-

Ўзбекистон Республикаси халк таълим вазирлиги

Муқимий номли Кукон Давлат педагогика институти

«Педагогика» факультети

«БТМ» кафедараси

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

IV – курслар учун маърузалар матни

Тузувчи: **Сангинова З.**

Кукон - 2003

Сўз боши

Ушбу маърузалар матни «Эҳтимоллар назарияси» (1-қисм) номли маърузалар матнининг давоми ҳисобланади. У университетларнинг математик статистика чуқур ўрганиладиган «Математика» йўналиши учун амалдаги ўқув дастурига мувофиқ бўлиб, муаллифнинг ўқитиш жараёнида тўплаган иш тажрибасига оид материаллари асосида яратилди.

Маърузалар матнидан механика, тадбиқий математика ва информатика, физика ва иқтисод йўналишларида ҳам фойдаланиш мумкин.

Муаллиф

Танланма усул

Режа:

1. Математик статистиканинг вазифаси.
2. Асосий тушунчалар.
3. Статистик тақсимот. Полигон ва гистограмма.
4. Эмпирик тақсимот функция.

Таянч иборалар: варианта, вариацион қатор, нисбий частота.

1. Математик статистиканинг вазифаси

Оммавий (ялпи) тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қонуниятларни аниқлаш, статистик маълумотларни – кузатиш натижаларини ўрганишга асосланади. Математик статистиканинг вазифаси - статистик маълумотларни тўплаш ва уларни таҳлил қилиш усулларини тадқиқот масалаларига мувофиқ ишлаб чиқаришдан иборатдир.

2. Асосий тушунчалар.

Бир жинсли объектлар тўпламини бирор белгига нисбатан ўрганиш талаб қилинсин. Масалан, маълум турдаги маҳсулотлар партияси стандартликка текширилаётган бўлсин. Бунинг учун ялпи текшириш ўтказиш мумкин. Лекин объектлар сони жуда катта бўлса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказиш жисмонан мумкин эмас. Бордию ўрганиш объектларнинг яроқсизланиши ёки катта миқдорда маблағ сарфланиши билан боғлиқ бўлса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказишнинг маъноси ҳам бўлмайди. Шу сабабли бизни қизиқтираетган белгини ўрганиш учун *танланма усули* қўлланилади.Бу усулнинг маъноси шундан иборатки тўпламнинг барча объектлари текширилмасдан, балки ундан тасодифий равишда олинган қисмигина текширилади; шу қисми устида чиқарилган хулосалар барча объектлар тўпламига тадбиқ қилинади.

Танланма усули билан боғлиқ бўлган асосий таъриф ва тушунчаларни киритамиз.

Ўрганишимиз лозим бўлган барча бир жинсли объектлар тўплами *бош тўплам* дейилади.

Бош тўпламдан тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўплами *танланма тўплам* ёки *танланма* дейилади.

Бош ёки танланма тўпламдаги объектлар сони шу тўпламнинг *ҳажми* дейилади. Масалан ,1000 та тайерланган деталдан текшириш учун 100 таси танланган бўлса, у ҳолда бош тўплам ҳажми N=1000, танланма тўплам ҳажми эса $n=100$ бўлади.

Танланма *такрорий* (текширилган объект бош тўпламга қайтарилади) ва *нотакрорий* (текширилган объект бош тўпламга қайтарилмайди) бўлади.

Амалда кўпинча нотакрорий танланмадан фойдаланилади. Албатта бу иккала танлаб олиш усулида ҳам танланма тўплам бош тўпламнинг барча хусусиятларини сақлаган ҳолда олиниши керак,, яъни танланма тўплам бош тўпламга’*’ўхшаш”*бўлишини таъминлайдиган қилиб танлаш лозим. Бундай танланма *репрезентатив* (ваколатли) танланма дейилади. Агар танланиш тасодифий равишда амалга оширилса репрезентатив бўлади.

Танланма тўпламни бирор белгига нисбатан ўрганиш учун тажрибалар(кузатишлар) ўтказилади.

Бир хил шароитда, боглиқ бўлмаган ҳолда ўтказилган тажрибалар натижасида қуйидаги сон қийматлар олинган бўлсин:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$$

бу ерда n-танланма ҳажми. Уларни ортиб бориш тартибида жойлаштирсак ҳосил бўлган

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n) \qquad (1)$$

қатор *вариацион қатор* дейилади, x_i *(i=1,2,...n)* ларни эса *вариантлар* дейилади.

Умуман, (1) да баъзи вариантлар бир-бирига тенг бўлиши, яъни бир хил қийматли вариантлар такрорланиши мумкин.

Айтайлик, x_1 варианта n_1 марта, x_2 варианта n_2 марта ,..., x_K варианта $n_л$ марта такрорланиши ва шу билан бирга

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_л = n$$

бўлсин. У ҳолда дискрет вариацион қатор ушбу

$$\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots x_K, \\ n_1, n_2, \ldots n_л \end{matrix}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда n_i *(i=1,2,...k)* сонлар- *частоталар*,-

$$\frac{n_i}{n} = \omega_i \quad (i=1,2,..k)$$

сонлар *нисбий частоталар* дейилади.

Равшанки,

$$\sum_{i=1}^{л} \omega_i = 1$$

яъни вариантлар нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг.

3. Статистик тақсимот. Полигон ва гистограмма.

Танламанинг *статистик тақсимоти* деб варианталар ва уларга мос частоталар (ёки нисбий частоталар) орасидаги мосликка айтилади.

Статистик тақсимот масалан варианталар ва уларга мос частоталар кўрсатилган жадвал ёрдамида берилиши мумкин.

x_I	x_1	x_2	x_3	..	x_{K-1}	x_K
n_i	n_1	n_2	n_3	..	$n_{л-1}$	$n_л$

Мисол. Ҳажми *n=60* бўлган танланманинг частоталар тақсимоти берилган:

x_I	4	10	16	20	24	30
n_i	15	18	6	4	5	12

Нисбий частоталар тақсимотини топинг.

Ечиш:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}$$

формулани қўллаб нисбий частоталарни ҳисоблаймиз:

$$\omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \quad \omega_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}, \quad \omega_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}, \quad \omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

$$\omega_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \quad \omega_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{12}{60} = \frac{1}{12}$$

Шундай қилиб, нисбий частоталар тақсимоти ушбу:

x_I	4	10	16	20	24	30
ω_I	$1/4$	$3/10$	$1/10$	$1/15$	$1/12$	$1/5$

жадвал билан билан аниқланади.

$$\sum_{i=1}^{6}\omega_i = \frac{1}{4}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{5}=1$$

бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

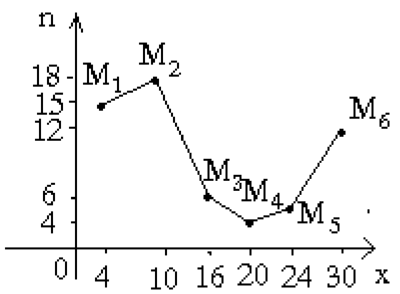
Кўргазмалилик мақсадида статистик тақсимот график кўринишда тасвирланади. Агар статистик тақсимот x_I. вариантлар ва уларга мос n_i частоталар рўйхати билан берилган бўлса, у ҳолда абсциссалар ўқига x_I вариантлар ординаталар ўқига эса n_i частоталар қўйиб чиқилиб

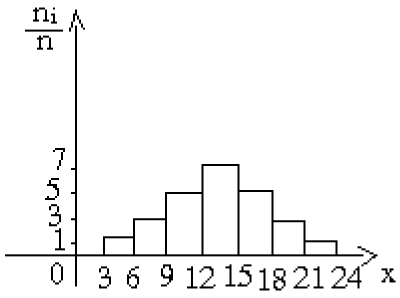
$$\mathrm{M}(x_1, n_1)\ , \ ..\ , \ \mathrm{M}(x_K, n_л)$$

нуқталар ясалади. Сўнг улар кетма-кет тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилади, ҳосил бўлган синиқ чизиқ *частоталар полигони* дейилади. Худди шундай нисбий частоталар полигони қурилади, яъни

$$\mathrm{M}(x_1, \omega_1),\ ..\ ,\ \mathrm{M}(x_K, \omega_K)$$

нуқталарни (бу ерда $\omega_i = \frac{n_i}{n}$) тўғри чизиқ кесмалари билан кетма-кет туташтирадиган синиқ чизиқ ясалади. Мисолда кўрсатилган тақсимотнинг нисбий частоталар полигони 1-расмда тасвирланган.





1-расм 2-расм

Дискрет вариацион қатордан бошқа яна интервалли қатор қаралади, уларда белгиниг қийматлари узлуксиз ўзгариши мумкин.. Мос интерваллардаги ихтиёрий қийматларни қабул қиладиган узлуксиз тасодифий миқдорларга мисол қилиб, бирор дон экин ҳосилининг вазнини ва бошқаларни олиш мумкин.

X узлуксиз тасодифий микдорни ўлчаш натижаларига эга бўлайлик. Унинг энг катта ва энг кичик қийматлари мос равишда a ва b бўлсин. $[a,b]$ кесмани k та $[x_{i-1}, x_i)$ *(i=1,2,..,k)(* $x_0 = a, x_л = b$ *)* кесмаларга бўламиз. n_i орқали X миқдорнинг $[x_{i-1}, x_i]$ интервалга тушган қийматларини белгилаймиз ва 1-жадвални тузамиз. Бу жадвал интервалли вариацион қатор дейилади. *i*-интервалга мос нисбий частота деб n_i частотанинг танланма хажми n нисбатига айтилади, бу ерда

$$n_1 + n_2 + ... + n_л = n$$

Равшанки,

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{n} = 1$$

$x_{11} - x_0, ..., x_K - x_{л-1}$ айирмалар- *жадвал айирмалар* дейилади. X белгининг энг катта ва энг кичик қийматлари айирмаси, яъни $x_л - x_0$ (ёки b-a) *вариация қулочи* дейилади.

$$\frac{n_i}{x_i - x_{i-1}} \quad (i=1,2,..,k)$$

нисбий частоталар тақсимотининг (x_{i-1}, x_i) интервалдаги *зичлиги* дейилади.

1-жадвал

Белгининг қийматлари	Частота
(x_0, x_1) (x_1, x_2) …… $(x_{л-1}, x_л)$	n_1 n_2 … $n_л$
Иғинди	n танланма ҳажми

Барча интервалли айирмалар ўзаро тенг, яъни

$$x_i - x_{i-1} = h \quad (i=1,2..k)$$

бўлганда интервалли вариацион қатор энг содда бўлади, бу ҳолда частоталар тақсимотининг i-интервалдаги зичлиги $\frac{n_i}{h}$ га тенг.

Агар статистик тақсимот интерваллар ва уларга мос частоталар
рўйхати билан берилган бўлса, у ҳолда частоталар гистограммаси қурилади.

Частоталар гистограммаси деб асослари $h_i = x_i - x_{i-1}$ узунликдаги интерваллар баландликлари мос ҳолда n_i/h_i нисбатига тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат   поғонавий шаклга айтилади. Интервал айирмалар тенг бўлган ҳолда ҳамма тўғри тўртбурчаклар битта h асосга эга бўлиб уларнинг баландликлари n_i/h_i га тенг бўлади. Абсциссалар   ўқида   қисмий интерваллар белгиланади, бу интерваллар устида баландликлари n_i/h_i (частота зичлигига) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклар ясалади.

Частоталар гистограммасининг юзи S барча частоталар йиғинди-сига , яъни танланма хажмига тенг.

Ҳақиқатдан ҳам агар i - қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи S_I бўлса, у   ҳолда

$$S_i = h_i \frac{n_i}{h_i} = n_i, S = \sum_{i=1}^{л} S_i = \sum_{i=1}^{л} n_i = n.$$

2- расмда 2-жадвалда келтирилган $n=75$ ҳажмли частоталар тақсимотининг   гистограммаси тасвирланган.

2-жадвал

қисмий интервал узунлиги $h=3$	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24

i-қисмий интер-вал варианта-лари частоталари-нинг йиғиндиси	6	9	12	21	18	6	3
Частоталар зичлиги n_i/n	2	3	4	7	6	2	1

Худди шундай нисбий частоталар гистограммаси, яъни асослари h_i (h_i -i- қисмий интервал узунлиги) узунликдаги интерваллар баланд-ликлари эса $\frac{\omega_i}{n}$ нисбатга (нисбий частота зичлиги) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий шакл ясалади. Равшанки нисбий частоталар гистограммасининг юзи S барча нисбий час-тоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг. Ҳақиқатдан ҳам, агар S_i - i - тўғри тўртбурчакнинг юзи бўлса, у ҳолда

$$S_I = h_i \frac{\omega_i}{h_i} = \omega_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} S_I = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{л} \frac{n_i}{n} = 1$$

4. Эмпирик тақсимот функция.

x нинг ҳар бир қиймати учун $X<x$ ҳодисанинг нисбий часто-тасини аниқлайдиган функция *эмпирик тақсимот функция* ёки *танланманинг тақсимот функцияси* дейилади .

Эмпирик тақсимот функцияни $F_n^*(x)$ билан белгилаймиз, агар n_x - x дан кичик варианталар сони , n –танланма ҳажми бўлса, у ҳолда таърифга кўра

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

бўлади. $F_n^*(x)$ функциянинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. $F_n^*(x)$ функциянинг қийматлари [0,1] кесмага тегишли;
2. $F_n^*(x)$ - камаймайдиган функция;
3. Агар a- энг кичик варианта бўлса, у ҳолда $x \le a$ да

$F_n^*(x)$ =0 ; b-энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x.>b$ да $F_n^*(x)$ =1. .
Бош тўпламнинг тақсимот функцияси танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан фарқ қилиб *назарий тақсимот функция* дейилади.

Назарий ва эмпирик тақсимот функциялар орасидаги фарқ шундаки, биринчиси, $X<x$ ҳодисанинг эҳтимолини, иккинчиси эса шу ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайди. Катта сонлар ҳақидаги Бернулли теоремасидан келиб чиқадики *(X<x)* ходиса-нинг нисбий частотаси , яъни $F_n^*(x)$ шу ҳодисанинг эҳтимоли *F(x)* га эҳтимол бўйича яқинлашади.

Шу ернинг ўзиданоқ бош тўплам назарий тақсимот функциясини тақрибий тасвирлашда танланмининг тақсимот функциясидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича эмпирик тақсимот функциясини топинг

x_i (варианталар)	6	8	12	15
n_i (частоталар)	2	3	10	5

Ечиш. Танланманинг ҳажми

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 2+3+10+5 = 20.$$

Энг кичик варианта 6 га тенг, яъни $a=6$, демак $x \le 2$ да $F_{20}^*(x)=0$. $X<8$ қиймат, яъни $x_1=6$ қиймат 2 марта кузатилган демак, $6<x\le 8$ да $F_{20}^*(x)=\frac{2}{10}=0{,}1.$

$X<12$ қиймат , яъни $x_1=6, x_2=8$ қийматлар 2+3=5 марта кузатилган. Демак , $8<x\le 12$ да $F_{20}^*(x)=\frac{5}{20}=0{,}25$. $X<12$ да яъни $x_1=6, x_2=8$ $x_3=12$ қийматлар 2+3+10=15 марта кузатилган демак, $12\le x\le 15$ да $F_{20}^*(x)=\frac{15}{20}=0{,}75.$ $x_1=b=15$ энг катта варианта бўлгани учун $x>15$ да

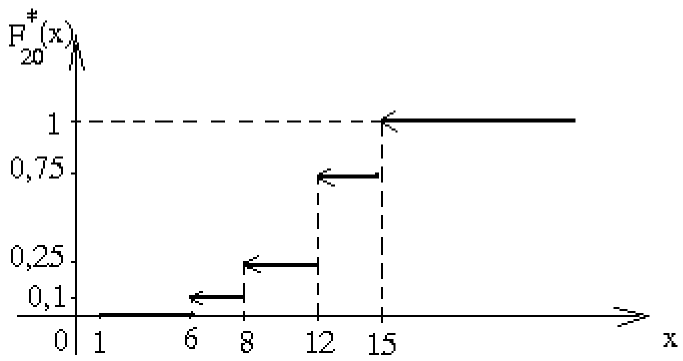
$$F_{20}^*(x)=\frac{20}{20}=1$$

Шундай қилиб, изланаетган эмпирик тақсимот функция

$$F_{20}^{*}(x)=\begin{cases} x \le 6 да 0 \\ 6 < x \le 8 да 0,1 \\ 8 < x \le 12 да 0,25 \\ 12 < x \le 15 да 0,75 \\ x > 15 да 1 \end{cases}$$

формула билан аниқланади.

Бу функциянинг графиги 3-расмда тасвирланган.



3-расм

Ўзлаштириш учун саволлар:

1.Бош тўплам нима?

2.Танланмаги таъриф беринг.

3. Вариацион қаторга таъриф беринг ва мисол келтиринг.

4. Полигон ва гистограмма қандай ясалади?

5. Эмпирик тақсимот функцияга таъриф беринг ва унинг хоссаларини келтиринг

6. Эмпирик тақсимот функциянинг графиги қандай кўринишга эга?

Параметрларни танланма бўйича бахолаш

Режа:

1. Статистик баҳо тушунчаси
2. Бош ўртача қиймат.Танланма ўртача қиймат.Бош ўртача қиймат.
3. Бош дисперсия.Танланма дисперсия. Эмпирик дисперсия.

Таянч иборалар:.баҳонинг математик кутилиши, баҳонинг дисперсияси, ўртача арифметик қиймат, эҳтимол бўйича яқинлашиш.

1. Статистик баҳо тушунчаси .

Математик статистиканинг асосий масаласи берилган танланма маълумотларидан фойдаланиб, X белгили бош тўпламнинг(X тасо-дифий миқдорнинг) номаълум тақсимотини баҳолашдан иборатдир.

Амалда ўрганилаетган тақсимот қонунининг кўриниши тўлалиги-ча номаълум бўлган ҳол жуда кам учрайди. Жуда кўп ҳолларда тақсимот қонуннинг кўриниши олдиндан маълум бўлиб (қандайдир назарий мулоҳазага кўра) у боғлиқ бўлган баъзи бир параметр-ларни топиш талаб қилинади. Масалан , агар тасодифий микдор-нинг тақсимот қонуни нормал қонун эканлиги олдиндан маълум бўлса, у ҳолда масала иккита a ва σ параметрларнинг тақрибий қийматларини топишга келтирилади. Ҳатто баъзи бир масалаларда тақсимот қонуннинг кўриниши ҳам аҳамиятга эга бўлмасдан фақат унинг сонли характеристикаларинигина топиш талаб қилинади.

Фараз қилайлик, X белгили бош тўпламнинг тақсимот функцияси $F(x,\theta)$ бўлиб, θ номаълум параметр бўлсин. $x_1,...,x_n$ шу бош тўпламдан олинган танланма (X тасодифий миқдорнинг кузатиш натижасида ҳосил қилинган қийматлар) бўлсин.

$F(\theta,x)$-тақсимот номаълум θ параметрнинг статистик баҳосини топиш- бу $x_1,...,x_n$ танланма қийматлар орқали шундай функцияни топиш демакки у баҳоланаетган θ номаълум параметрнинг тақрибий қийматини берсин.

Шундай қилиб, тақсимот номаълум параметрнинг *статистик бахоси* деб танланма маълумотларининг ихтиёрий функциясига айтилади

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1,...,x_n)$$

Статистик баҳо баҳоланаетган параметрининг яхши баҳоси хисоб-ланиши учун у маълум хоссаларга эга бўлиши лозим. Унинг хосса-ларини аниқлашда $x_1,...,x_n$ танланма қийматларини X белги билан бир хил тақсимотга эга бўлган $X_1,...,X_n$ тасодифий миқдорлар деб қаралади , берилган $x_1,...,x_n$ танланма уларнинг тажрибада куза-тилган қийматлари бўлади. Демак, $\hat{\theta}_n$ статистик баҳо тасодифий миқдор бўлиб, унинг тақ-симоти ҳам θ номаълум параметрга боғлиқ бўлади.

Баҳонинг сифати қуйидаги хоссалар билан характерланади:

1. *Силжимаганлик.* .Агар $\hat{\theta}_n$ баҳонинг математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг, яъни М$\hat{\theta}_n = \theta$ бўлса, $\hat{\theta}_n$ бахо θ

параметрнинг *силжимаган баҳоси* дейилади. Баҳонинг силжимаганлиги систематик хатоларга йўл қўйилишининг олдини олади.

2. *Асослилик.* Агар $n \to \infty$ да $\hat{\theta}_n$ баҳо баҳоланаётган θ параметрга эҳтимол бўйича яқинлашса, яъни ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун $n \to \infty$ да

$$P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \to 1 \qquad (1)$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\hat{\theta}_n$ бахо θ параметрнинг *асосли баҳоси* дейилади.

Агар

$$\lim_{n \to \infty} D\hat{\theta}_n = 0$$

бўлса, (1) муносабатнинг бажарилиши равшан, бу Чебишев тенг-сизлигидан келиб чиқади. Демак, баҳонинг дисперсияси $n \to \infty$ да нолга интилса, бундай баҳо *асосли баҳо* дейилади.

3. *Эффективлик* . θ параметрнинг баҳоси учун бир нечта силжимаган баҳолар таклиф қилинган бўлиши мумкин. Маълумки, бахонинг аниқлиги ўлчови унинг дисперсияси ҳисобланади.

.Фараз қилайлик, θ параметр учун иккита $\hat{\theta}_1$ ва $\hat{\theta}_2$ баҳолар таклиф қилинган бўлсин.

Агар $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$ бўлса, у вақтда $\hat{\theta}_1$ баҳо $\hat{\theta}_2$ баҳога қараганда эффективроқ бўлади. Умуман айтганда, эффективроқ баҳо мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Демак, бош тўплам характеристикалари учун олинган баҳолар силжимаганлик, асослилик ва эффективлик шартларни қаноатлан-тирса мақсадга мувофиқ бўлади.

2. Бош ўртача қиймат .Танланма ўртача қиймат .
Бош ўртача қийматнинг бахоси.

Айтайлик, дискрет бош тўпламни *X* сон белгисига нисбатан ўрганиш талаб қилинсин. *Бош ўртача қиймат* $\bar{x}_\delta$ деб бош тўплам белгиси қийматларининг ўртача арифметик қийматига айтилади. Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча $x_1,...,x_N$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_\delta = \frac{x_1 + ... + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

X белгининг мумкин бўлган тасодифий миқдорлар деб қараш мумкин. Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

$$MX = x_1\frac{1}{N} + ... + x_N\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{I=1}^{N} x_i = \bar{x}_\delta$$

$$MX = \bar{x}_\delta \qquad \textbf{(2)}$$

формула билан аниқланади.

Агар $x_1,...,x_m$ қийматлар мос равишда $N_1,...,N_m$ частоталарга эга шу билан бирга

$$\sum_{i=1}^{m} N_i = N$$

бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} x_i N_i \qquad \textbf{(3)}$$

X белгиси узлуксиз тақсимотга эга бўлганда бош ўртача қийматни қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$\overline{x_\delta} = MX \qquad \textbf{(4)}$$

Фараз қилайлик, бош тўпламни X белгисига нисбатан ўрганиш мақсадида ундан n ҳажмли $x_1,...,x_n$ танланма олинган бўлсин. *Ўртача танланма қиймат* $\bar{x}_t$ деб танланма тўплам белгисининг арифметик ўртача қийматига айтилади. .Агар танланма белгисининг барча $x_1,...,x_n$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Агар $x_1,...,x_л$ қийматлар мос равишда $n_1,...,n_л$ частоталарга эга шу билан бирга $n_1+...+n_л = n$ бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_t = \frac{n_1 x + ... + n_л x_л}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i x_i \qquad (6)$$

Битта танланмадаги маълумотлар бўйича топилган танланма ўртача қиймат равшанки тайин сон бўлади.Ўша бош тўпламдан олинган n ҳажмли ҳар бир танланмага (5) ёки (6) формула билан аниқланадиган бирор $\bar{x}_t$ сон мос келади, у ҳолда танланма қийматни $\bar{X}_t$ тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Бош ўртача қийматнинг баҳоси сифатида танланма ўртача қиймат қабул қилинади. Бу баҳо силжимаган асосли баҳо булиши, яъни $M\bar{X}_t = \bar{x}_\delta, \ell imP\left\{\left|\bar{X}_t - \bar{x}_б\right| < \varepsilon\right\} = 1$

эканлигини кўрсатамиз. $x_1,...,x_n$ қийматларни бир хил тақсимланган боғлиқмас $X_1,...,X_n$ тасодифий миқдорлар деб қараймиз. Улар бир хил сон характеристикаларига, жумладан, битта математик кутилишга эга , уни a орқали белгилаймиз. Математик кутилиш хоссаларига кўра

$$M\overline{X}_T = M(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}) = a, \quad M\,\overline{X}_t = a \qquad (7)$$

ни ҳосил қиламиз. $X_1,...,X_n$ тасодифий миқдорларнинг ҳар бири бош тўплам белгиси X билан бир хил тақсимотги эга эканлигини эътиборга олсак бош тўплам X сон белгисининг математик кутилиши ҳам a га тенг, яъни

$$MX = a \qquad (8)$$

(4), (7) ва (8) формулалардан

$$M\,\overline{X}_T = \bar{x}_\delta \qquad (9)$$

келиб чиқади.

Бу ўртача танланма қиймат ўртача бош қийматнинг силжимаган баҳоси эканлигини билдиради.Танланма ўртача қиймат бош ўртача қиймат учун асосли баҳо ҳам бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

$X_1,...,X_n$ тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса, Чебишев теоремасига асосан

$$\ell im P(\left|\overline{X}_T - a\right| < \varepsilon) = 1 \text{ ёки } \ell im P\left(\left|\overline{X}_T - \bar{x}_\delta\right| < \varepsilon\right)$$

бўлади, чунки (2) ва (8) тенгликларга кўра $a = \bar{x}_\delta$. Демак, $\bar{x}_t$ қиймат ҳажми n-чексиз ортиши билан бош ўртача қиймат $\bar{x}_\delta$ га эҳтимол бўйича яқинлашади. Бу эса ўртача танланма қиймат бош қиймат учун асосли баҳо эканлигини билдиради.

Юқорида айтилганлардан яна шу нарса келиб чиқадики, агар битта бош тўпламнинг ўзидан анча катта ҳажмли бир нечта танлан-малар бўйича ўртача танланма қийматлар топиладиган бўлса, улар ўзаро тақрибан тенг бўлади. Бу тасдиқ танланма ўртача кийматлар-нинг турғунлик хоссасини ифодалайди.

3.Бош дисперсия .Танланма дисперсия.Эмпирик дисперсия

.

Бош тўплам X сон белгисининг қийматлари ўзининг ўртача қиймати атрофида сочилиш даражасини тасвирлаш мақсадида бош дисперсия масаласи киритилади.

Бош дисперсия D_{δ} деб бош тўплам белгиси қийматларини уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_{\delta}$ дан четланишлари квадратларининг ўртача арифметик қийматига айтилади. Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$D_{\delta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_{\delta})^2 \qquad (10)$$

Агар белгининг $x_1,..,x_N$ қийматлари мос равишда $N_1,..,N_л$ частоталарга эга бўлса, у ҳолда

$$D_{\delta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}N_i(x_i - \bar{x}_{\delta})^2 \qquad (11)$$

Ўртача квадратик бош четланиш (стандарт) деб бош дисперсиядан олинган квадратик илдизга айтилади

$$\sigma_{\delta} = \sqrt{D_{\delta}} \qquad (12)$$

Танланма белгисининг қийматлари унинг $\bar{x}_T$ ўртача қиймати атрофида сочилишини тавсифлаш мақсадида танланма дисперсия тушунчаси киритилади.

Танланма дисперсия D_T деб танланманинг кузатиладиган қийматлари уларнинг $\bar{x}_T$ ўртача арифметик қийматидан четланиши квадратларининг ўртача арифметик қийматига айтилади . Агар n ҳажмли танланмада белгининг барча $x_1,..,x_n$ қийматлари турлича бўлса , у ҳолда

$$D_T = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_T)^2 \qquad (13)$$

Агар $x_1,..,x_л$ қийматлари мос равишда $n_1,...,n_л$ частоталарга эга, шу билан бирга $n_1 + ... + n_л = n$ бўлса, у ҳолда

$$D_T = = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x}_T)^2 \qquad (14)$$

Танланманинг ўртача квадратик четланиши

$$. \quad \sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad (15)$$

формула билан аниқланади.

Танланма дисперсиясини ҳисоблашда ушбу формуладан фойдаланиш мумкин:

$$D_T = \bar{x}_T{}^2 - (\bar{x}_T)^2 \ , \qquad (16)$$

бу ерда

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i x_i, \bar{x}_T{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i x_i{}^2 \qquad (17)$$

(16) формулани исботлаймиз. (13) формулада алмаштириш-
лар бажариб,

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i(x_i - \bar{x}_T)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i(x_i^2 - 2x_i\bar{x}_T + (\bar{x}_T)^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}_T^2}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i x_i +$$

$$+\frac{(\bar{x}_T^2)}{n}\sum_{i=1}^{л} n_i = \bar{x}_T^2 - 2\bar{x}_T\bar{x}_T + (\bar{x}_T)^2 = \bar{x}_T^2 - (\bar{x}_T)^2$$

ни хосил киламиз. (11) формуладан худди шундай

$$D_\delta = \bar{x}_\delta^2 - (\bar{x}_T)^2$$

ни топамиз.

$$MD_T = \frac{n-1}{n} D_\delta$$

эканлигини исботлаш мумкин(буни ўқувчига ҳавола этамиз).

$MD_T \neq D_\delta$ бўлганидан, танланма дисперсия D_T бош тўплам дисперсияси D_δ нинг силжиган баҳоси бўлади. Бош дисперсия

$D_Б$ нинг силжимаган баҳосини ҳосил қилиш учун *эмпирик*(ёки тузатилган) дисперсия деб аталадиган тушунча киритилади, у одатда

$\bar{s}^2$ оркали белгиланади:

Эмпирик ёки тузатилган $\bar{s}^2$ дисперсия

$$\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{л} n_i (x_i - \bar{x}_T)^2 \qquad (18)$$

формула билан аниқланади.

(18) тузатилган дисперсия бош тўплам дисперсияси учун силжимаган баҳодир. Хақиқатдан ҳам

$$M\bar{s}^2 = M\left(\frac{n}{n-1} D_T\right) = \frac{n}{n-1} MD_T = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_\delta = D_Б$$

Бош тўплам ўртача квадратик четланишнинг баҳоси учун “тузатилган” ўртача квадратик четланиш, ёки эмпирик стандарт олинади:

$$\bar{s} = \sqrt{\bar{s}^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{л} n_i (x_i - \bar{x}_T)^2} \qquad (19)$$

барча $x_1,..,x_n$ қийматлар турлича бўлган ҳолда барча $n_i = 1, k = n$ бўлганда (18) ва (19) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_T)^2$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_T)^2}$$

Ўзлаштириш учун саволлар:

1.Статистик баҳога таъриф беринг.

2.Статистик баҳоларга қўйиладиган умумий талабларни айтинг.

3. Бош ўртача қиймат нима ва танланма ўртача қиймат нима?

4.Бош ва танланма дисперсия нима?

5. Эмпирик дисперсия нима?