. У олтмишли системани астрономия ва математиканинг бошқа тармоқларига татбиқ қилади. Масалан, Коший айлана узунлигини олтмишли касрда $\frac{1}{60^9}$ гача аниқликда ҳисоблайди.

Олтмишли системанинг келиб чиқиш ва ривожланиш тарихи астрономияга боғлиқ бўлиб, бу система астрономиядаги ҳисоблашларда систематик ишлатилган ва назарий томондан тушунтириш методи тараққий эттирилган. Шу сабабли олтмишли система астрономик ҳисоблаш системаси деб аталган. Шарқ математикларидан ал-Насавий, Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар ҳам илмий асарларида "Даража ва дақиқалар билан амаллар ҳақида"*, „Астрономларнинг усуллари бўйича каср сонлар арифметикаси ҳақида", "Астрономларнинг ҳисоблаш усуллари" сарлавҳада олтмишли системада бутун ва каср сонлар билан амаллар бажариш усулларини баён этадилар.

Юқорида айтилганлардан шундай хулоса чиқариш мумкин: Шарқ математиклари Муҳаммад Хоразмий, Абу Ҳасан Жилий, ан-Насавий, Абул Вафо, Насириддин Тусий, Низомиддин Нишопурий ва Жамшид Кошийлар бобилликларнинг олтмишли системасини назарий ва методик томондан ривожлантириб, ягона абсо-

---

* Бу ерда ва бундан буён Шарқ математиклари „бутун сон" маъносида ишлатган „даража" иборасини сақлаймиз.

лют олтмишли позицион ҳисоблаш системасини яратдилар. Улар бу системада каср сонларни тасвирлаш ва улар устида амаллар бажариш усулини кўрсатиш билан уни астрономия ва математиканинг турли тармоқларига системали татбиқ қиладилар.

Олтмишли каср астрономия тараққиётида муҳим аҳамиятга эга бўлиши билан бир қаторда математиканинг ривожланишида ҳам катта роль ўйнади. Олтмишли система кейинги даврларда метрик система ва ўнли каср ғоясининг вужудга келишида асосий омил бўлиб хизмат қилди.

Математика тарихидан маълумки, хитойда математик тушунчаларнинг вужудга келиши узоқ ўтмиш тарихига эгадир. Қадимги хитойликлар сонларни иероглиф (бирор маънони билдирадиган тасвирий белги) ёзув билан белгилаб, турмуш ва хўжалик ишларининг талабига кўра ҳисоблашларни ўнли саноқ системасида бажарганлар. Эрамиздан олдинги II асрдан эрамизнинг III асригача бўлган даврда хитойликлар хўжалик ишларида ўнли ўлчов (узунлик, юз, ҳажм ва оғирлик) системасини ишлатганликлари маълум. Ўнли ўлчов системаси хитойликларда III асрдаёқ ўнли каср тушунчасининг вужудга келишига асосий омил бўлиб хизмат қилади. Хитой математика тарихини акс эттирадиган энциклопедик характердаги „Тўққиз бобдаги математика“ номли асарнинг шарҳловчиси Лю Хуэй III асрда айлананинг диаметри 1,355 футни узунлик ўлчовда (тасвирий белгилар билан) шундай ёзган:

1 чи 3 цун 5 фэн 5 ли.

Цзу Чин-чжи (430—501) узунлик ўлчов бирлигида диаметри 10^8 бирлик бўлган доира айланаси узунлигининг диаметри узунлигига нисбатини $\pi \approx 3{,}141527$ деб ҳисоблайди. Шундай қилиб, қадимги хитойликлар айрим масалаларда ўнли каср тушунчасини тасвирий белги билан берганлар. Буни Хитой математикларининг энг катта ютуғи деб ҳисоблаш мумкин.

Хитойликлар ўнли каср ғоясини айрим масалаларда кўрсатган бўлсалар, Ўрта Осиё математикларидан Коший 1427 йилда ёзган „Арифметика калити“ номли асарида ўнли каср назариясини системали равишда баён этади ва уни математиканинг турли тармоқларига татбиқ қилади.

Европада эса XVI асрда Голландия математиги С. Стевин ўнли каср назариясини баён этади.

Шундай қилиб, дарсда ва дарсдан ташқари машғулотларда ўқувчиларга юқорида қайд этиб ўтилган— олтмишли системада каср сонларни ривожлантириш билан бир қаторда уни тушунтириш методи ҳам такомиллаштирилганлиги ва ўнли каср кашф этилганлиги ҳақидаги маълумотларни бериб борсак, уларнинг ҳар бир темани онгли равишда тушунишларига ёрдам берган бўламиз.

2-§. Ўрта Осиёда олтмишли каср тушунчасини киритиш методи

Ўрта Осиё математиклари олтмишли каср тушунчасини киритиш методини мазмун жиҳатидан бир хил, яъни вақтга боғлаб, айлана (йилни) ни 360 га булиб, унинг бир бўлаги даража, бир даражанинг олтмишдан бир бўлаги дақиқа, бир дақиқанинг олтмишдан бир бўлаги сония кабиларнинг махражи олтмишнинг даражасидан тузилган каср эканлигини кўрсатадилар. Кейинчалик бу асарлар Европада лотин тилига таржима қилинганда даража, дақиқа, сония ва ҳ.к . сўзларини градус, минут, секунд ва ҳ. к. деб таржима қилинган.

Муҳаммад Хоразмий* арифметик асарида аввал касрга умумий тушунча берди. У $\frac{1}{n}$ кўринишдаги касрнинг махражи турлича бўлиши мумкинлиги ва булар орасида махражи 2 дан 11 гача бўлган тўққизта бирлик касрнинг араб тилида алоҳида номлар билан аталишини кўрсатади. Сўнг ҳиндлар шу касрлар орасида махражи 60 ва унинг даражасидан тузилган: $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, ... касрларни кўрганликларини уқтиради ва бу касрларнинг саккизинчи хонагача номларини араб тилида қуйидагича атайди: $\frac{1}{60}$ — дақиқа (минут), $\frac{1}{60^2}$ — сония (секунд), $\frac{1}{60^3}$ — солиса (терций), $\frac{1}{60^4}$ — робиъа

---

*Мухаммед ал-Хорезми. Математические трактакты. Т. Изд-во Ак. Наук УзССР, 1964 г. 9—24-бетлар.

(кварт), $\frac{1}{60^5}$ — хомиса (квант), $\frac{1}{60^6}$ — содиса (секст), $\frac{1}{60^7}$ — собиъа (септим) ва $\frac{1}{60^8}$ сомина (октава).

Хоразмий олтмишли касрни баён этишда ҳиндларни эслаб, улар шундай касрни кўрганлар дейишига сабаб, халифа ал-Маъмун топшириғи бўйича Муҳаммад Хоразмий шарҳда ҳиндларнинг астрономияга доир санскрит тилида ёзилган „Синдҳинд" номли асарини Абу Исҳоқ Иброҳим ал-Фазорий (777 йилда вафот этган) нинг ўғли Муҳаммаднинг „Катта Синдҳинд" номи билан араб тилига қилган таржимасидан айрим нуқсонларни бартараф қилиб, китобни илмий ва назарий томондан асослаб, методик томондан тушунарли қилиб қайта ишлаб, унга „Қисқартирилган Синдҳинд" деб ном беради. Бу китоб асрлар давомида Шарқда ва Ғарбий Европада қўлланма бўлиб келган. Хоразмий ҳиндларнинг "Синдҳинд" ни қайта ишлаш даврида уларнинг ҳинд рақамида олтмишли касрни астрономиядаги ҳисоблашларга татбиқ қилганликларини кўрган бўлиши, шунинг учун у олтмишли касрни баён этишда ҳиндларни эслаган бўлиши эҳтимол, Хоразмий олтмишли каср хоналари ва уларнинг номларини кўрсатгандан сўнг хоналар орасидаги муносабатни баён этади. У дақиқанинг дақиқага кўпайтмаси сония, сониянинг сонияга кўпайтмаси робиъа, робиъанинг робиъага кўпайтмаси сомина ва бошқа хоналар орасидаги комбинацияларни кўрсатади.

Абул-Вафо (940—977) „Савдогар ва котибларга арифметика санъатидан нималар зарурлиги ҳақидаги китоб" асарида* каср сонлар назарияси ва уларнинг ўрта аср Шарқ математиклари услубида ўзига хос метод билан классификациясини беради. У асарида сонларнинг нисбати уч хил кўринишда бўлишини, яъни кичик соннинг катта сонга, катта соннинг кичик сонга ва тенг сонларнинг ўзаро нисбатда бўлишини кўрсатиб, касрга „каср кичик соннинг катта сонга $\left(\frac{m}{n}\right.$, бунда $\left.m < n\right)$ нисбатидан ҳосил бўлади," деган умумий тушунча беради. Сўнг асарнинг „Бутун сонни 60 га ($n:60$),

---

*Медовой М. М. Об арифметическом трактате. Абул-Вафы. В сбр. историко-матем. исслед. вып. 13, 1960, 257—284- беглар.

бутун ва каср йиғиндисини 60 га ($(n + \alpha) : 60$) нисбати ҳақида“ номи билан III ва IV бобларда олтмишли каср ҳақида айрим тушунчалар беради.

Жамшид Коший „Айлана ҳақидаги рисола“ номли асарнинг кириш қисмида ва шу асарнинг шарҳига математика тарихчиси Вёпкеларнинг маълумотига қараганда, Абул-Вафо радиуси 120 бўлган айлананинг 360 дан бир бўлагига тегишли ватарнинг ярми ва sin $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ ни олтмишли касрда $\frac{1}{60^5}$ аниқликда ҳисоблаганлигини кўрсатади.

Шарқ математикларидан ан-Насавий (тахминан 1030 йилда вафот этган) арифметикага доир асарининг кириш қисмида, ўзидан олдин ўтган олимлардан ал-Киндий (877 йилда вафот этган), Аҳмад ал-Мужтаба ан-Антакий ал-Муъалавий (187 йилда вафот этган), ал-Калвазаний (ал-Антакий билан Боғдод академиясида бирга ишлаган), Али ибн Наср (944 йилда вафот этган), Абу Ханифа ал-Диноварий (775 йилда вафот этган) ва Абу Ҳасан Жилий (тахминан 971—1024) ларнинг арифметикага доир асарларида темаларни баён этиш методи ҳаддан ташқари узун ёки қисқалиги билан тушуниш оғир эканлиги, арифметикага тегишли бўлмаган масалалар кўрилганлиги, айрим асарларда амалий машғулот (мерос тақсимлаш) ларга ҳаддан ташқари кўп ўрин берилганлиги ва бошқа камчиликларни кўрсатади. Ан-Насавий мана шу нуқсонларни бартараф қилиш билан бирга асарни методик томондан такомиллаштириб, ўқувчилар куч ва вақтни кам сарфлаб арифметика предметини яхши тушунишларини ҳисобга олиб, ушбу асарни ёзганлигини уқтиради.

Ҳақиқатан ан-Насавий арифметик асарини Муҳаммад Хоразмий усулида (ҳисоблаш тахтасида) ёзади, бу асар орқали ўз олдига қўйган вазифасини бажаради. Асарнинг биринчи китобида бутун сонлар, иккинчи китобида каср сонлар, учинчи китобида аралаш сонлар устида амалларни қисқа ва тушунарли қилиб баён этади. Асарнинг тўртинчи китобида „даража ва дақиқалар устида амаллар“ номи билан позицион олтмишли касрни баён этади. У олтмишли касрни оддий касрнинг хусусий ҳоли, яъни махражи олтмишли ва унинг даражасидан тузилган касрлардир дейди. Сўнг олтмишли касрни ҳосил қилишда Хоразмий усули бўйича ўн икки бурждан ташкил топган эклиптикани 360 даражага, ҳар бир даражани олтмиш дақиқага ва ҳоказо бўлиш зарурлигини, хоналарнинг номлари ва касрнинг ёзилишини кўрсатади. Хоразмий олтмишли касрнинг саккизинчи хонасигача номларини курсатган булса, Насавий туққизинчи, ўнинчи хоналарни тосиъ ва ошир номлари билан атайди. Шу билан у, олтмишли каср тушунчасини умумлаштиради. Насавий, ўқувчиларнинг осон тушунишини ҳисобга олиб, олтмишли касрнинг ёзилишини ҳинд рақами билан ифодалайди ва мисолда уч хонали олтмишли касрнинг ёзилишини кўрсатади.

Масалан, 50 даража 43 дақиқа 30 сония олтмишли каср ҳозирги белги билан $50+\frac{43}{60}+\frac{30}{60^2}$ ёзилса, Насавий оддий касрларнинг ёзилишига таққослаб махражни ташалаб $\begin{matrix}50\\43\\30\end{matrix}$ кўринишида ёзишни тавсия қилади. Хоналарда рақам бўлмаса, ноль қўяди, масалан, 19 дақиқа ва 50 солисани $\begin{matrix}00\\19\\00\\50\end{matrix}$ кўринишда ёзади.

Насавий олтмишли касрнинг астрономик жадвалларни ҳисоблашда зарурлигини кўрсатиш билан астрономлар энг содда касрларни ҳам олтмишли каср кўринишида ёзишга ҳаракат қиладилар деб, мисолда $1\frac{1}{3}$ касрнинг $1\frac{20}{60}=\frac{01}{20}$ кўринишда, $13\frac{1}{5}$ касрнинг $1\frac{12}{60}=\frac{01}{20}$ кўринишда ёзилишини кўрсатади.

Беруний олтмишли система ҳақида алоҳида асар ёзмаган бўлса ҳам у астрономияга доир энг катта ва муҳим илмий асарларидан „Қадимий халқлардан қолган ёдгорликлар“ ва „Қонуни масъудий“ номли асарларида олтмишли системада бутун ва каср сонларни астрономия ва геометрия масалаларига систематик татбиқ қиқади. У бир эрадан иккинчи эрага ўтишда бутун сонларга олтмишли саноқ системасини татбиқ этади ва турли хилдаги йил ҳисоблаш бошларининг фарқи учун жадвал беради. Беруний „Қонуни Маъсудий“ нинг биринчи мақоласининг олтинчи бобида олтмишли касрга тушунча беришдан аввал бирлик ва унинг бўлакларининг номаълум миқдорларни ўлчашдаги аҳамиятига тўхтайди. Берунийнинг бирлик ва унинг бўлакларига тушунча беришининг сабаби, агар айлананинг 360 дан бир бўлаги—даража бирлик деб қабул қилинса, унинг олтмишли бўлакларидан тузилган касрни ҳосил қилиш мумкинлигини кўзда тутади. Шунинг учун у олтмишли системанинг келиб чиқиш тарихи ҳақидаги М, Кантор ва бошқаларнинг „астрономик“ гипотезларини тасдиқлаб, бобилликлар яратган олтмишли касрлар 365 кунлик қуёш йили ва 354Р22′ ёки 355 кунлик ой йилининг кунидан ўрта арифметик қилиб чиқарилган тахминан 360 куннинг 360 дан бир бўлаги бўлган даражани бирлик учун қабул қилади. Даражанинг олтмишли бўлаклари $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, ... ва ҳоказоларни дақиқа, сония, солиса ва ҳоказо номлар билан атайди. Беруний олтмишли касрни „абжад“ ҳисобида араб ҳарфлар билан ёзган. У $A+\frac{a}{60}+\frac{b}{60^2}+\frac{c}{60^3}+\ldots$ (бунда A—бутун ёки ноль, a, b, c ... лар эса 60 дан катта бўлмаган натурал сонлар) касрнинг махражини ташлаб A, a, b, c, ... ҳолда ёзади.

Насириддин Тусий ўзининг арифметик асарининг учинчи китобида „Астрономларнинг ҳисоблаш усуллари бўйича каср сонлар арифметикаси ҳақида“ номи билан икки қисмда олтмишли системасида бутун ва каср сонлар ва улар устида амалларни бажариш методини баён этади. Биринчи қисмда методик томондан ўқувчиларга тушунарли бўлишини ҳисобга олиб ан-Насавий йўлида „Даража ва дақиқалар устида амаллар“ номи билан ҳинд рақами билан олтмишли каср ва унинг устидаги амалларни бажариш усулини баён этади. Иккинчи қисмда эса олтмишли каср ва унинг устида бажариладиган амалларни „Абжад ҳисобида“ баён этади. Тусий олтмишли касрнинг ёзилишини ан-Насавий каби, биринчи ўринга юқори хона, унинг тагига қуйи хона ва ҳ. к. тартибда ёзишни тавсия қилади. Масалан, 12 бир марта кўтарилган 27 даража 32 дақиқа (ҳозирги кўринишда: $1260+27+\frac{32}{60}$) касрни $\begin{matrix}12\\27\\32\end{matrix}$ ва 15 дақиқа 45 сония 50 солиса касрни $\begin{matrix}15\\45\\50\end{matrix}$ кўринишда ёзишни тавсия қилади. Лекин иккинчи каср $0+\frac{15}{60}+\frac{45}{60^2}+\frac{50}{60^3}$ $\begin{matrix}00\\15\\45\\50\end{matrix}$ кўринишда ёзилса, айтилган қоидага тўғри келади, қул ёзмада 15 дақиқа устидаги иккита ноль қолдирилган.

Тусийнинг замондоши ва шогирди Низомиддин Нишопурий арифметик асарининг иккинчи қисмининг II бобида ва Жамшид Кошийнинг арифметикага доир „Арифметика калити“ номли асарининг учинчи китобида „Астрономларнинг ҳисоблаш усуллари ҳақида“ номи билан олтмишли системада бутун ва каср сонларни ёзиш ва улар устида амалларни бажариш методини мукаммал баён этади. Коший Хоразмий, Абдулло Жилий, Насавий, Абул-Вафо, Беруний, Тусий ва Нишопурийларга нисбатан олтмишли позицион системани мукаммалроқ баён этади. Коший бу системада бутун ва каср сонларни астрономия ва математиканинг тармоқларига татбиқ қилади. У айлана узунлигини олтмишли каср билан $\frac{1}{60^9}$ аниқликда ҳисоблайди. Коший олтмишли системада бутун ва каср сонларни

$$a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \ldots + a_0 + \frac{b_1}{60} + \frac{b_2}{60^2} + \ldots + \frac{b_m}{60^m} =$$

$$= \overline{a_a a_{n-1} \ldots a_0 b_1 b_2 \ldots b_m}$$

кўринишда ёзади. У мисолда Нишопурий каби, олтмишли касрни ҳар бир хонаси номи билан ёки охирига энг кичик хонаси номи билан ёзишни тавсия қилади.

Масалан, $1 \cdot 60^2 + 33 \cdot 60 + 26 + \frac{45}{60} + \frac{37}{60^2}$ касрни 133 26 45 37 сония кўринишда ёзади. Ўқишда 1 икки марта кўтарилган 33 бир марта кўтарилган 26 даража 45 дақиқа 37 сония деб ўқилади.

Шундай қилиб, Ўрта Осиё математиклари бобилликлар яратган олтмишли системани ривожлантириб, уни янада такомиллаштирадилар. Хоразмий, Жилий ва Насавийлар бу системада айрим хонагача каср тушунчасини берсалар, Беруний, Тусий, Нишопурий ва Кошийлар олтмишли каср тушунчасини хоналари бўйича кенгайтирадилар.

3-§. Олтмишли касрларни қўшиш ва айириш амалларининг бажарилиш усуллари

Ўрта Осиё математикларининг ўнли ва олтмишли системада бутун ва каср сонлар устида амалларни бажариш усулларини арифметика тараққиётининг тўртинчи босқичига киритиш мумкин. Тўртинчи босқичнинг бошланғич даврида арифметик амаллар асосан юқори хонасидан бошлаб, тахта устида қум ва тупроқ сепиб, учи ингичка таёқча ёрдамида бажарилган ва оралиқда ишлатиладиган рақамлар ўчирилиб ўрнига янги рақамлар ёзиб ҳисобланган. Бу даврга ҳинд рақами бўйича ўнли ва олтмишли позицион система ҳақида ёзилган арифметик асарлардан Хоразмий, Насавий ва Тусийларнинг асарларини киритиш мумкин.

Тўртинчи босқичнинг кейинги даврида арифметик амаллар „Сатҳ" ва „Жадвал" усулида юқори ва қуйи хонасидан бошлаб бажарилади, оралиқда ишлатиладиган рақамларни эса жадвалда қоғозга ёзилади.

Демак, „Сатҳ" ва „Жадвал" усули ёрдамида амалларни бажариш „Ҳисоблаш тахтаси" дан қоғозга кўчирилади. Бу даврга Низомиддин Нишопурий, Жамшид Коший, Али Қубовий, Баҳоваддин Омилий асарларини ва мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларини киритиш мумкин.

Шуни ҳам эслатиб ўтиш зарурки, арифметика тараққиётининг биринчи босқичига математика тараққиётининг биринчи даврига тегишли арифметикани киритиш мумкин.

Бу даврдаги арифметика ўнли ва олтмишли позицион саноқ системасида бўлмасдан, балки сонлар тасвирий белги билан ифодаланиб, булар устида амаллар бажарилган. Иккинчи босқичга ҳеч қандай рақам ишлатилмасдан сонлар сўз билан ёзилган арифметикани киритиш мумкин. Шарқда бундай арифметика эски араб ҳисоблаш системасида тузилган арифметика ёки қисқача „эски араб арифметикаси" деб аталган. Бундай системада Шарқ математикларидан Абул-Вафо (X) ва ал-Кархийлар (X—XI асрларда) арифметик асарларини ёзганлар,

Арифметика тараққиётининг учинчи босқичига сонлар араб алфавитидаги ҳарфлар билан ифодаланган, ўнли ва олтмишли системада тузилган арифметика киритилади. Бундай арифметика исталган соннинг ўзига тегишли ҳарфларни бирлаштиришдан ҳосил бўлган сўз билан ёзилади, Арифметик амаллар ҳам қоидага бўйсунади. Шу принципда тузилган арифметика „Абжад ҳисоби" деб аталади. Унинг бу ном билан аталишининг сабаби араб алифбесида 1, 2, 3 ва 4 ни ифодаловчи дастлабки тўртта ҳарф: алиф, бе, жим ва дол ҳарфлари билан белгилаб, буларнинг бирлашишидан „абжад“ сузи ҳосил бўлган. Ҳисоблаш системаси эса шу ном билан „Абжад ҳисоби“ деб аталади.

Ўрта Осиё математикларидан Беруний, Тусий, Нишопурий, Жамшид Коший ва бошқалар бу системала амал бажариш мураккаб эканлигини билиб аввал ҳинд рақамида сунг абжад ҳисобида амалларни бажарадилар.

Бу ҳисоблаш системасини тушуниш учун араб алифбесини билиш зарур. Бундан ташқари абжад ҳисобида 28 ҳарфга тегишли сонларни эсда сақлаш қийин. Шунинг учун бу система бошқа ҳисоблаш системаларига нисбатан мураккабдир. Шунга қарамай, ўрта аср Шарқ олимлари уни астрономияда системали қўллаганлар. Хоразмий ва ан-Насавийлар методик томондан тушунарли қилиб ҳинд рақамида олтмишли каср ва улар устида амалларни бажариш усулини кўрсатадилар.

Ўрта Осиё математиклари ўнли ҳисоблаш системасида бутун ва каср сонлар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш амалидан ташқари, иккилантириш ва яримлатишни алоҳида амал ҳисоблаб, шу амалларни бажариш усулини кўрсатган бўлсалар, олтмишли системада ҳам бутун ва каср сонлар устида шу тартибда амалларни бажарадилар. Бундан ташқари, олтмишли системадан ўнли системага ўтиш ва аксинча, олтмишли касрни ўнли касрга айлантириш ва унинг тескариси, оддий касрни олтмишли касрга айлантириш усулларини кўрсатадилар.

Ушбу бобда арифметика тараққиёти тўртинчи босқичининг биринчи ва иккинчи даврларига тегишли Ўрта Осиё математикларининг асарларида олтмишли системада каср сонлар устида амаллар қандай методда бажарилганлиги ва ривожлантирилганлигини таққослаб кўрсатишни лозим топдик.

Ўрта Осиё математиклари ва мадрасада ўқитилган дарсликларнинг муаллифлари бутун сонлар бобида ҳар бир амалнинг бажарилиш усулини кўрсатишдан аввал шу амалларга мазмунан бир хил, шаклан турлича бўлган таърифни қисқа ва тушунарли қилиб берадилар. Масалан, иккилантириш амали деб („амали тазъиф“) бирор сонни ўзига тенг бўлган сонга қўшишга айтилади. Яримлатиш амали „амалий тансиф“ берилган соннинг ярмисини топиш, деган таъриф берадилар. Берилган таърифга эътибор берилса, иккилантириш ва яримлатиш алоҳида амал эмас, балки кўпайтириш ва бўлиш амалларининг хусусий ҳоли эканлиги кўринади. Хоразмийдан бошлаб Ўрта аср Шарқ математикларининг асарларида иккилантириш ва яримлатиш алоҳида амал ҳисобланиб келинган. Европада бу анъана XIV асргача давом этган бўлса, Ўрта Осиё мадрасаларида ўқитилган дарсликларда XX асргача иккилантириш ва яримлатиш алоҳида амал тариқасида ўқитилади.

Проф. Н. П. Юшкевич* ва бошқа муаллифларнинг фикрича, иккилантириш ва яримлатишнинг алоҳида амал тарзида ўқитилишига сабаб арифметик амалларнинг тез ва ихчам бажарилиши, зеҳнда ҳисоблашга қулайлиги, математиканинг тармоқлари—алгебра ва геометрия масалаларини ва математиканинг амалий машғулот (мерос тақсимлаш) га доир масалаларини ечишда мунтазам равишда қўлланишидир. Ҳақиқатан, бу фикрга қўшилса бўлади, иккилантириш ва яримлатиш каср сонлар арифметикасидаги амаллар ва амалий машғулотларга мунтазам қўлланилади.

Ўрта Осиё математиклари олтмишли касрлар устида амалларнинг бажарилиш усулини тўлиқ умумий (қоида) кўринишда берганларидан сўнг мисол кўрсатадилар. Хоразмий рисоласининг лотинча таржимасининг рус тилига қилинган таржимасида арифметик амалларга таъриф берилмаган, бундан ташқари, олтмишли каср устидаги амалларни ўқитиш тартиби бузилган, яъни аввал кўпайтириш, бўлиш амаллари, сўнг қўшиш, айириш, иккилантириш ва яримлатиш амаллари бажарилган. Хоразмийдан кейин унинг асари асосида ёзилган Ўрта аср Шарқ математикларининг асарларида ва XX асргача Ўрта Осиё мадрасаларида ўқитилган дарсликларда амаллар ҳозирги тартибда ўқитилади. Хоразмий асарининг асл нусхаси топилмаганлиги учун ҳозирча олтмишли касрлар устидаги амалларни ўқитиш тартиби ҳақида бирор нарса дейиш қийин, лекин Хоразмий асарида олтмишли каср ва унинг устидаги амалларни бажариш усули ҳақида тушунча берилади.

Хоразмий, ан-Насавий, Тусий ва бошқалар олтмишли касрларни қўшиш ва айириш амалларини ҳозирда

---

[1] А. П. Юшкевич. История математики в средние века. М., 1961 г, 181-бет.

биз бажарадиган методда бажарганлар, фақат улар амални юқори хонасидан бошлаб бажаришни тавсия қиладилар, бундан ташқари қўшилувчилар, камаювчи ва айирувчиларнинг ёзилиш шакли ҳам фарқ қилади. Улар касрларни қўшиш учун қўшилувчиларни юқори хонасидан бошлаб вертикал ҳолатда тегишлича хоналари (даража, дақиқа, сония ва ҳ. к.) бўйича ёзиб, юқори хонадан бошлаб қўшишни, агар йиғинди олтмишдан ортса, ортиқчасини йиғинди ўрнига ёзиб олтмишни бирлик ҳисоблаб юқори хонага қўшишни тавсия қиладилар. Иккилантиришни ҳам юқори хонадан бажаришни, иккилантириш натижасида хоналарда олтмишдан ортиқ сон ҳосил бўлса, олтмишни бирлик қилиб, юқори хонага қўшишни уқтирадилар. Кейин улар қўшиш ва иккилантириш қоидасига мисоллар кўрсатадилар. Ҳар бир даврга тегишли олимларимиз амалларни қандай методларда бажарганликларини кўрсатиш мақсадида уларнинг асарларидаги мисоллардан намуналар кўрсатишни маъқул топдик.

1. Насавий ва Тусийлар 12 даража 15 дақиқа 33 сонияга 7 даража 33 дақиқа 47 сонияни қўшиш учун уларни $\begin{matrix}12 & 07\\ 15 & 33\\ 33 & 47\end{matrix}$ кўринишда ёзадилар. Қўшиш қуйидаги босқичда бажарилади. 1) $12+07=19$; 19 ни 7 нинг рақамларини ўчириб, ўрнига $\begin{matrix}19\\ 33\\ 49\end{matrix}$ кўринишда ёзилади. 2) $15+$ $+33=48$, 48 ни 33 нинг рақамларини ўчириб ўрнига $\begin{matrix}19\\ 48\\ 47\end{matrix}$ кўринишда ёзилади. 3) Охирида $33+47=80$, олтмишдан ортиқ 20 ни 47 ни ўчириб, унинг ўрнига ёзилади, 60 ни бирлик деб 48 га қўшилса, охирги йиғинди $\begin{matrix}19\\ 49\\ 20\end{matrix}$ бўлади.

Улар 13 даража 45 дақиқа 19 сонияни иккилантириш учун уни $\begin{matrix}2\\ 13\\ 45\\ 19\end{matrix}$ кўринишда ёзишни, сўнг юқори хонадаги 13 ни иккилантириб, йиғинди 26 ни 13 ни ўчириб ўрнига $\begin{matrix}26\\ 45\\ 19\end{matrix}$ кўринишда ёзишни тавсия этадилар.

Сўнг 45 ни иккилантириб, йиғинди 90 нинг олтмишдан катта қисмини 45 ўрнига, олтмишни бирлик ҳисоблаб 26 га қўшилади, бунда у $\begin{matrix}27\\30\\19\end{matrix}$ кўринишга келади. Охирида 19 иккилантирилса, натижа $\begin{matrix}27\\30\\38\end{matrix}$ кўринишда бўлади. Хоразмий, Насавий ва Гусийлар амалларни ҳисоблаш тахтасида бажарганликлари учун рақамни ўчириб, ўрнига ёзиш қулай бўлган. Қоғозда эса бу тартибда ҳисоблаш ноқулай.

Нишопурий, Коший, Омилий ва бошқалар олтмишли касрларни қўшиш ва айиришни жадвал усулида бажарадилар. Нишопурий амални юқори хонасидан бажаришни тавсия қилса, Коший қуйи хонадан бошлаб бажаришни тавсия қилади, яъни у содда йўл ҳозирги усул эканлигини билиб касрларни қўшиш ва айиришни шу усул билан бажаради. Кошийдан олдин ўтган математиклар олтмишли системада фақат каср сонлар устида амаллар бажарган бўлсалар, Коший шу системада бутун ва каср сонлар устида амалларни ҳам бажаради. Масалан, Коший $20\cdot60+18+\frac{40}{60}+\frac{51}{60^2}$; $42\times\times60+50+\frac{48}{60}+\frac{36}{60^2}$ ва $30\cdot60+17+\frac{16}{60}+\frac{10}{60^2}$ касрларни қуйидаги кўринишда қўшади:

Хоналар номи	Икки марта кутарилган	Бир марта кутарилган	Даража	Дақиқа	Сония
Қўшилувчилар		20 42 30	18 50 17	40 48 16	51 36 10
Йиғинди	1	33	26	45	37

Йиғинди $1\cdot60^2+33\cdot60+26+\frac{45}{60}+\frac{37}{60^2}$ бўлади.

Коший жадвалда иккилантириш амалини ҳам қуйи хонадан бошлаб бажаради:

Хоналар номи	Даража	Дақиқа	Сония	Солиса
Иккиланган сон	18	22	9	53
Натижа	36	44	19	46

Хоразмий, Насавий ва Тусийлар олтмишли касрни айириш учун қўшиш амали каби аввал камаювчи ва айрилувчиларни юқори хонадан бошлаб вертикал ҳолларда ёзиб, сўнг айиришни юқори хонадан бошлаб бажаришни кўрсатадилар. Масалан, 28 даража 12 дақиқа 45 сониядан 7 даража 18 дақиқа 58 сонияни айириш учун камаювчи ва айирилувчилар $\begin{matrix}28 & 07\\ 12 & 18\\ 45 & 58\end{matrix}$ кўринишида ёзилади. Айириш амали эса қуйидаги босқичларда бажарилади; 1) 28 — 07 = 21 ни 07 ўрнига шундай ёзилади: $\begin{matrix}21\\ 18\\ 58\end{matrix}$. 2) 12 нинг ўнлигидан 18 нинг ўнлиги айирилса 0,2 дан 8 ни айириб бўлмайди Шунинг учун юқори хонадаги 21 нинг бир бирлиги 60 ҳисобланса, қуйи хонадаги 2 билан 62 бўлади. 62 дан 8 ни айирилса, 54 қолдиқ қолади. Қолдиқ 54 ни 18 нинг ўрнига $\begin{matrix}20\\ 54\\ 58\end{matrix}$ кўринишида ёзилади. Ниҳоят сониялар хонасидаги рақамларни ҳам шу тарзда айирилса, охирги айирма $\begin{matrix}20\\ 58\\ 47\end{matrix}$ бўлади. Тусий арифметик асарида амалларни юқори хонадан бошлаб бажаришдан кўра қуйи хонадан бошлаб бажариш содда эканлигини уқтириб, мисолда қўшиш ва айиришни ҳисоблаш тахтасида (юқоридаги мисол каби) қуйи хонадан бошлаб бажаришни ҳам кўрсатади. Масалан, юқоридаги мисол $\begin{matrix}28 & 07\\ 12 & 18\\ 45 & 58\end{matrix}$ қуйидаги босқичда бажарилади: 1) 45 дан 58 ни олиб бўлмайди, 12 дан бир бирликни 60 ҳисоблаб 45 га қўшилса, 105 бўлади, бундан 58 ни айирилса, 47 қолади. 2) Худди шу йўлда 11 + 60 = 71, 71 — 18 = 53 бўлади. 3) 27 — 7 = 20 айирма $\begin{matrix}20\\ 53\\ 47\end{matrix}$ бўлади.

Демак, Тусий устки ёзилиш формасидан фарқ қилувчи ҳозирги қўшиш ва айириш усулининг асосини кўрсатади. Нишопурий арифметик амалларни бажаришни ҳисоблаш тахтасидан қоғозга кўчириб, жадвалда бажарса ҳам, эски анъана бўйича амални юқори хонасидан бошлаб бажаради. Масалан, у юқоридаги мисолни жадвалда қуйидаги кўринишда бажаради:

Хона номлари	Даража	Дақиқа	Сония
Камаювчи	28	72 12	105 45
Айрилувчи	07	18	57
Айирма	21 20	54 53	47

Изоҳ: Нишопурий 12 ва 45 ларнинг устидаги 72 ва 105 ларни ёзмасдан дилда ҳисоблайди.

Агар биз Тусий айтганича қушиш ва айириш амалларини қуйи хонасидан бошлаб бажарсак ва қушилувчилар, камаювчи ва айрилувчиларни жадвалга Нишопурий каби жойлаштирсак, Коший таклиф қилган олтмишли касрларни қушиш ва айиришнинг ҳозирги усули келиб чиқади. Фақат Кошийда камаювчи билан айирилувчининг уринлари алмашган. Масалан, Коший 20 даража 48 дақиқа 39 сониядан 14 робиъа 25 хомиса 50 содисани айиришни шундай куринишда бажаради:

Хона номлари	Даража	Дақиқа	Сония	Солиса	Робиъа	Хомиса	Содиса
Айрилувчи					14	25	50
Камаювчи	20	48	38	59	59	59	60
Қолдиқ	20	48	38	59	45	34	10

Коший яримлатишни юқори хонадан бошлаб бажаришни, хоналарда жуфт сон булса, унинг ярмини ёзиш, агар тоқ булса, яримлатишдан ҳосил булган қолдиқ бирни қуйи хона учун олтмиш ҳисоблаб, унинг ярми 30 ни яримланган қуйи хонага қушиш зарурлигини курсатади. Мисолда 7 даража 18 дақиқа 22 сония 9 солиса 53 робиъани яримлатишни қуйидагича бажаради:

Хоналар номи	Даража	Дақиқа	Сония	Солиса	Робиъа	Хомиса
Ярим сон	7	18	22	9	53	
Ярим натижа	3	39	11	4	56	30

Ҳозирги усул буйича олтмишли касрларни қушиш ва айириш амалларига келгунча, бу амаллар бир неча босқични босиб утган. Тусий ва Нишопурийлар қушиш ва айириш усуллари ичида ҳозирги усул содда ва қулай эканлигини билган ва уни амалий машғулотларга қўллашни тавсия қилган бўлса, Коший олтмишли касрлар устида ҳозирги қўшиш ва айириш усулини кўрсатади.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида олтмишли каср ва унинг устидаги амалларни ўқитиш мазмуни ва ҳажми турличадир. Ўрта асрдан бошлаб мадрасаларда системали равишда дарслик сифатида қўлланиб келинган атоқли олимларимизнинг дарсликларида олтмишли каср ва унга оид амаллар мукаммал баён этилади. Бунга Хоразмий, Насавий, Тусий, Нишопурий, Коший, Кубавий, Сижовандий, Омилий ва бошқаларнинг асарларини кўрсатиш мумкин. Айрим дарслик ва машқ дафтарларда олтмишли касрни оддий касрлар бобида қисқагина қилиб вақтга боғлаб тушунтирадилар ва унинг устидаги тўрт амални содда мисолда кўрсатадилар.

Баъзи бир машқ дафтарларида эса олтмишли каср ва унинг устидаги амаллар баён этилмаган. Бунинг сабабини аниқлаш учун математика тарихчиларининг мадрасада матемитика ўқитилиши ҳақидаги фикрларини келтиришга тўғри келади. Уларнинг фикрича „Мадрасада математика ўқитишдан кўзда тутилган мақсадлардан бири, ислом дини нормаларига кўра, меросхўрлар ўртасида мулкни тўғри тақсим қилувчи мутахассислар тайёрлашдир“. Ҳақиқатан, мадрасада математика ўқитиш зарурияти шу амалий мақсадлардан келиб чиқади. Олтмишли каср эса астрономиядаги ҳисоблашларга ва математиканинг айрим масалаларига татбиқ қилинади. Олтмишли каср математиканинг амалий мақсадларига тўғридан-тўғри зарур бўлмаганлиги туфайли мадрасада XIX ва XX асргача дарслик сифатида қўлланган машқ дафтарларида мунтазам ўқитилмаган. Ҳозирда ҳам мактабларда олтмишли каср ва унинг устида амаллар оддий касрлар билан аралаш ўқитилади.

Мадрасада олтмишли касрларни қўшиш ва айириш амалларини бажариш ҳозирги усулда ўргатилади. Сўнг талабаларга юқори хонадан бошлаб „Жадвал“ ва „Сатҳ“ усулида қўшиш ва айиришни мустақил иш тарзида топширилади. Бундан ташқари, амалларга белги киритилади, яъни қўшиш („жамъ“), айириш („тафриқ“) сўзларининг (араб алифбесидаги) бош ҳарфлари билан белгиланиб, ҳозиргидек йиғинди ва айирма шу белги тагига ёзилади. Масалан, 53 даража 48 дақиқа 46 сонияга 47 даража 39 дақиқа 28 сонияни қўшиш ва айириш бундай кўринишда бажарилади.

$$+\begin{array}{rrr}53&48&46\\47&39&28\\\hline 1\ 41&28&14\end{array}\qquad\qquad -\begin{array}{rrr}53&48&46\\47&39&28\\\hline 06&09&18\end{array}$$

Йиғинди: $1\cdot60+41+\frac{28}{60}+\frac{14}{60^2}$. Айирма: $6+\frac{9}{60}+\frac{18}{60^2}$.

Сўнгра талабаларнинг ҳисоблаш малакасини ошириш мақсадида шу мисолни юқори ва қуйи хонадан бошлаб бажаришда, дилда сақланадиган юқори ва қуйи хоналардаги бирликларни ёзиб қўшиш ва айириш кўрсатилади. Масалан, юқоридаги мисол қуйидаги кўринишда бажарилади:

Юқори хонадан бошлаб қўшиш (йиғинди одатдагича қия чизиқ тагига ёзилади)

$$\begin{array}{rrrr}&53&48&46\\&47&39&28\\\hline 1&30&17&04\\&\underline{11}&\underline{11}&\underline{1}\\&41&28&1\end{array}$$

Йиғинди: 1 41 28 14

Юқори хонадан бошлаб айириш (айирма айирилувчининг остига қия чизиқ тагига ёзилади)

$$\begin{array}{rrr}53&48&46\\47&39&28\\\hline 16&19&28\\\underline{1}&\underline{1}&\underline{1}\\0&0&0\end{array}$$

Юқори хонадан бошлаб қўшиш (йиғинди қўшилувчилар юқорисига, қия чизиқ устига ёзилади)

$$\begin{array}{rrrr}&\underline{41}&\underline{28}&\underline{1}\\&11&11&1\\1&30&17&04\\\hline &53&48&46\\&47&39&28\end{array}$$

Йиғинди: 1 41 28 14

Юқори хонадан бошлаб айириш (айирма камаювчининг юқорисига қия чизиқ устига ёзилади)

$$\begin{array}{rrr}\underline{0}&\underline{0}&\underline{0}\\1&1&1\\16&19&28\\\hline 53&48&46\\47&39&28\end{array}$$

Айирма: 06 09 18 $=6+\frac{9}{60}+\frac{18}{60^2}$.

Иккилангириш ва яримлатиш амалларини юқори ва қуйи хоналардан бошлаб бажариш усулини кўрсатгандан сўнг берилган касрни кетма-кет иккилантиришни маълум бир сонга етгач тўхтатиб, бунинг тескариси, яримлатиш билан берилган каср топилади.

4-§. Олтмишли касрларни кўпайтириш амали ва унинг бажарилиш усуллари

Шарқ математиклари олтмишли касрларни кўпайтиришни асосан икки усулда бажарадилар. Биринчи усулда кўпайтувчилардан иборат бўлган ҳар бир касрнинг юқори хоналари бир хил номли энг кичик номга келтирилади, сўнг ҳосил бўлган бир хил номли олтмишли касрнинг суратини суратга ва махражини махражга (лекин олтмишнинг даражаси бўлган махраж ёзилмайди) кўпайтирилади. Охирида топилган касрнинг суратидаги сонни олтмишли системага айлантириб, ҳосил бўлган сонни махраждаги олтмишнинг даражасига бўлиш орқали кўпайтма топилади. Математика тарихидан маълумки ягона олтмишли система тузилишига қадар Ўрта Осиё математикларидан биринчи бўлиб бу усулда кўпайтмани топишни Муҳаммад Хоразмий таклиф қилган бўлса, Хоразмийдан кейин Насавий ва Нишопурий ҳам шу усулда олтмишли касрни кўпайтиришни тавсия қиладилар. Нишопурий олтмишли касрларни кўпайтиришни жадвалда иккинчи усулда бажарса ҳам, эски анъана бўйича биринчи усулни ҳам кўрсатади. Бу усулнинг ноқулайлиги шундан иборатки, кўпайтувчиларни бир хил номли энг кичик хонага айлантириш, натижада ҳосил бўлган касрнинг суратини яна олтмишли системада ёзиш учун катта сонлар (агар кўпайтувчилар катта хонали касрдан иборат бўлса) билан ҳисоблашни талаб қилади. Бу эса ҳисобловчининг кўп вақтини олади. Шуни ҳисобга олган ҳолда Хоразмий ва Насавийлар ўз арифметик асарларида олтмишли касрларни кўпайтиришни ўрганиш усулини мисолда кам хонали касрларни кўпайтириш орқали кўрсатадилар. Масалан, улар $4+\frac{15}{60}+\frac{20}{60^2}$ касрни $6+\frac{20}{60}+\frac{13}{60^2}$ га кўпайтириш учун аввал уни махражсиз $\begin{matrix}04 & 06\\ 15 & 20\\ 20 & 13\end{matrix}$ кўринишда ёзадилар. Кўпайтувчиларда энг кичик хона сония бўлганлиги учун ҳар бир касрдаги даража ва дақиқаларни сонияга айлантирадилар. Бунинг учун 4 даражани 60 га кўпайтириб дақиқага айлантирилади, ҳосил бўлган кўпайтмага 15 ни қўшиб, йиғиндини 60 га кўпайтириб, кўпайтмага 20 қўшилса, каср сонияга айланади. Демак, айтилган қоида бўйича кўпайтувчилар қуйидагича сонияга айланади: $(4\ 60 + 15)60 + 20 = 15320$ (сония), $(6\ 60 + 20) \cdot 60 + 13 = 22\,813$ (сония). Сўнг ҳосил бўлган касрлар купайтирилса, 15320 (сония)$\cdot 22\,813$ (сония) $= 3494\,95160$ (робиъа) бўлади. Бу каср махраж билан ёзилса, $\frac{34\,9495160}{60^4}$ бўлади. Касрнинг суратидаги сон олтмишли системага айлантирилса, $349495160 = 26 \cdot 60^4 + 58 \cdot 60^3 + \cdot 160^2 + 59 \cdot 60 + 20$ бўлади. Бу ҳолда изланган кўпайтма қуйидагича бўлади:

$$\frac{26 \cdot 60^4 + 58 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^2 + 59 \cdot 60 + 20}{60^4} = 26 + \frac{58}{60} + \frac{1}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \frac{20}{60^4}.$$

Демак, 34 94 95 160 (робиъа) = 26 даража 58 дақиқа 1 сония 59 солиса 20 робиъа = 26 58 01 59 20 робиъа. Уларнинг усули ҳозирги белги бўйича ёзилса, шундай бўлади:

$$\left(4 + \frac{15}{60} + \frac{20}{60^2}\right) \cdot \left(6 + \frac{20}{60} + \frac{13}{60^2}\right) = \frac{4 \cdot 60^2 + 15 \cdot 60 + 20}{60^2} \times$$

$$\times \frac{6 \cdot 60^2 + 20\ 60 + 13}{60^2} = \frac{15320}{60^2} \cdot \frac{22813}{60^2} = \frac{349495160}{60^4} =$$

$$= \frac{20 \cdot 60^4 + 58 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^2 + 59 \cdot 60 + 20}{60^4} = 26 + \frac{58}{60} + \frac{1}{60^2} + \frac{59}{60^3} +$$

$$+ \frac{20}{60^4} = 26\ 58\ 01\ 59\ 20.$$

Иккинчи усулда эса ўнли саноқ системасидаги купайтириш жадвалига ўхшаш квадрат шаклидаги олтмишли системадаги кўпайтириш жадвали ёрдамида олтмишли касрларни купайтириш (ҳисоблаш тахтасида ва жадвал усулида) ўрганилади Тусий арифметик асарининг VI бобида олтмишли касрларни купайтиришни ҳисоблаш тахтасида бажаради. Бунинг учун у олтмишли системадаги кўпайтириш жадвалини ва бу жадвалда кўпайтмаларнинг хоналарининг турини билмоқ зарур деб уқтиради, сўнг олтмишли системадаги кўпайтириш жадвалини тушунтиради. Нишопурий, Коший, Қубовий ва булардан кейинги математиклар олтмишли касрларни кўпайтиришни „Сатҳ“ ва „Жадвал“ усулида бажарадилар.

Тусий ўнли ҳисоблаш системасида квадрат шаклидаги кўпайтириш жадвали қандай тузилган бўлса, олтмишли системада ҳам кўпайтириш жадвали шундай шаклда тузилганлиги, фақат ўнли системадагидек ҳар бир кўпайтма квадрат ичига ёзилмасдан, ҳар бир кўпайтманинг юқори хонасидаги рақам квадратларнинг диоганал бўйича бўлинишидан ҳосил бўлган юқори учбурчакка, қуйи хонасидаги рақам эса пастки учбурчакка ёзилади. Масалан, $32\times 50 = 26\cdot 60 + 40$ даги 26 юқори учбурчакка, 40 эса пастки учбурчакка ёзилади. Тусий жадвал ҳақида тушунча бергандан сўнг мисолда $12\cdot 60 + 17 + \frac{32}{60}$ ни $\frac{15}{60} + \frac{45}{60^2} + \frac{50}{60^3}$ га кўпайтиришни ҳисоблаш тахтасида кўрсатади. У арифметик асарининг „Бутун сонлар арифметикаси ҳақида“ номли биринчи бобида ўн хил кўринишдаги кўпайтириш усулларини кўрсатади. Буларнинг ичида биринчиси „Тиккалаб кўпайтириш“ (Аз-зарб ал-қойим) номи билан аталади. Юқорида келтирилган касрлар „Тиккалаб кўпайтириш“ усулида кўпайтирилади. Бунинг учун кўпайтирувчиларни вертикал чизиқ бўйича кўпаювчининг қуйи хонаси тўғрисига ёзилади. Бунда кўпайтирувчининг юқори хонаси бундай ёзилади:

	50
	45
32	15
27	
12	

Кўпайтириш кўпайтувчиларнинг юқори хонасидан бошлаб бажарилади. Кўпайтириш босқичида кўпаювчининг рақамлари бир хона юқорига суриб борилади. Хусусий кўпайтмаларнинг рақамларини тенг хоналар бўйича огзаки қушиб, йиғиндини кўпайтирувчининг рақамлари ўрнига қуйи хонасидан бошлаб пастга қараб ёзилади. Юқорида келтирилган қоида бўйича мисол шундай босқич (ҳар бир босқич стрелка билан кўрсатилади) ларда бажарилади

1)

	50
	45
32	15
27 ↙	
12	

$12\times 15 = 3\times 60 + 0$

2)

	50
	45
32	↙15
27	
12	0
	3

$27\times 15 = 6\times 60 + 45$

3)

	50
	45
32	← 15
27	45
12	6
	3

4)

	50
	45
32	0
27	53
12	6
	3

$32\times 15 = 8\cdot 60 + 0$

5)

	50
32	45
27 ↙	0
12	53
	6
	3

$12\cdot 45 = 9\cdot 60 + 0$

6)

	50
32	↙45
27	0
12	53
	16
	3

$27\times 45 = 20\times 60 + 15$

7)

	50
32	← 45
27	15
12	13
	16
	3

$32\times 45 = 24\cdot 60 + 0$

8)

$$\begin{array}{rr} & 50\\ 32 & 0\\ 27 & 39\\ 12 & 13\\ & 16\\ & 3\end{array}$$

9)

$$\begin{array}{rcr} 32 & & 50\\ 27 & \swarrow & 0\\ 12 & & 39\\ & & 13\\ & & 16\\ & & 3\end{array}$$

10)

$$\begin{array}{rcr} 32 & \swarrow & 50\\ 27 & & 0\\ 12 & & 39\\ & & 23\\ & & 16\\ & & 3\end{array}$$

$$12\times50=10\cdot60+0 \qquad 27\cdot50=22\cdot60+30$$

11)

$$\begin{array}{rcr} 32 & \leftarrow & 50\\ 27 & & 30\\ 12 & & 01\\ & & 24\\ & & 16\\ & & 3\end{array}$$

12)

$$\begin{array}{rr} 32 & 40\\ 27 & 56\\ 12 & 01\\ & 24\\ & 16\\ & 3\end{array}$$

$$32\times50=26\cdot60+40$$

кўпайтма

Охирги кўпайтма 3 16 24 01 56 40 $= 3\cdot60+16+\frac{24}{60}+\frac{1}{60^2}+\frac{56}{60^3}+\frac{40}{60^4}$ дан иборатдир.

Юқорида келгирилган қоида бўйича Тусийнинг кўпайтиришга оид ечган мисоли ҳозирги белги орқали ёзилса, у шундай кўринишни олади:

$$\left(12\cdot60+27+\frac{12}{60}\right)\left(\frac{15}{60}+\frac{45}{60^2}+\frac{50}{60^3}\right)=$$

$$=3\cdot60+6+\frac{45}{60}+\frac{8}{60}+9+\frac{20}{60}+\frac{15}{60^2}+\frac{24}{60^2}+\frac{10}{60}+\frac{22}{60^2}+\frac{30}{60^3}+$$

$$+\frac{26}{60^3}+\frac{40}{60^4}=3\cdot60+6+9+\frac{45}{60}+\frac{8}{60}+\frac{20}{60}+\frac{10}{60}+\frac{22}{60^2}+\frac{24}{60^2}+$$

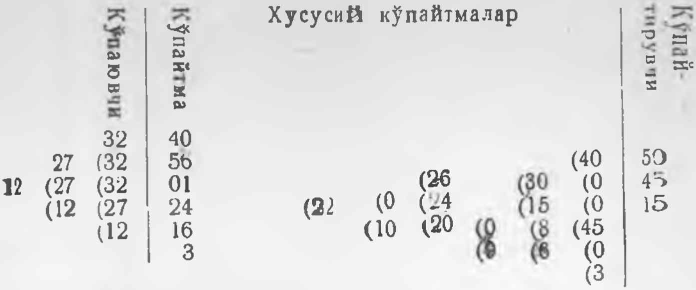
$$+\frac{15}{60^2}+\frac{26}{60^3}+\frac{30}{60^3}+\frac{40}{60^4}=3\cdot60+16+\frac{24}{60}+\frac{1}{60^2}+\frac{56}{60^3}+\frac{40}{60^4}=$$

$$=3\ 16\ 24\ 01\ 56\ 40 \qquad (1)$$

Агар биз (1) тенгликни тиккалаб кўпайтириш усули билан таққосласак, шундай хулоса чиқаришимиз мумкинки: Тусий усталик билан (1) тенгликнинг ўнг қисмидаги йиғиндиларни тенг хоналари бўйича кетма-кет оғзаки қўшиш билан кўпайтмани топади. Тусий усталик билан кўпайтмани топади дейишимизнинг сабаби шундаки, ўз даврида, ҳеч қандай символни ишлатмасдан, соф арифметик усулда хусусий кўпайтмаларни хоналари бўйича ёзиб қўшиш билан кўпайтмани топади. Бу эса ўрта асрда ҳисоблаш алгоритми юксак даражада бўлганлигидан далолат беради.

Мадрасада ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларида Тусий кўрсатган ўн хил кўпайтириш усулининг такомиллаштирилган турлича кўриниши ўқитилади. Шулар қаторида мадрасада „Тиккалаб кўпайтириш“ усулининг такомиллаштирилган тўрт хил кўриниши берилади. Буларнинг барчасида оралиқдаги ҳисоблашлар қоғозда кўрсатилади. Бундай кўпайтириш усули „Сатҳ“ усули деб аталади. Шулардан намуна тариқасида биринчи кўринишни келтирамиз.

Биринчи кўринишда вертикал параллел тўғри чизиқлар чизиб, уларнинг чап томонига кўпаювчи, ўнг томонига кўпайтирувчи Тусий кўрсатган тартибда ёзилиб, хусусий кўпайтмалар эса улар орасига жойлаштирилади. Кўпайтириш босқичида кўпаювчининг рақамлари юқорига бир хона суриб борилади. Дастлаб, янги ўрганувчиларга тушунарли бўлиши учун, хусусий кўпайтмалар тенг хоналари бўйича ёзилиб, рақамлари юқоридан бирлар хонасидан бошлаб қўшиб борилади, йиғинди кўпаювчининг ўнг томонига вертикал чизиқ бўйлаб ёзилади. Юқоридаги мисол $\left(12\cdot60+27+\frac{32}{60}\right)\times$ $\times\left(\frac{15}{60}+\frac{45}{60^2}+\frac{50}{60^3}\right)$ нинг ечилиши қуйидаги кўринишда бўлади.



Тиккалаб кўпайтиришнинг тўртинчи кўринишида кўпайтувчилар юқори хонасидан бошлаб вертикал чизиқ бўйича $\begin{array}{r}15\\45\\12\;50\\27\\12\end{array}$ кўринишда ёзилиб, кўпайтириш қуйи хонадан бошлаб бажарилади, бу ҳолда хусусий кўпайтмалар ва кўпайтманинг хоналари юқоридагига нисбатан тескари жойлашади. Бу ҳолда масаланинг ечилиши қуйидаги кўринишда бўлади:

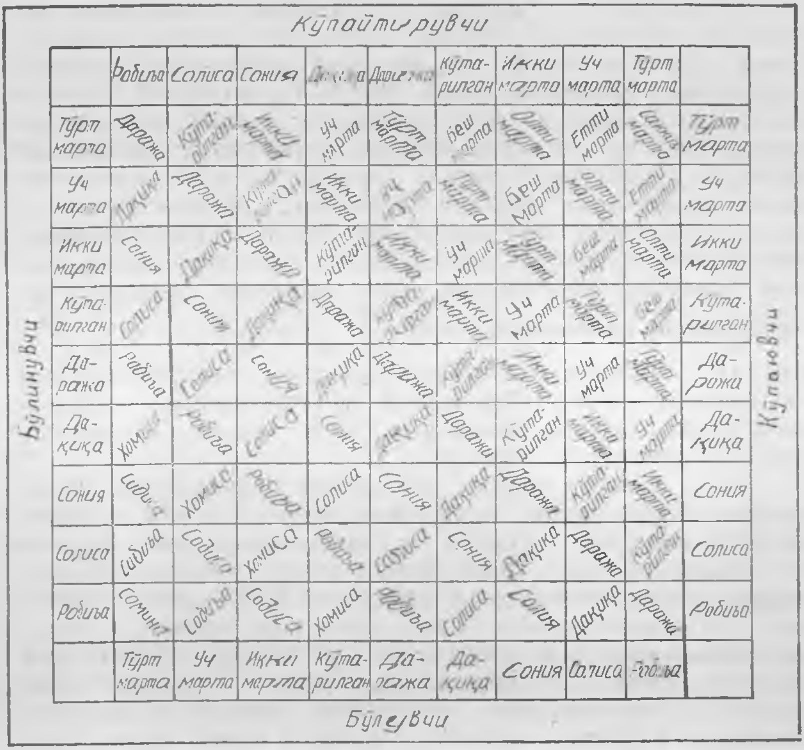
		Кўпаювчи	Кўпайтма	Хусусий кўпайтмалар					Кўпайтирувчи
			3					(3	
		(12	16			(0	(6	(9	15
	27	(12	24	(45	(8	(0	(20	(10	45
32	(27	(12	01	(0	(15	(24	(0	(22	50
	(32	(27	56			(0	(30	(26	
		(32	40					(40	

Кўпайтма: $3\cdot 60+16+\frac{24}{60}+\frac{1}{60^2}+\frac{56}{60^3}+\frac{40}{60^4}$.

Тусий ва Нишопурийлар олтмишли касрларни кўпайтиришни ўнли системада бутун ва каср сонларни кўпайтиришга қиёс қилиб баён қилган бўлсалар, Коший буни методик томондан такомиллаштириб, ҳозирги замон усулидан жуда кам фарқ қиладиган содда йўлни кўрсатади.

Коший янги ўрганувчиларга олтмишли касрларни кўпайтириш усулини ўрганиш методи тушунарли бўлишини ҳисобга олиб, кўпайтиришни қуйидаги уч босқичда бажаради: 1) бир хонали (содда) касрни бир хонали касрга кўпайтириш, 2) бир хонали касрни кўп хонали (мураккаб) касрга кўпайтириш, 3) кўп хонали касрни кўп хонали касрга кўпайтириш. Коший юқорида кўрсатилган кўпайтиришнинг ҳар бир босқичини баён қилишдан аввал олтмишли системада бутун ва каср сонларни кўпайтиришда олтмишли кўпайтириш жадвалида кўпайтманинг хоналар номини аниқлаш зарур эканлигини уқтиради. У олтмишли кўпайтириш жадвалини Тусий ва Нишопурийларнинг ўнли системадаги кўпайтириш жадвалига қиёс қилиб тушунтиради. Кўпайтманинг хоналари номини аниқлашда эса, у аввал ягона олтмишли системада бутун ва каср сонларнинг ёзилиш принципи ва хоналари ҳақида маълумот беради. Коший баён этган олтмишли системани ҳозирги белги бўйича ёзсак, у шундай бўлади:

$$a_n\cdot 60^n+a_{n-1}60^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 60^2+a_1\cdot 60+a_0\cdot 60^0+$$
$$+\frac{b_1}{60}+\frac{b_2}{60^2}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{60^{n-1}}+\frac{b_n}{60^n}. \qquad (1)$$



	Робиъа	Солиса	Сония	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Тўрт марта	
Тўрт марта	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Тўрт марта	Беш марта	Олти марта	Етти марта	Саккиз марта	Тўрт марта
Уч марта	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Тўрт марта	Беш марта	Олти марта	Етти марта	Уч марта
Икки марта	Сония	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Тўрт марта	Беш марта	Олти марта	Икки марта
Кўпа-рилган	Солиса	Сония	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Тўрт марта	Беш марта	Кўпа-рилган
Да-ража	Робиъа	Солиса	Сония	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Тўрт марта	Да-рожи
Да-қиқа	Хомиса	Робиъа	Солиса	Сония	Дақиқа	Даражи	Кўпа-рилган	Икки марта	Уч марта	Да-қиқа
Сония	Содиса	Хомиса	Робиъа	Солиса	Сония	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Икки марта	Сония
Солиса	Сибиъа	Содиса	Хомиса	Робиъа	Солиса	Сония	Дақиқа	Даража	Кўпа-рилган	Солиса
Робиъа	Сомина	Содиъа	Содиса	Хомиса	Робиъа	Солиса	Сония	Дақиқа	Даража	Робиъа
	Тўрт марта	Уч марта	Икки марта	Кўпа-рилган	Да-ража	Да-қиқа	Сония	Солиса	Робиъа	

35-шакл.

Коший (1) ифодадаги ўртадаги $\alpha_0 \cdot 60^0$ хонани даража деб, 60 нинг даража кўрсаткичи 0 ни эса хона номери дейди. Қолган бутун ва каср хоналар даражага нисбатан баробар узоқликда эканлиги, олтмишнинг даражаси хона номери деб аталиши ва хоналар орасида қуйидаги пропорция $1:60^m = 60^n \cdot 60^{m+n}$ ҳамма вақт мавжудлигини кўрсатади. Сўнг кўпайтма ва бўлинманинг хона номини аниқлаш учун 35-шаклдаги каби жадвални беради.

Коший кўпайтманинг хоналари номерини топишни бутун кўрсаткичли даражанинг асосий хоссаси ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ тенглик) асосида қоида бўйича аниқлашни кўрсатади. Шу даврда манфий сон тушунчаси математикага кирмаганлиги туфайли у кўпайтма хонасининг номерини аниқлашда манфий кўрсаткич ҳосил бўлмаслигини ҳисобга олиб, юқоридаги жадвалдаги даража хонасининг номерини ноль ($60^0 = 1$) ҳисоблаб, қуйидаги қоидани беради: агар жадвалда кўпайтувчилар даражанинг бир томонида бўлса, кўпайтма хоналарининг номери кўпайтувчиларнинг даража кўрсаткичларининг йиғиндисига тенг бўлади. Масалан, дақиқа билан робиъа кўпайтмасининг номерини топиш талаб қилинса, жадвалда (35-шакл) дақиқа билан робиъа даражанинг бир томонида бўлганлиги учун уларнинг даража кўрсаткичлари қўшилади, яъни $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60^4} = \frac{1}{60^{1+4}} - = \frac{1}{60^5}$ кўпайтма хонасининг номери 5; демак, кўпайтма номи холисадан иборат. Жадвалда кўпайтманинг номи дақиқа билан робиъа хоналари тўғри чизиқ бўйлаб кесишган квадратга ёзилади.

Агар кўпайтувчилар жадвалда даражанинг турли томони (бири ўнгда, иккинчиси чап) да бўлса, кўпайтма хоналарининг номери кўпайтувчиларнинг даража кўрсаткичларининг айирмасига тенг бўлади. Масалан, дақиқа билан уч марта кўтарилган ($1 \cdot 60^3$) нинг кўпайтмаси номерини топиш талаб қилинса, жадвалда дақиқа даражанинг чап томонида, уч марта кўтарилгани эса ўнг томонига жойлашган, қоида бўйича 60^3 нинг даража кўрсаткичидан дақиқанинг даража кўрсаткичи айирилса 2 бўлади, демак, кўпайтманинг номи икки марта кўтарилган бўлади. Жадвал юқорида айтилган йўл бўйича топилади. Ҳозирги белги билан ёзилса, у шундай бўлади:

$$\frac{1}{60} \cdot 60^3 = 60^{-1} \cdot 60^3 = 60^{3-1} = 60^2.$$

Коший кўпайтма хоналарининг номерини топиш қоидасига асосланиб кўпайтиришнинг биринчи босқичини мисолда кўрсатади.

1-мисол. 24 дақиқа билан 52 робиъани кўпайтириш талаб қилинса, у кўпайтириш жадвалидан $24 \cdot 52 = 20 \cdot 60 + 48$ кўринишда топилади. 35-шаклда 24 дақиқа билан 52 робиъа даражанинг бир томонида, шунинг учун дақиқа билан робиъанинг хона номери қўшилса, 5 бўлади, 5 эса робиъанинг хона номеридир. Бу ҳолда кўпайтма 20 робиъа 48 холиса бўлади. Ҳозирги белги билан ёзилса:

$\frac{24}{60} \cdot \frac{52}{60^4} = \frac{20 \cdot 60 + 48}{60^5} = \frac{20}{60^1} + \frac{48}{60^5}$ = 24 робиъа 48 холиса.

2- мисол. 24 дақиқа билан 52 уч марта кўрсатилган ($52 \cdot 60^3$) ни кўпайтириш талаб қилинса, жадвалдан $24 \cdot 52 = 20 \cdot 60 + 48$ топилади, 35- шаклда 24 дақиқа билан $52 \cdot 60^3$ даражанинг турли томонида, шунинг учун $52 \cdot 60^3$ нинг хона номери 3 дан дақиқанинг хона номери 1 ни айирилса 2 бўлади. Бу ҳол да кўпайтма $(20 \cdot 60 + 48) \cdot 60^2 = 20 \cdot 60^3 + 48 \cdot 60^2$ бўлади.

Коший иккинчи босқичда бир хонали касрга кўп хонали касрни кўпайтиради, бунинг учун бир хонали касрни кўп хонали касрнинг юқори хонасидан бошлаб ҳар бир хонага кўпайтириш натижасида топилган хусусий кўпайтмаларни тегишлича хоналари бўйича ёзиб қўшишни кўрсатади. Масалан, $21 \cdot 60 + 18 + \frac{56}{60^2} = 21$ 18 00 56 сонияни $\frac{36}{60} = 36$ дақиқага кўпайтириш учун кўпайтириш жадвалидан $21 \cdot 36 + 12 \cdot 60 + 36$ хусусий кўпайтма топилади, бу тегишли хоналар бўйича шундай ёзилади:

```
1)      21  18  00  56*
      × 36
  ------------------------
  12  36
```

Қолган хусусий кўпайтмалар қуйидагича жойлаштирилади:

```
2)    18  36 = 10  60    48          3)    0   36 = 0   60   0
      21  18   00  56                      21  18   00  56
      36                                   36
  ---------------------------           ------------------------------
  12  36  48                            12  36  48   00
      10                                    12  00

               4)    36  56 =  33  60    36
                     21  18    00  56
                 ------------------------------
                 12  36  48    00  36
                     10  00    33
                 ------------------------------
                 12  46  48    33  36 солиса
```

35- шаклдаги жадвалдан кўпайтманинг хона номи со-

---

* Қўлёзмада кўпайтувчилар юқорида кўрсатилгандай ёзилмасдан, фақат хусусий кўпайтмалар ва уларнинг йиғиндиси чизиқ тагига ёзилган.

лиса топилади. Демак, кўпайтма $12\cdot 60+46+\frac{48}{60}+\frac{33}{60^2}+\frac{36}{60^3}=12\ 46\ 48\ 33\ 36$ солиса. Коший ҳисобловчига кўпайтманинг номини аниқлашда икки йўлни тавсия қилади, биринчи йўлда 35- шаклдаги жадвалдан кўпайтманинг хона номерини аниқлаш орқали кўпайтманинг номи топилса, иккинчи йўлда жадвалда тайёр кўпайтманинг номи кўпайтувчиларнинг номлари кесишган квадратда берилади.

Коший кўпайтиришда хатога йўл қўймаслик учун хусусий кўпайтмаларни тегишлича хоналарга ёзишни, бунинг учун биринчи хусусий кўпайтманинг қуйи хонаси тагига иккинчи хусусий кўпайтманинг юқори хонасини, иккинчи хусусий кўпайтманинг қуйи хонаси тагига учинчи хусусий кўпайтманинг юқори хонасини ва ҳоказо тартибда ёзишни уқтиради. Шу билан бир қаторда, кўпайтмани топиш учун бир хонали касрни кўп хонали касрнинг қуйи хонасидан бошлаб кўпайтиришни тавсия қилади. Бу холда, ўнли системада кўпайтиргандек, хусусий кўпайтманинг қуйи хонасини ёзиб, юқори хонасини дилда сақлаб, иккинчи хусусий кўпайтманинг қуйи хонасига қўшиб ва шу тартибда давом эттириб топилади. Коший бу усул янги ўрганувчилар учун тушунарли ва соддадир дейди. Ҳақиқатан бу кўпайтириш усуллари ичида энг содда ҳозирги кўпайтириш усулидир. Масалан, юқоридаги масала шу усулда ишланса, у шундай кўринишда бўлади:

Хусусий кўпайтманинг юқори хонасини ёзиб, кўпайтмани топиш

	21	18	00	56	сония
				36	дақиқа
12	10	00	33	36	
	36	48	00		
12	46	48	33	36	солиса

Хусусий кўпайтманинг юқори хонасини дилда сақлаб, кўпайтмани топиш

	21	18	00	56	сония
				36	дақиқа
12	46	48	33	36	солиса

Учинчи босқичда кўп хонали каср кўп хонали касрга кўпайтирилади. Бунинг учун кўпайтувчиларнинг қуйи хоналаридан бошлаб, кўп хонали касрни бир хонали касрга кўпайтиргандек, кўпайтувчини кўпайтувчининг ҳар бир ҳадига кўпайтириб, хусусий кўпайтмаларни тегишли хоналари бўйича ёзиш билан кўпайтма топилади. Масалан,

$24+\frac{15}{60}+\frac{40}{60^2}+\frac{38}{60^3}=24\quad 15\quad 40\quad 38$ солисани

$13+\frac{9}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{20}{60^3}=13\quad 9\quad 51\quad 20$ солисаға кўпайтириш учун

кўпаювчини қуйи хонасидан бошлаб 20 га кўпайтириб, хусусий кўпайтмалар $38\cdot 20=12\cdot 60+40$; $40\cdot 20=13\cdot 60+20$; $15\cdot 20=5\cdot 60+0$ ва $24\cdot 20=8\cdot 60+0$ ни чизиқ тагига қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{array}{rrrr} \times\; 24 & 15 & 40 & 38 \\ 13 & 9 & 51 & 20 \\ \hline 8\;5 & 13 & 12 & 40 \\ 0 & 0 & 20 & \end{array}$$

Шу йўлда кўпаювчини 51, 9 ва 13 га кўпайтириб хусусий кўпайтмалар иккинчи, учинчи ва тўртинчи параллел чизиқлар тагига ёзилади, сўнг хусусий кўпайтмаларни қўшиш орқали купайгма топилади:

Бу ҳолда охирги нагижа қуйидагича бўлади:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} & & & & 24 & 15 & 40 & 38 & \text{солиса} \\ & & & & 13 & 9 & 51 & 20 & \text{солиса} \\ \hline & & & 8 & 5 & 13 & 12 & 40 & \\ & & & & 0 & 0 & 20 & & \\ \hline & & 20 & 12 & 34 & 32 & 18 & & \\ & & & 24 & 45 & 0 & & & \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 5 & 42 & & & \\ & & 36 & 15 & 0 & & & & \\ \hline 5 & 3 & 8 & 8 & 14 & & & & \\ & 12 & 15 & 40 & & & & & \\ \hline 5 & 19 & 22 & 54 & 44 & 27 & 50 & 40 & \text{солиса} \end{array}$$

Кўпайтма $5\cdot 60+19+\frac{22}{60}+\frac{54}{60^2}+\frac{44}{60^3}+\frac{27}{60^4}+\frac{50}{60^5}+\frac{40}{60^6}$.

Коший ўзидан олдин ўтган математикларнинг ўнли ва олтмишли системада бутун ва каср сонларни кўпайтириш усулларини такомиллаштириб, методик томондан янги ўрганувчилар учун тушунарли қилиб, энг содда ҳозирги замон кўпайтириш усулини баён қилади. Бу эса, Кошийнинг Улуғбек мадрасасида ишлаган йирик математик ва астрономлар ичида улуғ олим бўлиши билан бирга, у етакчи мураббий ва улуғ мударрис эканлигидан далолат беради.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда юқорида кўрсатилган олтмишли қасрларни кўпайтириш усулларининг такомиллаштирилган турлича кўриниши баён қилинади. Масалан, Нишопурий ва Кошийларнинг жадвалда кўпайтириш усулининг турлича кўриниши талабаларга

36-шакл.

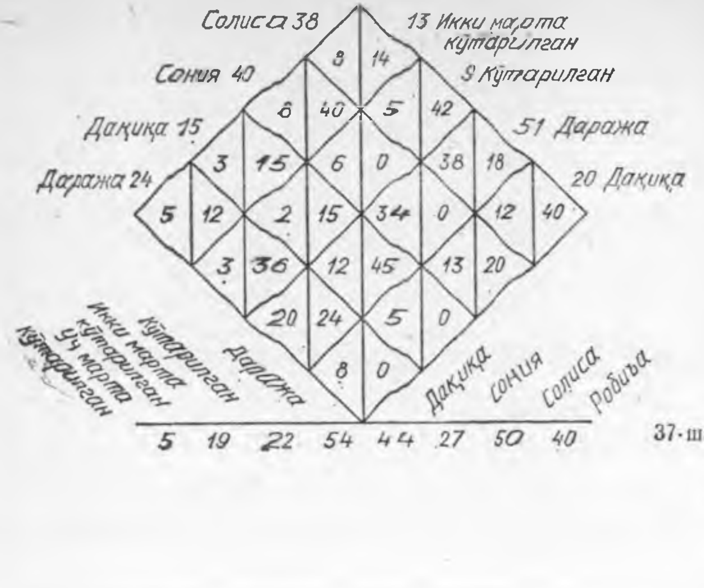
машқ тариқасида берилади. Булардан намуна тариқасида Нишопурий ва Кошийларнинг „Тур ичида кўпайтириш“ усулини кўрсатамиз. „Тўр ичида кўпайтириш“ усулида тўғри тўртбурчак квадратларга ажратилади, квадратлар диагонал билан чап ва ўнг тўғри бурчакли учбурчаклар (36-шакл) га бўлинади. Чапдан тўғри тўртбурчакнинг эни ва бўйига кўпаювчи ҳамда кўпайтувчилар юқори хонасидан бошлаб ёзилади. Амал кўпайтувчиларнинг юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб бажарилади. Хусусий кўпайтмаларнинг қуйи хонаси ўнг, юқори хонаси чап учбурчакларга ёзилади. Кўпайтманинг рақамлари тўғри тўртбурчакнинг пастки ўнг учидан, диагонал бўйича хусусий кўпайтмалар рақамларини қўшиш билан топилади. Бу рақамлар тўртбурчак тагига ўнгдан бошлаб ёзилади. Масалан, $24+\frac{15}{60}+\frac{40}{60^2}+\frac{38}{60^3}$ ни $13\cdot60^2+9\cdot60+51+\frac{20}{60}$ га кўпайтириш 36-шаклдаги каби бажарилади.

Жадвалда амал кўпайтувчиларнинг юқори хонасидан бошлаб бажарилса, яъни $24+\frac{15}{60}+\frac{40}{60^2}+\frac{38}{60^3}$ ни 13, 9, 51 ва 20 га кўпайтирилса, хусусий кўпайтмалар ($24\times13=5\cdot60+12$; $15\times13=3\cdot60+15$; $40\times13=8\cdot60+40$; $38\times$

$\times 13 = 8 \cdot 160 + 14$; $24 \times 9 = 3 \cdot 60 + 36, \ldots$ ва ҳ. к.) ни юқоридан (энига қараб) чапдан бошлаб тегишли учбурчакларга тартиб билан жойлаштирилади. Агар амал қуйи хонасидан бошлаб бажарилса, яъни $20 + \frac{15}{60} + \frac{40}{60^2} + \frac{38}{60^3}$ ни 20, 51, 9 ва 13 га кўпайтирилса, ҳосил бўлган хусусий кўпайтмалар ($38 \times 20 = 12 \cdot 60 + 40$; $40 \times 20 = 13 \cdot 60 + 20$; $15 \cdot 20 = 5 \cdot 60 + 0$; $24 \cdot 20 = 8 \cdot 60 + 0$; $38 \times 51 = 32 \cdot 60 + 18 \ldots$ ва ҳоказо) ни пастдан (энига) ўнг томондан бошлаб тегишли учбурчакларга тартиб билан ёзилади. Кўпайтманинг хона номи 35-шаклдан аниқланади. Мисолда кўпайтувчиларнинг қуйи хонаси солиса ва дақиқа бўлиб, булар даражанинг бир томонида жойлашганлиги учун уларнинг хона номерлари $\left(\frac{1}{60^3} \cdot \frac{1}{69} = \frac{1}{60^4}\right)$ қўшилади, демак, кўпайтманинг номери 4, унинг қуйи хонасининг номи робиъадан иборатдир.

Кўпайтманинг юқори хонаси эса $(24 \times 13) \cdot 60^2 = 5 \cdot 60^3 + 12 \cdot 60^2$) уч марта кўтарилган. Шундай қилиб, изланган кўпайтма $5 \cdot 60^3 + 19 \cdot 60^2 + 22 \cdot 60 + 54 + \frac{44}{60} + \frac{27}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{40}{60^4} = 5\ 19\ 22\ 54\ 44\ 27\ 50\ 40$ робиъадан иборатдир.

Коший юқоридаги туртбўрчак (37-шакл) ни соат



37-шакл.

мили бўйича 45° га буриш билан „Ромб шаклидаги“ кўпайтиришни кўрсатади. Бунда кўпаювчи пастдан ромбнинг юқори хонасидан бошлаб чап томонига, кўпайтувчи эса юқоридан ромбнинг ўнг томонига юқори хонасидан бошлаб ёзилади. Диагоналлар вертикал йўналишда чизилади, хусусий кўпайтмаларнинг қуйи хонаси ўнг, юқори хонаси чап учбурчакларга ёзилади. Кўпайтма ўнгдан диагонал бўйича қўшиш орқали топилади. Масалан, юқоридаги мисол 37-шаклдаги каби кўринишда бажарилади.

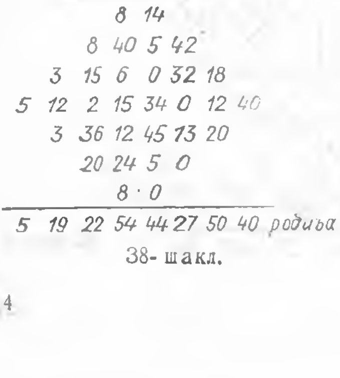
Ромб шаклида кўпайтириш усулида кўпайтувчиларни юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб кўпайтиришда ҳеч қандай фарқ бўлмаса ҳам, Коший ўнли системада бутун сонларни кўпайтиришга қиёс қилиб, олтмишли системада берилган сонларни қуйи хонасидан бошлаб кўпайтиришни тавсия қилади. Чунки у бу ҳолда шакл чизмасдан хусусий кўпайтмаларнинг рақамларини ромб шаклида тегишли хоналари бўйича ёзиш қулай бўлишини назарда тутади. Масалан, юқоридаги мисолни
20 15 40 38 солиса
13 9 51 20 дақиқа
кўринишида ёзиб, 13 9 51 20 дақиқани қуйи хонасидан бошлаб 38 га кўпайтирилади, ҳосил бўлган 12·60+40, 32·60+18, 5·60+14 хусусий кўпайтмалар тенг хоналар бўйича пастдан юқорига қараб бир хона суриб қуйидагича ёзилади:

8 14
5 42
32 18
12 40

Кўпайтувчини қуйи хонасидан бошлаб 40 га кўпайтирилганда ҳосил бўлган 13·60+20; 34 60+0; 6·60+0 ва 8·60+40 хусусий кўпайтмалардан биринчисини қуйи хонасидаги 20 ни 12 нинг тагига, унинг чап қисмига 13 ни ёзиб қолган хусусий кўпайтмаларни юқорига қараб бир хона суриб тегишли хоналари бўйича ёзилса, қуйидагича бўлади:

8 14
8 40 5 42
6 0 3218
34 012 40
1320

Худди шу тартибда кўпайтувчини 15 ва 24 га кўпайтириб ҳосил бўлган хусусий кўпайтмаларни тегишли хоналари бўйича ёзилса, у охирида 38-шаклдаги ромб шаклини олади.



38- шакл.

Шуни ҳам эслатиб

ўтиш керакки, ўрта асрда арифметикага доир ёзилган қўлёзмаларнинг муаллифлари ўзларидан илгари ёзилган асарлардаги материалларни такрорлабгина қолмасдан, ундаги нуқсонларни бартараф қилиш билан ҳам асарларига бирор янгилик ёки методик ўзгартиш киритишга ҳаракат қиладилар, Улар кўпроқ арифметик амалларни бажаришнинг турлича кўринишдаги янги усулларини ифодалашга катта эътибор берадилар. Масалан, Насавий ўзидан олдин ўтган математикларнинг арифметик асарларидаги камчиликни тузатиб, Хоразмийнинг арифметик асари системасида ўзининг арифметик асарини яратади. У Хоразмийнинг асарини такомиллаштириб, олтмишли каср устидаги амални системалаштириб баён қилади ва Хоразмий асарида бўлмаган сонлардан куб илдиз чақариш усулини кўрсатади. Насириддин Тусий арифметик асарини Хоразмий ва Насавийларнинг асарлари системасида ёзади ва уни янгиликлар билан тўлдиради. У арифметик амалларни юқори ва қуйи хонасидан бошлаб бажариш усулларини кўрсатади. Тусий ўнли системада бутун сонларни кўпайтириш усулининг ўн хил кўринишини баён этиш билан бу хилдаги кўпайтириш усулларининг айримларини олтмишли системада каср сонларни кўпайтиришга татбиқ қилади. Биз юқорида булардан намуна тариқасида Тусийнинг „Тиккалаб кўпайтириш" усулини кўрсатган эдик. Тусийнинг шогирди Нишопурий унинг арифметик асари асосида ёзган дарслигида олтмишли касрни кўпайтириш ўқувчиларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, у асосан жадвалда кўпайтириш усулини кўрсатади. Коший эса жадвалда кўпайтириш усулини шаклан ўзгартириш билан бошқа кўринишдаги, яъни „Тўр ичида кўпайтириш" ва „Ромб шаклида кўпайтириш" усулларини баён қилади.

Шундай қилиб, Хоразмийнинг арифметик асари ёзилган даврдан бошлаб ўрта асрнинг охирларигача Ўрта Осиё математикларининг арифметикага доир асарларида амаллар тараққий эттирилади ва янгиликлар билан тўлдирилиб борилади. Шу олимларнинг асарлари бир неча асрлар мобайнида мадрасаларда асосий дарслик сифатида қўлланилади. XIX аср ва XX асрнинг бошларида мадрасада ўрта аср олимларининг асарлари асосида ўқитилган дарслик ва машқ дафтарларда „Тиккалаб кўпайтириш", „Жадвалда кўпайтириш", „Ровоқ шаклида кўпайтириш" ва уларнинг турлича кўринишлари талабларга мустақил иш тариқасида топширилади. Бу кўринишдаги кўпайтириш усулларида талабаларнинг диққати кўпайтиришнинг ички мазмунига жалб қилинмасдан, шаклига эътибор берилади, яъни кўпроқ жадвал чизиш, берилган сонларни ўрнатиш, хусусий кўпайтмаларни ўрнига қўйиш ва уларни қандай ўқишга қаратилади. Бу усуллардан амалий машғулотларда фойдаланиш ноқулайдир. Мадрасада математика ўқитишнинг асосий камчиликларидан бири, у ҳам бўлса, арифметик амалларни бажаришда мазмунига қараганда, формасига кўпроқ эътибор берилган. Ҳар бир амалга доир масалалар камечилган. Талабаларнинг кўп вақти катта сонлар устида амалларни турлича кўринишда бажаришга сарф қилинган.

Юқорида уқтириб ўтилгандек, китобда биз каср сон тушунчаси вужудга келган даврдан бошлаб Ўрта Осиёда каср сонлар арифметикаси қандай системада ўқитилганлиги тарихини ёритиш билан бир қаторда, Ўрта Осиё математиклари каср сонлар устидаги амалларни бажаришни қандай тараққий этганликларини кўрсатишни мақсад қилиб қўйдик. Иккинчи навбатда ўқитувчилар учун синфда ва синфдан ташқари машғулотларда Ўрта Осиёда каср сонлар арифметикасини ўқитиш тарихини ёритиш ҳақида маълумотлар бериш ва машқлар ўтказиш учун материал билан таъмин қилишни кўзда тутдик. Шу иккинчи навбатдаги масалани ўқитувчилар сифатли амалга оширишларини назарда тутиб методик изоҳ тариқасида ҳар бир параграфдаги материалларни синфда, математик тўгарак ва факультатив машғулотларда ўтилишининг тахминан тақсимотини беришни лойиқ топдик.

Маълумки олтмишли каср ва унинг устида бажариладиган амалларга мактаб программасида жуда оз ўрин берилади. VII синфда „Ёйнинг бурчак катталиги“ номли бобда олтмишли касрлар номи билан аталмаса ҳам бу система ҳақида тушунча берилади. Бунда ўқувчиларга бурчак катталиги градус, минут, секунд (даража, дақиқа, сония) билан ўлчаниши ҳақида ва улар устидаги содда қўшиш ва айириш амаллари кўрсатилади. Агар ўқитувчи шу бобни ўтгандан сўнг якун тариқасида, 3- § ва унинг муқаддимасидаги биз берган материаллардан, яъни олтмишли касрларнинг келиб чиқиш тарихи, унинг ёзилиши ва бу системада қўшиш ва айиришдан ташқари купайтириш, бўлиш, илдиз чиқариш амалларини ҳам бажариш мумкинлиги ҳақида маълумотлар берса, ўқувчиларда янги ҳисоблаш системаси ҳақида тушунчалар ҳосил бўлади. Бундан ташқари олтмишли касрни тараққий эттиришда ўз ҳиссаларини қўшган олимлар қаторида Ўрта Осиё олимларининг ишлари ҳақида маълумотлар берилса, ўқувчиларда Ватанга ва халқга бўлган муҳаббат ҳиссини туғдирган бўламиз.

Математик тўгаракда 4-§ да баён қилинган Ўрта Осиё математикларидан Хоразмий, Насавий, Тусий, Нишопурий ва Кошийларнинг олтмишли касрларни кўпайтириш усулларини кўрсатишни тавсия қиламиз. Бунда ўқитувчи асосий эътиборни Ўрта Осиё математиклари кўпайтириш амалини тараққий эттириш билан бир қаторда ҳозирги кўпайтириш усулининг асосини яратганликларига қаратса, ўқувчиларда математика ва унинг тарихий ривожланишига зўр завқ уйғотган бўлади.

5-§. Олтмишли касрларни бўлиш амали ва унинг бажарилиш усуллари

Ўрта Осиё математиклари олтмишли касрларни кўпайтиришни ўрганиш методи каби бўлишни ҳам асосан икки усулда бажарадилар. Биринчи усулда амал бажаришни Хоразмий ва Насавий арифметика асарларида кўрсатадилар. Бунда берилган сонлардан ҳар бирининг юқори хонаси бир хил номли энг кичик хонага айлантирилади, сўнг ўнли системадагидек бўлишнинг „машҳур усули“ да бўлинувчи бўлувчига бўлиниб ҳосил бўлган бўлинмани олтмишли системага айлантирилади. Масалан, Насавий 15 даража 13 дақиқани 4 даража 20 дақиқага бўлиш учун уларни $\begin{matrix}15 & 4\\ 13 & 20\end{matrix}$ кўринишда ёзиб, сўнг бўлинувчи ва бўлувчиларнинг юқори хонаси—даражани энг кичик хона—дақиқага айлантиради, ҳосил бўлган 913 дақиқани 260 дақиқага бўлиш учун буларни шундай ёзади: $\frac{913}{260}$. Сўнг 913 ни 260 га бўлганда бўлинма 3 ва қолдиқ 133 ҳосил бўлади, буни у шундай кўринишда ёзади: $\begin{matrix}3\\ 133\\ 260\end{matrix}$. Демак, бўлинма $3\,\frac{133}{260}$ даражадан иборат бўлади. Насавий олтмишли системада бўлинмани кераклича аниқлик билан топиш учун 133 ни 60 га кўпайтириб, ҳосил бўлган 7980 дақиқани

260 га бўлиш билан бўлинма 30 ва қолдиқ 180 ни шундай ёзади: $\begin{matrix}330\\180\\260\end{matrix}$ ёки $\begin{matrix}330\\9.\\13\end{matrix}$ Қолдиқ 9 ни 60 га кўпайтириб, ҳосил бўлган 540 сонияни 13 га бўлиб, бўлинма 41 ва қолдиқ 7 ни шундай ёзади: $\begin{matrix}330\ \ 41\\7.\\13\end{matrix}$ Яна қолдиқ 7 ни 60 га кўпайтириб, ҳосил бўлган 420 солисани 13 га бўлиб, бўлинма 32 ва қолдиқ 4 ни шундай ёзади: $\begin{matrix}3\ \ 30\ \ 41\ \ 32\\4.\\13\end{matrix}$ Насавий шу тариқа давом эттириш мумкинлигини уқтириш билан олтмишли касрларни яхлитлаш усулини хам кўрсатади. Яъни астрономларнинг қоидаси бўйича, у агар қолдиқ бўлувчининг ярмидан катта бўлса, уни бир бирлик ҳисоблаб юқори хонага қўшишни, агар қолдиқ бўлувчининг ярмидан кичик бўлса, уни ташлаб юборишни тавсия қилади. Мисолда, қолдиқ 4 бўлувчи 13 нинг ярмидан кичик бўлганлиги учун уни ташлаб юборилса, $\frac{4}{13}$ хатога йўл қўйиш билан ҳозирги белги бўйича олтмишли касрларни бўлишнинг охирги натижасини шундай ёзиш мумкин:

$$\left(15+\frac{13}{60}\right):\left(4+\frac{20}{60}\right)\approx 3+\frac{30}{60}+\frac{41}{60^3}+\frac{32}{60^3}=3\ \ 30\ \ 41\ \ 32 \text{ солиса.}$$

Насавий олтмишли касрларни бўлишда зарур бўлган омиллардан бири—бир хил исмли сонларни бўлганда бўлинма ҳамма вақт даража бўлишини таъкидлайди. У шу билан бирга юқори хонали бутун ёки касрларни қуйи хонали касрларга бўлишни

$$60^n:\frac{1}{60^m}=60^{n+m} \text{ ёки } \frac{1}{60^n}:\frac{1}{60^m}=60^{m-n},$$

бунда $m>n$, формула асосида бажариб, охирги натижани оғзаки баён қилади. Масалан, у даражани сонияга бўлганда $\left(60^0:\frac{1}{60^2}=60^{0+2}=60^2\right)$ икки марта кўтарилган, дақиқани робиъага бўлганда $\left(\frac{1}{60}:\frac{1}{60^4}=\right.$ $\left.=60^{4-1}=60^3\right)$ уч марта кўтарилган чиқиши ва ҳоказоларни оғзаки мисол тариқасида кўрсатади.

Олтмишли касрларни бўлишнинг иккинчи усули асосан Тусий, Нишопурий ва Кошийларнинг арифметикага доир асарларида „Сатҳ“ ва „Жадвалда бўлиш“ номи билан баён этилади. Бўлишда хусусий бўлинмани топиш эса кўпайтириш амалида хусусий кўпайтмани топишга нисбатан мураккаблигини ҳисобга олиб, улар хусусий бўлинманинг рақамларини кўпайтириш жадвалидан топишни тавсия қиладилар. Шуни ҳисобга олиб, улар биринчи навбатда олтмишли кўпайтириш жадвали (36- шакл) дан бўлинманинг рақамларини топишни баён қиладилар. Бўлиш кўпайтириш амалига тескари амал ($a:b=x$ бўлиши учун $a=b\cdot x$ тўғри бўлиши керак) эканлигидан фойдаланиб, жадвалнинг бўйидан бўлувчи b, энидан энг катта рақам x шундай шарт билан топилади, бу b га кўпайтирилса, кўпайтма a га тенг ёки ундан кичик бўлиши керак, акс ҳолда ундан кичик рақамлар синаб кўрилади. Иккинчи навбатда бўлинма хоналарининг номери ёки номини 36- шаклдан топиш қоида кўринишда қуйидагича берилади: берилган сонлар даражанинг бир томонида бўлса, бўлинма хоналарининг номери бўлинувчи хоналарининг номери билан бўлувчининг хоналар номерининг айирмасига, агар берилган сонлар даражанинг турли томонида (бири ўнгда, иккинчиси чапда) бўлса, бўлинманинг хона номери бўлинувчи ва бўлувчилар хоналарининг номерларининг йиғиндисига тенг.

Тусий, Нишопурий ва Кошийлар олтмишли касрларни бўлишни кўпайтириш амали каби асосан уч қисмда баён этадилар. Улар биринчи ва иккинчи қисмларда бир хонали касрни бир хонали касрга, кўп хонали касрларни бир хонали касрга бўлишни олтмишли кўпайтириш жадвали асосида тушунтирадилар. Учинчи қисмда эса, кўп хонали касрларни кўп хонали касрларга бўлишни баён этадилар.

Тусий бўлишнинг учинчи қисмини ўнли ҳисоблаш системасида кўп хонали сонни кўп хонали сонга бўлишга қиёс қилиб „Машҳур усулда бўлиш“ номи билан кўп хонали касрларни бўлиш амалини бажариш учун берилган сонларни қандай ёзишни ва бўлиш амалини бажариш йўлларини умумий кўринишда баён этгандан сўнг мисол кўрсатади. Масалан,* у $18\cdot60+4+\frac{19}{60}+$

---

*Ҳамма усуллар учун Коший келтирган мисолни кўрсатишни маъқул топдик.

$+\frac{36}{60^2} = 18\ 4\ 19\ 36$ сонияни $25 \cdot 60 + 36 + \frac{50}{60} = 25\ 36\ 50$ дақиқага бўлиш учун шу сонларни $\begin{array}{llll} 18 & 4 & 19 & 36 \text{ сония} \\ & 25 & 36 & 50 \text{ дақиқа} \end{array}$ кўринишда ёзади. Бўлинувчининг юқори хонасидаги 18 4 ни 25 га бўлиш натижасида ҳосил бўлган бўлинманинг биринчи рақами 42 кўпайтириш жадвалидан топилади ва топилган 42 бўлинувчининг юқори хонаси устига шундай ёзилади:

$$\begin{array}{llll} 42 & & & \\ \bullet & & & \\ 18 & 4 & 19 & 36 \\ & 25 & 36 & 50 \end{array}$$

Сўнгра 42 ни бўлувчининг юқори хонасидан бошлаб 25, 36 ва 50 га алоҳида кўпайтириб, ҳар бир хусусий кўпайтмани тартиб билан бўлинувчининг юқори хонасидан бошлаб айрилади. Буни қуйидаги уч босқичда кўрсатиш мумкин:

1) 41 ни 25 га кўпайтириб, кўпайтма $25 \times 42 = 17 \cdot 60 + 30 = 17\ 30$ ни 18 4 дан айрилади ($18\ 4 - 17\ 30 = 0\ 34$) қолдиқ 34 ни 18 4 ни ўчириб, унинг ўрнига шундай ёзилади:

$$\begin{array}{llll} 42 & & & \\ \bullet & & & \\ & 34 & 19 & 36 \\ & 25 & 36 & 50 \end{array}$$

2) 42 ни 36 га кўпайтириб, кўпайтма $36 \times 42 = 25 \cdot 60 + 12 = 25\ 12$ ни 34 19 дан айрилади ($34\ 19 - 25\ 12 = 9\ 7$), қолдиқ 9 7 ни 34 19 нинг рақамларни ўчириб, унинг ўрнига шундай ёзилади:

$$\begin{array}{lll} 42 & & \\ \bullet & & \\ 9 & 7 & 36 \\ 25 & 36 & 50 \end{array}$$

3) 42 ни 50 га кўпайтириб, кўпайтма $42 \times 50 - 35\ 60 + 0 = 35\ 0$ ни 9 7 36 дан айрилади ($9\ 7\ 36 - 35\ 0 = 8{,}32\ 36$), қолдиқ 8 32 36 ни 9 7 36 нинг рақамларини ўчириб, унинг ўрнига шундай ёзилади:

$$\begin{array}{lll} 42 & & \\ \bullet & & \\ 8 & 32 & 36 \\ 25 & 36 & 50 \end{array}$$

Бўлинманинг иккинчи рақамини топиш учун қолдиқ 8 32 36 нинг ўнг томонига ноль қўйиш ўрнига бўлувчининг рақамлари ўнгга бир хона сурилади, қолдиқ 8 32 36 0 нинг юқори хонасидаги 8 32 ни 25 га бўлиш натижасида (жадвалдан) топилган бўлинманинг иккинчи рақами 20 ни 42 нинг ўнг томонига шундай ёзилади:

$$\begin{array}{llll} 42 & 20 & & \\ \bullet & \bullet & & \\ 8 & 32 & 36 & \\ 25 & 36 & 50 & \\ & 25 & 36 & 50 \end{array}$$

Сўнгра 20 ни яна 25, 36 ва 50 ларга кетма-кет кўпайтириб, 8 32 36 0 нинг юқори хонасидан бошлаб айирилади. Қолдиқ 19 20 ни 8 32 36 0 нинг рақамлари ўрнига ёзиб, бўлувчининг рақамлари бир хона ўнгга сурилса, ушбу кўриниш ҳосил булади:

```
42       20   0
 •        •   •
     0    0  19   20
    25   36  50
         25  36   50
             25   36   50
```

Қолдиқ 19 20 0 бўлувчи 25 36 50 дан кичик бўлганлиги учун бўлинманинг учинчи рақами ноль булади. Бўлинманинг тўртинчи рақамини топиш учун бўлинувчининг рақамларини ўнгга бир хона суриб, қолдиқ 19 20 0 0 нинг юқори хонасидаги 19 20 ни 25 га бўлиш натижасида (жадвалдан) топилган булинманинг тўртинчи рақами 45 ни 25, 36 ва 50 ларга кўпайтириб, қолдиқ 19 20 0 0 дан айирилади. Қолдиқ 7 22 30 ни 19 20 0 0 ни ўчириб, унинг ўрнига ёзилса, қуйидаги кўриниш ҳосил булади:

```
42   20    0   45
 •    •    •    •
               7   22   30
25   36   50
     25   36   50
          25   36   50
               25   36   50
```

Тусий шу йўл билан бўлинманинг рақамларини исталганча аниқлик билан топиш мумкинлигини уқтиради. Сўнг 35-шаклдан булинувчи ва бўлувчиларнинг юқори хонасидаги рақам (18·60+4 билан 25 60) лар жадвалда даражага нисбатан турли томонда бўлганлиги учун у бўлинманинг юқори хонасидаги 42 нинг номи дақиқа эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, бўлинма тақрибан $\frac{42}{60}+\frac{20}{60^2}+\frac{0}{60^3}+\frac{45}{60^4}=42\ 20\ 0\ 45$ робиъадан иборатдир.

Мадрасада ўқитилган дарсликларда олтмишли касрларни бўлиш „Сатҳ“ усулида кўрсатилади Сатҳ усули эса Хоразмий, Насавий ва Тусийларнинг „Машҳур“ усулининг қоғозга кўчирилган кўринишидир. Сатҳ усулида бўлинманинг рақамлари параллел чизиқлар орасига, бўлинувчи унинг юқорисига, бўлувчи эса пастга машҳур усул бўйича жойлаштирилади. Айрим кўпайтмаларни бўлинувчининг устига ёзиб ёки ёзмасдан юқори ёки қуйи хонасидаң бошлаб оғзаки айирилади. Қолдиқ эса бўлинувчининг рақамлари устига чизилган горизонтал қия чизиқ юқорисига ёзилади. Агар айириш

---

*Ёзувда ҳар бир қолдиқнинг ўнг томонига қуйиладиган ноль ёзилмайди.

натижасида қолдиқ қолмаса, бўлинувчининг рақамлари устига чизилган горизонтал чизиқ юқорисига нуқта (ноль) қўйилади. Машҳур усулга ўхшаш бўлиш босқичида бўлувчининг рақамлари бир хона ўнгга сурилади. Масалан, Тусий келтирган мисол $\left(19\ 60+4+\frac{19}{60}+\frac{36}{60^2}\right)$; $\left(25\ 60+36+\frac{50}{60}\right)$ ни сатҳ усулида бўлиш учун берилган сонларни $\frac{18\quad 4\quad 19\ .36}{25\quad 36\quad 50}$ кўринишда ёзиб, бўлинувчининг юқори хонасидаги 18 4 ни 25 га бўлиш билан бўлинманинг биринчи рақами 42 топилади. Сўнгра 25 36 50 юқори хонасидан бошлаб топилган 42 га кўпайтирилади. Ҳар бир кўпайтма алоҳида 18 4 19 36 нинг юқори хонасидан бошлаб айирилади, қолдиқлар эса қия чизиқ устига ёзилади, бу ҳолда амалнинг бажарилишини қуйидаги босқичда кўрсатиш мумкин:

1) а) $25\times 42=17\cdot 60+30$ б) $36\times 42=25\cdot 60+12$ в) $50\times 42=35\cdot 60+0$

$18\ 4-17\ 30=0\ 34$ $34\ 19-25\ 12-9\ 7$ $9\ 7\ 36-35\ 0=$

$=8\ 32\ 36$

а)
$$\begin{array}{llll}
\cancel{0} & & & \\
\cancel{1} & \cancel{34} & & \\
17 & 30 & & \\
18 & 4 & 19 & 36 \\
\hline
42 & & & \\
\hline
 & 25 & 36 & 50
\end{array}$$

б)
$$\begin{array}{llll}
 & \cancel{9} & & \\
\cancel{0} & 25 & & \\
\cancel{1} & \cancel{34} & 7 & \\
17 & 30 & 12 & \\
18 & 4 & 19 & 36 \\
\hline
42 & & & \\
\hline
 & 25 & 36 & 50
\end{array}$$

в)
$$\begin{array}{llll}
 & \cancel{8} & & \\
 & \cancel{9} & \cancel{32} & \\
\cancel{0} & 25 & \cancel{35} & \\
\cancel{1} & \cancel{34} & \cancel{7} & \\
17 & 30 & 12 & \\
18 & 4 & 19 & 36 \\
\hline
42 & & & \\
\hline
 & 25 & 36 & 50
\end{array}$$

Бўлинманинг қолган рақамларини топиб, юқоридаги тартибда кўпайтириб айирилса, амал ушбу кўринишда бўлади:

а) $25\times 20=8\cdot 60+20$ а) $25\times 45-18\cdot 60+45$

$8\ 32-8\ 20=0\ 12$ $19\ 20-18\ 45=35$

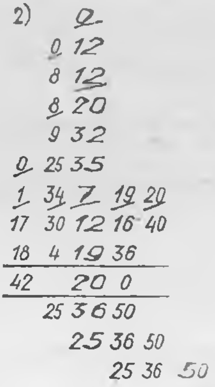
б) $36\times 20-12\ 60+0$ б) $36\times 45=27\cdot 60\ 0$

$12\ 36-12\ 0=36$ $35\ 0-27\ 0-8$

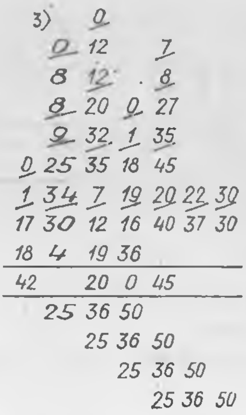
в) $50\times 20=16\cdot 60+40$ в) $50\times 45=37\cdot 60+30$

$36\ 0-16\ 40=19\ 20$ $8\ 0\ 0-37\ 30=7\ 22\ 30$

2)



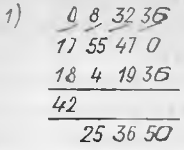
3)



Охирги иккинчи ва учинчи кўринишда охирги қолдиқлар қия чизиқ устига (19 10 ва 7 22 30) ёзилган.

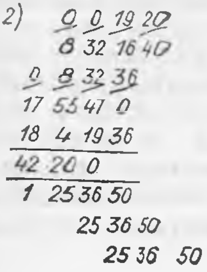
Мадрасада ўқитилган дарсликларнинг айирмаларининг муаллифлари бўлинманинг рақамларини бўлувчининг юқори хонасидан бошлаб кўпайтириб айиришга қараганда қуйи хонасидан бошлаб кўпайтириб айириш содда эканлигини уқтирадилар. Агар биз уларнинг кўрсатмасига кўра юқорида келтирилган мисолни сатҳ усулида ечсак, амалнинг бажарилиши (янги ўрганувчиларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, ҳозирги усул билан биргаликда бажаришни лойиқ топдик) қуйидаги кўринишда бўлади:

1)



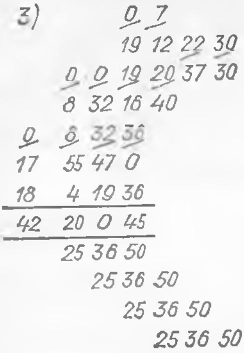
```
   18   4  19  36   |25  36  50
—  17  55  47   0   42
   0    8  32  36
```

2)



```
   18   4  19  36        |25  36  50
—  17  55  47   0        42  20   0
   0    8  32  36   0
—       8  32  16  40
        0   0  19  20  0  0
```

з)



```
 18   4  19  36       |25  36  50
-17  55  47   0       ------------
----------------      42  20   0
  0   8  32  36   0
      8  32  16  40
----------------------------
      0   0  19  20   0   0
             19  12  37  30
----------------------------
              0   7  22  30
```

Охирги натижани ҳозирги белги билан шундай ёзиш мумкин:

$$\left(18\cdot 60+4+\frac{19}{60}+\frac{36}{60^2}\right):\left(25\cdot 60+36-\frac{50}{60}\right)\approx\frac{42}{60}+\frac{20}{60^2}+$$

$$+\frac{0}{60}+\frac{45}{60^4}=42\ \ 20\ \ 0\ 45 \text{ робиъа.}$$

Агар биз ҳозирги усул билан сатҳ усулда бўлишни таққосласак, шундай мулоҳазага келишимиз мумкин. Ҳозирги усулда ҳар бир бўлинманинг рақамларини топишда қолдиқнинг ўнг томонига ноль қўйиб борилса, сатҳ усулида эса ноль қўйиш ўрнига бўлувчининг рақамлари бир хона ўнгга сурилади, хусусий кўпайтмалар эса бўлинувчининг устига ёзилади. Демак, сатҳ усули ҳозирги усулдан бўлувчи ва бўлинувчиларнинг жойлашиш тартиби билан фарқ қилади.

Хоразмий, Насавий ва Тусийларнинг машҳур усули маълум давр ичида, бир оз ўзгаришлар киритилгандан сўнг, бўлишнинг (қоғозга кўчирилган кўриниши) „Сатҳ“ усулига келади. Машҳур усулда тахтада рақамларни ўчириб ўрнига ёзиш ва бўлувчининг рақамларини суриш осон бўлганлиги учун бу усул ўз даврида содда ва қулай ҳисобланган. Кейинги асрларда, ҳисоблашлар аста-секин сатҳ усулида қоғозда ҳисоблашга ўтиши билан, машҳур усул ўзининг содда ва қулайлигини қисман йўқотади, натижада бўлинувчининг рақамлари устида кетма-кет ёзув катталашиб кетади, шундай қилиб амалий ҳисоблашларда сатҳ усулининг ноқулайлиги сезилади.

Муҳаммад Нишопурий, Жамшид Коший, Баҳоуддин Омилий ва бошқа муаллифлар олтмишли касрларни бўлишнинг „жадвал усули“ни қоида кўринишида тўлиқ баён этганларидан сўнг мисол кўрсатадилар. Масалан, Коший $18 \cdot 60 + 4 + \frac{19}{60} + \frac{36}{60^2} = 18\ 4\ \ 19\ 36$ сонияни $25 \cdot 60 + 36 + \frac{50}{60} = 25\ 36\ 50$ дақиқага бўлиш талаб қилинса, бўлинувчининг устига горизонтал чизиқ чизиб, унинг рақамларини вертикал чизиқлар орасига олади. Сўнгра у бўлинувчидан маълум масофада жадвал тагига горизонтал чизиқ чизиб, унинг тагига бўлинувчининг юқори хонасидаги рақамдан бир хона ташлаб, бўлувчининг рақамларини ёзади. Коший кўпайтириш жадвалида бўлинувчининг юқори хонасидаги $18\ 60+4=18\ 4$ ни $25\ 60$ га бўлиш натижасида топилган бўлинманинг биринчи рақами $\frac{42}{60}=42$ дақиқани бўлинувчининг юқори хонасидаги 18 нинг устига ёзади. Сўнгра 42 ни бўлувчининг юқори хонасидан бошлаб 25, 36 ва 50 га алоҳида кўпайтириб, ҳар бир хусусий кўпайтмани ёзмасдан тартиб билан бўлинувчининг юқори хонасидан бошлаб оғзаки айиради. У қолдиқ 8 32 36 нинг рақамларини бир хона чапга суради Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

		42	
18	4	19	36
	34		
	9	7	
	8	32	36
8	32	36	
	25	36	50

1) $42 \times 25 = 17\ 30$; $18\ 4\ -17\ 30 = 0\ 34$

2) $36 \times 42 = 25\ 12$; $34\ 19\ -25\ 12 = 9\ 7$

3) $50 \times 42 = 35\ 0$; $9\ 7\ 36\ -35\ 0 = 8\ 32\ 36$

Бўлинманинг қолган рақамларини топиб, юқорида кўрсатилган йўл бўйича кўпайтириб айирилса, жадвал ушбу кўринишда бўлади:

42 20

18	4	19	36
	34		
	9	7	
	8	32	36
8	32	36	
	12		
		19	20
	19	20	
	25	36	50

42 20 0

18	4	19	36
	34		
	9	17	
	8	32	36
8	32	36	
	12		
		19	20
	19	20	
19	20		
	25	36	50

42 20 0 45

18	4	19	36
	34		
	9	17	
	8	32	36
8	32	36	
	12		
		19	20
	19	20	
19	20		
	35		
	8		
	7	22	30
	25	36	50

1) 25×20 = 8 · 60 + 20=8 20;
8 32 – 8 20 = 0 12
2) 36×20 = 12 0,
12 36 – 12 0 = 0 36
3) 50×20 = 16 40,
36 — 16 40 = 19 20

1) 25×45 = 18 45;
19 20—18 45=0 35
2) 36×45 = 27 0,
35 0 – 27 0 = 8
3) 50×45 = 37 30,
8 0 0 – 0 37 30 =
= 7 22 30.

Нишопурий ва Кошийлар бўлинма рақамларини топиш босқичида айрим бўлинувчи (қолдиқ) ларнинг рақамларини бир хона чапга сурмасдан бўлувчининг рақамларини бир хона ўнгга суриш билан бўлишнинг бошқа кўринишини берадилар. Масалан. юқоридаги мисол шу усулда ечилса, улар қуйидаги жадваллар кўринишини олади:

42	20	0	45			
18	4	19	36			
17	30	12				
0	34	7				
	25	35				
	9					
	8	32	36			
	8	20	0			
	0	12	16			
		12	16			
		0		40		
			19	20		
			18	45		
			0	35		
				27	0	
				8	0	
					37	30
				7	22	30
	25	36	50			
		25	36	50		
			25	36	50	
				25	36	50

Бўлувчининг рақамларини суриш ва кўпайтманинг ракамларини ёзиб чапдан бошлаб айириш билан амал бажариш.

42	20	0	45			
18	4	19	36			
	34					
	9	7				
	8	32	36			
		12				
			19			
			19	20		
				35		
				8		
				7	22	30
	25	36	50			
		25	36	50		
			25	36	50	
				25	36	50

Бўлувчининг рақамларини суриш ва кўпайтманинг рақамларини ёзмасдан чапдан бошлаб оғзаки айириш билан амал бажариш.

Коший бўлиш босқичида топилган бўлинманинг рақамларини бўлувчининг юқори хонасидан бошлаб рақамларга кўпайтириб, хусусий кўпайтмаларни ёзмасдан тартиб билан бўлинувчининг юқори хонасидан бошлаб айиришни тавсия қилади. Шу билан бирга бунинг тескариси, яъни топилган бўлинманинг рақамларини бўлувчининг қуйи хонасидан бошлаб кўпайтириб, ҳар бир хусусий кўпайтмани хоналари бўйича бўлинувчи тагига ёзиб, сўнг қуйи хонадан бошлаб айиришни кўрсатади. У бу усулнинг янги ўрганувчилар учун қулай ва содда эканлигини уктиради. Агар биз юқоридаги мисолни Коший таклиф қилган усулда, ҳозирги усул билан биргаликда ечсак, у қуйидаги кўринишда бўлади:

42 20 0 45

18	4	19	36			
17	55	47	0			
0	8	32	36			
	8	32	16	40		
	0	0	19	20		
			19	12	37	30
			0	7	22	30
	25	36	50			
		25	36	50		
			25	36	50	
				25	36	50

Бўлувчининг рақамларини суриш ва кўпайтмани ёзиб ўнгдан бошлаб айириш билан амал бажариш

```
 18  4 19 36 | 25 36 40
-17 55 47    |__________
____________   42 20  0 45
  0  8 32 36    0
     8 32 16   40
     ______________
     0  0 19   20  0  0
          19   12 37 30
          ______________
           0    7 22 30
```

Изоҳ. Жадвалда бўлиш босқичида ҳар бир қолдиқнинг ўнг томонига ноль қуйиш ўрнига бўлувчининг рақамлари бир хона ўнгга ёки ҳар бир қолдиқнинг рақамлари бир хона чапга суриб борилади.

Кошийнинг бўлишни юқоридаги жадвалда бажаришига диққат қилинса, бўлишнинг жадвал усули ўзи тараққиёт босқичида методик томондан аста-секин такомиллашиб бориш билан бўлувчи ва бўлинмаларнинг ёзилишидан фарқ қилувчи ҳозирги бўлишни беради, деган хулосага келиш мумкин. Ҳақиқатан олтмишли касрларни бўлишнинг Хоразмий, Насавий, Тусий ва Нишопурийлар кўрсатган усулларига нисбатан Кошийнинг юқоридаги жадвалда бажарган бўлиш усули методик томондан янги ўрганувчилар учун тушунарли ва соддадир. Коший фақат бўлиш амалини бажаришнинг ҳозирги усулини кўрсатибгина қолмасдан, ўнли системада ва олтмишли касрлар устида амаллар бажаришнинг ҳозирги усулининг асосини беради. Коший буларни ўзи кашф этганлигини уқтиради. Шуларни эътиборга олиб, қуйидагича хулоса чиқариш мумкин: Коший машҳур математик ва астроном бўлиш билан бир қаторда, у яхши методист бўлган.

Ўқитувчига IV ва V синфларда ўнли системада бутун ва каср сонлар устида бўлиш амалларини ўтмишда биринчи бўлиб ўнли системани тарғиб қилган Муҳаммад Хоразмий асари ва бу асарда бўлишнинг ҳозиргидан бошқачароқ усулда бажарилганлиги ҳақида маълумот бериш билан 5-§ да берилган материалларнинг умумий қисми, яъни бўлишнинг машҳур усули ўзининг тараққиёт босқичида XV асрга бориб ўнли ва олтмишли системада бўлишнинг ҳозирги усулига келганлиги ҳақида тушунча беришни тавсия қиламиз. Математик тўгаракда эса Тусий, Нишопурий ва Кошийларнинг бўлиш усуллари кўрсатилса яхши бўлади.

6-§. Олтмишли касрлардан илдиз чиқариш усуллари

Ўрта Осиё математиклари ўнли системада бутун сонлардан илдиз чиқариш бобида аввал даража ҳақида умумий тушунча берадилар, сўнг (даражага кўтариш амалига тескари амал сифатида) берилган даража ва даража кўрсаткичига кўра асосни топиш илдиз чиқариш амали деб аталади, деган умумий таъриф берадилар. Улар ўнли системада бутун каср сонлардан квадрат, куб ва исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш усулини кўрсатган бўлсалар, олтмишли системада каср сонлардан шу методда илдиз чиқаришни кўрсатадилар

Сонлардан квадрат илдиз чиқариш усули мазмун жиҳатдан ҳозирги усул каби бўлиб, фақат бажариш техникаси билан фарқ қилади. Муҳаммад Хоразмий арифметик асарининг III қисмида, икки ҳад йиғиндисининг квадратини ёйиш асосида сонлардан квадрат илдиз чиқаришни кўрсатган бўлса, Насавий, Абул-Вафо, Беруний, Умар Хайём, Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар Хоразмий усулини ривожлантириб учинчи, тўртинчи ва исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқариш ва илдизнинг тақрибий қийматини топиш учун зарур бўлган кўрсаткичи истаган натурал сондан иборат бўлган бином формуласи ва биномиал коэффициентларни аниқлаш усулини ва буларнинг хоссаларини баён этадилар.

Ўрта Осиё математиклари олтмишли касрлардан илдиз чиқаришни бошқа амаллар каби асосан машҳур, сатҳ ва жадвал усулларида кўрсатадилар. Хоразмий, Насавий ва Тусийлар машҳур усулда илдиз чиқаришни, Нишопурий, Коший ва булардан кейинги математиклар жадвал ва сатҳ усулида илдиз чиқаришни баён қиладилар.

Насавий ва Нишопурийлар олтмишли касрни кўпайтириш ва бўлиш каби квадрат илдиз чиқариш учун берилган касрнинг юқори хоналарини бир хил номли энг кичик хонага келтиришни, агар келтирилган касрнинг махражидаги олтмишнинг даражаси тоқ бўлса, яъни илдиз кўрсаткичига бўлинмаса, бу ҳолда касрнинг сурат ва махражини 60 га кўпайтириш зарурлигини уқтирадилар. Сўнгра касрнинг сурат ва махражидан квадрат илдиз чиқариш билан изланган илдизни топиш мумкинлигини кўрсатадилар. Масалан, 26 даража 17 дақиқадан квадрат илдиз чиқариш талаб қилинса, у бундай ёзилади: $\genfrac{}{}{0pt}{}{26}{17}$, сўнг даража энг кичик хона — дақиқага айлантирилса, 1577 дақиқа $= \frac{1577}{60}$ ҳосил бўлади. Дақиқанинг даража кўрсаткичи тоқ бўлгани учун касрнинг махражидан илдиз чиқаришни ҳисобга олиб, касрнинг сурат ва махражини 60 га кўпайтириб, кўпайтма 94620 сония $= \frac{94620}{60}$ дан квадрат илдиз чиқарилади. Машҳур усул (III боб, 2-§ га қаранг) да суратдаги 94620 дан квадрат илдиз чиқаришнинг ўқувчиларга тушунарли бўлишини ҳисобга олиб, ҳозирги усул билан биргаликда қуйидаги босқичларда бажаришни лойиқ кўрдик:

$$1)\ \begin{array}{ccc} 3 & & \\ \dot{9} & \dot{46} & \dot{20} \\ 3 & & \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{ccc} 3 & 0 & \\ \dot{0} & \dot{46} & \dot{20} \\ & 60 & \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 7 \\ \dot{0} & \dot{46} & \dot{20} \\ & 6 & 07 \end{array}$$

$$\sqrt{9\quad 46\quad 20} = 3 \qquad \sqrt{9\quad 46\quad 20}\quad 30 \qquad \sqrt{94620} = 307$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & \underline{9} \\ & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 60 & \underline{9} \\ & 0\ 46 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 607 & \underline{9} \\ \underline{7} & 04620 \\ & \underline{4249} \\ & 371 \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{cccc} 3 & & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ & 6 & 1 & 4 \end{array}$$

Охирги гранда 371 қолдиқ қолганлиги учун изланган илдиз иррационал сондан иборат бўлиб, унинг тақрибий қийматини $\sqrt{A} \approx a + \frac{A - a^2}{2a + 1}$ формула асосида топиш қоида кўринишида берилади Изланган илдизнинг тақрибий қиймати $\sqrt{94620} \approx 307 + \frac{371}{2 \cdot 307 + 1} = 307\frac{371}{615}$ бўлади. Буни яна яхлитлаб, илдизнинг бир хона аниқликдаги қиймати 307 олинади. Натижада изланган илдизнинг тақрибий қиймати $\frac{307}{60} = 5 + \frac{7}{60} = 5$ даража 7 дақиқа бўлади.

Мисолни ишлаш йўли ҳозирги белги бўйича ёзилса, у қуйидагича бўлади:

$$\sqrt{26 + \frac{17}{60}} = \sqrt{\frac{26 \cdot 60 + 17}{60}} = \sqrt{\frac{1577 \cdot 60}{60 \cdot 60}} =$$

$$= \sqrt{\frac{94620}{60^2}} = \frac{\sqrt{94620}}{60} \approx \frac{307}{60} = 5 + \frac{7}{60} = 5 \text{ даража } 7 \text{ дақиқа.}$$

Бу усулнинг ноқулайлиги шундаки, агар кўп хонали олтмишли касрлардан илдиз чиқариш зарур бўлса, биринчидан, берилган касрнинг юқори хоналарини бир хил номли энг кичик хонага келтириш, иккинчидан, келтирилган катта сондан квадрат илдиз чиқариш ва топилган илдизни олтмишли касрга айлантириш учун бир қанча катта сонлар билан ҳисоблашлар талаб қилинади. Шуни ҳисобга олиб, Насавий арифметик асарида мисол тариқасида икки хонали олтмишли касрдан илдиз чиқаришни кўрсатади. Тусий, Нишопурий, Коший ва бошқалар бу усулнинг ноқулайлигини ҳисобга олиб, кўпайтириш жадвалидан фойдаланган ҳолда квадрат илдиз чиқаришнинг бошқа усулини тавсия қиладилар.

Ан-Насавий, Тусий ва бошқалар тўла квадрат бўлмаган N сондан тақрибий квадрат илдиз чиқаришни

$$\sqrt{N}=\sqrt{\frac{N\cdot 10^{2k}}{10^{2k}}}=\frac{1}{10^{k}}\sqrt{N\cdot 10^{2k}} \qquad (1)$$

формула асосида кўрсатадилар. Бу усулни улар „ноль ёрдамида аниқроқ квадрат илдиз чиқариш усули“ деб атайдилар. Улар N сонининг ўнг томонига қанча кўп жуфт-жуфт ноллар, яъни иккита тўртта, олтита ва ҳоказо қўйилса, топиладиган илдиз шунча аниқ бўлишини уқтирадилар. Сўнгра топилган илдизнинг каср қисмини олтмишли касрга айлантирадилар. Мисолда Насавий 17 даражадан, Тусий 12 даражадан квадрат илдиз чиқаришни кўрсатади. Насавий 17 дан квадрат илдиз чиқариш учун унинг ўнг томонига тўртта ноль қўйиб, ҳосил бўлган 170000 дан машҳур усул бўйича квадрат илдиз 412 ва қолдиқ 256 ни қуйидагича топади:

```
1)  4                        2) 4       1
    .     .     .               .       .
   17    00    00               1    0  0   0   0
    4                                8  1

3)       4      1      2     4)     4   1       2
         .      .      .            .   .       .
               19  0   0                2   5   6
                8  2   2
```

Ҳозирги усулда

```
       √170000 = 412
  81 | 16
     | ----
   1 |  100
 822 |  8 1
     | -----
   2 |   1900
     |   1614
     |  -----
     |    256
```

У амалнинг тўғри бажарилганлигини текшириш учун қолдиқ 256 ни эсда олиб қолишни уқтиради. Сўнгра 17 нинг ўнг томонига тўртта ноль қўйилганини ҳисобга олиб илдизнинг ўнг томонидан икки хона ажратиш билан унинг бутун қисми 4 ва каср қисми $\frac{12}{100}$ ни топади. Юқорида қилинган иш ҳозирги белги бўйича ёзилса:

$$\sqrt{17} = \sqrt{\frac{170000}{10000}} = \frac{1}{100}\sqrt{170000} \approx \frac{1}{100}\cdot 412 = 4\frac{12}{100}$$

бўлади. Насавий $\frac{12}{100}$ ни кетма-кет 60 га кўпайтириш ва бўлиш билан уни олтмишли касрга айлантиради. Унинг оғзаки айтган йўли ҳозирги белги билан ёзилса, у шундай бўлади:

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{12}{100} = 4 + \frac{12\cdot 60}{100\cdot 60} = 4 + \frac{1}{60}\,\frac{720}{100} = 4 + \frac{1}{60}\left(7 + \frac{20}{100}\right) = 4 + \frac{7}{60} + \frac{1}{60}\cdot\frac{20\cdot 60}{100\cdot 60} = 4 + \frac{7}{60} + \frac{1}{60^2}\cdot\frac{1200}{100} =$$

$$= 4 + \frac{7}{60} + \frac{12}{60^2} = \text{4 градус 7 минут 12 секунд.}$$

Насавий натижани шундай кўринишда ёзади: $\begin{matrix}04\\07\\12\end{matrix}$. У агар 17 нинг ўнг томонига 6 та ноль қўйилса, илдиз солисагача, 8 та ноль қўйилса, илдиз робиъагача аниқлик билан топилишини уқтиради.

Насавий ва Тусийлар методида XV асрда, ўнли касрнинг ижодчиси Ғиёсиддин Коший берилган соннинг ўнг томонига жуфт сонда ноллар қўйиш билан тўла квадрат бўлмаган сондан ўнли касрда тақрибий квадрат илдиз чиқаришни жадвал усулида кўрсатади. Тусий ва Насавийлар илдизнинг каср қисми $\frac{12}{100}$ ни олтмишли касрга айлантирсалар, Коший уни ўнли каср 0,12 кўринишда ёзади ва 0,1 ни ўнли дақиқа 0,02 ни ўнли сония номи билан атайди. Буларнинг квадрат илдиз чиқариш усулларидан шундай хулосага келиш мумкинки, ноллар билан квадрат илдиз чиқариш усули ўнли касрда квадрат илдиз чиқариш усулининг вужудга келишига замин тайёрлади десак, янглишмаган бўламиз.

Насавий амалнинг тўғри бажарилганлигини текшириш деб, синаб кўриш йўли билан топилган илдизнинг асосини тиклашга айтилади, деган таъриф беради. Амални текширишда, топилган илдиз $4 + \frac{7}{10} + \frac{12}{60^2}$ ўз-

ўзига кўпайтириб ёки квадратга кўтариб кўпайтмага қолдиқ $\frac{256}{10000}$ ни қўшганда илдизнинг асоси 17 нинг келиб чиқиши амалнинг тўғри эканлигини кўрсатади. Шу айтилган ибора ҳозирги белги билан ёзилса,

$$17 = \left(4 + \frac{7}{60} + \frac{12}{60^2}\right)^2 + \frac{256}{10000} \tag{2}$$

бўлади. Насавий кичик қавсни ўз-ўзига кўпайтириб, сўнг кўпайтмани ихчамлаш ўрнига катта сонлар билан амал бажариладиган узун йўлдан боради, бунда у аввал кичик қавс ичидаги касрни сонияга айлантиради. Сўнг топилган 14832 сонияни ўз-ўзига кўпайтириб, кўпайтма 21988224 робиъани олтмишли касрга айлантириб, $16 + \frac{58}{60} + \frac{27}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{24}{60^4}$ ни ҳосил қилади. Демак,

$$\left(4 + \frac{17}{60} + \frac{12}{60^2}\right)^2 = 16 + \frac{58}{60} + \frac{27}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{24}{60^4}. \tag{3}$$

У илдизнинг каср қисми (2) даги $\frac{256}{10000}$ ни 60 га кетма-кет кўпайтириш ва бўлиш йўли билан уни олтмишли касрга айлантиришни тавсия қилади. Насавийнинг қоида тариқасида келтирган йўли ҳозирги белги билан ишланса, у қуйидагича бўлади:

$$\frac{256}{10000} = \frac{256 \cdot 60}{10000 \cdot 60} = \frac{1}{60} \cdot \frac{15360}{10000} = \frac{1}{60}\left(1 + \frac{5360}{10000}\right) =$$

$$= \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \cdot \frac{5360 \cdot 60}{10000 \cdot 60} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2} \cdot \frac{321600}{10000} = \frac{1}{60} +$$

$$+ \frac{1}{60^2}\left(32 + \frac{1600}{10000}\right) = \frac{1}{60} + \frac{32}{60^2} + \frac{1}{60^2} \cdot \frac{1600 \cdot 60}{10000 \cdot 60} = \frac{1}{60} + \frac{32}{60^2} +$$

$$+ \frac{1}{60^3} \cdot \frac{96000}{10000} = \frac{1}{60} + \frac{32}{60^2} + \frac{1}{60^3} \cdot \frac{96000 \cdot 60}{10000 \cdot 60} = \frac{1}{60} + \frac{32}{60^2} + \frac{9}{60^3} +$$

$$+ \frac{1}{60^4} \cdot \frac{360000}{10000} = \frac{1}{60} + \frac{32}{60^2} + \frac{9}{60^3} + \frac{36}{60^4}. \tag{4}$$

Топилган (3) ва (4) касрлар (2) га қўйилса,

$$16 + \frac{58}{60} + \frac{27}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{24}{60^4} + \frac{1}{60} + \frac{32}{60^2} + \frac{9}{60^3} + \frac{36}{60^4} =$$

$$= 16 + \frac{59}{60} + \frac{59}{60^3} + \frac{59}{60^2} + \frac{60}{60^4} = 17$$

бўлади.

Демак, бу касрларни қўшганда илдиз остидаги сон 17 чиқиши амалнинг тўғри бажарилганлигини кўрсатади.

Насавий (3) ва (4) даги олтмишли касрларни қуйидаги кўринишда ёзади:

16	
58	1
27	32
50	9
24	36

Сўнг буларнинг энг кичик хонасидаги 24 робиъага 36 робиъани қўшиб, юқори хоналарга бир бирлик ҳисоблаш билан, охирида 17 ҳосил бўлишини кўрсатади. Демак, Насавий фақат юқори хонадан бошлаб қўшишни тавсия қилмасдан, балки қуйи хонадан бошлаб қўшишни ва бу усул содда эканини уқтиради.

Ўрта Осиё математиклари олтмишли касрларни кўпайтириш ва бўлиш каби, иккинчи усулда кўпайтириш жадвалидан фойдаланиб „Машҳур“, „Сатҳ“ ва „Жадвал“ усулларида берилган сонлардан квадрат, куб ва исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқарадилар. Масалан, Насавий, Тусийлар машҳур усулда, Нишопурий ва Кошийлар эса жадвал усулида илдиз чиқариш усулини кўрсатадилар.

Тусий машҳур усулда олтмишли касрдан илдиз чиқариш усулини қоида кўринишда тўлиқ баён этгандан сўнг мисолда

$$\sqrt{7\cdot60+37+\frac{30}{60}+\frac{40}{60^2}} \text{ ва } \sqrt[4]{4\cdot60^3+5\ 60^2+11\cdot60+25+\frac{30}{60}+\frac{40}{60^2}}$$

илдиз чиқариш усулини баён қилади. Тусий усулининг ўқувчилар учун тушунарли бўлишини ҳисобга олиб, ҳозирги усул билан биргаликда кўрсатишни маъқул ҳисобладик. Тусий $7\cdot60+37+\frac{30}{60}+\frac{40}{60^2}=7\ 37\ 30\ 40$ сониядан квадрат илдиз чиқаришни икки ҳад йиғиндисининг квадратини ёйиш асосида (III боб, 2- § га қаранг) кўрсатади. Илдиз чиқариш учун берилган сонни ўнгдан чапга қараб икки хонадан килиб гранларга ажратиб, ҳар бир граннинг қуйи хонаси устига нуқта қўйилади. Охирги грандаги 7 37 дан квадрат илдиз 21 кўпайтириш жадвали ёрдамида топилади. Топилган 21 ни 37 нинг устидаги нуқта устига ва тагига шундай ёзилади: $7\ \overset{21}{\underset{21}{\dot{37}}}$. Сўнгра 21 ни 21 га кўпайтириб, кўпайтма

7·60+21 ни 7 37 дан айирилади, айирма (7 37—7 21= = 16) ни 7 37 нинг рақамларини ўчириб, ўрнига ёзиб, сўнгра юқоридаги 21 билан пастдаги 21 ни қўшиб, йиғиндининг рақамлари бир хона ўнгга сурилади, бунда у шундай кўринишга эга бўлади:

```
1)   21               2) 21
      ·         ·         ·        ·
   7 37   30   40        16  30   40
     21                  21  42
```

Ҳозирги усулда:

```
  √7  37  30  40 = 21

42|7  21
  |-----
  |16
  |
```

Илдизнинг иккинчи рақами шундай шарт билан топилади, яъни 42 нинг ўнг томонига топилган энг катта рақам 23 ни қўшиш натижасида ҳосил бўлган сон 42 23 топилган 23 га кўпайтирилганда кўпайтма 42 23 сонидан катта бўлмаслиги керак. Ҳақиқатан, топилган 23 шу шартни бажаради. Бу ҳолда 42 23 ни 23 га кўпайтириб, кўпайтма 16 14 49 ни 16 30 40 дан айирилади, қолдиқ 15 51 ни 16 30 40 нинг рақамларини ўчириб, ўрнига ёзилади. Илдизнинг учинчи рақамини топиш учун қолдиқ 15 51 нинг ўнг томонига иккита ноль қўйиб, сўнг 23 га 23 ни қўшиб, ҳосил бўлган 42 46 нинг рақамлари бир хона ўнгга сурилади, бу ҳолда ушбу кўриниш ҳосил булади:

```
3) 21        23                  √7  37  30  40=
    ·         ·
        15   51   00        42 23|7  21
             42   46      ×    23|------------
                           ------|  16  30  40
                            42 46|− 16  14  49
                                 |  ----------
                                 |      15  51
                                 |
```

Худди шу йўл ва шарт бўйича илдизнинг учинчи рақами топилади. Уни қолдиқ 15 51 нинг ўнг томонига қўйилган икки нолнинг қуйи хонаси устига ва тагига қўйиб, ҳосил булган 42 46 22 ни 22 га кўпайтириб, кўпайтма 15 41 0 4 ни 15 51 0 0 дан айирилади, қолдиқ 9 59 56 ни 15 51 0 0 нинг рақамларини ўчириб, ўрнига шундай куринишда ёзилади:

$$4)\ \begin{array}{rrr} 21 & 23 & 22 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & 59 & 56 \\ 42 & 46 & 22 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{rr} 42 & 23 \\ & 23 \end{array} \\ \hline \times\begin{array}{rrr} 42 & 46 & 22 \\ & & 22 \end{array} \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} \sqrt{737\quad 30\quad 40} = 212322. \\ \begin{array}{rrrrr} 721 & & & & \\ \hline -16 & 40 & 40 & & \\ 16 & 14 & 49 & & \\ \hline 0 & -15 & 51 & 0 & 0 \\ & 15 & 41 & 0 & 4 \\ \hline & 0 & 9 & 59 & 56 \end{array} \end{array} \right.$$

Тусий берилган касрнинг квадрат илдизини исталганча аниқлик билан топиш учун унинг ўнг томонига жуфт-жуфт ноллар қўйиб боришни тавсия қилади.

Шундай қилиб, берилган $7 \cdot 60 + 37 + \frac{30}{60} + \frac{40}{60^2}$ касрнинг тақрибий квадрат илдизи $21 + \frac{23}{60} + \frac{22}{60^2} = 21\ \ 23\ \ 22$ сониядан иборат, у ҳозирги белги бўйича ёзилса:

$$\sqrt{7 \cdot 60 + 37 + \frac{30}{60} + \frac{40}{60^2}} \approx 21 + \frac{23}{60} + \frac{22}{60^2} \qquad (5)$$

бўлади.

Тусий Насавий каби амалнинг тўғри бажарилганлигини текширишни оғзаки қуйидагича баён қилади: (5) тенгликдаги $21 + \frac{23}{60} + \frac{22}{60^2}$ ни ўз-ўзига (квадратга) кўпайтириб, кўпайтмага қолдиқ $\frac{9}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \frac{56}{60^4}$ қўшилса, илдиз остидаги $7 \cdot 60 + 37 + \frac{30}{60} + \frac{40}{60^2}$ каср чиқиши амалнинг тўғри бажарилганлигини кўрсатади.

У ҳозирги белги бўйича ёзилса:

$$\left(21 + \frac{23}{60} + \frac{22}{60^2}\right)^2 + \frac{9}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \frac{56}{60^4} = 17 \cdot 60 + 21 + \frac{8 \cdot 60 + 49}{60^2} +$$
$$+ \frac{8 \cdot 60 + 4}{60^4} + \frac{16 \cdot 60 + 6}{60} + \frac{15 \cdot 60 + 24}{60^2} + \frac{16 \cdot 60 + 52}{60^3} + \frac{9}{60^2} +$$
$$+ \frac{58}{60^3} + \frac{56}{60^4} = 7 \cdot 60 + 37 + \frac{30}{60} + \frac{30}{60^2} + \frac{4}{60^4} + \frac{9}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \frac{56}{60^4} =$$
$$= 7 \cdot 60 + 37 + \frac{36}{60} + \frac{40}{60^2}$$

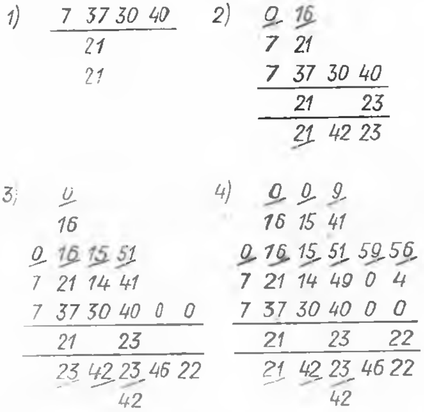
илдиз остидаги каср чиқади.

Демак, амалнинг бажарилиши тўғри эканлиги маълум бўлади.

Тусийнинг машҳур усули ўзининг тараққиёт босқичида оралиқдаги ҳисоблашларнинг ҳаммасини қоғозда тўлиқ акс эттириш натижасида сатҳ усулига келади.

Сатҳ усулида бўлиш амалига ўхшаш, берилган сон параллел тўғри чизиқлар устига, илдизнинг рақамларини уларнинг орасига, ёрдамчи амаллар эса унинг устига* ва параллел чизиқлар тагига ёзилади.

Тусий келтирган мисол ($\sqrt{7\ \ 37\ \ 30\ \ 40}$) сатҳ усулида шундай босқичларда ечилади:



Сатҳ усулида илдиз чиқариш бир неча кўринишда ҳал қилинади. Масалан, топилган илдиз рақамларига кўпайтирилганда ҳосил бўлган кўпайтмани берилган сон устига ёзиб ёки ёзмасдан, юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб айириш билан илдиз чиқариш бир неча кўринишда бўлади. Булар ичида соддаси юқорида кўрсатилган кўпайтмани берилган сон устига ёзиб, қуйи хонадан бошлаб айириш билан илдиз чиқариш усулидир. Бу ташқи кўринишдан ҳозирги усулдан фарқ қилувчи содда усулдир.

Нишопурий ва Кошийлар кўпайтириш жадвалидан фойдаланиб, берилган касрдан илдиз чиқаришнинг жадвал усулини кўрсатадилар. Машҳур, сатҳ ва жадвал усуллари мазмун жиҳатдан бир хил бўлиб, фақат улар ташқи кўриниши билан фарқ қилади. Булар ҳаммасида икки ҳад йиғиндисини илдиз кўрсаткичи қадар ёйиш асосида илдиз чиқарилади (III боб, 2-§ га қаранг). Нишопурий ва Кошийлар ҳам кўпайтмани берилган сон устига ёзиб ёки ёзмасдан, юқори ёки қуйи хонадан

---

* Қолдиқ қия чизиқ устига ёзилади.

бошлаб айириш билан илдиз чиқаришнинг ташқи кўринишдан фарқ қилувчи бир неча кўринишдаги жадвал усулларини кўрсатадилар. Коший булар ичида, ҳозирги усулдан фақат ташқи кўриниши билан фарқ қилувчи, методик томондан қулай усулни тавсия қилади. У бу методда квадрат, куб ва олтинчи даражали илдиз чиқариш усулини кўрсатади. Намуна тариқасида, Кошийнинг жадвалда $\sqrt{10 \cdot 60^3 + 9 \cdot 60^2 + 49 \cdot 60 + 20}$ дан илдиз чиқариш усулини кўрсатамиз.

Берилган $10 \cdot 60^3 + 9 \cdot 60^2 + 40 \cdot 60 + 20$ дан квадрат илдиз чиқариш учун берилган сонни горизонгал тўғри чизиқ тагига жойлаштириб, ҳар бир рақамни вертикал тўғри чизиқлар орасига олинади, сўнгра ўнг томондан чапга қараб икки рақамдан қилиб, гранларга ажратилади, булар икки қават чизиқ билан ажратилади. Жадвал эса горизонтал чизиқ билан иккига бўлинади, юқоридан биринчи бўлакка „сон қатори“ дейилади, бунга илдиз рақамларининг квадратлари ёзилади ва иккинчи бўлакка „асос қатори“ дейилади, бунга илдиз рақамларининг биринчи даражаси ёзилади. Охирги грандаги $10 \cdot 60^3 + 9 \cdot 60^2 = 10\ 9$ дан 36-шаклдаги жадвалда квадрат илдиз чиқариш билан илдизнинг биринчи рақами 24 топилади. Топилган 24 жадвалда кўрсатилгани каби биринчи грандаги нуқта устига ва унинг тўғрисига асос қаторига ёзилади:

Кўтаришлар		Даража		Дақиқа		
	24		41		40	сон қатори
	·		·			
10	9	49	20			
9	36					
	33					
	33	16	1			
		35	19	0	0	
		32	55	6	40	
			23	53	20	
			49	22	40	асос қатори
		48	41			
	24					

Илдизнинг биринчи рақами 24 ни ўз-ўзига кўпайтириб, кўпайтма $24 \cdot 24 = 576 = 9 \cdot 60 + 36 = 9\ 36$ ни охирги грандаги 10 9 дан айирилади, қолдиқ 33 чизиқ тагига ёзилади. Сўнгра юқоридаги 24 билан асосдаги 24 ни қўшиб, йиғинди 48 ни асосдаги 24 нинг ўнг томонидаги устунга ёзилади (III боб, 111-бет). (2) тенглик асосида топилган илдизнинг рақами 41 ни иккинчи грандаги 20 нинг устига ва 48 нинг ўнг томонига қўйиб, ҳосил бўлган $48 \cdot 60 + 41 = 48\ 41$ ни 41 га кўпайтириб, кўпайтма $33 \cdot 60^2 + 16 \cdot 60 + 1 = 33\ 16\ 1$ ни $33 \cdot 60^2 + 49 \cdot 60 + 20$ дан айирилади, қолдиқ $33 \cdot 60 + 19 = 33\ 19$ чизиқ тагига ёзилади. Коший Тусий каби берилган соннинг квадрат илдизини исталганча аниқлик билан топиш учун ҳар бир охирги қолдиқнинг ўнг томонига жуфт-жуфт ноллар * қўйиш билан амални бажаришни тавсия қилади. Шуни эътиборга олиб илдизнинг учинчи рақамини топиш учун охирги қолдиқ 33 19 нинг ўнг томонига икки ноль қўйилади. Сўнгра юқоридаги илдизнинг иккинчи рақами 41 билан асосидаги 48 41 ни қўшиб, йиғинди 49 22 нинг рақамлари бир хона ўнгга сурилади. Сўнгра кўпайтириш жадвалидан фойдаланиб илдизнинг учинчи рақами 40 топилади. Топилган 40 учинчи граннинг қуйи хонасига — асосдаги 49 22 нинг ўнг томонига ёзилади. Ҳосил бўлган 49 22 40 ни юқоридаги 40 га кўпайтириб, кўпайтма 32 55 6 40 ни 33 19 0 0 дан айирилади. Қолдиқ 23 53 20 чизиқ тагига ёзилади. Илдизнинг тўртинчи рақамини топиш учун қолдиқнинг унг томонига иккита ноль қўйилиб амал бажарилади. Шундай қилиб берилган $10 \cdot 60^3 + 9 \cdot 60^2 + 49 \cdot 60 + 20 = 10\ 9\ 49\ 20$ нинг тақрибий илдизи $24 \cdot 6^{0} + 41 + \frac{40}{60} = 24\ 41\ 40$ дақиқадан иборатдир. Ҳозирги белги бўйича ёзилса:

$$\sqrt{10 \cdot 60^3 + 9 \cdot 60^2 + 49 \cdot 60 + 20 + 2} \approx 24 \cdot 60 + 41 + 41\frac{40}{60}.$$

Агар биз юқорида кўрсатилган жадвалда квадрат илдиз чиқариш усулига диққат қилсак, шундай хулосага келиш мумкин. Кошийнинг жадвалда илдиз чиқариш усули берилган сон ва изланган илдизнинг рақамларининг жойланишидан фарқ қилувчи ҳозирги усулни беради.

Нишопурий ва Кошийлар олтмишли касрдан куб илдиз чиқариш усулини умумий қоида кўринишда тушунтирадилар, сўнг шу қоида бўйича конкрет мисолни ечиш йўлини кўрсатадилар. Коший

---

* Қўлёзмадаги жадвалда ноль ёзилмаган, биз уларни қўйишни маъқул топдик.

$$\sqrt[3]{18\ 60+52+\frac{59}{60}+\frac{43}{60^2}+\frac{51}{60^3}+\frac{24}{60^4}+\frac{0}{60^5}+\frac{0}{60^6}}=$$

$$=\sqrt[3]{18\quad 52\quad 59\quad 43\quad 51\quad 24\quad 0\quad 0}$$

Ташқи қатор	Даража 10							
Сон қатори	18 16	52 40	59	43	51	24	0	0
(Сатри адад)	2	12						
Квадрат қатори								
(Сатри мол)	1	40						
Асос қатори								
(Сатри зиъл)		10						

дан куб илдиз чиқариш усулини кўрсатади. Бунинг учун жадвалда квадрат илдиз чиқариш каби берилган сонни жадвалга (асоси 60 ни ёзмасдан) жойлаштириб, ўнг томондан чапга қараб уч рақамдан қилиб гранларга ажратилади, гранлар икки қават параллел чизиқлар ёки қизил сиёҳ билан белгиланади. Жадвал эса горизонтал чизиқ билан маълум оралиқда учга бўлинади, юқоридан биринчи бўлак „сон қатори“ („сатри адад“) дейилади, бунга илдиз рақамларининг кублари ёзилади, иккинчи бўлак „квадрат қатори“ („сатри мол“) дейилади, бунга илдиз рақамларининг квадратлари ёзилади ва охирги учинчи бўлак „асос қатори“ („сатри зиъл“) дейилади, бунга илдиз рақамларининг биринчи даражаси ёзилади. Илдизнинг рақамлари гранлар тўғрисига ташқи қаторга ёзилади.

Илдизнинг рақамлари қуйидаги формула асосида топилади: берилган сондан чиқадиган кубилдиз уч хонали сон бўлганлиги учун бу сонни $x+\frac{y}{60}+\frac{z}{60^2}$ кўринишда белгиласак:

$$\sqrt[3]{\underbrace{18\cdot 60+52+\frac{59}{60}+\frac{43}{60^2}+\frac{51}{60^3}+\frac{24}{60^4}+0+0}_{N}}=$$

$$=\sqrt[3]{N}=x+\frac{y}{60}+\frac{z}{60^2} \qquad (6)$$

бўлади. Илдиз таърифига кўра:

$$18\cdot 60+52+\frac{59}{60}+\frac{43}{60^2}+\frac{51}{60^3}+\frac{24}{60^4}+\frac{0}{60^5}+\frac{0}{60^6}=$$

$$=x^3+\left[\frac{3x}{60}+\frac{1}{60^2}\left(3x+\frac{y}{60}\right)y\right]y+\left\{3\left(x+\frac{y}{60}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[3\left(x+\frac{y}{60}\right)+\frac{z}{60^2}\right]\frac{z}{60^2}\right\}\frac{z}{60^2} \qquad (7)$$

бўлади. (7) тенгликдан изланган илдизнинг юқори хонасидаги рақам охирги грандаги 18 60 + 52 = 18 52 дан чиқарилган куб илдиз 10 дан иборат. Топилган 10 ни ташқи қатордаги даража хонаси 52 нинг устига ва асосига 52 нинг тўғрисига ёзилади. Асосидаги 10 ни юқоридаги 10 га кўпайтириб, квадрат қаторига ёзилади ва бу кўпайтма 100 = 1 · 60 + 40 = 1 40 даражани яна 10 даражага кўпайтириб, кўпайтма 1000 = 16 60 + + 40 = 16 40 даражани охирги грандаги 18 52 даражадан айирилади. Қолдиқ 2 · 60 + 12 даража чизиқ тагига ёзилади. Шундай қилиб, (7) тенгликдаги биринчи йиғинди x^3 ни ҳисоблаб, 18 · 60 + 52 даражадан айирган бўламиз. (7) тенглик қуйидаги кўринишда бўлади:

$$2\cdot 60+12+\frac{59}{60}+\frac{43}{60^2}+\frac{51}{60^3}+\frac{24}{60^4}=$$

$$=\left[\frac{3\cdot 10^2}{60}+\frac{1}{60^2}\left(3\cdot 10+\frac{y}{60}\right)y\right]y+\left\{3\left(10+\frac{y}{60}\right)^2+\right.$$

$$+\Bigl[3\Bigl(10+\frac{y}{60}\Bigr)+\frac{z}{60^2}\Bigr]\frac{z}{60^2}\Bigr\}\frac{z}{60^2}-\Bigl[5+\frac{1}{60^2}\Bigl(30+\frac{y}{60}\Bigr)y\Bigr]y+$$

$$+\Bigl\{3\Bigl(10+\frac{y}{60}\Bigr)^2+\Bigl[3\Bigl(10+\frac{y}{60}\Bigr)+\frac{z}{60^2}\Bigr]\frac{z}{60^2}\Bigr\}\frac{z}{60^2}. \qquad (8)$$

Илдизнинг иккинчи рақами y ни топиш учун зарур бўлган (8) тенгликдаги ўрта қавс ичидаги 5 ва 30 жадвалда шундай ҳисобланади: асосдаги 10 ни ўз-ўзига қўшиб, йиғинди 20 ни 10 га кўпайтириб, квадрат қаторидаги $1 \cdot 60 + 40$ га қўшиб, йиғинди $5 \cdot 60 + 0 = 5 \;\; 0$ градуснинг рақамлари бир хона ўнгга, асосдаги 20 га 10 ни қўшиб, йиғинди 30 нинг рақамларини икки хона ўнгга суриб ёзганда (8) тенгликдаги 5 ва 30 топилади (224- бетдаги жадвалларга қаранг).

(8) тенгликка асосан энг катта рақам y_1 илдизнинг иккинчи хонасидаги рақами бўлиши учун y ўрнига y_1 қўйиб, (8) тенгликдаги ўрта қавсни ҳисоблаганда y $2 \cdot 60 + 12 + \frac{59}{60} + \frac{43}{60^2} + \frac{51}{60^3} = 2 \;\; 12 \;\; 59 \;\; 43 \;\; 51$ солисалан катта бўлмаслиги керак. Ушбу қўйилган шартни қаноатлантирувчи сон $y_1 = 25$ дақиқадир. (8) тенгликдаги ўрта қавс бундай ҳисобланади: топилган илдизнинг иккинчи рақами 25 дақиқани иккинчи грандаги 51 устига ва асосдаги 30 нинг ўнг қисмига қўйиш натижасида ҳосил бўлган $30 + \frac{25}{60} = 30 \;\; 25$ дақиқани 25 дақиқага кўпайтириб, квадрат қаторидаги $5 \cdot 60 + 0$ дақиқага қўшилганда $5 \cdot 60 + 12 + \frac{40}{60} + \frac{25}{60^2} = 5 \;\; 12 \;\; 40 \;\; 25$ сония ҳосил бўлади. Буни яна 25 дақиқага кўпайтириб, кўпайтма $2 \cdot 60 + 10 + \frac{16}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{25}{60^3} = 2 \;\; 10 \;\; 16 \;\; 50 \;\; 25$ солиса сон қаторидаги $2 \;\; 12 \;\; 59 \;\; 43 \;\; 51$ робиъадан айирилса, $2 + \frac{42}{60} + \frac{53}{60^2} + \frac{26}{60^3} = 2 \;\; 42 \;\; 53 \;\; 26$ солиса қолади. Бу эса биринчи грандаги рақам билан $2 + \frac{42}{60} + \frac{53}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{24}{60^4}$

ни ҳосил қилади. Бу ҳолда жадвал кўриниши шундай бўлади:

Танқи қатор	Даража	10	Дақиқа		25	Сония		
Сон қатори	18	52	59	43	51	24	0	0
	16	40						
	2	12						
	2	10	16	50	25			
		2	42	53	26			
Квадрат қатори		5	12	40	25			
			12	40	25			
		5	0					
	5	0						
	3	20						
	1	40						
Асос қатори		30						
		20						
		10		30	25			

Топилган $y=25$ ни (8) тенгликка қўйиб ҳисобланса, у қуйидаги кўринишда бўлади:

$$2+\frac{42}{60}+\frac{52}{60^2}+\frac{26}{60^3}+\frac{24}{60^4}=$$

$$=\left\{3\left(10+\frac{25}{60}\right)^2+\left[3\left(10+\frac{25}{60}\right)+\frac{z}{60^2}\right]\frac{z}{60^2}\right\}\frac{z}{60^2}. \qquad (9)$$

Илдизнинг охирги учинчи рақамини топиш (9) тенгликдаги 5 ва 30 ни топиш каби жадвалда шундай ҳисобланади:

Ташқи қатор	Даража	10	Дақиқа		25	Сония		30
Сон қатори	18	52	59	43	51	24	0	0
	16	40						
	2	12						
	2	10	16	50	25			
	0	2	42	53	26			
		2	42	53	26	22	30	0
		0	0	0	0	1	30	0
Квадрат қатори			5	25	46	52	45	
					15	37	45	
			5	25	31	15		
		5	25	31	15			
			12	50	50			
		5	12	40	25			
			12	40	25			
		5	0					
	5	0						
	3	20						
	1	40						
Асос қатори		30		31	15			
		20		30	50			
		10		30	25	31	15	

Асосидаги $30+\frac{25}{60}=30$ 25 дақиқага 25 дақиқани қўшиб, ҳосил бўлган 30 50 дақиқага яна 25 дақиқа қўшилади, йиғинди $31+\frac{15}{60}=31$ 15 дақиқанинг рақамлари икки хона ўнгга сурилади ((9) тенгликдаги $3\left(10+\frac{25}{60}\right)$ ҳосил бўлади). Сўнгра асосдаги 30 50 дақиқани 25 дақиқага кўпайтириб, кўпайтма $12+\frac{50}{60}+\frac{50}{60^2}=12$ 50 50 сония квадрат қаторидаги $5\ 60+12+\frac{40}{60}+\frac{25}{60^2}$ га қўшилади, йиғинди $5\ 60+25+\frac{31}{60}+\frac{15}{60^2}=5$ 25 31 15 сониянинг рақамлари ўнгга бир хона сурилади ((9) тенгликдаги $3\left(10+\frac{25}{60}\right)^2$ ҳисобланади). Сўнгра илдизнинг учинчи рақами $z=30$ сония (9) тенгликка асосан топилади. Топилган 30 сония илдизнинг рақами эканлигини тасдиқловчи (9) тенгликнинг ўнг қисми жадвалда шундай ҳисобланади: топилган 30 сонияни 31 15 солисанинг ўнг қисмига қўйиб, ҳосил бўлган $\frac{31}{60^2}+\frac{15}{60^3}+\frac{30}{60^4}=31$ 15 30 робиъани 30 сонияга кўпайтириб, кўпайтма $\frac{15}{60}+\frac{37}{60^2}+\frac{45}{60^3}=15$ 37 45 солиса квадрат қаторидаги $5\ 60+25+\frac{31}{60}+\frac{15}{60^2}=5$ 25 31 15 сонияга қўшилади, йиғинди $5\ 60+25+\frac{46}{60}+\frac{52}{60^2}+\frac{45}{60^3}=5$ 25 46 52 45 сонияни яна 30 сонияга кўпайтириб, кўпайтма $2+\frac{42}{60}+\frac{53}{60^2}+\frac{26}{60^3}+\frac{22}{60^4}+\frac{30}{60^5}+\frac{0}{60^6}=2$ 42 53 26 22 30 холиса $2+\frac{42}{60}+\frac{53}{60^2}+\frac{26}{60^3}+\frac{24}{60^4}=2$ 42 53 26 24 робиъадан айирилса, қолдиқ $\frac{1}{60^3}+\frac{30}{60^4}=1$ 30 робиъа қолади. Шундай қилиб, берилган соннинг куб илдизи тахминан 10 даража, 25 дақиқа, 30 сониядан иборат бўлади. Ҳозирги белги бўйича ёзилса, $\sqrt[3]{N} \approx 10 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2}$ бўлади.

Математика тарихидан маълумки XVI—XVII асрларда логарифм ижод этилгандан сўнг, сонлардан исталган натурал кўрсаткичли илдиз чиқаришни логарифм ёрдамида, соддагина йўлда ҳисоблашга ўтилади. Логарифм ёрдамида кўпайтириш, бўлиш ва илдиз чиқариш амаллари иштирок этган ифодаларнинг қийматини ҳисоблаш ҳаддан ташқари соддалашади ва бунга сарфланадиган ошиқча вақт тежалади. Логарифм ҳақида Лаплас шундай дейди: „Логарифмнинг яратилиши ҳисоблашларга ойлаб сарф қилинган меҳнатни маълум кунга қисқартириш билан гўё астрономларнинг ҳаётини икки баробар узайтиради“.*

Ҳақиқатан, ўнли ҳисоблаш системасида сонлардан илдиз чиқаришга нисбатан олтмишли системада сонлардан илдиз чиқариш оғир ва кўп вақтни олади. Ҳозир мактабларда ўқувчилар ўнли системада квадрат илдиз чиқаришни биладилар. Мактаб программасига ўнли ва олтмишли системаларда куб илдиз чиқариш киритилмаганлиги сабабли ўқувчилар бу усулдан хабарсизлар. Шуни эътиборга олиб, 6- § даги сонлардан илдиз чиқариш усулини VII—VIII синф ўқувчилари учун синфдан ташқари машғулотларда ўтишни тавсия қиламиз.

7-§. Ўнли касрни кашф этишда Жамшид Коший қўллаган усуллар

Ўрта Осиё математикларидан Жамшид Коший ўнли касрнинг ёзилиши ва ўқилишини олтмишли касрнинг ёзилишига қиёс қилиб тушунтиради. У астрономларнинг қоидаларига қиёс қилиб, фанга биринчи бўлиб, ўнли касрни махражи 10 деб киритади ва касрнинг ёзилиши ва ўқилишини баён этади. Агар биз Коший сўз билан баён этган ўнли касрни ҳозирги белги билан ёзсак, у қуйидагича бўлади:

$$\frac{a}{10} + \frac{b}{10_2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} + \dots + \frac{k}{10^n} = 0,\overline{a\,b\,c\,d\dots k} \quad (1)$$

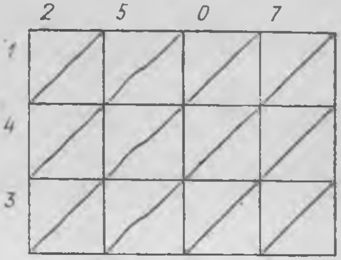
---

* Я. И. Перельман. Занимательная алгебра. Издание седьмое. Под ред. В. Г. Болтянского. М., 1956 г. 166—167- бетлар.

Коший ўнли касрнинг хоналарини олтмишли касрга қиёс қилиб шундай номлар билан атайди: ўнли дақиқадан бир $\left(\frac{1}{10}\right)$, ўнли сониядан бир $\left(\frac{1}{10^2}\right)$, ўнли солисадан бир $\left(\frac{1}{10^3}\right)$ ва ҳоказо. *У* ўнли саноқ системасида бутун сонлар каби ўнли касрнинг ҳар бир рақамининг киймати ҳам хонада уларнинг тутган ўрнига (позицияси) га боғлиқ эканлигини тушунтиради. (1) даги a рақами ўндан бирлар сонини, b рақами ўнли сониядан бирлар сонини, c рақами ўнли солисадан бирлар сонини, d рақами ўнли робиъадан бирлар сонини ва ҳоказо кўрсатишини уқтиради. Мисолда у $13+\frac{7}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{3}{10^3}=$ $=13+0{,}7+0{,}08+0{,}003=13{,}783$ ни 13 бутун ўнли солисадан 783 деб ўқишни кўрсатади.

Коший ҳисоблашда ўнли каср олтмишли касрдан содда эканлигини, астрономик ҳисоблашларни билмаган киши учун ҳам ўнли каср тушунарли эканлигини уқтириб, ўнли каср устида амалларни ўрганиш усулини баён этади. У ўнли касрларни қўшиш ва айириш амалини ҳозирда биз қандай бажарсак, шу тарзда бажарган бўлса-да, лекин унинг йиғинди ва айирмаларни ёзиш формаси бир оз фарқ қилади. Коший ўнли касрларни кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажаришни, бутун сонлар каби ҳозирги усулдан фарқ қилувчи „жадвал“ усулида баён этади.

У бир ўнли касрни иккинчисига кўпайтириш учун кўпайтувчиларнинг бутун ва каср хоналарига эътибор бермай, бутун сонлар каби кўпайтириш, кўпайтмадаги бутунни ажратиш учун иккала кўпайтувчининг каср хонасида нечта рақам турган бўлса, шунча рақамни ўнгдан ажратиш кераклигини кўрсатади. Коший „тўр ичида кўпайтириш“ ёки „жадвалда кўпайтириш“ усулида тўғри тўртбурчакни квадратларга ажратади, ҳар бир квадратни эса диагонал билан юқори ва қуйи бурчакли учбурчакларга бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг юқори хонасидан бошлаб чапдан энига ва бўйига кўпайтувчи ҳамда кўпаювчи ёзилади. Амал кўпайтувчиларнинг юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб бажарилади. Хусусий кўпайтмаларнинг бирликлари қуйи учбурчакка, ўнликлари эса юқори учбурчакка ёзилади, кўпайтманинг рақамлари тўртбурчакнинг пастки ўнг учидан, диагонал бўйича хусусий кўпайтмалар рақамларини қўшиш билан топилади. Бу рақамлар тўртбурчак тагига ўнгдан бошлаб ёзилади. Масалан, 14,3 ни 25,07 га кўпайтириш шундай кўринишда бажарилади:

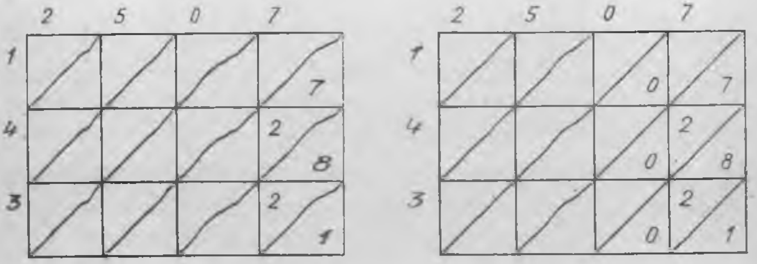


39-шакл.

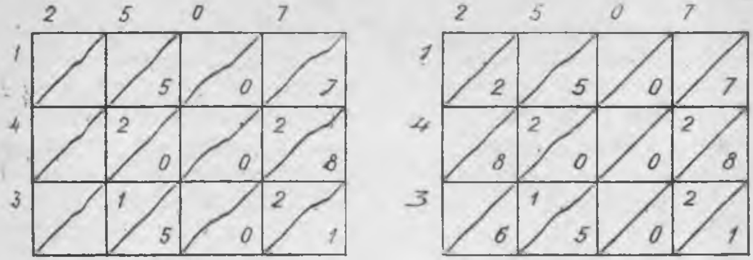
1. Кўпайтувчилар* жадвалга 39-шаклдагидек жойлаштирилади.

2. Амал бажаришда кўпаювчи 14,3 ни кўпайтувчи 25,07 нинг рақамлари 7, 0, 5 ва 2 га тартиб билан кўпайтиришдан ҳосил бўлган хусусий кўпайтмалар: 1) 21, 28, 7; 2) 0, 0, 0; 3) 15, 20 5 ва 4) 6, 8, 2 жадвалга 40- ва 41-шакллардагидек жойлаштирилади.

3. Сонлар жадвалнинг (40-шакл) пастки томонидаги



40-шакл



41-шакл.

---

* Қўлёзмада каср хоналардаги рақамлар қизил сиёҳ билан ёзилган.

358, 501

42-шакл.

диагонали бўйича қўшилса, изланган кўпайтма 358, 501 ҳосил бўлади, бу жадвал тагига 42-шаклдагидек жойлаштирилади.

Коший кўпайтма 358, 501 ни оддий каср кўринишда ёзади $358\frac{501}{1000}$, сўнгра кўпайтма махражсиз ёзилганда 358 бутун ўнли солисадан 501 деб ўқилишини уқтиради.

Ўрта Осиё математикларининг асарларида сонлардан квадрат илдиз чиқариш усули мазмун жиҳатидан ҳозирги усул каби бўлиб, фақат ташқи кўринишда бажариш билан фарқ қилади.

Жамшид Коший мусбат соннинг квадрат илдизи иррационал сон бўлиши мумкинлигини уқтириб, у бундай ҳолда илдизнинг тақрибий қийматини ўнли каср кўринишда топиш усулини баён этади. У биринчи навбатда илдиз чиқариш амалининг жадвал усулини қоида кўринишида қуйидагича баён этади: бутун сонлардан квадрат илдиз чиқариш учун илдизи изланган сонни горизонтал тўғри чизиқ тагига жойлаштириб, ҳар бир рақамни вертикал тўғри чизиқлар орасига олинади, сўнгра, ўнгдан чапга қараб икки рақамдан қилиб, гранларга ажратилади, ҳар бир гранлар икки қават чизиқ билан чизилади ва гранлардаги қуйи рақам устига нукта қўйилади. Жадвал эса горизонтал чизиқ билан иккига бўлинади, юқоридан биринчи бўлак „сон қатори“ дейилади, бунга илдиз рақамларининг квадратлари ёзилади ва иккинчи бўлак „асос қатори“ дейилади, бунга илдиз рақамларининг биринчи даражаси ёзилади. Мисолда 145 дан квадрат илдиз чиқариш* кўрсатилади. Илдиз чиқаришдан аввал юқоридаги қоида асосида жадвал чизилиб, унга берилган сон қуйидагича жойлаштирилади:

---

* Янги ўрганувчиларга тушунарли бўлишини назарда тутиб, ни ҳозирги усул билан бирга бажаришни лозим топдик.

1	4	5	Сон қатори
			Асос қатори

Коший қуйидаги формула асосида илдиз рақамларини топиш йўлини кўрсатади. 145 нинг квадрат илдизи $10x+$ $+y$ кўринишда ёзилади, яъни

$$\sqrt{145}=10+y. \qquad (1)$$

Илдизнинг таърифи бўйича $145=$ $=(10x+y)^2$. Тенгликнинг ўнг қисмини квадратга кўтариб, группаланса қуйидагича бўлади:

$$145=(10x)^2+[2(10x)+y]\cdot y. \qquad (2)$$

Илдизнинг рақамлари эса (2) тенгликдан топилади. (2) тенгликда изланган илдиз ўнлар хонасининг квадрати $(10x)^2$ 100 ичида бўлгани учун илдизнинг ўнлар хонасидаги рақам x охирги грандаги 1 дан чиқарилган квадрат илдиз 1 дан иборат бўлади. Топилган квадрат илдиз 1 биринчи грандаги нуқтанинг устига ва унинг остига — асосга ёзилади. Сўнгра юқоридаги 1 билан асосдаги 1 ни қўшиб, йиғинди 2 асосдаги 1 нинг ўнг томондаги устунга ёзилади. Илдизнинг биринчи рақами **1** ни ўзига кўпайтириб, биринчи грандаги 1 дан айирилади, қолдиқ горизонтал чизиқ тагига ёзилади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

1

1	4	5	Сон қатори
1			
0			
	2		Асос қатори
1			

$$\sqrt{145}=1$$

Ҳозирги усулда: $2\begin{array}{|c}1\\ \hline 0\end{array}$.

Агар топилган илдизнинг рақами 1 ни (2) тенгликка қўйилса,

$$45=(2\ \ 10+y)y \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. (3) тенглик асосида топилган илдизнинг бирлар хонасидаги рақам $y=2$ ни асосдаги 2 нинг ўнг томонига ва иккинчи грандаги нуқта устига қўйиб, ҳосил бўлган 22 ни 2 га кўпайтириб 45 дан айирилса, 1 қолдиқ қолади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши қуйидагича бўлади.

1		2	
1		2	
1	4	5	
1	4	4	Сон қатори
0		1	
			Асос қатори
	2	2	
1			

$$\sqrt{145} = 12$$

Ҳозирги усулда: $\begin{array}{r|l} 22 & 1 \\ \underline{2} & \overline{0 \quad 45} \\ & \quad \underline{-44} \\ & \qquad 1 \end{array}$

Коший сон қагорида 1 қолдиқ қолганлиги учун илдиз иррационал сондан иборат эканлигини уқтириб, унинг тақрибий қийматини ўнли каср билан 0,01 гача аниқликда ифодалашни кўрсатади. Бунинг учун 145 нинг ўнг томонига тўртта ноль қўйиб, бу ноллар каср хоналардан иборат эканлигини назарда тутиб, уларни қизил рангда чизилган вертикал тўғри чизиқлар орасига олади, сўнгра илдизнинг каср хоналаридаги рақамларни юқорида кўрсатилган йўл бўйича топади.

Илдизнинг каср қисмидаги ўндан бирлар хонасидаги рақамни топиш учун асос қаторидаги 22 га 2 ни қўшиб, ҳосил бўлган 24 нинг рақамлари бир хона ўнгга сурилади. Агар илдизнинг каср қисмидаги ўндан бирлар хонасидаги рақамни бир десак, уни асосидаги 24 нинг ўнг томонига ва учинчи грандаги нуқта устига қўйиб, ҳосил бўлган 241 ни 1 га кўпайтирилганда асосдаги қолдиқ бир ва унинг ўнг томонидаги икки нолдан ҳосил бўлган 100 дан катта бўлади, демак, илдизнинг каср қисмидаги ўндан бирлар хонасидаги рақам нолдан иборат экан. Топилган нолни асосдаги 24 нинг ўнг томонига қўйиб, ҳосил бўлган 240 нинг рақамлари бир хона ўнгга сурилса, жадвалнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

1		2		0			
·		·		·		·	
1	4	5	0	0	0	0	
1	4	4					
0		1					Сон қатори
			2	4	0	4	
		2	4	0			
	2	2					
1							Асос қатори

$$\sqrt{145} = 12,0$$

Ҳозирги усулда:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 1 \\ 2 & 0\ 45 \\ \hline 240 & \ \ 44 \\ \hline & \ \ 10000. \end{array}$$

Илдизнинг каср қисмидаги юздан бирлар хонасидаги рақамни топиш учун асосдаги 240 нинг ўнг томонига шундай бир хонали энг катта сон қўйиш натижасида ҳосил бўлган сонни яна шу сонга кўпайтирганда ҳосил бўлган кўпайтма сон қаторидаги 10 000 дан катта бўлмаслиги керак. Қўйилган шарт бўйича топилган илдизнинг каср қисмидаги юздан бирлар хонасидаги рақам 4 ни асосдаги 240 нинг ўнг қисмига ва охирги грандаги нуқта устига қўйиб, асосда ҳосил бўлган 2404 ни 4 га кўпайтириб, кўпайтма сон қаторидаги 10 000 дан айирилса, 384 қолдиқ қолади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

1		2		0		4	
·		·		·		·	
1	4	5	0	0	0	0	Сон қатори
1	4	4	9	6	1	6	
0	0	1	0	3	8	4	
			2	4	0	4	
		2	4	0			
	2	2					Асос қатори
1							

Ҳозирги усулда:

$$\sqrt{145} = 12,04$$

$$\begin{array}{r|l} \times 22 & 1 \\ 2 & 0\ 45 \\ \hline \times 2404 & \ \ 44 \\ 4 & \ \ 10000 \\ & \ \ \ \ 9616 \\ & \ \ \ \ 384 \end{array}$$

Демак, 145 сони квадрат илдизининг 0,01 аниқликда ками билан олинган тақрибий қиймати 12,04 дан иборат бўлади.

Жамшид Коший илдиз иррационал сон бўлганда бу соннинг ўнли касрда исталган аниқликдаги ками билан олинган тақрибий қийматларини топиш учун унинг ўнг томонига, тўртта нолдан ташқари, яна нолларни қўйиб, юқорида кўрсатилган йўл бўйича илдиз чиқаришни тавсия қилади.

Жамшид Коший ўнли касрни, арифметик амалларни бажаришга татбиқ қилиш билан бир қаторда, геометрик миқдорларни ўлчашга ҳам қўллайди. У „Айлана ҳақида рисола“ номли асарида айлана узунлигининг диаметрига нисбати (ўзгармас иррационал π сони) ни вергулдан сўнг 16 хона аниқлик билан ўнли касрда ҳисоблайди: $\pi \approx 3{,}1415926535897932$. Кошийнинг ўнли касрни мунтазам равишда тўлиқ баён этиши ва математиканинг турлича соҳаларига татбиқ қилиши, ўрта асрлардаги арифметика соҳасидаги ютуқларнинг энг баланд чўққиси деб ҳисобласа бўлади. Коший ижодининг бу тарифи математика тарихида катта аҳамиятга эгадир.

8-§. Айлана узунлигини олтмишли ва ўнли касрлар билан ҳисоблашда Жамшид Коший қўллаган усуллар

Жамшид Кошийнинг „Айлана ҳақида рисола“ номли асари ўн бўлим ва хулосадан иборат бўлиб, бунда асосан айлана узунлигини олтмишли ва ўнли каср кўринишида тақрибий аниқлаш баён этилади.

Коший асарининг кириш қисмида Архимед „Шар ва цилиндр ҳақида“ ва „Доирани ўлчаш ва Лемма“ номли асарларида айлана ичига чизилган 96 томонли мунтазам кўпбурчакнинг периметри айлана узунлигидан кичик, айлана ташқарисига чизилган мунтазам кўпбурчакнинг периметри эса айлана узунлигидан катта эканлигини исбот қилганлиги ва шу теоремага асосан айлана узунлигининг диаметрига нисбати ўзгармас иррационал π сони $3\frac{1}{7}$ сондан катта $3\frac{10}{71}$ дан кичик $\left(3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}\right)$ деган хулоса чиқарганлигини уқтиради. Коший $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$ тенгсизликнинг чегаралари орасидаги айирма $3\frac{10}{71} - 3\frac{1}{7} = \frac{1}{497}$ бир газ ва фарсанг билан ўлчанишини кўрсатади. У айлана узунлигини ҳисоблашда узунлик ўлчовлари—бир газ сажин, фарсанг ва дюймлар орасидаги боғланишдан фойдаланади.

Жамшид Коший ўзидан олдин ўтган Ўрта Осиё математикларидан Абул-Вафо (940—988 й.) радиуси 60 га тенг бўлган айлана ичига ва ташқарисига чизилган мунтазам 192 томонли кўпбурчакнинг периметрини ҳисоблаш орқали айлана узунлигининг тақрибий қийматини олтмишли каср орқали аниқлаганлигини уқтиради. У Абул-Вафо айлана узунлигини аниқлашда зарур бўлган $\frac{1^\circ}{2}=30'$ ёй ватарининг миқдорини нотўғри ҳисоблаганлигини таъкидлайди. Кошийнинг кўрсатишича Абул-Вафо 30′ ёй ватарининг миқдорини олтмишли касрда 0 31 24 56 58 36 ўрнига, озгина хатога йўл қўйиб, 0 31 24 55 54 55 каср билан ва Абу Райхон Беруний ҳам Абул-Вафо каби айлана узунлигини аниқлашда, 2° ёй ватарининг миқдорини олтмишли касрда 0^p 2′ 5 39 26 20 28 ўрнига озгина хатога йўл қўйиб, 0^p 2′ 5 39 30 43 36 каср билан ҳисоблаганлигини кўрсатади.

Коший ўзидан олдин ўтган олимларнинг айлана узунлигини аниқлашда йўл қўйган хатоларини назарда тутиб, айлана узунлигини юқори даражада аниқлик билан олтмишли ва ўнли касрда ҳисоблаш учун „Айлана ҳақида рисола“ номли асарини яратади ва бу масалани тўла-тўкис ҳал қилади.

Жамшид Кошийнинг айлана узунлигини аниқлаш усулининг асосий мазмуни қуйидагича:

У айлана ичига ва ташқарисига мунтазам олти бурчакли кўпбурчаклар чизиб, бу кўпбурчакларнинг томонларини 28 марта иккилантириш натижасида ҳосил бўлган 805 306 368 томонли ички ва ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг периметрларини яхлитлаш билан уларнинг ўрта арифметик қиймати $\frac{P_{28}+p_{28}}{2}$ ни тахминан айлана узунлиги $\frac{P_{28}+p_{28}}{2}\approx C$ учун қабул қилади. Коший ҳар қайси периметрларни олтмишли касрда $\frac{1}{60^9}$ ва ўнли касрда $\frac{1}{10^{16}}$ аниқликда ҳисоблайди. Коший, ҳисоблашнинг юқори даражада аниқлик билан бажарилганлигининг далили сифатида, ташқи ва ички чизилган кўпбурчаклар периметрларининг айирмаси

$P_{805\,306\,368} - p_{805\,306\,368}$ бир солинага тегишли доира айланасининг миқдори $0,823 \approx 0,8 = \frac{4}{5}$ қил (от сочи)нинг қалинлигидан кичик эканлигини кўрсатади.

Коший мунтазам ички ва ташқи чизилган олти бурчакли кўпбурчакларнинг томонларини кетма-кет иккилаштириш натижасида ҳосил бўлган мунтазам ички ва ташқи кўпбурчакларнинг томонлари $a_6, a_{12}, a_{24}, \ldots, a_{2n}$ ва $b_6, b_{12}, b_{24}, \ldots, b_{2n}$ ни топиш учун ёрдамчи ватар $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{28}$ ларнинг узунликларини аниқлаш зарур эканлигини кўрсатади.

Шуни назарда тутиб, у ёрдамчи ватар AD ни диаметр ва берилган AC ватар орқали аниқлашни қуйидаги теорема орқали беради: диаметри билан ихтиёрий AC ватар йиғиндисининг диаметрнинг ярмисига кўпайтмаси ёрдамчи ватар AD нинг квадратига тенг. Яъни

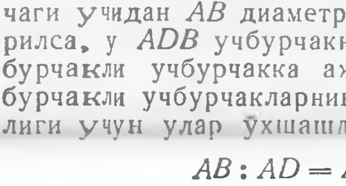
$$AD^2 = \frac{d}{2}(d + AC). \tag{1}$$

Исботи. AB диаметрга маркази E бўлган ярим айлана — ACB чизилади, AC ёйни ярим айланага тўлдирувчи CB ёй D нуқтада тенг иккига бўлинади, A, D, ва B нуқталар ватарлар билан бирлаштирилса, ADB тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади (43- шакл). Коший (1) тенгликни Евклиднинг „Негизлар“ асаридаги жумлаларга асосланиб исбот қилади.

Агар ADB тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан AB диаметрига DF перпендикуляр туширилса, у ADB учбурчакни иккита ADF ва DFB тўғри бурчакли учбурчакка ажратади. ADB ва ADF тўғри бурчакли учбурчакларнинг A бурчаги умумий бўлганлиги учун улар ўхшашдир Буларнинг ўхшашлигидан

$$AB : AD = AD : AF, \text{ бундан}$$

$$AD^2 = AB \cdot AF. \tag{2}$$



43- шакл.

Айлананинг E маркази билан C ва D нуқталар бирлаштирилса, AEC тенг ёнли ва DEF тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. AEC тенг ёнли учбурчакнинг E учидан AC асосига EH перпендикуляр туширилса,

AC асосини $AH = HC$ кесмаларга бўлади. Тўғри бурчакли AEH ва DFE учбурчакларнинг CAB ва DEB ўткир бурчаклари тенг ёй градуси билан ўлчанади.

Демак, $\widehat{CAB} = \widehat{DEB}$. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглик аломатига асосан $\triangle AEH = \triangle EDF$, бундан $EF = AH = \frac{AC}{2}$. Шаклдан:

$$AF = AE + EF = AE + \frac{AC}{2} = \frac{2AE + AC}{2}. \qquad (3)$$

(2) ва (3) дан:

$$AD^2 + AB \cdot \frac{2AE + AC}{2} = \frac{AB^2}{2}(AB + AC). \qquad (3')$$

Демак, $AD^2 = \frac{AB}{2}(AB + AC)$ $AB = d$ белгиланса,

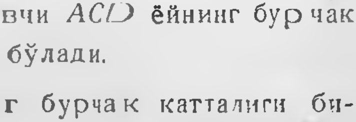
$$AD^2 = \frac{d}{2}(d + AC). \qquad (1)$$

Агар AC ёй α билан белгиланса, CDB ёй $180° - \alpha$ бўлади, AD ватарни тортиб турувчи ACD ёйнинг бурчак катталиги $\alpha + \frac{180° - \alpha}{2}$ га тенг бўлади.

Коший (1) тенгликни ёйнинг бурчак катталиги билан боғлаб, қоида кўринишида шундай баён қилади: диаметри билан α ёй тортиб турувчи AC ватарнинг йиғиндиси $d +$ ватар (α) ярим айланадан кичик, йиғинди $[d +$ ватар $(\alpha)]$ нинг диаметрининг ярмиси $\left(\frac{d}{2}\right)$ га кўпайтмаси $\alpha + \frac{180° - \alpha}{2}$ ёйни тортиб турувчи AD ватарнинг квадратига тенг, яъни

$$\frac{d}{2}\left[d + \text{ватар } (\alpha)\right] = \text{ватар}^2\left(\alpha + \frac{180 - \alpha}{2}\right). \qquad (4)$$

Коший (1) формуладаги AC ватарга тегишли $\overset{\frown}{AC} = \alpha = 60°$ ни қабул қилиб, айланани 6 бўлакка бўлади, $AC = CD_1 = D_1B$ ватарлар (44-шакл) мунтазам ички чизилган олти бурчакли кўпбурчакнинг томонлари



44-шакл.

бўлади. Агар ёрдамчи ватар $AD_1 = k_1$ билан, мунтазам олти бурчакнинг томони $D_1B = a_6$ билан, ташқи чизилган мунтазам олти бурчакли кўпбурчакнинг томони b_6 билан белгиланса, Кошийнинг айлана узунлигини аниқлашдаги усулини ҳозирги белгилар билан шундай ифодалаш мумкин. У a_6 тортиб турган ёй D_1B ни AD_1 ватар ёрдамида кетма-кет иккилантиришни 28 гача давом эттиради. Бунинг натижасида:

$$D_1B = a_6,\ D_2B = a_{12},\ \dots,\ D_{28}B = a_{805\ 306\ 368}$$

мунтазам ички чизилган кўпбурчакларнинг ва b_6, b_{12},... ...,$b_{805\ 306\ 368}$ мунтазам ташқи чизилган кўпбуракларнинг томонлари ҳосил бўлади. Шаклда эса $D_1B = a_6$, $D_2B = a_{12}$, $D_3B = a_{24}$ кўрсатилади.

Коший олтмишли саноқ системасида мунтазам ички чизилган олти бурчакли кўпбурчакнинг томонини кетма-кет иккилантиришни 28 гача давом эттиришни жадвалда шундай кўрсатади:

Ўнли саноқ системасида	
Мунтазам учбурчакдан бошлаб томонни кетма-кет иккилантириш	
Сон	Кетма-кет иккиланган кўпбурчак томонининг сони
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
5	96
6	192
7	384
8	768
9	1536
10	3072
11	6144
12	12288
13	24576
14	49152
15	98304
16	198608
17	393216
18	786432
19	1572864
20	3145728
21	6291458
22	12582912
23	25165824
24	50331648
25	100663296
26	201326592
27	402653184
28	805306368

Агар биз ўнли саноқ системасида иккиланган мунтазам олти бурчакли кўпбурчакнинг томонлари сонини олтмишли саноқ системасига айлантирсак, у қуйидагича бўлади:

Олтмишли саноқ системасида						
Мунтазам учбурчакдан бошлаб томонни кетма-кет иккилантириш						
Сон	Беш марта кўтарилган	Тўрт марта кўтарилган	Уч марта кўтарилган	Икки марта кўтарилган	Кўтарилган	
0						3
1						6
2						12
3						24
4						48
5					1	36
6					3	12
7					6	24
8					12	48
9					25	36
10					51	12
11				1	42	24
12				3	24	48
13				6	49	36
14				13	39	12
15				27	18	24
16				54	36	48
17			1	49	13	36
18			3	38	27	12
19			7	16	54	24
20			14	33	48	48
21			29	7	37	35
22			58	15	15	12
23		1	56	30	30	24
24		3	53	1	0	48
25		7	46	2	1	36
26		15	32	4	3	12
27		31	4	8	6	24
28	1	2	8	16	12	48

Коший $a_{805306368}$ ни топиш учун аввал $AD_1 = k_1$, $AD_2 = k_2$, $AD_3 = k_3$, . . . , $AD_{28} = k_{28}$ ёрдамчи ватарларни топади. Сунг (1) формулага асосан, AD_1, AD_2, . . . , AD_{28} ёрдамчи ватарларни улар орасидаги рекуррент боғланишни кўрсатувчи

$$k_{l+1} = \sqrt{r(2r + k_l)} \qquad (5)$$

формула билан аниқлайди. (5) даги $k_1 = AD_1$, $k_2 = AD_2$, . . . , $k_{28} = AD_{28}$ дан иборатдир. Сўнг охирги тўғри бурчакли учбурчакдан

$$a^2_{805306368} = (2r)^2 - k^2_{28} \qquad (6)$$

ни топади.

Коший (1) формуладаги AC ватар мунтазам ички чизилган олти бурчак томонига тенг бўлса, AD_1 ёрдамчи ватар $k_1 = AD_1 = a_3 = r\sqrt{3}$ булишини уқтириб, сўнг (5) формула орқали ёрдамчи ватарларни шундай ҳисоблайди:

$$\left.\begin{aligned}
k_2 &= \sqrt{r(2r+k_1)} = \sqrt{r(2r+r\sqrt{3})} = r\sqrt{2+\sqrt{3}} \\
k_3 &= \sqrt{r(2r+k_2)} = \sqrt{r(2r+r\sqrt{2+\sqrt{3}})} = \\
&= r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_{28} &= r\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}
\end{aligned}\right| \quad (7)$$

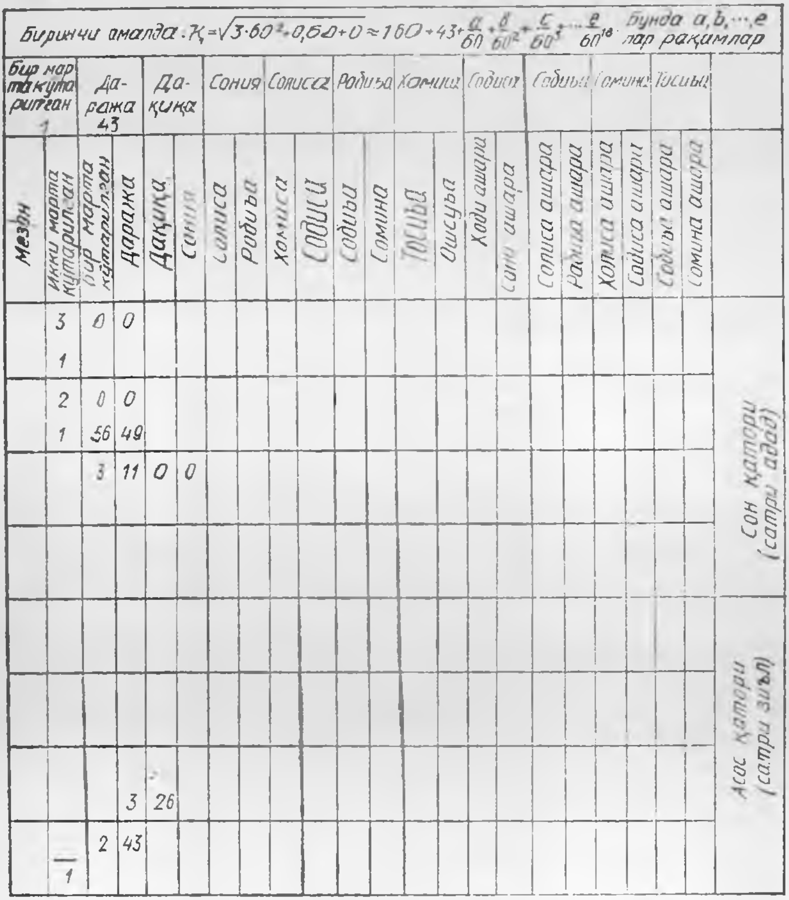
Коший радиуси 60 бўлган айлананинг узунлигини ҳисоблаш учун (7) даги

$$k_1 = r\sqrt{3},\ k_2 = r\sqrt{2+\sqrt{3}},\ k_3 = r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$
$$\ldots,\ k_{28} = r\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

иррационал сонларнинг ҳар бирининг тақрибий қийматларини $\frac{1}{60^{18}}$ аниқлик билан олтмишли саноқ системасида, жадвал усулида кетма-кет квадрат илдиз чиқариш орқали топади ва бу ҳисоблашларни 28 та жадвалда кўрсатади.

Коший $k_1, k_2, \ldots, k_{28}$ ларни ҳисоблашда келтирган 28 та жадвалидан k_1 ни ҳисоблашдаги усулини намуна тариқасида мукаммал кўрсатамиз. Кошийнинг усули ўқувчиларга яхши тушунарли бўлишини назарда тутиб, k_1 дан жадвал усулида квадрат илдиз чиқаришни кўрсатишни ҳозирги усул билан бир қаторда кўрсатишни маъқул топдик. У олтмишли системада $k_1 = 60\sqrt{3} = \sqrt{3\cdot 60^2} = \sqrt{3\cdot 60^2+0\cdot 60+0} = \sqrt{300}$ ни ёзиб, сўнг жадвал усулида илдиз чиқаради.

Ўрта Осиё математикларининг сонлардан квадрат илдиз чиқариш усули мазмун жиҳатдан ҳозирги усул каби бўлиб, фақат бажариш техникаси билан фарқ қилади. Ўрта Осиё математикларидан Муҳаммад Хоразмий, ан-Насавий, Насириддин Тусийлар сонлардан



Биринчи амалда: $k_1=\sqrt{3\cdot60^2+0{,}60+0}\approx160+43+\frac{a}{60}+\frac{b}{60^2}+\frac{c}{60^3}+\dots\frac{e}{60^{18}}$ бунда $a,b,\cdots,e$ лар рақамлар																						
Бир марта кўтарилган 1		Даража 43		Дақиқа		Сония		Солиса		Робиъа		Хомиса		Содиса		Собиъа		Сомина		Тосиъа		
Мезон	Икки марта кўтарилган	Бир марта кўтарилган	Даража	Дақиқа	Сония	Солиса	Робиъа	Хомиса	Содиса	Собиъа	Сомина	Тосиъа	Ошсуъа	Ходи ашара	Сони ашара	Солиса ашара	Робиъа ашара	Хомиса ашара	Содиса ашара	Собиъа ашара	Сомина ашара	
	3 1	0	0																			Сон қатори (сатри адад)
	2 1	0 56	0 49																			
		3	11	0	0																	
																						Асос қатори (сатри зиъл)
			3	26																		
	— 1	2	43																			

45-шакл.

квадрат илдиз чиқаришни „Машҳур усули" да баён этган бўлсалар, Нишопурий, Коший ва ундан кейинги муаллифлар сонлардан илдиз чиқаришни „Жадвал усул" да баён этадилар.

Коший олтмишли саноқ системасида сонлардан квадрат илдиз чиқариш учун жадвал (45-шакл) ни горизонтал чизиқ бўйлаб 5 га бўлади. Биринчи бўлакка „биринчи амал" номи билан k_1 ва унинг рақамлари, иккинчи бўлакка топилган илдизнинг рақами ва тегишлича хоналарнинг номлари, учинчи бўлакка илдизи билан сон хонасининг номлари ёзилади. Тўртинчи бўлак сон қатори“ („сатри адад“) номи билан аталиб, бунга илдизи изланган сон ва илдиз рақамларининг квадратлари ёзилади ва охирги бешинчи бўлакка „асос қатори“ („сагри зиъл“) дейилади, бунга илдиз рақамларининг биринчи даражаси ёзилади.

Илдизи изланган сонни тўртинчи бўлакка жойлаштириб, ҳар бир рақам вертикал тўғри чизиқлар орасига олинади, сўнг ўнг томондан чапга қараб икки рақамдан қилиб гранларга ажратилади, бу гранлар икки қават чизиқ орасига олинади.

Жадвалга илдизи изланадиган сонни жойлаштириш ҳақида тушунча берилгандан сўнг, илдизнинг рақамларини топиш усули қоида кўринишида берилади. Коший келтирган қоида бўйича бу $\sqrt{3 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0} = 60x + y$ кўринишда икки хонали сондан иборат бўлади. Илдиз таърифига кўра

$$3 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0 = (60x)^2 + (2 \cdot 60xy + y^2) = \\ = (60x)^2 + (2 \cdot 60x + y)\,y. \qquad (8)$$

Берилган $3 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0$ ни жадвалга жойлаштириб, илдизнинг рақамлари (8) тенгликдан топилади. (8) тенгликка асосан $3 \cdot 60^2$ ни квадрат илдиз $1 \cdot 60$ (жадвалда ҳар бир хона номлари кўрсатилганлиги учун система асоси 60 ёзилмайди) ни биринчи гранга ва унинг тўғрисидаги асосга ёзилади (45-шакл), сўнгра юқоридаги 1 билан асосдаги 1 ни қўшиб, йиғинди 2 ни асосдаги 1 нинг ўнг томонидаги устунга ёзилади. Илдизнинг биринчи рақами 1 ни ўз-ўзига кўпайтириб, биринчи грандаги 3 дан айирилади, қолдиқ чизиқ тагига ёзилади. Қолдиқ иккинчи грандаги сон билан $2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0 = 200$ ни ҳосил қилади. Бу ҳолда жадвал 45-шаклдаги кўринишда бўлади.

Агар топилган илдизнинг рақами 1 ни (8) га қўйилса, $3 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0 = (60 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 60 \cdot 1 + y)\,y$, бунда биринчи йиғинди $1 \cdot 60^2$ ни $3 \cdot 60^2$ дан айирсак, (8) тенглик шундай кўринишга келади:

$$2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0 = (2 \cdot 60 + y)y. \qquad (9)$$

Илдизнинг иккинчи рақамини топиш учун (9) тенгликдаги „y“ нинг ўрнига шундай энг катта рақам y_1

ни қўйиш натижасида ҳосил бўлган $(2\cdot 60+y)\,y_1$ сон $2\cdot 60+0\cdot 60+0=200$ дан кичик бўлиши керак, агар изланган y_1 ўрнига 43 ни қўйиб, юқоридаги ифодани ҳисобласак:

$(2\cdot 60+43)\,43 = 8660+1849 = (160+26)\cdot 60+3060+$ $+49 = 1\cdot 60^2+26\cdot 60+30\cdot 60+49 = 1\cdot 60^2+56\times$ $\times 60+49 = 15649$ бўлади. Демак, изланган илдизнинг рақами 43 бўлади.

(9) тенглик асосида топилган илдизнинг рақами (45-шакл) $y=43$ ни 2 нинг ўнг томонига ва иккинчи грандаги даражалар хонасига қўйиб, ҳосил бўлган $2\times$ $\times 60+43=2\ 43$ ни 43 га кўпайтириб, кўпайтма 1 56 49 ни қолдиқ 200 дан айирилади. Кейинги қолдиқ 3 11 чизиқ тагига ёзилади.

Коший илдизнинг каср қисмидаги рақамларини топиш учун сон қаторидаги ҳар бир охирги қолдиқни ўнг қисмига бир жуфтдан ноль қўйиш билан исталган аниқликдаги илдизнинг тақрибий қийматини олтмишли системада аниқлаш мумкинлигини кўрсатади. У илдизнинг каср хонасидаги биринчи рақам a ни $\left(k_1\right.$ ни $\left.\frac{1}{60}\right.$ аниқликда) топиш учун асосдаги (45-шакл) $2\cdot 60+$ $+43=2\ 43$ ни 43 га қўшиб, ҳосил бўлган $3\cdot 60+$ $+26=3\ 26$ нинг рақамларини бир хона ўнгга суради. (9) тенгликка асосан y_1 ни топиш учун қўйилган шарт бўйича $3\cdot 60+26=3\ 26$ нинг ўнг қисмига шундай энг катта рақам $a=55$ ни қўйиш натижасида ҳосил бўлган $3\cdot 60+26+\frac{55}{60}$ сон $\frac{55}{60}$ га кўпайтирилади. Кўпайтма $\left(3\cdot 60+26+\frac{55}{60}\right)\cdot\frac{55}{60}=3\cdot 60+9+\frac{40}{60}+\frac{25}{60^2}=3\ 9\ 40\ 25$ ни сон қаторидаги қолдиқ $3\cdot 60+11+\frac{0}{60}+\frac{0}{60^2}$ дан айирилади, айирма $1+\frac{19}{60}+\frac{35}{60^2}=1\ 19\ 35$ ни чизиқ тагига ёзилади. Бу ҳолда жадвалнинг кўриниши 46-шаклдагидек бўлади.

Коший илдизнинг каср хонасидаги иккинчи рақам „b" ни топиш учун юқорида кўрсатилган (a ни топишдаги) йўлни такрорлайди, яъни асосдаги (46-шакл) 3 27 55-ни 55 га қўшиб, ҳосил бўлган 3 27 50 нинг рақамларини бир хона ўнгга суради. Сўнгра 3 27 50

Биринчи амалда: $Қ_1=\sqrt{3\cdot60^2+0\cdot60+0}\approx1\cdot60+43+\frac{55}{60}+\frac{в}{60^2}+\frac{с}{60^3}+\dots+\frac{е}{60^{16}}$, бунда а,в,…е лар рақамлар																						
Бир марта кўтарилган 1		Даража 43		Дақиқа 55		Сония 22		Солиса		Робиъа		Холиса		Содиса		Собиъа		Сомина		Тасиъа		
Мезон	Икки марта кўтарилган	Бир марта кўтарилган	Даража	Дақиқа	Сония	Солиса	Робиъа	Хамиса	Содиса	Собиъа	Сомина	Тасиъа	Ошсуъа	Ходи ашара	Сони ашара	Солиса ашара	Робиъа ашара	Содиса ашара	Холиса ашара	Сомина ашара	Собиъа ашара	
	3	0	0																			Сон қатори
	0																					
	2																					
	1	56	49																			
		3	11	0	0																	
		3	9	40	25																	
			1	19	35	0	0															
			1	16	12	28	4															
				3	22	31	56	0	0													
					3	27	50	44														Асос қатори
				3	27	50	22															
			3	26	55																	
		2	43																			
	1																					

46- шакл.

нинг ўнг қисмига шундай энг катта рақам $b = 22$ ни қўйиш натижасида ҳосил бўлган $3+\frac{27}{60}+\frac{50}{60^2}+\frac{22}{60_3}$ сонни $\frac{22}{60^3}$ га кўпайтиради. Кўпайтма $\left(3+\frac{27}{60}+\frac{50}{60^2}+\frac{22}{60^3}\right)\cdot\frac{22}{60^3}=1+\frac{16}{60}+\frac{12}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\frac{4}{60^4}=1\ \ 16\ \ 12\ \ 28\ \ 4$

ни сон қаторидаги $1 + \frac{19}{60} + \frac{35}{60^2} + 0 + 0 = 1\ 19\ 35\ 0\ 0$

дан айиради, айирма $\frac{3}{60} + \frac{22}{60^2} + \frac{31}{60^3} + \frac{56}{60^4} = 3\ 22\ 31\ 56$

ни чизиқ тагига ёзади.

Коший $\frac{1}{60^{18}}$ аниқликдаги илдизнинг каср қисмидаги қолган $c, d, \ldots, l$ рақамларни ҳам охирги қолдиққа бир жуфтдан ноль қўйиш билан юқорида кўрсатилган йўлда топади. Ҳозирги белги билан Коший ҳисоблаган k_1 нинг охирги натижаси қуйидагича бўлади: $k_1 =$

$$= r\sqrt{3} = 60 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0} \approx 1 \cdot 60 + 43 + \frac{55}{60} + \frac{22}{60^2} + \frac{58}{60^3} + \frac{27}{60^4} + \frac{57}{60^5} + \frac{56}{60^6} + \frac{0}{60^7} + \frac{44}{60^8} + \frac{25}{60^9} + \frac{31}{60^{10}} + \frac{42}{60^{11}} + \frac{1}{60^{12}} + \frac{56}{60^{13}} + \frac{22}{60^{14}} + \frac{42}{60^{15}} + \frac{48}{60^{16}} + \frac{58}{60^{17}} + \frac{57}{60^{18}}.$$

Коший k_2 ни топиш учун аввал уни $k_2 = \sqrt{r(2r + k_1)} =$

$$= \sqrt{60\left(2 \cdot 60 + 1 \cdot 60 + 43 + \frac{55}{60} + \frac{22}{60^2} + \frac{58}{60^3} + \ldots + \frac{57}{60^{18}}\right)} =$$

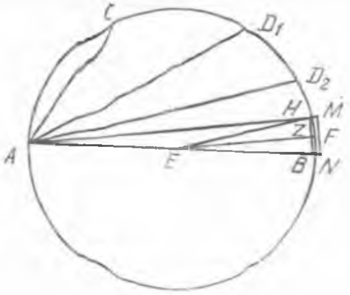
$$= \sqrt{3 \cdot 60^2 + 43 \cdot 60 + 55 + \frac{22}{60} + \frac{58}{60^2} + \ldots + \frac{57}{60^{17}}}$$ кўринишда ёзиб, сўнг, k_1 ни жадвал усулида $\frac{1}{60^{18}}$ аниқликда (7) формула асосида қандай топган бўлса, k_2 ни ҳам шундай топади. Буни жадвалда „иккинчи амал“ номи билан атайди. k_2 дан илдиз чиқариш натижаси ҳозирги белги билан ёзилса, у шундай бўлади:

$$k_2 = \sqrt{3 \cdot 60^2 + 43 \cdot 60 + 55 + \frac{22}{60} + \ldots + \frac{57}{60^{17}}} \approx 1 \cdot 60 + 55 + \frac{54}{60} + \frac{39}{60^2} + \frac{57}{60^3} + \ldots + \frac{46}{60^{18}}$$

Коший қолган ёрдамчи ватар $k_3, k_4, k_5, \ldots, k_{18}$ ларнинг ҳам тақрибий квадрат илдизларини жадвал усулида топади. Унинг ҳисоблаш натижасини ҳозирги белги бўйича ёзсак, у қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
&k_3 = \sqrt{r\,(2r + k_2)} \approx 1\cdot 60 + 58 + \frac{58}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \\
&+ \ldots + \frac{27}{60^{18}} \\
&k_4 = \sqrt{r\,(2r + k_3)} \approx 1\cdot 60 + 59 + \frac{44}{60} + \frac{35}{60^2} + \frac{3}{60^3} + \\
&+ \ldots + \frac{16}{60^{18}} \\
&k_5 = \sqrt{r\,(2r + k_4)} \approx 1\cdot 60 + 59 + \frac{58}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \\
&+ \ldots + \frac{34}{60^{18}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&k_{27} = \sqrt{r\,(2r + k_{26})} \approx 1\cdot 60 + 59 + \frac{59}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \\
&+ \ldots + \frac{43}{60^{18}} \\
&k_{28} = \sqrt{r\,(2r + k_{27})} \approx 1\cdot 60 + 59 + \frac{59}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \\
&+ \ldots + \frac{40}{60^{18}}
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

47- шакл ва (10) тенгликдан $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_{27} < k_{28}$ эканлиги маълум, яъни k_l кетма-кетликнинг l номери ортилиб берганда, унинг ҳадлари диаметр $2\cdot 60$ га яқинлашади. Кошийнинг k_l ни ёрдамчи ватар деб аташидан мақсад, k_l ёрдамида ички ва ташқи чизилган мунтазам кўпбурчаклар a_l ва b_l лар ясалади ва уларнинг узунлиги ҳисобланади Бунинг учун чизмада k_3 ёрдамида ясалган мунтазам ички ва ташқи чизилган кўпбурчакларнинг томонлари, апофемаси ва радиуси орасидаги муносабат 48- шаклдаги жадвалдан аниқланади.



47-шакл.

Юқорида кўрсатилганидек, агар $\overset{\frown}{AC} = 60°$ десак, $AC = CD_1 = D_1B$ бўлади. Ёрдамчи ватар $AD_2 = k_2$ ёр-

Робиъа 6		Хомиса 4		Содиса 1		Собиъа 14		Сомина 59		Тосиъа 36		Ошсуъа 14		Ходи ашара 33		Сони ашара 36		Солиса ашара 49		Робиъа ашара 25		
	Сомина	Тосиъа	Ошсуъа	Ходи ашара	Сони ашара	Солиса ашара	Робиъа ашара	Холиса ашара	Содиса ашара	Собиъа ашара	Сомина ашара											
	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17												Сон қатори
	36																					
	0																					
		48	16																			
		0	15																			
			12	8	1																	
			3	1	55																	
			2	49	52	31	16															
			0	12	3	14	12															
				11	55	54	26	30	1													
				0	7	19	46	10	20													
					7	16	49	29	56	9	36											
					6	2	56	40	21	7	24	0	0									
						2	49	52	34	59	48	51	16									
							6	47	46	7	35	8	44	0	0							
							6	40	25	22	29	33	51	42	9							
							0	7	20	45	5	34	52	17	51	0	0					
								7	16	40	29	59	31	29	27	57	36					
								0	3	55	35	35	20	48	24	2	24					
										12	8	2	29	59	12	29	7	12	49			Асос қатори
									12	8	2	29	59	12	29	6	36					
								12	8	2	29	59	12	28	33							
							12	8	2	29	58	12	14									
						12	8	2	29	58	36											
					12	8	2	28	59													
				12	8	2	14															
			12	8	1																	
		12	4																			
	6																					

48- шакл.

дамида $\overset{\smile}{D_1B}$ иккига бўлинса, $D_1B = a_6$ иккиланади, яъни $D_1D_2 = D_2B = a_{12}$ худди шу йўлда $AH = k_3$ ёрдамида D_2B ни иккига бўлиш билан $HB = a_{24}$ ҳосил бўлади. EF радиус, учидан уринма ўтказиб, уринма ҳамда EB ва EM ларнинг давоми билан кесишишдан ҳосил бўлган MN кесма b_{24} бўлади. $EZ = h_{24}$ эса мунтазам ички чизилган кўпбурчакнинг апофемасидир. Коший худди шу йўлда k_4, k_5, . . . , k_{28} ёрдамида a_{48}, a_{96}, . . . , $a_{805306368}$, b_{48}, r_{96}, . . . , $b_{805306368}$ ларни назарий томондан ясаш мумкинлигини уқтиради.

47- шаклдан:

k_3 ёрдамида ясалган $\triangle AHB$ дан $a_{24}^2 = d^2 - k_3^2$,

k_4 ёрдамида ясалган тўғри бурчакли учбурчакдан $a_{48}^2 = d^2 - k_4^2$,

. . . .

. . . .

k_{28} ёрдамида ясалган тўғри бурчакли учбурчакдан

$$a_{805306368}^2 = d^2 - k_{28}^2 \tag{6}$$

лар топилади.

$$\triangle EHB \backsim EMN \text{ дан } \frac{HB}{MN} = \frac{EZ}{EF} \text{ ёки } \frac{a_{24}}{b_{24}} = \frac{h_{24}}{r} \tag{11}$$

пропорция ёзилади. $p_{24} = 24\,a_{24}$ ва $P_{24} = 24 \cdot b_{24}$ ни эътиборга олиб, (11) тенглик шундай ёзилади:

$$\frac{p_{24}}{P_{24}} + \frac{k_{24}}{r}. \tag{12}$$

Бундан ҳосила пропорция тузилса,

$$\frac{p_{24}}{P_{24} - p_{24}} = \frac{h_{24}}{r - h_{24}} \tag{12'}$$

бўлади. Коший $r - h_{24} = s$ каби белгилаб, s ни HB ёйнинг „ўқи“ номи билан айтайди Бу ҳолда юқоридаги пропорция

$$\frac{p_{24}}{P_{24} - p_{24}} = \frac{h_{24}}{s}$$

ёки

$$\frac{p_{24}}{P_{24} - p_{24}} = \frac{r - s}{s} \tag{13}$$

кўринишда бўлади.

(13) дан

$$P_{24} = \frac{1}{1 - \frac{s}{r}} \cdot p_{24} \qquad (14)$$

бўлади. Коший ёрдамчи ватар k_l нинг номери 1 дан 28 гача ортганда эса диаметр 2 · 60 га яқинлашишни 47-шакл ва (6) тенгликка кўра

$$a_3,\ a_6,\ a_{12},\ \ldots,\ a_{805306368} \text{ ва } b_3,\ b_6,\ b_{12},\ \ldots,\ b_{805306368}$$

ларнинг узунликлари камайиб боришини ва бу кўпбурчакларнинг периметрлари ортиб бориб айлана узунлигига исталганча яқинлашишини кўрсатади. l номери ортганда (12) ва (14) тенгликдаги s эса исталганча камайиб нолга, h_{28} — апофема эса айлана радиусига интилишини кўрсатади. Бу ҳолда $P_{805306368}$ билан $p_{805306368}$ ларнинг айирмаси $P_{805306368} - p_{805306368}$ эса камайиб нолдан жуда оз фарқ қилишини уқтиради.

Ҳозирги ибора билан айтганда ички ва ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг ўзгарувчи периметрлари P_n ва p_n лар агар номери етарли даражада катта сон N дан катта, яъни $n > N$ бўлса, у ҳолда P_n ва p_n лар айлана узунлигига интилади, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = C$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = C$. Коший шу ғояда, айланага ички ва ташқи 805 306 368 томонли мунтазам кўпбурчак чизиб, бу кўпбурчакларнинг периметрларини ҳисоблаш орқали айлана узунлигини $\frac{1}{60^{18}}$ аниқликда ҳисоблайди.

Коший (6) формуладан қуйидагини топади:

$$a_{805306368}^2 = (2 \cdot 60)^2 - \left(3 \cdot 60^3 + 59 \cdot 60 + \frac{59}{60} + \frac{59}{60^2} + \ldots + \frac{59}{60^7} + \frac{23}{60^8} + \frac{11}{60^9} + \frac{28}{60^{10}} + \frac{50}{60^{11}} + \frac{3}{60^{12}} + \frac{14}{60^{13}} + \frac{31}{60^{14}} + \frac{19}{60^{15}} + \frac{38}{60^{16}} + \frac{49}{60^{17}}\right) = \frac{36}{60^8} + \frac{48}{60^9} + \frac{31}{60^{10}} + \frac{9}{60^{11}} + \frac{56}{60^{12}} + \frac{45}{60^{13}} + \frac{28}{60^{14}} + \frac{40}{60^{15}} + \frac{21}{60^{16}} + \frac{17}{60^{17}}.$$

Бундан

$$a_{805306868}=\sqrt{\frac{36}{60^8}+\frac{48}{60^9}+\frac{31}{60^{10}}+\frac{9}{60^{11}}+\frac{55}{60^{12}}+\frac{45}{60^{13}}+\frac{28}{60^{14}}+}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{}\overline{+\frac{40}{60^{15}}+\frac{21}{60^{16}}+\frac{17}{60^{17}}}. \qquad (15)$$

Коший (15) квадрат илдиз чиқаришни жадвалда 48- шаклдаги кўринишда бажаради.

Жадвалда чиқарилган квадрат илдиз натижасини ҳозирги белги бўйича шундай ёзиш мумкин:

$$a_{805306868}=\sqrt{\frac{36}{60^8}+\frac{48}{60^9}+\frac{31}{60^{10}}+\ \dots\ +\frac{17}{60^{17}}}\approx\frac{6}{60^4}+$$

$$+\frac{4}{60^5}+\frac{1}{60^6}+\frac{14}{60^7}+\frac{59}{60^8}+\frac{36}{60^9}+\frac{14}{60^{10}}+\frac{33}{60^{11}}+$$

$$+\frac{36}{60^{12}}+\frac{49}{60^{13}}+\frac{25}{60^{14}}. \qquad (16)$$

Коший (16) да топилган $a_{805306368}$ ни томонлар сони $(1\cdot 60^5+2\cdot 60^4+8\cdot 60^3+16\cdot 60^2+12\cdot 60+48)$ га кўпайтириш билан мунтазам ички чизилган кўпбурчакнинг периметрини аниқлайди. Яъни

$$p_{805306368}=\left(\frac{6}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{1}{60^6}+\ \dots\ +\frac{25}{60^{14}}\right)\cdot(1\cdot 60^5+$$

$$+2\cdot 60^4+8\cdot 60^3+16\cdot 60^2+12\cdot 60+48). \qquad (17)$$

Коший (17) даги сонларни кўпайтириш амалини жадвалда бажаради. Коший „тўр ичида кўпайтириш“ номи билан „жадвалда кўпайтириш“ усулига қисман ўзгариш киритади, яъни у жадвалдаги (49- шакл) квадратни диагонал билан юқори ва қуйи бурчакли учбурчакларга бўлади. Жадвалдаги тўғри тўртбурчакнинг юқори қисмидан чапдан бошлаб (17) тенгликдаги кўпаювчи $\left(\frac{6}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{1}{60^6}+\ \dots\ +\frac{25}{60^{14}}\right)$ ни энига, кўпайтувчи $(1\ 60^5+2\ 60^4+8\ 60^3+16\ 60^2+12\ 60+48)$ ни бўйига юқори хонасидан бошлаб* ёзилади. Агар биз амални қуйи хонасидан бошлаб бажарсак, масалан $\left(\frac{6}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{1}{60^6}+\dots+\frac{19}{60^{13}}+\frac{25}{60^{14}}\right)$ ни 48 га кўпайтиришда

---

*Системанинг асоси 60 ёзилмайди.

Кўпаювчи												
	Кўпайтувчи	Робиъа	Хомиса	Содиса	Собиъа	Сомина	Тосиъа	Ашара	Ҳоди ашара	Сони ашара	Солиса ашара	Робиъа ашара
Бешта кўпайтирилган	1	/6	/4	/1	/14	/59	/36	/14	/33	/36	/19	/25
Тўртта кўпайтирилган	2	/12	/8	/2	0/28	1/38	1/12	/28	1/6	1/12	/38	/50
Учта купайтирилган	8	/48	/32	/8	1/52	7/52	4/48	1/52	4/24	4/48	2/32	5/20
Иккита кўпайтирилган	16	1/36	1/4	/16	3/44	15/44	9/36	3/44	8/18	9/36	5/4	5/20
Битта кўпайтирилган	12	1/12	/48	/12	2/48	11/48	7/12	2/48	6/36	7/12	3/48	5/
Сон	48	4/48	3/12	0/48	11/12	47/12	28/48	11/12	26/24	28/48	15/12	20/0
Кўпайтма		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46
		Бир марта кўпайтирилган	Даража	Дақиқа	Сония	Солиса	Робиъа	Холиса	Содиса	Собиъа	Сомина	Тосиъа

49- шакл.

ҳосил бўлган хусусий кўпайтмалар $\frac{25}{60^{14}} \cdot 48 = \frac{20 \cdot 60 + 0}{60^{14}}$ $\frac{19}{60^{13}} \cdot 48 = \frac{15 \cdot 60 + 12}{60^{13}}$; . . . ; $\frac{1}{60^{6}} \cdot 48 = \frac{0 \cdot 60 + 48}{60^{6}}$; $\frac{4}{60^{5}} \cdot 48 =$ $= \frac{3 \cdot 60 + 12}{60^{5}}$; $\frac{6}{60^{4}} \cdot 48 = \frac{4 \cdot 60 + 48}{60^{4}}$ нинг олтмишлар хонасидаги 20, 15, ... 0, 3, 4 рақамлар жадвалнинг пастки ўнг қисми (48 турган хона тўғриси) дан бошлаб юқори учбурчакларга, бирлар хонасидаги 0, 12, ... , 48, 12, 48, рақамлар қуйи учбурчакларга ёзилади. Шу тартибда кўпаювчининг рақамларини кўпайтувчининг қолган 12, 16, 8, 2 ва 1 рақамларини кўпайтириб, ҳар бир хусусий кўпайтмаларини юқорида кўрсатилган тартибда, ўнг томондан бошлаб 12, 16, 8, 2 ва 1 лар турган хона тўғрисидаги учбурчакларга жойлаштирилади. Агар (17) даги амал юқори хонасидан бошлаб бажарилганда, хусусий кўпайтмаларнинг рақамлари жадвалнинг юқори қисмидан бошлаб, чапдан энига юқорида кўрсатилган тартибда учбурчакларга ёзилади. Амал кўпайтувчиларнинг юқори ёки қуйи хонасидан бошлаб бажарганда ҳам кўпайтманинг рақамлари тўртбурчакнинг пастки ўнг учидан, диагонал бўйича хусусий кўпайтмалар рақамларини қўшиш билан топилади. Бу рақамлар тўртбурчак тагига ўнгдан бошлаб ёзилади. Коший жадвалда (49- шакл) топилган $P_{805306368}$ қийматини яхлитлаб, $\frac{1}{60^9}$ гача аниқликда топади, яъни

$$P_{805306368} = \quad 6 \cdot 60 + 16 + \frac{59}{60} + \frac{28}{60^2} + \frac{1}{60^3} + \frac{34}{60^4} + \frac{51}{60^5} + \\ + \frac{46}{60^6} + \frac{14}{60^7} + \frac{49}{60^8} + \frac{46}{60^9}. \tag{18}$$

Коший (12′) пропорциядан ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакнинг периметри P ни аниқлайди. Бунинг учун $\frac{p}{P-p} = \frac{h}{r-h}$ пропорциядаги h ўрнига $\frac{k_2}{2}$ ни алмаштиради. Ҳақиқатан (47- шакл) AHB тўғри бурчакли учбурчакдан иборат бўлиб, $EZ = h_{24}$ эса унинг ўрта чизиғидир, учбурчакнинг ўрта чизиғининг хоссасига асосан $EZ = \frac{AH}{2}$, демак, $h_{24} = \frac{k_3}{2}$ умумий ҳолда, $h_{805306368} = \frac{k_{28}}{2}$ бўлади Бу ҳолда (12′) пропорциянинг куриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{p_{805306368}}{P_{805306368}} = \frac{\frac{k_{28}}{2}}{r - \frac{k_{28}}{2}}. \tag{19}$$

Коший $\frac{k_{28}}{2}$ ва $60 - \frac{k_{28}}{2}$ ларни жадвалда ҳисоблайди. Жадвалдаги $\frac{k_{28}}{2}$ ва $60 - \frac{k_{28}}{2}$ ларнинг қийматларини ҳозирги белги билан ёзсак, у шундай бўлади:

$$\frac{k_{28}}{2} \approx 59 + \frac{59}{60} + \frac{59}{60^2} + \ldots + \frac{59}{60^8} + \frac{55}{60^9} + \frac{23}{60^{10}} + $$

$$+ \ldots + \frac{20}{60^{18}} \text{ ва } 60 - \frac{k_{28}}{2} \approx \frac{4}{60^9} + \frac{36}{60^{10}} + \frac{3}{60^{11}} + \frac{53}{60^{12}} + \frac{44}{60^{13}} +$$

$$+ \frac{35}{60^{14}} + \frac{41}{60^{15}} + \frac{5}{60^{16}} + \frac{2}{60^{17}} + \frac{40}{60^{18}}. \qquad (20)$$

Коший (19) пропорциядаги $P_{805306368}$ ни ҳисоблаш учун p; $\frac{k_{28}}{2}$ ва $60 - \frac{k_{28}}{2}$ ларнинг қийматларини яхлитлайди, яъни $p_{805306368} \approx 2 \cdot 60 + 17$; $\frac{k_{28}}{2} \approx 60$; $60 - \frac{k_{28}}{2} \approx \frac{4}{60^9} + \frac{36}{60^{10}}$.

Бу қийматларни (19) га қўйилса, $\frac{6 \cdot 60 + 17}{P_{805306368} - p_{805306368}} = \frac{60}{\frac{4}{60^9} + \frac{36}{60^{10}}}$ бўлади. Бундан

$$P_{805306368} - p_{805306368} = \frac{(6 \cdot 60 + 17)\left(\frac{4}{60^9} + \frac{36}{60^{10}}\right)}{60} =$$

$$= \frac{\frac{28}{60^8} + \frac{52}{60^9} + \frac{12}{60^{10}}}{60} = \frac{28}{60^9} + \frac{52}{60^{10}} + \frac{12}{60^{11}} \approx \frac{29}{60^9}.$$

Демак,

$$P_{805306368} - p_{805306368} \approx \frac{29}{60^9}, \qquad (21)$$

бундан

$$P_{805306368} \approx p_{805306368} + \frac{29}{60^9} = 6 \cdot 60 + 16 + \frac{59}{60} + \frac{28}{60^2} +$$

$$+ \frac{1}{60^3} + \frac{34}{60^4} + \frac{51}{60^5} + \frac{46}{60^6} + \frac{14}{60^7} + \frac{50}{60^8} + \frac{15}{60^9}. \qquad (21')$$

Коший (21) ни жадвалда шундай кўрсатади:

Бир марта кутарилган	Бўлак	дақиқа	сония	солиса	робиъа	холиса	содиса	собиъа	сомина	тосиъа
6	15	59	28	1	34	51	46	14	50	15

Коший ернинг катта айланасининг узунлигини тахминан 8000 фарсанг (фарсанг — 6,9 км) қабул қилиб, ернинг диаметридан 6000000 марга катта бўлган айлана узунлигида бир соминага тегишли доира айланасининг миқдорини ҳисоблайди. Агар бир фарсанг 10368000 қил (от сочи) нинг қалинлигига тенг бўлса, бир соминага тегишли доира айланасининг узунлиги $\frac{1}{60^8} \cdot \frac{1}{360} \cdot 600000 \times \times 8000 \cdot 10368000 = \frac{6400}{7776} \approx 0{,}823 \approx 0{,}8$ қилнинг қалинлигининг $\frac{4}{5}$ бўлагига тенг бўлади. (21) тенгликдаги периметрлар айирмаси $\frac{30}{60^9}$ дан кичик, яъни $P_{805306368} - p_{805306368} < \frac{30}{60^9}$ бўлади. Коший бир соминага тегишли қилнинг қалинлиги ёрдамида $\frac{30}{60^9}$ га тегишли қилнинг қалинлигини қуйидаги пропорция ёрдамида топади: агар $\frac{1}{60^8}$ соминага қил қалинлигининг $\frac{4}{5}$ бўлаги тўғри келса, $\frac{30}{60^9}$ тосиъага қил қалинлигининг x бўлаги тўғри келади. Бундан $x = \frac{4}{5} \cdot \frac{30}{60^9} : \frac{1}{60^8} = \frac{4}{5} \cdot \frac{30}{60^9} \cdot \frac{60^8}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = = \frac{2}{5}$. Демак, (21) даги периметрлар айирмаси қил қалинлигининг $\frac{2}{5}$ бўлагидан кичик бўлиши керак.

Коший юқорида айтилганларни ҳисобга олиб, айлананинг узунлиги $P_{805306368} > C > p_{805306368}$ булишини, $P_{805306368} - C$ айирма ва $C + p_{805306368}$ йиғиндидаги хато қил қалинлигининг $\frac{2}{5}$ бўлагидан ошмаслигини уқтиради, шуни эътиборга олиб, у периметрлар айирмаси $\frac{29}{60^9}$ нинг $\frac{14}{60^9}$ қисмини $p_{805306368}$ га қўшади, $\frac{15}{60^9}$ қисмини эса $P_{805306368}$ дан айиради. Бу ҳолда айлана узунлиги учун ушбу ҳосил бўлади:

$$C = \frac{P_{805306368} + p_{805306368}}{2} = 6 \cdot 60 + 16 + \frac{59}{60} + \frac{28}{60^2} + \frac{1}{60^3} + \frac{34}{60^4} + + \frac{51}{60^5} + \frac{46}{60^6} + \frac{14}{60^7} + \frac{50}{60^8}. \tag{22}$$

Бунда қилинган хато қил қалинлигининг $\frac{1}{5}$ ёки арпа дони энининг $\frac{1}{6}$ дан катта бўлмаслигини кўрсатади. Шу билан Коший кўзда тутган мақсадига эришганлигини ва бу масалани тўла-тўкис ҳал қилганлигини уқтиради.

Ҳақиқатан Жамшид Коший ўзидан олдин ўтган олимларга нисбатан айлана узунлигини ғоят катта аниқлик билан ҳисоблайди. Амалларни бажариш натижасида ҳосил бўлган сонларнинг каср хоналарини яхлитлаш учун ҳозирги усулдагидек катта аниқликда охирги рақамларни ҳисобга олади. Унинг эслатишича, олтмишли касрда аниқланган айлана узунлиги астрономларнинг ҳисоблаш усуллари билан етарли даражада маълумотга эга бўлмаганлари учун тушуниши оғир бўлишини ҳисобга олиб, олтмишли касрда аниқланган айлана узунлигини ўнли касрга айлантиришни лозим топади. Шу билан у, амалий ишларда ўнли касрдан фойдаланиш олтмишли касрдан фойдаланишга нисбатан қулай ва содда эканлигини яна бир бора тасдиқлайди.

Олтмишли касрда аниқланган айлана узунлигини ўнли касрга айлантириш учун аввал (22) да аниқланган айлана радиуси 60 ўрнига бир қабул қилинса, бу ҳолда (22) да ҳисобланган айлана узунлигини ифодаловчи сонларда фарқ қилмасдан, фақат хоналардаги рақамлар бир хона чапдан ўнгга сурилади. Бунда (22) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$C \approx 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \ldots + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}. \qquad (23)$$

Бу ҳолда йўл қўйилган хато $\frac{1}{4}\,\frac{1}{60^9}$ дан кичик бўлади.

Коший (23) даги олтмишли касрни ўнли касрга айлантириш учун ўнли касрнинг рақамларини қуйидаги тенглик асосида топади: агар

$$\frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} = \frac{x}{10} + \frac{y}{10^2} + \frac{z}{10^3} + \ldots \qquad (24)$$

бўлса, (24) нинг иккала қисмини 10 га кўпайтириш билан

$$\frac{160}{60} + \frac{590}{60^2} + \frac{280}{60^3} = x + \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2} + \ldots \qquad (25)$$

ҳосил бўлади. (25) нинг чап қисмидаги йиғинди шундай кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{160}{60} &= \frac{2\cdot60+40}{60} = 2+\frac{40}{60}, \\ \frac{540}{60^2} &= \frac{9\cdot60+50}{60^3} = \frac{9}{60}+\frac{50}{60^2}, \\ \frac{280}{60^3} &= \frac{4\cdot60+40}{60^3} = \frac{4}{60^2}+\frac{40}{60^3}. \end{aligned}\right| \qquad (25')$$

(25′) ни (25) га қўйилса, ушбу ҳосил бўлади:

$$2+\frac{49}{60}+\frac{54}{60^2}+\frac{40}{60^3} = x+\frac{y}{10}+\frac{z}{10^2}+\frac{t}{10^3}+\ldots \qquad (26)$$

Бундан $x=2$. (26) нинг каср қисми қуйидагича бўлади:

$$\frac{49}{60}+\frac{54}{60^2}+\frac{40}{60^3} = \frac{y}{10}+\frac{z}{10^2}+\frac{t}{10^3}+\ldots \qquad (27)$$

(27) нинг иккала қисми 10 га кўпайтирилса, у шундай кўринишда бўлади:

$$\frac{490}{60}+\frac{540}{60^2}+\frac{400}{60^3} = y+\frac{z}{10}+\frac{t}{10^2}+\frac{k}{10^3}+\ldots \qquad (28)$$

(28) нинг чап қисмидаги йиғинди шундай кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{490}{60} &= \frac{8\cdot60+10}{60} = 8+\frac{10}{60}, \\ \frac{540}{60^2} &= \frac{9\cdot60+0}{60^3} = \frac{9}{60}, \\ \frac{400}{60^3} &= \frac{6\cdot60+40}{60^3} = \frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3}. \end{aligned}\right| \qquad (28')$$

(28′) ни (28) га қўйилса,

$$8+\frac{19}{60}+\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3} = y+\frac{z}{10}+\frac{t}{10^2}+\frac{k}{10^3}+\ldots \qquad (29)$$

бўлади. Бундан $y=8$. (29) нинг каср қисми:

$$\frac{19}{60}+\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3} = \frac{z}{10}+\frac{t}{10^2}+\frac{k}{10^3}+\ldots \qquad (30)$$

(30) нинг иккала қисми 10 га кўпайтирилса,

$$\frac{190}{60}+\frac{60}{60^2}+\frac{400}{60^3} = z+\frac{t}{10}+\frac{k}{10^2}+\ldots \qquad (31)$$

бўлади. (31) нинг чап қисмидаги йиғинди шундай кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{190}{60}=\frac{3\cdot 60+10}{60}=3+\frac{10}{60}, \\ &\frac{60}{60^2}=\frac{1}{60}, \\ &\frac{400}{60^3}=\frac{6\cdot 60+40}{60^3}=\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3}. \end{aligned}\right| \qquad (31')$$

(31′) ни (30) га қўйилса:

$$3+\frac{11}{60}+\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3}=z+\frac{t}{10}+\frac{k}{10^2}+\frac{l}{10^3}+\ldots \qquad (32)$$

бўлади. Бундан $z=3$. (32) нинг каср қисми қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{11}{60}+\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3}=\frac{t}{10}+\frac{k}{10^2}+\frac{l}{10^3}+\ldots \qquad (33)$$

Юқорида кўрсатилган усулни (33) тенгликка ва ундан кейин хосил булган тенгликларга кетма-кет тадбиқ қилиш билан ўнли касрнинг қолган хоналаридаги 13 та рақами топилади. Охирги натижада олтмишли каср билан аниқланган айлана узунлиги ўнли каср билан қуйидаги кўринишда ифода қилинади:

$$C\approx 6+\frac{16}{60}+\frac{59}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\ldots+\frac{14}{60^8}+\frac{50}{60^9}=$$

$$=6+\frac{2}{10}+\frac{8}{10^4}+\frac{3}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{8}{10^5}+\frac{5}{10^6}+\frac{3}{10^7}+\frac{0}{10^8}+$$

$$+\frac{7}{10^9}+\frac{1}{10^{10}}+\frac{7}{10^{11}}+\frac{9}{10^{12}}+\frac{5}{10^{13}}+\frac{8}{10^{14}}+\frac{6}{10^{15}}+\frac{5}{10^{16}}=$$

$$=6{,}2831853071795865.$$

Агар айлана радиуси $r=1$ эканлигини эътиборга олинса, бу ҳолда $C=2\pi r=2\pi$, бундан $2\pi\approx 6{,}2831853071795865$ ёки $\pi=3{,}1415926535897932$.

АДАБИЕТ

I. Ўзбекистон ССЖ Фанлар Академияси шарқшунослик институти қўлёзмалар фондида ва муаллифларнинг инвентарида сақланган адабиётлар

1. **Абдулло ибн Муҳаммад Рафиқ Хўжандий** «Қаср қоидалари» («Қавонд қусур»), Инв. № 8226.
2. **Абу Тоҳир Муҳаммад ибн Абдурашид Сирожиддин Сижовандий** — «Тиклаш ва қарама-қарши қўйиш ҳисоблашларига оид рисола» («Рисола бил жабр ва ал-муқобала»). Инв. № 6025. Араб тилида, 1781 йилда Бухоро мадрасасида Ғоибназар Саидбек ўғли кўчирган.
3. **Муаллифи номаълум** — «Рақамлар тўплами» («Мажмаъул арқом»). Инв. № 2463. Форс тилида.
4. **Муаллифи номаълум** — «Ҳиндларнинг арифметикаси ҳақида рисола» («Рисола дар баёни ҳисоб хиндивоний»). Инв. № 2463. Форс тилида.
5. **Муаллифи номаълум** — «Қаср сонлар арифметикаси» («Рисола дар ҳисоб қусур»). Инв. № 2245. Форс тилида, 1703 йилда ёзилган
6. **Муаллифи номаълум** — «Сонларни кўпайтириш баёни ҳақида» («Дар баён зарби аъдад»). Инв. № 4137. Форс тилида, 1843 йилда ёзилган.
7. **Муаллифи номаълум** — «Мерос тақсим қилиш дафтари» («Дафтари машқи фароиз»). Арифметика, алгебра ва геометрия. Инв. № 2818. Форс тилида, 1852 йилда ёзилган.
8. **Ахрор Маҳсум Тошкентлик** — «Мерос таксим қилиш дафтари» («Дафтари машқи фароиз»). Форс тилида (қўлёзма), 1892 йилда ёзилган.
9. **Баҳоуддин Муҳаммад ибн Хусайн Омилий** — «Арифметика хулосаси» (Хулоссат ал-ҳисоб»). Ҳусайн ал-Халхолий (1605 йилда ўлган) шарҳ қилган. Инв. № 9392. Араб тилида, 1851 йилда ёзилган.
10. **Бобакалон Муфти Самарқандий** — «Арифметика фани ҳақида рисола» («Рисола дар илми ҳисоб»). Инв. № 2245. Форс тилида, 1674 йилда Соқий Муҳаммад Амин Эшон ўғли кўчирган.
11. **Жамшид Ғиёсиддин Коший** — «Арифметика калитининг хулосаси» («Талхис ал-мифтах дар илми ҳисоб»). Инв. № 2245. Араб тилида, 1693 йилнинг 2- чорагида Соқий кўчирган.
12. **Муҳаммад ибн Алий Кубовий** — «Арифметика ҳақида қисқа рисола» («Рисола мухтасар дар ҳисоб»). Инв. № 8830. Форс тилида.
13. **Насириддин Муҳаммад ибн Муҳаммад Тусий** — «Тахта билан тупрок воситасида ҳисоблашлар тўплами» («Жомъул ҳисоб биат-тахти ва ат-туроб»). Инв. № 899016. Араб тилида, 1265 йилда (663 ҳижрий йил 6 рамазон, душанба) тугатилган, араб тилидаги бу нусхадан 1413 (816 ҳижрий) йилда кўчирилган.

14. **Низомиддин Ҳасан ибн Муҳаммад Нишопурий** — «Арифметика қуёши» («Шамсия — ту-фи ал-ҳисоб»). Инв. № 5023 ва 6425. Араб тилида.
15. **Саид Бокихон Шараф-хўжа ўғли Тошкентлик** — «Мерос тақсим қилиш дафтари» («Дафтари машки фароиз»). Форс тилида (қўл ёзма), 1898 йилда ёзилган.
16. **Сирожиддин Аҳмад-хўжа ўғли Тошкентлик** — «Мерос тақсим қилиш дафтари» («Дафтари машқи фароиз»). Форс тилида (қўл ёзма), 1890 йилда ёзилган.
17. **Ҳисомиддин-хўжа** — «Мерос тақсим қилиш дафтари» («Дафтари машқи фароиз»). Арифметика, алгебра ва геометрия. Инв. № 735. Форс тилида, 1879 йилда ёзилган.

Қўшимча адабиёт

II. Рус тилида

18. «**Абу Райхан Беруни** — Великий узбекский учёный средневековья». Сб. статей, изд. АН УзССР, под ред. В. Ю. Захидова, А. А. Семенова, Я. Г. Гулямова, Т. 1950 г.
19. **Абул-Вафа Бузджани** — «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений». Пер. с арабского С. А. Красновой, примечания С. А. Красновой, физико-математические науки в странах Востока, сборник статей и публикаций, вып. IV. М., 1966 г.
20. **С. А. Ахмедов** — «О неопубликованных рукописях средневековых восточных математиков». В ученых записках ТГПИ, т. 62, Т., 1966 г.
21. **С. А. Ахмедов** — «Извлечение корня любой степени и формула бинома и Насирэддина ат-Туси», журнал «Математика в школе» № 5. 1970 г.
22. **Ан-Насави** — «Достаточное об индийской арифметике». Перевод М. Н. Медового, примечания М. И. Медового при участии Б. А. Розенфельда. В сборнике «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963 г.
23. **Бартольд** — «Улугбек и его время». Изд. 2-ое, 1918 г.
24. **Э. И. Березкина** — «О математике в девяти книгах». В кн. «Историко-математические исследования», вып. 10, 1957 г.
25. **В. Беллюстин** — «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики», под редакцией Маркушева, Госиздат. М., 1941 г.
26. **П. Г. Булгаков** — «Жизнь и труды Бируни», Издательство «Фан», 1972 г.
27. **И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич.** Происхождение систем счисления. В кн.: Энциклопедия элементарной математики, под редак. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина. кн. I, М-Л, 1951 г.
28. **Л. Ван дер Варден** — «Пробуждающаяся наука математика Древнего Египта, Вавилона и Греции», пер. И. П. Веселовского, Госиздат. Физ-матем. литературы, М., 1959 г.
29. **М. Я. Выгодский** — «Происхождение правила двух ложных положений». Историко-математические исследования, вып. 13, М., 1960.
30. **М. Я. Выгодский** — «Арифметика и алгебра в древнем мире». Изд. 2-ое. М-Л., 1941.
31. **Б. В. Гнеденко** — «Краткие беседы с зарождений и развитии математики». М., 1940 г.
32. **И. Я. Депман** — «История арифметики». Детгиз. М., 1959 г.

33. **Джемшид Гиясиддин ал-Каши** — «Ключ арифметики». Трактат об окружности, перевод Б. А. Розенфельда, ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, Госиздательства технико-теорет. литература. М., 1956 г.
34. **Т. Н. Кари-Ниязов** — «Астрономическая школа Улугбека». Изд. АН СССР, М-Л., 1950 г.
35. **Э. Кольман** — «История математики в древности». Госиздательство физ-матем. литературы. М., 1960 г.
36. **Ф. Кэджори** — «История элементарной математики», пер. с англ. под редакцией с примечаниями и прибавлениями И. Ю. Тимченко. Изд. 2-ое, Одесса, 1917 г.
37. **Н. И. Леонов** — «Улугбек — великий астроном XV века», М., 1940 г.
38. **В. И. Лебедев** — «Очерки по истории точных наук, кто изобрел алгебру?» Петроград, 1919 г.
39. **М. А. Мальгин** — Элементы историзма в преподавании математики в средней школе, Учпедгиз, 1958 г.
40. **Г. Д. Мамедбейли** — «Основатель Марагинской обсерватории Насирэддин Туси», Издательства АН АзССР, Баку, 1961 г.
41. **Г. П. Матвиевская** — «Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке». Издательство «Фан». Т., 1967 г.
42. **В. Н. Молодший** — «Элементы истории математики в школе», Учпедгиз, РСФСР. М., 1953 г.
43. **Мухаммед ал-Хоразми** — «Математические трактаты». Изд. наук. УзССР, Т., 1964 г.
44. **М. И. Медовой** — «Об арифметическом трактате Абул-Вафы». Историко-математические исследования, вып. 6, М., 1953 г.
45. **Насирэддин ат-Туси** — «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли». Перевод с арабского С. А. Ахмедова (Ташкент) и Б. А. Розенфельда (Коломна), примечания С. А. Ахмедова. В сб. «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963 г.
46. **Нури Юсупов** — «Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке». Казань. 1933 г.
47. **Омар Хайям** — «О доказательствах задачи алгебры и алмукабалия», перев. Б. А. Розенфельда, примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. Историко-математические исследования. вып. 6, М., 1953 г.
48. **Г. Н. Попов** — «Сборник исторических задач по элементарной математике», М-Л. 1938 г.
49. **Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич.** — «Омар Хайям», Издательство «Наука», М., 1965 г.
50. **Б. А. Розенфельд** — «О математических работах Насирэддина Туси». Историко-математические исследования, вып. 4. М-Л., 1954 г.
51. **С. Х. Сиражиддинов, Г. П. Матвиевская, А. Ахмедов** — «Математика и астрономия в работах Абу Райхана Бируни», Издательство «Фан» УзССР, Т., 1973 г.
52. **И. Тропфке** — «История элементарной математики в систематическом изложении», т. 1, Госиздат, М., 1941 г.
53. **Г. Фаццари** — «Краткая история математики». Изд. 2-ое. М., 1923.
54. **Г. Г. Цейте** — «История математики в древности, в средние века», пер. П. С. Юшкевича, предисловие И. Я. Выгодского, изд. 2-ое, подгот. А. П. Юшкевичем, М-Л., 1938 г.

55. В. Г. **Шереметьевский** — «Очерки по истории математики». Учпедгиз РСФСР, 1940 г.
56. И. Н. **Шевченко** — «Элементы историзма в преподавании математики», Известия АН РСФСР, № 92, 1958 г.
57. А. П. **Юшкевич** — «Арифметический трактат Мухамеда бен Муса ал-Хорезми», Труды института истории естествознания и техники АН СССР, т. 1. М., 1954 г.
58. А. П. **Юшкевич** — «О математике народов Средней Азии в IX—XV вв.». Историко-математические исследования, вып. 4, М., 1951 г.
59. А. П. **Юшкевич** — «История математики в средние века», Госиздат физико-матем. литературы, М., 1961 г.
60. А. П. **Юшкевич** — «Омар Хайям и его «Алгебра». Труды института истории естествознания и техники, П., М., 1948 г.
61. А. Ю. **Якубовский** — «Абу Ибн Сина и его время», «Вопросы истории, вып. 9, М., 1952 г.
62. С. Я. **Яновский** — «К теории египетских дробей». Труды института истории естествознания и техники АН СССР, т. 1, М., 1947 г.

III. Ўзбек тилида

63. И. **Абдуллаев** — Эски мактабда хат-савод ургатиш. «Ўқитувчи», Т., 1960 й.
64. М. **Аҳмедова** — Ўрта Осиёнинг машҳур математиклари, «Ўқитувчи» нашриёти, Т., 1964 й.
65. С. А. **Аҳмедов** — Сонлардан илдиз чиқаришда Ўрта Осиё математикларининг қуллаган усуллари, «Совет мактаби» журнали № 4, Т., 1961 й.
66. С. А. **Аҳмедов** — Ўрта Осиё математикларининг асарларида кўпайтириш усули, «Совет мактаби» журнали, № 5. Т,, 1962 й.
67. С. А. **Аҳмедов** — Ўрта Осиёда бутун сонлар арифметикасининг ўқитилиши ва унинг тараққий эттирилиши. Тош. Пед. институти, илмий асарлар тўплами, XXXVII том, 1-чиқ. Т., 1963 й.
68. С. А. **Аҳмедов** — Арифметик ва геометрик прогрессияни ўқитишда Ўрта Осиё математикларининг қуллаган усуллари, «Совет мактаби» журнали, № 7. Т. 1963 й.
69. С. А. **Аҳмедов** — Ўрта Осиёлик машҳур олимлар. Тош. Пед. институт илмий асарлар тўплами, т. 68, 1966 й.
70. С. А. **Аҳмедов** — Ўрта Осиёда математика ўқитиш тарихидан. «Ўқитувчи» нашриёти, Т., 1977 й.
71. С. А. **Аҳмедов, З. Отажонов** ва **А. Абдураҳмонов** — Беруний асарларида мактаббоп масалалар. «Ўқитувчи» нашриёти, Т., 1975 й.
72. **Боруний** — Туғилган кунининг 1000 йиллигига бағишланган тўплам. Т., 1973 й.
73. **Беруний** — Танланган асарлар, «Қонун масъудий», т. V. 1-китоб, Т., 1973 й.
74. **Беруний** — Танланган асарлар, «Ҳиндистон», т. II, Т., 1965 й.
75. А. Ирисов, А. **Носиров** ва **Низомиддинов** — Ўрта асрлик қирқ олим. ЎзССР ФА нашриёти, Т., 1961 й.
76. М. **Салее** — Абу Райхон Беруний, ЎзССР ФА нашриёти. Т., 1960 й.
77. Х. **Сиддиқов** — Хоразм мутафаккирлари фан ва дин ҳақида, «Ўқитувчи» нашриёти, 1960 й.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

САИДАМИН АХМЕДОВИЧ АХМЕДОВ
НАФИСА САИДАМИНОВНА АХМЕДОВА

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ АРИФМЕТИКИ И ЕГО ПРЕПОДАВАНИЯ В СРЕДНЕЙ АЗИИ

Ташкент „Ўқитувчи“ 1991

Муҳаррир Н. Ғоипов
Расмлар муҳаррири С. Соин
Тех. муҳаррир Ш. Бобохонова
Мусаҳҳиҳа М. Махсудова

ИБ № 5160

Теришга берилди 06. 10. 89. Босишга рухсат этилди. 27. 06. 91. Бичими $84\times108^{1}/_{32}$. Тип. қоғози № 2. Литературная гарнитура. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л 14,91. Шартли кр. отт. 15,07. Нашр. л. 11,47. Тиражи 5000. Буюртма №1250. Баҳоси 4 с. 20 т.

„Ўқитувчи“ нашриёти, Тошкент, 129. Навоий кучаси, 30. Шартнома № 09 - 184 - 89.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриёти. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1991.

Объединённое издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.