М. ИСРОИЛОВ

ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

2-қисм

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ
«IQTISOD-MOLIYA»
2008

22.161
И82

Тақризчи:
физика-математика фанлари доктори,
профессор, ЎзФА ҳақиқий аъзоси **Т.Б. Бўриев**

Исроилов М.
Ҳисоблаш методлари: Олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик / М. Исроилов. —Т.: Iqtisod-Moliya, 2008. —320 б.

Мазкур дарсликда оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ва чегаравий масалалар, хусусий ҳосилали дифференциал ҳамда интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш методлари ва шу кабилар атрофлича ёритилган.

Дарслик университетларнинг «Ҳисоблаш математикасига кириш», «Ҳисоблаш методлари» ва «ЭҲМ да амалиёт» фанлари ўқув дастурларининг иккинчи қисмига тўла мос келади.

ББК 22.161.1я75

Маъруф Исроилов

ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

2-қисм

Нашр учун масъул *Н.А. Халилов.* Муҳаррир *М.Ҳ. Саъдуллаева*
Техник муҳаррир *У. Ким.* Мусаҳҳиҳ *М. Усмонова*
Компьютерда тайёрловчилар: *Г. Жақсибай қизи, Ф.Шерова*

Босишга рухсат этилди 20.08.2008. Бичими $60 \times 90^1/_{16}$. TimesUZ гарнитураси.
Офсет босма усулида босилди. Шартли босма тобоғи 20,0.
Адади 2000 нусха. Буюртма №342. Баҳоси шартнома асосида.

Оригинал макет «Ezgulik manbai nashriyoti»
МЧЖ да тайёрланди. Тошкент, А. Қодирий кўчаси, 7.

«Iqtisod-Moliya» нашриёти, 100084, Тошкент, Кичик ҳалқа йўли, 7.

«O'qituvchi» НМИУ босмахонасида чоп этилди.
Тошкент, Юнусобод даҳаси, Муродов кўчаси, 1-уй.

ISBN 978-9943-13-089-0

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб 1988 йилда «Ўқитувчи» нашриётида нашр этилган «Ҳисоблаш методлари. 1-қисм» дарслигининг давомидир. Дарслик муаллифнинг Тошкент Давлат университети (ҳозирги Ўзбекистон Миллий университети)нинг математика, амалий математика ва механика факультетларида, университет қошидаги олий ўқув юртлари ўқитувчиларининг малака ошириш факультетида ҳамда Самарқанд Давлат университетининг татбиқий математика факультетида узоқ йиллар давомида ўқиган маърузалари асосида ёзилган бўлиб, университетларда ўқитиладиган «Ҳисоблаш математикасига кириш», «Ҳисоблаш методлари» ва «ЭҲМ да амалиёт» фанлари учун мўлжалланган дастурларнинг иккинчи қисмига тўла мос келади.

Мазкур дарсликда оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ва чегаравий масалалар, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳамда интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун яратилган методларнинг тажрибада синалган, мутахассислар томонидан эътироф этилганлари ўз аксини топган.

Дарслик университетларнинг «математика», «механика», «статистика», «татбиқий математика» ҳамда «ахборот технологиялари» ихтисосликларининг бакалавр ва магистрларига мўлжалланган бўлиб, ундан олий техника ўқув юртлари, педагогика олийгоҳларининг талабалари ва аспирантлари ҳам фойдаланишлари мумкин. Шунингдек, ушбу китоб ҳисоблаш марказлари ходимлари, иқтисодчилар, муҳандис-техниклар ҳамда ҳисоблаш математикаси билан қизиқувчи барча китобхонларга мўлжалланган.

Шу пайтгача ўзбек тилида ҳисоблаш методларидан дарслик ва ўқув қўлланмалари бўлмаганлигини эътиборга олиб, дарсликнинг бу қисмида ҳам кўпгина методларнинг ғояларини яхшироқ тушунтириш учун мисол ва машқлар келтирдик. Ўқувчилар барча методларни тўлиқ ва мукаммал ўзлаштиришлари учун «Ҳисоблаш математикасидан мисол ва масалалар тўплами»ни нашр этиш мўлжалланмоқда.

«Ҳисоблаш методлари. 2-қисм» китоби ўзбек тилида илк тажриба бўлиб, жузъий камчиликлардан холи бўлмаслиги мумкин. Шу боисдан китоб қўлёзмасини эътибор билан ўқиб чиқиб, камчиликларни бартараф этиш ва уни такомиллаштириш борасида қимматли фикр-мулоҳазалар билдирган ф.м.ф.д., ЎзФА ҳақиқий аъзоси Т.Б. Бўриевга, ф.м.ф.н., доцент Ғ.П. Исматуллаевга, ф.м.ф.н. С.А. Бахромовга ҳамда нашриёт ишларини амалга оширган профессор Н.А. Халиловга миннатдорчилик билдираман.

МУАЛЛИФ

8-боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШДА ТАҚРИБИЙ МЕТОДЛАР

Илмий ва татбиқий масалаларда кўпинча шундай оддий дифференциал тенгламалар учрайдики, уларнинг умумий ечими квадратураларда ифодаланмайди. Ечими ошкор кўринишда топиладиган дифференциал тенгламалар синфи ниҳоятда тор. Масалан, содда кўринишга эга бўлган

$$\frac{du}{dx} = x + x^2 + u^2$$

тенгламанинг умумий ечимини элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмайди. Бу ечим мураккаб тарзда каср тартибли Бессел функциялари ёрдамида ифодаланади. Кўп ҳолларда ечимнинг ҳатто шундай тасвирини ҳам билмаймиз. Шунинг учун ҳам бундай тенгламаларни у ёки бу тақрибий метод билан ечишга тўғри келади.

Тақрибий ечим аналитик кўринишда ёки жадвал шаклида изланишига кўра тақрибий методлар икки гуруҳга ажратилади: *аналитик методлар* ва *сонли методлар.*

Оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи ва чегаравий масала қўйилади. Коши масаласи чегаравий масалага нисбатан анча енгилдир. Шунинг учун ҳам айрим ҳолларда чегаравий масала Коши масаласига келтириб ечилади. Биз бу бобда Коши масаласини ечиш учун аналитик методлардан Пикар ва даражали қаторлар методини кўриб чиқамиз. Бошқа аналитик методларни (Чаплигин, Ньютон-Канторович, кичик параметр методларини) [7, 20, 33] дан кўриш мумкин. Бу бобнинг бошқа қисми сонли методларга бағишланган. ЭҲМ ларнинг ривожланиши билан аниқлик тартиби юқори бўлган сонли методларга эътибор кучайди. Аммо аналитик методлар ҳозир ҳам ўз моҳиятини сақлайди, чунки Коши масаласини кўп қадамли айирмали методлар билан ечишда жадвалнинг бошидаги қийматларни топиш учун, одатда, аналитик методлар ишлатилади. Бу бобдаги тақрибий методлар битта тенглама учун ҳам, тенгламалар системаси учун ҳам деярли бир хил қўлланилади.

8.1-§. КОШИ МАСАЛАСИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШНИНГ АНАЛИТИК МЕТОДЛАРИ

8.1.1. Кетма-кет яқинлашиш методи. Ушбу биринчи тартибли

$$\frac{du}{dx} = f\left(x,u\right) \tag{1.1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$u(x_0) = u_0 \tag{1.2}$$

дастлабки шартни қаноатлантирадиган ечимини топиш, яъни Коши масаласини ечишнинг ғоя жиҳатидан энг соддаси Пикарнинг кетма-кет яқинлашиш методидир.

Методнинг моҳияти қуйидагидан иборат: Кошининг (1.1) — (1.2) масаласи ушбу

$$u\left(x\right) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u)dt \tag{1.3}$$

интеграл тенгламани ечиш билан тенг кучлидир. Аниқлик учун $x \geq x_0$ деб оламиз ($x \leq x_0$ ҳол ҳам шунга ўхшаш). (1.3) тенгликда $u(x)$ номаълум функция ўрнига ихтиёрий функцияни, нолинчи яқинлашишни, масалан, $u(x) = u_0$ ни қўйиб, интеграллаш натижасида биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз:

$$u_1\left(x\right) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u_0)dt.$$

Кейин (1.3) тенгликда номаълум u функция ўрнига топилган u_1 функцияни қўйсак,

$$u_2\left(x\right) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u_1)dt$$

иккинчи яқинлашиш ҳосил бўлади. Бу жараённи давом эттириб, n-яқинлашиш учун

$$u_n\left(x\right) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u_{n-1})dt \quad (n=1,2,...) \tag{1.4}$$

формулага эга бўламиз.

Фараз қилайлик, $f(x,u)$ ушбу шартларни қаноатлантирсин:

1) $D = \{0 \leq x - x_0 \leq a, \quad \left|u - u_0\right| \leq b\}$ соҳада ҳар иккала аргументи бўйича узлуксиз функция, бу ерда a ва b — қандайдир мусбат сонлар. Бундан

$$M = \max_{x,u \in D} |f(x,u)|$$

мавжудлиги келиб чиқади.

2) $f(x,u)$ функция D соҳада u га нисбатан Липшиц шартини қаноатлантирсин, яъни шундай L сони мавжуд бўлсинки, ихтиёрий x, $0 \le x - x_0 \le a$ ва u нинг иккита ихтиёрий $\tilde{u}$ ва $\tilde{\tilde{u}}$, $|\tilde{u} - u_0| \le b$, $|\tilde{\tilde{u}} - u_0| \le b$ қийматлари учун

$$\left| f(x,\tilde{u}) - f(x,\tilde{\tilde{u}}) \right| \le L \left| \tilde{u} - \tilde{\tilde{u}} \right| \tag{1.5}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $\{u_n(x)\}$ кетма-кетлик $x_0 \le x \le x_0 + h$, бу ерда

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M} \right) \tag{1.6}$$

оралиқда текис яқинлашиши ва лимит функция

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x) \tag{1.7}$$

(1.1)—(1.2) Коши масаласини қаноатлантириши дифференциал тенгламалар курсида (мас. [41]) кўрсатилган.

Яқинлашиш хатолиги $\varepsilon_n(x) = |u(x) - u_n(x)|$ ни баҳолаш учун (1.3) тенгликни (1.4) тенгликдан айирамиз, у ҳолда

$$u(x) - u_n(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t,u) - f\left(t, u_{n-1}\right) \right] dt.$$

Бу ердан $x_0 \le x \le x_0 + h$ учун

$$\varepsilon_n(x) = |u(x) - u_n(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,u) - f(t,u_{n-1})| dt$$

га эга бўламиз. (1.5) Липшиц шартига кўра

$$|f(t,u) - f(t,u_{n-1})| \le L |u(x) - u_{n-1}(x)| = L\varepsilon_{n-1}(x)$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$\varepsilon_n(x) \le L \int_{x_0}^{x} \varepsilon_{n-1}(t) dt \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

Бу ерда $\varepsilon_0(x) = |u(x) - u_0|$. Лагранж формуласидан фойдаланиб, $x_0 \le x \le x_0 + h$ учун

$$\varepsilon_0(x) = |u(x) - u(x_0)| = (x - x_0)|u'(\xi)|, \ (x_0 < \xi < x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бундан $|u'(x)| = |f(\xi, u(\xi))| \le M$ бўлганлиги учун

$$\varepsilon_0(\xi) \le M(x - x_0)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Энди (1.8) формуладан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\varepsilon_1(x) \le L\int_{x_0}^{x}\varepsilon_0(t)\,dt \le LM\int_{x_0}^{x}(t - x_0)\,dt = LM\frac{(x-x_0)^2}{2},$$

$$\varepsilon_2(x) \le L\int_{x_0}^{x}\varepsilon_1(t)\,dt \le \frac{L^2M}{2}\int_{x_0}^{x}(t - x_0)^2\,dt = L^2M\frac{(x-x_0)^3}{2\cdot 3},$$

....

$$\varepsilon_n(x) \le ML^n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 0,1,2,\ \dots). \tag{1.9}$$

Охирги формуладан $[x_0,\ x_0 + h]$ кесмада $n \to \infty$ да $\varepsilon_n(x)$ нинг 0 га текис яқинлашиши келиб чиқади.

Мисол. Кетма-кет яқинлашиш методи билан

$$u' = 1 + x - u \tag{1.10}$$

дифференциал тенгламанинг

$$u(0) = 1$$

дастлабки шартини қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин.

Ечиш. Дастлабки яқинлашиш сифатида $u_0(x) = 1$ ни олсак, у ҳолда

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1 + t - u)\,dt$$

бўлганлиги учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$u_1(x) = 1 + \int_0^x \left(t - \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \frac{x^2}{2!},$$

$$u_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t - \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!},$$

$$u_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{1.11}$$

Бешинчи яқинлашиш $u_5(x)$ нинг хатолигини баҳолаймиз. Ихтиёрий a ва b лар учун

$$D = \{0 \le x \le a,\ |u-1| \le b\}$$

соҳада (1.10) тенгламанинг ўнг томони

$$f(x,\ u) = 1 + x - u$$

аниқланган ва узлуксиз бўлиб,

$$|f(x,u) \le |1+x-u| \le |x| + |u-1| \le a+b = M.$$

Агар $a = 1$ ва $b = 1$ деб олсак, у ҳолда (1.6) тенгликка кўра

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{1}{2}$$

бўлади. D соҳада бизнинг ҳол учун Липшиц доимийси

$$L = \max|f'_u(x,u)| = 1.$$

Энди (1.9) формуладан фойдаланиб, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ да

$$|\varepsilon_5(x)| = |u(x) - u_5(x)| \le 2 \cdot 1^5 \cdot \frac{x^6}{6!} = \frac{x^6}{360}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\varepsilon_5 = \max \varepsilon_5(x) = \frac{1}{360 \cdot 64} = 4{,}34 \cdot 10^{-5}.$$

Кўриб чиққан мисолимиз ниҳоятда содда бўлиб, барча интеграллар аниқ ҳисобланди. Амалиётда учрайдиган масалаларда интегралларни аниқ ҳисоблаб бўлмайди, уларни тақрибий равишда топиш керак, бу эса кўп меҳнат талаб қилади. Шунинг учун ҳам кетма-кет яқинлашиш методи бошқа методларни қўллаётганда ёрдамчи метод сифатида ишлатилади. Кетма-кет яқинлашиш методини

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dx} = \vec{\boldsymbol{f}}(x, \vec{\boldsymbol{u}}), \tag{1.12}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}(x_0) = \vec{\boldsymbol{u}}_0 \tag{1.13}$$

дифференциал тенгламалар системасини ечиш учун ҳам қўллаш мумкин. Бунинг учун

$$\vec{\boldsymbol{f}} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad \int_{x_0}^{x} \vec{f} dt = \left(\int_{x_0}^{x} f_1 dt, \dots, \int_{x_0}^{x} f_n dt\right)^T$$

вектор-функцияларни киритиб, (1.12)—(1.13) вектор-дифференциал тенгламани ушбу

$$\vec{u}(x)=\vec{u}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{u})\,dx$$

вектор-интеграл тенглама шаклида ёзиб оламиз. У ҳолда $\vec{u}^{(k)}(x)$ (k = 1, 2, ...) кетма-кет яқинлашишлар

$$\vec{u}^{(k)}(x)=\vec{u}_0(x)+\int_{x_0}^{x}f\left(t,\vec{u}^{(k-1)}\right)dt$$

формула ёрдамида аниқланади. Одатда, $\vec{u}^{(0)}(x)=\vec{u}_0(x)$ деб олинади.

8.1.2. Даражали қаторлар методи. Айрим ҳолларда биринчи ҳамда юқори тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечиш учун ечимни Тейлор ёйилмаси кўринишида тасвирлаб, бу ёйилманинг маълум миқдордаги ҳадлари сақланади. Даражали қаторлар методи бошқа методларни қўллаш учун ёрдамчи метод бўлиб, дастлабки қийматнинг унча катта бўлмаган атрофида қўлланилади.

Ушбу

$$u^{(n)}=f\left(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)}\right) \tag{1.14}$$

n-тартибли оддий дифференциал тенгламанинг

$$u(x_0)=u_0,\ u'(x_0)=u_0',...,u^{(n-1)}(x_0)=u_0^{(n-1)} \tag{1.15}$$

дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечимини x_0 нинг бирор атрофида топиш талаб қилинсин.

Фараз қилайлик, $f\left(x,u,u',...,u^{(n-1)}\right)$ функция барча аргументлари бўйича $\left(x_0,u_0,u_0',...,u_0^{(n-1)}\right)$ дастлабки нуқтада аналитик бўлсин, яъни у шу нуқтанинг бирор атрофида даражали қаторга ёйилсин:

$$f\left(x,u,u',...,u^{(n-1)}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha_0,\alpha_1,..,\alpha_n}C_{\alpha_0\alpha_1...\alpha_n}\ (x-x_0)^{\alpha_0}(u-u_0)^{\alpha_1}...\left(u^{(n-1)}-u_0^{(n-1)}\right)^{\alpha_n},$$

бу ерда α_0, α_1, ..., α_n манфий бўлмаган бутун сонлар бўлиб, $C_{\alpha_0\alpha_1...\alpha_n}$ ўзгармас коэффициентлар. У ҳолда Коши-Ковалевская теоремасига кўра (1.14) тенгламанинг (1.15) шартларини қаноатлантирадиган $u(x)$ ечими x_0 нуқтада аналитик функция бўлади, шунинг учун ҳам уни Тейлор қатори ёрдамида ифодалаш мумкин:

$$u(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{u^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p\,, \tag{1.16}$$

бу ерда $|x-x_0|<r$ (1.16) қаторнинг дастлабки n та $u(x_0)$, $u'(x_0),\ldots,u^{(n-1)}(x_0)$ коэффициентлари (1.13) шартлардан топилади. Энди (1.14) тенгликни мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра x га нисбатан дифференциаллаб,

$$u^{(n+1)}=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial u^{(k)}}u^{(k+1)}$$

ни ҳосил қиламиз (бунда қулайлик учун $u^{(0)}=u$ деб олинди). Бу ерда $u^{(n)}$ ўрнига унинг қийматини (1.14) дан келтириб қўйиб, кўрамизки, $u^{(n+1)}$ миқдор $x,u,u',\ldots,u^{(n-1)}$ ларнинг тўла аниқланган функциясидир. Уни $f_1\left(x,u,u',\ldots,u^{(n-1)}\right)$ деб белгилаймиз, у ҳолда

$$u^{(n+1)}=f_1\left(x,u,u',\ldots,u^{(n-1)}\right). \tag{1.17}$$

Шунга ўхшаш (1.17) тенгликни x га нисбатан дифференциаллаб,

$$u^{(n+2)}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial u^{(k)}}u^{(k+1)}$$

ва $u^{(n)}$ нинг ўрнига унинг қийматини (1.14) дан келтириб қўйсак,

$$u^{(n+2)}=f_2\left(x,u,u',\ldots,u^{(n-1)}\right) \tag{1.18}$$

га эга бўламиз. Бу жараённи давом эттириб, кўрамизки, ихтиёрий $(n+k)$ тартибли ҳосила x, u, u', ..., $u^{(n-1)}$ нинг тўла аниқланган функцияси бўлади. Қулайлик учун $f_0=f$ деб олиб, (1.14), (1.17), (1.18) тенгликларда x, u, u', ..., $u^{(n-1)}$лар ўрнида дастлабки қиймат x_0, u_0, u'_0, ..., $u_0^{(n-1)}$ ларни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$u_0^{(n+k)}=u^{(n+k)}(x_0)=f_k\left(x_0,u_0,u_0',\ldots,u_0^{(n-1)}\right). \tag{1.19}$$

Энди (1.19) ни (1.16) га қўйсак,

$$u(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{u_0^{(p)}}{p!}(x-x_0)^p+\sum_{p=n}^{\infty}\frac{f_p}{p!}(x-x_0)^p \tag{1.20}$$

келиб чиқади.

Яқинлашиш радиуси r ни аниқлаш масаласи анча мураккабдир (қ. [30, 36]), бу масалани биз бу ерда қарамаймиз. Агар (1.14) тенглама чизиқли бўлса, яъни

$$u^{(n)} = p_0(x) + p_1(x)u + \ldots + p_n(x)u^{(n-1)}$$

ва $p_i(x)(i = 0, 1, \ldots, n)$ коэффициентлар x га нисбатан бутун функция бўлса, у ҳолда $r = \infty$ деб олиш мумкин, яъни (1.16) даражали қатор барча x лар учун яқинлашади.

Мисол. Ушбу

$$u'' - xu' + u^2 - 1 = 0 \tag{1.21}$$

тенгламанинг

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечимининг даражали қатордаги ёйилмасининг бир неча ҳадлари топилсин.

Ечиш. (1.21) тенгламани иккинчи ҳосиласига нисбатан ечамиз:

$$u'' = xu' - u^2 + 1. \tag{1.22}$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини кетма-кет дифференциаллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} &u''' = u' + xu'' - 2uu', \\ &u^{IV} = 2u'' + xu''' - 2(u')^2 - 2uu'', \\ &u^{V} = 3u''' + xu^{IV} - 6u'u'' - 2uu''', \\ &u^{VI} = 4u^{IV} + xu^{V} - 6(u'')^2 - 8u'u''' - 2uu^{IV}. \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

Энди (1.22) — (1.23) тенгликларда $u(0) = 0, u'(0) = 1$ қийматларни қўйсак,

$$u''(0)=1,\ u'''(0)=1, u^{IV}(0)=0,\ u^{V}(0)= -1,\ u^{VI}(0)=-10$$

келиб чиқади. Бу қийматларни (1.16) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{360} + \ldots$$

Энди $\vec{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$, $\vec{u}^{(0)} = \left(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_{1n}^{(0)}\right)^T$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ векторларни киритиб, вектор шаклида ёзилган ушбу

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}) \tag{1.24}$$

тенгламалар системаси ва

$$\vec{u}(x_0) = u^{(0)} \tag{1.25}$$

дастлабки шартни қаноатлантирувчи ечимни даражали қатор кўринишида излаймиз. Бунинг учун $\vec{f}(x,\vec{u})$ нинг $\vec{f}_i\,(i=1,2,...,n)$ компонентлари $\left(x_0,\vec{u}^{(0)}\right)$ нуқтада аналитик бўлишини фараз қиламиз. У ҳолда (1.24) тенгламанинг (1.25) шартни қаноатлантирадиган ечими x бўйича аналитик бўлиб, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\vec{u}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\vec{u}^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p. \tag{1.26}$$

Бу ерда

$$\vec{u}(x_0) = \vec{u}^{(0)},\ \vec{u}'(x_0) = f\left(x,\vec{u}^{(0)}\right)$$

бўлиб, ёйилманинг бошқа коэффициентларини топиш учун (1.24) тенгликни мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига биноан кетма-кет дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dx^2} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}}\frac{d\vec{u}}{dx} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}} f(x,\vec{u}),$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\ \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

Бундан эса

$$u''(x_0) = \vec{f}'_x\left(x^{(0)},u^{(0)}\right) + \vec{f}'_{\vec{u}}\left(x,\vec{u}^{(0)}\right)\vec{f}(x_0,\vec{u}_0)$$

келиб чиқади. Шунга ўхшаш кейинги $\vec{u}^{(p)}(x_0)$ $(p=3,4,...)$ ҳосилаларни топиш мумкин. Шундай қилиб, (1.26) формал қаторни тузиш мумкин. Бу қаторнинг яқинлашиш масаласи мураккаб бўлганлиги учун биз қарамаймиз. Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, агар (1.24) тенглама чизиқли

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = A(x)\vec{u} + \vec{f}(x)$$

бўлиб, $A(x)$ матрица ва $\vec{f}(x)$ вектор-функция x га нисбатан бутун функция бўлса, у ҳолда (1.26) қатор барча x лар учун яқинлашади.

8.2-§. ТЎРТТА ЭНГ СОДДА СОНЛИ МЕТОД

Биз бу ерда энг содда ва аниқлик жиҳатидан қўполроқ бўлган методларни кўриб чиқамиз. Бу методлар катта аниқликни талаб қилмайдиган ечимнинг тақрибий қийматини унча узун бўлмаган оралиқда аниқлаш учун ишлатилади.

8.2.1. Эйлер методи (синиқ чизиқлар методи). Фараз қилайлик,

$$u' = f(x,u),\ u(x_0) = u_0 \tag{2.1}$$

Коши масаласи ечими $u(x)$ нинг $u_n(x)$, $x_n = x_0 + nh$ ($n = 1, 2, \ldots$) тақрибий қийматини қадами h бўлган бир ўлчовли мунтазам тўрда аниқланиши талаб қилинсин. Кўп тақрибий методларни яратишда

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int\limits_{x}^{x_{n+1}} f(x,u(x))dx \tag{2.2}$$

тенгликдан фойдаланилади. Бу тенглик (2.1) тенгламани интеграллашдан келиб чиқади. Энди (2.2) тенгликдаги интегрални тақрибий равишда чап тўғри тўртбурчаклар формуласи билан алмаштирамиз (7-бобга қ.) ва $u(x_n)$ нинг тақрибий қийматини y_n орқали белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Бу тенгликнинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: $M(x_0, u(x_0))$ нуқтадан ўтувчи $u = u(x)$ интеграл эгри чизиқни учлари $M_n(x_n, y_n)$ нуқталардан ўтувчи $M_0M_1M_2 \ldots$ синиқ чизиқ (*Эйлер синиқ чизиғи*) билан алмаштирамиз. Синиқ чизиқ бўғинининг бурчак коэффициенти

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Шундай қилиб, Эйлер синиқ чизиғи M_nM_{n+1} бўғинининг ҳар бир M_n учидаги йўналиши (2.1) тенглама интеграл чизиғининг M_n нуқтадан ўтадиган $y_n' = f(x_n, y_n)$ йўналиши билан устма-уст тушади. Бинобарин, y_n ларни топиш учун ушбу формулаларга эга бўламиз:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$

$$\Delta y_n = hf(x_n, y_n)\ \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Эйлер методининг камчилиги аниқликнинг пастлиги ва хатонинг систематик равишда жамланишидадир.

Эйлер методининг яқинлашиши ва хатолигини баҳолаш масаласини кўриб чиқамиз [21]. Фараз қилайлик, $f(x, y)$ қаралаётган оралиқда x бўйича узлуксиз бўлиб, u бўйича Липшиц шартини қаноатлантирсин:

$$\left|f(x,u_2)-f(x,u_1)\right| \le L\left|u_2-u_1\right| \tag{2.4}$$

ва бундан ташқари,

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial u}\right| \le N \tag{2.5}$$

бўлсин. Энди

$$\varepsilon_n = y_n - u(x_n) \tag{2.6}$$

орқали y_n тақрибий ечимнинг хатосини белгилаймиз. У ҳолда (2.2) тенгликдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = y_{n+1} - y_n - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x,u(x)\right)dx. \tag{2.7}$$

Юқоридаги (2.3) ва (2.7) дан

$$\Delta\varepsilon_n = hf\left(x_n,y_n\right) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x,u(x)\right)dx \tag{2.8}$$

келиб чиқади. Охирги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x,u(x)\right)dx = \left[\left(x-x_{n+1}\right)f\right]_{x=x_n}^{x=x_{n+1}} - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(x-x_{n+1}\right)\frac{df}{dx}dx,$$

бундан эса

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x,u(x)\right)dx - hf\left(x_n,u(x_n)\right) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(x-x_{n+1}\right)\frac{df}{dx}dx \tag{2.9}$$

келиб чиқади. Энди $\Delta\varepsilon_n$ ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta\varepsilon_n = h\left[f\left(x_n,y_n\right) - f\left(x_n,u(x_n)\right)\right] + hf\left(x_n,u(x_n)\right) - \int_{x_n}^{x_{n-1}} f\left(x,u(x)\right)dx,$$

кейин

$$\left|f\left(x_n,y_n\right) - f\left(x_n,u(x_n)\right)\right| \le L\left|y_n - u(x_n)\right| \le L\left|\varepsilon_n\right|.$$

Липшиц шартидан фойдалансак,

$$\Delta\varepsilon_n = h\theta L|\varepsilon_n| + hf\left(x_n, u(x_n)\right) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, u(x)\right)dx \ \left(|\theta| \le 1\right) \tag{2.10}$$

ифода ҳосил бўлади.

Юқоридаги (2.5) ва (2.9) дан қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\begin{aligned} &\left| hf\left(x_n, u(x_n)\right) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, u(x)\right)dx \right| = \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(x - x_{n+1}\right)\frac{df}{dx}dx \right| \le \\ &\le \int_{x_n}^{x_{n+1}} |x - x_{n+1}|dx = \frac{1}{2}Nh^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Энди (2.10) ва (2.11) муносабатлардан

$$|\Delta\varepsilon_n| = |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| \le hL|\varepsilon_n| + \frac{1}{2}Nh^2$$

баҳони ҳосил қиламиз. Маълумки,

$$|\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n| \le |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|,$$

шунинг учун ҳам

$$|\varepsilon_{n+1}| \le (1 + hL)|\varepsilon_n| + \frac{1}{2}Nh^2, \tag{2.12}$$

яъни биз шундай муносабатга эга бўлдикки, у $|\varepsilon_n|$ маълум бўлганда $|\varepsilon_{n+1}|$ ни баҳолайди. Биз $|\varepsilon_n|$ учун шундай баҳони топишимиз мумкинки, у фақат маълум миқдорлар орқали ифодаланади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha = 1 + Lh,\ \beta = \frac{1}{2}Nh^2,\ \varepsilon_0 = 0$$

деб олиб, (2.12) тенгсизликни

$$|\varepsilon_{n+1}| \le \alpha|\varepsilon_n| + \beta \ (n = 0, 1, 2, ...)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин, бундан эса

$$|\varepsilon_1| \le \beta, |\varepsilon_2| \le \alpha|\varepsilon_1| + \beta \le \beta(1 + \alpha),$$

$$|\varepsilon_3| \le \alpha|\varepsilon_2| + \beta \le \alpha\beta(1 + \alpha) + \beta = \beta\left(1 + \alpha + \alpha^2\right),$$

....

$$|\varepsilon_n| \le \beta\left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-1}\right) = \frac{\beta\left(\alpha^n - 1\right)}{\alpha - 1}$$

муносабатларга эга бўламиз. Охирги тенгсизликда α ва β ларнинг қийматини қўйсак,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{hN}{2L}\left[(1+hL)^n - 1\right]$$

ҳосил бўлади. Маълумки, барча $t > 0$ учун $1 + t < e^t$ тенгсизлик ўринлидир, бундан ташқари, $nh = x_n - x_0$ ни эслаб, методнинг хатолиги учун натижавий баҳога эга бўламиз:

$$|\varepsilon_n| \leq |y_n - u(x_n)| \leq \frac{hN}{2L}\left[e^{L(x_n - x_0)} - 1\right].$$

Бундан кўрамизки, $h \to 0$ да $\varepsilon_n \to 0$ бўлади. Шу билан бирга ҳар бир чекли оралиқда $h \to 0$ да Эйлер методининг яқинлашиши келиб чиқади.

Табиий равишда шундай савол туғилади: (2.3) муносабат ҳисоблаш хатолигига нисбатан турғунми ёки йўқми, яъни ҳисоблашнинг бирор қадамида йўл қўйилган хато кейинги қадамларда чегараланган бўладими ёки қадамнинг ортиши билан ортиб борадими?

Фараз қилайлик, бирор қадамда, масалан, y_0 нинг аниқланишида

$$\delta_0 = |\tilde{y}_0 - y_0|$$

хатога йўл қўйган бўлайлик, у ҳолда

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + hf(x_0, \tilde{y}_0)$$

бўлиб, биринчи қадамдаги хато

$$\delta_1 = |\tilde{y}_1 - y_1| = \left|\tilde{y}_0 - y_0 + h\left[f(x_0, \tilde{y}_0) - f(x_0, y_0)\right]\right| \leq$$
$$\leq \delta_0 + hL\delta_0 = (1 + hL)\delta_0$$

тенгсизлик билан аниқланади. Шунга ўхшаш

$$\delta_2 = |\tilde{y}_2 - y_2| \leq \delta_1 + hL\delta_1 = (1 + hL)^2 \delta_0,$$

....

$$\delta_n = |\tilde{y}_n - y_n| \leq (1 + hL)^n \delta_0 \leq e^{L(x_n - x_0)}\delta_0.$$

Бундан кўрамизки, нолинчи қадамдаги хато кейинги қадамларда тартиб жиҳатдан ўзгармай қолар экан. Бу эса Эйлер методининг ҳисоблаш хатолигига нисбатан турғунлигини кўрсатади.

1-мисол. Ушбу

$$u' = u - \frac{x^2 - x + 1}{u},\ u(0) = 1 \tag{2.13}$$

Коши масаласи ечимининг жадвали Эйлер методи ёрдамида $[0,1]$ оралиқда $h = 0,1$ қадам билан тузилсин.

Ечиш. Тақрибий ҳисоблаш натижалари 1-жадвалда берилган бўлиб, таққослаш учун жадвалнинг охирги устунида ечимнинг аниқ қиймати келтирилган.

1-жадвал

(2.13) дифференциал тенгламани Эйлер методи билан интеграллаш

n	x	u	$f(x,u) = u - \frac{x^2 - x + 1}{u}$	$\Delta u = 0,1 f(x,u)$	$u = \sqrt{1+x^2}$
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,09	0,009	1,00499
2	0,2	1,009	0,16749	0,016749	1,01980
3	0,3	1,02575	0,255558	0,025558	1,04403
4	0,4	1,05131	0,27709	0,027709	1,07703
5	0,5	1,07902	0,38394	0,038394	1,11804
6	0,6	1,11741	0,43727	0,043727	1,16619
7	0,7	1,16118	0,48084	0,048084	1,22066
8	0,8	1,20916	0,51436	0,051436	1,28062
9	0,9	1,26050	0,53856	0,53856	1,34534
10	1	1,31436			1,41421

8.2.2. Эйлернинг такомиллаштирилган методи. Бу методнинг асосий ғояси қуйидагидан иборат: Аввало, $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2}h$ нуқтадаги $y_{n+\frac{1}{2}}$ нинг оралиқ қийматини

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{1}{2}hf_n = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n) \tag{2.14}$$

формула ёрдамида ҳисоблаймиз. Кейин $f(x, y)$ нинг $\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$ ўрта нуқтадаги

$$f_{n+\frac{1}{2}} = f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) \tag{2.15}$$

қийматини ҳисоблаб, охирида

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+\frac{1}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.16}$$

деб оламиз. Бу формула билан $y(x)$ нинг тақрибий қийматини топиш *Эйлернинг такомиллаштирилган методи* дейилади. Бу методнинг аниқлиги Эйлер методига нисбатан бирмунча каттадир. Агар L, N_1 ва N_2 ўзгармас сонлар

$$\left.\begin{array}{c} |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le L|y_2 - y_1|, \\ \left|\dfrac{df}{dx}\right| \le N_1, \left|\dfrac{d^2f}{dx^2}\right| \le N_2 \end{array}\right\} \tag{2.17}$$

тенгсизликлардан аниқланса, у ҳолда 8.2.1 дагидек мулоҳаза юритиб, Эйлернинг такомиллаштирилган методи учун қуйидаги баҳони чиқариш мумкин [21]:

$$|\varepsilon_n| = |y_n - u(x_n)| \le \frac{h^2}{8}\left(N_1 + \frac{N_2}{3L}\right)\frac{\left(1+hL+\frac{1}{2}h^2L^2\right)^n - 1}{1+0,5hL}. \tag{2.18}$$

Бундан кўрамизки, ҳар бир берилган x учун ε_n хатолик $h \to 0$ да h^2 дек нолга интилади.

2-мисол. (2.13) тенглама $u(x)$ ечимининг $x_n = 0,2\ n$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ нуқталардаги қиймати (2.14) формула билан топилсин.

Ечиш. Бу ерда $h = 0,2,\ f(x,u) = u - \dfrac{x^2 - x + 1}{u}$ деб оламиз. Ҳисоблаш натижалари 2-жадвалда келтирилган.

1-машқ. (2.17) шарт бажарилганда (2.18) баҳо исботлансин.

2-жадвал

(2.13) тенгламанинг ечимини (2.14)—(2.16) формулалар ёрдамида топиш

n	x_n	u_n	$\frac{1}{2}hf_n$	$x_{n+\frac{1}{2}}$	$u_{n+\frac{1}{2}}$	$\Delta u_n = hf_{n+\frac{1}{2}}$
0	0	1	0	0,1	1	0,018
1	0,2	1,018	0,01928	0,3	1,03728	0,05513
2	0,4	1,07313	0,03649	0,5	1,10962	0,06874
3	0,6	1,14187	0,04763	0,7	1,21061	0,11161
4	0,8	1,25348	0,05833	0,9	1,31181	0,12362
5	1,0	1,37710				

8.2.3. Эйлер-Кошининг такомиллаштирилган методи. Методнинг ғояси қуйидагидан иборат: Олдин

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf_n,\ \tilde{f}_{n+1} = f\left(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}\right) \tag{2.19}$$

«қўпол яқинлашиш»ни, кейин эса изланаётган $y(x)$ ечимнинг тақрибий қийматини

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_n + \tilde{f}_n\right) \tag{2.20}$$

формула ёрдамида аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, L ва N_2 миқдорлар (2.17) муносабатларни қаноатлантирсин ва M, M_1, M_2 ўзгармас сонлар

$$|f| \leq M,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M_1,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M_2 \tag{2.21}$$

тенгсизликлардан аниқлансин. У ҳолда (2.18) баҳога ўхшаш (2.20) тақрибий ечимнинг хатолиги учун қуйидаги баҳо ўринлидир [21]:

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{h^2}{12}\left[\frac{N_2}{L} + 3\left(M_1 + MM_2\right)\right]\left[\left(\frac{1+0{,}5hL}{1-0{,}5hL}\right)^n - 1\right]. \tag{2.22}$$

3-мисол. $x_n = 0{,}2\ n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) нуқталарда (2.13) тенглама ечимининг тақрибий қийматлари (2.19)—(2.20) формулалар ёрдамида топилсин.

Ҳисоблаш натижалари 3-жадвалда келтирилган.

3-жадвал

n	x_n	u_n	$\frac{h}{2}f_n$	x_{n+1}	$\tilde{y}_{n+1}$	$\frac{h}{2}\tilde{f}_{n+1}$	$\frac{h}{2}f_n + \tilde{f}_{n+1}$
0	0	1	0	0,2	1	0,016	0,016
1	0,2	1,016	0,01892	0,4	1,05384	0,03327	0,05219
2	0,4	1,06819	0,03649	0,5	1,10962	0,06874	0,08293
3	0,6	1,15112	0,04909	0,8	1,24930	0,05770	0,10679
4	0,8	1,25791	0,05901	1	1,37593	0,06491	0,12392
5	1	1,38183					

Энди 1- ва 2- жадвалларни солиштириб кўрсак, 2-жадвалда h қадам икки марта катта бўлса ҳам топилган тақрибий қийматлар аниқроқдир.

Бу ерда ҳам шуни айтиш кераккки, қадамнинг икки марта катталигига қарамасдан 3-жадвалдаги натижа 1-жадвалдагидан яхшидир.

2-машқ. (2.17) ва (2.21) шартлар бажарилган деб олиниб, (2.22) баҳо исботлансин.

8.2.4. Итерацион ишлов берилган Эйлер-Кошининг такомиллаштирилган методи. Бу методнинг моҳияти шундан иборатки, ушбу

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right)$$

«қўпол яқинлашиш»ни олиб,

$$y_{n+1}^{(p)} = y_n + \frac{1}{2}\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p-1)}\right)\right] \qquad (2.23)$$
$$\left(p = 1, 2, \ldots\right)$$

итерацион метод қўлланилади.

Иккита $y_{n+1}^{(k)}$ ва $y_{n+1}^{(k+1)}$ кетма-кет яқинлашишнинг мос равишдаги ўнли рақамлари устма-уст тушгунга қадар бу итерацион жараённи давом эттириш керак. Шундан кейин

$$y_{n+1} \cong \bar{y}_{n+1}^{(k)}$$

деб олиш лозим, бу ерда $\bar{y}_{n+1}^{(k)}$ иккита $y_{n+1}^{(k)}$ ва $y_{n+1}^{(k+1)}$ нинг устма-уст тушган қисми. Борди-ю, y_n тақрибий қийматга итерацион ишлов бераётганда уч-тўрт итерациядан кейин керакли миқдордаги ўнли рақамлар устма-уст тушмаса, у ҳолда h қадамни кичрайтириш керак. Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, ҳар бир қадамда хатолик h^3 тартибга эга бўлади, шунинг учун ҳам ҳисоблашларда итерация жараёни кенг қўлланилади.

4-мисол. Итерацион ишлов бериш методи билан (2.13) тенглама ечимининг $x = 0{,}1$ нуқтадаги $u(0{,}1)$ қийматининг 5 та хонаси устма-уст тушадиган аниқликда топилсин.

Ечиш. Бу ерда $h = 0{,}05$ деб оламиз, $f(x_0,\ u_0) = f(0;\ 1) = 0$ бўлганлиги учун $y_1^{(0)} = y_0 = 1$ деб, ушбу методдан

$$y_1^{(k)} = 1 + 0{,}025\left[y_1^{(k-1)} - \frac{0{,}05(0{,}05-1)+1}{y_1^{(k-1)}}\right]$$

га эга бўламиз.

Итерацион жараённи тузатамиз:

$$y_1^{(1)} = 1 + 0{,}025\left[1 - \frac{0{,}05(0{,}05-1)+1}{1}\right] = 1{,}001188;$$

$$y_1^{(2)} = 1 + 0{,}025\left[1{,}001188 - \frac{0{,}05(0{,}05-1)+1}{1{,}001188}\right] = 1{,}001245;$$

$$y_1^{(3)} = 1{,}001248;\ y_1^{(4)} = 1{,}001248.$$

Шундай қилиб, $y_1 = u(0{,}05) = 1{,}001248$ га эга бўлдик. Энди $x_1 = 0{,}05$ ва $y_1 = 1{,}001248$ деб олсак, у ҳолда

$$f(x_1 y_1) = y_1 \frac{x_1(x_1-1)+1}{y_1} = 0{,}049935$$

бўлиб, (2.23) итерацион жараён қуйидагича ёзилади:

$$y_2^{(v)} = 1{,}001248 + 0{,}025\left[0{,}049935 + y_1^{(v-1)} - \frac{0{,}1(0{,}1-1)+1}{y_1^{(v-1)}}\right].$$

Бу ерда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y_2^{(1)} = 1{,}004806;\ y_2^{(2)} = 1{,}004975;\ y_2^{(3)} = 1{,}004983;\ y_2^{(4)} = 1{,}004985.$$

Бир хонага яхлитлаб олсак, $(0{,}1) = 1{,}004982$ га эга бўламиз. Аниқ қиймат эса

$$u(0{,}1) = \sqrt{1+(0{,}1)^2} = 1{,}004975.$$

8.3-§. РУНГЕ-КУТТА МЕТОДЛАРИ

8.3.1. Умумий тушунчалар. Қуйидаги

$$u' = f(x,u),\ u(x_0) = u_0 \tag{3.1}$$

Коши масаласининг аниқ ечимини $u(x)$ орқали белгилаймиз. Қаралаётган соҳада $f(x, u)$ етарлича силлиқ функция бўлсин, у ҳолда

$$u(x_1) - u(x_0) = \sum_{k=1}^{S} \frac{h^k}{k!} u^{(k)}(x_0) + 0\left(h^{S+1}\right),$$
$$(x_1 = x_0 + h,\ h > 0). \tag{3.2}$$

Энди $u(x_1)$ нинг тақрибий қийматини u_1 орқали белгилаб, (3.2) тенгликда қолдиқ ҳадни ташласак,

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0 = \sum_{k=1}^{S} \frac{h^k}{k!} u^{(k)}(x_0) \tag{3.3}$$

ёйилма ҳосил бўлади. Бу ёйилмадаги $u'(x_0), u''(x_0),\ \ldots$ ҳосилалар (3.1) тенгликдан аниқланади. Кейинги ҳисоблашларга қулайлик туғдириш учун ушбу операторларни киритамиз:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial u}, \\ D^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial u} + f^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}, \\ D^3 &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3f\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial u} + 3f^2\frac{\partial^3}{\partial x \partial^2 u} + f^3\frac{\partial^3}{\partial^3 u}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

бу ерда $f = f(x, u)$ (3.1) тенгламанинг ўнг томони. Бу операторлар учун қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$
\begin{aligned}
&D(y+z) = Dy + Dz, \\
&D(yz) = zDy + yDz, \\
&D(Dz) = D^2 z + Dz\frac{\partial z}{\partial u}, \\
&D\left(D^2 z\right) = D^3 z + 2Df \cdot D\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&D\left(D^m(z)\right) = D^{m+1}(z) + mD(f)\cdot D^{m-1}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Машқ. Барча натурал $m \geq 2$ сонлар учун (3.5) тенглик исбот қилинсин.

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасини қўллаб, (3.1) тенгламадан ва (3.4) тенгликлардан кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$
\begin{aligned}
&u' = f, \\
&u'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial u} = Df,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
u''' = D(Df) = D^2 f + \frac{\partial f}{\partial u}Df, \tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{IV} &= D\left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial u}Df\right) = D\left(D^2 f\right) + D\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot Df + \frac{\partial f}{\partial u}D(Df) = \\
&= D^3 f + 2DfD\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + DfD\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial u}Df\right) = \\
&= D^3 f + \frac{\partial f}{\partial u}D^2 f + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 Df + 3Df\cdot D\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Бу тенгликларнинг ўнг томони (x_0, u_0) нуқтада ҳисобланган деб қараймиз. Шундай қилиб, (3.3) ёйилмадаги барча $u^{(k)}(x_0)$ ҳосилаларни назарий жиҳатдан ҳисоблаш мумкин. Аммо (3.6) формулалар ноқулай ва катта бўлганлиги сабабли уларни Δu_0 ни топиш учун амалиётда бевосита қўллаш мушкулдир.

Рунге Δu_0 ни ҳисоблаш учун (3.3) нинг ўрнида p_{ri} ўзгармас коэффициентлар билан олинган

$$
k_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r)
$$

функцияларнинг

$$
\Delta u_0 = p_{r1}k_1(h) + p_{r2}k_2(h) + \dots + p_{rr}k_r(h) \tag{3.9}
$$

чизиқли комбинациясини олишни таклиф этди, бу ерда

$$\xi_i = x_0 + \alpha_i h,\ \alpha_1 = 0,$$

$$\eta_i = u_0 + \beta_{i1} k_1(h) + \beta_{i2} k_2(h) + \ldots + \beta_{i,r-1} k_{r-1}(h)$$

ва α_i, β_{ij} — ўзгармас сонлардир. Шундай қилиб,

$$\left.\begin{aligned} &k_1(h) = hf(x_0, u_0), \\ &k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, ,u_0 + \beta_{21} k_1), \\ &k_3(h) = hf(x_0 + \alpha_3 h,\ u_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &k_r(h) = hf\left(x_0 + \alpha_r h,\ u_0 + \beta_{r1} k_1 + \ldots + \beta_{r,r-1} k_{r-1}(h)\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Бу ерда α_i, β_{ij} лар маълум бўлса, h ни танлаб, кетма-кет $k_i(h)$ ларни ҳисоблаш мумкин. p_{ri}, x_i, β_{ij} параметрлар шундай танланганки, ихтиёрий $f(x, u)$ функция ва ихтиёрий h қадам учун (3.3) ва (3.7) ёйилмаларда h нинг имкони борича юқори даражасигача бўлган ҳадлар устма-уст тушсин. Бошқача айтганда,

$$\varphi_r(h) = u(x_1) - u_0 - \sum_{i=1}^{r} p_{ri} k_i(h)$$

функция

$$\varphi_r(0) = \varphi_r'(0) = \ldots = \varphi_{(0)}^{(s)}(0) = 0,\ \varphi_r^{(s+1)(0)} \neq 0$$

хоссаларга эга бўлиб, p_{ri}, α_i, β_{ij} лар шундай танланиши керакки, ихтиёрий h ва $f(x, u)$ учун s мумкин қадар катта бўлсин. Рунге-Кутта методининг хатолиги, яъни $u(x_1) - u_0$ билан (3.9) формула ёрдамида ҳисобланган унинг тақрибий қиймати орасидаги фарқ ҳар бир қадамда

$$R_r(h) = \frac{h^{s+1}\varphi_r^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!},\ 0 \le \xi \le h \tag{3.11}$$

га тенгдир. Бу ерда s — *Рунге-Кутта методининг аниқлик тартиби.* (3.9) кўринишидаги формулалар *Рунге-Кутта формулалари* дейилади. Методнинг асосий ғояси Рунге (1895) томонидан таклиф этилган бўлиб, кейинчалик биринчи тартибли тенглама учун Хейн (1900) ва Кутта (1901) янада такомиллаштирдилар, Нистрем, Цурмол ва бошқалар юқори тартибли тенгламалар учун қўлладилар. Биз қуйида бу методнинг айрим хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз. Бу методнинг умумий ҳолларини [7,13] дан қараш мумкин.

8.3.2. Биринчи тартибли Рунге-Кутта методи. Бу ҳолда $r = 1$ бўлиб,

$$\varphi_1(h) = u(x_0 + h) - u(x_0) - p_{11} h f(x_0, u_0),$$

$$\varphi_1'(h) = u'(x_0 + h) - p_{11} f(x_0, u_0)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бундан $h = 0$ да

$$\varphi_1'(0) = u'(x_0) - p_{11} f(x_0, y_0)$$

тенгликка эга бўламиз. Ихтиёрий f учун фақат $p_{11} = 1$ бўлгандагина $\varphi_1'(0) = 0$ бўлади. Ниҳоят,

$$\varphi_1''(0) = u''(x_0)$$

бўлганлиги туфайли, умуман айтганда, нолга айланмайди. Шундай қилиб,

$$\Delta u_0 = h f(x_0, u_0) \qquad (3.12)$$

тақрибий формула ҳар бир қадамда

$$R_1(h) = \frac{h^2}{2} u''(\xi) = \frac{h^2}{2} D(f)\Big|_{x=\xi} \quad (x_0 \le \xi \le x_0 + h)$$

хатога эга. (3.12) формула 8.2-§ даги Эйлер формуласи билан устма-уст тушди. Эйлер формуласи Рунге-Кутта формуласининг энг хусусий ҳоли бўлиб чиқди.

8.3.3. Иккинчи тартибли Рунге-Кутта методи. Бу ерда $r = 2$ бўлиб,

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(h) = u(x_0 + h) - u_0 - \left[p_{21} k_1(h) + p_{22} k_2(h)\right],\\
&\varphi_2'(0) = u'(x_0) - \left[p_{21} k_1'(0) + p_{22} k_2'(0)\right] = f_0 - \left[p_{21} f_0 + p_{22} f_0\right],\\
&\varphi_2''(0) = u''(x_0) - \left[p_{21} k_1''(0) + p_{22} k_2''(0)\right]
\end{aligned} \qquad (3.13)$$

тенгликлар бажарилади. Шундай қилиб, $\varphi_2(0) = 0$ бўлиб, $\varphi_2'(0) = 0$ бўлиши учун

$$p_{21} + p_{22} = 1$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. (3.10) тенгликдан кўриниб турибдики, $k_1''(0) = 0$ ва $k_2''(0)$ ни топиш учун $k_2(h)$ ни даражали қаторга ёйиб, h^2 олдидаги коэффициентни топиш керак:

$$k_2(h) = h f(x_0 + x_2 h\, u_0 + \beta_{21} h f_0) =$$

$$= h\left[f_0 + h\left(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} f_0 \frac{\partial}{\partial u}\right) f + \frac{h^2}{2}\left(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} f_0 \frac{\partial}{\partial u}\right)^2 f + \ldots\right]. \qquad (3.14)$$

Бундан кўриниб турибдики,

$$k_2''(0)=2\left(\alpha_2\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_{21}.f_0\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{x=x_0}. \qquad (3.15)$$

Энди (3.6) ва (3.15) ни (3.13) га қўйиб, кўрамизки, φ_2' нолга айланиши учун

$$1=2p_{22}\alpha_2,\ 1=2p_{22}\beta_{21}$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Кўрсатиш мумкинки, умуман айтганда, $\varphi_2'''(0)$ нолга тенг эмас. Шундай қилиб, p_{21}, p_{22}, α_2, β_{21} ларни

$$\left.\begin{aligned} p_{21}+p_{22}&=1,\\ p_{22}\alpha_2&=\frac{1}{2},\\ p_{22}\beta_{21}&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

шартлардан аниқлаб олсак, ҳар бир қадамдаги хатолик учун

$$R_2(h)=\frac{h^3}{6}\varphi'''(\xi) \qquad (3.17)$$

га эга бўламиз. (3.16) дан кўрамизки, $p_{22}\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$, $\beta_{21}\neq 0$, $\alpha_2=\beta_{21}$. (3.16) тенгликлар эса 4 та номаълумли 3 та тенгламалар системасидан иборатдир. Шунинг учун ҳам у чексиз кўп ечимга эга. Барча ечимлар учун хатолик (3.17) га тенг. Амалиётда (3.16) системанинг шундай ечимларини танлаш кераккки, ҳисоблаш учун қулай формулаларни берсин. Биз шулардан икки вариантини оламиз.

Биринчи вариант. $\alpha_2=\beta_{21}=1$ бўлсин, у ҳолда $p_{22}=p_{21}=\frac{1}{2}$ бўлиб, қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$\Delta u_0\cong\frac{1}{2}(k_1+k_2),\ k_1=hf(x_0,u_0),\ k_2=hf(x_0+h,u_0+k_1).$$

Иккинчи вариант. $\alpha_2=\beta_{21}=\frac{1}{2}$ ва $p_{22}=1$, $p_{21}=0$ бўлса,

$$\Delta u_0\cong k_2,\ k_1=hf(x_0,u_0),\ k_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ u_0+\frac{k_1}{2}\right)$$

тақрибий формула келиб чиқади.

8.3.4. Учинчи тартибли Рунге-Кутта методи. Бу ҳолда $r=3$ бўлиб,

$$\varphi_3^{(j)}(0)=u_0^{(j)}-\left[p_{31}k_2^{(j)}(0)+p_{32}k_2^{(j)}(0)+p_{33}k_3^{(j)}(0)\right](j=1,2,3) \qquad (3.18)$$

тенгликлар ўринлидир. Энди (3.18) тенгликларда $k_i^{(j)}(0)$ $(i, j = 1,2,3)$ ларнинг ифодаларини топиб келтириб қўйсак, у ҳолда $\varphi_3'(0) = \varphi_3''(0) = = \varphi_3'''(0) = 0$ тенгликларнинг бажарилиши учун ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_2 = \beta_{21}, \\ &\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}, \\ &p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1, \\ &\alpha_2 p_{32} + \alpha_3 p_{33} = \frac{1}{2}, \\ &\alpha_2^2 p_{32} + \alpha_3^2 p_{33} = \frac{1}{3}, \\ &\alpha_2 \beta_{32} p_{33} = \frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Бу система 6 та тенгламадан иборат бўлиб, 8 та номаълумга эга, шунинг учун ҳам бу системанинг ечими чексиз кўпдир.

Иккита вариантни кўрамиз:

а) Аввало, $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1$ деб оламиз. У ҳолда осонлик билан кўриш мумкинки, (3.19) системанинг қолган номаълумлари $\beta_{31} = -1, p_{31} = p_{33} = \frac{1}{6}, p_{32} = \frac{2}{3}$ га тенг бўлади. Шундай қилиб,

$$\Delta u_0 \cong \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{3.20}$$

тақрибий формулага эга бўламиз, бу ерда

$$k_1 = hf(x_0, u_0),\ k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\ u_0 + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf(x_0 + h,\ u_0 - k_1 + 2k_2).$$

б) Энди

$$\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{3}{4}$$

деб олсак, у ҳолда

$$\beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{3}{4}, p_{31} = \frac{2}{9}, p_{32} = \frac{1}{3}, p_{33} = \frac{4}{9}$$

бўлиб,

$$\Delta u_0 \cong \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \tag{3.21}$$

тақрибий формула келиб чиқади, бу ерда

$$k_1 = hf(x_0, u_0),\ k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2},\ u_0 + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{3}{4}h,\ u_0 + \frac{3}{4}k_2\right).$$

Ҳар иккала (3.20), (3.21) тақрибий формуланинг хатолиги

$$R_3(h) = \frac{h^3}{24} \varphi_3^{\mathrm{IV}}(\xi).$$

8.3.5. Тўртинчи тартибли Рунге-Кутта методи. Бунда $r = 4$ бўлиб, тақрибий формуланинг параметрларини аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \beta_{21}, \\
&\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}, \\
&\alpha_4 = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}, \\
&p_{41} + p_{42} + p_{43} + p_{44} = 1, \\
&\alpha_2 p_{42} + \alpha_3 p_{43} + \alpha_4 p_{44} = \frac{1}{2}, \\
&\alpha_2^2 p_{42} + \alpha_3^2 p_{43} + \alpha_4^2 p_{44} = \frac{1}{3}, \\
&\alpha_2^3 p_{42} + \alpha_3^3 p_{43} + \alpha_4^3 p_{44} = \frac{1}{4}, \\
&\alpha_2 p_{32} p_{43} + \alpha_2 \beta_{42} p_{44} + \alpha_3 \beta_{43} p_{44} = \frac{1}{6}, \\
&\alpha_2 \alpha_3 \beta_{32} p_{43} + \alpha_2 \alpha_4 \beta_{42} p_{44} + \alpha_3 \alpha_4 \beta_{43} p_{44} = \frac{1}{8}, \\
&\alpha_2^2 \beta_{32} p_{43} + \alpha_2^2 \beta_{42} p_{44} + \alpha_3^2 \beta_{43} p_{44} = \frac{1}{2}, \\
&\alpha_2 \beta_{32} \beta_{43} p_{44} = \frac{1}{24}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Бу системада ҳам номаълумларнинг сони тенгламалар сонига нисбатан иккитага кўпдир. Амалиётда энг кўп қўлланадиган тўртинчи тартибли формула

$$\Delta u_0 \cong \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{3.23}$$

бўлиб, бу ерда

$$\left.\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_0, u_0),\ k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, u_0 + \frac{1}{2}k_1\right), \\
&k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, u_0 + \frac{1}{2}k_2\right),\ k_4 = hf(x_0 + h, u_0 + k_3).
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Иккинчи формула сифатида

$$\Delta u_0 \cong \frac{1}{6}\left(k_1 + 3k_2 + k_3 + k_4\right) \tag{3.25}$$

ни олишимиз мумкин, бу ерда

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = hf\left(x_0, u_0\right),\ k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, u_0 + \frac{1}{2}k_1\right), \\ &k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, u_0 - \frac{1}{2}k_1 + k_2\right), \\ &k_4 = hf\left(x_0 + h, u_0 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Бу формулалар биринчи марта Рунге (1895) томонидан таклиф этилган бўлиб, уни Кутта (1901) ривожлантирди, Гилл (1951) қайта ўрганиб чиқди. Ҳисоблаш амалиётида Рунге-Кутта методлари орасида тўртинчи тартиблиси кенг қўлланилади.

У ёки бу Рунге-Кутта методини қўллаш натижасида Δu_0 нинг тақрибий қийматини ва натижада $u_1 = u(x_0 + h)$ ни топамиз. Кейин дастлабки қийматлар сифатида $x_1 = x_0 + h$ ва $u_1 = u(x_0 + h)$ни олиб, яна бир h ёки бошқа $h_1 \neq h$ қадамга силжитишимиз мумкин. Бу жараённи давом эттириб, изланаётган ечимнинг қийматларини керакли нуқталарда топиш мумкин.

1-мисол. [0; 0,4] ораликда (3.23), (3.24) формулалар ёрдамида $h = 0,1$ қадам билан

$$u' = 2xu,\ u(0) = 1$$

Коши масаласининг ечими топилсин.

Ечиш. Жараённинг бошланишини кўрсатамиз:

$$k_1 = 2hx_0u_0 = 0,1 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

$$k_2 = 2h\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\left(u_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,1 \cdot 2 \cdot 0,05 = 0,01,$$

$$k_3 = 2h\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\left(u_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,1 \cdot 2 \cdot 0,05 \cdot 1,005 = 0,01005,$$

$$k_4 = 2h\left(x_0 + h\right)\left(u_0 + k_3\right) = 0,1 \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 1,01005 = 0,020201.$$

Бу ердан

$$\Delta u_0 = \frac{1}{6}(0+2\cdot 0,01+2\cdot 0,01005+0,020201) = 0,01005$$

ва натижада $u_1 = u_0 + \Delta u_0 = 1 + 0,01005 = 1,01005$.

Қолган яқинлашишлар ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади. Ҳисоблаш натижаси 4-жадвалда келтирилган. Шундай қилиб, $u(0,4) = 1,173510$. Таққослаш учун $u = e^{x^2}$ аниқ ечимни келтирамиз, бундан

$$u(0.4) = e^{0,16} = 1,1735109.$$

4-жадвал

(3.27) Коши масаласини (3.23), (3.24) формулалар ёрдамида ечиш

n	x	u	$k = 0{,}1 \cdot 2xu$	Δu
0	0 0,05 0,05 0,10	1 1 1,005 1,01005	0 0,01 0,01005 0,020201	0,00000 0,02000 0,02010 0,020201
				$\frac{1}{6} \cdot 0{,}060301 = 0{,}01005$
1	0,10 0,15 0,15 0,20	1,010050 1,020150 1,025352 1,040811	0,020201 0,030605 0,030706 0,42039	0,020201 0,061200 0,061521 0,041632
				$\frac{1}{6} \cdot 0{,}1841563 = 0{,}030760$
2	0,20 0,25 0,25 0,30	1,040810 1,061620 1,067351 1,094178	0,041632 0,053081 0,053368 0,065651	0,041632 0,106163 0,106735 0,065651
				$\frac{1}{6} \cdot 0{,}320181 = 0{,}053363$
3	0,30 0,35 0,35 0,40	1,094174 1,126999 1,133662 1,173527	0,065650 0,078890 0,079353 0,093882	0,065650 0,157780 0,158707 0,093882
				$\frac{1}{6} \cdot 0{,}476019 = 0{,}079336$
4	0,40	1,173510		

8.3.6. Рунге-Кутта методининг қадамдаги хатолиги. Рунге принципи. Бибербах [57] Тейлор формуласи бўйича ёйилмадан фойдаланиб, $u' = f(x,u)$ тенглама учун Рунге-Кутта методининг хатолигини баҳолаш мақсадида ушбу

$$|u(x_1) - u_1| < \frac{6MN|x_1 - x_0|^5 |N^5 - 1|}{|N-1|}$$

тенгсизликни топган эди, бу ерда M ва N шундай танланган сонларки, $|x - x_0| < a, |u - u_0| < b$ соҳада

$$\left|f(x,u)\right| \le M, \left|\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial u^k}\right| < \frac{N}{M^{k-1}} (i+k \le 3)$$
$$\left|x - x_0\right| N < 1, aM < b \tag{3.27}$$

муносабатлар бажарилиши керак.

Агар $f(x, u)$ мураккаб аналитик ифодага эга бўлса, бу формуладан фойдаланиш кўп қийинчиликлар туғдиради. Шунинг учун ҳам амалиётда ҳар хил билвосита усуллардан фойдаланилади. Қадамни кичрайтириш ҳисобига аниқликни ошириш учун $|k_2 - k_3|$ ва $|k_1 - k_2|$ айирмаларни тузиб, буларнинг биринчиси кейингисининг бир неча фоизини ташкил этиши талаб қилинади. Агар бу шарт бажарилмаса, у ҳолда қадамни кичрайтиришга тўғри келади.

Шунинг учун ҳам $\left|\frac{k_1-k_2}{k_2-k_3}\right|$ сонни *«сезувчанлик ўлчами»* деб қараш мумкин [21]. Фараз қилайлик, тартиби s бўлган Рунге-Кутта методини қўллаётган бўлайлик ва x ечимни қидираётган нуқта бўлсин. Бу ечимни, аввало, h қадам билан, кейин $2h$ қадам билан топамиз. Қадам h бўлганда $x_1 = x_0 + h$ нуқта учун (3.11) формулага кўра

$$u(x_1) = u_1 + Ah^{s+1},\ A = \frac{\varphi_r^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!},\ 0 \le \xi \le h$$

муносабатга эга бўламиз. Бу ерда хатолик Ah^{s+1} га тенг. Хатоликни $x = x_0 + 2h$ нуқтада хомаки ҳисоблаш учун ҳар бир қадамда хатолик h^{s+1} га пропорционал деб фараз қиламиз, у ҳолда x нуқтада хатоликнинг жами $2Ah^{s+1}$ бўлади, яъни

$$u(x) = u^{(2)} + A\,2h^{s+1} \tag{3.28}$$

муносабат келиб чиқади. Агар биз ҳисоблашни $2h$ қадам билан бажарсак, у ҳолда $x = x_0 + 2h$ нуқтада хатолик $A(2h)^{s+1}$ бўлиб,

$$u(x) = u^{(1)} + A2^{s+1}h^{s+1} \tag{3.29}$$

тенгликка эга бўламиз.

Энди (3.28) ва (3.29) тенгликлардан хатоликнинг бош ҳадини ҳосил қиламиз:

$$u^{(1)} - u(x) \cong \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{2^s - 1}. \tag{3.30}$$

Бу тенглик *Рунге принципи* дейилади. Уни қуйидагича тавсифлаш мумкин: Аниқлик тартиби s бўлган Рунге-Кутта методининг h қадамдаги хатосини топиш учун бу ечимни $2h$ қадам билан топиш керак. Изланаётган хатолик ечимнинг h ва $2h$ қадамдаги қийматлари айирмаси модулининг 2^s-1 га бўлинганига тенг. Топилган тақрибий қийматнинг аниқлигини орттириш мақсадида топилган тақрибий қийматга хатолик бош ҳадининг миқдорини қўшиш керак:

$$u(x) \cong u^{(1)} + \frac{u^{(1)}-u^{(2)}}{2^s-1}. \tag{3.31}$$

Агар (3.30) ифоданинг абсолют қиймати берилган аниқликдан кичик бўлмаса, у ҳолда h қадамни икки марта кичик қилиб олиш керак.

Машқ. 1-мисолдаги қадам бу бандда айтилган шартларни қаноатлантириши кўрсатилсин.

8.3.7. Кутта-Мерсон методи. Рунге принципига асосланиб h қадамни ўзгартириш усули кўп меҳнат талаб қилади. Мерсон 1958 йилда Рунге-Кутта методини ўзгартириб, бошқача кўринишда таклиф этди. Бу метод аниқликка эришиш учун h қадамни автоматик равишда ва зудлик билан танлаш усулини беради. Бу формула қуйидагидан иборат:

$$\Delta u_0 = \frac{1}{2}(k_1 + 4k_4 + k_5) + 0(h^5), \tag{3.32}$$

бу ерда

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{3}hf(x_0, u_0), \\ k_2 &= \frac{1}{3}hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\ u_0 + k_1\right), \\ k_3 &= \frac{1}{3}hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\ u_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= \frac{1}{3}hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\ u_0 + \frac{3}{8}k_1 + \frac{9}{8}k_3\right), \\ k_5 &= \frac{1}{3}hf\left(x_0 + h,\ u_0 + \frac{3}{2}k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 6k_4\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Ушбу методнинг устунлиги шундан иборатки, h нинг юқори даражаларини ўз ичига олган қаторнинг ҳадларини ташлаб юбориш ҳисобига ҳосил бўлган ε хатолик

$$5\varepsilon = k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 4k_4 - \frac{1}{2}k_5 \tag{3.34}$$

формула билан аниқланади. Шу билан бирга h қадамни ўзгартириш мезони қуйидагидан иборат: агар (3.34) ифоданинг миқдори берилган ε хатоликка нисбатан 5 мартадан кўп бўлса, у ҳолда қадамни икки марта кичик қилиб олиб, ҳисоблашни қайтадан бажариш керак; агар ўнг томон берилган ε аниқликдан $\frac{5}{32}$ марта кичик бўлса, у ҳолда h қадамни икки марта ошириб, ҳисоблашни такрорлаш керак. Мерсоннинг тасдиғига кўра, бу метод доимий h қадам билан олинган стандарт Рунге-Кутта методига нисбатан ҳисоблашларни 20% га қисқартиради.

Машқ. 1-мисол Мерсон методи билан ечилсин.

8.3.8. Оддий дифференциал тенгламалар системасини ечиш учун Рунге-Кутта методлари. Нормал кўринишда ёзилган биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасини ечиш учун ҳам юқорида келтирганимиздек иш тутиб, параметрларни аниқлаш учун алгебраик тенгламалар системасини чиқариш мумкин [7]. Лекин бу ерда ҳосил бўладиган ифодалар мураккаб ва алгебраик системадаги тенгламаларнинг сони ҳам кўп бўлади. Шунга ўхшаш

$$u^{(n)} = f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right) \tag{3.35}$$

n-тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун ҳам Рунге-Кутта методлари ишлаб чиқилган [7].

Маълумки, алмаштиришлар бажариб, (3.35) тенгламани дифференциал тенгламалар системасининг нормал шаклига келтириш мумкин. Биз юқорида $k(k = 1, 2, 3, 4)$ тартибли Рунге-Кутта методининг формулаларини чиқарган эдик. Бу формулаларни бемалол тенгламалар системаси учун ҳам қўллаш мумкин.

Фараз қилайлик, ушбу

$$u' = f_1(x, u, z),\ z' = f_2(x, u, z)$$

тенгламалар системасининг

$$u(x_0) = u_0,\ z(x_0) = z_0$$

дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб қилинсин. Мисол учун биз бу ерда (3.23), (3.24) формулаларни қўллаймиз. Битта тенглама бўлган ҳолга ўхшаб параллел равишда Δu_0, Δz_0 сонларни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_0 &= \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\ \Delta z_0 &= \frac{1}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

бу ерда

$$k_1 = hf_1\left(x_0,u_0,z_0\right),\ l_1 = hf_2\left(x_0,u_0,z_0\right),$$
$$k_2 = hf_1\left(x_0+\frac{h}{2},u_0+\frac{k_1}{2},z_0+\frac{l_1}{2}\right),\ l_2 = hf_2\left(x_0+\frac{h}{2},u_0+\frac{k_1}{2},z_0+\frac{l_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf_1\left(x_0+\frac{h}{2},u_0+\frac{k_2}{2},z_0+\frac{l_2}{2}\right),\ l_3 = hf_2\left(x_0+\frac{h}{2},u_0+\frac{k_2}{2},z_0+\frac{l_2}{2}\right),$$
$$k_4 = hf_1\left(x_0+h,u_0+k_3,z_0+l_3\right),\ l_4 = hf_2\left(x_0+h,u_0+k_3,z_0+l_3\right).$$

Натижада

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0,\ z_1 = z_0 + \Delta z_0$$

га эга бўламиз.

3-мисол. Рунге-Кутта методи билан қаршилик кўрсатувчи муҳитда маятникнинг тебраниш тенгламаси

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 0,1\frac{d\varphi}{dt} + 5\sin\varphi = 0 \qquad (3.37)$$

нинг $\varphi(0) = 0,2,\ \dot{\varphi}(0) = 0.1\left(\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\right)$

дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечими топилсин.

Ечиш. Ушбу $\frac{d\varphi}{dt} = \psi$ алмаштиришни бажариб, (3.37) тенгламани

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=\psi,\\ &\dot{\psi}=-(5\sin\varphi+0,1\psi).\ \varphi(0)=0,2;\ \psi(0)=0,1\end{aligned}\right\} \qquad (3.38)$$

тенгламалар системаси шаклида ёзиб оламиз. Ҳисоблашларни (3.36) формула ёрдамида бажарамиз. Бу ерда ҳам қадамни $h = \Delta t = 0,1$ деб оламиз. Бизнинг ҳолда k_i ва l_i қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$k_1 = 0,1\psi_0,\qquad l_1 = -0,1\left(5\sin\varphi_0 + 0,1\psi_0\right),$$
$$k_2 = 0,1\left(\psi_0+\frac{l_1}{2}\right),\ l_2 = -0,1\left[5\sin\left(\varphi_0+\frac{k_1}{2}\right)+0,1\left(\psi_0+\frac{l_1}{2}\right)\right],$$
$$k_3 = 0,1\left(\psi_0+\frac{l_2}{2}\right).\ l_3 = -0,1\left[5\sin\left(\varphi_0+\frac{k_2}{2}\right)+0,1\left(\psi_0+\frac{l_2}{2}\right)\right],$$
$$k_4 = 0,1\left(\psi_0+l_3\right),\ l_4 = -0,1\left[5\sin\left(\varphi_0+\frac{k_3}{2}\right)+0,1\left(\psi_0+l_3\right)\right].$$

Ҳисоблаш натижалари 5-жадвалда келтирилган. Жадвалдан кўрамизки, $\varphi(0,1) = 0,204939$; $\varphi(0,2) = 0,198059$.

5-жадвал

(3.38) дифференциал тенгламалар системасини Рунге-Кутта методи билан интеграллаш

n	t	φ	ψ	$k = 0{,}1\psi$	$l = 0{,}1\dot{\psi}$	$\Delta\varphi$	$\Delta\psi$
0	0	0,2	0,1	0,01	−0,100335	0,010000	−0,100335
	0,05	0,205	0,049832	0,004983	−0,102282	0,009966	−0,204564
	0,05	0,202492	0,048859	0,004886	−0,101044	0,009772	−0,202088
	0,1	0,204886	−0,001044	−0,000104	−0,101738	−0,000104	−0,101738
						$\frac{1}{6}\cdot 0{,}029634 =$ $= 0{,}004939$	$\frac{1}{6}(-0{,}608725) =$ $= -0{,}101454$
1	0,1	0,204939	−0,001454	−0,000145	−0,101739	−0,000145	−0,101739
	0,15	0,204867	−0,052324	−0,005232	−0,101195	−0,010464	−0,202390
	0,15	0,202323	−0,102922	−0,010292	−0,099444	−0,020584	−0,198887
	0,2	0,194647	−0,100898	−0,010090	−0,095701	−0,010090	−0,095701
						$-0{,}041283\cdot\frac{1}{6} =$ $= -0{,}006880$	$-0{,}0598717\cdot\frac{1}{6} =$ $= -0{,}099786$
2	0,2	0,198059	−0,101240	−0,010124	−0,097371	−0,010124	−0,097371

8.3.9. Бир қадамли методларнинг яқинлашиши. Бу бандда (1.1) Коши масаласини сонли ечишда ишлатиладиган турли методларнинг шундай гуруҳини кўриб чиқамизки, бунда $u(x_j)$ $(x_0 \le x_j \le x_n \le x_0 + \chi)$ қийматларнинг y_j яқинлашишлари кетма-кет ҳосил бўлсин. Фараз қилайлик, m белгиланган бўлиб, сонли интеграллаш жараёнида барча $j \ge m$ учун y_i нинг қийматлари қандайдир функционалнинг қийматидек аниқлансин:

$$y_{i+1} = F\left(f; x_j, \ldots, x_{j+1-m}, y_j, \ldots, y_{j+1-m}\right). \tag{3.39}$$

Сонли интеграллашнинг бундай усули *т қадамли метод* дейилади. Юқорида кўриб чиқилган методларнинг барчаси ушбу умумий хусусиятга эга: тақрибий ечимнинг кейинги нуқтадаги қиймати ечимнинг фақат олдинги нуқтадаги қийматига боғлиқ равишда аниқланган эди, демак, бу усулларга мос келадиган ҳисоблаш формулаларини (3.39) кўринишда ёзадиган бўлсак, $m = 1$ бўлган ҳолга тўғри келади. Бундай методлар *бир қадамли методлар* дейилади.

Шу пайтгача биз бир қадамли методларнинг фақат бир қадамдаги хатолигини текширган эдик. Энди бир қадамли методларнинг умумий хатолигини баҳолашни ва унинг яқинлашишини кўриб чиқамиз. Бир қадамли метод учун (3.39) формула қуйидаги кўринишга эга:

$$u_{j+1} = F\left(f; x_j, h_j, u_j\right),\ h_j = x_{j+1} - x_j. \tag{3.40}$$

Реал ҳисоблашлар натижасида топилган y_{j+1} яқинлашишлар (3.40) муносабат билан эмас, балки

$$y_{j+1} = F\left(f; x_j, h_j, y_j\right) + \delta_{j+1} \tag{3.41}$$

муносабат билан боғлангандир. Бундаги δ_{j+1} қўшимча ҳад қуйидаги сабабларга кўра ҳосил бўлади:

а) ҳисоблаш жараёнидаги яхлитлашлар;

б) $f(x, u)$ нинг қийматини топишдаги хатоликлар; бу хатоликларнинг манбаи шундаки, қаралаётган $f(x, u)$ функция реал дифференциал тенгламанинг қандайдир яқинлашишидан иборат, бундан ташқари, кўпинча $f(x, u)$ ни ЭҲМ да ҳисоблаш жараёнида бу функция ЭҲМ да элементар функциялар билан яқинлаштирилади;

в) айрим ҳолларда y_{j+1} нинг қиймати (3.39) тенгламага тенг кучли бўлган, аммо y_{j+1} га нисбатан ошкор кўринишда берилмаган тенгламадан топилади, бундай ҳолда δ_{j+1} шундай ташкил этувчига эга бўладики, у ошкор бўлмаган тенгламанинг тақрибий ечимидан келиб чиқади.

Биз кўрдикки, δ_{j+1} кўп омилларга боғлиқ, шунга қарамасдан уни *қадамдаги яхлитлаш хатолиги* дейилади.

Шунга ўхшаш дастлабки маълумотларни аниқлашдаги хатолик ва яхлитлаш ҳисобидан бошланғич шарт u_0 изланаётган ечимнинг $u(x_0)$ қийматидан фарқ қилади.

Фараз қилайлик, $u(x)$ дифференциал тенгламанинг изланаётган ечими, $u_j(x)$ ($j = 0, 1, 2, ...$) лар эса $u_j(x_j) = y_j$ шартларни қаноатлантирадиган ечимлари бўлсин. Энди $\varepsilon_n = u_n(x_n) - u(x_n)$ хатоликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\varepsilon_n = u_n(x_n) - u_0(x_n) + u_0(x_n) - u(x_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left[u_j(x_n) - u_{j-1}(x_n)\right] + \left[u_0(x_n) - u(x_n)\right]. \tag{3.42}$$

Кейинги мулоҳазалар учун ушбу леммани келтирамиз:

Лемма. Фараз қилайлик, $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ функциялар $u' = f(x,u)$ дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлиб, $f(x, u)$ ва унинг ҳосиласи $f_u(x, u)$ узлуксиз бўлсин. У ҳолда ушбу

$$u_2(b) - u_1(b) = (u_2(a) - u_1(a))\exp\left\{\int_a^b f_u(x, \tilde{u}(x))dx\right\} \tag{3.43}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда

$$\tilde{u}(x) = u_1(x) + \theta(x)(u_2(x) - u_1(x)), \quad 0 < \theta(x) < 1.$$

Исботи. Ушбу

$$u_2' = f(x, u_2), \; u_1' = f(x, u_1)$$

тенгликларнинг биридан иккинчисини айириб, ҳосил бўлган $f(x, u_2) - f(x, u_1)$ айирмага Лагранж теоремасини қўллаймиз:

$$f(x, u_2) - f(x, u_1) = f_u(x, \tilde{u})(u_2 - u_1),$$

бунда $\tilde{u}(x) = u_1(x) + \theta(x)(u_2(x) - u_1(x))$. Натижада $u_2 - u_1$ га нисбатан қуйидаги чизиқли дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$(u_2 - u_1)' = f_u(x, \tilde{u})(u_2 - u_1).$$

Буни интеграллаб, (3.43) тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди

$$a = x_j,\ b = x_n,\ u_1(x) = u_{j-1}(\tilde{o}),\ u_2(x) = u_j(x)$$

бўлсин, у ҳолда (3.43) тенгликка кўра

$$u_j(x_n) - u_{j-1}(x_n) = \left[u_j(x_j) - u_{j-1}(x_j)\right]\exp\left\{\int_{x_j}^{x_n} f_u\left(x, \tilde{u}_j(x)\right)dx\right\}, \qquad (3.44)$$

бунда

$$\tilde{u}_j(x) = u_{j-1}(x) + \theta\left(u_j(x) - u_{j-1}(x)\right)$$

ҳосил бўлади.

Шунга ўхшаш

$$u_0(x_n) - u(x_n) = \left(u_0(x_0) - u(x_0)\right)\exp\left\{\int_{x_0}^{x_n} f_u\left(x, \tilde{u}_0(x)\right)dx\right\}. \qquad (3.45)$$

Юқоридаги (3.42), (3.44) ва (3.45) тенгликлардан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \exp\left\{\int_{x_j}^{x_n} f_u\left(x, \tilde{u}_j(x)\right)dx\right\} + \varepsilon_0 \exp\left\{\int_{x_0}^{x_n} f\left(x, \tilde{u}_0(x)\right)dx\right\}, \qquad (3.46)$$

бунда $\eta_j = u_j(x_j) - u_{j-1}(x_j),\ j = 1, 2, \ldots$.

Биз (3.41) тенгликдан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\eta_j = u_j(x_j) - u_{j-1}(x_j) = y_j - u_{j-1}(x_j) = r_j + \delta_j, \qquad (3.47)$$

бунда

$$r_j = F\left(f, x_{j-1}, h_{j-1}, y_{j-1}\right) - u_{j-1}(x_j).$$

Аввало, r_j нинг маъносини тушуниб олайлик, $F\left(f, x_{j-1}, h_{j-1}, y_{j-1}\right)$ (3.40) формула ёрдамида ҳисобланган сон, $u_{j-1}(x_j)$ эса дифференциал тенгламанинг $u_{j-1}(x_{j-1}) = y_{j-1}$ шартни қаноатлантирадиган аниқ ечимининг x_j нуқтадаги қиймати. Демак, r_j қаралаётган методнинг бир қадамдаги хатолиги бўлиб, бунда ҳисоблаш (x_{j-1}, y_{j-1}) нуқтадан бошланиб, яхлитламасдан олиб борилади, қадам эса $h_{j-1} = x_j - x_{j-1}$ бўлади. r_j миқдор *методнинг қадамдаги хатолиги* дейилади.

Фараз қилайлик, қўлланилаётган методнинг яқинлашиш тартиби s бўлсин, у ҳолда қаралаётган интеграллаш оралиғи $x_0 < x_j \le x_n \le x_0 + X$ га мос келадиган барча j лар учун

$$\left|r_j\right| \le ch_{j-1}^{s-1} \qquad (3.48)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$L = \sup_{x_0 \le x \le x_0 + \chi} |f_u| < \infty,$$

$$\tilde{h} = \max_{1 \le j \le N} h_{j-1},\ \delta = \max_j |\delta_j|.$$

Бу белгилашларни ҳисобга олиб, $x_0 \le x_j \le x_n \le x_0 + X$ бўлганлиги учун ушбу баҳога эга бўламиз:

$$\exp\left\{ \int_{x_j}^{x_n} f_u\left(x, \tilde{u}_j(x)\right) dx \right\} \le \exp\left\{ L\left(x_n - x_j\right) \right\} \le \exp\{LX\}.$$

Бу тенгсизликдан фойдаланиб, (3.46) дан қуйидаги баҳони топамиз:

$$|\varepsilon_n| \le \exp(LX) \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|r_j| + |\delta_j| \right) + |\varepsilon_0| \right). \tag{3.49}$$

Энди биз (3.48) ни кўполлаштириб, $|r_j|$ учун ушбу баҳога эга бўламиз:

$$|r_j| \le c\tilde{h}^s \left(x_j - x_{j-1}\right). \tag{3.50}$$

Бу баҳони (3.49) га қўйсак, натижада

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n| &\le \exp(LX) \left(\sum_{j=1}^{n} \left(c\tilde{h}^s \left(x_j - x_{j-1}\right) + |\delta_j| \right) + |\varepsilon_0| \right) \le \\ &\le \exp(LX)\left(c\tilde{h}^s \left(x_n - x_0\right) + n\delta + |\varepsilon_0| \right) \le \\ &\le \exp(LX)\left(c\left(X - x_0\right)\tilde{h}^s + N\delta + |\varepsilon_0| \right). \ (h \le N) \end{aligned} \tag{3.51}$$

ҳосил бўлади. Бу баҳо шуни кўрсатадики, $h \to 0$ да $\max_{x_0 \le x_n \le x_0 + x} |\varepsilon_n| \to 0$ учун, яъни (3.40) бир қадамли метод яқинлашувчи бўлиши учун бир вақтда $N\delta \to 0$ ва $|\varepsilon_0| \to 0$ муносабатлар ўринли бўлиши керак. Шундай қилиб, интеграллаш қадами етарлича кичик бўлганда ҳамда ҳисоблаш хатолиги ва бошланғич шартнинг хатолиги (йўқотилмас хато) ε_0 кичик бўлганда, бир қадамли методлар билан (хусусий ҳолда Рунге-Кутта методи билан) ҳосил қилинадиган ечим аниқ ечимга яқин бўлади.

Агар h қадам доимий, яъни $h = \frac{X - x_0}{N}$ бўлса, у ҳолда (3.51) ни қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\left|\varepsilon_n\right| \le \exp\left(LX\right)\left(c\left(X - x_0\right)h^s + \frac{X - x_0}{h}\delta + \left|\varepsilon_0\right|\right). \qquad (3.52)$$

Бу баҳодан кўрамизки, агар $h \to 0$ да ушбу

$$\varepsilon_0 \to 0, \frac{\delta}{h} \to 0 \qquad (3.53)$$

муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда $[x_0, X]$ чекли оралиқнинг ихтиёрий нуқтасида бир қадамли метод билан топилган тақрибий ечим аниқ ечимга яқинлашади.

Хусусий ҳолда, агар $\varepsilon_0 = 0$, $\delta_i = 0\left(i = \overline{1, N}\right)$ бўлса, у ҳолда (3.52) баҳо

$$\left|\varepsilon_n\right| \le c\left(X - x_0\right)\exp\left(XL\right)h^s$$

кўринишга эга бўлади, бу *методнинг хатолигидир.*

Реал ҳисоблаш жараёнида $[x_0, X]$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтасида берилган s-тартибли аниқликдаги бир қадамли метод билан топилган тақрибий ечим дастлабки Коши масаласининг ечимига h^s тезлик билан яқинлашиши учун (3.52) формулага кўра

$$\varepsilon_0 = 0\left(h^{s+1}\right), \delta = 0\left(h^{s+1}\right)$$

шартлар бажарилиши етарлидир. Бу шартларнинг бажарилиши назарий жиҳатдан мумкин бўлса ҳам, реал ҳисоблашларда буларни таъминлаш қийин. Одатда, ЭҲМ да h ни ўзгартирганда ε_0 ва $\delta_i\left(i = \overline{1, N}\right)$ хатоликлар абсолют қиймати билан қуйидан чегараланган. ЭҲМ нинг хоналилиги сақланса, қадамни кичрайтирганда ҳам ε_0 йўқотилмас хато умуман ўзгармайди.

Тақрибий ечим хатолигини яхлитлаш ҳисобидан келиб чиққан қисми — ҳисоблаш хатолиги эса (3.52) баҳода δ/h кўпаювчи қатнашганлиги учун $h \to 0$ да h^{-1} тезлик билан ўсиб боради. Юқорида кўрганимиздек, методнинг хатолиги h^s тезликда камаяди. Шунинг учун ҳам h нинг миқдорига боғлиқ равишда тақрибий ечим тўлиқ хатолигининг бош қисмини, одатда, ё метод хатолиги (h нинг нисбатан катта қийматларида), ёки ҳисоблаш хатолиги (h нинг жуда кичик қийматларида) ташкил этади. Агар дастлабки шарт қўпол равишда берилган бўлса, у ҳолда йўқотилмас хатолик ҳам бошқа хатоликларга нисбатан устун бўлиши мумкин. Аммо қадамни жуда катта ёки жуда кичик қилиб олганда метод хатолиги ёки ҳисоблаш хатолиги энг устун чиқади ва демак, катта ёки жуда кичик қадамлар учун ҳисоблаш натижаси яроқсиз бўлиб қолади. Шунинг учун ҳам h нинг шундай қийматини танлаш керакки, (3.52) нинг ўнг томони энг кичик қийматни қабул қилсин. Қўпол қилиб айтганда, методнинг хатолиги билан ҳисоблаш хатолигининг улушлари тенг бўлишини таъминлаш керак. Бу ерда йўқотилмас хатоликнинг ҳам улуши катта бўлмаслиги керак. Бу ҳолда ҳисоблаш жараёни *мувозанатга келтирилган* (балансланган) бўлади. Ҳисоблаш амалиётида метод хатолиги миқёсида йўқотилмас хато ва ҳисоблаш хатоси натижага таъсир қилмаслигига эришилади. Бу ерда айтилган мулоҳазалар (3.52) баҳога асосланган, унинг ўзи эса оширилгандир. Масалан, яхлитлаш хатоликлари ҳар хил ишорага эга бўлиб, бир-бирининг ўрнини тўлдириши (компенсация қилиши) мумкин, формула хатолиги ҳисоблаш жараёнининг ҳар бир қадамида ўз ишорасини сақлаши шарт эмас ва ҳ.к. Аслида буларнинг ҳаммаси юқоридаги манзарани унча ўзгартирмайди.

Юқорида айтилганлардан шундай хулосага келамизки, ҳисоблаш жараёнини ташкил қилаётганда ҳисоблаш методини, h қадам миқдорини, натижанинг талаб қилинган аниқлигини, дастлабки маълумотларнинг аниқлигини ва ҳисоблаш аниқлигини ўзаро мувофиқлаштириш керак. Баъзан шундай мувофиқлаштириш учун модел тарзидаги масалалар қаралади. Бу омилларни қисман мувофиқлаштириш (3.52) баҳо асосида олиб борилади. Ҳисоблаш амалиёти кўрсатадики, масалаларнинг берилган синфи ва ЭҲМ нинг аниқ бирор типи учун қадамнинг юқоридан ва қуйидан чегараланган шундай соҳаси мавжудки, унда танланган метод хатолигининг бош ҳади тақрибий ечимнинг тўлиқ хатолиги миқдори ҳақида яхши тасаввур беради. Бу соҳанинг қуйи чегараси ЭҲМ нинг хоналилигига жиддий равишда боғлиқдир. Хоналилиги катта ЭҲМ лар учун бу қуйи чегара кичикдир, чунки бунда δ кичик бўлиб, $\frac{\delta}{h}$ нисбат ўзининг критик нуқтасига h нинг кичикроқ қийматида эришади.

8.4-§. КЎП ҚАДАМЛИ АЙИРМАЛИ МЕТОДЛАР

8.4.1. Масаланинг қўйилиши. Бу бандда

$$\frac{du}{dx} = f(x,u),\ u(0) = u_0 \tag{4.1}$$

Коши масаласини ечиш учун қадами $h = x_j - x_{j-1}$ доимий бўлган

$$\Delta_h = \{x_n = nh;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

тўрни киритамиз ва Δ_h тўр устида аниқланган функцияларни $y_n = u(x_n)$, $f_n = f(x_n, y_n)$ орқали белгилаймиз. Биз бу ерда Коши масаласини m-қадамли айирмали методлар билан тақрибий ечишни кўриб чиқамиз. Бу методлар орасида кенг қўлланиладиганлари

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} a_{mi} y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{m} b_{mi} f_{n-i} \tag{4.2}$$

муносабат билан аниқланади, бу ерда a_{mi} ва b_{mi} лар n га боғлиқ бўлмаган коэффициентлар. Бу методлар *чизиқли-айирмали методлар* ёки *чизиқли-айирмали схемалар* дейилади. (4.2) тенгламага y_n ни олдин топилган y_0, y_1, ... , y_{n-1} қийматлар орқали ифодаланадиган рекуррент муносабатдек қараш керак. Ҳисоб $n = m$ дан, яъни

$$y_m = \sum_{i=1}^{m} a_{mi} y_{m-i} + h \sum_{i=0}^{m} b_{mi} f_{m-i}$$

тенгламадан бошланади. Бундан кўрамизки, ҳисобни бошлаш учун m та y_0, y_1, ... , y_{m-1} дастлабки қийматларни кўрсатмоқ керак. Бу ерда $y_0 = u_0$ бошланғич шартдан топилади, қолган y_1, y_2, ... , y_{m-1} ларни эса бошқа методлар, масалан, Рунге-Кутта методи ёрдамида топиш мумкин. Кейинги мулоҳазаларда y_0, y_1, ... , y_{m-1} дастлабки қийматлар берилган, деб фараз қиламиз.

Агар $b_{m0} = 0$ бўлса, у ҳолда (4.2) метод *ошкор* ёки *экстраполяцион* дейилади, бу ҳолда y_n ошкор равишда y_{n-m}, y_{n-m-1}, ... , y_{n-1} орқали ифодаланади. Агар $b_{m0} \neq 0$ бўлса, у ҳолда метод *ошкормас* ёки *интерполяцион* дейилади. Бу ерда y_n

$$y_n - b_{m0} h f(x_n, y_n) = \Phi(y_{n-m}, y_{n-m+1}, \ldots, y_{n-1})$$

чизиқли бўлмаган тенгламадан топилади, бунда

$$\Phi(y_{n-m}, y_{n-m+1}, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{m} (a_{mi} y_{n-i} + h b_{mi} f_{n-i}).$$

Одатда, дастлабки яқинлашиш $y_n^{(0)}$ ни y_{n-1} га тенг деб олиб, бу тенглама Ньютон методи билан ечилади.

Ҳисоблаш амалиётида (4.2) кўп қадамли методларнинг хусусий ҳоли бўлган *Адамс методлари* кенг тарқалгандир. Бунда $u'(x)$ фақат x_{n-1} ва x_n икки нуқтага кўра аппроксимация қилинади, яъни $a_{m1} = 1$, $a_{mi} = 0$, $i = 2, 3, \ldots, m$.

Шундай қилиб, Адамс методлари

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{i=0}^{m} b_{mi} f_{n-i} \tag{4.3}$$

кўринишга эга. Агар $b_{m0} = 0$ бўлса, Адамс методлари *экстраполяцион* бўлиб, $b_{m0} \neq 0$ бўлганда эса *интерполяциондир.*

Кейинчалик (4.2) айирмали методларни ўрганишда a_{mi} ва b_{mi} коэффициентлар танланишининг аппроксимациянинг хатолигига ва турғунлик ҳамда яқинлашиш масаласига таъсирини кўриб чиқамиз.

8.4.2. Кўп қадамли методлардаги аппроксимациянинг хатолиги. Дифференциал тенглама *ечимини аппроксимациялашдаги хатолик* ёки (4.2) *айирмали схеманинг боғланишсизлиги* деб

$$r_{n-1} = \frac{1}{h}\left[u(x_n) - \sum_{i=1}^{m} a_{mi} u(x_{n-i})\right] - \sum_{i=0}^{m} b_{mi} f\left(x_{n-i}, u(x_{n-i})\right) \tag{4.4}$$

миқдорга айтилади.

Таъриф. Агар $h \to 0$ да

$$\|r\|_1 = \max_{x_0 \le x_n \le x_0 + X} |r_n| \to 0$$

муносабат ўринли бўлса, m-қадамли схема $[x_0, x_0 + X]$ оралиқда *дифференциал масалани ечимда аппроксимация қилади* дейилади.

Биз ҳозир a_{mi} ва b_{mi} коэффициентларга боғлиқ равишда $h \to 0$ да аппроксимация тартибини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, қаралаётган функциялар керакли силлиқликка эга бўлсин. Энди $f(x_{n-i}, u(x_{n-i})) = u'(x_{n-i})$ ва $x_{n-i} = x_n - ih$ эканлигини эслаб, $x = x_n$ нуқтада Тейлор формуласига кўра

$$u_{n-i} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-ih)^k u^{(k)}(x_n)}{k!} + 0\left(h^{p+1}\right),$$

$$f(x_{n-i}, u_{n-i}) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-ih)^{k-1} u^{(k)}(x_n)}{(k-1)!} + 0\left(h^{p}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ифодаларни (4.4) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$r_{n-1}=\frac{1}{h}\left[u(x_n)-\sum_{i=1}^{m}a_{mi}\sum_{k=0}^{p}\frac{(-ih)^k}{k!}u^{(k)}(x_n)-\right.$$

$$\left.-h\sum_{i=0}^{m}b_{mi}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-ih)^{k-1}}{(k-1)!}u^{(k)}(x_n)\right]+0(h^p)=$$

$$=\frac{1}{h}\left(1-\sum_{i=1}^{m}a_{mi}\right)u(x_n)-\sum_{m=1}^{p}\frac{h^{k-1}}{k!}\left[\sum_{i=1}^{m}(-i)^k a_{mi}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{m}k(-i)^{k-1}b_{mi}\right]u^{(k)}(x_n)+0(h^p)=$$

$$=\frac{A_0}{h}u(x_n)+\sum_{k=1}^{p}A_k\frac{h^{k-1}}{k!}u^{(k)}(x_n)+0(h^p),$$

бу ерда

$$A_0=1-\sum_{i=1}^{m}a_{mi},\ A_k=\sum_{i=0}^{m}(ia_{mi}-kb_{mi})(-i)^{k-1},\ k=1,2,...,p.$$

Қулайлик учун қуйидаги леммада

$$a^{*}_{m_0}=1,\ a^{*}_{m_i}=-a_{mi},\ i=1,2,...,m \tag{4.5}$$

деб оламиз.

Лемма. Фараз қилайлик, $u(x)$ ихтиёрий силлиқ функция бўлсин,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{m}\frac{a^{*}_{mi}u(x-ih)}{h}=u'(x),\\&\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{m}b_{mi}f(x-ih,\ u(x-ih))=f(x,\ u(x))\end{aligned} \tag{4.6}$$

муносабатлар ўринли бўлиши, яъни (4.2) айирмали схема (4.1) тенгламани аппроксимация қилиши учун

$$A_0=A_1=0,\ b_{m0}+b_{m1}+...+b_{mm}=1 \tag{4.7}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Тейлор формуласига кўра

$$u(x-ih)=u(x)-ihu'(x)+0(h^2),$$

$$f(x-ih,\ u(x-ih))=f(x,\ u(x))+0(h).$$

Бу ифодаларни (4.6) нинг чап томонига қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\lim_{h\to 0}\left(\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{a_{mi}^{*}}{h}u(x)\right)+\sum_{i=0}^{m}a_{mi}^{*}(-i)u'(x)+0(h)\right)=u'(x),$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\left(\sum_{i=0}^{m}b_{mi}\right)f(x,u(x))+0(h)\right)=f\left(x,u(x)\right).$$

Бу муносабатлар ўринли бўлиши учун

$$\sum_{i=0}^{m}a_{mi}^{*}=0,\ -\sum_{i=0}^{m}ia_{mi}^{*}=1,\ \sum_{i=0}^{m}b_{mi}=1$$

ёки (4.5) га кўра

$$1-\sum_{i=1}^{m}a_{mi}=0,\ \sum_{i=0}^{m}ia_{mi}=1,\ \sum_{i=0}^{m}b_{mi}=1 \tag{4.8}$$

тенгликларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Энди

$$A_0=1-\sum_{i=1}^{m}a_{mi},\ A_1=-\sum_{i=0}^{m}ia_{mi}-\sum_{i=0}^{m}b_{mi}$$

тенгликларни ҳисобга олсак, (4.7) тенглик, демак, лемманинг исботи келиб чиқади.

Агар

$$A_0=A_1=\ldots=A_p=0 \tag{4.9}$$

бўлса, у ҳолда

$$r_{n-1}=0(h^p)$$

бўлади ва (4.2) схема *p-тартибли аппроксимацияга эга* дейилади.

Осонлик билан кўриш мумкинки, агар $u(x)$ функция p-даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда (4.9) шартлар бажарилади ва $r_{n-1}\equiv 0$ бўлади. Демак, бу ҳолда (4.2) айирмали схема барча p-даражали кўпҳад учун аниқ тенгликка айланади. Умид қилиш мумкинки, $u(x)$ нинг ечими p-даражали кўпҳадлар билан яхши яқинлашадиган (4.1) дифференциал тенгламалар учун r_n етарлича кичик бўлади.

Шуни таъкидлаш керакки, (4.9) шартлар a_{mi}, b_{mi} ($i=0,1,\ldots,m$) ларга нисбатан ушбу

$$\sum_{i=1}^{m}a_{mi}=1,\ \sum_{i=0}^{m}i^{k-1}\left(ia_{mi}-kb_{mi}\right)=0,\ k=1,2,\ldots,p \tag{4.10}$$

$2m+2$ та номаълумли чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ташкил этади. Энди (4.8) ни эътиборга олиб, (4.10) ни бошқача ёзишимиз мумкин. Натижада ушбу $2m$ та номаълумли p та тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{m} ia_{mi} = 1,\ \sum_{i=1}^{m} i^{k-1}\left(ia_{mi} - kb_{mi}\right) = 0,\ k = 2,3,\ \dots,\ p, \tag{4.11}$$

b_{m0} коэффициент эса

$$b_{m0} = 1 - \sum_{i=1}^{m} b_{mi}$$

формула ёрдамида топилади. (4.10) система ортиғи билан аниқланган бўлмаслиги учун $p \le 2m$ деб талаб қиламиз. Бу талаб шуни билдирадики, m-қадамли айирмали методлар аппроксимациясининг тартиби $2m$ дан ошмайди.

Шундай қилиб, аппроксимациянинг эришиши мумкин бўлган энг юқори тартиби ошкормас ҳол m-қадамли методлар учун $2m$ бўлиб, ошкор ($b_{m0} = 0$) ҳол учун $2m$-1 дир.

Адамс методларида $a_{m1} = 1,\ a_{m2} = \dots = a_{mm} = 0$ бўлганлиги сабабли p-тартибли аппроксимация учун (4.11) шартлар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sum_{i=1}^{m} i^k b_{mi} = \frac{1}{k+1},\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ p-1,\ b_{m0} = 1 - \sum_{i=1}^{m} b_{mi}. \tag{4.12}$$

Бу системанинг детерминанти Вандермонд детерминанти бўлиб, i ҳар хил қиймат қабул қилади, шунинг учун ҳам бу система ихтиёрий m учун ягона ечимга эга.

Бундан кўрамизки, Адамснинг m-қадамли методида аппроксимациянинг энг юқори тартиби ошкормас ҳол учун $m+1$ бўлиб, ошкор ($b_{m0} = 0$) ҳол учун m дир.

8.4.3. Адамснинг экстраполяцион методлари. Юқорида айтганимиздек, Адамснинг m-қадамли ошкор

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{i=1}^{m} b_{mi} f_{n-i} \tag{4.13}$$

методи учун аппроксимациясининг энг юқори тартиби $p = m$. Номаълум коэффициентларни топиш учун (4.12) система бу ҳолда ушбу кўринишга эга:

$$\sum_{i=1}^{m} i^k b_{mi} = \frac{1}{k+1}, k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4.14}$$

Ҳар бир муайян m учун (4.12) системани ечиб, b_{m1}, b_{m2}, ... , b_{mm} ларни топамиз. Агар m = 1 бўлса, у ҳолда Адамс методи ушбу

$$y_n = y_{n-1} + hf_{n-1}$$

Эйлер методига айланади.

Адамс машҳур инглиз артиллеристи Бошфорт илтимосига кўра ўз методларини 1855 й. яратган эди. Бу методлар кейинчалик унутилган бўлиб, асримизнинг бошида норвегиялик математик Штёрмер томонидан қайта очилди.

Осонлик билан топиш мумкинки, m = 2, 3, 4, 5 бўлганда мос равишда аппроксимация тартиби m га тенг бўлган қуйидаги методларга эга бўламиз:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\left(3f_{n-1} - f_{n-2}\right),\ m = 2;$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{12}\left(23f_{n-1} - 16f_{n-2} + 5f_{n-3}\right),\ m = 3;$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}\left(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}\right),\ m = 4;$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{720}\left(1901f_{n-1} - 2774f_{n-2} + 2616f_{n-3} - \right.$$

$$\left. -1274f_{n-4} + 251f_{n-5}\right),\ m = 5.$$

Амалиётда Адамс методлари m = 1, 2, ... , 10 лар учун ишлатилади.

Машқ. Адамс методлари $m = 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ лар учун чиқарилсин.

Адамс методларини қуришда бошқача ёндашиш ҳам мумкин. Фараз қилайлик,

$$y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \tag{4.15}$$

тақрибий қийматлар ҳисобланган бўлиб, $n \geq k + 1$ бўлсин. Кейинги y_n ни ҳисоблаш учун алгебраик интерполяциялашдан фойдаланамиз. Бунинг учун $u'(x)$ нинг ушбу

$$x_{n-1-k},\ x_{n-k},\ \ldots,\ x_{n-1}, x_n,\ \ldots, x_{n-1+q} \tag{4.16}$$

$k + q + 1$ та нуқталардаги қийматларидан фойдаланиб, $(k + q)$ тартибли Лагранж интерполяцион кўпҳадини қурамиз (5.4-§):

$$L_{k+q}(x) = \sum_{j=-q}^{k} \frac{\omega_{k+q+1}(x) u'(x_{n-1-j})}{(x - x_{n-1-j})\omega'_{k+q+1}(x_{n-1-j})}, \tag{4.17}$$

бунда

$$\omega_{k+q+1}(x) = (x - x_{n-1-k})(x - x_{n-k})\dots(x - x_{n-1+q}).$$

Тугунлар бир хил узоқликда жойлашганлиги $x_j - x_{j-1} = h$ учун $x = x_{n-1} + th$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$x - x_{n-1-j} = h(t + j),\ \omega_{k+q+1}(x) = h^{k+q+1}\omega^{*}_{k+q+1}(t),$$

бунда

$$\omega^{*}_{k+q+1}(t) = (t+k)(t+k-1)\dots t(t-1)\dots(t-q),$$

$$\omega^{*}_{k+q+1}(x_{n-1-j}) = (-1)^{q+j} h^{k+q}(k-j)!(j+q)!.$$

Бу ҳолда (4.17) кўпҳад қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L_{k+q}(x_{n-1} + th) = \sum_{j=-q}^{k} \frac{(-1)^{q+j}\omega^{*}_{k+q+1}(t)}{(t+j)(j+q)!(k-j)!} u'(x_{n-1-j}). \tag{4.18}$$

Бу кўпҳаддан фойдаланиб, қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$u'(x) = L_{k+q}(x_{n-1} + th) + r_{k+q}(x_{n-1} + th), \tag{4.19}$$

бунда $r_{k+q}(x_{n-1} + th)$ интерполяциянинг қолдиқ ҳади. Агар $f(x, u)$ қаралаётган соҳада $(k + q + 1)$ тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қолдиқ ҳадни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$r_{k+q}(x_{n-1} + th) = \frac{h^{k+q+1}}{(k+q+1)!}\omega^{*}_{k+q+1}(t) u^{(k+q+2)}(\eta). \tag{4.20}$$

Бу ифодани биз $[x_{n-1}, x_n]$ оралиқда ишлатамиз. Шунинг учун, агар $q \geq 1$ бўлса, $x_{n-1-k} \leq \eta \leq x_{n-1+q}$ ва агар $q = 0$ бўлса, $x_{n-1-k} \leq \eta \leq x_n$ деб қараймиз.

Ушбу

$$u(x_n) = u(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} u'(x)dx = u(x_{n-1}) + h\int_0^1 u'(x_{n-1} + th)dt$$

формулада $u'(x_{n-1} + th)$ ни (4.19) формуланинг ўнг томони билан алмаштирамиз, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x_n)=u(x_{n-1})+h\int_0^1 L_{k+q}(x_{n-1}+th)dt+h\int_0^1 r_{k+q}(x_{n-1}+th)=$$
$$=u(x_{n-1})+h\sum_{j=-q}^{k} b_{kj}^{(q)}u'(x_{n-1-j})+R_{n,k}^{(q)}, \tag{4.21}$$

бунда

$$b_{kj}^{(q)}=(-1)^{j+q}\int_0^1 \frac{(t-q)\ldots t(t+1)\ldots(t+k)}{(t+j)(j+q)!(k-j)!}dt,$$
$$R_{n,k}^{(q)}=\frac{h^{k+q+2}}{(k+q+1)!}\int_0^1 \omega_{k+q+1}^{*}(t)u^{(k+q+2)}(x_{n-1}+th)dt. \tag{4.22}$$

Бу ерда $\omega_{k+q+1}^{*}(t)$ ўз ишорасини сақлайди ва $u^{(k+q+2)}(x_{n-1}+th)$ узлуксиз бўлганлиги учун қолдиқ ҳадни қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин:

$$R_{n,k}^{(q)}=\frac{h^{k+q+2}}{(k+q+1)!}u^{(k+q+2)}(\xi)\int_0^1 \omega_{k+q+1}^{*}(t)dt, \tag{4.23}$$

бунда $x_{n-1-k}\le\xi\le x_{n-1+q}$, агар $q\ge 1$ бўлса ва $x_{n-k-1}\le\xi\le x_n$, агар $q=0$ бўлса. Ҳосил қилинган (4.21) формуладан ҳар хил айирмали схема ва улар учун қолдиқ ҳаднинг ифодасини кўрсатиш мумкин. Бу методлар $q\ge 1$ бўлганда *интерполяцион* дейилади, $q=0$ ҳолга мос келадиган метод *экстраполяцион* дейилади. Бундай аталишларнинг сабаби қуйидагидан иборат: $L_{m+q}(x)$ интерполяцион кўпҳадни қуришда қатнашадиган, (4.10) тугунларни ўз ичига олган энг кичик оралиқ $[x_{n-1-k}, x_{n-1+q}]$дир. Агар $q=0$ бўлса, қаралаётган $[x_{n-1}, x_n]$ оралиқ $[x_{n-1-k}, x_{n-1}]$ оралиқдан ташқарида ётади; шунинг учун ҳам $[x_{n-1}, x_n]$ оралиқда экстраполяция қилинади; агар $q\ge 1$ бўлса, $[x_{n-1-k}, x_{n-1+q}]$ оралиқ $[x_{n-1}, x_n]$ оралиқни ўз ичига олади ва бу ерда асл маънода интерполяция қилинади.

Аввало, экстраполяция методини кўриб чиқамиз. $q=0$ бўлган ҳол учун (4.21) формулани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$u(x_n)=u(x_{n-1})+h\sum_{j=0}^{k} b_{kj}^{(0)}u'(x_{n-1-j})+R_{n,k}^{(0)}=$$
$$=u(x_{n-1})+h\sum_{j=1}^{k+1} b_{k,j-1}^{(0)}u'(x_{n-j})+R_{n,k}^{(0)}= \tag{4.24}$$
$$=u(x_{n-1})+h\sum_{j=1}^{m} b_{mj}u'(x_{n-j})+R_{n,m-1}^{(0)},$$

бунда $m = k + 1$ ва $b_{mj} = b_{k,j-1}^{(0)}$ бўлиб, $q = 0$ бўлганда у (4.22) формуладан аниқланади:

$$b_{mj} = (-1)^{j-1} \int_0^1 \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(t+j-1)(j-1)!(m-j)!} dt, \quad (4.25)$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Қолдиқ ҳад $R_{n,m} = R_{n,m-1}^{(0)}$ эса $q = 0$ бўлганда (4.23) дан қуйидагича ҳисобланади:

$$R_{n,m} = \frac{h^{m+1}}{m!} u^{(m+1)}(\xi) \int_0^1 t(t+1)\ldots(t+m-1) dt. \quad (4.26)$$

Бу белгилашларда (4.24) қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x_n) = u(x_{n-1}) + h\sum_{j=1}^{m} b_{mj} u'(x_{n-j}) + R_{n,m}. \quad (4.27)$$

Бу формула ҳисоблаш учун яроқсиздир, чунки унда номаълум $R_{n,m}$ қолдиқ ҳад, изланаётган ечим ҳосиласининг ушбу қийматлари

$$u'(x_{n-m}), u'(x_{n-m+1}), \ldots, u'(x_{n-1}) \quad (4.28)$$

ва $u(x_{n-1})$ қатнашади. Агар ечимнинг

$$u(x_{n-m}), u(x_{n-m+1}), \ldots, u(x_{n-1})$$

аниқ қийматлари маълум бўлса, у ҳолда (4.1) тенгламага кўра (4.28) миқдорларнинг аниқ қийматини топишимиз мумкин эди:

$$u'(x_{n-j}) = f(x_{n-j}, u(x_{n-j})), j = 1, 2, \ldots, m.$$

Аммо бизга изланаётган

$$y_{n-m}, y_{n-m+1}, \ldots, y_{n-1} \ (n \geq m)$$

ечимнинг фақат тақрибий қийматлари маълум ва булар орқали $u'(x_{n-j})$ ҳосиланинг y'_{n-j} тақрибий қийматини топиш мумкин:

$$y'_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j}) = f_{n-j}, j = 1, 2, \ldots, m. \quad (4.29)$$

Энди (4.27) формуладаги ҳосилаларни (4.29) тақрибий қийматлари билан, $u(x_{n-1})$ ни эса унинг тақрибий қиймати y_{n-1} билан алмаштирамиз ва $R_{n,m}$ қолдиқ ҳадни ташлаймиз, натижада қуйидаги тақрибий тенгликка эга бўламиз:

$$u\left(x_n\right) \cong y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{m} b_{mj} f_{n-j}. \qquad (4.30)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини y_n деб оламиз, у ҳолда

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{m} b_{mj} f_{n-j} \qquad (4.31)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, биз яна (4.13) тенгликка келдик. Бундан кўрамизки, b_{mj} коэффициентларни икки хил усул билан топишимиз мумкин: (4.14) системанинг ечими ёки (4.25) интегралнинг қиймати сифатида.

Мисол учун $m = 5$ бўлганда b_{mj} нинг сонли қийматини ва $R_{n,m}$ нинг ифодасини келтирамиз:

$$\left.\begin{aligned} & b_{51} = \frac{1901}{720},\ b_{52} = -\frac{2774}{720},\ b_{53} = \frac{2616}{720},\ b_{54} = \frac{1274}{720}, \\ & b_{55} = \frac{251}{720},\ R_{n,5} = \frac{95}{288} h^6 u^{(6)}(\xi). \end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

Машқ. (4.25) ва (4.26) формулалар ёрдамида $m = 6, 7, 8, 9, 10$ учун b_{mj} ва $R_{n,m}$ лар топилсин.

Биз юқорида (4.18) Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб, натижада (4.25), (4.26) формулаларни чиқардик. Шунга ўхшаш Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласини қўллаб, (4.30) формула ўрнига $f(x, u)$ функциянинг тугун нуқталаридаги қийматлари эмас, балки чекли айирмалари қатнашадиган Адамснинг экстраполяцион формуласини чиқаришимиз мумкин. Бу формула қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_{n-1} + \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{2}\Delta^2\xi_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\xi_{n-3} + \\ & + \frac{251}{720}\Delta^4\xi_{n-4} + \frac{95}{288}\Delta^5\xi_{n-5} + \frac{19087}{60480}\Delta^6\xi_{n-6} + \\ & + \frac{5275}{17280}\Delta^7\xi_{n-7} + \ldots + c_m\Delta^m\xi_{n-m}. \end{aligned} \qquad (4.33)$$

Бу ерда

$$\xi_i = hf_i,\ c_m = \frac{1}{m!}\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+m-1)\,dt,$$

$\Delta^i \xi_k$ эса $\xi(x)$ функциянинг $x_k, x_{k+1} ..., x_{k+j}$ нуқталардаги қийматлари бўйича тузилган i-тартибли чекли айирмасидир (5-бобга қ.). (4.33) формуланинг қолдиқ ҳадини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$R_{n,m} = h^{m+2} c_{m+1} u^{(m+2)}(\xi) .$$

Машқ. (4.33) формула исботлансин.

Энди (4.33) формуланинг $m = 4$ бўлгандаги хусусий ҳолини қараймиз:

$$\Delta y_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\xi_{n-3} + \frac{251}{720}\Delta^4\xi_{n-4} . \qquad (4.34)$$

Бу ерда $n = 4$ деб оламиз, у ҳолда

$$\Delta y_4 = \xi_4 + \frac{1}{2}\Delta\xi_3 + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_2 + \frac{3}{8}\Delta^3\xi_1 + \frac{251}{720}\Delta^4\xi_0 . \qquad (4.35)$$

Ҳисоблашни (4.35) формула билан бажариш учун қуйидаги жадвалдан фойдаланган маъқул:

x	y	Δy	$\xi = hf$	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
x_0	y_0		ξ_0				
		Δy_0		$\Delta\xi_0$			
x_1	y_1		ξ_1				
		Δy_1			$\Delta^2\xi_0$		
				$\Delta\xi_1$		$\Delta^3\xi_0$	
x_2	y_2		ξ_2		$\Delta^2\xi_1$		$\Delta^4\xi_0$
		Δy_2		$\Delta\xi_2$		$\Delta^3\xi_1$	
x_3	y_3		ξ_3		$\Delta^2\xi_2$		
		Δy_3		$\Delta\xi_3$			
x_4	y_4		ξ_4				
		Δy_4					
x_5	y_5		ξ_5				

(4.35) формуланинг ўнг томонидаги барча миқдорлар аниқ бўлиб, жадвалнинг пастки қия сатрида жойлашган. Биз Δy_4 ни топамиз, демак, шу билан y_5 ҳам аниқланади. Топилган y_5 га кўра $\xi_5 = hf(x_5, y_5)$ ни ҳисоблаймиз ва чекли айирмалар жадвалини яна бир қия сатр билан тўлдирамиз. Кейин (4.34) да $n = 6$ деб олиб, ҳисоблашни давом эттирамиз.

8.4.4. Адамснинг интерполяцион методлари. Юқорида Адамснинг интерполяцион методи

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{i=0}^{m} b_{mi} f_{n-i} \tag{4.36}$$

формула билан аниқланиб, $b_{m0} \neq 0$ эканлигини айтган эдик. Бу метод аппроксимациясининг тартиби $p = m + 1$ бўлиб, b_{mi} коэффициентлар $p = m + 1$ бўлганда (4.12) системадан, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} i^k b_{mi} = \frac{1}{k+1},\ k = 1, 2, ..., m,\ b_{m0} = 1 - \sum_{i=1}^{m} b_{mi}$$

системадан топилади. Бундан $m = 1$ учун аппроксимация тартиби икки бўлган методни ҳосил қиламиз:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\left(f_n + f_{n-1}\right),\ p = 2.$$

Бу метод *трапеция методи* деб ҳам аталади. Биз $m = 2$, 3,4, 5 бўлганда мос равишда ушбу $p = m + 1$ тартибли аппроксимацияга эга бўлган методларни ҳосил қиламиз:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{12}\left(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}\right),\ p = 3;$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}\left(9f_n + 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3}\right),\ p = 4;$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{720}\left(251f_n + 646f_{n-1} - 264f_{n-2} + 106f_{n-3} - 19f_{n-4}\right),\ p = 5;$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{1440}\left(475f_n + 1427f_{n-1} - 798f_{n-2} + \right.$$

$$\left. + 482f_{n-3} - 173f_{n-4} + 27f_{n-5}\right),\ p = 6.$$

Юқоридаги ошкормас методларда изланаётган y_n чизиқли бўлмаган кўринишда қатнашади. Шунинг учун ҳам бу тенгламалардан y_n ни топиш учун итерация методини қўллаш керак. Масалан, тўртинчи тартибли Адамс методи учун итерацион метод қуйидагича қўлланилади:

$$\begin{aligned} y_n^{(s+1)} &= \frac{3h}{8} f\left(x_n, y_n^{(s)}\right) + F_n, \\ F_n &= y_{n-1} + \frac{h}{12}\left[19 f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)\right] - 5 f\left(x_{n-2}, y_{n-2}\right) + f\left(x_{n-3}, y_{n-3}\right), \end{aligned} \tag{4.37}$$

бу ерда s — итерация номери. Дастлабки яқинлашиш $y_n^{(0)}$ сифатида Адамснинг учинчи тартибли ошкор методи ёрдамида топилган ечимни олиш мумкин, яъни

$$y_n^{(0)} = y_{n-1} + \frac{h}{12}\Big[23f(x_{n-1}, y_{n-1}) - 16f(x_{n-2}, y_{n-2}) +$$
$$+ 5f(x_{n-3}, y_{n-3})\Big].$$

Агар $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \le M$ бўлса, у ҳолда (4.34) *итерацион метод* яқинлашувчи бўлиши учун $\frac{3hM}{8} < 1$ шарт бажарилиши керак, бу эса етарлича кичик h учун доимо бажарилади. Агар (4.34) да фақат битта итерация олсак, яъни $s = 0$ бўлса, у ҳолда *предиктор-корректор (башоратчи-тузатувчи) методи* деб аталувчи методга эга бўламиз.

Адамс интерполяцион формуласини Лагранж интерполяцион кўпҳади ёрдамида ҳосил қилишни кўрамиз, бунинг учун (4.21) формулада $q = 1$ деб оламиз. У ҳолда

$$u(x_n) = u(x_{n-1}) + h\sum_{j=-1}^{k} b_{kj}^{(1)} u'(x_{n-1-j}) + R_{n,k}^{(1)} =$$
$$= u(x_{n-1}) + h\sum_{j=0}^{m} b_{mj}^{*} u'(x_{n-j}) + R_{n,m}^{*}, \tag{4.38}$$

бу ерда $m = k + 1$, $b_{mj}^{*} = b_{m-1,j+1}^{(i)}$, $R_{n,m}^{*} = R_{n,m-1}^{(1)}$.

Энди (4.21) ва (4.23) формулаларда $q = 1$, $k = m-1$ деб олиб, қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$b_{mj}^{*} = (-1)^{j} \int_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)\ldots(t+m-1)dt}{(t+j-1)(m-j)!\,j!}, \; j = 0,1\ldots,m, \tag{4.39}$$

$$R_{n,m}^{*} = \frac{h^{m+2}}{(m+1)!} u^{(m+2)}(\xi) \int_0^1 (t-1)t\ldots(t+m-1)dt. \tag{4.40}$$

Биз (4.24) формуладан (4.31) формулани қандай чиқарган бўлсак, худди шунга ўхшаш мулоҳазалар юритиб, (4.36) формуладан қуйидаги формулани чиқарамиз:

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=0}^{m} b_{mj}^{*} y_{n-j}. \tag{4.41}$$

Бу эса (4.3) формула билан устма-уст тушади.

Энди (4.39) формула ёрдамида $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ лар учун (4.41) Адамс интерполяцион формуласи коэффициентларини келтирамиз:

$$b_{00}^{*} = 1,$$
$$b_{10}^{*} = \frac{1}{2}, \quad b_{11}^{*} = \frac{1}{2},$$
$$b_{20}^{*} = \frac{5}{12}, \quad b_{21}^{*} = \frac{2}{3}, \quad b_{22}^{*} = -\frac{1}{12},$$
$$b_{30}^{*} = \frac{3}{8}, \quad b_{31}^{*} = \frac{19}{24}, \quad b_{32}^{*} = -\frac{5}{24}, \quad b_{33}^{*} = \frac{1}{24},$$
$$b_{40}^{*} = \frac{251}{720}, \quad b_{41}^{*} = \frac{323}{360}, \quad b_{42}^{*} = -\frac{11}{30}, \quad b_{43}^{*} = \frac{53}{360}, \quad b_{44}^{*} = -\frac{19}{720},$$
$$b_{50}^{*} = \frac{475}{1440}, \quad b_{51}^{*} = \frac{1427}{1440}, \quad b_{52}^{*} = -\frac{399}{720}, \quad b_{53}^{*} = \frac{241}{720},$$
$$b_{54}^{*} = -\frac{173}{1440}, \quad b_{55}^{*} = \frac{27}{1440}.$$

Адамснинг экстраполяцион ва интерполяцион методларини таққослаймиз. Бунинг учун (4.31) формулани

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=0}^{m-1} b_{m-1,j}^{*} f_{n-j} \tag{4.42}$$

формула билан солиштириш керак, бу формула (4.41) формуладан m ни m-1 билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлади, чунки бу формулаларни қуриш учун бир хил сондаги, яъни m та нуқталардан фойдаланилади. Жумладан, (4.31) формулада

$$x_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_{n-1}, \tag{4.43}$$

(4.42) формулада эса

$$x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n \tag{4.44}$$

тугунлардан фойдаланилган.

Маълумки, $u'(x)$ функцияни $[x_{n-1}, x_n]$ оралиқда (4.43) тугунлар ёрдамида қурилган интерполяцион кўпҳад билан яқинлаштиришдан (4.44) тугунлар ёрдамида қурилган кўпҳад билан яқинлаштириш аниқроқдир (6-бобга қ.). Шу маънода Адамснинг интерполяцион методи экстраполяцион методига нисбатан аниқроқдир. Буни яна ҳам яхшироқ англаш учун (4.31) ва (4.42) формулаларнинг қолдиқ ҳадларини m = 1, 2, 3, 4 учун (4.26) ва (4.40) формулалар ёрдамида топамиз ((4.40) формулада m ни m-1 билан алмаштириш керак):

$$R_{n,1} = \frac{h^2}{2}u''(\xi),\ R_{n2} = \frac{5h^3}{12}u'''(\xi), R_{n3} = \frac{3}{8}h^3u^{IV}(\xi), R_{n4} = \frac{251}{720}h^4u^{V}(\xi);$$
$$R_{n0} = -\frac{h^2}{2}u''(\xi), R_{n1}^{*} = -\frac{h^3}{12}u'''(\xi), R_{n2}^{*} = -\frac{h^4}{24}u^{IV}(\xi), R_{n3}^{*} = -\frac{19}{720}h^5u^{V}(\xi).$$

Булардан кўринадики, $R^{*}_{n,m-1}$ нинг сонли коэффициентлари $R_{n,m}$ никига нисбатан анча кичикдир.

Энди Адамс интерполяцион формуласининг бошқа кўринишини, яъни $f(x, u)$ чекли айирмаларининг қийматлари қатнашадиган кўринишини келтирамиз, бунинг учун Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласини (4.21) формулага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta y_{n-1} = \xi_n - \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} - \frac{1}{12}\Delta^2\xi_{n-2} - \frac{1}{24}\Delta^3\xi_{n-3} - \tag{4.45}$$
$$- \frac{19}{720}\Delta^4\xi_{n-4} - \frac{3}{160}\Delta^5\xi_{n-5} - \frac{863}{60480}\Delta^6\xi_{n-6} - \ldots - c^{*}_{m+1}\Delta^{m+1}\xi_{n-m+1},$$

бу ерда

$$\xi_i = hf_i,\ c^{*}_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\int_0^1 (t-1)t(t+1)\ldots(t+m-1)\,dt.$$

(4.45) формуланинг қолдиқ ҳадини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$R^{*}_{n,m} = h^{m+3}c^{*}_{m+2}u^{(m+3)}(\xi).$$

Агар (4.33) формула билан (4.45) формулани таққосласак, унда кўриниб турибдики, чекли айирмаларнинг тартиби ошган сари (4.45) формулада чекли айирмалар олдидаги коэффициентлар абсолют қийматлари билан (4.33) формуладагига нисбатан тезроқ камайиб боради. Бундай ҳолда эса, ўз навбатида, (4.45) ёйилмадаги ҳадлар абсолют қиймати билан (4.33) дагига нисбатан тезроқ камаяди.

Машқ. (4.45) формула исботлансин.

Энди (4.45) формуланинг $m = 3$ бўлгандаги хусусий ҳолини қараймиз:

$$\Delta y_{n-1} = \xi_n - \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} - \frac{1}{12}\Delta^2\xi_{n-2} - \frac{1}{24}\Delta^3\xi_{n-3} - \frac{19}{720}\Delta^4\xi_{n-1}. \tag{4.46}$$

Бу ерда $n = 5$ деб оламиз, у ҳолда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\Delta y_4 = \xi_5 - \frac{1}{2}\Delta\xi_4 - \frac{1}{12}\Delta^3\xi_3 - \frac{1}{24}\Delta^3\xi_2 - \frac{19}{720}\Delta^4\xi_1. \tag{4.47}$$

Ҳисоблашни (4.46), (4.47) формулалар билан бажариш учун қуйидаги жадвалдан фойдаланган маъқул:

x	y	Δy	$\xi = hf$	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
x_0	y_0		ξ_0				
		Δy_0		$\Delta\xi_0$			
x_1	y_1		ξ_1		$\Delta^2\xi_0$		
		Δy_1		$\Delta\xi_1$		$\Delta^3\xi_0$	
x_2	y_2		ξ_2		$\Delta^2\xi_1$		$\Delta^4\xi_0$
		Δy_2		$\Delta\xi_2$		$\Delta^3\xi_1$	
x_3	y_3		ξ_3		$\Delta^2\xi_2$		$\Delta^4\xi_1$
		Δy_3		$\Delta\xi_3$			
x_4	y_4		ξ_4		$\Delta^2\xi_3$	$\Delta^3\xi_2$	
		Δy_4		$\Delta\xi_4$			
x_5	y_5		ξ_5				

Ҳисоблашни (4.45) формула ёрдамида олиб борганда

$$\xi_n, \Delta\xi_{n-1}, \ \Delta^2\xi_{n-2}, \dots, \ \Delta^{m+1}\xi_{n-m-1}$$

номаълум айирмаларнинг дастлабки яқинлашишлари Адамснинг экстраполяцион методи ёрдамида ҳисобланади. Дарҳақиқат, $y_n^{(0)}$ ни (4.33) формула ёрдамида ҳисоблаш керак. Бу эса $\xi_n^{(0)}$ ни топишга имкон беради, натижада қолган айирмаларнинг дастлабки яқинлашишини топиш мумкин бўлади.

Дастлабки яқинлашишларни топишнинг бошқача усулини ҳам кўрсатиш мумкин. Буни (4.47) формула мисолида кўрамиз. Бу формуланинг ўнг томонида ва жадвалнинг поғонали синиқ чизиғининг пастида

$$\xi_5, \ \Delta\xi_4, \ \Delta^2\xi_3, \ \Delta^3\xi_2, \ \Delta^4\xi_1 \qquad (4.48)$$

айирмалар жойлашган бўлиб, уларнинг қийматлари номаълум. Буларни итерация методи билан топиш учун уларнинг дастлабки яқинлашишини кўрсатиш керак. Агар h қадам тўғри танланган бўлса, у ҳолда охирги маъноли рақамнинг бир неча бирлиги чегарасида

$$\Delta^4\xi_1^{(0)} \cong \Delta^4\xi_0$$

бўлади, шунинг учун $\Delta^4\xi_1$ нинг дастлабки яқинлашиши сифатида $\Delta^4\xi_1 = \Delta^4\xi_0$ деб олишимиз мумкин. Бу эса (4.48) айирмаларнинг

$$\xi_5^{(0)}, \Delta\xi_4^{(0)}, \Delta^2\xi_3^{(0)}, \Delta^3\xi_2^{(0)}, \Delta^4\xi_1^{(0)} \qquad (4.49)$$

дастлабки яқинлашишларини қуйидаги формулалар ёрдамида топишга имкон беради:

$$\Delta^3\xi_2^{(0)} = \Delta^3\xi_1 + \Delta^4\xi_1^{(0)},$$

$$\Delta^2\xi_3^{(0)} = \Delta^2\xi_2 + \Delta^3\xi_2^{(0)},$$

$$\Delta\xi_4^{(0)} = \Delta\xi_3 + \Delta^2\xi_3^{(0)},$$

$$\xi_5^{(0)} = \xi_4 + \Delta\xi_4^{(0)}.$$

Энди (4.49) дастлабки яқинлашишларни (4.47) формулага қўйиб, $\Delta y_4^{(1)}$ ни ва

$$\Delta y_5^{(1)} = y_4 + \Delta y_4^{(1)}$$

ни топамиз. Бундан кейин

$$\xi_5^{(1)} = hf\left(x_5, y_5^{(1)}\right)$$

ни ҳисоблаймиз. Агар $\xi_5^{(1)} = \xi_5^{(0)}$ тенглик бажарилса, у ҳолда $y_5 = y_5^{(1)}$ деб олиб, y_5 ни ҳисоблашни тугатамиз. Агар $\xi_5^{(1)} \neq \xi_5^{(0)}$ бўлса, у ҳолда $\xi_5^{(1)}$ га кўра (4.49) айирмаларнинг янги

$$\xi_5^{(1)}, \Delta\xi_4^{(1)}, \Delta^2\xi_3^{(1)}, \Delta^3\xi_2^{(1)}, \Delta^4\xi_1^{(1)} \tag{4.50}$$

қийматини кетма-кет қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\Delta\xi_4^{(1)} = \xi_5^{(1)} - \xi_4,$$

$$\Delta^2\xi_3^{(1)} = \xi_4^{(1)} - \Delta\xi_3,$$

$$\Delta^3\xi_2^{(1)} = \Delta^3\xi_3^{(1)} - \Delta^2\xi_2,$$

$$\Delta^4\xi_1^{(1)} = \Delta^3\xi_2^{(1)} - \Delta^3\xi_1.$$

Топилган (4.50) қийматларни (4.47) формулага қўйиб, $\Delta y_4^{(2)}$ ни, демак, $y_5^{(2)}$ ни топамиз. Агар $y_5^{(2)} = y_5^{(1)}$ бўлса, у ҳолда $y_5 = y_5^{(2)}$ деб оламиз. Акс ҳолда итерацияни давом эттирамиз. Табиийки, итерацияни кўп давом эттиришнинг фойдаси йўқ. Қадам шундай танланиши керакки, битта ёки иккита итерация етарли бўлсин. y_5 топилгандан кейин шу усул билан y_6 ва ҳ. к. топилади.

8.4.5. Кўп қадамли айирмали методларнинг турғунлиги, яқинлашиши ва хатолигини баҳолаш*. Бу бандда m ни белгилаб, қулайлик учун $a_{mi} = a_i$, $b_{mi} = b_i$ деб ёзамиз. У ҳолда (4.2) ва (4.4) тенгликлар мос равишда қуйидагича ёзилади:

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} a_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{m} b_i f_{n-i}, \tag{4.51}$$

$$u(x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i u(x_{n-i}) + h \sum_{i=0}^{m} b_i f\big(x_{n-i}, u(x_{n-i})\big) + h r_{n-1}, \tag{4.52}$$

бунда r_{n-1} (4.1) дифференциал тенгламани аппроксимациялашдаги хатолик бўлиб, аппроксимация тартиби p бўлса, яъни (4.9) шарт бажарилса,

$$r_{n-1} = 0\left(h^p\right)$$

бўлади.

Табиийки, (4.1) Коши масаласини (4.51) тақрибий формула билан топишда ҳисоблашнинг ҳар бир қадамида хатоликка йўл қўйилади. Бу хатоликлар уч омилга боғлиқ. Биринчидан, дастлабки (4.1) дифференциал тенглама (4.51) чекли-айирмали тенглама орқали муайян аниқлик билан алмаштирилган ва бундай алмаштиришнинг миқдори r_n (4.52) тенглик билан аниқланади. Иккинчидан, (4.51) формула бўйича ҳисоблаш муайян аниқликда олиб борилади ва яхлитлаш хатолиги α_{n-1} қуйидаги тенгликдан аниқланади:

$$\tilde{y}_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \tilde{y}_{n-i} + h \sum_{i=0}^{m} b_i f\left(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-i}\right) - \alpha_{n-1}, \tag{4.53}$$

бунда $\tilde{y}_n$ миқдор y_n нинг амалда (4.51) формула ёрдамида ҳисобланган қиймати. Учинчидан, $i = m, m-1, \dots, N\left(N = \left[\frac{X - x_0}{h}\right]\right.$ бўлганда тақрибий ечимнинг хатолиги $\varepsilon_i = u(x_i) - \tilde{y}_i$ жадвалнинг боши $y_i = \tilde{y}_i$ $(i = 0, 1, \dots, m-1)$ ни қураётгандаги $\varepsilon_i = u(x_i) - \tilde{y}_j$ $(i = 0, 1, \dots, m-1)$ хатоликларга боғлиқ.

Энди (4.53) тенгликни (4.52) дан айириб, тақрибий ечимнинг хатолиги ε_n учун қуйидаги айирмали тенгламага эга бўламиз:

* Мазкур бандни ёзишда [23] дан фойдаланилди.

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_{n-i} + h \sum_{i=0}^{m} b_i \Big[f\big(x_{n-i}, \tilde{y}_{n-i} + \varepsilon_{n-i}\big) - f\big(x_{n-i}, \tilde{y}_{n-i}\big)\Big] + h r_{n-1} + \alpha_{n-1}, \tag{4.54}$$

бунда $n = m, m + 1, \ldots , N$ қийматларни қабул қилади.

Юқоридаги (4.54) айирмали тенглама чизиқли бўлмаганлиги учун тақрибий ечим хатолигини текшириш мушкулдир.

Ҳисоблаш амалиётида, одатда, тақрибий ечимнинг хатолигини ҳосил қилишда юқоридаги омил ҳам қатнашади.

Одатга кўра, биз аниқ ечимга яхши яқинлашишимиз учун тўр қадамини кичрайтириб боришимиз керак. Қадамнинг кичрайтирилиши эса n $\left(n = \frac{x_n - x_0}{h}\right)$ нинг ортиб бориши билан боғлиқ — бу эса кўп миқдордаги қадамлар учун ҳисоблашни бажаришни талаб қилади; қадам белгиланган бўлиб, x нуқта дастлабки x_0 нуқтадан узоқ масофада турганда ҳам шунга ўхшаш ҳолат пайдо бўлади. (4.51) формулани кўп марталаб қўллаганда хатолик тўпланиб, умуман олганда, хатоликнинг миқдори қадамдан қадамга ортиб боради. Қадамнинг сони ошган сари бу хатонинг ўзгариш қонунини билиш катта аҳамиятга эга. Бу қонун эса дастлабки дифференциал масалага ҳамда танланган (4.51) ҳисоблаш қоидасига боғлиқдир. Агар (4.51) ҳисоблаш қоидаси номувофиқ танланган бўлса, тақрибий ечим хатолигининг ўсиши шунча тез бўлиши мумкинки, қадамларнинг сони унча катта бўлмаса ҳам, бу хатолик рухсат этилган чегарадан чиқиб кетиши мумкин. Хатолиги шундай қонун билан ўсадиган (4.51) ҳисоблаш қоидаси *нотурғун* дейилади. Бундай қоидалар катта сондаги ҳисоблашлар учун ярамайди.

1-таъриф. Агар қоида бўйича топилган тақрибий ечим $h \to 0$ да дастлабки масаланинг аниқ ечимига яқинлашса, мазкур ҳисоблаш қоидаси *турғун* дейилади.

Энди (4.51) ҳисоблаш қоидаси турғун бўлиши учун унинг коэффициентлари қайси шартни қаноатлантириши кераклигини кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик, Oxy текислигида шундай D соҳа мавжуд бўлсинки, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) (4.1) Коши масаласи аниқ ечимининг графиги шу соҳада ётсин;

2) ҳар бир етарлича кичик h учун (4.52) формула ёрдамида топилган ечим ҳам шу соҳада ётсин;

3) бу соҳа Oy ўқи йўналиши бўйича қаварик бўлсин, яъни Oy ўқига параллел бўлиб, четки нуқталари D да ётувчи ҳар қандай

тўғри чизиқ D да ётсин. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ функция шу соҳада узлуксиз бўлиб, $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le L$ шартни қаноатлантирсин.

Шу шартлар бажарилган деб, ε_n ни баҳолаймиз. Лагранж формуласига кўра қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$f\left(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j} + \varepsilon_{n-j}\right) - f\left(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j}\right) = l_{n-j}\varepsilon_{n-j}, \tag{4.55}$$

бу ерда

$$l_{n-j} = \frac{\partial}{\partial y} f\left(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j} + \theta_{n-j}\varepsilon_{n-j}\right),\ 0 < \theta_{n-j} < 1.$$

Энди (4.55) ни (4.54) га қўйиб, ε_n учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_{n-i} + h\sum_{i=0}^{m} b_i l_{n-i}\varepsilon_{n-i} + hr_{n-1} + \alpha_{n-1}. \tag{4.56}$$

Бу айирмали тенгламада $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$ коэффициентлар олдида h кўпаювчи бўлиб турибди, шунинг учун кутиш мумкинки, h етарлича кичик бўлганда тақрибий ечим хатосининг рафторига* b_i ларнинг таъсири $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ларга нисбатан камроқ бўлади.

Энди

$$q_n = h\sum_{i=0}^{m} b_i l_{n-i}\varepsilon_{n-i} + hr_{n-1} + a_{n-1} \tag{4.57}$$

деб белгилаб олиб, (4.56) тенгликни

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_{n-i} + q_n \tag{4.58}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Биз 7-боб 12-§ да аниқмас интегралларни ҳисоблашда (12.8) айирмали тенгламанинг ечимини (12.12) кўринишда ёзиб олган эдик. Агар шундан фойдалансак, (4.58) тенгламанинг ечимини

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{A}_n^{(i)} \varepsilon_i + \sum_{j=m}^{n} \tilde{A}_{n+m-j}^{(m)} q_i \tag{4.59}$$

---

* Рафтор (русча «поведение») ўзини тутиши деган маънони англатади.

кўринишда ёзишимиз мумкин. Бунда қатнашадиган $\Gamma_n^{(i)}$ $(i = 0,1,\ldots, m-1)$ Грин функциялари ҳақида маълумки (7-боб 12-§ га қ.), улар (4.58) айирмали тенгламага мос келадиган

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_{n-i}$$

бир жинсли чизиқли-айирмали тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Демак, улар бу тенгламанинг бошқа фундаментал ечимлар системаси $\lambda_i^n n^j \left(j = 0,1,\ldots,k_i - 1; i = 1,2\ldots,q\right)$ дан махсусмас матрицали алмаштириш натижасида ҳосил қилинади, бу ерда l_1, l_2, ... , l_q сонлар ушбу

$$A(\lambda) \equiv \lambda^m - \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda^{m-j} = 0 \tag{4.60}$$

характеристик тенгламанинг карралиги мос равишда k_1, k_2, ... , k_q $\left(\sum_{i=1}^{q} k_i = m\right)$ бўлган илдизларидир. Кўриниб турибдики, $n \to \infty$ да $\Gamma_n^{(i)} \left(i = 0,1,\ldots,m-1\right)$ функцияларнинг рафтори $\lambda_i^n n^j \left(j = 0,\overline{k_i - 1}, i = \overline{1,q}\right)$ функцияларнинг рафтори билан аниқланади. Энди (4.57) дан q_n нинг қийматини (4.59) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{m-1} \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i + h \sum_{j=m}^{n} \Gamma_{n+m-j}^{(m)} \sum_{i=0}^{m} b_i l_{j-i} \varepsilon_{j-i} + \sum_{j=m}^{n-1} \Gamma_{n+m-j}^{(m)} \left(hr_j + \alpha_j\right). \tag{4.61}$$

Бу тенгликда ε_{j-i} олдидаги коэффициентларни йиғиб, уни бошқача кўринишда ёзамиз. Бунинг учун $s = j - i$ деб оламиз, у ҳолда $m \le j \le n$, $0 \le i \le m$ бўлганлиги учун $0 \le s \le n$ бўлади. Энди s ни белгилаб олиб, $h\varepsilon_s l_s$ олдида турган $\Gamma_{n+m-j}^{(m)} b_i$ коэффициентларни йиғамиз. Бу ерда $i = j - s$ ва $m \le j \le n$ бўлганлиги учун $m - s \le i \le n - s$ бўлади. Иккинчи томондан эса $0 \le i \le m$. Шунинг учун ҳам $\max(0, m - s) \le i \le \min(m, n - s)$ бўлиб, $h\varepsilon_s l_s$ олдида $\sum_{i=\max(0,m-s)}^{\min(m,n-s)} b_i \Gamma_{n+m-i-s}^{(m)}$ коэффициент туради. Демак, (4.61) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varepsilon_n = \sum_{s=0}^{m-1} \Gamma_n^{(s)} \varepsilon_s + h \sum_{s=0}^{n} l_s \varepsilon_s \sum_{i=\max(0,m-s)}^{\min(m,n-s)} b_i \Gamma_{n+m-i-s}^{(m)} + \sum_{j=m}^{n-1} \Gamma_{n+m-j}^{(m)} \left(hr_j + \alpha_j \right), \quad (4.62)$$

бунда $m \le n \le N$.

Энди (4.62) тенгликнинг ўнг томонида ε_n қатнашадиган ҳадни ажратиб ёзамиз:

$$hl_n \varepsilon_n \sum_{i=\max(0,m-n)}^{\min(m,0)} b_i \Gamma_{m-i}^{(m)} = hl_n \varepsilon_n b_0 \Gamma_m^{(m)}.$$

Бу ҳадни (4.62) тенгликнинг чап томонига кўчирамиз ва аввалги $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ хатоликлар қатнашадиган ҳадларни алоҳида ёзамиз. Натижада (4.62) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left(1 - hl_n b_0 \Gamma_m^{(m)}\right) \varepsilon_n = \sum_{s=0}^{m-1} \left[\Gamma_n^{(s)} + hl_s \sum_{i=m-s}^{\min(m,n-s)} b_i \Gamma_{n+m-i-s}^{(m)} \right] \varepsilon_s +$$
$$+ h \sum_{s=m}^{n-1} l_s \varepsilon_s \sum_{i=0}^{\min(m,n-s)} b_i \Gamma_{n+m-i-s}^{(m)} + \sum_{j=m}^{n-1} \Gamma_{n+m-j}^{(m)} \left(hr_j + \alpha_j \right). \quad (4.63)$$

Қаралаётган D соҳанинг аниқланишига кўра $|l_s| \le L$ тенгсизлик бажарилади, бундан ташқари, маълумки $\Gamma_m^{(m)} = 1$ (7-боб 12-§ га қ.).

Демак, ε_n олдидаги коэффициентни пастдан қуйидагича баҳолаш мумкин:

$$1 - hb_0 l_n \ge 1 - hL|b_0|.$$

Шунинг учун ҳам h етарлича кичик $\left(h < \frac{1}{L|b_0|} \right)$ бўлганда ε_n олдидаги коэффициентни доим мусбат қилиш мумкин, бу эса (4.63) тенгликни қуйидагича ёзишга имкон беради:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{1 - hb_0 l_n} \left\{ \sum_{s=0}^{m-1} \left[\Gamma_n^{(s)} + hl_s \sum_{i=m-s}^{\min(m,n-s)} \Gamma_{n+m-i-s}^{(m)} \right] \varepsilon_s + \right.$$
$$\left. + h \sum_{s=m}^{n-1} l_s \varepsilon_s \sum_{i=0}^{\min(m,n-s)} b_i \Gamma_{n+m-i-s}^{(m)} + \sum_{j=m}^{n-1} \Gamma_{n+m-j}^{(m)} \left(hr_j + \alpha_j \right) \right\} \quad (4.64)$$

Охирги тенглик x_n нуқтадаги тақрибий ечимнинг ε_n хатолиги (4.52) ҳисоблаш формуласининг параметрлари, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ дастлабки хатоликлар, ҳисоблашнинг ҳамма поғоналаридаги формуланинг хатолиги, яхлитлаш хатолиги ҳамда x_m, x_{m+1} ... , x_{n-1} нуқталардаги тақрибий ечимнинг хатоликлари орқали ифодаланади. Бизни $n \to \infty$ да ε_n хатоликнинг рафтори қизиқтиради. (4.64) формулага кўра ε_n хатонинг рафтори хусусий ҳолда $\Gamma_n^{(i)} \left(i = 0,1,..., \ m-1\right)$ ёки бунга тенг кучли бўлган $\lambda_i^n n_j \left(j = 0,1,...,k_i - 1; \ i = 1,2,...,q\right)$ функцияларнинг рафторига боғлиқдир. Олдинги бандда (4.52) формуланинг коэффициентлари

$$A(1) \equiv 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j = 0$$

шартни қаноатлантиришини кўрган эдик, бу эса (4.60) тенглама доимо $\lambda = 1$ ечимга эга эканлигини кўрсатади. Шунинг учун ҳам энг қулай ҳолда $n \to \infty$ да $\Gamma_n^{(i)} \left(i = 0,1,...,m-1\right)$ функциялар модули бўйича чегараланган бўлишига умид қилиш мумкин.

Агар $A(\lambda) = 0$ характеристик тенгламанинг барча λ_1, λ_2, ... , λ_q илдизлари модули билан бирдан ошмаса ва модули бирга тенг бўлганлари каррали бўлмаса, у ҳолда *илдизлар шарти* бажарилган деймиз.

Кўриниб турибдики, $\lambda_i^n n^j \left(j = 0,1,...,k_i - 1; \ i = 1,2,...,q\right)$ функциялар чегараланган бўлиши учун илдизлар шартининг бажарилиши зарур ва етарлидир.

2-таъриф. Агар илдизлар шарти бажарилса, у ҳолда (4.52) ҳисоблаш методлари *турғун* дейилади.

Биз турғунликнинг икки хил таърифини келтирдик, бу таърифларнинг тенг кучлилигини 7-боб 12-§ да бу ерда қаралаётган масалаларнинг хусусий ҳоли бўлган аниқмас интегралларни тақрибий ҳисоблаш қоидаси учун кўрсатган эдик.

Биз бу ерда 2-таърифдан 1-таърифнинг келиб чиқишини, яъни илдизлар шарти бажарилганда (4.52) формула ёрдамида топилган тақрибий ечим $n \to \infty$ да (4.1) тенгламанинг ечимига текис яқинлашишини кўрсатамиз.

Айтайлик, илдизлар шарти бажарилсин, у ҳолда

$$\left|\Gamma_n^{(i)}\right| \le \max_{\substack{0 \le i \le m-1 \\ 0 \le n \le N}} \left|\Gamma_n^{(i)}\right| = \Gamma(h) = \Gamma \tag{4.65}$$

бўлиб, шу билан бирга $h \to 0$ да Γ нолдан фарқли чекли лимитга интилади.

Фараз қилайлик, $\varepsilon_i (i = 0, 1, ... , m-1)$, r_j ва α_j лар учун қуйидаги баҳолар ўринли бўлсин:

$$\left|\varepsilon_i\right| \le \varepsilon \left(i = 0, \overline{m-1}\right); \left|r_j\right| \le r; \left|\alpha_j\right| \le \alpha; \ j = \overline{m, N}.$$

Бу баҳоларни ва (4.65) ни ҳисобга олиб, (4.64) дан қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$|\varepsilon_n| \le P\varepsilon + hQ\sum_{s=m}^{n-1}|\varepsilon_s| + T(n-m)(hr+\alpha), \tag{4.66}$$

бунда

$$P = m\Gamma\frac{1+hL\sum\limits_{j=1}^{m}|b_j|}{1-hL|b_0|}, \quad Q = \frac{\Gamma L\sum\limits_{j=1}^{m}|b_j|}{1-hL|b_0|},$$

$$T = \frac{\Gamma}{1-hL|b_0|}.$$

Кўриниб турибдики, $h \to 0$ да P, Q ва T миқдорлар чекли лимитларга интилади.

Энди $n-m \le \frac{X-x_0}{h}$ лигини ҳисобга олиб ва ушбу

$$P\varepsilon = a,\ ha = b,\ T(hr+\alpha)\frac{X-x_0}{h} = c$$

белгилашларни киритиб, (4.66) тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$|\varepsilon_n| \le a + b\sum_{s=m}^{n-1}|\varepsilon_s| + c,$$

бунда $m \le n \le N$. Бу формуладан кетма-кет қуйидагиларга эга бўламиз:

$$|\varepsilon_m| \le a + c,$$

$$|\varepsilon_{m+1}| \le a + b|\varepsilon_m| + c \le a + c + b(a+c) = (a+c)(1+b),$$

$$|\varepsilon_{m+2}| \le a + c + b(|\varepsilon_m| + |\varepsilon_{m+1}|) \le (a+c)(1+b)^2,$$

$$|\varepsilon_{m+3}| \le (a+c)(1+b)^3$$

....

$$|\varepsilon_n| \le (a+c)(1+b)^{n-m}.$$

Барча n ларда ε_n ни баҳолаш учун юқоридаги баҳони қўполроқ қилиб оламиз:

$$|\varepsilon_n| \le (a+c)(1+b)^n \le (a+c)(1+b)^{\frac{X-x_0}{h}} =$$

$$= (a+c)(1+hQ)^{\frac{X-x_0}{h}} \le (a+c)e^{hQ\frac{X-x_0}{h}} = (a+c)e^{Q(X-x_0)}.$$

Демак,

$$\max_{m \le n \le N} |\varepsilon_n| \le (a + c) e^{Q(X - x_0)}.$$

Шундай қилиб, тақрибий ечимнинг хатолиги ε_n учун қуйидаги текис баҳога эга бўламиз:

$$\max_{m \le n \le N} |\varepsilon_n| \le \left[\varepsilon P + \left(r + \frac{\alpha}{h} \right) T (X - x_0) \right] e^{Q(X - x_0)}. \tag{4.67}$$

Юқорида кўрдикки, илдизлар шарти бажарилса, $h \to 0$ да P, Q, T чекли лимитга интилади. Шунинг учун ҳам (4.67) дан кўрамизки, тақрибий ечим аниқ ечимга текис интилиши учун

$$\varepsilon \underset{h \to 0}{\to} 0, \; r \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0, \; \frac{\alpha}{h} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

шартлар бажарилиши керак.

Юқоридаги (4.67) баҳо қўпол, амалиётда татбиқи кам, чунки унинг таркибидаги P, Q, T миқдорларни эффектив равишда баҳолаш қийин. Аммо бу баҳонинг яхшилик томони шундан иборатки, унинг ёрдамида ҳисоблаш жараёнининг яқинлашиш шартларини аниқлаш ва яқинлашиш тезлигини сифат жиҳатидан баҳолаш мумкин. Хусусий ҳолда бу баҳо шуни кўрсатадики, ечим изланаётган оралиқнинг узунлиги $X - x_0$ ортиши билан тақрибий ечимнинг хатоси тез ўсади. Бундан ташқари, (4.67) баҳо шуни кўрсатадики, (4.52) формуланинг хатолиги уч қисмдан иборат. Хатоликнинг биринчи қисми дастлабки маълумотларнинг хатолиги билан боғлиқ бўлиб, $h \to 0$ да ε нинг рафторига боғлиқ. Одатда, жадвалнинг бош қисмини қуришда қўлланадиган алгоритм шундай танланадики, h кичиклашганда ε кичиклашади. Хатонинг иккинчи қисми дастлабки дифференциал тенгламани айирмали тенглама билан алмаштиришга боғлиқ, у $h \to 0$ да камаяди, чунки p-тартибли аппроксимацияга эга бўлган айирмали схемалар учун $r = 0(h^p)$.

Ниҳоят, хатоликнинг учинчи қисми (4.52) формула ёрдамида ҳисоблаш хатолигига боғлиқ бўлиб, $h \to 0$ да $\frac{\alpha}{h}$ нинг рафторига боғлиқ. Агар ҳисоблаш формуласи танланган бўлса, r_n ва r ларнинг h га боғлиқлиги қонуни аниқ бўлади. Бизнинг ихтиёримизда h, ε, α, ларни танлаш қолади. Уларни оптимал равишда танлаш учун айрим мулоҳазаларни айтиш мумкин.

Фараз қилайлик, ҳозирча α белгиланган бўлсин. Биз h ни кичрайтириб, хатоликнинг биринчи ва иккинчи қисмини камайтириш ҳисобидан умумий хатони камайтирамиз. Лекин бу узоққа бормайди, маълум пайтдан бошлаб хато яна ўсиб боради, чунки h ни кичрайтирган сари $\frac{\alpha}{h}$ нинг миқдори ошиб боради. Шунинг учун ҳам h нинг шундай оптимал қийматини топиш мумкинки, бу қийматда (4.67) нинг ўнг томони энг кичик бўлади. Қўпол қилиб айтганда, бу оптимал қиймат шунга олиб келадики, хатоликнинг учала қисми бир-бирига тенг бўлиши керак. Агар биз (4.67) нинг ўнг томонини яна ҳам камайтирмоқчи бўлсак, у ҳолда ҳисоблаш аниқлиги α ни оширишимиз керак. Агар $\varepsilon = 0(h^m)$ ва $\alpha = 0(h^m)$ бўлса, у ҳолда (4.67) баҳога кўра ҳисоблаш жараёни h^m тартибдаги тезликда аниқ ечимга текис яқинлашади.

Шуни яна бир бор таъкидлаш керакки, (4.67) баҳо яқинлашишни таъминлаши учун (4.52) айирмали метод учун турғунлик шартлари бажарилиши керак. Агар бу шартлар бузилса, у ҳолда $h \to 0$ да (4.67) тенгсизликнинг ўнг томони даражали ёки кўрсаткич функциядек чексиз ўсиб боради.

Кўпинча турғун ҳисоблаш методлари орасида *қатъий турғун методлари* ажратилади. Бундай методлар учун яна бир қўшимча талаб қўйилади: $|\lambda| = 1$ айланада фақат битта $\lambda = 1$ илдиз ётиши керак. Тадқиқотлар шуни кўрсатадики, қатъий турғун жараёнларнинг яқинлашиш рафтори анча яхши бўлади.

Юқорида кўрилган Адамснинг барча методлари қатъий турғундир, чунки $A(\lambda) \equiv \lambda^{m+1} - \lambda^m = 0$ характеристик тенглама бирга тенг бўлган битта туб илдизга ва нолга тенг бўлган m-каррали илдизга эга.

Айирмали методларни ҳосил қилиш учун бошқача ёндашиш ҳам мумкин.

Мисол учун ушбу

$$u(x_n) = u(x_{n-2}) + \int_{x_{n-2}}^{x_n} u'(x)dx = u(x_{n-2}) + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x,u)dx$$

тенгликни кўрайлик. Бундаги интегрални тақрибий равишда Симпсон квадратур формуласи билан алмаштирсак,

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \tag{4.68}$$

ҳисоблаш қоидасига эга бўламиз. Биз биламизки, бу методнинг (Симпсон квадратур формуласининг) қолдиқ ҳади қуйидагига тенг:

$$r_n = -\frac{h^5}{90}u^{\text{v}}(\xi), \; x_{n-2} \le \xi \le x_n.$$

Бу метод учун характеристик тенглама $A(\lambda) \equiv \lambda^2 - 1 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Шунинг учун ҳам (4.68) метод турғун, аммо қатъий турғун эмас.

Ушбу Эйлер методи

$$y_n = y_{n-1} + hf_{n-1}$$

эса қатъий турғундир.

Биз 7-боб 12-§ да аниқмас интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + 2h(f_{n-1} + 2f_n)$$

методни кўрган эдик. Бу метод учун характеристик тенглама $A(\lambda) \equiv \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $\lambda_1 = -5$ ва $\lambda_2 = 1$ эса илдизлар шартини қаноатлантирмайди. Шунинг учун ҳам бу метод турғун эмас ва ҳисоблаш учун ярамайди.

Турғун ва қатъий турғун тақрибий методларнинг фарқини яхши тушуниш учун бир мисол кўрамиз. Осонлик билан кўриш мумкинки,

$$u' = -2u + 1,\ u(0) = 1 \tag{4.69}$$

тенгламанинг аниқ ечими

$$u(x) = 0,5e^{-2x} + 0,5 \tag{4.70}$$

бўлиб, бу ечим дастлабки шартга нисбатан турғундир, яъни дастлабки қийматнинг кичик миқдорда ўзгариши $x \to \infty$ да ечимнинг кичик миқдорда ўзгаришига олиб келади. Ҳақиқатан ҳам, дастлабки шартни $u(0) = 1 + \varepsilon$ га алмаштирсак, у ҳолда ечим

$$u(x) = (0,5 + \varepsilon)e^{-2x} + 0,5$$

кўринишга эга бўлиб, фақат εe^{-2x} га ўзгаради.

Энди (4.1) дифференциал масалага (4.68) Симпсон формуласини қўллаймиз, у ҳолда

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(-2y_{n-2} - 8y_{n-1} - 2y_n + 6),\ y_0 = 1$$

ёки

$$y_n = -\frac{8h}{3+2h}y_{n-1} + \frac{3-2h}{3+2h}y_{n-2} + \frac{2h}{3+2h},\ y_0 = 1 \tag{4.71}$$

формула ҳосил бўлади. Бу ерда y_0 сифатида дастлабки шартни оламиз. Аммо (4.71) метод икки қадамли бўлганлиги сабабли ҳисобни бошлаш учун y_1 нинг қийматини бериш керак. y_1 нинг қиймати сифатида (4.70) аниқ ечимнинг $x = h$ даги қийматини оламиз, яъни

$$y_1 = 0,5e^{-2h} + 0,5. \tag{4.72}$$

Биз (4.71) ва (4.72) ларни бирлаштириб, ушбу

$$\begin{aligned} & y_n = \frac{8h}{3+2h} y_{n-1} + \frac{3-2h}{3+2h} y_{n-2} + \frac{2h}{3+2h}, \\ & y_0 = 1,\ y_1 = 0,5e^{-2h} + 0,5 \end{aligned} \tag{4.73}$$

айирмали масала ечимининг рафторини текширамиз. Бу масалага мос келадиган характеристик тенглама

$$\lambda^2 + \frac{8h}{3+2h}\lambda - \frac{3-2h}{3+2h} = 0 \tag{4.74}$$

нинг ечимлари

$$\lambda_1 = \frac{-4h+\sqrt{9-2h^2}}{3+2h},\ \lambda_2 = -\frac{4h+\sqrt{9-2h^2}}{3+2h}$$

дан иборат. Бундан кўрамизки, (4.73) га мос келадиган

$$y_n = -\frac{8h}{3+2h} y_{n-1} + \frac{3-2h}{3+2h} y_{n-2}$$

бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\tilde{y}_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

бўлиб, осонлик билан кўриш мумкинки, (4.73) айирмали тенгламанинг хусусий ечими $y_n = \frac{1}{6}$ бўлади. Шунинг учун ҳам (4.73) айирмали тенгламанинг умумий ечими

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \frac{1}{6}$$

бўлади. Номаълум c_1 ва c_2 коэффициентларни топиш учун дастлабки шартлардан фойдаланамиз:

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = 1,\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}e^{-2h} + \frac{1}{2}.$$

Бу тенгламаларни ечиб,

$$c_1 = \frac{5}{12} + \frac{20h+(3+2h)\left(2+3e^{-2h}\right)}{12\sqrt{9-2h^2}},$$

$$c_2 = \frac{5}{12} - \frac{20h+(3+2h)\left(2+3e^{-2h}\right)}{12\sqrt{9-2h^2}}$$

ларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (4.73) айирмали масаланинг ечими

$$y_n = c_1\left(\frac{-4h+\sqrt{9-2h^2}}{3+2h}\right)^n + c_2\left(\frac{-4h-\sqrt{9-2h^2}}{3+2h}\right)^n + \frac{1}{6} \qquad (4.75)$$

бўлади.

Ечимнинг бу кўринишидан унинг $n \to \infty$ даги рафторини осонлик билан аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, кўриниб турибдики, ҳар қандай белгиланган етарлича кичик $h > 0$ учун

$$0 < \frac{-4h+\sqrt{9-2h^2}}{3+2h} < 1, \quad \frac{4h+\sqrt{9-2h^2}}{3+2h} > 1.$$

Демак, $n \to \infty$ да (4.75) даги биринчи ҳад нолга интилиб, иккинчиси чексизга интилади. (4.69) масаланинг (4.70) аниқ ечими $x \to \infty$ да 0,5 га интилади. Равшанки, y_n тақрибий ечимнинг хатолиги чексизга интилади ва (4.73) методнинг (4.69) масалага қўлланилиши нотурғундир. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, хатоликнинг бундай ўсиши яхлитлаш хатолиги билан боғлиқ эмас, чунки (4.75) формула y_n нинг аниқ математик ифодаси бўлиб, (4.73) формулада ҳисоблаш рационал сонлар устида олиб борилса, ҳосил қилинган қийматлар (4.75) формула ёрдамида ҳисобланган қиймат билан устма-уст тушиши керак. Бунинг сабаби (4.68) методнинг турғун, аммо қатъий турғун бўлмаганлигидадир. Айнан мана шу қатъий турғунликнинг йўқлиги y_n нинг рафторини аниқлайди. Буни қуйидагича тушунтириш мумкин: (4.73) айирмали тенгламада y_{n-2}, y_{n-1}, y_n лар қатнашганлиги учун у иккинчи тартибли айирмали тенгламадир, шунинг учун ҳам у иккита λ_1^n ва λ_2^n фундаментал ечимга эга. (4.73) формула ёрдамида қурилган y_n кетма-кетлик битта фундаментал ечимга эга бўлган биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимини аппроксимациялаш мақсадида қурилади. Дифференциал тенгламанинг бу фундаментал ечими λ_1^n кетма-кетлиги билан аппроксимацияланади, λ_2^n кетма-кетлик эса «зарарли» бўлиб, тез нолга интилиши керак. Аммо ҳар қандай $h > 0$ сон учун $|\lambda_2| > 1$ бўлиб, λ_2^n нолга интилмасдан, тебраниб чексизга интилади ва нотурғунликнинг келиб чиқишига сабаб бўлади. Шуни таъкидлаш керакки, $h \to 0$ да λ_1 ва λ_2 турғунлик кўпҳадининг илдизларига яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам, $h \to 0$ да (4.74) кўпҳад $\lambda^2-1=0$ кўпҳадга айланади. Бу ерда қатъий турғунликнинг зарурлиги яққол кўринади. Агар характеристик кўпҳаднинг биттасидан ташқари қолган ҳамма илдизлари абсолют қиймати билан бирдан кичик бўлса, у ҳолда бу «зарарли» илдизларнинг даражалари айирмали тенгламанинг ечими бўлиб, $n \to \infty$ да нолга интилади ва нотурғунлик ҳолати пайдо бўлмайди.

Биз кўриб чиққан турғунлик $h \to 0$ даги турғунликдир. Келтирилган мисол кўрсатадики, метод турғун, аммо қатъий турғун бўлмаса, исталганча кичик h учун нотурғунликка олиб келади.

8.4.6. Оддий дифференциал тенгламаларнинг қаттиқ системасини тақрибий ечиш. Олдинги бандда (4.1) Коши масаласини (4.2) айирмали методлар билан тақрибий ечганда турғунлик ва қатъий турғунлик тушунчасини киритган эдик. Бу тушунчалар ниҳоятда умумий бўлиб, улар (4.1) дифференциал масала ва уни аппроксимация қилувчи (4.2) айирмаларнинг кўп характерли хоссаларини ҳисобга олмайди. Жумладан, бу тушунчаларда (4.2) айирмали схеманинг ўнг томонидаги $b_1, b_2, \ldots, b_m$ коэффициентлар ҳеч қандай таъсир кўрсата олмайди. Бу тушунчалар

$$y_n - \sum_{i=1}^{m} a_i y_{n-i} = 0$$

бир жинсли айирмали тенгламанинг барча ечимлари $n \to \infty$ да чегараланганлигини кўрсатади, холос.

Фараз қилайлик, дифференциал тенглама ечимининг у ёки бу ўзига хос хусусиятлари олдиндан маълум бўлсин. У ҳолда бу ўзига хос хусусиятлар айирмали тенгламанинг ечимида ҳам сақланиши керак.

Айтилган гапларни тавсифлайдиган ушбу Коши масаласини кўрайлик:

$$\frac{du}{dx} = \lambda u,\ x > 0,\ u(0) = u_0. \qquad (4.76)$$

Фараз қилайлик, $\lambda < 0$ бўлсин, у ҳолда тенгламанинг ечими

$$u(x) = u_0 e^{\lambda x}$$

монотон камаяди, демак, ихтиёрий $h > 0$ учун

$$|u(x+h)| \le |u(x)| \qquad (4.77)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бу эса $u(x)$ ечимининг турғунлигини билдиради.

Табиийки, (4.76) тенгламани аппроксимация қилувчи айирмали масаланинг ечими ҳам (4.77) га ўхшаш тенгсизликни қаноатлантириши керак. Шу нуқтаи назардан (4.76) масалани Эйлер методи билан ечишни кўрамиз:

$$y_{n+1} = (1+\lambda h) y_n, \; n = 0,1,2,... \qquad (4.78)$$

Бундан кўринадики, (4.77) баҳо, яъни

$$|y_{n+1}| \le |y_n| \qquad (4.79)$$

тенгсизлик бажарилиши учун $|1+\lambda h| \le 1$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Ўз навбатида, $\lambda < 0$ ҳолда бу шарт h қадам учун ушбу

$$0 < h < \frac{2}{|\lambda|} \qquad (4.80)$$

чеклашга тенг кучлидир. Шундай қилиб, (4.78) айирмали метод (4.80) шарт бажарилгандагина турғундир.

1-таъриф. (4.2) айирмали метод *абсолют равишда турғун* дейилади, агар у барча $h > 0$ учун турғун бўлса ва *шартли равишда турғун* дейилади, агар у h га нисбатан бирор шарт бажарилганда турғун бўлса.

Бундан кўринадики, Эйлер методи шартли равишда ((4.80) шарт бажарилганда) турғун экан. Агар $|\lambda|$ етарлича катта бўлса, у ҳолда (4.80) шарт h қадамга нисбатан қаттиқ шартдир, бундан «қаттиқ» тенглама атамаси келиб чиққан.

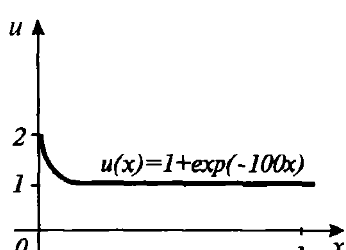
Мисол. Ушбу

$$\frac{du}{dx} = -100u + 100, \; u(0) = 2 \qquad (4.81)$$

Коши масаласининг аниқ ечими $u(x) = 1 + \exp(-100x)$ (1-чизма) бўлиб, $x \ge 0{,}05$ бўлганда аниқ ечим 1 дан учинчи хонасидагина фарқ қилади (масалан, $u(0{,}05) = 1 + e^{-5} = 1{,}0067$).

Айирмали тенгламанинг ечими

$$y_n = 1 + (1 - 100h)^n$$



1-чизма.

эса фақат $|1-100h|<1$ бўлгандагина аниқ ечимни тақрибий тасвирлайди, демак, $h<0,02$ қаттиқ шарт бажарилиши керак. Агар бу шарт бузилса, масалан, $h=0,05$ бўлса, у ҳолда y_n нинг қийматлари: $y_0=2$, $y_1=-3$, $y_2=17$, $y_3=-63$, $y_4=257$, ... бўлиб, аниқ ечим билан ҳеч қандай алоқаси бўлмайди.

Аниқ ва тақрибий ечимларни таққослаб кўрамизки, $\exp(-100x)$ ни аппроксимация қиладиган тақрибий ечимдаги $(1-100h)^n$ ҳад қадамни йириклаштиришга имкон бермайди, аслида эса $x>0,05$ қийматларда $\exp(-100x)$ нинг ечимдаги ҳиссаси учинчи хонада таъсир қилади.

Бу мисолдаги факт қаттиқ тенгламаларга хос бўлган умумий вазиятни намойиш этади: ечимда шундай ҳад борки, интеграллаш оралиғининг деярли ҳамма ерида унинг ҳиссаси кичик бўлиб, бундай тенгламаларни ечиш учун мўлжалланмаган методларни қўллаганда турғунликни сақлаш учун h ни кичик қилиб олиб, бу ҳадни етарлича аниқ аппроксимациялаш керак.

Қаттиқ тенгламани ечиш учун мўлжалланган методлардан бири бу Эйлернинг ошкормас методидир. Уни (4.76) тенгламага қўлласак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}\ (\lambda<0).$$

Бундан

$$y_{n+1}=\frac{y_n}{1-\lambda h} \tag{4.82}$$

бўлиб, ихтиёрий $h>0$ лар учун $\left|(1-\lambda h)^{-1}\right|<1$ турғунлик шарти бажарилади. Демак, (4.82) метод абсолют равишда турғун методдир.

Олдинги бандлардаги оддий дифференциал тенгламаларни сонли ечиш учун кўрилган методларни ўзгаришсиз бундай дифференциал тенгламаларнинг системаси

$$\frac{du}{dx}=Au \tag{4.83}$$

ни ечиш учун ҳам қўллаш мумкин. Биз аввал m-тартибли A квадрат матрицани ўзгармас элементли матрица деб қараймиз. Агар A матрицанинг хос сонлари катта тарқалишга эга бўлса, у ҳолда (4.83) системани ечишда қўшимча қийинчиликлар туғилади.

2-таъриф. Ўзгармас $A(mxm)$ матрицали (4.83) дифференциал тенгламалар системаси *қаттиқ* дейилади, агар $Re\lambda_k<0$ $k=1,2,\ldots,m$ (яъни система *Ляпунов бўйича асимптотик турғун*) ва

$$s=\frac{\max\limits_{1\le k\le m}|Re\lambda_k|}{\min\limits_{1\le k\le m}|Re\lambda_k|}$$

нисбатан катта бўлса. Бу ерда s *қаттиқлик сони* дейилади.

Агар A матрица x га боғлиқ бўлса, у ҳолда $\lambda_k = \lambda_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ бўлади.

Ҳар бир x учун

$$s(x) = \frac{\max\limits_{1\le k\le m}|Re\lambda_k(x)|}{\min\limits_{1\le k\le m}|Re\lambda_k(x)|} \qquad (4.84)$$

қаттиқлик сонини аниқлаш мумкин. Бу ҳолда қаттиқлик хоссаси интеграллаш оралиғининг узунлигига боғлиқ бўлиши мумкин.

3-таъриф. Ушбу

$$\frac{du}{dx} = A(x)u$$

система $(0, X)$ интервалда *қаттиқ* дейилади, агар барча $x \in (0, X)$ учун $Re\lambda_k(x) < 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ ва $s = \sup\limits_{x\in(0,X)} s(x)$ сон катта бўлса.

Амалиётда, агар $s > 10$ бўлса, система қаттиқ саналади, аммо кимёвий кинетика, бошқариш, электр занжирлари ва бошқа масалаларда s сони 10^6 ва ундан ҳам катта бўлиши мумкин.

Фараз қилайлик, (4.83) системанинг A матрицасини $Q^{-1}AQ$ ўхшаш алмаштириш ёрдамида диагонал матрицага келтириш мумкин бўлсин. У ҳолда $u = Q\vartheta$ алмаштиришни бажариб, (4.83) система ушбу

$$\frac{d\vartheta}{dx} = Q^{-1}AQ\vartheta \qquad (4.85)$$

эркли тенгламалар системасига келтирилади (бу ерда $Q^{-1}AQ$ ва A матрицалар бир хил хос сонларга эга).

Фараз қилайлик, $m = 2$ ва

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

бўлиб, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ва $\lambda_1 >> \lambda_2$ бўлсин. Бу ҳолда (4.85) система ушбу

$$\frac{d\vartheta_1}{dx} = -\lambda_1\vartheta_1, \ \frac{d\vartheta_2}{dx} = -\lambda_2\vartheta_2 \qquad (4.86)$$

иккита эркли тенгламалар системасига айланади.

Бу тенгламаларни ечиш учун Эйлер методини қўлласак,

$$\vartheta_{1,n+1} = \vartheta_{1n} - h\lambda_1\vartheta_{1n}, \ \vartheta_{2,n+1} = \vartheta_{2n} - h\lambda_2\vartheta_{2n}$$

айирмали тенгламалар ҳосил бўлиб, уларнинг $\vartheta_{1n} = \vartheta_1(x_n)$, $\vartheta_{2n} = \vartheta_2(x_n)$ ечимлари турғун бўлиши учун h қадам бир вақтда икки $\lambda_1 h \le 2$, $\lambda_2 h \le 2$ шартни қаноатлантириши керак. $\lambda_1 \ll \lambda_2$ бўлганлиги учун бу шартлар $h \le \frac{2}{\lambda_1}$ чеклашга олиб келади. Бу оғир шартдан қутулиш мақсадида (4.86) системани ечиш учун Эйлернинг ошкормас методини қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\vartheta_{1,n+1} = \frac{\vartheta_{1n}}{1+\lambda_1 h}, \vartheta_{2,n+1} = \frac{\vartheta_{2n}}{1+\lambda_2 h}.$$

Бу метод ихтиёрий $h > 0$ учун турғундир. Шунинг учун ҳам бу ерда h қадамни турғунлик нуқтаи назаридан эмас, балки аниқлик эҳтиёжига қараб танлаш керак.

Умумий чизиқли бўлмаган тенгламалар системаси учун қаттиқлик тушунчаси юқоридагига ўхшаш киритилади.

Фараз қилайлик, ушбу чизиқли бўлмаган тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = f\left(x, \vec{u}\right), x > 0, \tag{4.87}$$

бу ерда

$$\vec{u}\left(x\right) = \left(u_1\left(x\right), u_2\left(x\right), \dots, u_m\left(x\right)\right)^T,$$

$$\vec{f}\left(x,u\right) = \left(f_1\left(x,u\right) f_2\left(x,u\right), \dots, f_m\left(x,u\right)\right)^T.$$

Энди (4.87) системанинг бирор ечимини $\vartheta(x)$ орқали белгилаймиз ва

$$A\left(x, \vartheta\left(x\right)\right) = \frac{\partial f\left(x, \vartheta(x)\right)}{\partial u}$$

орқали элементлари

$$a_{ij}\left(x, \vartheta\left(x\right)\right) = \frac{\partial f_i\left(x_1 \vartheta(x)\right)}{\partial u_j};\ i, j = 1, 2, \dots, m$$

лардан иборат бўлган матрицани белгилаймиз.

Фараз қилайлик, $\lambda_k\left(x\right)\left(k = 1, 2, \dots, m\right)$ лар $A\left(x, \vartheta\left(x\right)\right)$ матрицанинг хос сонлари бўлиб, $s(x)$ эса (4.84) тенглик билан аниқлансин.

4-таъриф. (4.87) система $\vartheta\left(x\right)$ ечимда ва берилган $\left(0, X\right)$ интервалда *қаттиқ* дейилади, агар:

1) барча $x \in \left(0, X\right)$ учун $Re\lambda_k\left(x\right) < 0$, $k = \overline{1, m}$;

2) $s = \sup\limits_{x \in (0, X)} s\left(x\right)$ сони катта бўлса.

Мисол сифатида кимёвий кинетиканинг ушбу чизиқли бўлмаган масаласини келтирамиз [49]:

$$\frac{du_1}{dx} = -0,04u_1 + 10^4 u_2 u_3, u_1(0) = 1,$$

$$\frac{du_2}{dx} = -0,04u_1 - 10^4 u_2 u_3 - 3\cdot 10^7 u_2^2,\ u_2(0) = 0, \tag{4.88}$$

$$\frac{du_3}{dx} = 3\cdot 10^7 u_2^2,\ u_3(0) = 0.$$

Бу тенгламаларни қўшиб чиқсак,

$$\frac{d}{dx} = (u_1 + u_2 + u_3) = 0 \tag{4.89}$$

ҳосил бўлади, бундан эса $u_1 + u_2 + u_3 = c$ ва дастлабки шартлардан фойдаланиб, $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ ни ҳосил қиламиз, Демак, юқоридаги системанинг битта интеграли маълум. Шунинг учун ҳам у иккинчи тартибли системага келтирилади. Бу системанинг $(0,100)$ интервалда қаттиқлик сони $s \sim 10^5$.

Қаттиқ системани ечишга мўлжалланган айирмали методларни текшириш учун модел тарзида ушбу тенглама қаралади:

$$\frac{du}{dx} = \lambda u, \tag{4.90}$$

бу ерда λ —ихтиёрий комплекс сон. Бу тенглама ҳақиқатан ҳам (4.83) системани моделлаштириши учун уни A матрицанинг барча λ хос сонлари учун текшириш керак.

Агар (4.2) айирмали методни (4.90) тенглама учун қўлласак, у қуйидаги кўринишни олади:

$$\sum_{i=0}^{m}(a_i - \mu b_i)y_{n-i} = 0,\ n = m, m+1, ..., \tag{4.91}$$

бу ерда $a_0 = 1$ ва $\mu = \lambda h$ — комплекс параметр. Агар (4.91) тенгламанинг ечимини $y_n = q^n$ кўринишда изласак, у ҳолда q учун ушбу

$$\sum_{i=0}^{m}(a_i - \mu b_i)q^{m-i} = 0 \tag{4.92}$$

характеристик тенгламага эга бўламиз.

Биз бу ерда қаттиқ система учун оддий турғунликка нисбатан торроқ бўлган A-турғунлик тушунчасини кўриб чиқамиз.

Аввал қуйидаги таърифни келтирамиз:

5-таъриф. (4.2) айирмали методнинг *турғунлик соҳаси* деб (4.91) методнинг турғунлигини таъминлайдиган $\mu = \lambda h$ комплекс текислик барча нуқталарининг тўпламига айтилади.

Эйлернинг ошкор методи

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

учун (4.91) метод

$$y_{n+1} = (1+\mu)y_n,\ \mu = \lambda h$$

кўринишга эга бўлади.

Бу методнинг $|1+\mu| < 1$ турғунлик шарти $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ комплекс ўзгарувчи учун $(\mu_1 + 1)^2 + \mu_2^2 < 1$ ни билдиради. Бундан кўринадики, бу методнинг турғунлик соҳаси маркази (-1, 0) нуқтада бўлган бирлик доирадан иборат.

Эйлернинг ошкормас методи

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_{n+1})$$

учун (4.91) метод

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-\mu} y_n$$

кўринишга эга бўлиб, унинг турғунлик соҳаси маркази (1,0) нуқтада бўлган бирлик доиранинг ташқи нуқталаридан иборат.

6-таъриф. Айирмали метод *A-турғун* дейилади, агар унинг турғунлик соҳаси $Re\mu < 0$ ярим текисликни ўз ичига олса.

Шуни таъкидлаш керакки, $Re\lambda \le 0$ бўлганда (4.90) тенгламанинг ечими асимптотик турғундир. Шунинг учун ҳам A-турғун айирмали метод абсолют равишда турғун бўлади (барча $h > 0$ учун турғун), агар дастлабки дифференциал тенгламанинг ечими турғун бўлса (чунки $Re\mu = hRe\lambda$).

Равшанки, Эйлернинг ошкормас методида A-турғун бўлиб, ошкор методида эса A-турғун эмас.

Бир қадамли иккинчи тартибли айирмали метод сифатида трапеция формуласи деб аталувчи

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n, y_{n+1})\right] \qquad (4.93)$$

методни кўрсатиш мумкин. Бу метод учун (4.91) метод

$$y_{n+1} = \frac{2+\mu}{2-\mu} y_n$$

кўринишга эга. Кўриниб турибдики, $\left|\frac{2+\mu}{2-\mu}\right| < 1$ бўлиши учун $Re\mu \le 0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Демак, (4.93) метод *А*-турғундир.

Қаттиқ системаларни ечишда *А*-турғун методлардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир, чунки уларнинг турғунлик шарти *h* қадамга боғлиқ эмас.

Турғунликнинг бошқа кўринишлари, умуман, қаттиқ системаларни сонли ечиш методлари ҳақида чуқур ва кенг маълумотларни [4,5,47] дарсликлардан ва хусусан [13,38,49] монографиялардан олиш мумкин.

9-боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

9.1-§. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

9.1.1. Чегаравий шартлар ва чегаравий масала. Фараз қилайлик, *n* - тартибли оддий дифференциал тенглама

$$u^{(n)} = f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right) \tag{1.1}$$

берилган бўлиб, унинг *u=u(x)* ечимини чекли ёки чексиз [*a, b*] оралиқда топиш талаб қилинсин. Бу оралиқда *m* та x_i нуқталарни оламиз:

$$a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b.$$

Бу нуқталарда *u(x)* функция ва унинг $u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)$ ҳосилаларининг қийматларини бирор қоидага кўра боғловчи *n* та тенглама ҳам берилган бўлсин:

$$F_j(u(x_1), u'(x_1), \ldots, u^{(n-1)}(x_1), \ldots, u(x_m), u'(x_m), \ldots, u^{(n-1)}(x_m)) = 0 \tag{1.2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Қуйидаги масалани қараймиз: (1.1) тенгламанинг [*a, b*] оралиқда *n* та (1.2) шартларни қаноатлантирадиган *u*(*x*) ечими топилсин.

Агар $m = 1$ ($x_1 = a$) бўлса, у ҳолда Коши масаласига, яъни (1.1) тенгламанинг (1.2) дастлабки шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига келамиз. Агар $m = 2$ ($x_1 = a$, $x_2 = b$) бўлса, у ҳолда (1.1), (1.2) масала *икки нуқтали* ёки *чегаравий масала* дейилади. Агар $m > 2$ бўлса, у ҳолда (1.1),(1.2) масала *m нуқтали* ёки *кўп нуқтали масала* дейилади.

Кўп нуқтали масалага мисол сифатида бир неча таянчларда ётган қурилиш тўсинининг ўрта чизиғини топиш ёки икки нуқтада маҳкамланган юклатилган эгилувчан ипнинг солқиланиш масалаларини кўрсатиш мумкин. Занжирли кўприкларни ҳисоблашда солқиланиш масаласи шунга олиб келади.

Битта дифференциал тенгламага жуда кўп чегаравий шартлар қўйиш мумкин, у ҳолда улар ҳар хил чегаравий масалаларга олиб келади.

1-мисол. Ушбу

$$u'' = f(x, u, u')$$

иккинчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бу ерда (1.2) чегаравий шартларнинг қуйидаги тўрт хилини кўрсатиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ u(a)=A,\ u(b)=B; & 2)\ u'(a)=A_1,\ u'(b)=B_1; \\ 3)\ u(a)=A,\ u'(b)=B_1; & 4)\ u'(a)=A_1,\ u(b)=B. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Чегаравий масала ечимининг мавжуд ва ягоналигини текшириш Коши масаласиникига нисбатан анча мураккабдир. Чегаравий масаланинг ечими мавжуд бўлмаслиги, ёки ягона ечимга эга бўлиши, ёхуд чексиз кўп ечимга эга бўлиши мумкин.

2-мисол. Ушбу

$$u'' + u = 0,\ u(0) = u(\pi) = 0$$

чегаравий масала чексиз кўп

$$u(x) = c \sin x$$

кўринишдаги ечимга эга, бу ерда c — ихтиёрий ўзгармас сон.

Қуйидаги чегаравий масала

$$u'' + u = 0,\ u(0) = 0,\ u(x_0) = 1$$

x_0 нуқта $0 < x_0 < \pi$ шартни қаноатлантирганда ягона

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin x_0}$$

ечимга эга бўлиб, $x_0 = \pi$ бўлганда умуман ечимга эга эмас.

Биз бундан кейин (1.1), (1.2) чегаравий масаланинг ечими мавжуд ва ягона деб фараз қиламиз.

9.1.2. Чизиқли чегаравий масала. Энди умумий чегаравий масаланинг муҳим хусусий ҳоли бўлган *чизиқли чегаравий масалани* кўрамиз, бу ҳолда (1.1) дифференциал тенглама ва (1.2) чегаравий шартлар чизиқлидир.

Чизиқли n-тартибли дифференциал тенглама қулайлик учун, одатда, қуйидагича ёзилади:

$$L(u) = f(x), \tag{1.4}$$

бу ерда

$$L(u) = p_0(x)u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)u$$

бўлиб, $f(x), p_i(x)$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ функциялар кўпинча берилган $[a, b]$ оралиқда узлуксиз функциялар деб қаралади.

Соддалик учун (1.2) чегаравий шартда $[a, b]$ оралиқнинг $x_1 = a$ ва $x_2 = b$ четки нуқталари кирган деб қараймиз. Агар *чегаравий шартлар* қуйидаги кўринишга эга бўлса

$$\Gamma_\vartheta(u) = \gamma_\vartheta \quad (\vartheta = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.5}$$

улар *чизиқли* дейилади, бу ерда

$$\Gamma_\vartheta(u) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{\vartheta,k}u^{(k)}(a) + \beta_{\vartheta,k}u^{(k)}(b)\right]$$

ва γ_ϑ, $\alpha_{\vartheta,\kappa}$, $\beta_{\vartheta,\kappa}$ берилган сонлар бўлиб, барча $\vartheta = 1, 2, \ldots, n$ учун

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left|\alpha_{\vartheta,\kappa}\right| + \left|\beta_{\vartheta,k}\right|\right) \neq 0$$

шарт бажарилиши керак.

Чизиқли чегаравий шартлар сифатида (1.3) шартларни олиш мумкин, чунки уларни

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma, \; \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1$$

кўринишда ёза оламиз. Ҳақиқатан ҳам, бу ерда

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1, \; \gamma = A, \; \alpha_1 = \beta_1 = 0, \; \gamma_1 = B$$

ва ҳ. к. деб олсак, 1-мисолдаги шартлар келиб чиқади.

Ушбу

$$u(a) = u(b), \; u'(a) = u'(b)$$

даврийлик шартини ҳам чизиқли чегаравий шартлар деб қараш мумкин.

Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x) \equiv 0$ бўлса, *дифференциал тенглама бир жинсли* дейилади, акс ҳолда у *бир жинсли эмас* дейилади; агар барча $\gamma_\vartheta = 0$ ($\vartheta = 1, 2, \ldots, n$) бўлса, *чегаравий шартлар бир жинсли* дейилади, акс ҳолда улар *бир жинсли эмас* дейилади; агар дифференциал тенглама ва чегаравий шартлар бир жинсли бўлса, чегаравий масала *бир жинсли* дейилади.

Бир жинсли масала ҳар доим $u(x) \equiv 0$ тривиал ечимга эга. Аммо кўп ҳолларда бу масаланинг ҳар доим ҳам мавжуд бўлавермайдиган нотривиал ечими катта аҳамиятга эга. Шунинг учун ҳам $L(u) = 0$ дифференциал тенгламага ёки $\Gamma_\nu(u) = 0$ чегаравий шартларга λ параметр киритилади ва бу параметрни ўзгартириб, шунга эришиладики, λ нинг айрим қийматларида чегаравий масала ечимга эга бўлади. Параметрнинг бу қийматлари масаланинг *хос сонлари*, уларга мос келадиган нотривиал ечимлар масаланинг *хос функциялари* дейилади.

9.1.3. Дифференциал тенгламалар системаси учун чегаравий масала. Фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиқда чизиқли оддий дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} &u_1' + p_{11}(x)u_1 + p_{12}(x)u_2 + \ldots + p_{1n}(x)u_n = f_1(x), \\ &u_2' + p_{21}(x)u_1 + p_{22}(x)u_2 + \ldots + p_{2n}(x)u_n = f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_n' + p_{n1}(x)u_1 + p_{n2}(x)u_2 + \ldots + p_{nn}(x)u_n = f_n(x), \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

бу ерда $p_{ij}(x)$ ва $f_j(x)$ лар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз функциялар.

Қулайлик учун ушбу

$$A(x) = \left[p_{ij}(x)\right],$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}(x) = \left[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\right]^T,$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(x) = \left[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\right]^T$$

матрица ва векторларни киритамиз, бу ерда T — транспонирлашни билдиради. Бу белгилашларда (1.6) системани ушбу

$$\bar{\boldsymbol{u}}' + A(x)\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{f}}(x) \tag{1.7}$$

вектор кўринишда ёзиш мумкин.

Фараз қилайлик, (1.7) системанинг ечимлари қуйидаги кўринишда берилган чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$\alpha_k^T \bar{\boldsymbol{u}}(x_k) = \gamma_k,\ 1 \le k \le m,\ m \ge 2, \tag{1.8}$$

бунда

$$\alpha_k^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(k)} & \alpha_{12}^{(k)}, & \dots, & \alpha_{1n}^{(k)} \\ \alpha_{21}^{(k)} & \alpha_{22}^{(k)}, & \dots, & \alpha_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_{s_k 1}^{(k)} & \alpha_{s_k 2}^{(k)} & \dots & \alpha_{s_k n}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$\gamma_k = \left(\gamma_1^{(k)}, \dots, \gamma_{s_k}^{(k)}\right)^T$$

маълум матрица ва вектор бўлиб,

$$\sum_{k=1}^{m} s_k = n,\ a \le x_1 < x_2 < \dots < x_m = b.$$

Табиийки, (1.6), (1.7) чегаравий масала ягона ечимга эга бўлишига умид қилиш учун барча k учун (1.8) чизиқли комбинациялар чизиқли эркли бўлиши керак. Шунинг учун ҳам α_k^T матрицанинг ранги s_k га тенг деб фараз қиламиз. Бу шартни унга тенг кучли бўлган

$$\det \alpha_s^T \alpha_s \ne 0,\ s = 1, 2, \dots, m \tag{1.9}$$

шарт билан алмаштирамиз.

Агар $m = 2$ бўлса, у ҳолда чегаравий шарт

$$\alpha_1^T \vec{u}(x_1) = \gamma_1,\ \alpha_2^T \vec{u}(x_2) = \gamma_2$$

кўринишга эга бўлади ва одатда, $x_1 = a$, $x_2 = b$ деб олинади.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, n-тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама учун (1.1), (1.2) чегаравий масалани ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида (1.6), (1.7) кўринишда ёзиш мумкин.

9.2-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИ КОШИ МАСАЛАСИГА КЕЛТИРИШ

Фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиқда

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \tag{2.1}$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A,\ |\alpha_0| + |\alpha_1| \ne 0, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B,\ |\beta_0| + |\beta_1| \ne 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб қилинсин.

Ечимни

$$u = cy + z \tag{2.3}$$

кўринишда излаймиз, бунда c — ўзгармас сон, $y = y(x)$ ечим (2.1) тенгламага мос келадиган

$$y'' + p(x)y' + q(x)u = 0 \tag{2.4}$$

бир жинсли тенгламанинг нолдан фарқли ечими бўлиб, $z = z(x)$ эса

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = f(x) \tag{2.5}$$

тенгламанинг қандайдир ечими бўлсин. Равшанки, ихтиёрий c учун (2.3) формула билан аниқланган $u = u(x)$ ечим (2.1) тенгламанинг ечими бўлади. Ихтиёрий c учун (2.2) чегаравий шартнинг биринчиси бажарилишини талаб қиламиз, у ҳолда

$$c\alpha_0 y(a) + \alpha_0 z(a) + c\alpha_1 y'(a) + \alpha_1 z'(a) = A$$

ёки

$$\left[\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a)\right]c + \alpha_0 z(a) + \alpha_1 z'(a) = A \tag{2.6}$$

ҳосил бўлади. Бу тенглик барча c ларда бажарилиши учун c олдидаги коэффициент нолга айланиши зарур ва етарлидир, яъни қуйидаги тенгликлар бажарилиши керак:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \tag{2.7}$$

$$\alpha_0 z(a) + \alpha_1 z'(a) = A. \tag{2.8}$$

Агар ихтиёрий $c \neq 0$ учун

$$y(a) = \alpha_1 c,\ y'(a) = -\alpha_0 c \tag{2.9}$$

деб олсак, у ҳолда (2.7) тенглик бажарилади, (2.8) тенгликни таъминлаш учун $\alpha_0 \neq 0$ бўлганда

$$z(a) = \frac{A}{\alpha_0},\ z'(a) = 0 \tag{2.10}$$

ва $\alpha_1 \neq 0$ бўлганда

$$z(a) = 0,\ z'(a) = \frac{A}{\alpha_1} \tag{2.11}$$

деб олиш мумкин.

Шундай қилиб, $y = y(x)$ бир жинсли (2.4) тengламанинг (2.9) дастлабки шартларни қаноатлантирадиган Коши масаласининг ечими бўлиб, $z = z(x)$ эса (2.10) ёки чегаравий шартларни қаноатлантирадиган (2.5) тенглама учун Коши масаласининг ечимидир. Шу билан бирга $u = cy + z$ функция ихтиёрий c учун $x = a$ нуқтада чегаравий шартларни қаноатлантиради.

Энди c ўзгармасни шундай танлаймизки, $u = u(x)$ функция $x = b$ нуқтада (2.2) чегаравий шартни қаноатлантирсин, яъни

$$\left[\beta y(b) + \beta_1 y'(b)\right]c + \beta_0 z(b) + \beta_1 z'(b) = B,$$

бундан

$$c = \frac{B - \beta_0 z(b) - \beta_1 z'(b)}{\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b)}$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) \neq 0 \qquad (2.12)$$

шарт бажарилади, деб фараз қилинади.

Шундай қилиб, (2.1), (2.2) чегаравий масала иккита $y(x)$ ва $z(x)$ функция учун иккита Коши масалаларига келтирилди.

1-эслатма. Агар (2.12) шарт бажарилса, у ҳолда (2.1), (2.2) чегаравий масала ягона ечимга эга бўлади. Акс ҳолда бу масала ё умуман ечимга эга эмас, ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

2-эслатма. Агар (2.1) тенглама бир жинсли, яъни $f(x) \equiv 0$ бўлиб, $A = 0$ бўлса, у ҳолда (2.10) ва (2.11) шартларга кўра $z(a) = 0$ ва $z'(a) = 0$, демак, $z(x) \equiv 0$ келиб чиқади. Шунинг учун ҳам $u = cy(x)$ бўлиб, $u(x)$ функция (2.9) бошланғич шартни қаноатлантирадиган (2.4) тенгламанинг ечимидир. Бу ҳолда

$$c = \frac{B}{\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b)}$$

бўлади.

9.3-§. ЧЕКЛИ-АЙИРМАЛИ МЕТОД ЁРДАМИДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИ ЕЧИШ

9.3.1. Чекли-айирмали метод ғояси. Фараз қилайлик, $a \le x \le b$ оралиқда

$$L(u) \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \qquad (3.1)$$

дифференциал тенглама ва

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_1, \; |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \qquad (3.2)$$

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_2,\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \tag{3.3}$$

чегаравий шартлар берилган бўлиб, бу чегаравий масала ягона ечимга эга бўлсин.

Қаралаётган $[a, b]$ ораликни *тугунлар* деб аталувчи

$$x_i = a + ih\left(i = 0,1,\dots,N;\ h = (b-a)/N\right) \tag{3.4}$$

нуқталар ёрдамида N та тенг бўлакларга бўлиб, тўр ҳосил қиламиз. Ҳар бир тугунда (3.1) — (3.3) лардаги ҳосилаларни сонли дифференциаллаш формулалари бўйича функциянинг айрим нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаймиз. Натижада $i = 1, 2, \dots, N-1$ ҳолда $u(x_i)$ ларни топиш учун $N-1$ та тенгламага эга бўламиз.

Агар булар билан чегаравий шартлардан ($i = 0$ ва $i = N$) келиб чиқадиган тенгламаларни ҳам бирлаштирсак, у ҳолда $u(x_0)$, $u(x_1)$, ..., $u(x_N)$ га нисбатан $N + 1$ та тенгламалардан иборат системага эга бўламиз.

Чекли-айирмали методни қўллаганда қуйидаги масалалар ечилиши керак:

1) сонли дифференциаллаш формулаларини шундай танлаш кераккки, улар ҳосилани яхши яқинлаштирсин ва бу формулада функциянинг тугун нуқталаридаги қийматлари қатнашсин;

2) ҳосил бўлган система ечимининг мавжудлиги текширилсин;

3) бу системани ечиш методи кўрсатилсин;

4) ҳосил бўлган натижанинг аниқлиги баҳолансин.

9.3.2. Оддий дифференциал тенглама ва чегаравий шартларни алгебраик тенгламалар системаси билан алмаштириш. Биз бу ерда $[a, b]$ оралиқда (3.4) тугун нуқталарни танлаб, (3.1) дифференциал тенгламани фақат ички тугунларда қараймиз, яъни $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) ва (3.2) — (3.3) чегаравий шартларни эса мос равишда $x_0 = a$ ва $x_N = b$ нуқталарда қараймиз; (3.1) тенгламада $x = x_i$ деб оламиз:

$$u''(x_i) + p(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \tag{3.5}$$

$$i = 1,\ 2,\dots,\ N-1$$

ва бунда қатнашадиган $u'(x_i)$ ва $u''(x_i)$ ларни $u(x)$ функциянинг x_{i-1}, x_i, x_{i+1} нуқталардаги қиймати, яъни $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$, $u(x_{i+1})$ орқали ифодалаймиз. Бунинг учун x_i нуқта атрофида $u = u(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қилиб, $u(x_{i-1})$ ва $u(x_{i+1})$ функцияларнинг Тейлор формуласи бўйича ёйилмасини ёзамиз (қолдиқ ҳадни эса Лагранж формасида оламиз):

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \\ + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(x_i + \theta h),\ 0 < \theta < 1, \tag{3.6}$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \\ + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(x_i - \theta_1 h),\ 0 < \theta_1 < 1. \tag{3.7}$$

Бу формулалардан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + 0(h), \tag{3.8}$$

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} = u'(x_i) + 0(h), \tag{3.9}$$

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = u'(x_i) + 0(h^2). \tag{3.10}$$

Бу ифодаларнинг чап томони мос равишда *ўнг ҳосила*, *чап ҳосила* ва *марказий ҳосила* дейилади. Шунга ўхшаш $u''(x_i)$ учун қуйидаги симметрик ифодага эга бўламиз:

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = u''(x_i) + 0(h^2). \tag{3.11}$$

Энди (3.5) тенгликда $u'(x_i)$ ва $u''(x_i)$ ларнинг ўрнига (3.10), (3.11) ларни қўйиб ва $0(h^2)$ ни ўнг томонга ўтказиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + \\ + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + 0(h^2) \tag{3.12}$$

ёки

$$\left[1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right]u(x_{i-1}) - \left[2 - h^2 q(x_i)\right]u(x_i) + \left[1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right]u(x_{i+1}) = \\ = h^2 p(x_i) + 0(h^4), \tag{3.13}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Шунга ўхшаш (3.8), (3.9) лардан фойдаланиб, (3.2), (3.3) чегаравий шартлар учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left(\alpha_0 h-\alpha_1\right)u\left(x_0\right)+\alpha_1 u\left(x_1\right)=h\gamma_1+0\left(h^2\right), \tag{3.14}$$

$$-\beta_1 u\left(x_{N-1}\right)+\left(\beta_1+h\beta_0\right)u\left(x_N\right)=h\gamma_2+0\left(h^2\right). \tag{3.15}$$

Энди (3.13) — (3.15) ларнинг ўнг томонида $0(h^4)$ ва $0(h^2)$ қолдиқ ҳадларни ташлаб юборамиз, натижада

$$\left[1-\frac{h}{2}p\left(x_i\right)\right]y_{i-1}-\left[2-h^2 q\left(x_i\right)\right]y_i+\left[1+\frac{h}{2}p\left(x_i\right)\right]y_{i+1}=$$

$$=h^2 f\left(x_i\right),\ i=1,2,\dots,N-1, \tag{3.16}$$

$$\left(\alpha_0 h-\alpha_1\right)y_0+\alpha_1 y_1=h\gamma_1, \tag{3.17}$$

$$-\beta_1 y_{N-1}+\left(\beta_1+h\beta_0\right)y_N=h\gamma_2 \tag{3.18}$$

ҳосил бўлади.

Бу ерда y_i орқали $u(x_i)$ нинг тақрибий қиймати белгиланган. Кейинчалик қулай бўлиши учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\left.\begin{array}{l} A_i=1-\frac{h}{2}p\left(x_i\right),\ C_i=2-h^2 q\left(x_i\right),\ B_i=1+\frac{h}{2}p\left(x_i\right), \\ x_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-h\alpha_0},\ \vartheta_1=\frac{h\gamma_1}{h\alpha_0-\alpha_1},\ x_2=\frac{\beta_1}{\beta_1+h\beta_0},\ \vartheta_2=\frac{h\gamma_2}{\beta_1+h\beta_0}. \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

Бу белгилашларда (3.16) — (3.18) системани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{array}{l} A_i y_{i-1}-C_i y_i+B_i y_{i+1}=h^2 f_i, \\ y_0=x_1 y_1+\vartheta_1, \\ y_N=x_2 y_{N-1}+\vartheta_2. \end{array}\right\} \tag{3.20}$$

Бу системанинг матрицаси уч диагоналли бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -c_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шуни таъкидлаш керакки, (3.16) ифода дифференциал тенгламани $0(h^2)$ хатолик билан, (3.17) ва (3.18) лар эса чегаравий шартларни $0(h)$ хатолик билан алмаштиради. Кўриниб турибдики, дифференциал тенглама чегаравий шартларга нисбатан каттароқ аниқликда алмаштирилади. Бундай аниқлик мақсадга мувофиқ бўлмай қолиши мумкин, у ҳолда $u'(a)$ ва $u'(b)$ аниқроқ формулалар билан алмаштирилади (5-боб 16-§ га қ.):

$$u'(x_0) = \frac{1}{3h}\left[-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}u'''(\xi)$$

ва

$$u'(x_N) = \frac{1}{2h}\left[u(x_{N-2}) - 4u(x_{N-1}) + 3u(x_N)\right] + \frac{h^2}{3}u'''(\xi).$$

Умуман олганда, қўшимча x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i-3}, x_{i+3} ва ҳ. к. тугунларда $u(x)$ функциянинг қийматини олиб, чегаравий масалани каттароқ аниқликда алмаштириш мумкин. Аммо бу алгебраик системани мураккаблаштириб юборади, табиийки, бундай системани сонли ечиш ҳам оғир масалага айланади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш амалиётида шундай системалар қаралади, уларнинг аниқлиги катта бўлмаса ҳам кўриниши содда бўлиши керак. Аниқликни ошириш учун h кичикроқ қилиб олинади. Шу сабабларга кўра, кўпинча (3.1) — (3.3) чегаравий масалани ечиш учун (3.20) кўринишдаги система олинади.

9.3.3. Максимум (принципи) ва уни чекли-айирмали тенгламалар системаси ечимининг мавжудлигини текширишга қўллаш. Олдинги банддаги (3.20) система ечимининг мавжудлигини кўрсатиш учун салмоқли бош диагоналга эга бўлган матрицалар ҳақидаги леммани қўллаш мумкин (6-боб 9-§ га қ.). Аммо биз бу ерда бошқача иш тутамиз. Аввало, максимум (принципи) ҳақидаги леммани келтирамиз. Бу принципнинг қўлланиш доираси анча кенг, у нафақат оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш натижасида ҳосил бўладиган (3.20) кўринишдаги системани текшириш учун, балки бу методларнинг яқинлашишини текшириш ва хатосини баҳолаш учун ҳам ишлатилади.

Фараз қилайлик, қуйидаги икки шарт бажарилган бўлсин:

$$1)\quad \frac{h}{2}\max_{a\le x\le b}|p(x)| < 1, \tag{3.21}$$

$$2)\quad q(x)\le 0,\ a\le x\le b. \tag{3.22}$$

Бу шартлар A_i, B_i, C_i коэффициентларнинг мусбатлигини таъминлайди.

Кейинги мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида (3.2) — (3.3) чегаравий шартларда $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ деб оламиз, у ҳолда $x_1 = x_2 = 0$ бўлиб, (3.20) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned} &A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = hf_i,\ i = \overline{1, N-1}; \\ &u_0 = \vartheta_1, u_N = \vartheta_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Бу система ечимининг мавжудлигини кўрсатиш учун бунга мос келадиган

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = 0,\ i = \overline{1, N-1}, y_0 = 0 \tag{3.24}$$

бир жинсли система фақат $y_0 = y_1 = \ldots = y_N = 0$ тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатишимиз керак, чунки бу ҳолда (3.24) системанинг детерминанти

$$D = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & -C_2 & B_2 & & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-2} & -C_{N-2} & B_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & A_{N-1} & -C_{N-1} \end{vmatrix}$$

нолдан фарқли бўлади. Аммо бу детерминант (3.23) системанинг ҳам детерминанти бўлиб, $D \neq 0$ тенгсизлик бу система ечимининг мавжуд ва ягоналигини таъминлайди.

Фараз қилайлик, қандайдир $z_0, z_1, \ldots, z_N$ сонлар берилган бўлиб, $z_i \not\equiv \text{const}$ бўлсин. Ушбу айирмали операторни киритамиз:

$$\Lambda(z_i) \equiv A_i z_{i-1} - C_i z_i + B_i z_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, N+1.$$

1-лемма (*максимум принципи*). Агар (3.21), (3.22) шартлар бажарилса ва $i = 1, 2, \ldots, N-1$ учун

$$\Lambda(z_i) \geq 0 \left(\Lambda(z_i) \leq 0\right)$$

бўлса, у ҳолда $z_0, z_1, \ldots, z_N$ сонлар орасида z_0 ёки z_N энг катта мусбат қийматга (энг кичик манфий қийматга) эга бўлиши мумкин.

Исботи. Айтайлик,

$$\Lambda(z_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N-1$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин. Тескарисини фараз қиламиз, айтайлик, z_i лар ўзининг энг катта мусбат қиймати M ни $i = k$ $(1 \le k \le N-1)$ бўлганда қабул қилсин, яъни $\max\limits_{1\le i\le N-1} z_i = z_k = M$ бўлиб, z_{k+1} ёки z_{k-1} сонларнинг ҳеч бўлмаганда бирортаси M дан кичик бўлсин. У ҳолда

$$
\begin{aligned}
\Lambda(z_k) &= A_k z_{k-1} - C_k z_k + B_k z_{k+1} = \\
&= \left[1 - \frac{h}{2}p(x_k)\right] z_{k-1} - \left[2 - h^2 q(x_k)\right] M + \left[1 + \frac{h}{2}p(x_k)\right] z_{k+1} < \\
&< \left[1 - \frac{h}{2}p(x_k)\right] M - \left[2 - h^2 q(x_k)\right] M + \left[1 + \frac{h}{2}p(x_k)\right] M = \\
&= h^2 q(x_k) M \le 0,
\end{aligned}
$$

чунки лемма шартига кўра A_k, B_k, C_k коэффициентлар мусбат бўлиб, z_{k+1} ёки z_{k-1} сонлардан ҳеч бўлмаганда бири M дан кичик. Демак, $\Lambda(z_k) < 0$. Бу эса лемма шартига зиддир. Бундан эса бизнинг фаразимизнинг нотўғрилиги ва энг катта мусбат қиймат фақат z_0 ёки z_N бўлиши мумкинлиги келиб чиқади. Лемманинг тасдиғи $\Lambda(z_i) \le 0$ учун ҳам худди шунга ўхшаш исботланади. Энди (3.24) системанинг фақат тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатамиз. Яна тескарисини фараз қилиб, бу система нолдан фарқли ечимга эга деб ҳисоблаймиз, яъни $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ сонларнинг орасида ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлсин. Бу ерда ҳам (3.21), (3.22) шартлар бажарилган деб фараз қиламиз ва бундан ташқари, барча $i = 1, 2, \ldots, N-1$ учун $\Lambda(y_i) = 0$ тенгликлар ўринлилигини ҳисобга оламиз. Шунинг учун ҳам лемманинг тасдиғига кўра y_i сонларнинг энг катта мусбат қиймати (энг кичик манфий қиймати) фақат y_0 ва y_N бўлиши мумкин. Лекин $y_0 = y_N = 0$, демак, $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ лар нолга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, (3.24) система фақат тривиал ечимга эга бўлиб, (3.23) система ягона ечимга эга.

9.3.4. Айирмали ҳайдаш методи ва унинг турғунлиги. Биз 4-бобда умумий кўринишдаги матрицага эга бўлган N-тартибли системани Гausснинг номаълумларни йўқотиш методи билан ечишда $0(N^3)$ миқдорда арифметик амаллар бажарилишини кўрган эдик. Агар матрицаси уч диагоналдан иборат бўлган (3.20) системани ечишда Гаусс методи бўйича тузилган стандарт дастурга мурожаат қилсак, ЭҲМ $0(N^3)$ миқдорда амал бажаради. Аммо (3.20) системада нолдан фарқли элементларнинг миқдори $0(N)$. Шунинг учун ҳам $0(N^3)$ миқдордаги амалдан $0(N)$ таси *мазмундор амал* бўлиб, қолган $0(N^3)$ таси *мазмунсиз амалдир,* чунки улар нолни бирор сонга кўпайтириш (бўлиш) ва нолни нолга қўшиш (айириш) дан иборат. Демак, (3.20) системани Гаусс методи бўйича тузилган стандарт дастур ёрдамида ечиш ортиқча амал бажаришга олиб келиб, мақсадга мувофиқ бўлмайди.

Ўтган асрнинг эллигинчи йилларида бу нуқсондан қутулиш мақсадида уч диагоналли матрицага эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун Гаусс методининг шундай варианти ишлаб чиқилдики, у матрицанинг фақат нолдан фарқли элементлари устида амал бажаради. Бу вариант *ҳайдаш методи* деган ном олди. Ҳайдаш методида арифметик амалларнинг сони $0(N)$ га тенг. Ҳозирги вақтда ҳайдаш методининг ўзи хилма-хил вариантларга эга ва улар хилма-хил масалаларни ечишга мўлжалланган [46] .

Шундай қилиб,

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = h^2 f_i,\ i = 1,2,...,N-1 \qquad (3.25)$$

айирмали тенгламалар системаси ва

$$y_0 = x_1 y_1 + \vartheta_1,\ y_N = x_2 y_{N-1} + \vartheta_2 \qquad (3.26)$$

чегаравий шартлар берилган бўлсин. Бу ерда A_i, B_i, C_i, f_i, x_1, x_2, ϑ_1, ϑ_2 берилган сонлар. Биз (3.25) системанинг ечимини қуйидаги

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1},\ i = 0,1...,N-1 \qquad (3.27)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда α_{i+1} ва β_{i+1} ҳозирча номаълум сонлар. (3.27) тенгликдан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y_i = \alpha_i y_{i-1} + \beta_i,$$

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1} = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i-1} + \alpha_{i+1}\beta_i + \beta_{i+1}.$$

Бу ифодаларни (3.25) тенгламага қўйсак,

$$\left[A_i - \alpha_i\left(C_i - B_i\alpha_{i-1}\right)\right] y_{i-1} + \left[\beta_i\left(B_i\alpha_{i+1} - C_i\right) + B_i\beta_{i+1} - h^2 f_i\right] = 0$$

келиб чиқади. Кўриниб турибдики, агар

$$A_i - \alpha_i\left(C_i - B_i\alpha_{i+1}\right) = 0,\ \ \beta_i\left(B_i\alpha_{i-1} - C_i\right) + B_i\beta_{i+1} = h^2 f_i$$

тенгликлар бажарилса, у ҳолда (3.25) тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, α_i ва β_i ларни топиш учун ушбу рекуррент формулаларга эга бўламиз:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\ \beta_i = \frac{B_i\beta_{i+1} - h^2 f_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\ i = 1,2,...,N-1;$$

α_N ва β_N миқдорларни эса (3.26) чегаравий шартдан ва (3.27) тенгликда $i = N-1$ бўлганда ҳосил қиламиз:

$$\alpha_N = x_2, \; \beta_N = \vartheta_2.$$

(3.27) формула ёрдамида ҳисоблашни бажариш учун y_0 нинг қийматини топиш керак, бу эса (3.26) чегаравий шартдан ва (3.27) тенгликдан $i = 0$ бўлганда ҳосил бўлади:

$$y_0 = \frac{x_1\beta_1+\vartheta_1}{1-x_1\alpha_1}.$$

Шундай қилиб, (3.25) — (3.26) чегаравий масаланинг аниқ ечимини топиш учун ушбу *ҳайдаш методи* деб аталувчи алгоритмга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \; \beta_i = \frac{B_i\alpha_{i+1} - h^2 f_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}},\\
&i = 1,2,\ldots,N-1;\\
&\alpha_N = x_2, \; \beta_N = \vartheta_2,\\
&y_{i+1} = \alpha_{i+1}y_i + \beta_{i+1}, \; i = 0,1,\ldots,N-1,\\
&y_0 = (\vartheta_1 + x_1\alpha_1)/(1 - x_1\alpha_1).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Бу ерда y_i лар чегаранинг чап нуқтасидан бошлаб кетма-кет топилади, шунинг учун ҳам (3.28) формулалар *чапдан ҳайдаш формулалари* дейилади. Шунга ўхшаш *ўнгдан ҳайдаш формулаларини* ҳам чиқариш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \xi_i A_i}, \; \eta_{i-1} = \frac{\eta_i A_i - h^2 f_i}{C_i - \eta_i A_i}, \; i = 1,2,\ldots,N-1;\\
&\xi_1 = x_1, \; \eta_1 = \vartheta_1,\\
&y_i = \xi_{i+1}y_{i+1} + \eta_{i+1}, \; i = 0,1,\ldots,N-1;\\
&y_N = (\vartheta_2 + x_2\eta_N)/(1 - x_2\xi_N).
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Айрим ҳолларда чапдан ва ўнгдан ҳайдаш методларининг комбинациясини олиб, *қарама-қарши ҳайдаш методи* деб аталувчи методни ишлатиш маъқулдир.

1-машқ. (3.29) ўнгдан ҳайдаш формулалари исботлансин.

Агар α_i коэффициентлар модули билан бирдан кичик бўлса, у ҳолда (3.28) *ҳайдовчи формулалар турғун* деб аталади.

Бундай ҳолда (3.27) рекуррент формулалар бўйича ҳисоблаш олиб борилганда келиб чиқадиган яхлитлаш хатоликлари ўсмайди.

Теорема. *Агар қуйидаги шартлар*

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i \geq A_i + B_i,\ i = 1,2,\ldots,N-1; \qquad (3.30)$$
$$0 \leq x_1,\ x_2 < 1$$

бажарилса, у ҳолда ҳайдашни бажариш мумкин ва у турғун бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, $0 \leq \alpha_N = x_2 < 1$ эканлиги теорема шартидан келиб чиқади. Фараз қилайлик, $0 \leq \alpha_{i+1} < 1$ бўлсин, у ҳолда

$$0 < \alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}} = \frac{A_i}{(C_i - B_i - A_i) + A_i + (1-\alpha_{i+1})B_i} < 1$$

бўлади, чунки сурат ва махражнинг ҳадлари мусбат бўлиб, махраж суратдан катта. Шундай қилиб, барча $i = 1, 2, ..., N-1$ учун $0 < \alpha_i < 1$. Энди $0 \leq x_1 < 1$ шарт $0 < \alpha_1 < 1$ шарт билан бирга y_0ни аниқлайдиган формулада махражнинг нолдан фарқлилигини таъминлайди. Шуни исбот қилиш керак эди.

Эслатма. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, x_i га қўйилган шартларни юмшатиш мумкин. Масалан, агар (3.30) шартлар ўрнига ушбу

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i \geq A_i + B_i,\ C_i \not\equiv A_i + B_i, \qquad (3.31)$$
$$0 \leq x_1,\ x_2 < 1$$

ёки

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i \geq A_i + B_i,\ 0 \leq x_1,\ x_2 < 1, \qquad (3.32)$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$

шартлар бажарилса, у ҳолда теореманинг тасдиғи ўринлилигича қолади.

2-машқ. (3.31) шартлар бажарилганда ҳайдаш методининг турғунлиги исботлансин.

3-машқ. (3.32) шартлар бажарилганда ҳайдаш методининг турғунлиги кўрсатилсин.

9.3.5. Чекли-айирмали методнинг яқинлашиши. Асосий ғоя тушунарли бўлиши учун чегаравий шарти энг содда бўлган ушбу чегаравий масалани қараймиз:

$$L(u) \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \qquad (3.33)$$
$$u(a) = \gamma_1,\ u(b) = \gamma_2.$$

Олдингидек фараз қилайлик, $u(x)$ ечим $[a, b]$ да тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда (3.6), (3.7) формулалардан

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}=u''(x_i)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i+\theta h), |\theta|<1,$$

$$\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}=u'(x_i)+\frac{h^2}{6}u'''(x_i+\theta_1 h), |\theta_1|<1$$

ҳосил бўлади. Энди 9.3.3 дагидек

$$\Lambda(z_i)\equiv A_i z_{i-1}-C_i z_i+B_i z_{i+1}$$

деб оламиз, бу ерда A_i, C_i, B_i коэффициентлар (3.19) формулалар билан аниқланади.

Фараз қилайлик, $u(x)$ — чегаравий масаланинг изланаётган ечими бўлсин. У ҳолда юқоридаги ифодаларни (3.12) га қўйсак,

$$\frac{1}{h^2}\Lambda(u(x_i))=f_i+R_i \tag{3.34}$$

ҳосил бўлади, бу ерда $f_i=f(x_i)$,

$$R_i=\frac{h^2}{12}\left[u^{IV}(x_i+\theta h)+2p(x_i)u'''(x_i+\theta_1 h)\right].$$

Аммо A_i, C_i, B_i коэффициентлар f_i ни яхлитлаш билан ҳисобланади, шунинг учун ҳам реал ҳисобланадиган y_i лар ўрнига $\tilde{y}_i$ тақрибий қийматлар

$$\frac{1}{h^2}\Lambda(\tilde{y}_i)=f_i-\alpha_i,\quad i=1,2,\dots,N-1, \tag{3.35}$$

$$\tilde{y}_0=\gamma_1,\ \tilde{y}_N=\gamma_2$$

муносабатларни қаноатлантиради, бу ерда α_i яхлитлаш ҳисобидан ҳосил бўлган хатолик. Ечимнинг аниқ қиймати билан унинг тақрибий қиймати орасидаги фарқни

$$\varepsilon_i=u(x_i)-\tilde{y}_i$$

деб белгилаймиз, $|\varepsilon_i|$ ни баҳолаймиз ва қайси ҳолларда яқинлашишини аниқлаймиз. Энди (3.34), (3.35) формулалардан фойдаланиб, ε_i ни аниқлаш учун

$$\Lambda(\varepsilon_i) = h^2(R_i + \alpha_i),\ i = 1, 2, ..., N-1,$$
$$\varepsilon_0 = 0,\ \varepsilon_N = 0 \quad (3.36)$$

системага эга бўламиз.

Биз $|\varepsilon_i|$ ни баҳолаш учун шундай $V_i(x)$ функция қурамизки, у $|\varepsilon_i|$ учун мажоранта бўлсин, яъни

$$|\varepsilon_i| \le V(x_i),\ V(x) \ge 0.$$

Мажоранта қуриш учун қуйидаги леммадан фойдаланамиз: Фараз қилайлик, $t_0, t_1, ..., t_N$, ва $T_0, T_1, ..., T_N (T_i \ge 0)$ қандайдир сонлар бўлсин.

Лемма (мажоранта ҳақида). Фараз қилайлик, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\frac{h}{2}\max|p(x)| < 1;$

2) $q(x) \le 0;$

3) $\Lambda(T_i) \le -|\Lambda(t_i)|,\ i = 1, 2, ..., N-1;$

4) $|t_0| \le T_0,\ |t_N| \le T_N.$

У ҳолда

$$|t_i| \le T_i,\ i = 1, 2, ..., N-1.$$

Исботи. Ушбу $t_i + T_i$ йиғиндини қараймиз. Лемманинг учинчи шартига кўра

$$\Lambda(t_i + T_i) = \Lambda(t_i) + \Lambda(T_i) \le 0.$$

Максимум принципи ҳақидаги леммага кўра $t_i + T_i$ сонлар орасида энг кичик манфий қийматни $t_0 + T_0$ ёки $t_N + T_N$ қабул қилиши мумкин. Лемманинг тўртинчи шартига кўра бу сонлар манфий эмас, демак, барча i учун $t_i + T_i \ge 0$. Шунга ўхшаш $T_i - t_i \ge 0$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Охирги иккита тенгсизлик кўрсатадики, $-T_i \le t_i \le T_i$ ёки $|t_i| \le T_i$. Лемма исботланди.

Энди ёрдамчи масалани қараймиз:

$$L(u)^o V'' + p(x)V' + q(x)V = -1,$$
$$V(a) = 0, V(b) = 0$$

ва унинг ечимини $\tilde{V}(x)$ деб белгилаймиз. Барча $a < x < b$ учун $\tilde{V}(x) > 0$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, агар $(a,\ b)$ да

$V(x) \le 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар топилса, у ҳолда $V(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлганлиги учун шу оралиқнинг бирор ξ нуқтасида ўзининг мусбат бўлмаган минимумига эришади. Бу ҳолда $\tilde{V}''(\xi) \ge 0$, $\tilde{V}'(\xi) = 0$, $\tilde{V}(\xi) < 0$ ва $q(\xi) \le 0$ бўлганлиги учун биз $L\left[\tilde{V}(\xi)\right] \ge 0$ тенгсизликка эга бўлар эдик. Бу эса қарама-қаршиликка олиб келади, чунки $\tilde{V}(x)$ функция $L\left(\tilde{V}\right) = -1$ тенгламанинг ечимидир. Демак, барча $x \in (a,b)$ учун $\tilde{V}(x) > 0$.

Энди

$$W(x) = \tau V(x)$$

функцияни киритиб, τ мусбат параметрни шундай танлаймизки, $W(x_i)$ сонлар $|\varepsilon_i|$ лар учун мажоранта бўлсин. Бунинг учун $u(x)$ функция $L(u) = f(x)$ тенгламанинг ечими деб фараз қилиб, (3.34) формулани

$$\frac{1}{h^2}\Lambda\left[u(x_i)\right] = L\left[u(x_i)\right] + R_i(u)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шунга ўхшаш $W(x)$ учун

$$\frac{1}{h^2}\Lambda\left(W(x_i)\right) = L\left(W(x_i)\right) + R_i(W) = -\tau + R_i(W)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$R_i(W) = \frac{\tau h^2}{12}\left[W^{IV}(x_i + \theta h) + 2P(x_i)W'''(x_i + \theta_1 h)\right],$$
$$|\theta| < 1, |\theta_1| < 1.$$

Демак,

$$\Lambda\left(W(x_i)\right) = -\tau h^2\left[1 - \frac{h^2}{12}W^{IV}(x_i + \theta h) - 2P(x_i)W'''(x_i + \theta_1 h)\right]. \qquad (3.37)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$P = \max_{a \le x \le b}|p(x)|, \; M_3 = \max_{a \le x \le b}|W'''(x)|,$$
$$M_4 = \max_{a \le x \le b}|W^{IV}(x)|, \; M = \frac{1}{12}M_4 + \frac{1}{6}PM_3.$$

Буларни эътиборга олиб, (3.37) дан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\Lambda\left(W(x_i)\right) \le -\tau h^2\left(1 - \frac{h^2}{12}M_4 - \frac{h^2}{6}PM_3\right) = -\tau h^2\left(1 - h^2 M\right),$$

бунда h қадамни $1 - h^2M > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб оламиз. Шундай қилиб,

$$\Lambda\left(W\left(x_i\right)\right) \leq -\tau h^2\left(1 - h^2 M\right),\ i = 1,2,\ldots,N-1,$$
$$W\left(x_0\right) = W\left(x_N\right) = 0. \tag{3.38}$$

Энди (3.36) дан кўрамизки,

$$\left|\Lambda\left(\varepsilon_i\right)\right| \leq h^2\left(h^2\tilde{M} + \delta\right),\ i = 1,2,\ldots,N-1, \tag{3.39}$$

бунда

$$\tilde{M} = \frac{1}{12}\tilde{M}_4 + \frac{1}{6}P\tilde{M}_3,\ \tilde{M}_3 = \max_{a\leq x\leq b}\left|u'''\left(x\right)\right|,$$
$$\tilde{M}_4 = \max_{a\leq x\leq b}\left|u^{IV}\left(x\right)\right|,\ \left|\alpha_i\right| \leq \delta.$$

Агар биз τ параметрни

$$\Lambda\left(W\left(x_i\right)\right) \leq -\left|\Lambda\left(\varepsilon_i\right)\right|$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олсак, у ҳолда $\varepsilon_i = \varepsilon_N = 0$ ҳисобга олинганда мажоранта ҳақидаги леммани қўллашимиз мумкин. Бунинг учун (3.38) ва (3.39) тенгсизликларга кўра

$$-\tau h^2\left(1 - h^2 M\right) \leq -h^2\left(h^2\tilde{M} + \delta\right)$$

ёки

$$\tau \geq \frac{\tilde{M}h^2}{1 - Mh^2} + \frac{\delta}{1 - Mh^2}.$$

Шундай тенгсизликни қаноатлантирадиган τ учун 2-леммадан

$$\left|\varepsilon_i\right| \leq W\left(x_i\right) = \tau V\left(x_i\right)$$

ёки

$$\left|\varepsilon_i\right| \leq \left(\frac{\tilde{M}h^2}{1-h^2M} + \frac{\delta}{1-h^2M}\right)V\left(x_i\right),\ i = 0,1,\ldots,N \tag{3.40}$$

баҳога эга бўламиз; $[a, b]$ ораликда $V(x)$ узлуксиз бўлганлиги учун у чегаралангандир.

Шунинг учун ҳам, агар $h \to 0$ да $\delta \leq \delta_0 h^2$ бўлса, у ҳолда (3.40) тенгсизликдан $\varepsilon\left(h\right) = \max\limits_{0\leq i\leq N}\left|\varepsilon_i\right| = 0\left(h^2\right)$ келиб чиқади.

Теорема. *Фараз қилайлик,*

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x),\ u(a) = \gamma_1,\ u(b) = \gamma_2$$

чегаравий масаланинг u(x) ечими [a, b] оралиқда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин ва қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$1)\ \frac{h}{2}\max|p(x)| < 1, \qquad 2)\ q(x) \le 0, \qquad 3)\ \delta \le \delta_0 h^2.$$

У ҳолда қаралаётган чегаравий масала учун айирмали метод $0(h^2)$ *аниқликда текис яқинлашади.*

Эслатма. Агар $\alpha_0\alpha_1 \le 0$ ва $\beta_0\beta_1 \ge 0$ тенгсизликлар ўринли бўлса, теорема (3.1)—(3.3) чегаравий масала учун ҳам ўринли бўлади.

Бу ва бунга ўхшаш теоремаларнинг нуқсони шундан иборатки, унда номаълум ечимнинг учинчи ва тўртинчи ҳосилалари қатнашади. Одатда, бу ҳосилаларни баҳолаш оғир масала. Шунинг учун ҳам бу теорема фақат назарий аҳамиятга эга.

Машқ. Ушбу чегаравий масала

$$u'' - 2xu' - 2u = -4x,$$

$$u(0) = 1,\ u(1) = 1 + e = 3{,}718282$$

юқорида келтирилган ҳайдаш методининг иккала варианти ёрдамида тақрибий ечилсин ва натижа $u(x) = 1 + e^{x^2}$ аниқ ечимнинг қийматлари билан солиштирилсин.

9.3.6. Чекли-айирмали метод ёрдамида иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган чегаравий масалани ечиш. Қуйидаги чизиқли бўлмаган

$$u'' = f(x, u, u') \tag{3.41}$$

дифференциал тенглама ва

$$\alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = \gamma_1,\ \beta_0 u(b) - \beta_1 u'(b) = \gamma_2 \tag{3.42}$$

чегаравий шартлар берилган бўлиб, бунда α_0, $\alpha_1, \beta_0, \beta_1$ бир хил ишорага эга. Шу билан бирга, фараз қилайлик, $f(x, y, z)$ функция $Oxyz$ фазонинг y ва z ларга нисбатан қабариқ бўлган бирор G соҳасида узлуксиз функция бўлсин.

Олдингидек

$$x_i = a + ih\ \big(i = 0, 1, \ldots, N,\ (b - a)h = N\big)$$

тугунлар ёрдамида $[a, b]$ оралиқни N та тенг бўлакка бўлиб, (3.41) тенглама ва (3.42) чегаравий шартларни тақрибий равишда алмаштириб, $(N + 1)$ та y_0, y_1, ..., y_N номаълумларга нисбатан ушбу

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=f\left(x_i,y_i,\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right),\ i=1,2,\dots,\ N-1\\ \alpha_0y_0-\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=\gamma_1,\ \beta_0y_N+\beta_1\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h}=\gamma_2\end{array}\right\}\tag{3.43}$$

$(N+1)$ та чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\left.\begin{array}{l}R_0(y)=\alpha_0y_0-\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h},\\ R_N(y)=\beta_0y_N+\beta_1\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h}.\end{array}\right\}\tag{3.44}$$

Юқоридаги (3.43) системани ечиш учун итерация методини қуйидаги схема бўйича қўллаймиз:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y_{i+1}^{(j+1)}-2y_i^{(j+1)}+y_{i-1}^{(j+1)}}{h^2}=f\left(x_i,y_i,\dfrac{y_{i+1}^{(j)}-y_{i-1}^{(j)}}{2h}\right),\\ i=1,2,\dots,N-1\\ R_0\left[y^{(j+1)}\right]=\gamma_1,\ R_N\left[y^{(j+1)}\right]=\gamma_2.\end{array}\right\}\tag{3.45}$$

Бу ерда юқоридаги j индекс итерациянинг номерини билдиради. Итерациянинг ҳар бир қадамида чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Бу система махсус кўринишга эга бўлганлиги учун унинг ечимини ошкор кўринишда ёзиш мумкин (бунинг исботини [7] дан қаранг):

$$\begin{aligned}y_i^{(j+1)}&=\frac{h}{\Delta}\left[\beta_0\gamma_1(b-a)+\beta_1\gamma_1+\alpha_1\gamma_2\right]+\\&+\frac{i}{\Delta}\left(\alpha_0\gamma_2-\beta_0\gamma_1\right)+h^2\sum_{k=1}^{N-1}g_{ik}f_k^{(j)},\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$f_k^{(j)}=f\left(x_k,y_k^{(j)},\frac{y_{k+1}^{(j)}-y_{k-1}^{(j)}}{2h}\right),$$

бунда a, b, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ — маълум сонлар бўлиб, Δ ва g_{ik} қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$\Delta=\frac{1}{h}\left[\alpha_0\beta_0(b-a)+\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right],$$

$$g_{ik}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}\left(i\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(k\beta_0-\beta_0N-\dfrac{\beta_1}{h}\right)\ (i\le k),\\ \dfrac{1}{\Delta}\left(k\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(i\beta_0-\beta_0N-\dfrac{\beta_1}{h}\right)\ (i\ge k).\end{cases}\tag{3.47}$$

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, (3.47) формулада g_{ik} лар итерация номерига боғлиқ эмас, шунинг учун уларни бир марта ҳисоблаб қўйиш кифоядир.

Қаралаётган методнинг яқинлашишини текшириш анча мураккаб иш бўлиб, $R(x, y, z)$ функция G соҳада y ва z ларга нисбатан

$$\left|R(x,y,z) - f(x,\bar{y},\bar{z})\right| \le L_1\left|y-\bar{y}\right| + L_2\left|z-\bar{z}\right|$$

Липшиц шартини қаноатлантирган ҳол учун бундай тадқиқот [7] да келтирилган.

9.4-§. КОЛЛОКАЦИЯ МЕТОДИ

9.4.1. Чизиқли ҳол. Олдинги бандда қараб чиқилган чекли-айирмали методлар универсал бўлиб, ечимнинг дискрет нуқталардаги жадвалини беради. Аммо физика ва механика масалаларини ечишда баъзан ечимни аналитик кўринишда топиш керак бўлиб қолади. Одатда, бундай ҳолда ечимнинг катта аниқлиги талаб қилинмайди, аммо аниқ ечим ўрнига қандайдир функцияни топиш талаб қилинадики, у чегаравий шартларни аниқ қаноатлантиради ва дифференциал тенглама билан боғлиқ бўлган қандайдир шартларни қаноатлантиради. Бундай муносабатлар шундай тузиладики, уларни қаноатлантирадиган функция тақрибий равишда берилган дифференциал тенгламани ҳам қаноатлантиради. Бу муносабатлар ҳар хил методларда ҳар хил олинади, уларнинг асосийлари билан вариацион методларни қараганда танишиб чиқамиз. Биз бу ерда *коллокация методи* билан танишиб чиқамиз.

Фараз қилайлик, қуйидаги чегаравий масала берилган бўлсин:

$$L(u) \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1(u) &\equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_1, \ |\alpha_0| + |\alpha_1| \ne 0, \\ \Gamma_2(u) &\equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_2, \ |\beta_0| + |\beta_1| \ne 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Базис функциялар деб аталувчи ушбу

$$Y_0(x), Y_1(x), \ldots, Y_n(x) \tag{4.3}$$

чизиқли эркли функцияларни шундай танлаймизки, улар орасида $Y_0(x)$ бир жинсли бўлмаган

$$\Gamma_1(Y_0)=\gamma_1,\ \Gamma_2(Y_0)=\gamma_2 \tag{4.4}$$

чегаравий шартларни қаноатлантириб, қолганлари $Y_i(x)\left(i=\overline{1,n}\right)$ эса бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$\Gamma_1(Y_i)=0,\ \Gamma_2(Y_i)=0\ \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{4.5}$$

Хусусий ҳолда (4.4) чегаравий шартлар бир жинсли бўлса $(\gamma_1=\gamma_2=0)$, у ҳолда $Y_0(x)\equiv 0$ деб олиб, фақат қуйидаги

$$Y_1(x),Y_2(x),...,Y_n(x)$$

системани қараш мумкин.

Энди (4.1), (4.2) чегаравий масаланинг ечимини базис функцияларнинг қуйидаги чизиқли комбинацияси шаклида қидирамиз:

$$u(x)=Y_0(x)+\sum_{i=1}^{n}c_iY_i(x). \tag{4.6}$$

Бу ҳолда $u(x)$ (4.2) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, чегаравий шартлар чизиқли бўлганлиги сабабли

$$\Gamma_1(u)=\Gamma_1(Y_0)+\sum_{i=1}^{n}c_i\Gamma(Y_i)=\gamma_1+\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot 0=\gamma_1.$$

Шунга ўхшаш

$$\Gamma_2(u)=\gamma_2.$$

Энди (4.6) ни (4.1) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}R(x,c_1,c_2,...,c_n)&\equiv L(u)-f(x)=\\&=L(Y_0)-f(x)+\sum_{i=1}^{n}c_iL(Y_i).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Агар $c_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ ларнинг бирор қийматида

$$R(x,c_1,c_2,...c_n)=0,\ a\le x\le b$$

бўлса, у ҳолда $u(x)$ функция (4.1), (4.2) чегаравий масаланинг ечими бўлади. Аммо, умуман олганда, коэффициентларни бундай танлаб олиш кўпинча мумкин бўлмайди. Шунинг учун ҳам $R(x,c_1,c_2,...c_n)$ функциянинг *коллокация* (устма-уст тушиш) *нуқталари* деб аталувчи, етарлича зич олинган $x_1,x_2,...x_n$ нуқталарида $R(x,c_1,c_2,...,c_n)=0$ тенгликнинг бажарилиши талаб қилинади. Шундай нуқталарда (4.1) дифференциал тенглама аниқ бажарилади. Натижада ушбу чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} R(x_1,c_1,c_2,...,c_n)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R(x_n,c_1,c_2,...,c_n)=0. \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

Агар (4.8) система ечимга эга бўлса, у ҳолда бу системадан c_1, c_2, ... , c_n коэффициентларни аниқлаб, чегаравий масаланинг ечимини (4.6) кўринишда топамиз.

(4.8) система ягона ечимга эга бўлиши учун $Y_i(x)\left(i=\overline{1,n}\right)$ қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

1) бу функциялар чизиқли эркли бўлиши керак;

2) агар $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ да $Y_i(x)$ функциялар биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлиши керак;

3) $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... , $Y_n(x)$ функциялар ёрдамида ҳосил қилинган система $L(Y_1(x))$, $L(Y_2(x))$, ... , $L(Y_n(x))$ ихтиёрий ва бир-бирридан фарқли равишда танлаб олинган x_i нуқталар учун Чебишев системасини ташкил этиши керак.

Чебишев системасининг таърифини келтирамиз: $\varphi_i(x)(i=1,2,...,n)$ функциялар $[a, b]$ да *Чебишев системасини* ташкил этади дейилади, агар $[a, b]$ оралиқдан олинган бир-биридан фарқли ихтиёрий x_1, x_2, ... , x_n учун

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

аниқловчи нолдан фарқли бўлса.

Коллокация тугунлари сифатида Чебишев кўпҳадларининг илдизларини ҳам олиш мумкин. Биз қараб чиққан методдан фарқли бўлган *сплайн-коллокация методи* ҳам қаралади. Бу методда тақрибий ечим сплайн-функция шаклида топилади. Бу метод юқоридаги метод билан чекли-айирмали метод орасида туради.

Мисол. Коллокация методи ёрдамида қуйидаги чегаравий масала ечилсин:

$$u'' - u = x, \quad u(0)=0, \quad u(1)=0. \tag{4.9}$$

Ечиш. Базис функциялар сифатида чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $Y_n = x^n(1-x)$ функцияларни оламиз. Коллокация тугунлари сифатида

$$x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}$$

нуқталарни оламиз ва учта базис функция билан чегараланамиз:

$$Y_0(x) \equiv 0,$$
$$u_3(x) = c_1 x(1-x) + c_2 x^2 (1-x) + c_3 x^3 (1-x).$$

Буни (4.9) тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$R(x, c_1, c_2, c_3) = c_1\left(-2 - x + x^2\right) +$$
$$+ c_2\left(2 - 6x - x^2 + x^3\right) + c_3\left(6x - 12x^2 - x^3 - x^4\right) - x.$$

Бу ерда коллокация нуқталарини қўйиб, қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} -560c_1 + 112c_2 + 189c_3 = 64, \\ -36c_1 - 18c_2 - c_3 = 8, \\ 560c_1 + 676c_2 + 603c_3 = -192. \end{array}\right\}$$

Бу системани ечиб, тақрибий ечим учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$u_3(x) = x(1-x)\left(0{,}1547868 + 0{,}1325682x + 0{,}0414476x^2\right).$$

9.4.2. Чизиқли бўлмаган ҳол. Фараз қилайлик,

$$\begin{gathered} L(u) = f(x, u, u'), \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{gathered} \tag{4.10}$$

чизиқли бўлмаган чегаравий масала берилган бўлиб, у ягона ечимга эга бўлсин. Бу ерда ҳам биз юқоридаги усулни қўллаб, (4.8) системага эга бўламиз. Аммо бу ерда (4.8) система чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламалар системасини ташкил этади. Бу системани 2-бобдаги методларнинг бири билан, масалан, итерация методи билан ечиб, (4.10) тенгламанинг тақрибий ечимини (4.6) кўринишда тасвирлаймиз.

2-мисол. Коллокация методи билан чизиқли бўлмаган ушбу чегаравий масалалар ечилсин:

$$u'' = x^2 + u^2,\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \tag{4.11}$$

Ечиш. Базис функциялар сифатида

$$Y_0 \equiv 0,\ Y_1 \equiv x(1-x),\ Y_2 = x^2(1-x)$$

функцияларни, коллокация нуқталари сифатида $x_1 = 0,25$ ва $x_2 = 0,75$ ни оламиз. У ҳолда ечимни $u(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$ каби излаймиз, хатолик эса

$$R(x,c_1,c_2) = -2c_1 + (2-6x)c_2 -$$
$$-\left(c_1^2 Y_1^2 + 2c_1 c_2 Y_1 Y_2 + c_2^2 Y_2^2\right) - x^2$$

кўринишда бўлади. Коллокация нуқталарини қўйиб, қуйидаги чизиқли бўлмаган тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$-2c_1 + 0,5c_2 = \frac{1}{16} + \left(0,035c_1^2 + 0,009c_1c_2 + 0,002c_2^2\right),$$
$$-2c_1 - 2,5c_2 = \frac{9}{16} + \left(0,035c_1^2 + 0,053c_1c_2 + 0,020c_2^2\right).$$

Аввал биринчи тенгламани 5 га кўпайтириб, иккинчи билан қўшсак, янги тенглама ҳосил бўлади, кейин иккинчисини биринчисидан айириш натижасида иккинчи тенглама ҳосил бўлади:

$$c_1 = \frac{7}{96} - 0,018c_1^2 - 0,012c_1c_2 - 0,003c_2^2,$$
$$c_2 = -\frac{1}{6} - 0,012c_1c_2 - 0,006c_2^2.$$

Бу системани кетма-кет яқинлашиш методи билан қуйидагича ечамиз:

$$c_{1.j+1} = -\frac{7}{96} - 0,018c_{1.j}^2 - 0,012c_{1.j}c_{2j} - 0,003c_{2j}^2,$$
$$c_{2.j+1} = -\frac{1}{6} - 0,012c_{1.j}c_{2.j} - 0,006c_{2j}^2.$$

Нолинчи яқинлашиш сифатида

$$c_{10} = -\frac{7}{96} = -0,0729,\ c_{20} = -\frac{1}{6} = -0,1667$$

ни оламиз; кейинги яқинлашишлар қуйидагидан иборат:

$$c_{11} = -0,0731,\ c_{21} = -0,1667,$$
$$c_{12} = -0,0732,\ c_{22} = -0,1670.$$

Бир хонага яхлитлаб олиб, $c_1 = -0,073$; $c_2 = -0,167$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, тақрибий ечим сифатида

$$u(x) = -x(1-x)(0,073 + 0,167x)$$

ни олишимиз мумкин.

10-боб

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

10.1-§. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар фан ва техниканинг турли соҳаларида учрайди, аммо уларнинг ечимини ошкор кўринишда чекли формула шаклида топиш камдан-кам ҳолларда мумкин бўлади. Шу муносабат билан математик физика масалалари деб аталувчи ҳар хил хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системаси ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш методлари муҳим аҳамиятга эгадир.

Бу ва кейинги бобларда биз математик физика масалаларини тақрибий ечишнинг айрим кенг тарқалган методларини кўриб чиқамиз. Математик физика курсларида ўзгарувчиларнинг сони $n(\geq 2)$ ва ҳосилаларнинг тартиби $m(\geq 2)$ бўлган тенгламалар қаралади. Биз асосий диққатни икки эркли ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал тенгламаларга қаратамиз. Бундай тенгламалар мисолида қараладиган методларнинг асосий ғояси яхши тушунарли бўлиб, ҳисоблаш схемаси ҳам соддароқ бўлади.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, битта тенглама учун қараладиган методларни бир неча номаълум функцияларни ўз ичига олган тенгламалар системаси учун ҳам татбиқ қилиш мумкин.

10.2-§. ТЎР МЕТОДИ, ТУРҒУНЛИК, АППРОКСИМАЦИЯ ВА ЯҚИНЛАШИШ

Тўр методи (чекли-айирмали метод) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишнинг кенг тарқалган методларидандир.

10.2.1. Тўр методининг ғояси. Тўр методининг ғояси билан

$$L(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial u}{\partial x_2} + gu = f \qquad (2.1)$$

тенглама учун Дирихле масаласини ечиш мисолида танишамиз. Бунда a, b, c, d, e, g *коэффициентлар* ва f *озод ҳад* чегараси Γ дан иборат бўлган чекли D соҳада аниқланган икки x_1 ва x_2 ўзгарувчиларнинг функцияларидир. Бу функциялар $\overline{G} = G \cup \Gamma$ ёпиқ соҳада аниқланган ҳамда $\overline{G}$ да $a > 0$, $c > 0$ ва $g \leq 0$ шартларни қаноатлантиради, деб фараз қиламиз.

Фараз қилайлик, (2.1) тенгламанинг $\bar{G}$ да узлуксиз ва Γ да берилган қийматларни қабул қиладиган, яъни

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi \tag{2.2}$$

ечимини топиш талаб қилинсин, бунда $\varphi = \varphi(x_1, x_2) \in \Gamma$ узлуксиз функциядир.

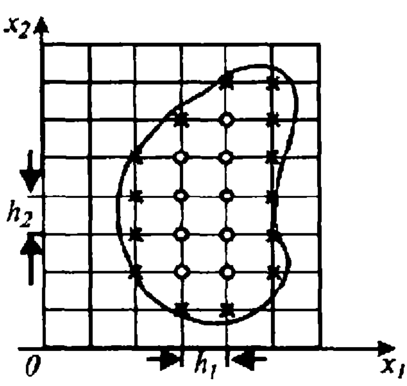
Тақрибий ечимнинг сонли қийматларини топиш учун $0x_1x_2$ текислигида

$$x_{1i} = x_{10} + ih_1,\ x_{2k} = x_{20} + kh_2,\ (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

параллел тўғри чизиқларнинг иккита оиласини ўтказамиз. Бунда h_1 ва h_2 мос равишда абсцисса ва ордината йўналишларидаги *қадамлар* дейилади. Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари *тугунлар* дейилади, тугунлар тўплами эса *тўрни* ташкил этади. Одатда, h_1 ва h_2 қадамлар бир-бирига боғлиқ равишда танланади, масалан, $h_1 = h$, $h_2 = Ah^{\alpha}$ (A ва α қандайдир сонлар), хусусий ҳолда $h_1 = h_2 = h$. Шунинг учун ҳам қаралаётган тўр битта h параметрга боғлиқ бўлиб, қадам кичрайганда $h \to 0$.

Агар иккита тугун $0x_1$ ўқи ёки $0x_2$ ўқи бўйлаб тўрнинг шу йўналиши бўйича бир-биридан бир қадам узоқликда жойлашган бўлса, уларни *қўшни тугунлар* деймиз.

Фақат G да ётган тугунлар тўпламини қараймиз. Агар бирор тугуннинг тўртала қўшни тугунлари тўпламда ётса, у ҳолда бу тугунни *ички тугун* деймиз. Ички тугунлар тўпламини *тўр соҳа* деймиз ва G_h орқали белгилаймиз. Агар тугуннинг ҳеч бўлмаганда бирорта қўшниси G_h да ётмаса, у ҳолда бу тугун *чегаравий тугун*, уларнинг тўпламини эса *тўр соҳанинг чегараси* деймиз ва Γ_h орқали белгилаймиз (2-чизмада ички тугунлар 0 билан ва чегаравий тугунлар * билан белгиланган).



2-чизма.

Агар G_h тўр соҳа Γ_h чегараси билан биргаликда қаралса, у ҳолда у *ёпиқ тўр* соҳа дейилади ва $\bar{G}_h = G_h U \Gamma_h$ орқали белгиланади.

Биз G_h тўр устида аниқланган $y(x_1,\ x_2)$ функция учун $y_{ik} = y(x_{1i}, x_{2k})$ белгилаш киритамиз ва ҳар бир $(i,\ k) = (x_{1i},\ x_{2k})$ тугун учун (2.1) тенгламада қатнашадиган барча ҳосилаларни бўлинган айирмалар билан қуйидагича алмаштирамиз:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{(i,k)} \approx \frac{y_{i+1,k}-y_{i-1,k}}{2h_1}, \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{y_{i,k+1}-y_{i,k-1}}{2h_2}, \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{y_{i+1,k}-2y_{ik}+y_{i-1,k}}{h_1^2}, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{y_{i,k+1}-2y_{ik}+y_{i,k-1}}{h_2^2}, \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{y_{i+1,k+1}-y_{i-1,k+1}-y_{i+1,k-1}+y_{i-1,k-1}}{4h_1h_2}, \tag{2.6}$$

бунда y_{ik} миқдорлар $u(x_1, x_2)$ ечимнинг тўрнинг $(i, k) = (x_{1i}, x_{2k})$ тугунидаги тақрибий қийматларидир. Тенглама коэффициентларининг (i, k) тугундаги қийматини a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, e_{ik}, g_{ik}, f_{ik}, орқали белгилаймиз. Ҳосилалар ўрнига (2.3)—(2.6) тақрибий қийматларини қўйиб, натижада (2.1) дифференциал тенгламага мос келадиган қуйидаги айирмали тенгламага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} L_h y_{ik} \equiv {} & \frac{1}{h_1^2} a_{ik}\left(y_{i+1,k} - 2y_{ik} + y_{i-1,k}\right) + \frac{b_{ik}}{4h_1h_2}\left(y_{i+1,k+1} -\right. \\ & \left. -y_{i-1,k+1} - y_{i+1,k} + y_{i-1,k-1}\right) + \frac{c_{ik}}{h_2^2}\left(y_{i,k+1} - 2y_{ik} + y_{i,k-1}\right) + \\ & + \frac{d_{ik}}{2h_1}\left(y_{i+1,k} - y_{i-1,k}\right) + \frac{e_{ik}}{2h_2}\left(y_{i,k+1} - y_{i,k-1}\right) + g_{ik} y_{ik} = f_{ik}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Бундай тенгламани ҳар бир ички тугун учун ёзиш мумкин. Агар (i, k) чегаравий тугун бўлса, у ҳолда y_{ik} ни бу тугунга яқинроқ бўлган φ нинг Γ устидаги қийматига тенг деб оламиз (чегаравий тугунларда y_{ik} ларнинг қийматини бошқача йўл билан топишни биз кейинроқ кўриб чиқамиз). Шундай қилиб, ечимнинг ички тугунлардаги y_{ik} қийматини топиш учун алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системада тенгламаларнинг сони номаълумлар сонига тенг. Агар бу система ечимга эга бўлса, у ҳолда уни ечиб, ички тугунларда қидирилаётган ечимнинг тақрибий қийматига эга бўламиз.

Биз бу ерда тўғри бурчакли тўртбурчакдан тузилган тўрни қурдик. Кейинчалик бошқа хилдаги тўрларни ҳам кўриб чиқамиз.

10.2.2. Турғунлик, аппроксимация ва яқинлашиш. Фараз қилайлик, чегараси $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j$ бўлган соҳада ушбу

$$L(u) = f, \tag{2.8}$$

$$R(u)\big|_j \equiv R_j(u) = \varphi_j,\ j = 1,2,...,m \tag{2.9}$$

чегаравий масала берилган бўлсин. Бу ерда L — ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқли дифференциал оператор, R_j — биринчи тартибли дифференциал оператор ёки чекли алгебраик ифода, хусусий ҳолда $R_j u = u$ ва f, φ_2, φ_2, ..., φ_m — берилган функциялар.

Энди $\bar{G}$ да ётувчи қандайдир G_h тўр соҳани қурамиз, кейин U_h орқали G_h нинг нуқталарида (тугунларда) аниқланган u_h функцияларнинг фазосини белгилаймиз, L_h оператор U_h даги функцияларни бирор $\overset{0}{G}_h \subset G_h$ тўр соҳада аниқланган функцияларга ўтказсин; $\overset{0}{G}_h$ да аниқланган функциялар тўпламини F_h орқали белгилаймиз. Чегаравий шартларни аппроксимациялаш учун G соҳанинг Γ_j чегарасига мос келадиган Γ_{jh} тўр чегарасини танлаб, Φ_{jh} орқали Γ_{jh} да аниқланган функциялар тўпламини белгилаймиз.

1-таъриф. Агар $X \subset Y$ бўлиб, ϑ функция Y да аниқланган бўлса, у ҳолда ϑ нинг *X тўпламдаги изи* деб шундай функцияга айтиладики, у X тўпламда аниқланган ва бу ерда ϑ билан устма-уст тушади.

Агар ϑ функция G_h ни ўз ичига олган тўпламда аниқланган бўлса, у ҳолда ϑ нинг G_h даги изини $[\vartheta]_h$ орқали белгилаймиз.

Фараз қилайлик, U (2.8) ва (2.9) чегаравий масала ечимларининг фазоси, Γ (2.8) тенгламанинг ўнг томонидаги f функцияларнинг фазоси, Φ_j эса Γ_j да аниқланган функцияларнинг фазоси бўлсин.

2-таъриф. Фараз қилайлик, U, U_h, F, F_h, Φ_j, Φ_{jh} фазоларда

$$\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_{U_h}, \|\cdot\|_F, \|\cdot\|_{F_h}, \|\cdot\|_{\Phi_j}, \|\cdot\|_{\Phi_{jh}}$$

нормалар аниқланган бўлсин. Бу нормалар *мосланган* дейилади, агар $h \to 0$ да ҳар қандай етарлича силлиқ $u \in U, f \in F, \varphi_j \in \Phi_j$ функциялар учун қуйидаги

$$\big\|[u]_h\big\|_{U_h} \to \|u\|_U,$$

$$\big\|[f]_h\big\|_{F_h} \to \|f\|_F,$$

$$\big\|[\varphi_{ij}]_h\big\|_{\Phi_{jh}} \to \|\varphi_{ij}\|_{\Phi_j}$$

муносабатлар ўринли бўлса.

3-таъриф. Агар $h \to 0$ да

$$\left\| \left[u_h - [u]_h \right] \right\|_{U_h} \to 0$$

бўлса, у ҳолда u_h тўр функцияси (2.8), (2.9) чегаравий масаланинг ечимига *яқинлашади* дейилади.

Агар h га боғлиқ бўлмаган $C > 0$ ва $\sigma > 0$ ўзгармас сонлар учун

$$\left\| \left[u_h - [u]_h \right] \right\|_{U_h} \le Ch^{\sigma}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда *яқинлашишнинг тартиби h* га нисбатан σ га тенг дейилади.

Тўр устида ушбу

$$L_h(u_h) = f_h \ , \tag{2.10}$$

$$R_{jh}(u_h) = \varphi_{jh} \ \ (j = 1, 2, ..., m) \tag{2.11}$$

масалани қараймиз, бу ерда L_h ва R_{jh} — чизиқли операторлар.

Энди қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\left.\begin{aligned} W(h) = \left\| L_h([u]_h) - [L(u)]_h \right\|_{F_h} + \left\| f_h - [f]_h \right\|_{F_h} + \\ + \sum_{j=1}^{m} \left\{ \left\| R_{jh}([u]_h) - [R_j(u)]_h \right\|_{\Phi_{jh}} + \left\| \varphi_{jh} - [\varphi_j]_h \right\|_{\Phi_{jh}} \right. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

4-таъриф. Агар ихтиёрий силлиқ u, f, φ_j функциялар учун $h \to 0$ да $W(h) \to 0$ бўлса, у ҳолда (2.8), (2.9) чегаравий масалани (2.10), (2.11) тўр устидаги масала *аппроксимация қилади* дейилади.

Агар (2.10) тенгламанинг ўнг томонини

$$f_h \big|_{(i.k)} = f(x_{1i}, x_{2k})$$

деб олсак, у ҳолда $W(h)$ нинг таърифига кирган $\left\| f_h - [f]_h \right\|_{F_h}$ миқдор нолга тенг бўлади. Аммо айрим ҳолларда аниқликни ошириш учун (2.8) тенгламанинг ўнг томони (i, k) нуқтада $f(x_{1i}, x_{2k} + 0{,}5h_2)$ деб олинади.

5-таъриф. Тўр устидаги (2.10), (2.11) масала *турғун* (*коррект*) дейилади, агар $h \le h_0$ учун h га боғлиқ бўлмаган M_0 ва M_j ўзгармаслар топилиб, улар учун ушбу тенгсизлик бажарилса:

$$\left\| u_h \right\|_{U_h} \le M_0 \left\| L_h(u_h) \right\|_{F_n} + \sum_{j=1}^{m} M_j \left\| R_{jh}(u_h) \right\|_{\Phi_{jh}} . \tag{2.13}$$

Бу таърифдан кўрамизки, чизиқли масала учун турғунлик f_h ва φ_{jh} функцияларга боғлиқ эмас.

Бу таърифнинг маъносини тушунтиришга ҳаракат қиламиз. Чизиқли масала учун (2.10), (2.11) айирмали схема чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Шунинг учун ҳам (2.13) тенгсизликдан $f_h \equiv 0, \varphi_{jh} \equiv 0$ бўлганда (2.10) — (2.11) тенгламалар системаси фақат тривиал ечимга эга. Бундан эса Кронекер-Капелли теоремасига кўра (2.10), (2.11) масала ўнг томонидаги ихтиёрий f_h, φ_{jh} учун ягона ечимга эга. Демак, чизиқли масалада турғунлик шартидан айирмали тенгламалар системасининг ўнг томони ихтиёрий функциялар бўлганда ҳам ягона ечимга эгалиги келиб чиқади.

Агар u_h^1, u_h^2 функциялар қуйидаги

$$L_h u_h^1 = f_h^1,\ R_{jh} u_h^1 = \varphi_{jh}^1,\ j = 1, 2, \ldots, m;$$
$$L_h u_h^2 = f_h^2,\ R_{jh} u_h^2 = \varphi_{jh}^2,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

айирмали масалаларнинг ечими бўлса, у ҳолда L_h ва R_{jh} операторлар чизиқли бўлганда (2.13) тенгсизликка кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} &\left\| u_h^1 - u_h^2 \right\| \leq \\ &\leq M_0 \left\| L_h u_h^1 - L_h u_u^2 \right\|_{F_h} + \sum_{j=1}^{m} M_j \left\| R_{jh} u_h^1 - R_{jh} u_h^2 \right\|_{\Phi_{jh}} = \\ &= M_0 \left\| f_h^1 - f_h^2 \right\|_{F_h} + \sum_{j=1}^{m} M_j \left\| \varphi_{jh}^1 - \varphi_{jh}^2 \right\|_{\Phi_{jh}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Шундай қилиб, агар тенглама ва чегаравий шартларнинг ўнг томони бир-биридан кам фарқ қилса, у ҳолда турғунлик шарти бажарилганда тўрдаги масаланинг ечими бир-биридан кам фарқ қилади.

Юқорида келтирилган яқинлашиш, аппроксимация ва турғунликнинг таърифидаги U_h, F_h, Φ_{jh} фазоларда аниқланган нормалар муҳим аҳамиятга эга. Шундай ҳоллар бўлиши мумкинки, (2.13) тенгсизлик айрим нормалар учун бажарилиб, бошқалари учун бажарилмайди. Ҳар гал (2.13) тенгсизлик нима сабабдан бажарилмаслигини текшириш керак.

Агар нормалар ноқулай олинганлиги сабабли (2.13) тенгсизлик бажарилмаган бўлса, у ҳолда U_h, F_h, Φ_{jh} фазоларда нормаларни бошқача танлаб, (2.13) тенгсизликнинг бажарилишини таъминлаш керак. Агар (2.13) тенгсизлик норманинг ҳеч бири учун ҳам бажарилмаса, у ҳолда бу айирмали схеманинг *нотурғунлигини* билдиради.

Биз юқорида тўрдаги нормалар мосланган бўлиши керак деган эдик. Масалани текширишда кўпинча $\|\cdot\|_{U_h}$ ва $\|\cdot\|_U$ ларнинг мосланган нормалари сифатида қуйидагилар олинади:

$$\left.\begin{aligned} \|u_h\|_{U_h} &= \sup_{\substack{0\le m\le M\\ 0\le n\le N}} |u_{mn}| \\ \|u\|_U &= \sup_{\substack{a\le x\le b\\ 0\le y\le T}} |u(x,y)| \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} \|u_h\|_{U_h} &= \sup_{0\le n\le N} \sqrt{h\sum_{m=0}^{M} |u_{mn}|^2}, \\ \|u\|_U &= \sup_{0\le y\le T} \sqrt{\int_a^b |u(x,y)|^2\, dx}. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Бу нормаларда $h = (b - a)/M$ (M — бутун сон), $N = [T/h_2]$.

Фараз қилайлик, $u \in U$ бўлсин. $r_h^0 = L_h[u]_h - f_h$ миқдор *масаланинг ечимидаги тенглама аппроксимациясининг хатолиги* дейилади, $r_h^j = R_{jh}[u]_h - \varphi_{jh}$ $(j = 1, 2, \dots m)$ миқдорлар эса *масаланинг ечимидаги чегаравий шартлар аппроксимациясининг хатолиги* дейилади. Ушбу

$$\rho_0(h) = \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h}, \ \rho_j(h) = \|R_{jh}[u]_h - \varphi_{jh}\|_{\Phi_{jh}}$$

белгилашларни киритамиз.

Агар u функция (2.8), (2.9) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда

$$\rho(h) = \sum_{j=0}^{m} \rho_j(h)$$

миқдор (2.8), (2.9) *дифференциал масалани* (2.10), (2.11) *айирмали схема билан аппроксимациялашда ечимдаги хатонинг ўлчови* дейилади. Агар $h \to 0$ да $\rho(h) \to 0$ муносабат ўринли ва u функция (2.8), (2.9) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда (2.10), (2.11) айирмали схема (2.8), (2.9) масалани ечимида *аппроксимация қилади* дейилади; $h \to 0$ да $\rho(h)$ нинг тартиби *ечимдаги аппроксимациянинг тартиби* дейилади.

10.2.3. Турғунлик ва аппроксимациянинг яқинлашиш билан алоқаси. Бу тушунчалар орасида қуйидаги алоқа мавжуд: аппроксимация ва турғунликдан яқинлашиш келиб чиқади.

Филиппов теоремаси. *Фараз қилайлик,* (2.10), (2.11) *тўрдаги аппроксимация қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

1) *дифференциал масаланинг ечими $(m-k)$та тўрдаги чегаравий шартларни аниқ қаноатлантиради:*

$$R_{jh}\left[u\right]_h = \varphi_{jh},\ j = k+1,\dots,m,$$

яъни

$$\rho_j\left(h\right) = 0,\ j = k+1,\ \dots,m;$$

2) *ушбу*

$$R_{jh}u_h = 0,\ j = k+1,\dots,m$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирадиган U_h даги функцияларнинг синфида турғунлик шарти бажарилади:

$$\left\|u_h\right\|_{Uh} \le M_0\left\|L_h u_h\right\|_{Fh} + \sum_{j=1}^{k} M_j\left\|R_{jh}u_h\right\|_{\Phi jh}.$$

У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\left\|u_h - \left[u\right]_h\right\|_{Uh} \le \sum_{j=0}^{k} M_j\rho_j\left(h\right). \tag{2.17}$$

Агар айирмали масала дифференциал масалани аппроксимация қилса, у ҳолда $h \to 0$ да

$$\left\|u_h - \left[u\right]_h\right\|_{U_h} \to 0$$

муносабат ўринли бўлади.

Исботи. Теореманинг 1) шартидан $R_{jh}\left(u_h - \left[u\right]_h\right) = 0$, $j = k+1$, ... , m келиб чиқади, 2) шартда эса u_h ўрнига $u_h - \left[u\right]_h$ ни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left\|u_h - \left[u\right]_h\right\|_{U_h} \le M_0\left\|L_h U_h - L_h\left[u\right]_h\right\|_{Fh} +$$
$$+\sum_{j=1}^{k} M_j\left\|R_{jh}u_h - R_{jh}\left[u\right]_h\right\|_{\Phi j}.$$

Бунда $L_h u_h = f_h$, $R_{jh}u_h = \varphi_{jh}$ ни қўйсак, у ҳолда $\rho_j(h)$ нинг таърифидан (2.17) келиб чиқади. Агар аппроксимация ўринли бўлса, яъни $h \to 0$ да $j = 0,\ 1,\ \dots,\ k$ учун $\rho_j(h) \to 0$ ва $\rho(h) \to 0$ муносабатлар ўринли бўлса, натижада (2.17) тенгсизликдан теореманинг иккинчи тасдиғи

$$\left\|u_h - \left[u\right]_h\right\|_{U_h} \to 0$$

келиб чиқади.

Эслатма. Агар мослик шарти бажарилса, у ҳолда силлиқ *u* функциялар учун $h \to 0$ да (2.13) муносабатда лимитга ўтиб, қуйидаги

$$\|u\|_U \leq M_0 \|Lu\|_F + \sum_{j=1}^{m} M_j \|R_j u\|_{\Phi_j} \tag{2.18}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан эса (2.10) — (2.11) дифференциал масаланинг корректлиги келиб чиқади. Кўпинча шу йўл билан, яъни аввал (2.13) тенгсизликни, кейин ундан (2.18) тенгсизликни ҳосил қилиб, (2.10), (2.11) кўринишдаги дифференциал масалаларнинг корректлиги текширилади ва уларнинг ечими мавжудлиги ҳамда ягоналиги исбот қилинади.

Энди айирмали схемаларни қуриш ва уларни текшириш тўғрисида айрим мулоҳазаларни айтиш мумкин:

1. Аввало, тўрни танлаш, яъни G соҳа ва Γ контурни қандайдир тўр соҳа билан алмаштириш қоидаси кўрсатилади.

2. Кейин конкрет равишда битта ёки бир нечта айирмали схема қурилади; аппроксимация шартларининг бажарилиши текширилади ва аппроксимациянинг тартиби аниқланади.

3. Қурилган айирмали схеманинг турғунлиги текширилади. Бу эса энг муҳим ва оғир масала ҳисобланади. Агар айирмали масала аппроксимация ва турғунликка эга бўлса, юқоридаги теоремага кўра у яқинлашади.

4. Айирмали схема тенгламаларини сонли ечиш масаласи қаралади. Одатда, тенгламаларнинг сони кўп бўлиб, бундай системани ечиш кўп меҳнат талаб қилади. Шунинг учун ҳам тўр методида ҳосил бўладиган системаларни ечиш учун махсус методлар яратилган ва яратилмоқда.

Биз бундан кейинги баёнимизда юқорида киритилган тушунчаларни эллиптик, параболик ва гиперболик тенгламаларни сонли ечиш жараёнида имкони борича тўлароқ ёритишга ҳаракат қиламиз.

10.3-§. ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТЎР МЕТОДИ БИЛАН ЕЧИШ

10.3.1. Эллиптик дифференциал тенгламаларни айирмали тенгламалар билан аппроксимациялаш. Биз бу бандда қуйидаги

$$L(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial u}{\partial x_2} + gu = f \tag{3.1}$$

эллиптик тенгламани (2.7) айирмали тенглама билан алмаштирганда ҳосил бўладиган хатоликни баҳолашни кўриб чиқамиз. Бу ерда ҳисоблашлар содда бўлиши учун $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ аралаш ҳосиланинг олдидаги коэффициентни $b(x_1, x_2) = 0$ деб олдик. Кейинги бандларда ёзувни яна ҳам қисқароқ қилиш мақсадида кўпинча модел тарзидаги тенгламаларни қараймиз. Бундай тенгламаларга қўлланиладиган методлар яхши ўзлаштирилса, умумий ҳолда ҳам берилган тенгламалар учун қаралаётган методларни қўллаш мумкин. (3.1) дифференциал тенгламанинг $u\ (x,\ y)$ ечимини тўртинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қилиб ва Тейлор формуласидан фойдаланиб, (2.3) — (2.6) тақрибий тенгликлар ўрнида қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_{i+1,k} - y_{i-1,k}}{2h_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{(x_{1i}, x_{2k})} + \frac{h_1^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\right)_{(\xi, x_{2k})} \tag{3.2}$$
$$\left(x_{1,i-1} \le \xi \le x_{1,i+1}\right),$$

$$\frac{y_{i,k+1} - y_{i,k-1}}{2h_2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{(x_{1i}, x_{2k})} + \frac{h_2^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)_{(\xi_1, x_{2k})} \tag{3.3}$$
$$\left(x_{2,k-1} \le \eta \le x_{2,k+1}\right),$$

$$\frac{y_{i+1,k} - 2y_{ik} + y_{i-1,k}}{h_1^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)_{(x_{1i}, x_{2k})} + \frac{h_1^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right)_{(\xi_1, x_{2k})} \tag{3.4}$$
$$\left(x_{1,i-1} \le \xi_1 \le x_{1,i+1}\right),$$

$$\frac{y_{i,k+1} - 2y_{ik} + y_{i,k-1}}{h_2^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_{(x_{1i}, x_{2k})} + \frac{h_2^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right)_{(x_{1i}, \eta_1)} \tag{3.5}$$
$$\left(x_{2,k-1} \le \eta_1 \le x_{2,k+1}\right).$$

Энди (3.2) — (3.5) лардан фойдаланиб, (2.7) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$L_h y_{ik} \equiv \left\{a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + c_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_1} + l_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_2} + g_{ik}u\right\}_{(i,k)} +$$
$$+ \frac{h^2}{12}\left\{a_{ik}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right)_{(\xi_1, x_{2k})} + \alpha^2 c_{ik}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right)_{(x_{1i}, \eta_1)} +\right.$$
$$\left. +2d_{ik}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\right)_{(\xi, x_{2k})} + 2\alpha l_{ik}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)_{(x_{1i}, \eta)}\right\} = \left[L(u)\right]_{(i,k)} + R_{i,k},$$

бунда $h = h_1$, $\alpha = h_2/h_1$ бўлиб, R_{ik} — қолдиқ ҳад. Агар ушбу

$$M_3 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \right| \right\},\ M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right| \right\}$$

белгилашларни киритсак, қолдиқ ҳад учун

$$|R_{ik}| \le \frac{h^2}{12} \left\{ \left(|a_{ik}| + \alpha^2 |b_{ik}| \right) M_4 + 2 \left(|d_{ik}| + \alpha |l_{ik}| \right) M_3 \right\} \tag{3.6}$$

баҳо ўринли бўлади. Демак,

$$L_h y_{ik} - f_{ik} = \left\{ L(u) - f \right\}_{(i,k)} + R_{ik} = R_{ik}.$$

Бундан кўрамизки, (3.1) дифференциал тенгламани (2.7) айирмали тенглама билан алмаштирганда R_{ik} хатолик ҳосил бўлиб, унинг h қадамга нисбатан тартиби h^2 дир. Агар R_{ik} қолдиқ ҳадни ташласак, тўр устидаги y_{ik} функциялар учун

$$L_h y_{ik} = f_{ik} \tag{3.7}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Хусусий ҳолда ушбу

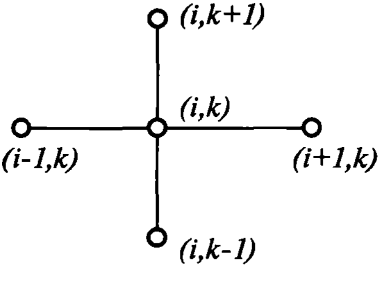
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \tag{3.8}$$

Пуассон тенгламаси учун $h_1 = h_2 = h$ квадрат тўрни қарасак, у ҳолда (3.7) тенгламалар системаси

$$y_{i+1,k} + y_{i-1,k} + y_{i,k+1} + y_{i,k-1} - 4y_{ik} = h^2 f_{ik} \tag{3.9}$$

кўринишга эга бўлиб, (3.6) дан қолдиқ ҳад учун

$$|R_{ik}| \le \frac{h^2}{6} M_4 \tag{3.10}$$



3-чизма.

баҳога эга бўламиз. (3.9) айирмали тенгламада (i, k) тугун учун тўртта қўшни тугунлар 3-чизмадаги беш нуқтали андаза бўйича жойлашган.

10.3.2. Айирмали тенглама ҳосил қилиш учун аниқмас коэффициентлар методи. Юқоридаги дифференциал тенгламани (i, k) нуқтада айирмали тенглама билан алмаштирганда ҳар бир хусусий ҳосилани алоҳида-алоҳида бўлинган айирмалар билан алмаштирган эдик. Дифференциал тенгламани тўлалигича айирмали тенглама билан алмаштириш ҳам мумкин. Ҳозир қараладиган методда тўр соҳа тўғри тўртбурчакдан иборат бўлиши шарт эмас, тўр учбурчаклар, параллелограммлардан иборат ёки умуман нотекис бўлиши ҳам мумкин. Дифференциал тенгламани (i, k) тугунда айирмали схема билан алмаштириш учун (i, k) тугун атрофида маълум тартибда жойлашган P та тугунни қараймиз. Қулай бўлиши учун (i, k) тугунни 0 орқали белгилаб, қолган тугунларни 1, 2, ... , P орқали белгилаймиз. Энди c_j аниқмас коэффициентлар билан ушбу

$$\sum_{j=0}^{P} c_j u_j \tag{3.11}$$

чизиқли комбинацияни тузамиз, бунда u_j миқдор u нинг j тугундаги қиймати. Фараз қилайлик, u функция $(n + 1)$ тартибли ҳосилаларга эга бўлсин, у ҳолда u_j ларни 0 тугун атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$u_j = u\left(x_{1j}, x_{2j}\right) = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{\left(x_{1j}-x_{10}\right)^{k_1}}{k_1!} \frac{\left(x_{2j}-x_{20}\right)^{k_2}}{k_2!} \left(\frac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}\right)_0 + R(j),$$
$$j = 1, 2, \ldots, . \tag{3.12}$$

Бу ифодаларни (3.11) га қўйиб, u функциянинг бир хил ҳосилалари олдидаги коэффициентларни қўшиб чиқамиз, натижада

$$\sum_{j=0}^{P} c_j u_j = \sum_{0 \le i+k \le n} \alpha_{ik} \left(\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x_1^i \partial x_2^k}\right)_0 + \sum_{j=0}^{P} c_j R(j). \tag{3.13}$$

Бу ерда α_{ik} коэффициентлар c_j лар орқали чизиқли равишда ифодаланади. Қолдиқ ҳад эса $\theta h^{n+1} K M_{n+1}$ кўринишга эга бўлади, бунда $|\theta| \le 1$, K қандайдир сон бўлиб, h га боғлиқ эмас; h нинг ўзи эса 0 тугун ва j $(j = 1, 2, \ldots, P)$ тугунлар координаталари айирмаларининг модули бўйича энг кичиги ҳамда

$$M_{n+1} = \max_{i+k=n+1} \max_{G} \left|\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x_1^i \partial x_2^k}\right|.$$

Энди G соҳада $(n + 1)$ тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган ҳар қандай $u(x_1, x_2)$ функция учун

$$\sum_{i \le i+k \le n} \alpha_{ik} \left(\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x_1^i \partial x_2^k}\right)_0 = \left[L(u)\right]_0 \tag{3.14}$$

тенгликнинг бажарилишини талаб қиламиз. Бунинг учун c_j коэффициентларни шундай танлашимиз керакки, $0 \le i + k \le n$ шартни қаноатлантирувчи барча i ва k учун (3.14) тенгликнинг чап ва ўнг томонларида $\left(\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x_1^i \partial x_2^k}\right)_0$ олдидаги коэффициентлар устма-уст тушсин. Бу эса $c_1, c_2, \ldots, c_P$ номаълум коэффициентларга нисбатан қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига олиб келади:

$$\alpha_{00} = g_0\,(i + k = 0),$$
$$\alpha_{10} = d_0,\ \alpha_{01} = l_0\,(i + k = 1),$$
$$\alpha_{20} = a_0,\ \alpha_{02} = c_0, \alpha_{11} = 0(i + k = 2),$$
$$\alpha_{30} = \alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{03} = 0(i + k = 3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{n0} = \alpha_{n-1,1} = \ldots\alpha_{1,n-1} = \alpha_{0n} = 0(i + k = n).$$

Агар бу система ечимга эга бўлиб, ечим $c_j (j = 0, 1, \ldots, P)$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{j=0}^{P} c_j u_j = \left[L(u)\right]_0 + \theta K h^{n+1} M_{n+1}. \tag{3.15}$$

Энди қолдиқ ҳадни ташлаб юбориб, u_j нинг тўр устидаги тақрибий қиймати y_j учун ушбу

$$\sum_{j=0}^{P} c_j y_j = f_0 \tag{3.16}$$

айирмали тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама (3.1) дифференциал тенгламани 0 тугунда $O(h^{n+l})$ аниқликда алмаштиради.

Чегарадан узоқроқ ички тугунлар учун айирмали тенгламани тузишда қатнашадиган тугунларининг жойланишини (3.16) дагидек сақлаш мақсадга мувофиқ бўлади. Чегарага яқин тугунлар учун бу ҳолатни сақлаш ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди. Аммо қаралаётган методда тугунларни бироз бошқача жойлаштириб, дифференциал тенгламани керакли аниқликда айирмали тенглама билан алмаштириш мумкин. Бу метод чегаравий шартларни аппроксимация қилиш учун ҳам яхши натижага олиб келади.

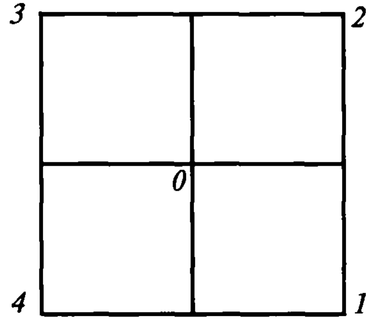
Изоҳ. Шуни эсда сақлаш керакки, берилган дифференциал тенглама учун у ёки бу аниқликдаги айирмали схема қуриш учун дифференциал масаланинг ечими керакли тартибли ҳосилаларга эга, деб фараз қилиш керак. Бу эса, ўз навбатида, тенгламанинг коэффициентларига, соҳага ва чегаравий шартларда қатнашадиган функцияларга маълум шартларни қўйишни талаб қилади. Агар бу шартлар ечимнинг маълум тартибли ҳосиласини таъминласа, айирмали схемани ҳам шу тартибли аниқликда излаш керак. Бу ердаги талаблар квадратур формулаларни танлашга оид тавсияларга ўхшайди.

10.3.3. Пуассон тенгламаси учун аниқмас коэффициентлар методи асосида айирмали схема қуриш. Фараз қилайлик, G соҳа квадрат бўлиб, шу соҳада ушбу

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f\left(x_1, x_2\right) \tag{3.17}$$

Пуассон тенгламаси учун айирмали схема қуриш талаб қилинсин.

Бундай схемани икки хил тўр устида бажарамиз. Аввало, қадами h га тенг бўлган квадрат тўрни қараймиз, 4-чизмада кўрсатилганидек, 0 тугун атрофида 1, 2, 3, 4 билан белгиланган тугунларни оламиз. Бу ерда x_1 ва x_2 тенг ҳуқуқли бўлганлиги ҳамда тугунлар симметрик равишда жойлашганлиги сабабли айирмали аппроксимацияни қуйидаги кўринишда излаш мумкин:



4-чизма.

$$L_h u_0 = c_0 u_0 + c_1\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right). \tag{3.18}$$

Қаралаётган соҳада (3.17) тенгламанинг ечими тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қилиб, (3.18) ифода учун қуйидагига эга бўламиз:

$$L_h u_0 = c_0 u_0 + 4c_1 u_0 + c_1 \left\{\left[h\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u -\right.\right.$$

$$\left.- \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3 u\right]_0 + \frac{h^4}{4!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^4 u\right]_{(\xi_1, \eta_1)} +$$

$$+\left[h\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3 u\right]_0 +$$

$$+\frac{h^4}{4!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^4 u\right]_{(\xi_2, \eta_2)} + \left[h\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u +\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3 u\right]_0 +$$

$$+\frac{h^4}{4!}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^4 u\right]_{(\xi_3,\eta_3)}+\left[-h\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u+\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3 u\right]_0+$$

$$+\frac{h^4}{4!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^4 u\right]_{(\xi_4,\eta_4)},$$

бунда

$$x_{10}-h\le\xi_j\le x_{10}+h,\; x_{20}-h\le\eta_j\le x_{20}+h,\; j=1,2,3,4.$$

Бу ифодани соддалаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L_h u_0=(c_0+4c_1)u_0+4c_1\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_0+R(h), \tag{3.19}$$

бунда $R(h)$ — қолдиқ ҳад. (3.19) ифода (3.17) тенгламани аппроксимация қилиши учун

$$c_0+4c_1=0,\; 2c_1h^2=1$$

шартлар бажарилиши керак. Булардан эса

$$c_0=-\frac{2}{h^2},\; c_1=\frac{1}{2h^2}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, натижада қуйидагига эга бўлдик:

$$L_h u_0=\frac{1}{2h^2}(u_1+u_2+u_3+u_4-4u_0)=(\Delta u)_0+R(h). \tag{3.20}$$

Агар M_4 орқали тўртинчи ҳосилаларнинг Gдаги максимуми модулини белгиласак, у ҳолда $R(h)$ қолдиқ ҳад учун ушбу баҳога эга бўламиз:

$$|R(h)|\le 4|c_1|\,\frac{h^4}{4!}\,2^4 M_4=\frac{4h^2}{3}M_4. \tag{3.21}$$

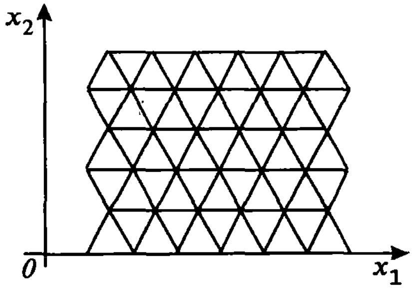
Юқоридаги (3.20) ифодада $(\Delta u)_0$ ни f_0 орқали алмаштириб, $R(h)$ қолдиқ ҳадни ташлаб юборсак, натижада u_j нинг тўрдаги тақрибий қиймати y_j учун ушбу

$$y_1+y_2+y_3+y_4-4y_0=2h^2 f_0$$

айирмали тенгламага эга бўламиз. Бундай аппроксимациянинг хатолиги $\frac{4}{3}h^2 M_4$ дан ошмайди.

Изоҳ. (3.10) ва (3.21) баҳоларни солиштириш шуни кўрсатдики, (3.10) баҳо (3.21) га нисбатан 8 марта кичик. Шунинг учун ҳам амалиётда 3-чизмадаги схема ишлатилади.

Машқ. Қолдиқ ҳад $R(h)$ учун (3.21) баҳо кўрсатилсин.



5-чизма.

Энди Пуассон тенгламасини томонлари h га тенг бўлган мунтазам учбурчаклардан тузилган тўр устида айирмали схема билан алмаштирамиз (5-чизма). 0 тугун учун айирмали тенглама тузишда уни қуршаган 1, 2, 3, 4, 5, 6 тугунларни олиб, қуйидаги чизиқли комбинацияни тузамиз:

$$L_h u_0 = \sum_{j=0}^{6} c_j u_j. \tag{3.22}$$

Агар 0 тугуннинг координаталарини $(x_1,\ x_2)$ деб олсак, у ҳолда равшанки, 1, 2, 3, 4, 5, 6 тугунларнинг координаталари мос равишда қуйидагидан иборат:

$$(x_1 + h, x_2),\ \left(x_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$(x_1 - h, x_2),\ \left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2 - \frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(x_1 + \frac{h}{2}, x_2 - \frac{h\sqrt{3}}{2}\right).$$

Бу ерда ҳам x_1 ва x_2 тенг ҳуқуқли бўлганлиги ҳамда тугунлар симметрик равишда жойлашганлиги сабабли $c_1 = c_2 = \ldots = c_6$ деб олишимиз мумкин. Энди (3.22) ифодадаги $u_1, u_2, \ldots\ u_6$ ларни 0 (x_1, x_2) тугун атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйиб ва соддалаштиришлар бажариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$L_h u_0 = c_0 u_0 + c\sum_{j=1}^{6} u_j = (c_0 + 6c_1)u_0 +$$
$$+c_1\left[\frac{3h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_0 + \frac{9h^4}{4?4!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_0\right] + R(h). \tag{3.23}$$

Бу ифода Лаплас операторини аппроксимация қилиши учун

$$c_0 + 6c_1 = 0,\ \frac{3h^2}{2}c_1 = 1$$

деб олиш керак, бундан эса

$$c_0 = -\frac{4}{h^2}, \; c_1 = \frac{2}{3h^2}.$$

Шундай қилиб,

$$L_h u_0 = \frac{2}{3h^2}\left[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 - 6u_0\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_0 + \frac{h^2}{16}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_0 + R(h). \qquad (3.24)$$

Агар $u(x_1, x_2)$ ечим G да олтинчи тартибли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қолдиқ ҳад учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$|R(h)| \leq \frac{2}{3h^2} \cdot \frac{h^6}{6!}\left[2 + 4\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^6\right]_{M_6} = \frac{10+5\sqrt{3}}{6!} M_6 h^4 < \frac{h^4}{36} M_6. \qquad (3.25)$$

Биз (3.24) тенгликдан қуйидаги хулосаларга келамиз: ушбу

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 - 6y_0 = 0$$

айирмали тенглама $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламасини h^4 аниқликда аппроксимация қилади; $\Delta u = f$ Пуассон тенгламасини

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 - 6y_0 = \frac{3h^2}{2} f_0 + \frac{3h^4}{32}(\Delta f)_0$$

айирмали тенглама h^4 аниқликда аппроксимация қилади,

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 - 6y_0 = \frac{3h^2}{2} f_0$$

айирмали тенглама эса h^2 аниқликда аппроксимация қилади.

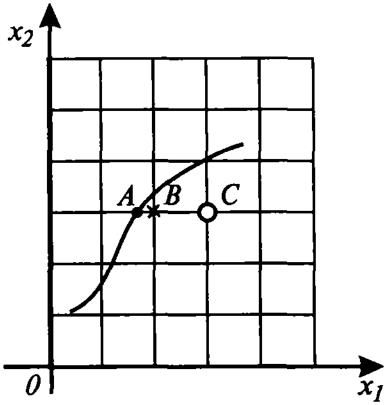
10.3.4. Чегаравий шартларни аппроксимациялаш. Фараз қилайлик, чегараси Γ дан иборат бўлган G соҳада $Lu = f$ биринчи чегаравий масалани (Дирихле масаласини) ечиш талаб қилинсин, яъни

$$\begin{aligned} &L\left[u(x_1, x_2)\right] = f(x_1, x_2), \; (x_1, x_2) \in G, \\ &u(x_1, x_2)\big|_\Gamma = \varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad (3.26)$$

муносабатларни қаноатлантирадиган $u(x_1, x_2)$ функция топилсин. Қулайлик учун томонлари h дан иборат бўлган квадрат тўрни қараймиз (6-чизма).

Фараз қилайлик, (i, k) тугун Γ_h чегарадаги қандайдир тугун бўлсин, уни B орқали белгилаймиз, x_1 йўналиши бўйича $(i + 1, k)$ ички тугунни C орқали ва x_1 йўналишида Γ чегаранинг B га энг яқин нуқтасини A орқали белгилаймиз. Кўпинча $\varphi(B) = \varphi(A)$ деб олинади. Бу усул чегаравий шартни тўрнинг энг яқин тугунига *оддий кўчириш* дейилади. Оддий кўчирганда йўл қўйилган хатоликнинг миқдорини аниқлаймиз. Фараз қилайлик, A ва B нуқталарнинг координаталари $(x_{1i}-\delta_A,\ x_{2k})$ ва $(x_{1i},\ x_{2k})$ бўлсин. У ҳолда

$$u(B)=u(A)-\delta_A u'_{x_1}(\xi,x_{2k})=$$
$$=\varphi(A)-\delta_A u'_{x_1}(\xi,x_{2k}),$$



6-чизма.

бунда $x_{1i}-\delta_A<\xi<x_i$. Энди $\delta_A<h$ ни эътиборга олсак, оддий кўчиришда йўл қўйилган хатолик $0(h)$ бўлади. Демак, $(i,\ k)$ тугун учун $0(h)$ аниқликда

$$u_{ik}=\varphi(A) \tag{3.27}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар яна бирор ички нуқтадан фойдалансак, у ҳолда $u(B)$ нинг ҳисоблаш аниқлигини орттириш мумкин. Бунинг учун $u(x_1,\ x_2)$ нинг $C=(x_{1i}+h,\ x_{2k})$ нуқтадаги қийматидан фойдаланамиз:

$$u(A)=u(x_{1i}-\delta_A,x_{2k})=u(\tilde{B})-\delta_A u'_{x1}(\tilde{B})+\frac{\delta_A^2}{2}u''_{x_1^2}(\tilde{B}),$$

бунда $\tilde{B}=(x_{1i}-\theta\delta_A,x_{2k})$, $0<\theta<1$ ва шунингдек,

$$u(C)=u(x_{1i}+h,x_{2k})=u(\tilde{B})+hu'_{x_1}(\tilde{B})+\frac{h^2}{2}u''_{x_1^2}(\tilde{A}),$$

бунда $\tilde{A}=(x_{1i}+\theta_1 h,x_{2k})$, $0<\theta_1<1$.

Бу тенгликлардан биринчи ҳосилани йўқотсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$u(B)=\frac{h\varphi(A)+\delta_A u(C)}{h+\delta_A}+0(h^2).$$

Агар $0(h^2)$ ни ташласак, у ҳолда $(i,\ k)$ чегаравий тугун учун $0(h^2)$ аниқликда

$$y_{ik}=\frac{h\varphi(A)+\delta_A y_{i-1,k}}{h+\delta_A} \tag{3.28}$$

тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, биз ҳар бир чегаравий $(i,\ k)$ тугун учун (3.27) ёки (3.28) тенгликни ёза оламиз. (3.28) формула *Коллатц формуласи* ёки *чизиқли интерполяция формуласи* дейилади.

Аппроксимациялашнинг аниқмас коэффициентлар методини қўллаб, юқори тартибли аниқликка эга бўлган чегаравий шартларни аппроксимациялаш формулаларини чиқариш мумкин.

Энди иккинчи жинс чегаравий шарт

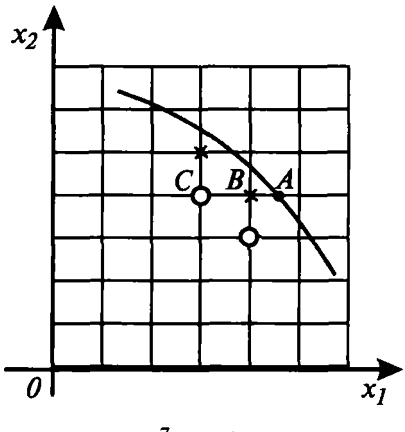
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma} = \varphi(x_1, x_2) \tag{3.29}$$

ни айирмали шарт билан алмаштиришни кўриб чиқамиз. Бу ҳол биринчи чегаравий масалага нисбатан анча мураккабдир, чунки бунда изланаётган функциянинг нормал ҳосиласи қатнашади. Нормал ҳосила функциянинг тўр тугунлардаги қийматларининг бўлинган айирмалари билан алмаштирилиши керак. Биз умумийликни сақлаш учун тўғри тўртбурчакли тўрни қараймиз:

$$x_1 = x_{10} + ih_1,\ x_2 = x_{20} + kh_2\ \left(i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

Фараз қилайлик, B нуқта координаталари (x_{1i}, x_{2k}) бўлган чегаравий нуқта бўлсин, A эса B нуқтага яқинроқ бўлган Γ чегаранинг нуқтаси, $C(x_{1,i-1}, x_{2k})$ — ички нуқта, $D(x_{1i}, x_{2,k-1})$ — чегаравий нуқта ва $\vec{n}$ Γ нинг A нуқтасидаги ташқи нормал бўлсин (7-чизма). Нормал $\vec{n}$ билан Ox_1 ўқ орасидаги бурчакни α билан, Ox_2 ўқ орасидаги бурчакни эса β билан белгилаймиз. Энди $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma} = \varphi(A)$ шартни B нуқтадаги айирмали шарт билан алмаштириш масаласини кўрамиз. Нормал бўйича ҳосиланинг таърифига кўра

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\beta.$$



7-чизма

Фараз қилайлик, B нуқтада нормалнинг йўналиши A нуқтадаги йўналиш билан бир хил бўлсин; A билан B орасидаги масофа $O(h_1 + h_2)$ бўлганлиги учун бу фаразимиз натижасида $O(h_1 + h_2)$ хатоликка йўл қўямиз. Демак,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(A)} = \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(B)} + O(h_1 + h_2).$$

Энди хусусий ҳосилаларини бўлинган айирмалар билан алмаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{u_{ik}-u_{i-1,k}}{h_1}\cos\alpha+\frac{u_{ik}-u_{i,k-1}}{h_2}\cos\beta+O(h_1+h_2)=\varphi(A)$$

ёки қолдиқ ҳадни ташлаб,

$$\frac{y_{ik}-y_{i-1,k}}{h_1}\cos\alpha+\frac{y_{ik}-y_{i,k-1}}{h_2}\cos\beta=\varphi(A) \tag{3.30}$$

тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, бу формула (3.29) чегаравий шартни $(i,k)\in\Gamma_h$ тугунда айирмали шарт билан $O(h_1+h_2)$ аниқликда алмаштиради; (3.30) кўринишдаги ифода барча $(i,k)\in\Gamma_h$ тугунлар учун ёзилиши керак, шундагина биз (3.29) чегаравий шартни аппроксимация қилувчи айирмали шартларни топган бўламиз (α ва β лар $A\in\Gamma_h$ нуқтанинг функцияларидир).

Учинчи чегаравий шартни аппроксимация қилиш учун юқоридаги биринчи ва иккинчи чегаравий шартлар аппроксимациясининг комбинациясини оламиз.

10.3.5. Айирмали схеманинг турғунлиги. Биз ёзувни қисқароқ қилиш мақсадида айирмали схеманинг турғунлигини Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласини ечиш мисолида кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик, G соҳа тўғри бурчакли тўртбурчак $G=\{0<x_1<a,\ 0<x_2<b\}$ бўлиб, Γ унинг чегараси бўлсин. Шундай $u(x_1, x_2)$ функцияни топиш керакки, у G да

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=f(x_1,x_2) \tag{3.31}$$

тенгламани қаноатлантириб, Γ чегарада Дирихле шартини қаноатлантирсин:

$$u|_\Gamma=\varphi(x_1,x_2), \tag{3.32}$$

бунда $\varphi(x_1,x_2)$ маълум функция. Фараз қилайлик, (3.30) — (3.32) чегаравий масала $\bar{G}=GU\Gamma$ соҳада ягона ечимга эга ва бу ечим G да $\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$ ва $\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

Биз қуйидаги тўғри бурчакли тўртбурчаклардан иборат бўлган тўрни қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} &x_{1i}=ih_1,\ i=0,1,\dots,M,\ Mh_1=a;\\ &x_{2k}=kh_2,\ k=0,1,\dots,N,\ Nh_2=b. \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Энди G да ётувчи барча тугунларни G_h^0 деб олиб, чегаравий нуқталар Γ_h сифатида Γда ётувчи тугунларни оламиз. Кейин

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Лаплас операторини G_h^0 га тегишли нуқталарда 3-чизмадаги беш нуқтали андаза ёрдамида

$$\begin{gathered}\Delta_h y_{ik} \equiv \frac{y_{i+1,k} - 2y_{ik} + y_{i-1,k}}{h_1^2} + \frac{y_{i,k+1} - 2y_{ik} + y_{i,k-1}}{h_2^2} = f_{ik}, \\ i = 1,2,\dots,M-1,\ k = 1,2,\dots,N-1\end{gathered} \tag{3.34}$$

айирмали схема билан аппроксимация қиламиз. Агар $h_1 = h$, $h_2 = \alpha h$ ($\alpha = \text{const}$) бўлса, у ҳолда 10.3.1 даги натижадан кўрамизки, (3.34) аппроксимациянинг хатолиги

$$\left|R_{ik}(h)\right| \le \frac{h^2}{12}\left(1+\alpha^2\right)M_4$$

дан иборат. (3.32) шартни қуйидагиларга алмаштирамиз:

$$y_{ik}\big|_{\Gamma h} = \varphi(ih_1, kh_2),\ (ih_1, kh_2) \in \Gamma_h. \tag{3.35}$$

Қаралаётган соҳа тўғри бурчакли тўртбурчак бўлганлиги туфайли (3.35) аппроксимациянинг хатолиги нолга тенг. Чегарадаги (3.35) қийматлар маълум бўлганлиги учун уларни (3.34) тенгламага қўйиб, кейин маълум ҳадларни ўнг томонга ўтказиб, қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$L_h y_{ik} = f_{ik},\ i = 1,2,\dots,M-1;\ k = 1,2\dots,N-1. \tag{3.36}$$

Равшанки, (3.36) тенгламалар фақат чегара яқинидаги тугунларда (3.34) тенгламалардан фарқ қилади. Масалан, (i, 1) кўринишдаги тугунларда (3.36) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{y_{i+1,1} - 2y_{i1} + y_{i-1,1}}{h_1^2} + \frac{y_{i,2} - 2y_{i1}}{h_2^2} = f_{i1} - \frac{\varphi(ih_1, 0)}{h_2^2} \equiv \psi_{i1}.$$

(3.36) системада тенгламаларнинг сони номаълумларнинг сонига тенг. Шунинг учун ҳам (3.34) системанинг матрицасини G_h тўр устидаги функцияни ўзига акслантирадиган чизиқли оператордек қараш мумкин.

Энди (3.34), (3.35) тенгламалар системасининг ягона ечими мавжудлигини кўрсатамиз.

1-лемма. Фараз қилайлик, $\vartheta^{(h)} = \{\vartheta_{ik}\}$ миқдорлар $\bar{G}_h = G_h^0 U \Gamma_h$ тўр устида аниқланган қандайдир функция бўлсин. Агар G_h^0 соҳанинг тугунларида $\Delta_h \vartheta^{(h)} \geq 0$ шарт бажарилса, у ҳолда $\vartheta^{(h)}$ ўзининг энг катта қийматини $\bar{G}_h$ нинг чегарасида, яъни Γ_h да қабул қилади.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз. Айтайлик, $\vartheta^{(h)}$ ўзининг энг катта қийматини ички нуқтада қабул қилсин. Умуман айтганда, бундай нуқталар кўп бўлиши мумкин. Улар орасида шундай $(i,k) \in G_h^0$ тугунни танлаймизки, $\vartheta_{i+1,k}$, $\vartheta_{i-1,k}$, $\vartheta_{i,k+1}$, $\vartheta_{i,k-1}$ қийматларнинг бирортаси ϑ_{ik} дан қатъиян кичик, масалан, $\vartheta_{i+1,k} < \vartheta_{ik}$ бўлсин. У ҳолда (i, k) тугунда қуйидагига эга бўламиз:

$$
\begin{aligned}
\Delta_h \vartheta +_{ik} &= \frac{1}{h_1^2}\left(\vartheta_{i-1,k} - 2\vartheta_{ik} + \vartheta_{i+1,k}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(\vartheta_{i,k+1} - 2\vartheta_{ik} + \vartheta_{i,k-1}\right) = \\
&= \frac{1}{h_1^2}\left[\left(\vartheta_{i-1,k} - \vartheta_{ik}\right) + \left(\vartheta_{i+1,k}\vartheta_{ik}\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{h_2^2}\left[\left(\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{ik}\right) + \left(\vartheta_{i,k-1} - \vartheta_{ik}\right)\right] < 0,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

чунки $\vartheta_{i+1,k} - \vartheta_{ik} < 0$ бўлиб, қолган кичик қавслар ичидаги ифода мусбат эмас, (3.37) тенгсизлик эса лемма шартига зиддир. Демак, бизнинг фаразимиз нотўғри экан. Шу билан лемма исботланди.

2-лемма. Фараз қилайлик, $\vartheta^{(h)}$ миқдорлар $\bar{G}_h$ тўр устида аниқланган қандайдир функция бўлсин. Агар G_h^0 нинг тугунларида $\Delta_h \vartheta^h \leq 0$ шарт бажарилса, у ҳолда $\vartheta^{(h)}$ ўзининг энг кичик қийматини $\bar{G}_h$ нинг чегарасида, яъни Γ_h да қабул қилади.

Бу лемма ҳам худди олдингисидек исботланади.

Теорема (*максимум принципи*). *Фараз қилайлик, $\vartheta^{(h)} = \{\vartheta_{ik}\}$ миқдорлар $\bar{G}_h$ да аниқланган бўлиб, G_h^0 тугунларда*

$$\Delta_h \vartheta_{ik} = 0, \ i = 1,2,..., \ M-1; \ k = 1,2,...,N-1$$

тенгламаларни қаноатлантирсин. У ҳолда $\vartheta^{(h)}$ ўзининг модул бўйича энг катта қийматини Γ_h чегарада қабул қилади.

Теореманинг исботи 1-ва 2-леммалардан келиб чиқади.

Бу теоремадан $f_{ik} \equiv 0$ ва $\varphi_{ik} \equiv 0$ бўлганда (3.35) ва (3.36) бир жинсли тенгламалар системаси фақат нол ечимга эга эканлиги келиб чиқади. Чунки, агар $\vartheta^{(h)} \not\equiv 0$ бўлса, у ҳолда $\vartheta^{(h)}$ ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларини максимум принципига кўра Γ_h чегарада қабул қилади; аммо Γ_h да $\vartheta^{(h)} \equiv 0$, демак, бутун $\bar{G}_h$ соҳада $\vartheta^{(h)} \equiv 0$. Шунинг учун ҳам (3.34), (3.35) айирмали схема ягона ечимга эга.

Энди (3.34) айирмали схеманинг турғунлигини кўрсатамиз. Бунинг учун 10.2.2 даги таърифларни бу ердаги ҳолга қўллаймиз. Фараз қилайлик, U_h, F_h ва Φ_h лар $\bar{G}_h$, G_h^0 ва Γ_h ларда аниқланган функциялар фазоси бўлсин. Бу фазоларда шундай нормалар киритамизки, улар узлуксиз функциялар фазоларидаги нормалар билан мослашган бўлиши керак. 10.2.2 даги 5-таърифга кўра, (3.34), (3.35) айирмали схемалар турғун бўлиши учун h_1 ва h_2 га боғлиқ бўлмаган шундай C ўзгармас топилиб, (3.34), (3.35) масаланинг ечими $u^{(h)} = \{y_{ik}\}$ учун

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} \leq C\left(\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} + \left\|\varphi^{(h)}\right\|_{\Phi_h}\right)$$

баҳо ўринли бўлиши керак. Биз U_h, F_h, Φ_h фазоларда қуйидаги нормаларни киритамиз:

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} = \max_{\bar{G}_h}|y_{ik}|, \ \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} = \max_{G_h^0}|f_{ik}|,$$

$$\left\|\varphi^{(h)}\right\|_{\Phi_h} = \max_{\Gamma_h}|\varphi_{ik}|.$$

Энди юқоридаги баҳони ўрнатиш учун Гершгорин қоидасига кўра $\left|u^{(h)}\right|$ функция учун мажорант функция қурамиз. Ушбу

$$P(x_1, x_2) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{00}$$

иккинчи даражали кўпҳад учун

$$\Delta_h P_{ik} = \Delta P\big|_{(i,k)},$$

чунки 10.3.1 даги (3.4), (3.5) формулаларда қатнашадиган тўртинчи тартибли ҳосилалар $P(x_1, x_2)$ учун нолга тенг.

Энди $W(x_1, x_2)$ мажорант функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left[\left(a^2 + b^2\right) - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} + \left\|\varphi^{(h)}\right\|_{\Phi_h}.$$

Ушбу $z(x_1, x_2) \equiv \left(a^2 + b^2\right) - \left(x_1^2 + x_2^2\right)$ функциянинг геометрик маъносини тушунтирамиз: 8-чизмада чегараси Γ бўлган G соҳа тасвирланган. Бу чизмада OA диагоналнинг узунлиги $\sqrt{a^2 + b^2}$ га тенг бўлиб, $z(x_1, x_2) = 0$ эгри чизиқ маркази координаталар бошида ва радиуси $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$ бўлган айланани билдиради. Шундай қилиб, агар $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ бўлса, у ҳолда $z(x_1, x_2) \geq 0$ бўлиб, $\bar{G}$ соҳанинг фақат

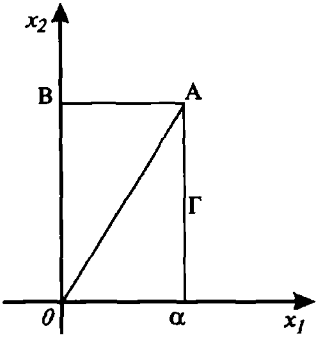
$A(a, b)$ нуқтасида нолга айланади, аммо бу нуқта G_h^0 га тегишли эмас. Демак,

$$z(x_1, x_2)\big|_{G_h^0} > 0.$$

Осонлик билан кўриш мумкинки, G_h^0 нинг барча нуқталарида

$$\Delta_h W_{ik} = \Delta W\big|_{(i,k)} = -\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h},$$

$i = 1, 2, \ldots, M-1;$
$k = 1, 2, \ldots, N-1.$



8-чизма.

Шунинг учун $\vartheta^{(h)} = u^{(h)} - W$ айирма G_h^0 тугунларда

$$\Delta_h \vartheta^{(h)} = f^{(h)} + \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} \geq 0$$

тенгсизликни қаноатлантиради. I-леммага кўра $\vartheta^{(h)}$ ўзининг энг катта қийматини Γ_h да қабул қилади. Аммо чегарада қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$\vartheta^{(h)} = \varphi^{(h)} - W\big|_{\Gamma_h} = \varphi^{(h)} - \left\|\varphi^{(h)}\right\|_{\Phi_h} - \frac{1}{4} z^{(h)} \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} \leq 0.$$

Шундай қилиб, $\bar{G}_h$ да $\vartheta^{(h)} \leq 0$, яъни $u^{(h)} \leq W$. Шунга ўхшаш G_h^0 да $\vartheta^{(h)} = u^{(h)} + W$ функция учун қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қиламиз:

$$\Delta_h \vartheta^{(h)} \leq 0, \ \vartheta^{(h)}\big|_{\Gamma_h} \geq 0.$$

У ҳолда 2-леммага кўра $\bar{G}_h$ да $\vartheta^{(h)} \geq 0$ ёки $U^{(h)} \geq -W$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $\bar{G}_h$ да $\left|u^{(h)}\right| \leq W$ баҳони кўрсатдик. Бундан эса

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} \leq \left\|W\right\|_{U_h} \leq \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} + \left\|\varphi^{(h)}\right\|_{\Phi_h}$$

ҳосил бўлади. Агар $C = \max\left\{1, \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)\right\}$ деб белгиласак, у ҳолда охирги тенгсизликдан

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} \leq C\left(\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} + \left\|\varphi^{(h)}\right\|_{\Phi_h}\right)$$

келиб чиқади. Бундан эса (3.34), (3.35) чегаравий масаланинг турғунлиги ҳам келиб чиқади. Демак, (3.34), (3.35) айирмали масала (3.31) тенгламанинг аниқ ечимига яқинлашади ва яқинлашиш тартиби $O(h^2)$ бўлади, чунки яқинлашиш тартиби аппроксимация тартиби билан устма-уст тушади. Бошқа чегаравий шартларда (3.1) тенглама учун тўр методининг турғунлик масаласини [5, 24, 44] дан кўриш мумкин.

Тўр методида ҳосил бўладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини 3-бобдаги методлар билан ечиш мумкин. Аммо бу системаларни ечиш учун махсус методлар яратилган.

10.3.6. Рунге қоидаси. Ечимнинг хатолиги учун юқорида келтирилган баҳолар маълум нуқсонга эга. Бу баҳоларда изланаётган ечим ҳосилаларининг модули қатнашади. Одатда, уларнинг миқдорини биз билмаймиз.

Амалиётда тўр методи билан аниқланган тақрибий ечимнинг хатолигини баҳолаш учун 9.3.6 дагидек *Рунге қоидаси* ишлатилади.

Фараз қилайлик, $u(x_1, x_2)$ бирор чегаравий масаланинг аниқ ечими бўлиб, $u_h(x_1, x_2)$ эса қадамлари $h_1 = h$ ва $h_2 = \alpha h$ $(\alpha = \text{const})$ бўлган тўр методи билан топилган тақрибий ечим бўлсин. Тақрибий ечим $\varepsilon_h(x_1, x_2)$ хатолигининг h га нисбатан тартиби маълум бўлади. Айтайлик, хатоликни тақрибий равишда

$$\varepsilon_h(x_1, x_2) \approx K(x_1, x_2) h^p$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлиб, $K(x_1, x_2)$ бунда G соҳада чегараланган мусбат функция ва p мусбат сон бўлсин. Фараз қилайлик, $u_h(x_1, x_2)$ ва $u_{2h}(x_1, x_2)$ мос равишда h ва $2h$ қадамда тўр методи билан топилган чегаравий масаланинг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$$u(x_1, x_2) = u_h(x_1, x_2) + \varepsilon_h(x_1, x_2),\ u(x_1, x_2) = u_{2h}(x_1, x_2) + \varepsilon_{2h}(x_1, x_2)$$

ёки

$$u_h - u_{2h} = \varepsilon_{2h} - \varepsilon_h$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонига

$$\varepsilon_h \approx K(x_1, x_2) h^p,\ \varepsilon_{2h} \approx K(x_1, x_2) 2^p h^p = 2^p \varepsilon_h$$

ларни қўйсак,

$$u_h - u_{2h} \approx (2^p - 1)\varepsilon_h(x_1, x_2)$$

келиб чиқади, бундан эса

$$\varepsilon_h(x_1, x_2) \approx \frac{u_h - u_{2h}}{2^p - 1}$$

га эга бўламиз. Бу ифоданинг қулайлиги шундаки, уни ҳар доим ҳисоблаш мумкин ва кутиш мумкинки,

$$\tilde{u}_h = u_h + \frac{u_h - u_{2h}}{2^p - 1}$$

қиймат u_h га нисбатан аниқ ечимга яқинроқдир. Шу йўл билан u_h нинг қийматини аниқроқ топиш мумкин. Амалиётда қуйидагича иш тутилади: тақрибий ечимни берилган тугунларда h ва $2h$ қадамлар билан ҳисоблаб, u_h ва u_{2h} қийматлар таққосланади. Агар бу қийматлар берилган хоналарда устма-уст тушса, у ҳолда тақрибий ечим сифатида u_h олинади. Акс ҳолда h қадамни иккига бўлиб, $u_{h/2}$ қиймат ҳисобланади. Кейин аниқликнинг етарлилигини билиш учун юқоридагидек иш тутилади.

Чегаравий қийматлар Коллатц тенгламаси бўйича топилганда (3.1) тенглама учун Дирихле масаласини тақрибий ечишдаги хатонинг тартиби h га нисбатан $p = 2$ бўлади. Демак, бу ҳолда

$$\varepsilon_h = \frac{u_h - u_{2h}}{3}.$$

10.3.7. Матрицали ҳайдаш методи. Эллиптик типдаги дифференциал тенгламани тўр методи билан ечганда ҳосил бўладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг матрицаси махсус кўринишга эга. Бундай матрицаларда нолдан фарқли элементлар фақат бош диагоналда ва унга параллел бўлган иккита қўшимча диагоналда жойлашади; матрицанинг қолган элементлари нолга тенг. Юқорида айтганимиздек, матрицанинг бундай хусусиятини ҳисобга оладиган махсус методларни қарашга тўғри келади. Бундай методлардан бири *матрицали ҳайдаш* бўлиб, М.В. Келдиш томонидан таклиф қилинган эди. Бу методни эллиптик тенгламалар беш нуқтали андаза бўйича аппроксимация қилинганда ҳосил бўладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системасига қўллаш мумкин. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, эллиптик типдаги тенгламада (3.1) тенгламага ўхшаш аралаш ҳосила қатнашмаслиги керак (қ. [24]). Бу методни $G = \{0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < b\}$ соҳада (3.31) Пуассон тенгламаси учун қуйидаги

$$u(0,x_2) = \varphi_1(x_2),\ u(a,x_2) = \varphi_2(x_2),\ u(x_1,0) = \psi_1(x_1), u(x_1,b) = \psi_2(x_1)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи биринчи чегаравий масаланинг ечимини топиш учун қўллаймиз. Биз бу ерда (3.33) тўрни қараймиз ва $h_1 = h$, $\alpha = h^2 h_2^{-2}$ деб белгилаб оламиз. Натижада (3.34) ва (3.35) муносабатлардан қуйидаги айирмали схемага эга бўламиз:

$$y_{i+1,k} + \left[\alpha y_{i,k-1} - (2+2\alpha) y_{ik} + y_{i,k+1}\right] + y_{i-1,k} = h^2 f_{ik}, \tag{3.38}$$
$$i = 1,2,\ldots,M-1; k = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\left.\begin{aligned} y_{0k} &= \varphi_1(x_{2k}),\ y_{Nk} = \varphi_2(x_{2k}),\ k = 1,2,\ldots,N-1, \\ y_{i0} &= \psi_1(x_{1i}),\ y_{iN} = \psi_2(x_{1i}),\ i = 1,2,\ldots,M-1. \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Фараз қилайлик, $M \ll N$ бўлсин. Қуйидаги векторни киритамиз:

$$\bar{\boldsymbol{y}}_i = \left(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i,N-1}\right)^T.$$

Бу векторнинг компонентлари $x_1 = x_{1i}$ тўғри чизиқда ётган тугунларда ҳисобланган тўр устидаги функциянинг қийматларидан иборат. (3.38) системани қуйидаги вектор-матрица кўринишида ёзиб оламиз:

$$\bar{\boldsymbol{y}}_{i+1} + A\bar{\boldsymbol{y}}_i + \bar{\boldsymbol{y}}_{i-1} = \overline{\boldsymbol{f}}_i,\ i = 1,2,\ldots,M-1, \tag{3.40}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}_0 = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_0,\ \bar{\boldsymbol{y}}_M = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_M, \tag{3.41}$$

бунда матрица $(N-1)$ тартибли уч диагоналли матрица бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$A = \begin{bmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha & -(2+2\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{f}}_i = \begin{bmatrix} h^2 f(x_{1i}, x_{21}) - \alpha\psi_1(x_{1i}) \\ h^2 f(x_{1i}, x_{22}) \\ \ldots \\ h^2 f(x_{1i}, x_{2,N-2}) \\ h^2 f(x_{1i}, x_{2,N-1}) - \alpha\psi_2(x_{1i}) \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{\varphi}}_0 = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_{11}) \\ \varphi_1(x_{22}) \\ \ldots \\ \varphi_1(x_{2,N-1}) \end{bmatrix},\ \ \bar{\boldsymbol{\varphi}}_M = \begin{bmatrix} \varphi_2(x_{21}) \\ \varphi_2(x_{22}) \\ \ldots \\ \varphi_2(x_{2,N-1}) \end{bmatrix}.$$

Шундай қилиб, (3.38) тенгламалар системасини ечиш учун (3.41) чегаравий шартларда (3.40) айирмали тенгламаларни ечишимиз керак. Бу масалани ҳайдаш методи билан ечамиз. Бунинг учун (3.40) системада $\bar{\boldsymbol{y}}_{i+1}$ векторни йўқотиб, $\bar{\boldsymbol{y}}_{i-1}$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\bar{\boldsymbol{y}}_{i-1} = X_i\bar{\boldsymbol{y}}_i + \bar{\boldsymbol{z}}_i, \tag{3.42}$$

бунда X_i ва $\vec{z}_i$ номаълум матрица ва вектор бўлиб, уларни (3.40) тенгламадан топамиз; $\vec{y}_{i-1}$ ни (3.40) га олиб бориб қўямиз:

$$\vec{y}_{i+1} + (A + X_i)\vec{y}_i + \vec{z}_i = \vec{f}_i. \tag{3.43}$$

Энди (3.42) да i ни $i + 1$ билан алмаштириб, натижасини (3.43) га келтириб қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\left(E + (A + X_i)X_{i+1}\right)\vec{y}_{i+1} = \vec{f}_i - \vec{z}_i - (A + X_i)\vec{z}_{i+1}.$$

Бу тенглик ихтиёрий $\vec{y}_{i+1}$ вектор учун бажарилиши керак, демак,

$$E + (B + X_i)X_{i+1} = 0,$$

$$\vec{f}_i - \vec{z}_i - (B + X_i)\vec{z}_{i+1} = 0.$$

Бу ердан $X_1, X_2, \dots, X_M$ матрицаларни ва $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_M$ векторларни топиш учун ушбу рекуррент муносабатларга эга бўламиз:

$$X_{i+1} = -(B + X_i)^{-1}, \tag{3.44}$$

$$\vec{z}_{i+1} = X_{i+1}\left(\vec{z}_i - \vec{f}_i\right). \tag{3.45}$$

Бу формулалар ёрдамида ҳисоблашни бошлаш учун $X_1 = 0$ ва $\vec{z}_1 = \vec{\varphi}_0$ деб оламиз. Шундай қилиб, (3.44), (3.45) формулалар ёрдамида X_i матрицаларни ва $\vec{z}_i$ векторларни топамиз. Бу миқдорларни топиш жараёни *тўғри ҳайдаш* дейилади. Кейин $\vec{y}_M = \vec{\varphi}_M$ деб олиб, (3.42) формула ёрдамида $\vec{y}_{M-1}, \cdots, \vec{y}_1$ векторларни топамиз. Бу жараён *тескари ҳайдаш* дейилади. Матрицали ҳайдаш методида асосий ҳисоблаш ҳажмини $(M - 1)$ тартибли тескари матрицаларни $X_{i+1} = -(A + X_i)^{-1}$ формула ёрдамида топиш ташкил этади. Матрицаларнинг тартиби ошган сари унинг тескарисини топиш кўп меҳнат талаб қилади. Шунинг учун ҳам $M >> N$ бўлганда ҳайдаш йўналишини Ox_1 ўқининг йўналиши билан бир хил қилиб олдик. Агар $N >> M$ бўлса, у ҳолда матрицали ҳайдаш йўналишини Ox_2 ўқининг йўналиши билан устма-уст тушадиган қилиб, матрицали ҳайдаш йўналишини ўзгартириш керак.

Энди матрицали ҳайдаш методининг турғунлик масаласини кўриб чиқамиз. Бунинг учун қуйидаги леммани исботлаймиз:

1-лемма. $(N{-}1)$ тартибли симметрик A матрицанинг барча $\lambda(A)$ хос сонлари ушбу формула билан аниқланади:

$$\lambda_k(A) = -2 - 2\alpha\left(1 + \cos\frac{k\pi}{N}\right), \; k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Исботи. Қулайлик учун $\rho = N - 1$ ва $2\beta = -(2 + 2\alpha) - \lambda$ белгилаш киритсак, у ҳолда A матрицанинг характеристик тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$D_\rho(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2\beta & \alpha & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2\beta & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha & 2\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \alpha & 2\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Биз $D_\rho(\lambda) = 0$ тенгламанинг илдизларини топиш учун $D_\rho(\lambda)$ нинг ошкор кўринишини топамиз. Бунинг учун $D_\rho(\lambda)$ аниқловчини биринчи устун элементлари бўйича ёямиз, натижада

$$D_\rho(\lambda) = 2\beta D_{\rho-1}(\lambda) - \alpha^2 D_{\rho-2}(\lambda)$$

ёки

$$D_\rho(\lambda) = 2\beta D_{\rho-1}(\lambda) + \alpha^2 D_{\rho-2}(\lambda) = 0 \tag{3.46}$$

ҳосил бўлади.

Бу тенглама иккинчи тартибли бир жинсли чекли-айирмали тенглама бўлиб, характеристик тенгламаси

$$q^2(\lambda) - 2\beta q(\lambda) + \alpha^2 = 0$$

дан иборат. Равшанки,

$$q_1(\lambda) = \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, q_2(\lambda) = \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Демак, (3.46) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$D_\rho(\lambda) = c_1 q_1^\rho(\lambda) + c_2 q_2^\rho(\lambda).$$

Бу ерда c_1 ва c_2 ўзгармас сонларни шундай танлаймизки, қуйидаги дастлабки шартлар бажарилсин:

$$c_1 q_1^1(\lambda) + c_2 q_2^1(\lambda) = D_1(\lambda) \equiv 2\beta,$$

$$c_1 q_1^2(\lambda) + c_2 q_2^2(\lambda) = D_2(\lambda) \equiv 4\beta^2 - \alpha^2.$$

Бу чизиқли тенгламалардан c_1 ва c_2 ларни топамиз:

$$c_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}, \quad c_2 = -\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Демак,

$$D_\rho(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\left[\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^{\rho+1} - \left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^{\rho+1}\right].$$

Бу ифодани нолга тенглаштириб, A матрицанинг хос сонларини топамиз:

$$\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right)^{\rho+1} = 1 = e^{2\pi ki},$$

яъни

$$\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right) = e^{2\varphi_k i}, \qquad (3.47)$$

бунда

$$\varphi_k = \frac{\pi k}{\rho+1} = \frac{\pi k}{N}.$$

Агар (3.47) чап томонининг сурат ва маҳражини $\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$ га кўпайтирсак, натижада

$$\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}\right)^2 = e^{2\varphi_k i}$$

ҳосил бўлади ва демак,

$$\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2} = \alpha e^{i\varphi_k}. \qquad (3.47,\ a)$$

Бунда β номаълум сон, чунки $\beta = -\frac{1}{2}(\lambda+2+2\alpha)$. Осонлик билан кўриш мумкинки, (3.47, *a*) тенгликни

$$\beta_k = \alpha\cos\varphi_k = \alpha\cos\frac{k\pi}{N}$$

қаноатлантиради. Шундай қилиб,

$$\lambda_k(A) = -2-2\alpha\left(1+\cos\frac{k\pi}{M}\right).$$

Лемма исботланди.

Натижа. A матрицанинг барча хос сонлари $|\lambda_k(A)| \geq 2$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Агар барча $j = 0, 1, \ldots, M$ учун $\|X_i\| \leq 1$ бўлса, *матрицали ҳайдаш методи яхлитлаш хатолигига нисбатан турғун* дейилади (қ. [24], 249-б.). Бу ерда матрицанинг ихтиёрий нормасини олиш мумкин. Агар $\|X_i\| \leq 1$ бўлса, у ҳолда кўриниб турибдики, (3.42) ва (3.45) алгоритмлар ҳисоблаш хатолигига нисбатан турғундир.

Энди $\|X_i\| \le 1$ лигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\vec{s}$ вектор A матрицанинг $\lambda_k(A)$ хос сонига мос келадиган хос вектори бўлсин. Унда хос соннинг таърифи ва 1-лемманинг натижасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$A\vec{s} = \lambda\vec{s},\ \|A\vec{s}\| = |\lambda_k|\|\vec{s}\| \ge 2\|\vec{s}\|.$$

Фараз қилайлик, бирор i учун $\|X_i\| \le 1$ бўлсин ва биз $\|X_{i+1}\| \le 1$ эканлигини кўрсатамиз. У ҳолда $\|X_1\| = 0$ бўлганлиги сабабли барча $i = 1, 2, \ldots, M$ учун $\|X_i\| \le 1$ эканлиги келиб чиқади. Бунинг учун $\vec{s}$ билан аниқланадиган ушбу

$$\vec{\sigma} = -(A + X_i)\vec{s} = X_{i+1}^{-1}\vec{s}$$

векторни оламиз. Равшанки, $\|X_i\| \le 1$ бўлганлиги учун

$$\|\vec{\sigma}\| = \|A\vec{s} + X_i\vec{s}\| \ge \|A\vec{s}\| - \|X_i\vec{s}\| \ge 2\|\vec{s}\| - \|\vec{s}\| = \|\vec{s}\|.$$

Аммо $\vec{s} = X_{i+1}\vec{\sigma}$, демак, $\|X_{i+1}\vec{\sigma}\| = \|\vec{s}\| \le \|\vec{\sigma}\|$. Бундан эса $\|X_{i+1}\| \le 1$ келиб чиқади. Шу билан матрицали ҳайдаш методининг яхлитлаш хатолигига нисбатан турғунлиги кўрсатилди.

10.3.8. Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласини ечишда Либман методи. Фараз қилайлик, (3.31) Пуассон тенгламасининг G соҳада (3.32) чегаравий шартни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб қилинсин. Биз бу ерда беш нуқтали андазадан квадратик тўр учун ($h_1 = h_2 = h$) фойдаланамиз. У ҳолда (3.34) дан қуйидаги содда айирмали схемани ҳосил қиламиз:

$$y_{ik} = \frac{1}{4}\left(y_{i-1,k} + y_{i-1,k} + y_{i,k-1} + y_{i,k-1}\right) - \frac{h^2}{4} f_{ik}, \tag{3.48}$$

чегаравий шартни эса

$$y_A = \varphi(A) \tag{3.49}$$

шаклда оламиз. Бу ерда юқоридаги тенгламаларнинг сони N жуда катта бўлиши мумкин, шунинг учун ҳам бу системани итерация методи билан ечиш маъқулдир. Биз итерация методини Либман [59] кўрсатган усул бўйича қўллаймиз. Бунинг учун тўрдаги тугунларни қуйидагича турларга ажратамиз: Чегаравий тугунларни биринчи тур тугунлар деймиз. Камида битта қўшниси чегаравий тугун бўлган барча ички тугунларни иккинчи тур тугунлар деймиз. Олдинги тўрларга тегишли бўлмаган ва камида битта қўшниси иккинчи турга тегишли бўлган барча ички тугунларни учинчи тур тугунлар деймиз ва ҳ. к. Шундай қилиб, $\overline{G}_h$ даги барча тугунларни чекли миқдордаги турларга ажратамиз, шу билан бирга ҳар бир тугун фақатгина битта турга тегишли бўлади.

Фараз қилайлик, $y_j\left(j=1,2,\dots,N\right)$ ечим $\overline{G}_h$ соҳадаги (3.48), (3.49) айирмали чегаравий масаланинг j тугундаги аниқ ечими бўлсин. Энди y_1, y_2, ... , y_N ларга ихтиёрий $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}$ қиймат берамиз ва буларни (3.48), (3.49) айирмали масаланинг нолинчи яқинлашиши деймиз. Биринчи яқинлашиш $y_1^{(1)}$ ни топиш учун (3.48) га кўра $y_1^{(0)}$ нинг тўртта қўшни тугундаги қийматининг ўртача арифметигидан $\frac{h^2}{4}f$ нинг 1-тугундаги қийматини айириш керак. Кейин $y_2^{(1)}$ ни топиш учун $y_2^{(0)}$ нинг тўртта қўшни тугундаги қийматларининг ўртача арифметигидан $\frac{h^2}{4}f$ нинг 2-тугундаги қийматини айириш керак ва ҳ. к. Шунга ўхшаш $y_j^{(1)}$ лардан фойдаланиб, $y_j^{(2)}$ ларни топамиз ва ҳ. к.

Энди $z_j^{(n)}=y_j-y_j^{(n)}$ деб белгилаб, барча $j\left(j=\overline{1,N}\right)$ учун

$$\lim_{n\to\infty} z_j^{(n)}=0$$

тенглигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $z_j^{(n)}$ (3.48), (3.49) айирмали чегаравий масаланинг $f_{ik}\equiv 0$ ва чегаравий шартлар нолга тенг бўлгандаги ечимидир. Шунинг учун ҳам навбатдаги яқинлашиш $z_j^{(n)}$ олдинги $z_j^{(n-1)}$ яқинлашишларнинг тўртта қўшни тугундагиларининг ўртача арифметигига тенг. Хусусий ҳолда

$$\left|z_1^{(1)}\right|\le\left(1-\frac{1}{4}\right)M,\ \ M=\max_{1\le j\le N}\left|z_j^{(0)}\right|,$$

чунки биринчи тугуннинг камида битта қўшниси Γ_h чегарада ётади ва унда чегаравий шарт нолга тенг. Шунга ўхшаш

$$\left|z_2^{(1)}\right|\le\left(1-\frac{1}{4^2}\right)M,\dots,\left|z_N^{(1)}\right|\le\left(1-\frac{1}{4^N}\right)M=\alpha M,$$

$$\alpha=1-4^{-N}<1.$$

Бу жараённи давом эттириб, j га боғлиқ бўлмаган ихтиёрий n учун

$$\left|z_j^{(n)}\right|\le\alpha^n M$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан эса $n\to\infty$ да $z_j^{(n)}\to 0$ келиб чиқади.

Кўриниб турибдики, бу алгоритм ҳисоблаш хатолигига нисбатан турғундир, чунки бирор қадамда йўл қўйилган хатолик кейинги қадамда камайиб боради.

Бу усулнинг ҳисоблаш учун қулайроқ бўлган схемасини қуриш учун $\varepsilon_j^{(n)}$ орқали n-тузатмани белгилаймиз:

$$\varepsilon_j^{(n)} = y_j^{(n+1)} - y_j^{(n)},$$

у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$y_j = \lim_{n\to\infty} y_j^{(n)} = y_j^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(y_j^{(n+1)} - y_j^{(n)}\right) = y_j^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_j^{(n)}.$$

Равшанки, $\varepsilon_j^{(0)}$ ни ҳисоблаш учун юқоридаги усулга кўра $y_j^{(1)}$ ни ҳисоблаб, кейин

$$\varepsilon_j^{(0)} = y_j^{(1)} - y_j^{(0)}$$

айирмани топиш керак. Барча кейинги $\varepsilon_j^{(n)}\,(n \ge 1)$ ҳисоблашлар $z_j^{(n)}$ ни ҳисоблагандек олиб борилади, яъни $\varepsilon_j^{(n)}$ ни топиш учун нолли чегаравий шартлар ва $f_{ik} \equiv 0$ деб олиб, $\varepsilon_j^{(n-1)}$ ларнинг тўртта қўшни тугундаги қийматларининг ўртача арифметигини олиш керак.

Энди

$$y_j \cong y_j^{(0)} + \sum_{n=0}^{m}\varepsilon_j^{(n)} \tag{3.50}$$

деб олиб, бу тақрибий тенгликнинг хатолигини баҳолаймиз. Равшанки,

$$\left|\varepsilon_j^{(n)}\right| = \left|y_j^{(n+1)} - y_j - \left(y_j^{(n)} - y_j\right)\right| = \left|z_j^{(n+1)} - z_j^{(n)}\right| \le$$
$$\le \left|z_j^{(n+1)}\right| + \left|z_j^{(n)}\right| \le \alpha^{n+1}M + \alpha^n M = (1+\alpha)\alpha^n M,$$

бундан эса

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\varepsilon_j^{(n)}\right| \le (1+\alpha)M\sum_{n=m+1}^{\infty}\alpha^n = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\alpha^{m+1}M.$$

Шундай қилиб, (3.50) тақрибий тенгликнинг хатоси

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\alpha^{m+1}M \tag{3.51}$$

миқдорга тенг бўлиб, бунда

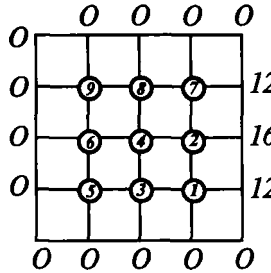
$$\alpha = 1 - 4^{-N},\ M = \max_{1\le j\le N}\left|z_j^{(0)}\right|,\ z_j^{(0)} = y_j^{(0)} - y_j.$$

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, (3.51) кўполлигига қарамасдан, жиддий равишда $z_j^{(0)} = y_j^{(0)} - y_j$ ларга боғлиқ. Шунинг учун ҳам $y_j^{(0)}$ дастлабки яқинлашишларни танлаш учун қўшимча маълумотлардан фойдаланиш керак. Айрим ҳолларда берилган тўрда ечиш керак бўлса, аввал бу масалани йирикроқ тўрда ечиб, кейин интерполяция амалини бажариб, натижада $y_j^{(0)}$ учун берилган тўрда озми-кўпми қониқарли қийматни ҳосил қилиш мумкин.

Мисол. Қуйидаги

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -2x_1$$

Пуассон тенгламасининг ечими $\{0 \le x_1,\ x_2 \le 4\}$ квадратнинг 9-чизмада кўрсатилган 1–9 нуқталардаги қиймати топилсин. Чегаравий шартлар 9-чизмада кўрсатилган.



9-чизма.

Ечиш. G_h соҳанинг тугунларини 9-чизмада кўрсатилганидек белгилаб чиқамиз ва (3.48) тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y_j = \frac{1}{4}\left(y_a + y_b + y_c + y_d\right) + \frac{h^2}{4} \cdot 2\left(x_1\right)_j, \qquad (3.48a)$$

бунда $(x_1)_j$ орқали j-тугуннинг абсциссасини белгилаймиз; a, b, c, d лар эса j-тугунга қўшни тугунлар. Чегаравий шартларнинг симметриклигига кўра

$$y_7 = y_1,\ y_8 = y_3,\ y_9 = y_5$$

тенгликлар келиб чиқади. Шунинг учун ҳам фақат y_1, y_2, ... , y_6 ларни топиш кифоядир. Қаралаётган тўрда $h = 1$. Дастлабки яқинлашишларни танлаш учун қуйидагича иш тутамиз: $y_4^{(0)}$ ни топиш учун $h = 2$ деб олиб, (3.48a) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$y_4^{(0)} = \frac{1}{4}(0+0+0+16) + \frac{2^2 \cdot 2 \cdot 2}{4} = 8.$$

$y_1^{(0)}$ ни топиш учун (3.48a) да $h = \sqrt{2}$ деб оламиз, у ҳолда

$$y_1^{(0)} = \frac{1}{4}(0+0+8+16) + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 9.$$

Шунга ўхшаш

$$y_5^{(0)} = \frac{1}{4}(0+0+0+8) + \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 3.$$

Энди берилган тўрда $h = 1$ қадам билан қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$y_2^{(0)} = \frac{1}{4}(8+16+8+8) + \frac{2 \cdot 3}{4} = 11,5;$$

$$y_3^{(0)} = \frac{1}{4}(3+8+0+8) + \frac{2 \cdot 2}{4} = 5,75;$$

$$y_6^{(0)} = \frac{1}{4}(0+8+3+3) + \frac{2 \cdot 1}{4} = 4.$$

Ҳисоблашларнинг қолганлари 9-жадвалда келтирилган. Биз фақат 6 та итерацияни олдик, аслида ҳисоблашни $\varepsilon_j^{(n)}$ етарлича кичик бўлгунича давом эттириш керак. Итерация жараёни секин яқинлашишининг сабаби қадамнинг катталигида ($h = 1$). Жадвалнинг охирги сатрида берилган дифференциал тенглама

$$u(x_1,\ x_2) = x_1 x_2(4 - x_2)$$

аниқ ечимининг тугунлардаги қиймати келтирилган.

9-жадвал

j	1	2	3	4	5	6
$y_j^{(0)}$	9	11,5	5,75	8	3	4
$y_j^{(1)}$	8,8125	12	6	7,75	2,9375	4
$y_j^{(0)}$	−0,1875	0,5	0,25	−0,25	−0,0625	0
$y_j^{(1)}$	0,1875	−0,1562	−0,125	0,25	0,0625	−0,0938
$\varepsilon_j^{(2)}$	−0,0453	0,1562	0,125	−0,125	−0,0547	0,0938
$\varepsilon_j^{(3)}$	0,703	−0,0539	−0,0562	0,125	0,0547	−0,0586
$\varepsilon_j^{(4)}$	−0,0275	0,0664	0,0625	−0,0562	−0,0287	0,0586
$\varepsilon_j^{(5)}$	0,0322	−0,0278	−0,0281	0,0625	0,0302	−0,0284
$y_k^{(j)}$	8,9975	12,0125	6,0000	7,9438	2,9713	3,9716
u_k	9,000	12,0000	6,0000	8,0000	3,0000	4,0000

Умумий ўзгарувчан коэффициентли (3.1) эллиптик тенглама учун чиқарилган (3.7) оддий итерация ва Зейдел методлари билан ечиш ҳамда хатони баҳолаш мумкин. Бу масалалар [7] да келтирилган.

10.3.9. Фурьенинг тез алмаштириши. Фараз қилайлик, $a(n)$ ($n = 0, 1, \ldots, N-1$) комплекс сонларнинг чекли кетма-кетлиги бўлсин. Биз *Фурьенинг тез алмаштириш* (ФТА) алгоритмини кўриб чиқамиз. Бу алгоритм $a(n)$ кетма-кетлик учун *Фурьенинг дискрет алмаштиришида* (ФДА) энг тежамкор алгоритмлардандир. Аниқроқ қилиб айтганда, ФТА

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{2\pi ink/N},\ k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{3.52}$$

алмаштиришни ва унга тескари бўлган

$$a(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-2\pi ink/N},\ n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{3.53}$$

алмаштиришни ҳисоблаш учун ишлатилади. Кейинчалик қулай бўлиши учун

$$W = e^{\frac{2\pi i}{N}} \tag{3.54}$$

белгилашни киритиб, $f(k)$ ва $a(n)$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) W^{kn}, \tag{3.55}$$

$$a(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}. \tag{3.56}$$

Бу ифодалар мос равишда *Фурьенинг чекли қатори* ва *Фурьенинг дискрет коэффициенти* дейилади.

Агар $a(n)$ лар ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда $f(k)$ нинг мавҳум қисми $\mathrm{Im}\, f(k)$ қуйидагига тенг:

$$\vartheta(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \sin\frac{2\pi kn}{N}, \; k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{3.57}$$

(3.55)—(3.57) кўринишдаги функциялар математикада ва унинг хилма-хил татбиқларида, жумладан, айирмали тенгламаларни ечишда, статистик маълумотларни ишлашда, рақамларнинг спектрал тадқиқида учрайди. Аммо яқин вақтларгача ФДА кам ишлатилар эди, чунки берилган $a(n)$ ва W^{kn} учун $f(k)$ нинг барча $f(0)$, $f(1)$ ... , $f(N-1)$ қийматларини ҳисоблашда N^2 та кўпайтириш амалини бажариш керак.

Шуни таъкидлаш керакки, агар N кўп бўлувчиларга эга бўлса, у ҳолда $\sin\frac{2\pi kn}{N}$ сонлар орасида бирхиллари кўп учрайди. Шунинг учун ҳам уларни гуруҳлаб, кўпайтириш амалини камайтириш мумкин. Шу ғояга асосланган ЭҲМ да ҳисоблаш учун тежамкор алгоритмни Жим Кюли ва Жон Тьюки таклиф қилишган [58]. Бу алгоритм *Фурьенинг тез алмаштириши* ёки *Фурьенинг тез дискрет алмаштириши* дейилади (ФТДА). Бу алгоритмда $N = 2^\rho$ ёки $N = 3^\rho$ бўлса, алгоритм тежамкор бўлади. ЭҲМ да дастурлаш қулай бўлиши учун $N = 2^\rho$ деб оламиз. Умумий ҳолда $N = r_1\, r_2\, \ldots.\, r_\rho$ деб қараш мумкин. Бу ҳол [26, 27, 50] ларда мукаммал қаралган ва ҳар хил татбиқлари келтирилган. Берилган k ва n ларнинг иккилик саноқ системасидаги ёйилмасини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} k &= k_0 + 2k_1 + 2^2 k_2 + \ldots + 2^{\rho-1} k_{\rho-1}, \\ n &= n_0 + 2n_1 + 2^2 n_2 + \ldots + 2^{\rho-1} n_{\rho-1}, \end{aligned}\right\} \tag{3.58}$$

бу ерда k_j ва n_i лар 0 ёки 1 га тенг. Қуйидагича

$$a(n) = a(n_0, n_1, \dots, n_{r-1})$$

белгилашни киритиб, (3.55) йиғиндини

$$f(k) = \sum_{n_0, n_1, \dots, n_{\rho-1}} a(n_0, n_1, \dots, n_{\rho-1}) W^{k(n_0 + 2n_1 + \dots + 2^{\rho-1} n_{\rho-1})} =$$

$$= \sum_{n_0=0}^{1} W^{kn_0} \left[\sum_{n_1=0}^{1} W^{2kn_1} \dots \sum_{n_{\rho-1}=0}^{1} W^{2^{\rho-1} kn_{\rho-1}} a(n_0, n_1, \dots, n_{\rho-1}) \right] \tag{3.59}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди k нинг (3.58) ёйилмасидан фойдаланиб, ички

$$\sum_{n_{\rho-1}=0}^{1} W^{2^{\rho-1} kn_{\rho-1}} a(n_0, n_1, \dots, n_{\rho-1}) \tag{3.60}$$

йиғиндини бошқа кўринишда ёзамиз. Равшанки,

$$W^{2^{\rho-1} kn_{\rho-1}} = \left(W^{2^{\rho-1} k_0 n_{\rho-1}} \right) \left(W^{2^{\rho-1} 2k_1 n_{\rho-1}} \right) \dots \left(W^{2^{\rho-1} 2^{\rho-1} k_{\rho-1} n_{\rho-1}} \right).$$

Бу кўпайтмада иккинчисидан бошлаб барча кўпаювчилар 1 га тенг. Ҳақиқатан ҳам, $1 \le j \le \rho - 1$ бўлсин, у ҳолда $W^N = 1$ ва $n_{\rho-1} k_j 2^j$ бутун сон (чунки $n_{\rho-1} k_j$ ифода 0 ёки 1 га тенг ва $j \ge 1$) бўлганлиги учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$W^{n_{\rho-1} 2^{\rho-1} 2^j k_j} = W^{2^\rho n_{\rho-1} k_j 2^{j-1}} = W^{N n_{\rho-1} k_j 2^{j-1}} = 1.$$

Шундай қилиб, $W^{2^{\rho-1} kn_{\rho-1}} = W^{2^{\rho-1} n_{\rho-1} k_0}$ тенглик бажарилади ва демак, (3.60) йиғиндини

$$a_1(k_0, n_0, \dots, n_{\rho-2}) = \sum_{n_{\rho-1}=0}^{1} W^{2^{\rho-1} n_{\rho-1} k_0} a(n_0, n_1, \dots, n_{\rho-1})$$

кўринишда ёзиш мумкин. (3.59) ифодада охиридан битта олдинда турган йиғиндини

$$\sum_{n_{\rho-2}=0}^{1} W^{k 2^{\rho-1} n_{\rho-2}} a_1(k_0, n_0, \dots, n_{\rho-2}) \tag{3.61}$$

каби ёзиб оламиз. Кейин $k 2^{\rho-2} n_{\rho-2}$ сонни

$$2^{\rho-2} n_{\rho-2} (k_0 + 2k_1) + 2^\rho n_{\rho-2} (k_2 + \dots + 2^{\rho-3} k_{\rho-1})$$

кўринишда тасвирлаб, $W^{k 2^{\rho-2} n_{\rho-2}} = W^{(k_0 + 2k_1) 2^{\rho-2} n_{\rho-2}}$ тенгликнинг чинлигига ишонч ҳосил қиламиз. Натижада (3.61) қуйидаги кўринишни олади:

$$a_2\left(k_0,n_0,...,n_{\rho-3}\right)=\sum_{n_{\rho-2}=0}^{1} W^{(k_0+2k_1)2^{\rho-2}n_{\rho-2}} a_1\left(k_0,n_0,...,n_{\rho-2}\right).$$

Худди шунга ўхшаш навбатдаги қадамда қуйидаги

$$a_3\left(k_0,k_1,k_2,n_0,...,n_{\rho-4}\right)=\sum_{n_{\rho-3}=0}^{1} W^{\left(k_0+2k_1+2^2k_2\right)2^{\rho-3}n_{\rho-3}} a_2\left(k_0,k_1,n_0,...,n_{\rho-3}\right)$$

ҳосил бўлиб, охирида

$$f\left(k\right)=\sum_{n_0=0}^{1} W^{kn_0} a_{\rho-1}\left(k_0,k_1,...,k_{\rho-2},n_0\right)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, (3.55) йиғиндини ҳисоблаш учун ФТА алгоритми қуйидагидан иборат: аввало, k ва n сонларнинг (3.58) ёйилмасини ёзиб ва $a(n) = a(n_0,\ n_1,\ ...\ ,\ n_{\rho-1})$ белгилаш киритиб, иккита ҳаддан иборат бўлган қуйидаги йиғиндиларни ҳисоблаймиз:

$$a_1\left(k_0,n_0,...,n_{\rho-2}\right)=\sum_{n_{\rho-1}=0}^{1} W^{2^{\rho-1}k_0n_{\rho-1}} a\left(n_0,n_1,...,n_{\rho-1}\right),$$

$$a_2\left(k_0,k_1,n_0,...,n_{\rho-3}\right)=$$

$$=\sum_{n_{\rho-2}=0}^{1} W^{(k_0+2k_1)2^{\rho-2}n_{\rho-2}} a_1\left(k_0,n_0,...,n_{\rho-2}\right),$$

$$a_{\rho-1}\left(k_0,k_1,...,k_2,n_0\right)=$$

$$=\sum_{n_1=0}^{1} W^{\left(k_0+2k_1+...+2^{\rho-2}k_{\rho-1}\right)2n_1} a_{\rho-2}\left(k_0,k_1,...,k_{\rho-3},...,n_0,n_1\right),$$

$$f\left(k\right)=\sum_{n_0=0}^{1} W^{kn_0} a_{\rho-1}\left(k_0,k_1,...,k_{\rho-2},n_0\right).$$

Энди $f(k)$ $(k = 0,1,\ ...,\ N-1)$ йиғиндиларнинг ФТА алгоритми билан топилгандаги кўпайтиришлар сонини ҳисоблаймиз. Равшанки, $a_1(k_0,\ n_0,\ ...\ ,\ n_{\rho-2})$ функция фақат $a_2(k_0,\ k_1,n_0,\ ...\ ,\ n_{\rho-3})$ функциянинг қийматини ҳисоблашда керак бўлади, аммо бунда $a_1(k_0,\ n_0,\ ...\ ,n_{\rho-2})$ ни фақат икки марта $n_{\rho-2}= 0$ ва $n_{\rho-2}= 1$ бўлганда ҳисоблаш керак. $n_{\rho-2}$ нинг ҳар бир қиймати учун $a_1(k_0,\ n_0,\ ...\ ,\ n_{\rho-2})$ ни ҳисоблаш иккита кўпайтиришни талаб қилади. Демак, $a_1(k_0,\ n_0,\ ...\ ,\ n_{\rho-2})$ ни ҳисоблаш учун кўпайтиришнинг умумий сони тўртга тенг. Кейинги ҳар бир

$a_j(k_0, k_1, \ldots, k_{j-1}, n_0, n_1, \ldots, n_{p-j-1})$ йиғиндини ҳисоблаш учун ҳам тўрттадан кўпайтириш амалини бажариш талаб қилинади. Йиғиндиларнинг сони эса p га тенг. Шунинг учун ҳам берилган k учун $f(k)$ ни ҳисоблашга $4p = 4\mathrm{lod}_2 N$ та кўпайтириш керак. Барча k ларни $k = 0, 1, \ldots, N^{-1}$ учун ҳисоблашда сарфланадиган кўпайтиришларнинг сони $4pN = 4N\mathrm{od}_2 N$ га тенг. Бу сон (3.55) йиғиндини бевосита ҳисоблаш учун сарфланадиган N^2 та кўпайтиришга нисбатан анча кичикдир.

10.3. 10. Декомпозиция методи. Эллиптик тенгламани айирмали тенгламалар системаси билан алмаштирганда система матрицаси A нинг тартиби ички нуқталар сони N га тенг бўлади. Агар Лаплас операторида ўзгарувчиларнинг сони k бўлиб, ҳар бир ўзгарувчи бўйича қадам h га тенг бўлса, тугунларнинг сони $N = 0\left(\frac{1}{h^k}\right)$ та бўлади. Масалан, $k = 2$, $h = 10^{-2}$ бўлганда $N \approx 10^4$ бўлади. Бундан ташқари, матрицанинг кўп элементлари нолдан иборат бўлиб, махсус структурага эга. Ниҳоят, бу матрица ёмон шартланган, яъни энг катта хос соннинг энг кичик хос сонга нисбати $O(h^{-2})$ га тенг.

Эллиптик тенгламалар учун қурилган айирмали тенгламаларнинг бу хусусиятлари махсус тежамкор методларни ишлаб чиқишни талаб қилади.

Ҳозирги вақтда Пуассон тенгламасини ечишда ҳосил бўладиган чекли-айирмали масалани ечиш учун иккита тўғри *тежамкор метод* мавжуд. Уларнинг бири *декомпозиция методи* (буни *редукция методи*, *циклик редукция методи* ёки *ўзгарувчиларни тоқ-жуфт тарзда йўқотиш методи* ҳам дейилади) бўлиб, Гаусс методининг модификациясидир. Иккинчиси эса Фурьенинг тез алмаштиришига асосланган *ўзгарувчиларни ажратиш методи*дир. Агар тўғри тўртбурчакда ҳар бир йўналиш бўйича тугунлар сони N бўлса, у ҳолда ҳар иккала тежамкор метод учун арифметик амалларнинг сони $Q = O(N^2 \ln N)$ та.

Матрицали ҳайдаш методи тўғри метод бўлиб, мураккаб шаклдаги чегарага эга бўлган айирмали эллиптик тенгламага қўлланилади. Аммо матрицали ҳайдаш методи $Q = O(N^4)$ та арифметик амални ва оралиқдаги маълумотларни сақлаш учун катта хотирани талаб қилади. Шу билан бирга, агар ўнг томони ва чегаравий шартлари билан фарқ қиладиган бир қатор масалаларни ечиш талаб қилинса, у ҳолда ҳайдаш матрицаларини хотирада сақлаш ҳисобига матрицали ҳайдаш методида иккинчисидан бошлаб кейинги вариантлар учун амаллар сонини $O(N^3)$ гача камайтириш мумкин.

Энди декомпозиция методини кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, чегараси Γдан иборат $G = \{0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < b\}$ соҳада Пуассон тенгламаси учун ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f\left(x_1,x_2\right),\ u\big|_{\Gamma}=\varphi\left(x_1,x_2\right) \tag{3.62}$$

Дирихле масаласини ечиш талаб қилинсин. Биз $h_1 = a/N_1$, $h_2 = b/N_2$, $x_{1i} = ih_1$, $x_{2j} = jh_2$ деб олиб, G соҳа ва Γ чегарани мос равишда қуйидагилар билан алмаштирамиз:

$$G_h^0=\left\{x_{1i},x_{2j};\ i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1}\right\},$$

$$\Gamma_h=\left\{x_{1i},0\right\}U\left\{a,x_{2j}\right\}U\left\{x_{1i},b\right\}U\left\{0,x_{2j}\right\}.$$

(3.62) тенгламага беш нуқтали андазани қўллаб, Лапласнинг қуйидаги Λ айирмали операторини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda y_{ij}=-f_{ij},\ \left(x_{1i},x_{2j}\right)\in G_h^0,\\&\Lambda y_{ij}=\Lambda_1 y_{ij}+\Lambda_2 y_{ij},\ i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1},\\&\qquad y_{ij}\big|_{\Gamma_h}=\varphi_{ij}.\end{aligned}\right\} \tag{3.62, a}$$

Бунда

$$\Lambda_1 y_{ij}=\frac{1}{h_1^2}\left(y_{i+1,j}-2y_{ij}+y_{i-1,j}\right),\ \Lambda_2 y_{ij}=\frac{1}{h_2^2}\left(y_{i,j+1}-2y_{ij}+y_{i,j-1}\right).$$

Аввало, (3.62, *а*) системани қуйидаги вектор тенгламалар системасига келтирамиз:

$$\left.\begin{aligned}&-\overline{\boldsymbol{Y}}_{j-1}+\overline{\boldsymbol{B}}Y_j-\overline{\boldsymbol{Y}}_{j+1}=\overline{\boldsymbol{F}}_j,\ j=1,2,\dots,N_2-1,\\&\overline{\boldsymbol{Y}}_0=\overline{\boldsymbol{F}}_0,\ \overline{\boldsymbol{Y}}_{N_2}=\overline{\boldsymbol{F}}_{N_2},\end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

бунда $\overline{\boldsymbol{Y}}_j$ ва $\overline{\boldsymbol{F}}_j$ векторларнинг компонентлари мос равишда y_{ij} ва f_{ij} ларнинг j-устундаги қийматларидан иборат бўлиб, $\boldsymbol{B}$ — квадрат матрица. Бу матрицани аниқлаш керак.

Агар (3.62) тенгламанинг ўнг томонини чегара яқинида ўзгартирсак, у ҳолда $i = 0$, $i = N_1$ бўлгандаги чегаравий нуқталарда $y_{ij} = 0$ деб олишимиз мумкин.

Энди (3.62) системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned}&-y_{i,j-1}+\left(2y-h_2^2\Lambda_1 y\right)_{ij}-y_{i,j+1}=h_2^2 q_{ij},\\&1\le i\le N_1-1,\ 1\le j\le N_2-1,\\&y_{0j}=y_{N_1 j}=0,\ 0<j<N_2,\\&y_{i0}=\varphi_{i0},\ y_{iN_2}=\varphi_{iN_2},\ 0<i<N_1,\end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

бунда $q_{ij} = f_{ij}$, агар $1 < i < N_1 - 1,\ 1 \le j \le 1,\ 1 \le j \le N_2 - 1$ бўлса,

$$q_{1j} = f_{1j} + h_1^{-2}\varphi_{0j},\ q_{N_1-1.1} = f_{N_1-1\cdot j} + h_1^{-2}\varphi_{N_1-1,j}.$$

Юқоридаги $\overline{\boldsymbol{Y}}_j$ ва $\overline{\boldsymbol{F}}_j$ векторларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\overline{\boldsymbol{Y}}_j = \left(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{N_1-1}, j\right)^T,\ j = 0,1,\ldots,N_2,$$

$$\overline{\boldsymbol{F}}_j = \left(h_2^2 f_{1j} + \frac{h_2^2}{h_1^2}\varphi_{0j}, h_2^2 f_{2j}, \ldots, h_2^2 f_{N_1-2,j}, h_2^2 f_{N_1-1,j} + \frac{h_2^2}{h_1^2}\varphi_{0j}\right)^T,$$
$$j = 1,2,\ldots,N_2-1,$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}_j = \left(\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \ldots, \varphi_{N_1-1,j}\right)^T, \text{ агар } j = 0,\ N_2 \text{ бўлса.}$$

Айирмали B операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\begin{gathered}\left(B\overline{\boldsymbol{Y}}_j\right)_i = \left(2y - h_2^2\Lambda_1 y\right)_{ij},\ 1 < i < N_1,\\ y_{0i} = y_{N_{1j}} = 0.\end{gathered} \tag{3.65}$$

Бу ва (3.64) дан кўрамизки, (3.62) айирмали масала (3.63) вектор тенгламалар системасига тенг кучлидир.

Энди $N_2 = 2^n$ деб олиб, декомпозиция методини тавсифлашга ўтамиз. Бу методнинг ғояси шундан иборатки, (3.63) системадан аввал тоқ рақамли $\overline{\boldsymbol{Y}}_j$ векторлар, кейин рақамлари 2, 4, 8 ва ҳ. к. га каррали бўлган векторлар йўқотилади.

Индекснинг $j = 2, 4, 6, \ldots, N_2 - 2$ (бунда $N_2 = 2^n$) қийматлари учун қуйидаги учта тенгламани ёзамиз:

$$\begin{aligned}&-\overline{\boldsymbol{Y}}_{j-2} + B\overline{\boldsymbol{Y}}_{j-1} - \overline{\boldsymbol{Y}}_j = \overline{\boldsymbol{F}}_{j-1},\\ &-\overline{\boldsymbol{Y}}_{j-1} + B\overline{\boldsymbol{Y}}_j - \overline{\boldsymbol{Y}}_{j+1} = \overline{\boldsymbol{F}}_j,\\ &-\overline{\boldsymbol{Y}}_j + B\overline{\boldsymbol{Y}}_{j+1} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{j+2} = \overline{\boldsymbol{F}}_{j+1}.\end{aligned}$$

Иккинчи тенгламанинг ҳар иккала томонини B матрицага кўпайтириб, кейин бу учала тенгламани қўшиб чиқамиз:

$$\begin{aligned}&-\overline{\boldsymbol{Y}}_{j-2} + B^{(1)}\overline{\boldsymbol{Y}}_j - \overline{\boldsymbol{Y}}_{j+2} = \overline{\boldsymbol{F}}_j^{(1)},\\ &j = 2,4,6,\ldots,N_2-2,\\ &\overline{\boldsymbol{Y}}_0 = \overline{\boldsymbol{F}}_0, \overline{\boldsymbol{Y}}_{N_2} = \overline{\boldsymbol{F}}_{N_2},\end{aligned} \tag{3.66}$$

бунда

$$B^{(1)} = \left(B^{(0)}\right)^2 - 2E,\ B^{(0)} = B,$$

$$\overline{F}_j^{(1)} = \overline{F}_{j-1}^{(0)} + B^{(0)}\overline{F}_j^{(0)} + \overline{F}_{j+1}^{(0)}, \ \overline{F}_j^{(0)} = \overline{F}_j.$$

Юқоридаги (3.66) система фақат жуфт рақамли $\overline{Y}_j$ номаълумлардан иборат бўлиб, уларнинг сони $\frac{1}{2}N_2 - 1$ га тенг. Агар (3.66) системадан жуфт рақамли $\overline{Y}_j$ лар топилса, у ҳолда тоқ рақамли номаълумлар

$$B^{(0)}\overline{Y}_j = \overline{F}_j^{(0)} + \overline{Y}_{j+1} + \overline{Y}_{j-1}, \ j = 1,3,5,\ldots,N_2 - 1$$

тенгламалардан топилади.

Худди (3.63) системадан тоқ рақамли векторларни йўқотганимиздек, (3.66) системадан j индекслари 2 га каррали бўлиб, 4 га каррали бўлмаган векторларни йўқотамиз ва ҳ. к. Индукцияни қўллаб исбот қилиш мумкинки, йўқотишнинг k қадамида ($k = 1, 2,\ldots, n$) қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} &-\overline{Y}_{j-2,k-1} + B^{(k-1)}\overline{Y}_j - \overline{Y}_{j+2,k-1} = \overline{F}_j^{(k-1)}, \\ &j = 2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1},\ldots,N_2 - 2^{k-1}, \\ &k = n, n-1,\ldots,2,1, \\ &\overline{Y}_0 = \overline{F}_0, \overline{Y}_{N_2} = \overline{F}_{N_2}, \end{aligned} \tag{3.67}$$

бунда $B^{(k-1)}$ матрицалар ва $\overline{F}_j^{(k-1)}$ векторлар қуйидаги рекуррент муносабатлардан топилади:

$$B^{(k)} = (B^{(k-1)})^2 - 2E, \ k = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ n-1, \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned} &\overline{F}_j^{(k)} = \overline{F}_{j-2,k-1} + B^{(k-1)}\overline{F}_j^{(k-1)} + \overline{F}_{j+2,k-1}^{(k-1)}, \\ &k = 1,2,\ldots,n-1, j = 2^k, 2\cdot 2^k, 3\cdot 2^k,\ldots,N_2 - 2^k. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Шундай қилиб, ҳисоблаш жараёни Гаусс методига ўхшаш тўғри ва тескари юришлардан иборат. Тўғри юриш (3.68) ва (3.69) формулалар ёрдамида $B^{(k)}$ матрицалар ва $\overline{F}_j^{(k)}$ векторларни топишдан иборат. Тескари юриш эса $k = n$ дан бошлаб (3.67) тенгламалар системасидан $\overline{Y}_j$ векторларни топишдан иборатдир.

Юқоридаги алгоритмлар шу кўринишда икки сабабга кўра реал ҳисоблашлар учун ярамайди. Биринчидан, ҳисоблашнинг ҳар бир босқичида умумий структурага эга бўлган $B^{(k)}$ матрицанинг тескарисини топиш зарурлиги туфайли бу алгоритм тежамкор эмас. Иккинчидан, (3.69) формуланинг ўнг томони ҳисоблашда нотурғун, чунки $B^{(k-1)}$ матрицанинг нормаси бирдан катта бўлса, ҳисоблаш хатолиги йиғилади.

Энди биз шу нуқсонлардан қутулишга ҳаракат қиламиз.

Аввало, $B^{(k)}$ матрицани 2^k та уч диагоналли матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкинлигини кўрсатамиз.

$$p_1(\alpha)=\alpha,$$
$$p_{2^{k+1}}(\alpha)=\left(p_{2^k}(\alpha)\right)^2-2,\ k=0,1\ldots \tag{3.70}$$

кўпҳадлар кетма-кетлигини қараймиз. Агар $\alpha = 2\cos\varphi$ бўлса, у ҳолда

$$4\cos^2 2^k\varphi-2=2\left(1+\cos 2^{k+1}\varphi\right)-2=2\cos 2^{k+1}\varphi$$

тенгликларга кўра

$$p_{2^k}(\alpha)=2\cos^k\varphi$$

келиб чиқади. Демак,

$$\alpha_l=2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}}$$

сонлар $p_{2^k}(\alpha)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлади. Энди (3.68) билан (3.70) ни солиштирсак, $B^{(k)}$ ни қуйидаги кўпайтувчиларга ажратган (*факторизация* қилган) бўламиз:

$$B^{(k)}=\prod_{l=1}^{2^k}\left(B-2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}}E\right).$$

Агар (3.63) ва (3.65) тенгликларни солиштирсак, у ҳолда B матрица j га боғлиқ бўлмаган уч диагоналли матрица эканлигини кўрамиз. Демак,

$$B_{k,l}=B-2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}}E,\ l=1,2,\ldots,2^k \tag{3.71}$$

матрицалар ҳам уч диагоналли матрицалар ва шунинг учун $B^{(k)}$ матрицанинг тескарисини топиш ўрнига кетма-кет $B_{k,l}$ уч диагоналли матрицаларнинг тескарисини топиш кифоядир. Ҳақиқатан ҳам,

$$B^{(k)}\vec{\vartheta}\equiv\left(\prod_{l=1}^{2^k}B_{k,l}\right)\vec{\vartheta}=\vec{g} \tag{3.72}$$

тенгламанинг ечимини топиш талаб қилинсин.

Агар $\vec{\vartheta}_0=\vec{g}_0, \vec{\vartheta}_{2^k}=\vec{\vartheta}$ деб олсак, у ҳолда (3.72) системани ечиш қуйидаги

$$B_{k,l}\vec{\vartheta}_l=\vec{\vartheta}_{l-1},\ l=1,2,\ldots,2^k \tag{3.73}$$

тенгламалар системасини кетма-кет ечишга келтирилади; $B_{k,l}$ матрицалар уч диагоналли бўлганлиги сабабли (3.73) системанинг ҳар бирини ҳайдаш методи билан ечиш мумкин.

Энди шундай $\vec{p}_j^{(k)}$ ва $\vec{q}_j^{(k)}$ векторларни топамизки,

$$\vec{F}_j^{(k)} = B^{(k)}\vec{p}_j^{(k)} + \vec{q}_j^{(k)} \tag{3.74}$$

тенглик ўринли бўлсин. Бунинг учун (3.74) ни (3.69) га келтириб қўямиз, натижада

$$B^{(k)}\vec{p}_j^{(k)} + \vec{q}_j^{(k)} = B^{(k-1)}\vec{p}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} +$$
$$+B^{(k-1)}\left(B^{(k-1)}\vec{p}^{(k-1)} + \vec{q}^{(k-1)}\right) + B^{(k-1)}\vec{p}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}$$

ҳосил бўлади. Бу ердан $(B^{(k-1)})^2 = B^{(k)} + 2E$ тенгликни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгламага келамиз:

$$\left(B^{(k-1)}\right)^2\left(\vec{p}_j^{(k)} - \vec{q}_j^{(k-1)}\right) + \vec{q}_j^{(k)} = 2\vec{p}_j^{(k)} + \vec{q}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} +$$
$$+\vec{q}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + B^{(k-1)}\left(\vec{p}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{p}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_j^{(k-1)}\right). \tag{3.75}$$

Энди $q_j^{(k)}$ ни шундай танлаб оламизки, қуйидаги тенглик бажарилсин:

$$\vec{q}_j^{(k)} = 2\vec{p}_j^{(k)} + \vec{q}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}.$$

У ҳолда (3.75) тенгламани $(B^{(k-1)})^{-1}$ га кўпайтирамиз, натижада

$$B^{(k-1)}\vec{s}_j^{(k-1)} = \vec{p}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{p}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_j^{(k-1)}$$

ҳосил бўлади, бунда

$$\vec{s}_j^{(k-1)} = \vec{p}_j^{(k)} - \vec{p}_j^{(k-1)}.$$

Бундан

$$\vec{p}_j^{(k)} = \vec{p}_j^{(k-1)} + \vec{s}_j^{(k)}$$

келиб чиқади. Агар (3.67) нинг ўнг томонига (3.74) га кўра

$$\vec{F}_j^{(k-1)} = B^{(k-1)}\vec{p}_j^{(k-1)} + \vec{q}_j^{(k-1)}$$

ни қўйсак,

$$B^{(k-1)}\vec{F}_j^{(k-1)} = \vec{q}_j^{(k-1)} + \vec{Y}_{j-2^{k-1}} + \vec{Y}_{j+2^{k-1}}$$

ҳосил бўлади, бунда

$$\vec{t}_j^{(k-1)} = \vec{Y}_j - \vec{p}_j^{(k-1)}.$$

Бундан эса

$$\vec{Y}_j = \vec{t}_j^{(k-1)} + \vec{p}_j^{(k-1)}$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, декомпозиция методининг алгоритми қуйидагидан иборат:

Ҳисоблашлар циклда k индекс бўйича олиб борилади. Аввал $k = 1, 2, ..., n-1$ учун

$$B^{(k-1)}\vec{s}_j^{(k-1)} = \vec{p}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{p}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_j^{(k-1)} \quad (3.76)$$

тенгламалар ечилади ва

$$\vec{p}_j^{(k)} = \vec{p}_j^{(k-1)} + \vec{s}_j^{(k-1)}$$

$$\vec{q}_j^{(k)} = 2\vec{p}_j^{(k)} + \vec{q}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}$$

векторлар топилади, бу ерда $i = 2^k, 2\cdot 2^k, \ldots , 2^n-2^k$. Ҳисоблашлар $k = 1$ дан бошланади ва бу ҳол учун

$$\vec{p}_j^{(0)} = 0, \vec{q}_j^{(0)} = \vec{F}_j, j = 1,2,...,N_2 - 1$$

дастлабки шартлар берилган бўлади.

Юқорида айтганимиздек, (3.76) система қуйидаги соддароқ системаларни ечишга келтирилади:

$$B_{k-1,l}\vec{\vartheta}_{l,j} = \vec{\vartheta}_{l-1,j}, l = 1,2,...,2^{k-1}, \quad (3.77)$$

$$j = 2^k, 2\cdot 2^k, 3\cdot 2^k, ..., 2^n - 2^k,$$

бунда

$$\vec{\vartheta}_{0,j} = \vec{p}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{p}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + \vec{q}_j^{(k-1)}$$

$$\vec{\vartheta}_{2^{k-1},j} = \vec{s}_j^{(k-1)}.$$

Ҳар бир $j = 2^k, 2\cdot 2^k, \ldots , 2^n-2^k$ учун (3.77) системалар белгиланган l учун ечилади. $B_{k-1,l}$ матрица j га боғлиқ бўлмаганлиги туфайли ҳисоблашни шундай ташкил этиш керакки, $B_{k-1,l}$ матрицанинг тескариси бир мартагина топилсин.

Барча $\vec{p}_j^{(k)}, q_j^k$ векторлар топилгандан кейин декомпозиция методининг тескари юриши бажарилади, яъни $k = n$ дан бошлаб

$$B^{(k-1)}\bar{t}_j^{(k-1)} = \bar{q}_j^{(k-1)} + \bar{Y}_{j-2^{k-1}} + \bar{Y}_{j+2^{k-1}} \qquad (3.78)$$

тенгламалар ечилади ва

$$\bar{Y}_j = \bar{p}_j^{(k-1)} + t_j^{(k-1)}$$

векторлар ҳисобланади, бу ерда

$$k = n, n-1, ..., 2, 1; \; j = 2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1} ..., 2^n - 2^{k-1}.$$

Олдингидек белгиланган j, k лар учун (3.78) система қуйидаги содда системалар кетма-кетлигига

$$B_{k-1,l}\overline{W}_{l,j} = \overline{W}_{l-1,j}, l = 1, 2, ..., 2^{k-1},$$

$$j = 2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1}, \ldots, 2^n - 2^{k-1}$$

келтириб ечилади, бунда

$$\overline{W}_{0,j} = \bar{q}_j^{(k-1)} + \overline{Y}_{j-2^{k-1}} + \overline{Y}_{j+2^{k-1}}, \; \overline{W}_{2^{k-1},j} = \bar{t}_j^{(k-1)}.$$

Шундай қилиб, Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласини декомпозиция методи билан ечишни кўриб чиқдик. Агар тўрда x_1 бўйича нуқталарнинг сони $N_1 = 2^n$ ва x_2 бўйича N_2 бўлса, у ҳолда декомпозиция методида арифметик амалларнинг сони $O(N_1 N_2 \log_2 N_2)$ эканлиги [46]да кўрсатилган. Шу билан бирга [46] да декомпозиция методининг ҳар хил масалалардаги татбиқи келтирилган. Равшанки, агар $N_1 = N_2 = N$ бўлса, у ҳолда Фурьенинг тез алмаштиришидагидек арифметик амалларнинг сони $O(N^2 \log_2 N)$ бўлади. ФТА дан декомпозиция методининг устунлиги шундаки, бу ерда хос функцияларни билиш шарт эмас. Шу туфайли ҳам бу методни учинчи чегаравий масалани ечиш учун ҳам қўллаш мумкин.

10.3.11. Айирмали операторлар учун хос қийматлар масалалари. *Ўзгарувчиларни ажратиш методи* (ёки *Фурье методи*) ўзгармас коэффициентли айирмали тенгламаларнинг ечимини топишда ва яқинлашишни текширишда кенг қўлланилади. Бу метод айирмали масала ечимини операторнинг хос функциялари бўйича ёйишга асосланган.

Маълумки, ҳар бир айирмали чегаравий масалани операторлари бирор чекли ўлчовли $H^{(h)}$ чизиқли фазода аниқланган оператор тенглама сифатида қараш мумкин.

Биз аввал бир ўлчовли, кейин кўп ўлчовли масалаларни қараймиз. Фараз қилайлик, $G_{h_1} = \left\{x_{1i} = ih_1, i = \overline{0, N_1}, h_1 = a / N_1\right\}$ тўрда қуйидаги айирмали чегаравий масала берилган бўлсин:

$$\Lambda_1 y_i \equiv \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h_1^2} = -f_i,\ i=\overline{1,N_1-1},\ y_0=\varphi_1,\ y_{N_1}=\varphi_2. \qquad (3.79)$$

Берилган $y_0=\alpha_1$, $y_{N1}=\varphi_2$ чегаравий шартлардан фойдаланиб, (3.79) системадан y_0 ва y_N номаълумларни йўқотиш мумкин. Натижада (3.79) системага тенг кучли бўлган ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{gathered}
-\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h_1^2} = f_i,\ i=2,3,\dots,N_1-2,\\
\frac{2y_1-y_2}{h_1^2}=\tilde{f}_1,\ -\frac{y_{N_1-2}-2y_{N_1-1}}{h_1^2}=\tilde{f}_{N_1-1},
\end{gathered} \qquad (3.80)$$

бунда

$$\tilde{f}_1 = f_1+\frac{\varphi_1}{h_1^2},\ \tilde{f}_{N_1-1}=f_{N_1-1}+\frac{\varphi_2}{h_1^2}.$$

Энди $\vec{y}=\left(y_1,y_2,\dots,y_{N-1}\right)^T$ векторлар тўпламида A операторни қуйидаги

$$\left(A\vec{\boldsymbol{y}}\right)_i=-\Lambda_1 y_i,\ i=2,3,\dots,N_1-2,$$

$$\left(A\vec{\boldsymbol{y}}\right)_1=\frac{2y_1-y_2}{h_1^2},\ \left(A\vec{\boldsymbol{y}}\right)_{N_1}=\frac{y_{N_1-2}-2y_{N_1-1}}{h_1^2}$$

формулалар ёрдамида аниқлаймиз. Агар $\vec{\boldsymbol{f}}=\left(\tilde{f}_1,f_2,\dots,f_{N_1-2},\tilde{f}_{N_1-1}\right)^T$ деб белгилаб олсак, у ҳолда (3.80) системани ушбу

$$A\vec{\boldsymbol{y}}=\vec{\boldsymbol{f}} \qquad (3.81)$$

оператор тенглама шаклида ёзиш мумкин бўлади. Бу тенглама (3.80) тенгламанинг ўнг томони билан бир вақтда чегаравий шартларни ҳам ҳисобга олади.

Шундай қилиб, айирмали масала (3.81) оператор тенгламани вужудга келтиради. Бу оператор G_{h_1} тўр соҳанинг фақат ички нуқталарида аниқланган. Кўпинча A операторни G_{h_1} соҳанинг барча нуқталарида аниқланган ва четки нуқталарида нолга айланадиган $y_0=y_{N_1}=0$ функцияларнинг $H^{(0)}$ фазосида аниқланган деб қараш мақсадга мувофиқ бўлади. У ҳолда A оператор бутун G_{h_1} да

$$\left(A\vec{\boldsymbol{y}}\right)_i=-\Lambda_1 y_i,\ i=1,2,\dots,N_1-1,\ y_0=y_{N_1}=0 \qquad (3.82)$$

формулалар билан аниқланади. Бу оператор *иккинчи айирмали ҳосиланинг оператори* дейилади.

Биз 6-бобда умумий кўринишдаги матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари (функциялари) ни топишни кўриб чиққан эдик.

Юқоридаги (3.82) тенгликлар билан аниқланган A оператор ушбу махсус кўринишга эга бўлган

$$A = \frac{1}{h_1^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

матрицадан иборат. Маълумки, A оператор (матрица) учун хос сонлар масаласи қуйидагидан иборат: шундай λ сонларни (*хос сонлар* ёки *хос қийматларни*) топиш керакки, ушбу

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y} \tag{3.83}$$

тенглама нотривиал ечимга эга бўлсин. A матрица (N_1-1) тартибли махсусмас симметрик матрица бўлганлиги туфайли (N_1-1) та ҳақиқий мусбат хос қийматларга ва уларга мос келадиган (N_1-1) та чизиқли эркли хос функцияларга эга. Бу хос сонлар ва хос функцияларнинг ошкор кўринишини топамиз. Бунинг учун (3.79) ва (3.82) дан фойдаланиб, (3.83) системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{gathered} \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h_1^2} + \lambda y_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, N_2-1, \\ y_0 = y_{N_1} = 0, h_1 = a/N_1. \end{gathered} \tag{3.84}$$

Энди $\alpha = h_1^2\lambda$ белгилаш киритиб, (3.84) системани

$$y_{i-1} - (2-\alpha)y_i + y_{i+1} = 0,\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1 \tag{3.85}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу иккинчи тартибли айирмали тенглама бўлиб,

$$q^2 - (2-\alpha)q + 1 = 0$$

унинг характеристик тенгламасидир. Бу тенгламанинг илдизларини q_1 ва q_2 орқали белгилаймиз, у ҳолда (3.85) тенгламанинг умумий ечими

$$y_m = c_1q_1^m + c_2q_2^m \tag{3.86}$$

бўлиб, c_1 ва c_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар. Энди $y_0 = y_{N_1} = 0$ чегаравий шартлардан

$$c_1 + c_2 = 0,\ c_1q_1^{N_1} + c_2q_2^{N_1} = 0$$

бир жинсли системага эга бўламиз. Бу система нотривиал ечимга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$q_1^{N_1} = q_2^{N_1}.$$

Аммо $q_1 q_2 = 1$, шунинг учун ҳам $q_1^{2N_1} = 1$, яъни q_1 бирнинг $2N_1$ тартибли илдизи экан. Демак,

$$q_1^{(k)} = e^{i\varphi_k} = e^{\frac{\pi ik}{N_1}} \quad (k = 1, 2, ..., N_1 - 1).$$

Шундай қилиб, бир томондан

$$q_1^{(k)} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

иккинчи томондан (3.86) тенгламадан

$$q_1 = 1 - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}$$

келиб чиқади. Охирги икки тенгликдан

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

ҳосил бўлади, бундан эса

$$\alpha = 2(1 - \cos\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} = 4\sin^2\frac{\pi k}{2N_1}.$$

Шундай қилиб, (3.84) масаланинг хос сонлари қуйидагиларга тенг:

$$\lambda_k = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N_1}, \; k = 1, 2, ..., N_1 - 1, \tag{3.87}$$

бунда $h_1 N_1 = a$. Энди $q_1 q_2 = 1$ ва $c_2 = -c_1$ тенгликларни ҳисобга олиб, хос функцияларни (3.86) формуладан топамиз:

$$y_m^* = c_1\left(q_1^m - q_2^m\right) = c_1\left(q_1^m - q_1^{-m}\right) = c_1\left(e^{im\varphi} - e^{-im\varphi}\right).$$

Бундан $c_1 = \frac{1}{2i}$ деб олиб, хос функция учун қуйидагига эга бўламиз:

$$y_m^{(k)} = \sin\frac{\pi km}{N_1}, \; k, m = 1, 2, ..., N_1 - 1. \tag{3.88}$$

Хос сонлар учун (3.87) формуладан

$$0 < \lambda_1 < ... < \lambda_m < \lambda_{m+1} < ... < \lambda_{N_1 - 1} < \frac{4}{h_1^2}$$

ҳосил бўлади. Охирги тенгсизликни яхшилаб бўлмайди, чунки

$$\lambda_{N_1-1} = \frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2a}$$

бўлиб, $\lim\limits_{h_1\to 0}\cos^2\frac{\pi h_1}{2a} = 1$. Энди қуйида λ_1 нинг баҳосини топамиз. Бунинг учун $\alpha = \pi h_1 / 2a$ деб белгилаб, λ_1 ни қуйидагича ёзамиз:

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2.$$

Доимо $h_1 \le a/3$ деб олишимиз мумкин. У ҳолда $\lambda = \frac{\pi}{6}$ бўлади. $\left[0, \frac{\pi}{a}\right]$ оралиқда $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ монотон камаювчилигини ҳисобга олсак,

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \ge \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2},$$

яъни

$$\lambda_1 \ge \frac{9}{a^2}$$

келиб чиқади.

Юқорида аниқланган $H^{(0)}$ фазода скаляр кўпайтма ва нормани қуйидагича киритамиз:

$$(u,\vartheta) = \sum_{m=1}^{N_1-1} h_1 u_m \vartheta_m, \quad \|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\sum_{m=1}^{N_1-1} h_1 u_m^2\right)^{1/2}$$

Энди (3.88) функцияларнинг $H^{(0)}$ да ортогоналлигини кўрсатиб, нормасини топамиз. Маълумки,

$$\sum_{m=1}^{N_1-1}\sin\frac{\pi k_1 m}{N}\sin\frac{\pi k_2 m}{N} = \begin{cases} 0, \text{ агар } k_2 \ne k_1 \text{ бўлса}, \\ \frac{N}{2}, \text{ агар } k_2 = k_1 \ne 0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } k_2 = k_1 = 0 \text{ бўлса} \end{cases} \qquad (3.89)$$

(6-боб, (7.11) формулага қ.). Бундан эса $y_m^{(k)}$ функцияларнинг ортогоналлиги ва

$$\left\|\bar{y}^{(k)}\right\|^2 = h_1\sum_{m=1}^{N_1-1}\sin^2\frac{\pi k m}{N_1} = h_1\frac{N_1}{2} = \frac{a}{2},$$

яъни

$$\left\|\bar{y}^{(k)}\right\| = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\mu_k(x_{1i}) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi k x_{1i}}{h_1}, \ i,k = \overline{1, N_1 - 1}, \ h_1 N_1 = a \tag{3.90}$$

функциялар системаси $H^{(0)}$ фазода ортонормал базисни ташкил этади. Демак, $H^{(0)}$ да аниқланган ҳар қандай функцияни (3.90) базис бўйича ёйиш мумкин.

Биз

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h_1^2} = -f_i, \ i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1, \ y_0 = y_{N_1} = 0 \tag{3.91}$$

чегаравий масала ечимини

$$y_i = y(x_{1i}) = \sum_{k=1}^{N_1 - 1} c_k \mu_k(x_{1i}), \ i = \overline{1, N_1 - 1} \tag{3.92}$$

кўринишда излаймиз. Буни бажариш учун (3.91) тенгламанинг ўнг томонини Фурьенинг чекли қаторига ёямиз:

$$f_i = \sum_{k=1}^{N_1 - 1} \hat{f}_k \mu_k(x_{1i}), \tag{3.93}$$

бунда

$$\hat{f}_k = (f, \mu_k) = h_1 \sum_{i=1}^{N_1 - 1} f_i \mu_k(x_{1i}), \ k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1. \tag{3.94}$$

Энди (3.92) ва (3.93) ларни (3.91) га қўйиб,

$$\sum_{k=1}^{N_1 - 1} c_k A \mu_k(x_{1i}) = -\sum_{k=1}^{N_1 - 1} \hat{f}_k \mu_k(x_{1i})$$

ни ҳосил қиламиз, (3.83) ва (3.87) лардан кўрамизки, $A\mu(x_{1i}) = -\lambda_k \mu_k(x_{1i})$. Шунинг учун ҳам $\mu_k(x_{1i})$ ларнинг чизиқли эрклилигидан

$$c_k \lambda_k = \hat{f}_k, \ k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$$

келиб чиқади. Бундан эса $y(x_{1i})$ нинг Фурье коэффициентларини ҳосил қиламиз:

$$c_k = \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k}, \ k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1. \tag{3.95}$$

Энди λ_k ва $\mu_k(x_{1i})$ лар ҳисобланиб машина хотирасида сақланган деб фараз қилиб, (3.91) масалани Фурье методи билан ечганда бажарилиши керак бўлган кўпайтириш ва бўлиш амалларининг умумий сонини ҳисоблаймиз. Ҳар бир k учун $\hat{f}_k$ Фурье коэффициентларини топишда N_1-1 та кўпайтириш бажариш керак, барча f_k ($k = 1, 2, ..., N_1-1$) ни топиш эса $(N_1-1)^2$ та кўпайтиришни талаб қилади; (3.95) формула бўйича c_k ларни топиш учун N_1-1 та бўлиш амалини бажариш керак; (3.92) формула бўйича барча y_i ларни топишда $(N_1-1)^2$ та кўпайтириш амали сарфланади. Шундай қилиб, бу алгоритм $2(N_1-1)^2$ та кўпайтириш ва N_1-1 та бўлишни талаб қилади.

Фараз қилайлик, чегараси Γ дан иборат бўлган $G = \{0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ соҳада Пуассон тенгламаси учун ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2),\ u|_\Gamma = 0 \ , \tag{3.96}$$

$$x_{2j} = jh_2$$

Дирихле масаласини ечиш талаб қилинсин.

Биз $h_1 = a/N_1$, $h_2 = b/N_2$ деб олиб, $x_{1i} = ih_1$, $x_{2j} = ih_2$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари ёрдамида G соҳани G_h тўр соҳа ва Γ ни Γ_h тўр чегара билан алмаштирамиз.

Энди (3.96) тенгламадан беш нуқтали андаза ёрдамида Лапласнинг қуйидаги айирмали операторини ҳосил қиламиз:

$$(Ay)_{ij} = -\Lambda_1 y_{ij} - \Lambda_2 y_{ij},\ (x_{1i}, x_{2j}) \in G_h,$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ y|_{\Gamma_h} = 0.$$

Бу ерда одатдагидек,

$$\Lambda_1 y_{ij} = \frac{1}{h_1^2}\left(y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}\right),\ \Lambda_2 y_{ij} = \frac{1}{h_2^2}\left(y_{i,j-1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}\right).$$

Дирихле масаласини ечишда чегаравий шартлар нолдан фарқли бўлса, $Au = f$ оператор тенгламанинг ўнг томонини ўзгартириб, чегаравий шартлар нолга тенг бўлган ҳолга келтириш мумкин. Энди $G_h U \Gamma_h$ тўрда аниқланган ва Γ_h да нолга айланадиган функцияларнинг $H^{(h)}$ чизиқли фазосини киритамиз. Бу фазонинг ўлчами (N_1-1) (N_2-1) га тенг. Бу фазода скаляр кўпайтма ва нормани қуйидагича киритамиз:

$$(u, \vartheta) = \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 u_{ij} \vartheta_{ij},\ \|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Анализдан маълум бўлган қисмий йиғиш формуласини қўллаб, кўрсатиш мумкинки, ихтиёрий $u, \vartheta \in H^{(h)}$ учун $(Au, \vartheta) = (u, A\vartheta)$ тенглик бажарилади. Демак, A — ўз-ўзига қўшма оператор. Энди A оператор учун хос сонлар масаласини қараймиз:

$$Ay = \lambda y$$

ёки

$$\Lambda_1 y_{ij} + \Lambda_2 y_{ij} + \lambda_{ij} = 0, \left(x_{1i}, x_{2j}\right) \in G_h,$$

$$y_{ij}\Big|_{\Gamma_h} = 0.$$

A оператор ўз-ўзига қўшма (ва мусбат) бўлганлиги учун унинг $(N_1-1)(N_2-1)$ та ҳақиқий хос сонлари мавжуд, хос функциялар эса $H^{(h)}$ да ортонормал базисни ташкил этади. Бу хос сонлар ва хос функцияларнинг ошкор кўринишларини топамиз. Осонлик билан кўриш мумкинки, Λ_1 ва Λ_2 операторларнинг хос сонлари мос равишда қуйидагилардан иборат:

$$\lambda_{k_1} = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1 h_1}{2a}, \lambda_{k_2} = \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2 h_2}{2b}, k_1 = \overline{1, N_1 - 1}, k_2 = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Бу сонларнинг мумкин бўлган барча йиғиндиларини оламиз:

$$\begin{gathered}\lambda_{k_1 k_2} = \lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1 h_1}{2a} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2 h_2}{2b}, \\ k_1 = \overline{1, N_1 - 1};\ k_2 = \overline{1, N_2 - 1}.\end{gathered} \tag{3.97}$$

Шунингдек, кўриш мумкинки, Λ_1 ва Λ_2 операторларнинг хос функциялари мос равишда қуйидагилардан иборат:

$$\mu_{k_1}\left(x_{1i}\right) = \sqrt{\frac{2}{h_1}}\sin\frac{\pi k_1 x_{1i}}{h_1}, k_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i = \overline{1, N_1 - 1}, x_{1i} = ih_1,$$

$$\mu_{k_2}\left(x_{2j}\right) = \sqrt{\frac{2}{h_2}}\sin\frac{\pi k_2 x_{2j}}{h_2}, k_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, x_{2j} = jh_2.$$

Бу функцияларнинг мумкин бўлган барча кўпайтмаларини тузамиз:

$$\mu_{k_1 k_2}\left(x_{1i}, x_{2j}\right) = \mu_{k_1}\left(x_{1i}\right)\mu_{k_2}\left(x_{2j}\right) = \sqrt{\frac{2}{h_1 h_2}}\sin\frac{\pi k_1 x_{1i}}{h_1}\sin\frac{\pi k_2 x_{2j}}{h_2}. \tag{3.98}$$

(3.89) тенгликдан фойдаланиб, кўрсатиш мумкинки, $\mu_{k_1 k_2}\left(x_{1i}, x_{2j}\right)$ функциялар $H^{(h)}$ фазода киритилган скаляр кўпайтма ва норма бўйича ўзаро ортогонал бўлиб, нормалари бирга тенг. Шундай қилиб, (3.98) функциялар тўплами $H^{(h)}$ фазода ортонормал базисни ташкил этади ва $H^{(h)}$ да аниқланган ҳар қандай функцияни шу базис бўйича ёйиш мумкин.

Биз ушбу

$$\Lambda_1 y_{ij} + \Lambda_2 y_{ij} = f_{ij},\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},$$
$$y_{ij}\Big|_{\bar{\omega}_h} = 0 \tag{3.99}$$

чегаравий масаланинг ўнг томонини

$$f_{ij} = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \hat{f}_{k_1 k_2} \mu_{k_1 k_2}\left(x_{1i}, x_{2j}\right)$$

Фурье қаторига ёйиб, y_{ij} ечимни қуйидаги

$$y_{ij} = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_1 k_2} \mu_{k_1 k_2}\left(x_{1i}, x_{2j}\right)$$

кўринишда излаймиз. Бир ўлчовли масаладагидек, бу ерда ҳам кўрсатиш мумкинки,

$$c_{k_1 k_2} = \frac{\hat{f}_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1 k_2}}.$$

Юқорида кўрдикки, бир ўлчовли масалани ечиш учун Фурье методи $0\left(N_1^2\right)$ та арифметик амални талаб қилади. Худди шу йўл билан кўрсатиш мумкинки, икки ўлчовли масалани Фурье методи билан ечиш $0\left(N_1^2 N_2^2\right)$ та арифметик амални талаб қилади. Бу метод самарасиз бўлганлиги сабабли амалиётда қўлланилмайди. Аммо икки ўлчовли ўзгармас коэффициентли чегаравий масалани ечишда Фурьенинг тез алмаштириш ва ҳайдаш методини биргаликда қўллаб, яхши натижага эришиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, (3.99) чегаравий масала берилган бўлсин. Биз $j(0 < j < N_2)$ нинг бирор қийматини белгилаб олиб, y_{ij} ва f_{ij} ни фақат $i(i = 1, 2, \dots, N_1 - 1)$ нинг функцияси деб қараймиз, у ҳолда y_{ij} ва f_{ij} ларни (3.92) ва (3.93) лардагидек (3.89) масаланинг хос функциялари бўйича ёямиз:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} C_k\left(x_{2j}\right)\mu_k\left(x_{1i}\right), f_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \hat{f}_k\left(x_{2j}\right)\mu_k\left(x_{1i}\right).$$

Бу ифодаларни (3.99) га қўямиз:

$$\sum_{k=1}^{N_1-1}\left\{c_k\left(x_{2j}\right)\Lambda_1\mu_k\left(x_{1i}\right) + \Lambda_2\left(c_k\left(x_{2j}\right)\right)\mu_k\left(x_{1i}\right)\right\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N_1-1} \hat{f}_k\left(x_{2j}\right)\mu_k\left(x_{1i}\right).$$

Бундан $\Lambda_1\mu_k(x_{1i}) = -\lambda_k\mu(x_{1i})$ ни ҳисобга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\sum_{k=1}^{N_1-1}\left[-\lambda_k c_k(x_{2j}) + \Lambda_2 c_k((x_{2j})) - \hat{f}_k(x_{2j})\right]\mu_k(x_{1i}) = 0.$$

Энди $\mu_k(x_{1i})(k = 1,2\ldots,N_1 - 1)$ функцияларнинг чизиқли эрклилигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\Lambda_2(c_k(x_{2j})) - \lambda_k c_k(x_{2j}) - \hat{f}_k(x_{2j}) = 0$$

ёки

$$c_k(x_{2.j+1}) - 2c_k(x_{2j}) + c_k(x_{2.j-1}) - h_2^2\lambda_k c_k(x_{2j}) - h_2^2\hat{f}_k(x_{2j}) = 0,$$
$$j = 1,2,\ldots,N_1 - 1,\ c_k(x_{20}) = c_k(x_{2N_1}) = 0,$$

ёхуд

$$\left.\begin{aligned}&c_k(x_{2.j+1}) - (2 + h_2^2\lambda_k)c_k(x_{2j}) + c_k(x_{2.j+1}) = -h_2^2\hat{f}_k(x_{2j}),\\ &j = \overline{1,N_1-1},\ k = \overline{1,N_2-1},\ c_k(0) = c_k(a) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (3.100)$$

Бунда λ_k ва $\hat{f}_k(x_{2j})$ лар олдин кўрсатганимиздек,

$$\lambda_k = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k h_1}{2a},\ \hat{f}_k(x_{2j}) = h_1\sum_{i=1}^{N_1-1} f_{ij}\mu_k(x_{2j}),$$
$$j = 1,2,\ldots,N_2 - 1. \qquad (3.101)$$

Энди (3.100) системани ҳар бир k учун ҳайдаш методи билан қуйидаги формулалар ёрдамида ечамиз:

$$\alpha_{j+1}^{(k)} = \frac{1}{2+2h_2^2\lambda_k - \alpha_j^{(k)}},\ \beta_{j+1}^{(k)} = \alpha_{j+1}^{(k)}\left(\beta_j^{(k)} + h_2^2\hat{f}_k(x_{2j})\right),$$
$$j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,\ \alpha_1^{(k)} = \beta_1^{(k)} = 0,$$

$$C_k(x_{2j}) = \alpha_{j+1}^{(k)}C_k(x_{2.j+1}) + \beta_{j+1}^{(k)},\ j = N_2 - 1, N_2 - 2,\ldots,1,\ C_k(x_{2N_2}) = 0.$$

Шундай қилиб, (3.97) айирмали масалани ечиш учун, аввало, (3.101) формулаларга кўра ҳар бир j учун f_{ij} нинг барча $\hat{f}_1(x_{2j})$, $\hat{f}_1(x_{2j})$, $\ldots\hat{f}_{N_1-1}(x_{2j})$ Фурье коэффициентларини Фурьенинг тез алмаштириши ёрдамида ҳисоблаймиз. Биз юқорида кўрганимиздек, $0(N_2\log_2 N_1)$ та арифметик амал бажариш керак. Демак, барча $j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$ учун Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун сарфланган арифметик амалларнинг сони $0(N_1N_2\log_2 N_1)$ та. (3.100) системани барча $k = 1, 2, \dots, N_2-1$ учун ҳайдаш методида сарфланадиган амалларнинг сони $0(N_1N_2)$ та. Ниҳоят, $C_k(x_{2j})$ топилгандан кейин y_{ij} ечимини

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} C_k\left(x_{2j}\right)\mu_k\left(x_{1i}\right), i=1,2,\dots,N_1-1,\ j=1,2,\dots,N_2-1$$

Фурьенинг тез алмаштириши билан ҳисоблашда $0(N_1N_2\log_2 N_1)$ та амал бажариш керак.

Шундай қилиб, мазкур метод билан (3.99) системани ечиш учун $0(N_1N_2\log_2 N_1)$ та, $\left\{\mu_{k_1k_2}\left(x_{1i},x_{2j}\right)\right\}$ хос функциялар ёрдамида ечиш учун $0\left(N_1^2N_2^2\right)$ та ва ниҳоят оддий Гаусс методи билан ечишда $0\left(N_1^3N_2^3\right)$ та амал сарфланади. Шуни ҳам айтиш керакки, мазкур методни қўллаш учун бир ўлчовли масаланинг хос сонлари ва хос функцияларини ошкор кўринишда топиш керак. Агар масаланинг хос сонлари ва хос функцияларининг ошкор кўринишини топиш мумкин бўлмаса, бу методни қўллаб бўлмайди. Бундай ҳоллар учинчи типдаги чегаравий масала ёки коэффициентлари ўзгарувчан ва ажралмайдиган масала бўлган чегаравий масалалардир.

Юқорида айтилган методларнинг ҳаммасини ушбу Гельмгольц тенгламаси

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\mu u=\left(x_1,x_2\right),\left(x_1,x_2\right)\in G,$$

$$u\big|_{\Gamma}=0$$

учун Дирихле масаласини ечишда қўллаш мумкин, бу ерда μ — берилган ўзгармас сон.

Машқ. $G=\{0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$ соҳада ушбу Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи ечилсин:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=2\left(x_1+x_2-x_1^2-x_2^2\right),$$

$$u(0,x_2)=u(1,x_2)=u(x_1,0)=u(x_1,1)=0.$$

10.4-§. ЧЕБИШЕВНИНГ ОПТИМАЛ ОШКОР ИТЕРАЦИОН МЕТОДИ ВА УНИНГ АЙИРМАЛИ ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМАЛАРГА ТАТБИҚИ

Биз бу ерда Чебишев кўпҳади илдизларининг хоссаларидан фойдаланиб, ошкор итерацион методнинг яқинлашишини тезлаштириш масаласини кўрамиз ва уни эллиптик типдаги тенгламаларни аппроксимациялашда ҳосил бўладиган айирмали системани ечишга қўллаймиз.

10.4.1. Чебишев кўпҳадларининг иккита масалага татбиқи. Биз 5- ва 6-бобларда

$$T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n\arccos x) \tag{4.1}$$

Чебишев кўпҳадлари билан танишган эдик. Бу кўпҳаднинг бош коэффициенти 1 га тенг бўлиб, у $[-1, 1]$ кесмада энг кам оғувчи кўпҳаддир. Ихтиёрий $[a, b]$ кесма учун

$$t = \frac{2x-a-b}{b-a},\ -1 \le t \le 1,\ a \le x \le b$$

алмаштириш воситасида (4.1) кўпҳад қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$T_n^{[a,b]}(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}\right). \tag{4.2}$$

Бу кўпҳаднинг максимал оғиши

$$\max_{a\le x\le b}\left|T_n^{[a,b]}(x)\right| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

бўлиб, унинг илдизлари қуйидагилардан иборат:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}, k = 0,1,\dots,n-1. \tag{4.3}$$

Энди қуйидаги масалани ечамиз: $x = 0$ нуқтада 1 қийматни қабул қиладиган кўпҳадлар орасида $[a, b]$ кесмада нолдан энг кам оғадиган n-даражали $P_n(x)$ кўпҳад топилсин. Равшанки, изланаётган кўпҳад (4.2) кўпҳаддан ўзгармас кўпаювчи билан фарқ қилиши керак, яъни

$$P_n(x) = \frac{T_n^{[a,b]}(x)}{T_n^{[a,b]}(0)}. \tag{4.4}$$

Биз кейинчалик $T_n^{[a,b]}(0) \ne 0$ деб қараймиз.

Агар $T_n^{[a,b]}(0) = 0$ бўлса, у ҳолда қаралаётган масала даражаси аниқ n бўлган кўпҳадлар синфида ечимга эга эмас. Масалан, биринчи даражали кўпҳад $P_1(x) = ax + 1$ учун

$$\max_{-1\le x\le 1}|P_1(x)| = |a| + 1$$

ва у $a = 0$ бўлганда минимумга эришади. Аммо бу ҳолда $P_1(x)$ биринчи даражали кўпҳад бўлмай қолади.

Агар $b > a > 0$ бўлса, (4.2) ва (4.4) лардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_n(x) = P_n \cos\left(n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}\right), \tag{4.5}$$

бунда

$$P_n = \left(\cos\left(n \arccos \frac{a+b}{a-b}\right)\right)^{-1}. \tag{4.6}$$

Энди

$$\xi = \frac{a}{b},\ \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi} \tag{4.7}$$

белгилаш киритсак,

$$P_n = \left(\cos\left(n \arccos\left(-\frac{1}{\rho_0}\right)\right)\right)^{-1} \tag{4.8}$$

ҳосил бўлади.

Қуйидаги

$$\cos(n \arccos(-z)) = (-1)^n \cos(n \arccos z) =$$
$$= (-1)^n 0,5\left(\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^n + \left(z - \sqrt{z^2-1}\right)^n\right) \tag{4.9}$$

айниятлар ихтиёрий ҳақиқий ёки комплекс z сонлар учун ўринли эканлиги маълум.

Агар (4.9) да $z = 1/\rho_0$ деб олсак, унда

$$z - \sqrt{z^2-1} = \frac{1}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} = \frac{1-\sqrt{1-\rho_0^2}}{\rho_0}$$

бўлиб, бунда ρ_0 нинг (4.7) даги қийматини қўйсак,

$$z - \sqrt{z^2-1} = \frac{1-\sqrt{1-(1-\xi)^2(1+\xi)^{-2}}}{(1-\xi)/(1+\xi)} = \frac{1+\xi-2\sqrt{\xi}}{1-\xi} = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},$$
$$z + \sqrt{z^2-1} = \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу ифодаларни (4.9) га қўйсак, (4.8) қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$P_n = 2(-1)^n(\rho^n + \rho^{-n})^{-1} = (-1)^n \frac{2\rho S^n}{1+\rho^{2n}},$$

бунда $\rho = (1-\sqrt{\xi})/(1+\sqrt{\xi})$. Шундай қилиб, $x = 0$ нуқтада 1 қийматни қабул қиладиган кўпҳадлар орасида $[a, b]$ кесмада нолдан энг кам оғадиган n-даражали кўпҳад қуйидаги кўринишга эга:

$$P_n(x) = (-1)^n q_n \cos\left(n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}\right), \tag{4.10}$$

бунда

$$q_n = \frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \xi = \frac{a}{b} (b > a > 0). \qquad (4.11)$$

Бу кўпҳаднинг илдизлари (4.3) формула билан топилади.

Энди иккинчи масалага ўтамиз. Ушбу

$$F_n(\lambda) = (1-\tau_1\lambda)(1-\tau_2\lambda)...(1-\tau_n\lambda) \qquad (4.12)$$

кўпҳад учун τ_1, τ_2, ..., τ_n параметрларни шундай танлаш керакки,

$$\max_{0<\gamma_1 \le \lambda \le \gamma_2} |F_n(x)|$$

миқдор ўзининг минимал қийматига эришсин.

Қаралаётган кўпҳад $F_n(0) = 1$ шартни қаноатлантиради. Шунинг учун ҳам бу масала Чебишевнинг (4.10) кўпҳади ёрдамида ечилади. (4.12) нинг илдизлари

$$\lambda_k = \tau_k^{-1}, k = 1, 2, .., n$$

ушбу

$$P_n(\lambda) = (-1)^n q_n \cos\left(n \arccos \frac{2\lambda - \gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \right) \qquad (4.13)$$

кўпҳаднинг

$$\overline{\lambda}_k = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, ..., n \qquad (4.14)$$

илдизлари билан устма-уст тушиши керак, бунда

$$q_n = \frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \qquad (4.15)$$

Демак,

$$\tau_k^{-1} = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, ..., n \qquad (4.16)$$

деб олсак, у ҳолда $F_n(\lambda)$ нинг нолдан оғиши минимал бўлиб,

$$\max_{\gamma_1 \le \lambda \le \gamma_2} |F_n(\lambda)| = q_n$$

бўлади, бунда q_n миқдор (4.15) тенгликлар билан аниқланади.

Параметрларнинг (4.16) тенгликлар билан аниқланадиган $\{\tau_k^{-1}\}_{k=1}^{n}$ тўпламини оптимал дейиш табиийдир.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$ параметрларнинг тўплами оптимал бўлиши учун τ_k ни (4.16) тенгликларда кўрсатилган тартибда олиш шарт эмас. Бунинг учун $\{\tau_k^{-1}\}_{k=1}^{n}$ тўплам Чебишев кўпҳадлари илдизларининг $\left\{\overline{\lambda}_k\right\}_{k=1}^{n}$ тўплами билан устма-уст тушиши етарлидир.

10.4.2. Чебишевнинг оптимал ошкор итерацион методи. Матрицаси мусбат аниқланган ва симметрик бўлган ушбу

$$Ay=f$$

тенгламалар системасини қараймиз. Бу системани ошкор ностационар метод

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f,\ k=0,1,2,... \qquad (4.17)$$

билан ечамиз, бунда y_0 берилган вектор. Бу ерда итерацион параметрларни оптимал равишда топиш масаласи $\tau_1, \tau_2, .., \tau_n$ параметрларни y_n-y хатоликнинг нормаси минимал бўладиган қилиб танлашдан иборат. Бундан кейин норма деганда векторнинг учинчи нормасини тушунамиз, яъни $z=(z_1, z_2, .., z_m)$ нинг нормаси

$$\|z\|=\|z\|_3=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} z_i^2}\,.$$

Қуйидаги теоремада (4.17) итерацион методни оптималлаштириш масаласи келтирилган.

Теорема. *Фараз қилайлик, А мусбат аниқланган симметрик матрица бўлиб, $\lambda_{\min}(A)>0$ ва $\lambda_{\max}(A)$ унинг энг кичик ва энг катта хос сонлари бўлсин. Бундан ташқари, итерациянинг сони n берилган бўлсин. У ҳолда* (4.17) *методлар орасидаги параметрлар қуйидагича*:

$$\tau_k=\frac{\tau_0}{1+\rho_0 t_k},\ k=1,2,...,n, \qquad (4.18)$$

бунда

$$\tau_0=\frac{2}{\lambda_{\min}(A)+\lambda_{\max}(A)},\ \rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \xi=\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)},$$
$$t_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2h},\ k=1,2,...,n \qquad (4.19)$$

танланган метод $\|y_n-y\|$ хатоликнинг энг кичик қийматини таъминлайди ва бу хатолик учун қуйидагича баҳо ўринлидир:

$$\|y_n-y\|\le q_n\|y_0-y\|, \qquad (4.20)$$

бунда

$$q_n=\frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}},\ \rho=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\ \xi=\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}. \qquad (4.21)$$

Исботи. Хатолик $z_k=y_k-y$ учун қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau_{k+1}}+Az_k=0,\ k=0,1,...,n-1,\ z_0=y_0-y. \tag{4.22}$$

Бу тенгламадан z_k ($k = 1, 2, .., n$) учун қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$z_k=(E-t_kA)(E-t_{k-1}A)...(E-t_1A)z_0,$$

бундан $k = n$ бўлганда

$$z_n=T_nz_0$$

ни ҳосил қиламиз, бунда

$$T_n=(E-t_nA)(E-t_{n-1}A)...(E-t_1A). \tag{4.23}$$

Теорема шартига кўра A симметрик матрица. Шунинг учун ҳам T_n матрица симметрикдир ва унинг нормаси спектрал радиусга тенг бўлиб (3-бобга қ.), қуйидаги тенгсизлик ўринлидир:

$$\|z_n\|\le|\vartheta|\|z_0\|, \tag{4.24}$$

бунда ϑ сон T_n матрицанинг модули бўйича энг катта хос сонидир. Маълумки, (4.24) баҳони яхшилаб бўлмайди, яъни шундай z_0 вектор топиладики, унинг учун (4.24) да тенглик белгиси олинади.

Теоремани исботлаш учун $\tau_1, \tau_2, .., \tau_n$ ларни шундай танлаш керакки, $|\vartheta|$ минимумга эришсин.

Фараз қилайлик, λ_k ($k =1, 2, ..., m$) сонлар A матрицанинг хос сонлари бўлсин. Умумийликка зиён етказмасдан

$$0<l_{\min}(A)=\lambda_1\le\lambda_2\le...\le\lambda_m=\lambda_{\max}(A)$$

деб олишимиз мумкин. (4.23) га кўра

$$|\vartheta|=\max_{1\le k\le m}|(1-\tau_1\lambda_k)(1-\tau_2\lambda_k)...(1-\tau_n\lambda_k)|.$$

Равшанки,

$$|\vartheta|\le\max_{\lambda_{\min}(A)\le\lambda\le\lambda_{\max}(A)}|F_n(\lambda)|,$$

бунда

$$F_n(\lambda)=(1-\tau_1\lambda)(1-\tau_2\lambda)...(1-\tau_n\lambda).$$

Шундай қилиб, биз юқорида кўрилган ушбу

$$\min_{\tau_1,\tau_2,...,\tau_n}\ \max_{\lambda_{\min}(A)\le\lambda\le\lambda_{\max}(A)}|F_n(\lambda)|$$

минимакс масалага келдик. Равшанки, τ_k лар учун юқорида ҳосил қилинган (4.16) формула (4.18), (4.19) формулалар билан устма-уст тушади. Параметрларнинг танланган қиймати учун оғишнинг миқдори $|\vartheta| = q_n$, бунда q_n (4.21) формула билан аниқланади. Теорема исботланди.

Параметрлари τ_k(4.18), (4.19) формулалар билан аниқланган (4.17) итерацион метод *Чебишевнинг ошкор итерацион методи* дейилади.

Татбиқларда кўпинча шундай масалалар учрайдики, уларда A матрица ёмон шартланган бўлиб, $\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$ нисбат каттадир. Бу ҳолда ρ бирга яқин бўлиб, итерация секин яқинлашади. Берилган ε аниқликка эришиш учун (4.17) итерациянинг сонини ҳисоблаймиз. (4.20) баҳодан $q_n < \varepsilon$ бўлганда

$$\|y_n - y\| < \varepsilon \|y_0 - y\|$$

ни ҳосил қиламиз, бунда q_n миқдор (4.21) бўйича аниқланади. Шундай қилиб, биз

$$\frac{1+\rho^{2n}}{\rho} > \frac{2}{\varepsilon}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Буни $t = \rho^{-n}$ га нисбатан ечсак,

$$\frac{1}{\rho^n} > \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

келиб чиқади. Охирги тенгсизлик бажарилиши учун $1/\rho^n \geq 2/\varepsilon$, яъни

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)}$$

деб олиш кифоядир.

Энг ёмон ҳолда, яъни $\xi = \lambda_{\min}(A)/\lambda_{\max}(A)$ кичик бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln\frac{1}{\rho} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}\right) \approx 2\sqrt{\varepsilon}$$

ва (4.24) дан итерация сони учун ушбу тақрибий қийматни ҳосил қиламиз:

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}\ .$$

Шундай қилиб, кичик ξ учун Чебишевнинг ошкор итерацион методи ε аниқликка эришиш учун $n_0(\varepsilon) = 0(1/\sqrt{\varepsilon})$ миқдордаги итерацияни талаб қилади. Бу методнинг

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} + Ay_k = f \tag{4.25}$$

оддий итерацион методдан устунлиги ҳам шундадир, чунки (4.25) метод учун $n_0(\varepsilon) = 0(1/\xi)$ (қ.[45], 97-б.).

Назарий жиҳатдан τ_k параметрларни ихтиёрий тартибда ишлатиш мумкин. Масалан, улардан (4.16) да кўрсатилган тартибда ёки тескари тартибда фойдаланиш мумкин, яъни

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0\tau_{n-k+1}}, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Лекин бу методни амалда қўллаганда параметрларни қўллаш тартибининг методнинг сонли турғунлигига муҳим равишда таъсир қилиши аниқланган. Шу маълум бўлганки, параметрлар ихтиёрий тартибда ишлатилса, ҳисоблаш хатолиги йўл қўйиб бўлмайдиган даражада ўсиб боради. Гап шундаки, бу метод, умуман айтганда, итерациядан итерацияга ўтганда хатоликнинг монотон камайишига кафолат бермайди. Хатолик тенгламаси (4.22) ни қуйидагича ёзамиз:

$$z_{k-1}=(E - t_{k+1}A)z_k.$$

Итерациядан итерацияга ўтиш оператори $E-\tau_{k+1}A$ нинг нормаси бир неча қўшни итерацияларда бирдан катта бўлиши мумкин, бу эса хатоликнинг ўсишига олиб келади. Баъзан ҳисоблаш хатолиги шунчалик ўсиб борадики, натижада ЭҲМ нинг арифметик қурилмасида тўлиб-тошиш пайдо бўлади.

Ҳозирги вақтда алгоритм асосида τ_k итерацион параметрларни шундай тартиблаш мумкинки, натижада (4.17) итерацион метод турғун бўлади. Бу алгоритмнинг муфассал баёни [43] да келтирилган.

Эслатма. Кўпинча A матрицанинг минимал ва максимал хос сонлари $\lambda_{\min}(A)$ ҳамда $\lambda_{\max}(A)$ маълум бўлмай, балки уларнинг чегаралари маълум бўлади:

$$0 < \gamma_1 \le \lambda_{\min}(A) < \lambda_{\max}(A) \le \gamma_2.$$

Бундай ҳолда, агар

$$\begin{aligned} &\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \\ &\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0 t_k}, t_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{4.26}$$

деб олсак, у ҳолда теореманинг хулосаси ўринлилигича қолади, яъни хатолик учун ушбу баҳо ўринли бўлади:

$$\|y_n - y\| \le q_n \|y_0 - y\|, \tag{4.27}$$

бунда

$$q_n = \frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \xi = \frac{\gamma_1}{\lambda_2}. \tag{4.28}$$

Шундай қилиб, Чебишевнинг итерацион методини муайян тенгламалар системасига қўллаш учун қуйидагиларни бажариш керак:

1) A матрицанинг симметриклигига ишонч ҳосил қилиш (ёки берилган матрица ўз-ўзига қўшма операторнинг матрицаси эканлигини исботлаш);

2) A матрица спектрининг γ_1 ва γ_2 чегараларини аниқлаш;

3) (4.26) формула билан топилган τ_k итерацион параметрларни шундай тартиблаш керакки, натижада метод турғун бўлсин.

10.4.3. Чебишев итерацион методининг модел масалага татбиқи. Пуассон тенгламаси учун чегараси Γ бўлган бирлик $G=\{0<x_1, x_2<1\}$ квадратда ушбу Дирихле масаласини қараймиз:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -f(x),\ x \in (x_1, x_2) \in G,$$

$$u(x) = 0, x = (x_1, x_2) \in \tilde{A}.$$

G соҳада h қадамли квадрат тўр киритамиз, яъни

$$G_h = \{x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)})\}$$

тўпламни оламиз, бунда $x_1^{(i)} = ih, x_2^{(j)} = jh, i, j = 0,1,.., N, hN = 1.$ Одатдагидек, $\overset{o}{G}_h$ орқали ички нуқталар тўпламини ва Γ_h орқали чегаравий нуқталар тўпламини белгилаймиз.

Дифференциал масалани айирмали масала билан алмаштириш натижасида ушбу системага келамиз:

$$\frac{y_{i-1,j}-2y_{ij}+y_{i+1,j}}{h^2} + \frac{y_{i,j+1}-2y_{ij}+y_{i,j-1}}{h^2} = -f_{ij}, \tag{4.29}$$
$$y_{i0} = y_{iN} = 0, y_{0j} = y_{Nj} = 0, i, j = 1,2,.., N-1.$$

Бу мисолда математик физиканинг кўп ўлчовли масалаларини аппроксимациялашда ҳосил бўладиган тенгламалар системасининг характерли хусусиятлари яққол кўринади. Бундай системаларнинг матрицаси юқори тартиблилиги, нол элементларининг жуда кўплиги ва хос сонларининг катта сочилиши билан характерланади.

Ҳақиқатан ҳам, (4.29) системанинг тартиби $\overset{o}{G}_h$ тўр нуқталарининг сони билан устма-уст тушади ва $(N-1)^2$ га тенг. Одатда, $h = 0{,}01$ деб олинади. Бу ҳолда системанинг тартиби $9801 \approx 10^4$ га тенг бўлади.

Системанинг ҳар бир тенгламасида бештадан ортиқ бўлмаган нолдан фарқли коэффициентлар бор. Демак, нолдан фарқли элементлар сонининг барча элементлар сонига нисбати $5/(N-1)^2=0(h^2)$ дан ортмайди.

Агар (4.29) системани $Ay = f$ матрицали кўринишда ёзсак, у ҳолда A матрица ўз-ўзига қўшма операторнинг матрицаси эканлигини ва унинг энг кичик ҳамда энг катта хос сонлари

$$\gamma_1 = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}, \gamma_2 = \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}$$

формулалар билан аниқланишини 10.3.2 да кўрган эдик.

Бундан

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = tg^2\frac{\pi h}{2} = \frac{\pi^2 h^2}{4} + 0(h^4)\ (h \to 0)$$

келиб чиқади. Демак, ξ жуда кичик ва (4.28) системанинг матрицаси ёмон шартланган.

Биз (4.28) системани (4.17), (4.28) Чебишев итерацион методи билан ечамиз. Навбатдаги итерация $y^{(k+1)} = \{y_{ij}^{(k+1)}\}_{i,j=1}^{N-1}$ ни ҳисоблашни қуйидагича ташкил этамиз:

Аввал маълум $y_{ij}^{(k)}$ яқинлашишлар бўйича

$$r_{ij}^{(k)} = Ay_{ij}^{(k)} - f_{ij} = -\left(\frac{y_{i-1,j}^{(k)} - 2y_{ij}^{(k)} + y_{i+1,j}^{(k)}}{h^2} + \frac{y_{i,j-1}^{(k)} - 2y_{ij}^{(k)} + y_{i,j+1}^{(k)}}{h^2} + f_{ij}\right)$$

боғланишсизликни ҳисоблаймиз, кейин $y_{ij}^{(k+1)}$ ларни

$$y_{ij}^{(k+1)} = y_{ij}^{(k)} + \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)},\ i, j = 1, 2, ..., N-1$$

формулалар билан ҳисоблаймиз. Шу билан бирга

$$y_{i0}^{(k+1)} = y_{iN}^{(k+1)} = 0, y_{0j}^{(k+1)} = y_{iN}^{(k+1)} = 0,\ i, j = 1, 2, ..., N-1.$$

Итерацион метод яқинлашишининг тезлиги

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = \text{tg}\frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi h}{2}\ (h \to 0)$$

параметр билан аниқланади.

Дастлабки хатолик $1/\varepsilon$ марта камайиши учун керак бўлган итерациянинг сони n ни баҳолаймиз. Биз (4.27) тенгсизлик ва (4.28) ифодадан q_n учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\|y_n - y\| \le 2\rho^n \|y_0 - y\|.$$

Шунинг $2\rho^n \le \varepsilon$, яъни

$$n \ge n_0(\varepsilon) = \ln\frac{2}{\varepsilon} / \ln\frac{1}{\rho}$$

бўлишини талаб қилиш керак. Кичик h лар учун

$$\ln\frac{1}{\rho} \approx 2\sqrt{\varepsilon} \approx \pi h$$

тақрибий тенгликлар бажарилади. Демак,

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\pi h}.$$

Бундан шундай хулосага келамиз: эллиптик типдаги дифференциал тенгламани аппроксимацияловчи айирмали масалани Чебишев итерацион методи билан ечишда ε аниқликка эришиш учун лозим бўлган итерациянинг сони $n_0(\varepsilon)$ нинг миқдори $0(h^{-1})$ бўлади.

Агар бу системани оддий итерация ёки Зейдел методи билан ечсак, $n_0(\varepsilon) = 0(h^{-2})$ бўлар эди.

10.4.4. Чебишев итерацион методининг эллиптик тип тенгламани аппроксимацияловчи айирмали тенгламага татбиқи. Чебишев итерацион методини умумий эллиптик типдаги дифференциал тенгламага қўллаш схемаси юқорида модел масалада кўрганимиздек бўлади, аммо бу ерда, одатда, спектрнинг чегаралари олдингидек аналитик формада топилмайди. Шунинг учун ҳам спектр учун у ёки бу баҳолардан фойдаланилади.

Энди биз $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$ тўғри тўртбурчакда ушбу эллиптик типдаги

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - q(x_1,x_2)u = f(x_1,x_2) \qquad (4.30)$$

тенгламани аппроксимация қилиш масаласини қараймиз. Тўғри тўртбурчак G нинг Γ чегарасида

$$u(x_1,x_2) = m(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Gamma \qquad (4.31)$$

шарт берилган бўлсин.

Фараз қилайлик, барча $(x_1,x_2)\in G$ учун ушбу тенгсизликлар бажарилсин:

$$0 < C_{11} \le k_1(x_1,x_2) \le C_{21},$$
$$0 < C_{12} \le k_2(x_1,x_2) \le C_{22}, \qquad (4.32)$$
$$0 \le d_1 \le q(x_1,x_2) \le d_2.$$

G соҳада x_1 ва x_2 йўналишлар бўйича қадамлари h_1 ва h_2 бўлган G_h тўрни қараймиз:

$$x_1^{(i)} = ih_1,\ x_1^{(j)} = jh_2,\ x_{ij} = (x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}),$$
$$h_1N_1 = l_1,\ h_2N_2 = l_2,\ y_{ij} = y(x_{ij}),$$
$$i = 0,1,\dots,N_1,\ j = 0,1,\dots,N_2.$$

Энди ушбу белгилашларни киритамиз:

$$(\overline{\Delta}_{x_1}(a_1\Delta_{x_1}y))_{ij} = \frac{1}{h_1}\left(a_{1,i+1,j}\frac{y_{i+1,j}-y_{ij}}{h_1} - a_{1.ij}\frac{y_{ij}-y_{i-1,j}}{h_1}\right),$$

$$(\overline{\Delta}_{x_2}(a_2\Delta_{x_2}y))_{ij} = \frac{1}{h_2}\left(a_{2.i,j+1}\frac{y_{i,j+1}-y_{ij}}{h_2} - a_{1.ij}\frac{y_{ij}-y_{i,j-1}}{h_2}\right).$$

Ниҳоят, Γ_h орқали $\overset{\circ}{G}_h$ соҳанинг чегарасини белгилаймиз.

Юқоридаги (4.30), (4.31) дифференциал масалани иккинчи тартибли аппроксимацияга эга бўлган ушбу айирмали схема билан алмаштирамиз:

$$(\overline{\Delta}_{x_1}(a_1\Delta_{x_1}y))_{ij} + (\overline{\Delta}_{x_2}(a_2\Delta_{x_2}y))_{ij} - d_{ij}y_{ij} = -f_{ij},$$
$$i = 1,2,\dots,N_1-1,\ j = 1,2,\dots,N_2-1, \tag{4.33}$$

$$y_{ij} = \mu_{ij},\ \text{агар}\ x_{ij}\in \Gamma_h\ \text{бўлса.} \tag{4.34}$$

Бу ерда

$$d_{ij} = q_{ij},$$
$$a_{1,ij} = 0,5(k_1(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) + k_2(x_1^{(i-1)}, x_2^{(j)})),$$
$$a_{2.ij} = 0,5(k_1(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) + k_2(x_1^{(i)}, x_2^{(j-1)})).$$

Энди (4.33), (4.34) айирмали масалани

$$Ay = f \tag{4.35}$$

оператор тенглама кўринишида ёзиб оламиз, бунда A — ўз-ўзига қўшма оператор. Бу оператор хос сонларининг γ_1 ва γ_2 чегараларини аниқлаймиз.

Аввало, шуни таъкидлаш лозимки, (4.33) тенгламани мос равишда ўзгартириб, $x_{ij}\in\Gamma_h$ учун $y_{ij}=0$ деб олишимиз мумкин. Шундай қилиб, (4.33) ва (4.34) ларга тенг кучли бўлган ушбу

$$(\overline{\Delta}_{x_1}(a_1\Delta_{x_2}y))_{ij} + (\overline{\Delta}_{x_2}(a_2\Delta_{x_2}y))_{ij} - d_{ij}y_{ij} = -\tilde{f}_{ij},$$
$$i = 1,2,\dots,N_1-1,\ j = 1,2,\dots,N_2-1, \tag{4.36}$$

$$y_{ij} = 0,\ \text{агар}\ x_{ij}\in\Gamma_h\ \text{бўлса,} \tag{4.37}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз, бунда $\tilde{f}_{ij}$ миқдорлар f_{ij} дан фақат чегара атрофида фарқ қилиши мумкин. Энди G_h тўрда аниқланган ва Γ_h да нолга айланадиган функциялар фазоси $H^{(h)}$ ни қараймиз. Бу фазода скаляр кўпайтма ва норма қуйидагича аниқланади:

$$(y, z) = \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{i=1}^{N_2-1} h_2 y_{ij} z_{ij},\ \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Кейин $H^{(h)}$ фазода A операторни

$$
\begin{aligned}
(Ay)_{ij} &= -(\bar{\Delta}_{x_1}(a_1\Delta_{x_1}y))_{ij} - (\bar{\Delta}_{x_2}(a_2\Delta_{x_2}y))_{ij} + d_{ij}y_{ij}, \\
& i=1,2,\dots,N_1-1,\ j=1,2,\dots,N_2-1
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

формулалар билан аниқлаймиз. У ҳолда (4.36), (4.37) айирмали схемани $H^{(h)}$ фазосида (4.35) оператор тенглама кўринишида ёзишимиз мумкин.

Фараз қилайлик, y, $\vartheta \in H$ бўлсин. Демак, бу функциялар (4.34) чегаравий шартларни, яъни

$$
y_{oj} = y_{N_1 j} = y_{io} = y_{iN_2} = \vartheta_{oj} = \vartheta_{N_1 j} = \vartheta_{io} = \vartheta_{iN_2} = 0
$$

шартларни қаноатлантиради. Бундай функциялар учун қуйидаги

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}\left[a_{1,i+1,j}(y_{i+1,j}-y_{ij}) - a_{1,ij}(y_{ij}-y_{i-1,j})\right]\vartheta_{ij} = \\
&= -\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} a_{1,ij}(y_{ij}-y_{i-1,j})\vartheta_{i-1,j} + \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} a_{1,ij}(y_{ij}-y_{i-1,j})\vartheta_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} a_{1,ij}(y_{ij}-y_{i-1,j})(\vartheta_{ij}-\vartheta_{i-1,j})
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

айниятларнинг бажарилишини осонлик билан кўриш мумкин. Шунга ўхшаш

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}\left[a_{2,i,j+1}(y_{i,j+1}-y_{ij}) - a_{2,ij}(y_{ij}-y_{i,j-1})\right]\vartheta_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} a_{2,ij}(y_{ij}-y_{i,j-1})(\vartheta_{ij}-\vartheta_{i,j-1}).
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

Энди (4.39), (4.40) лардан фойдаланиб, (Ay, ϑ) скаляр кўпайтма учун ушбу айниятни ҳосил қиламиз:

$$
\begin{aligned}
(Ay,\vartheta) &= \sum_{i=i}^{N_1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 a_{1,ij}\left(\frac{y_{ij}-y_{i-1,j}}{h_1}\right)\left(\frac{\vartheta_{ij}-\vartheta_{i-1,j}}{h_1}\right) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2} h_2 a_{2,ij}\left(\frac{y_{ij}-y_{i-1,j}}{h_2}\right)\left(\frac{\vartheta_{ij}-\vartheta_{i,j-1}}{h_2}\right) + \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 d_{ij} y_{ij}\vartheta_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

Бу ерда y ва ϑ ларнинг ўринларини алмаштириб, барча y, $\vartheta \in H$ учун $(Ay, \vartheta) = (y, A)\vartheta$ лигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, (4.33) ва (4.34) айирмали схемага ўз-ўзига қўшма A оператор мос келади. Энди (4.41) айниятда $\vartheta = y$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(Ay,y)=\sum_{i=1}^{N_1}h_1\sum_{j=1}^{N_2-1}h_2a_{1,ij}\left(\frac{y_{ij}-y_{i-1,j}}{h_1}\right)^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_1-1}h_1\sum_{j=1}^{N_2}h_2a_{2,ij}\left(\frac{y_{ij}-y_{i-1,j}}{h_2}\right)^2+\sum_{i=1}^{N_1-1}h_1\sum_{j=1}^{N_2-1}h_2d_{ij}(y_{ij})^2. \quad (4.42)$$

Энди ушбу

$$(\overset{\circ}{A}y)_{ij}=-(\overline{\Delta}_{x_1}\Delta_{x_2}y)_{ij}-(\overline{\Delta}_{x_2}\Delta_{x_2}y)_{ij}$$

вектор учун (4.42) дан кўрамизки, $(\overset{\circ}{A}y,y)$ скаляр кўпайтма қуйидагига тенг:

$$(\overset{\circ}{A}y,y)=\sum_{i=1}^{N_1}h_1\sum_{i=1}^{N_2-1}h_2\left(\frac{y_{ij}-y_{i-1,j}}{h_1}\right)^2+\sum_{i=1}^{N_1-1}h_1\sum_{j=1}^{N_2}h_2\left(\frac{y_{ij}-y_{i,j-1}}{h_2}\right)^2.$$

Биз 10.3.2 да $\overset{\circ}{A}$ операторнинг спектри учун қуйидаги формулани ҳосил қилган эдик:

$$\lambda_{k_1k_2}=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2h_2}{2l_2},$$
$$k_1=\overline{1,N_1-1},k_2=\overline{1,N_2-1}.$$

Бундан эса қуйидагилар келиб чиқади:

$$\delta=\lambda_{\min}(\overset{\circ}{A})=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2},$$
$$\Delta=\lambda_{\max}(\overset{\circ}{A})=\frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2l_2}.$$

Демак, $(\overset{\circ}{A}y,y)$ учун қуйидаги тенгсизликлар ўринлидир:

$$\delta\|y\|^2\le(\overset{\circ}{A}y,y)\le\Delta\|y\|^2. \quad (4.43)$$

Энди (4.32) шартлардан фойдаланиб, (4.42) дан қуйидаги баҳоларга эга бўламиз:

$$\beta_1(\overset{\circ}{A}y,y)+d_1\|y\|^2\le(Ay,y)\le\beta_2(\overset{\circ}{A}y,y)+d_2\|y\|^2,$$
$$\beta_1=C_{11}+C_{12},\ \beta_2=C_1+C_2. \quad (4.44)$$

Охирги (4.43) ва (4.44) тенгсизликлардан

$$\gamma_1\|y\|^2\le(Ay,y)\le\gamma_2\|y\|^2,$$
$$\gamma_1=\beta_1\delta+d_1,\ \gamma_2=\beta_1\Delta+d_2$$

ларни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз γ_1 ва γ_2 ларни топдик. Буларга кўра (4.26) дан τ_k итерацион параметрларни аниқлаймиз ва (4.27), (4.28) формулалар бўйича хатоликни баҳолашимиз мумкин.

Шуни таъкидлашимиз керакки, (4.33), (4.34) айирмали масалани (4.36), (4.37) айирмали масалага келтиришимизнинг сабаби A операторни аниқлаш ва спектрини баҳолаш эди. Итерация параметрлари τ_k лар аниқлангандан кейин итерацияни бевосита (4.33), (4.34) схема учун олиб бориш мумкин. Аввало,

$$r_{ij}^{(k)} = -(\overline{\Delta}_{x_1}(a_1\Delta_{x_2} y))_{ij} + (\overline{\Delta}_{x_2}(a_2\Delta_{x_2} y))_{ij} + d_{ij} y_{ij}^{(k)} - f_{ij},$$
$$i = 1, 2, ..., N_1 - 1, \; j = 1, 2, ..., N_2 - 1$$

боғланишсизлик ҳисобланади, кейин навбатдаги яқинлашиш

$$y_{ij}^{(k+1)} = y_{ij}^{(k)} - r_{ij}^{(k+1)} \tau_{ij}^{(k)}, \; i = 1, 2, ..., N_1 - 1, \; j = 1, 2, ..., N_2 - 1$$

топилади. Чегаравий шартлар (4.34) бўйича аниқланади:

$$y_{ij}^{(k+1)} = \mu_{ij}, \; x_{ij} \in \Gamma_h.$$

10.5-§. ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР

Бу бандда параболик тенгламаларни тўр усули билан ечишда келиб чиқадиган айирмали схемаларни қуриш ва уни текшириш билан шуғулланамиз.

10.5.1. Икки қатламли айирмали схема. Фараз қилайлик, $G = \{0 < x < l, \; 0 < t < T\}$ соҳада ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (5.1)$$

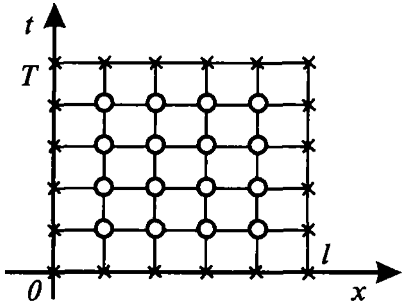
параболик тенгламанинг (иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг)

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (5.2)$$

дастлабки шарт ва

$$u(0,t) = \mu_1(t), \; u(l) = \mu_2(t) \qquad (5.3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $u(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинсин. Бу ерда $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — берилган функциялар. Маълумки, (5.1)−(5.3) масаланинг ечими мавжуд ва ягона [53]. Кейинги мулоҳазаларда $u(x,t)$ барча керакли ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.



10-чизма.

Айирмали схема қуриш учун G соҳани x ва t координаталар бўйича мос равишда $h = l/M$ ва $\tau = T/N$ бўлган тўғри бурчакли тўртбурчак тўр билан қоплаймиз (10-чизма). Кейин $\overline{G}_{h,\tau} = \{(ih, \tau k),\ i = \overline{0, M},\ k = \overline{0, N}\}$ тўр соҳанинг $(i,k) = (ih, \tau k)$ тугунларида аниқланган $U^{(h)}$ функцияни қидирамиз, $U^{(h)}$ функция u функциянинг $\overline{G}_{h,\tau}$ тўрдаги қиймати бўлади. Олдингилардек $\overline{G}_{h,\tau}$ тўрда аниқланган $y(x,t)$ функция учун $y_i^k = y(x_i, t_k)$ белгилаш киритамиз.

Энди (5.1) тенгламани аппроксимация қилиш учун $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ва $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ҳосилаларни $(ih,\ k\tau)$ нуқтада

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(ih,k\tau)} \approx \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau}, \tag{5.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(ih,k\tau)} \approx \frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\tau}, \tag{5.5}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(ih,k\tau)} \approx \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{h^2} \tag{5.6}$$

тақрибий формулалар билан алмаштирамиз. Айирмали масалани ҳосил қилиш учун (5.4) билан (5.6) ни (5.1) тенгламадаги ҳосилаларнинг ўрнига қўямиз ҳамда (5.2) ва (5.3) дастлабки ва чегаравий шартларни аппроксимация қиламиз. Натижада қуйидаги айирмали масала ҳосил бўлади:

$$\begin{gathered} \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{h^2} + \varphi_i^k \\ i = \overline{1, M-1},\ k = \overline{0, N-1}; \end{gathered} \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered} y_0^k = \mu_1(t_k),\ y_M^k = \mu_2(t_k),\ k = \overline{0, N}; \\ y_i^o = u_0(x_i),\ i = \overline{0, M}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Агар (5.6) да k ни $(k+1)$ га алмаштириб, натижасини ҳамда (5.4) ни (5.1) тенгламага қўйсак, қуйидаги айирмали масалага эга бўламиз:

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\frac{y_{i-1}^{k+1}-2y_i^{k+1}+y_{i+1}^{k+1}}{h^2}+\varphi_i^{k+1},$$
$$i=\overline{1,M-1},\ k=\overline{0,N-1}; \tag{5.9}$$

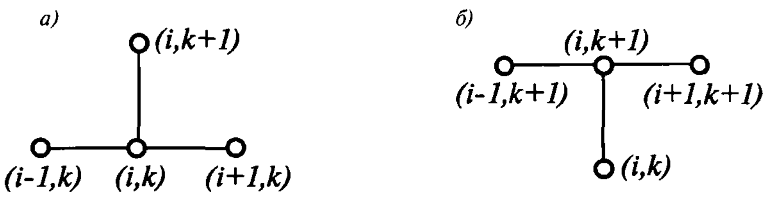
$$y_0^{k+1}=\mu_1(t_{k+1}),\ y_M^{k+1}=\mu_2(t_{k+1}),\ k=\overline{0,N-1},$$
$$y_i^0=u_0(x_i),\ i=\overline{0,M}. \tag{5.10}$$

Бу ерда φ_i^k сифатида қуйидаги ифодаларнинг бирортасини олиш мумкин:

$$f(x_i,t_k),\frac{1}{h}\int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}}f(x,t_k)dx,\frac{1}{h\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}dt\int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}}f(x,t)dx.$$

Шундай қилиб, (5.1)–(5.3) параболик тенгламанинг аппроксимацияси сифатида биз (5.7), (5.8) ва (5.9), (5.10) айирмали тенгламаларга эга бўлдик.

Бирор $Lu=f$ дифференциал масаланинг (x_i,t_k) тугунда $L_h\left(u^{(h)}\right)=f^h$ айирмали масала билан алмаштиришда иштирок этадиган тўплами *андаза* дейилади. Юқоридаги (5.8) ва (5.9) айирмали схемалар 11-чизмада кўрсатилган андазаларга мос келади.



11-чизма. а — икки қатламли ошкор схема,
б — икки қатламли соф ошкормас схема.

Энди (5.7), (5.8) айирмали схеманинг аппроксимацияси тартибини аниқлаймиз. Бунинг учун (5.7) га дифференциал масаланинг аниқ ечимини қўямиз. Равшанки,

$$\frac{u(x,k\tau+\tau)-u(x,k\tau)}{\tau}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,k\tau)}+\frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{(x,k\tau+\xi)},0\le\xi\le\tau,$$

$$\frac{u((i-1)h,t)-2u(ih,t)+u\left((i+1)h,\tau\right)}{h^2}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(ih,t)}+\frac{h^2}{12}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{(ih+\eta,t)},0\le\eta\le h.$$

Шунинг учун ҳам

$$\frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau}-\frac{u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)}{h^2}-\varphi(x,t)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{(x,t+\xi)}-\frac{h^2}{1^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{(x+\eta,t)}-\varphi(x,t)=$$

$$=f(x,t)-\varphi(x,t)+0(\tau+h^2).$$

Агар $\varphi_i^k = f(ih,k\tau)$ деб олсак, у ҳолда (5.7), (5.8) айирмали масала аппроксимация хатолигининг тартиби $0(\tau + h^2)$ бўлади, чунки дастлабки ва чегаравий шартлар аниқ бажарилади. Шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки, (5.1)–(5.3) масаланинг (5.9), (5.10) айирмали схема билан аппроксимациясининг тартиби $0(\tau + h^2)$.

Шуни айтиш керакки, (5.7), (5.8) ва (5.9), (5.10) схемалар (5.1)–(5.3) тенгламани бир хил хатолик билан аппроксимация қилишса ҳам, улар ўртасида катта фарқ бор. Ҳақиқатан ҳам, (5.7) дан қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$y_i^{k+1}=y_i^k+\frac{\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^k-2y_i^k+y_{i+1}^k\right). \tag{5.11}$$

$y_i^0(i=\overline{0,M})$ маълум бўлганидан бирин-кетин барча $y_i^1(i=\overline{1,M-1})$ ва ҳ.к. ни топиш мумкин. Шундай қилиб, $u^{(h)}$ функцияларни (5.11) формула бўйича ошкор равишда топиш мумкин. Шунинг учун ҳам (5.7), (5.9) схема *ошкор* дейилади.

Энди (5.8) тенгламани ўзгартириб, қуйидагича ёзамиз:

$$-\frac{\tau}{h^2}y_{i-1}^{k+1}+\left(1+\frac{2\tau}{h^2}\right)y_i^{k+1}-\frac{\tau}{h^2}y_{i+1}^{k+1}=y_i^k+\tau\varphi_i^{k+1},$$

$$i=1,2,\dots,M-1, \tag{5.12}$$

$$y_0^{k+1}=\mu_1^{k+1}\equiv\mu_1((k+1)\tau),\ y_M^{k+1}=\mu_2^{k+1}\equiv\mu_2((k+1)\tau).$$

Барча $y_i^k(i=\overline{1,M-1})$ маълум бўлганида бу муносабатлар $y_i^{k+1}, i=\overline{1,M-1}$ номаълумларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Шунинг учун ҳам (5.9), (5.10) схема *ошкормас* дейилади. (5.12) системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A\vec{y}=\vec{b}, \tag{5.13}$$

бунда $\vec{y}=\{y_1^{k+1},\dots,y_{M-1}^{k+1}\}$ — номаълум вектор,

$$A=\begin{bmatrix} 1+\frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & 0\ \ldots & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{h^2} & 1+\frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2}\ \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1+\frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} \\ 0 & 0 & 0\ \ldots & -\frac{\tau}{h^2} & 1+\frac{2\tau}{h^2} \end{bmatrix},$$

$\vec{b}$ векторнинг координаталари эса

$$b_j=\begin{cases} y_1^k+\tau\varphi_1^{k+1}+\frac{\tau}{h^2}\mu_1^{k-1},\ j=1, \\ y_i^k+\tau\varphi_j^{k+1},\ 2\le j\le M-2, \\ y_{M-1}^k+\tau\varphi_{M-1}^{k+1}+\frac{\tau}{h^2}\mu_2^{k+1},\ j=M-1. \end{cases}$$

A матрица уч диагоналли бўлганлиги учун (5.13) системани ҳайдаш методи билан ечиш мумкин.

Энди (5.7), (5.8) ва (5.9), (5.10) схемаларни ўз ичига олган умумий схемани кўриб чиқамиз.

Ушбу

$$\Delta\vartheta_1=\frac{1}{h^2}(\vartheta_{i+1}-2\vartheta_i+\vartheta_{i-1}),$$

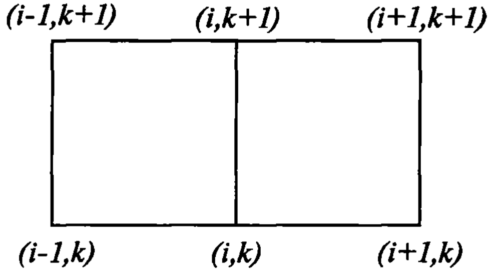
$$\Delta u\big|_{(x,t)}=\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\right]$$

белгилашни киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\sigma\Delta y_i^{k+1}+(1-\sigma)\Delta y_i^k+\varphi_i^k,\ k=\overline{1,M-1}. \tag{5.14}$$

Бу схемада $\sigma\in[0,1]$ ўзгармас сон *вазн* дейилади. Хусусий ҳолда (5.14) дан $\sigma=0$ да (5.7) ва $\sigma=1$ да (5.9) келиб чиқади. (5.14), (5.8) схема *вазний схема* дейилади. Бу схема фақат $\sigma=0$ бўлгандагина ошкор бўлади; $0<\sigma<1$ бўлганда эса ошкормас бўлади. (5.9), (5.10) схема бошқа ошкормас схемалардан фарқ қилиш учун *соф ошкормас схема* дейилади. Агар $\sigma=\frac{1}{2}$ бўлса, биз қуйидаги *олти нуқтали симметрик схема* деб аталувчи схемани ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\frac{1}{2}(\Delta y_i^{k+1}+\Delta y_i^k)+\varphi_i^k. \tag{5.15}$$



12-чизма.

Бу схема 12-чизмадаги олти нуқтали андаза бўйича тузилади.

Энди (5.1)–(5.3) дифференциал масалани (5.14) айирмали схема билан аппроксимация қилганда ҳосил бўладиган хатоликни аниқлаймиз. Бунинг учун (5.14) масаланинг ечимини $y_i^k = u(x_i, t_k) + z_i^k$ кўринишда ёзамиз, бу ерда $u(x,t)$ функция (5.1), (5.3) дифференциал масаланинг аниқ ечими. Хатолик учун қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\tau} = \sigma \Delta z_i^{k+1} + (1-\sigma)\Delta z_i^k + r_i^k,$$
$$i = \overline{1, M-1}, k = \overline{0, N-1}, \tag{5.16}$$
$$z_0^{k+1} = z_N^{k+1} = 0,\ k = \overline{0, N-1},\ z_i^0 = 0,\ i = \overline{0, M}.$$

Ўнг томонда қатнашадиган r_i^k тўрдаги функция қуйидагига тенг:

$$r_i^k = -\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \sigma \Delta u\Big|_{(x_i, t_{k+1})} + (1-\sigma)\Delta u\Big|_{(x_i, t_k)} + \varphi_i^k. \tag{5.17}$$

Бу функция (5.1), (5.3) масала ечимидаги (5.14) схема аппроксимациясининг хатолигидир. Бу хатолик тартибини аниқлаш учун (5.17) ифодада қатнашадиган барча функцияларни $(x_i, t_k + \tau/2)$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_{(x_i, t_k + \xi)} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + 0(\tau^2),$$

$$\Delta u\Big|_{(x_i, t_k + \tau)} = \Delta u\Big|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + \frac{\tau}{2}\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + 0(\tau^2) =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau}{2}\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Bigg|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + 0(\tau^2 + h^2).$$

Шунга ўхшаш

$$\Delta u\Big|_{(x_i, t_k)} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\tau}{2}\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Bigg|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + 0(\tau^2 + h^2).$$

Бу ифодаларни (5.17) га қўйсак,

$$\tau_i^k = \left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau(\sigma - \frac{1}{2})\Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right]\Bigg|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + \varphi_i^k + 0(\tau^2 + h^2)$$

ни ҳосил қиламиз. Энди

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

дан фойдалансак, у ҳолда

$$r_i^k = \varphi_i^k - f(x_i, t_k + \tau/2) + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\Delta \frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{(x_i, t_k + \tau/2)} + 0(\tau^2 + h^2)$$

келиб чиқади. Демак, $\varphi_i^k = f(x_i, t_k + \tau/2)$ деб олсак, у ҳолда $r_i^k = 0(\tau + h^2)$, агар $t \neq 0{,}5$ бўлса ва $r_i^k = 0(\tau^2 + h^2)$, агар $\tau = 0{,}5$ бўлса.

Шундай қилиб, (5.15) олти нуқтали симметрик схема $\left(\sigma = \frac{1}{2}\right)$ учун $r_i^k = 0(\tau^2 + h^2)$.

10.5.2. Икки қатламли айирмали схемаларнинг турғунлигини текшириш. Қулайлик учун қуйидаги векторларни киритамиз:

$$\vec{y}_k = (y_0^k, y_1^k, \ldots, y_M^k), \ \varphi^k = (\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{M-1}^k),$$

$$\vec{\mu}_1 = (\mu_1^0, \mu_1^1, \ldots, \mu_1^N)^T, \ \vec{\mu}_2 = (\mu_2^0, \mu_2^1, \ldots, \mu_2^N)^T.$$

Ушбу (x_0,t_k), (x_l,t_k), ..., (x_M,t_k) тугунлар тўпламини k-қатлам деймиз, шунинг учун ҳам $\vec{y}_k$ ва $\vec{\varphi}_k$ векторларни u^h ва φ^h функцияларнинг k-қатламдаги қийматидек қараш мумкин. Қуйидаги нормаларни киритамиз:

$$\left\|\vec{y}_k\right\| = \max_{0 \le i \le M} \left|y_i^k\right|, \ \left\|\vec{\varphi}_k\right\| = \max_{0 < i < M} \left|\varphi_i^k\right|,$$

$$\left\|\vec{\mu}_1\right\| = \max_{0 \le k \le N} \left|\mu_1^k\right|, \ \left\|\vec{\mu}_2^k\right\| = \max_{0 \le k \le N} \left|\mu_2^k\right|.$$

Таъриф. Айирмали схема *С фазонинг тўрдаги нормасида турғун* дейилади, агар h ва τ га боғлиқ бўлмаган шундай ўзгармас c_1 сон топилиб, унинг учун

$$\max_{0 \le k \le N} \left\|\vec{y}_k\right\| = c_1 (\max)\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{y}^0\right\|\right) + \max_{0 \le k \le N} \left\|\vec{\varphi}^k\right\|\Big) \quad (5.18)$$

баҳо ўринли бўлса.

Энди (5.7), (5.8) айирмали схеманинг турғунлигини текширамиз.

1-теорема. *Агар* $\tau \le h^2/2$ *бўлса, у ҳолда* (5.7), (5.8) *айирмали схема* C *фазонинг тўрдаги нормасида турғундир.*

Исботи. (5.7) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y_i^{k+1} = (1-2\rho)y_i^k + \rho y_{i-1}^k + \rho y_{i+1}^k + \tau\varphi_i^k,$$

бунда $\rho = \tau/h^2$. Агар $\max\limits_i |y_i^{k+1}|$ га ички $(i_0, k+1)$ нуқтада эришилса, у ҳолда

$$\max_i |y_i^{k+1}| = \max_i |(1-2\rho)y_i^k + \rho y_{i-1}^k + \rho y_{i+1}^k + \tau\varphi_i^k| \le$$

$$\le (1-2\rho)\|\bar{\boldsymbol{y}}_k\| + 2\rho\|\bar{\boldsymbol{y}}_k\| + \tau\|\varphi^k\| = \|\bar{\boldsymbol{y}}_k\| + \tau\|\varphi^k\|.$$

Акс ҳолда

$$\max_i |y_i^{k+1}| \le \max\left(|\mu_1^{k+1}|, |\mu_2^{k+1}|\right) \le \max\left(\|\bar{\boldsymbol{\mu}}_1\|, \|\bar{\boldsymbol{\mu}}_2\|\right).$$

Демак,

$$\|\bar{\boldsymbol{y}}_{k+1}\| \le \max\left(\|\mu_1\|, \|\mu_2\|, \|\bar{\boldsymbol{y}}_k\| + \tau\|\varphi^k\|\right). \tag{5.19}$$

Энди (5.7), (5.8) масаланинг ечимини

$$y^k = \vartheta^k + w^k$$

кўринишда ёзиб оламиз, бунда ϑ^k (5.7), (5.8) масаланинг ўнг томони $\varphi^k \equiv 0$ бўлгандаги ечими, w^k эса (5.7), (5.8) масаланинг чегаравий ва бошланғич шартлари нолга тенг бўлган ечими. (5.19) га кўра ϑ^k учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\|\bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{k+1}\| \le \max\left(\|\bar{\boldsymbol{\mu}}_1\|, \|\bar{\boldsymbol{\mu}}_2\|, \|\bar{\boldsymbol{\vartheta}}^k\|\right) \le \ldots \le$$

$$\le \max\left(\|\bar{\boldsymbol{\mu}}_1\|, \|\bar{\boldsymbol{\mu}}_2\|, \|\bar{\boldsymbol{\vartheta}}^0\|\right).$$

Иккинчи томондан w^k учун (5.19) га кўра

$$\|\bar{\boldsymbol{w}}^{k+1}\| \le \|\bar{\boldsymbol{w}}^k\| + \tau\|\varphi^k\| \le \|\bar{\boldsymbol{w}}^{k-1}\| + \tau\left(\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}^k\| + \|\bar{\boldsymbol{\varphi}}^{k+1}\|\right) \le$$

$$\le \ldots \le \sum_{j=0}^{k} \tau\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}^j\| \le T \max_{0\le j\le N}\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}^j\|,$$

бу ерда $(k+1)\tau \le T$дан фойдаландик. Шундай қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left\|\vec{y}^k\right\| \le \left\|\vec{\vartheta}^k\right\| + \left\|\vec{w}^k\right\| \le$$

$$\le \max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{\vartheta}^0\right\|\right) + T\max_{0\le j\le N}\left\|\vec{\varphi}^j\right\| \le$$

$$\le c_1\left[\max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{\vartheta}^0\right\|\right) + \max_{0\le j\le N}\left\|\vec{\varphi}^j\right\|\right],$$

бунда $c_1 = \max(1, T)$. Бу тенгсизлик барча k, $0 \le k \le N$ учун ўринли, демак, айирмали схема C фазонинг тўрдаги нормаси учун турғун экан. Теорема исботланди.

Таъриф. Айирмали схема *шартли равишда турғун* дейилади, агар тўр қадамлари τ ва h орасида бирор муносабат ўринли бўлганда у турғун бўлса. Агар тўр қадамлари τ ва h орасида ихтиёрий муносабатлар бўлганда ҳам айирмали схема турғун бўлса, у ҳолда *у шартсиз равишда турғун* дейилади.

Юқоридаги теоремада турғунликни $\tau \le h^2/2$ шарт бажарилганда исботладик. Демак, (5.7), (5.8) схема шартли равишда турғун экан. (5.7), (5.8) схема ошкор бўлганлиги учун ҳисоблаш жуда қулай. Навбатдаги қатламда $\vec{y}^{k-1}$ вектор ошкор формулалар ёрдамида олдинги қатламда топилган $\vec{y}^k$ вектор бўйича ҳисобланади. Аммо бу схеманинг шартли равишда турғунлиги τ қадамни жуда кичик қилиб олишга мажбур қилади. Масалан, $h = 0{,}01$ бўлса, унда $\tau \le 0{,}0005$ бўлиб, $T = 1$ да ечимни топиш учун камида 20 000 та қатлам олиш керак. Бу эса жуда кўп ҳисоблашларни талаб қилади ва амалий ишларда ярамайди.

Энди (5.9), (5.10) ошкормас схеманинг турғунлигини текширамиз.

2-теорема. *Ихтиёрий h ва τ қадамларда (5.9), (5.10) масаланинг ечими учун (5.18) баҳо ўринлидир.*

Исботи. Олдинги теореманинг исботидагига ўхшаш (5.9) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$y_i^{k+1} + \rho(-y_{i-1}^{k+1} + 2y_i^{k+1} - y_{i+1}^{k+1}) = y_i^k + \tau\varphi_i^{k+1},\ 1 \le i \le M-1. \tag{5.20}$$

Қиймати модули билан $\left\|\vec{y}^{k+1}\right\|$ га тенг бўлган y_i^{k-1} ларнинг орасида i индекси энг кичик қийматни қабул қиладиганини оламиз. Агар $i = 0$ ёки $i = M$ бўлса, у ҳолда (5.19) нинг бажарилиши равшан. Фараз қилайлик, энди $i \ne 0$ ва $i \ne M$ бўлсин, у ҳолда i нинг таърифига кўра $\left|y_i^{k+1}\right| > \left|y_{i-1}^{k+1}\right|$ ва $\left|y_i^{k+1}\right| \ge \left|y_{i+1}^{k+1}\right|$. Шунинг учун ҳам $\left|2y_i^{k+1}\right| > \left|y_{i-1}^{k+1}\right| + \left|y_{i+1}^{k+1}\right|$ ва $\operatorname{sign}\left(2y_i^{k-1} - y_{i-1}^{k+1} - y_{i+1}^{k+1}\right) = \operatorname{sign} y_i^{k-1}$. Демак,

$$\left\|\vec{y}^{k+1}\right\| = \left|y_i^{k+1}\right| \le \left|y_i^{k+1} + \rho\left(-y_{i+1}^{k+1} + 2y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}\right)\right| =$$
$$= \left|y_i^k + \tau\varphi_i^{k+1}\right| \le \left\|\vec{y}^k\right\| + \tau\left\|\vec{\varphi}^{k+1}\right\|.$$

Шундай қилиб, барча h ва τ қадамларда (5.8), (5.9) схема учун (5.19) баҳога эга бўлдик. Исботнинг қолган қисми 1-теореманинг исботидек тугайди. Шундай қилиб, (5.8), (5.9) схема шартсиз равишда турғун экан.

Ошкормас схеманинг шуниси яхшики, вақт бўйича τ қадамни анча катта қилиб олиш мумкин, аммо қатламдан қатламга ўтишда уч диагоналли тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Бироқ бир ўлчовли ҳол учун бу қийинчилик туғдирмайди. Хусусий ҳолда $\vec{y}^k$ маълум бўлса, ҳайдаш усули билан $0(M)$ та амал бажариб, $\vec{y}^{k+1}$ векторни топиб олиш мумкин, яъни қатламдан қатламга ўтишда арифметик амалларнинг сони тақрибан ошкор схемадагидек бўлади. Бундан кўрамизки, амалда ошкормас схемани ишлатиш маъқулдир, чунки ЭҲМ да ҳисобланганда машина вақтини тежайди.

Энди (5.14) вазний схемани текширишга ўтамиз. Айирмали схемалар назариясида матрица билан бу матрица яратадиган операторни фарқ қилишмайди. Бундан кейин биз ҳам шундай қиламиз. Биз Δ орқали $(0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{M-1}, 0)$ векторга $(0, \Delta\vartheta_1, \ldots, \Delta\vartheta_{M-1}, 0)$ векторни мос қўядиган операторни (матрицани) белгилаймиз. Агар $\vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2 = \varphi^k \equiv 0$ деб олсак, у ҳолда (5.14) айирмали схема қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y_i^{k+1} = y_i^k + \tau\sigma\Delta y_i^{k+1} + \tau(1-\sigma)\Delta y_i^k$$

ёки

$$(E - \tau\sigma\Delta)\vec{y}^{k+1} = (E + \tau(1-\sigma)\Delta)y_i^k,$$
$$y_i^{k+1} = (E - \tau\sigma\Delta)^{-1}(E + \tau(1-\sigma)\Delta)y_i^k.$$

Шундай қилиб, (5.14) тенгламалар системаси

$$\vec{y}^{k+1} = S\vec{y}^k$$

кўринишда ёзилади. Бунда қатламдан қатламга ўтиш матрицаси

$$S = (E - \tau\sigma\Delta)^{-1}(E + \tau(1-\sigma))$$

дан иборатдир. Фараз қилайлик, S матрицанинг хос сонлари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{M-1}$ дан иборат бўлсин. S матрица симметрик бўлганлиги учун $\|S\|_2 = \max\limits_i|\lambda_i|$ муносабат ўринлидир. Энди y_i^0 ни S матрицанинг хос функциялари бўйича Фурьенинг чекли қаторига ёямиз:

$$y_i^0 = \sum_{n=0}^{M-1} C_n \sin\frac{\pi nih}{l}.$$

Равшанки,

$$\Delta\sin\frac{\pi nih}{l} = \frac{1}{h^2}\left[\sin\frac{\pi n(i+1)h}{l} - 2\sin\frac{\pi nih}{l} + \sin\frac{\pi n(i-1)h}{l}\right] =$$

$$= -\frac{4\sin^2\frac{\pi nh}{2}}{h^2}\sin\frac{\pi nih}{l} = -\vartheta_n \sin\frac{\pi nih}{l}.$$

Шундай қилиб, Δ операторнинг хос сонлари $\vartheta_n = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi nh}{2}$ ($n = 1, 2, ..., M-1$) га тенг. Демак, S матрицанинг хос сонлари

$$\lambda_n = \frac{1-\tau(1-\sigma)\vartheta_n}{1+\tau\sigma\vartheta_n}, \; n = \overline{1, M-1}$$

бўлади. Шунинг учун ҳам

$$\bar{y}^{k+1} = S\bar{y}^k = ... = S^{k+1}\bar{y}^0 \sum_{n=1}^{M-1} \lambda_n^{k+1} C_n \sin\frac{\pi nih}{l}.$$

Бундан кўрамизки, (5.14) схема турғун бўлиши учун $|\lambda_n| \le 1$ тенгсизлик бажарилиши керак. Демак, биз σ ва τ ларга нисбатан шундай шартларни топишимиз керакки,

$$-1 \le \frac{1-\tau(1-\sigma)\vartheta_n}{1+\tau\sigma\vartheta_n} \le 1$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин. Агар $\tau > 0$ бўлса, у ҳолда $\vartheta_n > 0$ бўлганлиги учун юқоридаги тенгсизлик $\tau\vartheta_n(1-2\sigma) < 2$ муносабат билан тенг кучли бўлади. Агар $\sigma \ge \frac{1}{2}$ бўлса, охирги тенгсизлик барча $\tau > 0$ лар учун бажарилади. Агар $\sigma < \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$\tau \le \frac{2}{(1-2\sigma)\max\vartheta_n} \le \frac{h^2}{2(1-2\sigma)} \tag{5.21}$$

бўлиши керак.

Шундай қилиб, (5.14), (5.8) айирмали схема дастлабки маълумотларга нисбатан турғунлигининг етарли шартларини ўрнатдик. Жумладан, $\varphi^k = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ бўлса, у ҳолда $\sigma \ge \frac{1}{2}$ бўлганда (5.14), (5.8) айирмали схема шартсиз равишда турғун бўлиб, $\sigma < \frac{1}{2}$ бўлганда (5.14), (5.8) схема (5.21) шарт бажарилганда турғун, яъни шартли равишда турғун бўлади.

Агар дифференциал оператор ёки чегаравий шартлар биз қараган (5.1)–(5.3) чегаравий масалага нисбатан мураккаб бўлса, у ҳолда айирмали масала ҳам мураккаб бўлади ва унинг турғунлигини максимум принципи ёки Фурье методи билан текшириш маълум қийинчиликлар туғдиради ёки умуман мумкин бўлмайди. Бундай ҳолда *энергетик баҳолар методи*дан фойдаланилади.

Юқоридагидек $\vec{y}^k$ орқали u^h нинг k-қатламдаги қийматини белгилаймиз, яъни $\vec{y}^k = (0,\ y_i^k,\ \dots,\ y_{M-1}^k,\ 0)$. Яна ушбу

$$\vec{y}_t^k = \frac{\vec{y}^{k+1} - \vec{y}^k}{\tau} \tag{5.22}$$

белгилашни киритамиз. Бунда биз қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\vec{y}^{k+1} = \frac{1}{2}\left(\vec{y}^{k+1} + \vec{y}^k\right) + \frac{\tau}{2}\vec{y}_t^k,\ \vec{y}^k = \frac{1}{2}\left(\vec{y}^{k+1} + \vec{y}^k\right) - \frac{\tau}{2}\vec{y}_t^k. \tag{5.23}$$

Энди векторлар учун w_2^1 (11-бобга қ.) фазонинг тўрдаги скаляр кўпайтмаси ва нормасини киритамиз:

$$(\vec{\vartheta}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{M-1} h\vartheta_i w_i,\ \left\|\vec{\vartheta}\right\|^2 = (\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}),$$

$$\left\|\vec{\vartheta}\right\|_1^2 = \sum_{i=0}^{M-1} h\left(\frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}{h}\right)^2.$$

Равшанки, (5.14) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{y}_t^k = \sigma\Delta\vec{y}^{k+1} + (1-\sigma)\Delta\vec{y}^k + \vec{\varphi}^k.$$

Бу тенгламани (5.22) ва (5.23) тенгликлар асосида қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\vec{y}_t^k = \frac{1}{2}\Delta\left(\vec{y}^{k+1} + \vec{y}^k\right) + \tau(\sigma - 0,5)\Delta\vec{y}_t^k + \vec{\varphi}^k.$$

Охирги тенгликнинг ҳар иккала томонини $2\tau\vec{y}_t^k = 2\left(\vec{y}^{k+1} - \vec{y}^k\right)$ вектор билан скаляр кўпайтирамиз. Натижада қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} 2\tau\left\|\vec{y}_t^k\right\|_1^2 &= \left(\Delta\left(\vec{y}^{k+1} + \vec{y}^k\right),\ \vec{y}^{k+1} - \vec{y}^k\right) + \\ &+ 2\tau^2(\sigma - 0,5)\left(\Delta\vec{y}_t^k,\ \vec{y}_t^k\right) + 2\left(\vec{y}_t^k, \vec{\varphi}^k\right). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ушбу

$$\sum_{i=1}^{M-1} h \cdot \frac{a_{i+1} - a_i}{h} b_i = a_M b_M - a_1 b_0 + \sum_{i=1}^{M} h \cdot \frac{b_i - b_{i-1}}{h} a_i$$

қисмий йиғиш формуласида $a_i = \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}}{h}$, $b_i = \vartheta_i$ деб ва $b_0 = \vartheta_0 = 0$, $b_M = \vartheta_M = 0$ тенгликларни ҳисобга олиб,

$$(\Delta\vec{\vartheta},\vec{\vartheta}) = \sum_{i=1}^{M-1} h\cdot\frac{\vartheta_{i+1}-2\vartheta_i+\vartheta_{i-1}}{h}\vartheta_i = -\sum_{i=1}^{M-1} h\left(\frac{\vartheta_i-\vartheta_{i-1}}{h}\right)^2 = -\left\|\vec{\vartheta}\right\|_1^2$$

ни ҳосил қиламиз. Энди Δ операторнинг симметриклигидан фойдаланиб,

$$\left(\Delta\vec{y}^{k+1}+\vec{y}^k),\ \vec{y}^{k+1}-\vec{y}^k\right) = \left(\Delta\vec{y}^{k+1},\ \vec{y}^{k+1}\right) - \left(\Delta\vec{y}^k,\ \vec{y}^k\right) = \left\|\vec{y}^k\right\|_1^2 - \left\|\vec{y}^{k+1}\right\|_1^2$$

тенгликка эга бўламиз. Охирги иккита муносабатдан фойдаланиб, (5.24) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$2\tau\left\|\vec{y}_t^k\right\|^2 + \left\|\vec{y}^{k+1}\right\|_1^2 + 2\tau^2(\sigma-0,5)\left\|\vec{y}_t^k\right\|_1^2 = \left\|\vec{y}^k\right\|_1^2 + 2\tau(\vec{y}_t^k,\vec{\varphi}^k). \tag{5.25}$$

Бу тенглик $\overset{o}{w}{}_2^1$ фазонинг тўрдаги нормаси бўйича *энергетик айният* дейилади.

Энди ушбу

$$|ab| \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

ε тенгсизликда $a = \left\|\vec{y}_t^k\right\|$, $b = \left\|\vec{\varphi}^k\right\|$ деб олиб, $\left(\vec{y}_t^k,\vec{\varphi}^k\right)$ скаляр кўпайтма учун қуйидаги

$$\left\|\vec{y}_t^k,\ \vec{\varphi}^k\right\| \le \varepsilon\left\|\vec{y}_t^k\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\vec{\varphi}^k\right\|^2$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бунинг натижасида (4.25) дан қуйидаги баҳо ҳосил бўлади:

$$2\tau\left[(1-\varepsilon)\left\|\vec{y}_t^k\right\|^2 + \tau(\sigma-0,5)\left\|\vec{y}_t^k\right\|_1^2\right] + \left\|\vec{y}^{k+1}\right\|_1^2 \le \left\|\vec{y}^k\right\|_1^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\varphi}^k\right\|^2. \tag{5.26}$$

Ҳозиргача ε ихтиёрий сон эди, энди $0 < \varepsilon \le 1$ деб оламиз. У ҳолда $\sigma \ge 0,5$ шарт бажарилганда катта қавслар ичидаги ифода манфий бўлмайди. Шунинг учун ҳам (5.26) дан ушбу

$$\left\|\vec{y}^{k+1}\right\|_1^2 \le \left\|\vec{y}^k\right\|_1^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\varphi}^k\right\|^2 \tag{5.27}$$

баҳо келиб чиқади.

Кўрсатиш мумкинки, $\sigma < 0,5$ бўлганда (5.27) баҳо ўринли бўлиши учун

$$\tau \le \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4(0{,}5-\sigma)} \qquad (5.28)$$

шарт бажарилиши керак. Энди (5.27) баҳони кетма-кет қўллаб,

$$\left\|\vec{y}^k\right\|_1^2 \le \left\|\vec{y}^0\right\|_1^2 + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\varphi}^j\right\|^2, \; n\tau \le T$$

баҳони ҳосил қиламиз. Ўнг томондаги йиғинди $\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{k\tau}\left\|\int(t)\right\|^2 dt$ интеграл учун квадратур йиғинди бўлганлиги сабабли шундай C_1 топиладики,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\varphi}^j\right\|^2 \le C_1\int_0^T\left\|f(t)\right\|^2 dt$$

тенгсизлик бажарилади.

Бу ерда

$$\left\|f(t)\right\| = \left(\int_0^l f^2(x,t)\,dx\right)^{1/2}.$$

Демак,

$$\left\|\vec{y}^k\right\|_1^2 \le \left\|\vec{y}^0\right\|_1^2 + C_1\int_0^T\left\|f(t)\right\|^2 dt.$$

Бу тенгсизлик эса (5.14), (5.8) схеманинг бошланғич маълумотлар ҳамда ўнг томонга нисбатан турғунлигини билдиради.

Шундай қилиб, (5.14), (5.8) айирмали схема $\sigma \ge 0{,}5$ бўлганда шартсиз равишда турғун бўлиб, $\sigma < 0{,}5$ бўлганда τ ва h қадамлар орасида (5.28) шарт бажарилгандагина турғун бўлади.

Машқ. (5.28) шарт исботлансин. Кўрсатма. $\left\|\vartheta\right\|_1^2 \le \frac{4}{h^2}\left\|\vartheta\right\|^2$ тенгсизликдан фойдаланилсин.

Биз бошланғич шартлар ва ўнг томонга нисбатан турғунлик масаласини кўриб чиқиб, чегаравий шартга нисбатан турғунлик масаласига эътибор бермадик. Агар $\mu_1(t)$ ва $\mu_2(t)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда чегаравий шартларни нолга айлантириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $F(x,t) = \mu_1(t)(1-\frac{x}{l}) + \mu_2(x)\frac{x}{l}$ функцияни олсак, у ҳолда $\vartheta(x, t) = u(x, t) - F(x, t)$ функция (5.1) тенгламанинг ўнг томони $\left(f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}F(x,t)\right)$ дан иборат бўлиб, нолли чегаравий ва бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини беради.

Шунга ўхшаш бир жинсли бўлмаган (5.14), (5.8) айирмали масалани бир жинсли чегаравий шартли масалага келтириш мумкин.

Фараз қилайлик, y_i^k айирмали масаланинг ечими бўлсин. Қуйидаги ϑ_i^k тўр функцияни киритамиз:

$$\vartheta_i^k = \begin{cases} y_i^k, \text{ агар } 1 \le i \le M-1 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } i = 0 \text{ ва } i = M \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу функция чегаравий шартлари бир жинсли бўлган ушбу айирмали масалани қаноатлантиради:

$$\frac{\vartheta_i^{k+1} - \vartheta_i^k}{\tau} = \sigma\Delta\vartheta_i^{k+1} + (1-\sigma)\Delta\vartheta_i^k + \psi_i^k,\ i = \overline{1, M-1},$$

$$\vartheta_i^0 = \vartheta(ih),\ \vartheta_0^k = 0,\ \vartheta_M^k = 0,$$

бунда

$$\psi_i^k = \begin{cases} \varphi_i^k - \frac{1-\sigma}{h^2}\mu_i^k - \frac{\sigma}{h^2}\mu_i^{k+1}, \text{ агар } i = 1 \text{ бўлса,} \\ \varphi_i^k, \text{ агар } 2 \le i \le M-2 \text{ бўлса,} \\ \varphi_{M-1}^k - \frac{1-\sigma}{h^2}\mu_2^k - \frac{\sigma}{h^2}\mu_2^{k+1}, \text{ агар } i = M-1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, тенгламанинг ўнг томонини бироз ўзгартириб, бир жинсли бўлмаган (5.14) айирмали масалани чегаравий шартлари бир жинсли бўлган айирмали масалага келтириш мумкин.

10.5.3. Яқинлашиш тезлигини баҳолаш. Фараз қилайлик, (5.1) дифференциал масаланинг ечими u бўлиб, y_i^k эса (5.14), (5.8) айирмали масаланинг ечими бўлсин, $r^k = \{r_i^k\}$ орқали эса аппроксимациянинг хатолигини белгилаймиз (қ. (5.16), (5.17)). Агар биз $u^{(h)}$ орқали аниқ ечимининг тўрдаги қийматини белгиласак, у ҳолда $z = u^{(h)} - y_i^k$ айирма ечимнинг тўр устидаги хатолиги бўлиб,

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\tau} = \sigma\Delta z_i^k + (1-\sigma)\Delta z_i^k + \varphi_i^k - f_i^k + r_i^k,$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1$$

тенгламани қаноатлантиради. Агар $\varphi_i^k = f\left(x_i, t_k + \frac{\tau}{2}\right)$ деб олсак, у ҳолда z_i^k ушбу

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\tau} = \sigma\Delta z_i^{k+1} + (1-\sigma)\Delta z_i^k + r_i^k.\ i = \overline{1, M-1},$$

$$z_i^0 = u_0^k = u_M^k = 0$$

масаланинг ечими бўлади. Агар қаралаётган масала турғун бўлса, у ҳолда (5.27) баҳо ўринли бўлади. Бундан эса

$$\left\|z^k\right\|_1^2 \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\boldsymbol{r}}_j\right\|^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\boldsymbol{r}}_j\right\|^2 \leq \frac{T}{2\varepsilon} \max_{0\leq j\leq N-1}\left\|\vec{\boldsymbol{r}}_j\right\|^2$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, $\max\limits_k\left\|\bar{z}^k\right\|_1$ яқинлашиш тезлиги $0(\tau + h^2)$ бўлади, агар $\sigma \neq 0{,}5$ бўлса ва $0(\tau^2 + h^2)$ бўлади, агар $\sigma = 0{,}5$ бўлса.

Машқ. Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2x$$

тенгламанинг қуйидаги

$$u(x, 0) = x(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 \quad (0 \leq t \leq T)$$

бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин ҳамда натижа $u(x, t) = x(1-x+t)$ аниқ ечим билан солиштирилсин.

10.5.4. Айирмали схема қуришнинг баланс методи. Иссиқлик ўтказувчанлик, диффузия, тебраниш ва ш.к. турли хил физик жараёнлар иссиқлик, масса, ҳаракат миқдори, энергия ва ҳ.к. сақланишнинг интеграл формадаги қонунлари билан тавсифланади. Математик физиканинг дифференциал тенгламаларини чиқаришда кичик ҳажм учун сақланиш қонунини ифодаловчи муайян интеграл муносабатдан (баланс тенгламасидан) ишни бошлашади. Тенгламада қатнашадиган функцияларнинг барча керакли ҳосилаларини мавжуд деб фараз қилиб ва баланс тенгламасидаги ҳажмларни нолга интилтириб, дифференциал тенглама ҳосил қилинади. Чекли-айирмали методнинг физик маъноси шундан иборатки, биз узлуксиз муҳитдан унинг қандайдир дискрет моделига ўтамиз. Табиийки, бундай ўтишда физик жараённинг асосий хоссалари сақланишини талаб қилиш керак. Бундай хоссалар қаторида, биринчи навбатда, сақланиш қонунлари туради. Тўр соҳада сақланиш қонунларини ифодалайдиган айирмали схемалар *консерватив схемалар* дейилади. Консерватив айирмали схемаларни ҳосил қилиш учун тўр соҳада элементар ҳажм учун ёзилган баланс тенгламаларида қатнашадиган интегралларни ва ҳосилаларни тақрибий айирмали ифодалари билан алмаштириш керак. Консерватив айирмали схемаларни ҳосил қилишнинг бундай усули *баланс методи* ёки *интеграл-интерполяцион метод* дейилади. Баланс методини қўллашга мисол сифатида иссиқлик ўтказувчанликнинг стационар тенгламаси учун биринчи чегаравий масалани қараймиз:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u+f(x)=0,\ 0<x<1, \tag{5.29}$$

$$u(0)=\alpha, u(1)=\beta, \tag{5.30}$$

бунда $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ лар етарлича силлиқ функциялар бўлиб, $p(x)\geq p_0>0$, $q(x)\geq 0$ шартларни қаноатлантиради, α ва β эса берилган сонлар. Бу шартлар бажарилганда (5.29), (5.30) чегаравий масала ягона етарлича силлиқ $u(x)$ ечимга эга бўлади. Айирмали схема қуриш учун [0, 1] кесмада мунтазам

$$\omega_h=\{x_i=ih, i=0,1,\ldots,N, hN=1\}$$

тўрни оламиз. Қуйидаги

$$x_{i\pm\frac{1}{2}}=x_i\pm\frac{h}{2},\ w(x)=p(x)\frac{d}{dx}u(x),\ w_{i\pm\frac{1}{2}}=w\left(x_{i\pm\frac{1}{2}}\right)$$

белгилашларни киритиб, (5.29) тенгламани $\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ оралиқда интеграллаймиз, натижада

$$w_{i+\frac{1}{2}}-w_{i-\frac{1}{2}}-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}q(x)u(x)dx+\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}f(x)dx=0 \tag{5.31}$$

тенглама ҳосил бўлиб, у $\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ кесмада иссиқликнинг баланс тенгламасини аниқлайди. Энди

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}q(x)u(x)dx$$

интегрални унинг $u_i\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}q(x)dx$ тақрибий қиймати билан алмаштириб, қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$d_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}q(x)dx,\ \varphi_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}f(x)dx. \tag{5.32}$$

Натижада (5.31) тенглама

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h} - d_i u_i + \varphi_i = 0 \tag{5.33}$$

кўринишга эга бўлади. Энди $w_{i\pm\frac{1}{2}}$ ни $u(x)$ нинг тўр нуқталаридаги қийматлари орқали ифодалаймиз. Бунинг учун $\frac{du}{dx} = \frac{w(x)}{p(x)}$ ифодани $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ кесмада интеграллаймиз, натижада

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{p(x)} dx \approx w_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \tag{5.34}$$

ҳосил бўлади. Агар

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \tag{5.35}$$

деб белгилаб олсак, (5.34) дан қуйидаги тақрибий тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$w_{i-\frac{1}{2}} = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \ w_{i+\frac{1}{2}} = a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

Бу ифодаларни (5.33) тенгламага қўйиб, изланаётган функциянинг x_{i-1}, x_i, x_{i+1} нуқталардаги қийматини ўз ичига олган ушбу

$$\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}\left(u_{i+1} - u_i\right) - a_i\left(u_i - u_{i-1}\right)\right] - d_i u_i + \varphi_i = 0 \tag{5.36}$$

айирмали тенгламага эга бўламиз. (5.36) тенгламани ω_h тўр соҳанинг барча ички нуқталари, яъни $i = 1, 2, ..., N-1$ учун ёзсак, у ҳолда $N+1$ та u_0, u_1, ..., u_N номаълумли $N-1$ тенгламалар системасига эга бўламиз. Иккита етмаган тенгламани (5.30) дастлабки шартдан ҳосил қиламиз:

$$u_0 = \alpha, \ u_N = \beta. \tag{5.37}$$

Айирмали масаланинг ечимини дифференциал масаланинг ечимидан фарқ қилиш учун уни y орқали белгилаймиз, демак, $y_i = y(x_i)$, $x_i \in \omega_h$. Энди (5.36) ва (5.37) тенгламаларни бирлаштириб, (5.29), (5.30) чегаравий масала учун қуйидаги айирмали схемага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i\left(y_i - y_{i-1}\right)\right] - d_i y_i + \varphi_i = 0, \\ &\qquad i = 1, 2, ..., N-1, \\ &\qquad y_0 = \alpha, \ y_N = \beta. \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

Бу системани ҳайдаш методи билан ечиш мақсадга мувофиқ бўлади. Бунинг учун (5.38) системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i-1} = -F_i,\ i = 1, 2, ..., N-1,\ y_0 = \alpha,\ y_N = \beta,$$

бунда

$$A_i = a_{i-1},\ B_i = a_{i+1},\ C_i = a_i + a_{i+1} + h^2 d_i,\ F_i = h^2 \varphi_i.$$

Чегаравий масаланинг коэффициентларига қўйилган шартлардан $a_i > 0$ ва $d_i \geq 0$ келиб чиқади, булардан эса $C_i \geq A_i + B_i$ ни, яъни ҳайдаш методининг турғунлик шартини ҳосил қилдик. Демак, (5.38) айирмали масала ягона ечимга эга ва бу ечимни ҳайдаш методи билан топиш мумкин.

Энди (5.29) дифференциал тенгламани (5.38) айирмали тенглама билан алмаштирганда юзага келадиган аппроксимация хатолигини текширамиз. Бунинг учун (5.29) тенгламанинг чап томонини $Lu(x)$ ва (5.38) тенгламанинг чап томонини $L_h y_i$ орқали белгилаймиз, яъни

$$Lu(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) + f(x),$$

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})\right] - d_i y_i + \varphi_i.$$

Фараз қилайлик, $\vartheta(x)$ етарлича силлиқ функция бўлиб, $\vartheta_i = \vartheta(x_i)$ унинг ω_h тўрдаги қиймати бўлсин. Энди

$$L_h \vartheta_i - L\vartheta(x_i) = 0(h^2) \tag{5.39}$$

баҳо ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $L_h \vartheta_i$ оператор таркибидаги $\vartheta_{i\pm1} = \vartheta(x_i \pm h)$ ни x_i нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз. Равшанки,

$$\frac{\vartheta_{i\pm1} - \vartheta_i}{\pm h} = \vartheta_i' \pm \frac{h}{2}\vartheta_i'' + \frac{h^2}{6}\vartheta_i''' + 0\left(h^3\right).$$

Демак,

$$L_h \vartheta_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h}\vartheta_i' + \frac{a_{i+1} + a_i}{2}\vartheta_i'' + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}\vartheta_i''' - d_i \vartheta_i + \varphi_i + 0\left(h^2\right).$$

Иккинчи томондан

$$Lu(x_i) = p(x_i)\vartheta_i'' + p'(x_i)\vartheta_i' - q(x_i)\vartheta_i + f(x_i).$$

Бу муносабатлардан

$$L_h \vartheta_i - L\vartheta(x_i) = \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - p'(x_i)\right)\vartheta_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - p(x_i)\right)\vartheta_i'' +$$

$$+ \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}\vartheta_i''' - \left(d_i - q(x_i)\right)\vartheta_i + \left(\varphi_i - f(x_i)\right) + 0\left(h^2\right)$$

ни ҳосил қиламиз. (5.39) шарт бажарилиши учун

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h}=p'(x_i)+0(h^2),\ \frac{a_{i+1}+a_i}{2}=p(x_i)+0(h^2), \tag{5.40}$$

$$\varphi_i=f(x_i)+0(h^2),\ d_i=q(x_i)+0(h^2) \tag{5.41}$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак.

Энди $k(x)=\frac{1}{p(x)}$ деб белгилаймиз ва $k(x)$ ни $x_{i-\frac{1}{2}}$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз, натижада

$$\frac{1}{a_i}=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}k(x)dx=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left[k_{i-\frac{1}{2}}+\left(x-x_{i-\frac{1}{2}}\right)k'_{i-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(x-x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2k''_{i-\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(x-x_{i-\frac{1}{2}}\right)^3k'''_{i-\frac{1}{2}}+0\left(h^4\right)\right]dx=k_{i-\frac{1}{2}}+\frac{h^2}{24}k''_{i-\frac{1}{2}}+0\left(h^3\right)$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$a_i=p_{i-\frac{1}{2}}-\frac{h^2}{24}\frac{k''_{i-0.5}}{k_{i-0.5}}+0\left(h^4\right)=p_{i-\frac{1}{2}}-\frac{h^2}{24}\frac{k''_i}{k_i}+0\left(h^3\right).$$

Шунга ўхшаш

$$a_{i+1}=p_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h^2}{24}\frac{k''_i}{k_i}+0\left(h^3\right).$$

Булардан эса

$$\frac{a_{i+1}+a_i}{2}=\frac{p_{i+\frac{1}{2}}+p_{i-\frac{1}{2}}}{2}+0\left(h^2\right)=p_i+0\left(h^2\right),$$

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h}=\frac{p_{i+\frac{1}{2}}+p_{i-\frac{1}{2}}}{h}+0\left(h^2\right)=p'\left(x_i\right)+0\left(h^2\right)$$

ларга эга бўламиз, булар эса (5.39) ни исботлайди. (5.41) тенгликларнинг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, d_i ва φ_i ни мос равишда $q(x_i)$ ва $f(x_i)$ билан алмаштириш (5.32) интегрални ўрта тугунли тўғри бурчакли тўртбурчак формуласи билан ҳисоблашдан иборатдир. Маълумки, бундай формуланинг қолдиқ ҳади $0(h^2)$ (7-бобга қ.). Шундай қилиб, биз (5.40), (5.41) тенгликларни ва шу билан бирга (5.39) баҳони кўрсатдик. Бу эса L_hy_i оператор $Lu(x)$ ни (5.29), (5.30) масаланинг ечимида h га нисбатан иккинчи тартибли аппроксимация қилишини кўрсатади.

1-эслатма. (5.38) айирмали схемани амалда қўллаш, унинг коэффициентларини топиш учун (5.32) ва (5.35) интегралларни аниқ ҳисоблаш шарт эмас.

Коэффициентларни топиш учун $0(h^2)$ ёки бундан юқори аниқликка эга бўлган квадратур формулалар билан тақрибий ҳисоблаш мумкин. Масалан, (5.32) ва (5.35) интегралларга тўғри тўртбурчаклар формуласини қўлласак, коэффициентлар қуйидагича топилади: $d_i = q\left(x_i\right), \varphi_i = f\left(x_i\right), a_i = p\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$.

Агар трапециялар формуласини қўлласак,

$$a_i = \frac{2p_i p_{i-1}}{p_i + p_{i+1}}, \quad d_i = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} + q_{1+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \varphi_i = \frac{f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

ларни ҳосил қиламиз.

Кўрсатиш мумкинки, (5.38) айирмали масаланинг ечимлари кетма-кетлиги $\{y_h(x_i)\}$ $h \to 0$ да $C(\omega_h)$ тўрли фазода дастлабки (5.29), (5.30) дифференциал масаланинг $u(x)$ ечимига иккинчи тартиб билан яқинлашади, бошқача қилиб айтганда,

$$\left\|y_h - u\right\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h}\left|y_h(x_i) - u(x_i)\right| \le Mh^2$$

баҳо ўринли бўлади (қ.[28]).

2-эслатма. Баланс методини бошқа чегаравий масалалар учун ҳам қўллаш мумкин. Бундан ташқари, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар узилишга эга бўлган ҳолларда ҳам айирмали схеманинг яқинлашишини текшириш учун коэффициентларни (5.32) ва (5.35) интеграллар орқали ифодалаш катта аҳамиятга эга.

10.5.5. Тежамкор айирмали схемалар. Фараз қилайлик, чегараси Γ бўлган $G = \{0 < x_1,\ x_2 < 1\}$ соҳада ушбу икки ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини ечиш талаб қилинсин:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ x = (x_1, x_2) \in G, \\ &u(x,t) = \mu(x,t), x \in \Gamma, 0 < t < T, \\ &u(x,0) = u_0(x),\ x \in G + \Gamma. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Бунинг учун вақт ва фазо бўйича қуйидаги тўрларни киритамиз:

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau,\ k = \overline{0, N-1},\ N\tau = 1\},$$

$$G_h = \{x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}), x_{1i} = ih,\ x_{2j} = jh,\ i, j = \overline{0, N},\ hN = 1\}.$$

G_h тўрнинг ички нуқталар тўплами (i, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$) ни Ω_h орқали ва G_h нинг чегарасини Γ_h орқали белгилаймиз.

Юқорида бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини ечишда ошкор ва ошкормас схемаларни қўллаган эдик. Бу ерда ҳам шундай схемаларни қурамиз. Бунинг учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta_1 y_{ij} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}\right), \tag{5.43}$$

$$\Delta_2 y_{ij} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}\right), \tag{5.44}$$

$$\Delta y_{ij} = \Delta_1 y_{ij} + \Delta_2 y_{ij}. \tag{5.45}$$

Бу белгилашларда ошкор схема қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k}}{\tau} = \Delta y_{ij}^{k},\ x_{ij} \in \omega_h,\ t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{k+1} = \mu(x_{ij}, t_{k+1}),\ x_{ij} \in \Gamma_h,\ t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{0} = u_0(x_{ij}),\ x_{ij} \in G_h,\ k = 0, \end{cases} \tag{5.46}$$

ошкормас схема эса қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k}}{\tau} = \Delta y_{ij}^{k+1},\ x_{ij} \in \omega_h,\ t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{k+1} = \mu(x_{ij}, t_{k+1}),\ x_{ij} \in \Gamma_h,\ t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{0} = u_0(x_{ij}),\ x_{ij} \in G_h,\ k = 0. \end{cases} \tag{5.47}$$

Дастлабки ва чегаравий шартлардан фойдаланиб, (5.46) айирмали схеманинг ечими навбатдаги қатламда

$$y_{ij}^{k+1} = y_{ij}^{k} + \tau \Delta y_{ij}^{k},\ k = \overline{0, N-1},\ x_{ij} \in \omega h$$

ошкор формула ёрдамида топилади. Бу ошкор схеманинг устунлигидир. Аммо бу схеманинг муҳим камчилиги унинг шартли равишда турғунлигидадир. Кўрсатиш мумкинки, (5.46) схема турғун бўлиши учун τ бўйича қадам $\tau \le \frac{1}{4} h^2$ шартни қаноатлантириши керак [45, 46]. Агар $h = 0{,}01$ бўлса, у ҳолда (4.42) тенгламанинг ечимини $T = 1$ да топиш учун $N = 40\ 000$ та қадам бажарилиши зарур. Агар фазовий ўзгарувчилар $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ларнинг сони p та бўлса, у ҳолда ошкор схема турғун бўлиши учун $\tau \le \frac{1}{2p} h^p$ тенгсизлик бажарилиши керак. Шу сабабларга кўра параболик тенгламаларни ечишда ошкор схема кам ишлатилади. Биз кейинги бандда кўрамизки, гиперболик тенглама учун аҳвол бошқача бўлиб, ошкор схемада $t = 0(h)$ бўлганда ҳам турғунлик сақланади.

Энди ошкормас схемани кўриб чиқайлик. (5.47) схемада τ ва h ни қандай олсак ҳам у турғун бўлаверади. Бу схеманинг камчилиги шундан иборатки, ҳар бир вақт қатламида

$$\begin{aligned} &y_{ij}^{k+1} - \tau\Delta y_{ij}^{k+1} = y_{ij}^{k},\ x_{ij} \in \omega_h,\ i,\ j = 1,2,\dots,N-1, \\ &y_{ij}^{k+1} = \mu_{ij}^{k+1},\ x_{ij} \in \tilde{A}_h \end{aligned} \tag{5.48}$$

тенгламалар системасини ечиш лозим. Бу системада y_{ij}^{k+1} номаълумларнинг сони $(N-1)^2$ та. Агар бу системани Гаусс методи билан ечадиган бўлсак, $0(N^6)$ та арифметик амал бажариш зарур. Ишнинг яна бир мушкул томони шундан иборатки, бундай системани вақтнинг ҳар бир қатламида ечиш лозим, бу эса ҳисоблаш ишини яна ҳам кўпайтириб юборади.

Фазовий ўзгарувчиларнинг сони иккита ёки ундан кўп бўлганда (5.48) система матрицасининг кўринишини ҳисобга олган ҳолда системани ечиш методларини қуриш мақсадга мувофиқдир. Бу методларнинг бири — Фурьенинг тез алмаштириши билан биз 10.3-§ да танишган эдик. Бу методлар кўп ўлчовли масалаларни бир ўлчовли масалалар кетма-кетлигига келтириб ечишга асосланган. Бундай келтириш натижасида шундай айирмали методлар вужудга келадики, улар ошкор ва ошкормас схемаларнинг икки яхши хусусияти: абсолют турғунлик ва ечишнинг соддалигини ўзида мужассамлаштиради. Бу методлар эллигинчи йиллардан бошлаб ҳар хил номлар — *ўзгарувчан йўналишли методлар, парчаланиш методлари, каср қадамли методлар, локал-бир ўлчовли методлар* остида математик физика масалаларини ечишда кенг қўлланила бошланди. Ҳозир бу методлар умумий *тежамкор методлар* номи билан аталади (тўла маълумот учун қ. [28,46,47,56]).

Ўзгарувчан йўналишли метод. Биз ҳозир шу ўзгарувчан йўналишли методлардан бири бўлган *бўйлама-кўндаланг айирмали схема* ёки *Писмен-Рэчфорд схемаси* деб аталувчи методни кўриб чиқамиз.

Бу методда k-қатламдан $(k + 1)$ қатламга ўтиш икки босқичдан иборат. Биринчи босқичда

$$\frac{y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - y_{ij}^{k}}{0{,}5\tau} = \Delta_1 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta_2 y_{ij}^{k},\ x_{ij} \in \Omega_h \tag{5.49}$$

системадан орадаги $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ қийматлар аниқланади. Иккинчи босқичда эса топилган $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ қийматлардан фойдаланиб,

$$\frac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau} = \Delta_1 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta_2 y_{ij}^{k+1},\ x_{ij} \in \Omega_h \tag{5.50}$$

системадан y_{ij}^{k+1} лар топилади. Бунда $\Delta_1 y_{ij}$ ва $\Delta_2 y_{ij}$ айирмали нисбатлар (5.43) ва (5.44) формулалар билан аниқланади. (5.49) тенглама фақат x_1 ўзгарувчи бўйича ошкормас бўлиб, (5.50) тенглама фақат x_2 ўзгарувчи бўйича ошкормасдир. Шунинг учун ҳам бу (5.49) ва (5.50) тенгламалар системалари аввал x_1 йўналиш бўйича, кейин x_2 йўналиш бўйича бир ўлчовли ҳайдаш методи ёрдамида ечилади. Методнинг номи ҳам шундан келиб чиққан.

Бу системаларнинг ечиш алгоритмлари қуйидагидан иборат: (5.49) системани

$$0,5\gamma y_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + (1-\gamma) y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + 0,5\gamma y_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -F_{ij}^{k} \qquad (5.51)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бунда

$$\gamma = \tau h^{-2}, \; F_{ij}^{k} = y_{ij}^{k} + 0,5\tau\Delta_2 y_{ij}^{k}.$$

Бу системани $j (j = 1, 2, ..., N-1)$ нинг ҳар бир белгиланган қийматида i ўзгарувчи бўйича ҳайдаш методи билан ечамиз. Ҳайдаш методини қўллаш учун $y_{0j}^{k+\frac{1}{2}}$ ва $y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}}$ $(j = 1, 2, ..., N-1)$ чегаравий қийматларни билиш керак. Бунинг учун (5.50) тенгламадан (5.49) тенгламани айирамиз, натижада

$$y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{y_{ij}^{k} + y_{ij}^{k+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Delta_2\left(y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k}\right)$$

ҳосил бўлади. Бу формула асосида $y_{0j}^{k+\frac{1}{2}}$, $y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}}$ чегаравий қийматларни қуйидагича топамиз:

$$y_{0j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{0j}^{k} + \mu_{0i}^{k+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Delta_2\left(\mu_{0j}^{k+1} - \mu_{0j}^{k}\right),$$

$$y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{Nj}^{k} + \mu_{Nj}^{k+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Delta_2\left(\mu_{Nj}^{k+1} - \mu_{Nj}^{k}\right),$$

$$j = 1, 2, .., N-1.$$

j нинг ҳар бир белгиланган қийматида (5.51) системани x_1 йўналиш бўйича ҳайдаш методи билан ечганда $0(N)$ та арифметик амал бажарилади. Демак, барча $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ ни топиш учун $0(N^2)$ та арифметик амал бажарилади.

Барча $y_{i}^{k+\frac{1}{2}}$ лар топилгандан кейин (5.50) тенгламалар системасини ечамиз. Бу тенгламалар системасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$0,5\gamma y_{i,j-1}^{k+1} + (1-\gamma)y_{ij}^{k+1} + 0,5\gamma y_{i,j+1}^{k+1} = -\Phi_{ij}^{k},$$
$$\gamma = \tau h^{2-}, \Phi_{ij}^{k} = y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + 0,5\Delta\tau_2 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \qquad (5.52)$$

Кўриниб турибдики, ҳар бир белгиланган $i(i = 1, 2, ..., N-1)$ учун бу системани j ўзгарувчи бўйича ҳайдаш методи билан ечиш мумкин. Бунда чегаравий шартлар (5.42) масала бўйича

$$y_{i0}^{k+1} = \mu\left(x_{i0}, t_{k+1}\right), \; y_{iN}^{k+1} = \mu\left(x_{iN}, t_{k+1}\right)$$

кўринишда аниқланади; (5.42) системадан барча y_{ij}^{k+1} ларни топиш $0(N^2)$ та арифметик амални талаб қилади.

Шундай қилиб, маълум y_{ij}^{k} ларга кўра y_{ij}^{k+1} ларни топиш ўзгарувчан йўналишли метод бўйича $0(N^2)$ та арифметик амални талаб қилади. Кўрсатиш мумкинки, бўйлама-кўндаланг метод абсолют турғун бўлиб, $u(x, t)$ етарлича силлиқ бўлса, аппроксимация тартиби $0(\tau^2 + h^2)$ бўлади ва L_2 нинг тўрдаги нормасида тақрибий ечим аниқ ечимга $0(\tau^2 + h^2)$ тезликда яқинлашади (қ.[46, 47]).

10.5.6. Ўзгарувчан коэффициентли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини ечиш. Коэффициентлари ўзгарувчан бўлган қуйидаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масалани қарайлик:

$$\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \; 0 < x < l, \; 0 < t < T,$$
$$u(x,0) = u_0(x), u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t), \qquad (5.53)$$

бунда $\rho(x, t)$, $p(x, t)$, $f(x, t)$ етарлича силлиқ функциялар бўлиб,

$$C_1 \geq p(x, t) \geq C_2 > 0, \;\; \rho(x, t) \geq C_3 > 0 \qquad (5.54)$$

шартларни қаноатлантирсин. Ҳар бир белгиланган t учун (x_i,t) нуқтада $Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ дифференциал ифодани

$$\wedge_1(t)y_i = \frac{1}{h}\left[a(x_{i+1},t)\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a(x_i,t)\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right] \qquad (5.55)$$

айирмали нисбат билан аппроксимация қиламиз. Бунда $a(x_i,t)$ коэффициент баланс методидагидек иккинчи тартибли аппроксимация шартларини қаноатлантириши керак:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a(x_{i+1},t)+a(x_i,t)}{2} &= p(x_i,t)+0(h^2),\\ \frac{a(x_{i+1},t)-a(x_i,t)}{2} &= p'(x_i,t)+0(h^2).\end{aligned}\right\} \tag{5.56}$$

Баланс методида кўрганимиздек, $a(x_i,t)$ ни қуйидаги

$$a(x_i,t)=\frac{p(x_i,t)+p(x_{i-1},t)}{2},\ a(x_i,t)=p\left(x_i-\frac{h}{2},t\right),$$
$$a(x_i,t)=\frac{2p(x_{i-1},t)p(x_i,t)}{p(x_{i-1},t)+p(x_i,t)}$$

формулаларнинг бирортаси билан ҳисобласак, (5.56) муносабатлар ўринли бўлади. Шундай қилиб, (5.53) дифференциал тенгламага ушбу вазний айирмали масала мос келади:

$$\begin{gathered}\rho(x_i,t)\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\Delta(t)\left(\sigma y_i^{k+1}+(1-\sigma)y_i^k\right)+f(x_i,t),\\ i=1,2,...,M-1,\\ y_i^0=u_0(x_i),\ y_0^k=\mu_1(t_k),\ y_M^k=\mu_2(t_k).\end{gathered} \tag{5.57}$$

Бунда $t=t_k+0{,}5\tau$ ва $\sigma=0{,}5$ бўлса, у ҳолда (5.57) схема аппроксимациясининг хатолиги $r=0(\tau^2+h^2)$ бўлиб, $\sigma\neq 0{,}5$ бўлганда $r=0(\tau+h^2)$ бўлади. Шундай қилиб, биз ошкормас схемага эга бўлдик. Бу системани ечиш учун ҳайдаш методини қўллаш мумкин. Айирмали схеманинг турғунлигини текширишда, олдинги бандларда қараганларимиздан ташқари, *коэффициентларни музлатиш принципи* ҳам ишлатилади. Бу принцип ўзгарувчан коэффициентли масалани ўзгармас коэффициентли масалага келтиради. Мисол учун (5.57) схемада $\sigma=0$ ва $f(x_i,t)=0$ деб олиб, қуйидаги ошкор схемани қараймиз:

$$\rho(x_i,t)\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\frac{1}{h}\left[a(x_{i+1},t)\frac{y_{i+1}^k-y_i^k}{h}-a(x_i,t)\frac{y_i^k-y_{i-1}^k}{h}\right]. \tag{5.58}$$

Фараз қилайлик, $\rho(x_i,t)$, $a(x_i,t)$ коэффициентлар ўзгармас бўлсин, яъни $\rho(x_i,t)=\rho=\text{const}$, $a(x_i,t)=a=\text{const}$. У ҳолда (5.58) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\rho\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\frac{a}{h^2}\left(y_{i+1}^k-2y_i^k+y_{i-1}^k\right)$$

ёки

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau_1}=\frac{y_{i+1}^k-2y_i^k+y_{i-1}^k}{h^2}=,\quad \tau_1=\frac{\tau a}{\rho}.$$

Маълумки, бу ошкор схема $\tau_1 \le \frac{1}{2}h^2$ бўлганда, яъни

$$\frac{\tau a}{\rho}\le\frac{h^2}{2} \tag{5.59}$$

бўлганда турғун бўлади.

Коэффициентларни музлатиш принципи шуни тасдиқлайдики, агар барча x_i ва $t = t_k + 0{,}5\tau$ лар учун

$$\frac{\tau a(x_i,t)}{\rho(x_i,t)}\le\frac{h^2}{2} \tag{5.60}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (5.58) схема турғун бўлади. Агар $C_1 \ge a(x_i,\ t) \ge C_2 > 0$, $\rho\ (x_i,\ t) > C_3 > 0$ муносабатлар маълум бўлса, у ҳолда

$$\frac{\tau}{h^2}\le\frac{C_3}{2C_1}$$

бажарилганда (5.60) тенгсизлик ўринли бўлади. (5.58) схеманинг турғунлигини қатъий равишда асослашни [47] дан қараш мумкин.

Агар $\sigma \ge 0{,}5$ бўлса, у ҳолда коэффициентларни музлатиш принципидан (5.57) схеманинг абсолют турғунлиги келиб чиқади.

10.5.7. Чизиқли бўлмаган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини ечиш. Қуйидаги чегаравий масалани қараймиз:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u),\ 0<x<l,\ 0<t<T,\\ u(x,0)=u_0(x), u(0,t)=\mu_1(t), u(1,t)=\mu_2(t).\end{gathered} \tag{5.61}$$

Одатда, чизиқли бўлмаган тенгламаларда $p(u)$ функциянинг ўзгариш соҳаси олдиндан маълум бўлмаса, ошкор схемалар ишлатилмайди.

Соф ошкормас схема $y_i^{k+1}\left(i=\overline{1,M-1}\right)$ номаълумларга нисбатан чизиқли системани ҳам, чизиқли бўлмаган системани ҳам ташкил этиши мумкин. Ушбу схема

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\cdot\frac{y_{i+1}^{k+1}-y_i^{k+1}}{h}-a_i\cdot\frac{y_i^{k+1}-y_{i-1}^{k+1}}{h}\right]+f\left(y_i^k\right) \tag{5.62}$$

да $a_i = \frac{1}{2}\left[p\left(y_i^k\right) + p\left(y_{i-1}^k\right)\right]$ деб олсак, у ҳолда $y_i^{k+1}(i = \overline{1, M-1})$ номаълумларга нисбатан чизиқли, абсолют турғун бўлиб, аппроксимация хатолиги $r = 0(\tau + h^2)$ бўлади. Бу системанинг ечими ҳайдаш методи билан топилади.

Кўпинча (5.53) тенглама учун ушбу

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a\left(y_{i+1}^{k+1}\right)\frac{y_{i+1}^{k+1} - y_i^{k+1}}{h} - a\left(y_i^{k+1}\right)\frac{y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{h}\right] + f\left(y_i^{k+1}\right),$$

$$a\left(y_i^{k+1}\right) = \frac{p\left(y_i^{k+1}\right) + p\left(y_{i-1}^{k+1}\right)}{2} \tag{5.63}$$

соф ошкормас схема ишлатилади. Бу схемани қўллаш учун у ёки бу итерацион метод қўлланилади. Масалан, итерацион жараённи қуйидагича олиб боришимиз мумкин:

$$\frac{y_i^{(S+1)} - y_i^k}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a\left(y_{i+1}^{(S)}\right)\frac{y_{i+1}^{(S+1)} - y_i^{(S+1)}}{h} - a\left(y_i^{(S)}\right)\frac{y_i^{(S+1)} - y_{i-1}^{(S+1)}}{h}\right] + f\left(y_i^{(S)}\right),$$

$$S = 0, 1, \ldots, L-1, y_i^{(0)} = y_i^k, y_i^{(L)} = y_i^{k+1}, \tag{5.64}$$

бу ерда S — итерация номери. Бу итерацион жараёндан кўрамизки, чизиқли бўлмаган коэффициентлар олдинги итерацияда, яъни y_i^k да ҳисобланади, y_i^{k+1} нинг дастлабки яқинлашиши сифатида y_i^k олинади. Агар τ қадам қанча кичик бўлса, бу дастлабки яқинлашиш шунча яхши бўлади. Агар коэффициентлар силлиқ бўлиб, $p(u) \geq C_2 > 0$ шарт бажарилса, одатда, икки-учта итерация қониқарли натижага олиб келади. Ҳар бир янги итерацияда $y_i^{(s+1)}$ нинг қийматлари (5.64) системадан ҳайдаш методи билан аниқланади. Шунингдек, (5.64) системани ечиш учун иккинчи тартибли аниқликка эга бўлган предиктор-корректор схемаси ҳам ишлатилади. Бунда k-қатламдан $(k + 1)$ қатламга ўтиш икки босқичда бажарилади. Биринчи босқичда ҳайдаш методи билан ошкормас чизиқли система

$$\frac{y_i^{k+\frac{1}{2}} - y_i^k}{0{,}5\tau} = \frac{1}{h}\left[a\left(y_{i+1}^k\right)\frac{y_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - y_i^{k+\frac{1}{2}}}{h} - a\left(y_i^k\right)\frac{y_i^{k+\frac{1}{2}} - y_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h}\right] +$$

$$+ f\left(y_i^k\right), i = 1, 2, \ldots, M-1,$$

$$y_o^{k+\frac{1}{2}} = \mu_1(t_k + 0{,}5\tau), \; y_M^{k+\frac{1}{2}} = y_2(t_k + 0{,}5\tau)$$

ечилиб, орадаги $y_i^{k+\frac{1}{2}}$ $(i = 0,1,...,M)$ қийматлар топилади. Иккинчи босқичда эса $a(y), f(y)$ чизиқли бўлмаган коэффициентлар $y = y_i^{k+\frac{1}{2}}$ да ҳисобланиб, y_i^{k+1} ларни топиш қуйидаги олти нуқтали симметрик схема

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{2} = \frac{1}{2h}\left[a\left(y_{i+1}^{k+\frac{1}{2}}\right)\frac{y_{i+1}^{k+1}-y_i^{k+1}}{h} - a\left(y_i^{k+\frac{1}{2}}\right)\frac{y_{i+1}^k-y_i^k}{h}\right]+$$

$$+f\left(y_i^{k+\frac{1}{2}}\right), \ i = 1,2,...,M-1, \ y_0^{k+1} = \mu_1\left(t_{k+1}\right), \ y_M^{k+1} = \mu_2\left(t_{k+1}\right)$$

асосида олиб борилади.

10.6-§. ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ АЙИРМАЛИ МЕТОДЛАР БИЛАН ЕЧИШ

Бу бандда соддалик мақсадида бир жинсли гиперболик тенглама учун Коши масаласини ва биринчи чегаравий масалани кўриб чиқамиз.

10.6.1. Коши масаласини ечиш. Маълумки, Коши масаласи қуйидагича қўйилади: $G = \{t > 0, -\infty < x < \infty\}$ соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи шундай $u(x,t)$ функцияни топиш керакки, бу соҳада у

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.1}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириб, $t = 0$ тўғри чизиқда

$$u(x,0) = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{6.2}$$

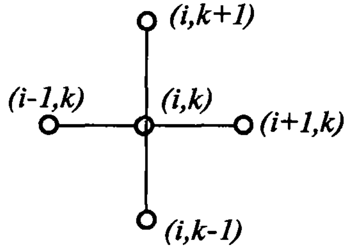
дастлабки шартларни қаноатлантирсин, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ берилган функциялар.

Дифференциал тенгламани айирмали тенглама билан алмаштириш учун $G_{h\tau} = \omega_h \omega_\tau$ тўрни киритамиз, бунда

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., h > 0\},$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, ..., \tau > 0\},$$

кейин 13-чизмадагидек беш нуқтали андазадан фойдаланамиз. Бу андаза асосида қурилган схема *уч қатламли схема* дейилади. Бу андазадан қуйидаги айирмали схема келиб чиқади:



13-чизма.

$$\frac{y_i^{k+1}-2y_i^k+y_i^{k-1}}{\tau^2}=\frac{y_{i+1}^k-2y_i^k+y_{i-1}^k}{h^2}, \qquad (6.3)$$
$$i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\ k=1,2,\ldots$$

Биз биламизки, бу схема (5.1) дифференциал тенгламани $0(\tau^2+h^2)$ аниқликда аппроксимация қилади. Чегаравий шартнинг иккинчисини

$$\frac{y_i^1-y_i^0}{\tau}=\varphi(x_i) \qquad (6.4)$$

билан алмаштирсак, у ҳолда аппроксимация тартиби $0(\tau)$ бўлади. Аммо чегаравий шартни ҳам $0(\tau^2)$ аниқликда аппроксимация қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{u(x,\tau)-u(x,0)}{\tau}=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2u(x,0)}{\partial t^2}+0(\tau^2)$$

ёйилмадан ҳамда (6.1) дифференциал тенгламадан ҳосил бўладиган

$$\frac{\partial^2u(x,0)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u(x,0)}{\partial x^2}=\varphi''(x)$$

муносабатдан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{u(x,\tau)-u(x,0)}{\tau}-\frac{\tau}{2}\varphi''(x)+0(\tau^2).$$

Бундан эса

$$\frac{y_i^1-y_i^0}{\tau}=\psi(x_i)+\frac{\tau}{2}\varphi''(x_i) \qquad (6.5)$$

га эга бўламиз. Агар $\varphi(x)$ нинг аналитик ифодаси берилган бўлмаса, у ҳолда $\varphi''(x_i)$ ни $0(h^2)$ аниқликда

$$\Delta_2\varphi_i=\frac{1}{h^2}(\varphi(x_{i-1})-2\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1}))$$

билан алмаштириш мумкин, натижада

$$\frac{y_i^1-y_i^0}{\tau}=\psi(x_i)+\frac{\tau}{2}\Delta_2\varphi_i \qquad (6.6)$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, дастлабки шарт, (5.3) ва (5.6) дан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

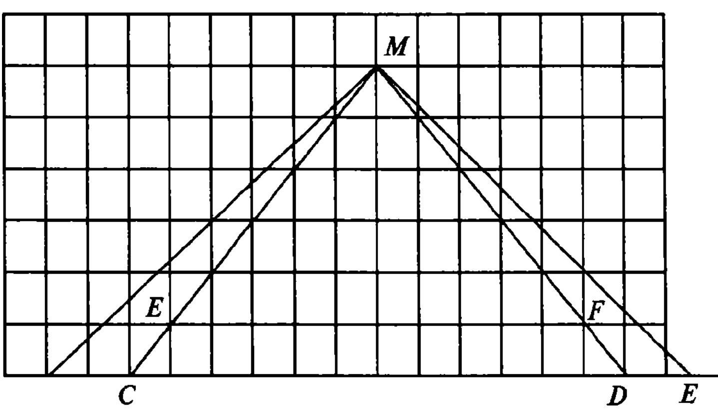
$$y_i^0 = \varphi(x_i),\ y_i' = \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\Delta_2\varphi_i, \tag{6.7}$$

$$y_i^{k+1} = 2y_i^k + \tau^2\Delta_2 y_i^k - y_i^{k-1},\ i = 0, \pm1, \pm2, \ldots k = 1, 2, \ldots \tag{6.8}$$

Бундан кўрамизки, y_i^0 ва y_i' $(i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ қийматлар (6.7) дан маълум. (6.8) дан барча k = 1, 2, ... учун кетма-кет аввал $y_i^2 (i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, кейин $y_i^3 (i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ва ҳ.к. ларни топиб оламиз.

Параболик тенгламада схеманинг турғунлиги учун қадамлар орасида $\tau \le \frac{1}{2}h^2$ шартнинг бажарилиши кераклигини кўрган эдик. Энди гиперболик тенглама $\gamma = \frac{\tau}{h}$ учун қандай шартни бажариш кераклигини текширамиз.

Фараз қилайлик, ихтиёрий i ва $j \ge 2$ учун $M(x_i,\ t_j)$ тугунда y_i^j нинг қийматини (6.8) формула билан топиш керак бўлсин. Бунинг учун (6.8) да $k = j - 1$ деб олиб, кўрамизки, y_i^j нинг қиймати y_{i+1}^{j-1}, y_i^{j-1}, y_{i+1}^{j-1} ва y_i^{j-2} лар орқали ифодаланади. Агар $j > 3$ бўлса, ўз навбатида, y_{i+1}^{j-1}, y_i^{j-1}, y_{i-1}^{j-1}, y_i^{j-2} ларнинг қийматлари паст қатламлардаги y_{i+2}^{j-2}, y_{i+1}^{j-2}, y_i^{j-2}, y_{i-1}^{j-2}, y_{i-2}^{j-2}, y_{i+1}^{j-3}, y_i^{j-3}, y_{i-1}^{j-3}, y_i^{j-4} лар орқали ифодаланади. Бу жараённи давом эттириб, охирги натижада y_i^j ни $y_m^0(m = i + s, s = 0, \pm1, \ldots, \pm\ j - 2)$ ва $y_m^1(m = i + s, s = 0, \pm1, \ldots, \pm\ j - 1)$ орқали ифодалаймиз. Бу қийматларнинг барчаси тенг ёнли ΔMCD учбурчак ичида ётади (14-чизма). Бу учбурчакнинг учи $M(x_i,\ t_j)$ нуқтада бўлиб, бир томони Ox ўқида, қолган икки томони MC ва MD дан иборат. Улар Ox ўқи билан $\pm\mathrm{arctg}\,\gamma, \gamma = \tau/h = \mathrm{const}$ бурчакни ташкил этади. MCD учбурчак (6.8) *айирмали схеманинг аниқланганлик учбурчаги* дейилади.



14-чизма.

Шундай қилиб, y_i^j нинг қиймати M нуқтада (6.8) тенглама ва CD ҳамда EF кесмаларда ётувчи y_m^0 ва y_m^1 дастлабки қийматлар орқали аниқланади. Математик физикадан маълумки, $u(x, t)$ ечимнинг $M(x_i, t_j)$ нуқтадаги қиймати (6.1) тенглама ҳамда $M(x_i, t_j)$ нуқтадан ўтувчи

$$t - t_j = x - x_i, \quad t - t_j = -x + x_i \tag{6.9}$$

характеристикалар $t = 0$ тўғри чизиқда ажратадиган кесмадаги шартлар билан, яъни AB кесмадаги бошланғич шартлар билан бир қийматли равишда аниқланади. (6.1) тенгламанинг (6.9) характеристикалари ўзаро перпендикуляр бўлиб, Ox ўқи билан $\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{3\pi}{4}$ бурчакларини ташкил этади; MAB учбурчак (6.1) *дифференциал тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги* дейилади.

Фараз қилайлик, тўрнинг τ қадами h дан катта бўлсин (14-чизма). Бу ҳолда $\angle MAB < \angle MCD$ ва $\mathrm{tg}(\angle MCD) = \gamma > 1$ бўлиб, айирмали тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги дифференциал тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги ичида ётади. Шунинг учун ҳам CD кесмада бериладиган дастлабки шартлар M нуқтада ечимни аниқлаш учун етарли эмас. Агар биз AC ва DB кесмаларда бошланғич шартларни ўзгартирсак, (6.1), (6.2) масаланинг ечими бутун G соҳада, жумладан, M нуқтада ўзгариши керак. Аммо y_i^j нинг тўрдаги қиймати M нуқтада бундай ўзгаришларга боғлиқ бўлмасдан, ўзгармай қолади. Демак, $\gamma > 1$ бўлганда (6.7), (6.8) айирмали масаланинг ечими $h \to 0$ да (6.1), (6.2) Коши масаласининг ечимига яқинлашмайди; (6.7), (6.8) айирмали масала (6.1), (6.2) дифференциал масалани аппроксимация қилганлиги сабабли у турғун бўла олмайди, чунки аппроксимация ва турғунликдан яқинлашиш келиб чиқиши керак. Бундан биз шундай хулосага келамиз: $\gamma = \tau/h = \mathrm{const}$ бўлганда тўр методи билан топилган тақрибий ечимлар кетма-кетлиги $h \to 0$ да яқинлашиши учун $\gamma \leq 1$ шартнинг бажарилиши зарурдир, яъни дифференциал тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги айирмали тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги билан устма-уст тушиши ёки унинг ичида ётиши керак. Умумий ҳолда дифференциал тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги эгри чизиқли учбурчак бўлади, аммо бу ҳолда ҳам дифференциал тенгламанинг аниқланганлик учбурчаги айирмали схеманинг аниқланганлик учбурчаги ичида ётиши лозим. Бу шартнинг бажарилиши учун тўр қадамлари маълум муносабатда олиниши, яъни тўрнинг махсус танланиши талаб қилинади. Дифференциал тенгламанинг коэффициентларидан ва бошланғич шартларидан маълум силлиқлик талаб қилинганда тақрибий ечимлар кетма-кетлигининг Коши масаласи ечимига яқинлашиши учун юқоридаги шарт етарли бўлади.

10.6.2. Биринчи чегаравий масалани ечиш. Биз энди тебраниш тенгламаси учун $G = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ соҳада ушбу биринчи чегаравий масалани кўриб чиқамиз. Яъни G соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u(x, t)$ функцияни топиш керакки, бу соҳада у

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.10)$$

тенгламани қаноатлантириб, $t = 0$ тўғри чизиқда

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad (6.11)$$

дастлабки шартларни ва

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), 0 \le t \le T \qquad (6.12)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин. Бу масалани тўр методи билан ечиш учун ушбу

$$G_{h\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{0, M}, hM = 1; t_k = k\tau, k = \overline{0, N}, N\tau = T\}$$

тўрни киритамиз ва 13-чизмадагидек уч қатламли андаза бўйича (6.1) дифференциал тенгламани (6.3) даги айирмали схема билан алмаштирамиз, бу ерда i ва k қуйидаги қийматларни қабул қилади:

$$i = 1,2, \ldots, M-1; \ k = 1,2, \ldots, N-1.$$

Дастлабки шартлар учун (6.7) формуладан фойдаланамиз. Чегаравий шартлар қуйидагича ёзилади:

$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}), \ y_M^{k+1} = \mu_2(t_{k+1}), \ k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Буларнинг ҳаммасини бирлаштириб, айирмали схеманинг қуйидаги ҳисоблаш алгоритмига эга бўламиз:

$$y_i^0 = \varphi(x_i), y_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\Delta_2\varphi_i, \qquad (6.13)$$

$$y_i^{k+1} = 2y_i^k + \tau^2\Delta_2 y_i^k - y_i^{k-1}, \ i = 1,2,\ldots,M-1, \qquad (6.14)$$

$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}), \ y_M^{k+1} = \mu_2(t_{k+1}), \ k = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (6.15)$$

Юқорида кўрдикки, бу схема (6.1), (6.3) чегаравий масалани $0(\tau^2 + h^2)$ аниқликда аппроксимация қилади. Кўрсатиш мумкинки, (қ.[42, 47, 24]), агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун τ ва h қадамлар қуйидаги

$$\frac{\tau^2}{h^2} \le \frac{1}{1+\varepsilon} \tag{6.16}$$

шартни қаноатлантирса, (6.7), (6.10), (6.11) схема турғун бўлади. Биз бунинг исботига тўхталиб ўтирмаймиз.

Мисол. Тўр методи билан $G = \{0 < x < 1,\ 0 < t < 1\}$ соҳада

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тўр тенгламасининг

$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,(0 \le t \le 1),$$

$$u(x,0) = \sin \pi x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

чегаравий ва дастлабки шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин.

Ечиш. Бу ерда $h=0,1$ ва $\tau = 0,8h = 0,08$ деб оламиз. Кейин $\varphi(x) = \sin \pi x$, $\varphi''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$ ҳамда $\psi(x)=0$ лигини ҳисобга олиб, (6.5) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$y_i^1 = y_i^0 + \frac{\tau^2}{2}\varphi''(x_i) = \left(1 - 0,0032\pi^2\right)\sin \pi x_i.$$

Энди Λ_2 операторнинг кўринишини эътиборга олсак, ҳисоблаш учун қуйидаги алгоритм ҳосил бўлади:

$$y_i^0 = \sin \pi x_i,\ y_i^1 = \left(1 - 0,0032\pi^2\right)\sin \pi x_i,\ i = 1,2,\dots,M-1,$$

$$y_0^{k+1} = y_M^{k+1} = 0,\ k = 0,1,\dots,N-1,$$

$$y_i^{k+1} = 0,64 y_{i+1}^k + 0,72 y_i^k + 0,64 y_{i-1}^k - y_i^{k-1}.$$

Ҳисоблашни фақат $0 \le x \le \frac{1}{2}$ учун бажарса етарли бўлади, чунки $u=u(x,t)$ ечимнинг графиги $x = \frac{1}{2}$ текисликка нисбатан симметрик равишда жойлашган.

10.7-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШДА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАР МЕТОДИ

10.7.1. Квазигиперболик дифференциал тенгламалар системаси характеристикаларининг тенгламалари. Маълумки, ҳар қандай хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни алмаштиришлар бажариш натижасида унга тенг кучли бўлган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига келтириш мумкин. Кўп жиҳатдан бундай системалар назарий ўрганишда ҳам, тақрибий ечишда ҳам маълум афзалликларга эгадир.

Ёзув мураккаб бўлмаслиги ва асосий ғоя тушунарли бўлиши учун иккита биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини қараймиз:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+b_{11}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{12}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=f_1,\\
&a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+b_{21}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{22}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=f_1.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Бу ерда

$$a_{ij}=a_{ij}(x,y,u,\vartheta),\ b_{ij}=b_{ij}(x,y,u,\vartheta),\ f_i=f_i(x,y,u,\vartheta)$$

функциялар x, y, u, ϑ ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасида узлуксиз дифференциалланувчи функциялардир. Бундай системалар квазичизиқли дейилади. Агар a_{ij}, b_{ij} коэффициентлар фақат x ва y га боғлиқ бўлса, у ҳолда (7.1) система ярим чизиқли дейилади. Агар, бундан ташқари, f_1 ва f_2 лар u ва ϑ га нисбатан чизиқли функция бўлса, у ҳолда (7.1) система чизиқли система дейилади.

Квазичизиқли системалар кўпинча газодинамика масалаларида учрайди.

Фараз қилайлик, G соҳа Oxy текисликда ётсин ва $u(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ функциялар (7.1) системанинг G соҳада узлуксиз дифференциалланувчи ечими бўлиб, C эса G соҳада жойлашган каррали нуқталарга эга бўлмаган силлиқ эгри чизиқ бўлсин. Биз бу ерда $u = u(x, y)$ ва $\vartheta = \vartheta(x, y)$ ечимнинг C устидаги қийматига кўра (7.1) системадан фойдаланиб, C устида $p_1=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q_1=\frac{\partial u}{\partial y}$, $p_2=\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $q_2=\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларнинг қийматини аниқлаш масаласини қараймиз.

Аввало, (7.1) системадан кўрамизки, C эгри чизиқ устида p_1, p_2, q_1, q_2 хусусий ҳосилаларнинг қийматлари

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_{11}p_1+a_{12}p_2+b_{11}q_1+b_{12}q_2=f_1,\\
&a_{21}p_1+a_{22}p_2+b_{21}q_1+b_{22}q_2=f_2
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.2}
$$

муносабатларни ва C эгри чизиқ устида

$$p_1dx+q_1dy=du,\ p_2dx+q_2dy=d\vartheta \tag{7.3}$$

дифференциал муносабатларни қаноатлантиради. Шундай қилиб, p_1, p_2, q_1, q_2 ларни аниқлаш учун тўртта биринчи тартибли чизиқли тенгламага эга бўламиз.

Энди C устида $dx \neq 0$ деб фараз қилиб, (7.3) ни

$$p_1=-q_1\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dx},\ p_2=-q_2\frac{dy}{dx}+\frac{d\vartheta}{dx} \tag{7.4}$$

кўринишда ёзиб оламиз ва (7.3), (7.4) муносабатлардан p_1 ва p_2 ни йўқотамиз, натижада q_1 ва q_2 га нисбатан қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}(b_{11}dx - a_{11}dy)q_1 + (b_{12}dx - a_{12}dy)q_2 = f_1dx - a_{11}du - a_{12}d\vartheta,\\ (b_{21}dx - a_{21}dy)q_1 + (b_{22}dx - a_{22}dy)q_2 = f_2dx - a_{21}du - a_{22}d\vartheta.\end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Агар бу системадан q_1 ва q_2 ни топиш мумкин бўлса, у ҳолда (7.4) дан p_1 ва p_2 ни топамиз. Биз C устида $dx \neq 0$ деб фараз қилган эдик, акс ҳолда $dy \neq 0$ бўлиб, (7.4) нинг ўрнига

$$q_1 = -p_1\frac{dx}{dy} + \frac{du}{dy},\ q_2 = -p_2\frac{dx}{dy} + \frac{d\vartheta}{dy} \tag{7.6}$$

муносабатларга эга бўламиз ва (7.5) нинг ўрнига

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}dy - b_{11}dx)p_1 + (a_{12}dy - b_{12}dx)p_2 = f_1dy - b_{11}du - b_{12}d\vartheta,\\ (a_{21}dy - b_{21}dx)p_1 + (a_{22}dy - b_{22}dx)p_2 = f_2dy - b_{21}du - b_{22}d\vartheta\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

системага эга бўламиз. (7.5) ва (7.7) системаларнинг аниқловчилари фақат ишораси билан фарқ қилиши мумкин. (7.5) системанинг детерминантини Δ орқали белгилаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}dx - a_{11}dy & b_{12}dx - a_{12}dy \\ b_{21}dx - a_{21}dy & b_{22}dx - a_{22}dy \end{vmatrix}. \tag{7.8}$$

Бу ерда икки ҳолни кўрамиз:

1) Δ детерминант C эгри чизиқнинг бирорта нуқтасида ҳам нолга айланмайди;

2) Δ детерминант C эгри чизиқ устида айнан нолга тенг.

Биринчи ҳолда (7.5) система q_1, q_2 га нисбатан ягона ечимга эга, демак, C эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $u(x, y)$ ва $\vartheta(x, y)$ ларнинг C даги қийматлари ҳамда (7.1) система бўйича бу функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топиш мумкин.

Иккинчи ҳолда (7.1) системанинг ечими мавжуд деб фараз қилганлигимиз учун (7.5) система ўриндош бўлиши керак. Аммо $\Delta \equiv 0$ бўлганлиги учун (7.5) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Шундай қилиб, иккинчи ҳолда $u(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ ларнинг C устидаги қийматлари бўйича ечимларнинг хусусий ҳосилаларини C устида бир қийматли равишда аниқлаб бўлмайди. C эгри чизиқ билан ечимнинг бу эгри чизиқ бўйлаб олинган қиймати биргаликда (7.1) системанинг (x, y, u, ϑ) фазодаги характеристик эгри чизиғи дейилади. Бу эгри чизиқ бўйлаб (7.1) системанинг ечими тармоқланиши мумкин. C характеристика характеристик эгри чизиқнинг Oxy текислигидаги проекцияси бўлади.

C характеристикага ўтказилган уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчагининг тангенси $\lambda = \frac{dy}{dx}$ қуйидаги тенгламани қаноатлантиради:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.9)$$

Белгиланган (x, y, u, ϑ) нуқтада бу λ га нисбатан квадрат тенглама бўлади. Агар бу тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлса, у ҳолда (7.1) система (x, y, u, ϑ) нуқтада гиперболик система дейилади. Агар бу хусусият (x, y, u, ϑ) фазонинг бирор соҳасининг ҳар бир нуқтасида ўринли бўлса, у ҳолда (7.1) система бу соҳада гиперболик системани ташкил этади дейилади. Биз фақат гиперболик системаларни қараймиз.

Равшанки, (7.1) гиперболик системанинг берилган $u(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ ечими аниқланган G соҳанинг ҳар бир нуқтасида (7.9) тенглама иккита ҳақиқий ҳар хил ечимга эга бўлиб, улар берилган ечимга мос келадиган характеристикаларга ўтказилган уринмаларнинг иккита йўналишини аниқлайди. Берилган ечимга мос келадиган (7.9) тенгламанинг илдизларини λ_1 ва λ_2 орқали белгилаймиз (улар x ва y нинг функциялари бўлади), натижада қуйидаги иккита тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$dy = l_1(x, y)dx, \quad dy = l_2(x, y)dx.$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бири G соҳани тўшовчи бир параметрли эгри чизиқлар оиласини — бу тенгламанинг интеграл чизиқларини ташкил этади. G соҳанинг ҳар бир нуқтасидан оиланинг биттагина эгри чизиғи ўтади. (7.9) тенгламани биринчи тартибли иккинчи даражали дифференциал тенглама сифатида қарасак, у ҳолда (7.1) системанинг берилган ечими u, ϑ учун иккита бир параметрли эгри чизиқлар оиласи ёки характеристикалар оиласига эга бўламиз. G соҳанинг ҳар бир нуқтасидан ҳар бир оиланинг биттагина характеристикаси ўтади. Агар (7.1) система қатъий квазичизиқли бўлса, у ҳолда унинг характеристикаси система ечимининг танланишига қатъий боғлиқ бўлиб, фақат ечим маълум бўлгандагина уни аниқлаш мумкин. Чизиқли система учун a_{ij}, b_{ij} коэффициентлар u, ϑ ларга боғлиқ бўлмайди ва шунинг учун ҳам (7.9) тенгламадан характеристикаларни u, ϑ ларга боғлиқ бўлмаган ҳолда аниқлаш мумкин.

Фараз қилайлик, C эгри чизиқ Oxy текислигида (7.1) системанинг u, ϑ берилган ечимига мос келадиган характеристика бўлсин. C эгри чизиқда Δ детерминант нолга тенг. Аммо (7.5) система ўриндош бўлганлиги учун Δ детерминантда мос равишда 1- ва 2- устунларини озод ҳадлар билан алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган Δ_1

ва Δ_2 детерминантлар ҳам нолга айланиши керак. Шундай қилиб, C эгри чизиқда u, ϑ қуйидаги учта муносабат билан боғланган:

$$\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0.$$

Аммо бу шартлар ўзаро эркли эмас. (7.1) система гиперболик бўлганлиги учун $\Delta = 0$ ва, демак, бу детерминантнинг устунлари орасида чизиқли боғланиш мавжуд. Шунинг учун ҳам $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$ ва $\Delta = 0$, $\Delta_2 = 0$ шартларнинг биридан иккинчиси келиб чиқади. Биз бу шартлардан асосийси сифатида

$$\Delta = 0, \Delta_1 = 0 \tag{7.10}$$

ни оламиз. Шундай қилиб, C характеристикада $u(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ ечим характеристика тенгламалари деб аталувчи иккита (7.10) шартлар билан боғланган. Булардан биринчиси характеристика йўналишининг тенгламаси, иккинчиси эса характеристика устида дифференциал муносабат дейилади.

Шуни таъкидлашимиз керакки, агар биз характеристикани эмас, характеристик эгри чизиқни қарасак, у ҳолда у (7.1) системанинг бир неча ечимига тегишли бўлиши мумкин. Агар ечимнинг узлуксиз дифференциалланувчи бўлишидан воз кечсак, у ҳолда ечим узлуксиз бўла туриб, биринчи ҳосилалар фақат характеристика бўйлаб узилишга эга бўлиши мумкин. Бундай ечимларни қуйидагича топиш мумкин:

Фараз қилайлик, $u^{(1)}(x,y)$, $\vartheta^{(1)}(x,y)$ ва $u^{(2)}(x,y), \vartheta^{(2)}(x,y)$ лар (7.1) системанинг иккита ечими бўлиб, улар G соҳада узлуксиз ҳосилага эга бўлишсин, C эса ҳар иккала ечимга тегишли бўлган характеристик эгри чизиқнинг Oxy текислигидаги проекцияси бўлсин. Қуйидаги ечимни қараймиз:

$$u(x,y) = \begin{cases} u^{(1)}(x,y) & C \text{ нинг бир томонида,} \\ u^{(2)}(x,y) & C \text{ нинг иккинчи томонида;} \end{cases}$$

$$\vartheta(x,y) = \begin{cases} \vartheta^{(1)}(x,y) & C \text{ нинг бир томонида,} \\ \vartheta^{(2)}(x,y) & C \text{ нинг иккинчи томонида.} \end{cases}$$

Бу ечим G соҳада узлуксиз, аммо C да ҳосилалари узилишга эга.

Юқоридагилардан қуйидаги хулосага келамиз: характеристикалар йўналишларининг тенгламалари қуйидагилардан иборат:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x,y,u,\vartheta), \ \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x,y,u,\vartheta), \tag{7.11}$$

бунда λ_1 ва λ_2

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda a_{11} & b_{12}-\lambda a_{12} \\ b_{21}-\lambda a_{21} & b_{22}-\lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{7.12}$$

тенгламанинг илдизлари. Характеристикалар устидаги дифференциал муносабатлар

$$\begin{vmatrix} f_1 dx - a_{11} du - a_{12}\, d\vartheta & b_{12}-\lambda_i a_{12} \\ f_2 dx - a_{21} du - a_{22}\, d\vartheta & b_{22}-\lambda_2 a_{12} \end{vmatrix} = 0 (i=1,2) \tag{7.13}$$

ёки

$$(\lambda_1 A + B) du + C d\vartheta + M dx + N dy = 0 (i=1,2) \tag{7.14}$$

дан иборатдир, бу ерда

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{11} \\ b_{22} & a_{21} \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix},$$

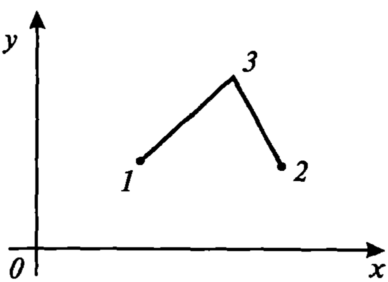
$$M = \begin{vmatrix} f_1 & b_{12} \\ f_2 & b_{22} \end{vmatrix},\ N = \begin{vmatrix} a_{12} & f_1 \\ a_{22} & f_2 \end{vmatrix}. \tag{7.15}$$

Шуни таъкидлаш керакки, агар (7.1) система чизиқли ёки ярим чизиқли бўлса, яъни a_{ij}, b_{ij} коэффициентлар u, ϑ га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда λ_2 ва λ_1 лар ҳам u, ϑ га боғлиқ бўлмай, (7.11) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x_1, y), \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x_1 y).$$

Бундай характеристикаларни Oxy текислигида u, ϑ ечимга боғлиқ бўлмаган ҳолда топиш мумкин. Квазичизиқли бўлган ҳолда характеристикалар u, ϑ ечимга боғлиқ бўлиб, характеристикалар тўрини қуриш билан бу тўр тугунларида u ва ϑ ечимларнинг қийматини топиш бир вақтда олиб борилиши керак.

10.7.2. Характеристика тенгламаларини сонли ечиш. Oxy текислигида координаталари (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) бўлган *1* ва *2* нуқталарни оламиз (15-чизма). Фараз қилай-



15-чизма.

лик, бу нуқталарда (7.1) системанинг изланаётган u, ϑ ечимларининг қийматлари маълум бўлсин. Уларнинг *1* ва *2* нуқталардаги қийматларини u_1, ϑ_1 ва u_2, ϑ_2 орқали белгилаймиз. Кейин характеристикаларнинг биринчи оиласига мансуб бўлиб, характеристика йўналиши бўйича йўналган ва *1* нуқтадан чиқадиган тўғри чизиқни, шунингдек, *2* нуқтадан чиқадиган характеристикаларнинг иккинчи оиласига тегишли бўлган характеристика бўйича йўналган тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар қандайдир *3*-нуқтада кесишади. Кейин (7.11) ва (7.14) тенгламаларни *1* ва *3* нуқталарни ҳамда *2* ва *3* нуқталарни бирлаштирувчи чизиқлар бўйича интеграллаймиз, натижада x_3, y_3 номаълум координаталарни ҳамда (x_3, y_3) нуқтадаги u, ϑ ечимнинг қийматлари u_3, ϑ_3 ни топиш учун қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$y_3 - y_1 = \int_1^3 \lambda_1(x, y, u, \vartheta)dx \tag{7.16}$$

$$y_3 - y_2 = \int_1^3 \lambda_1(x, y, u, \vartheta)dx \tag{7.17}$$

$$\int_1^3 \Big\{\big[\lambda(x,y,u,\vartheta)A(x,y,u,\vartheta) + B(x,y,u,\vartheta)\big]du + C(x,y,u,\vartheta)d\vartheta +$$
$$+M(x,y,u,\vartheta)dx + N(x,y,u,\vartheta)dy\Big\} = 0, \tag{7.18}$$

$$\int_2^3 \Big\{\lambda_2\big[x,y,u,\vartheta)A(x,y,u,\vartheta) + B(x,y,u,\vartheta)\big]du + C(x,y,u,\vartheta)d\vartheta +$$
$$+M(x,y,u,\vartheta)dx + N(x,y,u,\vartheta)dy\Big\} = 0. \tag{7.19}$$

Бу интегралларни бирор тақрибий метод билан ҳисоблаб, $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$, $u_3^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$ тақрибий ечимларни топиб оламиз. Бу ерда икки метод — Эйлер методининг аналоги ва трапециялар методининг аналогини қўллаш мумкин. Биз шулардан биттасини келтирамиз. Бу метод адабиётларда *Массо методи* ҳам дейилади.

10.7.3. Эйлер методининг аналоги. Қулай бўлиши учун $\lambda_{1.1}^{(1)} = \lambda_1(x_1, y_1)$, $\lambda_{2.2}^{(1)} = \lambda_2(x_2, y_2)$, белгилашларни киритамиз ва A, B, C, M, N ифодаларнинг (x_i, y_i) $(i = 1,2)$ нуқталардаги қийматларини мос равишда $A_i^{(1)}$, $B_i^{(1)}$, $C_i^{(1)}$, $M_i^{(1)}$, $N_i^{(1)}$ орқали белгилаймиз. Юқоридаги (7.16)–(7.19) интегралларни ҳисоблаш учун чап тўғри бурчакли тўртбурчаклар формуласини қўллаймиз, натижада $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$, $u_3^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$ ларни топиш учун қуйидаги тақрибий чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$y_3^{(1)} - y_1 \cong \lambda_{1.1}^{(1)}(x_3^{(1)} - x_1),$$

$$y_3^{(1)} - y_2 \cong \lambda_{2.2}^{(1)}(x_3^{(1)} - x_2),$$

$$\left(\lambda_{1.1}^{(1)} A_1^{(1)} + B_1^{(1)}\right)\left(u_3^{(1)} - u_1\right) + C_1^{(1)}\left(\vartheta_3^{(1)} - \vartheta_1\right) + M_1^{(1)}\left(x_3^{(1)} - x_1\right) + N_1^{(1)}\left(y_3^{(1)} - y_1\right) \approx 0,$$

$$\left(\lambda_{2.2}^{(1)} A_2^{(1)} + B_2^{(1)}\right)\left(u_3^{(1)} - u_2\right) + C_2^{(1)}\left(\vartheta_3^{(1)} - \vartheta_2\right) + M_2^{(1)}\left(x_3^{(1)} - x_2\right) + N_2^{(1)}\left(y_3^{(1)} - y_2\right) \cong 0$$

Бу тенгликларнинг ҳар бирининг хатолиги $O(h^2)$ бўлиб, бунда $h = \max\left\{\left|x_3^{(1)} - x_1\right|, \left|x_3^{(1)} - x_2\right|\right\}$. Бу системадан топилган $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$, $u_3^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$ тақрибий қийматларнинг аниқлиги етарли бўлмаслиги мумкин. Чунки *1* ва *2* нуқталардан чиққан характеристикаларни тўғри чизиқларнинг кесмаси билан алмаштирдик, аслида эса улар эгри чизиқли характеристикаларнинг кесишиш нуқтаси бўлиши мумкин. Бундан ташқари, эгри чизиқли интегралларни тўғри чизиқ бўйича олинган интеграл билан алмаштирдик, маълумки, бу қўшимча хатоликка олиб келади. Шу муносабат билан $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$, $u_3^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$ ларнинг аниқроқ қийматини топиш масаласи туғилади. Аниқлаштиришнинг бир неча усуллари бор. Буларнинг бири қуйидагичадир:

Олдин топилган биринчи яқинлашиш $\lambda^{(1)}_{1.3}$, $\lambda^{(1)}_{2.3}$ дан фойдаланиб, кейинги яқинлашиш сифатида қуйидаги ўрта арифметик сонлар олинади:

$$\lambda_{1.1}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{1.1}^{(1)} + \lambda_{1.3}^{(1)}\right), \ \lambda_{2.2}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{2.2}^{(1)} + \lambda_{2.3}^{(1)}\right).$$

Худди шунга ўхшаш $i = 1{,}2$ учун қуйидаги миқдорлар аниқланади:

$$\begin{cases} A_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(A_i^{(1)} + A_3^{(1)}\right), \ B_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(B_i^{(1)} + B_3^{(1)}\right), C_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(C_i^{(1)} + C_3^{(1)}\right), \\ M_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(M_i^{(1)} + M_3^{(1)}\right), \ N_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(N_i^{(1)} + N_3^{(1)}\right), i = 1, 2. \end{cases} \quad (7.20)$$

Бу ерда $A_3^{(1)}$, $B_3^{(1)}$, $C_3^{(1)}$, $M_3^{(1)}$, $N_3^{(1)}$ сонлар *A, B, C, M, N* детерминантларнинг биринчи яқинлашишда топилган $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$, $u_3^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$ нуқтадаги қиймати; *3*-нуқтада изланаётган иккинчи яқинлашиш $x_3^{(2)}$, $y_3^{(2)}$, $u_3^{(2)}$, $\vartheta_3^{(2)}$ лар кетма-кет қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан топилади:

$$\left.\begin{aligned} y_3^{(2)} - y_1 &= \lambda_{1.1}^{(2)}\left(x_3^{(2)} - x\right)_1, \\ y_3^{(2)} - y_2 &= \lambda_{2.2}^{(2)}\left(x_3^{(2)} - x_2\right), \end{aligned}\right\}$$

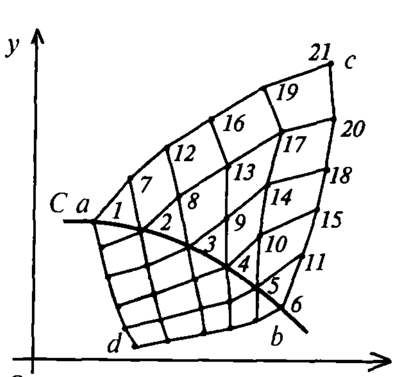
$$\left(\lambda_{1.1}^{(2)}A_1^{(2)}+B_1^{(2)}\right)\left(u_3^{(2)}-u_1\right)+C_1^{(2)}\left(\vartheta_3^{(2)}-\vartheta_1\right)+M_1^{(2)}\left(x_3^{(2)}-x_1\right)+$$
$$+N_1^{(2)}\left(y_3^{(2)}-y_1\right)=0,$$

$$\left(\lambda_{2.2}^{(2)}A_2^{(2)}+B_2^{(2)}\right)\left(u_3^{(2)}-u_2\right)+C_2^{(2)}\left(\vartheta_3^{(2)}-\vartheta_2\right)+$$
$$+M_2^{(2)}\left(x_3^{(2)}-x_2\right)+N_2^{(2)}\left(y_3^{(2)}-y_2\right)=0.$$

Бу системаларнинг биринчисидан аввал координаталарнинг аниқланган $x_3^{(2)}$, $y_3^{(2)}$ қийматларини, кейинги системадан эса изланаётган функцияларнинг аниқланган $u_3^{(2)}$, $\vartheta_3^{(2)}$ қийматларини топамиз. Агар аниқлик етарли бўлмаса, бу итерацион жараённи давом эттирамиз. Қачонки топилган иккита кетма-кет яқинлашишнинг қийматлари керакли аниқликда устма-уст тушса, жараённи тўхтатамиз. Агар h етарлича кичик бўлса, одатда, иккита аниқлаш етарли бўлади, чунки кейинги яқинлашишларда аниқлик ошмайди. Шундай қилиб, маълум $(x_1, y_1, u_1, \vartheta_1)$ ва $(x_2, y_2, u_2, \vartheta_2)$ нуқталар бўйича учинчи $(x_3, y_3, u_3, \vartheta_3)$ нуқтани топиш масаласини ечдик. Биз бу методни (7.1) система учун қўйиладиган ҳар хил масалаларга қўллашимиз мумкин. Шуларнинг айримларини кўриб чиқамиз.

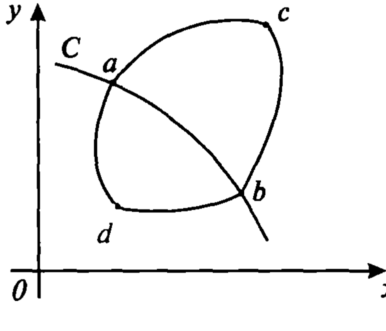
10.7.4. Коши масаласи. Фараз қилайлик, (7.1) система, 10.7.1 да аниқланган етарлича силлиқ Cва бирорта нуқтасида ҳам характеристик йўналишга эга бўлмаган эгри чизиқ берилган бўлсин (16-чизма). Коши масаласи қуйидагича қўйилади:

u, ϑ функцияларнинг C нинг бирор ёйида берилган қийматлари бўйича (7.1) системанинг ечими топилсин. Бунинг учун ёйда бирбирига яқин нуқталар оламиз. 16-чизмада *1*, *2*, ..., *6* нуқталар олинган. Аввал *1* ва *2* нуқталар бўйича юқоридаги методга кўра *7*- нуқтани топамиз (яъни унинг координаталарини ва u, ϑ нинг бу нуқтадаги қийматини). Бу ишни қилиш мумкин, чунки *1* ва *2* нуқталар учун керакли миқдорлар дастлабки шартлардан маълум. Кейин *2* ва *3* нуқталар бўйича *8*-нуқтани ва ҳ.к. *5* ва *6* нуқталар бўйича *11*-нуқтани топамиз. Энди *7*, *8*, *9*, *10*, *11* нуқталарни дастлабки нуқталар деб қабул қилиб, бу жараённи давом эттирамиз. Бу жараён *асв* «учбурчак» тўлдирилгунча давом эттирилади (17-чизма). Бунда *ас* қандайдир синиқ чизиқ бўлиб, *а* нуқтадан чиқадиган биринчи оила-



16-чизма.

га мансуб бўлган характеристикага яқинлашишдир, *bc* эса *b* нуқтадан чиқадиган иккинчи характеристикага яқинлашиш бўлади.

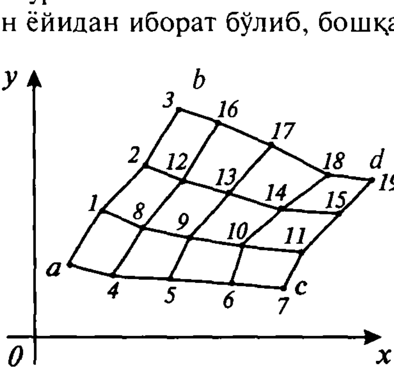


17-чизма.

Бундай қуришни *C* эгри чизиқнинг бошқа томонидан ҳам бажариш мумкин. Шунда биз *adb* «учбурчак»ка эга бўламиз, бунда *ad* томон *a* нуқтадан чиқадиган иккинчи оилага мансуб характеристиканинг яқинлашиши бўлиб, *db* томон *b* нуқтадан чиқадиган биринчи оилага мансуб харакатеристиканинг яқинлашишидир. Аниқ ечим учун бу соҳа *a* ва *b* четки нуқталардан чиқиб, ечимга мос келувчи тўртта характеристикадан ташкил топади.

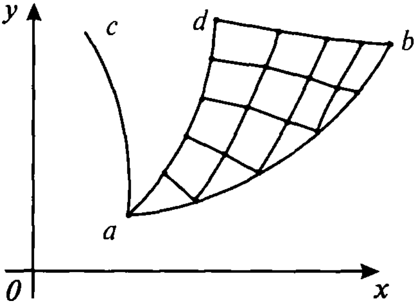
10.7.5. Гурса масаласи. Гурса масаласида (7.1) системанинг шундай *u*, *ϑ* ечимини топиш керакки, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: *a* нуқтадан чиқадиган иккита *ab* ва *ac* характеристикада *u*, *ϑ* функцияларнинг қийматлари берилган бўлиб, бу қийматлар *a* умумий нуқтада устма-уст тушсин. Равшанки, берилган *u*, *ϑ* функциялар ҳар бир характеристикада характеристика дифференциал тенгламаларини қаноатлантиради.

Бу масалани сонли ечиш учун бир-бирига яқин бўлган нуқталарни, масалан, 18-чизмадаги *1*, *2*, *3*, ..., *7* нуқталарни оламиз. Юқоридаги методга кўра *1* ва *4* нуқталардан фойдаланиб *8*-нуқтани, *8* ва *5* нуқталар бўйича *9*-нуқтани, *9* ва *6* нуқталар бўйича *10*-нуқтани, *10* ва *7* нуқталар бўйича *11*-нуқтани топамиз. Кейин *1*,*8*, *9*, *10*, *11* ларни янги нуқталар қатори деб қабул қилиб, бундай жараённи давом эттирамиз. Бу жараён давомида элементар тўртбурчаклар эгри чизиқли тўртбурчакни аппроксимация қиладиган синиқ «тўртбурчак»ни қурамиз. Бу тўртбурчакнинг икки томони *ab* ва *ac* характеристикаларнинг берилган ёйидан иборат бўлиб, бошқа иккитаси *b* ва *c* нуқталардан чиқадиган характеристикаларнинг ёйларидан иборат. Равшанки, *ab* ва *cd* чизиқлар характеристикаларнинг бир оиласига тегишли бўлиб, *ac* ва *bd* лар бошқа оиласига тегишлидир. Демак, биз шундай соҳа қурдикки, унда берилган қийматларга кўра ечимни қуриш мумкин.



18-чизма.

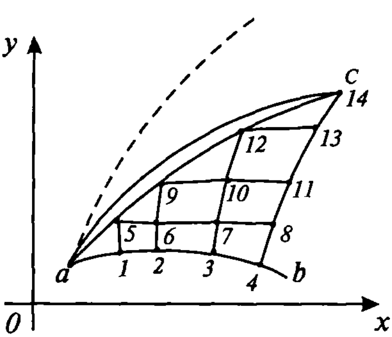
10.7.6. Биринчи аралаш масала. Фараз қилайлик, *ac* ёй (7.1) системанинг характеристикасида



19-чизма.

ётсин, ab ёй эса бирорта нуқтасида ҳам характеристик йўналишга эга бўлмасин (19-чизма). Биринчи аралаш масала қуйидагича қўйилади: u ва ϑ функцияларнинг ab ва ac ёйлардаги қийматлари бўйича (7.1) системанинг ечими топилсин. Бунда қуйидаги шарт бажарилиши керак: умумий a нуқтада функцияларнинг қийматлари мувофиқланган бўлиб, a нуқтадан чиқадиган иккинчи оиланинг характеристикаси cab бурчакда ётиши лозим. Бу масаланинг ечилиши Коши масаласини ва Гурса масаласини кетма-кет ечишга келтиради. Биз аввал abd эгри чизиқли учбурчакни аппроксимация қиладиган «учбурчак»да ечимни қурамиз. Бу учбурчак ab ёй ҳамда a ва b нуқталардан чиқиб, ҳар хил оилаларга мансуб бўлган характеристикалар билан чегараланган. Шу билан бирга номаълум бўлган ad характеристика ҳамда бу характеристика тугунларидаги u ва ϑ ларнинг қийматлари ҳам маълум бўлади. Энди cad соҳада масаланинг ечилиши Гурса масаласини ечишга келтирилади, чунки u ва ϑ ларнинг қийматлари a нуқтадан чиқадиган ҳар иккала характеристикада маълум.

10.7.7. Иккинчи аралаш масала. Бу масала қуйидагидан иборат: u ва ϑ функцияларнинг ab характеристикада қийматлари ҳамда характеристик йўналишга эга бўлмаган ac эгри чизиқда уларнинг чизиқли комбинацияси $\alpha u + \beta\vartheta = f$ маълум бўлса, (7.1) системанинг u ва ϑ ечими топилсин. Бунда a, β, f функциялар ac ёйда берилган. Бундан ташқари, a нуқтадан чиқувчи иккинчи характеристика cab бурчакдан ташқарида ётади ва ab эгри чизиқнинг a нуқтасида u ва ϑ нинг қийматлари $\alpha u + \beta\vartheta = f$ тенгликни қаноатлантиради.



20-чизма.

Бу масалани ечиш учун қуйидагича иш тутамиз: ab характеристиканинг ёйида *1, 2, 3, 4, ...* нуқталарни оламиз (20-чизма). Иккинчи оила характеристикаси бўйлаб *1* нуқтадан ac эгри чизиқни кесувчи тўғри чизиқ ўтказамиз. Фараз қилайлик, у ac ни *5* нуқтада кессин. Иккинчи оила характеристикаси устидаги дифференциал муносабат ва чегаравий шартдан *5* нуқтада u ва ϑ ларнинг қийматини топамиз. Кейин *5* ва *2* нуқталар бўйича *6* нуқтани, *6* ва *3* нуқталар бўйича *7* нуқтани топамиз ва ҳ.к. Ҳосил қилинган *5, 6, 7, ...* нуқталар қаторини дастлабки нуқталар қатори деб олиб, бу жараённи давом эттирамиз. Шундай қилиб, *ab* ва *ac* эгри чизиқлар билан ҳамда *b* нуқтадан *ac* эгри чизиқни кесгунга қадар иккинчи оила характеристикаси билан чегараланган соҳадаги тўр нуқталарида u ва ϑ ечимнинг қийматларини топамиз.

Машқ. Характеристика методи билан қуйидаги квазичизиқли

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)=-2e^{-2x},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)=0$$

тенгламалар системасининг

$$u(o,y)=\cos y,\ \vartheta(o,y)=\sin y\ \ (0{,}5\le y\le 1)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимининг бир неча қийматлари топилсин (тақрибий ечим $u=e^{-x}\cos y$, $\vartheta=e^{-x}\sin y$ аниқ ечим билан солиштирилсин).

11-боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ ВАРИАЦИОН МЕТОДЛАРИ ВА УНГА ЯҚИН МЕТОДЛАР

11.1-§. ВАРИАЦИОН МАСАЛАЛАР БИЛАН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ЎЗАРО АЛОҚАСИ ҲАҚИДА

Вариацион ҳисобнинг дастлабки масалалари XVII асрда юзага келган бўлиб, ўша вақтдан бошлаб вариацион ҳисоб математиканинг муҳим тармоғи сифатида ривожланиб келмоқда. Вариацион ҳисоб функционалларнинг экстремумини топиш билан шуғулланади. Вариацион масалаларга брахистохрона (Я. Бернулли), нурнинг бир жинсли бўлмаган муҳитда тарқалиш йўлини топиш (П. Ферма) ва ўқ бўйлаб айланма ҳаракат қилиб силжиётган жисм энг оз қаршиликка учраши учун унинг шакли қандай бўлиши кераклиги (И. Ньютон) ҳақидаги масалалар киради. Вариацион ҳисоб масалаларини ечишга Л. Эйлер катта ҳисса қўшган.

Вариацион ҳисоб методлари механика, бошқарув назарияси, математик физика ва шу каби соҳаларда кенг қўлланилади. Бу соҳаларда масалаларни ечиш учун уни ё дифференциал тенгламага ёки бирор функционалнинг минимумини топишга келтирилади. Бу бобда қараладиган методлар ҳам коллокация методи каби тақрибий ечимни аналитик шаклда ифодалайди.

Масаланинг моҳиятини тушуниш учун энг содда

$$J(u) = \int_a^b F(x,u,u')dx \tag{1.1}$$

функционални қараймиз, бунда $F(x, y, z)$ берилган функция бўлиб, уч ўлчовли Евклид фазосининг бирор соҳасида x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи тартибли ҳосилаларигача узлуксиздир.

Фараз қилайлик, $u(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, (a, b) да узлуксиз ҳосилага эга ва $[a, b]$ нинг чекка нуқталарида

$$u(a) = \gamma_1, \ u(b) = \gamma_2 \tag{1.2}$$

шартларни қаноатлантирсин.

$u = u(x)$ *функциянинг* ε*-атрофи* деб функцияларнинг шундай $D = \{u_i(x)\}$ оиласига айтиладики, улар $[a, b]$ нинг барча нуқталарида

$$|u_i(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирсин, (a, b) да $u_i(x)$ узлуксиз ҳосилага эга ва (1.2) чегаравий шартларни қаноатлантирсин. Бундай оилага кирадиган функциялар *таққослашга жоиз* ёки содда қилиб *жоиз функциялар* дейилади. Вариацион ҳисобнинг асосий масаласига кўра жоиз функциялар орасида шундай $u^*(x)$ функцияни топиш керакки, у (1.1) функционалга абсолют минимум берсин:

$$J(u) \geq J(u^*).$$

Энди D оилада $J(u)$ функционалга минимумни таъминлайдиган $u^*(x)$ учун зарурий шартни топамиз. Шу мақсадда

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{1.3}$$

шартларни қаноатлантирадиган узлуксиз ҳосилага эга бўлган $\eta(x)$ функцияни оламиз. Кейин ушбу $u_t(x) = u(x) + t\eta(x)$ функцияни қараймиз. Бунда t — кичик параметр, шунинг учун ҳам $u_t(x)$ D оилада ётади, деб фараз қилиш мумкин. Бу функцияни J функционалга қўямиз, у ҳолда

$$J(u_t) = \int_a^b F\left(x, u(x) + t\eta(x), u'(x) + t\eta'(x)\right)dx \tag{1.4}$$

ифода келиб чиқади. Бу ифодани t нинг функцияси деб қараймиз: $J(u_t) = \varphi(t)$. Бу функция ҳосиласининг $t = 0$ нуқтадаги қиймати J функционалнинг *биринчи вариацияси* дейилади ва δJ каби белгиланади:

$$\delta J = \left.\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\delta^2 J = \left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=0}$$

қиймат J функционалнинг *иккинчи вариацияси* дейилади. (1.4) ифодадан δJ ва $\delta^2 J$ вариациялар учун қуйидаги ифодаларни топамиз:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\eta' \right) dx, \tag{1.5}$$

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}\eta'^2 \right) dx. \tag{1.6}$$

Энди (1.3) чегаравий шартларни ҳисобга олиб, (1.5) ни бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} \right)\eta(x)dx + \left.\frac{\partial F}{\partial u'}\eta(x)\right|_a^b = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} \right)\eta(x)dx.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Маълумки, $\varphi(t)$нинг $t = 0$ нуқтада экстремумга эга бўлишининг шарти $\varphi'(0) = 0$, яъни $\delta J = 0$. Шунинг учун ҳам (1.7) тенгликда $\eta(x)$ функциянинг ихтиёрийлигидан (1.2) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ва (1.1) интегралга минимумни таъминлайдиган $u^*(x)$ функция

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \tag{1.8}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириши керак. Бу тенглама *Эйлер тенгламаси* дейилади. Шуни ҳам таъкидлаш кераkки, $u^*(x)$ функция J функционалга минимумни таъминласа, у ҳолда $\varphi'(0) = \delta^2 J \geq 0$ бўлиши керак.

Мисол сифатида

$$J(u^*) = \int_a^b \left[p(x)\left(u^{*'}\right)^2 + q(x)\left(u^*\right)^2 + 2fu^* \right] dx \tag{1.9}$$

функционални оламиз. Бу ерда $[a, b]$ да $p(x)$ узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, $p(x) \geq p > 0$ шартни қаноатлантиради, $q(x)$ ва $f(x)$ функциялар эса узлуксиз бўлиб, $q(x) \geq 0$ деб фараз қиламиз.

Равшанки,

$$\frac{\partial F}{\partial u^*} = 2q(x)u^* + 2f(x), \quad \frac{\partial F}{\partial u^{*'}} = 2q(x)u^{*'}.$$

Шунинг учун ҳам (1.9) интеграл учун Эйлер тенгламаси

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)u*'\right)-2q(x)u*-2f(x)=0$$

га ёки

$$\frac{d}{dx}(p(x)u*')-q(x)u*=f(x),\quad u*(a)=\gamma_1,\quad u*(b)=\gamma_2 \qquad (1.10)$$

чегаравий масалага келади; бу ерда чегаравий шартларнинг бажарилиши $u^*(x)$ функциянинг D оилага киришидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исбот қилдик:

1-теорема. *Агар $u^*(x)$ функция жоиз функциялар орасида (1.9) функционалнинг минимумини таъминласа, у ҳолда у (1.10) чегаравий масаланинг ечими бўлади.*

Энди тескари теоремани кўриб чиқамиз.

2-теорема. *Агар $u^*(x)$ функция* (1.10) *чегаравий масаланинг ечими бўлса, у ҳолда у жоиз функциялар орасида $J(u^*)$ функционалнинг минимумини таъминлайди.*

Исботи. Фараз қилайлик, $u^*(x)$ (1.10) чегаравий масаланинг ечими бўлсин. Ихтиёрий $u^*(x)$ жоиз функцияни олиб, $u(x)-u^*(x)=\varepsilon(x)$ белгилаш киритамиз, $u(x)$ ва $u^*(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқнинг чегараларида бир хил қийматларни қабул қилганлиги учун $\varepsilon(x)$ функция узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=0$ шартларни қаноатлантиради. Энди $u(x)=u^*(x)+\varepsilon(x)$ ни (1.9) интегралга қўямиз:

$$\begin{aligned}J(u)=J(u*+\varepsilon)&=\int_a^b\left[p(u*'+\varepsilon')^2+q(u*+\varepsilon)^2+2f(u*+\varepsilon)\right]dx=\\&=J(u*)+2\int_a^b(pu*'\varepsilon'+qu*\varepsilon+f\varepsilon)dx+\int_a^b q(p\varepsilon'^2+q\varepsilon^2)dx.\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Ўртадаги интегралнинг биринчи ҳадини бўлаклаб интеграллаймиз, натижада

$$\int_a^b\left(pu*'\varepsilon+qu*\varepsilon+f\varepsilon\right)dx=p(x)u*'(x)\varepsilon(x)\Big|_a^b-$$

$$-\int_a^b\left[\frac{d}{dx}(p(x)u*')-q(x)u*-f(x)\right]\varepsilon(x)dx=0$$

келиб чиқади. Чунки $u^*(x)$ ечим (1.10) чегаравий масаланинг ечими бўлиб, $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=0$. Шунинг учун ҳам (1.11) тенглик қуйидаги

$$J(u)=J(u*)+\int_a^b\left(p\varepsilon'^2+q\varepsilon^2\right)dx \qquad (1.12)$$

кўринишга эга бўлади. Бошида қўйилган шартга кўра $p(x) > 0$ ва $q(x) \geq 0$. Шунинг учун ҳам (1.12) даги охирги ҳад манфий эмас ва ҳар қандай $u(x)$ жоиз функция учун

$$J(u) \geq J(u^*)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан ташқари,

$$\int_a^b (p\varepsilon'^2 + \varepsilon^2 q)dx = 0$$

тенгликдан $p\varepsilon'^2 + q\varepsilon^2$ манфий бўлмаган узлуксиз функция бўлганлиги учун $[a, b]$ да $p\varepsilon'^2 + q\varepsilon^2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Маълумки, $p(x) > 0$. Шунинг учун ҳам $\varepsilon'(x) \equiv 0$ ва $\varepsilon(x) = \text{const}$ бўлиши керак. Аммо оралиқнинг четларида $\varepsilon(x)$ нол бўлганлиги учун $[a, b]$ да $\varepsilon(x) = u(x) - u^*(x)$ айнан нол бўлиши керак. Демак, $J(u) = J(u^*)$ фақат $u = u^*$ бўлгандагина бажарилади. Теорема исботланди.

Биз энг содда масалада чегаравий масала билан вариацион масала орасидаги боғланишни кўриб чиқдик. Биринчи теорема чегаравий масалани вариацион масалага келтиради, иккинчиси эса аксинча, вариацион масалани чегаравий масалага келтиради.

Энди мураккаброқ функционалларни кўриб чиқамиз. Агар

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, u', \ldots, u^{(n)})dx \tag{1.13}$$

функционалнинг минимуми

$$\begin{gathered} u(a) = \gamma_0,\ u'(a) = \gamma_1,\ \ldots,\ u^{(n)}(a) = \gamma_n, \\ u(b) = \bar{\gamma}_0,\ u'(b) = \bar{\gamma}_1,\ \ldots,\ u^{(n)}(b) = \bar{\gamma}_n \end{gathered} \tag{1.14}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган функциялар орасида қидирилса, у ҳолда Эйлер тенгламаси $2n$ тартибли бўлиб, қуйидагидан иборат:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} = 0. \tag{1.15}$$

Агар

$$J(u_1 u_2, \ldots, u_k) = \int_a^b F(x, u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1', u_2', \ldots, u_k')dx \tag{1.16}$$

функционалнинг минимуми қидирилса, у ҳолда Эйлер тенгламаси қуйидаги тенгламалар системасидан иборат:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \\ \frac{\partial F}{\partial u_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Бошқа томондан чегаравий масалалар орасида кўпинча *ўз-ўзига қўшма* деб аталувчи *масалалар* учрайди. Бундай масалалар хусусий ҳолда қуйидагича тавсифланади: қандайдир функционал мавжудки, унинг минимумининг шарти, яъни мос равишдаги Эйлер тенгламаси берилган чегаравий масала билан устма-уст тушади. Бундай чегаравий масалани ечиш учун унга мос келадиган функционалнинг минимумини таъминловчи $u^*(x)$ функцияни, масалан, (1.11) чегаравий масала учун (1.9) интегрални топиш кифоядир.

Вариацион ҳисоб кўп ўлчовли фазо учун ҳам яхши натижаларни беради. Биз бу бобда вариацион методларга яқин бўлган методларни ҳам кўриб чиқамиз.

11.2-§. ОПЕРАТОР ТЕНГЛАМАЛАРНИ ГИЛЬБЕРТ ФАЗОСИДА ВАРИАЦИОН МЕТОДЛАР БИЛАН ЕЧИШ

Аввало, функционал анализдан айрим тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

1-таъриф. Бир ёки кўп ўзгарувчининг ҳақиқий ёки комплекс функцияларининг K тўплами *чизиқли* (ёки линеал) дейилади, агар $u \in K$ ва $\vartheta \in K$ бўлганда $u + \vartheta \in K$ бўлиб, ихтиёрий (ҳақиқий ёки комплекс) доимий a сон учун $au \in K$ бўлса.

2-таъриф. $I = I(u)$ функционал *чизиқли* дейилади, агар у K линеалда аниқланган бўлиб, ихтиёрий иккита u ва ϑ жоиз функциялар учун қуйидаги тенгликни қаноатлантирса:

$$I(\alpha u + \beta\vartheta) = \alpha I(u) + \beta I(\vartheta),$$

бунда α ва β — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

3-таъриф. $K = \{u(x)\}$ функциялар тўпламида A оператор *аниқланган* дейилади, агар ҳар бир $u(x) \in K$ функция учун бирор қонунга асосан ягона $\vartheta = \vartheta(x)$ функция мос қўйилган бўлса. Бунда x сон ёки вектор бўлиши мумкин. Функциялар орасидаги бу мосликни символик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vartheta = Au.$$

K функциялар тўплами A операторнинг *аниқланиш соҳаси* дейилади.

1-мисол. Фараз қилайлик, $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... , $P_n(x)$ функциялар $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин, у ҳолда

$$L = P_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x)$$

n-тартибли чизиқли дифференциал оператор дейилади. Бу операторнинг аниқланиш соҳаси $K = C^n[a, b]$ дан иборат бўлиб, қийматлари $C[a, b]$ да ётади. Агар бу операторни $u = u(x) \in C^n[a, b]$га қўлласак, у ҳолда ушбу

$$P_o(x)\frac{d^n u}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+P_n(x)u=f(x)$$

n-тартибли дифференциал тенгламани

$$Au=f(x)$$

оператор тенглама шаклида ёзиш мумкин, бунда $f(x)$— маълум узлуксиз функция.

2-мисол. Айтайлик, G берилган соҳа бўлиб, $u(x,y)\in C^2(G)$ бўлсин. Энди $K=\{u(x,y)\}$ функциялар тўпламини оламиз. У ҳолда ушбу

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

операторни (Лаплас операторини) K тўпламда $u(x)$ функцияга қўлласак,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

дифференциал ифода келиб чиқади. Буни бирор маълум функцияга тенглаштирсак,

$$\Delta u=f(x,y)$$

Пуассон тенгламасини ҳосил қиламиз. Хусусий ҳолда $f(x,y)\equiv 0$ бўлса,

$$\Delta u=0$$

Лаплас тенгламаси келиб чиқади.

Шундай қилиб, оддий ёки хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни умумий нуқтаи назардан *оператор тенглама* деб қараш мумкин.

4-таъриф. A оператор *аддитив* дейилади, агар ҳар қандай $u_1\in K$, $u_2\in K$ функциялар учун

$$A(u_1+u_2)=Au_1+Au_2$$

тенглик бажарилса.

5-таъриф. A оператор *бир жинсли* дейилади, агар ҳар қандай $u\in K$ ва ихтиёрий α сон учун

$$A(\alpha u)=\alpha Au$$

бўлса.

6-таъриф. A оператор *чизиқли* дейилади, агар у аддитив ва бир жинсли бўлса.

Демак, ихтиёрий $u_1\in K$, $u_2\in K$ ва ихтиёрий a, β сонлар учун чизиқли оператор

$$A(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha Au_1+\beta Au_2$$

тенгликни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, K бирор G соҳада аниқланган ва узлуксиз $u(p)$ функцияларнинг тўплами бўлсин. Агар $u, \vartheta \in K$ бўлса, у ҳолда

$$(u,\vartheta)=\int_G u\bar{\vartheta}dp$$

сон (функционал) u ва ϑ функцияларнинг *скаляр кўпайтмаси* дейилади, бу ерда $\bar{\vartheta}$ функция ϑ га қўшма комплекс функцияни билдиради. Равшанки,

$$(u,\vartheta)=\left(\overline{\vartheta,u}\right). \tag{2.1}$$

Агар K тўпламдаги функциялар ҳақиқий бўлса, у ҳолда

$$(u,\vartheta)=\int_G u\vartheta dp=\int_G \vartheta u dp=(\vartheta,u)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам $u(x)$ функциянинг нормаси

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)}$$

формула билан аниқланади.

Фараз қилайлик, H — бирор Гильберт фазоси бўлсин, H_A линеал сифатида H нинг ҳамма жойида зич бўлган функциялар тўпламини оламиз. A аддитив оператор H_A да аниқланган бўлсин.

7-таъриф. A оператор *мусбат* дейилади, агар ҳар бир $u \in H_A$ элемент учун

$$(Au,u)\geq 0 \tag{2.2}$$

муносабат ўринли бўлиб, шу билан бирга тенглик фақат $u=0$ бўлгандагина бажарилса.

8-таъриф. A оператор *мусбат аниқланган* дейилади, агар (2.2) тенгсизлик ўрнига ундан кучли бўлган

$$(Au,u)\geq \gamma^2\|u\|^2, \quad \gamma^2=\text{const} \tag{2.3}$$

тенгсизлик бажарилса.

9-таъриф. A оператор *симметрик (ўз-ўзига қўшма)* дейилади, агар $u \in H_A$, $\vartheta \in H_A$ элементлар учун

$$(Au,\vartheta)=(u,A\vartheta)$$

тенглик ўринли бўлса.

3-мисол. $C^2[a,b]$ га тегишли ва $u(a)=0$, $u(b)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган функциялар тўпламида аниқланган

$$Au = -u''$$

операторнинг симметриклиги ва мусбатлиги кўрсатилсин.

Ечиш.

а) Агар u ва ϑ жоиз функциялар бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b (\vartheta Au - uA\vartheta)\,dx = \int_a^b (-\vartheta u'' + u\vartheta)\,dx = (u\vartheta' - \vartheta u')\Big|_a^b = 0,$$

шунинг учун ҳам

$$\int_a^b \vartheta Au dx = \int_a^b uA\vartheta dx,$$

яъни

$$(Au,\vartheta) = (u, A\vartheta).$$

Шундай қилиб, A оператор симметрикдир. Равшанки, $u \not\equiv 0$ да

$$(Au,u) = \int_a^b uAu\,dx = -\int_a^b uu''dx = -uu'\Big|_a^b + \int_a^b u'^2 dx > 0,$$

яъни

$$(Au,u) > 0.$$

б) Чегаравий шартлардан кўриниб турибдики, $u' \equiv 0$ функция $u \equiv 0$ тенгликни қаноатлантирадиган ягона функция. Шунинг учун ҳам $u \equiv 0$ бўлгандагина $(Au,u)=0$. Демак, A мусбат оператор.

Энди қуйидаги леммани исботлаймиз:

1-лемма. A оператор H комплекс Гильберт фазосида симметрик бўлиши учун ҳар бир $u \in H_A$ учун (Au, u) скаляр кўпайтманинг ҳақиқий бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, агар A оператор симметрик бўлса, у ҳолда

$$(Au,u) = (u, Au) = \overline{(Au,u)},$$

яъни (Au, u) ҳақиқий сон.

Энди етарлилигини кўрсатамиз. Ушбу

$$(iu,\vartheta) = i(u,\vartheta), \quad (u, i\vartheta) = -i(u,\vartheta) \tag{2.4}$$

тengликларни ҳисобга олиб, қуйидаги айниятни кўрсатиш мумкин:

$$\begin{aligned} 4(Au,\vartheta) = {} & \big(A(u+\vartheta), u+\vartheta\big) - \big(A(u-\vartheta), u-\vartheta\big) + \\ & + i\Big[\big(A(u+i\vartheta), u+i\vartheta\big) - \big(A(u-i\vartheta), u-i\vartheta\big)\Big]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Энди u ва ϑ ларнинг ўринларини алмаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$4(A\vartheta,u)=\left(A(u+\vartheta),u+\vartheta\right)-\left(A(\vartheta-u),\vartheta-u\right)+$$
$$+i\left[\left(A(\vartheta+iu),\vartheta+iu\right)-\left(A(\vartheta-iu),\vartheta-iu\right)\right].$$

Бу тенгликнинг барча ҳадларини қўшма комплекси билан алмаштириб, скаляр кўпайтманинг (2.4) хоссасини назарда тутган ҳолда (Au, ϑ) скаляр кўпайтманинг ҳақиқийлигини ҳисобга олсак, қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$4(u,A\vartheta)=\left(A(u+\vartheta),u+\vartheta\right)-\left(A(u-\vartheta),u-\vartheta\right)+$$
$$+i\left[\left(A(u+i\vartheta),u+i\vartheta\right)-\left(A(u-i\vartheta),u-i\vartheta\right)\right]. \tag{2.6}$$

(2.5) ва (2.6) тengликлардан

$$\left(Au,\vartheta\right)=\left(u,A\vartheta\right)$$

келиб чиқади, яъни A оператор симметрик экан. Лемма исботланди.

Бундан кейин A операторни мусбат деб қараймиз, борди-ю Гильберт фазоси ҳақиқий бўлса, қўшимча равишда уни симметрик деб фараз қиламиз.

1-теорема. *Фараз қилайлик, А оператор H_Aда аниқланган, чизиқли ва мусбат бўлсин. У ҳолда*

$$\grave{A}u=f \tag{2.7}$$

оператор тенглама ягона ечимга эга.

Исботи. Фараз қилайлик, иккита $u_1\in H_A$ ва $u_2\in H_A(u_1\neq u_2)$ ечим мавжуд бўлсин. A операторнинг чизиқлилигидан

$$A\left(u_1-u_2\right)=0 \text{ ва } \left(A(u_1-u_2),u_1-u_2\right)=0$$

келиб чиқади. Бу мумкин эмас, чунки A мусбат оператор ва $u_1-u_2\neq 0$. Шундай қилиб, (2.7) тенглама ягона ечимга эга.

2-теорема. *Фараз қилайлик, А оператор H_A да аниқланган ва мусбат бўлиб, I(u) функционал қуйидаги кўринишга эга бўлсин*:

$$I(u)=(Au,u)-(f,u)-(u,f), \tag{2.8}$$

бунда $f=f(p)$ (2.7) тенгламанинг ўнг томони. Агар (2.7) тенглама бирор u^* ечимга эга бўлса, бу ечим (2.8) функционалга минимумни таъминлайди. Аксинча, агар шундай $\overline{u}\in H_A$ элемент мавжуд бўлиб, у I(u) функционалнинг минимумини таъминлайдиган бўлса, у ҳолда $\overline{u}$ элемент (2.7) тенгламанинг ечими бўлади.

Исботи. а) A операторнинг мусбатлигидан ва $(f,u)=\overline{(u,f)}$ тенгликдан $I(u)$ функционалнинг фақат ҳақиқий қиймат қабул қилиши келиб чиқади. Фараз қилайлик, $u\in H_A$ ихтиёрий элемент бўлсин, у ҳолда $u=u^*+y$ деб оламиз. Леммага кўра H_A комплекс Гильберт фазосида A нинг мусбатлигидан унинг симметриклиги келиб чиқади. Демак,

$$I(u)=(Au,u)-(u,f)-(f,u)=(A(u^*+y),u^*+y)-(u^*+y,f)-$$
$$-(f,u^*+y)=I(u^*)+(Ay,u^*)+(Au^*,y)+(Ay,y)-(y,f)-(f,y)=$$
$$=I(u^*)+(y,Au^*-f)+(Au^*-f,y)+(Ay,y).$$

Фаразга кўра $Au^*-f=0$ ва $(Ay,y)>0$, шунинг учун ҳам

$$I(u)=I(u^*)+(Ay,y)>I(u^*).$$

Шу билан теореманинг биринчи қисми исботланди.

б) Ихтиёрий $u\in H_A$ элемент ва ихтиёрий λ ҳақиқий сонни оламиз. У ҳолда $\bar{u}+\lambda u\in H_A$ бўлиб,

$$I(\bar{u}+\lambda u)\geq I(\bar{u})$$

тенгсизлик бажарилади. Аммо

$$I\left(\bar{u}+\lambda u\right)=\left(A\left(\bar{u}+\lambda u\right),\bar{u}+\lambda u\right)-\left(f,\bar{u}+\lambda u\right)-\left(\bar{u}+\lambda u,f\right)=$$
$$=I\left(\bar{u}\right)+\lambda\left(Au,\bar{u}\right)+\lambda\left(A\bar{u},u\right)+\lambda^2\left(Au,u\right)-\lambda\left(f,u\right)-\lambda\left(u,f\right)=$$
$$=I\left(\bar{u}\right)+\lambda\left(u,A\bar{u}-f\right)+\lambda\left(Au-f,u\right)+\lambda^2\left(Au,u\right).$$

Бундан қуйидаги келиб чиқади:

$$2\lambda\operatorname{Re}(A\bar{u}-f,u)+\lambda^2(Au,u)\geq 0$$

ёки

$$2\operatorname{Re}(A\bar{u}-f,u)+\lambda(Au,u)\geq 0,\ \text{агар}\ \lambda>0\ \text{бўлса},$$

$$2\operatorname{Re}(A\bar{u}-f,u)+\lambda(Au,u)\leq 0,\ \text{агар}\ \lambda<0\ \text{бўлса}.$$

Бу муносабатлар ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун ўринли бўлади, агар

$$\operatorname{Re}(A\bar{u}-f,u)=0 \tag{2.9}$$

бўлса. Агар u ни iu га алмаштирсак, у ҳолда юқоридаги мулоҳазалар

$$Im(A\bar{u} - f, u) = 0 \tag{2.10}$$

тенгликка олиб келади, (2.9) ва (2.10) тенгликлардан

$$(A\bar{u} - f, u) = 0 \tag{2.11}$$

келиб чиқади. Агар фазо ҳақиқий бўлса, у ҳолда (2.9) тенглик ўрнига бирданига (2.11) ҳосил бўлар эди. Бунда H_A ни H нинг ҳамма жойида зич эканлигини ҳисобга олсак,

$$A\bar{u} - f = 0$$

ҳосил бўлади. Теорема исботланди.

11.3-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИ ВАРИАЦИОН МАСАЛАГА КЕЛТИРИШ

Бизга ушбу оддий дифференциал тенглама

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = F(x) \tag{3.1}$$

ва

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 u'(a) + \alpha_o u(a) = \gamma_1, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_1 u(b) = \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

чизиқли чегаравий шартлар берилган бўлсин, бунда $[a, b]$ оралиқда $P(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ функциялар узлуксиз ҳамда $|\alpha_o| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_o| + |\beta_1| \neq 0$. Бу чегаравий масалани вариацион масалага келтириш учун, аввало, уни ўз-ўзига қўшма бўлган кўринишга келтириш керак. Бунинг учун унинг ҳамма ҳадларини

$$p(x) = e^{\int_a^x P(t)dt}$$

мусбат функцияга кўпайтирамиз:

$$p(x)u'' + p(x)P(x)u' + p(x)Q(x)u = p(x)F(x). \tag{3.3}$$

Равшанки,

$$p'(x) = P(x)e^{\int_a^x P(t)dt} = p(x)P(x),$$

шунинг учун ҳам (3.3) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dx}(pu') - qu = f, \tag{3.4}$$

бунда

$$p(x) > 0, q(x) = -p(x)Q(x), f(x) = p(x)F(x).$$

Ушбу

$$Au = -\frac{d}{dx}(pu') + qu \tag{3.5}$$

чизиқли операторни киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$Au = -f, \tag{3.6}$$

бунда $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз.

Аввал (3.2) чегаравий шартлар бир жинсли бўлган ҳолни кўрамиз:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 u'(a) + \alpha_o u(a) = 0, \quad |\alpha_o| + |\alpha_1| \neq 0, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_o u(b) = 0, \quad |\beta_o| + |\beta_1| \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Шу билан бирга умумийликка зиён етказмасдан $\alpha_1 \geq 0$ ва $\beta_1 \geq 0$ деб қарашимиз мумкин.

Энди $u(x)$ функцияларнинг $[a, b]$ оралиқда иккинчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз $\left(u(x) \in C^2[a, b]\right)$ ва (3.7) бир жинсли шартларни қаноатлантирадиган $K = \{u(x)\}$ тўпламида A операторнинг ўз-ўзига қўшмалигини (симметриклигини) кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $u \in K$ ва $\vartheta \in K$ ихтиёрий функциялар бўлсин. (3.5) га кўра

$$\begin{aligned} (Au, \vartheta) &= \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}(pu') + qu\right]\vartheta dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}(pu'\vartheta)dx + \\ &+ \int_a^b qu\vartheta dx = -pu'\vartheta\Big|_a^b + \int_a^b pu'\vartheta' dx + \int_a^b qu\vartheta dx = \left(-pu'\vartheta + p\vartheta' u\right)\Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}(p\vartheta') + q\vartheta\right] u dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.7) бир жинсли шартдан фойдаланиб,

$$\left(-pu'\vartheta + p\vartheta' u\right)\Big|_a^b = 0 \tag{3.9}$$

эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \left(-pu'\vartheta + p\vartheta' u\right)\Big|_a^b &= p(a)\left[u'(a)\vartheta(a) - \vartheta'(a)u(a)\right] - \\ &- p(b)\left[u'(b)\vartheta(b) - \vartheta'(b)u(b)\right], \end{aligned} \tag{3.10}$$

$u(x)$ ва $\vartheta(x)$ функциялар

$$\alpha_1 u'(a) + \alpha_o u(a) = 0,$$

$$\alpha_1 \vartheta'(a) + \alpha_o \vartheta(a) = 0$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантиради. Агар $\alpha_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$u'(a) = -\frac{\alpha_o}{\alpha_1} u(a), \quad \vartheta'(a) = -\frac{\alpha_o}{\alpha_1} \vartheta\,(a) \tag{3.11}$$

бўлиб, агар $\alpha_o \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$u(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_o} u'(a), \quad \vartheta(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_o} \vartheta'\,(a) \tag{3.12}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Масалан, $\alpha_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$u'(a)\vartheta(a) - \vartheta'(a)u(a) = -\frac{\alpha_o}{\alpha_1} u(a)\vartheta(a) + \frac{\alpha_o}{\alpha_1} u(a)\vartheta(a) = 0$$

тенглик бажарилади. Худди шунга ўхшаш $\alpha_o \neq 0$ бўлганда ҳамда $\beta_o \neq 0$ ёки $\beta_1 \neq 0$ бўлганда

$$u'(a)\vartheta(a) - \vartheta'(a)u(a) = 0, \quad u'(b)\vartheta(b) - u(b)\vartheta'(b) = 0$$

эканлигини кўрсатиш мумкин. Демак, (3.10) га кўра (3.9) тенглик ўринли экан. Шундай қилиб,

$$\left(Au, \vartheta\right) = \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}(p\vartheta') + q\vartheta\right] u(x)dx = (u, A\vartheta),$$

яъни A — симметрик оператор.

Энди қайси шарт бажарилганда A оператор мусбат бўлишини аниқлаймиз. Айтайлик, $u \in K$ бўлсин, у ҳолда

$$\begin{aligned} \left(Au, u\right) &= \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}(pu') + qu\right] udx = \\ &= -puu'\Big|_a^b + \int_a^b \left[pu'^2 + qu^2\right] dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Маълумки, $p(x) > 0$, шунинг учун ҳам (3.11) тенгликдан A оператор мусбат бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

$$q(x) \geq 0, \qquad a \leq x \leq b \tag{3.14}$$

ва

$$u(a)u'(a) \geq 0, \qquad u(b)u'(b) \leq 0. \tag{3.15}$$

Фаразимизга кўра $\alpha_1 \geq 0$ ва $\beta_1 \geq 0$, шунинг учун ҳам (3.7) чегаравий шартга кўра (3.15) шартлар

$$\alpha_o \le 0,\quad \beta_o \ge 0 \tag{3.16}$$

тенгсизликларга эквивалентдир.

Шундай қилиб, (3.6), (3.7) чегаравий масала (3.14) ва (3.15) шартлар бажарилганда 11.2-§ даги 2-теоремага кўра функцияларнинг K синфида қуйидаги

$$I(u) = (Au,u) + 2(f,u) \tag{3.17}$$

функционалнинг минимумини топиш масаласига тенг кучлидир. (3.13) формулага кўра

$$I(u) = -puu'\Big|_a^b + \int_a^b \left[pu'^2 + qu^2\right]dx.$$

Агар $\alpha_1 > 0$ ва $\beta_1 > 0$ бўлса, у ҳолда (3.11) муносабатга кўра

$$I(u) = -\frac{\alpha_o}{\alpha_1}p(a)u^2(a) + \frac{\beta_o}{\beta_1}p(b)u^2(b) +$$
$$+\int_a^b \left[pu'^2 + qu^2 + 2fu\right]dx. \tag{3.18}$$

Қолган ҳолларда ҳам $I(u)$ учун шунга ўхшаш ифодаларни ҳосил қилиш мумкин. Бу функционаллар кўпинча *юклатилган* ва баъзан *аралаш* ҳам дейилади.

Энди (3.6) масалани (3.2) бир жинсли бўлмаган чегаравий шартлар бажарилганда кўрамиз. Шу билан бирга (3.12) ва (3.14) шартлар бажарилган деб фараз қиламиз. (3.2) шартларни қаноатлантирадиган функциялар синфида A оператор, умуман айтганда, симметрик ва мусбат эмас. Шунинг учун ҳам 11.2-§ даги 2-теоремани қўллаб бўлмайди.

Фараз қилайлик, $z = z(x) \in C^2\left[a,b\right]$ функция (3.2) шартни қаноатлантирсин, у ҳолда

$$\vartheta = u - z \tag{3.19}$$

функция (3.7) бир жинсли шартни қаноатлантиради ва

$$A\vartheta = Au - Az,$$

яъни

$$A\vartheta = -f(x) - Az \tag{3.20}$$

оператор тенгламанинг ечими бўлади. Демак, $u \in K$ ва A оператор функцияларнинг K синфида симметрик ва мусбат. Шунинг учун ҳам $\vartheta(x)$ функция (3.6) ва (3.20) чегаравий масаланинг ечими бўлиб, 11. 2-§ даги 2-теоремага кўра

$$I(\vartheta) = (A\vartheta, \vartheta) + 2(f, \vartheta) + 2(Az, \vartheta)$$

функционалнинг минимумини таъминлайди. Бундан (3.13) формулага кўра

$$I(\vartheta) = -p\vartheta\vartheta'\Big|_a^b + \int_a^b \left[p\vartheta'^2 + q\vartheta^2 + 2f\vartheta + 2\vartheta Az \right] dx. \tag{3.21}$$

(3.19) тенгликдан кўрамизки, (3.6) ва (3.2) чегаравий масаланинг ечими қуйидаги функционалнинг минимумини таъминлайди:

$$\begin{aligned} I_1(u) &= -p(u-z)(u'-z')\Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left[p(u'-z')^2 + q(u-z)^2 + 2(u-z)f + 2(u-z)Az \right] dx = \\ &= -p(u-z)(u'-z')\Big|_a^b + \int_a^b \left(pu'^2 + qu^2 + 2fu \right) dx + \\ &+ \int_a^b \left(pz'^2 + qz^2 - 2fz \right) dx + 2\int_a^b \left[-pu'z' - quz + (u-z)Az \right] dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Буни бўлаклаб интеграллаб ва соддалаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} I_1(u) = -p(x)(u-z)(u'+z')\Big|_a^b + \int_a^b \left[pu'^2 + qu^2 + 2fu \right] dx - \\ - \int_a^b \left[pz'^2 + qz^2 + 2fz \right] dx. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Фараз қилайлик, $\alpha_1 \geq 0$ ва $\beta_1 \geq 0$ бўлсин, у ҳолда (3.2) чегаравий шартлардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$u'(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_o}{\alpha_1} u(a), \quad z'(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_o}{\alpha_1} z(a),$$

$$u'(b) = \frac{\gamma_2}{\beta_1} - \frac{\beta_o}{\beta_1} u(b), \quad z'(b) = -\frac{\gamma_2}{\beta_1} - \frac{\beta_o}{\beta_1} z(b).$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} I_1(u) = \frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2\gamma_1 u(a) - \alpha_o u^2(a) \right] - \frac{p(b)}{\beta_1}\left[2\gamma_2 u(b) - \beta_o u^2(b) \right] + \\ + \int_a^b \left[pu'^2 + qu^2 + 2fu \right] dx - \left\{ \frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2\gamma_1 z(a) - \alpha_o z^2(a) \right] \right. \\ \left. - \frac{p(b)}{\beta_1}\left[2\gamma_2 z(b) - \beta_o z^2(b) \right] + \int_a^b \left[pz'^2 + qz^2 + 2fz \right] dx \right\}. \end{aligned}$$

Катта қавс ичидаги ифода муайян ифода бўлиб, $u(x)$ функцияга боғлиқ эмас, шунинг учун ҳам $I_1(u)$ функционал ўрнига қуйидаги функционални қараш мумкин:

$$I_2(u)=\frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2\gamma_1 u(a)-\alpha_o u^2(a)\right]-\frac{p(b)}{\beta_1}\left[2\gamma_2 u(b)-\beta_o u^2(b)\right]+$$

$$+\int_a^b\left[pu'^2+qu^2+2fu\right]dx.$$

Шундай қилиб, (3.6) ва (3.2) бир жинсли бўлмаган чегаравий шартлар билан берилган чегаравий масала (3.14) ва (3.16) шартлар бажарилганда (3.24) функционал учун вариацион масала билан тенг кучлидир.

Эслатма. Агар $\alpha_1=0$ ва $\beta_1\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$u(a)=z(a)=\frac{\gamma_1}{\alpha_o}$$

бўлиб, (3.23) ва (3.24) дан $I(u)$ функционал сифатида қуйидагини олиш мумкин:

$$I(u)=-\frac{p(b)}{\beta_1}\left[2\gamma_2 u(b)-\beta_o u^2(b)\right]+\int_a^b\left(pu'^2+qu^2+2fu\right)dx.$$

Агар $\alpha_1\neq 0$ ва $\beta_1=0$ бўлса, у ҳолда

$$u(b)=z(b)=\frac{\gamma_2}{\beta_o}$$

бўлиб,

$$I(u)=\frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2\gamma_1 u(a)-\alpha_o u^2(a)\right]+\int_a^b\left(pu'^2+qu^2+2fu\right)dx$$

бўлади. Ниҳоят, $a_1=\beta_1=0$ бўлса, у ҳолда $I(u)$ функционал қуйидаги содда кўринишга эга бўлади:

$$I(u)=\int_a^b\left(pu'^2+qu^2+2fu\right)dx.$$

11.4-§. РИТЦ МЕТОДИНИНГ ҒОЯСИ

Ритц методи вариацион масалани тақрибий ечишга мўлжалланган. Соддалик учун бирор чизиқли $K=\{u\}$ функциялар тўпламида аниқланган ушбу

$$I(u)=(Au,u)-2(f,u) \tag{4.1}$$

функционални қараймиз, бу ерда A — мусбат симметрик чизиқли оператор, $f(p)$ — берилган узлуксиз функция. Фараз қилайлик,

K синфнинг функциялари қуйидаги чизиқли чегаравий шартни қаноатлантирсин:

$$R(u)=\psi(p), \tag{4.2}$$

бу ерда R — маълум чизиқли функционал, $\psi(p)$ — берилган функция.

Энди етарлича силлиқ чизиқли эркли

$$\varphi_o(p), \varphi_1(p), ..., \varphi_n(p)$$

функциялар кетма-кетлигини шундай танлаймизки, $\varphi_0(p)$ бир жинсли бўлмаган

$$R(\varphi_o)=\psi(p)$$

чегаравий шартни қаноатлантириб, қолганлари бир жинсли шартларни қаноатлантирсин:

$$R(\varphi_i)=0, \ i=1,2,...,n.$$

Чегаравий ушбу

$$\psi_n(p, a_1, a_2, ..., a_n)=\varphi_o(p)+\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(p) \tag{4.3}$$

чизиқли комбинацияни оламиз,

$$R(\psi_n)=R(\varphi_o)+\sum_{i=o}^{n} a_i o=R(\varphi_o)=\psi(p)$$

бўлганлиги сабабли ихтиёрий a_1, a_2, ..., a_n учун $\psi_n \in K$.

Энди (4.1), (4.2) вариацион масаланинг ечимини (4.3) кўринишда излаймиз. Бунинг учун $\psi_n(p; a_1, a_2, ..., a_n)$ ифодани (4.1) функционалга қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I(\psi_n)=F(a_1, a_2, ..., a_n), \tag{4.4}$$

бунда F n та a_1, a_2, ..., a_n ўзгарувчига боғлиқ бўлган маълум функция. Биз a_1, a_2, ..., a_n ларни шундай танлашимиз керакки, $F(\psi_n)$ минимумга эришсин. Бунинг учун a_i сонлар қуйидаги

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=0, \ \frac{\partial F}{\partial a_2}=0, ..., \ \frac{\partial F}{\partial a_n}=0 \tag{4.5}$$

тенгламалар системасининг ечими бўлиши керак. Бу системани ечиб, $I(\psi_n)$ га минимум берадиган $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ ларни топамиз; бу қийматларни (4.3) га қўйиб, керакли тақрибий ечимни ҳосил қиламиз:

$$\psi_n\left(p;\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n\right)=\varphi_o(p)+\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i\varphi_i(p). \qquad (4.6)$$

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, муайян ҳолларда бу тақрибий ечимни топиш жараёни жуда содда. Чунки амалиётда учрайдиган муҳим ҳолларда $I(u)$ функционалда учрайдиган интегралларда интеграл остидаги ифода u, u'_x, u'_y, ..., ларга нисбатан иккинчи даражали кўпҳад бўлиб, (4.5) система a_1, a_2, ..., a_n ларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборат бўлади. Амалиётда етарлича аниқликка эришиш учун n = 2, 3, 4, 5, ҳатто айрим ҳолларда n = 1 деб олсак ҳам етарли бўлади.

11.5-§. РИТЦ МЕТОДИ БИЛАН ЭНГ СОДДА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИ ЕЧИШ

Фараз қилайлик, бизга ўз-ўзига қўшма дифференциал тенглама

$$\frac{d}{dx}(p(x)u')-q(x)u=f(x) \qquad (5.1)$$

ва энг содда чегаравий шартлар

$$u(a)=\gamma_1,\ \ u(b)=\gamma_2 \qquad (5.2)$$

берилган бўлсин, бунда $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. 11.3-§ даги эслатмага кўра (5.1), (5.2) чегаравий масала (5.2) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $u\in C^2[a, b]$ функциялар тўпламида қуйидаги

$$I(u)=\int_a^b\left[p(x)u'^2+q(x)u^2+2f(x)u\right]dx \qquad (5.3)$$

функционал учун вариацион масалага тенг кучлидир.

Ритц методини қўллаш учун шундай

$$\varphi_o(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ ...,\varphi_n(x)$$

чизиқли эркли функциялар системаси (базис функциялар)ни оламизки, $\varphi_o(a)=\gamma_1$, $\varphi_o(b)=\gamma_2$ бўлиб, қолганлари бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин: $\varphi_i(a)=\varphi_i(b)=0$.

Вариацион масаланинг ечимини қуйидаги чизиқли комбинация

$$\psi_n(x)=\varphi_o(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x) \qquad (5.4)$$

шаклида излаймиз, бунда $a_i (i = 1,2, ..., n)$ — ўзгармас сонлар. Кўриниб турибдики, $\psi_n(x)$ чегаравий шартларни қаноатлантиради:

$$\psi_n(a)=\gamma_1,\ \psi_n(b)=\gamma_2.$$

Энди (5.4) ни (5.3) функционалга қўямиз:

$$I(\psi_n)=\int_a^b\left\{p(x)\left[\varphi_o'(x)+\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i'(x)\right]^2+q(x)\left[\varphi_o(x)+\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x)\right]^2+\right.$$
$$\left.+2f(x)\left[\varphi_o(x)+\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x)\right]\right\}dx\equiv F(a_1,a_2,...,a_n). \qquad (5.5)$$

Бу ифодадан a_j (j = 1, 2, ..., n) га нисбатан хусусий ҳосила олиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial a_j}=\int_a^b\left\{p(x)\left[\varphi_o'(x)+\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i'(x)\right]\varphi_j'(x)+\right.$$
$$\left.+q(x)\left[\varphi_o(x)+\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x)\right]\varphi_j(x)+f(x)\varphi_j(x)\right\}dx=0$$

ёки

$$\sum_{i=1}^n a_i\int_a^b\left[p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right]dx=$$
$$=-\int_a^b\left[p(x)\varphi_o'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_o(x)\varphi_j(x)+\varphi_o(x)f(x)\right]dx,$$

ёхуд (j = 1, 2, ..., n)

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}a_i=b_j\ ,$$

бу ерда

$$A_{ij}=\int_a^b\left[p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right]dx, \qquad (5.6)$$

$$b_j=-\int_a^b\left[p(x)\varphi_o'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_o(x)\varphi_j(x)+\varphi_o(x)f(x)\right]dx, \qquad (5.7)$$

$$(i,j=1,2,...,n).$$

Кўриниб турибдики,

$$\tilde{A}=\left[A_{ij}\right] \qquad (5.8)$$

матрица симметрик матрицадир. Энди (5.5) системани ечиб, $I(\psi_n)$ га минимум берадиган функцияни (5.4) кўринишда ёзамиз. Шуни таъкидлаш керакки, ечимнинг аниқлиги кўпинча базис функциянинг танланишига боғлиқ.

Мисол. Қуйидаги

$$u'' - u = x, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{5.9}$$

чегаравий масала Ритц методи билан ечилсин.

Ечиш. Чегаравий шартлар бир жинсли бўлганлиги учун $\varphi_0(x) \equiv 0$ деб олсак, $n = 2$ деб олиб, $\varphi_1(x) = x(1-x)$, $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$ ни оламиз. (5.9) чегаравий масалани (5.1) масала билан солиштириб кўрсак, $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $f(x) = x$. Шунинг учун ҳам

$$A_{ij} = \int_0^1 \left[\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + \varphi_i(x)\varphi_j(x)\right] dx, \quad b_j = -\int_0^1 f(x)\varphi_j(x) dx (i, j = 1, 2).$$

Ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$b_1 = \frac{1}{12}, b_2 = \frac{1}{20}, \quad A_{11} = \frac{11}{30}, \quad A_{12} = A_{21} = \frac{11}{60}, \quad A_{22} = \frac{1}{7}.$$

(5.5) система қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{11}{30}a_1 + \frac{11}{60}a_2 = -\frac{1}{12}, \quad \frac{11}{60}a_1 + \frac{1}{7}a_2 = -\frac{1}{20}.$$

Бу системанинг ечими эса $a_1 = -\frac{7}{43}$, $a_2 = -\frac{69}{473}$.
Демак,

$$\psi_2(x) = x(1-x)\left(-\frac{7}{43} - \frac{69}{473}x\right).$$

Ўрнига қўйиб текшириб кўриш мумкинки, аниқ ечим

$$u(x) = \frac{shx}{sh1} - x.$$

Мисол тариқасида аниқ ечим билан тақрибий ечимнинг қийматларини $x = 0{,}5$ нуқтада солиштириб кўрсак, $u(0{,}5) = -0{,}057$; $\psi_2(0{,}5) = -0{,}059$.

11.6-§. МИНИМАЛЛАШТИРУВЧИ КЕТМА-КЕТЛИК ВА РИТЦ МЕТОДИНИНГ ЯҚИНЛАШИШИ

Ушбу

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx \tag{6.1}$$

функционални $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга ва

$$u(a) = \gamma_1, \quad u(b) = \gamma_2 \tag{6.2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган функциялар тўпламида қараймиз (жоиз функциялар синфида).

Фараз қилайлик, $I(u)$ қуйидан чегараланган бўлсин ва шундай $u^*(x)$ жоиз функция топилсинки, у қуйидаги шартни қаноатлантирсин:

$$\min_u I(u) = m^* = I(u^*) .$$

Агар шундай $u_n^*(x)$ $(n = 0,1,2,...)$ жоиз функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, I функционалнинг қиймати m^* минимумга яқинлашса, яъни

$$m_n = I(u_n^*) \to m^* = I(u^*)$$

бўлса, у ҳолда $\{u_n^*\}$ кетма-кетлик минималлаштирувчи кетма-кетлик дейилади. Кетма-кетликнинг минималлаштирувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқмайди, яъни $I(u_n^*) \underset{n\to\infty}{\to} I(u^*)$ дан $u_n^* \underset{n\to\infty}{\to} u^*$ келиб чиқмайди. Яқинлашиш $\left(u_n^* \underset{n\to\infty}{\to} u^*\right)$ юзага келиши учун u_n^* кетма-кетликни қуриш методи айрим шартларни қаноатлантириши керак.

Минималлаштирувчи кетма-кетлик қурилгандан ва унинг u^* га яқинлашиш шарти аниқлангандан кейин энг оғир масала қолади, бу $u^*(x) - u_n^*(x)$ хатоликни баҳолаш масаласи. Бу масалани айрим ҳолларда ечиш мумкин. Энди (6.1) функционал учун $u^*(x)$ га яқинлашадиган $u_n^*(x) = y(x, a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*)$ функциялар оиласини қурамиз. У (4.6) функция билан устма-уст тушиши шарт эмас. $\left\{u_n^*(x)\right\}$ кетма-кетлик минималлаштирувчи кетма-кетлик бўлиши учун қанақа шарт бажарилиши кераклигини кўриб чиқамиз.

Таъриф. $u_n(x) = y\ \ (x, a_1, a_2, ..., a_n)$ функциялар оиласи K жоиз функциялар тўпламида C^1 тўла дейилади, агар ҳар бир $u(x) \in K$, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун n нинг шундай қиймати ва a_1, a_2 ..., a_n параметрларнинг шундай мажмуасини кўрсатиш мумкин бўлсаки, улар учун

$$|u(x) - u_n(x)| \le \varepsilon, \ |u'(x) - u_n'(x)| \le \varepsilon, \quad a \le x \le b$$

тенгсизликлар бажарилса.

Теорема. *Агар $F(x,u,u')$ функция $\{a \le x \le b, -\infty < u, u' < \infty\}$ соҳада узлуксиз бўлиб, $u_n(x) = y(x, a_1, a_2, ..., a_n)$ функциялар оиласи эса n ўсиши билан кенгайса ва C^1 тўлалик хоссасига эга бўлса, у ҳолда Ритц методи билан қурилган $\left\{u_n^*(x)\right\}$ кетма-кетлик минималлаштирувчи бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, K синфда $u^*(x)$ функция $I(x)$ функционалга минимумни таъминласин, $u^* \in K$ ва $u_n(x)$ функция C^1 тўлалик хоссасига эга бўлсин. Демак, ихтиёрий $\delta > 0$ сон учун шундай n ва $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ қийматлар топиладики, барча $x \in [a, b]$ да $u_n(x) = y\ \ (x, \bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n)$ учун қуйидаги шартлар бажарилади:

$$\left|u^*(x)-\bar{u}_n(x)\right|\le\delta,\qquad \left|u^{*\prime}(x)-\bar{u}'_n(x)\right|\le\delta.$$

Равшанки,

$$I\left[u^*(x)\right]\le I\left[\bar{u}_n(x)\right].$$

Энди $F(x, u, u')$ нинг узлуксизлигидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ни танлаш мумкинки,

$$0\le I\left[\bar{u}_n(x)\right]-I\left[u^*(x)\right]\le\delta$$

тенгсизлик бажарилади. Аммо бу тенгсизлик Ритц методи бўйича қурилган $u_n^*(x)$ учун яна ҳам яхшироқ бажарилади, чунки

$$I\left[u^*(x)\right]\le I\left[u_n^*(x)\right]\le I\left[u_n(x)\right],$$

$\delta > 0$ ихтиёрий сон бўлганлигидан

$$\lim_{n\to\infty} I\left[u_n^*(x)\right]=I\left[u^*(x)\right]=m^* \tag{6.3}$$

келиб чиқади. Теорема исботланди.

Энди минималлаштирувчи кетма-кетликнинг яқинлашиш масаласини, яъни (6.3) тенгсизликдан қайси шартлар бажарилганда

$$\lim_{n\to\infty} u_n^*(x)=u^*(x)$$

ўринли бўлишини кўриб чиқамиз. Бу масалани (6.1) интеграл учун кўрадиган бўлсак, катта тадқиқот олиб боришга тўғри келар эди. Шунинг учун ҳам биз бу масалани энг содда масала учун, яъни

$$I(u)=\int_a^b\left[p(x)u'^2+q(x)u^2+2f(x)u\right]dx \tag{6.4}$$

функционалнинг минимумини $u(a)=\gamma_1,\ u(b)=\gamma_2,\ u\in C^1\left[a,b\right]$ шартлар бажарилганда топиш масаласи учун кўриб чиқамиз. Маълумки, бу масала қуйидаги

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)u'\right]-q(x)u=f(x),\ u(a)=\gamma_1,\ u(b)=\gamma_2 \tag{6.5}$$

чегаравий масалага тенг кучлидир.

Теорема. *Агар қуйидаги*

1) $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ *функциялар* $[a, b]$ *да узлуксиз;*

2) $p(x) > 0,\ q(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b$;
3) $\{u_n(x)\}$ *функциялар кетма-кетлиги (6.4) вариацион масала учун минималлаштирувчи бўлсин деган шартлар бажарилса, у ҳолда бу кетма-кетлик* $[a, b]$ *оралиқда (6.5) чегаравий масаланинг ечими* $u^*(x)$ *га текис яқинлашади.*

Исботи. Равшанки,

$$|u^*(x) - u_n(x)| = \left|\int_a^x [u^{*\prime}(t) - u_n'(t)]dt\right| \leq \int_a^x |u^{*\prime}(x) - u_n'(x)|dx. \qquad (6.6)$$

Охирги интегралга Буняковский тенгсизлигини қўллаймиз:

$$\int_a^x |u^{*\prime}(x) - u_n'(x)|dx \leq \sqrt{b-a}\left\{\int_a^x [u^{*\prime}(x) - u_n'(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \qquad (6.7)$$

Охирги интеграл учун ушбу тенгсизликларни давом эттирамиз:

$$\sqrt{b-a}\left\{\int_a^b [u^{*\prime}(x) - u_n'(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\frac{b-a}{\min p(x)}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\int_a^b p(x)[u^{*\prime}(x) - u_n'(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \leq \left[\frac{b-a}{\min p(x)}\right]^{1/2} \times \qquad (6.8)$$

$$\times \left\{\int_a^b \left[p(x)\left(u^{*\prime}(x) - u_n'(x)\right)^2 + q(x)\left(u^*(x) - u_n(x)\right)^2\right]dx\right\}^{1/2}$$

Энди ушбу тенгликни кўрсатамиз:

$$\int_a^b \left\{p(x)\left[u^{*\prime}(x) - u_n'(x)\right]^2 + q(x)\left[u^*(x) - u_n(x)\right]^2\right\}dx = \\ = I(u_n) - I(u^*). \qquad (6.9)$$

Бунинг учун (1.12) тенгликдан фойдаланамиз:

$$I(u) = I(u^*) + \int_a^b \left(p(x)\varepsilon'^2 + q(x)\varepsilon^2\right)dx. \qquad (6.10)$$

Бу тенгликда $u(x)$ ихтиёрий жоиз функция ва $\varepsilon(x) = u(x) - u^*(x)$. Шунинг учун ҳам (6.9) ни ҳосил қилиш учун (6.10) да $u(x) = u_n(x)$ деб олиш кифоядир. Энди (6.6), (6.10) муносабатларга кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left|u^*(x)-u_n(x)\right| \le \left[\frac{b-a}{\min p(x)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[I(u_n)-I(u^*)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.11)$$

Бу баҳонинг ўнг томони x га боғлиқ эмас, x эса $[a, b]$ нинг ихтиёрий нуқтаси. Теорема шартига кўра $n\to\infty$ да $I(u_n) - I(u^*)\to 0$. Шунинг учун ҳам (6.10) тенгсизликка кўра минималлаштирувчи $\{u_n(x)\}$ кетма-кетлик (6.4) масаланинг ечими $u^*(x)$ га нисбатан текис яқинлашади. Теорема исботланди.

11.7-§. ПУАССОН ВА ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАЛАРИ УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР ҲАМДА УЛАРНИ РИТЦ МЕТОДИ БИЛАН ЕЧИШ

11.7.1. Пуассон ва Лаплас тенгламалари учун чегаравий масалалар. Айтайлик, G текисликдаги бирор соҳа бўлиб, Γ унинг чегараси ва $\bar{G} = G\cup\Gamma$ бўлсин.

Фараз қилайлик, бизга

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y), \quad f(x,y)\in C(G) \qquad (7.1)$$

Пуассон тенгламаси берилган бўлсин. Бу тенгламанинг Γ чегарада

$$u\big|_\Gamma = \varphi(x,y) \qquad (7.2)$$

шартни қаноатлантирадиган ечимини G соҳада топиш талаб қилинсин, бунда $\varphi(x, y)$ берилган функция. Агар $\varphi(x, y) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$u\big|_\Gamma = 0 \qquad (7.3)$$

бўлади.

Биз, аввало, (7.1), (7.3) чегаравий масалани ечамиз. Ўзининг биринчи ва иккинчи ҳосилалари билан $\bar{G}$ да узлуксиз ҳамда Γ чегарада нолга айланадиган жоиз функциялар синфи $D = \{u(x, y)\}$ да

$$Au = -\Delta u \qquad (7.4)$$

операторнинг симметриклиги ва мусбатлигини кўрсатамиз. Бунинг учун Гриннинг [1] ушбу

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_\Gamma Pdx + Qdy \qquad (7.5)$$

формуласидан фойдаланамиз. Фараз қилайлик, $u\in D$ ва $\vartheta \in D$ бўлсин. Ушбу ифодани кўрамиз:

$$(Au,\vartheta)-(u,A\vartheta)=\iint_G\left[-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\vartheta+u\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right)\right]dxdy=$$

$$=\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy.$$

Энди Грин формуласида $Q=u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}$, $-P=u\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}$ деб олиб, $u|_\Gamma=0$ ва $\vartheta|_\Gamma=0$ чегаравий шартларни ҳисобга олсак, у ҳолда

$$(Au,\vartheta)-(u,A\vartheta)=$$

$$=\int_\Gamma\left[-\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-\vartheta\frac{\partial u}{dy}\right)dx+\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]=0 \tag{7.6}$$

ёки

$$(Au,\vartheta)=(u,A\vartheta)$$

келиб чиқади. Демак, A оператор симметрик. Энди унинг мусбатлигини аниқлаймиз:

$$(Au,u)=-\iint_G u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy=-\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy+$$

$$+\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

Биринчи интегралга Грин формуласини қўллаб, чегаравий шартлардан фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{gathered}(Au,u)=-\int_\Gamma\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+\\+\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Демак,

$$(Au,u)=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\geq 0. \tag{7.8}$$

Агар $(Au,\ u)=0$ бўлса, у ҳолда (7.8) формулага кўра

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Бундан $u(x,\ y)=c$ ва (7.3) чегаравий шартдан

$$u(x,y)\equiv 0.$$

Шундай қилиб, $A = -\Delta$ оператор мусбат экан. Бундан келиб чиқадики, (7.3) бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирадиган (7.1) масала 11.2-§ даги 2-теоремага кўра ушбу

$$I(u) = (Au, u) - 2(u, f) \tag{7.9}$$

функционалнинг D синфда минимумини қидириш билан тенг кучлидир. (7.8) формулага кўра бу функционал қуйидаги кўринишга эга:

$$I(u) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right] dxdy. \tag{7.10}$$

Энди (7.1) чегаравий масалани (7.2) бир жинсли бўлмаган чегаравий шартлар билан қараймиз.

Фараз қилайлик, $D_1 = \{u(x, y)\}$ функциялар синфи G да иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга ва (7.2) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган функциялардан иборат бўлсин. 11. 3-§ дагидек шундай $z(x, y) \in C^2(G)$ функцияни қурамизки, у (7.2) чегаравий шартни қаноатлантирсин. Ушбу

$$\vartheta(x, y) = u(x, y) - z(x, y) \tag{7.11}$$

функцияни киритамиз, бу ерда $u(x, y)$ бир жинсли бўлмаган чегаравий шартни қаноатлантиради. У ҳолда $\vartheta(x, y)$ функция Γ чегарада (7.3) шартни қаноатлантиради:

$$u|_\Gamma = 0 \tag{7.12}$$

ва

$$A\vartheta = Au - Az = f(x, y) - Az \tag{7.13}$$

оператор тенгламанинг ечими бўлади, бунда $Az = -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$ маълум функция. Ушбу $\vartheta = \vartheta(x,y)$ функция (7.13), (7.12) чегаравий масаланинг ечими бўлиб, (7.9) формулага кўра

$$I_1(\vartheta) = (A\vartheta, \vartheta) - 2(\vartheta, f) + 2(\vartheta, Az) \tag{7.14}$$

функционалга минимум беради. Бу тенгликда аввалги $u(x,y)$ ўзгарувчига қайтиб, скаляр кўпайтма ва чизиқли операторнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} I(u - z) &= (A(u - z), u - z) - 2(u - z, f) + 2(u - z, Az) = \\ &= (Au, u) - 2(f, u) + (u, Az) - (z, Au) + 2(z, f) - (Az, z). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Бу тенгликдаги охирги иккита ҳад $u(x, y)$ га боғлиқ бўлмаганлиги туфайли (7.12) функционалга минимум берадиган $\bar{u} = u(x, y)$ функция қуйидаги

$$I_1(u) = (Au, u) - 2(u, f) + \left[\left(Az, u\right) - (Au, z)\right] \qquad (7.16)$$

функционалга ҳам минимум беради.

Энди (7.16) функционални шундай функционал билан алмаштирамизки, унда z функция қатнашмайди. Бунинг учун (7.6) формулада ишлатилган алмаштиришдан фойдаланамиз:

$$(Az, u) - (Au, z) = \iint_G (z\Delta u - u\Delta z)dxdy =$$

$$= \int_\Gamma \left[-\left(z\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \left(z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right] = \int_\Gamma \left(z\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{dz}{\partial \vec{n}}\right)ds.$$

Бу ерда $\vec{n}$ вектор Γга нисбатан ташқи нормал ва

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{ds}.$$

Бундан

$$z\big|_\Gamma = u\big|_\Gamma = \varphi(x, y)$$

ни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(Az, u) - (Au, z) = \int_Ã \varphi(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{n}}\right)ds. \qquad (7.17)$$

Иккинчи томондан, (7.7) формулага асосан

$$\left(Au, u\right) = -\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds + \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= -\int_\Gamma \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds + \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \qquad (7.18)$$

Энди (7.17), (7.18) ларни (7.16) формулага қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$I_1(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2fu\right]dxdy - \int_\Gamma \varphi(x, y)\frac{\partial z}{\partial \vec{n}}ds.$$

Бу формуладаги охирги ҳад $u(x, y)$ функцияга боғлиқ эмас. Шунинг учун ҳам (7.1), (7.2) чегаравий масала D_1 жоиз функциялар синфида

$$I_2(u) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right] dxdy \tag{7.19}$$

функционал учун вариацион масала билан тенг кучлидир.

Хусусий ҳолда $f(x, y) \equiv 0$ бўлса, биз

$$\Delta u = 0 \tag{7.20}$$

Лаплас тенгламасига келамиз, у ҳолда (7.1), (7.2) чегаравий масала *Дирихле масаласига* айланади. (7.19) формуладан кўрамизки, Дирихле масаласининг $u(x, y)$ ечими D_1 синфда

$$I_3(u) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \tag{7.21}$$

Дирихле интегралига минимумни таъминлайди.

11.7.2. Дирихле масаласини Ритц методи билан ечиш. (7.20) ва (7.21) Дирихле масаласини G соҳада ечиш учун шундай эркли функциялар системасини (базис функцияларни)

$$\psi_o(x, y), \psi_1(x, y), ..., \ \psi_n(x, y) \in C^2(G)$$

тузамизки, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$\psi_o(x, y)\big|_\Gamma = \varphi(x, y),$$
$$\psi_i(x, y)\big|_\Gamma = 0 \ \ (i = 1, 2, \ ..., n).$$

У ҳолда ихтиёрий a_1, a_2, ..., a_n ўзгармас сонлар учун ушбу

$$u_n(x, y) = \psi_o(x, y) + \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i(x, y) \tag{7.22}$$

чизиқли комбинация жоиз функциялар синфига киради. Энди (7.22) ифодани (7.21) интегралга қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I_3(u_n) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial \psi_o}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy. \tag{7.23}$$

Биз a_1, a_2, ..., a_n ларни шундай танлаб оламизки, (7.23) интеграл минимумга айлансин. Бунинг учун минимумнинг зарурий шартлари бажарилиши керак:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} I_3(u_n) = 2\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial \psi_o}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right] dxdy = 0, \tag{7.24}$$

$$\left(j = 1, 2, ..., n \right).$$

Ушбу

$$A_{ij} = \iint\limits_G \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{dx} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy, \quad A_{ji} = A_{ij}$$

$$(i = 0, 1, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., n)$$

белгилашни киритиб, (7.24) системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left. \begin{array}{l} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + ... + A_{1n}a_n = -A_{01}, \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + ... + A_{2n}a_n = -A_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}a_1 + A_{n2}a_2 + ... + A_{nn}a_n = -A_{0n}. \end{array} \right\} \tag{7.25}$$

Бу чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиб, a_1, a_2, ..., a_n коэффициентларни аниқлаймиз. Шу коэффициентлар билан олинган $u_n(x, y)$ функция Дирихле масаласининг тақрибий ечими бўлади. Бу ечимнинг аниқлиги $\psi_i(x, y)$ базис функцияларнинг танланишига ва уларнинг сонига боғлиқ.

Ритц методининг умумийроқ хусусий ҳосилали тенгламалар учун чегаравий масалаларга қўлланилишини [3, 19, 20, 21, 22, 32] дан қараш мумкин.

Мисол. $G = \{0 < x,\ y < 1\}$ соҳада

$$\Delta u = 0, \qquad u\big|_{\Gamma} = x^3 \tag{7.26}$$

Дирихле масаласи ечилсин.

Ечиш. Бу ерда чегара $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ тўғри чизиқлар бўлганлиги учун базис функцияларни қуйидагича танлаймиз:

$$\psi_o(x, y) = x^3,$$

$$\psi_1(x, y) = x(1 - x)y(1 - y),$$

$$\psi_2(x, y) = x^2(1 - x)y(1 - y),$$

$$\psi_3(x, y) = x(1 - x)y^2(1 - y)$$

ва чизиқли комбинацияни ушбу

$$u_3(x,y) = x^3 + xy(1-x)(1-y)\left(a_1 + a_2 x + a_3 y\right) \tag{7.27}$$

кўринишда оламиз. Равшанки, ихтиёрий a_1, a_2, a_3 учун $u_3(x, y)$ функция (7.29) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Ҳисоблашлар кўрсатадики, (7.25) чизиқли алгебраик тенгламалар системаси қуйидагидан иборат:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{45}a_1 + \frac{1}{90}a_2 + \frac{1}{90}a_3 &= \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{90}a_1 + \frac{4}{525}a_2 + \frac{1}{180}a_3 &= \frac{1}{20}, \\ \frac{1}{90}a_1 + \frac{1}{180}a_2 + \frac{4}{525}a_3 &= \frac{1}{24}. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг ечими $a_1 = \frac{45}{26}$, $a_2 = \frac{105}{26}$, $a_3 = 0$.

Бу қийматларни (7.27) га қўйиб, берилган масаланинг тақрибий ечимини топамиз:

$$u_3(x, y) = x^3 + xy(1-x)(1-y)\left(\frac{45}{26} + \frac{105}{26}x\right).$$

11.8-§. РИТЦ МЕТОДИНИНГ ХАТОЛИГИНИ БАҲОЛАШ ВА УНИНГ ЯҚИНЛАШИШ ТАРТИБИ

Ритц методининг яқинлашишини ва унинг тартибини баҳолаш борасида академик Н.М. Крилов катта изланишлар олиб борган. Биз бу ерда энг содда ҳолни кўрамиз, бошқа ҳоллар [20] да ва унда кўрсатилган адабиётларда келтирилган.

Айтайлик, ушбу ўз-ўзига қўшма

$$-\frac{d}{dx}\left(pu'\right) + qu = f \tag{8.1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{8.2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб қилинсин. Бу ерда $[0,1]$ оралиқда

$$p(x) \geq p_o, \quad q(x) \geq 0 \tag{8.3}$$

тенгсизликлар ўринли ва $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар $[0,1]$ да узлуксиз деб оламиз.

Энди (8.1), (8.2) чегаравий масалани ечиш учун Ритц методини қўллаймиз. Айтайлик, $u_n^*(x)$ функция

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)$$

функциялар орасида

$$I(u)=\int_o^1\left[pu'^2+qu^2-2fu\right]dx$$

функционалга минимумни таъминловчи функция бўлсин. Бу $u_n^*(x)$ функцияни (8.1), (8.2) чегаравий масаланинг $u^*(x)$ аниқ ечимига n-яқинлашиш деб қарашимиз мумкин.

Энди

$$\varepsilon_n=\max_{0\le x\le 1}\left|u^*(x)-u_n^*(x)\right| \tag{8.4}$$

белгилаш киритиб, ε_n нинг нолга интилишини ва нолга интилиш тезлигини аниқлаймиз.

Қаралаётган $[0,1]$ оралиқда квадрати билан интегралланувчи ҳақиқий функциялар фазосини қараймиз. Бу фазода скаляр кўпайтма ва нормани қуйидагича киритамиз:

$$(g,h)=\int_o^1 g(x)h(x)dx,\quad \|g\|=\sqrt{\int_o^1 g^2(x)dx}. \tag{8.5}$$

Буняковский ва Коши тенгсизликларига кўра

$$\left|\int_o^1 g(x)h(x)dx\right|\le\|g\|\cdot\|h\|,\quad \|g+h\|\le\|g\|+\|h\|. \tag{8.6}$$

Равшанки,

$$\|g\|\le\max_{0\le x\le 1}|g(x)|,\quad \|g\|\min_{0\le x\le 1}|h(x)|\le\|hg\|\le\|g\|\max_{0\le x\le 1}|h(x)|$$

ва $\|ag\|=|a|\|g\|$ (a — ўзгармас сон).

Бизга $\|u*\|$, $\|u*'\|$ ва $\|u*'\|$ ларни баҳолашга тўғри келади. Маълумки, функционалнинг биринчи вариацияси

$$\delta I=\int_o^1\left[pu*'\eta'+qu*\eta-f\eta\right]dx$$

ҳар қандай $\eta(x)\in C^1[0,1]$ функция учун нолга тенг. Шунинг учун ҳам $\eta(x)=u*(x)$ деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_o^1\left\{p(x)\left[u*'\right]^2+q(x)\left[u*\right]^2\right\}dx=\int_o^1 f(x)u*dx.$$

Бундан

$$\int_o^1 p(x)\left[u^{*\prime}\right]^2 dx \le \int_o^1 f(x) u^{*\prime} dx,$$

чунки $q(x)\geq 0$. Буняковский тенгсизлигини қўллаймиз:

$$\int_o^1 p(x)\left[u^{*\prime}\right]^2 dx \le \|f\|\cdot\|u^{*\prime}\|.$$

Кейин қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\int_o^1 \left[u^{*\prime}\right]^2 dx \le \frac{1}{p_o}\|f\|\cdot\|u^*\|$$

ёки

$$\|u^{*\prime}\|^2 \le \frac{1}{p_o}\|f\|\cdot\|u^*\|. \tag{8.7}$$

Охирги тенгсизликнинг ўнг томонида номаълум $\|u^*\|$ миқдор қатнашади, бундан ушбу

$$\|g\| \le \frac{1}{\pi}\|g'\| \tag{8.8}$$

Стеклов тенгсизлиги ёрдамида қутуламиз. Бу тенгсизлик $[0,1]$ да узлуксиз, $g'(x)$ ҳосилага эга (чекли миқдордаги нуқталардан истисно равишда) ва квадрати билан интегралланувчи функция учун ўринлидир. Шу билан бирга

$$1)\, g(0) = g(1) = 0 \qquad \text{ёки} \qquad 2)\ \int_o^1 g(x)dx = 0$$

шартларнинг бирортаси бажарилиши керак. Юқоридаги шартлар бажарилганда $g(x)$ функция ва унинг ҳосиласи учун қуйидаги қаторларни ёза оламиз:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x, \quad g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k \cos k\pi x.$$

Бу қаторларга Парсевал-Стеклов тенглигини қўллаймиз, натижада

$$\|g\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2, \quad \|g'\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\pi b_k\right)^2$$

келиб чиқади. Булардан (8.8) тенгсизлик осонлик билан ҳосил бўлади. Қаралаётган $u^*(x)$ функция $g(x)$ функцияга қўйилган шартларни қаноатлантиради, шунинг учун (8.8) тенгсизликка кўра

$$\|u^{*\prime}\| \le \frac{1}{\pi}\|u^{*\prime}\|.$$

Буни (8.7) тенгсизликка қўйсак,

$$\left\|u*'\right\| \le \frac{1}{\pi p_o}\left\|f\right\| \tag{8.9}$$

келиб чиқади.

Энди $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|u*(x)\right|$ ни баҳолаймиз. Агар $0 \le x \le \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$\left|u*(x)\right| = \left|\int_o^x u*'(t)dt\right| \le \left(\int_o^{\frac{1}{2}} 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_o^1 \left(u*'(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u*'\right\|$$

ва агар $\frac{1}{2} \le x \le 1$ бўлса, у ҳолда

$$\left|u*(x)\right| = \left|\int_x^1 u*'(t)dt\right| \le \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(u*'(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u*'\right\|.$$

Демак,

$$\max_{0\le x\le 1}\left|u*(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u*'\right\| \le \frac{1}{\sqrt{2}p_0\pi}\left\|f\right\|. \tag{8.10}$$

Энди $\left\|u*''\right\|$ ни баҳолаймиз, бунинг учун берилган (8.1) тенгламадан фойдаланамиз:

$$-p(x)u*'' - p'(x)u*' + q(x)u* = f(x).$$

Бунда Коши тенгсизлигига кўра

$$\left\|pu*''\right\| \le \left\|p'u*'\right\| + \left\|qu*\right\| + \left\|f\right\| \tag{8.11}$$

келиб чиқади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\left\|p'\right\| = \max_{0\le x\le 1}\left|p'(x)\right|, \quad \left\|q\right\| = \rho \le \max_{0\le x\le 1} q(x). \tag{8.12}$$

Юқоридаги (8.9), (8.12) тенгсизликлардан

$$\left\|pu*''\right\| \le \frac{\mu}{p_o\pi}\left\|f\right\| + \frac{\rho}{p_o\pi^2}\left\|f\right\| + \left\|f\right\| = \tau\left\|f\right\| \tag{8.13}$$

ҳосил бўлади, бунда

$$\tau = \frac{\mu}{p_o\pi} + \frac{\rho}{p_o\pi^2} + 1.$$

Энди ушбу масалага Ритц методини қўллаймиз, бу методда базис функциялар сифатида ортонормалланган

$$\psi_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x \qquad (k = 1, 2, ...) \tag{8.14}$$

функцияларни оламиз.

Аниқ ечим $u^*(x)$ учун қурилган Фурье тригонометрик қаторининг n-қисмий йиғиндисини $Y_n(x)$ орқали белгилаймиз:

$$Y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Ушбу

$$u*(x) - Y_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$$

айирмани олиб, $\|u* - Y_n\|$, $\|u*' - Y_n'\|$, $\|u*'' - Y_n''\|$ ларнинг орасидаги муносабатларни ўрнатамиз. Бунинг учун Парсевал-Стеклов тенглигини қўллаймиз:

$$\|u* - Y_n\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2,$$

$$\|u*' - Y_n'\|^2 = \frac{\pi^2}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 b_k^2 = \frac{\pi^2(n+1)^2}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k}{n+1}\right)^2 b_k^2,$$

$$\|u*'' - Y_n''\|^2 = \frac{\pi^4}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^4 b_k^2 = \frac{\pi^4(n+1)^4}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k}{n+1}\right)^4 b_k^2.$$

Бу тенгликлардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\|u* - Y_n\| \le \frac{1}{\pi(n+1)}\|u*' - Y_n'\| \le \frac{1}{\pi^2(n+1)^2}\|u*'' - Y_n''\|.$$

Қаралаётган $I(u)$ функционалнинг ва $u_n^*(x)$, $Y_n(x)$ функцияларнинг таърифига кўра

$$I(u_n*) - I(u*) \le I(Y_n) - I(u*).$$

Бу тенгсизликни ҳамда (6.9) формулани ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^1\left[p\left(u_n^{*\prime} - u*'\right)^2 + q\left(u_n* - u*\right)^2\right]dx \le$$

$$\le \int_0^1\left[p\left(Y_n' - u*'\right)^2 + q\left(Y_n - u*\right)^2\right]dx. \tag{8.15}$$

Ушбу

$$\lambda = \|p\| \le \max_{0\le x\le 1} p(x) \tag{8.16}$$

белгилашни киритиб ва (8.10), (8.13) тенгсизликлардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_o^1 \left[p(Y_n' - u^{*'})^2 + q(Y_n - u^*)^2 \right] dx \le$$

$$\le \lambda \left\| Y_n' - u^{*'} \right\|^2 + \rho \left\| Y_n - u^* \right\|^2 \le \left(\lambda + \frac{\rho}{\pi} \right) \left\| Y_n' - u^{*'} \right\|^2 \tag{8.17}$$

ва

$$\left\| Y_n' - u^{*'} \right\|^2 \le \frac{1}{\pi^2 (n+1)^2} \left\| Y_n'' - u^{*''} \right\|^2 \le \frac{1}{\pi^2 (n+1)^2} \left\| u^{*''} \right\|^2 \le$$

$$\le \frac{\tau^2}{p_o^2 \pi^2 (n+1)^2} \left\| f \right\|^2 . \tag{8.18}$$

Энди (8.15), (8.18) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидагини келтириб чиқарамиз:

$$\left\| u_n^{*'} - u^{*'} \right\|^2 \le \frac{1}{p_o^3} \left(\lambda + \frac{\rho}{\pi} \right) \frac{\tau^2}{\pi^2 (n+1)^2} \left\| f \right\|^2 .$$

Кейин (8.10) тенгсизликни $u_n^{*'}(x) - u^{*'}(x)$ функцияга қўллаб, охирги натижага келамиз:

$$\varepsilon_n = \max_{0 \le x \le 1} \left| u_n^*(x) - u^*(x) \right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| u_n^{*'} - u^{*'} \right\| \le \frac{L}{n+1},$$

бунда

$$L = \frac{\tau}{p_o \pi} \left[\frac{1}{2 p_o} \left(\lambda + \frac{\rho}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left\| f \right\| .$$

Мураккаб ҳисоблашлар кўрсатадики, $n \to \infty$ да $\varepsilon_n = \frac{L_1}{n^{\frac{3}{2}}}$ баҳони олиш мумкин, бунда L_1 — маълум сон.

Ритц методининг турғунлик масаласи академик В.Қ. Қобуловнинг ишларида қараб чиқилган [22].

11.9-§. ГАЛЁРКИН МЕТОДИ

11.9.1. Галёркин методининг ғояси. Ритц методининг асосий камчилиги шундаки, у фақат оператори симметрик ва мусбат бўлган тенгламаларга қўлланилади. Академик Б.Г. Галёркин 1915 йилда шундай метод таклиф қилдики, у Ритц методига нисбатан умумийдир. Бу метод ҳеч қандай вариацион масала билан боғлиқ эмас, шунинг учун ҳам у батамом универсал метод ҳисобланади. Бу методни эллиптик, параболик ва гиперболик тенгламаларга, ҳатто улар вариацион масала билан боғлиқ бўлмаса ҳам, катта муваффақият билан қўллаш мумкин. Агар тенгламанинг оператори симметрик ва мусбат бўлса, Галёркин методи осонроқ йўл билан Ритц методи берадиган тақрибий ечимни беради. Тақрибий ечимнинг коэффициентларини аниқлайдиган чизиқли алгебраик тенгламалар системаси бир хил бўлади. Галёркин методининг яқинлашишини академик М. В. Келдиш кўрсатган.

Энди Галёркин методининг асосий ғояси билан танишамиз. Фараз қилайлик,

$$Au = f(x, y) \tag{9.1}$$

тенглама берилган бўлиб, A — қандайдир икки ўзгарувчили дифференциал оператор бўлсин ва (9.1) тенгламанинг ечими бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин. Бу масаланинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x, y), \tag{9.2}$$

бу ерда $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, ..., $\psi_n(x, y)$ функциялар берилган G соҳада тўлиқ бўлган чизиқли эркли $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг аввалги n таси бўлиб, бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантиради. Тақрибий ечим $u_n(x, y)$ аниқ ечимга айланиши учун $\varepsilon_n(x, y) = A\{u_n(x, y)\} - f(x, y)$ ифода айнан нолга айланиши керак. Агар $\varepsilon_n(x, y)$ узлуксиз бўлса, бу талаб $\varepsilon_n(x, y)$ функция $\{\psi_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг барча функцияларига ортогонал бўлиши билан тенг кучлидир. Аммо бизда фақат n та a_1, a_2, ..., a_n ўзгармаслар бўлганлиги сабабли ортогоналлик шартининг фақат n тасини қаноатлантира оламиз. Бу шартлар қуйидаги тенгламалар системасига олиб келади:

$$\iint_G \{A[u_n(x,y)] - f(x,y)\}\psi_j(x,y)\,dxdy = 0$$

ёки

$$\iint_G A[u_n(x,y)\psi_j(x,y)]\,dxdy = \iint_G f(x,y)\psi_j(x,y)\,dxdy \tag{9.3}$$

$$(j = 1, 2, ..., n).$$

Ушбу система a_i коэффициентларни топишга хизмат қилади. Агар A оператор чизиқли бўлса, у ҳолда бу система a_1, a_2, ..., a_n ларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборат бўлади. Бу системадан a_j ларни топиб (9.2) га қўйсак, керакли тақрибий ечимни ҳосил қиламиз.

Мисол. Ушбу

$$u'' + u = -x, \ \ u(0) = 0, \ \ u(1)=0 \tag{9.4}$$

чегаравий масаланинг ечими топилсин.

(Осонлик билан кўриш мумкинки, аниқ ечим $u(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x$).

Ечиш. (9.4) чегаравий масалага Ритц методини қўллаб бўлмайди, чунки бунда u олдидаги коэффициент $q(x) = 1>0$. Бу мисолда (9.2) тақрибий ечимини

$$u_n(x) = x\,(1-x)\,(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}) \tag{9.5}$$

кўринишда қидирсак, у ҳолда $u_n(x)$ чегаравий шартларни қаноатлантиради.

Биз бу ерда, аввало, $n = 2$ деб оламиз, у ҳолда $\psi_1(x) = x(1-x)$, $\psi_2(x) = x^2(1-x)$ бўлиб,

$$u_2(x) = x(1-x)\,(a_1 + a_2 x)$$

бўлади. $u_2(x)$ ни (9.3) га қўямиз, натижада

$$\int_0^1 A(u_2)\psi_1 dx = -\int_0^1 x\psi_1(x)dx,$$

$$\int_0^1 A(u_2)\psi_2 dx = -\int_0^1 x\psi_2(x)dx$$

ёки

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[-2a_1 + a_2(2-6x) + x(1-x)(a_1 + a_2 x)\right] x(1-x)\,dx = \\
&= -\int_0^1 x^2(1-x)\,dx, \\
&\int_0^1 \left[-2a_1 + a_2(2-6x) + x(1-x)(a_1 + a_2 x)\right] x^2(1-x)\,dx = \\
&= -\int_0^1 x^3(1-x)\,dx
\end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Интегралларни ҳисобласак,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{3}{10}a_1 + \frac{3}{20}a_2 &= \frac{1}{12}, \\
\frac{3}{20}a_1 + \frac{3}{105}a_2 &= \frac{1}{20}
\end{aligned}\right\}$$

келиб чиқади. Бундан $a_1 = \frac{71}{369}, a_2 = \frac{7}{41}$ ва

$$u_2(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right)$$

га эга бўламиз.

Энди $n = 3$ бўлсин, у ҳолда $\psi_1(x) = x(1-x)$, $\psi_2(x) = x^2(1-x)$ $\psi_3(x) = x^3(1-x)$ ва

$$u_3(x) = x(1-x)(a_1 + a_2x + a_3x^2)$$

деб оламиз. Бу ерда $u_3(x)$ ни $u_3(x) = u_2(x) + a_3\psi_3(x)$ кўринишда ёзиб олсак, у ҳолда (9.3) система қуйидагича ёзилади:

$$\int_0^1 \left[A(u_2) + a_3A(\psi_3)\right] J\psi_1 dx = -\int_0^1 x\psi_1 dx,$$

$$\int_0^1 \left[A(u_2) + a_3A(\psi_3)\right]\psi_2 dx = -\int_0^1 x\psi_2 dx,$$

$$\int_0^1 \left[A(u_2) + a_3A(\psi_3)\right]\psi_3 dx = -\int_0^1 x\psi_3 dx.$$

Биз бу ерда $n = 2$ бўлган ҳолда ҳисобланган

$$\int_0^1 A(u_2)\psi_1 dx,\ \int_0^1 A(u_2)\psi_2 dx,\ \int_0^1 x\psi_1(x)\, dx,\ \int_0^1 x\psi_2 dx$$

лардан фойдаланишимиз мумкин. У ҳолда a_1, a_2, a_3 ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{3}{10}a_1 + \frac{3}{20}a_2 + \frac{19}{210}a_3 &= \frac{1}{12},\\
\frac{3}{20}a_1 + \frac{13}{105}a_2 + \frac{79}{840}a_3 &= \frac{1}{20},\\
\frac{19}{210}a_1 + \frac{79}{840}a_2 + \frac{103}{1260}a_3 &= \frac{1}{30}.
\end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг ечими

$$a_1 = 0{,}381910;\ a_2 = -0{,}194144;\ a_3 = -0{,}023412.$$

Шундай қилиб,

$$u_3(x) = x(1-x)(0{,}381910 - 0{,}194144x - 0{,}023412x^2).$$

11.9.2. Галёркин методи ёрдамида хос сон ва хос функцияларни топиш. Қуйидаги

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{9.6}$$

дифференциал тенглама учун энг содда

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{9.7}$$

бир жинсли чегаравий шартларда хос сонлар ва хос функцияларни топиш масаласини кўриб чиқамиз.

Бу масаланинг ечимини топиш учун $[a, b]$ оралиқда тўлиқ, икки марта дифференциалланувчи ва (9.7) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ базис функцияларни танлаб, хос функциянинг тақрибий ечимини қуйидаги

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{9.8}$$

кўринишда излаймиз, бу ерда a_i — номаълум ўзгармаслар. Кейин бу функциядан (9.6) тенгликнинг тўла қаноатлантирилишини талаб қилмасдан, бу тенгликнинг чап томони $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ базис функцияларга ортогонал бўлишини талаб қиламиз. Бу бизни қуйидаги тенгламалар системасига олиб келади:

$$\int_a^b Lu\varphi_j\,dx \equiv \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(pu'\right)_n - qu_n + \lambda u_n\right]\varphi_j\,dx = 0,$$
$$\left(j = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{9.9}$$

Охирги системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij}\right)a_i = 0 \ \left(j = 1, 2, \ldots, n\right), \tag{9.10}$$

бу ерда

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \left[\frac{d}{dx}(p\varphi_i') - q\varphi_i\right]\varphi_j\,dx, \ \beta_{ij} = \int_a^b \varphi_i\varphi_j\,dx. \tag{9.11}$$

Ҳосил қилганимиз n та номаълумли n та бир жинсли тенгламалар системасидир. Бу система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\lambda\beta_{11} & \alpha_{21}+\lambda\beta_{21}\ldots\alpha_{n1}+\lambda\beta_{n1} \\ \alpha_{12}+\lambda\beta_{12} & \alpha_{22}+\lambda\beta_{22}\ldots\alpha_{n2}+\lambda\beta_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}+\lambda\beta_{1n} & \alpha_{2n}+\lambda\beta_{2n}\ldots\alpha_{nn}+\lambda\beta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{9.12}$$

Бу тенглама λ га нисбатан n-тартибли тенглама бўлиб, n та $\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)}$ илдизларга эга. Ҳар бир $\lambda=\lambda_k^{(n)}$ учун (9.10) тенгламалар системаси нолдан фарқли $a_1^{(k)},a_2^{(k)},\ldots,a_n^{(k)}$ ечимга эга бўлиб, $\lambda_k^{(n)}$ га мос келадиган хос функцияни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$u_n^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i^{(k)}\varphi_i(x).$$

Маълумки, бу функциялар ўзгармас сон кўпайтувчи аниқлигида топилади.

Биз биламизки, (9.6) тенгламанинг хос сонларини топиш учун λ нинг шундай қийматларини топиш керакки, (9.6), (9.8) чегаравий масаланинг нолдан фарқли ечими мавжуд бўлсин. (9.10) система (9.6) тенгламага яқинлашиш сифатида ҳосил бўлганлиги туфайли топилган $\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)},\ldots$ қийматлар мос равишда $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ (9.6) тенглама хос қийматларининг яқинлашиши бўлиб, $u_n^{(1)}(x),u_n^{(2)}(x),\ldots$ функциялар мос равишдаги хос функцияларнинг яқинлашиши бўлади.

Мисол. Ушбу

$$u''+\lambda u=0,\ u(-1)=u(1)=0$$

чегаравий масаланинг жуфт хос функцияларига мос келадиган аввалги иккита хос сонлари топилсин.

Осонлик билан кўриш мумкинки, бу масаланинг аниқ ечими қуйидагилардан иборат:

$$u_1(x)=\cos\frac{\pi x}{2},\ \lambda_1=\frac{\pi^2}{4},\ u_2(x)=\cos\frac{3\pi x}{2},\ \lambda_2=\frac{9\pi^2}{4}.$$

Ечиш. Базис функциялар сифатида

$$\varphi_1=1-x^2,\ \ \varphi_2=x^2\left(1-x^2\right),\ldots,\ \varphi_n=x^{2n-2}\left(1-x^2\right)$$

ларни оламиз, у ҳолда чегаравий шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$u_n(x)=\left(1-x^2\right)\left(a_1+a_2x^2+\ldots+a_nx^{2n-2}\right).$$

Биз аввал $n=2$ деб оламиз, у ҳолда

$$u_2(x) = \left(1 - x^2\right)\left(a_1 + a_2 x^2\right),$$

$$u_2'(x) = 2(a_2 - a_1)x - 4a_2 x^3,$$

$$u_2''(x) = 2\left(a_2 - a_1\right) - 12a_2 x^2$$

бўлиб, (9.10) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\int_{-1}^{1}\left[2\left(a_2 - a_1\right) - 12a_2 x^2 + \lambda\left(1 - x^2\right)\left(a_1 + a_2 x^2\right)\right]\left(1 - x^2\right)dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1}\left[2\left(a_2 - a_1\right) - 12a_2 x^2 + \lambda\left(1 - x^2\right)\left(a_1 + a_2 x^2\right)\right]x^2\left(1 - x^2\right)dx = 0.$$

Бундаги интегралларни ҳисоблаб соддалаштирсак, натижада

$$\left.\begin{aligned}(35-14\lambda)a_1 + (7-2\lambda)a_2 &= 0,\\ (21-6\lambda)a_1 + (33-2\lambda)a_2 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг детерминантини нолга тенглаштирсак, λ ни аниқлаш учун

$$\lambda^2 - 28\lambda + 63 = 0$$

характеристик тенглама ҳосил бўлади, унинг илдизлари $\lambda_1^{(2)} = 2,467438$, $\lambda_2^{(2)} = 25,532562$ лардан иборат.

Хос сонларнинг аниқ ифодасидан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\lambda_1 = 2,4674011, \quad \lambda_2 = 22,206609.$$

Бундан кўрамизки, биринчи хос соннинг абсолют хатоси $3,7 \cdot 10^{-5}$ бўлиб, иккинчисининг нисбий хатоси 15% дан иборат. Энди $\lambda_1^{(2)}$ нинг қийматини (9.12) системага қўйиб, $a_1 = a$, $a_2 = -0,2207498a$ га эга бўламиз, бундаги ўзгармас сонни эса

$$\int_{-1}^{1}\left[u_2^{(2)}(x)\right]^2 dx = 1$$

нормаллаштириш шартидан топамиз, чунки бу шартни $u(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ аниқ ечим қаноатлантиради. Бундан $a = 0,9990673$ ва

$$u_1^{(1)}(x) = 0,9990673\left(1 - x^2\right)\left(1 - 0,2207498x^2\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди $n = 3$ деб олиб, учинчи яқинлашишни

$$u_3(x) = \left(1 - x^2\right)\left(a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^4\right)$$

кўринишда излаймиз. Юқоридаги амалларни бажариб, λ ни аниқлаш учун ушбу

$$4\lambda^3 - 450\lambda^2 + 8910\lambda - 19305 = 0$$

характеристик тенгламани ҳосил қиламиз, бунинг ечимлари

$$\lambda_1^{(3)} = 2,467401108, \quad \lambda_2^{(3)} = 22,293406\ldots$$
$$\lambda_3^{(3)} = 87,739193\ldots$$

лардан иборат. Булардан ва хос сонларнинг аниқ қийматларидан кўрамизки, биринчи хос соннинг қиймати $4 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топилди, иккинчи хос соннинг аниқлиги эса 0,9 %.

Энди $\lambda_1^{(3)}$ нинг қийматини (9.13) системага қўйиб, a_1, a_2, a_3 ларни аниқлаймиз, улар a ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида топилади, α ни $u_1^{(3)}(x)$ нинг нормаллашганлигидан топсак, $a = 0,9999729 \approx 1$ бўлади.

Натижада биринчи хос функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u_1^{(3)}(x) = \left(1 - x^2\right)\left(1 - 0,233430x^2 + 0,018962x^4\right).$$

Юқоридагига ўхшаш бошқа масалалар учун хос сон ва хос функцияларни Галёркин методи билан топиш мумкин. Масалан,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \tag{9.14}$$

тенглама ва

$$u\big|_{\Gamma} = 0 \tag{9.15}$$

чегаравий шарт учун хос сон ва хос функцияларни аниқлайдиган система

$$\iint_G \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \lambda u_n\right]\varphi_j dxdy = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.16}$$

бўлиб, бу ерда

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x, y)$$

ва $\{\varphi_i\}$ иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлган, (9.14), (9.15) чегаравий масалани қаноатлантирадиган функцияларнинг тўлиқ системаси. Хос сонларнинг тақрибий қийматини топиш учун (9.16) системанинг детерминантини нолга тенглаштириш керак.

11.10-§. ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР МЕТОДИ

11.10.1. Энг кичик квадратлар методининг ғояси. Фараз қилайлик, H — ҳақиқий Гильберт фазоси ва A — чизиқли оператор бўлиб, қийматлари H да ётсин ҳамда унинг $D(A)$ аниқланиш соҳаси H нинг ҳамма жойида зич бўлсин.

Ушбу

$$Au = f \tag{10.1}$$

оператор тенгламани қараймиз, бунда $u \in D(A)$ изланаётган элемент бўлиб, f эса H нинг бирор элементидир. Фараз қилайлик, бу тенглама ягона ечимга эга бўлсин.

Биз (10.1) тенгламага қуйидаги

$$I(u) = \|Au - f\|^2 \tag{10.2}$$

функционални мос қўямиз ва (10.1) тенгламанинг ечимини излаш масаласини $D(A)$ да бу функционалга минимумни таъминлайдиган элементни топиш масаласи билан алмаштирамиз. Равшанки,

$$\min_{u \in D(A)} I(u) = I(u^*) = 0,$$

бу ерда u^* элемент (10.1) тенгламанинг ечими. Мазкур методнинг энг кичик квадратлар методи дейилишининг сабаби (10.1) тенгламанинг ечимини топиш (10.2) функционални минимумлаштиришга асосланганлигидадир.

Энди $I(u)$ функционалнинг минимумини қуйидагича қидирамиз: чизиқли эркли $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in D(A)$ элементлар кетма-кетлигини танлаймиз ва (10.1) тенгламанинг ечимига n-яқинлашишни

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \tag{10.3}$$

кўринишда излаймиз, бу ерда a_i — номаълум сонлар. Улар шундай танланадики, $\varphi_1, \varphi_2 \dots, \varphi_n$ элементлар устида тортилган $D_n(A) \in D(A)$ фазо остида $I(u_n) = \|Au_n - f\|^2$ функционал минимумга эришсин. Бу талаб $a_1, a_2 \dots, a_n$ ларни аниқлаш учун қуйидаги

$$\frac{\partial I(u_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{10.4}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасига олиб келади. Агар a^*_1, $a^*_2 \dots, a^*_n$ лар (10.4) системанинг ечими бўлса, у ҳолда u_n ушбу

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \varphi_i$$

формула ёрдамида топилади.

11.10.2. Чизиқли чегаравий масалага энг кичик квадратлар методини қўллаш. Биз ушбу

$$L(u) \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \tag{10.5}$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламани

$$\Gamma_1(u) \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \;\; \Gamma_2(u) \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \hat{A} \tag{10.6}$$

чегаравий шартларда энг кичик квадратлар методи ёрдамида ечиш масаласига муфассал тўхталиб ўтамиз. Бунда (10.5), (10.6) масала ягона ечимга ва бу ечим $[a, b]$ да икки марта узлуксиз ҳосилага эга деб ҳисоблаймиз. Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, 2...)$ функциялар системасини қараймиз:

1) $\varphi_i(x)$ функциялар $[a, b]$ да икки марта узлуксиз ҳосилага эга;

2) ҳар қандай n учун $\varphi_1(x), \varphi_2(x)... , \varphi_n(x)$ функциялар $[a, b]$ да чизиқли эркли;

3) $\varphi_0(x)$ функция (10.6) чегаравий шартларни, қолган $\varphi_i(x)$ функциялар эса бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантиради:

$$\Gamma_1(\varphi_i) = 0, \;\; \Gamma_2(\varphi_i) = 0, \;\; i = 1, 2, ...;$$

4) $\varphi_i(x)$ функциялар (10.6) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $C^2[a, b]$ синфда тўлиқ системани ташкил этади.

Эслатма. $C^2[a, b]$ га тегишли бўлган ва (10.6) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $u(x)$ функциялар синфини F орқали белгилаймиз; $\{\varphi_i(x)\}$ функциялар системаси F синфида тўлиқ дейилади, агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $u(x) \in F$ функция учун шундай n ва шундай $a_1, a_2, ... , a_n$ ўзгармаслар топилсаки,

$$\left|u^{(j)}(x) - u_n^{(j)}(x)\right| < \varepsilon, \;\; j = 0, 1, 2, \;\; a \le x \le b$$

тенгсизлик ўринли бўлса. Бу ерда

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x). \tag{10.7}$$

Бу таъриф шуни билдирадики, ҳар қандай жоиз $u(x) \in F$ функция учун шундай $u_n(x)$ функция топиладики, етарлича аниқликда $[a, b]$

да $u(x)$ ни унинг $u'(x)$ ва $u''(x)$ ҳосилалари билан биргаликда яқинлаштиради.

Энди (10.5), (10.6) чегаравий масаланинг ечимини (10.7) кўринишда излаймиз, $u_n(x)$ функция a_i ларнинг ихтиёрий қийматида (10.6) шартларни қаноатлантиради. a_i ларни шундай танлаймизки, $u_n(x)$ имкони борича (10.5) тенгламани яхшироқ яқинлаштирсин. Биз $u_n(x)$ ни (10.5) тенгламага қўйиб,

$$L(u_n)-f(x)=\rho_n(x)$$

га эга бўламиз. Деярли ҳар доим $\rho_n(x)\equiv 0$. Биз шундай иш қилишимиз керакки, $|\rho_n(x)|$ имкони борича кичик бўлсин. Шу мақсадда

$$\varepsilon_n^2=\int_a^b \rho_n^2(x)dx$$

миқдорни қараймиз ва a_1, a_2 ... , a_n номаълум сонларни шундай танлаймизки, ε_n^2 энг кичик қийматга эга бўлсин.

Агар $p(x)$, $q(x)\in L_2[a,b]$ функцияларнинг (p, q) скаляр кўпайтмасини, одатдагидек,

$$(p,q)=\int_a^b p(x)q(x)dx$$

каби аниқласак, у ҳолда $\varepsilon_n^2=I(u_n)$ бўлиб, бу ерда

$$I(u)=\|L(u)-f\|^2=(L(u)-f,\,L(u)-f).$$

Равшанки,

$$L(u_n)=L(\varphi_0)+\sum_{i=1}^{n}a_iL(\varphi_i),$$

$$\varepsilon_n^2=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}a_iL(\varphi_i)-\tilde f\right]^2dx,$$

бунда

$$\tilde f=f-L(\varphi_0)\,.$$

Изланаётган a_1, a_2 ... , a_n параметрларни топиш учун қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_n^2}{\partial a_j}=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}a_iL(\varphi_i)-\tilde f\right]L(\varphi_j)dx=0,\ \ j=1,\,2,\,...,\,n$$

ёки ушбу

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_a^b L(\varphi_i) L(\varphi_j) dx,$$

$$\beta_j = \int_a^b \tilde{f}(x) L(\varphi_j) dx$$

белгиларни киритиб, юқоридаги системани

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} a_i = \beta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{10.8}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Шуни таъкидлаш керакки, (10.8) системанинг матрицаси симметрик бўлиб, унинг детерминанти $L(\varphi_1)$, $L(\varphi_2), \ldots$, $L(\varphi_n)$ лар учун Грам детерминантидир. Фараз қилайлик, (10.8) система ягона ечимга эга бўлиб, a^*_1, a^*_2 ... , a^*_n унинг ечими бўлсин. У ҳолда $u(x)$ га яқинлашиш сифатида

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a^*_i \, \varphi_i(x)$$

олинади.

Энди (10.8) системанинг қачон ягона ечимга эга бўлиши масаласини кўриб чиқамиз. Системанинг ягона ечимга эга бўлиши фақат $\{\varphi_i(x)\}$ системанинг танланишига боғлиқ бўлмасдан, балки (10.5), (10.6) чегаравий масаланинг табиатига ҳам боғлиқ. Хусусий ҳолда

$$L(u) = 0, \;\; \Gamma_1(u) = 0, \;\; \Gamma_2(u) = 0 \tag{10.9}$$

бир жинсли масала фақат нулли ечимга эга бўлишига ҳам боғлиқдир. Ёзувни қисқартириш мақсадида $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, ҳолни қараймиз. (10.8) системанинг матрицаси $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_1^n$ бўлиб, унинг детерминанти $\Delta = \det\alpha$ бўлсин.

1-теорема. *Агар (10.9) чегаравий масала фақат $u(x) \equiv 0$ тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда $\Delta \neq 0$ ва (10.8) система ягона ечимга эга бўлади.*

Исботи. Ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

бир жинсли тенгламалар системасини қараймиз. Бу система фақат $b_j = 0$ тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

j тенгламани b_j га кўпайтириб, натижасини j бўйича 1 дан n гача қўшиб чиқамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i L(\varphi_i) b_j L(\varphi_j) dx = 0. \tag{10.10}$$

Агар

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(x)$$

белгилашни киритсак, у ҳолда (10.10) муносабатни

$$\int_a^b L^2(u_n) dx = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан эса $L(u_n) \equiv 0$ келиб чиқади. Энди $\varphi_i(x)$ базис функциялар $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) шартларни қаноатлантиришини эсласак, $u_n(a) = u_n(b) = 0$ келиб чиқади. Демак, $\Gamma_1(u_n) = 0$, $\Gamma_2(u_n) = 0$. Шундай қилиб, $u_n(x)$ функция (10.9) чегаравий шартларни қаноатлантиради ва теорема шартига кўра $u_n(x) \equiv 0$ ёки $\sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(x) \equiv 0$. Аммо $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ функциялар чизиқли эркли, шунинг учун ҳам $u_n(x) \equiv 0$ шартдан $b_i \equiv 0$ келиб чиқади. Демак, $\Delta \neq 0$ ва (10.8) система ягона ечимга эга. Теорема исботланди.

Қуйидаги

$$\Gamma_1(u) = u(a) = 0, \quad \Gamma_2(u) = u(b) = 0 \tag{10.11}$$

хусусий ҳолда (10.5), (10.6) чегаравий масала учун энг кичик квадратлар методининг яқинлашишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $u^*(x)$ функция (10.5), (10.11) чегаравий масаланинг аниқ ечими бўлиб, $u_n^*(x)$ унинг энг кичик квадратлар методи билан топилган n-яқинлашиши бўлсин. Шуни таъкидлаш керакки, (10.11) чегаравий шартларда

$$\varphi_0(x) \equiv 0 \text{ ва } u_n^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \varphi_i(x)$$

бўлади.

2-теорема. *Агар қуйидаги икки шарт бажарилса, у ҳолда энг кичик квадратлар методи билан топилган $\{u_n^*(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги L_2 фазода $u^*(x)$ аниқ ечимга интилади:*

1) (10.5), (10.11) чегаравий масала ягона $u^*(x)$ ечимга эга;

2) шундай ўзгармас M сон мавжудки, [a, b] да ҳар қандай икки марта дифференциалланувчи ва оралиқнинг четки нуқталарида нолга айланувчи u(x) функция учун

$$\|L(u)\| \geq \frac{1}{M}\left(\int_a^b u^2(x)dx\right)^{1/2}$$

тенгсизлик ўринли.

Исботи. 1) шартга ва 1-теоремага кўра $\{u_n^*(x)\}$ кетма-кетликни қуриш мумкин; $\{\varphi_i(x)\}$ кетма-кетлик $C^2[a,b]$ синфда тўлиқ, шунинг учун ҳам (эслатмага қ.) ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай N ва $a_1, a_2 \dots, a_N$ параметрлар топиладики,

$$\|L(u^*) - \sum_{i=1}^{N} a_i L(\varphi_i)\| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{10.12}$$

тенгсизлик бажарилади.

$$L(u*) = f, \sum_{i=1}^{N} a_i L(\varphi_i) = L\left(\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i\right) = L(u_N)$$

тенгликларни ҳисобга олсак, у ҳолда (10.12) тенгсизликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\|f - L(u_N)\| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{10.13}$$

Энди $u_N(x)$ функцияни $a_1, a_2 \dots, a_N$ параметрлар тўпламида $I(u_N) = \|L(u_N) - f\|^2$ функционални минималлаштириш натижасида ҳосил бўлган $u_N^*(x)$ функция билан алмаштирамиз. Равшанки, $u_N^*(x)$ функция учун (10.13) тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$\|L(u^*) - L(u_N^*)\| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Агар $n \geq N$ деб олсак, у ҳолда

$$\|Lu^* - Lu_N^*\| = \|L(u^* - u_N^*)\| < \frac{\varepsilon}{M}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Теореманинг 2) шартидан фойдалансак, бундан

$$\|u^* - u_N\| \leq M\|L(u^* - u_N^*)\| < \varepsilon$$

келиб чиқади. Энди ε нинг етарлича кичиклигини ҳисобга олсак,

$$\lim_{n\to\infty} \|u^* - u_N^*\| = 0$$

ҳосил бўлади ва теорема исботланади.

11.11-§. ВАРИАЦИОН-АЙИРМАЛИ МЕТОДЛАР. ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР МЕТОДИ

Биз олдинги бобларда чегаравий масалаларни чекли-айирмали методлар ва вариацион методлар билан тақрибий ечиш масаласини кўриб чиққан эдик. Бу методларнинг ҳар бирининг устунликлари ва камчиликлари бор. Агар дифференциал оператор мусбат аниқланган ва симметрик бўлса, вариацион методни қўллаш натижасида ҳосил бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг матрицаси ҳам мусбат аниқланган ва симметрик бўлади. Аммо бу матрица тўла, яъни нолдан фарқли элементлари жуда кўп бўлади. Шунинг учун ҳам матрицанинг тартиби катта бўлса, бундай системани ечиш жуда кўп меҳнат талаб қилади. Иккинчи томондан, чекли-айирмали методда матрица уч диагоналли бўлиб, чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг матрицаси сийрак бўлади. Аммо дифференциал оператор мусбат аниқланган ҳолда системанинг матрицаси мусбат аниқланмаган бўлиши мумкин.

Кейинги йилларда шундай методлар яратила бошландики, улар вариацион ва айирмали методларнинг ижобий томонларини ўзида мужассамлаштирган. Бу методлар *вариацион-айирмали методлар* (*чекли элементлар методи*) дейилади. Бундай методларни қуриш учун вариацион методларда $\{\varphi_i\}$ базис функциялар сифатида чекли бардорли функцияларни* (финит функцияларни) олиш керак. Бундай функциялар ечим мавжуд бўлган соҳанинг фақат кичик қисмидагина нолдан фарқлидир.

Биз биламизки, агар

$$I(u) = \int_0^1 \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + u^2 - 2fu \right) dx \qquad (11.1)$$

функционал аниқланган соҳадан олинган ва $u(0) = u(1) = 0$ шартларни қаноатлантирадиган $u(x)$ функция (11.1) функционал учун минимумни таъминласа, у ҳолда у

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (11.2)$$

чегаравий масаланинг ечими бўлади. Аксинча, агар $u(x)$ ечим (11.2) чегаравий масаланинг ечими бўлса, у ҳолда $u(x)$ ечим (11.1) функционалнинг аниқланиш соҳасида унинг учун минимумни таъминлайди.

---

* Функциянинг бардори (русча «носитель») чекли дейилади, агар функция $(-\infty; \infty)$ оралиқда аниқланган бўлиб, бу оралиқнинг чекли қисмида нолдан фарқли бўлса.

Вариацион-айирмали методнинг моҳиятини тушуниш учун $\omega_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{oN};\ hN = 1\right\}$ тўрда

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ (x_{i+1} - x)/h, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \tag{11.3}$$

финит функцияларни олиб, уларни базис функциялар сифатида қабул қиламиз. Финит $\varphi_i(x)$ функциянинг бардори supp $\varphi_i(x)$ орқали белгиланади, бизнинг ҳолда supp $\varphi_i(x) = (x_{i-1},\ x_{i+1})$. Тақрибий ечимни

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x)$$

кўринишда қидирамиз, бу ерда a_i коэффициентларни вариацион алгоритм бўйича аниқлаймиз. Бу ҳолда (11.1) функционал учун минимумни таъминлаш шартидан

$$\sum_{i=1}^{N-1} A_{ij} a_i = b_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{11.4}$$

тенгламалар системаси келиб чиқади. (4.6), (4.7) формулаларга кўра

$$A_{ij} = \int_0^1 \left[\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + \varphi_i(x)\varphi_j(x)\right] dx,\ \ b_j = \int_0^1 f\varphi_j(x) dx. \tag{11.5}$$

Унча мураккаб бўлмаган ҳисоблашлардан A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, N-1$ лар учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{h^2} + \dfrac{1}{6}, & i = j, \\ -\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{6}, & j = i-1,\ i+1, \\ 0, & |i - j| > 1. \end{cases} \tag{11.6}$$

Шундай қилиб, вариацион алгоритмни (11.3) финит функцияларга қўллаш натижаси бизни (11.4) тенгламалар системасига келтирди. Бу қандайдир айирмали тенглама бўлиб, айирмали методларда ҳосил бўладиган тенгламаларга ўхшашдир. Бу системанинг матрицаси уч диагоналли бўлиб, ҳисоблаш учун қулай. Бундан ташқари, (11.5) ва (11.6) дан кўрамизки, (11.4) системанинг матрицаси симметрик матрицадир.

Фараз қилайлик, G соҳа Oxy текислигида қандайдир чегараланган соҳа бўлиб, чегараси Γ бўлсин. Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$D^{\alpha}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_2},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, бунда α_1, α_2 — бутун сонлар. Бизга кейинчалик $L_2(G)$, $W_2^k(G)$ ва $\overset{0}{W}{}_2^k(G)$ Гильберт фазолари керак бўлади, бу фазоларда скаляр кўпайтма ва норма қуйидагича аниқланади:

$L_2(G)$ да

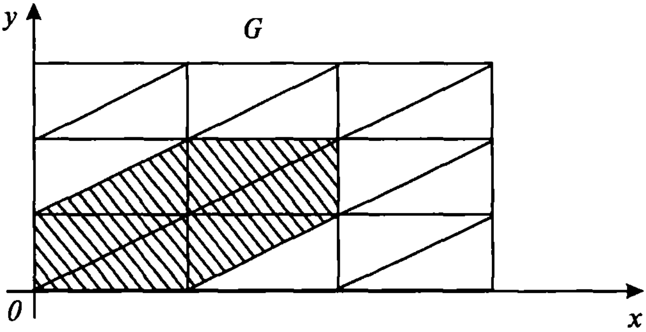
$$(u,\vartheta)_{L_2(G)} = \int_G u\vartheta dxdy, \ |u|_{L_2(G)} = \sqrt{(u,u)},$$

$W_2^k(G)$ да

$$(u,\vartheta)_{W_2^k(G)} = \sum_{|\alpha|\le k}\int_G D^{\alpha}uD^{\alpha}\vartheta dxdy,$$

$$|u|_{W_2^k(G)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\iint_G \left|D^{\alpha}u\right|^2 dxdy\right)^{1/2}$$

Энди $\overset{0}{W}{}_2^k(G)$ орқали $W_2^k(G)$ фазонинг шундай фазоостисини белгилаймизки, $\overset{0}{W}{}_2^k(G)$ га тегишли бўлган функциялар Γ да нолга айлансин. Фараз қилайлик, берилган $u(x, y) \in w_2^2(G)$ функцияни $G = \{0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ соҳада бўлак-бўлак чизиқли функция билан аппроксимация қилиш талаб қилинсин. Бунинг учун G ни $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$ ($h_1 = a/M$, $h_2 = b/N$) тўғри чизиқлар билан G_{ij} тўғри тўртбурчакларга бўлиб чиқамиз, кейин ҳар бир G_{ij} ни диагонал билан иккига бўламиз (21-чизма), яъни G ни учбурчакларга бўлиб чиқамиз. Ҳар бир (x_i, y_j) га шундай $\varphi_{ij}(x,y)$ функцияни мос қўямизки, у (x_i, y_j) тугунда бирга тенг бўлиб, бошқа тугунларда нолга тенг ва ҳар бир учбурчакда чизиқли функциядир. Киритилган тўр учун барча $\varphi_{ij}(x, y)$ ларни қуйидагича



21-чизма.

$$\varphi(s,t)=\begin{cases}1-s, & 0\le s\le 1,\ 0\le t\le s,\\ 1-t, & 0\le s\le 1,\ s\le t\le 1,\\ 1+s-t, & -1\le s\le 0,\ 0\le t\le s+1,\\ 1+s, & -1\le s\le 0,\ s\le t\le 0,\\ 1+t, & -1\le s\le 0,\ -1\le t\le s,\\ 1-s+t, & 0\le s\le 1,\ s-1\le t\le 0\end{cases} \tag{11.7}$$

киритилган функция орқали ифодалаш мумкин. Бу функциянинг бардори 22-чизмада кўрсатилган. Энди $\varphi_{ij}(x, y)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varphi_{ij}(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{h_1}-i,\ \frac{y}{h_2}-j\right). \tag{11.8}$$

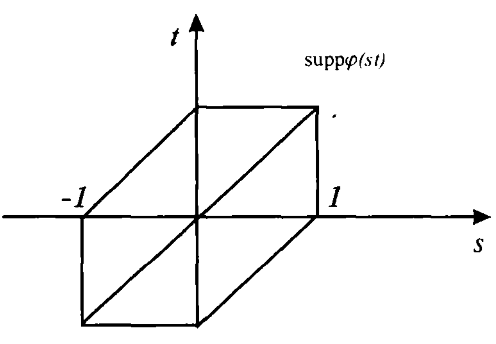
Бу функциялар *Курант функциялари* деб аталади. Берилган $u(x,y)\in w_2^2(G)$ функция учун

$$u_{ij}=u(x_i,y_j),\ \ i=\overline{0,M},$$

$$j=\overline{0,N}$$

сонларни киритиб,

$$u_h(x,y)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$$



22-чизма.

чизиқли комбинацияни тузамиз, бу ифода $u(x, y)$ ни *бўлак-бўлак чизиқли тўлдириш* дейилади. Равшанки, $u_h \in C(\overline{G}) \wedge w_2^1(G)$. Агар $u \in w_2^1 \wedge w_2^2$ бўлса, у ҳолда

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} u_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$$

га эга бўламиз, бунда йиғинди G нинг ички нуқталари бўйича олинади.

Энди вариацион-айирмали метод билан тўғри бурчакли тўртбурчак соҳада Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласини ечамиз.

Фараз қилайлик, $G = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ соҳада

$$-\Delta u = f(x,y), \quad u|_{\Gamma} = 0 \tag{11.9}$$

Дирихле масаласининг тақрибий ечимини топиш талаб қилинсин. Бу масалани $H = L_2(G)$ Гильберт фазосида қараймиз. Масаланинг оператори A қуйидаги

$$Au = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

дифференциал ифода билан берилган бўлиб, аниқланиш соҳаси $D(L) = \{u : u \in w_2^2(G), u|_{\Gamma} = 0\}$. Энди (11.8) масалани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$Au = f, \quad f \in L_2. \tag{11.10}$$

Равшанки, A оператор симметрик:

$$(Au,\vartheta) = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) dxdy = (A\vartheta, u), u\vartheta \in D(A).$$

Кўрсатиш мумкинки, A мусбат аниқланган оператор. Оператор симметрик ва мусбат аниқланган бўлганлиги учун (11.10) масалани ечишда Ритц ёки Галёркин методини қўллашимиз мумкин. Бу ерда ҳар иккала метод ҳам устма-уст тушади. Шунинг учун ҳам тақрибий ечимни Галёркин методи шаклида қидирамиз. A операторга мос келадиган энергетик фазони H_A орқали белгилаб, унда скаляр кўпайтма ва нормани қуйидагича аниқлаймиз:

$$[u, \vartheta] = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) dxdy,$$

$$[u]=[u,u]^{1/2}=\left(\int\limits_G\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)dxdy\right)^{1/2}$$

Галёркин методи асосида қуйидаги интеграл тенглик ётади:

$$[u,\vartheta]=(f,\vartheta),\quad f\in L_2 .$$

Ихтиёрий $\vartheta\in H_A$ функция учун (11.10) тенгламанинг умумлашган ечими бу тенгликни қаноатлантиради.

Тақрибий ечим $u_h(x,y)$ ни

$$u_h(x,y)=\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}a_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$$

кўринишда излаймиз, бундаги a_{ij} коэффициентларни Галёркин методи асосида

$$[u_h,\varphi_{kl}]=(f,\varphi_{kl}),\ \ k=\overline{1,M-1},\ l=\overline{1,N-1}$$

системадан топамиз. Бу системани қуйидаги матрицали кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$\hat{A}\,\bar{a}=\bar{f},\tag{11.11}$$

бунда

$$\bar{a}=\left(a_{11},a_{21},\ldots,a_{M-1,1};a_{12},\ldots,a_{M-1,2};\ldots,\right.$$
$$\left.a_{1,N-1},\ldots,a_{M-1,N-1}\right)^T,$$

$$\bar{f}=\left(f_{11},f_{21},\ldots,f_{M-1,1};f_{1,N-1},\ldots,f_{M-1,N-1}\right)^T,$$

$$\hat{A}=\left(A_{ijkl}\right),$$

$$A_{ijkl}=\left[\varphi_{ij},\varphi_{kl}\right]=\int\limits_{G_{ijkl}}\left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$f_{kl}=\int\limits_G f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\,dxdy,$$

$$G_{ke}=G\Lambda\mathrm{supp}\varphi_{kl},\quad G_{ijkl}=G_{kl}\Lambda\mathrm{supp}\varphi_{ij}.$$

Ҳар бир учбурчакда $\varphi_{ij}(x, y)$ чизиқли бўлганлиги учун уларнинг ҳосиласи бу учбурчакда ўзгармас сондир. Шунинг учун ҳам A_{ijkl} ларни осонлик билан ҳисоблаш мумкин:

$$\left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x};\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial x}\right)=\begin{cases}\frac{2}{h_1^2}, \text{ агар } k=i,\ l=j \text{ бўлса,}\\ -\frac{1}{h_1^2}, \text{ агар } k=i+1,\ l=j \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } l=j+1,\ k=i \text{ ёки } k=i+1 \text{ бўлса,}\\ -\frac{1}{h_1^2}, \text{ агар } k=i-1,\ l=j \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } l=j-1,\ k=i-1 \text{ ёки } k=i \text{ бўлса;}\end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y};\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial y}\right)=\begin{cases}\frac{2}{h_2^2}, \text{ агар } k=i,\ \ l=j \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } k=i+1,\ \ l=j \text{ ёки } l=j+1 \text{ бўлса,}\\ -\frac{1}{h_2^2}, \text{ агар } k=i,\ l=j+1 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } k=i-1,\ \ l=j \text{ ёки } l=j-1 \text{ бўлса,}\\ -\frac{1}{h_2^2}, \text{ агар } k=i,\ l=j-1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Топилган қийматларни (11.11) га қўйсак, у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{2a_{ij}-a_{i-1,j}-a_{i+1,j}}{h_1^2}+\frac{2a_{ij}-a_{i,j-1}-a_{i,j+1}}{h_2^2}=f_{ij},$$

$$i=1,2,\ldots,\ M-1,\ j=1,2,\ldots,\ N-1,$$

бунда $a_{oj}=a_{Mj}=a_{io}=a_{iN}=0$ деб ҳисобланади. Шундай қилиб, Галёркиннинг вариацион-айирмали методи асосида бўлак-бўлак чизиқли (11.8) базисда (11.9) масала учун маълум беш нуқтали схемага келдик. Аммо бу ерда $f_{ij}=\left(f,\varphi_{ij}\right)$ махсус кўринишга эга.

12-боб

ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

12.1-§. ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Интеграл тенглама деб шундай тенгламага айтиладики, унда $u(x)$ номаълум функция аниқ интеграл белгиси остида қатнашади. Масалан,

$$g(x)u(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds=f(x)(a\le x\le b), \qquad (1.1)$$

бу ерда $g(x)$, $K(x, s)$ ва $f(x)$ берилган функциялар ва λ берилган параметрдир (кўпинча у 1 ёки -1 деб олинади). $K(x, y)$ функция *интеграл тенгламанинг ўзаги (ядроси)* ва $f(x)$ функция *тенгламанинг ўнг томони (ёки озод ҳади)* дейилади. Шуни таъкидлаш лозимки, λ комплекс ҳам, ҳақиқий ҳам бўлиши мумкин, лекин x ва s доим ҳақиқий қийматни қабул қилади.

Агар $g(x)\equiv 0$ ва $\lambda=-1$ бўлса, у ҳолда (1.1) тенглама

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds=f(x) \qquad (1.2)$$

кўринишга эга бўлиб, *Фредгольмнинг I жинс интеграл тенгламаси* дейилади. Агар барча $x\in[a,b]$ учун $g(x)\ne 0$ бўлса, у ҳолда (1.1) тенгламанинг ҳар иккала томонини $g(x)$ га бўлиб, қайта белгилаб чиқсак, уни

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds=f(x) \qquad (a\le x\le b) \qquad (1.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама *Фредгольмнинг II жинс интеграл тенгламаси* дейилади. Агар $[a, b]$ оралиқнинг айрим нуқталарида $g(x) = 0$ бўлиб, бошқа нуқталарида $g(x)\ne 0$ бўлса, у ҳолда (1.1) тенглама *Фредгольмнинг III жинс интеграл тенгламаси* дейилади. III жинс тенглама кам ўрганилган, лекин татбиқларда учрайди.

Юқоридаги (1.1), (1.3) тенгламалар бир жинсли бўлмаган тенгламалар дейилади. Агар (1.3) тенгламада $f(x)\equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,u(s)ds=0 \quad (a\le x\le b) \tag{1.4}$$

Фредгольмнинг бир жинсли тенгламаси дейилади. Бу тенглама доимо *нулли (тривиал)* $u(x)\equiv 0$ *ечимга* эга. Агар λ параметрнинг айрим қийматларида тенглама нотривиал ечимга эга бўлса, бундай қийматлар $K(x, s)$ ўзакнинг ёки унга мос келадиган (1.4) тенгламанинг *хос қийматлари* (*хос сонлари*) дейилади, уларга мос келадиган нотривиал ечим эса *хос функциялар* дейилади. Ушбу

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(s,x)\,u(s)\,ds=f(x)\,(a\le x\le b) \tag{1.5}$$

тенглама (1.3) тенгламага боғловчи дейилади.

Фредгольм тенгламаси назариясининг асоси қуйидагидан иборат:

1. Агар λ сон $K(x, s)$ ўзакнинг характеристик сони бўлмаса, у ҳолда ихтиёрий $f(x)$ озод ҳад учун (1.3) тенглама ягона ечимга эга.

2. Агар λ сон (1.4) бир жинсли тенгламанинг хос сони бўлса (унга $\varphi_\kappa=\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ хос функциялар мос келади), у ҳолда λ

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(s,x)\,u(s)ds=0 \tag{1.6}$$

боғловчи тенгламанинг ҳам хос сони бўлади. (1.4) ва (1.6) тенгламаларнинг λ хос сонига мос келадиган хос функцияларининг миқдори бир хил бўлади.

3. Агар бир жинсли тенглама нотривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган тенглама, умуман айтганда, ечимга эга бўлмайди. У ечимга эга бўлиши учун

$$(f,\psi_k)\equiv\int_a^b f(x)\psi_k(x)dx=0,\quad k=\overline{1,n} \tag{1.7}$$

ортогоналлик шартининг бажарилиши зарур ва етарлидир, бу ерда $\psi_k(x)$ $k=\overline{1,n}$ боғловчи $K(s, x)$ ўзакнинг берилган хос сонига мос келадиган хос функцияларидир.

4. (1.4) тенглама хос сонларининг тўплами чекли масофада лимит нуқтага эга эмас. Агар хос сонларнинг тўплами чексиз бўлса, у ҳолда лимит нуқта чексизликда ётади.

Татбиқларда $K(x,s)$ ўзаги симметрик бўлган, яъни

$$K(x, s)=K(s, x)$$

Фредгольм тенгламалари катта аҳамиятга эга. Симметрик ўзак қуйидаги хоссаларга эга:

1. Ҳар қандай симметрик ўзак ҳеч бўлмаганда битта хос сонга эга.

2. Симметрик ўзакнинг барча хос сонлари ҳақиқийдир.

3. Симметрик ўзакнинг ҳар хил λ ва $\mu(\lambda \neq \mu)$ хос сонларига мос келадиган $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ хос функциялари $[a, b]$ оралиқда ўзаро ортогонал, яъни

$$\int_a^x \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Амалиётда қуйидаги кўринишдаги

$$\int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x) \tag{1.8}$$

ва

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x) \tag{1.9}$$

интеграл тенгламалар ҳам кўп учрайди, булар мос равишда *Вольтерранинг I ҳамда II жинс интеграл тенгламалари* дейилади.

Ушбу

$$\tilde{K}(x,s) = \begin{cases} K(x,s), \text{ агар } a \leq s \leq x \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } s > x \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функцияни киритиб, (1.8) ва (1.9) Вольтерра тенгламаларини мос равишда $\tilde{K}(x,s)$ ўзакли Фредгольм тенгламаси кўринишида ёзиш мумкин. Аммо кўп ҳолларда Вольтерра тенгламаларини мустақил равишда текшириш (ва тақрибий ечимини топиш) мақсадга мувофиқ бўлади.

Вольтерранинг I жинс тенгламасига мисол сифатида Абелнинг ушбу

$$\int_a^x \frac{u(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{1.10}$$

тенгламасини олиш мумкин, бу ерда $f(x)$ узлуксиз ҳосилага эга бўлган маълум функция. Маълумки, (1.10) тенгламанинг ечими қуйидаги формула билан аниқланади:

$$u(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right].$$

Агар $K(x, s)$ ва $f(x)$ лар узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлиб, барча $x\in[a, b]$ учун $K(x, x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда Вольтерранинг (1.8) I жинс интеграл тенгламаси Вольтерранинг (1.9) II жинс интеграл тенгламасига келтирилади. Ҳақиқатан ҳам, (1.8) тенгламанинг ҳар иккала томонини x бўйича дифференциаллаб,

$$K(x,x)u(x) + \int_a^x K'_x(x,s)u(s)ds = f'(x)$$

ёки

$$u(x) + \int_a^x K_1(x,s)u(s)ds = f_1(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу ерда

$$K_1(x,s) = \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}, \quad f_1(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)}.$$

Шунинг учун ҳам биз кейинчалик Вольтерранинг II жинс тенгламасини қараймиз.

Юқорида келтирилган тенгламаларнинг ҳаммаси ҳам *чизиқли интеграл тенгламалар* дейилади, чунки уларда изланаётган $u(x)$ функция биринчи даражада қатнашади. Чизиқли бўлмаган интеграл тенгламалар ҳам кўп учрайди. Ушбу

$$u(x) - \lambda\int_a^b K[x,s,u(s)]ds = f(x)$$

Урисон тенгламаси ёки

$$u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)F(s,u(s))ds = f(x)$$

Гаммерштейн тенгламаси чизиқли бўлмаган интеграл тенгламага мисол бўла олади.

Интеграл тенгламалар математиканинг ўзида ва унинг турли татбиқларида учрайди. Дифференциал тенгламаларда Коши масаласи Вольтерра интеграл тенгламасига, эллиптик тенгламалардаги чегаравий масала Фредгольмнинг II жинс интеграл тенгламасига, параболик ва гиперболик тенгламалар эса Фредгольмнинг I жинс тенгламасига келтирилади.

Мисол. Қуйидаги n-тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи

$$\begin{cases} \varphi^{(n)} + P_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + P_n(x)\varphi = f(x), \\ \varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 0, \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(a) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

берилган бўлсин. Бу масалани интеграл тенгламага келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x u(s)(x-s)^{n-1} ds \tag{1.12}$$

деб оламиз, бу ерда $u(x)$ янги номаълум функция. (1.12) тенгликни k марта дифференциаллаймиз, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{(n-1-k)!} \int_a^x u(s)(x-s)^{n-1-k} ds \quad (1 \le k \le n-1),$$

$$\varphi^{(n)}(x) = u(x).$$

Шу билан бирга барча $1 \le k \le n-1$ учун $\varphi^{(k)}(a) = 0$ шартнинг бажарилиши равшандир. $\varphi^{(k)}(x)$ лар учун топилган ифодаларни (1.11) тенгламанинг чап томонига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x) + \int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x), \tag{1.13}$$

бунда

$$K(x,s) = p_1(x) + p_2(x)\frac{x-s}{1!} + \ldots + p_n(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Шундай қилиб, (1.11) масала Вольтерранинг II жинс (1.13) интеграл тенгламасини ечишга келтирилди. (1.13) дан $u(x)$ ни топиб олиб, $\varphi(x)$ ни (1.12) формула ёрдамида аниқлаймиз. Бунга ўхшаш мисолларни кўплаб келтириш мумкин.

Бу бобда асосий масала қуйидагилардан иборат:

1) λ нинг берилган қийматларида бир жинсли бўлмаган интеграл тенгламанинг аниқ ёки тақрибий ечимини топиш;

2) бир жинсли тенгламанинг хос сонлари ва хос функцияларини топиш.

12.2-§. КВАДРАТУР ФОРМУЛАЛАР ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

12.2.1. Ҳисоблаш алгоритмлари. Интеграл тенгламаларни тақрибий ечишда амалиётда кенг қўлланиладиган усуллардан бири бу тенгламада қатнашадиган интегрални у ёки бу

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \Phi(x_j) + R(\Phi) \tag{2.1}$$

квадратур формула (кв.ф.) билан алмаштиришдан иборатдир. Бу ерда $x_1, x_2, \dots x_n$ ва $A_1, A_2, \dots, A_n$ лар мос равишда кв.ф. нинг тугунлари ҳамда коэффициентлари бўлиб, улар $\Phi(x)$ функцияга боғлиқ эмас, $R(\Phi)$ эса қолдиқ ҳад. Бу формулада $A_j \geq 0$ ва $\sum_{j=1}^{n} A_j = b - a$ шартлар бажарилади, деб фараз қиламиз. Мисол сифатида 7-бобда қаралган қуйидаги формулаларни келтирамиз:

1. Умумлашган тўғри тўртбурчаклар формуласи:

$$x_j = a + (j-1)h, \;\; h = \frac{b-a}{n}, \;\; A_j = h, \;\; j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Умумлашган трапециялар формуласи:

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \;\; A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \;\; A_j = h, \;\; j = \overline{2, n-1}.$$

3. Умумлашган Симпсон формуласи ($n = 2m + 1$ деб оламиз):

$$x_j = a + (j-1)h, \;\; h = \frac{b-a}{2m}, \;\; A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3},$$

$$A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4}{3}h, \;\; A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

4. Гаусс формуласи:

$$x_j = \frac{b-a}{2} x_j^{(n)} + \frac{a+b}{2}, \;\; A_j = \frac{b-a}{2} A_j^{(n)},$$

бу ерда $x_j^{(n)}$ ва $A_j^{(n)}$ лар $[-1, 1]$ сегмент учун қурилган Гаусс формуласининг тугунлари ва коэффициентларидир.

Энди (1.3) интеграл тенгламани тақрибий ечиш масаласига ўтамиз. Бунинг учун (1.3) тенгламада $x = x_i \;\; (i = \overline{1, n})$ деб оламиз. У ҳолда

$$u(x_i) - \lambda \int_a^b K(x_i, s) u(s) ds = f(x_i) \;\; (i = \overline{1, n}) \tag{2.2}$$

муносабатлар ҳосил бўлади. (2.2) даги интегралларни (2.1) кв.ф. билан алмаштирсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$u(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x_i, x_j) u(x_j) = f(x_i) + \lambda R_i,$$

$$R_i = R\left[K(x_i, s) u(s) \right], \;\; i = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

(2.3) системада λR_i миқдорларни ташлаб юбориб, $u(x)$ ечимнинг x_1, x_2, ... , x_n тугунлардаги y_1, y_2, ... , y_n тақрибий қийматлари учун ушбу чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right), \tag{2.4}$$

бу ерда

$$K_{ij} = K(x_i, x_j), \quad f_i = f(x_i).$$

Кейин

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{агар } i \neq j \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } i = j \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Кронекер белгисини киритиб ва

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} y_j$$

ни ҳисобга олиб, (1.17) системани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}\right) y_j = f_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{2.5}$$

Агар

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}\right) \neq 0 \tag{2.6}$$

бўлса, у ҳолда (2.5) система ягона y_1, y_2,..., y_n ечимга эга бўлади ва бу ечимни 3-бобдаги усуллар билан топиш мумкин. Бу қийматларга кўра интерполяциялаш йўли билан (1.3) тенгламанинг тақрибий қийматини бутун $[a, b]$ оралиқ учун топамиз. Одатда, бундай формула учун

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K\left(x, x_j\right) y_j \tag{2.7}$$

интерполяцион формула олинади, равшанки, $y(x_i) = y_i \left(i = \overline{1, n}\right)$. Ушбу

$$\Delta(\lambda) = 0$$

n-даражали алгебраик тенгламанинг ўзаро фарқли $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_m$ $(m \leq n)$ илдизлари, умуман олганда, $K(x, s)$ ўзак хос сонларининг тақрибий қийматини беради. Агар $y_i^{(k)} \left(i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, m}\right)$ лар (2.5) системага мос келадиган

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\lambda_k A_j K_{ij}\right)y_j^{(k)}=0 \tag{2.8}$$

бир жинсли системанинг ечими бўлса, у ҳолда ўзакнинг хос функциялари тақрибий равишда

$$\tilde{\varphi}_k(x)=\tilde{\lambda}_k\sum_{j=1}^{n}A_j K\left(x,x_j\right)\tilde{y}_j^{(k)} \quad \left(k=\overline{1,m}\right) \tag{2.9}$$

формулалар ёрдамида топилади ва булар (1.4) бир жинсли тенгламанинг тақрибий хос функциялари бўлади.

Кўриниб турибдики, (2.3) системада λR_i қанча кичик бўлса, (2.5) системада биз шунча кичик хатоликка йўл қўйган бўламиз. Шунинг учун ҳам кв.ф.ни танлаш катта аҳамиятга эга. Агар тугун нуқталарни қанча кўп олсак, бир томондан, λR_i кичик бўлиб, иккинчи томондан, (2.5) системанинг тартиби шунча ошади ва уни ечиш оғирлашади. Кўпинча алгебраик аниқлик даражаси юқори бўлган Гаусс формулалари ишлатилади. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, агар $K(x, s)$ ва $f(x)$ функциялар даврий бўлиб, уларнинг даври $b—a$ бўлса, у ҳолда тўғри тўртбурчаклар формуласининг аниқлик даражаси Гаусс формуласининг аниқлик даражасига тенг бўлади ва бу ҳолда тўғри тўртбурчаклар формуласини қўллаш маъқулдир. Номаълум функция ёки ўзак оралиқнинг четки нуқталарида нолга айланиши олдиндан бизга маълум бўлса, у ҳолда Марков формуласини ишлатиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Агар $K(x, s)$ ўзак ва $f(x)$ озод ҳадлар анча силлиқ бўлса, у ҳолда юқори аниқликдаги кв.ф.ни ишлатишни оқлаш мумкин. Чунки бу ҳолда $u(x)$ ҳам шунча силлиқликка эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $f^{(k)}(x)$ ва $K_{x^k}^{(k)}(x,s)$ лар мавжуд ҳамда узлуксиз бўлса, у ҳолда (1.3) тенгламани k марта дифференциаллаб, $u^{(k)}(x)$ нинг мавжудлигига ишонч ҳосил қиламиз:

$$u^{(k)}(x)=\lambda\int_a^b K_{x^k}^{(k)}(x,s)u(s)ds+f^{(k)}(x). \tag{2.10}$$

Қуйидагиларни таъкидлаш мақсадга мувофиқдир: агар берилган тенгламада $f(x)$ озод ҳад ёки $K(x, s)$ ўзак силлиқ бўлмаса, у ҳолда тенглама устида алмаштиришлар бажариб, озод ҳад ва ўзаги силлиқ бўлган янги тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Масалан, ўзак силлиқ бўлиб, озод ҳад махсусликка эга бўлсин, у ҳолда

$$\vartheta(x)=u(x)-f(x)$$

функцияни киритиб,

$$\vartheta(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\vartheta(s)ds=\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

тенгламани ҳосил қиламиз, яъни берилган тенглама кўринишига эга бўлган тенгламани ҳосил қилдик, лекин унинг озод ҳади олдингига нисбатан силлиқдир, натижада $\vartheta(x)$ ечим ҳам силлиқроқ бўлади. ϑ(x)ни топгандан кейин $u(x)=\vartheta(x)+f(x)$ ни ҳам топамиз.

Кўпинча $K(x, s)$ ёки унинг $K_s'(x,s)$ ҳосиласи $s=x$ диагоналда узилишга эга бўлади. Бу ҳолда тенгламани қуйидагича ўзгартириш керак:

$$u(x)\left[1-\lambda\int_a^b K(x,s)\,ds\right]-\lambda\int_a^b K(x,s)\left[u(s)-u(x)\right]ds=f(x).$$

Энди иккинчи интеграл остидаги функция узилишга эга бўлмайди, чунки $s=x$ диагоналда $u(s)-u(x)$ нолга айланади. $\int_a^b K(x,s)\,ds$ интегралга келсак, унда номаълум функция қатнашмайди, шунинг учун ҳам уни осонлик билан ҳисоблаш мумкин ва у қандайдир $\varphi(x)$ функцияни беради.

Татбиқларда кўпинча шундай тенгламалар учрайдики, уларнинг ўзаги

$$K(x,s)=\frac{H(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}\quad(0<\alpha<1)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $H(x, s)$ силлиқ функция. Бундай ўзакли тенгламадан ўзаги такрорланган тенгламага ўтиш мақсадга мувофиқдир. Бундай ўзаклар $s=x$ диагоналда махсусликдан холи бўлади.

Энди (1.2) тенглама ҳамда чизиқли бўлмаган интеграл тенгламаларни тақрибий ечишга қисқача тўхталиб ўтамиз. Ушбу

$$\lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds=f(x)\tag{2.11}$$

тенгламанинг тақрибий ечимини топиш учун

$$\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK_{ij}y_j=f_i\quad\left(i=\overline{1,n}\right)$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани ечиб, x_1, x_2, ..., x_n нуқталардаги y_1, y_2, ..., y_n тақрибий ечимни топамиз. (1.2) тенгламани ечиш *нокоррект* масалага киради.

Агар бизга

$$u(x) = \int_a^b K[x,s,u(s)]ds + f(x)$$

чизиқли бўлмаган Урисон тенгламаси берилган бўлса, у ҳолда юқоридагидек иш тутиб, ушбу

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_j K\left(x_i, x_j, y_j\right) + f_i\left(i = \overline{1,n}\right)$$

чизиқли бўлмаган тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани Ньютон методи билан ечиб, y_1, y_2, ..., y_n ларни топишимиз мумкин. Тақрибий ечим сифатида

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j K\left(x, x_j, y_j\right) + f(x)$$

ни олишимиз мумкин.

12.2.2. Хатоликни баҳолаш. Энди $K(x, s)$ ўзак ва $f(x)$ озод ҳад k тартибли узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қиламиз. У ҳолда (2.10) тенгламадан кўрамизки, $u(x)$ ечим ҳам k тартибли ҳосилага эга.

Агар (2.5) система аниқловчисини ва $\Delta(\lambda)$ элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини $\Delta_{ij}(\lambda)$ орқали белгилаб олсак, у ҳолда Крамер қоидасига кўра ечимни қуйидагича ёза оламиз:

$$y_i = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} f_j. \tag{2.12}$$

(2.3) системадан эса

$$u(x_i) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}\left(f_j + \lambda R_j\right) \tag{2.13}$$

ҳосил бўлади.

Энди тақрибий ечимнинг x_i нуқтадаги хатолигини η_i орқали белгилаймиз:

$$\eta_i = u(x_i) - y_i$$

ва $\eta(x) = u(x) - y(x)$ деб оламиз, бу ерда $y(x)$ (2.7) формула билан аниқланади. (2.12) ва (2.13) тенгликлардан

$$\eta_i = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} R_j$$

келиб чиқади. Қулайлик учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$B = \max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} |\Delta_{ij}|}{|\Delta(\lambda)|}, \; R^* = \max_{a \le x \le b} |R|, \; R = R[K(x,s)u(s)],$$

$$L_k = \max_{a \le x, s \le b} \left\{ \left| \frac{\partial^k K(x,s)}{\partial x^k} \right|, \left| \frac{\partial^k K(x,s)}{\partial s^k} \right| \right\}, \; M_k = \max_{a \le x \le b} \left| u^{(k)}(x) \right|.$$

Осонлик билан кўриш мумкинки,

$$|\eta_i| \le |\lambda| BR^*$$

ва

$$\eta(x) = u(x) - y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) \left[u(x_j) - y_j \right] + \lambda R$$

муносабатлар ўринлидир. Бундан эса

$$\begin{gathered} |\eta(x)| \le |\lambda| |R| + |\lambda| \sum_{j=1}^{n} A_j \left| K(x, x_j) \right| |\eta_j| \le \\ \le |\lambda| R^* + |\lambda|^2 L_o BR^* \sum_{j=1}^{n} A_j = |\lambda| R^* + |\lambda|^2 L_o BR^* (b-a) \end{gathered} \tag{2.14}$$

келиб чиқади. (2.14) баҳода R^* дан ташқари қолган ўзгармасларни ҳисоблаш мумкин. R^* ўзгармас эса $\Phi(s) = K(x,s)u(s)$ функция учун қурилган кв.ф. қолдиқ ҳади абсолют қийматининг $x \in [a, b]$ бўйича олинган максимумидир. 7-бобдан биламизки, юқорида келтирилган кв.ф.нинг қолдиқ ҳади

$$R(\Phi) = \alpha_n \Phi^{(m)}(\xi) \quad (a < \xi < b) \tag{2.15}$$

кўринишга эга бўлиб, α_n фақат n га боғлиқ бўлган ўзгармас сондир. Маълумки:

1. Умумлашган тўғри бурчаклар формуласи учун

$$\alpha_n = \frac{(b-a)^3}{24(n-1)^2} \quad (m = 2).$$

2. Умумлашган трапециялар формуласи учун

$$\alpha_n = \frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2} \quad (m=2).$$

3. Умумлашган Симпсон формуласи учун

$$\alpha_n = \frac{(b-a)^3}{2880 p^4} \quad (m=u,\ \ n=2p+1).$$

4. n тугунли Гаусс формуласи учун

$$\alpha_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(h!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)},\ \ m=2n.$$

(2.14) тенгликдан ушбу баҳога эга бўламиз:

$$|R(\Phi)| \le \alpha_n \max_{a\le s\le b} |\Phi^{(m)}(s)|.$$

Бизнинг ҳолда $\Phi(s) = K(x,s)\,u(s)$ (x-параметр) бўлганлиги учун Лейбниц формуласига кўра

$$\Phi^{(m)}(s) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^k K(x,s)}{\partial s^k} u^{(m-k)}(s)$$

ва бундан

$$\max_{a\le s\le b} |\Phi^{(m)}(s)| \le \sum_{k=0}^{m} C_m^k L_k M_{n-k} \tag{2.16}$$

келиб чиқади. L_k ни аниқлаш учун (2.10) тенгликда модулга ўтамиз:

$$|u^{(k)}(x)| \le |\lambda| L_k M_0(b-a) + F_k,\ \ F_k = \max_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)|,$$

бундан эса

$$M_k \le |\lambda| L_k (b-a) M_0 + F_k. \tag{2.17}$$

Шундай қилиб, (2.16) ва (2.17) лардан

$$\max_{a\le s\le b}|\Phi^{(m)}(s)| \le |\lambda|(b-a)M_0 \sum_{k=0}^{m} C_m^k L_k L_{n-k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{m} C_m^k L_k F_{n-k} = C_1 M_0 + C_2 \tag{2.18}$$

баҳони ҳосил қиламиз, бу ерда

$$C_1 = |\lambda|(b-a)\sum_{k=0}^{m} C_m^k L_k L_{n-k}, \; C_2 = \sum_{k=0}^{m} C_m^k L_k F_{n-k} \tag{2.19}$$

ҳисобланиши мумкин бўлган ўзгармас сонлар, чунки $K(x, s)$ ўзак ва $f(x)$ озод ҳад маълум. Энди $S_0 = \max\limits_{a \le x \le b} |y(x)|$ деб белгилаймиз, натижада (2.14), (2.15) ва (2.18) лардан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$|u(x)| \le |\eta(x)| + |y(x)| \le \lambda R^* + |\lambda|^2 L_0 B(b-a) R^* + S_0 \le$$
$$\le \left\{|\lambda| + |\lambda|^2 L_0 B(b-a)\right\} \alpha_n \left(C_1 M_0 + C_2\right) + S_0$$

ёки

$$M_0 \le \left\{|\lambda| + |\lambda|^2 L_0 B(b-a)\right\} \alpha_n (C_1 M_0 + C_2) + S_0.$$

Агар

$$1 - \alpha_n C_1 \left\{|\lambda| + |\lambda|^2 L_0 B(b-a)\right\} > 0 \tag{2.20}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда

$$M_0 \le \frac{S_0 + \alpha_n C_2 \left\{|\lambda| + |\lambda|^2 L_0 B\right\}}{1 - \alpha_n C_1 \left\{|\lambda| + |\lambda|^2 L_0 B\right\}}. \tag{2.21}$$

Демак, η_i ва $\eta(x)$ хатоликларни маълум миқдорлар орқали ифодалаш мумкин.

Шундай қилиб, агар (2.20) тенгсизлик бажарилса, (2.21) ҳам бажарилади ва бундан λ хос сон эмас деб тасдиқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, акс ҳолда $u(x)$ га (1.4) бир жинсли тенгламанинг ихтиёрий (модули бўйича етарлича катта) ечимини қўшиш мумкин, бундан эса (2.21) тенгсизликнинг бажарилмаслиги келиб чиқади.

Келтирилган баҳолар хос сон ва хос функцияни топишда йўл қўйилган хатоликни баҳолаш учун ҳам имкон беради. Бунга қисқача тўхталиб ўтамиз.

λ нинг бирор ўзгариш соҳаси, масалан, $|\lambda| \le r_0$ доирани оламиз. Бу доирада $\max\limits_{|\lambda| \le r_0} \sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta_{ij}| \le \Lambda$ бўлсин. У ҳолда (2.21) тенгсизликда B ни $\dfrac{\Lambda}{|\Delta(\lambda)|}$ билан алмаштирамиз. Агар λ

$$1 - \alpha_n C_1 |\lambda| \left[1 + |\lambda| L_0 \frac{(b-a)\Lambda}{|\Delta(\lambda)|}\right] > 0 \tag{2.22}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда λ хос сон бўлмайди. Шунинг учун ҳам хос сонлар λ қийматларининг шундай тўпламида жойлашиши кеpакки, у ерда (2.22) тенгсизлик бажарилмаслиги керак.

12.2.3. Вольтерранинг II жинс интеграл тенгламасини квадратур формула ёрдамида ечиш. Юқорида биз

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x) \quad (a \le x \le b) \tag{2.23}$$

тенгламани (1.3) Фредгольм тенгламасининг хусусий ҳоли деб қараш мумкин деган эдик. Шунинг учун ҳам бу ерда, агар $j > i$ бўлса,

$$K_{ij} = 0$$

бўлади, натижада (2.4) система қуйидаги учбурчак матрицали чизиқли алгебраик тенгламалар системасига келади:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{i} A_j K_{ij} y_j = f_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{2.24}$$

Агар

$$1 - \lambda A_i K_{ii} \ne 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{2.25}$$

тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда (2.24) дан кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = f_1 \left(1 - \lambda A_1 K_{11}\right)^{-1},$$

$$y_2 = \left(f_2 + \lambda A_1 K_{21} y_1\right)\left(1 - \lambda A_2 K_{22}\right)^{-1},$$

....

$$y_n = \left(f_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} A_j K_{nj} y_j\right)\left(1 - \lambda A_n K_{nn}\right)^{-1}.$$

Бу ерда A_i коэффициентларни кичикроқ қилиб танлаб олиш ҳисобига берилган λ учун (2.25) шартни ҳар доим қаноатлантириш мумкин.

Мисол. Кв.ф.усули ёрдамида ушбу

$$u(x) - \int_0^1 x^2 s e^{-xs} u(s)ds = (1-x)e^x \tag{2.26}$$

интеграл тенгламанинг тақрибий ечими топилсин.

Ечиш. Тугунларни $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1$ деб олиб,

$$\int_0^1 \Phi(s)ds \cong \frac{1}{6}\left[\Phi(0)+4\Phi\left(\frac{1}{2}\right)+\Phi(1)\right]$$

Симпсон формуласини қўллаймиз. Кўриниб турибдики,

$$K_{11} = K_{12} = K_{13} = K_{21} = K_{31} = 0,\ K_{22} = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{4}},\ K_{23} = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}},$$

$$K_{32} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}},\quad K_{33} = e,\quad f_1 = 1,\quad f_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}},\quad f_3 = 0.$$

Шунинг учун ҳам (2.4) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = 1,\\ &y_1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}y_2+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}y_3\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}},\\ &y_3 - \frac{1}{6}\left(2e^{\frac{1}{2}}y_2 + ey_3\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

ёки соддалаштиришдан сўнг

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = 1,\\ &2e^{\frac{1}{2}}y_2 - (6-e)\,y_3 = 0,\\ &\left(24 - 2e^{\frac{1}{4}}\right)y_2 - e^{\frac{1}{2}}y_3 = 12e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$y_1=1,\qquad y_2=1{,}00048,\qquad y_3=1{,}00526.$$

Интеграл тенгламани ихтиёрий $x \in [0,1]$ учун ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$y(x) = (1-x)e^x - \frac{x^2}{6}\left(4{,}00192e^{\frac{x}{2}} + 1{,}00526e^x\right).$$

12.3-§. ИХТИЁРИЙ ЎЗАКНИ БУЗИЛГАН ЎЗАККА АЛМАШТИРИШ ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

12.3.1. Бузилган ўзакли интеграл тенглама.

Таъриф. $K_n(x, s)$ *ўзак бузилган* дейилади, агар уни қуйидаги кўринишдаги жуфт кўпайтмаларнинг чекли йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин бўлса:

$$K_n(x,s)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)B_i(s), \tag{3.1}$$

бунда $A_i(x)$, худди шунингдек, $B_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ функциялар чизиқли эркли деб қаралади. Чунки акс ҳолда (3.1) чизиқли комбинациядаги ҳадларнинг сонини камайтириш мумкин. Бундай ўзаклар учун

$$u(x)=f(x)+\lambda\int K_n(x,s)u(s)ds \tag{3.2}$$

Фредгольмнинг II жинс интеграл тенгламаси осонлик билан ечилади. Ҳақиқатан ҳам, (3.1) ифодани (3.2) тенгламага қўйсак,

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}C_iA_i(x) \tag{3.3}$$

тенглик ҳосил бўлади, бунда

$$C_i=\int_a^b B_i(s)u(s)ds \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

ҳозирча номаълум миқдорлар. Ушбу

$$f_i=\int_a^b f(s)B_i(s)ds,$$

$$a_{ij}=\int_a^b B_i(s)A_j(s)ds$$

белгиларни киритамиз. (3.3) ифодани (3.2) тенгламага қўйсак,

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}C_iA_i(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{n}A_i(x)B_i(s)\left[f(s)+\sum_{j=1}^{n}C_jA_j(s)\right]ds$$

ифода ҳосил бўлади. Унинг ҳар иккала томонини $f(x)$ га қисқартириб, $A_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз ($A_i(x)$ лар чизиқли эркли бўлганлиги учун), натижада C_i ларни топиш учун ушбу

$$C_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_j \left(i=\overline{1,n}\right)$$

ёки (3.4)

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \lambda a_{ij}\right) C_j = f_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. (3.4) системанинг аниқловчисини

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\delta_{ij} - \lambda a_{ij}\right)$$

орқали ҳамда $\Delta_{ij}(\lambda) = \left(i,j=\overline{1,n}\right)$ орқали $\delta_{ij} - \lambda a_{ij}$ элементларнинг мос равишдаги алгебраик тўлдирувчиларини белгилаймиз.

Агар $\Delta(\lambda) \neq 0$ бўлса, Крамер қоидасига кўра

$$C_i = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji}(\lambda) f_{ij} \quad \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Бу қийматларни (3.3) га қўйиб, ягона ечимни топамиз:

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji}(\lambda) f_j A_i(x) = \\ &= f(x) + \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji}(\lambda) A_i(x) \int_a^b f(s) B_j(s)\,ds = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x,s;\lambda)}{\Delta(\lambda)} f(s)\,ds, \end{aligned} \tag{3.5}$$

бу ерда

$$\Delta(x,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ji}(\lambda) A_i(x) B_j(s).$$

(3.5) тенгликдан

$$R(x,s;\lambda) = \frac{\Delta(x,s;\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{3.6}$$

функция (1.3) интеграл тенгламанинг резольвентаси эканлиги келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 \left(x^2 + s^2\right) u(s) ds \tag{3.7}$$

интеграл тенгламанинг ечими топилсин.

Ечиш. Равшанки, $K(x, s) = x^2 + s^2$ бузилган ўзак, (3.7) тенгламадан

$$u(x) = x + \lambda \left(C_1 X^2 + C_2\right) \tag{3.8}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$C_1 = \int_0^1 u(s) ds, \quad C_2 = \int_0^1 s^2 u(s) ds. \tag{3.9}$$

(3.8) ни (3.9) га қўйиб, қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} + \lambda\left(\frac{1}{3}C_1 + C_2\right), \\ C_2 &= \frac{1}{4} + \lambda\left(\frac{1}{5}C_1 + C_2\right) \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)C_1 - \lambda C_2 &= \frac{1}{2}, \\ -\frac{\lambda}{5}C_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)C_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Системанинг аниқловчиси эса ушбуга тенг:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda}{3} & -\lambda \\ -\dfrac{\lambda}{5} & 1 - \dfrac{\lambda}{3} \end{vmatrix} = 1 - \frac{2\lambda}{3} - \frac{4\lambda^2}{45}. \tag{3.11}$$

Агар $\Delta\left(\lambda\right) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$C_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6}}{\Delta(\lambda)}, \quad C_2 = \frac{\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{60}}{\Delta(\lambda)}$$

бўлади ва (3.9) тенгламанинг ечими

$$u(x) = x + \frac{3\lambda}{4} \cdot \frac{10(3+\lambda)x^2 + 15 + \lambda}{45 - 30\lambda - 4\lambda^2}$$

формула билан аниқланади.

12.3.2. Бузилган ўзакнинг хос сонлари, хос функциялари ва резольвентасини топиш. Юқорида айтганимиздек, $K_n(x, s)$ ўзакнинг хос сонлари

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{3.12}$$

тенгламадан топилади. Агар λ_k $(k = 1, 2, ..., m,\ m \le n)$ сон (3.12) тенгламанинг ечими бўлса (равшанки, $\lambda_k \ne 0$), у ҳолда $K_n(x,s)$ ўзакнинг мос равишдаги хос функцияси, яъни

$$\tilde{u}(x) = \lambda_k \int_a^b K_n(x,s)\tilde{u}(s)\,ds$$

бир жинсли тенгламанинг нотривиал ечими

$$\tilde{\varphi}_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i^{(k)} A_i(x)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $\tilde{C}_i^{(k)}$ ушбу

$$\sum_{j=1}^n \left(\delta_{ij} - \lambda_k a_{ij}\right)\tilde{C}_j^{(k)} = 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

бир жинсли тенгламалар системасининг нотривиал ечимлари.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, агар $\lambda = \lambda_k$ сон $K_n(x, s)$ ўзакнинг хос сони бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган (1.3) тенглама ё ечимга эга эмас, ёки чексиз кўп ечимга эга.

2-мисол. Ушбу

$$K_2(x, s) = x^2 + s^2$$

ўзакнинг $0 \le x,\ s \le 1$ соҳада хос сонлари, хос функциялари ва резольвентаси топилсин.

Ечиш. Ушбу

$$\tilde{u}(x) = \lambda \int_a^1 \left(x^2 + s^2\right)\tilde{u}(s)\,ds$$

бир жинсли система ечимини

$$\tilde{u}(x) = \lambda\left(\tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2\right) \tag{3.13}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. $\tilde{C}_1$ ва $\tilde{C}_2$ коэффициентлар эса қуйидаги (қ. (3.10)) системадан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)\tilde{C}_1 - \lambda \tilde{C}_2 = 0, \\ &-\frac{\lambda}{5}\tilde{C}_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)\tilde{C}_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Энди (3.14) системанинг (3.10) аниқловчисини нолга тенглаштириб.

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{2\lambda}{3} - \frac{4\lambda^2}{45} = 0,$$

хос сонларнинг қийматларини топамиз:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4}\left(5+3\sqrt{5}\right), \quad \lambda_2 = -\frac{3}{4}\left(5-3\sqrt{5}\right). \tag{3.15}$$

Хос сонларнинг ҳақиқийлиги ўзак симметриклигининг натижасидир.

Агар $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1,2)$ бўлса, (3.14) системанинг иккинчиси биринчисининг натижаси бўлади, шунинг учун ҳам биз қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(1 - \frac{\lambda_k}{3}\right)\tilde{C}_1^{(k)} - \lambda_k \tilde{C}_2^{(k)} = 0$$

ёки

$$\tilde{C}_1^{(k)} = \frac{3\lambda_k}{3-\lambda_k}\tilde{C}_2^{(k)}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига λ_k нинг (3.14) қийматини қўйсак,

$$\tilde{C}_1^{(1)} = -\sqrt{5}\tilde{C}_2^{(1)}, \quad \tilde{C}_1^{(2)} = \sqrt{5}\tilde{C}_2^{(2)}$$

келиб чиқади. Бу қийматларни (3.13) га қўйиб, қуйидаги иккита хос функцияни ҳосил қиламиз:

$$\varphi_1(x) = \alpha_1\left(1 - \sqrt{5}x^2\right), \quad \varphi_2(x) = \alpha_2\left(1 + \sqrt{5}x^2\right).$$

Бунда $\alpha_k = \lambda_k \ \tilde{C}_2^{(k)} \neq 0$ бўлиб, бу сонлар хос функцияларни нормаллаштиришдан, яъни

$$\int_0^1 \varphi_k^2(x)\,dx = \alpha_k^2 \int_0^1 \left(1 \pm \sqrt{5}x^2\right)^2 dx = 1$$

дан топилади. Равшанки, $\alpha_k = \frac{1}{4}\sqrt{6\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}$. Шундай қилиб,

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \frac{1}{4}\sqrt{6\left(3+\sqrt{5}\right)}\left(1 - \sqrt{5}x^2\right), \quad \tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{4}\sqrt{6\left(3-\sqrt{5}\right)}\left(1 + \sqrt{5}x^2\right)$$

берилган ўзакнинг нормаллаштирилган хос функцияларидир.

Резольвентани топиш учун (3.11) аниқловчининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$\Delta_{11}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{5}, \Delta_{12}(\lambda) = \frac{\lambda}{5}, \Delta_{21}(\lambda) = \lambda, \Delta_{22}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}.$$

Шунинг учун ҳам

$$K_2(x,s) = A_1(x)B_1(s) + A_2(x)B_2(s),$$

$$A_1(x) = x^2, \ B_1(s) = 1, A_2(x) = 1, B_2(s) = s^2$$

тенгликларни назарда тутиб, (3.6) формулага кўра резольвентани қуйидагича ёза оламиз:

$$R(x,s;\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)x^2 + \frac{\lambda}{5} + \lambda x^2 s^2 + \left(1-\frac{\lambda}{3}\right)s^2\right] =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)\left(x^2+s^2\right)+\lambda x^2 s^2+\frac{\lambda}{5}}{1-\frac{2\lambda}{3}-\frac{4\lambda^2}{45}}.$$

Агар $\lambda \neq -\frac{3}{4}\left(5\pm 3\sqrt{5}\right)$ бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган (3.7) интеграл тенгламанинг ечими (3.5) формулага кўра

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)\left(x^2+s^2\right)+\lambda x^2 s^2+\frac{\lambda}{5}}{1-\frac{2\lambda}{3}-\frac{4\lambda^2}{45}}ds$$

формула орқали ифодаланади.

12.3.3. Ихтиёрий ўзакни бузилган ўзак билан яқинлаштириш. Ихтиёрий $K(x, s)$ ўзакли

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)\,ds \qquad (3.16)$$

интеграл тенгламани тақрибий ечиш учун $K(x, s)$ ўзакни (3.1) кўринишдаги $K_n(x, s)$ бузилган ўзак билан алмаштириб, кейин ҳосил бўлган (3.2) интеграл тенгламани 12.3.1 даги усул билан ечамиз. Бу ерда қуйидагиларни таъкидлаш лозим: Ихтиёрий ўзакни берилган аниқликда $K_n(x, s)$ бузилган ўзак билан алмаштирганда λ параметр $K(x, s)$ ўзакнинг хос сонидан қанча узоқ бўлса, (3.2) тенглама ечимининг хатолиги шунча кам бўлади. Аксинча, λ параметр хос сонга қанча яқин бўлса, $K_n(x, s)$ ни $K(x, s)$ га шунча яқинроқ қилиб алмаштириш керак, шу ҳолдагина тақрибий ечимни керакли аниқликда топиш мумкин. $K(x, s)$ ни $K_n(x, s)$ билан алмаштиришнинг усуллари кўп, биз айримларига тўхталиб ўтамиз.

Агар $K(x, s)$ ўзак $[a, b]$ оралиқда x бўйича юқори тартибли силлиқликка эга бўлса, у ҳолда $K_n(x, s)$ бузилган ўзак сифатида $K(x, s)$ нинг Тейлор қаторининг қисмини олиш мумкин:

$$K_n(x,s) = \sum_{m=0}^{n}\frac{\left(x-x_0\right)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}K\left(x_0,s\right),$$

бунда x_0 сифатида $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтасини олиш мумкин. Одатда, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ деб олинади. Шунга ўхшаш мулоҳазаларни

s бўйича ҳам айтиш мумкин. Бузилган ўзакни қуриш учун икки каррали Тейлор қаторининг чекли қисмини олса ҳам бўлади:

$$K_n(x,s)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{(x-x_0)^p(s-s_0)^q}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial s^q}K(x_0,s_0),\ x_0,s_0\in[a,b].$$

Фараз қилайлик, $T=b-a$ бўлсин ва $K(x, s)$ ўзак $2T$ даврли тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш [Π] шартини қаноатлантирсин. У ҳолда

$$K_n(x,s)=\frac{1}{2}a_0(s)+\sum_{p=1}^{n}a_p(s)\cos\frac{p\pi x}{T}$$

деб олишимиз мумкин, бу ерда $a_p(s)$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$) Фурье коэффициентлари:

$$a_p(s)=\frac{2}{T}\int_a^b K(x,s)\cos\frac{p\pi x}{T}dx.$$

Шунга ўхшаш мулоҳазалар s ўзгарувчи учун ҳам ўринлидир. $K_n(x, s)$ сифатида икки каррали Фурье қаторининг чекли қисмини олиш ҳам мумкин:

$$K_n(x,s)=\frac{1}{4}a_{oo}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}a_{po}\cos\frac{p\pi x}{T}+\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}a_{oq}\cos\frac{q\pi s}{T}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pq}\cos\frac{p\pi x}{T}\cos\frac{q\pi s}{T},$$

бу ерда

$$a_{pq}=\frac{4}{T^2}\int_a^b\int_a^b K(x,s)\cos\frac{p\pi x}{T}\cos\frac{q\pi s}{T}dxds.$$

Шу мақсадда 5-бобдаги ҳар хил интерполяцион формулалардан ҳам фойдаланиш мумкин. Масалан, x аргумент бўйича Лагранж интерполяцион формуласини қўлласак,

$$K_n(x,s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}K(x_i,s),$$

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Келтирилган формулалардан ташқари Чебишев, Лежандр ва бошқа ортогонал кўпҳадлар бўйича ёйилмалардан фойдаланиш мумкин.

12.3.4. Хатоликни баҳолаш. Қуйидаги теорема ўринлидир:

Теорема. *Фараз қилайлик, ушбу*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds \tag{3.17}$$

ва

$$\vartheta_n(x) = f_n(x) + \lambda \int_a^b K_n(x,s)\vartheta_n(s)ds \tag{3.18}$$

интеграл тенгламалар берилган бўлиб, $\gamma_n(x,s,\lambda)$ (3.18) *тенгламанинг резольвентаси бўлсин ҳамда қуйидаги*

$$\int_a^b \left|K(x,s) - K_n(x,s)\right| ds < \delta, \tag{3.19}$$

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon, \tag{3.20}$$

$$\int_a^b \left|\gamma_n(x,s,\lambda)\right| ds \le B \quad (n = 1,2,...) \tag{3.21}$$

тенгсизликларнинг бажарилиши маълум бўлсин. Агар шу билан бирга (3.17) тенглама чегараланган ечимга эга бўлиб,

$$|\lambda|\delta\left(1 + |\lambda| B\right) < 1 \tag{3.22}$$

шарт бажарилса, у ҳолда (3.17) тенгламанинг u(x) ечими ягона ва

$$\left|u(x) - \vartheta_n(x)\right| < \varepsilon\left(1 + |\lambda| B\right) + \frac{F_0|\lambda|\delta\left(1+|\lambda|B\right)^2}{1-|\lambda|\delta\left(1+|\lambda|B\right)} \tag{3.23}$$

баҳо ўринли бўлади, бунда $F_0 = \max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|$.

Исботи. Фараз қилайлик, $M = \sup\limits_{a\le x\le b}\left|u(x)\right|$ бўлсин. Қулайлик учун (3.17) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K_n(x,s)u(s)ds = \Phi(x), \tag{3.24}$$

бунда

$$\Phi\left(x\right) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(K(x,s) - K_n(x,s)\right)u(s)ds. \tag{3.25}$$

(3.24) тенглама $K_n(x, s)$ ўзагининг резольвентаси $\gamma_n(x, s, \lambda)$ бўлганлиги учун унинг ечими

$$u(x) = \Phi(x) + \lambda \int_a^b \gamma_n(x,s,\lambda)\Phi(s)ds \qquad (3.26)$$

кўринишга эга бўлади. Энди (3.25) ва (3.26) тенгликлардан қуйидаги баҳоларга эга бўламиз:

$$|\Phi(x)| \le |f(x)| + |\lambda| \int_a^b |K(x,s) - K_n(x,s)||u(s)|ds \le F_0 + |\lambda|\delta M,$$

$$|u(x)| \le |\Phi(x)| + |\lambda| \int_a^b |\gamma_n(x,s,\lambda)||\Phi(s)|ds \le$$

$$\le F_0 + |\lambda|\delta M + |\lambda|\left(F_0 + |\lambda|\delta M\right)B,$$

$$M \le F_0 + |\lambda|\delta M + |\lambda|\left(F_0 + |\lambda|\delta M\right)B.$$

Бундан (3.22) тенгликни ҳисобга олсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$M \le \frac{F_0\left(1+|\lambda|B\right)}{1-|\lambda|\delta\left(1+|\lambda|B\right)}. \qquad (3.27)$$

Шундай қилиб, (3.22) шарт бажарилганда $f(x)$ ни қандай танлашимиздан қатъи назар, (3.17) тенгламанинг барча ечимлари ягона ўзгармас сон билан чегараланган бўлар экан. Бундан эса λ нинг хос сон эмаслиги ва (3.17) тенгламанинг ягона ечимга эгалиги келиб чиқади. Чунки, агар λ ўзакнинг хос сони бўлса, у ҳолда (3.17) тенгламанинг бирор ечимига ўзакнинг хос функциясини қўшиб, (3.17) тенгламанинг бошқа ечимини ҳосил қилган бўлар эдик. Агар биз модули бўйича етарлича катта бўлган хос функцияни қўшсак (хос функцияни ихтиёрий сонга кўпайтирсак ҳам у хос функциялигича қолади), у ҳолда (3.17) тенгламанинг абсолют қиймати билан етарлича катта ечимини топган бўлар эдик.

Шу билан (3.17) тенглама ечимининг ягоналиги исботланди. Энди (3.23) баҳони кўрсатамиз. Бунинг учун (3.18) ва (3.24) тенгламалардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u(x) - \vartheta_n(x) - \lambda \int_a^b K_n(x,s)\left(u(s) - \vartheta_n(s)\right)ds = \Phi(x) - f_n(x)$$

ёки

$$u(x) - \vartheta_n(x) = \Phi(x) - f_n(x) + \lambda \int_a^b \gamma_n(x,s;\lambda)\left(\Phi(s) - f_n(s)\right)ds. \qquad (3.28)$$

Бундан эса

$$|u(x) - \vartheta_n(x)| \le |\Phi(x) - f_n(x)| + |\lambda| \int_a^b |\gamma_n(x,s;\lambda)||\Phi(s) - f_n(s)|ds.$$

Лекин

$$\left|\Phi(x)-f_n(x)\right|=\left|\lambda\int_a^b\big(K(x,s)-K_n(x,s)\big)u(s)\,ds+\right.$$
$$\left.+f(x)-f_n(x)\right|\le\varepsilon+|\lambda|\delta M.$$

Демак, (3.27) ва (3.28) муносабатлардан

$$\left|u(x)-\vartheta_n(x)\right|\le\varepsilon+|\lambda|B\varepsilon+M\delta|\lambda|\big(1+|\lambda|B\big)\le$$
$$\le\varepsilon\big(1+|\lambda|B\big)+\frac{F_0\delta|\lambda|(1+|\lambda|B)^2}{1-|\lambda|\delta\big(1+|\lambda|B\big)}$$

баҳо келиб чиқади. Теорема исботланди.

Натижа. Агар $n\to\infty$ да $K_n(x, s)$ ўзак ва $f_n(x)$ озод ҳад мос равишда $K(x, s)$ ва $f(x)$ларга текис яқинлашса ҳамда (3.21) баҳо ўринли бўлса, у ҳолда $\vartheta_n(x)$ ҳам $u(x)$ га текис яқинлашади.

Мисол. Ушбу

$$u(x)+\int_0^{\frac{1}{2}}xshxs\cdot u(s)ds=f(x) \tag{3.29}$$

интеграл тенглама ечилсин.

Ҳозирча $f(x)$ ихтиёрий узлуксиз функция бўлсин. $K_2(x, s)$ ўзак сифатида

$$K(x,s)=xshxs=x^2s+\frac{x^4s^3}{3!}+\frac{x^6s^5}{5!}+\ldots \tag{3.30}$$

ёйилманинг аввалги иккита ҳадини оламиз:

$$K_2(x,s)=x^2s+\frac{x^4s^3}{6} \tag{3.31}$$

ва

$$\vartheta_2(x)-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2s+\frac{x^4s^3}{6}\right)\vartheta_2(s)ds=f(x). \tag{3.32}$$

Интеграл тенгламанинг ечимини

$$\vartheta_2(x)=C_1x^2+C_2x^4+f(x) \tag{3.33}$$

кўринишда излаймиз. Энди

$$f_1=\int_0^{\frac{1}{2}}sf(s)ds,\ f_2=\int_0^{\frac{1}{2}}s^3f(s)ds \tag{3.34}$$

белгилашлар киритиб, (3.33) ни (3.32) га қўйсак,

$$C_1x^2 + C_2x^4 - x^2\left(\frac{C_1}{64}+\frac{C_2}{384}\right) - \frac{x^4}{6}\left(\frac{C_1}{384}+\frac{C_2}{2048}\right) - f_1x^2 - \frac{1}{6}f_2x^4 = 0$$

тенглик келиб чиқади. Бундан x^2 ва x^4 олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириб, C_1 ва C_2 ларни топиш учун

$$\left.\begin{aligned} &\frac{63}{64}C_1 - \frac{C_2}{384} = f_1, \\ &-\frac{C_1}{384} + \frac{12287}{2048}C_2 = f_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг ечими

$$C_1 = 0,169326\left(\frac{12287}{2048}f_1 + \frac{f_2}{384}\right), C_2 = 0,169326\left(\frac{f_1}{384} + \frac{63}{64}f_2\right) \tag{3.36}$$

дан иборат. Шунинг учун ҳам $\vartheta_2(x)$ ечимни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\vartheta_2(x) = f(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} 0,169326\left[x^2\left(\frac{12287}{2048}s + \frac{s^3}{384}\right) + x^4\left(\frac{s}{384} + \frac{63}{64}s^3\right)\right]f(s)ds. \tag{3.37}$$

Бундан резольвента учун ушбу ифода келиб чиқади:

$$\gamma_2(x,s,1) = 0,169326\left[x^2\left(\frac{12287}{2048}s + \frac{s^3}{384}\right) + x^4\left(\frac{s}{384} + \frac{63}{64}s^3\right)\right].$$

Осонлик билан кўриш мумкинки,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\gamma_2(x,s,1)\right|ds < 0,032.$$

Энди (3.30) ва (3.31) лардан

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left|K(x,s) - K_2(x,s)\right|ds < \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^6s^5}{119}ds = \frac{x^6}{119\cdot 6\cdot 2^6}$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $x \le \frac{1}{2}$ бўлганлиги учун δ сифатида $\delta = \frac{1}{120\cdot 6\cdot 2^{12}} = 3\cdot 10^{-7}$ ни олишимиз мумкин. Бизнинг ҳол учун $\varepsilon = 0$ лигини ҳисобга олиб, (3.23) баҳодан қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|u(x) - \vartheta_2(x)\right| \le \frac{F_0|\lambda|\delta\left(1+|\lambda|B\right)^2}{1-|\lambda|\delta\left(1+|\lambda|B\right)} \le \frac{F_0\cdot 3\cdot 10^{-7}(1+0,032)^7}{1-3\cdot 10^{-7}(1+0,032)} = 3,7\cdot 10^{-7}F_0,$$

бунда $F_0 = \max\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left|f(x)\right|$. Шундай қилиб, ихтиёрий узлуксиз $f(x)$ озод ҳад учун (3.29) тенгламанинг тақрибий ечими (3.37) формула билан аниқланади (C_1, C_2

коэффициентлар (3.36) формулалар ёрдамида топилади) ва тақрибий ечим қуйидагича баҳоланади:

$$|u(x)-\vartheta_2(x)| < 3,7 \cdot 10^{-7} F_0.$$

Агар $f(x) = 2 - ch\frac{x}{2}$ бўлса, у ҳолда $F_0=1$ бўлиб, ечим $u(x)\equiv 1$ бўлади. Бу ҳолда тақрибий ечимнинг ошкор кўринишини топиш учун (3.34), (3.36) ва (3.37) формулалардан фойдаланамиз:

$$f_1 = \frac{1}{4} - sh\frac{1}{4} + 4ch\frac{1}{4} - 4,\ f_2 = -96 + \frac{1}{32} + 24,25sh\frac{1}{4} + 99ch\frac{1}{4},$$

$$f_1 = 0,1230386, \quad f_2 = 0,0152542;$$

$$C_1 = 0,1249983, \quad C_2 = 0,0025968.$$

Шундай қилиб,

$$\vartheta_2(x) = 2 - ch\frac{x}{2} + 0,1249983x^2 + 0,0025968x^4.$$

Агар $ch\frac{x}{2}$ ни $1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{4!2^4}$ билан алмаштирсак, у ҳолда $\varepsilon < 10^{-8}$ бўлиб, тақрибий ечим

$$\vartheta_2(x) = 1 - 0,0000017x^2 - 0,0000073x^4$$

кўринишга эга бўлади.

12.4-§. МОМЕНТЛАР МЕТОДИ ВА УНИНГ БУЗИЛГАН ЎЗАК МЕТОДИ БИЛАН АЛОҚАСИ

12.4.1. Моментлар методи. Фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиқда $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,... узлуксиз, чизиқли эркли ва ортонормал функциялар системаси берилган бўлсин. Шу билан бирга $\{\varphi_i(x)\}$ системани $C[a, b]$ функциялар фазосида тўлиқ деб қараймиз. Бунинг маъноси шундан иборатки, агар ихтиёрий $F(x)\in C[a, b]$ учун

$$\int_a^b F(x)\varphi_i(x)dx = 0 \quad (i = 1,2,...)$$

чексиз кўп тенгликлар бажарилса, у ҳолда $F(x)\equiv 0$ бўлади.

Моментлар методида ушбу

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x) \tag{4.1}$$

бир жинсли бўлмаган чизиқли комбинацияни қараймиз. Бунга n та C_i номаълум коэффициентлар киради, уларни қуйидаги мулоҳазалар ёрдамида танлаймиз. Юқоридаги $u_n(x)$ ушбу

$$Lu \equiv u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)u(s) - f(x) = 0 \tag{4.2}$$

интеграл тенгламанинг аниқ ечими бўлиши, яъни $Lu_n \equiv 0$ бўлиши учун ушбу

$$\int_a^b Lu_n \cdot \varphi_i(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, ...)$$

чексиз кўп тенгликларнинг бажарилиши етарлидир. Лекин бизнинг ихтиёримизда фақат n та C_i коэффициентлар бор ва шунинг учун ҳам юқоридаги тенгликларнинг фақат n тасини қаноатлантира оламиз:

$$\int_a^b Lu_n \cdot \varphi_i(x)dx = \int_a^b \left[u_n(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)u_n(s)ds \right] \varphi_i(x)dx = 0,$$

$$i = 1, 2, ..., n. \tag{4.3}$$

Бу тенгликлар Lu_n функциянинг $\{\varphi_i(x)\}$ система бўйича аввалги n та моментининг нолга тенглигини кўрсатади. Энди

$$Lu_n = \sum_{j=1}^{n} C_j \left\{ \varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds \right\} - \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда C_1, C_2,..., C_n ларни топиш учун ушбу системага эга бўламиз:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \left\{ \alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij} \right\} = \lambda\gamma_i \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.4}$$

бунда

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \;\; \beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds,$$

$$\gamma_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)f(s)ds.$$

Агар (4.4) системанинг детерминанти

$$D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})$$

нолдан фарқли бўлса, у ҳолда системадан ягона равишда C_1, C_2, $..., C_n$ ларни аниқлаш мумкин. Сўнгра $D(\lambda)=0$ тенгламадан $K(x, s)$ ўзакнинг $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ хос сонларининг тақрибий қиймати топилади. Қуйидаги

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j(\alpha_{ij} - \lambda_k \beta_{ij}) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг нотривиал ечимини топиб, осонлик билан λ_k хос сонга мос келадиган $\tilde{u}^{(k)}(x)$ тақрибий хос функцияни қуриш мумкин.

Юқоридаги мулоҳазаларда $\{\varphi_i(x)\}$ системанинг ортонормаллиги ортиқча бўлиб, фақат тўлалиги ва аввалги n тасининг чизиқли эрклилигини талаб қилиш етарлидир, чунки ҳар қандай системани ортонормаллаштириш мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, моментлар методининг ғояси Галёркин методининг (11-бобга қ.) ғояси билан устма-уст тушади.

12.4.2. Галёркин методининг бузилган ўзак методи билан алоқаси. Моментлар методи $K(x, s)$ ўзакни махсус равишда қуйида қурилган $K_n(x, s)$ бузилган ўзак орқали алмаштириш билан тенг кучлидир:

Фараз қилайлик, $\{\varphi_i(x)\}$ ортонормал система бўлсин. $K(x, s)$ ни x ўзгарувчи бўйича Фурье қаторига ёямиз ва $K_n(x, s)$ сифатида бу қаторнинг қисмий йиғиндисини оламиз:

$$K_n(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(s)\varphi_i(x),$$

бунда

$$\vartheta_i(s) = \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)dx.$$

Энди, агар

$$L_n u \equiv u(x) - \lambda \int_a^b K_n(x,s)u(s)ds - f(x) = 0$$

тенгламага моментлар методини қўлласак, у ҳолда топилган ечим (4.2) тенгламанинг ечими билан устма-уст тушади. Чунки $K_n(x, s)$ ўзак учун қурилган (4.4) система фақат β_{ij} коэффициент билан фарқ қилиши мумкин, аммо $\beta_{ij}=b_{ij}$ тенглик ўринлидир. Буни кўрсатиш учун $\{\varphi_i(x)\}$ системанинг ортогоналлигидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K_n(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds =$$

$$= \int_a^b dx \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k(s)\varphi_k(x)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \vartheta_k(s)\varphi_j(s)ds \int_a^b \varphi_i(k)\varphi_k(x)dx = \int_a^b \vartheta_i(s)\varphi_j(s)ds.$$

Иккинчи томондан

$$b_{ij} = \int\limits_a^b dx \int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds =$$

$$= \int\limits_a^b \varphi_j(s)\left[\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)dx\right]ds = \int\limits_a^b \varphi_j(s)\vartheta_i(s)ds,$$

натижада

$$b_{ij} = \beta_{ij}.$$

Шундай қилиб, ҳар иккала тенгламанинг тақрибий ечими уст-ма-уст тушади. Аммо $K_n(x, s)$ бузилган ўзакли тенгламанинг моментлар методи билан топилган $u_n(x)$ ечими унинг аниқ ечимидир. Бу эса моментлар методининг ўзакни махсус равишда бузилган ўзак билан алмаштирилган бузилган ўзак методи билан тенг кучлилигини билдиради. Бундан келиб чиқадики, тақрибий ечим билан аниқ ечим орасидаги хатоликни баҳолаш учун 12.3.4 даги теоремадан фойдаланиш мумкин.

Мисол. Маълумки, торнинг тебраниши масаласининг ўзаги

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & \text{агар } 0 \le x \le s \le 1 \text{ бўлса,} \\ (1-x)s, & \text{агар } 0 \le s \le x \le 1 \text{ бўлса} \end{cases} \tag{4.5}$$

тенгликлар билан аниқланган

$$Lu \equiv u(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)u(s)ds = 0 \tag{4.6}$$

бир жинсли интеграл тенгламанинг хос сони ва хос функцияларини топишга келтирилади.

Биз $n = 3$ деб олиб, (4.5) ўзакнинг аввалги иккита хос сони ва уларга мос келадиган хос функцияларни тақрибий равишда топамиз. Бунинг учун (4.5) ўзакнинг $K(x, s)=K(s, x)$ симметриклигини эътиборга олиб, φ_1, φ_2 ва φ_3 функцияларни қуйидагича танлаймиз:

$$\varphi_1(x) = 1, \ \varphi_2(x) = x(1-x), \ \varphi_3(x) = x(1-x)(1-2x),$$

тақрибий ечимни эса

$$u_3(x) = C_1 + C_2 x(1-x) + C_3 x(1-x)(1-2x) \tag{4.7}$$

кўринишда излаймиз. Бизнинг ҳолда (4.4) система бир жинсли бўлиб, a_{ij} ва b_{ij} қуйидагига тенг:

$$a_{11} = 1, a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0, a_{12} = a_{21} = \frac{1}{6}, a_{22} = \frac{1}{30}, a_{33} = \frac{1}{210};$$

$$b_{11} = \frac{1}{12}, b_{13} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0, b_{12} = b_{21} = \frac{1}{60}, \ b_{22} = \frac{17}{30 \cdot 168}, \ b_{33} = \frac{1}{8400}.$$

Мисол учун b_{12} ни ҳисоблашни кўрайлик:

$$b_{12} = \int_0^1 dx \int_0^1 K(x,s)s(1-s)ds =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\int_0^x (1-x)ss(1-s)ds + \int_x^1 x(1-s)s(1-s)ds \right] =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \right) dx = \frac{1}{60}.$$

Топилган коэффициентларни (4.4) га қўйиб,

$$\left.\begin{aligned} \left(1-\frac{\lambda}{12}\right)C_1 + \frac{1}{6}\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)C_2 &= 0, \\ \frac{1}{6}\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)C_1 + \frac{1}{30}\left(1-\frac{17\lambda}{168}\right)C_2 &= 0, \\ \frac{1}{210}\left(1-\frac{\lambda}{40}\right)C_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Системанинг детерминанти қуйидагига тенг:

$$D(\lambda) = \frac{\left(\lambda^2 - 180\lambda + 1680\right)(\lambda - 40)}{63504000}.$$

Буни нолга тенглаштириб, хос сонларнинг тақрибий қийматини топамиз:

$$\tilde{\lambda}_1 = 9,8751; \quad \tilde{\lambda}_2 = 40; \quad \tilde{\lambda}_3 = 170,1249.$$

Топилган $\tilde{\lambda}_1$ ва $\tilde{\lambda}_2$ ларнинг қийматини (4.8) тенгламага қўйиб, C_1, C_2 ва C_3 ларни аниқлаймиз:

$\lambda = \tilde{\lambda}_1$ учун $C_1 = -0{,}011756\ C_2$, $C_3=0$;

$\lambda = \lambda_2$ учун $C_1 = C_2 = 0$, C_3 — ихтиёрий сон.

Бу қийматларни (4.7) га қўйиб, қуйидаги

$$\tilde{u}^{(1)}(x) = C_2\left[-0{,}011756 + x(1-x)\right],$$

$$\tilde{u}^{(2)}(x) = C_3 x(1-x)(1-2x)$$

хос функцияларни топамиз. Бу ердаги C_2 ва C_3 ўзгармасларни хос функцияларни нормаллаштириш $\int_0^1 \left[\tilde{u}^{(k)}(x)\right]^2 dx = 1$ шартидан топамиз, натижада

$$\tilde{u}^{(1)}(x) = -0,0684 + 5,817x(1-x),$$

$$\tilde{u}^{2}(x) = 14,49x(1-x)(1-2x)$$

нормалланган хос функцияларни аниқлаймиз.

Аслида (4.5) ўзак чексиз кўп $\lambda_k = (k\pi)^2$ $(k=1,2...)$ хос сонларга эга, уларга мос келадиган хос функциялар эса

$$u^{(k)}(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x.$$

Хос сонларнинг топилган тақрибий қийматини уларнинг аниқ қиймати

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9,8695877,..., \lambda_2 = 39,47835...$$

билан солиштирсак, уларнинг нисбий хатолиги $\delta\left(\tilde{\lambda}_1\right)$=0,00056 ва $\delta\left(\tilde{\lambda}_2\right)$=0,013 бўлади. Хос функцияларга келганда уларнинг хатолигини 12.3-§ даги метод билан баҳоласак, биринчи хос функциянинг абсолют хатолиги етарлича кичик бўлиб, иккинчисиники эса анча каттадир.

12.5-§. ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР МЕТОДИ

Олдинги 12.4-§ даги каби $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ чизиқли эркли функциялар (координат функциялар) системаси берилган бўлсин.

Ушбу

$$Lu \equiv u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds - f(x) = 0 \tag{5.1}$$

интеграл тенгламанинг тақрибий ечимини

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x) \tag{5.2}$$

кўринишда излаймиз, бунда C_1, C_2,..., C_n изланаётган коэффициентлар. (5.2) ифодани (5.1) тенгликнинг чап томонига қўйиб, ушбу *боғланишсизликка* эга бўламиз:

$$r_n(x) = -f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i\psi_i(x,\lambda), \tag{5.3}$$

бунда

$$\psi_i(x,\lambda) = \varphi_i(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{5.4}$$

Энг кичик квадратлар методига (6-боб) кўра C_1, C_2,.., C_n коэффициентлар ушбу

$$I = \int_a^b \{r_m(x)\}^2 dx = \int_a^b \left[-f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i\psi_i(x,\lambda)\right]^2 dx \tag{5.5}$$

интегрални минимумга айлантириш шартидан топилади. Бу шарт қуйидаги алгебраик тенгламалар системасига олиб келади:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial C_j} = \int_a^b \left[-f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \psi_i(x,\lambda)\right]\psi_j(x,\lambda)\,dx = 0,$$

$$(j = 1, 2 \ldots, n). \qquad (5.6)$$

Ушбу

$$\left(\psi_i, \psi_j\right) = \int_a^b \psi_i(x\lambda)\psi_j(x,\lambda)dx, \quad f_j = (f, \psi_j) \qquad (5.7)$$

белгилашларни киритиб, (5.6) системани энг кичик квадратлар методининг нормал системаси шаклида ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}
&(\psi_1,\psi_1)C_1 + (\psi_1,\psi_2)C_2 + \ldots + (\psi_1,\psi_n)C_n = f_1,\\
&(\psi_2,\psi_1)C_1 + (\psi_2,\psi_2)C_2 + \ldots + (\psi_2,\psi_n)C_n = f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\psi_n,\psi_1)C_1 + (\psi_n,\psi_2)C_2 + \ldots + (\psi_n,\psi_n)C_n = f_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Кўриниб турибдики, (5.8) системанинг матрицаси $[(\psi_i,\psi_j)]$ симметрикдир. Агар (5.8) системанинг детерминанти

$$D(\lambda) = \det\left[\left(\psi_i, \psi_j\right)\right]$$

нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (5.8) системадан ягона равишда C_1, $C_2, \ldots, C_n$ коэффициентлар аниқланади ва (5.2) формула ёрдамида $u_n(x)$ тақрибий ечим топилади.

12.4-§ дагидек энг кичик квадратлар методини ҳам $K(x, s)$ ўзакнинг аввалги бир нечта хос сонлари ва уларга мос келадиган хос функцияларини топиш учун қўллаш мумкин. Бунинг учун $f(x) \equiv 0$ деб олиб, $D(\lambda)$ ни нолга тенглаштирамиз ва ҳосил бўлган n-даражали алгебраик тенгламани ечиб, хос сонларнинг тақрибий қийматини топамиз. Одатдагидек, λ ўрнига бирор хос соннинг тақрибий қиймати қўйилиб, мос хос функция топилади.

Мисол. Ушбу

$$u(x) = 3 - 2x - 5x^2 + \int_{-1}^{1} (xs + x^2)\,u(s)ds$$

интеграл тенглама энг кичик квадратлар методи билан ечилсин.

Бу ерда $n=3$ деб олиб, координат функциялар сифатида $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=x$, $\varphi_3(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ Лежандр кўпҳадларини (6-бобга қ.) оламиз ва тақрибий ечимни

$$u_3(x) = C_1 + C_2 x + C_3\,\frac{3x^2-1}{2}$$

кўринишда излаймиз. Бу ҳолда (5.4) формулаларга кўра

$$\psi_1(x) = 1 - \int_{-1}^{1}(xs + x^2)ds = 1 - 2x^2,$$

$$\psi_2(x) = x - \int_{-1}^{1}(xs + x^2)sds = \frac{x}{3},$$

$$\psi_3(x) = \frac{3x^2-1}{2} - \int_{-1}^{1}(xs + x^2)\frac{3s^2-1}{2}ds = \frac{3x^2-1}{2}.$$

Энди (5.7) формулалар ёрдамида (5.8) системанинг коэффициентларини топамиз:

$$(\psi_1,\psi_1) = \frac{14}{15}, (\psi_1,\psi_2) = (\psi_2,\psi_1) = (\psi_2,\psi_3) = (\psi_3,\psi_2) = 0,$$

$$(\psi_1,\psi_3) = (\psi_3,\psi_1) = -\frac{8}{15}, (\psi_2,\psi_2) = \frac{2}{27}, (\psi_3,\psi_3) = \frac{2}{5},$$

$$f_1 = \frac{8}{3}, f_2 = -\frac{4}{9}, \; f_3 = -\frac{4}{3}.$$

Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{14}{15}C_1 - \frac{8}{15}C_3 = \frac{8}{3}, \\ &\frac{2}{27}C_2 = -\frac{4}{9}, \\ &-\frac{8}{15}C_1 + \frac{2}{5}C_3 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}\right\}$$

Осонлик билан кўриш мумкинки, бу система ечими қуйидагидан иборат:

$$C_1 = 4, \; C_2 = -6, \; C_3 = 2.$$

Шундай қилиб,

$$u_3(x) = 4 - 6x + 2\cdot\frac{3x^2-1}{2} = 3 - 6x + 3x^2.$$

Бу эса тенгламанинг аниқ ечимидир.

12.6-§. КОЛЛОКАЦИЯ МЕТОДИ

Бу ерда ҳам

$$Lu = u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds - f(x) = 0 \qquad (6.1)$$

интеграл тенгламанинг $u_n(x)$ тақрибий ечимини топиш учун 12.5-§ дагидек $\{\varphi_i(x)\}$ ва $\{\varphi_i(x,\lambda)\}$ функциялар системасини киритамиз ва

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x) \tag{6.2}$$

деб оламиз. Кейин $Lu_n(x)$ боғланишсизликнинг берилган $x = x_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ тўрнинг нуқталарида (коллокация нуқталарида) нолга айланишини, яъни

$$Lu_n(x_j) = \sum_{i=1}^{n} C_i\psi_i(x_j,\lambda) - f(x_j) = 0, \quad j = 1,2,...,n$$

бўлишини талаб қиламиз (бу ерда $a \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le b$). Натижада C_1, C_2,..., C_n номаълум коэффициентларни топиш учун

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\psi_i(x_j,\lambda) = f(x_j), \quad j = \overline{1,n} \tag{6.3}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Агар системанинг детерминанти

$$D(\lambda) = \det\left[\psi_i(x_j,\lambda)\right] \ne 0$$

бўлса, у ҳолда (6.3) системадан C_1, C_2,..., C_n ягона равишда топилади ва (6.2) формула ёрдамида $u_n(x)$ тақрибий ечим аниқланади.

Агар $D(\lambda)=0$ бўлса, у ҳолда бу тенгламадан $K(x, s)$ ўзак хос сонларининг $\tilde{\lambda}_k\left(k = \overline{1,n}\right)$ тақрибий қиймати топилади. Кейин (6.3) системада $f\left(x_j\right) = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$ ва $\lambda = \tilde{\lambda}_k$ деб олиб,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i^{(k)}\psi\left(x_j,\tilde{\lambda}_k\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

бир жинсли тенгламалар системаси ҳосил қилинади. Бу системанинг $\tilde{C}_i^{(k)}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ нотривиал ечимлари $K(x, s)$ ўзакнинг $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$ хос сонига мос келадиган хос функциясини тақрибий равишда аниқлайди:

$$\tilde{u}^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i^{(k)}\varphi_i(x).$$

Мисол. Ушбу

$$u(x) = x - x^2 + \int_{-1}^{1}(xs + x^2)u(s)ds$$

тенгламанинг тақрибий ечими коллокация методи билан топилсин.

Бунинг учун тақрибий ечимни

$$u_3(x) = C_1 + C_2x + C_3\,\frac{3x^2-1}{2}$$

кўринишда қидирамиз ва уни тенгламага қўйиб, боғланишсизликни топамиз (12.5-§ даги мисолга қ.):

$$r_3(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + C_3\psi_3(x) - f(x) =$$
$$= C_1(1 - 2x^2) + \frac{C_2}{3}x + C_3\frac{3x^2-1}{2} - x + x^2.$$

Коллокация нуқталарини $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ деб оламиз ва нуқталарда боғланишсизликнинг нолга айланишини талаб қиламиз. Натижада

$$\left.\begin{aligned} -C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3 &= -2, \\ -C_1 - \frac{1}{2}C_3 &= 0, \\ -C_1 + \frac{1}{3}C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг ечими $C_1 = -1$, $C_2 = 3$, $C_3 = -2$ дан иборат. У ҳолда тақрибий ечим

$$u_3(x) = -1 + 3x - 2\cdot\frac{3x^2-1}{2} = 3x(1-x)$$

бўлиб, у аниқ ечим билан устма-уст тушади.

12.7-§. ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ МЕТОДИ БИЛАН ЕЧИШ

12.7.1. Фредгольм тенгламасини тақрибий ечиш. Бу методда

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds \tag{7.1}$$

интеграл тенгламанинг ечимини λ нинг даражаларига нисбатан жойлашган қатор шаклида излаймиз:

$$u(x) = \varphi_o(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots \tag{7.2}$$

Бу қаторни (7.1) тенгламага қўйиб

$$\varphi_o(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots =$$
$$= f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\left[\varphi_o(s) + \lambda\varphi_1(s) + \lambda^2\varphi_2(s) + \ldots\right]ds,$$

λ нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, натижада қуйидагиларга эга бўламиз:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_o(x) = f(x),\\
&\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi_o(s)ds, \qquad (7.3)\\
&\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)ds.
\end{aligned}
$$

Агар такрорланган ўзак деб аталувчи ушбу

$$
\begin{aligned}
&K_1(x,s) = K(x,s),\\
&K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_1(t,s)dt,\\
&K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)dt
\end{aligned}
$$

функцияларни киритсак, у ҳолда изланаётган $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,... функциялар учун қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$
\varphi_o(x) = f(x), \quad \varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x,s)f(s)ds \quad (n = 1,2,...).
$$

Энди (7.2) қаторни қуйидагича ёза оламиз:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s)f(s)ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,s)f(s)ds + ... =\\
&= f(x) + \lambda \int_a^b [K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + ...] f(s)ds = \qquad (7.4)\\
&= f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds,
\end{aligned}
$$

бунда

$$
R(x,s;\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + ... \qquad (7.5)
$$

интеграл тенгламанинг резольвентасидир.

Фараз қилайлик, $D = \{a \le x, s \le b\}$ соҳада $|K(x,s)| \le M$ ва $|f(x)| \le N$ бўлсин, у ҳолда (7.3) формулалардан индукция методига кўра

$$\left|\varphi_n(x)\right| \le N\left[M(b-a)\right]^n \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунинг учун ҳам

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{7.6}$$

тенгсизлик бажарилганда (7.2), (7.4) ва (7.5) қаторлар текис яқинлашади. Интеграл тенгламанинг тақрибий ечими сифатида

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \varphi_k(x)$$

ни олиш мумкин, бунинг хатолиги қуйидагига тенг:

$$\varepsilon_n = \left|u(x) - u_n(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \left|\varphi_k(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} N\left[M(b-a)|\lambda|\right]^k = \frac{N\left[M(b-a)|\lambda|\right]^{n+1}}{1-M(b-a)|\lambda|}.$$

Мисол сифатида

$$u(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x-s}u(s)\,ds$$

интеграл тенгламанинг ечимини топамиз. Бу ерда $\left|K(x,s)\right| = e^{-x-s} \le \le 1$, $\left|f(x)\right| = \left|e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right| \le 2{,}6$ ва $\lambda = \frac{1}{2}$ бўлганлиги учун (7.6) яқинлашиш шарти бажарилади. Осонлик билан кўриш мумкинки,

$$\varphi_o(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{-x},$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 e^{-x-s}\left(e^s - \frac{1}{2}e^{-s}\right)ds = e^{-x}\,\frac{3+e^{-2}}{4},$$

$$\varphi_k(x) = e^{-x}\,\frac{3+e^{-2}}{4}\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^{k-1} \quad (k=1,2,\ldots).$$

Бу ифодаларни (7.2) қаторга қўйиб, аниқ ечимни топамиз:

$$u(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-x}\,\frac{3+e^{-2}}{4\cdot 2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2}}{4}\right)^{k-1} =$$

$$= e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-x}\,\frac{1}{2} = e^x.$$

Ҳар доим ҳам бу мисолдагидек (7.3) интеграллар аниқ ҳисобланмайди. Шунинг учун ҳам (7.3) интеграллар учун 12.2-§ дагидек бирор

$$\int_a^b \Phi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi\left(x_k\right)$$

кв.ф. ни қўллашга тўғри келади.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$K_{ij} = K\left(x_i, x_j\right), \quad \varphi_{ni} = \varphi_n\left(x_i\right), \quad f_i = f\left(x_i\right).$$

Шу билан бирга $\varphi_n(x_i)$ нинг тақрибий қийматини $\tilde{\varphi}_{ni}$ ва $u(x_i)$ нинг тақрибий қийматини y_i деб белгилаймиз. У ҳолда (7.3) формуладан қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi_{0i} = f_i,$$

$$\varphi_{1i} = \int_a^b K(x_i, s)\varphi_0(s)ds \cong \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}\varphi_{oj},$$

$$\tilde{\varphi}_{1i} = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}\varphi_{0j}$$

ва умумий ҳолда

$$\tilde{\varphi}_{mi} = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}\tilde{\varphi}_{m-1,j}.$$

Бу формулаларга кўра ҳисоблашни қуйидаги жадвал бўйича бажариш мумкин:

	1	2	...	n	$\varphi_{0i}=f_i$	$\tilde{\varphi}_{1i}$	$\tilde{\varphi}_{2i}$	...	y_i	
x_1	$\lambda A_1 K_{11}$	$\lambda A_1 K_{21}$	...	$\lambda A_1 K_{n1}$	φ_{01}	$\lambda\tilde{\varphi}_{11}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_{21}$	...	y_{i1}	
x_2	$\lambda A_2 K_{12}$	$\lambda A_2 K_{22}$	...	$\lambda A_2 K_{n2}$	φ_{02}	$\lambda\tilde{\varphi}_{12}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_{22}$	...	y_{i2}	
.			...							
x_n	$\lambda A_n K_{1n}$	$\lambda A_n K_{2n}$	...	$\lambda A_n K_{nn}$	φ_{0n}	$\lambda\tilde{\varphi}_{1n}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_{2n}$	...	y_{in}	

Бу жадвал икки қисмдан иборат. Биринчи қисми квадрат жадвал бўлиб, унинг элементларини ҳосил қилиш учун $K(x, s)$ ўзак (x_i, x_j) нуқталарда ҳисобланади ва бу қиймат λA_j сонга кўпайтирилади. Жадвал иккинчи қисмининг биринчи устуни $\varphi_0(x)=f(x)$ функциянинг x_i нуқталардаги қийматидан тузилган. Кейинги ($\tilde{\varphi}_{1i}$ устун) устуннинг

1-, 2- ва ҳоказо элементлари қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$\lambda\tilde{\varphi}_{11}=\sum_{j=1}^{n}\lambda A_j K_{1j}\tilde{\varphi}_{oj},\ \lambda\tilde{\varphi}_{12}=\sum_{j=1}^{n}\lambda A_j K_{2j}\tilde{\varphi}_{oj}.$$

Кейинги $\tilde{\varphi}_{2i}$ устун элементлари эса

$$\lambda^2\tilde{\varphi}_{21}=\sum_{j=1}^{n}\lambda A_j K_{1j}(\lambda\tilde{\varphi}_{1j}),\lambda^2\tilde{\varphi}_{22}=\sum_{j=1}^{n}\lambda A_j K_{2j}(\lambda\tilde{\varphi}_{2j}),...$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади. Худди шунга ўхшаш яна кейинги устунлар элементлари ҳисобланади. Ҳисоблаш жараёнини охирги ҳисобланаётган устуннинг элементлари берилган аниқликдан кичик бўлгунича давом эттирамиз. Бундан кейин топилган устунларнинг элементларини сатрлар бўйича қўшиб, охирги устун элементларини, яъни $u(x)$ ечимнинг x_i нуқтадаги y_i тақрибий қийматини топамиз:

$$y_i=\varphi_{oi}+\lambda\tilde{\varphi}_{1i}+\lambda^2\tilde{\varphi}_{2i}+... \tag{7.7}$$

Бу қатор (7.6) шарт бажарилганда яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик, $|\varphi_{0i}|=|f_i|\le N$ бўлсин, у ҳолда

$$|\tilde{\varphi}_{1i}|=\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda A_j K_{ij}\varphi_{oj}\right|\le NM|\lambda|\sum_{j=1}^{n}A_j=NM|\lambda|(b-a).$$

Бу жараённи давом эттириб,

$$|\tilde{\varphi}_{ni}|\le N\left[M|\lambda|(b-a)\right]^n \quad (n=1,2,...)$$

баҳога эга бўламиз. Бу баҳолардан (7.7) қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Машқ. Ушбу

$$u(x)+0,2\int_0^1 x\left(e^{xs}-1\right)u(s)ds=0,2\left(e^x-x+4\right)$$

тенгламанинг ечими $\varepsilon=10^{-4}$ аниқликда топилсин.

12.7.2. Вольтерра тенгламасини тақрибий ечиш. Маълумки, агар $K(x, s)$ ва $f(x)$ функциялар $D=\{a\le s\le x\le b\}$ соҳасида узлуксиз бўлса, у ҳолда Вольтерранинг II жинс интеграл тенгламаси

$$u(x)-\lambda\int_a^x K(x,s)u(s)ds=f(x) \tag{7.8}$$

λ нинг ихтиёрий қийматида ягона ечимга эга. Мазкур ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(x). \tag{7.9}$$

Бу қаторни (7.8) тенгламага қўйиб, кейин λ нинг олдидаги бир хил даражали коэффициентларни тенглаштирамиз, натижада

$$\varphi_o(x)=f(x),\ \varphi_k(x)=\int_a^x K(x,s)\varphi_{k-1}(s)ds,\ k=1,2,... \tag{7.10}$$

тенгликлар келиб чиқади. 12.7.1 даги белгилашларда

$$\left|\varphi_k(x)\right|\le\frac{N\left[M(b-a)\right]^k}{k!} \tag{7.11}$$

баҳога эга бўламиз. Агар (7.8) тенгламанинг тақрибий ечими сифатида (7.8) қаторнинг аввалги n та ҳадини олсак, у ҳолда (7.11) тенгсизликка кўра хатолик учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\varepsilon_n=\left|u(x)-u_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(x)\right|\le N\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left[M(b-a)|\lambda|\right]^k}{k!}. \tag{7.12}$$

Бу баҳо анча қўпол. Кўп ҳолларда абсолют хатолик бундан анча кичик бўлиши мумкин. Буни мисолда кўрамиз.

Мисол. Ушбу

$$u(x)-\int_0^x(s-x)u(s)ds=x,\ 0\le x\le 2$$

интеграл тенгламанинг ечими $\varepsilon=10^{-5}$ абсолют хатолик билан топилсин.

Бу ерда $N=x\le 2$, $|K(x,s)|\le 2$, $\lambda=1$, $b-a\le 2$ бўлганлиги учун (7.11) дан

$$\left|\varphi_k(x)\right|\le\frac{2^{k+1}}{k!}$$

баҳога эга бўламиз. Бундан эса

$$\varepsilon_n=2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}<10^{-5}$$

тенгсизлик бажарилиши учун $n=11$ бўлиши лозим. Аслида бундай эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\varphi_0(x)=x$ деб олиб, кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\varphi_1(x)=\int_0^x(s-x)\varphi_0(s)ds=\frac{x^3}{3}-\frac{x\cdot x^2}{2}=-\frac{x^3}{3!},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x(s-x)\varphi_1(s)ds=-\frac{1}{3!}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x\cdot x^4}{4}\right)=\frac{x^5}{5},$$

....

$$\varphi_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Бундан кўрамизки, $\varepsilon_n = 10^{-5}$ бўлиши учун $n = 5$ етарлидир. Шундай қилиб, тақрибий ечим сифатида

$$u(x) \cong u_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

ни олишимиз мумкин. Кўриниб турибдики, аниқ ечим $u = \sin x$.

Агар (7.10) интеграллар аниқ олинмаса, у ҳолда квадратур формулалардан фойдаланишга тўғри келади. Масалан, $[a, b]$ ораликни n га бўлиб, умумлашган трапециялар формуласидан фойдаланамиз. Бунинг учун $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $\varphi_{ki} = \varphi_k(x_i)$ деб белгилаймиз ҳамда $\varphi_k(x_i)$, $u_n(x_i)$ ларнинг тақрибий қийматини мос равишда $\tilde{\varphi}_{ki}, \tilde{y}_{ni}$ орқали белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi_{k+1}(x_i) = \int_0^{x_i} K(x_i, s)\varphi_k(s)ds \cong$$

$$\cong \frac{h}{2}\Big[K_{i0}\varphi_{k0} + 2\big(K_{i1}\varphi_{k1} + K_{i2}\varphi_{k2} + \ldots + K_{i-1}\varphi_{k,i-1}\big) + K_{ii}\varphi_{ki}\Big]$$

ёки

$$\tilde{\varphi}_{k+1,i} = \frac{h}{2}\Big[K_{i0}\tilde{\varphi}_{k0} + 2\big(K_{i1}\tilde{\varphi}_{k1} + K_{i2}\tilde{\varphi}_{k2} + \ldots + K_{i,i-1}\tilde{\varphi}_{k,i-1}\big) +$$
$$+ K_{ii}\tilde{\varphi}_{ki}\Big],\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Барча $\tilde{\varphi}_{ki}\left(k = \overline{0,n}\right)$ ни ҳисоблаб бўлгандан кейин $u_n(x_i)$ нинг $\tilde{y}_{ni}$ тақрибий қиймати

$$\tilde{y}_{ni} = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \tilde{\varphi}_{ki}$$

формула ёрдамида аниқланади.

Бошқа квадратур формулаларни ҳам қўллаш мумкин. Масалан, $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{2n}$ нуқталар ёрдамида $[a, b]$ ораликни $2n$ бўлакка бўлиб,

$$\varphi_{k+1,2i} = \varphi_{k+1}\left(x_{2i}\right) = \int_0^{x_{2i}} K\left(x_{2i}, s\right)\varphi_k(s)ds$$

интегралга Симпсон формуласини қўллаб, тақрибий қиймат учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\tilde{\varphi}_{k+1,2i} = \frac{h}{3}\Big[K_{2i,0}\tilde{\varphi}_{k0} + 4(K_{2i,1}\tilde{\varphi}_{k1} + K_{2i,3}\tilde{\varphi}_{k3} + K_{2i,2i-1}\tilde{\varphi}_{k,2i-1}) +$$
$$+ 2(K_{2i,2}\tilde{\varphi}_{k2} + K_{2i,4}\tilde{\varphi}_{k4} + \ldots + K_{2i,2i-2}\tilde{\varphi}_{k,2i-2}) + K_{2i,2i}\tilde{\varphi}_{k,2i}\Big],$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоқ i лар учун $\tilde{\varphi}_{k+1,i}$ интерполяция йўли билан топилади.

Кетма-кет яқинлашиш жараёнини

$$\frac{\|y_k - y_{k-1}\|}{\|y_k\|} \le \varepsilon$$

шарт бажарилгунча давом эттириш керак, бунда $\|y\| = \max\limits_{a\le x\le b}|y(x)|$, ε — берилган нисбий хатолик. Бу шарт шуни кўрсатадики, жараённи тўхтатиш учун иккита қўшни кетма-кет яқинлашишлар натижасини солиштириш керак. Агар улар яқин бўлишса, у ҳолда керакли аниқликка эришилган деб ҳисобланади.

(7.9) тенгламани тақрибий ечиш учун унга кирадиган интегрални тўғридан-тўғри бирор кв.ф. билан алмаштириш мумкин. Юқорида кўрганимиздек, бу мақсадда умумлашган трапециялар формуласини қўллаш мақбулдир. Мазкур формулаларни қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x_i) - \lambda \int_0^{x_i} K(x_i, s) u(s) ds \cong$$

$$\cong y_i - \frac{\lambda h}{2}\left[K_{i0}\, y_0 + 2\left(K_{i1} y_1 + K_{i2} y_2 + \ldots + K_{i,i-1} y_{i-1}\right) + K_{ii} y_i\right] = f(x_i)$$

ёки

$$y_i - \frac{h\lambda}{2}\left[K_{i0} y_0 + 2(K_{i1} y_1 + \ldots + K_{i,i-1} y_{i-1}) + K_{ii} y_i\right] = f_i,$$

бундан эса

$$y_i = \frac{1}{1 - \frac{h\lambda}{2} K_{ii}}\left[f_k + \frac{\lambda h}{2} K_{i0} y_0 + \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij} y_j\right]$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, биз қадам-бақадам y_i ларни топиб оламиз.

1-машқ. Ушбу

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 xsu(s)ds$$

интеграл тенглама учун қуйидагиларнинг тўғрилиги кўрсатилсин:

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}, \quad D(x, s, \lambda) = \lambda xs, \quad u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}.$$

2-машқ. Қуйидаги

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 s(x+s)\, u(s)ds$$

тенглама учун

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2,$$

$$D(x, s; \lambda) = \lambda s(x + s) + \lambda^2 s\left(\frac{1}{2}xs - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}s + \frac{1}{4}\right)$$

эканлиги кўрсатилсин.

АДАБИЁТЛАР

1. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ. 2-қ. -Т.: Ўқитувчи, 1989.
2. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. -М.: Мир, 1969.
3. Бадалов Ф. Б., Шодмонов Г. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар орқали моделлаштириладиган муҳандислик масалаларини ЭҲМ да ечиш усуллари. -Т.: Фан, 1991.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы, 1. -М.: Наука, 1973.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука, 1987.
6. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных величин. -М.: Мир, 1989.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. -М.: ФМ, 1959.
8. Вазов В.Р., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. -М.: ИЛ, 1963.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. -Киев: Наукова думка, 1986.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1971.
11. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. -М.: ФМ, 1962.
12. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. -М.: Наука, 1973.
13. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1988.
14. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М.: ФМ, 1963.
15. Иванов В.В. Методы вычислительной математики на ЭВМ. Справочное пособие. -Киев: Наукова думка, 1986.
16. Ильин В.П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. -Новосибирск, 1970.
17. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1-қ. -Т.: Ўқитувчи, 1988.
18. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978.
19. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. -М.: ФМ, 1959.
20. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. -М., Л.: ФМ, 1962.
21. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953.
22. Қобулов В.Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. -Т.: Ўқитувчи, 1976.
23. Крылов В.И., Бобков В. В., Монастирный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. -Минск: Вышэйшая школа, 1975.
24. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастирный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. -М.: Наука, 1977.
25. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения. -М.: Гостехиздат, 1957.
26. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. -М.: Радио и связь, 1983.
27. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. -М.: Мир, 1990.
28. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1977.
29. Марчук Г.И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. -М.: Наука, 1981.

30. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. -М.: ИЛ, 1955.
31. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. -М.: Мир, 1981.
32. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. -М.: Наука, 1971.
33. Михлин С.Г., Смолицкий Х.А. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. -М.: Наука, 1965.
34. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. -М.: ФМ, 1962.
35. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1986.
36. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. -М.: Наука, 1961.
37. Положий Г.Н. и др. Математический практикум. -М.: ФМ, 1960.
38. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. -М.: Наука, 1979.
39. Рихтмайер Р., Нортон К. Разностные методы решения краевых задач. -М.: Мир, 1972.
40. Рябенький В.С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. -М.: Гостехиздат, 1956.
41. Салохитдинов М. С., Насриддинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. -Т.: Ўқитувчи, 1982.
42. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. -М.: Наука, 1971.
43. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977.
44. Самарский А.А., Андреева В. Б. Разностные методы решения эллиптических уравнений. -М.: Наука, 1976.
45. Самарский А.А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. -М.: Наука, 1973.
46. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. -М.: Наука, 1978.
47. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. -М.: Наука, 1989.
48. Саримсоқов Т. А. Функционал анализ курси. -Т.: Ўқитувчи, 1980.
49. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: Мир, 1979.
50. Статистические методы для ЭВМ. Пер. с англ. Под ред. К. Энслейна, Э. Рэлстона, Г.С. Уилфа. -М.: Наука, 1986.
51. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. -М.: Мир, 1977.
52. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. -М.: Мир, 1980.
53. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1972.
54. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986.
55. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. -М.: Мир, 1990.
56. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. -Новосибирск, 1967.
57. Bieberbach L. Theorie der Differentiol-gleichunden, 3 Aufl. Berlin, 1930, b.54.
58. Cooley I.W., Tukey I.W. An algorithun for machine calculation of complexes Fouris series // Math. Comput. 1965, v. 19, № 90.
59. Liebman H. Die angenanerte Ermitlung harmonischer Functionen und konformer Abildungen, Sitzungsber. Bauer. Akad. Wiss. Math-Phys. k. 1, 1918, s. 385-416.

МУНДАРИЖА