O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIK FIZIKA KAFEDRASI

ALIMOV SHAVKAT ARIFDJANOVICH

5130200 - AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA

ta'lim yo'nalishi

talabalariga mo'ljallangan ma'ruzalar

matni

Toshkent - 2011

Annotasiya

Kitob matematik tahlil bo'yicha o'quv qo'llanma hisoblanadi, hamda haqiqiy bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobini klassik kursiga kiruvchi bo'limlarni o'z ichiga oladi. Dastlab haqiqiy sonlar nazariyasi, limitlar nazariyasi bayon etiladi va uning asosida uzluksiz funksiyalar, differensiallash, aniqmas va aniq integral, hamda tenglamaning taqribiy yechish va aniq integralning hisoblash usullari o'rganiladi.

Kitobga sonli qatorlar nazariyasi, hamda funksional ketma-ketlik va qatorlar nazariyasi qo'shilgan. Barcha matematik hulosalar qisqa va sodda isbotlar bilan bayon qilingan va ko'p sonli misollar bilan oydinlashtirilgan. Har bobni oxrida mavzularni chuqur o'zlashtirish uchun masalalar majmuasi keltirilgan.

O'quv qo'llanmadan foydalanishni engillashtirish maqsadida kitob oxrida qo'llanmada foydalanilgan to'plamlar va matematik logikaning umumiy nazariyasidan qisqacha ma'lumotlar keltiriladi.

Kitob Mirzo Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy universiteti va M. B. Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkent filiali talabalariga mualliflar tomonidan o'qilgan ma'ruzalar asosida yozilgan.

O'quv qo'llanma "matematika", "amaliy matematika va informatika", "mexanika", "informatika va axborot texnologiyalari"yo'nalishlari va oliy matematika chuqur o'rganiladigan oliy o'quv yurtlarining talabalari uchun mo'ljallangan.

Аннотация

Книга является учебным пособием по математическому анализу и включает в себя разделы, входящие в классический курс дифференциального и интегрального исчисления функций одной действительной переменной. Вначале излагается теория действительных чисел, теория пределов и на этой основе изучаются непрерывные функции, дифференцирование, неопределенный и определенный интеграл, а также методы приближенного решения уравнений и вычисления определенных интегралов. В книгу включена теория числовых рядов, а также теория функциональных последовательностей и рядов. Все математические утверждения снабжены краткими и простыми доказательствами и проиллюстрированы большим количеством примеров. В конце каждой главы приводится набор задач, предназначенных для лучшего усвоения материала. С целью облегчения пользования учебным пособием в конце книги приводятся краткие сведения из общей теории множеств и математической логики, используемые в пособии. Книга написана на основе лекций, читавшихся авторами студентам Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Ташкентского филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Предназначено для студентов университетов по направлениям "математика", "прикладная математика и информатика", "информатика и информационные технологии"и "механика", а также для студентов технических вузов с углубленным изучением высшей математики.

Annotation

The book is manual of calculus of the functions of one real variable. The book covers theory of real numbers, theory of limits, continuous functions, differentiation, indefinite and definite integral, approximate solutions of the equations and numerical evaluation of definite integrals. In the last two chapters numerical series and functional sequences and series are investigated. Appendix contains a brief explanation of notions of general set theory and mathematical logic, which are used in book. The proofs are concise and simple. Exercises in the end of each chapter mainly serve to deepen understanding of the material. The book is accessible to undergraduate students of mathematics, applied mathematics and informatics, informatics and information technologies, mechanics and to advanced students of engineering.

Matematik tahlil shakllanishi davrida unga differensial tenglamalarni tuzish va yechish usullari deb qaralgan edi.

Hozirgi kunda matematik tahlil deganda *differensial va integral hisobi* tushunilib, differensial tenglamalar nazariyasi deganda esa, asosan matematik tahlilning usul va natijalariga asoslangan, matematikaning alohida bo'limi tushuniladi.

Zamonaviy matematik tahlilning asosida *limitlar nazariyasi* yotadi deb hech ikkilanmasdan aytish mumkin. Keng ma'noda olib qaraganda, ayinan mana shu holat matematik tahlilni matematikaning boshqa bo'limlaridan ajratib turadi.

Taqdim qilinayotgan matematik tahlil kursida ko'pincha qat'iy bayondan avval intuitsiyaga asoslangan evristik tushuntirishlar keltiriladi. O'z-o'zidan ma'lumki, bu tushuntirishlar isbotlarning o'rnini bosmaydi albatta, balki o'quvchini isbotlarni, yangi kiritiladigan tushunchalarni yoki murakkab nazariy mulohazalarni qabul qilishga tayyorlaydi.

Ushbu kursning asosiy maqsadi - *bir o'zgaruvchili funksiyalar* uchun differensial va integral hisobni bayon etish. Bir o'zgaruvchili funksiya deb bu kursda haqiqiy sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirish tushuniladi. Shu sababli kurs haqiqiy sonlar to'plamini qurish bilan boshlanadi.

I Bob. Haqiqiy sonlar

§ 1.1. Butun sonlar

1. Biz butun sonlar xossalarini o'quvchiga ma'lum deb hisoblaymiz. Odatda butun sonlar to'plami **Z** simvoli orqali belgilanadi.

Har qanday ikki m va n butun sonlar uchun qo'shish $m+n$ va ko'paytirish mn amallari aniqlangan. Bu ikki amal *kommutativlik*, ya'ni

$$m+n=n+m, \qquad mn=nm \tag{1.1.1}$$

va *assotsiativlik*, ya'ni

$$k+(m+n)=(k+m)+n, \qquad k(mn)=(km)n, \tag{1.1.2}$$

xossalariga ega.

Bundan tashqari, bu ikki amal *distributivlik*, ya'ni

$$k(m+n)=km+kn \tag{1.1.3}$$

qonuni bilan bog'langan.

Z to'plamida *nol* 0 va *bir* 1 sonlari alohida ajralib turadi. Ya'ni, har qanday $m \in \mathbf{Z}$ uchun

$$0+m=m, \qquad 1m=m \tag{1.1.4}$$

tengliklar o'rinlidir.

Butun sonlar to'plami musbat butun sonlardan, manfiy butun sonlardan va noldan iborat. Har qanday butun a soni uchun $-a$ son qarama-qarshi son deyiladi va u quyidagi

$$a+(-a)=0$$

tenglikni qanoatlantiradi. Ko'paytirish amali qo'shish amalidan shu bilan farq qiladiki, butun sonlar to'plamida, qo'shishdan o'laroq, ko'paytirish amali teskarilanuvchi emas. Boshqacha aytganda, biz har qanday butun a soni uchun unga teskari a^{-1} element, yani a bilan ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgan element mavjud deya olmaymiz.

Musbat butun sonlar *natural* sonlar ham deb ataladi. Natural sonlar to'plami *natural qator* ham deyiladi va odatda **N** simvoli orqali belgilanadi.

Butun m sonining natural n -darajasi induksiya orqali aniqlanadi:

$$m^1 = m, \qquad m^n = mm^{n-1}. \tag{1.1.5}$$

Masalan, agar 2=1+1 deb aniqlasak,

$$m^2 = m \cdot m$$

bo'ladi.

Istalgan k butun son va ixtiyoriy natural m va n lar uchun

$$k^{m+n} = k^m \cdot k^n$$

tenglikning bajarilishi ravshan.

Bu tenglikning barcha manfiy bo'lmagan m va n larda o'rinli bo'lishi uchun $k \neq 0$ bo'lganda

$$k^0 = 1$$

deb hisoblanadi.

2. Biz ko'pincha sonlarning geometrik tasviridan foydalanamiz. Shu maqsadda biror to'g'ri chiziq olib, unda ixtiyoriy ravishda O nuqtani belgilaylik. Bu O nuqta to'g'ri chiziqni ikkita nurga ajratadi. Nurlardan birini musbat va ikkinchisini manfiy deb ataymiz. Odatda to'g'ri chiziq gorizontal ko'rinishda olinadi va o'ng tomonga ketgan nur musbat deb qaraladi. Albatta, matematik nuqtai nazardan bu tanlov majburiy emas. Musbat nurda O nuqtadan farqli ixtiyoriy E_1 nuqtani belgilaymiz, so'ngra, OE_1 kesma davomida E_2 nuqtani shunday tanlaymizki, bunda OE_1 va E_1E_2 kesmalar teng bo'lsin. Bu jarayonni davom ettirsak, shunday $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ nuqtalarni olamizki, har bir E_n nuqta OE_{n-1} kesma davomida yotadi va quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$E_nE_{n+1} = OE_1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Xuddi shu usulda manfiy nurda $OE_{-1} = OE_1$ kesmani olamiz va $E_{-2}, E_{-3}, ..., E_{-n}, ...$ nuqtalarni shunday belgilaymizki, bunda E_{-n} nuqta OE_{-1} kesma davomida yotsin va quyidagi tengliklar bajarilsin:

$$E_{-n}E_{-n-1} = OE_1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Bundan buyon biz istalgan n uchun E_n nuqtani butun n soniga , O nuqtani esa 0 ga, ya'ni nol soniga aynan teng deb hisoblaymiz. Bu tasvirlashda musbat sonlar 0 nuqtadan o'ngda va manfiy sonlar esa, bu nuqtadan chapda joylashadi. Xususan, barcha natural sonlar 0 nuqtadan o'ng tomonda yotadi.

3. Har qanday musbat butun n soni noldan katta deb hisoblanadi va $n > 0$ deb yoziladi. Har qanday manfiy butun m soni esa noldan kichik deb hisoblanadi: $m < 0$.

Musbat sonlar va qo'shish amalidan foydalanib butun sonlarni taqqoslash mumkin. Chunonchi, agar biror k natural (ya'ni butun musbat) son uchun $n = m + k$ bo'lsa, biz $m < n$ deymiz. Bu $m < n$ tengsizlik $n > m$ ko'rinishda ham yoziladi.

Ushbu tengsizlik munosabati tranzitivlik xossasiga egadir, ya'ni agar $m < n$ va $n < k$ bo'lsa, $m < k$ bo'ladi.

Bundan tashqari, quyidagi ikki muhim xossalar ham o'rinli:

1) agar $m < n$ bo'lsa, ixtiyoriy $k \in \mathbf{Z}$ uchun

$$m + k < n + k$$

bo'ladi;

2) agar $m < n$ va $k > 0$ bo'lsa,

$$mk < nk$$

bo'ladi.

Qat'iy bo'lmagan $m \leq n$ tengsizlik yoki $m < n$, yoki $m = n$ ekanini anglatadi.

Kiritilgan taqqoslash quyidagi sodda geometrik ma'noga ega: agar $m < n$ tengsizlik bajarilsa, m nuqta n nuqtadan chapda joylashgan bo'ladi.

4. Butun sonlar to'plami $\mathbf{Z}$ ning biror E qismiy to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday butun $m \in E$ son topilsaki, ixtiyoriy $n \in E$ uchun

$$m \leq n$$

tengsizlik bajarilsa, m songa E to'plamning *minimal* elementi deyiladi.

Xuddi shu singari *maksimal* element tushunchasi ham kiritiladi.

Ravshanki, $\mathbf{Z}$ to'plamning har qanday qismiy to'plami maksimal yoki minimal elementlarga ega bo'lavermaydi. Masalan, musbat butun sonlar to'plami maksimal elementga ega emas, manfiy butun sonlar to'plami esa minimal elementga ega emas.

$\mathbf{N}$ natural sonlar to'plami butun sonlar to'plamining qismiy to'plami deb qaralganda, bu to'plamning eng muhim xossalaridan biri - uning to'la tartiblanganligidir. Bu xossa shundan iboratki, $\mathbf{N}$ to'plamning ixtiyoriy qismiy to'plami eng kichik elementga egadir. O'ta muhim bo'lgan *matematik induksiya usuli (prinsipi)* aynan ana shu xossaning natijasidir. Biz bu usulning tadbiqini quyidagi sodda misolda namoyish qilamiz.

1.1.1 - misol. *Ixtiyoriy $n \in \boldsymbol{N}$ uchun*

$$2^n > n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{1.1.6}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. (i) Shubhasiz, agar $n = 1$ bo'lsa, (1.1.6) tengsizlik o'rinli:

$$2^1 > 1.$$

(ii) Endi (1.1.6) tengsizlikni $n = k$ da o'rinli deb faraz qilib, uning $n = k + 1$ da ham o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Shunday qilib,

$$2^k > k$$

bo'lsin. U holda, bu tengsizlikni qo'llab,

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \ > k \cdot 2 = k + k \geq k + 1$$

ni hosil qilamiz, ya'ni (1.1.6) tengsizlik $n = k + 1$ da ham o'rinli bo'lar ekan.

(iii) Matematik induksiya prinsipi (1.1.6) tengsizlikni barcha natural n sonlari uchun o'rinli deb ta'kidlashimizga imkon beradi. Haqiqatdan, agar bunday bo'lmasa, shunday n sonlar topiladiki, ular uchun (1.1.6) tengsizlik bajarilmaydi. Biz bunday sonlar uchun, (i) ni hisobga olgan ravishda, $n \geq 2$ deyishimiz mumkin. Natural sonlar to'plami to'la tartiblangan bo'lganligi sababli, bunday n sonlar ichida eng kichigi mavjud; biz uni $(k + 1)$ deb belgilaymiz. Bundan chiqdi, (1.1.6) tengsizlik $n = k$ da o'rinli bo'lib, $n = k + 1$ da o'rinli emas ekan. Ammo buning bo'lishi mumkin emas, chunki bu tasdiq (ii) ga ziddir. Demak, (1.1.6) tengsizlik barcha n larda bajarilar ekan.

Q.E.D.

5. Odatda butun sonlarni quyidagi:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \tag{1.1.7}$$

raqamlardan foydalanib, o'nli sanoq sistemasida yozishadi, bunda

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, 5 = 4 + 1, 6 = 5 + 1, 7 = 6 + 1, 8 = 7 + 1, 9 = 8 + 1.$$

Bu holda sanoq sistemasining asosi qilib

$$10 = 9 + 1$$

soni olinadi.

Har qanday musbat butun k sonni

$$k = a_0 10^0 + a_1 10^1 + ... + a_n 10^n \tag{1.1.8}$$

ko'rinishda yagona usulda yozish mumkin, bunda har bir a_j koeffitsient (1.1.7) qiymatlardan birini qabul qiladi.

Odatda (1.1.8) son simvolik ravishda

$$k = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, \tag{1.1.9}$$

deb yoziladi, bunda a_0 - birlar soni, a_1 - o'nlar soni, a_2 - yuzlar soni va hakozo, deb ataladi. Ba'zan, k sonnig musbat ekanligini ta'kidlash maqsadida, (1.1.7) oldiga « $+$ » - plyus belgisi qo'yiladi:

$$k = +\, a_n a_{n-1} ... a_1 a_0. \tag{1.1.10}$$

Manfiy m soni shu singari, lekin « $-$ » - minus ishora bilan yoziladi:

$$m = -\, b_n b_{n-1} ... b_1 b_0. \tag{1.1.11}$$

6. O'nli sanoq sistemasi o'rniga ixtiyoriy natural asosga ega bo'lgan sanoq sistemasini olish mumkin. Zamonaviy elektron hisoblash mashinalarida (compyuterlarda) ikkilik sanoq sistemasi qo'llaniladi. Bunga sabab kompyuterlar tuzilishining texnologik xususiyatlaridir.

Ikkilik sanoq sistemasida faqat ikki raqam: 0 va 1 ishlatiladi. Ushbu sistemaning asosi 1+1 soni bo'lib, quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$10 = 1 + 1. \tag{1.1.12}$$

Demak,

$$10^2 = (1 + 1)(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 \tag{1.1.13}$$

bo'ladi.

Bu (1.1.13) formula ikkilik sanoq sistemasida taniqli "ikki karra ikki to'rt"tengligini anglatadi.

Ikkilik sanoq sistemasida ham har qanday natural k sonni (1.1.8) yoki (1.1.9) ko'rinishda yozish mumkin, bunda a_j ikkita 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qiladi, 10 esa (1.1.12) tenglik orqali aniqlanadi. Misol tariqasida birinchi to'qqizta natural sonlarni yozilishini keltiramiz; bunda biz chap tomonda sonni o'nli sanoq sistemasida va o'ng tomonda esa ikkilik sanoq sistemasida yozdik:

1=1,
2=10,
3=11,
4=100,
5=101,
6=110,
7=111,
8=1000,
9=1001.

Manfiy butun sonlar (1.1.11) ko'rinishda tasvirlanadi, bunda b_j ikkita 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qiladi.

Shunday qilib, « + » yoki « − » ishora bilan olingan, nol va birlarning ixtiyoriy chekli ketma-ketligi biror butun sonni ifodalaydi va aksincha, ixtiyoriy butun son, « + » yoki « − » ishora bilan olingan, nol va birlarning chekli ketma-ketligi orqali ifodalanadi.

§ 1.2. Ratsional sonlar

Yuqorida qayd qilinganidek, butun sonlar to'plamida ko'paytirish amali, qo'shish amalidan o'laroq, teskarilanuvchi emas. Aynan mana shu hol butun sonlar to'plamini ratsional sonlar to'plamigacha kengaytirish uchun bo'lgan sabablardan biridir.

1. Butun sonning natural songa nisbati *ratsional son* deyiladi. Ya'ni, agar p butun son bo'lib, q natural son bo'lsa, ratsional son deb $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi ifodaga aytiladi. Odatda $\frac{p}{q}$ ratsional sonni kasr ham deb atashadi, bunda p surat va q maxraj deyiladi. Albatta, agar $pn = mq$ bo'lsa, $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ kasrlar o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun, qat'iy qilib aytganda, har qanday ratsional son - bu ekvivalent kasrlar sinfidir, ya'ni har qanday ratsional son yuqoridagi ma'noda o'zaro teng bo'lgan barcha kasrlar sinfidan iboratdir. Lekin, shunga qaramasdan, biz musbat ratsional r son uchun

$$r = \frac{p}{q}$$

deb yozamiz va o'ng tomonda mos ekvivalent kasrlar sinfining biror vakili turibdi deb hisoblaymiz. Demak, bu kelishuvimizga ko'ra ratsional son shunday kasrki, uning surati musbat yo manfiy butun sondan yoki noldan iborat bo'lib, maxraji esa doim musbat butun sondir.

Agar surat musbat bo'lsa, ratsional sonni *musbat* deymiz va aksincha, surat manfiy bo'lsa, ratsional sonni *manfiy* deymiz.

Shunday qilib, ratsional sonlar to'plami musbat ratsional sonlar, manfiy ratsional sonlar va noldan iborat ekan. Odatda ratsional sonlar to'plami $\mathbf{Q}$ simvoli orqali belgilanadi.

Har qanday ratsional sonni kasr oldiga « + » yoki « − » ishora qo'yib, surati manfiy bo'lmagan butun son va maxraji esa natural bo'lgan arifmetik kasr orqali ifoda qilish mumkin. Butun sonni ham maxraji birga teng bo'lgan kasr ko'rinishdagi ratsional son deb qarasa bo'ladi.

2. Ratsional sonlar to'plami $\mathbf{Q}$ da tabiiy ravishda qo'shish va ko'paytirish amallari kiritiladi. Ikki ratsional $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ sonlarning *yig'indisi* deb quyidagi ratsional songa aytiladi:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn}. \tag{1.2.1}$$

Ratsional $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ sonlarning *ko'paytmasi* deb quyidagi ratsional songa aytiladi:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}. \tag{1.2.2}$$

Ratsional sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari *kommutativ*:

$$r + s = s + r, \quad r \cdot s = s \cdot r$$

va *assotsiativ*:

$$r + (s + t) = (r + s) + t, \quad r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$$

bo'lib, ular birgalikda esa *distributivlik* xossasiga:

$$r(s + t) = rs + rt$$

ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Ratsional sonlar to'plamida *nol* $0 = \frac{0}{1}$ va *bir* $1 = \frac{1}{1}$ alohida o'rin tutadi. Chunonchi, ixtiyoriy ratsional r soni uchun

$$r + 0 = r, \quad r \cdot 1 = r$$

tengliklar bajariladi.

Kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallari uchun ularga teskari bo'lgan ayirish va bo'lish amallarini aniqlash mumkin.

Ikki ratsional r va s sonlar *ayirmasi* deb

$$r = s + t$$

tenglik o'rinli bo'lgan ratsional t songa ayitiladi va $t = r - s$ deb yoziladi.

Agar $s \neq 0$ bo'lsa, ikki ratsional r va s sonlarning *bo'linmasi (nisbati)* deb

$$r = s \cdot t$$

tenglik o'rinli bo'lgan t ratsional songa aytiladi va $t = \frac{r}{s}$ deb yoziladi. Shuni qayd etamizki, oxirgi tenglikdagi kasr, umuman aytganda, qat'iy ma'noda arifmetik kasr emas, chunki uning surati va maxraji butun sonlar bo'lmay qo'lishi ham mimkin.

Har qanday ratsional r soni uchun unga qarama-qarshi bo'lgan shunday $(-r)$ son mavjudki, u

$$r + (-r) = 0$$

tenglikni qanoatlantiradi. Xuddi shu singari, har qanday ratsional $r \neq 0$ soni uchun unga teskari bo'lgan shunday r^{-1} son mavjudki, u

$$r \cdot r^{-1} = 1$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Shuni aytish kerakki, nol teskari elementga ega emas, ya'ni nolga bo'lish amali aniqlanmagan.

3. Har qanday ikki ratsional sonni taqqoslash mumkin. Boshqacha aytganda, $\mathbf{Q}$ to'plamda tengsizlik munosabtini kiritish mumkin. Buning uchun biz $\mathbf{Q}$ to'plamda manfiy va musbat elementlar mavjudligidan foydalanamiz, zero aynan shular orqali ratsional sonlar tartiblanadi.

Avval nol bilan taqqoslashni kiritaylik. Agar ratsional r son musbat bo'lsa, uni noldan katta deymiz $(r > 0)$, ratsional r son manfiy bo'lganda esa, uni noldan kichik deymiz $(r < 0)$.

Endi yuqoridagi aksiomalardan foydalanib, umumiy holda tengsizlik munosabatini kiritishimiz mumkin.

Ta'rif. *Agar ikki ratsional son uchun $s - r > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, r ratsional son s ratsional sondan kichik deyiladi:*

$$r < s \quad \Leftrightarrow \quad s - r > 0.$$

Bu $r < s$ tengsizlik $s > r$ ko'rinishda ham yoziladi.

Kiritilgan tengsizlik munosabati *tranzitivlik*, ya'ni: «agar $r < s$ va $s < t$ bo'lsa, $r < t$ bo'ladi», xossasiga ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Bundan tashqari, quyidagi ikki muhim xossalar ham o'rinlidir:

1) agar $r < s$ bo'lsa, ixtiyoriy ratsional t uchun $r + t < s + t$ tengsizlik bajariladi;

2) agar $r < s$ va $t > 0$ bo'lsa, $rt < st$ tengsizlik bajariladi.

Bunday aniqlangan taqqoslash qoidasiga muvofiq istalgan ikki r va s ratsional sonlar uchun quyidagi uch:

$$r < s, \quad r = s, \quad r > s$$

munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli bo'lishini qayd etamiz.

Shuni hisobga olgan holda, "ratsional sonlar to'plami *chiziqli tartiblangan*"deyishadi.

4. Ratsional sonlarning ushbu paragrafda sanab o'tilgan xossalari asosiy hisoblanib, ular yordamida bir qator yangi xossalarni keltirib chiqarish mumkin. Qizig'i shundaki, bunda ratsional sonlarning qanday aniqlanganligi umuman ahamiyatga ega emas, muhimi ular uchun yuqoridagi xossalarning o'rinli ekanligidir. Boshqacha aytganda, biz bunday xossalarga ega bo'lgan ixtiyoriy tabiatdagi ob'yektlarni olib, faqat keltirilgan xossalarga asoslangan holda sermazmun tasdiqlarni keltirib chiqarishimiz mumkin. Albatta, bunda olingan yangi tasdiqlar ratsional sonlar uchun ham o'rinli bo'ladi.

§ 1.3. Cheksiz o'nli kasrlar

1. Afsuski, ko'pgina masalalarni yechish uchun ratsional sonlarning o'zi yetarli emas. Masalan, yuzasi 50 kv.m. ga teng bo'lgan kvadratning tomonini topaylik. Ravshanki, bunday kvadratning tomoni $5\sqrt{2}$ m ga teng bo'lishi kerak edi. Ammo bu son ratsional emas, chunki $\sqrt{2}$ ning ratsional emasligini oson ko'rsatish mumkin. Agar biz ratsional sonlar maydoni bilan cheklansak, bu ifoda nimani anglatishini umuman tushuntira olmaymiz. Bu kamchilikni qisqa qilib quidagicha aytish mumkin: ratsional sonlar to'plami to'la emas.

Shuning uchun ratsional sonlar to'plamini biror usul yordamida shunday to'ldirish zarurki, bunda, birinchidan, yangi elementlar xuddi ratsional sonlar xossalariga ega bo'lsin va ikkinchidan, ular ratsional sonlar bilan birgalikda to'la to'plamni tashkil qilsin. Ratsional sonlar to'plamini to'ldirishning eng oson yo'li cheksiz o'nli kasrlardan foydalanishdir.

Har qanday ratsional sonni davriy cheksiz o'nli kasr ko'rinishda yozish mumkin. Bunday kasrni olish uchun, masalan, burchak usuli bilan bo'lish algoritmidan foydalanish kifoya.

1.3.1 - misol.

$$\frac{1}{3} = 0,3333...$$

Endi, aytaylik, $r = \dfrac{p}{q}$ ixtiyoriy musbat ratsional son bo'lsin. U holda burchak usulida bo'lish vaqtida, qoldiq har bir qadamda q dan kichik bo'lishi kerak. Natijada, biror qadamdan keyin qoldiqlar qaytarilib kela boshlaydi. Bundan chiqdi, ratsional sonning cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ham raqamlarning biror guruhi qaytarilib kela boshlaydi.

Shuni qayd etish kerakki, ratsional sonni bunday usulda cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida yozishda 9 raqami bu cheksiz o'nli kasrning davri bo'la olmaydi. Masalan, burchak usulida bo'lishda 0,499999... cheksiz o'nli kasr hosil bo'lmay, uning o'rniga 0 raqami davri bo'lgan 0,500000... cheksiz o'nli kasr hosil bo'ladi.

Bu tasdiqqa teskari tasdiq ham o'rinli. Chunonchi, 9 raqami davri bo'lmagan har qanday cheksiz davriy o'nli kasrga biror ratsional sonni mos qo'yish mumkin. Buning uchun navbatdagi misolda qo'llanilgan algoritmdan foydalansa bo'ladi. Aytaylik,

$$a \;=\; 1,518181818...$$

bo'lsin.

U holda

$$10a \;=\; 15,18181818...$$

va

$$1000a \;=\; 1518,18181818...$$

deb, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$990a = 1000a - 10a \;=\; 1503.$$

Ushbu algoritm qaralayotgan cheksiz davriy o'nli kasrga $r = \dfrac{1503}{990}$ ratsional sonni mos qo'yadi. Ratsional sonlar bilan davri 9 raqamiga teng bo'lmagan cheksiz davriy o'nli kasrlar orasida o'rnatilgan bunday moslikning teskarisi ham o'rinli ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Agarda barcha cheksiz davriy o'nli kasrlarni olsak, u holda yuqoridagi algoritm ularning har biriga biror ratsional sonni mos qo'yadi, lekin bunda ikki o'nli kasrga bitta ratsional son mos kelishi mumkin, masalan,

$$\frac{1}{2} = 0,50000... = 0,499999...$$

Bunday aniqmaslik faqat 0 yoki 9 sonlari davriy qatnashgandagina sodir bo'ladi. Bu aniqmaslikni yo'qotish maqsadida, bundan buyon shunday kasrlarni teng deb hisoblaymiz.

Ratsional sonlar to'plamiga davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlarni qo'shish yordamida yuqorida qayd etilgan to'ldirishga erishiladi.

Ta'rif. Ushbu

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ..., \tag{1.3.1}$$

ko'rinishdagi ifodaga *musbat cheksiz o'nli kasr* deyiladi, bunda a_0 - (butun qism deb ataymiz) manfiy bo'lmagan butun son bo'lib, har bir $j \geq 1$ larda a_j (o'nli belgi deb ataymiz) sonlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlardan birini qabul qiladi. Bundan tashqari, (1.3.1) da $a_k (k \geq 0)$ lardan kamida bittasi noldan farqlidir.

Ta'rif. Agar

$$y = -\, b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.3.2}$$

tenglikda minus « − » ishoraning o'ngida musbat cheksiz o'nli kasr turgan bo'lsa, bu (1.3.2) ifodaga *manfiy cheksiz o'nli kasr* deyiladi. Bu songa mos musbat cheksiz o'nli kasr

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.3.3}$$

manfiy (1.3.2) kasrning *absolyut qiymati* deb ataladi. Bu holda

$$|y| = b$$

deb yoziladi.

Quyidagi ifodaga

$$0 = 0, 00...0... \tag{1.3.4}$$

nollik cheksiz o'nli kasr, yoki oddiygina *nol* deyiladi.

Musbat cheksiz o'nli kasrning absolyut qiymati deb shu kasrning o'ziga aytiladi, nolning absolyut qiymati esa nolga teng deb hisoblanadi.

2. Ikki cheksiz o'nli kasr uchun tenglik tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. *Agar*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \tag{1.3.5}$$

va

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.3.6}$$

cheksiz o'nli kasrlar uchun

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...,\ a_n = b_n, ... \tag{1.3.7}$$

tengliklar bajarilsa, bu kasrlarni ***teng*** *deymiz.*

Bundan tashqari, 0 yoki 9 davriy qatnashgan kasrlar uchun quyidagi qo'shimcha tenglik munosabatini kiritamiz.

Ta'rif. *Agar 9 davriy qatnashgan quyidagi*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k 999...$$

davriy kasrda $a_k \neq 9$ *bo'lib, 0 davriy qatnashgan*

$$a' = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a'_k 000...$$

davriy kasrda $a'_k = a_k + 1$ *bo'lsa, bu davriy kasrlarni ham* ***teng*** *deb hisoblaymiz.*

3. Ikki cheksiz o'nli kasr uchun taqqoslash qoidasini kiritamiz.

Ta'rif. *Ikki musbat, o'zaro teng bo'lmagan,*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

va

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$$

cheksiz o'nli kasr berilgan bo'lsin. Agar

$$a_0 > b_0$$

bo'lsa, yoki shunday n nomer topilsaki,

$$a_0 = b_0,$$

$$a_1 = b_1,$$

$$...$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}$$

bo'lib,

$$a_n > b_n$$

*bo'lsa, a ni b dan **katta** deymiz va $a > b$ deb yozamiz.*

Bu ta'rifning 0 yoki 9 davrga ega bo'lgan davriy kasrlar uchun ham muvofiqlashganligini navbatdagi tasdiq ko'rsatadi.

1.3.1* - tasdiq. *Mos ravishda 9 va 0 davriy qatnashgan ikki o'zaro teng cheksiz o'nli davriy kasrlar berilgan bo'lsin, ya'ni*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k 9999...,$$

bunda $a_k \neq 9$ va

$$a' = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a'_k 0000...,$$

bunda $a'_k = a_k + 1$. U holda quyidagi

$$a < c < a'$$

qo'shaloq tengsizlikni qanoatlantiruvchi c son mavjud emas.

Isbot. Faraz qilamiz, shunday c son mavjud bo'lib, u

$$c = c_0, c_1 c_2 ...$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Ta'rifga ko'ra $a < c$ tengsizlik shunday n nomer mavjudligini anglatadiki, u uchun

$$c_0 = a_0, \;\; c_1 = a_1, ..., \;\; c_{n-1} = a_{n-1},$$

lekin

$$c_n > a_n$$

bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, n butun son isbot qilinayotgan tasdiq shartidagi k butun sondan kichik bo'la olmaydi. Haqiqatan, agar $n < k$ tengsizlik o'rinli bo'lganda edi, a va a' sonlarining verguldan keyingi birinchi $(n-1)$ o'nli belgilari teng bo'lgani uchun, biz na faqat $a < c$ tengsizlikka, balki $a' < c$ tengsizlikka ham ega bo'lar edik.

Lekin n butun son k butun sondan katta ham bo'la olmaydi, chunki a sonning k nomeridan boshlab, barcha o'nli belgilari 9 ga teng bo'lib, c_n sonlar , ravshanki, 9 dan katta bo'la olmaydi.

Shunday qilib, yuqoridagi n son tasdiq shartidagi k songa teng bo'lishi kerak ekan. Xuddi shu singari, c sonining o'nli belgilari ichida a' sonining ularga mos o'nli belgilaridan kichik bo'lgan birinchi belgisining nomeri ham k ga teng ekanligi ko'rsatiladi. Isbotlanayotgan tasdiqning shartiga ko'ra $a'_k = a_k + 1$ ekanligini eslasak,

$$a_k < c_k < a_k + 1$$

qo'shaloq tensizlikka ega bo'lamiz.

Ammo, ravshanki, bu qo'shaloq tengsizlik hech qanday butun a_k va c_k sonlar uchun o'rinli bo'la olmaydi. Hosil bo'lgan qarama - qarshilik 1.3.1* - tasdiqning haq ekanligini isbotlaydi.

Q.E.D.

Ta'rif. *Har qanday musbat cheksiz o'nli kasr ixtiyoriy manfiy cheksiz o'nli kasrdan katta hisoblanadi.*

Ta'rif. *Agar $|b| > |a|$ bo'lsa, a manfiy cheksiz o'nli kasrni b manfiy cheksiz o'nli kasrdan katta deymiz.*

Ta'rif. *0 sonini har qanday manfiy cheksiz o'nli kasrdan katta va har qanday musbat cheksiz o'nli kasrdan kichik deb hisoblaymiz.*

Shunday qilib, ixtiyoriy ikki cheksiz o'nli kasrni o'zaro taqqoslash mumkin ekan, ya'ni *ikki cheksiz o'nli kasrlar yoki o'zaro teng, yoki ulardan biri ikkinchisidan katta bo'ladi.*

Odatdagidek, agar $b > a$ bo'lsa, a ni b dan kichik deymiz va $a < b$ deb yozamiz. Qat'iy bo'lmagan tengsizliklar $a \le b$ va $a \ge b$ odatdagidek kiritiladi, ya'ni

$$(a \le b) \qquad \Leftrightarrow \qquad (a < b) \vee (a = b).$$

Eslatma. Yuqorida kiritilgan ikki cheksiz o'nli kasrni taqqoslash qoidasidan tengsizlik munosabatining tranzitivligi to'g'ridan - to'g'ri kelib chiqadi:

$$(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c),$$

ya'ni $a < b$ va $b < c$ tengsizliklardan $a < c$ tengsizlik kelib chiqadi.

4. Yuqoridagi tushunchalarning tadbiqi sifatida absolyut qiymatning xossalaridan birini isbotlaymiz.

1.3.2 - tasdiq. *Quyidagi ikki tengsizliklar ekvivalentdir*:

$$|x| < a, \tag{1.3.8}$$

$$-a < x < a. \tag{1.3.9}$$

Isbot. Avvalo, har ikkala (1.3.8) va (1.3.9) tengsizliklarda a cheksiz o'nli kasrning musbat bo'lishini ta'kidlaymiz, chunki aks holda, ikkala tengsizlik ham hech qanday x uchun o'rinli bo'lmas edi. Shu sababli, bundan buyon $a > 0$ deb hisoblaymiz.

1) Dastavval (1.3.8) dan (1.3.9) kelib chiqishini isbotlaymiz. Demak, (1.3.8) tengsizlik bajarilsin deb faraz qilaylik. Agar $x \ge 0$ bo'lsa, bu tengsizlik

$$x < a$$

ko'rinishga keladi va shuning uchun x cheksiz o'nli kasr (1.3.9) qo'shaloq tengsizlikni ham qanoatlantiradi.

Agarda $x < 0$ bo'lsa, (1.3.8) tengsizlikni unga ekvivalent $|x| < |-a|$ ko'rinishda yozib olamiz, qaysiki, manfiy x va $(-a)$ cheksiz o'nli kasrlarni taqqoslash qoidasiga binoan $x > -a$ tengsizlik bajarilishini anglatadi, ya'ni bu holda ham x (1.3.9) qo'shaloq tengsizlikni qanoatlantirar ekan.

2) Xuddi yuqoridagidek (1.3.9) dan (1.3.8) ning kelib chiqishi isbotlanadi.

Q.E.D.

§ 1.4. Haqiqiy sonlar

1.

Ta'rif. ***Haqiqiy son*** *deb cheksiz o'nli kasrga aytamiz.*

Haqiqiy sonlar to'plami **R** simvoli orqali belgilanib, u sonlar o'qi ham deb ataladi. $x \in \mathbf{R}$ yozuv x haqiqiy son (yoki qisqaroq qilib, son) ekanligini anglatadi.

Ravshanki, ratsional sonlar haqiqiy sonlarning barcha davriy cheksiz o'nli kasrlardan iborat qismiy to'plamini tashkil qiladi, ya'ni $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Ratsional bo'lmagan haqiqiy sonlarga *irratsional* sonlar deyiladi.

Bizning galdagi vazifamiz haqiqiy sonlar uchun arifmetik amallarni, ya'ni qo'shish va ko'paytirishni kiritishdir. Biz bu vazifani keyingi paragrafda amalga oshiramiz. Ushbu paragrafda esa, haqiqiy sonlarning yuqorida o'rnatilgan tengsizlik munosabatlari bilan bog'liq bo'lgan asosiy xossalarini o'rganamiz.

Sonlar o'qining quyidagi qismiy to'plamlarini kiritaylik:

ochiq interval yoki qisqaroq, *interval* deb

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \quad a < x < b\} \tag{1.4.1}$$

to'plamga;

yopiq interval yo *segment* yoki bo'lmasa *kesma* deb

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : \quad a \le x \le b\} \tag{1.4.2}$$

to'plamga;

yarim interval deb

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \quad a \le x < b\} \tag{1.4.3}$$

yoki

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : \quad a < x \le b\} \tag{1.4.4}$$

to'plamlarga aytamiz.

2. Ushbu bandda biz **Q** ratsional sonlar to'plami **R** haqiqiy sonlar to'plamida zich ekanligini ko'rsatamiz.

Ta'rif. *Haqiqiy sonlar to'plami **R** ning biror qismiy to'plami E berilgan bo'lsin. Agar E ning **R** dan olingan ixtiyoriy interval bilan kesishmasi bo'sh bo'lmasa, E to'plam **R** da **zich** deyiladi.*

1.4.1* - tasdiq. Q *ratsional sonlar to'plami **R** haqiqiy sonlar to'plamida zichdir.*

Isbot. R sonlar o'qidan olingan ixtiyoriy (a, b) interval berilgan bo'lsin. Bu intervalda kamida bitta c ratsional son borligini isbotlaymiz.

Agar a va b sonlar ratsional bo'lsa, masala hal; c sifatida ularning o'rta arifmetik qiymatini olamiz:

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Shu sababli, faraz qilaylik,

$$a = a_0, a_1 a_2 ...$$

va

$$b = b_0, b_1 b_2 ...$$

bo'lib, ulardan kamida bittasi, masalan b, irratsional son bo'lsin.

Intervalning ta'rifiga ko'ra $a < b$. Demak, shunday manfiy bo'lmagan butun k son topiladiki, u uchun

$$a_0 = b_0, \;\; a_1 = b_1, ..., \;\; a_{k-1} = b_{k-1}$$

bo'lib,

$$a_k < b_k$$

bo'ladi.

Agar c sifatida quyidagi

$$c = b_0, b_1 b_2 ... b_k 000...$$

davriy cheksiz o'nli kasrni olganimizda, ravshanki, $a \leq c < b$ bo'lar edi. Ammo a soni, davri 9 bo'lib, c ga teng bo'lgan cheksiz davriy o'nli kasr bo'lib qolishi ham mumkin. Bu holda $a < c$ tengsizlik bajarilmaydi va natijada, c soni (a, b) interval ichida yotmay qoladi.

Biz bu isbotni ozroq o'zgartiramiz va buning uchun b sonining irratsional ekanligidan foydalanamiz. Ravshanki, $j > k$ bo'lganda b irratsional sonning b_j o'nli belgilari orasida noldan farqlilari topiladi. Bunday o'nli belgilardan birinchisi b_n bo'lsin, ya'ni $b_n > 0$, $n > k$. U holda c sifatida davri 0 bo'lgan quyidagi cheksiz davriy o'nli kasrni olamiz:

$$c = b_0, b_1 b_2 ... b_n 000...$$

O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki $c < b$. Bundan tashqari, $a \leq c$ va $a \neq c$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, $a < c < b$.

Q.E.D.

Navbatdagi tasdiq ixtiyoriy haqiqiy sonni ratsional sonlar bilan yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Ratsional sonlar uchun arifmetik amallar aniqlanganini eslatib o'tamiz.

1.4.2 - tasdiq. *Ixtiyoriy haqiqiy c soni berilgan bo'lsin. Har qanday ratsional $\varepsilon > 0$ son olganda ham shunday ikki ratsional $\alpha < c$ va $\beta > c$ sonlari topiladiki, ular uchun*

$$\beta - \alpha < \varepsilon \tag{1.4.5}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Agar c ratsional son bo'lsa,

$$\alpha = c - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \beta = c + \frac{\varepsilon}{4}$$

deb olishning o'zi yetarli.

Endi c irratsional son bo'lsin. Aniqlik uchun, bu son

$$c = c_0, c_1 c_2 c_3 ...$$

ko'rinishdagi davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr bo'lsin.

Biz n nomerni quyidagi shartdan tanlab olamiz:

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

U holda, ravshanki, (1.1.6) ga ko'ra,

$$10^n > 2^n > n > \frac{1}{\varepsilon}$$

va shuning uchun,

$$10^{-n} < \varepsilon.$$

Endi

$$\alpha = c_0, c_1 c_2 ... c_n 000...$$

va

$$\beta = c_0, c_1 c_2 ... c_n 999...$$

desak, ravshanki,

$$\beta - \alpha = 10^{-n} < \varepsilon$$

bo'ladi.

Q.E.D.

Eslatma. 1.4.2 - tasdiq ixtiyoriy $c \in \mathbf{R}$ uchun shu sonni o'z ichiga oluvchi ratsional chegarali hamda istalgancha kichik uzunlikka ega bo'lgan (α, β) intervalning topilishini anglatadi. Ravshanki, bunda α va β sonlari mos ravishda chapdan va o'ngdan c soniga ratsional sonlar bilan yaqinlashishni beradi.

3. Yuqorida o'rnatilgan haqiqiy sonlarni taqqoslash qoidasi yuqoridan yoki quyidan chegaralangan to'plam tushunchalarini kiritish imkonini beradi.

Faraz qilaylik, E haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ ning ixtiyoriy qismiy to'plami bo'lsin.

Ta'rif. *Agar shunday M soni topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \leq M$$

*tengsizlik bajarilsa, $E \subset \mathbf{R}$ to'plamni **yuqoridan chegaralangan** deymiz.*

Bunda M soni E to'plamning *yuqori chegarasi* deyiladi.

Ta'rif. *Agar shunday m soni topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \geq m$$

*tengsizlik bajarilsa, $E \subset \mathbf{R}$ to'plamni **quyidan chegaralangan** deymiz.*

Bunda m soni E to'plamning *quyi chegarasi* deyiladi.

Ta'rif. *Agar to'plam yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, u **chegaralangan** deyiladi.*

Shubhasiz, agar biror to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lib, M uning yuqori chegarasi bo'lsa, M dan katta ixtiyoriy son ham shu to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi. Boshqacha aytganda, yuqoridan chegaralangan to'plam cheksiz ko'p yuqori chegaralarga ega. Shu chegaralar ichida ularning eng kichigi ayniqsa muhimdir.

Ta'rif. *Yuqoridan chegaralangan to'plamning **aniq yuqori chegarasi** deb yuqori chegaralarning eng kichigiga aytiladi.*

Boshqacha aytganda, agar M soni quyidagi ikki shartlarni qanoatlantirsa, u E to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi:

(i) ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$x \leq M$$

tengsizlik o'rinli;

(ii) ixtiyoriy $M' < M$ uchun shunday $x' \in E$ topiladiki, u uchun

$$x' > M'$$

tengsizlik o'rinli.

Bunda (i) - shart M son E to'plamning yuqori chegarasi ekanligini, (ii) - shart esa, ixtiyoriy kichikroq M' son yuqori chegara bo'la olmasligini, ya'ni M eng kichik yuqori chegara ekanligini anglatadi.

E to'plamning aniq yuqori chegarasi $\sup E$ simvoli orqali belgilanadi.

Quyidan chegaralangan E to'plamning *aniq quyi chegarasi* bu to'plam quyi chegaralarining eng kattasi sifatida aniqlanib, $\inf E$ simvoli orqali belgilanadi.

Agar E to'plamining aniq yuqori chegarasi M shu to'plamning elementi bo'lsa ($M \in E$), M shu to'plamning *maksimal* elementi yoki sodda qilib *maksimumi* deb ataladi. Xuddi shu kabi, *minimal* element yoki *minimum* aniqlanadi.

Ratsional sonlar sinfi ko'pgina masalalarni yechishga yetarli emasliligi to'g'risida yuqorida aytilgan edi. Misol sifatida quidagi

$$E = \{x \in \mathbf{Q} : \quad x^2 < 2\}$$

chegaralangan to'plamning ratsional sonlar sinfida aniq yuqori chegaraga ega emasligini qayd etamiz.

Haqiqatan, bu to'plamning aniq yuqori chegarasi sifatida $\sqrt{2}$ sonni olish mumkin edi, ammo bu son ratsional emas, shuning uchun ratsional sonlar sinfida u «mavjud emas». Bunga sabab ratsional sonlar to'plamining to'la emasligidir. Aksincha, haqiqiy sonlar to'plamining eng muhim xossasi uning to'laligidir.

1.4.1 - teorema (to'lalik haqidagi asosiy teorema). *Haqiqiy sonlarning har qanday bo'sh bo'lmagan yuqoridan chegaralangan to'plami aniq yuqori chegaraga egadir.*

Isbot. Faraz qilaylik, E haqiqiy sonlarning aqalli bitta elementga ega bo'lgan yuqoridan chegaralangan to'plami bo'lsin.

1) Avval E to'plam elementlari orasida kamida bitta manfiy bo'lmagan son bor holni qaraymiz. Albatta, bu holda aniq yuqori chegara ham manfiy bo'lmaydi. E to'plamning yuqori chegaralaridan biri M bo'lsin deylik, yani istalgan $x \in E$ uchun

$$x \le M$$

bo'lsin.

E to'plamdagi istalgan manfiy bo'lmagan sonni

$$a = a_0, a_1 a_2 ... \tag{1.4.6}$$

ko'rinishda belgilab olamiz. Ma'lumki, biz a_0 ni butun qism va $j \ge 1$ bo'lganda a_j sonlarni o'nli belgilar deb atagan edik.

Shubhasiz, barcha (1.4.6) ko'rinishdagi sonlarning butun qismlari M dan katta emas, shuning uchun, butun qismlar ichida eng kattasi mavjud. Ana shu butun qismni b_0 orqali belgilaymiz. Bu b_0 sonning ham manfiy emasligi aniq.

Biz E to'plamning (1.4.6) ko'rinishdagi sonlari ichida faqat butun qismi b_0 ga teng bo'lganlarinigina qaraymiz. Bu sonlar ichida verguldan keyingi birinchi o'nli belgisi, ya'ni a_1 eng katta bo'lgan son mavjud. Ana shu eng katta o'nli belgini b_1 orqali belgilaymiz. Ravshanki, b_1 (1.1.7) qiymatlardan birini qabul qiladi.

Endi E to'plamning (1.4.6) ko'rinishdagi sonlari ichida faqat butun qismi b_0 ga va birinchi o'nli belgisi b_1 ga tenglarinigina qaraymiz. Bu sonlar ichida verguldan keyingi ikkinchi o'nli belgisi, ya'ni a_2 eng katta bo'lgan son topiladi. Ana shu eng katta o'nli belgini b_2 orqali belgilaymiz.

Mana shu jarayonni davom ettirib, biz quyidagi cheksiz o'nli kasrni olamiz:

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.4.7}$$

Aynan mana shu son E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi aniq. Haqiqatan, bu sonning tanlanishiga ko'ra, istalgan $a \in E$ uchun

$$a \le b \tag{1.4.8}$$

bo'ladi, ya'ni b son E to'plamning yuqori chegarasidir. Yana b sonning tanlanishiga asosan, agar biz (1.4.7) dagi o'nli belgilardan birortasini kichiklashtirsak, (1.4.8) tengsizlik barcha $a \in E$ lar uchun o'rinli bo'lmay qoladi. Bundan chiqdi, b aniq yuqori chegara ekan.

2) Endi E to'plamning barcha elementlari manfiy sonlar bo'lsin. Ushbu holda manfiy

$$x = -\, a_0, a_1 a_2 ...$$

sonlar o'rniga ularning absolyut qiymatlarini, ya'ni

$$|x| = a_0, a_1 a_2 ...$$

sonlarni qaraymiz.

So'ngra, E dagi sonlarning absolyut qiymatlaridan tuzilgan to'plamning (1.4.7) ko'rinishdagi aniq quyi chegarasini, ya'ni b cheksiz o'nli kasrni quramiz. Chunonchi, har bir qadamda a_k o'nli belgining eng kichik qiymatini olamiz va uni b_k deb belgilaymiz. Shundan so'ng, $(-\, b)$ son E to'plamning aniq yuqori chegarasi ekanligi oson tekshiriladi.

Q.E.D.

4. E to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lmagan hollarda ham aniq yuqori chegara simvoli $\sup E$ ishlatiladi va bunda

$$\sup E \;=\; +\infty \tag{1.4.9}$$

deb hisoblanadi, bu yerda ∞ - cheksizlik belgisi.

Shunga o'xshash, to'plam quyidan chegaralanmagan holda

$$\inf E \;=\; -\infty \tag{1.4.10}$$

deb yozishadi.

Yuqoridan chegaralanmagan to'plamlarga eng muhim misollar sifatida quyidagi tengliklar bilan aniqlangan

$$(a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: \quad x > a\} \tag{1.4.11}$$

ochiq yarim to'g'ri chiziqni va

$$[a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: \quad x \geq a\} \tag{1.4.12}$$

yopiq yarim to'g'ri chiziqni olish mumkin.

Quyidan chegaralanmagan to'plamlarga esa misollar sifatida quyidagi ochiq yarim to'g'ri chiziqni:

$$(-\infty,\ b) = \{x \in \mathbf{R}: \quad x < b\} \tag{1.4.13}$$

va

$$(-\infty,\ b] = \{x \in \mathbf{R}: \quad x \leq b\} \tag{1.4.14}$$

tenglik bilan aniqlangan yopiq yarim to'g'ri chiziqni olish mumkin.

Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ ni ba'zan cheksizlik simvoli orqali ham belgilashadi:

$$\mathbf{R} = (-\infty,\ +\infty).$$

§ 1.5. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar

1. Ushbu paragrafda biz haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallarni aniqlaymiz. Bunda quyidagi oddiy kuzatish asos qilib olinadi: agar biz a va b haqiqiy sonlarni ratsional α va β sonlar bilan mos ravishda yaqinlashtirsak, $\alpha + \beta$ va $\alpha\beta$ ratsional sonlar ham mos ravishda $a + b$ yig'indiga va ab ko'paytmaga yaqinlashishi kerak.

Istalgan haqiqiy sonni ratsional sonlar bilan ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtirish mumkinligi 1.4.2 - tasdiqda o'rnatilganligini eslatib o'tamiz.

Yozuvni soddalashtirish maqsadida quyidagi belgilashni kiritamiz. Ixtiyoriy a haqiqiy son uchun $R(a)$ simvoli orqali a dan kichik bo'lmagan ratsional sonlar to'plamini belgilaymiz:

$$R(a) = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ x \geq a\} \ = \ \mathbf{Q} \cap [\, a, \ +\infty). \tag{1.5.1}$$

Bu to'plam quyidagi o'z-o'zidan ko'rinib turgan xossaga ega.

1.5.1* - tasdiq. *Istalgan $a \in \boldsymbol{R}$ uchun*

$$\inf R(a) = a \tag{1.5.2}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Bevosita $R(a)$ to'plamning ta'rifidan a son quyi chegara ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun biz ana shu son quyi chegaralarning eng kattasi, ya'ni aniq quyi chegara ekanligini ko'rsatishimiz kifoya.

Buning uchun biror $c > a$ son ham $R(a)$ to'plamning quyi chegarasi deb faraz qilaylik, ya'ni istalgan $x \in R(a)$ uchun $x \geq c$ bo'lsin deylik. Ratsional sonlarning $\mathbf{R}$ da to'laligiga ko'ra, (a, c) intervalda kamida bitta ratsional x' son topiladi, ya'ni $a < x' < c$. Demak, (1.5.1) ta'rifga ko'ra $x' \in R(a)$. Ammo, ravshanki, bu element $x' \geq c$ tengsizlikni qanoatlantirmaydi. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik tasdiqni isbotlaydi.

Q.E.D.

Eslatma. Agar a ratsional son bo'lsa, $R(a)$ to'plamning aniq quyi chegarasi shu to'plamning o'ziga tegishli bo'lib,

$$\inf R(a) = \min R(a) = a \tag{1.5.3}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. Avval ikki haqiqiy a va b sonlarning yig'indisini aniqlaymiz. (1.5.1) ta'rifga ko'ra, $R(a)$ to'plam elementlari $x \geq a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi, $R(b)$ to'plam elementlari esa $y \geq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha ratsional sonlardan iborat. Ratsional sonlar uchun arifmetik amallar aniqlanganligini eslatib o'tamiz.

Ta'rif. *Ikki haqiqiy a va b sonlar **yig'indisi** deb*

$$c \ = \inf_{x \in R(a), \ y \in R(b)} (x + y) \tag{1.5.4}$$

tenglik orqali aniqlangan c songa aytamiz.

Har qanday ikki haqiqiy son yig'indisining mavjudligi haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi haqidagi asosiy teoremadan kelib chiqadi.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

1.5.2 - tasdiq. *Agar a va b ratsional sonlar bo'lsa,* (1.5.4) *tenglik bilan aniqlangan a va b haqiqiy sonlar yig'indisi ratsional sonlar maydonida aniqlangan* $(a + b)$ *yig'indi bilan ustma-ust tushadi.*

Isbot to'g'ridan-to'g'ri (1.5.3) tengliklardan kelib chiqadi.

Bu tasdiq ikki haqiqiy sonning yig'indisi uchun odatdagi $c = a + b$ belgilashdan foydalanishga imkon beradi.

Shuni aytish kerakki, yuqoridagi ta'rifda a sondan o'ngda joylashgan barcha ratsional sonlar to'plami $R(a)$ o'rniga, a sondan chapda joylashgan barcha ratsional sonlar to'plamidan, ya'ni

$$L(a) = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ x \leq a\} \ = \ (-\infty\,, \ a\,] \cap \mathbf{Q} \tag{1.5.5}$$

to'plamdan foydalansa ham bo'ladi.

Bunda ikki haqiqiy a va b sonlar yig'indisi sifatida quyidagi

$$d \ = \sup_{x\in L(a),\ y\in L(b)} \ (x+y) \tag{1.5.6}$$

tenglik orqali aniqlangan d son olinadi.

Bunday aniqlangan yig'indi yuqorida aniqlangan yig'indi bilan ustma-ust tushishini ko'rsatish qiyin emas, ya'ni navbatdagi tasdiq o'rinlidir.

1.5.3* - tasdiq. *Istalgan ikki a va b haqiqiy sonlar uchun (1.5.6) tenglik orqali aniqlangan d son shu sonlarning yig'indisiga teng, ya'ni*

$$d = a + b. \tag{1.5.7}$$

Isbot. Agar $x \in L(a), x' \in R(a)$ va $y \in L(b), y' \in R(b)$ bo'lsa,

$$x \ \leq \ a \ \leq \ x', \quad y \ \leq \ b \ \leq \ y' \tag{1.5.8}$$

bo'ladi va shuning uchun,

$$x + y \ \leq \ x' + y'.$$

Demak, ushbu tengsizlik chap tomonidagi yig'indining aniq yuqori chegarasi, ya'ni d soni, o'ng tomondagi yig'indining aniq quyi chegarasidan, ya'ni $a+b$ sonidan oshib ketmaydi. Binobarin,

$$d \ \leq \ a + b. \tag{1.5.9}$$

Endi, istalgan ratsional $\varepsilon > 0$ son uchun (1.5.8) shartdagi ratsional x, x', y va y' sonlarni

$$x' - x < \varepsilon, \quad y' - y < \varepsilon \tag{1.5.10}$$

tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz (ravshanki, 1.4.2 - tasdiqqa ko'ra buni amalga oshirish mumkin).

Shunday ekan, d sonining (1.5.6) ta'rifiga ko'ra,

$$x' + y' \ < \ x + y + 2\varepsilon \ \leq \ d + 2\varepsilon,$$

natijada, chap tomonning aniq quyi chegarasini olsak,

$$a + b \ < \ d + 2\varepsilon \tag{1.5.11}$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Nihoyat, (1.5.9) va (1.5.11) larni solishtirib,

$$d \ \leq \ a + b \ < \ d + 2\varepsilon$$

tengsizliklarni olamiz va bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan

$$a + b = d$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Q.E.D.

Haqiqiy sonlar uchun (1.5.4) tenglik orqali aniqlangan qo'shish amali xuddi ratsional sonlarni qo'shish amali singari xossalarga ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

1) Haqiqatan, *kommutativlik* xossasi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$\inf_{x\in R(a),\ y\in R(b)} (x+y) \ = \inf_{y\in R(b),\ x\in R(a)} (y+x). \tag{1.5.12}$$

2) Shunga o'xshash, *assotsiativlik* xossasi ratsional sonlar yig'indisininig assotsiativligining bevosita natijasidir.

3) Nol element sifatida, ravshanki, quyidagi cheksiz o'nli kasr olinadi:

$$0 = 0,000...$$

Haqiqatan, agar $x \in R(a)$ va $y \in R(0)$ bo'lsa, ya'ni, x va y quyidagi

$$x \geq a, \quad y \geq 0$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ratsional sonlar bo'lsa, ravshanki,

$$a + 0 = \inf\,(x+y) = \inf\,(x+0) = \inf\, x = a$$

bo'ladi.

4) Nihoyat, ravshanki, istalgan a uchun unga *qarama-qarshi* $(-a)$ element mavjud. Haqiqatan, agar $a > 0$ element

$$a = c_0, c_1c_2c_3... \tag{1.5.13}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, unga qarama-qarshi element sifatida

$$-a = -c_0, c_1c_2c_3..., \tag{1.5.14}$$

manfiy cheksiz o'nli kasrni olish kerak, va aksincha, (1.5.14) ko'rinishdagi elementga qarama-qarshi sifatida (1.5.13) element olinadi.

Biz ikki haqiqiy sonning yig'indisini aniqlagan vaqtda bu sonlarning musbat ekanligini talab qilmagan edik. Ma'lumki, agar haqiqiy son « + » ishorali (yoki umuman ishorasiz) cheksiz o'nli kasr orqali ifodalansa, bunday son musbat, va aksincha, agar haqiqiy son « − » ishorali cheksiz o'nli kasr orqali ifodalansa, bunday son manfiy deyilgan edi. Demak, agar a musbat haqiqiy son bo'lsa, $-a$ manfiy haqiqiy son bo'ladi.

Quyidagi sodda tasdiq o'rinli.

1.5.4* - tasdiq. *Ixtiyoriy ikki a va b musbat haqiqiy sonlar uchun*

$$-(a+b) = (-a) + (-b) \tag{1.5.15}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Ixtiyoriy $x \in L(a)$ va $y \in L(b)$ berilgan bo'lsin, ya'ni x va y ratsional sonlar uchun

$$x \ \leq \ a, \quad y \ \leq \ b$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsin.

U holda

$$-x \geq -a, \quad -y \geq -b$$

va shuning uchun $-x \in R(-a)$ va $-y \in R(-b)$. Demak, 1.5.3* - tasdiqqa va aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralarning keyingi paragrafda keltirilgan 1.7.9 - tasdiqdagi xossasiga ko'ra,

$$(-a) + (-b) = \inf[(-x) + (-y)] = \inf[-(x + y)] = -\sup(x + y) = -(a + b).$$

Q.E.D.

3. Ikki haqiqiy sonning ko'paytmasini aniqlashga o'tamiz. Avval ikkala ko'paytuvchi musbat bo'lgan holni qaraymiz.

Ta'rif. *Ikki musbat haqiqiy a va b sonlarning* ***ko'paytmasi*** *deb quyidagi haqiqiy c songa aytamiz:*

$$c = \inf_{x \in R(a),\ y \in R(b)} x \cdot y. \tag{1.5.16}$$

Haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi haqidagi asosiy teoremadan istalgan ikki haqiqiy musbat son ko'paytmasining mavjudligi kelib chiqadi.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

1.5.5 - tasdiq. *Agar a va b musbat ratsional sonlar bo'lsa, (1.5.16) tenglik bilan aniqlangan a va b haqiqiy sonlar ko'paytmasi ratsional sonlar maydonida aniqlangan ab ko'paytma bilan ustma-ust tushadi.*

Isbot xuddi 1.5.2 - tasdiq isboti singari, to'g'ridan-to'g'ri (1.5.3) tengliklardan kelib chiqadi.

Bu tasdiq ikki musbat haqiqiy sonning ko'paytmasi uchun odatdagi $c = a \cdot b = ab$ belgilashdan foydalanishga imkon beradi.

Agar biz, xuddi ikki haqiqiy son yig'ndisi holidek, a va b sonlari ko'paytmasini ekvivalent ravishda barcha $x \in L(a)$ va $y \in L(b)$ lar uchun xy sonlar to'plamining aniq yuqori chegarasi sifatida aniqlamoqchi bo'lsak, hech qanday natijaga ega bo'lmaymiz. Chunki, masalan, $a = b = 1$ bo'lsa, xy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ sonlar o'qiga teng bo'ladi.

Shunday hollarni bartaraf qilish maqsadida, $L(a)$ to'plamdan barcha manfiy sonlarni chiqarib tashlaymiz, ya'ni istalgan $a > 0$ uchun quyidagi to'plamni kiritamiz:

$$L^+(a) = \{x \in Q : 0 < x \leq a\}. \tag{1.5.17}$$

Endi

$$d = \sup_{x \in L^+(a), y \in L^+(b)} x \cdot y \tag{1.5.18}$$

deb belgilasak, bunday aniqlangan ko'paytma yuqorida aniqlangan ko'paytma bilan ustma-ust tushadi.

1.5.6* - tasdiq. *Ixtiyoriy a va b musbat haqiqiy sonlar uchun (1.5.18) tenglik bilan aniqlangan d soni ularning ko'paytmasiga teng, ya'ni*

$$d = ab. \tag{1.5.19}$$

Isbot. Bu tasdiq ham, 1.4.2 - tasdiqdan foydalangan holda, xuddi 1.5.3* - tasdiq singari isbotlanadi.

Ta'rif. *Ikki manfiy a va b haqiqiy sonlarning ko'paytmasi deb quyidagi haqiqiy songa aytamiz:*

$$ab = |a||b|. \tag{1.5.20}$$

Ta'rif. *Agar ikki a va b haqiqiy sonlardan biri manfiy va boshqasi musbat bo'lsa, ularning ko'paytmasi deb quyidagi haqiqiy songa aytamiz:*
$$ab = -\,|a||b|. \tag{1.5.21}$$

Nihoyat, *istalgan haqiqiy sonning nolga ko'paytmasini nolga teng deb qabul qilamiz*:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Yuqoridagi tengliklar bilan aniqlangan haqiqiy sonlarni ko'paytirish amali xuddi ratsional sonlarni ko'paytirish amali kabi xossalarga ega ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan, agar a va b musbat sonlar bo'lsa, *kommutativlik* xossasi

$$\inf_{x\in R(a),\ y\in R(b)} x \cdot y = \inf_{y\in R(b),\ x\in R(a)} y \cdot x$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Agarda $a < 0$ va $b < 0$ bo'lsa, yuqoridagi holdan foydalanib, quyidagi

$$ba \;=\; |b| \cdot |a| \;=\; |a| \cdot |b| \;=\; ab$$

talab qilingan tenglikni olamiz.

Xuddi shu usulda bir ko'paytuvchi musbat va boshqasi manfiy bo'lgan holda ham kommutativlik xossasi isbotlanadi.

Assotsiativlik xossasi:
$$(ab)c = a(bc)$$

musbat a, b va c sonlar uchun ratsional sonlar ko'paytmasining assotsiativlik xossasidan bevosita kelib chiqadi. Musbat bo'lmagan ko'paytuvchilar ishtirok etgan hol ham yuqoridagi holga keltiriladi.

Birlik elementning mavjudligi ravshan, chunki bir sifatida ratsional 1 sonini, ya'ni

$$1 \;=\; 1,000000...$$

cheksiz o'nli kasrni olish mumkin.

Haqiqatan, agar $x \in R(a)$ va $y \in R(1)$ bo'lsa, ya'ni x va y ixtiyoriy ratsional sonlar bo'lib,

$$x \geq a, \quad y \geq 1$$

tengsizliklar bajarilsa, $a > 0$ sonlar uchun talab qilingan munosabatni olamiz:

$$a \cdot 1 = \inf\ (x \cdot y) = \inf\ (x \cdot 1) = \inf\ \ x = a$$

Aksincha, agar $a < 0$ bo'lsa,
$$a \cdot 1 = -|a| \cdot 1 = -|a| = a.$$

Eslatma. *Ixtiyoriy* $a > 0$ *haqiqiy son uchun*

$$(-1) \cdot a \;=\; -a$$

tenglik o'rinli

Ushbu tenglikning to'g'ri ekanligi shubhasiz.

Nihoyat, istalgan $a > 0$ element uchun unga *teskari* a^{-1} element

$$b = \inf_{z \in L^+(a)} \frac{1}{z} \tag{1.5.22}$$

ekanligini ko'rsatish qiyin emas, bu yerda $L^+(a)$ - (1.5.17) tenglik orqali aniqlangan ratsional sonlar intervali.

4*. Yuqorida kiritilgan haqiqiy sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari ratsional sonlarga xos bo'lgan boshqa barcha xossalarga ham ega. Buning isboti murakkab bo'lmagan bir turdagi mulohazalar yordamida amalga oshiriladi.

Masalan, bu ikki arifmetik amalni bog'lovchi *distributivlik* xossasini, ya'ni

$$(a + b)c = ac + bc \tag{1.5.23}$$

tenglikning bajarilishini a, b va c sonlar musbat bo'lgan vaqtda tekshiraylik. Ravshanki, istalgan $x \in L^+(a)$, $y \in L^+(b)$ va $z \in L^+(c)$ ratsional sonlar uchun

$$(x + y)z \ = \ xz + yz$$

tenglik o'rinlidir.

a) Haqiqiy sonlar ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra

$$xz \le ac, \quad yz \le bc.$$

Shu sababli, $xz \in L(ac)$ va $yz \in L(bc)$ bo'ladi va, haqiqiy sonlar yig'indisi ta'rifiga ko'ra

$$xz + yz \le ac + bc.$$

Demak,

$$(x + y)z \ \le \ ac + bc. \tag{1.5.24}$$

Shunday ekan, (1.5.24) ning chap tomonida aniq yuqori chegaraga o'tsak,

$$(a + b)c \ \le ac + bc \tag{1.5.25}$$

tengsizlikni olamiz.

b) Teskari tengsizlik

$$ac + bc \ \le (a + b)c \tag{1.5.26}$$

ham xuddi shunday ko'rsatiladi. Ikki (1.5.25) va (1.5.26) tengsizliklarni taqqoslasak, biz talab qilinayotgan (1.5.23) tenglikni olamiz.

Boshqa hollar ham ko'rilgan holga keladi. Misol uchun, a va b haqiqiy sonlar musbat bo'lib, $c < 0$ bo'lgan holni qaraylik. Bu holda, 1.5.5 - tasdiqqa ko'ra,

$$(a + b)c = -(a + b)|c| = -(a|c| + b|c|) = (-a|c|) + (-b|c|) = ac + bc.$$

5. Tengsizlikning ratsional sonlar uchun yuqorida keltirilgan asosiy xossalari haqiqiy sonlar uchun ham o'rinli ekanligi arifmetik amallar holidagidek ko'rsatiladi. Bevosita o'rnatilgan tengsizlik munosabatlaridan (1.3.3 - bandga qarang) har qanday ikki a va b haqiqiy sonlar uchun quyidagi munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli ekani kelib chiqadi:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Tranzitivlik xossasi ham, ya'ni $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, $a < c$ bo'lishi ham oson ko'rsatiladi.

Endi tengsizlikning har ikki tomoniga biror bir haqiqiy son qo'shish mumkinligini ko'rsatamiz. Chunonchi, agar a va b haqiqiy sonlar uchun

$$a \leq b \tag{1.5.27}$$

tengsizlik bajarilsa, istalgan $c \in \mathbf{R}$ larda

$$a + c \leq b + c \tag{1.5.28}$$

ekanini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $x \in L(a)$ va $z_1 \in L(c)$ hamda $y \in R(b)$ va $z_2 \in R(c)$ bo'lsin. U holda,

$$x \leq a \leq b \leq y, \quad z_1 \leq c \leq z_2$$

tengsizliklar bajariladi. Shuning uchun,

$$x + z_1 \leq y + z_2.$$

Endi chap tomonda aniq yuqori chegaraga va o'ng tomonda esa aniq quyi chegaraga o'tsak, talab qilinayotgan (1.5.28) tengsizlik hosil bo'ladi.

Isbotlangan xossadan, masalan,

$$a > b \tag{1.5.29}$$

tengsizlikning

$$a - b > 0 \tag{1.5.30}$$

tengsilikka ekvivalentligi kelib chiqadi.

Bu natijadan foydalanib, berilgan tengsizlikning ikki tomonini biror bir musbat songa ko'paytirganda natija o'zgarmasligini isbotlash mumkin. Haqiqatan, (1.5.29) tengsizlik bajarilsin deylik. Demak, (1.5.30) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Musbat sonlarning ko'paytmasi musbat bo'lgani uchun (1.5.30) tengsizlikni $c > 0$ haqiqiy songa ko'paytirsak,

$$ac - bc = (a - b)c > 0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan chiqdi,

$$ac > bc$$

ekan.

Tengsizlikning boshqa xossalari ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Eslatma. Birinchi marta ratsional sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamigacha matematik asoslangan ravishda kengaytirishni nemis matematigi R. Dedekind amalga oshirgan. Bunda olim kesimlar tushunchasidan foydalangan.

Aslida yuqorida aniqlangan $L(a)$ va $R(a)$ ratsional nurlarni Dedekind kesimining chap (yoki quyi) va o'ng (yoki yuqori) sinflari deyishimiz mumkin. Dedekind nazariyasida aynan mana shu sinflar a haqiqiy soni deb e'lon qilinadi. Dedekind sxemasining biroz qiyinchilik tug'diradigan tomoni shundaki, bu usulda yuqoridagi nurlarni faqat ratsional sonlar orqali, ya'ni cheksiz o'nli kasrlarni jalb qilmay aniqlashga to'g'ri keladi.

6. Eslatib o'tamizki, $\mathbf{N}$ natural (ya'ni, musbat butun) sonlar to'plami to'la tartiblangan, ya'ni ixtiyoriy $E \subset \mathbf{N}$ to'plam quyidan chegaralangan bo'lib, minimal elementga ega. Yuqorida natural sonlarning bu xossasi matematik induksiya prinsipi asosida yotishi aytilgan edi. Mana shu prinsipning tadbiqiga yana bir misol sifatida ikki haqiqiy sonnning natural darajasi uchun N'yuton binomi deb ataluvchi formulani isbotlaymiz.

Bu formulada birinchi n ta natural sonning faktorial deb ataluvchi ko'paytmasi muhim rol o'ynaydi. Faktorial

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$$

simvol orqali belgilanib, «n faktorial» deb o'qiladi.

Matematikada $0! = 1$ deb hisoblashga kelishib olingan.

Agar $c_m, c_{m+1}, ..., c_n$ haqiqiy sonlar bo'lsa, ularning yig'indisini yozuvni qisqartirish maqsadida quyidagi

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \ = \ c_m + c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{n-1} + c_n$$

simvolik ko'rinishda yozishadi. Bu yerda m va n butun sonlar bo'lib, ular uchun $m \leq n$ tengsizlik o'rinli. Bu ikki son ba'zan yig'indining chegaralari deb ataladi.

Oxirgi formulada k harfi jamlash indeksi deyilib, uni ixtiyoriy boshqa harf bilan almashtirish mumkin:

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \ = \ \sum_{i=m}^{n} c_i \ = \ \sum_{j=m}^{n} c_j.$$

Oson tekshirish mumkinki, agar jamlash indiksini bir birlikka surilsa, yig'indi chegaralari teskari tomonga suriladi, ya'ni:

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \ = \ \sum_{k=m+1}^{n+1} c_{k-1}.$$

1.5.1 - misol (N'yuton binomi). *Har qanday natural n hamda ixtiyoriy $a \in \boldsymbol{R}$ va $b \in \boldsymbol{R}$ lar uchun quyidagi tenglik o'rinli:*

$$(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}. \tag{1.5.31}$$

Isbot. 1) Ravshanki, $n = 1$ bo'lsa, (1.5.31) tenglik bajariladi.

2) Endi biror natural n uchun (1.5.31) tenglik o'rinli deb faraz qilib, n ni $(n+1)$ ga o'zgartirganda ham bu tenglikning saqlanishini ko'rsatamiz. Demak, ravshanki,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} (a+b).$$

Qavslarni ochsak,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k+1}$$

bo'ladi.

Birinchi yig'indida indeksni bir birlikka suramiz, ya'ni k indeks o'rniga $k-1$ qo'yamiz. U holda,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k+1}.$$

Endi birinchi yig'indida oxirgi hadni va ikkinchi yig'indida birinchi hadni ajratsak,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] a^k b^{n+1-k} \tag{1.5.32}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

tenglik o'rinli ekanini hisobga olsak, (1.5.32) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} a^k b^{n+1-k}.$$

Ravshanki, bu tenglik (1.5.31) da n nomerni $(n+1)$ ga o'zgartirish natijasida hosil bo'lgan tenglik bilan ustma-ust tushadi.

1) va 2) lardan, matematik induksiya prinsipiga ko'ra, (1.5.31) tenglikning ixtiyoriy n uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Natija. *Agar $a \geq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy n uchun*

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \quad a \geq 0, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{1.5.33}$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tengsizlikka ishonch hosil qilish uchun (1.5.31) tenglikda $b = 1$ deb, uning o'ng tomonida faqat birinchi ikkita, $k = 0$ va $k = 1$ nomerlarga mos kelgan hadlarni qoldirish yetarlidir.

§ 1.6. Sanoqli va kontinuum quvvatli to'plamlar

Agar ikki A va B to'plamlar berilib, A to'plamning har bir a elementiga B to'plamning biror $f(a)$ elementi ma'lum bir qonuniyat asosida mos qo'yilsa,

$$f \ : \ A \ \to \ B$$

akslantirish berilgan deyiladi.

Agar f akslantirish A to'plamning turli elementlarini B to'plamning turli elementlariga mos qo'yib, A to'plamni B to'plamning ustiga aks ettirsa (ushbu darslikning Qo'shimchalar qismida batafsilroq berilgan), $f : A \to B$ akslantirish *o'zaro bir qiymatli* deyiladi. Ushbu holda B to'plamning barcha elementlarida aniqlangan *teskari* $f^{-1} : B \to A$ akslantirish mavjud bo'lib, u quyidagi ikki shartni qanoatlantiradi:

1) har qanday $a \in A$ uchun $f^{-1}(f(a)) = a$ tenglik o'rinli;

2) har qanday $b \in B$ uchun $f(f^{-1}(b)) = b$ tenglik o'rinli.

Aniqki, har qanday o'zaro bir qiymatli akslantirishga teskari akslantirish ham o'zaro bir qiymatli bo'ladi.

Agar ikki A va B to'plamlar uchun birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantirish mavjud bo'lsa, bu to'plamlar *ekvivalent* deyiladi. Bunday holda ikki A va B to'plamlar bir xil *quvvatga* ega ham deyiladi.

Ta'rif. *Natural sonlar to'plamiga ekvivalent to'plamlar* ***sanoqli*** *to'plamlar deb ataladi.*

Boshqacha aytganda, agar to'plam elementlarini natural qator yordamida nomerlash mumkin bo'lsa, bunday to'plam sanoqli deyiladi.

1.6.1 - tasdiq. *Chekli to'plamlarning sanoqli birlashmasi sanoqli to'plam bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, E_k - berilgan chekli to'plamlar bo'lib,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

bo'lsin. Agar biz E to'plamning barcha elementlarini natural qator yordamida nomerlab chiqsak, tasdiq isbotlangan bo'ladi.

Biz buni, masalan, E to'plam elementlarini navbatma-navbat nomerlab chiqish orqali amalga oshirsak bo'ladi. Ya'ni avval E_1 to'plamning barcha elementlarini nomerlaymiz, so'ngra E_2 to'plamning barcha elementlarini nomerlaymiz va hakazo. Chunonchi, agar E_k to'plam m_k ta elementdan iborat bo'lib, $a_n^{(k)} \in E_k$ element E_k da n - o'rinda turgan bo'lsa, biz unga E to'plam elementi sifatida yangi

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + n \tag{1.6.1}$$

nomer beramiz.

Q.E.D.

1.6.2 - tasdiq. *Sanoqli to'plamlarning chekli yoki sanoqli sondagi birlashmasi yana sanoqli to'plam bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, E_k - berilgan sanoqli to'plamlar bo'lib,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

bo'lsin. Ushbu E to'plamning barcha elementlarini natural qator orqali nomerlab chiqish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz *diagonallash* deb ataladigan jarayondan foydalanamiz.

Chunonchi, agar E_k to'plam elementlari $a_n^{(k)}, n = 1, 2, 3, ..$ orqali belgilansa, yarim cheksiz matritsa deb ataluvchi quyidagi jadvalni qaraymiz:

$$\begin{Vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & \dots \\ & & & \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & \dots \\ & & & \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \tag{1.6.2}$$

Endi

$$F_m = \{ \ a_n^{(k)} \in E_k \ : \ n + k - 1 = m \ \}$$

to'plamlarni kiritamiz.

Bunday aniqlangan har bir F_m to'plam (1.6.2) matritsada chapdan o'nga va tepaga qarab ketgan m - digonalda joylashgan m ta elementlardan iborat bo'lib, u chekli to'plamdir.

Shunday ekan, quyidagi

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$$

tenglik bajariladi. Bundan chiqdi, E to'plamning sanoqliligi 1.6.1 - tasdiqdan kelib chiqadi.

Natija. *Butun sonlar to'plami* $\boldsymbol{Z}$ *sanoqlidir.*

Haqiqatan, manfiy butun sonlar to'plamining natural sonlar to'plamiga ekvivalentligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Shuning uchun natija 1.6.2 - tasdiqdan kelib chiqadi.

Q.E.D.

1.6.1 - teorema. *Barcha ratsional sonlar to'plami* $\boldsymbol{Q}$ *sanoqlidir.*

Isbot. Ixtiyoriy natural k son uchun maxraji k bo'lgan qisqarmaydigan kasrlar to'plamini kiritamiz:

$$E_k \;=\; \left\{\, \frac{n}{k} \;:\; n \;\in\; \mathbf{Z} \,\right\}.$$

Masalan,

$$E_2 \;=\; \left\{\, \frac{1}{2},\;\; -\frac{1}{2},\;\; \frac{3}{2},\;\; -\frac{3}{2},\;\; \frac{5}{2},\;\; -\frac{5}{2},,, \right\}.$$

Ravshanki, har bir E_k to'plam sanoqli bo'lib,

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Endi 1.6.2 - tasdiqdan foydalanish yetarli.

Q.E.D.

1.6.2 - teorema. $(0,1)$ *intervalning barcha nuqtalari to'plami sanoqli emas.*

Isbot. Bu to'plamni sanoqli deb faraz qilaylik. Bundan chiqdi, biz noldan katta va birdan kichik barcha haqiqiy sonlarni nomerlab chiqishimiz mumkin ekan, ya'ni

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}...$$

$$\cdots$$

$$x_k = 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}...a_{kn}...$$

Endi $(0,1)$ intervaldan c haqiqiy sonini shunday tanlab olamizki, u

$$c = 0, c_1c_2c_3...c_n...,$$

ko'rinishga ega bo'lib, barcha c_k sonlar 0 va 9 dan farqli hamda $c_1 \neq a_{11}$, $c_2 \neq a_{22}$, $c_3 \neq a_{33}$, ..., va umuman, $c_n \neq a_{nn}$ tengsizliklar bajarilsin.

Bunday aniqlangan c soni birorta ham x_k soniga teng bo'la olmaydi. Bu esa, $\{x_k\}$ sonlarning $(0,1)$ intervaldagi barcha haqiqiy sonlarni tashkil etishiga, ya'ni $(0,1)$ intervaldagi barcha haqiqiy sonlar to'plami, yuqoridagi farazimizga ko'ra, sanoqli ekaniga ziddir.

Q.E.D.

Ta'rif. $(0,1)$ *intervalga ekvivalent bo'lgan to'plamlar* ***kontinuum*** *quvvatga ega to'plamlar deyiladi.*

Sonlar o'qidan olingan istalgan interval kontinuum quvvatli to'plam bo'lishi aniq. Haqiqatan, agar $a < b$ bo'lsa,

$$y \;=\; \frac{x-a}{b-a}$$

akslantirish (a,b) intervalni $(0,1)$ intervalga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Bunda har bir $x \in (a,b)$ nuqtaga $y \in (0,1)$ nuqta mos qo'yiladi. Teskari akslantirish quyidagi ko'rinishga ega:

$$x \;=\; a + (b-a)y.$$

Xususan, $(-1, 1)$ interval kontinuum quvvatga egadir.

1.6.3 - teorema. *Barcha haqiqiy sonlar to'plami* $\boldsymbol{R}$ *kontinuum quvvatga ega.*
Isbot. Quyidagi

$$y = \frac{x}{1 - |x|}$$

akslantirish $(-1, 1)$ interval va sonlar o'qi $(-\infty, +\infty)$ orasida o'zaro bir qiymatli akslantirish ekanligini ko'rsatish yetarli. Buning uchun esa yuqoridagi akslantirishga teskari akslantirish mavjud va u quyidagi

$$x = \frac{y}{1 + |y|}$$

ko'rinishga ega ekanligini qayd etish kifoya.
Q.E.D.

§ 1.7*. Tartiblangan maydon

1. Agar berilgan K to'plamning ixtiyoriy ikki elementi $a \in K$ va $b \in K$ uchun quyida keltirilgan aksiomalarni qanoatlantiradigan *qo'shish* va *ko'paytirish* amallari aniqlangan bo'lsa, bu to'plamga maydon deyiladi. Qo'shish amalining natijasi K to'plamining bir qiymatli ravishda aniqlangan elementi bo'lib, $a + b$ deb belgilanadi va a va b lar *yig'indisi* deyiladi. Ko'paytirish amalining natijasi K to'plamining bir qiymatli ravishda aniqlangan elementi bo'lib, ab deb belgilanadi va a va b larning *ko'paytmasi* deyiladi.

Qo'shish aksiomalari:

A1) qo'shishning kommutativligi:

$$a + b = b + a; \tag{1.7.1}$$

A2) qo'shishning assotsiativligi:

$$(a + b) + c = a + (b + c); \tag{1.7.2}$$

A3) nol deb ataladigan va 0 simvoli orqali belgilanadigan shunday element mavjudki, ixtiyoriy $a \in K$ uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$a + 0 = a; \tag{1.7.3}$$

A4) ixtiyoriy $a \in K$ uchun a ga qarama-qarshi deb ataladigan va $-a$ orqali belgilanadigan shunday yagona element mavjudki, u uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$a + (-a) = 0. \tag{1.7.4}$$

Ko'paytirish aksiomalari:

M1) ko'paytirish kommutativligi:

$$ab = ba; \tag{1.7.5}$$

M2) ko'paytirish assotsiativligi:

$$(ab)c = a(bc); \tag{1.7.6}$$

M3) bir deb ataladigan va 1 simvoli orqali belgilanadigan shunday yagona element mavjudki, $1 \neq 0$ va ixtiyoriy $a \in K$ uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$1a = a; \tag{1.7.7}$$

M4) ixtiyoriy $a \neq 0$ element uchun a ga teskari deb ataladigan va a^{-1} orqali belgilanadigan shunday element mavjudki, u uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$a(a^{-1}) = 1. \tag{1.7.8}$$

Yuqoridagi to'rtta qo'shish va to'rtta ko'paytirish aksiomalariga biz qo'shish va ko'paytirishni bog'lovchi navbatdagi aksiomani qo'shamiz.

Distributivlik aksiomasi:

K dan olingan ixtiyoriy a, b, c elementlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$a(b + c) = ab + ac. \tag{1.7.9}$$

Sanab o'tilgan aksiomalar maydon aksiomalari deyiladi. Maydon aksiomalaridan nol va birning yagona ekanligi kelib chiqishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatdan, agar ikkita 0_1 va 0_2 nollar mavjud deb faraz qilsak, A1 va A3 dan

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

kelib chiqadi.

Shunga o'xshash, agar ikkita 1_1 va 1_2 birlar mavjud deb faraz qilsak, M1 va M3 aksiomalardan

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2$$

kelib chiqadi.

Ratsional sonlar yuqorida sanab o'tilgan barcha aksiomalarni qanoatlantirishini tekshirish oson. Shuning uchun ular maydonni tashkil qiladi. Ravshanki, haqiqiy sonlar to'plami ham maydonni tashkil qiladi.

2. Maydon aksiomalaidan kelib chiqadigan bir necha tasdiqlarni keltiramiz. Avvalam bor biz, qo'shish va ko'paytirishning assotsiativligiga asosan, $(a + b) + c$ o'rniga $a + b + c$ deb va $(ab)c$ o'rniga abc deb yozishimiz mumkinligini qayd etamiz. Bundan tashqari, $a + (-b)$ o'rniga $a - b$ deb yozishga kelishib olamiz.

1.7.1 - tasdiq (ayirish). *Quyidagi*

$$a + x = b \tag{1.7.10}$$

tenglik faqat va faqat

$$x = b - a \tag{1.7.11}$$

bo'lganda bajariladi.

Isbot. 1) Agar (1.7.10) tenglik bajarilsa,

$$x = x + (a - a) = (x + a) - a = b - a$$

bo'ladi, ya'ni (1.7.11) tenglik ham bajariladi.

2) Agar (1.7.11) tenglik bajarilsa,

$$a + x = a + (b - a) = a - a + b = b$$

bo'ladi, ya'ni (1.7.10) tenglik ham bajariladi.

Q.E.D.

1.7.2 - tasdiq (bo'lish). *Agar $a \neq 0$ bo'lsa,*

$$ax = b \tag{1.7.12}$$

tenglik faqat va faqat
$$x = ba^{-1} \tag{1.7.13}$$
bo'lganda bajariladi

Isbot. 1) Agar (1.7.12) tenglik o'rinli bo'lsa,
$$x = x(aa^{-1}) = (xa)a^{-1} = (ax)a^{-1} = ba^{-1}$$
bo'ladi, ya'ni (1.7.13) tenglik ham o'rinli bo'ladi.

2). Agar (1.7.13) tenglik bajarilsa,
$$ax = a(ba^{-1}) = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b$$
bo'ladi, ya'ni (1.7.12) tenglik ham bajariladi.

Q.E.D.

Bundan buyon $b(a^{-1})$ o'rniga $\frac{b}{a}$ deb ham yozishga kelishib olamiz.

1.7.3 - tasdiq. *Har qanday a uchun*
$$0 \cdot a = 0 \tag{1.7.14}$$
tenglik o'rinli.

Haqiqatan ham,
$$0 = a - a = 1 \cdot a - a = (0 + 1) \cdot a - a = 0 \cdot a + 1 \cdot a - a = 0 \cdot a + a - a = 0 \cdot a.$$

Q.E.D.

Bu tasdiqdan 0 ning o'z teskarisiga ega emasligi va 0 *ga bo'lish amalini* aksiomalarni buzmasdan *aniqlab bo'lmasligi* kelib chiqadi.

1.7.4 - tasdiq *(Qisqartirish qoidasi).*
$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0). \tag{1.7.15}$$

Bu tasdiq, ab ko'paytma nol bo'lishi uchun, a yoki b lardan kamida bittasi nolga teng bo'lishi shartligini anglatadi. Haqiqatan ham, agar, misol uchun, $b \neq 0$ bo'lsa, M4 aksiomaga ko'ra b^{-1} mavjud va shuning uchun
$$a = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} = 0$$
bo'ladi.

Shunga o'xshash, agar $a \neq 0$ bo'lsa, $b = 0$ ekanligi isbotlanadi. Albatta, $a = 0$ va $b = 0$ hol ham bo'lishi mumkin.

Q.E.D.

1.7.5 - tasdiq. *Ixtiyoriy a va b lar uchun*
$$(-a)b = -(ab). \tag{1.7.16}$$

Chindan ham, distributivlik aksiomasiga ko'ra,
$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0b = 0,$$
shuning uchun $(-a)b$ element ab ga qarama-qarshi, ya'ni $(-a)b = -(ab)$.

Q.E.D.

Bundan buyon, $-(ab)$ elementni $-ab$ deb belgilashga kelishib olamiz.

1.7.6 - tasdiq. *Ixtiyoriy a uchun*

$$-(-a) = a. \tag{1.7.17}$$

Haqiqatan ham, (1.7.4) ta'rifga ko'ra,

$$a + (-a) = 0$$

va qo'shishning kommutativligiga ko'ra,

$$(-a) + a = 0,$$

ya'ni a element $(-a)$ ga qarama-qarshi, yoki (1.7.17) o'rinli.

Q.E.D.

1.7.7 - tasdiq. *Ixtiyoriy a va b lar uchun*

$$(-a)(-b) = ab. \tag{1.7.18}$$

Darhaqiqat, (1.7.16) va ko'paytirishning kommutativligidan

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[(-b)a] = -(-ab)$$

bo'ladi, va (1.7.17) ga ko'ra, (1.7.18) bajariladi.

Q.E.D.

Xuddi shu kabi, kiritilgan amallarning boshqa standart xossalari ham isbotlanadi. Xususan, a^n butun darajaning odatdagi barcha xossalari o'rinlidir. Bunda natural daraja induktiv ravishda kiritiladi, ya'ni

$$a^{n+1} = a^n a, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a^1 = a,$$

manfiy daraja esa $a \neq 0$ lar uchun $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in \mathbf{N}$, ko'rinishda aniqlanadi. Nihoyat odatdagidek, agar $a \neq 0$ bo'lsa, $a^0 = 1$ deb qabul qilinadi.

3. Yuqorida keltirilgan maydon aksiomalari ratsional sonlar yoki haqiqiy sonlar to'plamlarining to'la tavsifini bermaydi. Bu aksiomalarning yetishmasligi tufayli, ularni qanoatlantiradigan, lekin ratsional sonlar maydonidan ham, haqiqiy sonlar maydonidan ham jiddiy farq qiladigan boshqa maydonlar mavjud bo'lishi mumkin. Bunday maydonlarga misol sifatida kompleks sonlar maydonini keltirsak bo'ladi. Haqiqiy sonlar maydonining o'ziga xos tomoni shundan iboratki, ixtiyoriy ikki haqiqiy sonni taqqoslash mumkin, ya'ni ulardan qaysi biri ikkinchisidan katta yoki kichik ekanini aytsa bo'ladi.

Aytaylik, biror K maydonda tengsizlik munosabati «$<$» berilgan bo'lsin. Bunda $a < b$ yozuv a elementning b elementdan kichik ekanini anglatadi. Agar $<$ «kichik» munosabat kiritilgan bo'lsa, unga ko'ra $>$ «katta» munosabatni quyidagicha kiritish mumkin: agar $a < b$ bo'lsa, $b > a$ deymiz.

Qat'iy bo'lmagan $a \leq b$ tengsizlik $a < b$ yoki $a = b$ ekanini anglatadi:

$$(a \leq b) \quad \Leftrightarrow \quad (a < b) \vee (a = b).$$

Teskari $a \geq b$ tengsizlik ham xuddi shu singari ma'noga ega.

Qat'iy bo'lmagan «$\leq$» tengsizlikdan farqli «$<$» tengsizlikni ba'zan qat'iy tengsizlik ham deyishadi.

Nol element bilan taqqoslash yordamida musbat va manfiy elementlar kiritiladi. Chunonchi, a element noldan katta, ya'ni $a > 0$ bo'lsa, u *musbat* deyiladi. Agar b element noldan kichik, ya'ni $b < 0$ bo'lsa, u *manfiy* deyiladi.

Shuni alohida qayd etib o'tamizki, matematik tahlilni tushunish uchun tengsizliklar bilan bemalol munosabatda bo'la olishlik zarurdir.

Quyida biz tengsizliklarning asosiy xossalarini to'rtta aksioma ko'rinishda keltiramiz. Bu aksiomalrdan tengsizliklarning boshqa barcha zaruriy xossalarini keltirib chiqarish mumkin.

Tengsizliklar aksiomalari.

IN1) Ixtiyoriy ikki a va b elementlar uchun quyidagi uch munosabatdan bittasi va faqat bittasi o'rinlidir:

$$a = b, \qquad a < b, \qquad b < a.$$

Boshqacha ayitganda, istalgan ikki elementni taqqoslash mumkin.

Biz tengsizliklarni to'g'ri va noto'g'ri tengsizliklarga ajratamiz. Chunonchi, a element b elementdan kichik bo'lgan holda $a < b$ tengsizlik to'g'ri tengsizlik deyiladi, aks holda esa u noto'g'ri tengsizlik deyiladi.

IN2) (tranzitivlik) Agar $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, $a < c$ bo'ladi.

IN3) Agar $a < b$ bo'lsa, ixtiyoriy c uchun $a + c < b + c$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar to'g'ri tengsizlikni ikki tomoniga bir xil element qo'shsak, hosil bo'lgan tengsizlik yana to'g'ri bo'ladi.

IN4) Agar $a < b$ va $c > 0$ bo'lsa, $ac < bc$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar to'g'ri tengsizlikning ikki tomonini bir xil musbat elementga ko'paytirsak, natijada yana to'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan aksiomalarni qanoatlantiruvchi tengsizlik munosabati kiritilgan maydonga *tartiblangan maydon* deyiladi.

4. Tengsizlik aksiomalaridan kelib chiqadigan ba'zi natijalarni keltiramiz.

1 - natija. *Agar $a > 0$ bo'lsa, $-a < 0$ bo'ladi va aksincha, agar $a < 0$ bo'lsa, $-a > 0$ bo'ladi.*

Haqiqatan ham, agar $a > 0$ bo'lsa, **IN1** ga ko'ra $a \neq 0$. Agar $-a < 0$ noto'g'ri bo'lganda edi, $-a > 0$ to'g'ri bo'lar edi. Lekin bunda **IN3** va **IN2** larga ko'ra, $a + (-a) > a > 0$ bo'lishi kerak, bu esa $a + (-a) = 0$ tenglikka ziddir.

Agar $a < 0$ bo'lsa, tasdiq xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

Eslatib o'tamiz, $2 = 1 + 1$.

2 - natija. *Agar $a \neq 0$ bo'lsa, $a^2 > 0$ bo'ladi.*

Haqaqatan ham, $a > 0$ bo'lganda **IN4** aksiomaga ko'ra, $a^2 = a \cdot a > 0$. Agar $a < 0$ bo'lsa, 1 - natijaga ko'ra, $-a > 0$ tengsizlik bajariladi. Shunday ekan, 1.7.7 - tasdiqni va hozirgina qaralgan holni qo'llasak, talab qilingan

$$a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a) > 0$$

tengsizlikni olamiz.

3 - natija. $1 > 0$.

Haqiqatan ham, $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$.

Xuddi shu ravishda ixtiyoriy tartiblangan maydonning ratsional va haqiqiy sonlarga o'xshash boshqa xossalari ham isbotlanadi.

5. Ratsional yoki haqiqiy sonlar to'plami har qanday tartiblangan maydonga qaraganda turli xil xossalarga boyroq ekanligini qayd etamiz. Ana shu muhim xossalarga misol tariqasida Arximed aksiomasi deya atalmish quyidagi xossani keltiramiz.

Arximed aksiomasi. *Tartiblangan K maydonning har qanday a elementi uchun $a < n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n butun son topiladi.*

Arximed ushbu aksiomani geometrik atamalarda keltirgan: nurda birlik kesmani shuncha marta ketma-ket qo'yish mumkinki, natijada u ixtiyoriy oldindan berilgan nuqtadan o'tib ketadi.

Arximed aksiomasi o'rinli bo'lgan tartiblangan maydonga arximedcha tartiblangan maydon deyiladi. Masalan, ratsional sonlar to'plami ham, haqiqiy sonlar to'plami ham arximedcha tartiblangan maydonni tashkil qiladi.

6. Faraz qilaylik, K tartiblangan maydon bo'lib, $E \subset K$ ixtiyoriy to'plam bo'lsin.

Ta'rif. *Agar shunday $B \in K$ element mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \leq B$$

tengsizlik bajarilsa, E to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi.

B element E to'plamning yuqori chegarasi deyiladi.

Ta'rif. *Agar shunday $A \in K$ element mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \geq A$$

tengsizlik bajarilsa, E to'plam quyidan chegaralangan deyiladi.

A element E to'plamning quyi chegarasi deyiladi.

Ta'rif. *Agar to'plam yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan deyiladi.*

Shubhasiz, agar biror to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lib, B uning yuqori chegarasi bo'lsa, B dan katta ixtiyoriy element ham shu to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi. Boshqacha aytganda, yuqoridan chegaralangan to'plam cheksiz ko'p yuqori chegaraga ega. Shular ichida eng kichigi ayniqsa muhimdir.

Ta'rif. *Yuqoridan chegaralangan to'plamning aniq yuqori chegarasi deb yuqori chegaralarning eng kichigiga aytiladi.*

Boshqacha aytganda, agar M element quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa, u E to'plamnining aniq yuqori chegarasi deyilar ekan:

(i) ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$x \leq M$$

tengsizlik o'rinli;

(ii) ixtiyoriy $M' < M$ olganda ham shunday $x' \in E$ topiladiki, u uchun

$$x' > M'$$

tengsizlik bajariladi.

Bunda (i) - shart M element E to'plamning yuqori chegarasi ekanligini, (ii) - shart esa, ixtiyoriy undan kichikroq M' element yuqori chegara bo'la olmasligini, ya'ni M eng kichik yuqori chegara ekanligini anglatadi.

E to'plamning aniq yuqori chegarasi lotincha supremum so'zidan olingan $\sup E$ simvoli orqali belgilanadi.

Quyidan chegaralangan to'plamning aniq quyi chegarasi, yuqoridagiga o'xshash, quyi chegaralarning eng kattasi sifatida aniqlanadi. E to'plamning aniq quyi chegarsasi lotincha infimum so'zidan olingan $\inf E$ simvoli orqali belgilanadi.

Agar E to'plamining aniq yuqori chegarasi M shu to'plamning elementi bo'lsa, ya'ni $M \in E$ bo'lsa, M to'plamning maksimal elementi yoki sodda qilib maksimumi ham deb ataladi. Xuddi shu kabi minimal element yoki minimum aniqlanadi.

Ixtiyoriy tartiblangan K maydonda aniq yuqori va aniq quyi chegaralar orasida sodda bog'liqlik borligini ko'rsatamiz.

Istalgan $E \subset K$ to'plam uchun $-E$ simvol orqali

$$-E = \{x \in K : -x \in E\}$$

to'plamni belgilaymiz.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

1.7.9 - tasdiq. *Agar* $(-E) \subset K$ *to'plam aniq quyi chegaraga ega bo'lsa, u holda* E *to'plam aniq yuqori chegaraga ega bo'ladi va*

$$\inf(-E) \ = \ -\sup E$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar

$$a = \inf(-E)$$

bo'lsa, aniq quyi chegaraning ta'rifiga ko'ra, quyidagi ikki tengsizlik bajariladi:

1) istalgan $x \in E$ uchun

$$a \ \leq \ -x \ ;$$

2) istalgan $a' > a$ element olganda ham shunday $x' \in E$ elemet topiladiki, u uchun

$$-x' \ < \ a'.$$

Bu munosabatlarni quyidagi ko'rinishda qayta yozish mumkin:

1) istalgan $x \in E$ nuqta uchun

$$x \ \leq \ -a$$

tengsizlik o'rinli,

2) istalgan $a' > a$ (ya'ni $-a' < -a$) element olganda ham shunday $x' \in E$ element topiladiki, u uchun

$$x' \ > \ -a'$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu degani, $\sup E = -a$, ya'ni

$$a = -\sup E \ .$$

Q.E.D.

7. Yuqoridan chegaralangan to'plam doim ham aniq yuqori chegaraga ega bo'ladimi? Agar gap ixtiyoriy tartiblangan maydon to'g'risida ketsa, bu savolga javob, umaman aytganda, salbiy. Misol sifatida tartiblangan ratsional sonlar maydonini olish mumkin. Yuqorida qayd etilganidek, chegaralangan

$$E = \{x \in \mathbf{Q} : \quad x^2 < 2\}$$

to'plam na aniq yuqori va na aniq quyi chegaraga ega emas.

Bu to'plamning aniq yuqori chegarasi $\sqrt{2}$ soni bo'lishi mumkin edi, ammo bu son ratsional emas, shuning uchun, ratsional sonlar sinfida u «mavjud emas».

Bu misolda yuqoridan chegaralangan to'plamning aniq yuqori chegaraga ega emasligining sababi ratsional sonlar to'plamining to'la emasligidir. Shu munosabat bilan, barcha arximedcha tartiblangan maydonlar to'plamidan shundaylarini ajratib olaylikki, ularda har qanday yuqoridan chegaralangan to'plam aniq yuqori chegaraga ega bo'lsin. Chunonchi, ixtiyoriy tartiblangan maydon K uchun quyidagi aksiomani kiritamiz.

Aniq yuqori chegara prinsipi. *Tartiblangan maydonning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan, yuqoridan chegaralangan to'plami uchun aniq yuqori chegara mavjud.*

Ushbu aksioma o'rinli bo'lgan tartiblangan maydolar *to'la* deyiladi.

Shunday qilib, ratsional sonlarning tartiblangan maydoni to'la bo'lmasdan, haqiqiy sonlar maydoni esa, 1.4.1 - teoremaga ko'ra, to'ladir.

Aslida istalgan K to'la arximedcha tartiblangan maydon bilan yuqorida qurilgan $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Bunda K maydon ikki elementining yig'indisi ularga mos $\mathbf{R}$ maydon elementlari yig'indisiga mos keladi va K maydonning ikki elementi ko'paytmasiga $\mathbf{R}$ maydonning mos elementlari ko'paytmasi mos keladi. Bunday holda istalgan to'la arximedcha tartiblangan maydon $\mathbf{R}$ ga *izomorf* deyiladi.

Aksiomatik ravishda haqiqiy sonlarni kiritish usuli *ixtiyoriy to'la arximedcha tartiblangan maydonni haqiqiy sonlar to'plami deb e'lon qilishdan iboratdir.* Ammo bu usulda shunday to'plamning mavjudlik masalasi ochiq qoladi.

Bu masalaning yechimini muayyan haqiqiy sonlar to'plamini qurishdan iborat bo'lgan konstruktiv usul beradi. Bu usulni biz 1.4 paragrafda amalga oshirgan edik. Bunda bizdan serdiqqat mehnat va zerikarli mulohazalar talab qilinganiga guvoh bo'ldik. Ammo, bu ikki usulni taqqoslamoqchi bo'lsak, bu borada mashhur ingliz faylasufi va matematigi Bertran Rassel (1872-1970) so'zlarini keltirish foydalidir. U shunday degan edi: o'g'irlik halol mehnatdan qanday ustunliklarga ega bo'lsa, aksiomatik usul ham konstruktiv usuldan xuddi shunday ustunliklarga egadir.

Haqiqiy sonlar to'plamini qurishning yana bir konstruktiv usulini R.Dedekind taklif qilgan edi. Bu usulda haqiqiy sonlar ratsional sonlar to'plamimining kesimi sifatida kiritiladi. Ya'ni ratsional sonlar to'plami ikki o'zaro kesishmaydigan, birining elementlari ikkinchisining har bir elementidan katta bo'lgan qism to'plamlarga bo'linadi. Bu ikki konstruktiv usullar ma'lum ma'noda bitta natijaga olib kelishini ko'rsatish qiyin emas.

§ 1.8. Kompleks sonlar

1. Kompleks son tushunchasi.

Agar ikki haqiqiy a va b sonlar uchun qaysisi birinchi va qaysisi ikkinchiligi aniqlangan bo'lsa, bunday sonlarga tartiblangan juftlik deyiladi. Tartiblangan juftlikni biz (a, b) ko'rinishda yozamiz. Bunda a - birinchi va b - ikkinchi element.

1.8.1 - ta'rif. *Haqiqiy sonlarning tartiblangan juftligini* ***kompleks son*** *deb ataymiz.*

Shunday qilib, agar z - kompleks son bo'lsa, $z = (a, b)$ bo'ladi, bunda a va b - haqiqiy sonlar bo'lib, a - kompleks z sonining haqiqiy qismi va b esa uning mavhum qismi deyiladi. Haqiqiy va mavhum qisimlar uchun quyidagi belgilashlar ishlatiladi:

$$\operatorname{Re} z = a, \ \operatorname{Im} z = b. \tag{1.8.1}$$

1.8.2 -Ta'rif. *Agar ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlar uchun $a_1 = a_2$ va $b_1 = b_2$ tengliklar o'rinli bo'lsa, bunday kompleks sonlar teng deyiladi.*

1.8.3 - ta'rif. *Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning* ***yig'indisi*** *$z_1 + z_2$ deb quyidagi kompleks songa aytamiz:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, \ b_1 + b_2). \tag{1.8.2}$$

1.8.4 - ta'rif. *Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning* ***ko'paytmasi*** *$z_1 \cdot z_2$ deb quyidagi kompleks songa aytamiz:*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, \ a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{1.8.3}$$

Kompleks sonlar to'plami (1.8.2) va (1.8.3) tengliklar orqali kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallari bilan bergalikda $\mathbf{C}$ simvoli orqali belgilanadi. Bunda nol sifatida

$$\mathbf{0} = (0, 0)$$

son va bir sifatida

$$\mathbf{1} = (1, 0)$$

son olinadi.

1.8.1 - tasdiq. $\boldsymbol{C}$ - *kompleks sonlar to'plami maydonni tashkil etadi.*

Isbot haqiqiy sonlarning xossalarigan kelib chiqadi.

Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning ayirmasi

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$$

ekanligi to'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali tekshiriladi. Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning nisbati biroz murakkabroq ko'rinishga ega (bunda $z_2 \neq 0$ deb shart qo'yilagi):

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},\ \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

C maydonning $(a, 0)$ ko'rinishdagi elementini $a \in \mathbf{R}$ haqiqiy son deb hisoblaymiz va

$$(a, 0) = a$$

deb yozamiz.

Haqiqiy sonlar maydonidan o'laroq, kompleks sonlar maydoni tartiblangan emasligini qayd etish zarur.

1.8.5 - ta'rif. *Quyidagi kompleks son*

$$i = (0,\ 1) \tag{1.8.4}$$

mavhum bir *deyiladi.*

1.8.2 - tasdiq. *Quyidagi tenglik o'rinli:*

$$i^2 = -1. \tag{1.8.5}$$

Isbot. Kompleks sonlar ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = (-1,\ 0) = -1.$$

Q.E.D.

1.8.3 - tasdiq. *Istalgan* $z = (a, b)$ *kompleks son uchun*

$$z = a + ib \tag{1.8.6}$$

tenglik o'rinli

Isbot. Yig'indi va ko'paytma ta'riflariga ko'ra:

$$a + ib = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + b \cdot 1) =$$

$$= (a,0) + (0,b) = (a,b) = z.$$

Q.E.D.

1.8.3 - tasdiq biz uchun (1.8.6) ko'rinishdagi kompleks songa xuddi kvadrati -1 bo'lgan i mavhum bir qatnashgan haqiqiy son deb qarashga imkon beradi.

Kiritilgan belgilash va tushunchalardan foydalanib, (a_1, b_1) va (a_2, b_2) ikki kompleks sonlar uchun qo'shish va ko'paytirish amallarini quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

2. Kompleks son moduli.

1.8.6 - ta'rif. *Kompleks $z = a + ib$ songa **qo'shma** deb $\overline{z} = a - ib$ kompleks songa aytiladi.* Masalan, agar $z = 2 + 3i$ bo'lsa, $\overline{z} = 2 - 3i$ bo'ladi.

1 - eslatma. Istalgan kompleks z son uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z, \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}z. \tag{1.8.7}$$

2 - eslatma. Istalgan ikki z_1 va z_2 kompleks sonlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \tag{1.8.8}$$

(1.8.7) va (1.8.8) tengliklarning isboti bevosita hisoblash orqali amalga oshiriladi. Masalan, (1.8.8) - tengliklardan birinchisining haqligiga ishonch hosil qilaylik. Aytaylik, $z_1 = a_1 + b_1$ va $z_2 = a_2 + b_2$ bo'lsin. U holda, (1.8.3) ga ko'ra,

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

va shuning uchun,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

1.8.7 - ta'rif. *Kompleks $a+ib$ sonning **moduli** deb shunday manfiy bo'lmagan $|z|$ soniga aytiladiki, u uchun*

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \tag{1.8.9}$$

tenglik o'rinli.

Demak,

$$|z|^2 = |\mathrm{Re}z|^2 + |\mathrm{Im}z|^2.$$

Masalan, agar $z = 4 + 3i$ bo'lsa, $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ bo'ladi. Ravshanki, $|\overline{z}| = |z|$.

Kompleks son mudulining ta'rifidan bevosita quyidagi tengsizliklar kelib chiqadi:

$$|\mathrm{Re}z| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \le |z|. \tag{1.8.10}$$

Qo'shma son tushunchasidan foydalanib, ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar nisbatini quyidagi sodda ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Masalan,

$$\frac{2-3i}{4+3i} = \frac{(2-3i)\cdot(4-3i)}{|4+3i|^2} = \frac{-1-18i}{25}.$$

1.8.4 - tasdiq. *Istalgan ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{1.8.11}$$

Isbot. (1.8.9) modulning ta'rifiga ko'ra, (1.8.8) dagi tengliklardan

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1\overline{z_1} \cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

kelib chiqadi.

Q.E.D.

Ikki kompleks son yig'indisi moduli uchun o'rinli bo'lgan formula haqiqiy sonlar uchun ma'lum bo'lgan formuladan birmuncha farq qiladi.

1.8.5 - tasdiq. *Istalgan ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar uchun quyidagi formula o'rinli:*

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}). \tag{1.8.12}$$

Isbot. (1.8.9) modulning ta'rifiga ko'ra, (1.8.7) va (1.8.8) tengliklardan

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} =$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

kelib chiqadi.

Q.E.D.

1.8.6 - tasdiq. *Istalgan ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{1.8.13}$$

Isbot (1.8.12) tenglik va (1.8.10) tengsizliklardan kelib chiqadi:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \le$$

$$\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Q.E.D.

Natija. *Istalgan kompleks $z_1, z_2, ..., z_n$ sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \ \leq \ |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|. \tag{1.8.14}$$

3*. Kompleks sonning geometrik tildagi ifodalanishi.

Biz $\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligini barcha tartiblangan (x, y) juftliklar to'plami sifatida aniqlashimiz mumkin, bu yerda $x \in \mathbf{R}$ va $y \in \mathbf{R}$. Bunda tartiblangan (x, y) juftlikni tekislikning nuqtasi deb, x va y sonlarni esa, uning koordinatalari deymiz. Birinchi koordinatani ba'zan abssissa va ikkinchi koordinatani ordinata deb ham atashadi. Har qanday kompleks son haqiqiy sonlarning tartiblangan juftligi bo'lganligi sababli, ravshanki, kompleks sonlar to'plamini $\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligi deb qarasak bo'ladi. Bunda hosil bo'ladigan yagona farq shundan iboratki, kompleks sonlar uchun ko'paytirish amali aniqlangan, lekin koordinatalar tekisligidagi nuqtalar uchun esa, bunday amal aniqlanmagan.

Bunday mos qo'yishda kompleks sonning moduli qaralayotgan nuqtani koordinatalar boshi bilan bog'lovchi kesma uzunligiga teng bo'ladi.

Istalgan $z = a + ib$ kompleks sonni olaylik. $M -$ unga mos koordinatalar tekisligidagi (a, b) koordinatalik nuqta bo'lsin. Ox o'q va OM nur orasidagi burchak qiymatini φ orqali belgilaylik (bu burchak qiymatining haqiqiy sonlar nazariyasiga asoslangan ta'rifini 3 - bobda keltiramiz).

Ushbu φ burchak z kompleks sonning *argumenti* deyiladi va

$$\arg z \ = \ \varphi$$

ko'rinishda belgilanadi.

Agar trigonometrik funksiyalardan foydalanadigan bo'lsak, bu burchakning tangensi b ordinataning a abssissaga nisbatiga teng ekanini, ya'ni

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \tag{1.8.15}$$

ekanini ko'rish qiyin emas.

Masalan, agar $z = 1 + i$ bo'lsa, $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a} = 1$ va, natijada, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ bo'ladi.

Ikki kompleks son ko'paytirilgan vaqtda ularning argumentlari qo'shilishini, ya'ni

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \ = \ \arg z_1 \ + \ \arg z_2 \tag{1.8.16}$$

tenglikning 2π ga karralik qo'shiluvchi aniqligida bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Haqiqatan, agar $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ bo'lsa, $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ bo'ladi va shuning uchun,

$$\operatorname{tg}[\arg(z_1 \cdot z_2)] \ = \ \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \ = \ \frac{\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2}}{1 - \dfrac{b_1}{a_1} \cdot \dfrac{b_2}{a_2}} \ = \ \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Natijada, tangenslar yig'indisi uchun formuladan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\operatorname{tg}[\arg(z_1 \cdot z_2)] \ = \ \operatorname{tg}[\arg z_1 + \arg z_2].$$

Nihoyat, oxirgi tenglikda tangenslarni tashlab yuborsak, talab qilinayotgan (1.8.16) munosabatni olamiz.

§ 1.9. Misollar

1 - misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!,\ n \geq 1. \tag{1.9.1}$$

Ko'rsatma. Induksiya usulini qo'llab,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3,\ n \geq 1, \tag{1.9.2}$$

tengsizlikdan foydalaning.

2 - misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n \geq 1. \tag{1.9.3}$$

Ko'rsatma. Induksiya usulini qo'llang. Bunda chapdagi tengsizlikni ko'rsatish uchun (1.9.2) tengsizlikdan va o'ngdagi tengsizlikni isbotlash uchun esa,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2,\ n \geq 1, \tag{1.9.4}$$

tengsizlikdan foydalaning.

3 - misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$2^n > n^3, \quad n \geq 10. \tag{1.9.5}$$

Ko'rsatma. Agar $n = 10$ bo'lsa, $2^{10} = 1028$ va $10^3 = 1000$. Demak, bu holda (1.9.5) tengsizlik o'rinli ekan. Endi induksiya usulini qo'llab,

$$2n^3 > (n+1)^3, \quad n \geq 4,$$

tengsizlikdan foydalanish yetarlidir.

4 - misol. Agar $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ va barcha $x_j > 0$ bo'lsa,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \tag{1.9.6}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Quyidagi ko'rinishda induksiyani qo'llash mumkin. Tasdiq $n = 1$ uchun o'rinli, albatta. Endi tasdiqni n uchun o'rinli deb, uni $n+1$ uchun isbotlaymiz.

Avval n toq bo'lsin deylik. U holda $n + 1 = 2k$ va shuning uchun induksiya shartiga ko'ra,

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_n + x_{n+1}) \geq 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4} + \cdots + \sqrt{x_nx_{n+1}}) \geq 2k = n + 1,$$

chunki $\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \cdots \sqrt{x_nx_{n+1}} = 1$.

Endi n juft bo'lsin deylik. U holda $x_{n+2} = 1$ deb, yuqoridagi usulda tasdiqni $n + 2$ uchun isbotlash yetarli.

5 - misol. Agar $y_j > 0,\ j = 1, 2, \cdots, n$, bo'lsa,

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n} \tag{1.9.7}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Quyidagi

$$x_j = \frac{y_j}{\sqrt[n]{y_1 \cdot y_j \cdots y_n}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

belgilashdan foydalanib, yuqoridagi tasdiqni qo'llang.

6 - misol. Agar $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ va barcha $x_j > 0$ bo'lsa,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 2^n$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Quyidagi

$$\frac{1}{x_j}(1 + x_j)^2 = (1 + x_j)(1 + \frac{1}{x_j}) = 2 + (x_j + \frac{1}{x_j}) > 2^2$$

munosabatlarni o'zaro ko'paytiring.

7 - misol. Dirixle nomi bilan ataluvchi prinsip quyidagidan iborat: *agar $(n + 1)$ ta jismni n ta qutiga joylashtirilsa, shunday quti topiladiki, unda bittadan ortiq jism bo'ladi.*

Mana shu prinsipdan foydalanib, navbatdagi tasdiqni isbotlang. Har qanday musbat α va natural N uchun shunday natural m va n sonlar topiladiki, ular uchun $n \leq N$ va

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{1}{nN} \tag{1.9.8}$$

tengsizlik bajariladi.

Ko'rsatma. Har qanday x soni uchun uning kasr bo'lakchasi deb $\{x\} = x - [x]$ songa aytiladi, bu yerda $[x]$ orqali x sonining butun qismi belgilangan. Berilgan α haqiqiy son uchun $k = 0, 1, 2, ..., N$ larda $\{k\alpha\}$ kasr bo'lakchalarni qaraylik. Bu bo'lakchalarning hammasi $[0, 1)$ yarim intervalda yotadi. Endi $[0, 1)$ yarim intervalni N ta bo'lakka bo'lib, Dirixle prinsipidan foydalaning.

8 - misol. To'g'ri chiziqdagi o'zaro kesishmaydigan intervallar to'plami oshib borsa sanoqli ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Har bir shunday intervalga biror ratsional sonni mos qo'yish mumkinligini ko'rsating.

9 - misol. To'g'ri chiziqdagi har qanday sanoqsiz to'plam chegaralangan sanoqsiz qismiy to'plamga ega ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. Agar tasdiqning teskarisini faraz qilinsa, bunday to'plam sanoqli sondagi sanoqli to'plamlar birlashmasiga teng bo'lishini ko'rsating.

10 - misol. $[0, 1]$ kesma va $(0, 1)$ interval orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

Ko'rsatma. $[0, 1]$ kesmadagi irratsional sonlarni o'z o'rnida qoldirib, $[0, 1]$ kesmadagi va $(0, 1)$ intervaldagi ratsional sonlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

11 - misol. $[0, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziq va $(0, 1)$ interval orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

Ko'rsatma. $[0, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziq va $(0, 1)$ intervaldagi irratsional va ratsional nuqtalar orasida alohida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating. Irratsional nuqtalar orasida, masalan, quyidagi moslikni olish mumkin:

$$x = \frac{y}{1-y}, \ y = \frac{x}{1+x}, \ x \in (0, +\infty), \ y \in (0, 1).$$

II Bob. Sonli ketma-ketliklar

§ 2.1. Ketma-ketlik limiti

1. Sonli ketma-ketlik deb natural sonlar t'oplamida aniqlangan va haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ funksiyaga aytiladi. Agar $f(n) = x_n$ deb belgilasak, sonli ketma-ketlik deganda natural sonlar bilan nomerlangan quyidagi haqiqiy sonlar to'plamini tushunish mumkin:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{2.1.1}$$

Biz (2.1.1) sonli ketma-ketlikni qisqa qilib $\{x_n\}$ orqali belgilaymiz. Odatda formal qat'iylik tarafdorlari bu ketma-ketlikni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ko'rinishda, yoki, unga teng kuchli bo'lgan, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, ..., simvollar yordamida belgilashni afzal ko'rishadi. Lekin biz uni, albatta, agar bunda xato tushunishlarga yo'l qo'yilmasa, yuqoridagi ko'rinishda belgilaymiz. Bunda x_n sonni ketma-ketlikning n-elementi yo'ki hadi deb ataymiz.

Bundan buyon, «nomer» deganda biz natural sonni tushunamiz. Bundan tashqari, ushbu bobda sonli ketme-ketlikni biz ko'pincha qisqaroq qilib ketma-ketlik deb ataymiz.

Sonli ketma-ketliklar uchun tabiiy ravishda arifmetik amallarni aniqlash mumkin.

Ta'rif. *Ikki $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yig'indisi deb $\{x_n + y_n\}$ ketma-ketlikka aytamiz.*

Shunga o'xshash, ikki $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning ayirmasi deb $\{x_n - y_n\}$ ketma-ketlikka, ko'paytmasi deb $\{x_n y_n\}$ ketma-ketlikka va nisbati deb $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ ketma-ketlikka (oxirgi holda $\{y_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari noldan farqli deb talab qilish zarur, ya'ni $y_n \neq 0$) aytiladi.

Ketma-ketlikning eng asosiy xossasi - bu uni limitining mavjudligidir. Limit deganda shunday haqiqiy son tushuniladiki, unga ketma-ketlikning hadlari, ularning nomeri oshgan sari, istalgancha yaqinlashib boradi. Boshqacha aytganda, ixtiyoriy (istalgancha kichik bo'lgan) musbat (odatda bu sonni ε, ya'ni «epsilon» deb atalmish yunoncha harf bilan belgilashadi) son uchun ketma-ketlikning biror nomeri (ε ga bog'liq bo'lgan va odatda N orqali belgilanadigan) dan boshlab barcha hadlari limitdan o'sha musbat songa farq qilsin. Shunday qilib biz quyidagi ta'rifga kelamiz.

Ta'rif. *$\{x_n\}$ ketma-ketlik va a soni berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun*

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{2.1.2}$$

*tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deyiladi.*

Agar x_n ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, odatda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

deb yozishadi, yoki, ba'zan,

$$n \to \infty \quad \text{da} \quad x_n \to a$$

deb ham yozishadi.

Limitga ega bo'lgan ketma-ketliklar *yaqinlashuvchi* deb ataladi.

Ba'zan ketma-ketlik limitining ta'rifi sonlar o'qidagi nuqtalar atrofi tushunchalaridan foydalanib ham kiritiladi.

Ta'rif. *Sonlar o'qidagi x_0 nuqtaning **atrofi** deb shu nuqtani o'z ichiga oluvchi istalgan ochiq intervalga aytiladi.*

Agar bu interval $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ ko'rinishga ega bo'lib, bunda $\varepsilon > 0$ bo'lsa, bu interval x_0 nuqtaning ε atrofi deyiladi. Bu tushunchadan foydalanib limitning ta'rifini yana quyidagicha ham berish mumkin:

agar biror a son uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham ketma-kerlikning $N = N(\varepsilon)$ nomerdan boshlab barcha elementlari a nuqtaning ε atrofida joylashsa, u holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun a nuqtaning ε atrofidan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning oshib borsa chekli sondagi hadlari joylashsa, a son bu ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Yaqinlashuvchi eng sodda ketma-ketlik bu *statsionar* ketma-ketlikdir, ya'ni shunday $\{x_n\}$ ketma-ketlikki, uning barcha elementlari bitta songa teng: $x_n = c$. Ravshanki, $x_n = c$ statsionar ketma-ketlik yaqinlashadi va c soni uning limiti bo'ladi. Misol sifatida quyidagi ketma-ketlikni olish mumkin:

$$1,\ 1,\ 1,\ ...,\ 1, ...$$

Navbatdagi misol, sodda bo'lishiga qaramasdan, o'ta muhimdir.

2.1.1 - misol. $x_n = \dfrac{1}{n}$ ketma-ketlikning limiti 0 sonidir.

Haqiqatan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $N(\varepsilon)$ sifatida

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \tag{2.1.3}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural sonni olaylik.

U holda biz $n \geq N$ nomerlar uchun

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu esa 0 soni x_n ketma-ketligining limiti ekanini anglatadi.

Odatda $N(\varepsilon)$ sifatida (2.1.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi N natural sonlar ichidan eng kichigini olishga harakat qilinadi. Ravshanki,

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \tag{2.1.4}$$

aynan shunday sondir.

Bu yerda ixtiyoriy haqiqiy x son uchun $[x]$ simvol orqali uning *butun qismi*, ya'ni x dan oshib ketmaydigan eng katta butun son belgilangan. Misol uchun, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$, $[-3, 14] = -4$.

Albatta, har qanday ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lavermaydi. Misol uchun,

$$x_n = n$$

ketma-ketlik, ravshanki, limitga ega emas. Limitga ega bo'lmagan ketma-ketliklar *uzoqlashuvchi* deyiladi.

E'tibor bering, oxirgi ketma-ketlikning qiymatlar to'plami chegaralanmagan. Bir qarashda bu ketma-ketlik aynan shu sababli uzoqlashadi va agar bu to'plam chegaralangan bo'lganida edi, ketma-ketlik ham yaqinlashar edi, degan tasavvur hosil bo'lishi mumkin. Lekin aslida bunday emas.

Ta'rif. *Agar shunday $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari*

$$|x_n| \leq M \tag{2.1.5}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday ketma-ketlik ***chegaralangan*** *deyiladi.*

Chegaralangan ketma-ketlikka eng sodda misol bu istalgan statsionar ketma-ketlikdir. Masalan,

$$5, \ 5, \ 5, \ ..., \ 5, ...$$

Agar ketma-ketlik yaqinlashsa, yuqorida ko'rganimizdek, limitining ixtiyoriy ε atrofidan tashqarida ketma-ketlikning oshib borsa chekli sondagi elementlari yotadi. Bundan har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralangan ekanligi bevosita kelib chiqadi.

2.1.1 - tasdiq. *Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.*

Isbot. Faraz qilamiz, $\{x_n\}$ ketma-ketlik biror a songa yaqinlashsin, ya'ni istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topilsinki, $n \geq N$ bo'lganda (2.1.2) bajarilsin. Xususan, agar $\varepsilon = 1$ desak, shunday $N = N(1)$ nomer topiladiki, u uchun

$$|x_n - a| < 1, \quad n \geq N,$$

bo'ladi.

Shunday ekan, quyidagi

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a|$$

tengsizlikka ko'ra, xuddi o'sha n nomerlar uchun

$$|x_n| < |a| + 1, \quad n \geq N, \tag{2.1.6}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Endi

$$M = \max \{ \ |x_1|, \ |x_2|, ..., \ |x_{N-1}|, \ |a| + 1\} \tag{2.1.7}$$

deylik. Unda (2.1.6) va (2.1.7) larga ko'ra, istalgan n nomer uchun

$$|x_n| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Demak, x_n ketma-ketlik chegaralangan ekan.

Q.E.D.

Yuqorida bu tasdiqning teskarisi o'rinlimi degan savol qo'yilgan edi. Boshqacha aytganda, har qanday chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi? Navbatdagi misol bu savolga salbiy javob beradi.

2.1.2 - misol. Ushbu

$$x_n = (-1)^n$$

ketma-ketlik chegaralangan va uzoqlashuvchidir.

2. Ketma-ketliklar orasida nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar alohida o'rin tutadi.

Ta'rif. *Nol soniga yaqinlashuvchi ketma-ketlik* ***cheksiz kichik*** *deyiladi.*

Ushbu bandda biz cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalarini o'rganamiz. Qaralayotgan ketma-ketlikning cheksiz kichikligiga urg'u berish maqsadida uning hadlarini yunoncha harflar $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ va hakazolar bilan belgilaymiz.

Yuqorida keltirilgan ta'rifga ko'ra, agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $n \geq N$ bo'lganda

$$|\alpha_n| < \varepsilon \tag{2.1.8}$$

tengsizlik bajarilsa, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi.

Ravshanki, statsionar, ya'ni hamma hadlari o'zaro teng: $x_n = c$ bo'lgan ketma-ketlik faqat $c = 0$ bo'lgandagina cheksiz kichik bo'la oladi.

Cheksiz kichik ketma-ketliklarning quyidagi sodda, lekin shu bilan birga muhim xossasi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi.

2.1.2 - tasdiq. *Agar $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik*

$$|x_n| \leq |\alpha_n| \tag{2.1.9}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo'ladi.

Isbot. Cheksiz kichik ketma-ketlikning ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday nomer $N = N(\varepsilon)$ topiladiki, $n \geq N$ nomerlar uchun (2.1.8) tengsizlik bajariladi. Shunday ekan, (2.1.8) va (2.1.9) tengsizliklardan, $n \geq N$ bo'lganda

$$|x_n| \leq |\alpha_n| < \varepsilon$$

tengsizlik keilib chiqadi. Bu esa $x_n \to 0$ ni anglatadi.

Q.E.D.

2.1.3 - misol. $\{2^{-n}\}$ ketma-ketlik cheksiz kichikdir.

Haqiqatan, (1.1.12) ga ko'ra,

$$2^{-n} < \frac{1}{n}.$$

Endi talab qilinayotgan tasdiq $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligidan kelib chiqadi (2.1.1 - misolga qarang).

2.1.3 - tasdiq. *Ikki cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi ham, ayirmasi ham yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.*

Isbot. Aytaylik, α_n va β_n cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. Cheksiz kichik ketma-ketlik ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_1 nomer topiladiki, $n \geq N_1$ bo'lganda

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.10}$$

tengsizlik bajariladi. Xuddi o'sha $\varepsilon > 0$ uchun yana shunday N_2 nomer ham topiladiki, $n \geq N_2$ bo'lganda

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.11}$$

tengsizlik bajariladi.

Agar

$$N = \max\{\, N_1, \;\; N_2 \,\}$$

desak, $n \geq N$ bo'lganda har ikkala (2.1.10) va (2.1.11) tengsizliklar baravariga bajariladi.

Natijada,

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$$

tengsizlikdan foydalansak, (2.1.10) va (2.1.11) larga ko'ra,

$$|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon, \quad n \geq N \tag{2.1.12}$$

baho hosil bo'ladi.

Oxirgi (2.1.12) tengsizlik $\{\alpha_n + \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini anglatadi.

$\{\alpha_n - \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligi,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$$

tengsizlikdan foydalangan ravishda xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

Q.E.D.

2.1.4 - tasdiq. *Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ chegaralangan va $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. Chegaralangan ketma-ketlikning ta'rifiga binoan, biror $M > 0$ o'zgarmas uchun (2.1.5) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Cheksiz kichik ketma-ketlikning ta'rifiga ko'ra esa, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topiladiki, $n \geq N$ larda

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{2.1.13}$$

bo'ladi.

Natijada, (2.1.5) va (2.1.13) tengsizliklardan

$$|x_n\alpha_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad n \geq N$$

baho kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\alpha_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichikligini anglatadi.

Q.E.D.

Ta'kidlash joizki, istalgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni c songa ko'paytirishni biz $\{x_n\}$ ni statsionar $c, c, c, ...$ ketma-ketlikka ko'paytirish deb qarashimiz mumkin.

2.1.5 - tasdiq. *Ikki cheksiz kichik ketma-ketliklarning ko'paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.*

Isbot 2.1.1 - va 2.1.4 - tasdiqlardan darhol kelib chiqadi.

2.1.6 - tasdiq. *Agar $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ ketma-ketliklar cheksiz kichik bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik*

$$\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo'ladi.

Isbot. Ravshanki, tasdiq shartidan quyidagi qo'shaloq tengsizliklar kelib chiqadi:

$$-|\alpha_n| - |\beta_n| \leq x_n \leq |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Haqiqatan, masalan, o'ngdagi tengsizlik (chap qismi ham xuddi shunday isbotlanadi) quyidagicha o'rnatiladi:

$$x_n \leq \beta_n \leq |\beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Endi, agar o'rnatilgan tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan quyidagi

$$|x_n| \ \leq \ |\alpha_n| + |\beta_n|$$

ko'rinishda yozib olsak, talab qilinayotgan tasdiq 2.1.2 - va 2.1.3 - tasdiqlardan kelib chiqadi.

Q.E.D.

Eslatma. Isbotlangan tasdiq matematikada «ikki militsioner prinsipi» deb ataluvchi quyidagi matematik folklorning xususiy holidir: agar qochuvchi (ya'ni x_n) hamma vaqt 0 manzilga intiluvchi ikki militsioner (ya'ni α_n va β_n) orasida bo'lsa, qochuvchi ham oxir-oqibat shu manzilga keladi.

3. Endi istalgan yaqinlashuvchi ketma-ketliklarni o'rganishga o'tamiz. Bunda bizning asosiy qurolimiz cheksiz kichik ketma-ketliklarning yuqorida o'rnatilgan xossalari bo'ladi.

Avvalo, navbatdagi tasdiq o'rinli ekanini qayd etamiz.

2.1.7 - tasdiq. *$\{x_n\}$ ketma-ketlik a songa yaqinlashishi uchun $\{x_n - a\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot limit va cheksiz kichik ketma-ketlik ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik faqat va faqat quyidagi

$$x_n = a + \alpha_n$$

ko'rinishga ega bo'lgandagina a songa yaqinlashadi, bunda $\{\alpha_n\}$ - biror cheksiz kichik ketma-ketlik.

Endi biz yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalarni isbot qila olamiz.

2.1.1 - teorema. *Ikki yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yig'indisi ham yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indining limiti limitlar yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.1.14}$$

Isbot. Faraz qilaylik, $x_n \to a$ va $y_n \to b$ bo'lsin. U holda, 2.1.7 - tasdiqqa asosan,

$$x_n = a + \alpha_n \tag{2.1.15}$$

va

$$y_n = b + \beta_n \tag{2.1.16}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ - cheksiz kichik ketma-ketliklar.

Avvalgi band natijalarini hisobga olib, bu ikki tengliklarni qo'shsak,

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + \gamma_n$$

tenglik hosil bo'ladi, bunda $\{\gamma_n\}$ - cheksiz kichik ketma-ketlik.

O'rnatilgan tenglik, 2.1.7 - tasdiqqa ko'ra, $\{x_n + y_n\}$ ketma-ketlikning $a + b$ songa yaqinlashishini anglatadi.

Q.E.D.

2.1.2 - teorema. *Ikki yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar ko'paytmasi yana yaqinlashuvchi bo'lib, ko'paytma limiti limitlar ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.1.17}$$

Isbot. Faraz qilamiz, $x_n \to a$ va $y_n \to b$ bo'lsin. U holda, 2.1.7 - tasdiqqa asosan, (2.1.15) va (2.1.16) tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu ikki tengliklarni o'zaro ko'paytirib, oldingi band natijalarini hisobga olsak,

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n = ab + \gamma_n$$

bo'ladi, bu yerda $\{\gamma_n\}$ - biror cheksiz kichik ketma-ketlik.

O'rnatilgan tenglik, 2.1.7 - tasdiqqa ko'ra, $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlik ab songa yaqinlashishini anglatadi.

Q.E.D.

Natija. *$\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda, ixtiyoriy λ va μ haqiqiy sonlar uchun $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu xossaga limitga o'tish amalining chiziqliligi deyiladi.

Xususan, $\lambda = 1$ va $\mu = -1$ bo'lganda oxirgi tenglikdan

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n \tag{2.1.18}$$

munosabatni olamiz.

4. Ikki yaqinlashuvchi ketma-ketliklar nisbatini o'rganishga o'tamiz. Bunda maxrajda turgan ketma-ketlikning barcha hadlari va uning limiti noldan farqli bo'lishi zarur.

2.1.1 - lemma. *Berilgan $\{y_n\}$ ketma-ketlik $b \neq 0$ songa yaqinlashsin. U holda, shunday N nomer topiladiki, barcha $n \geq N$ lar uchun*

$$|y_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0 \tag{2.1.19}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Limit ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topiladiki, u uchun

$$|y_n - b| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon),$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan

$$|y_n| = |b + y_n - b| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \varepsilon, \quad n \geq N,$$

kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ desak, talab qilingan (2.1.19) tengsizlikni olamiz.

Q.E.D.

Eslatma. Isbotlangan lemma, xususan, noldan farqli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik faqat chekli sondagi nolga teng hadlarga ega bo'lishi mumkinligini anglatadi.

Endi ikki ketma-ketlik nisbatining limiti haqidagi teoremani isbotlashimiz mumkin.

2.1.3 - teorema. *Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik a songa va $\{y_n\}$ ketma-ketlik esa $b \neq 0$ songa yaqinlashsin. U holda biror nomerdan boshlab $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik aniqlangan bo'lib, u $\dfrac{a}{b}$ songa yaqinlashadi.*

Isbot. Shartga ko'ra, $x_n \to a$ va $y_n \to b$ bo'lsin. U holda 2.1.7 - tasdiqqa asosan, (2.1.15) va (2.1.16) tengliklar bajariladi. Shunday ekan, 2.1.1 - lemmaga asosan biror nomerdan boshlab quyidagi tengliklarni yozishimiz mumkin:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n}.$$

Agar biz bu tenglikda $\gamma_n = \alpha_n - (a/b)\beta_n$ deb belgilasak, u holda γ_n - cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lib,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \gamma_n \cdot \frac{1}{y_n} \tag{2.1.21}$$

tenglik bajariladi.

2.1.1 - lemmaga ko'ra $\{1/y_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan, shuning uchun 2.1.4 - tasdiqdan (2.1.21) ning o'ng qismi cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Q.E.D.

Shunday qilib, 2.1.3 - teoremaga asosan, nisbatning limiti limitlar nisbatiga teng ekan.

Shubhasiz, agar y_n ketma-ketlikning barcha elementlari noldan farqli bo'lsa, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik barcha n larda aniqlangan bo'ladi.

Shunga ahamiyat berish joizki, agar biz ketma-ketlikning istalgan chekli sondagi elementlarini o'zgartirsak, uning yaqinlashish xossasi va limiti o'zgarmaydi. Xususan, agar ketma-ketlikning chekli sondagi elementlari nolga teng bo'lsayu, biz ularni, masalan, birlar bilan almashtirsak, natijada nolga teng bo'lmagan elementlardan iborat yangi ketma-ketlik olamiz va eski bilan yangi ketma-ketliklar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashuvchi bo'ladilar. Bundan tashqari, bordiyu ular yaqinlashsa, ularning limitlari o'zaro teng bo'ladi.

5. Ushbu bandda biz tengsizliklarda limitga o'tishni o'rganamiz.

2.1.2 - lemma. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a songa yaqinlashib, $x_n \geq 0$ bo'lsa, u holda $a \geq 0$ bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra $x_n \geq 0$ va $x_n \to a$ bo'lsin. Demak, limit ta'rifiga asosan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topiladiki,

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

bo'ladi.

1.3.2 - tasdiqdan bu tengsizlikning quyidagi qo'shaloq tengsizlikka ekvivalent ekanligini olamiz:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon. \tag{2.1.22}$$

Shunday ekan, $x_n \geq 0$ shartdan va (2.1.22) ning o'ng tomonidagi tengsizlikdan,

$$\varepsilon + a > x_n \geq 0, \quad \text{ya'ni} \quad \varepsilon + a > 0$$

bahoni hosil qilamiz, bundan chiqdi, istalgan musbat ε uchun

$$a > -\varepsilon \tag{2.1.23}$$

tengsizlik o'rinli bo'lar ekan.

Oxirgi tengsizlik a son har qanday manfiy sondan katta ekanini anglatadi va shuning uchun u manfiy bo'la olmaydi. Demak, $a \geq 0$.

Q.E.D.

2.1.4 - teorema (tengsizliklarda limitga o'tish haqida). *Agar ikki yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning barcha hadlari*

$$x_n \leq y_n \tag{2.1.24}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, ularning limitlari ham shu tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.1.25}$$

Isbot. (2.1.24) ga ko'ra $y_n - x_n \geq 0$ tengsizlik o'rinli va shuning uchun, 2.1.2 - lemmaga asosan,

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) \geq 0.$$

Endi (2.1.18) tenglikni qo'llab, talab qilingan (2.1.25) munosabatni olamiz.

Q.E.D.

Eslatma. Agar (2.1.24) shartni qat'iy $x_n < y_n$ tengsizlikka o'zgartirsak, bundan, umuman aytganda, limitlar uchun ham qat'iy tengsizlik kelib chiqmaydi. Masalan, agar $x_n = 0$ va $y_n = \dfrac{1}{n}$ ketma-ketliklarni olsak,

$$x_n < y_n,$$

biroq

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Navbatdagi teorema matematik tahlilda muhim rol o'ynaydi.

2.1.5 - teorema. *Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar bitta songa yaqinlashsib, $\{z_n\}$ ketma-ketlik*

$$x_n \le z_n \le y_n \tag{2.1.26}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham xuddi o'sha songa yaqinlashadi.

Isbot. Shartga ko'ra, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar limiti a soni bo'lsin. Shunday ekan, (2.1.26) tengsizlikdan

$$x_n - a \le z_n - a \le y_n - a \tag{2.1.27}$$

munosabat kelib chiqadi.

2.1.7 - tasdiqqa asosan, $\{x_n - a\}$ va $\{y_n - a\}$ ketma-ketliklar cheksiz kichik bo'ladi. Demak, (2.1.27) va 2.1.6 - tasdiqqa ko'ra, $\{z_n - a\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo'ladi, ya'ni $z_n \to a$.

Q.E.D.

Eslatma. Isbotlangan teorema yuqorida keltirilgan «ikki militsioner prinsipi» ning yana bir ko'rinishi: agar qochuvchi (ya'ni z_n) hamma vaqt biror a manzilga intiluvchi ikki militsioner (ya'ni x_n va y_n) orasida bo'lsa, qochuvchi ham oxir-oqibat shu manzilga keladi.

§ 2.2. Monoton ketma-ketliklar

1. Sonli ketma-ketliklarni o'rganishdagi asosiy muammo - bu ular limitining mavjudligi haqidagi muammodir. Umumiy holda bu masalani hal qilish ancha murakkab bo'lsada, lekin ketma-ketliklarning ba'zi sinflari uchun u nisbatan oson yechiladi. Ayniqsa monoton ketma-ketliklar uchun limitning mavjudlik muammosi sodda yechimga ega.

Ta'rif. *Agar barcha n nomerlar uchun*

$$x_n \le x_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2.1}$$

tengsizliklar bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni ***o'suvchi*** *deymiz.*

Agarda quyidagi qat'iy

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.2.2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni *qat'iy o'suvchi* deymiz.

Masalan, $x_n = n$ ketma-ketlik qat'iy o'suvchidir.

Kamayuvchi ketma-ketliklar ham shunga o'xshash aniqlanadi.

Ta'rif. *Agar barcha n nomerlar uchun*

$$x_n \geq x_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.2.3}$$

tengsizliklar bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni ***kamayuvchi*** *deymiz.*

Agarda quyidagi qat'iy

$$x_n > x_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.2.4}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni *qat'iy kamayuvchi* deymiz.

O'suvchi ketma-ketliklarni va kamayuvchi ketma-ketliklarni *monoton* ketma-ketliklar deyiladi. Ba'zan, qat'iy o'suvchi va qat'iy kamayuvchi ketma-ketliklar *qat'iy monoton* ketma-ketliklar deyiladi.

E'tibor bering, yuqoridagi ta'riflarga asosan statsionar ketma-ketlik ham o'suvchi, ham kamayuvchi bo'ladi.

2.2.1 - misol. $x_n = \dfrac{1}{n}$ qat'iy kamayuvchi ketma-ketlikdir.

2.1.1 - tasdiqda har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'lishini ko'rdik. Buning teskarisi o'rinli emasligiga esa chegaralangan va uzoqlashuvchi $x_n = (-1)^{n+1}$ ketma-ketlik misolida ishonch hosil qildik.

Bu misolning o'ziga xosligi shundan iboratki, uning hadlari nol atrofida goh o'sib va goh kamayib o'zgarmas amplituda bilan tebranadi. Boshqacha aytganda, bu ketma-ketlik monoton emas. Qizig'i shundaki, agar ketma-ketlik monoton bo'lsa, uning yaqinlashishi uchun chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli ekan.

2. Shu munosabat bilan yuqoridan yoki quyidan chegaralangan ketma-ketlik tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. *Agar shunday B soni mavjud bo'lsaki, barcha n nomerlar uchun*

$$x_n \leq B \tag{2.2.5}$$

shart bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka ***yuqoridan chegaralangan*** *deyiladi.*

Xuddi shu singari quyidan chegaralangan ketma-ketlik aniqlanadi.

Ta'rif. *Agar shunday A soni mavjud bo'lsaki, barcha n nomerlar uchun*

$$x_n \geq A \tag{2.2.6}$$

shart bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka ***quyidan chegaralangan*** *deyiladi.*

Har qanday monoton ketma-ketlik hech bo'lmaganda bir tomondan chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lsa, ixtiyoriy n nomer uchun

$$x_n \geq x_1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni ketma-ketlik quyidan x_1 soni orqali chegaralangan. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lsa, ixtiyoriy n nomer uchun

$$x_n \leq x_1$$

tengsizlik bajariladi, ya'ni ketma-ketlik yuqoridan x_1 soni orqali chegaralangan.

Shunday qilib, monoton ketme-ketlikning chegaralanganligini talab qilmoqchi bo'lsak, u o'suvchi bo'lganda yuqoridan chegaralanganlikni (chunki quyidan u shundoq ham chegaralangan), kamayuvchi bo'lganda esa quyidan chegaralanganlikni talab qilish yetarli.

Navbatdagi teoremani biz an'anaviy ko'rinishda keltiramiz.

2.2.1 - teorema. *Yuqoridan chegaralangan har qanday o'suvchi ketma-ketlik yaqinlashadi.*

Isbot. Shartga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsin, ya'ni (2.2.1) va (2.2.5.) shartlar bajarilsin.

E simvoli orqali $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qiymatlar to'plamini , ya'ni sonlar o'qining barcha x_n nuqtalardan iborat qismiy to'plamini belgilaymiz. (2.2.5) ga ko'ra, E to'plam yuqoridan chegaralangan va shuning uchun, 1.4.1 - asosiy teoremaga binoan, bu to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud.

Mana shu aniq yuqori chegarani

$$a = \sup\ E$$

deb belgilab, $x_n \to a$ ekanini isbotlaymiz.

Aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra,

$$x_n \leq a, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.2.7}$$

Yana o'sha aniq yuqori chegaraning ta'rifiga asosan (§ 1.2, (ii) shartga qarang), istalgan $\varepsilon > 0$ uchun E to'plamning $a-\varepsilon$ nuqtadan o'ngda joylashgan kamida bitta nuqtasi mavjud. Agar x_N shunday nuqta bo'lsa,

$$a - \varepsilon < x_N$$

tengsizlik bajariladi.

$\{x_n\}$ o'suvchi ketma-ketlik bo'lgani uchun bu tengsizlikni ketma-ketlikning nomeri N dan katta bo'lgan barcha elementlari ham qanoatlantiradi, ya'ni

$$a - \varepsilon < x_n, \quad n \geq N. \tag{2.2.8}$$

Shunday ekan, $n \geq N$ bo'lganda har ikkala (2.2.7) va (2.2.8) tengsizliklar bir vaqtda bajariladi, ya'ni

$$a - \varepsilon < x_n \leq a, \quad n \geq N.$$

Bundan chiqdi,

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

tengsizlik ham o'rinli bo'lar ekan. Bu tengsizlik esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning a soniga yaqinlashishini anglatadi.

Q.E.D.

Natija. *Quyidan chegaralangan har qanday kamayuvchi ketma-ketlik yaqinlashadi.*

Haqiqatan, quyidan chegaralangan har qanday kamayuvchi $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashishini ko'rsatish uchun, $x_n = -y_n$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligini qayd etib, unga 2.2.1 - teoremani qo'llash yetarli.

Eslatma. Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, biror a songa yaqinlashsa, u holda quyidagi tengsizliklarning bajarilishi turgan gap:

$$a_n \leq a, \quad n = 1, 2, 3...$$

Xuddi shunga o'xshash, $\{b_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, biror b songa yaqinlashsa,

$$b_n \geq b, \quad n = 1, 2, 3...$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

3. Yuqoridagi 2.2.1 - teoremani qo'llashga misol keltiramiz.

2.2.2 - misol. Quyidagi

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \tag{2.2.9}$$

ketma-ketlikning yaqinlashishini ko'rsatamiz.

1) O'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} \tag{2.2.10}$$

tenglikdan $s_{n+1} > s_n$ tengsizlikni olamiz, ya'ni $\{s_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ekan.

2) Endi bu ketma-ketlining yuqoridan chegaralangan ekanini isbotlaymiz. Buning uchun

$$s_n \leq 3 - \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{2.2.11}$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatish yetarli.

(2.2.11) bahoni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. Agar $n = 1$ bo'lsa, bu baho tenglikka aylanib, u haqiqatan o'rinli bo'ladi.

Endi (2.2.11) bahoni $n = k$ da to'g'ri deb, uning $n = k + 1$ da ham bajarilishini ko'rsatish oson. Haqiqatan, farazimizga ko'ra, (2.2.10) tenglikdan

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} = 3 - \frac{k}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{(k+1)!}$$

hosil bo'ladi, ya'ni (2.2.11) tengsizlik $n = k + 1$ uchun ham to'g'ri ekan.

Demak, matematik induksiya prinsipiga asosan, (2.2.11) baho istalgan $n \in \mathbf{N}$ da bajariladi.

Shunday qilib, $\{s_n\}$ ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanini ko'rsatdik. Bundan chiqdi, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

(2.2.9) ketma-ketlik limiti e harfi bilan belgilanadi. E'tibor bering, bu son uchun (2.2.9) tenglik va (2.2.11) tengsizlikdan bevosita

$$2 \leq e \leq 3$$

baho kelib chiqadi.

4. Navbatdagi misolda shunday ketma-ketlik keltirilganki, agar biz uning yaqinlashishini isbotlay olsak, u holda uning limiti oson topiladi.

2.2.3 - misol. Quyidagi

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right), \quad x_0 = c, \tag{2.2.12}$$

munosabat bilan aniqlangan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ketma-ketlik istalgan $c > 0$ boshlang'ich qiymat uchun yaqinlashishini isbotlang.

Shuni aytish kerakki, bunday aniqlangan ketma-ketlikda x_{n+1} ni hisoblash uchun oldingi x_n ga qaytib, (2.2.12) formuladan foydalanish zarur. Shuning uchun, bunday ketma-ketliklar qaytadigan yoki *rekurrent* (yunoncha *recurrere* - qaytmoq so'zidan olingan) ketma-ketlik deb ataladi. Bunda $(n+1)$ - elementni birinchi n ta element orqali aniqlaydigan formulaga rekurrent formula deyiladi.

1) Avval $x_0 > 0$ ni har qanday tanlaganda ham $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik quyidan $\sqrt{b}$ son bilan chegaralanganini ko'rsatamiz, ya'ni birinchi nomerdan boshlab

$$x_n \ \geq \ \sqrt{b}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.2.13}$$

tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz.

Buning uchun istalgan musbat haqiqiy t soni uchun o'rinli bo'lgan

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \ = \ 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \ \geq \ 1, \quad t > 0, \tag{2.2.14}$$

tengsizlikdan foydalanamiz.

Agar (2.2.12) da mos almashtirishlarni bajarib, (2.2.14) tengsizlikni qo'llasak, talab qilingan bahoni olamiz:

$$x_{n+1} \ = \ \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{x_n}\right) \geq \sqrt{b}. \tag{2.2.11}$$

2) Endi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanini ko'tsatish oson. Haqiqatan, (2.2.12) rekurrent formulaga ko'ra,

$$x_n - x_{n+1} \ = \ \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{b}{x_n}\right) \ = \ \frac{x_n^2 - b}{2x_n} \ \geq \ 0$$

va demak, $x_{n+1} \leq x_n, \ n = 1, 2, 3, ...$

Shunday qilib, 2.2.1 - teoremaning natijasiga asosan, $\{x_n\}$ ketma-ketlik biror haqiqiy a soniga yaqinlashadi. Bundan chiqdi, (2.2.12) rekurrent formulada limitga o'tsak,

$$a \ = \ \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right)$$

tenglikni olamiz. Bundan $a = \sqrt{b}$ ekani kelib chiqadi. Ixtiyoriy musbat sonning kvadrat ildizini taqribiy hisoblashning ushbu usulini buyuk ingliz olimi I. N'yuton taklif qilgan.

Qayd qilamizki, (2.2.12) rekurrent formula kvadrat ildizni taqribiy hisoblashning zamonaviy kalkulyatorlarda qo'llashga qulay algoritmini beradi.

§ 2.3. Ichma-ich joylashgan kesmalar prinsipi

Sonlar o'qida ixtiyoriy ikki $[a_1, b_1]$ va $[a_2, b_2]$ kesmalarni qaraylik. Agar

$$a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$$

bo'lsa, $[a_2, b_2]$ kesmani $[a_1, b_1]$ kesma ichida joylashgan deymiz.

Ravshanki, $[a_2, b_2]$ kesmaning $[a_1, b_1]$ kesma ichida joylashishi uchun $[a_2, b_2]$ kesmaning har bir nuqtasi $[a_1, b_1]$ kesmaga ham tegishli bo'lishi, ya'ni

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Navbatdagi teorema cheksiz ko'p ichma-ich joylashgan kesmalar ketma-ketligi haqida bo'lib, u bir qator tadbiqlarga egadir.

2.3.1 - teorema (ichma-ich joylashgan kesmalar prinsipi). *Agar $[a_n, b_n] \subset \boldsymbol{R}$ kesmalarning har biri o'zidan avvalgisini ichiga joylashgan bo'lib, ya'ni*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \tag{2.3.1}$$

bo'lib, ularning uzunligi nolga intilsa, bu kesmalar ketma-ketligining barchasiga tegishli bo'lgan c nuqta mavjud va yagonadir.

Isbot. Ravshanki, (2.3.1) munosabat

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$$

tengsizliklarning bajarilishini anglatadi.

Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va $\{b_n\}$ ketma-ketlik esa kamayuvchi ekan. Bundan tashqari, kesmaning ta'rifiga ko'ra, istalgan n uchun

$$a_n < b_n \tag{2.3.2}$$

tengsizliklar bajariladi.

Modomiki $\{b_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi ekan, $b_n \leq b_1$ tengsizlik bajariladi va (2.3.2) ga ko'ra,

$$a_n < b_1$$

bo'ladi.

Bundan chiqdi, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, 2.2.1 - teoremaga ko'ra, u yaqinlashuvchi bo'ladi. Xuddi shunga o'xshab, $\{b_n\}$ ketma-ketlikning quyidan chegaralangan va yaqinlashuvchi ekanini ko'rsatish mumkin.

Shartga ko'ra, kesmalarning uzunligi nolga intiladi, ya'ni

$$(b_n - a_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Shunday ekan, $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yagona limitga intiladi. Biz bu limitni c harfi bilan belgilaymiz, ya'ni

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Endi, 2.2.1 - teoremadan so'ng keltirilgan eslatmaga ko'ra,

$$a_n \leq c \leq b_n$$

tengsizlik bajarilishini qayd etamiz. Bu tengsizlik esa, o'z navbatida, c nuqtaning har bir $[a_n, b_n]$ kesmaga tegishli ekanini anglatadi. Bundan tashqari, c nuqtaning yagona ekani ikki turli nuqta bir vaqtning o'zida uzunligi istalgancha kichik bo'lgan kesmalarga tegishli bo'la olmasligidan kelib chiqadi.

Q.E.D.

Eslatma. Bu teoremada kesmalar o'rniga intervallarni olish mumkin emas. Chunonchi, quyidagi ichma-ich joylashgan intervallar $(0, \frac{1}{n})$ ketma-ketligini qaraylik. Bu intervallarning har biri avvalgisi ichiga joylashgan bo'lib, ularning uzunligi nolga intiladi. Lekin bu intervallarning barchasiga tegishli bo'lgan nuqta mavjud emas. Boshqacha aytganda, bu intervallar barchasining kesishmasi bo'sh to'plamdir.

§ 2.4. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari

1. Ushbu paragrafda biz yaqinlashmaydigan ketma-ketliklarni o'rganamiz. Ko'p-gina amaliy masalalarni yechishda aynan shunday ketma-ketliklarni o'rganishga to'g'ri keladi. Ba'zan bu ketma-ketliklar biror songa yaqinlashishi uchun ularni «qismlarga ajratish» yetarli bo'ladi. Ana shu o'rinda hosil bo'ladigan limitlarga qismiy limitlar deyiladi.

Ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi deyilar edi. Ravshanki, agar ketma-ketlik yaqinlashsa, u yagona limitga ega. Haqiqatan ham, agar u ikkita a va b limitlarga ega deb faraz qilsak,

$$x_n = a + \alpha_n = b + \beta_n$$

bo'ladi va bundan

$$b - a = \alpha_n - \beta_n \to 0$$

ni olamiz. Demak, $b - a = 0$, ya'ni $b = a$ ekan.

Ammo uzoqlashuvchi ketma-ketliklarda qismiy limitlar ko'p bo'lishi mumkin. Qismiy limitga aniq ta'rif berish uchun qismiy ketma-ketlik tushunchasini kiritamiz.

Ixtiyoriy qat'iy o'suvchi $\{k_n\}$ natural sonlar ketma-ketligini tanlaymiz, ya'ni

$$k_1 < k_2 < ... < k_n < ...$$

Ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsa, $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **qismiy ketma-ketligi** deyiladi.*

Masalan, $\{x_{2n-1}\}$ va $\{x_{2n}\}$ ketma-ketliklar berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har xil, ya'ni biri toq nomerdagi va ikkinchisi juft nomerdagi elementlaridan tashkil topgan ikki qismiy ketma-ketliklaridir.

Ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning a soniga yaqinlashuvchi $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketligi mavjud bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **qismiy limiti** deyiladi.*

2.4.1 - misol. $x_n = (-1)^n$ bo'lsin. U holda juft nomerli

$$x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

qismiy ketma-ketlik 1 soniga yaqinlashadi, toq nomerli

$$x_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$$

qismiy ketma-ketlik esa -1 soniga yaqinlashadi. Shuning uchun 1 va -1 sonlar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limitlari bo'ladi.

2. Endi ketma-ketlik uchun limit nuqta tushunchasini kiritamiz. Dastlab, yozuvni soddalashtirish maqsadida, quyidagi atamalashga kelishib olaylik.

Faraz qilaylik, E - sonlar o'qining ixtiyoriy qismiy to'plami va $\{x_n\}$ - biror ketma-ketlik bo'lsin. Agar shunday cheksiz ko'p turli nomerlar topilsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning bu nomerlarga mos kelgan elementlari E to'plamga tegishli bo'lsa, biz E to'plamda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotadi deymiz.

Bu kiritgan ta'rifimiz to'plamlar nazariyasida qabul qilingan an'anaviy atamadan farq qiladi. Misol uchun, agar E to'plam faqat bitta $x = 1$ nuqtadan iborat bo'lsa, to'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan, u cheksiz ko'p nuqtaga ega bo'la olmaydi. Ammo, yuqoridagi kelishuvga ko'ra, E to'plamda $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p, ya'ni barcha juft nomerli elementlari yotadi.

Sonlar o'qidagi a nuqtaning atrofi deb shu nuqtani o'z ichiga oluvchi ixtiyoriy intervalga aytilishini eslatamiz. Biz a nuqtaning ε-atrofi deganda $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ intervalni tushunamiz va bunda doim $\varepsilon > 0$ deb hisoblaymiz.

Ta'rif. *Agar a nuqtaning ixtiyoriy ε-atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementi joylashsa, a nuqta berilgan ketma-ketlikning **limit nuqtasi** deyiladi.*

Masalan, 1 va -1 nuqtalar $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtalaridir. Bu ketma-ketlik uchun limit nuqtalar to'plami qismiy limitlar to'plami bilan ustma-ust tushishi tasodifiy emas. Chunonchi, quyidagi ikki tasdiq o'rinli.

2.4.1 - tasdiq. *Har qanday ketma-ketlikning qismiy limiti shu ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limiti bo'lsin, ya'ni, a ga yaqinlashuvchi $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketlik mavjud bo'lsin. Shunday ekan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $\{x_{k_n}\}$ ketma-ketlikning biror nomerdan boshlab barcha elementlari a nuqtaning ε- atrofida yotadi. Demak, shu ε atrofda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotadi, ya'ni a - ketma-ketlikning limit nuqtasi ekan.

Q.E.D.

Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli.

2.4.2 - tasdiq. *Har qanday ketma-ketlikning limit nuqtasi shu ketma-ketlikning qismiy limiti bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'lsin, ya'ni a nuqtaning istalgan ε-atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotsin.

Musbat ε ga ketma-ket $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots$ qiymatlarni berib, shunday $\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)$ intervallarni olamizki, bu intervallarning har birida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotadi.

Birinchi $(a-1,\ a+1)$ intervalda ketma-ketlikning k_1 nomerli biror elementini tanlaymiz, ikkinchi $\left(a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right)$ intervalda $k_2 > k_1$ nomerli, uchinchi $\left(a-\frac{1}{3},\ a+\frac{1}{3}\right)$ intervalda $k_3 > k_2$ nomerli, ..., n- interval $\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)$ da $k_n > k_{n-1}$ nomerli va hokazo elemetlarni tanlaymiz. Natijada shunday $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketlik olamizki,

$$x_{k_n} \in \left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)$$

bo'ladi.

Demak,

$$|x_{k_n} - a| < \frac{1}{n},$$

ya'ni $\{x_{k_n}\}$ ketma-ketlik a songa yaqinlashadi. Bu esa, o'z navbatida, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limiti ekanini anglatadi.

Q.E.D.

3. Umuman aytganda, har qanday ketma-ketlikda qismiy limitlar ko'p bo'lishi mumkin, ammo ularning ichida eng kattasi va eng kichigi ayniqsa katta ahamiyatga egadir.

Ta'rif. *Ketma-ketlikning eng katta qismiy limiti bu ketma-ketlikning **yuqori limiti** deyiladi.*

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limitini $\overline{a}$ desak, u quyidagi

$$\overline{a} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \tag{2.4.1}$$

simvol orqali belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash ketma-ketlikning quyi limiti aniqlanadi.

Ta'rif. *Ketma-ketlikning eng kichik qismiy limiti bu ketma-ketlikning **quyi limiti** deyiladi.*

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyi limitini $\underline{a}$ desak, u quyidagi

$$\underline{a} = \varliminf_{n\to\infty} x_n \tag{2.4.2}$$

simvol orqali belgilanadi.

Yuqorida ikkita qismiy limitga ega bo'lgan ketma-ketlikka misol sifatida $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlik keltirilgan edi. Bu misolda qismiy limitlar 1 va -1 ga teng. Ravshanki, bu holda

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Albatta, o'z-o'zidan quyidagi savol tug'uladi: har qanday ketma-ketlikda ham limit nuqtalar bormi? Agar ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, bu savolga javob ijobiy bo'lar ekan. Bu natija bir-biridan bog'liqsiz ravishda chex matematigi B. Bol'sano va nemis matematigi K. Veyershtrass tomonlaridan isbotlangan. Aslida, biz bu yerda bundanda umumiyroq navbatdagi tasdiqni isbotlaymiz. Shuni aytish lozimki, bordiyu ketma-ketlik yagona limit nuqtaga ega bo'lsa, uning yuqori va quyi limitlari o'zaro teng bo'lib, ular ana shu nuqtadan iborat bo'ladi.

2.4.1 - teorema. *Har qanday chegaralangan ketma-ketlik yuqori va quyi limitlarga ega.*

Isbot. Shartga ko'ra, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin deylik, ya'ni shunday A va B o'zgarmaslar mavjudki, ular uchun

$$A \le x_n \le B$$

munosabat o'rinli.

Bu tengsizliklar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari $[A,\ B]$ kesmada yotishini anglatadi.

Avval biz $[A,\ B]$ kesmani $\dfrac{A+B}{2}$ nuqta orqali ikkita teng kesmalarga ajratamiz. Bu ikki kesmalardan ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlarini o'z ichiga olganini $[a_1,\ b_1]$ simvol orqali belgilaymiz. Bordiyu, har ikkala kesma ham ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementini o'z ichiga olsa, $[a_1,\ b_1]$ sifatida bu kesmalardan o'ng tomondagisini olamiz.

So'ngra, tanlangan $[a_1,\ b_1]$ kesmani ikkita teng kesmaga bo'lamiz va $[a_2,\ b_2]$ simvoli orqali ulardan ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlarini o'z ichiga olganini belgilaymiz. Yana, bordiyu, har ikkala kesma ham ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlarini o'z ichiga olsa, $[a_2,\ b_2]$ sifatida bu kesmalardan o'ng tomondagisini olamiz.

Bu jarayonni davom ettirib, biz shunday ichma-ich joylashgan kesmalar ketma-ketligini olamizki, bunda n- qadamda qurilgan $[a_n,\ b_n]$ kesma uzunligi $\dfrac{B-A}{2^n}$ ga teng bo'lib, u $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlarini o'z ichiga oladi, bundan tashqari, b_n nuqtadan o'ngda ketma-ketlikning oshib borsa chekli sondagi elementlari yotadi.

Ichma-ich joylashgan kesmalar prinsipiga (2.3.1 - eorema) asosan, $[a,\ b]$ ning barcha kesmalariga tegishli bo'lgan c nuqta mavjud va yagona. Aynan shu c nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun c nuqtaning ixtiyoriy ε-atrofini qaraymiz. Ravshanki, biror nomerdan boshlab (ya'ni $b_n - a_n < \varepsilon$ bo'lgan nomerdan boshlab), barcha $[a_n,\ b_n]$ kesmalar ana shu ε-atrofda yotadi. Shunday ekan, quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

1) c nuqtaning ε-atrofida qaralayotgan ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotadi;

2) c nuqtani ε-atrofining o'ngida qaralayotgan ketma-ketlikning, oshib borsa, chekli sondagi elementlari yotadi.

Demak, c nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning eng katta limit nuqtasi ekan, bundan, 2.4.2 - tasdiqqa ko'ra, c soni ushbu ketma-ketlikning yuqori limiti bo'lishi kelib chiqadi.

Quyi limitning mavjudligi xuddi shunga o'xshash ko'rsatiladi.

Q.E.D.

Isbotlangan teoremaning natijasi sifatida Bol'sano-Veyershtrass teoremasini mumtoz ko'rinishida keltiramiz.

2.4.2 - teorema (B. Bol'sano, K. Veyershtrass.) *Har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.*

Isbot 2.4.1 - teoremadan bevosita kelib chiqadi.

4. Yuqori va quyi limitlarning o'zaro teng bo'lishi ketma-ketlikning yaqinlashishini anglatadi.

2.4.3 - teorema. *Ketma-ketlik faqat va faqat chegaralangan bo'lib, uning yuqori limiti quyi limitiga teng bo'lgandagina yaqinlashadi.*

Isbot. 1) Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashsin. U holda, birinchidan, 2.1.7 - tasdiqqa ko'ra, bu ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Ikkinchidan, yaqinlashuvchi ketma-ketlikning istalgan qismiy ketma-ketligi, ravshanki, ketma-ketlik limitiga yaqinlashadi. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik yagona limit nuqtaga ega bo'lib, uning yuqori limiti quyi limitiga teng bo'ladi.

2) Endi, faraz qilaylik, $\{x_n\}$ chegaralangan bo'lib, uning yuqori va quyi limitlari bitta a soniga teng bo'lsin. Yuqori limit ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun a nuqta ε-atrofining o'ngida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning oshib borsa chekli sondagi elementlari yotishi mumkin. Endi, quyi limit ta'rifiga ko'ra, a nuqta ε- atrofining chapida ham ketma-ketlikning oshib borsa chekli sondagi elementlari yotishi mumkin. Demak, biror nomerdan boshlab, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari a nuqtaning ε-atrofida yotar ekan. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning a soniga yaqinlashishini anglatadi.

Q.E.D.

5. Yuqori va quyi limit xossalarini o'rganishga o'tamiz. Avval quyidagi sodda tasdiqdan boshlaymiz.

2.4.3 - tasdiq. *Har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun quyidagi*

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\varliminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \varliminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} x_n \tag{2.4.3}$$

tengliklar o'rinli.

Isbot. Ravshanki, $\{x_n\}$ va $\{-x_n\}$ ketma-ketliklar bir xil sondagi limit nuqtalarga ega. Shuningdek, agar a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'lsa, $-a$ nuqta $\{-x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, (2.4.3) tengliklar o'rinli ekan.

Q.E.D.

Yuqori va quyi limitlar bilan limitlarga qaraganda ehtiyotlik bilan munosabatda bo'lish zarur. Masalan, (2.1.17) tenglikka o'xshash tenglik yuqori limitlar uchun o'rinli emas. Haqiqatan, $x_n = (-1)^n$ va $y_n = (-1)^{n+1}$ deylik. U holda

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 1,$$

biroq $x_n + y_n = 0$ va shuning uchun,

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0.$$

Demak, bu misolda

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \ < \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Umumiy holda ketma-ketliklar yig'indisining yuqori va quyi limitlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli ekanini ko'rsatish oson:

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \ \le \ \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

va

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \ \ge \ \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

Keyinchalik bizga quyidagi tasdiq muhim bo'ladi.

2.4.4 - tasdiq. *Agar ixtiyoriy ikki chegaralangan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar*

$$x_n \le y_n, \qquad n = 1, 2, 3... \tag{2.4.4}$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \ \le \ \varlimsup_{n\to\infty} y_n, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n \ \le \ \varliminf_{n\to\infty} y_n \tag{2.4.5}$$

tengsizliklar bajariladi.

Boshqacha aytganda, agar ikki chegaralangan ketma-ketlik tengsizlik belgisi bilan bog'langan bo'lsa, yuqori va quyi limitlar uchun ham bu tengsizliklar saqlanadi.

Isbot. 1) Faraz qilaylik, a - $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti va b - $\{y_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $b+\varepsilon$ nuqtadan o'ngda $\{y_n\}$ ketma-ketlikning oshib borsa chekli sondagi elementlari yotadi. Haqiqatan, aks holda Bo'lsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra, b sonidan katta qismiy limit mavjud bo'lar edi.

Demak, biror nomerdan boshlab quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$y_n \;\leq\; b+\varepsilon.$$

Shunday ekan, (2.4.4) shartga ko'ra, biror nomerdan boshlab quyidagi tengsizlik ham bajariladi:

$$x_n \;\leq\; b+\;\varepsilon.$$

Demak, bu tengsizlikni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha limit nuqtalari ham qanoatlantiradi va, xususan, uning yuqori limiti ham qanoatlantiradi, ya'ni

$$a \;\leq\; b+\varepsilon.$$

Bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligini hisobga olsak, $a \leq b$ tengsizlik kelib chiqadi.

2) Endi quyi limitlar uchun talab qilinyotgan munosabat 2.4.3 - tasdiqdan bevosita kelib chiqadi:

$$-\varliminf_{n\to\infty} y_n \;=\; \varlimsup_{n\to\infty}(-y_n) \;\leq\; \varlimsup_{n\to\infty}(-x_n) \;=\; -\varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

ya'ni (2.4.5) ning o'ng tomonidagi tengsizlik ham o'rinli ekan.

Q.E.D.

6. Yuqoridagi tasdiqning tadbiqi sifatida navbatdagi muhim misolni keltiramiz.

2.4.2 - misol. Quyidagi ketma-ketlikni qaraymiz:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.4.6}$$

Bu ketma-ketlikning yaqinlashishini va u 2.2.2 - misolda o'rganilgan

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{2.4.7}$$

ketma-ketlik bilan bitta limitga ega ekanini isbotlaymiz.

Ma'lumki, N'yuton binomi formulasi quyidagi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^n b^{n-k}$$

ko'rinishga ega. Agar bu formulada $a = \dfrac{1}{n}$ va $b = 1$ desak,

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bundan $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n$ tenglikni qo'llab,

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \tag{2.4.8}$$

munosabatni olamiz.

1) (2.4.7) va (2.4.8) tengliklardan

$$e_n \le s_n, \quad n = 1, 2, 3... \tag{2.4.9}$$

kelib chiqadi.

2) Endi istalgan m nomerni tayinlab, (2.4.8) yig'indida hadlarini sonini m ta had qolguncha kamaytiramiz. U holda istalgan $n > m$ uchun (2.4.8) dan

$$e_n \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \ge$$

$$\ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{m-1}{n}\right)^{m-1} \ge \left(1-\frac{m}{n}\right)^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$e_n \ge \left(1-\frac{m}{n}\right)^{m} s_m, \quad n > m. \tag{2.4.10}$$

3) Biz 2.2.2 - misolda $\{s_n\}$ ketma-ketlikning $e \le 3$ soniga yaqinlashishini ko'rsat-gan edik. Bundan, albatta, ketma-ketlikning yuqori limiti ham e soniga tengligi kelib chiqadi. Shunday ekan, 2.4.4 - tasdiqni qo'llab, (2.4.9) dan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} e_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} s_n = e \tag{2.4.11}$$

munosabatni olamiz.

Ravshanki, ixtiyoriy tayinlangan m uchun (2.4.10) ning o'ng tomoni $n \to \infty$ da s_m ga yaqinlashadi. Shuning uchun, yana 2.4.4 - tasdiqqa ko'ra, (2.4.10) dan

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} e_n \ge s_m$$

kelib chiqadi, va bundan, $m \to \infty$ da

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} e_n \ge e \tag{2.4.12}$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Nihoyat,(2.4.11) va (2.4.12) munosabatlarni taqqoslab,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} e_n \le e \le \underline{\lim_{n\to\infty}} e_n \tag{2.4.13}$$

tengsizliklarni olamiz.

Albatta, yuqori limit quyi limitdan kichik bo'la olmaydi. Demak, (2.4.13) dan ikkala qismiy limitlar tengligi kelib chiqadi, ya'ni 2.4.3 - teoremaga ko'ra, e_n ketma-ketlik yaqinlashar va uning limiti e soni bo'lar ekan.

§ 2.5. Koshi kriteriysi

1. Yuqorida qayd qilganimizdek, berilgan ketma-ketlikning yaqinlashish yoki yaqinlshmasligini aniqlash ketma-ketliklar nazariyasining eng muhim masalalardan biridir. Bu masalaning qanchalik murakkabligini ko'z oldimizga keltirish maqsadida quyidagi ikki savolga javob berishga urinib ko'raylik:

1) $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan a soniga yaqinlashadimi?

2) $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashadimi?

Bir qarashda, bu ikki savol bir-biridan deyarli farq qilmaydi, biroq ular orasidagi farq javob qidirishni boshlashimiz bilan ko'zga yaqqol tashlanadi.

Birinchi savolga javob berish uchun x_n ketma-ketlikdan berilgan a sonni ayirib, $\{x_n - a\}$ ketma-ketlikning nolga intilishini tekshirishimiz kerak. Agar u nolga intilsa, savolga javor ijobiy, bordiyu intilmasa, jovob salbiy bo'ladi.

Ikkinchi savolga javob berish uchun esa, har bir haqiqiy a sonni olib, $\{x_n - a\}$ ketma-ketlikni nolga intilishini tekshirishimiz kerak. Agar u nolga yaqinlashmasa, haqiqiy sonlarni tanlashni toki $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashadigan sonni topgunga qadar davom ettirish kerak. Bordiyu barcha haqiqiy sonlarni tekshirib ko'rganimizda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashadigan son topilmasa, bu ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi.

Albatta, hech kim bu usulda ketma-ketlik yaqinlashishini tekshirmaydi. Buning sababi shundaki, fransuz matematigi Ogyusten Koshi ketma-ketlikning limiti bo'lishi mumkin bo'lgan sonni bilmasdan turib, ketma-ketlikning yaqinlashishini aniqlash usulini topishga muyassar bo'lgan. Gap shundaki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning hadlari «zichlashishi» zarur, ya'ni uning elementlari bir-biri atrofida to'planishi kerak. Qizig'i shundaki, bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli ekan, ya'ni agar ketma-ketlik hadlari «zichlashsa», u yaqinlashar ekan.

Ilmiy adabiyotda biror hodisa ro'y berishining zaruriy va yetarli alomati *kriteriy* (yunoncha kriterion - qat'iy qaror degani) deyiladi. Shuning uchun, O.Koshi topgan yaqinlashish alomatini kriteriy ham deb atashadi.

Albatta, ketma-ketlikning yaqinlashishini ta'minlaydigan bir qancha shartlar mavjud. Bulardan biri yuqorida ko'rsatilganidek monotonlik va chegaralanganlik shartidir. Ammo, buday shartlar zaruriy bo'lmasdan, faqat yetarlidir. Shu sababli ular kriteriy bo'la olmaydi.

2. Koshi kriteriysini keltirishdan avval, Koshi ketma-ketligi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. *$\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday nomer $N = N(\varepsilon)$ topilsaki, barcha $n \geq N$ va $m \geq N$ lar uchun*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad n \geq N, \quad m \geq N, \tag{2.5.1}$$

*tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **Koshi ketma-ketligi** deb ataladi.*

Eslatma. Matematik adabiyotda Koshi ketma-ketligi ba'zan *fundamental ketma-ketlik* ham deyiladi.

2.5.1 - tasdiq. *Har qanday Koshi ketma-ketligi chegaralangandir.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - Koshi ketma-ketligi bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday nomer $N = N(\varepsilon)$ topiladiki, u uchun (2.5.1) shart bajariladi. Agar bu shartda $m = N$ desak, $n \geq N$ lar uchun

$$|x_n| \leq |x_N| + \varepsilon, \quad n \geq N, \tag{2.5.2}$$

tengsizlikni olamiz.

Demak, agar

$$M = \max\{\ |x_1|,\ |x_2|,\ ...,\ |x_{N-1}|,\ |x_N| + \varepsilon\ \}$$

deb belgilasak, barcha $n \in \mathbf{N}$ nomerlarda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$|x_n| \leq M, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketligining chegaralanganligini anglatadi.

Q.E.D.

2.5.2 - tasdiq. *Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik Koshi ketma-ketligidir.*

Isbot. Shartga ko'ra, $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lib, a soni uning limiti bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday nomer $N = N(\varepsilon)$ topiladiki, u uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geq N, \tag{2.5.3}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun, agar qandaydir boshqa nomer m ham $m \geq N$ shartni qanoatlantirsa,

$$|x_m - a| < \varepsilon, \qquad m \geq N, \tag{2.5.4}$$

tengsizlik bajariladi.

(2.5.3) va (2.5.4) tengsizliklardan

$$|x_n - x_m| < 2\varepsilon, \qquad n \geq N,$$

kelib chiqadi, va demak, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, $\{x_n\}$ - Koshi ketma-ketligi ekan.

Q.E.D.

3. 2.5.2 - tasdiqqa teskari bo'lgan tasdiq, ya'ni har qanday Koshi ketma-ketligining yaqinlashuvchi ekanligi haqiqiy sonlar nazariyasidagi eng ajoyib natijadir.

2.5.1 - teorema (Koshi kriteriysi). *Ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning Koshi ketma-ketligi bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1) Zarurligi 2.5.2 - tasdiqda isbotlandi.

2) Yetarliligi. Har qanday $\{x_n\}$ Koshi ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlaymiz. Ta'rifga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday nomer $N = N(\varepsilon)$ topiladiki, u uchun (2.5.1) shart bajariladi. 2.5.1 - tasdiqqa asosan esa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan, va shuning uchun, 2.4.1 - teoremaga ko'ra, u yuqori $\overline{a}$ va quyi $\underline{a}$ limitlarga ega. Ikkita $\{x_{n_k}\}$ va $\{x_{m_k}\}$ qismiy ketma-ketliklarni shunday tanlab olamizki,

$$x_{n_k} \to \overline{a}, \qquad x_{m_k} \to \underline{a} \tag{2.5.5}$$

munosabatlar o'rinli bo'lsin.

Endi (2.5.1) da $n = n_k$ va $m = m_k$ deb olib, k ni cheksizlikka intiltirsak, (2.5.5) ga ko'ra,

$$|\overline{a} - \underline{a}| \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, $\overline{a} = \underline{a}$ tenglikni olamiz. Demak, 2.4.3 - teoremaga asosan, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi ekan.

Q.E.D.

4. Navbatdagi misol Koshi kriteriysining imkoniyatlarini namoyish qiladi.

2.5.1 - misol. Quyidagi

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\theta_n}{(n+1)^2}, \qquad n \in \mathbf{N}, \qquad x_1 = 1, \tag{2.5.6}$$

rekurrent formula orqali aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qaraylik, bu yerda $\{\theta_n\}$ - elementlari faqat ikki: $+1$ yoki -1 qiymatni qabul qiladigan ketma-ketlik. Masalan, $\theta_n = (-1)^n$ yoki $\theta_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}$, bu yerda $[x]$ simvoli x sonining butun qismini anglatadi.

Bunday aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashishini isbotlaymiz. Bu ketma-ketlik, umuman aytganda, monoton bo'lmaganligi uchun, biz monoton ketma-ketliklar uchun o'rinli bo'lgan natijalardan foydalana olmaymiz. Shu sababli Koshi kriteriysini qo'llaymiz.

Agar $m > n$ desak, u holda, ravshanki,

$$x_m = x_n + \frac{\theta_n}{(n+1)^2} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\theta_{m-1}}{m^2}.$$

Shuning uchun,

$$|x_m - x_n| \ \leq \ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}. \tag{2.5.7}$$

Endi quyidagi

$$\frac{1}{(n+1)^2} \ < \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

munosabatni (2.5.7) ning o'ng tomonidagi har bir hadga qo'llasak,

$$|x_m - x_n| \ < \ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)$$

ni olamiz.

Qavslarni ochib, mos hadlarni qisqartirsak,

$$|x_m - x_n| \ < \ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

hosil bo'ladi.

Demak,

$$|x_m - x_n| \ < \ \frac{1}{n}, \quad m > n. \tag{2.5.8}$$

Bu tengsizlikdan $\{x_n\}$ ning Koshi ketma-ketligi ekanligi bevosita kelib chiqadi. Shunday ekan, bu ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

§ 2.6. Chegaralanmagan ketma-ketliklar

Hozirgacha biz faqat chegaralangan ketma-ketliklarni o'rgandik. Biroq ko'pgina masalalarni yechayotganda chegaralanmagan ketma-ketliklarga ham duch kelamiz. Mantiqan chegaralanmagan ketma-ketlik - bu chegaralangan bo'lmagan ketma-ketlik bo'lishi kerakligidan quyidagi ta'rifni olamiz.

Ta'rif. *Agar istalgan haqiqiy A soni uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamida bitta x_n elementi topilsaki, u uchun*

$$|x_n| \ > \ A \tag{2.6.1}$$

*tengsizlik bajarilsa, bu ketma-ketlik **chegaralanmagan** deyiladi.*

Ravshanki, har qanday ketma-ketlik yoki chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'ladi.

2.6.1 - misol. $x_n = n^{(-1)^n}$ ketma-ketlikni olib, uning bir nechta boshlang'ich hadlarini yozaylik:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 6,\ \frac{1}{7},...$$

Bu ketma-ketlikning chegaralanmaganligi aniq. Shu bilan birga, uning toq nomerli $\{x_{2n-1}\}$ hadlari tashkil qilgan qismiy ketma-ketligi cheksiz kichikdir:

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},...$$

Esltma. 1.6.1 - teoremaga asosan, elementlari barcha ratsional sonlardan iborat bo'lgan $\{r_n\}$ ketma-ketlik mavjud. Boshqacha aytganda, bu ketma-ketlik quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

(i) har bir r_n - ratsional son,

(ii) har bir ratsional son biror r_n bilan ustma-ust tushadi,

(iii) agar $n \neq m$ bo'lsa, $r_n \neq r_m$ bo'ladi.

Aniqki, bu ketma-ketlik chegaralanmagan va, qizig'i shundaki, uning limit nuqtalari **R** sonlar o'qi bilan ustma-ust tushadi.

Chegaralanmagan ketma-ketliklar ichida eng ahamiyatlisi cheksiz katta ketma-ketliklardir.

Ta'rif. *Agar istalgan haqiqiy A soni uchun shunday $N = N(A)$ nomer topilsaki, barcha $n \geq N$ larda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari*

$$|x_n| \ > \ A, \quad n \geq N, \tag{2.6.2}$$

*tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik **cheksiz katta** deyiladi.*

Quyidagi tasdiqqa asosan, cheksiz katta ketma-ketliklarni o'rganishni, ma'lum ma'noda, cheksiz kichik ketma-ketliklarni o'rganishga olib kelish mukin.

2.6.1 - teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo'lsa, biror nomerdan boshlab $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik aniqlangan bo'lib, u cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra, $\{x_n\}$ - cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ uchun (2.6.2) da $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ desak, biror $N = N(\varepsilon)$ nomerdan boshlab,

$$|x_n| \ > \ \frac{1}{\varepsilon}\,, \quad n \geq N,$$

baho o'rinli bo'ladi.

Demak, $n \geq N(\varepsilon)$ larda $\{x_n\}$ ketma-ketlik elementlari noldan farqli bo'lib,

$$\frac{1}{|x_n|} \ < \ \varepsilon\,, \quad n \geq N, \tag{2.6.3}$$

shartni qanoatlantiradi. (2.6.3) tengsizlik esa $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik ekanini anglatadi.

Q.E.D.

Teskari tasdiq o'rinli bo'lishi uchun biz ketma-ketlikning elementlari noldan farqli bo'lsin degan tabiiy qo'shimcha shartni talab qilishimiz zarur.

2.6.2 - teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lib, biror nomerdan boshlab $x_n \neq 0$ shart bajarilsa, u holda shu nomerdan boshlab $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik aniqlangan bo'lib, u cheksiz katta bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra, $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. Bundan chiqdi, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topiladiki, $n \geq N$ larda

$$|x_n| \ < \ \varepsilon \tag{2.6.4}$$

tengsizlik bajariladi.

Yana shartga ko'ra, kerak bo'lsa N nomerni kattaroq olib, biz $n \geq N$ larda $x_n \neq 0$ shart bajariladi deb hisoblashimiz mumkin. Agar A avvaldan berilgan ixtiyoriy musbat son bo'lsa, (2.6.4) da $\varepsilon = \dfrac{1}{A}$ deb, $n \geq N = N(A)$ lar uchun

$$|x_n| \ < \ \frac{1}{A}$$

tengsizlikni olamiz. Uni quyidagi ko'rinishda qayta yozishimiz mumkin:

$$\frac{1}{|x_n|} > A, \quad n \geq N.$$

Bu tengsizlik esa $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz katta ketma-ketlik ekanini anglatadi.

Q.E.D.

Cheksiz katta ketma-ketlikka misol sifatida $x_n = (-1)^n \cdot n$ ketma-ketlikni, ya'ni

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ ...$$

ketma-ketlikni olish mumkin.

E'tibor bering, bu ketma-ketlikning hadlari cheksiz marta ishorasini o'zgartira-yapti. Elemetlari chekli sonda ishorasini o'zgartiradigan cheksiz katta ketma-ketliklar alohida sinfni tashkil qiladi. Bunday ketma-ketliklarni, o'z navbatida, ikki sinfga ajratish mumkin:

birinchi sinfga biror nomerdan boshlab barcha elementlari musbat bo'lgan cheksiz katta ketma-ketliklarni kiritamiz;

ikkinchi sinfga esa, biror nomerdan boshlab barcha elementlari manfiy bo'lgan cheksiz katta ketma-ketliklarni kiritamiz.

Ta'rif. *Agar istalgan haqiqiy A soni uchun shunday $N = N(A)$ nomer topilsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari $n \geq N$ larda*

$$x_n > A, \quad n \geq N, \tag{2.6.3}$$

*tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik $+\infty$ **ka intiluvchi** deyiladi.*

Bunda quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Bunday ketma-ketlikka eng sodda misol sifatida $x_n = n$ ketma-ketlikni olish mumkin.

Ta'rif. *Agar istalgan haqiqiy A soni uchun shunday $N = N(A)$ nomer topilsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari $n \geq N$ larda*

$$x_n < A, \quad n \geq N, \tag{2.6.4}$$

*tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik $-\infty$ **ka intiluvchi** deyiladi.*

Bunda quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Bunday ketma-ketlikka eng sodda misol sifatida $x_n = -n$ ketma-ketlikni olish mumkin.

Yuqoridagi ta'riflar qismiy limit tushunchasini kengaytirib, ular safiga $+\infty$ va $-\infty$ simvollarni qo'shishga imkon beradi.

Ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan $+\infty$ ka intiluvchi, ya'ni*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$$

bo'lgan $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, bu ketma-ketlik uchun $+\infty$ yuqori limit deyiladi.

Bunda quyidagicha yoziladi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty.$$

Masalan, $x_n = (-1)^n n$ ketma-ketlik uchun $+\infty$ yuqori limit bo'ladi.

Ravshanki, ketma-ketlikning yuqori limiti faqat va faqat u yuqoridan chegaralanmaganda $+\infty$ ga teng bo'ladi.

Ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan $-\infty$ ka intiluvchi, ya'ni*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$$

bo'lgan $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, bu ketma-ketlik uchun $-\infty$ quyi limit deyiladi.

Bunda quyidagicha yoziladi

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Masalan, $x_n = (-1)^n n$ ketma-ketlik uchun $-\infty$ quyi limit bo'ladi.

Ravshanki, ketma-ketlikning quyi limiti faqat va faqat u quyidan chegaralanmaganda $-\infty$ ga teng bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflarga asoslanib, biz istalgan sonli ketma-ketlik uchun yuqori va quyi limitlar mavjud deyishimiz mumkin. Bu limitlar orasidagi munosabatni formal ravishda quyidagicha ifodalasa bo'ladi:

$$-\infty \ \le \ \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \ \le \ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \ \le \ +\infty.$$

Eslatma. Aniqki, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib uzoqlashsa, yuqoridagi munosabatda barcha qat'iy bo'lmagan tengsizliklar belgisi qat'iy tengsizliklar belgisiga o'zgaradi.

§ 2.7. Kompakt to'plamlar

1. Ushbu paragrafda biz ketma-ketliklarni emas, balki ixtiyoriy $E \subset \mathbf{R}$ to'plamlarni o'rganamiz.

Ta'rif. *Agar $a \in \boldsymbol{R}$ nuqtaning istalgan ε-atrofida $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamning cheksiz ko'p nuqtasi bo'lsa, a nuqtani E to'plamning **limit nuqtasi** deymiz.*

2.7.1 - tasdiq. *$a \in \boldsymbol{R}$ nuqta $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamning limit nuqtasi bo'lishi uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va etarli:*

(i) $x_n \in E$;

(ii) $x_n \neq a$;

(iii) $n \to \infty$ da $x_n \to a$.

Isbot xuddi 2.4.1 va 2.4.2 - tasdiqlar isbotiga o'xshash olib boriladi.

1) *Zarurligi.* Berilgan a nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bundan chiqdi, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $x \in E$ nuqta topiladiki, u uchun

$$0 < |x - a| < \varepsilon \tag{2.7.1}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

(2.7.1) dagi tengsizliklarning o'ng tomondagisi x nuqta a nuqtaning ε-atrofida yotishini, chap tomonidagisi esa, x nuqta a nuqtadan farqli ekanini anglatadi. Endi ε ga ketma-ket $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ..$ qiymatlarni beraylik. Tanlangan har bir $\varepsilon = \frac{1}{n}$ uchun, (2.7.1) ga ko'ra, shunday $x_n \in E$ nuqta topiladiki, u

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \tag{2.7.2}$$

shartni qanoatlantiradi.

Ravshanki, bunday tanlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uhun (i)-(iii) shartlar bajariladi.

2) *Yetarliligi.* Endi (i)-(iii) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud bo'lsin. U holda a nuqta E to'plamning limit nuqtasi ekanini ko'rsatamiz. Istalgan $\varepsilon > 0$ ni tayinlaymiz. (i) - shartga

ko'ra, biror nomerdan boshlab, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari a nuqtaning ε-atrofida yotadi, ya'ni a nuqtaning istalgan ε-atrofida E to'plamning cheksiz ko'p elementlari yotadi. Bu esa, a nuqta E to'plamning limit nuqtasi ekanini anglatadi.

Q.E.D.

Berilgan E to'plamning barcha limit nuqtalari to'plami *hosilaviy* to'plam deyiladi va E' simvoli orqali belgilanadi.

Shunga e'tibor qaratayliki, E to'plamning limit nuqtalari E to'plamga tegishli bo'lishi ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, agar $E = (0, 1)$ bo'lsa, $E' = [0, 1]$ bo'ladi. Demak, $(0, 1)$ intervalning barcha nuqtalari limit nuqtalar bo'lib, ular E ga tegishlidir; ikki chegaraviy 0 va 1 nuqtalar esa, limit nuqta bo'lishiga qaramasdan, E ga tegishli emas.

Bu misolda E to'plamning barcha nuqtalari limit nuqtalar bo'lib chiqdi. Lekin doim ham bunday bo'lavermaydi. Masalan, agar m natural son bo'lsa, barcha $\dfrac{1}{m}$ ko'rinishdagi sonlardan tashkil topgan E to'plam yagona $a = 0$ limit nuqtaga ega va bu nuqta E to'plamga tegishli emas. Ushbu to'plamning hech bir nuqtasi limit nuqta bo'lmaydi, chunki bu nuqtalarning har biri shunday atrofga egaki, unda E to'plamning bu nuqtadan boshqa elementi yoq.

Berilgan E to'plamning limit nuqtasi bo'lmagan elementlari *yakkalangan* nuqtalar deyiladi. Binobarin, oxirgi o'rganilgan misolda E to'plamning barcha nuqtalari yakkalangan ekan.

Ta'rif. *Barcha limit nuqtalari o'ziga tegishli bo'lgan to'plam* ***yopiq*** *to'plam deyiladi.*

Shunday qilib, agar $E' \subset E$ bo'lsa, E yopiq bo'lar ekan. Limit nuqtalar to'plami E' doimo yopiq bo'lishini ko'rsatish oson.

$E \cup E'$ to'plam E to'plamning *yopilmasi* deyiladi va $\overline{E}$ simvol orqali belgilanadi. $\overline{E}$ to'plam E ni o'z ichiga olgan eng kichik yopiq to'plam ekanini ko'rsatish qiyin emas.

2. Zamonaviy matematik tahlilda muhim o'rin tutgan yana bir tushunchani kiritamiz.

Ta'rif. *Agar $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamga tegishli bo'lgan har qanday $x_n \in E$ nuqtalar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi hamda limiti ham E ga tegishli bo'lgan qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, bu to'plam* ***kompakt*** *to'plam deyiladi.*

Navbatdagi teorema haqiqiy sonlarning kompakt to'plamlari tavsifini beradi.

2.7.1 - teorema. *Berilgan $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plam kompakt bo'lishi uchun uning yopiq va chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1) *Zarurligi.* Faraz qilaylik, E to'plam kompakt bo'lsin. Uning yopiq va chegaralangan ekanini isbotlaymiz.

Aytaylik, a nuqta E to'plamning ixtiyoriy limit nuqtasi bo'lsin. U holda, 2.7.1 - tasdiqning (i)-(iii) shartlarini qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud bo'ladi, ya'ni $x_n \in E$ bo'lib, $x_n \to a$ bo'ladi. Bundan, kompakt to'plam ta'rifiga ko'ra, $a \in E$ kelib chiqadi. Demak, E to'plam o'zining barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olar ekan. Bu esa, ta'rifga ko'ra, E ning yopiq to'plam ekanini anglatadi.

Endi E chegaralanmagan to'plam deb faraz qilaylik. U holda $x_n \in E$ bo'lgan cheksiz katta ketma-ketlik mavjud bo'lib, ravshanki, bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Bu esa E to'plamning kompaktligiga ziddir. Demak, E chegaralangan to'plam ekan.

2) *Yetarliligi.* Endi E yopiq va chegaralangan bo'lsin. Uning kompakt bo'lishini isbotlaymiz.

E to'plam nuqtalaridan tuzilgan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik. Bu ketma-ketlik chegaralanganligi uchun, Bol'sano-Veyershtrass (2.4.2 - teorema) teoremasiga asosan, undan biror a soniga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Endi $a \in E$ ekanini ko'rsatish yetarli.

Ikki holni qaraymiz.

A) $\{x_n\}$ ketma-ketlik aqalli bitta a ga teng bo'lgan elementga ega. Bu holda barcha $x_n \in E$ bo'lgani sababli, $a \in E$ bo'ladi.

B) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari a dan farqli. Bu holda a nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'ladi va, E yopiq bo'lgani sababli, yana $a \in E$ bo'ladi.

Shunday qilib, har ikkala holda ham $a \in E$ ekan.
Q.E.D.

Quyidagi uchta to'plam kompakt to'plamga misol bo'ladi:
1) Chekli sondagi elementga ega bo'lgan to'plam. Bu to'plam chegaralangan va birorta ham limit nuqtaga ega emas va, shuning uchun, u yopiq (bu to'plamning barcha nuqtalari yakkalangan);
2) $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n}, \ldots$ nuqtalardan iborat to'plam (bu to'plam faqat bitta $a = 0$ limit nuqtaga ega va biz uni to'plam elementlariga qo'shib qo'ydik; uning boshqa barcha nuqtalari yakkalangan);
3) $[a,\ b]$ kesma.
Lekin $(a,\ b)$ interval kompakt emas, chunki u, chegaralangan bo'lishiga qaramasdan, yopiq to'plam emas. Yarim to'g'ri chiziq $[0, +\infty)$ ham kompakt emas, chunki u, yopiq bo'lishiga qaramasdan, chegaralangan to'plam emas.
Zamonaviy matematik tahlilda kompakt to'plamlar xossalaridan juda keng foydalaniladi.

§ 2.8. Misollar

1 - misol. Agar $x_n > 0$ ketma-ketlik uchun biror n nomerdan boshlab

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le q < 1$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ekanini isbotlang.
Ko'rsatma. Ushbu $0 < x_n < c\, q^n$ tengsizlikdan foydalaning.

2 - misol. Tenglikni isbotlang:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e+a} \right)^n = 0, \ (a > 0).$$

Ko'rsatma. Quyidagi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

tengsizlikdan foydalanib, berilgan ketma-ketlik hadlarining avvalgi misol shartini qanoatlantirishini ko'rsating.

3 - misol. Tenglikni isbotlang:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \ (a > 0).$$

Ko'rsatma. Quyidagi $x_n = a^n/n!$ belgilashni kiritib,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} < q < 1$$

tengsizlikdan foydalaning.

4 - misol. Agar $a > 1$ bo'lsa, istalgan natural r soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{a^n} = 0 \tag{2.8.1}$$

ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Agar $x_n = n^r/a^n$ desak, biror n nomerdan boshlab

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^r < q < 1$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsating.

5 - misol. Koshi kriteriysidan foydalanib,

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} \tag{2.8.2}$$

ketma-ketlikning uzoqlashishini isbotlang.

Ko'rsatma. Biror nomerdan boshlab quyidagi tengsizlik bajarilishini ko'rsating:

$$x_{2n} - x_n > \frac{1}{2}.$$

6 - misol. Istalgan musbat sonlar ketma-ketligi $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ uchun

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\frac{a_1 + a_{k+1}}{a_k}\right)^k \geq e \tag{2.8.3}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Agar (2.8.3) tengsizlikning teskarisini bajariladi deb faraz qilsak, ya'ni

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\left(\dfrac{a_1 + a_{k+1}}{a_k}\right)^k}{\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k} < 1$$

desak, biror N nomerdan boshlab

$$\frac{\left(\dfrac{a_1 + a_{k+1}}{a_k}\right)^k}{\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k} < 1, \quad k \geq N,$$

bo'ladi. Bundan chiqdi, shu nomerdan boshlab,

$$\frac{a_1 + a_{k+1}}{a_k} < \frac{k+1}{k}$$

tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$\frac{a_1}{k+1} < \frac{a_k}{k} - \frac{a_{k+1}}{k+1}$$

bo'ladi. Bu tengsizlik yordamida (2.8.2) ketma-ketlik yaqinlashadi degan ziddiyatga keling.

Eslatma. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun

$$a_1 = \varepsilon, \quad a_k = k, \quad k = 2, 3, ...$$

ketma-ketlikni aniqlasak, ravshanki,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{k+1}}{a_k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{k}\right)^k = e^{1+\varepsilon}$$

bo'ladi. Bundan (2.8.3) tengsizlikning aniq ekanligi kelib chiqadi.

7 - misol. Agar

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sin^2\frac{\pi n}{4}$$

bo'lsa, ushbu

$$\inf\{x_n\},\ \sup\{x_n\},\ \varliminf_{n\to\infty} x_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

kattaliklarni toping.

Ko'rsatma. Quyidagi limitlardan foydalaning:

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = 0,\ \lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = e.$$

8 - misol. Koshi kriteriysidan foydalanib,

$$x_n = 1+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a},\ a\le 1,$$

ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Biror nomerdan boshlab quyidagi tengsizlik bajarilishini ko'rsating:

$$x_{2n}-x_n > \frac{1}{4}.$$

9 - misol. Koshi kriteriysidan foydalanib,

$$x_n = 1+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a},\ a\ge 2$$

ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Quyidagi munosabatdan foydalaning:

$$\frac{1}{(2n+1)^a} < \frac{1}{(2n+1)2n} = \frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}.$$

10 - misol. Agar $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_n\ge\cdots$ va $a_j\ge 0$ bo'lsa,

$$x_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

ketma-ketlik, faqat va faqat

$$y_n = a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n} \tag{2.8.4}$$

ketma-ketlik yaqinlashganda, yaqinlashishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Quyidagi

$$\frac{1}{2}\,y_n < x_{2^n} < y_n$$

tengsizlikni isbotlang.

11 - misol. 10 - misoldan foydalanib,

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p},\ p > 1$$

ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Bu holda (2.8.4) ketma-ketlik maxraji birdan kichik bo'lgan geometrik progressiyaning qismiy yig'indisi bo'lishini ko'rsating.

III Bob. Uzluksiz funksiyalar

§ 3.1. Funksiyaning limit qiymati

1. Ushbu bobda funksiya deganda biz $E \subset \mathbf{R}$ to'plamni $\mathbf{R}$ sonlar o'qiga akslantirishni tushunamiz. Bunday funksiyalar sonli funksiyalar ham deyiladi. Shunday qilib, agar f funksiya bo'lsa, u biror $E \subset \mathbf{R}$ to'plamdan olingan har bir haqiqiy x songa haqiqiy $f(x)$ sonni mos qo'yadi. Bunda E to'plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va ba'zan $D(f)$ simvol orqali belgilanadi. Biz yana $f : E \to \mathbf{R}$ kabi belgilashdan ham foydalanamiz.

Bir xil aniqlanish sohasiga ega bo'lgan ikki f va g funksiyalarning yig'indisi $f+g$, ayirmasi $f-g$ va ko'paytmasi $f \cdot g$ tabiiy ravishda aniqlanadi:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Biz aslida f va g funksiyalar turli aniqlanish sohaga ega bo'lganda ham, ya'ni $D(f) \neq D(g)$ bo'lganda ham, ularning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmalarini aniqlashimiz mumkin. Bunda biz $f+g$ yig'indi, $f-g$ ayirma va $f \cdot g$ ko'paytmalarni ikki aniqlanish sohalarning kesishmasi $D(f) \cap D(g)$ da aniqlangan deb hisoblaymiz.

3.1.1 - misol. Agar n manfiy bo'lmagan butun son va $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n$ biror o'zgarmas sonlar bo'lsa, quyidagi

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

ko'rinishda aniqlangan funksiyaga *ko'phad* deyiladi.

Ravshanki, f ko'phadning aniqlanish sohasi sonlar o'qidir, ya'ni

$$D(f) = \mathbf{R} = (-\infty,\ \infty).$$

Agar $a_0 \neq 0$ bo'lsa, n soniga ko'phadning *darajasi* deyiladi. $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n$ sonlar ko'phadning *koeffitsientlari* deyiladi, bunda a_0 soni *katta* koeffitsient ham deb ataladi.

0-darajali ko'phad *o'zgarmas* funksiya deyiladi:

$$f(x) = c, \qquad c = const.$$

1-darajali ko'phad *chiziqli* funksiya deyiladi:

$$f(x) = kx + b, \qquad k \neq 0.$$

2-darajali ko'phad *kvadratik* funksiya deyiladi:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

3.1.1 - tasdiq. *Agar f va g ko'phadlar bo'lsa, $f+g$, $f-g$ va $f \cdot g$ funksiyalar ham ko'phad bo'ladi.*

Isbot o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Aslida ko'phadni yuqorida kiritilgan uch arifmetik amallarni o'zgarmas va $f(x) = x$ funksiyalarga chekli marta qo'llash natijasida hosil bo'lgan funksiya, deb ham ta'riflash mumkin edi. Shu ma'noda 3.1.1 - tasdiq ko'phadning ta'rifi bilan deyarli bir xildir.

2. Agar g funksiyaning aniqlanish sohasidagi barcha x lar uchun $g(x) \neq 0$ shart bajarilsa, ikki f va g funksiyalarning $\dfrac{f}{g}$ nisbati quyidagi

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Xuddi yuqoridagidek, biz $\frac{f}{g}$ nisbatni f va g funksiyalar turli aniqlanish sohalarga ega bo'lganda ham aniqlashimiz mumkin, faqat bunda biz doim nisbatning aniqlanish sohasi deb ikki f va g funksiyalar aniqlanish sohalari kesishmasidan g funksiyaning nollari chiqarib tashlangan to'plamni olamiz:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

3.1.2 - misol. Agar P va Q lar ko'phadlar bo'lib, $Q(x) \not\equiv 0$ bo'lsa (ya'ni Q - nolga teng nolinchi darajali ko'phad bo'lmasa), quyidagi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

funksiyaga *ratsional funksiya* deb ataladi.

Ravshanki, $f = \frac{P}{Q}$ ratsional funksiyaning aniqlanish sohasi sonlar o'qidan maxrajning nollarini chiqarib tashlangan to'plamga teng:

$$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}.$$

Xususan, maxrajni $Q(x) \equiv 1$ deb hisoblab, har qanday ko'phadni ratsional funksiya deb qarashimiz mumkin.

3.1.2 - tasdiq. *Agar f va g ratsional funksiyalar bo'lsa, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ va $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$ bo'lganda) funksiyalar ham ratsional funksiyalar bo'ladi.*

Isbot ratsional funksiyaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. E'tibor bering, har bir ratsional funksiyani o'zgarmas va $f(x) = x$ funksiyalarga yuqoridagi to'rtta (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish) arifmetik amallarni chekli marta qo'llash natijasi deyish mumkin. Shu ma'noda 3.1.2 - tasdiq ratsional funksiyaning ta'rifi bilan deyarli bir xildir.

Funksiya o'z aniqlanish sohasining turli qismlarida turli formulalar orqali berilishi ham mumkin.

3.1.3 - misol. Signum funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\text{sign } x \;=\; \begin{cases} -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \;\;0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ \;\;1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi sonlar o'qidir. Istalgan $x \in \mathbf{R}$ uchun quyidagi ikki tenglikning o'rinli ekanini oddiy hisoblashlar orqali ko'rsatish mumkin:

$$x \cdot \text{sign } x \;=\; |x|, \quad |x| \cdot \text{sign } x \;=\; x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Navbatdagi misolda funksiyalarning umuman antiqa ko'rinishga ega bo'lishini ko'rishimiz mumkin.
3.1.4 - misol. Dirixle funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu funksiyaning ham aniqlanish sohasi sonlar o'qidir, ya'ni $\mathbf{R}$.

3. Funksiyalarni o'rganishda ularning grafigi (ya'ni koordinatalar tekisligining funksiya bilan bog'liq bo'lgan muayyan qismiy to'plami) muhim rol o'ynaydi.

Eslatib o'taylik, agar $x \in \mathbf{R}$ va $y \in \mathbf{R}$ bo'lsa, $\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligi deganda biz barcha tartiblangan (x, y) juftliklar to'plamini tushunar edik. Tartiblangan (x, y) juftlikni tekislikning nuqtasi, x va y sonlarni esa uning koordinatalari deb ham atashadi. Birinchi koordinatani ba'zan abssissa va ikkinchisini esa - ordinata deyishadi.

$f : E \to \mathbf{R}$ funksiyaning *grafigi* deb quyidagi:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2, \quad x \in E\}$$

ko'rinishda aniqlangan $\Gamma(f) \subset \mathbf{R}^2$ to'plamga aytiladi.

Boshqacha aytganda, f funksiyaning grafigi - bu koordinatalari $y = f(x)$ munosabat bilan bog'langan barcha (x, y) juftliklar to'plamidir.

Odatda funksiya grafigini doskada tasvirlaganda, abssissalar o'qini gorizontal ravishda chizib, musbat abssissalik nuqtalar manfiy abssissalik nuqtalardan o'ngda joylashtiriladi, ordinatalar o'qini esa vertikal ravishda chizib, musbat ordinatalik nuqtalar manfiy ordinatalik nuqtalardan yuqorida joylashtiriladi.

Bunday tanlashda funksiyalarning grafigi odatda silliq egri chiziqlardan iborat bo'lib, agar har bir shunday egri chiziqni istalgan vertikal to'g'ri chiziq bilan kessa, to'g'ri chiziq va grafik oshib borsa bir marta kesishadi. Masalan, 3.1.1 - misolda ko'rilgan ko'phadlar shunday grafikka ega. Grafiklar silliq chiziq bo'lsada, cheksizlikka ham ketib qolishi mumkin. Masalan, 3.1.2 - misolda ko'rilgan ratsional funksiyalar grafigi ana shunday xossaga ega.

Ba'zi funksiyalar grafigi uzilgan (odatta uzilishga ega bo'lgan deb ataladi) egri chiziqdan iborat bo'ladi. Misol tariqasida 3.1.3 - misolda qaralgan funksiya grafigini olish mumkin. Nihoyat, Dirixle funksiyasi shunday grafikka egaki, uni qog'ozda eskiz ravishda ham tasvirlash qiyin. Bu grafik to'g'risida biroz tassavurni quyidagi rasm beradi: 3.000.

4. Funksiyalarning eng muhim xossalaridan biri- ularning uzluksizligidir. Uzluksiz funksiyalar to'g'risida geometrik tasavvurni uzluksiz deb ataladigan egri chiziqlar berishi mumkin, ya'ni shunday egri chiziqlarki, ularni chizganda qalam qog'ozdan ko'tarilmaydi. Oddiy qilib aytganda, grafigi uzluksiz egri chiziqdan iborat bo'lgan funksiya uzluksiz funksiyadir.

Albatta, bu yerda keltirilgan mulohazalar faqatgina intuitiv bo'lib, ularni matematik ma'noda qat'iylashtirish ancha murakkabdir. Odatda uzluksiz funksiyalar limit qiymat tushunchasi orqali ta'riflanadi. Biz ham ana shu yo'lni tanlaymiz.

Avval misol tariqasida quyidagi ratsional funksiyani qaraylik:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} .$$

Bu funksiya maxraji nolga aylanadigan ikki $x = 1$ va $x = -1$ nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda aniqlangan bo'lib, $f(1)$ va $f(-1)$ ifodalar esa ma'noga ega emas. Shunday bo'lsada, agar $x = 1$ nuqtaning atrofida bu funksiya qiymatlariga e'tibor bersak, $f(1)$ ga biror ma'no berishimiz mumkin bo'ladi. Haqiqatan, yetarlicha kichik α sonni olib, $x = 1 + \alpha$ deylik. U holda

$$f(x) = f(1+\alpha) = \frac{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha) - 2}{(1+\alpha)^2 - 1} = \frac{3+\alpha}{2+\alpha}.$$

Endi, agar α nolga intilsa, ya'ni $x = 1 + \alpha$ birga intilsa, $f(x)$ qiymatlar $\dfrac{3}{2}$ ga intiladi. Shuning uchun biz $\dfrac{3}{2}$ sonni f funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi limit qiymati deyishimiz mumkin.

Ta'rif (H.E.Heine). *Berilgan f funksiya a nuqtaning shu nuqtani o'zi kirishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar a ga yaqinlashuvchi va $x_n \neq a$ shartni qanoatlantiruvchi argumentning ixtiyoriy x_n ketma-ketligi uchun $f(x_n)$ qiymatlar ketma-ketligi biror b soniga yaqinlashsa, ana shu b sonini f funksiyaning a nuqtadagi limit qiymati deymiz.*

Agar b soni f funksiyaning a nuqtadagi limit qiymati bo'lsa,

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; b \tag{3.1.1}$$

deb yoziladi.

Shuni aytish kerakki, ta'rifdagi $x_n \neq a$ shart qaralayotgan funksiyaning a nuqtada aniqlanmagan bo'lishiga imkon beradi (bu holni yuqoridagi misolga ko'rdik). Agarda f funksiya a nuqtada aniqlangan bo'lsa, qayd etilgan shartdan f funksiyani a nuqtadagi limit qiymatining, umuman aytganda, $f(a)$ bilan ustma-ust tushmasligi kelib chiqadi.

Funksiyaning a nuqtadagi limit qiymatini funksiyaning a nuqtadagi *limiti* ham deb ataladi.

Sonlar o'qining har bir nuqtasida limit qiymatga ega bo'lgan funksiyaga misol sifatida, barcha $x \in \mathbf{R}$ larda bitta c qiymatni qabul qiladigan, $f(x) = c$ o'zgarmas funksiyani olishimiz mumkin. Ravshanki, har bir $a \in R$ nuqtada bu funksiyaning limit qiymati c ga teng.

Navbadagi misol ko'rinishdan ancha sodda bo'lishiga qaramasdan juda muhimdir.

3.1.5 - misol. Quyidagi

$$f(x) \;=\; x$$

birlik funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, istalgan $a \in \mathbf{R}$ nuqtadagi uning limit qiymati a ga tengdir:

$$\lim_{x \to a} x \;=\; a \; .$$

Limit nuqta ta'rifidagi yana bir narsaga ahamiyat beraylik. Unda aytilishicha, argumentning a ga intiluvchi *ixtiyoriy* $\{x_n\}$ ketma-ketligi uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b ga yaqinlashishi zarur.

Endi 3.1.3 - misoldagi sign x funksiyani qaraylik. Agar biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $x_n > 0$ va $x_n \to 0$ shartlar bajarilsa, sign $x_n = 1$ bo'lib, shu sababli,

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n \;=\; 1$$

bo'ladi.

Agar boshqa biror ketma-ketlik hadlari $y_n < 0$ shartni qanoatlantirib, $y_n \to 0$ bo'lsa, sign $y_n = -1$ bo'ladi va shu sababli,

$$\lim_{n\to\infty} \text{sign } y_n \;=\; -1$$

tenglik bajariladi.

Har ikkala holda ham sign funksiyaning limiti mavjud bo'lsada, ular o'zaro teng emas va shuning uchun, sign funksiya 0 nuqtada limit qiymatga ega emas ekan.

Xuddi shu xulosaga $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ketma-ketlikni olsak ham kelamiz. Ravshanki, bu ketma-ketlik ham nolga yaqinlashadi, shu bilan birga, uning toq nomerli barcha elementlari manfiy va juft nomerli barcha elementlari esa musbatdir. Ta'rifga ko'ra, sign funksiyaning mos qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik

$$\text{sign } x_n \;=\; (-1)^n$$

ga teng bo'lib, ko'rinib turibdiki, u yaqinlashmaydi. Bu yana bir marta sign funksiyaning 0 nuqtada limit qiymatga ega emasligini tasdiqlaydi.

Endi, xuddi shu usulda 3.1.4 - misolda ko'rilgan $D(x)$ Dirixle funksiyasini qaraylik. Agar istalgan $a \in \mathbf{R}$ uchun unga yaqinlashuvchi biror $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari ratsional bo'lsa, $D(x_n) = 1$ bo'ladi va shu sababli,

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n) \;=\; 1$$

tenglik bajariladi.

Bordiyu o'sha $a \in \mathbf{R}$ ga yaqinlashuvchi boshqa biror $\{y_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari irratsional bo'lsa, $D(y_n) = 0$ bo'ladi va shu sababli,

$$\lim_{n\to\infty} D(y_n) \;=\; 0$$

tenglik bajariladi.

Bu ikki limitning o'zaro teng emasligidan Dirixle funksiyasi sonlar o'qining hech qaysi nuqtasida limit qiymatga ega emasligi kelib chiqadi.

Agar istalgan a nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikni shunday tanlasakki, uning toq nomerli x_{2k-1} elementlari ratsional va juft nomerli x_{2k} elementlari irratsional bo'lsa, biz yana xuddi shu xulosaga kelamiz. Haqiqatan,

$$D(x_{2k-1}) \;=\; 1, \qquad D(x_{2k}) \;=\; 0$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $\{D(x_n)\}$ qiymatlar ketma-ketligi usoqlashadi. Bundan, yana bir bor Dirixle funksiyasining sonlar o'qining hech qaysi nuqtasida limit qiymatga ega emasligini olamiz.

Bevosita limit qiymat ta'rifidan va II bob natijalaridan navbatdagi tasdiqqa kelamiz.

3.1.1 - teorama. *Agar*

$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; b\,, \qquad \lim_{x\to a} g(x) \;=\; c$$

bo'lsa,

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) \;=\; b+c\,, \quad \lim_{x\to a} (f-g)(x) \;=\; b-c\,, \quad \lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) \;=\; b\cdot c$$

tengliklar o'rinli bo'ladi va $c \neq 0$ bo'lgan holda

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) \;=\; \frac{b}{c}$$

tenglik bajariladi.

Isbot 2.1.1, 2.1.2 va 2.1.3 - teoremalardan va limit qiymatning ta'rifidan kelib chiqadi. Misol tariqasida quyidagi tenglikni isbotlaymiz:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x). \tag{3.1.2}$$

Buning uchun biz a ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. 2.1.1 - teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

tenglikni olamiz.

Bu esa, limit qiymatning Heine ta'rifi bo'yicha, (3.1.2) tenglik o'rinli ekanini anglatadi.

Q.E.D.

3.1.6 - misol. Quyidagi

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

ko'phad istalgan $a \in \mathbf{R}$ nuqtada $f(a)$ ga teng limit qiymatga ega. Bu tasdiq 3.1.1 - teoremani chekli marta o'zgarmas funksiya va birlik $f(x) = x$ funksiyaga qo'llashdan kelib chiqadi (3.1.5 - misolga qarang).

5. Funksiyaning limit qiymati ta'rifini boshqacha ko'rinishda ham berish mumkin. Chunonchi, agar a nuqtaning yetarlicha kichik atrofida f funksiyaning qiymatlari b dan kam farq qilsa (boshqacha aytganda, x nuqta a ning δ-atrofida yotib, $\delta > 0$ yetarlicha kichik bo'lganda $f(x)$ qiymatlar b sondan ε dan kichik songa farq qilisa, ya'ni b ning ε-atrofida yotsa), biz b sonni f funksiyaning a nuqtadagi limit qiymati deyishimiz mumkin.

Ta'rif (Koshi (A.L.Cauchy)). *Berilgan f funksiya a nuqtaning shu nuqtani o'zi kirishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lib, b biror haqiqiy son bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,*

$$0 < |x-a| < \delta \tag{3.1.3}$$

shartni qanoatlantiruvchi argumentning barcha x qiymatlari uchun

$$|f(x)-b| < \varepsilon \tag{3.1.4}$$

tengsizlik bajarilsa, b sonini f funksiyaning a nuqtadagi limit qiymati deymiz.

(3.1.3) tengsizlikning chap qismi $x \neq a$ ekanini anglatadi, ya'ni (3.1.4) tengsizlik a nuqtaning δ-atrofida yotuvchi va, umuman aytganda, a ga teng bo'lmagan argumentning barcha x qiymatlari uchun bajarilishini bildiradi. Demak, xuddi yuqoridagi Heine ta'rifi singari, limit qiymat a nuqtada aniqlanmagan funksiyalar uchun ham aniqlanishi mumkin va bordiyu funksiya bu nuqtada aniqlangan bo'lsa, ta'rifga ko'ra, f funksiyaning a nuqtadagi limit qiymati $f(a)$ bilan ustma-ust tushishi shart emas.

Limit qiymatning Koshi va Heine bo'yicha ta'riflari teng kuchli ekanligi intuitiv tushunarlidir. Biz bu tasdiqni quyidagi teoremada isbotlaymiz.

3.1.2 - teorema. *Berilgan f funksiya a nuqtaning shu nuqtani o'zi kirishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lsin. U holda, b son f funksiyaning a nuqtadagi Koshi ta'rifi bo'yicha limit qiymati bo'lishi uchun bu son f funksiyning a nuqtadagi Heine ma'nosida limit qiymati bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1) Avval b son f funksiyaning a nuqtadagi Koshi ma'nosidagi limit qiymati bo'lsin. Demak, ta'rifga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, (3.1.3) shartdan (3.1.4) kelib chiqadi.

Qaralayotgan f funksiyaning aniqlanish sohasidan $x_n \neq a$ shartni qanoatlantirib, a songa yaqinlashuvchi istalgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik. Ravshanki, biror N nomerdan boshlab bu ketma-ketlikning barcha elementlari a nuqtaning δ-atrofida yotadi, u holda xuddi shu nomerdan boshlab

$\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari, (3.1.4) ga ko'ra, b nuqtaning ε-atrofiga tushadi. Demak, $f(x_n) \to b$, ya'ni b son f funksiyaning Heine ma'nosida ham limit qiymati bo'lar ekan.

2) Endi b son f funksiyaning a nuqtadagi Heine ma'nosida limit qiymati bo'lsin. Biz b Koshi ma'nosida ham limit qiymat bo'lishini, ya'ni

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ \forall x(0 < |x - a| < \delta)\ :\ (|f(x) - b|\ <\ \varepsilon) \tag{3.1.5}$$

ekanini ko'rsatishimiz zarur.

Bu tasdiqni teskarisini faraz etish usuli bilan isbotlaymiz.

Demak, faraz qilamiz, b Koshi ma'nosida limit qiymat bo'lmasin, ya'ni (3.1.5) mulohazaning teskarisi:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)\ \exists x(0 < |x - a| < \delta)\ :\ (|f(x) - b|\ \geq\ \varepsilon)$$

o'rinli bo'lsin.

Boshqacha aytganda, shunday $\varepsilon > 0$ son mavjudki, istalgan $\delta > 0$ olganda ham $(0 < |x - a| < \delta)$ to'plamdan shunday x topiladiki, u uchun

$$|f(x) - b| \geq \varepsilon \tag{3.1.6}$$

tengsizlik bajariladi.

Biz $\delta > 0$ sonning ixtiyoriyligidan foydalanib, unga ketma-ket $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},..$ qiymatlarni berishimiz mumkin. Har bir $\delta = \frac{1}{n}$ uchun shunday x_n son topiladiki, u uchun

$$0 < |x_n - a|\ <\ \frac{1}{n} \tag{3.1.7}$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, (3.1.6) tengsizlik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$|f(x_n) - b| \geq \varepsilon. \tag{3.1.8}$$

Ravshanki, (3.1.7) va (3.1.8) shartlar birgalikda $x_n \to a$ bo'lib, $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b ga yaqinlashmasligini anglatadi. Demak, b son f funksiyaning Heine ma'nosida limit qiymati bo'la olmas ekan. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

Q.E.D.

Eslatma. f funksiyaning biror a nuqtadagi limit qiymatini ta'riflayotgan vaqtda bu funksiyaning $D(f)$ aniqlanish sohasi a nuqtaning biror atrofini butunlay o'z ichiga olishini talab qilishga zaruriyat yo'q. Buning o'rniga a ga yaqinlashuvchi va $D(f)$ ga tegishli bo'lgan biror x_n ketma-ketlikning topilishini talab qilish yetarlidir. Bundan chiqdi, biz berilgan E to'plamning istalgan limit nuqtasi uchun f funksiyaning limit qiymatini aniqlashimiz mumkin ekan.

6. Sonlar o'qining tartiblanganligi funksiyaning bir tomonlama limit qiymati tushunchasini kiritish imkonini beradi. Biz bu imkoniyatni 3.1.3 - misolda o'rganilgan signum funksiyasi misolida ko'rishimiz mumkin. Bu funksiyaning grafigidan ko'rinadiki, agar x nuqta 0 ga chapdan (ya'ni 0 dan kichik bo'lib) yaqinlashsa, sign x funksiya -1 ga yaqinlashadi, bordiyu x nuqta 0 ga o'ngdan (ya'ni faqat musbat bo'lib) yaqinlashsa, sign x funksiya 1 ga yaqinlashadi. Demak, bu funksiya 0 nuqtada limit qiymatga ega bo'lmasada, ammo u xuddi shu nuqtada o'ng va chap limit qiymatlarga ega bo'lar ekan.

Bundan buyon, funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti haqida gapirganda, biz bu funksiyaning aniqlanish sohasi yetarlicha kichik $h > 0$ lar uchun $(a,\ a + h)$ ko'rinishdagi intervalni o'z ichiga olishini talab qilamiz. Bunday intervalni a nuqtaning o'ng yarim atrofi deb ham atashadi.

Xuddi shu singari, agar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $(a-h,a)$ ko'rinishdagi intervalni o'z ichiga olsa, bunday funksiyani a nuqtaning chap yarim atrofida aniqlangan deb atashadi. Biz funksiyaning chap limiti haqida gapirganda, uni qaralayotgan nuqtaning aynan chap yarim atrofida aniqlangan deb faraz qilamiz.

Ta'rif (H.E.Heine). *Berilgan f funksiya a nuqtaning biror o'ng yarim atrofida aniqlangan bo'lib, b biror haqiqiy son bo'lsin. Agar a ga yaqinlashuvchi va $x_n > a$ shartni qanoatlantiruvchi argumentning istalgan x_n ketma-ketligi uchun unga mos $f(x_n)$ qiymatlar ketma-ketligi b ga yaqinlashsa, u holda b sonini f funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti deymiz.*

Agar b soni f funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti bo'lsa,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \;=\; b \tag{3.1.9}$$

kabi yoziladi.

Ba'zan bundanda qisqa

$$f(a+0) \;=\; b \tag{3.1.10}$$

belgilashdan ham foydalaniladi.

Biror nuqtadagi o'ng limit shu nuqtadagi *o'ngdan limit* deb ham ataladi.

Xuddi yuqoridagidek, f funksiyaning a nuqtadagi *chap limiti yoki chapdan limiti* tushunchasi ham kiritiladi, ya'ni, agar

$$[x_n \in D(f)] \wedge [x_n < a] \wedge [x_n \to a] \Rightarrow (f(x_n) \to b)$$

bo'lsa, b shunday limit deyiladi.

Bunda quyidagi belgilashlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \;=\; f(a-0) \;=\; b\ . \tag{3.1.11}$$

Aniqki, 3.1.3 - misoldagi signum funksiyasi uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\text{sign } (0-0) = -1, \;\; \text{sign } (0+0) = +1.$$

O'ng va chap limitlar *bir tomonli* limitlar deyiladi. Bunda avval kiritilgan oddiy limit qiymatini ba'zan *ikki tomonlama* limit deb atashadi.

Agar biror nuqtada chap va o'ng limitlar o'zaro teng bo'lmasa, bu nuqtada limit qiymat mavjud bo'lmaydi. Ushbu tasdiqni isbotlashdan avval biz o'ng va chap limitlarning Koshi bo'yicha ta'rifini beramiz.

Ta'rif (Koshi (A.L.Cauchy)). *Berilgan f funksiya a nuqtaning biror o'ng yarim atrofida aniqlangan bo'lib, b haqiqiy son bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,*

$$a < x < a+\delta$$

shartni qanoatlantiruvchi argumentning barcha x qiymatlari uchun

$$|f(x)-b| < \varepsilon \tag{3.1.12}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, b son f funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti deyiladi.

Xuddi shu singari, funksiyaning a nuqtadagi Koshi bo'yicha chap limiti b ta'riflanadi:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \;:\; [x \in D(f)] \wedge [a-\delta < x < a] \;\Rightarrow\; [|f(x)-b| < \varepsilon].$$

3.1.3 - teorema. *Bir tomonlama limitning Heine va Koshi bo'yicha ta'riflari teng kuchlidir.*

Bu tasdiq quyidagini anglatadi: b son funksiyaning a nuqtadagi Koshi ma'nosida o'ng (chap) limiti bo'lishi uchun uning shu nuqtada Heine ma'nosida o'ng (chap) limit bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot ikki tomonlama limit haqidagi 3.1.2 - teoremaning isboti kabi olib boriladi.

Ravshanki, agar f funksiya a nuqtaning shu nuqtani o'zi tegishli bo'lishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada b limitga ega bo'lsa, u shu a nuqtada ham chap, ham o'ng limitlarga ega bo'lib, bu limitlar b ga teng bo'ladi.

Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli.

3.1.4 - teorema. *Agar f funksiyaning a nuqtada o'ng va chap limitlari mavjud va o'zaro teng bo'lsa, u holda f funksiyaning shu nuqtada limiti mavjud bo'lib, quyidagi tengliklar bajariladi:*

$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; f(a+0) \;=\; f(a-0).$$

Isbot bevosita bir tomonlama limitlarning ta'riflaridan kelib chiqadi.

Chunonchi, agar b son chap limitga teng bo'lsa, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta_1 > 0$ ko'rsatish mumkinki, $a - \delta_1 < x < a$ intervalda yotuvchi argumentning barcha x qiymatlari uchun (3.1.12) bajariladi.

Xuddi shu singari, agar b son o'ng limitga teng bo'lsa, shunday $\delta_2 > 0$ ko'rsatish mumkinki, $a < x < a + \delta_2$ intervalda yotuvchi argumentning barcha x qiymatlari uchun (3.1.12) bajariladi.

Shunday ekan, $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ desak, (3.1.12) tengsizlik

$$0 < |x - a| < \delta$$

shartni qanoatlantiruvchi argumentning barcha x qiymatlarida bajariladi.

Bu esa b son f funksiyaning a nuqtadagi limiti ekanini anglatadi.

Q.E.D.

7. Funksiya chegaralanmagan to'plamda berilgan hollarda funksiyaning argumenti cheksizlikka intilgandagi limiti tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif (H.E.Heine). *Berilgan f funksiya yuqoridan chegaralanmagan $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar argumentning $+\infty$ ka intiluvchi istalgan $x_n \in E$ ketma-ketligi uchun mos $f(x_n)$ qiymatlar ketma-ketligi biror b soniga yaqinlashsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limiti deyiladi.*

Agar b son $f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limiti bo'lsa,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; b \tag{3.1.13}$$

kabi yoziladi.

Koshi ma'nosidagi bunga mos ta'rif quyidagi ko'rinishga ega:

Ta'rif (Koshi (A.L.Cauchy)). *Berilgan f funksiya yuqoridan chegaralanmagan $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, b haqiqiy son bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A > 0$ son topilsaki, $x > A$ shartni bajaruvchi barcha $x \in E$ lar uchun*

$$|f(x) - b| < \varepsilon \tag{3.1.14}$$

tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limiti deyiladi.

Xuddi funksiyaning nuqtadagi limiti holidak, $x \to +\infty$ dagi limitning Heine va Koshi ta'riflari teng kuchli ekanligini isbotlash mumkin.

3.1.7 - misol. Quyidagi ratsional funksiya

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0, \tag{3.1.15}$$

$x \to +\infty$ da 0 ga teng bo'lgan limitga ega. Bu tasdiqning haqligi istalgan $x_n \to +\infty$ ketma-ketlik uchun unga mos $\{f(x_n\}$ ketma-ketlik nolga intilishidan kelib chiqadi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Agar funksiya quyidan chegaralanmagan to'plamda aniqlangan bo'lsa, xuddi yuqoridagi singari, $x \to -\infty$ da Heine va Koshi ma'nosida limit tushunchalari kiritiladi. Bu ikki limit ta'riflari teng kuchli bo'lishi aniq. Agar b son $f(x)$ funksiyaning $x \to -\infty$ dagi limiti bo'lsa,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \tag{3.1.16}$$

kabi yoziladi.

3.1.8 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty \tag{3.1.17}$$

funksiya $x \to\ +\infty$ da 1 ga teng bo'lgan limitga ega:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

$x \to\ -\infty$ da esa, -1 ga teng bo'lgan limitga ega:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Keltirilgan tengliklarni isbotlash uchun (3.1.17) funksiyani $x > 0$ bo'lganda

$$f(x) = \frac{1}{1+1/x}, \qquad x > 0$$

ko'rinishda va $x < 0$ bo'lganda esa,

$$f(x) = -\frac{1}{1-1/x}, \qquad x < 0$$

ko'rinishda yozib olib, 3.1.7 - misol xulosasini qo'llash yetarli.

Shunday qilib, bu misolda yuqoridagi ikki limit har xil bo'lib chiqdi.

Agar $f(x)$ funksiyaning ham $x \to +\infty$ dagi, ham $x \to -\infty$ dagi limitlari mavjud bo'lib, bitta b soniga teng bo'lsa, bu b soni $f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ = \ b \tag{3.1.18}$$

kabi yoziladi.

Ba'zan

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \ = \ b \tag{3.1.19}$$

belgilashdan ham foydalaniladi.

3.1.9 - misol. Ixtiyoriy ratsional

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} \tag{3.1.20}$$

funksiyani qaraylik.

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, bu funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x) = x^{m-n}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}}. \tag{3.1.21}$$

Ravshanki, $x \to \infty$ da (3.1.21) tenglikning o'ng tomonidagi kasr $\frac{a_0}{b_0}$ soniga yaqinlashadi. Kasr oldidagi x^{m-n} ko'paytuvchiga kelsak, $x \to \infty$ da $m < n$ lar uchun uning limiti 0 ga teng, agar $m = n$ bo'lsa, uning limiti 1 ga teng va $m > n$ bo'lganda esa, bu ko'paytuvchining limiti mavjud bo'lmaydi.

Demak, $m > n$ bo'lganda (3.1.20) funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti mavjud bo'lmasada, $m \leq n$ bo'lganda

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m < n \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'lar ekan.

Shunday qilib, agar ratsional $f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da biror haqiqiy songa teng limitga ega bo'lsa, u $x \to -\infty$ da ham xuddi o'sha songa teng limitga ega bo'ladi.

§ 3.2. Koshi kriteriysi

1. Funksiyaning biror $a \in \mathbf{R}$ nuqtadagi limiti mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti Koshi kriteriysi orqali beriladi. Sodda qilib aytganda Koshi sharti quyidagidan iborat: a nuqtaning yetarlicha kichik atrofidan olingan argumentning barcha qiymatlarida funksiyaning unga mos qiymatlari bir-biridan kam farq qilsin.

Ta'rif. *Berilgan f funksiya a nuqtaning shu nuqtani o'zi kirishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,*

$$0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta \tag{3.2.1}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi argumentning barcha x' va x'' qiymatlari uchun

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{3.2.2}$$

tengsizlik bajarilsa, f funksiya a nuqtada Koshi shartini qanoatlantiradi deymiz.

3.2.1 - teorema. *Berilgan f funksiya a nuqtaning shu nuqtani o'zi kirishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lsin. f funksiya a nuqtada limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1) Faraz qilaylik, f funksiya a nuqtada b ga teng bo'lgan limitga ega bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, u uchun quyidagi implikatsiya o'rinli bo'ladi:

$$\forall x: \ [0 < |x - a| < \delta] \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bundan, quyidagi

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b|$$

tengsizlikka ko'ra, (3.2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi x' va x'' lar uchun (3.2.2) tengsizlikning o'rinli ekanligi bevosita kelib chiqadi.

2) Endi f funksiya a nuqtada Koshi shartini qanoatlantirsin. Ya'ni istalgan $\delta > 0$ uchun (3.2.1) dan (3.2.2) tengsizlik kelib chiqsin. f funksiyaning a nuqtada limitga ega ekanini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - a ga yaqinlashuvchi hamda $x_n \neq a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. Biror N nomerdan boshlab bu ketma-ketlikning barcha elementlari a nuqtaning δ-atrofiga tushadi va demak, istalgan $n \geq N$ va $m \geq N$ nomerli x_n va x_m elemetlar uchun, (3.2.2) ga ko'ra,

$$|f(x_n) - f(x_m)| \ < \ \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Boshqacha aytganda, $\{f(x_n)\}$ Koshi ketma-ketligi ekan. Shuning uchun, 2.5.1 - teoremaga ko'ra, bu ketma-ketlik yaqinlashadi. Demak, f funksiya a nuqtada limitga ega.

Q.E.D.

Shuni qayd qilish joizki, agar (3.2.1) da a nuqtaning o'ng yoki chap yarim atrofini oladigan bo'lsak, biz a nuqtadagi o'ng yoki chap limit mavjudligining Koshi shartini olamiz.

2. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti mavjudligining Koshi sharti xuddi yuqoridagi ko'rinishga ega. Sodda qilib aytganda bu shart quyidagidan iborat: argumentning yetarlicha katta qiymatlarida funksiyaning mos qiymatlari bir-biridan deyarli farq qilmasin.

Ta'rif. *Berilgan f funksiya yuqoridan chegaralanmagan $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A > 0$ son topilsaki, $x' > A$, $x'' > A$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $x' \in E$ va $x'' \in E$ lar uchun*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{3.2.3}$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da Koshi shartini qanoatlantiradi deymiz.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

3.2.2 - teorema. *Berilgan f funksiya yuqoridan chegaralanmagan $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. f funlsiya $x \to +\infty$ da limitga ega bo'lishi uchun uning $x \to +\infty$ da Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.*

Isbot xuddi 3.2.1 - teoremaning isbotiga o'xshash ravishda olib boriladi.

Endi funksiyaning $x \to -\infty$ va $x \to \pm\infty$ da limiti mavjudligini ta'minlash uchun qo'yiladigan Koshi shartini keltirish murakkab emas.

§ 3.3. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

1. Faraz qilaylik, f funksiya $E \subset \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, c shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. *Agar $\alpha(x)$ funksiya c nuqtada nolga teng bo'lgan limit qiymatga ega bo'lsa, ya'ni*

$$\lim_{x \to c} \alpha(x) \ = \ 0 \tag{3.3.1}$$

*bo'lsa, bu funksiya o'sha c nuqtada **cheksiz kichik** deyiladi.*

3.3.1 - misol. Ixtiyoriy tayinlangan $c \in \mathbf{R}$ soni uchun

$$\alpha(x) \;=\; (x-c)^n, \qquad n \in \mathbf{N}$$

funksiya c nuqtada cheksiz kichikdir.

Bu tasdiqning haqligi 3.1.6 - misoldan kelib chiqadi.

Ta'kidlab o'tamizki, agar b soni f funksiyaning c nuqtadagi limit qiymati bo'lsa,

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

funksiya, ravshanki, c nuqtada cheksiz kichik bo'ladi. Aniqroq aytganda, f funksiya c nuqtada b ga teng limit qiymatga ega bo'lishi uchun, bu funksiyaning c nuqtada cheksiz kichik bo'lgan biror $\alpha(x)$ funksiya bilan birga

$$f(x) = \; b + \alpha(x) \tag{3.3.2}$$

tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

2. Agar funksiya c nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo'lsa, argument c ga yaqinlashgan vaqtda bu funksiyaning xatti-harakatini o'rganish, ya'ni funksiya $+\infty$ yo $-\infty$ ga intiladimi yoki umuman boshqa hol sodir bo'ladimi, shuni aniqlash diqqatga sazovor masala hisoblanadi.

Faraz qilaylik, f funksiya $E \subset \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, c shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. *Agar argumentning c ga yaqinlashuvchi istalgan $\{x_n\}$ ketma-ketligi uchun*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; +\infty \tag{3.3.3}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, f funksiya c nuqtada ***cheksiz katta*** *deyiladi.*

Bunda quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to c} f(x) \;=\; +\infty. \tag{3.3.4}$$

Agar f funksiya c nuqtada cheksiz katta bo'lib, u uchun (3.3.4) tenglik bajarilsa, $g(x) = -f(x)$ funksiya ham c nuqtada cheksiz katta deyiladi va bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to c} g(x) \;=\; -\infty. \tag{3.3.5}$$

Shuni qayd qilish joizki, agar $\alpha(x)$ funksiya c nuqtada cheksiz kichik bo'lib, bu nuqtaning biror atrofida musbat bo'lsa, $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ funksiya c nuqtada cheksiz katta bo'ladi.

3.3.2 - misol. Quyidagi

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(x-c)^{2n}}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

funksiya c nuqtada cheksiz kattadir. Bu tasdiqning haqligi 3.3.1 - misoldan kelib chiqadi.

3. Matematik adabiyotlarda a nuqtada o'ngdan yoki chapdan cheksiz katta bo'lgan funksiyalar ham ko'p uchraydi. Bunday funksiyalarning ta'rifi yuqorida keltirilgan ta'riflarga o'xshashdir. Masalan, agar $x_n \to c$ bo'lib, $x_n > c$ shartlarni qanoatlantiruvchi argumentning istalgan $\{x_n\}$ ketma-ketligi uchun

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; +\infty$$

munosabat o'rinli bo'lsa, biz buni

$$\lim_{x\to c+0} f(x) \;=\; +\infty \tag{3.3.6}$$

kabi belgilaymiz, yoki yanada qisqa qilib,

$$f(c+0) \ = \ +\infty \tag{3.3.7}$$

deb yozamiz.

3.3.3 - misol. Quyidagi

$$f(x) \ = \ \frac{1}{(x-c)^{2n-1}}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

funksiya $c \in \mathbf{R}$ nuqtada o'ngdan ham, chapdan ham cheksiz kattadir, aniqrog'i,

$$f(c-0) = -\infty, \qquad f(c+0) = +\infty.$$

Bu tasdiqning haqligi, berilgan funksiyaning $x < c$ larda manfiy va $x > c$ larda musbat ekanini hisobga olsak, 3.3.1 - misoldan kelib chiqadi.

4. Berilgan nuqtada cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni taqqoslash uchun maxsus o va O belgilashlarni kiritish qulaydir.

Ta'rif. *Berilgan f va g funksiyalar a nuqtaning shu nuqtani o'zi kirishi shart bo'lmagan biror atrofida aniqlangan bo'lib, $x \neq a$ bo'lganda $g(x) \neq 0$ bo'lsin. Quyidagi*

$$f(x) = o(g(x)), \qquad x \to a, \tag{3.3.8}$$

yozuv $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiya a nuqtada cheksiz kichik ekanini anglatadi.

Bu (3.3.8) belgilash «$f(x)$ "o" kichik $g(x)$ ga teng» deb o'qiladi.

Masalan,

$$x^2 = o(x), \qquad x \to 0,$$

yoki

$$\frac{1}{x-1} = o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right), \qquad x \to 1.$$

Umuman, istalgan $a \in \mathbf{R}$ nuqta va $m < n$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy butun m va n lar uchun

$$(x-a)^n = o((x-a)^m), \qquad x \to a,$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik, sodda qilib aytganda, $n - m > 0$ bo'lgan barcha butun sonlar uchun $h(x) = (x-a)^{n-m}$ funksiya a nuqtada cheksiz kichik ekanini anglatadi.

Ahamiyat bering, xususiy holda,

$$\alpha(x) = o(1), \qquad x \to a,$$

yozuv $\alpha(x)$ funksiyaning a nuqtada faqat cheksiz kichik ekanliginigina anglatadi.

Ta'rif. Berilgan *f va g funksiyalar biror $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Quyidagi*

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x \in E \tag{3.3.9}$$

yozuv E to'plamda biror o'zgarmas C uchun

$$|f(x)| \ \leq \ C\,|g(x)|, \quad x \in E$$

tengsizlik bajarilishini bildiradi.

Bu (3.3.9) belgilash «$f(x)$ "O" katta $g(x)$ ga teng» deb o'qiladi.

Masalan,

$$1 - x^2 = O(1-x), \qquad x \in [0,1].$$

E'tibor bering, quyidagi

$$f(x) = O(1), \qquad x \in E,$$

yozuv $f(x)$ funksiyaning E to'plamda faqat chegaralangan ekanliginigina anglatadi.

§ 3.4. Monoton funksiyalar

Limitlar nazariyasi nuqtai nazaridan qaraganda, ayniqsa monoton deb ataluvchi funksiyalar o'rganishga qulaydirlar.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in E$ va $y \in E$ lar uchun quyidagi*

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y) \tag{3.4.1}$$

*implikatsiya o'rinli bo'lsa, f funksiya **o'suvchi** deyiladi.*

Agar (3.4.1) ning o'ng tomonidagi tengsizlikda qat'iy bo'lmagan tengsizlikni qat'iy tengsizlikka o'zgartirsak, biz *qat'iy o'suvchi* funksiyaning ta'rifini olamiz:

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y). \tag{3.4.2}$$

Masalan, $f(x) = \text{sign}\ x$ funksiya butun sonlar o'qida o'suvchi, lekin qat'iy o'suvchi emas.

Xuddi shunga o'xshash *kamayuvchi* funksiya ham aniqlanadi:

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y).$$

Qat'iy kamayuvchi funksiya esa quyidagicha aniqlanadi:

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y).$$

O'suvchi funksiya bilan kamayuvchi funksiyalar *monoton* funksiyalar deyiladi, qatiy o'suvchi funksiya bilan qatiy kamayuvchi funksiyalar esa *qatiy monoton* funksiyalar deyiladi.

Har qanday monoton funksiya bir tomonli limitga ega.

3.4.1 - teorema. *Biror intervalda monoton bo'lgan funksiya shu intervalning har bir nuqtasida chap va o'ng limitlarga ega.*

Isbot. Aytaylik, f funksiya (a,b) intervalda monoton bo'lib, c shu intervalning istalgan nuqtasi bo'lsin. Ana shu nuqtada, masalan, chap limit $f(c-0)$ ning mavjudligini isbotlaymiz.

Aniqlik uchun f o'suvchi bo'lsin deylik. f funksiyaning c nuqtadan chapda qabul qiladigan qiymatlari to'plamini, ya'ni

$$\{f(x) \;:\; a < x < c\} \tag{3.4.2}$$

to'plamni qaraymiz.

Modomiki f o'suvchi funksiya ekan,

$$f(x) \;\leq\; f(c), \quad a < x < c,$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan (3.4.2) to'plamning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi. Demak, bu to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'lib, biz bu chegarani M orqali belgilaymiz:

$$M \;=\; \sup_{a<x<c} f(x)\ .$$

Endi f funksiyaning c nuqtadagi chap limiti ana shu aniq yuqori chegaraga tengligini, ya'ni

$$f(c-0)=M \tag{3.4.3}$$

ekanini isbotlaymiz.

Aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra quyidagi ikki tasdiq o'rinlidir:

1) $a<x<c$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday x nuqtalar uchun

$$f(x)\le M \tag{3.4.4}$$

tengsizlik bajariladi;

2) istalgan $\varepsilon>0$ olganda ham shunday x_ε nuqta topiladiki, u uchun $a<x_\varepsilon<c$ bo'lib, quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$f(x_\varepsilon)>M-\varepsilon. \tag{3.4.5}$$

Musbat $\delta=\delta(\varepsilon)$ sonni $\delta=c-x_\varepsilon$ deb olamiz. Shunda, f funksiyaning o'suvchiligiga ko'ra, ixtiyoriy $x>x_\varepsilon=c-\delta$ uchun (3.4.5) dan

$$f(x)\ge f(x_\varepsilon)>M-\varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Agar (3.4.4) ni hisobga olsak,

$$c-\delta<x<c$$

intervaldagi barcha x lar uchun

$$M-\varepsilon\ <\ f(x)\ \le\ M$$

tengsizlikni olamiz.

Bu tengsizlik M soni f funksiyaning c nuqtadagi chap limitiga tengligini anglatadi. Demak, (3.4.3) tenglik bajarilar ekan.

Monoton funksiyaning o'ng limitga ega ekani ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi.

Q.E.D.

Eslatma. Agar f funksiya c nuqtaning biror atrofida aniqlangan va o'suvchi bo'lsa, uning o'ng va chap limitlari hamda c nuqtadagi qiymati quyidagi munosabat bilan bog'langan bo'ladi:

$$f(c-0)\ \le\ f(c)\ \le\ f(c+0).$$

Bunda tengsizliklarni, umuman aytganda, tengliklar bilan almashtirib bo'lmasligini sign x funksiyasi misolida ko'rish mumkin, chunki $c=0$ nuqtada

$$\text{sign }(0-0)=-1,\quad \text{sign }0=0,\quad \text{sign }(0+0)=1.$$

§ 3.5. Funksiyalar uzluksizligi

1. Ushbu paragrafda biz eng muhim matematik tushunchalardan biri bo'lgan uzluksiz funksiya tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. *Agar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan f funksiya shu nuqtada limit qiymatiga ega bo'lib, bu qiymat $f(a)$ ga teng bo'lsa, ya'ni*

$$\lim_{x\to a} f(x) \ = \ f(a)$$

bo'lsa, f funksiya a nuqtada ***uzluksiz*** *deyiladi.*

Funksiya limit qiymatining Heine va Koshi ta'riflarini esga olsak, biz funksiyani nuqtadagi uzluksizligining ikki teng kuchli ta'rifini berishimiz mumkin.

Uzluksizlikning Heine bo'yicha ta'rifi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

Ta'rif (H.E.Heine). *Berilgan f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.*

Agar argumentning a nuqtaga yaqinlashuvchi istalgan x_n ketma-ketligi uchun funksiyaning unga mos $f(x_n)$ qiymatlar ketma-ketligi $f(a)$ ga yaqinlashsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksizlikning Koshi bo'yicha ta'rifi esa quyidagicha o'qiladi.

Ta'rif (Koshi (A.L.Cauchy)). *Berilgan f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.*

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, argument x ning

$$|x - a| < \delta$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Albatta, f funksiyaning biror nuqtadagi uzluksizligi ta'rifida argument qiymatlarining bu nuqtadan farq qilishini talab qilishga zaruriyat yo'q.

Bundan buyon, agar biror funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, biz, qisqa qilib: funksiya E to'plamda uzluksiz deymiz.

3.5.1 - misol. Har qanday ko'phad butun sonlar o'qida uzluksizdir.

Bu tasdiqning haqligi 3.1.6 - misoldan bevosita kelib chiqadi.

Navbatdagi misol funksiya o'zi aniqlangan nuqtalarda uzluksiz bo'lishi shart emasligini ko'rsatadi.

3.5.2 - misol. Dirixle funksiyasi (3.1.4 - misolga qarang) sonlar o'qining hech qaysi nuqtasida uzluksiz emas.

Bu tasdiq Dirixle funksiyasining biror nuqtada ham limit qiymatga ega emasligidan kelib chiqadi.

Agar E to'plamda aniqlangan f funksiya $a \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lmasa, u holda f funksiya a nuqtada *uzilishga* ega deyiladi. Bunda a nuqta f funksiyaning *uzilish nuqtasi* deb ataladi. Shunday qilib, Dirixle funksiyasi sonlar o'qining har bir nuqtasida uzilishga ega ekan.

Faqat bir nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalar ham mavjud.

3.5.3 - misol. Agar $D(x)$ Dirixle funksiyasi bo'lsa, quyidagi

$$f(x) = xD(x)$$

funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, boshqa barcha nuqtalarda uzilishga ega. Haqiqatan, ravshanki,

$$|f(x)| \ \leq \ |x|,$$

shuning uchun, agar $x_n \to 0$ bo'lsa, $f(x_n) \to 0 = f(0)$ bo'ladi, ya'ni f funksiya nolda uzluksiz ekan.

Endi, agar f funksiya boshqa biror $a \neq 0$ nuqtada uzluksiz bo'lsin desak, u holda

$$D(x) \ = \ \frac{f(x)}{x}$$

funksiya ham o'sha nuqtada uzluksiz bo'lishi kerak, albatta. Ammo bu Dirixle funksiyasining har bir nuqtada uzilishga ega ekaniga ziddir.

2. Uzilish nuqtaning turlari. Ta'rifga ko'ra, agar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan f funksiya uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; f(a)$$

tenglik bajarilmasa, bu a nuqta f funksiyaning uzilish nuqtasi deyilar edi.

Uzilish nuqtani, bu tenglik bajarilmasligi sabablariga qarab, turlarga ajratish mumkin.

Eng sodda hol - bu qachonki chap tomondagi limit mavjud bo'lib, biror b songa teng bo'lsayu, lekin $b \neq f(a)$ bo'lsa. Bu holda, agar funksiyani a nuqtada b ga teng qilib o'zgartirsak, ya'ni

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \neq a \text{ bo'lsa,} \\ \;b\;\;, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

desak, bu funksiya a nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda $f(x)$ funksiya bilan ustma-ust tushsada, lekin u, f funksiyadan farqli ravishda, a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Shunday qilib, qaralayotgan holda berilgan funksiya qiymatini a nuqtada o'zgartirish yordamida uzilishni bartaraf qilish mumkin ekan. Shu sababli bunday uzilish nuqta *bartaraf etiladigan uzilish nuqta* deyiladi.

Keyingi yanada muhimroq hol - bu a nuqtadagi uzilish funksiyaning bu nuqtadagi limiti mavjud emasligi tufayli sodir bo'lgan holdir. Bu holda uzilish nuqta ikki turga bo'linadi. Bu bo'linishning asosida quyidagi bizga ma'lum bo'lgan tasdiq yotadi: a nuqtaning biror atrofida aniqlangan funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun uning shu a nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, bu bir tomonli limitlarning funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lishi, yani

$$f(a-0) \;=\; f(a+0) \;=\; f(a)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bundan chiqdi, uzilish yoki o'ng va chap limitlar mavjud bo'lib, ular o'zaro teng bo'lmasligi sababli yoki bo'lmasa, bir tarafli limitlardan birortasi mavjud emasligi tufayli sodir bo'lishi mumkin. Birinchi holga misol sifatida $\operatorname{sign} x$ funksiyasini olsak bo'ladi, ikkinchi holga esa - Dirixle funksiyasini.

Agar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan f funksiya bu nuqtada o'ng va chap limitlarga ega bo'lib, ular o'zaro teng bo'lmasa:

$$f(a-0) \;\neq\; f(a+0),$$

u holda bunday nuqta *birinchi tur uzilish nuqta* deyiladi.

Bunda

$$f(a+0) \;-\; f(a-0)$$

kattalik f funksiyaning a nuqtadagi *sakrashi* deyiladi. Masalan, $a = 0$ nuqta $\operatorname{sign} x$ funksiya uchun birinchi tur uzilish nuqta bo'lib, bu nuqtada qaralayotgan funksiya 2 ga teng bo'lgan sakrashga ega.

Agar a nuqta atrofida aniqlangan f funksiyaning bu nuqtadagi bir tomonli limitlaridan aqalli bittasi mavjud bo'lmasa, u holda a nuqta *ikkinchi tur uzilish nuqta* deyiladi. Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ \;\;0\;\;, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan funksiya nolda ikkinchi tur uzilishga ega, chunki, ravshanki, nolda bu funksiya chap tomondan ham, o'ng tomondan ham limitga ega emas.

3. Ushbu bandda biz uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish natijasida yana uzluksiz funksiya hosil bo'lishini ko'ramiz.

3.5.1 - teorema. *Agar f va g funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada uzluksiz bo'lsa, bu ikki funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati (ko'rsatilgan atrofda $g \neq 0$ bo'lgan hollarda) a nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, f va g funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsin. Biz $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ va $\dfrac{f}{g}$ ($g \neq 0$ bo'lganda) funksiyalar ham o'sha nuqtada uzluksiz ekanini isbotlashimiz kerak, ya'ni har qanday $x_n \to a$ ketma-ketlik uchun

$$f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a), \qquad f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(a) \cdot g(a),$$

hamda a nuqtaning ko'rsatilgan atrofida $g \neq 0$ bo'lganda

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$$

munosabatlarni isbotlashimiz zarur. Lekin bu tasdiqlar bevosita 3.1.1 - teoremadan kelib chiqadi.

Q.E.D.

Shuni aytish kerakki, 3.5.1 - teoremaning nisbatga tegishli qismida berilgan intervalning barcha x nuqtalarida $g(x) \neq 0$ shartni o'rniga faqat $g(a) \neq 0$ deb talab qilish yetarlidir. Haqiqatan, bu shartdan, g funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun, uning a nuqtaning biror atrofida ham noldan farqli ekani kelib chiqadi. Aslida bundanda qat'iyroq navbatdagi tasdiq o'rinli.

3.5.1 - tasdiq. *Berilgan g funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu a nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar $g(a) > 0$ bo'lsa, a nuqtaning shunday δ-atrofi va $c > 0$ o'zgarmas topiladiki, barcha $x \in (a - \delta,\ a + \delta)$ larda*

$$g(x) > c > 0$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Shartga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, barcha $x \in (a - \delta,\ a + \delta)$ larda

$$g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Endi $c = \varepsilon = \dfrac{g(a)}{2}$ desak, talab qilingan tengsizlikni olamiz.

Q.E.D.

Isbotlangan 3.5.1 - tasdiq quyidagini anglatadi: agar berilgan funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtasida noldan farqli bo'lsa, shu nuqtaning biror atrofida u o'z ishorasini saqlaydi.

3.5.2 - misol. Har qanday ratsional funksiya o'zi aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir. Boshqacha aytganda, agar $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlar bo'lsa,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

funksiya maxraj $Q(x)$ noldan farqli bo'lgan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Ta'rif. *Berilgan $y = f(x)$ funksiya $E \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Bundan tashqari, $x = \varphi(t)$ funksiya $M \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami E da yotsin. U holda M to'plamda aniqlangan va har bir $t \in M$ qiymatga $f[\varphi(t)]$ sonni mos qo'yuvchi $f(\varphi)$ funksiya* ***murakkab funksiya*** *deb ataladi.*

Bunday aniqlangan $F(t) = f[\varphi(t)]$ funksiyani f va φ funksiyalarning *superpozitsiyasi* yoki bu ikki funksiyaning *kompozitsiyasi* deb ham atashadi va $F = f \circ \varphi$ kabi belgilashadi.

3.5.2 - teorema. *Agar $\varphi : M \to E$ funksiya biror $a \in M$ nuqtada, $f : E \to \boldsymbol{R}$ funksiya esa o'sha nuqtaga mos $b = \varphi(a) \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda murakkab $F(t) = f[\varphi(t)]$ funksiya $t = a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isbot. Biz biror $a \in M$ nuqtaga intiluvchi har qanday $t_n \in M$ ketma-ketlik uchun quyidagi

$$f[\varphi(t_n)] \ \to f[\varphi(a)], \quad t_n \to a, \tag{3.5.1}$$

yaqinlashishni isbotlashimiz zarur.

Lekin φ funksiyaning uzluksizligidan,

$$\varphi(t_n) \ \to \ \varphi(a), \quad t_n \to a,$$

munosabatni olamiz. U holda f funksiyaning $b = \varphi(a) \in E$ nuqtadagi uzluksizligidan (3.5.1) kelib chiqadi.

Q.E.D.

2. Ushbu bandda biz biror intervalda uzluksiz funksiyalarning muhim bir xossasini o'rnatamiz. Bu xossaning geometrik ma'nosini quyidagidan iborat: agar uzluksiz funksiyaning grafigi biror gorizontal to'g'ri chiziqning ham yuqorisida, ham ostida o'z nuqtalariga ega bo'lsa, u holda bu grafik ana shu gorizontal to'g'ri chiziqni albatta kesib o'tadi.

3.5.1 - lemma. *Berilgan g funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar $g(a) < 0$ va $g(b) > 0$ bo'lsa, (a,b) intervalda shunday c nuqta topiladiki, u nuqtada $g(c) = 0$ bo'ladi.*

Isbot. Berilgan $[a,b]$ kesmani $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$ nuqta orqali teng ikki bo'lakka bo'lamiz. Agar $g(c_1) = 0$ bo'lsa, c_1 qidirilayotgan nuqta bo'ladi. Bordiyu $g(c_1) \neq 0$ bo'lsa, $[a_1, b_1]$ simvoli orqali ikki $[a, c_1]$ va $[c_1, b]$ kesmalardan qaysi birining chetki nuqtalarida g funksiya har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, o'shani belgilaymiz. Shunday qilib,

$$g(a_1) \ < \ 0, \quad g(b_1) \ > \ 0.$$

исправить рисунок

Keyingi qadamda $[a_1, b_1]$ kesmani $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ nuqta orqali teng ikki bo'lakka ajratamiz. Agar $g(c_2) = 0$ bo'lsa, yana talab qilingan nuqta topildi. Bordiyu $g(c_2) \neq 0$ bo'lsa, $[a_2, b_2]$ simvol orqali ikki $[a_1, c_2]$ va $[c_2, b_1]$ kesmalardan qaysi birining chetki nuqtalarida g funksiya har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, o'shani belgilaymiz. Demak,

$$g(a_2) \ < \ 0, \quad g(b_2) \ > \ 0.$$

Bu jarayonni davom ettirsak, biz, yoki qandaydir n-qadamda $g(c_n) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladigan c_n nuqtani olib, jarayonni tugatamiz, yoki ichma-ich joylashgan shunday $[a_n, b_n]$ kesmalarni olamizki, ular uchun

$$g(a_n) \ < \ 0, \quad g(b_n) \ > \ 0 \tag{3.5.2}$$

bo'ladi.

Agar bu jarayon tugamasa, ravshanki, $[a_n, b_n]$ kesmaning uzunligi nolga intiladi, shuning uchun, ichma-ich joylashgan kesmalar prinsipiga ko'ra, $[a_n, b_n]$ kesmalarning barchasiga tegishli bo'lgan yagona c nuqta topiladi. Xuddi ana shu c nuqtada talab qilingan $g(c) = 0$ tenglik o'rinli ekanini isbotlaymiz.

Demak, $a_n \to c$ va $b_n \to c$ ekan. U holda, uzluksizlikka ko'ra, $g(a_n) \to g(c)$ va $g(b_n) \to g(c)$. Shunday ekan, (3.5.2) munosabatlarda $n \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$g(c) \ \leq \ 0, \quad g(c) \ \geq \ 0$$

tengsizliklarni olamiz.

Aniqki, bu ikki tengsizlik bir vaqtda faqat $g(c) = 0$ bo'lgandagina bajariladi.

Q.E.D.

Navbatdagi teoremani uzluksiz funksiyaning barcha oraliq qiymatlarni qabul qilishi haqidagi teorema deb nomlashadi.

3.5.3 - teorema. *Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar $f(a) < f(b)$ bo'lsa,*

$$f(a) \ < \ A \ < \ f(b)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi istalgan A soni uchun, (a, b) intervalda $f(c) = A$ tenglik bajariladigan c nuqta topiladi.

Isbot. Quyidagi

$$g(x) \ = \ f(x) \ - \ A$$

funksiyani kiritamiz.

Ravshanki, g funksiya 3.5.1 - lemmaning barcha shartlarini qanoatlantiradi va shuning uchun, (a, b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, $g(c) = 0$ bo'ladi. Demak, $f(c) = A$ tenglik bajarilar ekan.

Q.E.D.

5. Kesmada uzluksiz funksiyaning eng muhim xossalaridan biri uning chegaralanganligidir. Ushbu bandda ana shu xossa to'laroq o'rganiladi.

Ta'rif. *Berilgan f funksiyaning $E \subset D(f)$ to'plamda qabul qiladigan barcha qiymatlar to'plami E* ***to'plamning aksi*** *deyiladi va*

$$f(E) \ = \ \{ \ f(x) \ : \ x \in E \ \}$$

kabi belgilanadi.

Ta'rif. *Agar f funksiya va $E \subset D(f)$ to'plam berilgan bo'lib, $f(E)$ to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda f funksiya E to'plamda* ***yuqoridan chegaralangan*** *deb ataladi.*

Bunda $f(E)$ to'plamning aniq yuqori chegarasi f funksiyaning E to'plamdagi *aniq yuqori chegarasi* deb ataladi va

$$\sup_{x \in E} f(x) \ = \ \sup \ f(E)$$

kabi belgilanadi.

Quyidan chegaralangan funksiya xuddi shunga o'xshab aniqlanadi.

Ta'rif. *Agar f funksiya va $E \subset D(f)$ to'plam berilgan bo'lib, $f(E)$ to'plam quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda f funksiya E to'plamda* ***quyidan chegaralangan*** *deb ataladi.*

Bunda $f(E)$ to'plamning aniq quyi chegarasi f funksiyaning E to'plamdagi *aniq quyi chegarasi* deb ataladi va

$$\inf_{x \in E} f(x) \ = \ \inf \ f(E)$$

kabi belgilanadi.

Biror to'plamda bir vaqtning o'zida ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan funksiya shu to'plamda *chegaralangan* deb ataladi.

3.5.4 - teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). *Biror kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada chegaralangandir.*

Isbot. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Teoremani isbotlash uchun, ravshanki, barcha $x \in [a, b]$ larda

$$|f(x)| \leq B$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi B o'zgarmasning mavjudligini isbotlash yetarli.

Faraz qilaylik, bunday B topilmasin. U holda B ga ketma-ket $1, 2, 3, \ldots$ qiymatlarni berib, $[a, b]$ kesmada shunday $\{x_n\}$ ketma-ketlikni topamizki, u uchun

$$|f(x_n)| > n \tag{3.5.3}$$

baho o'rinli bo'ladi.

Bol'sano - Veyershtrss teoremasiga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan $[a, b]$ kesmadagi biror c nuqtaga yaqinlashadigan $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkin. Shartga ko'ra, f - uzluksiz, shuning uchun, birinchidan, $\{f(x_{n_k})\}$ ketma-ketlik $f(c)$ ga yaqinlashadi. Lekin, boshqa tomondan, (3.5.3) bahoga ko'ra,

$$|f(x_{n_k})| > n_k$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni bu ketma-ketlik chegaralanmagan ekan. Hosil bo'lgan qarama-qarshilikdan teoremaning tasdiqi kelib chiqadi.

Q.E.D.

3.5.5 - teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). *Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya shu kesmada o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi.*

Isbot. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda 3.5.4 - teoremaga ko'ra, bu funksiya ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi va, bundan chiqdi, 1.4.1 - teoremaga ko'ra u aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralarga egadir:

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Biz f funksiyaning ana shu chegaralarga erishishini isbotlashimiz kerak. Boshqacha aytganda, $[a, b]$ kesmada shunday x_* va x^* nuqtalar mavjudligini ko'rsatish kerakki, ular uchun

$$m = f(x_*), \qquad M = f(x^*)$$

tengliklar o'rinli bo'lsin.

Masalan, f funksiya M aniq yuqori chegaraga erishishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, bunday bo'lmasin. U holda $M - f(x)$ ayirma qatiy musbat bo'lib, $[a, b]$ kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi. Shuning uchun, 3.5.1 - teoremaga ko'ra, quyidagi

$$g(x) \; = \; \frac{1}{M - f(x)}$$

musbat funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksizdir.

Veyershtrassning birinchi teoremasiga asosan, g funksiya yuqoridan biror musbat son orqali chegaralangan, ya'ni

$$\frac{1}{M - f(x)} \; \le \; B, \qquad a \le x \le b.$$

Demak,

$$f(x) \; \le \; M \; - \; \frac{1}{B}, \qquad a \le x \le b.$$

Bu tengsizlik $M - \dfrac{1}{B}$ son f funksiyaning yuqori chegarasi ekanini anglatadi, ya'ni M soni aniq yuqori chegara emas ekan. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

Q.E.D.

Agar shunday $x^* \in E$ nuqta mavjud bo'lsaki,

$$f(x^*) = \sup_{x\in E} f(x)$$

bo'lsa, $f(x^*)$ qiymat f funksiyaning E dagi *maksimumi* deb ataladi va

$$\max_{x\in E} f(x) = f(x^*)$$

kabi belgilanadi.

Bunda x^* son f funksiyaning E to'plamdagi *maksimum nuqtasi* deyiladi. Masalan,

$$\max_{x\in[-1,1]} \text{sign } x = 1.$$

Shu singari, agar shunday $x_* \in E$ nuqta mavjud bo'lsaki,

$$f(x_*) = \inf_{x\in E} f(x)$$

bo'lsa, $f(x_*)$ qiymat f funksiyaning E dagi *minimumi* deb ataladi va

$$\min_{x\in E} f(x) = f(x_*)$$

kabi belgilanadi.

Bunda x_* son f funksiyaning E to'plamdagi *minimum nuqtasi* deyiladi. Masalan,

$$\min_{x\in[-1,1]} \text{sign } x = -1.$$

Natija. *Biror kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada o'zining maksimum hamda minimumiga egadir.*

Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, E to'plam uning qiymatlar to'plami bo'lsa, ya'ni

$$E = \{y \in \mathbf{R} \ : \ y = f(x), \ x \in [a, b]\}$$

bo'lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ kesmani E to'plamga uzluksiz akslantiradi deyiladi.

Bunday aniqlangan E to'plam f akslantirishdagi $[a, b]$ kesmaning aksi ham deb ataladi.

3.5.2 - tasdiq. *Uzluksiz akslantirishda kesmaning aksi yana kesma bo'ladi.*

Isbot. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, E to'plam bu kesmaning aksi bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m \ = \ \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M \ = \ \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ravshanki, $E \subset [m, M]$. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga asosan, $m \in E$ va $M \in E$. 3.5.3 - teoremaga ko'ra esa, $[m, M] \subset E$. Demak, $E = [m, M]$ ekan.

Q.E.D.

6. Ushbu bandda biz qanday shartlarda uzluksiz funksiya teskari funksiyaga ega bo'lishini va qanday shartlarda teskari funksiya uzluksiz bo'lishini o'rganamiz.

Ta'rif. *Agar f funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lib, istalgan ikki $x \in E$ va $y \in E$ argument qiymatlari uchun $x \neq y$ shartdan $f(x) \neq f(y)$ kelib chiqsa, f funksiya E to'plamda **teskarilanuvchanlik shartini** qanoatlantiradi deymiz.*

Ta'rif. *E to'plamda aniqlangan f funksiyaning teskarisi f^{-1} deb, $M = f(E)$ to'plamda aniqlangan va quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi:*

1) *istalgan $x \in E$ uchun*

$$f^{-1}[f(x)] \;=\; x;$$

2) *istalgan $y \in f(E)$ uchun*

$$f[f^{-1}(y)] \;=\; y.$$

3.5.3 - tasdiq. *Funksiya o'z teskarisiga ega bo'lishi uchun uning teskarilanuvchanlik shartini qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.*

Isbot o'z-o'zidan ko'rinib turibdi.

O'z teskarisiga ega bo'lgan funksiyalarni *teskarilanuvchi* deb ham atashadi.

3.5.4 - tasdiq. *Qat'iy monoton funksiya teskarilanuvchidir.*

Haqiqatan, agar $x_1 \neq x_2$ bo'lsa, $x_1 < x_2$ yoki $x_1 > x_2$ bo'lib, ravshanki, qat'iy monoton funksiya har ikkala holda ham $f(x_1) \neq f(x_2)$ shartni, ya'ni teskarilanuvchilik shartini qanoatlantiradi. Demak, bu funksiya 3.5.3 - tasdiqqa ko'ra teskarilanuvchidir.

3.5.6 - teorema. *Agar kesmada uzluksiz funksiya teskarisiga ega bo'lsa, teskari funksiya ham uzluksiz bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra, f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, f^{-1} teskari funksiyaga ega bo'lsin. 3.5.2 - tasdiqqa asosan, agar

$$m \;=\; \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M \;=\; \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

deb belgilasak, $[a, b]$ kesmaning aksi $[m, M]$ kesma bo'ladi.

Aytaylik, y_0 nuqta $[m, M]$ kesmadan olingan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Ravshanki, agar $x_0 = f^{-1}(y_0)$ deb olsak, $f(x_0) = y_0$ bo'ladi. Biz f^{-1} teskari funksiyaning mana shu y_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz.

Buning uchun $[m, M]$ dan y_0 ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{y_n\}$ ketma-ketlikni olib, unga mos $\{f^{-1}(y_n)\}$ ketma-ketlikning $f^{-1}(y_0) = x_0$ songa yaqinlashishini ko'rsatish yetarli.

Avvalo shuni qayd qilamizki, biz $x_n = f^{-1}(y_n)$ deb belgilasak, ravshanki,

$$f(x_n) \;=\; y_n \;\to y_0 = f(x_0) \tag{3.5.4}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Faraz qilaylik, $\{f^{-1}(y_n)\}$ ketma-ketlik, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik x_0 ga yaqinlashmasin. U holda x_0 nuqtaning biror atrofidan tashqarida ketma-ketlikning cheksiz ko'p elamentlari topiladi. Demak, Bol'tsano - Veyershstrass teoremasiga asosan, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x_0 dan farqli $x_0' \in [a, b]$ limit nuqtaga ega. Boshqacha aytganda, $x_{n_k} \to x_0'$ qismiy ketma-ketlik topiladi va shuning uchun, f funksiyaning uzluksizligiga ko'ra,

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0') \tag{3.5.5}$$

bo'ladi.

Agar (3.5.4) va (3.5.5) ni taqqoslasak, $x_0 \neq x_0'$ bo'lishiga qaramasdan, $f(x_0) = f(x_0')$ tenglikni olamiz. Bu esa f funksiyaning teskarilanuvchiligiga ziddir. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

Q.E.D.

7*. Yuqorida istalgan (uzluksiz bo'lishi shart bo'lmagan) funksiya teskarilanuvchi bo'lishi uchun yetarli shartlardan biri uning qat'iy monotonligi ekani ko'rsatildi. Qizig'i shundaki, *uzluksiz* funksiya teskarilanuvchi bo'lishi uchun qat'iy monotonlik sharti zaruriy ham ekan. Chunonchi, agar biror kesmada uzluksiz funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, u ana shu kesmada qat'iy monoton bo'lishi shart. Bu tasdiqning isboti quyidagi sodda teoremaga asoslanadi.

3.5.7 - teorema. *Agar kesmada uzluksiz funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, u o'zining maksimum va minimumlariga kesmaning chegaraviy nuqtalarda erishadi.*

Isbot. Shartga ko'ra berilgan f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va teskarilanuvchi bo'lsin. U holda bu kesmaning istalgan ikki x_1 va x_2 nuqtalari uchun quyidagi implikatsiya o'rinli bo'ladi:

$$[x_1 \neq x_2] \;\Rightarrow\; [f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Xususan, $f(a) \neq f(b)$. Aniqlik uchun $f(a) < f(b)$ deb, istalgan $x \in (a,b)$ nuqta uchun quyidagi

$$f(a) < f(x) < f(b)$$

ikki tomonlama tengsizlik o'rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan, agar bunday bo'maganda edi, shunday $x_0 \in (a,b)$ nuqta topilar ediki, u uchun, masalan, $f(x_0) > f(b)$ tengsizlik o'rinli bo'lar edi, ya'ni

$$f(a) < f(b) < f(x_0).$$

Shunday ekan, 3.5.3 - teoremaga asosan, (a, x_0) interval ichida shunday c nuqta topilar ediki, u uchun $f(c) = f(b)$ bo'lar edi. Ammo bu tenglik f ning teskarilanuvchi ekaniga ziddir.

Q.E.D.

Endi biz kesmada uzluksiz funksiyaning teskarilanuvchiligidan uning qat'iy monoton ekanligi kelib chiqishini isbotlashga o'tamiz.

3.5.8 - teorema. *Agar kesmada uzluksiz funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya ana shu kesmada qat'iy monoton bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f funksiya teskarilanuvchi bo'lsin. U holda, ravshanki, $f(a) \neq f(b)$ bo'ladi. Aniqlik uchun $f(a) < f(b)$ deylik. Mana shu shartlarda f funksiya $[a,b]$ kesmada qat'iy o'suvchi ekanini isbotlaymiz.

Haqiqatan, $[a,b]$ kesmadan $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikki x_1 va x_2 nuqtalarni olaylik. 3.5.7 - teoremaga asosan, quyidagi qo'shaloq tengsizlik o'rinli:

$$f(a) < f(x_1) < f(b).$$

Yana xuddi shu 3.5.7 - teoremani $[x_1, b]$ kesmada f funksiya va x_2 nuqtaga qo'llasak,

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b)$$

tengsizlikni olamiz.

Bu yerda chapdagi tengsizlik f funksiyaning qat'iy o'suvchi ekanini anglatadi.

Q.E.D.

§ 3.6. Elementar funksiyalarning uzluksizligi

1. Ratsional ko'rsatkichli darajali funksiya.

Biz natural ko'rsatkichli darajali funksiyalarni o'rganishdan boshlaymiz:

$$p_n(x) = x^n, \tag{3.6.1}$$

bu yerda n - natural son. Ushbu funksiya ko'phad bo'lib, butun sonlar o'qi $\mathbf{R}$ da tabiiy ravishda aniqlangan. Bundan tashqari, bu funksiya $\mathbf{R}$ da uzluksizdir.

Ushbu bandda biz (3.6.1) funksiyani manfiy bo'lmagan $[0, +\infty)$ yarim to'gri chiziqda berilgan deb hisoblaymiz. Shubhasiz, bu yarim to'gri chiziqda darajali funksiya qat'iy o'suvchi va, shu sababli, u teskarilanuvchi bo'ladi. Hosil bo'lgan teskari funksiya 3.5.6 - teoremaga asosan uzluksizdir. Biz uni quyidagicha belgilaymiz:

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}.$$

Agar bu tenglikda y argumentni odatdagi x orqali belgilasak, (3.6.1) funksiyaga teskari funksiya $\dfrac{1}{n}$ ko'rsatkichli quyidagi

$$p_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}} \tag{3.6.2}$$

darajali funksiya bo'ladi. Bundan tashqari,

$$\lim_{x\to\infty} x^n \ = \ +\infty$$

bo'lgani uchun, manfiy bo'lmagan yarim to'gri chiziqda aniqlangan (3.6.1) funksiyaning qiymatlar to'plami ham manfiy bo'lmaga yarim to'gri chiziq bo'ladi. Demak, (3.6.2) darajali funksiya $[0, +\infty)$ yarim to'gri chiziqda aniqlangan ekan.

Teskari funksiyaning ta'rifiga ko'ra, istalgan $a \geq 0$ uchun

$$[p_{\frac{1}{n}}(a)]^n = a, \qquad p_{\frac{1}{n}}(a^n) = a.$$

Agar (3.6.2) belgilashdan foydalansak, bu tengliklarni quyidagi ko'rinishda yozish ham mumkin:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a, \qquad (a^n)^{\frac{1}{n}} = a. \tag{3.6.3}$$

Manfiy bo'lmagan $a^{\frac{1}{n}}$ sonni $a \geq 0$ sondan olingan arifmetik ildiz ham deb atashadi va

$$\sqrt[n]{a} \ = \ a^{\frac{1}{n}}$$

kabi belgilashadi.

3.6.1 - tasdiq. Har qanday $a > 0$ hamda har qanday natural m va n lar uchun

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \tag{3.6.4}$$

tanglik o'rinli.

Isbot. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$b = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m. \tag{3.6.5}$$

U holda, butun ko'rsatkichli darajaning xossalariga ko'ra, (3.6.3) ni hisobga olib, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$b^n \ = \ \left[\left(a^{1/n}\right)^m\right]^n = \left(a^{1/n}\right)^{mn} \ = \ \left[\left(a^{1/n}\right)^n\right]^m \ = \ a^m.$$

Bundan, $\dfrac{1}{n}$ ko'rsatkichli darajaning ta'rifiga asosan,

$$b = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{3.6.6}$$

Natijada (3.6.5) va (3.6.6) tengliklarni taqqoslasak, talab qilinayotgan (3.6.4) tenglikni olamiz.
Q.E.D.

Endi, agar m va n istalgan natural sonlar bo'lsa, musbat ratsional $r = \dfrac{m}{n}$ uchun $a \geq 0$ sonining r ko'rsatkichli darajasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$a^{\frac{m}{n}} \ = \ [a^{\frac{1}{n}}]^m. \tag{3.6.7}$$

Agar $r > 0$ bo'lsa, $a > 0$ sonning manfiy ratsional $(-r)$ ko'rsatkichli darajasi

$$a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r \tag{3.6.8}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Nihoyat, istalgan $a > 0$ uchun

$$a^0 \ = \ 1 \tag{3.6.9}$$

deb qabul qilamiz.

Shunday qilib, biz istalgan musbat haqiqiy son x uchun yuqoridagi mulohazalar yordamida ixtiyoriy ratsional r ko'rsatkichli x^r darajani kiritdik. Bundan chiqdi, biz *aniqlanish sohasi* $x > 0$ *musbat yarim to'g'ri chiziq bo'lgan*

$$p_r(x) \ = \ x^r$$

ratsional ko'rsatkichli darajali funksiyani aniqladik. Ravshanki, ko'rsatkichli funksiya ana shu yarim to'gri chiziqda uzluksiz va o'suvchi bo'ladi.

Ratsional ko'rsatkichli daraja quyidagi asosiy xossalarga ega ekanini ko'rsatish qiyin emas:

$$a^{r+s} \ = \ a^r \cdot a^s, \tag{3.6.10}$$

$$(a^r)^s \ = \ a^{r \cdot s}, \tag{3.6.11}$$

$$a^r \cdot b^r \ = \ (a \cdot b)^r. \tag{3.6.12}$$

Bu munosabatlarda a va b - istalgan musbat sonlar bo'lib, r va s ko'rsatkichlar esa ixtiyoriy ratsional sonlardir.

Isbot butun ko'rsatkichli darajalarning xossalaridan hamda 3.6.1 - tasdiqdan bevosita kelib chiqadi.

Eslatma. Agar $a > 1$ bo'lsa, ixtiyoriy ratsional $r > 0$ son uchun

$$a^r \ > \ 1 \quad (a > 1,\ r > 0,\ r \in Q). \tag{3.6.13}$$

Haqiqatan, $r = m/n$ deylik va $b = a^{1/n}$ deb belgilaylik. Agar $b \leq 1$ bo'lsa, bu tengsizlikni n - darajaga ko'tarib, qarama-qarshilikka kelamiz: $a = b^n \leq 1$. Demak, $b > 1$ ekan. Endi bu tengsizlikni m - darajaga ko'tarsak, talab qilingan tengsizlikni olamiz:

$$a^r = a^{m/n} = b^m > 1.$$

2. Ko'rsatkichli funksiya.

Ushbu bandda ixtiyoriy $a > 0$ uchun

$$f(x) = a^x, \qquad x \in \mathbf{Q} \tag{3.6.14}$$

funksiyani o'rganamiz.

Avvalgi bandda biz bu funksiyani $a > 0$ ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganida barcha ratsional $x \in \mathbf{Q}$ ko'rsatkichlar uchun aniqlagan edik. Bizning galdagi vazifamiz bu funksiyani ko'rsatkich ixtiyoriy haqiqiy son, ya'ni $x \in \mathbf{R}$ bo'lgan holga ham aniqlashdir. Buning uchun biz avval (3.6.14) funksiya har bir irratsional nuqtada limit qiymatga ega ekanligini ko'rsatib, so'ngra o'sha nuqtada uni ana shu limit qiymatga teng deb aniqlaymiz.

Limit qiymat mavjudligining isboti quyidagi tasdiqlarga asoslanadi.

3.6.1 - lemma *Agar $a > 0$ bo'lsa,*

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} \; = \; 1 \tag{3.6.15}$$

bo'ladi.

Isbot. Agar $a > 1$ bo'lsa, biz biror $b > 0$ uchun $a = 1+b$ deb yozishimiz mumkin. U holda, (1.3.22) ga ko'ra, istalgan natural n uchun

$$\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \; \geq \; 1 + b.$$

Shunday ekan, darajali funksiyaning monotonligiga asosan,

$$1 + \frac{b}{n} \geq (1+b)^{1/n},$$

ya'ni

$$(1+b)^{1/n} \; - 1 \; \leq \; \frac{b}{n}.$$

Avvalgi belgilashga o'tsak, (3.6.13) ga ko'ra,

$$0 \; < \; a^{1/n} \; - 1 \; \leq \; \frac{a-1}{n}.$$

Bundan $a > 1$ bo'lganda lemmaning tasdig'ini olamiz. Agarda $a < 1$ bo'lsa, isbotlanganga asosan,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} \; = \; 1$$

va talab qilingan munosabat $a^{1/n} = \dfrac{1}{(1/a)^{1/n}}$ tenglikdan kelib chiqadi.

Q.E.D.

Natija. *Agar r_k ratsional sonlar ketma-ketligi nolga intilsa,*

$$\lim_{k\to\infty} a^{r_k} \; = \; 1 \tag{3.6.16}$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan, agar $r_k > 0$ bo'lsa, cheksiz katta n_k ketma-ketlikni $r_k < \dfrac{1}{n_k}$ shartdan tanlab olsak, $a > 1$ lar uchun

$$1 < a^{r_k} < a^{1/n_k}$$

tengsizlikni va $0 < a < 1$ lar uchun esa,

$$a^{1/n_k} < a^{r_k} < 1$$

tengsizlikni olamiz. Bundan har ikki holda ham (3.6.16) tenglik kelib chiqadi. Agarda $r_k < 0$ bo'lsa, talab qilingan natijani olish uchun $a^r = 1/a^{-r}$ tenglikdan foydalanish kifoya.

3.6.1 - teorema. *Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo'lsa, quyidagi*

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{Q}, \tag{3.6.16}$$

barcha ratsional sonlar to'plamida aniqlangan funksiya har bir $x \in \boldsymbol{R}$ nuqtada limit qiymatga egadir.

Isbot. Avval $f(x) = a^x$ funksiyaning monoton ekanini ko'rsataylik. Aytaylik $a > 1$ bo'lsin. Agar $x \in \mathbf{Q}$ va $y \in \mathbf{Q}$ bo'lib, $x < y$ bo'lsa, $h = y - x > 0$ deb belgilab, (3.6.13) yordamida quyidagi

$$f(y) - f(x) = f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x[a^h - 1] > 0$$

munosabatga ega bo'lamiz, ya'ni bu holda $f(x)$ funksiya qat'iy o'suvchi bo'lar ekan. Xuddi shunga o'xshab, $a < 1$ bo'lganda bu funksiyaning qat'iy kamayuvchi ekani ko'rsatiladi.

Har qanday monoton funksiya singari, (3.6.17) funksiya ham har bir $c \in \mathbf{R}$ nuqtada chap $f(c-0)$ va o'ng $f(c+0)$ limitlarga ega (bu tasdiq 3.4.1 - teoremaning isbotini so'zma-so'z qaytarish orqali isbotlanadi).

Endi bu limitlarning o'zaro tengligini isbotlaymiz. Aytaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ratsional sonlar ketma-ketligi c ga yaqinlashib, $x_n < c < y_n$ tengsizlikni qanoatlantirsin.

Shunday ekan, $h_n = y_n - x_n$ desak,

$$f(y_n) - f(x_n) \;=\; a^{x_n}(a^{h_n} - 1)$$

tenglik hosil bo'ladi.

Shartga ko'ra, har bir x_n son har qanday y_m dan kichik, xususan, $x_n < y_1$. Demak, a^{x_n} ketma-ketlik chegaralangan. Bundan chiqdi, oxirgi tenglikda $n \to \infty$ deb limitga o'tsak, qayd qilingan

$$f(c+0) - f(c-0) \;=\; 0 \tag{3.6.18}$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik esa limit qiymatning har bir $c \in \mathbf{R}$ nuqtada mavjudligini anglatadi.

Q.E.D.

Eslatma Agar c - ratsional son bo'lsa,

$$f(c-0) \le f(c) \le f(c+0)$$

munosabat va (3.6.18) tenglikdan

$$f(c-0) = f(c) = f(c+0)$$

tenglikni olamiz, qaysiki, o'z navbatida, f funksiyaning c nuqtada uzluksizligini anglatadi.

Endi biz ko'rsatkichli funksiyani istalgan irratsional nuqtada uning qiymatini limit qiymatga teng deb aniqlashimiz mumkin.

Ta'rif. *Agar $a > 0, a \neq 1$ bo'lsa, istalgan irratsional x son uchun*

$$a^x = \lim_{r \to x,\ r \in Q} a^r \tag{3.6.19}$$

deb hisoblaymiz.

Shunday qilib, biz 3.6.1 - teorema yordamida asosning $a > 0,\ a \neq 1$ bo'lgan barcha qiymatlari uchun ko'rsatkichli a^x funksiyani **R** sonlar o'qining hamma nuqtalarida aniqladik.

3.6.2 - teorema. *Ko'rsatkichli funksiya quyidagi xossalarga ega:*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \tag{3.6.20}$$

$$(a^y)^x = a^{y \cdot x}, \tag{3.6.21}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \tag{3.6.22}$$

bu yerda $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

Isbot ratsional qiymatli argumentlar uchun o'rinli bo'lgan (3.6.10)-(3.6.12) tengliklardan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar (3.6.10)-(3.6.12) tengliklarda $r \in \mathbf{Q}$ va $s \in \mathbf{Q}$ sonlarni $r \to x$ va $s \to y$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (3.6.20)-(3.6.22) munosabatlar ko'rsatkichli funksiyaning irratsional x va y nuqtalardagi (3.6.19) ta'rifidan kelib chiqadi.

3.6.3 - teorema. *Ko'rsatkichli* (3.6.19) *funksiya* ***R*** *da $a > 1$ bo'lganda qat'iy o'suvchi va $0 < a < 1$ bo'lganda qat'iy kamzyuvchidir.*

Isbot. Masalan, $a > 1$ bo'lib, $x < y$ bo'lsin. Agar $h = y - x > 0$ deb, h ga yaqinlashadigan o'suvchi r_n ratsional sonlar ketma-ketligini olsak, u holda (3.6.13) ga ko'ra,

$$a^{r_n} - 1 > 0$$

munosabatni olamiz. Endi r_n ketma-ketlikning o'suvchi ekanini hisobga olsak,

$$a^h - 1 > 0$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Shunday ekan, (3.6.20) dan

$$a^y - a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1) > 0$$

munosabatga ega bo'lamiz, qaysiki, o'z navbatida, ko'rsatkichli funksiyaning qat'iy o'sishini anglatadi.

Q.E.D.

Navbatdagi lemma argumentning haqiqiy qiymatlarida aniqlangan ko'rsatkichli funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz ekanini ko'rsatadi.

3.6.2 - lemma. *Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo'lsa, u holda*

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1. \tag{3.6.23}$$

Isbot. Aniqlik uchun $a > 1$ deylik. Aytaylik, x_n nolga yaqinlashuvchi ixtiyoriy haqiqiy sonlar ketma-ketligi bo'lsin. Endi 0 ga yaqinlashuvchi va $r_n < x_n < s_n$ shartni qanoatlantiruvchi ikki r_n va s_n ratsional sonlar ketma-ketligini olamiz. U holda

$$a^{r_n} \ < \ a^{x_n} \ < \ a^{s_n}.$$

Agar bu yerda (3.6.16) xossadan foydalanib, limitga o'tsak, talab qilingan tasdiqqa ega bo'lamiz.
Q.E.D.

3.6.4 - teorema. *Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo'lsa, $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan*

$$f(x) = a^x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{3.6.24}$$

funksiya $\boldsymbol{R}$ da uzluksiz bo'ladi.
Isbot 3.6.2 - lemma va (3.6.20) tenglikdan kelib chiqadi. Haqiqatan,

$$a^x \ - \ a^c \ = \ a^c(a^{x-c} - 1)$$

va o'ng tomon $x \to c$ da nolga intiladi. Bu esa (3.6.24) funksiyaning c nuqtada uzluksizligini anglatadi.
Q. E. D.

3.6.5 - teorema. *Agar $a > 1$ bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty. \tag{3.6.25}$$

Isbot. Agar $\delta = a - 1 > 0$ desak, (1.3.22) ga asosan,

$$a^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta,$$

shuning uchun $n \to +\infty$ da $a^n \to +\infty$ bo'ladi. Bundan, ko'rsatkichli funksiyaning monotonligiga ko'ra, (3.6.25) ning o'ng tomonidagi tenglikni olamiz.

Endi chapdagi tenglik o'rinli ekani shubhasiz. Haqiqatan, agar $x \to -\infty$ desak,

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} \to 0$$

bo'ladi.
Q.E.D.
1 - natija. *Agar $0 < a < 1$ bo'lsa,*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \tag{3.6.26}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.
Haqiqatan, agar $\dfrac{1}{a} > 1$ tengsizlikni va

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

tenglikni hisobga olsak, talab qilingan (3.6.26) tengliklar 3.6.5 - teoremadan kelib chiqadi:
2 - natija. *Ko'rsatkichli funksiyaning qiymatlar to'plami musbat yarim to'g'ri chiziq, ya'ni $\{y \in \boldsymbol{R} : y > 0\}$ bo'ladi.*

Isbot quyidagi

$$\inf_{x\in\mathbf{R}} a^x = 0, \qquad \sup_{x\in\mathbf{R}} a^x = +\infty$$

tengliklar va 3.5.3 - teoremadan kelib chiqadi.

3. Logarifmik funksiya.

Yuqoridagi 3.5.7 - va 3.6.4 - teoremalardan haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan ko'rsatkichli funksiyaning teskari funksiyaga ega ekani to'g'ridan- to'g'ri kelib chiqadi.

Ta'rif. *$a > 0$ va $a \neq 1$ bo'lsin. Ko'rsatkichli*

$$y \;=\; a^x$$

funksiyaga teskari funksiya ***logarifmik*** *funksiya deyiladi va*

$$x \;=\; \log_a y$$

kabi belgilanadi.

Bu funksiyani, argument va funksiyani belgilashni odatdagi ko'rinishga o'tkazib,

$$y \;=\; \log_a x \tag{3.6.27}$$

kabi yozish mumkin.

Yuqoridagi 2 - natijaga asosan, logarifmik funksiya musbat yarim to'g'ri chiziqda, ya'ni $\{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ da aniqlangan.

Ta'rifdagi musbat va birga teng bo'lmagan a soni logarifmik funksiyaning asosi deb ataladi. Logarifmik funksiya $b > 0$ nuqtada qabul qiladigan $\log_a b$ qiymat esa, b sonining a asosga ko'ra logarifmi deyiladi.

3.6.5 - teorema. *Logarifmik funksiya musbat yarim to'g'ri chiziqda, ya'ni $\{x \in \boldsymbol{R} : x > 0\}$ da uzluksizdir.*

Isbot bevosita 3.5.6 - va 3.6.4 - teoremalardan kelib chiqadi.

Asosiy logarifmik ayniyat deb ataluvchi quyidagi tenglik logarifmik funksiyaning ko'rsatkichli funksiyaga teskari bo'lganidan bevosita kelib chiqadi:

$$a^{\log_a x} \;=\; x. \tag{3.6.28}$$

Logarifmik funksiya bir qator muhim xossalarga ega bo'lsada, aynan navbatdagi teoremada keltirilgan xossa logarifmning XVII-XX asrlarda keng tarqalishiga asos bo'lgan. Bu xossa ko'paytirish amalini unga nisbatan soddaroq qo'shish amali bilan ma'lum ma'noda almashtirishga imkon beradi.

3.6.6 - teorema. *Ixtiyoriy $x > 0$ va $y > 0$ lar uchun*

$$\log_a(x \cdot y) \;=\; \log_a x \;+\; \log_a y \tag{3.6.29}$$

tenglik o'rinli.

Isbot bevosita (3.6.28) asosiy logarifmik ayniyatdan va ko'rsatkichli funksiyaning (3.6.20) xossasidan kelib chiqadi. Haqiqatan,

$$x = a^{\log_a x}, \qquad y = a^{\log_a y}$$

tengliklarni o'zaro ko'paytirsak, (3.6.20) tenglikka ko'ra,

$$a^{\log_a x\cdot y} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

hosil bo'ladi.

Bu tenglikdan, ko'rsatkichli funksiyaning qat'iy monotonligini hisobga olsak, talab qilingan (3.6.29) tenglik kelib chiqadi.

Q.E.D.

Agar e soni

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.6.30}$$

tenglik orqali aniqlansa, asosi ana shu e soniga teng bo'lgan logarifmga natural logarifm deyiladi va u $\ln x = \log_e x$ ko'rinishda belgilanadi. Natural logarifmlar matematikada va uning tadbiqida juda katta ahamiyatga ega.

Hisoblash amallarining bajarishini tezlashtirish maqsadida 1614 yilda D. Neper tomonidan kiritilgan logarifmlar aynan natural logarifmlar edi. Keyinchalik o'n asosli (o'nlik) logarifmlar ularni siqib chiqarib, qariyib uch asr mobaynida asosiy bo'lib qoldilar. Shu davrda o'nlik logarifmlar jadvallari yoki ularning soddalashtirilgan holi bo'lgan logarifmik chizg'ichlar hisobchilar orasida keng tarqalgan edi.

XX asr oxirlariga kelib turli sohalarda keng tarqalgan elektron hisoblash texnikasi logarifmik jadval va chizg'ichalarni keraksiz qilib qo'ydi. Ammo ilmiy izlanishlarda esa, asosan natural logarifmlar qo'llanilib, logarifmik funksiyalarning ahamiyati borgan sari oshib boraverdi. Natijada yana natural logarifmlar asosiy o'ringa chiqib oldilar.

4. Trigonometrik funksiyalar.

$\mathbf{R}^2$ tekislikda

$$S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\} \tag{3.6.31}$$

ko'rinishda aniqlangan S to'plamni qaraymiz. Bu to'plam markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi 1 ga teng bo'lgan aylana, yoki qisqa qilib *birlik aylana* deyiladi.

Koordinatalari (a_1, b_1) bo'lgan M_1 nuqta bilan koordinatalari (a_2, b_2) bo'lgan M_2 nuqtani birlashtiruvchi M_1M_2 kesma uzunligi deb quyidagi

$$|M_1M_2| = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2} \tag{3.6.32}$$

manfiy bo'lmagan songa aytiladi. Shunday ekan, (3.6.31) to'plamni $\mathbf{R}^2$ tekislikdagi koordinatalar boshidan uzunligi 1 ga teng bo'lgan masofada joylashgan nuqtalar to'plami deyish mumkin.

Aylananing ikki nuqtasi orasida yotgan qismi *yoy* deb ataladi. Mana shu aylana yoyining uzunligi tushunchasini kiritishga o'tamiz.

Birlik aylanada koordinatasi $(1,0)$ bo'lgan nuqtani P deb belgilab, aylana yoyining uzunligini shu nuqtadan boshlab o'lchaymiz.

Birlik aylanadan yuqori yarim tekislikda yotuvchi istalgan $M = (x,y)$ nuqtani (ya'ni $y \geq 0$ bo'lgan nuqtani) olamiz. Bu ikki P va M nuqtalarni $P_{k-1}P_k$ kesmalardan iborat bo'lgan shunday siniq chiziq $L = P_0P_1P_2...P_{n-1}P_n$ bilan birlashtiramizki, bunda $P_0 = P$ va $P_n = M$ bo'lib, barcha P_k nuqtalar S aylanada yotsin.

Biz siniq chiziq qirralari soat strelkasiga teskari ravishda ketma-ket joylashgan deb hisoblaymiz, ya'ni bizning holimizda, o'ngdan chapga qarab joylashgan bo'ladi. Bu degani, agar P_k nuqta (x_k, y_k) koordinatalarga ega bo'lsa,

$$x = x_n < x_{n-1} < ... < x_1 < x_0 = 1 \tag{3.6.33}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bunday siniq chiziqni PM yoyga *ichki chizilgan* deymiz. Bu L siniq chiziqning uzunligi deb

$$|L| \ = \ \sum_{k=1}^{n} |\Delta L_k| \tag{3.6.34}$$

songa aytiladi, bunda ΔL_k orqali P_{k-1} va P_k nuqtalarni birlashtiruvchi kesma belgilangan bo'lib, uning uzunligi, (3.6.32) ga asosan,

$$|\Delta L_k| = |P_{k-1}P_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

ga teng.

Agar siniq chiziqning bo'g'inlari sonini, ya'ni n ni oshirib borsak, har bir bo'g'in uzunligi qisqarib, siniq chiziq uzunligi aylana uzunligi deb ataladigan songa yaqinlashib boradi.

Ta'rif. *Birlik aylananing PM yoyi uzunligi $l(M)$ deb bu yoyga ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunligining aniq yuqori chegarasiga aytiladi*:

$$l(M) = \sup_L |L| = \sup_L \sum_{k=1}^{n} |\Delta L_k|. \tag{3.6.35}$$

Agar $M = (-1, 0)$ bo'lsa, PM yoy yarim aylana yoyiga teng bo'lib, uning uzunligi yunoncha π harfi bilan belgilanadi.

Ravshanki, agar $[-1, 1]$ kesmaning ixtiyory x nuqtasi uchun M orqali aylananing $(x, \sqrt{1 - x^2})$ nuqtasini belgilasak, bu ta'rif har bir x ga PM yoy uzunligini, ya'ni manfiy bo'lmagan sonni mos qo'yadi. Shunday qilib, (3.6.35) tenglik orqali

$$f(x) \ = \ l(M), \quad \text{bu yerda} \quad M = (x, \sqrt{1 - x^2}), \quad -1 \le x \le 1,$$

funksiyani aniqlashimiz mumkin ekan.

Agar x abssissani ozroq o'zgartirsak, yoy uzunligi ham ozgina o'zgarishini tekshirish qiyin emas, ya'ni yuqoridagi funksiya uzluksizdir. Shuning uchun, 3.5.3 - teoremaga ko'ra, bu funksiya barcha oraliq qiymatlarni qabul qiladi. Demak, $0 \le \alpha \le \pi$ kesmadan istalgan haqiqiy α sonni olsak ham birlik aylanadan yuqori yarim tekislikda yotuvchi shunday M nuqta topiladiki, u uchun $l(M) = \alpha$ bo'ladi (VII bobdagi 7.1.2 - misolga keltirilgan eslatmaga ham qarang). Bunda $M = (x, y)$ nuqta $P = (1, 0)$ nuqtani koordinatalar boshi atrofida α *radianga* burish bilan hosil qilingan deyiladi.

Agar α haqiqiy son $-\pi \le \alpha < 0$ oraliqdan olingan manfiy son bo'lsa, burishni soat strelkasi bo'yicha olamiz, bunda PM yoy uzunligini $l(M)$ desak, $\alpha = -l(M)$ bo'ladi. Bu holda P nuqtani α radianga burish natijasida hosil bo'lgan M nuqta quyi yarim tekislikda yotadi, ya'ni uning ordinatasi $y \le 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, $[-\pi, \pi]$ kesmadan olingan har qanday α haqiqiy songa birlik aylananing P nuqtasini α radianga burish natijasida hosil bo'lgan $M = M(\alpha)$ nuqtasi mos keladi. Ravshanki, M nuqtaning (x, y) koordinatalari α ga bog'liq, ya'ni

$$x \;=\; x(\alpha), \qquad y \;=\; y(\alpha).$$

Bunda $x(\alpha)$ son α sonining kosinusi, $y(\alpha)$ son esa α sonining sinusi deyiladi. Ular quyidagicha belgilanadilar:

$$\cos\alpha \;=\; x(\alpha), \qquad \sin\alpha \;=\; y(\alpha). \tag{3.6.36}$$

Shunday qilib, P nuqtani α radianga burish natijasida hosil bo'lgan $M(\alpha)$ nuqta quyidagi koordinatalarga ega ekan:

$$M(\alpha) \;=\; (\cos\alpha,\ \sin\alpha). \tag{3.6.37}$$

Trigonometrik deb ataladigan kosinus va sinus funksiyalari (3.6.36) tengliklar yoqdamida $[-\pi, \pi]$ kesmada aniqlangan. Ammo davriy davom ettirish deb nomlanadigan usul yordamida ularni butun sonlar o'qiga davom ettirish mumkin.

Agar shunday $T \neq 0$ son topilsaki, barcha $t \in \mathbf{R}$ lar uchun

$$f(t+T) \;=\; f(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

tenglik bajarilsa, butun sonlar o'qida aniqlangan f funksiya *davriy* deb ataladi.

Bu yerda umumiylikni buzmasdan T sonni musbat deyish mumkin. Bu son *davr* deb ataladi. Masalan, Dirixle funksiyasi davriy bo'lib, istalgan musbat ratsional T soni uning davri bo'ladi.

Faraz qilaylik, f funksiya uzunligi T ga teng bo'lgan biror oraliqda, masalan $[0, T]$ kesmada aniqlangan va $f(0) = f(T)$ bo'lsin. Agar $\widetilde{f}$ funksiya T davrga ega bo'lgan davriy funksiya bo'lib, f bilan $[0, T]$ da ustma-ust tushsa, $\widetilde{f}$ funksiya f funksiyaning davriy davomi deb ataladi.

Ravshanki, (3.6.36) tengliklar orqali $[-\pi, \pi]$ kesmada aniqlangan kosinus va sinus funksiyalarini butun sonlar o'qiga quyidagi tengliklar orqali 2π davr bilan davriy davom ettirish mumkin:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha.$$

Bevosita trigonometrik funksiyalar ta'rifidan (3.6.37) koordinatalarga ega bo'lgan $M(\alpha)$ nuqta birlik aylanada yotishi kelib chiqadi, bundan esa navbatdagi *asosiy trigonometrik ayniyat*ni olamiz.

3.6.2 - tasdiq. *Ixtiyoriy haqiqiy α uchun*

$$\cos^2\alpha \;+\; \sin^2\alpha \;=\; 1 \tag{3.6.38}$$

tenglik o'rinli.

Bu (3.6.38) ayniyatdan sinus va kosinuslarning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Natija. *Ixtiyoriy haqiqiy* α *uchun*

$$|\cos\alpha| \leq 1, \quad |\sin\alpha| \leq 1 \tag{3.6.39}$$

tengsizliklar o'rinli.

Biz burilishni abssissa o'qida yotuvchi $P = (1,0)$ nuqtadan boshlab hisoblaganimiz uchun, α va $-\alpha$ burchaklarga burish natijasida hosil bo'lgan nuqtalar abssissalari ustma-ust tushadi, ordinatalari esa ishorasi bilan farq qiladi. Boshqacha aytganda, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \tag{3.6.40}$$

Bu tengliklar kosinusning juft va sinusning toq funksiya ekanini anglatadi.

3.6.3 - tasdiq. *Ixtiyoriy haqiqiy* α *va* β *lar uchun*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{3.6.41}$$

tenglik o'rinli.

Bu (3.6.41) tenglik muhim trigonometrik ayniyatlardan biri bo'lib, u *qo'shish formulasi* deb ataladigan tengliklar qatoriga kiradi.

Ushbu (3.6.41) tenglikning isboti § 3.9 da keltirilgan ((3.9.3) formulaga qarang).

3.6.4 - tasdiq. *Agar* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *bo'lsa,*

$$0 < \sin\alpha < \alpha \tag{3.6.42}$$

tengsizlik o'rinlidir.

Isbot. Agar koordinatalari (x, y) bo'lgan M nuqta (0,1) koordinatali P nuqtani α radianga burish bilan hosil bo'lgan bo'lsa, u holda $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ lar uchun

$$0 < y < \sqrt{y^2 + (1-x)^2} = |PM| \leq \alpha$$

tengsizlik bajariladi. Bundan, ravshanki, (3.6.42) kelib chiqadi.

Q. E. D.

Natija. *Istalgan* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ *uchun*

$$|\sin\alpha| \leq |\alpha| \tag{3.6.43}$$

tengsizlik o'rinli.

Haqiqatan, agar $|\alpha| \leq 1$ bo'lsa, (3.6.43) tengsizlik, sinusning toq funksiya ekanini hisobga olsak, (3.6.42) dan kelib chiqadi. Agarda $|\alpha| > 1$ bo'lsa, (3.6.43) tengsizlikning (3.6.39) dan kelib chiqishi ko'rinib turibdi.

3.6.7 - teorema. *Kosinus va sinus trigonometrik funksiyalar butun sonlar o'qida uzluksizdir.*

Isbot. Quyidagi tenglik

$$\cos\beta - \cos\alpha = -\,2\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\sin\frac{\beta + \alpha}{2}$$

bevosita (3.6.41) formuladan kelib chiqadi. Endi (3.6.39) va (3.6.42) baholarni qo'llasak,

$$|\cos\beta - \cos\alpha| \leq 2\frac{|\beta - \alpha|}{2} \cdot 1 = |\beta - \alpha|$$

hosil bo'ladi. Demak, $\beta \to \alpha$ da $\cos\beta \to \cos\alpha$ bo'lar ekan. Bu esa kosinusning ixtiyoriy α nuqtada uzluksizligini anglatadi.

Sinusning uzluksizligi xuddi shu singari isbotlanadi.

Q.E.D.

Qolgan trigonometrik funksiyalar sinus va kosinuslar orqali aniqlanadilar. Chunonchi, *tangens* va *kotangenslar* bu funksiyalarning nisbatlari ko'rinishida kiritiladi:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Bu ikki funksiyaning o'zi aniqlangan har bir nuqtada uzluksizligi shubhasiz.

5. Teskari trigonometrik funksiyalar.

Ravshanki, butun sonlar o'qida aniqlangan davriy funksiya teskarilanuvchanlik shartini qanoatlantirmaydi, chunki u har bir qiymatni cheksiz ko'p nuqtalarda qabul qiladi. Shu sababli trigonometrik funksiyalarga teskari funksiyani aniqlash uchun bu funksiyalarni ular qat'iy monoton bo'lgan kesmalarda qarash kerak. Shunday qilinsa, teskari funksiyalar mavjud bo'lib, 3.5.6 - teoremaga ko'ra, ular uzluksiz ham bo'ladilar.

Sinus uchun monotonlik oraliq sifatda odatda $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesma olinadi. Bu kesmada sinus qat'iy o'sib, -1 dan $+1$ gacha barcha qiymatlarni qabul qiladi. Shunday ekan, $[-1, 1]$ kesmada

$$f(x) \;=\; \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},$$

funksiyaga teskari f^{-1} funksiya aniqlangan. Bu teskari f^{-1} funksiya *arksinus* deb ataladi va

$$f^{-1}(x) \;=\; \arcsin x, \quad -1 \le x \le 1,$$

kabi belgilanadi.

Arksinus $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz ekanligi va qat'iy monoton o'sishi shubhasiz.

Kosinus uchun monoton o'sish oralig'i sifatida odatda $[0, \pi]$ kesma olinadi. Bu kesmada kosinus $+1$ dan -1 gacha barcha qiymatlarni qabul qilib, qat'iy kamayadi. Shunday ekan, $[-1, 1]$ kesmada

$$f(x) \;=\; \cos x, \quad 0 \le x \le \pi,$$

funksiyaga teskari f^{-1} funksiya aniqlangan. Bu teskari f^{-1} funksiya *arkkosinus* deb ataladi va

$$f^{-1}(x) \;=\; \arccos x, \quad -1 \le x \le 1,$$

kabi belgilanadi.

Arkkosinus $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz ekanligi va qat'iy monoton kamayishi shubhasiz.

Tangens uchun monotonlik oralig'i sifatida $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervali olinadi. Bu intervalda tangens qat'iy o'sib, $-\infty$ dan $+\infty$ gacha barcha qiymatlarni qabul qiladi. Shunday ekan, $(-\infty, +\infty)$ sonlar o'qida

$$f(x) \;=\; \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

funksiyaga teskari f^{-1} funksiya aniqlangan. Bu teskari f^{-1} funksiya *arktangens* deb ataladi va

$$f^{-1}(x) \;=\; \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

kabi belgilanadi.

Arktangens $(-\infty, +\infty)$ sonlar o'qida uzluksiz va qat'iy monoton o'suvchidir.

Yuqorida o'rganilgan funksiyalar, ya'ni darajali, ko'rsatkichli, logarifmik va shu bilan birga asosiy trigonometrik hamda teskari trgonometrik funksiyalar *eng sodda elementar funksiyalr deyiladi.*

Ta'rif. *Eng sodda elementar funksiyalarga chekli sonda arifmetik amal va superpozitsiyalarni qo'llash natijasida hosil bo'lgan funksiya **elementar funksiya** deyiladi.*

Eslatib o'tamiz, qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari arifmetik amallar deyilar edi. Shunday qilib, har qanday elementar funksiyani eng sodda elementar funksiya va to'rtta arifmetik amallardan tuzilgan formula ko'rinishida yozish mumkin ekan. Misol uchun, quyidagi funksiya elementardir:

$$f(x) = \sin(\ln x) + 2e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} - 3\operatorname{arctg}(1 + x^2).$$

Formula ko'rinishida berilgan elementar funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi sifatida, odatda, argumentning bu funksiya ma'noga ega bo'lgan barcha qiymatlari to'plami olinadi.

Quyidagi natija yuqorida isbot qilingan tasdiqlardan bevosita kelib chiqadi.

3.6.9 - teorema. *Elementar funksiya o'zi aniqlangan sohaning har bir nuqtasida uzluksizdir.*

§ 3.7. Ajoyib limitlar

1. Birinchi ajoyib limit.

3.7.1 - teorema. *Quyidagi tenglik o'rinli (birinchi ajoyib limit):*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \tag{3.7.1}$$

Isbot. Ushbu

$$f(\alpha) \ = \ \frac{\sin \alpha}{\alpha} \tag{3.7.2}$$

funksiya $\alpha = 0$ nuqtaning shu nuqtani o'zi kirmagan ixtiyoriy atrofida aniqlangan. Avval bu funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtadagi o'ng limitini hisoblaymiz.

Faraz qilaylik, $M = (x, y)$ nuqta $P = (0, 1)$ nuqtani α radianga burish orqali hosil bo'lsin, bu yerda $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. U holda α ning shu qiymatlarida

$$1 - \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1 \tag{3.7.3}$$

bahoning bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Darhaqiqat, bu tengsizlikning o'rinli ekanligi § 3.9 da ko'rsatilgan (3.9.2 - tasdiqqa qarang).

(3.7.3) bahodan (3.7.2) funksiyaning nol nuqtadagi o'ng limiti 1 ga tengligi, ya'ni

$$f(0 + 0) \ = \ \lim_{\alpha \to 0,\, \alpha > 0} f(\alpha) = \ 1$$

ekani kelib chiqadi.

Endi, sinus toq funksiya bo'lgani uchun, (3.7.2) juft funksiyadir, ya'ni $f(-\alpha) = f(\alpha)$. Shuning uchun,

$$f(0 - 0) \ = \ \lim_{\alpha \to 0,\, \alpha > 0} f(-\alpha) \ = \ \lim_{\alpha \to 0,\, \alpha > 0} f(\alpha) = \ 1,$$

ya'ni (3.7.2) funksiyaning nol nuqtadagi chap limiti ham 1 ga teng ekan. Bundan talab qilingan (3.7.1) munosabatni olamiz.

Q.E.D.

2. Ikkinchi ajoyib limit.

3.7.2 - teorema. *Agar e son* (3.6.30) *tenglik orqali aniqlangan son bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi (ikkinchi ajoyib limit):*

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e. \tag{3.7.4}$$

Isbot. Ravshanki,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{3.7.5}$$

tenglikni isbotlash yetarlidir.

Avval $x\to+\infty$ deb faraz qilib, $n=[x]$ deb belgilaymiz. U holda $n\le x<n+1$ bo'ladi va shuning uchun quyidagi ikki tomonlama tengsizlik bajariladi:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3.7.6}$$

Ravshanki, e sonining ta'rifiga ko'ra, $x\to+\infty$ da bu tengsizlik o'ng va chap tomonlarining limitlari e ga teng. Demak,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{3.7.7}$$

Endi, agar $x\to-\infty$ bo'lsa, $t=-x$ deb

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

ni hosil qilamiz.

Agar (3.7.7) tenglikni e'tiborga olsak, $t\to+\infty$ da (ya'ni $x\to-\infty$ da) oxirgi tenglikning o'ng tomoni e soniga intilishini ko'rishimiz mumkin. Binobarin, (3.7.5) tenglik bajarilar ekan.

Q.E.D.

§ 3.8. Kompleks qiymatli funksiyalar

Matematik tahlilda haqiqiy o'zgaruvchili kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalar muhim o'rin tutadi. Chunonchi, agar haqiqiy sonlar o'qining (a,b) intervalida aniqlangan f funksiya bu intervaldan olingan har bir haqiqiy x songa kompleks $f(x)$ sonni mos qo'ysa, bu funksiya *kompleks qiymatli* deyiladi. Bunday funksiya

$$f\ :\ (a,b)\to\mathbf{C}$$

kabi belgilanadi, bunda $\mathbf{C}$ - kompleks sonlar to'plami.

Kompleks sonlar ta'rifiga ko'ra, kompleks qiymatli f funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

bu yerda u va v - oddiy (haqiqiy qiymatli) funksiyalardir. Bunda u funksiya f funksiyaning haqiqiy qismi va v funksiya f ning mavhum qismi deyiladi. Shunday qilib, kompleks qiymatli funksiyalarni o'rganish ikki haqiqy qiymatli funksiyalarni o'rganishga kelar ekan.

Kompleks qiymatli $f = u + iv$ funksiyaning *absolyut qiymati* (yoki *moduli*) deb haqiqiy manfiy bo'lmagan quyidagi funksiyaga aytiladi:

$$|f(x)| = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}. \tag{3.8.1}$$

Masalan,

$$e(x) = \cos x + i \sin x$$

funksiyaning moduli aynan birga teng funksiyadir:

$$|e(x)| \equiv 1.$$

Kompleks qiymatli funksiyaning limit qiymati va shu bilan birga, uzluksizligi xuddi haqiqiy funksiyalar uchun aniqlangandek aniqlanadi. Misol tariqasida uzluksizlik ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, a nuqtaning δ- atrofidan olingan barcha x lar uchun*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3.8.2}$$

*tengsizlik bajarilsa, kompleks qiymatli f funksiya a nuqtada **uzluksiz** deyiladi.*

3.8.1 - tasdiq. *Kompleks qiymatli $f = u + iv$ funksiya biror nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun shu nuqtada har ikkala u va v funksiyalarning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot bevosita

$$|f(x) - f(a)| = \sqrt{[u(x) - u(a)]^2 + [v(x) - v(a)]^2} \tag{3.8.3}$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Haqiqatan, agar (3.8.2) tengsizlik bajarilsa,

$$|u(x) - u(a)| < \varepsilon, \quad |v(x) - v(a)| < \varepsilon$$

tengsizliklar ham bajariladi. Bundan u va v funksiyalarning a nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

Aksincha, agar u va v funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsa, shunday $\delta > 0$ topiladiki, a nuqtaning δ-atrofidagi har qanday x uchun

$$|u(x) - u(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |v(x) - v(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi, bu esa, o'z navbatida, (3.8.3) ga ko'ra, (3.8.2) bajarilishini anglatadi.

Kompleks qiymatli funksiyalar ham haqiqiy funksiyalarning ko'pgina xossalariga ega ekanini qayd etamiz. Masalan, arifmetik amallarni qo'llash uzluksiz kompleks qiymatli funksiyalar sinfidan chiqarib yubormaydi (bo'lish amalida maxraj noldan farqli degan qo'shimcha shart qo'yish zarur).

Misol tariqasida f funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(a) \neq 0$ shart bajarilgan holda, $\dfrac{1}{f}$ funksiyaning ham a nuqtada uzluksizligini isbot qilamiz.

Faraz qilaylik, $f = u + iv$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda 3.8.1 - tasdiqqa asosan, har ikkala funksiya u va v uzluksiz bo'ladi. Shunday ekan,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u}{u^2 + v^2} \; - i\frac{v}{u^2 + v^2}$$

tenglikdan bevosita $\frac{1}{f}$ funksiyaning ham mavhum, ham haqiqiy qismlarining uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, 3.8.1 - tasdiqqa asosan, $\frac{1}{f}$ funksiya ham uzluksiz ekan.

Xuddi shunga o'xshash, uzluksiz funksiyalarning boshqa xossalari isbot qilinadi.

§ 3.9*. Ilova (trigonometrik funksiyalarning xossalari)

Faraz qilaylik, S - markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi 1 ga teng bo'lgan aylana bo'lsin, ya'ni ***birlik aylana*** bo'lsin.

Agar P - birlik aylananing $(1, 0)$ koordinataga ega bo'lgan nuqtasi bo'lsa, $M = (x, y)$ orqali aylananing shunday nuqtasini belgilaymizki, u P nuqtani t radianga burish natijasida hosil bo'lib,

$$M \;=\; (\cos t,\; \sin t) \tag{3.9.1}$$

koordinataga ega bo'lsin.

Faraz qilaylik, P va M nuqtalarni yangi s radianga burish natijasida aylananing mos ravishda P' va M' nuqtalari hosil bo'lsin. Bunda, albatta, PM kesma uzunligi $P'M'$ kesma uzunligiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$|PM| \;=\; |P'M'|. \tag{3.9.2}$$

Quyidagi

$$P = (1, 0), \;\; P' = (\cos s, \sin s), \;\; M = (\cos t, \sin t), \;\; M' = (\cos(t + s), \sin(t + s)),$$

tengliklarni hisobga olib, (3.9.2) tenglikni

$$(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = [\cos t - \cos(t + s)]^2 + [\sin t - \sin(t + s)]^2$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Bundan, (3.6.38) asosiy ayniyatni qo'llab, murakkab bo'lmagan hisoblashlar orqali,

$$\cos t = \cos(t + s)\cos s + \sin(t + s)\sin s$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar ixtiyoriy α va β lar uchun

$$t = \alpha - \beta, \qquad s = \beta$$

desak, yana bir muhim

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{3.9.3}$$

trigonometrik ayniyatni olamiz. (3.9.3) tenglik qo'shish formulalari deb ataladigan ayniyatlar qatoriga kiradi. Ko'pgina muhim trigonometrik munosabatlar aynan (3.9.3) formuladan kelib chiqadi.

Masalan, bu tenglikda β o'rniga $-\beta$ ni olsak, (3.6.40) ga ko'ra,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{3.9.4}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Endi $\beta = -\alpha$ deymiz. U holda, (3.6.38) asosiy trigonometrik ayniyatni qo'llab,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{3.9.5}$$

2. Ushbu bandda biz birlik aylana yoyining uzunligi uchun ko'rinishdan tabiiy bo'lgan baho olamiz.

Aytaylik, (x, y) koordinatalik M nuqta birinchi kvadrantda yotsin, ya'ni $x \geq 0,\ y \geq 0$ bo'lsin. Xuddi yoy uzunligi ta'rifidagi singari, P va M nuqtalarni $L = P_0P_1P_2...P_{n-1}P_n$ siniq chiziq bilan shunday birlashtiraylikki, $P_0 = P$ va $P_n = M$ bo'lib, P_k nuqta S aylanada yotsin.

Faraz qilaylik, siniq chiziq uchlari soat strelkasiga qarama-qarshi ravishda joylashgan bo'lsin, ya'ni bizning holimizda o'ngdan chapga qarab joylashgan bo'lsin. Bu degan so'z, agar P_k nuqta (x_k, y_k) koordinatalarga ega bo'lsa, u holda

$$x = x_n < x_{n-1} < ... < x_1 < x_0 = 1 \tag{3.9.6}$$

bo'lsin.

Bunda, bevosita birlik aylananing (3.6.31) ta'rifidan, siniq chiziq uchlarining ordinatalari quyidagi

$$0 = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = y \tag{3.9.7}$$

shartni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

3.9.1 - tasdiq. *Faraz qilaylik,* $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ *bo'lsin. Agar* $M = (x, y)$ *nuqta birlik aylananing* $P = (1, 0)$ *nuqtasini* α *radianga burish bilan hosil qilinsa,*

$$\alpha \ \leq\ 1 - x + y \tag{3.9.8}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Agar

$$(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 \leq (|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|)^2$$

tengsizlikdan foydalansak, (3.9.6) va (3.9.7) tengsizliklarga ko'ra,

$$|P_kP_{k-1}| \ = \ \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \leq$$

$$\leq \ |x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}| = (x_{k-1} - x_k) + (y_k - y_{k-1})$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$|L| \ = \ \sum_{k=1}^{n} |P_kP_{k-1}| \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1} - x_k) \ + \ \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) =$$

$$= (x_0 - x_n) + (y_n - y_0) = 1 - x + y.$$

Boshqacha aytganda,
$$|L| \ \le \ 1 - x + y.$$
Bu tengsizlik chap qismida barcha L siniq chiziqlar bo'yicha aniq yuqori chegaraga o'tsak, talab qilingan (3.9.8) bahoni olamiz.

Q.E.D.

Natija. *Agar* $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ *bo'lsa,*
$$\alpha \le 1 - \cos\alpha + \sin\alpha \tag{3.9.9}$$
tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $\cos\alpha = x$ va $\sin\alpha = y$ tengliklarni e'tiborga olsak, (3.9.8) dan (3.9.9) tengsizlik kelib chiqadi.

3.9.3 - tasdiq. *Faraz qilaylik,* $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ *bo'lsin. Agar* $M = (x, y)$ *nuqta birlik aylananing* $P = (1, 0)$ *nuqtasini* α *radianga burish bilan hosil qilinsa,*
$$1 - \frac{\alpha}{2} \le \frac{\sin\alpha}{\alpha} \le 1 \tag{3.9.10}$$
tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Avval (3.9.5) tenglik va (3.6.43) baho yordamida
$$1 - \cos\alpha \ = \ 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ \le \ 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ = \ \frac{\alpha^2}{2}$$
tengsizlikni olamiz.

So'ngra, bundan foydalanib, (3.9.9) bahoni
$$\alpha \ \le \ 1 - \cos\alpha \ + \ \sin\alpha \ \le \ \frac{\alpha^2}{2} \ + \ \sin\alpha$$
ko'rinishga keltiramiz.

Bu baho va (3.6.43) dan
$$\alpha - \frac{\alpha^2}{2} \le \sin\alpha \le \alpha \tag{3.9.11}$$
tengsizlik kelib chiqadi.

Ravshanki, musbat α lar uchun (3.9.10) va (3.9.11) munosabatlar teng kuchlidir.

Q.E.D.

§ 3.10. Misollar

1 - misol. Ushbu
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{agar } x \neq 0 \ \text{ bo'lsa,} \\ a, & \text{agar } x = 0 \ \text{ bo'lsa} \end{cases}$$
funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'lishini aniqlang.

Ko'rsatma. Quyidagi
$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$
ayniyatdan foydalanib, birinchi ajoyib limitni qo'llang.

2 - misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+p\,x+q}-x).$$

Ko'rsatma. Quyidagi

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

ayniyatni qo'llang.

3 - misol. Tenglikni isbotlang:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\ \ a>0. \tag{3.10.1}$$

Ko'rsatma. Logorifm asosini e ga keltirib, (3.7.4) tenglikdan foydalaning.

4 - misol. Tenglikni isbotlang:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \ a>0. \tag{3.10.2}$$

Ko'rsatma. 3 - misoldan foydalanish maqsadida $x=\log_a(1+y)$ almashtirish bajaring.

5 - misol. Tenglikni isbotlang:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$$

Ko'rsatma. $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$ formulani qo'llang.

6 - misol. $[0,1]$ kesmada aniqlangan va barcha $[a,b]\subset[0,1]$ kesmalarda chegaralanmagan funksiyaga misol keltiring.

Ko'rsatma. Ratsional nuqtalarda $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=q$ ko'rinishda aniqlangan funksiyani qarang.

7 - misol. Shunday $f(x)$ va $g(y)$ funksiyalarga misol keltiringki, ular uchun $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ va $\lim\limits_{y\to 0}g(y)=1$ bo'lib, $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))$ mavjud bo'lmasin.

Ko'rsatma. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ va $g(y)=\text{sign}^2 y$ funksiyalarni qarang.

8 - misol. $[-1,1]$ kesmada aniqlangan va 0 nuqtada o'suvchi bo'lgan shunday funksiyaga misol keltiringki, u hech qanday $\delta>0$ uchun $[-\delta,\delta]$ kesmada monoton bo'lmasin.

Ko'rsatma. $f(x)=x\sin^2\dfrac{1}{x}$ funksiyani qarang.

9 - misol. Agar f funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, uning grafigi $x=0$ va $x=c$ $(c\neq 0)$ to'g'ri chiziqlarga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lsa, uning davriy ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Shartga ko'ra,

$$f(x)=f(-x),\qquad f(c+x)=f(c-x)$$

tengliklar bajarilishidan foydalaning.

10 - misol. Dirixle funksiyasi davriy ekanini va har qanday musbat ratsional son uning davri bo'lishini isbotlang.

Ko'rsatma. Bevosita tekshirish orqali isbotlang.

11 - misol. Agar davriy funksiya eng kichik musbat davrga ega bo'lmasa, u yoki har bir nuqtada uzilishga ega, yoki u o'zgarmasga teng bo'lishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Agar yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning o'zgarmasga tengligini isbot qilsak, misol yechilgan bo'ladi.

Aytaylik $T_k \to 0$ davrlar ketma-ketligi mavjud bo'lib, f funksiya, masalan, nol nuqtada uzluksiz bo'lsin. Ixtiyoriy a uchun $n_k = \left[\dfrac{a}{T_k}\right]$ deymiz. U holda

$$a = n_k T_k + \theta_k T_k, \quad \text{bu yerda} \quad |\theta_k| \leq 1.$$

Endi $f(a) = f(0)$ ekanini ko'rsating.

IV Bob. Differensiallash

§ 4.1. Funksiyaning hosilasi

Hosila tushunchasi birinchi qarashda o'zaro bog'liq bo'lmagan ikki masala tufayli vujudga kelgan. Bu masalalarning birinchisi harakatlanayotgan jismning tezligini aniqlash bo'lsa, ikkinchisi esa, biror chiziqqa o'tkazilgan urinmani topishdan iborat. Aslida bu ikki masala o'zaro uzviy bog'liqdir, chunki nuqtaning tezligi bu nuqta harakati traektoriyasiga urinma bo'lgan vektordir.

1. Tezlik. Nuqtaning to'g'ri chiziq bo'ylab harakatini qaraylik. Bu to'g'ri chiziqni biz koordinatalar o'qi, ya'ni haqiqiy sonlar to'plami deb qaraymiz. Faraz qilaylik, t vaqt momentida nuqtaning koordinatasi $x(t)$ bo'lsin. Shu nuqta harakatining tezligini topamiz.

Biror Δt vaqt oralig'idan keyin nuqta $x(t + \Delta t)$ koordinataga ega bo'ladi. Demak, nuqta t dan $t + \Delta t$ gacha o'tgan vaqt ichida $x(t + \Delta t) - x(t)$ yo'lni

$$v_{o'r} \;=\; \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{4.1.1}$$

o'rtacha tezlik bilan bosib o'tadi.

Biz nuqtaning t momentdagi tezligini tahminan yuqorida hisoblangan (4.1.1) o'rtacha tezlikka teng deyishimiz mumkin. Darhaqiqat, fizik mutaxasis «tahminan» degan so'zni tashlab yuborib, aynan (4.1.1) ifodani nuqtaning izlanayotgan tezligi deb hisoblagan bo'lar edi. Biroq, nuqtaning tezligini, har qanday vaqt momentini olganimizda ham, keyin nima bo'lishiga bog'liq emas deb hisoblash tabiiy bo'lishiga qaramasdan, ravshanki, (4.1.1) o'rtacha tezlik Δt oraliq qiymatga bog'liqdir. (Shuni qayd etish joizki, XX asrdagi fan taraqqiyoti fizik mutaxasisning o'z nuqtai nazarini himoya qilishiga asos borligini ko'rsatdi.)

Endi Δt vaqt oralig'ini kichiklashtira boshlab, (4.1.1) kasr o'zgarishini kuzataylik. Bunda, albatta, maxraj nolga intiladi, lekin, shu bilan birga, $x(t)$ ni t ning uzluksiz funksiyasi deb qarasak, kasr surati ham nolga intiladi. Bunda qaralayotgan kasr biror v soniga yaqinlashishi mumkin. Aynan shu son nuqtaning t vaqtdagi tezligidir, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}. \tag{4.1.2}$$

Shu paytgacha tezlik tushunchasi to'g'risida gapirganda uning ma'nosini aniqlashtirmagan edik. Endi esa biz (4.1.2) munosabatni to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan nuqta tezligining *ta'rifi* deb qarasak bo'ladi.

2. Urinma. Eslatib o'tamiz, biror (a, b) intervalda aniqlangan f funksiyaning grafigi deb R^2 koordinatalar tekisligidagi koordinatalari $(x, f(x))$ bo'lgan nuqtalar to'plamiga aytilar edi. Aniqrog'i, f funksiyaning $\Gamma(f)$ grafigi quyidagi

$$\Gamma(f) \;=\; \{(x,y)\in R^2 : y = f(x),\ a < x < b\} \tag{4.1.3}$$

to'plamdan iborat.

Faraz qilaylik, $(c, f(c))$ va $(c + h, f(c + h))$ nuqtalar f funksiya grafigining ikki har xil nuqtalari bo'lsin. Shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz:

$$y \;=\; \frac{f(c+h)-f(c)}{h}(x-c) \;+\; f(c). \tag{4.1.4}$$

Agar biz h ning qiymatini kamaytira borsak, f funksiya grafigining abssissalari c va $c+h$ bo'lgan ikki nuqtasi orqali o'tadigan to'g'ri chiziq $\Gamma(f)$ grafikning $(c, f(c))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinmaga yaqinlashib boradi. Bunda urinma tenglamasi, (4.1.4) tenglikka ko'ra,

$$y \ = \ k(x-c) \ + \ f(c) \tag{4.1.5}$$

ko'rinishga keladi, bu yerda

$$k \ = \ \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}. \tag{4.1.6}$$

Yuqorida urinma tushunchasi to'g'risida gapirganda biz uning ma'nosini aniqlashtirmagan edik. Endi esa biz $\Gamma(f)$ grafikka abssissasi c ga teng bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma - bu grafigi (4.1.5) - (4.1.6) ko'rinishga ega bo'lgan to'g'ri chiziqdir, deb *ta'riflashimiz* mumkin.

3. Hosila.

Ta'rif. *Berilgan f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyaning a nuqtadagi **hosilasi** deb quyidagi limitga aytiladi:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{4.1.7}$$

Odatda f funksiyaning a nuqtadagi hosilasi $f'(a)$ simvol orqali belgilanadi.

Yuqoridagi (4.1.7) kasr suratini *argumentning h orttirmasiga* mos keluvchi *f funksiyaning orttirmasi* deb atash qabul qilingan. Kasrni o'zini esa *ayirmali nisbat* deb atashadi.

4.1.1 - misol. Ushbu $f(x)=x$ birlik funksiyani qaraylik. Ravshanki,

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)-a=h.$$

Shuning uchun,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

va demak, istalgan $a\in\mathbf{R}$ nuqta uchun $f'(a)=1$ ekan.

4.1.2 - misol. Ushbu $f(x)=x^2$ kvadratik funksiyani qaraylik. U holda

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=2ah+h^2.$$

Shuning uchun,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$$

va demak, istalgan $a\in\mathbf{R}$ nuqta uchun

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\,(2a+h)=2a$$

ekan.

Ta'rif. *Agar funksiya a nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiyani a nuqtada **differensiallanuvchi** deyiladi.*

4.1.1 - va 4.1.2 - misollarda qaralgan funksiyalar har qanday $a \in \mathbf{R}$ nuqtada differensiallanuvchidirlar.

4.1.3 - misol. Agar $D(x)$ Dirixle funksiyasi bo'lsa,

$$f(x) = x^2 D(x)$$

funksiya $x = 0$ nuqtada differensiallanuvchidir.

Haqiqatan,

$$f(0+h) - f(0) = h^2 D(h).$$

Shuning uchun,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = hD(h) \to 0, \qquad h \to 0,$$

bu esa $f'(0) = 0$ ekanini anglatadi.

Qayd etish kerakki, bu funksiya noldan boshqa hech qanday nuqtada differensiallanuvchi emas.

Eslatma. Ravshanki, f funksiyaning a nuqtadagi hosilasi ta'rifini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$f'(a) \;=\; \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{4.1.8}$$

Haqiqatan, agar $h = x - a$ deb yozib olsak, (4.1.7) va (4.1.8) ta'riflarning o'zaro teng kuchli ekani ravshan bo'ladi.

4.1.1 - teorema. *Berilgan a nuqtaning biror atrofida aniqlangan f funkysiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun quyidagi*

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + \alpha(x)(x - a) \tag{4.1.9}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi A o'zgarmas sonning va a nuqtada cheksiz kichik bo'lgan $\alpha(x)$ funksiyaning mavjud bo'lshi zarur va yetarlidir.

Isbot. Ravshanki, (4.1.9) shartni quyidagi

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; A \;+\; \alpha(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda $x \to a$ da $\alpha(x) \to 0$.

Bu tenglik, shubhasiz, chap tomondagi kasrning limiti mavjud bo'lib, u A soniga teng ekanligiga teng kuchlidir, ya'ni, hosilaning (4.1.8) ta'rifiga ko'ra, $f'(a) = A$ tenglikka teng kuchlidir.

Q.E.D.

1 - natija. *Agar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan f funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, a nuqtada cheksiz kichik bo'lgan shunday $\alpha(x)$ funksiya topiladiki, u uchun*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a) \tag{4.1.10}$$

tenglik bajariladi.

2 - natija. *Agar funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Haqiqatan, bevosita (4.1.10) tenglikdan $x \to a$ bo'lganda $f(x) \to f(a)$ ekani kelib chiqadi. Bu esa f funksiyaning a nuqtada uzluksiz ekanini anglatadi.

Agar f funksiya biror (a, b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, istalgan $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ son aniqlangan bo'ladi. Boshqacha aytganda, (a, b) intervalda $x \to f'(x)$ funksiya mavjud bo'lar ekan. Mana shu funksiya f funksiyaning *hosilaviy funksiyasi*, yoki sodda qilib *hosilasi* deb ataladi.

Berilgan f funksiyaning hosilasini $f'(x)$ simvol orqali belgilashni fransuz matematigi J. L. Lagranj kiritgan. Funksiya hosilasi uchun ko'p ishlatiladigan yana bir belgilashni nemis matematigi G. V. Leybnits kiritgan bo'lib, u quyidagidan iborat:

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{yoki oddiyroq} \quad \frac{df}{dx}.$$

Masalan,

$$\frac{dx^2}{dx} \;=\; 2x.$$

4. Differensiallash qoidalari.

Hosilani hisoblash jarayoni *defferensiallash* deb ataladi. Navbatdagi tasdiq differensiallashning chiziqli amal ekanini anglatadi.

4.1.2 - teorema. *Agar f va g funksiyalar a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, istalgan $\lambda \in \boldsymbol{R}$ va $\mu \in \boldsymbol{R}$ o'zgarmaslar uchun $\lambda f(x) + \mu g(x)$ funksiya ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi tenglik bajariladi*

$$(\lambda f + \mu g)' \;=\; \lambda f' + \mu g'. \tag{4.1.11}$$

Isbot. Agar

$$F(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

deb belgilasak,

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} \;=\; \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;+\; \mu \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tenglikda $x \to a$ deb limitga o'tsak, talab qilingan tenglikni olamiz:

$$F'(a) \;=\; \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

Q.E.D.

Ko'paytmani differensiallash qoidasi murakkabroq ko'rinishga ega.

4.1.3 - teorema. *Agar f va g funksiyalar a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, ularning ko'paytmasi $f(x) \cdot g(x)$ ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi tenglik bajariladi*

$$(f \cdot g)' \;=\; f' \cdot g \;+\; f \cdot g'. \tag{4.1.12}$$

Isbot. Agar

$$F(x) = f(x) \cdot g(x)$$

desak,

$$F(x) - F(a) = [f(x) - f(a)]g(x) + f(a)[g(x) - g(a)]$$

tenglikni olamiz va shuning uchun,

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\, g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

4.1.1 - teoremaning 2 - natijasiga ko'ra, $g(x)$ funksiya, har qanday differensiallanuvchi funksiya singari, a nuqtada uzluksizdir, ya'ni $x \to a$ da $g(x) \to g(a)$. Shunday ekan, $x \to a$ da limitga o'tib, oxirgi tenglikdan talab qilinayotgan munosabatni hosil qilamiz:

$$F'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Q.E.D.

Nisbatning hosilasi yanada murakkab ko'rinishga ega.

4.1.1 - lemma. *Agar g funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $g(a) \neq 0$ bo'lsa, $\dfrac{1}{g(x)}$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik bajariladi:*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{4.1.13}$$

Isbot. 4.1.1 - teoremaning 2 - natijasiga asosan $g(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va shuning uchun u, 3.5.1 - tasdiqqa ko'ra, a nuqtaning biror atrofida noldan farqlidir. Demak, shu atrofda $\dfrac{1}{g(x)}$ nisbat aniqlangan.

Agar

$$F(x) = \frac{1}{g(x)}$$

desak,

$$F(x) - F(a) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} = \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}$$

tenglikni olamiz. Demak,

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = -\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\,\frac{1}{g(x)g(a)}.$$

Bu tenglikda $x \to a$ deb limitga o'tsak, talab qilingan tenglikka ega bo'lamiz:

$$F'(a) = -\,g'(a)\,\frac{1}{g^2(a)}.$$

Q.E.D.

4.1.4 - teorema. *Agar f va g funksiyalar a nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $g(a) \neq 0$ bo'lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik bajariladi:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \tag{4.1.14}$$

Isbot. Biz bu kasrni quyidagi ko'rinishdagi ko'paytma deb qarashimiz mumkin:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}.$$

Shunday ekan, ko'paytmani differensiallash haqidagi 4.1.3 - teoremani va 4.1.1 - lemmani qo'llab, talab qilingan tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f\frac{g'}{g^2}.$$

Q.E.D.

4. Murakkab funksiyani differensiallash.

Avvalgi bobning 3.5 - bandida kiritilgan murakkab funksiyalarni o'rganamiz. Chunonchi, $y = f(x)$ funksiya biror $E \subset \mathbf{R}$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Bundan tashqari, $x = \varphi(t)$ funksiya $M \subset \mathbf{R}$ intervalda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami E da yotsin. Ushbu bandda biz M to'plamda aniqlangan va har bir $t \in M$ songa $f[\varphi(t)]$ qiymatni mos qo'yuvchi $f(\varphi)$ funksiyani o'rganamiz.

4.1.5 - teorema. *Agar φ funksiya $a \in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, f funksiya bu nuqtaga mos $b = \varphi(a) \in E$ da differensiallanuvchi bo'lsa, u holda*

$$F(t) = f[\varphi(t)]$$

murakkab funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$F'(a) = f'(b) \cdot \varphi'(a) \tag{4.1.15}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Ma'lumki, f funksiya b nuqtada differensialllanuvchi bo'lsa, (4.1.10) ga ko'ra, b nuqtada cheksiz kichik bo'lgan shunday $\alpha(x)$ funksiya topiladiki, u uchun

$$f(x) - f(b) = [f'(b) + \alpha(x)] \cdot (x - b) \tag{4.1.16}$$

tenglik bajariladi.

Agar $x = \varphi(t)$ deb, $b = \varphi(a)$ ekanini hisobga olsak, (4.1.16) dan

$$\frac{f[\varphi(t)] - f[\varphi(a)]}{t - a} = [f'(b) + \alpha(x)]\frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikda $t \to a$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (4.1.15) tenglik hosil bo'ladi.

Q.E.D.

Eslatma. Agar f va φ funksiyalar o'zlari aniqlangan intervallarning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash formulasi φ funksiyaning aniqlanish sohasidagi barcha t larda o'rinli bo'lib, u quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{df[\varphi(t)]}{dt} = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t). \tag{4.1.17}$$

Bu (4.1.17) formulani ba'zan «zanjirli qoida» deb atashadi. Agar t o'zgaruvchi ham o'z navbatida qandaydir s o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, ya'ni $t = \tau(s)$ bo'lsa, bu terminni ishlatish sababi yanada oydinlashadi. Haqiqatan, bu holda quyidagi

$$\Phi(s) = f\{\varphi[\tau(s)]\}$$

murakkab funksiyaning (bu funksiya ba'zan $\Phi = f \circ \varphi \circ \tau$ ko'rinishda ham belgilanadi) hosilasi

$$\Phi'(s) = f'(x)\varphi'(t)\tau'(s)$$

ga teng bo'ladi, bunda $x = \varphi(t)$ va $t = \tau(s)$.

5. Teskari funksiyani differensiallash.

Eslatib o'tamizki, biror E to'plamda aniqlangan f funksiyaga teskari funksiya deb, $M = f(E)$ to'plamda aniqlangan va quyidagi ikki:

1) istalgan $x \in E$ uchun

$$f^{-1}[f(x)] \;=\; x;$$

2) istalgan $y \in f(E)$ uchun

$$f[f^{-1}(y)] \;=\; y$$

shartlarni qanoatlantiruvchi f^{-1} funksiyaga aytilar edi.

4.1.6 - teorema. *f funksiya a nuqtaning biror atrofida qat'iy monoton va uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari, f funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $f'(a) \neq 0$ bo'lsin. U holda teskari f^{-1} funksiya $b = f(a)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib,*

$$(f^{-1})'(b) \;=\; \frac{1}{f'(a)} \tag{4.1.18}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Albatta, teoremaning shartlari bajarilganda teskari funksiya mavjud bo'lib, u $b = f(a)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'ladi hamda $f^{-1}(b) = a$ tenglik bajariladi. Ana shu atrofdan olingan istalgan $y \neq b$ son uchun $x = f^{-1}(y)$ deymiz. Bunda, ravshanki, $f(x) = y$ bo'lib, $x \neq a$ bo'ladi. Shunday ekan,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}. \tag{4.1.19}$$

Agar $y \to b$ bo'lsa, teskari funksiyaning uzluksizligiga ko'ra (3.5.8 - teoremaga qarang), $x \to a$ bo'ladi. Demak, (4.1.19) tenglikda $y \to b$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (4.1.18) tenglikni olamiz.

Q.E.D.

§ 4.2. Eng sodda elementar funksiyalarning hosilalari

1. Logarifmik funksiyaning hosilasi. Quyidagi

$$f(x) \;=\; \ln x, \quad x > 0, \tag{4.2.1}$$

logarifmik funksiyani qaraymiz, bunda $\ln x$ simvoli orqali (3.6.30) tenglik bilan aniqlangan va e soni asos qilib olingan logarifm belgilangan, ya'ni $\ln x = \log_e x$.

Biz bu funksyani har qanday $x > 0$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini isbotlaymiz.

Ayirmali nisbat tuzib, uni, logarifm xossalaridan foydalanib, qulay ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x}\ \frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\ \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}.$$

Agar $t = h/x$ desak, ayirmali nisbatni

$$\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}\ \ln(1+t)^{1/t}, \quad t = \frac{h}{x}, \tag{4.2.2}$$

kabi yozib olish mumkin.

Ixtiyoriy tayinlangan $x > 0$ uchun $h \to 0$ shartdan $t \to 0$ kelib chiqadi. Agar ikkinchi ajoyib limitdan, ya'ni

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$$

tenglikdan foydalansak, logarifmik funksiyaning uzluksizligiga ko'ra,

$$\lim_{t\to 0}\ln[(1+t)^{1/t}] = \ln e = 1$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shuning uchun, (4.2.2) tenglikda $h \to 0$ deb limitga o'tsak, logarifmik funksiya hosilasi uchun

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \tag{4.2.3}$$

tenglikni olamiz.

Endi ixtiyoriy $a > 0$, $a \neq 1$ asosli

$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0, \tag{4.2.4}$$

logarifmik funksiyaning hosilasini hisoblaylik. Agar b asosli logarifmdan a asosli logarifmga o'tish formulasidan, ya'ni

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

munosabatdan foydalanib, $b = e$ desak,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikni (4.2.3) formuladan foydalanib differensiallasak, navbatdagi tasdiqni olamiz.

4.2.1 - tasdiq. (4.2.4) *logarifmik funksiya har qanday $x > 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi quyidagi ko'rinishga ega*:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, \quad x > 0. \tag{4.2.5}$$

2. Ko'rsatkichli funksiya hosilasi. Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo'lsa,

$$f(x) = a^x, \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.2.6}$$

ko'rinishdagi ko'rsatkichli funksiyani o'rganamiz. Ma'lumki, bu funksiya $\mathbf{R}$ sonlar o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan. Ko'rsatkichli funksiyaning har qanday $x \in \mathbf{R}$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun (4.2.6) ko'rsatkichli funksiya (4.2.4) logarifmik funksiyaga teskari ekanini qayd etamiz. Shunday ekan, biz teskari funksiya hosilasi haqidagi 4.1.6 - teoremadan foydalansak bo'ladi. Chunonchi, agar

$$f(x) \ = \ \log_a x, \quad x > 0,$$

bo'lsa,

$$f^{-1}(y) \ = \ a^y, \quad -\infty < x < \infty,$$

bo'ladi.

Ravshanki, 4.1.6 - teoremaning barcha shartlari o'rinli. Shunday ekan, (4.2.5) ga ko'ra, agar x va y sonlar $x = a^y$ munosabat bilan bog'langan bo'lsa,

$$[a^y]' \ = \ [f^{-1}(y)]' \ = \ \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\log_a x)'} \ = \ x \ln a = \ a^y \ln a$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Odatdagi belgilashlarga o'tsak, navbatdagi tasdiqni olamiz.

4.2.2 - tasdiq. (4.2.6) *ko'rsatkichli funksiya har qanday $x \in \boldsymbol{R}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi quyidagi ko'rinishga ega*:

$$(a^x)' \ = \ a^x \ln a, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.2.7}$$

Eslatma. Agar $a = e$ bo'lsa, (4.2.7) formula nihoyatda sodda ko'rinishga keladi:

$$(e^x)' \ = \ e^x, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.2.8}$$

3. Darajali funksiya hosilasi. Ixtiyoriy $\alpha \in \mathbf{R}$ sonni tayinlab,

$$f(x) \ = \ x^\alpha, \quad x > 0, \tag{4.2.9}$$

darajali funksiyani qaraymiz. Ko'rsatkich ixtiyoriy haqiqiy son bo'lgani uchun, biz bu funksiyani musbat yarim to'g'ri chiziqda aniqlangan deb hisoblaymiz (haqiqatan, masalan $\alpha = -0.5$ bo'lsa, $x \le 0$ lar uchun darajali funksiyani aniqlash qiyin).

Logarifmik funksiya xossalaridan foydalanib, (4.2.9) funksiyani ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning superpozitsiyasi sifatida yozib olamiz:

$$f(x) = e^{\alpha \ln x}.$$

Shunday ekan, 4.1.5 - teoremani qo'llasak,

$$f'(x) \ = \ e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \ = \ x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Natijada navbatdagi tasdiqqa kelamiz.

4.2.3 - tasdiq. (4.2.9) *drajali funksiya har qanday $x > 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi quyidagi ko'rinishga ega*:

$$(x^\alpha)' \ = \ \alpha x^{\alpha-1}. \tag{4.2.10}$$

Eslatma. Agar α ko'rsatkich ixtiyoriy butun son bo'lsa, (4.2.10) formula barcha $x \neq 0$ lar uchun o'rinli bo'ladi va α ixtiyoriy natural son bo'lganda esa, (4.2.10) tenglik barcha $x \in \mathbf{R}$ lar uchun bajariladi.

4. Trigonometrik funksiyalar hosilalari. 1) Biz

$$y = \sin x, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4.2.11}$$

funksiyadan boshlaymiz.

Argument orttirmasini h deb, funksiya orttirmasini hisoblaymiz:

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

U holda ayirmali nisbatni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \tag{4.2.12}$$

Birinchi ajoyib limitga ko'ra, agar $h \to 0$ bo'lsa,

$$\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \to 1$$

bo'ladi.

Shunday ekan, (4.1.12) tenglikda $h \to 0$ deb limitga o'tsak, kosinusning uzluksizligiga asosan, quyidagi tasdiqni olamiz.

(4.2.11) *sinus funksiyasi har qanday* $x \in \boldsymbol{R}$ *nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi quyidagi ko'rinishga ega*:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{4.2.13}$$

2) Endi

$$y = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4.2.14}$$

funksiyani qaraylik.

Keltirish formulalariga ko'ra,

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \tag{4.2.15}$$

(4.2.13) tenglikdan va murakkab funksiya hosilasi haqidagi 4.1.5 - teoremadan foydalanib, (4.2.15) tenglikning chap tomonini differensiallaymiz:

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Shunday qilib,

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4.2.16}$$

3) Ushbu

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z, \tag{4.2.17}$$

tangens funksiyasining hosilasi ham oson hisoblanadi.

Haqiqatan, agar nisbat hosilasi uchun isbotlangan (4.1.14) formulada $f(x) = \sin x$ va $g(x) = \cos x$ desak,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z. \tag{4.2.18}$$

4) Navbatdagi formula ham xuddi (4.2.18) tenglik singari isbotlanadi.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{4.2.19}$$

5. Teskari trigonometrik funksiyalar hosilalari.

1) Quyidagi

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{4.2.20}$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ kesmada aniqlangan $x = \sin y$ funksiyaga teskari funksiyadir. Shuning uchun, teskari funksiyani differensiallash haqidagi 4.1.6 - teoremani va sinus hosilasi uchun olingan (4.2.13) formulani qo'llasak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \tag{4.2.21}$$

tenglikni olamiz.

Endi

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

munosabatni e'tiborga olsak, (4.2.21) tenglikdan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi.

4.2.4 - tasdiq. (4.2.20) *teskari funksiya har qanday* $x \in (-1, 1)$ *nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi quyidagi ko'rinishga ega*:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1. \tag{4.2.22}$$

2) Quyidagi

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

tenglikdan

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1, \tag{4.2.23}$$

formulani olamiz.

3) Endi

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.2.24}$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ kesmada aniqlangan $x = \operatorname{tg} y$ funksiyaga teskari funksiyadir. Shuning uchun, teskari funksiya hosilasi haqidagi 4.1.6 - teoremani va tangens hosilasi uchun (4.2.18) formulani qo'llasak,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

tenglikni olamiz.

Demak, $\operatorname{tg} y = x$ bo'lgani uchun,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.2.25}$$

formulani hosil qilamiz.

6. Eng sodda elementar funksiyalar hosilalari jadvali.

Agar eng sodda elementar funksiyalar hosilasini bilsak, yig'indi, ayirma, ko'paytma va nisbatlarni differensiallash haqidagi teoremalarni va murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llab, istalgan elementar funksiyani differensiallashimiz mumkin. Shunday ekan, quyidagi eng sodda elementar funksiyalar hosilalari jadvalini bilish yetarli.

1^0. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \quad (x > 0).$

2^0. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (0 < a \neq 1,\ x > 0).$

3^0. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (0 < a \neq 1,\ -\infty < x < \infty).$

4^0. $(\sin x)' = \cos x \quad (-\infty < x < \infty).$

5^0. $(\cos x)' = -\sin x \quad (-\infty < x < \infty).$

6^0. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}).$

7^0. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}).$

8^0. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

9^0. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

10^0. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$

Eslatma. Istalgan elementar funksiya hosilasi yana elementar funksiya bo'ladi.

Elementar funksiyalarni differensiallash bo'yicha ikki muhim misolni keltiramiz. Bu misollarda a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

4.2.1 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \ln \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \tag{4.2.26}$$

funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llab, hosilalar jadvalidan

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln[(x-a)^2 + b^2])' = \frac{1}{2}\ \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}\ 2(x-a)$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib,

$$(\ln \sqrt{(x-a)^2 + b^2}\ )' \ = \ \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2}. \tag{4.2.27}$$

4.2.2 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}$$

funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llab, hosillalar jadvalidan

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-a}{b}\right)^2}\ \frac{1}{b}$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}\right)' = \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}. \tag{4.2.28}$$

7. Yuqori tartibli hosilalar.

Agar f funksiya biror intervalda differernsiallanuvchi bo'lsa, bu intervalda $f'(x)$ funksiya aniqlangan bo'ladi. Albatta, bu yangi f' funksiya ham shu intervalning biror a nuqtasida differensiallanuvchi bo'lishi mumkin. U holda f' funksiyaning a nuqtadagi hosilasi f funksiyaning shu nuqtadagi ikkinchi tartibli (yoki ikkinchi) hosilasi deb ataladi va $f''(a)$ kabi belgilanadi. Bunda quyidagi

$$f''(a) \ = \ f^{(2)}(a) \ = \ \frac{d^2 f}{dx^2}(a)$$

belgilashlardan ham foydalaniladi.

Xuddi shu singari, ikkinchi hosila ham qaralayotgan intervalning har bir nuqtasida mavjud bo'lib, u ham differensiallanuvchi funksiya bo'lishi mumkin. U holda f funksiya ikkinchi hosilasining hosilasi f funksiyaning uchinchi tartibli (yoki uchinchi) hosilasi deb ataladi va

$$f''' \ = \ f^{(3)} \ = \ \frac{d^3 f}{dx^3}$$

kabi belgilanadi.

Umuman, agar f funksiya biror intervalda $n-1$ tartibli $f^{(n-1)}$ hosilaga ega bo'lib, o'z navbatida bu funksiya ham differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, uning hosilasi f funksiyaning n - tartibli hosilsi deb ataladi va

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

kabi belgilanadi.

Bunda f funksiya berilgan intervalda n marta differensiallanuvchi deb ataladi.

Shunday qilib, n-hosila induktiv ravishda aniqlanar ekan:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x), \quad n = 2, 3, ...$$

Qulaylik uchun, ba'zan 0 - tartibli hosila deb funksiyaning o'zi tushiniladi, ya'ni

$$f^{(0)}(x) \equiv f(x).$$

Ba'zi funksiyalarning n-tartibli hosilasini hisoblashga misollar keltiramiz.

4.2.3 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \sin x, \quad -\infty < x < \infty,$$

funksiyani qaraymiz.

Uning hosilasi

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ko'rinishga ega.

Demak, sinus funksiyasini differensiallash argumentni $\pi/2$ qiymatga surishdan iborat ekan. Bundan, induksiyaga ko'ra,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad n \in \mathbf{N},\ -\infty < x < \infty, \tag{4.2.29}$$

formulani olamiz.

4.2.4 - misol. Quyidagi formula xuddi yuqoridagidek isbotlanadi:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad n \in \mathbf{N},\ -\infty < x < \infty. \tag{4.2.30}$$

4.2.5 - misol. Endi navbatdagi

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0,$$

logarifmik funksiyani qaraymiz.

Uning hosilalari quyidagicha aniqlanadi:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\ln x)''' = \frac{2}{x^3}, ...$$

Bu tengliklardan n - hosila uchun quyidagi hulosaga kelish mumkin:

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad n \in \mathbf{N},\ x > 0. \tag{4.2.31}$$

Bu formula bevosita induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

4.2.6 - misol. Agar $a > 0,\ a \neq 1$ bo'lsa,

$$f(x) \ = \ a^x, \quad -\infty < x < \infty,$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya hosilasi

$$(a^x)' \ = \ a^x \cdot \ln a$$

ga teng.

Demak, bu funksiyani differensiallash uchun uni asosning natural logarifmiga ko'paytirish kerak ekan. Bundan chiqdi, ko'rsatkichli funksiyaning n-hosilasi quyidagi

$$(a^x)^{(n)} \ = \ a^x \cdot (\ln a)^n. \tag{4.2.32}$$

ko'rinishga ega bo'lishini ko'rish qiyin emas.

7. Leybnits formulasi. *Agar u va v funksiyalar biror intervalda n marta differensiallanuvchi bo'lsa, ularning ko'paytmasi uv ham n marta differensiallanuvchi bo'lib, Leybnits formulasi deb ataluvchi quyidagi*

$$(uv)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ u^{(k)} v^{(n-k)} \tag{4.2.33}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu formulani matematik induksiya usuli orqali isbotlaymiz. Avval shuni qayd qilamizki, $n = 1$ bo'lsa, ushbu formula ko'paytmaning hosilasi uchun ma'lum bo'lgan (4.1.12) formula bilan ustma-ust tushadi.

Endi faraz qilaylik, (4.2.33) formula biror n uchun o'rinli bo'lsin. Yuqori tartibli hosilaning induktiv aniqlanishiga asosan, $(n+1)$ - tartibli hosila uchun

$$(uv)^{(n+1)} \ = \frac{d}{dx}(uv)^{(n)} \ = \ \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ u^{(k)} v^{(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ \frac{d}{dx}[u^{(k)} v^{(n-k)}] = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ [u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}]$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$(uv)^{(n+1)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ u^{(k)} v^{(n-k+1)} =$$

$$= \ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \ u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ u^{(k)} v^{(n-k+1)}.$$

Birinchi yig'indida oxirgi hadni va ikkinchi yig'indida birinchi hadni ajratsak,

$$(uv)^{(n+1)} \ = \ u^{(n+1)} v + \ uv^{(n+1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]u^{(k)}v^{(n-k+1)}.$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bu yerda kvadratik qavsni quyidagi

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

ko'rinishda yozsak, (4.2.33) formulani $(n+1)$ - hosila uchun olamiz:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + uv^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\,u^{(k)}v^{(n-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\,u^{(k)}v^{(n-k+1)}.$$

Endi talab qilinayotgan tasdiq matematik induksiya usulidan kelib chiqadi.

§ 4.3. Funksiyaning lokal ekstremumi

1. Funksiyaning nuqtada o'sishi va kamayishi.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar a nuqtaning shunday δ-atrofi topilsaki, a nuqtadan o'ngda funksiya a nuqtadagidan kattaroq qiymatlar qabul qilsa, ya'ni*

$$f(x) > f(a), \quad a < x < a+\delta, \tag{4.3.1}$$

tengsizlik bajarilsa, a nuqtadan chapda esa, funksiya a nuqtadagidan kichikroq qiymatlar qabul qilsa, ya'ni

$$f(x) < f(a), \quad a-\delta < x < a, \tag{4.3.2}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya a nuqtada o'suvchi deyiladi.

Xuddi shunga o'xshash, a nuqtada kamayuvchi funksiya aniqlanadi.

Agar funksiya hosilasi biror nuqtada noldan farqli bo'lsa, hosilaning ishorasi bu funksiyani shu nuqta atrofida o'sish yoki kamayishini anglatadi.

4.3.1 - tasdiq. *Berilgan f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $f'(a) > 0$ bo'lsa, funksiya a nuqtada o'sadi, agarda $f'(a) < 0$ bo'lsa, funksiya a nuqtada kamayadi.*

Isbot. Hosilaning (4.1.8) limit ko'rinishidagi ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, u uchun

$$f'(a) - \varepsilon \ < \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ < \ f'(a) + \varepsilon, \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

shart bajariladi.

Avval, faraz qilaylik, $f'(a) > 0$ bo'lsin. U holda $\varepsilon > 0$ ni yetarlicha kichik olib,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ > \ 0, \quad 0 < |x - a| < \delta, \tag{4.3.3}$$

bahoni hosil qilamiz.

Ravshanki, (4.3.3) munosabat (4.3.1) va (4.3.2) tengsizliklarning bir vaqtda bajarilishiga teng kuchlidir.

Agarda $f'(a) < 0$ bo'lsa ham isbot xuddi shunga o'xshash bo'ladi.

Q.E.D.

2. Lokal ekstremum.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar a nuqtaning shunday δ-atrofi topilsaki, unda*

$$f(x) \leq f(a), \quad a - \delta < x < a + \delta, \tag{4.3.4}$$

*bo'lsa, u holda f funksiya a nuqtada **lokal maksimumga** ega deyiladi.*

Bunda a nuqta *lokal maksimum nuqta* deb ataladi.

Xuddi shunga o'xshash lokal minimum aniqlanadi, faqat bunda a nuqtaning δ-atrofida

$$f(x) \geq f(a), \quad a - \delta < x < a + \delta, \tag{4.3.5}$$

tengsizlik bajarilishi zarur.

Bu holda a nuqta *lokal minimum nuqta* deb ataladi.

Agar a nuqta yoki lokal minimum nuqta yoki lokal maksimum nuqta bo'lsa, u *lokal ekstremum nuqta* deb ataladi.

4.3.1 - teorema (P.Ferma). *Agar f funksiya a lokal ekstremum nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, $f'(a) = 0$ bo'ladi.*

Isbot. Ravshanki, lokal ekstremum nuqtada funksiya o'suvchi ham, kamayuvchi ham bo'la olmaydi. Shuning uchun, 4.3.1 - tasdiqqa ko'ra, $f'(a)$ hosila musbat ham, manfiy ham bo'la olmaydi. Demak, $f'(a) = 0$ ekan.

Q.E.D.

§ 4.4. Chekli orttirma haqidagi teorema

4.4.1 - teorema (M.Roll (M.Rolle)). *Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $f(a) = f(b)$ bo'lsa, (a, b) intervalda shunday ξ topiladiki, $f'(\xi) = 0$ bo'ladi.*

Isbot. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra, f funksiya biror x_* nuqtada minimal qiymatga va biror x^* nuqtada maksimal qiymatga erishadi.

Agar $f(x_*) = f(x^*)$ bo'lsa, bunday funksiya berilgan kesmada o'zgarmas bo'ladi. Shuning uchun, uning hosilasi shu kesmada nolga teng bo'ladi. Demak, bu holda teoremadagi ξ sifatida (a, b) intervalning istalgan nuqtasini olish mumkin.

Agarda $f(x_*) < f(x^*)$ bo'lsa, $f(a) = f(b)$ shartga ko'ra, x_* va x^* nuqtalardan kamida bittasi (a, b) intervalning ichida joylashgan bo'ladi. Shunday ekan, bu nuqtani ξ orqali belgilasak, 4.3.1 - Ferma teoremasiga asosan, $f'(\xi) = 0$ tenglikni olamiz.

Q.E.D.

Roll teoremasi sodda geometrik ma'noga ega: agar funksiya intervalning chetki nuqtalarida bir xil qiymatlarga ega bo'lsa, u holda grafikka o'tkazilgan urinma biror nuqtada abssissa o'qiga parallel bo'ladi.

Roll teoremasi mexanik ma'noga ham ega: agar to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan nuqta boshlang'ich holatiga qaytsa, u holda uning tezligi biror vaqt momentida nolga aylanadi.

4.4.2 - teorema (J.L.Lagranj). *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, (a, b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (a, b) interval ichida shunday ξ nuqta topiladiki, bu nuqtada*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b, \tag{4.4.1}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Quyidagi

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

funksiyani qaraymiz.

Bevosita tekshirish orqali

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(a)$$

tengliklar bajarilishini ko'rish mumkin.

Demak, $g(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu teoremaga asosan, shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $g'(\xi) = 0$ bo'ladi. Shuning uchun,

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bu tenglik, ravshanki, (4.4.1) munosabat o'rinli ekanini anglatadi.

Q.E.D.

Natija. *Agar f funksiya (a, b) intervalda differensiallanuvchi bo'lib, bu intervalning har bir nuqtasida*

$$f'(x) \;=\; 0$$

bo'lsa, shunday C o'zgarmas topiladiki, u uchun

$$f(x) \;=\; C, \quad x \in (a, b),$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan, (4.4.1) ga ko'ra, har qanday ikki $x_1 \in (a,b)$ va $x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ = \ 0$$

tenglik o'rinli, ya'ni $f(x_1) = f(x_2) = const$, bu yerda $const$ orqali biror o'zgarmas belgilangan.

1 - eslatma. (4.4.1) formulaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: differensiallanuvchi funksiya grafigining istalgan ikki a va b abssissalik nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq uchun grafikning ξ abssissalik shunday nuqtasi topiladiki, grafikka shu nuqtada o'tkazilgan urinma o'sha to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi.

2 - eslatma. Agar (4.4.1) formulada $a = x$ va $b = x + h$ desak, bu formula

$$f(x+h) - f(x) \ = \ f'(\xi) \cdot h, \quad x < \xi < x + h, \tag{4.4.2}$$

ko'rinishga keladi.

Bu (4.4.2) tenglikning chap tomonida f funksiya argumentining h orttirmasiga mos kelgan chekli (ya'ni limitga o'tilmagandagi) orttirmasi turibdi. Shu sababli, (4.4.2) formulani (shu bilan birga (4.4.1) formulani ham) *chekli orttirmalar formulasi* deb ataladi.

3 - eslatma. Modomiki (4.4.2) formuladagi ξ nuqta x va $x + h$ nuqtalar orasida yotar ekan, $0 < \theta < 1$ shartni qanoatlantiruvchi shunday θ nuqta topiladiki, u uchun $\xi = x + \theta h$ tenglik bajariladi. Shuning uchun (4.4.2) formulani quyidagi

$$f(x+h) - f(x) \ = \ f'(x + \theta h)h, \quad 0 < \theta < 1,$$

ko'rinishda yozish mumkin. Shubhasiz, bu tenglikda θ nuqta ξ va h larga bog'liqdir.

Navbatdagi formula Lagranj chekli orttirmalar formulasining umumlashgan holidir.

4.4.3 - teorema (O.Koshi). *Ikki f va g funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsin.*

Agar g funksiyaning hosilasi (a,b) intervalning barcha nuqtalarida noldan farqli bo'lsa, bu interval ichida shunday ξ nuqta topiladiki, u uchun

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \ = \ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b, \tag{4.4.3}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Quyidagi

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(x) - g(a)][f(b) - f(a)] \tag{4.4.4}$$

funksiyani qaraymiz.

Ravshanki,

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Demak, φ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu teoremaga asosan, shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $\varphi'(\xi) = 0$ bo'ladi. Shuning uchun, (4.4.4) ga ko'ra,

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] - g'(\xi)[f(b) - f(a)] = 0. \tag{4.4.5}$$

Ravshanki, $g(b) - g(a) \neq 0$, chunki barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarda $g'(x) \neq 0$ bo'lgani uchun $g(a) = g(b)$ tenglik Roll teoremasiga zid bo'lar edi. Shunday ekan, (4.4.5) tenglikning har ikki tomonini $g'(\xi)[g(b) - g(a)]$ songa bo'lib yuborsak, talab qilingan (4.4.3) tenglikni olamiz.

Q.E.D.

Koshi teoremasi limitlarni hisoblashda asqatadi. Darhaqiqat, $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda u nihoyatda foydalidir.

Chunonchi, agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{4.4.6}$$

bo'lsa, $x \to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka ega deyiladi.

Mana shu aniqmaslikni ochish deganda biz

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{4.4.7}$$

limitni, u mavjud bo'lgan hollarda, hisoblashni tushunamiz.

Xuddi shu singari $x \to a + 0$ da $\frac{0}{0}$ aniqmaslik tushunchasi kiritiladi.

Navbatdagi teorema shunday aniqmaslikni ochishning bir usulini beradi.

4.4.4 - teorema (Lopital qoidasi). *Ikki f va g funksiyalar $a < x < x + \delta$ intervalda differensiallanuvchi bo'lib, shu intervalda $g'(x) \neq 0$ bo'lsin. Bundan tashqari*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0 \tag{4.4.8}$$

tengliklar bajarilsin.

U holda, agar quyidagi (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limit mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limit ham mavjud bo'lib,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.4.9}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. f va g funksiyalarni a nuqtada nolga teng deb aniqlaymiz (e'tibor bering, f va g funksiyalar a nuqtada aniqlanmagan edi):

$$f(a) \;=\; g(a) \;=\; 0.$$

Endi bu ikki funksiya $[a, x]$ kesmada uzluksiz bo'lib, Koshi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - a nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. Koshi formulasini qo'llab,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \;=\; \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} \;=\; \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \tag{4.4.10}$$

munosabatni olamiz, bu yerda ξ_n nuqta $a < \xi_n < x_n$ shartni qanoatlantiradi. Albatta, $x_n \to a + 0$ bo'lganda, $\xi_n \to a + 0$ bo'ladi. Shunday ekan, agar (4.4.10) munosabatning o'ng tomonidagi kasrning limiti (chekli yoki cheksiz) mavjud bo'lsa, uning chap tomonidagi kasr limiti ham mavjud bo'lib, bu limitlar o'zaro teng bo'ladi.

Q.E.D.

4.4.1 - misol. Limitni hisoblang:

$$A \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x + 2x^2}.$$

Lopital qoidasini qo'llab,

$$A \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1 + 4x} \;=\; 2$$

tenglikni olamiz.

4.4.2 - misol. Limitni hisoblang:

$$A \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + \sin^2}.$$

Lopital qoidasini qo'llab,

$$A \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x + \sin 2x}$$

tenglikni olamiz.

Yana bir marta Lopital qoidasini qo'llasak,

$$A \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x}{2 + 2\cos 2x} \;=\; 1$$

tenglikni olamiz.

§ 4.5. Teylor formulasi

1. Teylor polinomlari. Agar f funksiya a nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda, yuqorida ko'rganimizdek, quyidagi

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)\,(x - a) + \alpha(x)\,(x - a)$$

tenglik bajariladi, bu yerda $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichikdir. Bu formulaning o'ng tomonidagi birinchi ikki hadi quyidagi chiziqli funksiyadir (ya'ni birinchi tartibli ko'phaddir):

$$P(x) \; = \; f(a) + f'(a)\,(x-a).$$

Ravshanki, bu funksiya uchun

$$P(a) \; = \; f(a), \quad P'(a) \; = \; f'(a)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, u a nuqtaning yetarlicha kichik atrofida berilgan $f(x)$ funksiyaga istalgancha yaqin bo'ladi.

Endi, faraz qilaylik, f funksiya a nuqtaning biror atrofida n - tartibgacha hosilalarga ega bo'lsin. Shunday n - tartibli $P(x)$ polinom topishga harakat qilamizki, uning n - tartibgacha barcha hosilalari f funksiyaning mos hosilalariga teng bo'lsin, ya'ni

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad ..., \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{4.5.1}$$

tengliklar bajarilsin.

Shu maqsadda n - tartibli Teylor polinomi deb ataluvchi polinomni quyidagi tenglik orqali aniqlaymiz:

$$P_n(x,f) \; = \; \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\,\frac{(x-a)^k}{k!}\,.$$

Ravshanki, $x = a$ bo'lganda

$$P_n(a,f) \; = \; f(a)$$

tenglik o'rinli.

Bundan tashqari, bevosita ta'rifdan

$$P'_n(x,f) \; = \; \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\,\frac{k(x-a)^{k-1}}{k!} \; = \; \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}$$

tengliklarni olamiz.

Yoki, yig'indi indeksini bir birlikka sursak,

$$P'_n(x,f) \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(a)\,\frac{(x-a)^k}{k!} \; = \; P_{n-1}(x,f') \tag{4.5.2}$$

bo'ladi.

Demak, $x = a$ bo'lganda,

$$P'_n(a,f) \; = \; P_{n-1}(a,f') \; = \; f'(a).$$

Endi, isbotlangan (4.5.2) munosabatni differensiallasak,

$$P''_n(x,f) \; = \; P'_{n-1}(x,f') \; = \; P_{n-2}(x,f'')$$

va, shuning uchun,

$$P''_n(a,f) \; = \; P_{n-2}(a,f'') \; = \; f''(a).$$

Shu mulohazalarni davom ettirib, Teylor polinomining (4.5.1) tengliklarni qanoatlantirishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, Teylor polinomi biz izlayotgan polinom ekan. Shu sababli, bu polinom berilgan funksiyaga yuqori tartibli aniqlikda yaqinlashishini kutish ta'biiydir. Bunga mos tasdiq Teylor formulasi orqali beriladi. Teylor formulasi yordamida biz

$$R(x) \ = \ f(x) \ - \ P_n(x, f)$$

ayirmani sodda ko'rinishga keltirib, uning uchun kerakli baholarni olamiz.

2. Teylor formulasi. Ushbu bandda biz yuqorida qayd etilgan Teylor formulasini isbotlaymiz va, shu bilan birga, $R(x)$ qoldiq had uchun turli ifodalar olamiz.

Теорема 4.5.1. *Berilgan n natural soni uchun f funksiya a nuqtaning biror atrofida $n+1$ - tartibli hosilaga ega bo'lsin va x ko'rsatilgan atrofning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.*

Bundan tashqari, $G(t)$ funksiya qayd etilgan atrofda differensiallanuvchi bo'lib, $t \neq x$ bo'lganda $G'(t) \neq 0$ bo'lsin.

U holda x va a orasida yotuvchi shunday ξ nuqta topiladiki, u uchun

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ = \ R_{n+1}(x) \tag{4.5.3}$$

formula o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$R_{n+1}(x) \ = \ \frac{G(x) - G(a)}{G'(\xi)} \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \ (x-\xi)^n. \tag{4.5.4}$$

Isbot. Agar

$$F(t) \ = \ \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \ \frac{(x-t)^k}{k!} \tag{4.5.5}$$

desak,

$$F'(t) \ = \ f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left[f^{(k+1)}(t) \ \frac{(x-t)^k}{k!} \ - \ f^{(k)}(t) \ \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

bo'ladi va, tegishli qisqartirishlarni amalga oshirib,

$$F'(t) \ = \ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \ (x-t)^n \tag{4.5.6}$$

tenglikni olamiz.

Endi quyidagi

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} \ = \ \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

Koshi formulasidan foydalanib,

$$F(x) - F(a) \ = \ \frac{G(x) - G(a)}{G'(\xi)} \ F'(\xi)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar (4.5.6) ni hisobga olsak, bu tenglik

$$F(x) - F(a) \ = \ \frac{G(x) - G(a)}{G'(\xi)} \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \ (x-\xi)^n \tag{4.5.7}$$

ko'rinishga keladi.

Nihoyat, F funksiyaning (4.5.5) ta'rifidan bevosita kelib chiqadigan

$$F(x) - F(a) \;=\; f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

tenglikni (4.5.7) ga qo'ysak, talab qilingan (4.5.4) munosabatni olamiz.

Q.E.D.

1 - natija (Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi). *Berilgan n natural soni uchun f funksiya a nuqtaning biror atrofida $n+1$ - tartibli hosilaga ega bo'lsin. U holda ko'rsatilgan atrofdan ixtiyoriy x nuqta olganda ham x va a orasida shunday ξ nuqta topiladiki, u uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi:*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;+\; R_{n+1}(x), \tag{4.5.8}$$

bu yerda

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.5.9}$$

Isbot. 4.5.1 - teoremada

$$G(t) \;=\; (x-t)^{n+1}$$

deb olamiz.

U holda

$$G'(t) \;=\; -(n+1)(x-t)^n$$

bo'lib, $G(x) - G(a) = -(x-a)^{n+1}$ tenglikka ko'ra,

$$\frac{G(x)-G(a)}{G'(\xi)} \;=\; \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}.$$

Shuning uchun (4.5.4) tenglikning o'ng tomoni

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}\;\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\;(x-\xi)^n \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\;(x-a)^{n+1}$$

ko'rinishga keladi va, natijada, talab qilingan (4.5.9) tenglikni olamiz.

Q.E.D.

(4.5.9) dagi ifoda Teylor formulasining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi deyiladi.

2 - natija (Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi). Agar 4.5.1 - teoremada

$$G(t) \;=\; x-t$$

desak, ravshanki,

$$\frac{G(x)-G(a)}{G'(\xi)} \;=\; x-a$$

bo'ladi.

Shuning uchun (4.5.4) tenglikning o'ng tomonidagi ifoda

$$R_{n+1}(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,(x-a)\,(x-\xi)^n \tag{4.5.10}$$

ko'rinishga keladi va u Koshi ko'rinishidagi qoldiq had deyiladi.

Q.E.D.

3 - natija (Shlomilx-Rosh ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi).

Ixtiyoriy p natural sonni tayinlab, 4.5.1 - teoremada

$$G(t) \;=\; (x-t)^p$$

deb olamiz.

U holda, ravshanki,

$$\frac{G(x)-G(a)}{G'(\xi)} \;=\; \frac{(x-a)^p}{p(x-\xi)^{p-1}}.$$

Shuning uchun (4.5.4) tenglikning o'ng tomonidagi ifoda

$$R_{n+1}(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\cdot n!}\,(x-a)^p\cdot(x-\xi)^{n-p+1} \tag{4.5.11}$$

ko'rinishga keladi va u umumiy ko'rinishdagi yoki Shlomilx-Rosh ko'rinishidagi qoldiq had deyiladi.

Q.E.D.

Eslatma. Teylor formulasida $a=0$ bo'lganda uni ba'zan Makloren formulasi ham deb atashadi:

$$f(x) \;=\; f(0) \;+\; f'(0)x \;+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \;+\; \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \;+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \;+\; R_n(x), \tag{4.5.12}$$

bu yerda

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\frac{\xi}{x}<1. \tag{4.5.13}$$

Bu tenglikda ξ qiymat x va n larga bog'liq, ya'ni $\xi=\xi_n(x)$.

3. Ko'rsatkichli funksiya yoyilmasi. Quyidagi

$$f(x) \;=\; e^x$$

ko'rsatkichli funksiyaning $a=0$ nuqtada Teylor formulasi bo'yicha yoyilmasini (Makloren yoyilmasini) topamiz.

Ravshanki, $f^{(n)}(x)=e^x$. Demak, $f^{(n)}(0)=1$. Shuning uchun, (4.5.11) formulaga ko'ra,

$$e^x \;=\; 1 \;+\; x \;+\frac{x^2}{2!} \;+\frac{x^3}{3!} \;+\frac{x^4}{4!} \;+...\frac{x^n}{n!} \;+\; R_n(x) \tag{4.5.14}$$

tenglik bajariladi, bunda

$$R_n(x) \;=\; e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0<\frac{\xi}{x}<1. \tag{4.5.15}$$

4. Sinus yoyilmasi. Quyidagi

$$f(x) \ = \ \sin x$$

funksiyani qaraymiz.
Ma'lumki,

$$f^{(n)}(x) \ = \ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Demak,

$$f^{(n)}(0) \ = \ \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Shuning uchun,

$$f^{(n)}(0) \ = \ \begin{cases} (-1)^{k-1}, & \text{agar } n = 2k-1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } n = 2k \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Natijada,

$$\sin x \ = \ x \ - \frac{x^3}{3!} \ + \frac{x^5}{5!} \ - \frac{x^7}{7!} \ + ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \ + \ \widetilde{R}_k(x), \tag{4.5.16}$$

bu yerda

$$\widetilde{R}_k(x) \ = \ \sin\left(\xi + \frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad 0 < \frac{\xi}{x} < 1. \tag{4.5.17}$$

5. Kosinus yoyilmasi. Quyidagi

$$f(x) \ = \ \cos x$$

funksiyani qaraymiz.
Ma'lumki,

$$f^{(n)}(x) \ = \ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Demak,

$$f^{(n)}(0) \ = \ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Shuning uchun,

$$f^{(n)}(0) \ = \ \begin{cases} (-1)^{k}, & \text{agar } n = 2k \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } n = 2k+1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Natijada,

$$\cos x \ = \ 1 \ - \frac{x^2}{2!} \ + \frac{x^4}{4!} \ - \frac{x^6}{6!} \ + ... + (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \ + \ \widetilde{R}_k(x), \tag{4.5.18}$$

bu yerda

$$\widetilde{R}_k(x) \ = \ \cos\left(\xi + \frac{\pi(2k+2)}{2}\right)\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}, \quad 0 < \frac{\xi}{x} < 1. \tag{4.5.19}$$

6. Logarifm yoyilmasi. Modomiki $\ln x$ funksiya manfiy argumentlarda aniqlanmagan ekan, uni $x = 0$ nuqta atrofida Makloren formulasi bo'yicha yoyish mumkin emas. Odatda bu funksiya o'rniga

$$f(x) \;=\; \ln(1+x), \quad x > -1,$$

funksiya olinadi. Yangi funksiya $x = 0$ nuqta atrofida aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchidir.

Agar $n \geq 1$ bo'lsa, hosila uchun

$$f^{(n)}(x) \;=\; (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

tenglikni olamiz, demak,

$$f^{(n)}(0) \;=\; (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Yana $f(0) = 0$ tenglikni hisobga olsak, $x > -1$ bo'lganda

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \;+\; R_n(x) \tag{4.5.20}$$

yoyilma hosil bo'ladi, bunda

$$R_n(x) \;=\; \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < \frac{\xi}{x} < 1. \tag{4.5.21}$$

7. Asimptotik yoyilma. Agar M_{n+1} orqali qaralayotgan funksiyaning $(n+1)$-tartibli hosilasining aniq yuqori chegarasini belgilasak, Teylor formulasidagi qoldiq had $M_{n+1}(x-a)^{n+1}$ ifoda orqali yuqoridan baholanadi. Biroq, Teylor formulasining ko'pgina tadbiqlarida qoldiq had qanday M_{n+1} koeffitsiyent bilan baholanishi emas, balki $x \to a$ da uning $(x-a)^{n+1}$ kabi nolga intilishi muhimdir. Shu munosabat bilan avvalgi bobda kiritilgan quyidagi belgilashni eslatamiz: agar shunday o'zgarmas $C > 0$ topilsaki, barcha $x \in E$ larda

$$|f(x)| \;\leq\; C|g(x)|, \quad x \in E,$$

tengsizlik bajarilsa, biz

$$f(x) \;=\; O(g(x)), \quad x \in E,$$

deymiz.

4.5.2 - teorema. *Berilgan f funksiya biror n natural son uchun a nuqtaning biror atrofida n - tartibli hosilaga ega bo'lib, bu hosila a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda a nuqtaning shunday $V(a)$ atrofi topiladiki, unda quyidagi formula o'rinli bo'ladi:*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;+\; O((x-a)^{n+1}), \quad x \in V(a). \tag{4.5.22}$$

Isbot. Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasida n o'rniga $n-1$ olib, uni f funksiyaga qo'llaymiz:

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;+\; \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n. \tag{4.5.23}$$

Shartga ko'ra $f^{(n)}(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a) + f^{(n+1)}(a)(\xi - a) + \alpha(\xi)(x-a)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda $\alpha(\xi)$ - argument $\xi \to a$ da cheksiz kichik funksiyadir. Albatta, a nuqtada cheksiz kichik bo'lgan har qanday funksiya shu nuqtaning biror $V(a)$ atrofida chegaralangandir. Shu sababli oxirgi tenglikdan quyidagi munosabatni olamiz:

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a) + O(x-a), \quad x \in V(a). \tag{4.5.24}$$

Endi, (4.5.24) bahoni (4.5.23) ning oxirgi hadiga qo'llab, o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$(x-a)^n \cdot O(x-a) \;=\; O((x-a)^{n+1})$$

munosabatdan foydalansak, talab qilingan (4.5.22) tenglikni olamiz.

Q.E.D.

Isbotlangan (4.5.22) formula f funksiyaning a nuqta atrofidagi *asimptotik yoyilmasi* deyiladi. Bu formulada o'ng tomondagi ko'phad f funksiya bilan, umuman aytganda, ustma-ust tushmasada, u f funksiyadan ko'phad darajasidan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik miqdorga farq qiladi. Yoyilmaning nomi yunoncha «*asimptotos*», ya'ni « ustma-ust tushmaydi» degan so'zdan olingan.

Bu formula ko'pincha $a = 0$ bo'lganda qo'llaniladi. Bu holda (4.5.22) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \;+\; O(x^{n+1}), \quad x \in V(0). \tag{4.5.25}$$

Ba'zi eng sodda elementar funksiyalarning noldagi asimptotik yoyilmalarini keltiramiz.

1) Eksponentaning yoyilmasi:

$$e^x = \; 1 + x + \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+ \dots + \frac{x^n}{n!} \;+ O(x^{n+1}). \tag{4.5.26}$$

2) Sinusning yoyilmasi:

$$\sin x \;=\; x \;-\frac{x^3}{3!} \;+\frac{x^5}{5!} \;-\frac{x^7}{7!} \;+ ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \;+\; O(x^{2n+1}). \tag{4.5.27}$$

3) Kosinusning yoyilmasi:

$$\cos x \;=\; 1 \;-\frac{x^2}{2!} \;+\frac{x^4}{4!} \;-\frac{x^6}{6!} \;+ ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \;+\; O(x^{2n+2}). \tag{4.5.28}$$

Keltirilgan formulalar turli limitlarni hisoblashda asqatadi.

4.5.1 - misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \;\; \cos 2x \;\; \cos 3x}{1-\cos x}. \tag{4.5.29}$$

Kosinusning $O(x^4)$ aniqlikdagi asimptotik yoyilmasini qo'llasak, (4.5.29) kasrning surati uchun

$$1 - \cos x \;\; \cos 2x \;\; \cos 3x =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)\left(1 - \frac{4x^2}{2} + O(x^4)\right)\left(1 - \frac{9x^2}{2}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{14x^2}{2} + O(x^4)\right) = 7x^2 + O(x^4) \tag{4.5.30}$$

ifodani olamiz.

Xuddi shu usulda maxrajni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)=\frac{x^2}{2}+O(x^4). \tag{4.5.31}$$

Endi (4.5.30) va (4.5.31) ni (4.5.29) kasrga qo'ysak,

$$\frac{1-\cos x\ \cos 2x\ \cos 3x}{1-\cos x}=\frac{7x^2+O(x^4)}{\dfrac{x^2}{2}+O(x^4)}=\frac{14+O(x^2)}{1+O(x^2)}$$

tenglik hosil bo'ladi. Bundan yuqoridagi limit 14 ga teng ekanligi kelib chiqadi.

§ 4.6. Differensiallar

1. Birinchi differensial. Faraz qilaylik, f funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Argumentning h ga teng orttirmasiga mos kelgan f funksiyaning orttirmasini quyidagi ko'rinishda belgilaymiz:

$$\Delta f(a,h)=f(a+h)-f(a) \tag{4.6.1}$$

Bu orttirmani, (4.1.10) formulaga ko'ra,

$$\Delta f(a,h)=f'(a)h+\alpha(a,h)h \tag{4.6.2}$$

kabi yozish mumkin. Bu yerda $h\to 0$ bo'lsa, $\alpha(a,h)\to 0$ bo'ladi.

Funksiya orttirmasining h ga nisbatan chiziqli bo'lgan $f'(a)h$ hadi f funksiyaning a nuqtadagi *differensiali* deyiladi va u $df(a,h)$ orqali belgilanadi. Shunday qilib,

$$df(a,h)=f'(a)h. \tag{4.6.3}$$

Agar f funksiya biror intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, uning differensiali ikki x va h o'zgaruvchilar funksiyasi bo'lib, u h bo'yicha chiziqlidir:

$$df(x,h)=f'(x)h,$$

An'ana bo'yicha h o'zgaruvchini dx deb belgilashadi va bu holda differensial quyidagi ko'rinishga keladi:

$$df(x,dx)=f'(x)dx,$$

yoki yanada qisqa qilib,

$$df\ =\ f'(x)dx \tag{4.6.4}$$

kabi yoziladi.

Masalan,

$$d(\sin x)=\ \cos x\ dx.$$

Yana bir misol:

$$d(\ln \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

2. Birinchi differensial ko'rinishining invariantligi. Ba'zan x argumentning o'zi yangi t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Mana shunday holda $f(x)$ funksiyaning differensialini topamiz. Chunonchi,

$$F(t) = f(x) = f[x(t)] \tag{4.6.5}$$

murakkab funksiyani t argumentning dt orttirmasiga mos kelgan orttirmasini izlaymiz. Agar f va x funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, u holda F murakkab funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi va

$$dF = dF(t, dt) = F'(t)dt = f'[x(t)]x'(t)dt \tag{4.6.6}$$

tenglik bajariladi.

Endi, $dx = x'(t)dt$ bo'lgani uchun, (4.6.6) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$dF = f'(x)dx. \tag{4.6.7}$$

Ikki (4.6.5) va (4.6.7) tengliklardan

$$df \;=\; f'(x)dx \tag{4.6.8}$$

munosabat kelib chiqadi.

Shunday qilib, x argumentining o'zi ham biror yangi o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning (4.6.8) birinchi differensiali xuddi (4.6.4) kabi ko'rinishga ega bo'lar ekan. Bu yerdagi yagona farq shundaki, (4.6.8) tenglikda dx - funksiyaning differensialidir va bu tenglikni aslida quyidagi ma'noda tushunish zarur:

$$df(t, dt) \;=\; f'(x(t))\; dx(t, dt).$$

Yuqoridagi (4.6.8) tenglik *birinchi differensial ko'rinishining invariantligi* deb nomlanadi.

3. Ikkinchi differensial. Faraz qilaylik, f funksiya biror intervalda ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya differensiali quyidagi

$$df(x, dx) \;=\; f'(x)\; dx$$

ko'rinishga ega bo'lib, u dx orttirmaning har bir tayinlangan qiymatida x o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'ladi. Bu o'zgaruvchiga h orttirma bersak,

$$df(x+h, dx) - df(x, dx) = [f'(x+h) - f'(x)]\; dx = [f''(x) + \alpha(x, h)]h\; dx$$

munosabatni olamiz, bunda $h \to 0$ da $\alpha(x, h) \to 0$.

Birinchi differensialning differensiali birinchi differensial orttirmasining h ga nisbatan chiziqli qismi bo'lib, u quyidagi ko'rinishga egadir:

$$f''(x)\; h\; dx.$$

Bu ifodaning $h = dx$ dagi qiymati f funksiyaning *ikkinchi differensiali* deb ataladi va $d^2f = d^2f(x, dx)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$d^2f \;=\; f''(x)\; (dx)^2, \tag{4.6.9}$$

ya'ni ikkinchi differensial dx orttirmaning kvadratik funksiyasi ekan.

Masalan,

$$d^2(\sin x) \;=\; -\sin x\;(dx)^2.$$

Endi x argument yangi t o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan holda $f(x)$ funksiyaning ikkinchi differensialini topamiz. Chunonchi, quyidagi murakkab funksiyani qaraymiz

$$F(t) = f(x) = f[x(t)] \tag{4.6.10}$$

va uni t argumentning dt orttirmasiga mos kelgan ikkinchi differensialini hisoblaymiz.

Agar f va x funksiyalar ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda F murakkab funksiya ham ikki marta differensiallanuvchi bo'lib,

$$F''(t) = f''[x(t)][x'(t)]^2 + f'[x(t)]x''(t)$$

tenglik bajariladi.

Demak,

$$d^2F = d^2F(t,dt) = F''(t)(dt)^2 = f''[x(t)][x'(t)\;dt]^2 + f'[x(t)]x''(t)(dt)^2. \tag{4.6.11}$$

Agar, (4.6.9) ta'rifga ko'ra, $x''(t)(dt)^2 = d^2x$ ekanini hisobga olsak, u holda (4.6.10) va (4.6.11) dan

$$d^2f = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x \tag{4.6.12}$$

munosabatni olamiz.

Endi (4.6.9) va (4.6.12) ni taqqoslasak, shuni ko'rish mumkinki, x o'zgaruvchi boshqa t o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan vaqtda, ikkinchi differensialga qo'shimcha $f'(x)d^2x$ had qo'shilar ekan, bunda d^2x - x o'zgaruvchining ikkinchi differensialidir. Shunday qilib, ikkinchi differensial ko'rinishi invariantlik xossasiga ega emas ekan.

4. Ixtiyoriy tartibli differensiallar. Berilgan f funksiyaning n-tartibli differensiali $(n-1)$-tartibli differensialning differensiali sifatida induktiv ravishda aniqlanib,

$$d^nf = f^{(n)}(x)(dx)^n \tag{4.6.13}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Haqiqatan, faraz qilaylik, f funksiya biror intervalda n marta differnsiallanuvchi bo'lib, uning $(n-1)$-differensiali aniqlangan va bu differensial uchun

$$d^{n-1}f = f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1} \tag{4.6.14}$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Bundan chiqdi, f funksiyaning aniqlanishiga ko'ra, $(n-1)$-tartibli differensial x o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lar ekan. Demak,

$$\begin{aligned} d^{n-1}f(x+h,dx) - d^{n-1}f(x,dx) = [f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)]\;(dx)^{n-1} = \\ = [f^{(n)}(x) + \alpha(x,h)]h\;(dx)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ravshanki, bu orttirmaning h bo'yicha chiziqli qismi

$$f^{(n)}(x)\;h\;(dx)^{n-1} \tag{4.6.15}$$

ga teng. Ushbu (4.6.15) ifodaning $h = dx$ dagi qiymati f funksiyaning *n-differensiali* deyiladi. Shunday ekan, bu ta'rif va (4.6.14) tenglikdan (4.6.13) formula bevosita kelib chiqadi.

Agar x o'zgaruvchi yangi t o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, $n \geq 2$ bo'lsa, f funksiyaning n-differensiali uchun formula murakkabroq ko'rinishga ega ekanini ko'rsatish qiyin emas. Boshqacha aytganda, n-differensial ham, ikkinchi differensial kabi, invariantlik xossasiga ega bo'lmaydi.

Eslatma. Teylor formulasi differensiallarda quyidagicha yoziladi:

$$f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \frac{d^4 f}{4!} + ... + \frac{d^n f}{n!} + R_{n+1}(x),$$

bu yerda

$$R_{n+1}(x) = \frac{d^{n+1} f(\xi, dx)}{(n+1)!}.$$

§ 4.7. Kompleks qiymatli funksiyalarni differensiallash

Ta'rif. *Kompleks qiymatli va x haqiqiy o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi **hosilasi** deb quyidagi limitga aytiladi*:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \; = \; f'(x). \tag{4.7.1}$$

4.7.1 - tasdiq. *Kompleks qiymatli va x haqiqiy o'zgaruvchili $f(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning haqiqiy $u(x)$ va mavhum $v(x)$ qismlarining differensiallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot bevosita hosila ta'rifidan kelib chiqadi.

Ravshanki, kompleks qiymatli funksiya hosilasi

$$f'(x) \; = \; u'(x) + iv'(x) \tag{4.7.2}$$

ga teng.

Masalan, agar

$$e(x) \; = \; \cos x + i \sin x$$

bo'lsa,

$$e'(x) \; = \; -\sin x + i \cos x$$

bo'ladi.

Kompleks qiymatli funksiyalarni differensiallash amali xuddi haqiqiy funksiyalar holidagidek xossalarga ega.

Misol tariqasida ikki kompleks qiymatli funksiyalar ko'paytmasining hosilasi uchun

$$(fg)' \; = \; f'g + fg' \tag{4.7.3}$$

formulani isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $f = u + iv$ va $g = p + iq$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, 4.7.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$fg \; = \; (up - vq) + i(uq + vp)$$

formulada u, v, p va q lar differensiallanuvchi haqiqiy funksiyalar bo'ladi.

Demak, yana 4.7.1 - tasdiqqa ko'ra, ko'paytma ham differensiallanuvchi ekan. Endi (4.7.2) formulani va haqiqiy funksiyalar ko'paytmalarini differensiallash qoidasini qo'llasak,

$$(fg)' \;=\; (u'p+up'-v'q-vq')+i(u'q+uq'+v'p+vp')$$

tenglikni olamiz.

Bundan talab qilinayotgan (4.7.3) formula bevosita kelib chiqadi:

$$(fg)' \;=\; (u'+iv')(p+iq)+(u+iv)(p'+iq')=f'g+fg'.$$

Yana bir misol tariqasida kompleks qiymatli f funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $f(a)\neq 0$ bo'lganda, $\dfrac{1}{f}$ funksiyaning shu nuqtadagi hosilasini topamiz.

Shunday qilib, $f=u+iv$ funksiya a nuqtada differensiallnuvchi bo'lsin. U holda, 4.7.1 - tasdiqqa asosan, har ikki u va v funksiyalar ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi. Yana 4.7.1 - tasdiqni qo'llab, o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$$

tenglikka ko'ra, $\dfrac{1}{f}$ funksiya ham a nuqtada differensiallanuvchi ekaniga iqror bo'lamiz.

Shunday ekan, $g=\dfrac{1}{f}$ deb belgilab, (4.7.3) formulaga asosan,

$$(fg)'=f'g+fg'=\frac{f'}{f}+fg'$$

ni olamiz.

Modomiki $(fg)'\equiv 0$ ekan, oxirgi tenglikdan

$$g'=-\frac{1}{f}\,\frac{f'}{f}=-\frac{f'}{f^2}$$

hosil bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}. \tag{4.7.4}$$

Haqiqiy va mavhum qismlari elementar funksiyalar bo'lgan kompleks qiymatli funksiyalarning hosilalari, (4.7.2) formulani qo'llab, oson topiladi.

4.7.1 - misol. Aytaylik, $c=a+ib$ bo'lib, bunda a va b haqiqiy sonlar $b\neq 0$ shartni qanoatlantirsin. Ushbu

$$\Phi(x,c)=\ln\sqrt{(x-a)^2+b^2}+i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-a}{b} \tag{4.7.5}$$

funksiya hosilasi topilsin.

Yechish. Hosilani hisoblash uchun biz (4.2.27) va (4.2.28) tengliklar hamda (4.7.2) formuladan foydalanamiz. Natijada

$$\Phi'(x,c)=\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}+i\frac{b}{(x-a)^2+b^2}=$$
$$=\frac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}=\frac{x-\overline{c}}{|x-c|^2}=\frac{1}{x-c}$$

munosabatni olamiz, bu yerda $\overline{c} = a - ib$, ya'ni c ga qo'shma sondir .

Shunday qilib,

$$\Phi'(x,c) \;=\; \frac{1}{x-c}. \tag{4.7.6}$$

Yuqori tartibli hosilalar ham shunga o'xshash hisoblanadi.

4.7.2 - misol. Yana $c = a + ib$ deymiz, bunda a va b lar haqiqiy sonlar bo'lib, $b \neq 0$. Yuqoridagi (4.7.5) funksiyaning n - tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. Agar (4.7.6) tenglikni ketma-ket differensiallasak,

$$\Phi^{(n)}(x,c) \;=\; (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x-c)^n} \tag{4.7.7}$$

munosabatni olamiz.

(4.7.7) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\;\Phi^{(n)}(x,c) \;=\; \frac{1}{(x-c)^n}. \tag{4.7.8}$$

Demak, (4.7.8) tenglikning o'ng tomonidagi funksiya oshkor ko'rinishda yoziladigan biror elementar funksiyaning hosilasi ekan.

Eslatma. Agar $c = a + ib$ bo'lsa,

$$\sqrt{(x-a)^2 + b^2} \;=\; |x-c|$$

bo'ladi va shuning uchun, (4.7.5) funksiyani

$$\Phi(x,c) = \ln|x-c| \;+\; i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-a}{b}, \quad \mathrm{Im}\,c = b \neq 0, \tag{4.7.9}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agarda $b = \mathrm{Im}\,c = 0$ bo'lsa, $\Phi(x,c)$ funksiya quyidagi sodda ko'rinishga ega:

$$\Phi(x,c) \;=\; \ln|x-c|, \quad \mathrm{Im}\,c = 0. \tag{4.7.10}$$

Bunda, albatta, hosila uchun (4.7.6) va (4.7.8) tengliklar o'rinli bo'lib qolaveradi.

Shunday qilib, ixtiyoriy kompleks c soni va ixtiyoriy natural n uchun

$$\frac{d}{dx}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\;\Phi^{(n-1)}(x,c) \;=\; \frac{1}{(x-c)^n} \tag{4.7.11}$$

tenglik bajarilar ekan, bunda $\Phi(x,c)$ funksiya $b \neq 0$ da (4.7.9) tenglik va, $b = 0$ bo'lganda esa, (4.7.10) tenglik orqali aniqlangandir.

§ 4.8. Funksiyalar grafigini tekshirish

Ushbu paragrafda biz funksiyalar grafigini o'rganamiz. Eslatib o'tamizki, biror E to'plamda aniqlangan f funksiyaning grafigi deb $\mathbf{R}^2$ dan olingan quyidagi

$$\Gamma(f) \;=\; \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; f(x) = y,\; x \in E\} \tag{4.8.1}$$

nuqtalar to'plamiga aytilar edi.

Boshqacha aytganda, f funksiya grafigi tekislikning $(x, f(x))$ ko'rinishdagi barcha nuqtalari to'plamidan iborat bo'lib, bunda x berilgan f funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishlidir.

Agar funksiya berilgan intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, hosila ishorasi yordamida bu funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlashimiz mumkin va, natijada, funksiyaning lokal ekstremum nuqtalarini topa olamiz. Funksiya grafigini o'rganishni mana shu ekstremum nuqtalarini topishdan boshlaymiz.

1. Lokal ekstremum nuqtalarini topish. Yuqorida ekstremumning quyidagi zaruriy sharti topilgan edi (4.3.1 - Ferma teoremasi):

agar f funksiya c nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, shu nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lsa, $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Berilgan f funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan nuqta shu funksiyaning *kritik* yoki *statsionar* nuqtasi deyiladi. Oxirgi nom hosilaning mexanik ma'nosiga asoslangan. Agar x - vaqt va $f(x)$ - biror harakatlanayotgan moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi koordinatasi bo'lsa, funksiya hosilasini moddiy nuqtaning tezligi deb qarashimiz mumkin. Agar biror a nuqtada tezlik nolga aylansa, ya'ni qaralayotgan moddiy nuqta bu momentda harakatdan to'xtasa, bunday nuqta f funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

Sodda $f(x) = x^3$ funksiya misolida yuqoridagi shart yetarli emasligini ko'rish mumkin. Chunonchi, $x = 0$ nuqtada $f'(0) = 0$ shart bajarilsada, 0 nuqta berilgan funksiya uchun lokal ekstremum nuqta bo'la olmaydi.

Ushbu bandda biz lokal ekstremum uchun yetarli shartlarni topish masalasini o'rganamiz. Afsuski, lokal ekstremum uchun bir vaqtning o'zida ham yetarli, ham zaruriy bo'lib, oson tekshiriladigan shart hozirga qadar ma'lum emas. Shu sababli biz lokal ekstremum uchun turli vaziyatlarda tekshirishga qulay bo'lgan bir necha yetarli shartlarni keltiramiz.

4.8.1 - teorema (ekstremumning birinchi yetarli sharti). *Faraz qilaylik, f funksiya c nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo'lib, $f'(c) = 0$ bo'lsin. Bundan tashqari, c nuqtaning o'sha atrofida quyidagi shart bajarilsin:*

$$x < c \quad \textit{bo'lsa,} \quad f'(x) < 0 \quad \textit{bo'lsin} \quad \textit{va} \quad x > c \quad \textit{bo'lsa,} \quad f'(x) > 0 \quad \textit{bo'lsin.} \tag{4.8.2}$$

U holda c nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.

Isbot. Agar $x < c$ bo'lsa, $[x, c]$ kesmada Lagranj formulasini qo'llab, (4.8.2) shartdan foydalansak,

$$f(c) - f(x) = f'(\xi)(c - x) < 0, \quad x < \xi < c,$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$x < c \quad \text{bo'lganda} \quad f(x) > f(c) \quad \text{bo'lar ekan.} \tag{4.8.3}$$

Xuddi shu singari, $x > c$ bo'lsa, $[c, x]$ kesmada Lagranj formulasini qo'llab, teorema shartiga ko'ra,

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c) > 0, \quad c < \xi < x,$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$x < c \quad \text{bo'lganda} \quad f(x) > f(c) \quad \text{bo'lar ekan.} \tag{4.8.4}$$

Shunday qilib, (4.8.3) va (4.8.4) larga ko'ra, $x \neq c$ bo'lganda $f(x) > f(c)$ bo'lar ekan. Bu esa c nuqtaning lokal minimum nuqtasi ekanini anglatadi.

Q.E.D.

Natija. *Faraz qilaylik, f funksiya c statsionar nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsin:*

$$x < c \quad \textit{bo'lsa,} \quad f'(x) > 0 \quad \textit{bo'lsin va} \quad x > c \quad \textit{bo'lsa,} \quad f'(x) < 0 \quad \textit{bo'lsin.} \tag{4.8.5}$$

U holda c nuqta f funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

Isbot qilish uchun 4.8.1 - teoremani $f_1(x) = -f(x)$ funksiyaga qo'llash yetarli.

Qayd etamizki, 4.8.1 - teorema f funksiya c nuqtadan chapda va o'ngda yotgan nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib, c nuqtaning o'zida esa faqat uzluksiz bo'lgan holda ham o'rinlidir. Chunonchi, bu teoremani quyidagi umumiyroq ko'rinishda ham keltirish mumkin.

4.8.1* - teorema (ekstremum uchun birinchi yetarlilik shartining boshqa varianti). *Biror $\delta > 0$ uchun f funksiya $\{x : 0 < |x - c| < \delta\}$ to'plamning barcha nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lib, c nuqtaning o'zida uzluksiz bo'lsin. Agar c nuqtaning δ-atrofida (4.8.2) shart bajarilsa, c nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.*

Isbot 4.8.1 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iboratdir.

Xuddi shu singari, f funksiya c nuqtada differensiallanuvchi bo'lmay, bu nuqtada faqat uzluksiz bo'lgan holda ham, agar (4.8.5) shart bajarilsa, c nuqta f funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'lishini ko'rsatish mumkin.

4.8.1 -misol. Quyidagi

$$f(x) \;=\; |x - c|$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya butun sonlar o'qida uzluksiz bo'lib, $x = c$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda differensiallanuvchidir. Bu nuqtadan tashqarida hosila quyidagicha aniqlanadi:

$$f'(x) \;=\; \text{sign }(x-c) \;=\; \begin{cases} -1, & \text{agar } x < c \text{ bo'lsa,} \\ \;\;1, & \text{agar } x > c \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak, (4.8.2) shart o'rinli bo'lar ekan va shuning uchun, 4.8.1* - teoremaga ko'ra, qaralayotgan funksiya $x = c$ nuqtada lokal minimumga egadir.

Shuni aytish joizki, (4.8.2) va (4.8.5) shartlarga ko'ra f funksiya hosilasining c nuqta atrofida chegaralangan bo'lishi shart emas.

4.8.2 - misol. Quyidagi

$$f(x) \;=\; 1 \;-\; \sqrt{|x|}$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya butun sonlar o'qida uzluksiz bo'lib, $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda differensiallanuvchidir. Bu nuqtadan tashqarida hosila quyidagicha aniqlanadi:

$$f'(x) \;=\; -\frac{\text{sign } x}{2\sqrt{|x|}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak, (4.8.5) shart o'rinli bo'lar ekan va shuning uchun, qaralayotgan funksiya $x = 0$ nuqtada lokal maksimumga egadir.

Navbatdagi yetarlilik shartini tekshirish oson bo'lsada, u o'rganilayotgan funksiyaga ko'proq shart qo'yadi. Chunonchi, statsionar nuqtada bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lishi talab qilinadi.

4.8.2 - teorema (ekstremumning ikkinchi yetarli sharti). *Faraz qilaylik, c nuqta f funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lib, f funksiya shu nuqtada ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin.*

Agar $f''(c) > 0$ bo'lsa, c nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi va $f''(c) < 0$ bo'lganda esa, c nuqta funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

Isbot. Avval $f''(c) > 0$ deb faraz qilamiz. U holda 4.3.1 - tasdiqqa asosan, bu tengsizlik $f'(x)$ birinchi hosilaning c nuqtada o'sishini anglatadi. Bundan chiqdi, $f'(c) = 0$ bo'lgani sababli, (4.8.2) shart o'rinlidir. Demak, c nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi ekan.

Teorema $f''(c) < 0$ bo'lgan holda ham xuddi shunga o'xshab isbotlanadi.

Q.E.D.

Eslatma. Agarda $f''(c) = 0$ bo'lsa, 4.8.2 - teorema c statsionar nuqtaning lokal ekstremum nuqtasi bo'lishi haqida biror tayinli javob bera olmaydi. Bu holda yanada yuqoriroq tartibli hosilalarni o'rganishga to'g'ri keladi.

4.8.3 - teorema. *Faraz qilaylik, $k \in \boldsymbol{N}$ uchun f funksiya c nuqtaning biror atrofida $2k-1$ - tartibli hosilaga ega bo'lib, c nuqtaning o'zida esa, $2k$ - tartibli hosilaga ega bo'lsin.*

Bundan tashqari,

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(2k-1)}(c) = 0 \tag{4.8.6}$$

tengliklar bajarilsin. U holda, agar $f^{(2k)}(c) > 0$ bo'lsa, c nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi va $f^{(2k)}(c) < 0$ bo'lganda esa, c nuqta f funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

Isbot. Teylor formulasini qo'llasak, c va x nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki, u uchun

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(2k-2)}(c)}{(2k-2)!}(x-c)^{2k-2} + \frac{f^{(2k-1)}(\xi)}{(2k-1)!}(x-c)^{2k-1} \tag{4.8.7}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi, (4.8.6) shartni e'tiborga olsak, (4.8.7) dan

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(2k-1)}(\xi)}{(2k-1)!}(x-c)^{2k-1}, \quad 0 < \frac{\xi - c}{x - c} < 1, \tag{4.8.8}$$

munosabat kelib chiqadi.

Aniqlik uchun, $2k$ - tartibli hosila $f^{(2k)}(c) > 0$ shartni qanoatlantiradi, deb faraz qilamiz. 4.3.1 - tasdiqqa asosan, bu tengsizlik oldingi $f^{(2k-1)}(x)$ hosilaning c nuqtada o'sishini anglatadi, ya'ni c nuqtadan chapda u c nuqtadagi qiymatidan kichik qiymat qabul qiladi va c nuqtadan o'ngda esa, bu hosila c nuqtadagi qiymatidan katta qiymat qabul qiladi. Teoremaning shartiga ko'ra $f^{(2k-1)}(c) = 0$ va, bundan tashqari, (4.8.8) da ξ nuqta c va x nuqtalar orasida yotadi. Shularni hisobga olsak, quyidagi shartga ega bo'lamiz:

$$x < c \quad \text{da} \quad f^{(2k-1)}(\xi) < 0 \quad \text{bo'ladi va} \quad x > c \quad \text{da} \quad f^{(2k-1)}(\xi) > 0 \quad \text{bo'ladi.} \tag{4.8.9}$$

Demak, $(x-c)^{2k-1}$ funksiyaning toqligi tufayli,

$$f^{(2k-1)}(\xi)(x-c)^{2k-1} > 0, \quad x \neq c.$$

Shunday ekan, (4.8.8) dan

$$f(x) \ > \ f(c), \quad x \neq c$$

kelib chiqadi.

Ravshanki, bu tengsizlik c nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi ekanini anglatadi.

Teorema $f^{(2k)}(c) < 0$ bo'lgan holda ham xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

Q.E.D.

2. Funksiya grafigining qavariqligi. Biror (a, b) intervalda differensiallanuvchi bo'lgan f funksiyani qaraymiz. Eslatib o'tamizki, (4.8.1) ta'rifga ko'ra, (a, b) intervaldan olingan istalgan c uchun bu funksiya grafigining mos nuqtasini $(c, f(c))$ ko'rinishda yozish mumkin.

Qaralayotgan funksiya differensiallanuvchi bo'lgani uchun, uning grafigi har bir nuqtada urinmaga egadir. Chunonchi, agar c nuqta (a, b) intervalning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, grafikning $(c, f(c))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma quyidagi tenglamaga ega:

$$K(x) \ = \ f(c) + f'(c)(x - c). \tag{4.8.10}$$

Boshqacha aytganda, f funksiya grafigining $(c, f(c))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma (4.8.10) funksiyaning grafigi bilan ustma-ust tushadi.

Agar (a, b) intervalning ixtiyoriy x nuqtasi uchun

$$f(x) \ \leq \ f(c) + f'(c)(x - c), \quad a < x < b, \tag{4.8.11}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya grafigi o'zining $(c, f(c))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan pastda yotadi deyiladi.

Agar (4.8.11) da "$\leq$"belgini "$\geq$"belgiga almashtirsak, biz funksiya grafigi urinmadan tepada yotishining shartini olamiz.

Ta'rif. *Agar biror intervalda differensiallanuvchi funksiyaning grafigi har qanday urinmadan pastda yotsa, bu grafikning* ***qavariqlik yo'nalishi yuqoriga qaragan*** *deb ataladi.*

Shunga o'xshash, agar funksiya grafigi har qanday urinmadan yuqorida yotsa, bu grafikning *qavariqlik yo'nalishi pastga qaragan* deyiladi.

Qavariqlik yonalishi ikkinchi tartibli hosila ishorasi yordamida aniqlanishi mumkin.

4.8.4 - teorema. *Berilgan f funksiya (a, b) intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin. U holda,*

1) agar $f''(x) \geq 0$ bo'lsa, f funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi pastga qaragan bo'ladi;

2) agar $f''(x) \leq 0$ bo'lsa, f funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi yuqoriga qaragan bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, c nuqta (a, b) intervalning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Teylor formulasiga ko'ra,

$$f(x) \ = \ f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2. \qquad (4.8.12)$$

Agar ikkinchi tartibli hosila manfiy bo'lmasa, (4.8.12) dan

$$f(x) \ \geq \ f(c) + f'(c)(x-c)$$

tengsizlikni olamiz.

Bu tengsizlik f funksiya grafigi urinmadan yuqorida yotishini anglatadi. Demak, uning qavariqlik yo'nalishi pastga qaragan ekan.

Agarda $f'' \leq 0$ bo'lsa, isbot xuddi yuqoridagidek bo'ladi.

Q.E.D.

3. Bukilish nuqtalari. Funksiya grafigining qavariqligi funksiya aniqlanish sohasining turli intervallarida turli yonalishlarga ega bo'lishi mumkin. Berilgan funksiyaning grafigini chizishda qavariqlik yo'nalishlari o'zgaradigan nuqtalar muhim ahamiyatga egadirlar.

Ta'rif. *Agar shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, ikki $(c-\delta,\ c)$ va $(c,\ c+\delta)$ intervallardan birida f funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi pastga va boshqasida yuqoriga qaragan bo'lsa, grafikning $(c, f(c))$ nuqtasi **bukilish nuqta** deb ataladi.*

4.8.5 - teorema (bukilish nuqta uchun zaruriylik sharti). *Berilgan f funksiya c nuqtaning biror atrofida ikki marta differensiallanuvchi bo'lib, ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosila c nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar $(c, f(c))$ nuqta bukilish nuqtasi bo'lsa, $f''(c) = 0$ bo'ladi.*

Isbot. Teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz. Avval $f''(c) > 0$ bo'lsin deylik. Shartga ko'ra ikkinchi hosila c nuqtada uzluksiz. Shuning uchun, 3.5.1 - tasdiqqa asosan, c nuqtaning biror δ-atrofida u ishorasini saqlaydi:

$$f''(x) \ > \ 0, \quad c-\delta < x < c+\delta. \qquad (4.8.13)$$

Shunday ekan, 4.8.4 - teoremadan f funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi c nuqtadan chapda ham, o'ngda ham pastga qaraganligi kelib chiqadi. Bu esa $(c, f(c))$ ning bukilish nuqtaligiga ziddir.

Shunga o'xshash, $f''(c) < 0$ tengsizlikdan f funksiya grafigi qavariqlik yo'nalishining c nuqtadan o'ngda ham va chapda ham yuqoriga qaraganligi kelib chiqadi. Bu ham $(c, f(c))$ ning bukilish nuqtaligiga ziddir.

Shunday qilib, $f''(c) = 0$ ekan.

Q.E.D.

4.8.5 - teorema bukilish nuqta uchun zaruriy shartni beradi. Lekin bu shart yetarli sharti bo'la olmaydi. Misol sifatida $f(x) = x^4$ funksiyani olish mukin. Bu funksiya uchun $f''(x) = 12\ x^2 \geq 0$. Demak, $f''(0) = 0$, lekin funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi pastga qaragan.

4.8.6 - teorema (bukilish nuqta uchun birinchi yetarli sharti). *Berilgan f funksiya c nuqtaning biror atrofida ikki marta differensiallanuvchi bo'lib, $f''(c) = 0$ bo'lsin. Agar ikkinchi tartibli hosila c nuqtadan chapda va o'ngda turli ishoralarga ega bo'lsa, $(c, f(c))$ nuqta f funksiya grafigining bukilish nuqtasi bo'ladi.*

Isbot bevosita 4.8.4 - teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, bu teoremaga ko'ra, f funksiya grafigining qavariqligi c nuqtaning chap va o'ng tomonlarida turli yo'nalishlarga ega. Shuning uchun, $(c, f(c))$ - bukilish nuqtadir.

Q.E.D.

Eslatma. Ravshanki, 4.8.6 - teoremada ikkinchi tartibli hosilani c nuqtaning o'zida mavjudligini talab qilish shart bo'lmasdan, bu hosilaning c nuqtadan chap va o'ng tomonda turgan nuqtalarda mavjud bo'lib, o'sha c nuqtadan chap va o'ngda turli ishoralarga ega bo'lishini talab qilish yetarlidir.

4.8.3 - misol. Quyidagi

$$f(x) \; = \; x\sqrt{|x|}$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya butun sonlar o'qida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi

$$f'(x) \; = \; \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$$

ga teng.

Ravshanki, f funksiya $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda ikkinchi tartibli hosilaga ega. Bu hosila nol nuqtadan tashqarida

$$f''(x) \; = \; \frac{3}{4}\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{|x|}}$$

ga teng.

Ikkinchi tartibli hosila $x = 0$ nuqtadan chapda va o'ngda har xil ishoralarga ega bo'lgani uchun, funksiya grafigining qavariqligi chap va o'ngda turli yo'nalishlarga ega va shuning uchun, $(0, 0)$ nuqta bukilish nuqtadir.

Navbatdagi yetarlilik shartini tekshirish oson bo'lsada, lekin u o'rganilayotgan funksiyaga ko'proq shart qo'yadi. Chunonchi, bu shartda funksiya uchinchi tartibli hosilasining bukilishlikka tekshirilayotgan nuqtada mavjudligi talab qilinadi.

4.8.7 - teorema (bukilish nuqta uchun ikkinchi yetarli sharti). *Berilgan f funksiya c nuqtaning biror atrofida ikki marta differensiallanuvchi bo'lib, $f''(c) = 0$ bo'lsin. Agar c nuqtada uchinchi tartibli hosila mavjud bo'lib, $f^{(3)}(c) \neq 0$ bo'lsa, f funksiya grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega bo'ladi.*

Isbot. Aniqlik uchun $f^{(3)}(c) > 0$ deylik. U holda, 4.3.1 - tasdiqqa ko'ra, ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosila c nuqtada o'sadi, va $f''(c) = 0$ bo'lgani uchun, ikkinchi tartibli hosila c nuqtadan chapda manfiy va undan o'ngda musbat bo'ladi. Shuning uchun, 4.8.6 - teoremaga asosan, f funksiya grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega.

Q.E.D.

Agar $f'''(c) = 0$ bo'lsa, 4.8.7 - teorema f funksiya grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega bo'lishi haqida hech qanday ma'lumot bera olmaydi. Bu holda biror ijobiy natija olish uchun funksiyaning yuqoriroq tartibli hosilalarini tekshirish lozim.

4.8.8 - teorema. *Faraz qilaylik, $k \in \boldsymbol{N}$ uchun f funksiya c nuqtaning biror atrofida $2k$ -tartibli hosilaga ega bo'lib, c nuqtaning o'zida esa $2k+1$ -tartibli hosilaga ega bo'lsin.*

Bundan tashqari

$$f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(2k)}(c) = 0 \tag{4.8.14}$$

shart bajarilsin.

Agar $f^{(2k+1)}(c) \neq 0$ bo'lsa, $(c, f(c))$ nuqta f funksiya gtafigining bukilish nuqtasi bo'ladi.

Isbot. Ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ uchun Teylor formulasidan foydalanamiz. Bu formulaga asosan, c va x nuqtalar orasida shunday ξ topiladiki, u uchun

$$f''(x) = f''(c) + f^{(3)}(c)(x-c) + \frac{f^{(4)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(5)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-3)!}(x-c)^{2k-3} + \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k-2)!}(x-c)^{2k-2} \tag{4.8.15}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar (4.8.14) tengliklarni e'tiborga olsak, (4.8.15) dan

$$f''(x) = \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k-2)!}(x-c)^{2k-2}, \quad 0 < \frac{\xi - c}{x - c} < 1, \tag{4.8.16}$$

munosabatni olamiz.

Aniqlik uchun $2k+1$ - tartibli hosila c nuqtada musbat bo'lsin, deb faraz qilamiz, ya'ni $f^{(2k+1)}(c) > 0$ bo'lsin. Natijada, 4.3.1 - tasdiqqa asosan, oldingi $f^{(2k)}(x)$ hosilaning c nuqtada o'sishi kelib chiqadi. Boshqacha aytganda, bu hosila c nuqtadan chapda bu nuqtadagi qiymatdan kichik va undan o'ngda esa, bu qiymatdan katta qiymat qabul qiladi. Bundan, $f^{(2k)}(c) = 0$ bo'lgani va ξ nuqta c va x nuqtalar orasida yotgani uchun,

$$x < c \quad \text{da} \quad f^{(2k)}(\xi) < 0 \quad \text{bo'ladi va} \quad x > c \quad \text{da} \quad f^{(2k)}(\xi) > 0 \quad \text{bo'ladi} \tag{4.8.17}$$

degan shartning bajarilishi ma'lum bo'ladi.

Demak, $(x-c)^{(2k-2)}$ funksiya juft bo'lgani uchun,

$$f^{(2k)}(\xi)(x-c)^{2k-2} \tag{4.8.18}$$

ifoda c nuqtaning chap va o'ng tomonlarida turli ishoralarga ega. Shunday ekan, (4.8.16) tenglikdan ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosila ham xuddi shunday xossaga ega ekani kelib chiqadi. U holda, 4.8.6 - teoremaga ko'ra, f funksiya grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega.

$f^{(2k+1)}(c) < 0$ bo'lganda ham isbot xuddi shu yo'l bilan amalga oshiriladi.

Q.E.D.

4. Funksiya grafigining asimptotalari. Funksiya grafigini o'rganilayotganda ko'pincha yaxshi ma'lum bo'lgan shunday «etalon» funksiya topishga harakat qilinadiki, uning grafigi qaralayotgan funksiya grafigiga iloji boricha yaqin bo'lsin. Ko'p hollarda ana shunday etalon funksiya sifatida

$$y = kx + b \tag{4.8.19}$$

ko'rinishga ega bo'lgan chiziqli funksiya olinadi.

Ta'rif. *Agar f funksiya*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \tag{4.8.20}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) \ = \ 0 \tag{4.8.21}$$

bo'lsa, (4.8.19) tenglik bilan aniqlangan funksiya f funksiyaning $x \to +\infty$ dagi ***asimptotasi*** *deb ataladi.*

Masalan,

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x + 1}$$

funksiya grafigi

$$y = 2x + 1$$

asimptotaga ega, chunki

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{4}{x + 1}.$$

Funksiyaning $x \to -\infty$ dagi asimptotasi ham xuddi yuqoridagidek aniqlanadi.

4.8.9 - teorema. *Berilgan f funksiya grafigi $x \to +\infty$ da (4.8.19) asimptotaga ega bo'lishi uchun quyidagi ikki*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ = \ k \tag{4.8.22}$$

va

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] \ = \ b \tag{4.8.23}$$

limitlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1) Faraz qilaylik, (4.8.20) va (4.8.21) shartlar bajarilsin. (4.8.20) tenglikni

$$\frac{f(x)}{x} \;=\; k \;+\; \frac{b}{x} \;+\; \frac{\alpha(x)}{x} \tag{4.8.24}$$

kabi yozib olamiz. Agar (4.8.21) ni e'tiborga olsak, (4.8.24) tenglikdan (4.8.22) kelib chiqadi va (4.8.20) tenglikdan esa, (4.8.23) ni olamiz.

2) Endi (4.8.22) va (4.8.23) limitlar mavjud bo'lsin, deb faraz qilamiz. Limitga o'tish amali chiziqli bo'lgani uchun, (4.8.23) tenglikni

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx - b] \;=\; 0$$

deb yozib olishimiz mumkin.

Ravshanki, bundan (4.8.21) asimptotik tenglikka ega bo'lamiz.

Q.E.D.

Ta'rif. *Agar quyidagi ikki*

$$\lim_{x\to+a} f(x) \quad \text{yoki} \quad \lim_{x\to-a} f(x)$$

bir tomonlama limitlardan kamida bittasi $+\infty$ *yoki* $-\infty$ *ga teng bo'lsa,* f *funksiya grafigi* $x = a$ *vertikal asimptotaga ega deyiladi.*

5. Funksiya grafigini xomaki chizish. Bu bandda, yuqoridagi natijalarga asoslanib, funksiya grafigini o'rganish va qurishning asosiy bosqichlarini keltiramiz.

4.8.4 - misol. Funksiya grafigini yasang:

$$f(x) \;=\; (2x+3)e^{2/x}. \tag{4.8.25}$$

1. Avvalo shuni qayd etamizki, (4.8.25) tenglik bilan f funksiya $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda aniqlangan. Shuning uchun, biz f funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi sifatida

$$D(f) \;=\; (-\infty,\; 0) \cup (0,\; +\infty) \tag{4.8.26}$$

to'plamni olishimiz mumkin.

2. Ravshanki, o'rganilayotgan funksiya nolga faqat $x_0 = -3/2$ nuqtada aylanadi. Bundan tashqari, funksiya $(-\infty,\; -\dfrac{3}{2})$ yarim to'g'ri chiziqda manfiy va $(-\dfrac{3}{2},\; 0)$ hamda $(0,\; +\infty)$ intervallarda musbat qiymatlarni qabul qiladi.

0 nuqtada chap limit nolga teng:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) \;=\; 0, \tag{4.8.27}$$

bu nuqtada o'ng limit esa, $+\infty$ ga teng:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) \;=\; +\infty. \tag{4.8.28}$$

3. Berilgan (4.8.25) funksiya hosilasi

$$f'(x) = \frac{2}{x^2}(x^2 - 2x - 3)e^{2/x} = \frac{2}{x^2}(x+1)(x-3)e^{2/x} \tag{4.8.29}$$

ga teng.

Bevosita bu tenglikdan statsionar nuqtalar $x_1 = -1$ va $x_2 = 3$ ekani kelib chiqadi. $x_1 = -1$ nuqtadan chapda va $x_2 = 3$ nuqtadan o'ngda hosila musbat bo'lib, boshqa barcha nuqtalarda u manfiy bo'ladi. Demak, $x_1 = -1$ nuqta funksiyaning lokal maksimum va $x_2 = 3$ nuqta esa, uning lokal minimum nuqtalari ekan. Bundan tashqari,

$$f(-1) = e^{-2} = 0,135..., \quad f(3) = 9e^{2/3} = 17,529...$$

Funksiya $(-\infty,\; -1)$ yarim to'g'ri chiziqda o'sadi, $(-1,\; 0)$ va $(0,\; 3)$ intervallarda esa u kamayib, $(3,\; +\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda funksiya yana o'sadi.

4. Ikkinchi tartibli hosila

$$f''(x) = \frac{20}{x^4}\left(x + \frac{3}{5}\right)e^{2/x} \tag{4.8.30}$$

ga teng.

Bu tenglikdan ikkinchi tartibli hosila $x_3 = -\dfrac{3}{5}$ nuqtada nolga aylanishi kelib chiqadi. Bundan tashqari,

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{5}\, e^{-10/3} = 0,064...$$

ekanini ko'rish oson.

Ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan chapda manfiy va o'ngda musbat. Shuning uchun, $(x_3,\ f(x_3))$ nuqta (4.8.25) funksiya grafigining bukilish nuqtasidir. Bu nuqtadan chapda funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi tepaga qaragan, o'ngda esa bu yo'nalish pastga qaragan.

5. Teylor formulasidan $x \to \pm\infty$ da

$$e^{2/x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{O(1)}{x^2}, \quad x \to \pm\infty,$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shuning uchun,

$$f(x) = (2x+3)\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{O(1)}{x^2}\right) = 2x + 7 + \frac{O(1)}{x}. \tag{4.8.31}$$

Bu tenglik funksiya grafigi

$$y = 2x + 7 \tag{4.8.32}$$

og'ma asimptotaga ega ekanligini anglatadi.

Bundan tashqari, (4.8.28) tenglikka ko'ra, ordinatalar o'qi grafikning vertikal asimptotasi bo'ladi.

1-5 bandlarda o'rnatilgan xossalarga asosan funksiya grafigining xomaki chizmasini qurishimiz mumkin (X rasmga qarang).

§ 4.9. Misollar

1 - misol. Agar $f(x) = a^x$ bo'lsa, hosila ta'rifidan foydalanib $f'(2)$ ni hisoblang.

Ko'rsatma. (3.10.2) tenglikdan foydalaning.

2 - misol. Quyidagi

$$y = \ln x$$

funksiya Ox o'qini qanday burchak ostida kesadi?

Ko'rsatma. Hosilaning geometrik ma'nosidan foydalaning.

3 - misol. Agar $f(x)$ differensiallanuvchi va n natural son bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x) \tag{4.9.1}$$

tenglikni isbotlang. Aksincha, agar (4.9.1) tenglik o'rinli bo'lsa, f funksiya hosilaga ega, deyish mumkinmi?

Ko'rsatma. (4.9.1) tenglikni isbotlash uchun hosila ta'rifidan foydalaning. Teskari tasdiqni tekshirish uchun $D(x)$ Dirixle funksiyasini tekshiring.

4 - misol. Agar

a) $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, $g(x)$ funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo'lmasa, yoki

b) har ikkala $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmasa,

$$F(x) = f(x)g(x)$$

funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega emas deyish mumkinmi?

Ko'rsatma. a) $f(x) = x - x_0$ va $g(x) = |x - x_0|$ funksiyalarni $x = x_0$ nuqtada tekshiring.

b) $f(x) = D(x)$ va $g(x) = 1 - D(x)$ funksiyalarni istalgan x_0 nuqtada tekshiring.

5 - misol. Agar $f(x)$ funksiya chekli (a, b) intervalda differensiallanuvchi bo'lib,

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \infty$$

bo'lsa, albatta

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

bo'ladi, deyish mumkinmi?

Ko'rsatma. $f(x) = \sqrt{x - a}$ funksiyani tekshiring.

6 - misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}.$$

Ko'rsatma. Avval $\ln \sqrt[x]{x} = \frac{\ln x}{x}$ deb, so'ngra Lopital qoidasidan foydalaning.

7 - misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x \to +0} x^x.$$

Ko'rsatma. Almashtirish bajarib, avvalgi misolga keltiring.

8 - misol. Quyidagi egri chiziq asimptotasini toping:

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \quad (x > 0).$$

Ko'rsatma. 4.8.9 - teoremani qo'llang. Limitlarni hisoblashda ikkinchi ajoyib limit va Lopital qoidasidan foydalaning.

9 - misol. Agar $y = x^3 e^{2x}$ bo'lsa, $y^{(20)}$ ni toping.

Ko'rsatma. Leybnits formulasidan foydalaning.

10 - misol. Agar $f(x)$ funksiya cheksiz $(x_0, +\infty)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lib,

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

bo'lsa,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. (4.4.3) Koshi formulasidan foydalaning.

11 - misol. Teylor formulasidan foydalanib, limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\operatorname{tg} x}}{x\sin^2 x}$$

Ko'rsatma. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln(\cos x)}$ funksiyaga $O(x^4)$ qoldiq hadli va $g(x) = \sin^2 x$ funksiyaga $O(x^3)$ qoldiq hadli Teylor formulasini qo'llang.

12 - misol. Aniqmaslikni oching:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

Ko'rsatma. $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x)}$ deb, darajadagi funksiya limitini hisoblash uchun Lopital qoidasini qo'llang.

V Bob. Aniqmas integral

§ 5.1. Boshlang'ich funksiya

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Biror intervalda ikki f va F funksiyalar berilgan bo'lib, ular

$$F'(x) \;=\; f(x) \tag{5.1.1}$$

munosabat bilan bog'langan bo'lsin.

Yuqorida bayon qilinganidek, bunda f funksiya F funksiyaning hosilasi deyiladi. IV bobda F funksiyani bilgan holda f funksiyani topish usullarini ko'rib chiqdik.

Ushbu bobda esa biz teskari masalani o'rganamiz, ya'ni agar f funksiya ma'lum bo'lsa, hosilasi f ga teng bo'lgan F funksiyani topish usullari bilan tanishamiz.

Ta'rif. *Agar F funksiya biror intervalda differensiallanuvchi bo'lib, (5.1.1) tenglik bajarilsa, F funksiya shu intervalda f funksiya uchun **boshlang'ich funksiya** deyiladi.*

5.1.1 - misol. Ma'lumki, $(\sin x)' = \cos x$. Demak,

$$f(x) \;=\; \cos x$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$F(x) \;=\; \sin x$$

bo'ladi.

Matematikada ko'p hollarda berilgan operatsiyaga teskari operatsiya yagona ravishda aniqlanmaydi. Masalan, kvadratga oshirish operatsiyasiga teskari operatsiya kvadrat ildiz chiqarish operatsiyasidir. Bunda har bir haqiqiy x soni uchun $a = x^2$ son yagona ravishda aniqlansada, ammo istalgan musbat a soni uchun shunday ikki turli x_1 va x_2 sonlar topiladiki, ularning har birining kvadrati a ga teng bo'ladi.

Shunga o'xshash hol berilgan funksiyaga boshlang'ich funksiyani topishda ham sodir bo'ladi. Chunonchi, agar $F(x)$ funksiya f uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan C o'zgarmasni olsak, $F(x) + C$ funksiya ham, albatta, yana boshlang'ich funksiya bo'ladi. Shu o'rinda f funksiyaning bundan boshqa boshlang'ich funksiyaga ega emasligini qayd etish lozim.

5.1.1 - teorema. *Agar ikki F_1 va F_2 funksiyalar biror intervalda f funksiya uchun boshlang'ich funksiyalar bo'lsa, u holda shunday C o'zgarmas son topiladiki, qayd etilgan intervalda*

$$F_1(x) \;-\; F_2(x) \;=\; C \tag{5.1.2}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar

$$g(x) \;=\; F_1(x) \;-\; F_2(x)$$

deb belgilasak, ravshanki,

$$g'(x) \;=\; F_1'(x) \;-\; F_2'(x) \;=\; f(x) \;-\; f(x) \;=\; 0$$

bo'ladi. Demak, Lagranj formulasining natijasiga ko'ra, $g(x) = const$ ekan.

Q.E.D.

Berilgan f funksiya uchun boshlang'ich funksiya topish jarayoni f funksiyani *integrallash* deyiladi. Masalan, $\cos x$ funksiyaning integrallash natijasi $\sin x$ funksiyasidir.

Agar F funksiya f uchun biror boshlang'ich funksiya bo'lsa, 5.1.1 - teoremadan istalgan boshqa boshlang'ich funksiyaning $F(x)+C$ ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi, bunda C ixtiyoriy o'zgarmas sondir. Bu $F(x)+C$ funksiya f uchun boshlang'ich bo'lgan funksiyalarning eng umumiy ko'rinishi bo'lib, uning muhimligi tufayli, u aniqmas integral degan maxsus nomga ega. Aniqmas integral quyidagicha belgilanadi:

$$\int f(x)dx. \tag{5.1.3}$$

Shunday qilib, f funksiyadan olingan *aniqmas integral* quyidagi

$$\int f(x)dx \;=\; F(x) \;+\; C \tag{5.1.4}$$

ifodaga teng deb hisoblanadi, bunda F funksiya f funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lib, C esa ixtiyoriy o'zgarmas sondir.

Masalan,

$$\int \cos x dx \;=\; \sin x \;+\; C.$$

Shuni aytish kerakki, hozirgi kunda matematik ilmiy adabiyotlarda bu belgilash sekin- asta yo'qola boshlab, uning o'rniga «aniqmas intervalda» olingan aniq integral tushunchasi ko'proq ishlatilayapri. Lekin darsliklarda bu belgilashdan xuddi avvalgidek keng foydalanilib kelinayapti.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $dF(x) = f(x)dx$ bo'ladi. Shuning uchun, (5.1.4) tenglikni

$$\int dF(x) \;=\; F(x) \;+\; C \tag{5.1.5}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Masalan,

$$d(\operatorname{arctg} x) \;=\; \frac{dx}{1+x^2}$$

bo'lgani uchun

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \int d(\operatorname{arctg} x) \;=\; \operatorname{arctg} x \;+\; C.$$

2. Aniqmas integrallar jadvali. Eng sodda elementar funksiyalar hosilalarining jadvalidan bevosita unga mos aniqmas integrallarning jadvali kelib chiqadi. Bu jadval odatda quyidagi ko'rinishda keltiriladi:

1^0. $\int x^\alpha dx \;=\; \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \;+\; C, \quad \alpha \neq -1.$

2^0. $\int \dfrac{dx}{x} \;=\; \ln|x| \;+\; C \quad (x \neq 0).$

3^0. $\int a^x dx \;=\; \dfrac{a^x}{\ln a} \;+\; C \quad (0 < a \neq 1,\ -\infty < x < \infty).$

4^0. $\int \cos x dx \;=\; \sin x \;+\; C \quad (-\infty < x < \infty).$

5^0. $\int \sin x \;=\; -\cos x \;+\; C \quad (-\infty < x < \infty)$.

6^0. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} \;=\; \operatorname{tg} x \;+\; C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\; k \in \mathbf{Z})$.

7^0. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} \;=\; -\operatorname{ctg} x \;+\; C \quad (x \neq k\pi,\; k \in \mathbf{Z})$.

8^0. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x \;+\; C \quad (-1 < x < 1)$.

9^0. $\int \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \operatorname{arctg} x \;+\; C \quad (-\infty < x < \infty)$.

10^0. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \;=\; \ln|x + \sqrt{x^2+1}| \;+\; C \quad (-\infty < x < \infty)$.

11^0. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \;=\; \ln|x + \sqrt{x^2-1}| \;+\; C \quad (|x| > 1)$.

12^0. $\int \frac{dx}{1-x^2} \;=\; \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \;+ C \quad (|x| \neq 1)$.

Bu jadvaldagi barcha formulalarning (ayniqsa 10^0-12^0 tengliklarning) to'g'riligi o'ng tomonda turgan ifodadan bevosita hosila olish bilan tekshiriladi.

§ 5.2. Integrallashning asosiy usullari

1. Aniqmas integralning chiziqliligi. Aniqmas integralning asosiy xossalaridan biri uning chiziqliligidir.

5.2.1 - tasdiq. *Agar f va g funksiyalar biror intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lib, λ va μ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda $\lambda f + \mu g$ funksiya ham o'sha intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lib,*

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx \;=\; \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx \tag{5.2.1}$$

tenglik bajariladi.

Isbot bevosita 4.1.2 - teoremadan va differensiallash amalining chiziqliligidan kelib chiqadi.

2. O'zgaruvchini almashtirib integrallash. *O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli* quyidagi tasdiqqa asoslanadi.

5.2.2 - tasdiq. *Berilgan $g(t)$ funksiya $G(t)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin, ya'ni*

$$\int g(t)dt \;=\; G(t) + C \tag{5.2.2}$$

bo'lsin.

Bundan tashqari, $\varphi(x)$ - ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya bo'lib, uning qiymatlari to'plami g funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsin. U holda quyidagi

$$\int g[\varphi(x)]\; \varphi'(x)\; dx \;=\; G[\varphi(x)] + C \tag{5.2.3}$$

tenglik bajariladi

Isbot (5.2.3) tenglikning o'ng tomonida turgan funksiyani bevosita differensiallash hamda murakkab funksiya hosilasi haqidagi 4.1.5 - teoremani qo'llash orqali amalga oshiriladi.

O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli quyidagicha qo'llanadi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya topish talab qilinsin. Biz bu funksiyani quyidagi

$$f(x) = g[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \tag{5.2.4}$$

ko'rinishda yozib olishga erishdik deylik. Bunda g va φ lar 5.2.2 - tasdiqning shartlarini qanoatlantiruvchi funksiyalar bo'lsin. U holda biz

$$\int f(x)\ dx \ = \ G[\varphi(x)] + C \tag{5.2.5}$$

deb yozishimiz mumkin.

Agar $t = \varphi(x)$ desak, $dt = \varphi'(x)dx$ bo'ladi va shuning uchun, (5.2.4) tenglikdan

$$f(x)\ dx = g[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\ dx = g(t)\ dt$$

munosabat kelib chiqadi.

Demak, o'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli aniqmas integral ostidagi ifodada x o'zgaruvchi o'rniga $t = \varphi(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan $\varphi^{-1}(t)$ funksiyani qo'yishdan iborat deyish mumkin. Shu sababli, ushbu usul ko'pincha *o'rniga qo'yish usuli* deb ham ataladi.

Bu usulda ko'zda tutilgan natijaga erishish, asosan $\varphi(x)$ funksiyani qanchalik to'g'ri tanlanishiga bog'liq, chunki bu funksiya tanlangandan keyin g funksiya yagona ravishda aniqlanadi. O'zgaruvchini almashtirish uchun universal algoritm yo'q. Shu sababli, o'rniga qo'yish usuli bilan mo'ljallangan amaliy natijaga erishish hisoblovchining mahoratiga bog'liq, ya'ni uning intuitsiyasiga hamda formulalarni tegishli ravishda almashtirish bo'yicha egallagan bilimiga bog'liqdir.

5.2.1 - misol. Quyidagi

$$\int e^{\sin x}\ \cos x\ dx$$

integralni hisoblang.

Agar $t = \sin x$ almashtirish bajarsak, $dt = \cos x\ dx$ bo'ladi va shuning uchun,

$$e^{\sin x}\ \cos x\ dx = e^t\ dt.$$

Demak,

$$\int e^{\sin x}\ \cos x\ dx = \int e^t\ dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

5.2.2 - misol. Quyidagi

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx$$

integralni hisoblang.

Agar $t = \cos x$ almashtirish bajarsak, $dt = -\sin x\ dx$ bo'ladi va shuning uchun,

$$\operatorname{tg} x\ dx = \frac{\sin x\ dx}{\cos x} \ = \frac{-dt}{t}.$$

Demak,

$$\int \operatorname{tg} x \ dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

5.2.3 - misol. Quyidagi

$$\int (2x+5)^{2007} \ dx$$

integralni hisoblang.

Bir qarashda qavsni N'yuton binomi formulasi yordamida ochib, integral ostidagi ifodani 2008 ta haddan iborat yig'indi ko'rinishda yozib olib, so'ngra boshlang'ich funksiyani hisoblash kerakdek ko'rinadi. Ammo, agar quyidagi

$$t = 2x+5, \quad dt = 2dx$$

almashtirishni bajarsak, integral oson hisoblanadi, ya'ni

$$\int (2x+5)^{2007} \ dx = \int t^{2007} \ \frac{1}{2} \ dt = \frac{1}{2} \ \frac{t^{2008}}{2008} + C = \frac{(2x+5)^{2008}}{4016} + C.$$

3. Bo'laklab integrallash.

5.2.3 - tasdiq. *Agar u va v funksiyalar biror intervalda differensiallanuvchi bo'lib, $u'(x)v(x)$ ko'paytma shu intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $u(x)v'(x)$ ko'paytma ham shu intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi va*

$$\int u(x)v'(x) \ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \ dx \tag{5.2.6}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar ko'paytma hosilasi uchun ma'lum bo'lgan

$$(uv)' = u'v + uv'$$

formuladan foydalansak,

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$$

bo'ladi. Bunda, o'ng tomon boshlang'ich funksiyaga ega bo'lgani uchun, chap tomon ham boshlang'ich funksiyaga egadir. Shunday ekan, bu tenglikni integrallab, talab qilingan (5.2.6) formulani olamiz.

Q.E.D.

Eslatma. (5.2.6) tenglikni odatda

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du \tag{5.2.7}$$

ko'rinishda yozishadi.

Albatta, bo'laklab integrallash usuli (5.2.6) tenglikning o'ng tomonidagi integral uning chap tomonidagi integraldan osonroq hisoblangan holdagina foyda beradi.

5.2.4 - misol. Quyidagi

$$\int x \cos x \ dx$$

integralni hisoblang.

Agar $u = x,\ dv = \cos x\ dx$ desak, $du = dx,\ v = \sin x$ bo'ladi va (5.2.7) formula bo'yicha bo'laklab integrallasak,

$$\int x \cos x\ dx = x \sin x - \int \sin x\ dx = x \sin x + \cos x + C$$

tenglikni olamiz.

5.2.5 - misol. Quyidagi

$$\int x^2 \cos x\ dx$$

integralni hisoblang.

Agar $u = x^2,\ dv = \cos x\ dx$ desak, $du = 2xdx,\ v = \sin x$ bo'ladi va bo'laklab integrallasak,

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\ dx$$

tenglikni olamiz.

O'ng tomondagi integralni hisoblash uchun biz bu safar $u = x,\ dv = \sin x dx$ deb, yana bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz. Natijada

$$\int x \sin x\ dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\ dx = -x \cos x + \sin x + C$$

tenglik hosil bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

E'tibor bering, yuqoridagi integralni hisoblashda bo'laklab integrallash formulasidan ikki marta foydalanishga to'g'ri keldi.

5.2.6 - misol. Quyidagi

$$\int x^\alpha \ln x\ dx \quad (\alpha \neq -1)$$

integralni hisoblang.

Agar $u = \ln x,\ dv = x^\alpha\ dx$ desak, $du = \dfrac{dx}{x},\ v = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ bo'ladi va, bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra,

$$\int x^\alpha \ln x\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ \frac{dx}{x} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C.$$

§ 5.3. Kompleks qiymatli funksiyalarni integrallash

Ta'rif. *Kompleks qiymatli x haqiqiy o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyasining* ***boshlang'ich*** *funksiyasi deb*

$$F'(x)\ =\ f(x) \tag{5.3.1}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi kompleks qiymatli $F(x)$ funksiyaga aytiladi.

5.3.1 - tasdiq. *Kompleks qiymatli x haqiqiy o'zgaruvchili $F(x) = U(x) + iV(x)$ funksiya kompleks qiymatli $f(x) = u(x) + iv(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishi uchun $U(x)$ funksiya $u(x)$ ning va $V(x)$ funksiya $v(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot bevosita boshlang'ich funksiya ta'rifidan kelib chiqadi.

Bu holda ham boshlang'ich funksiyaning umumiy ko'rinishi aniqmas integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\int f(x)\, dx \;=\; F(x) \;+\; C, \tag{5.3.2}$$

bu yerda $C = C_1 + iC_2$ - ixtiyoriy kompleks o'zgarmas son. Shunday qilib, f kompleks qiymatli funksiyani integrallash masalasi ikki haqiqiy funksiyani, ya'ni f funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini integrallashga kelar ekan.

Masalan, agar

$$f(x) \;=\; \cos x + i \sin x$$

bo'lsa,

$$\int f(x)\, dx \;=\; \sin x - i\cos x + C$$

bo'ladi.

Kompleks qiymatli funksiya uchun boshlang'ich funksiya topish jarayoni integrallash deyilib, u xuddi haqiqiy funksiyani integrallash amali ega bo'lgan xossalarga egadir.

5.3.1 - misol. Agar a va b haqiqiy sonlar bo'lib, $c = a + ib$ bo'lsa,

$$\Phi(x,c) \;=\; \begin{cases} \ln|x-c| + i\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x-a}{b}, & \text{agar} \quad \mathrm{Im}\, c \neq 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ \ln|x-c|, & \text{agar} \quad \mathrm{Im}\, c = 0 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases} \tag{5.3.3}$$

ko'rinishda aniqlangan funksiya

$$\varphi(x,c) \;=\; \frac{1}{x-c} \tag{5.3.4}$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Haqiqatan, agar (4.7.11) formulada $n = 1$ desak,

$$\Phi'(x,c) \;=\; \frac{1}{x-c}$$

bo'ladi.

Shuning uchun,

$$\int \frac{dx}{x-c} \;=\; \Phi(x,c) + C. \tag{5.3.5}$$

5.3.2 - misol. Faraz qilaylik, a va b haqiqiy sonlar bo'lib, $c = a + ib$ bo'lsin. Agar $\Phi(x,c)$ (5.3.3) tenglik bilan aniqlangan funksiya bo'lsa, istalgan natural n soni uchun

$$\int \frac{dx}{(x-c)^n} \;=\; \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\, \Phi^{(n-1)}(x,c) + C \tag{5.3.6}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot bevosita (4.7.11) tenglikdan kelib chiqadi.

§ 5.4. Ratsional funksiyalarni integrallash

1. Algebraik polinomlarning xossalari. Ushbu bandda *kompleks algebraik polinomlarni*, ya'ni quyidagi ko'rinishdagi

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n \tag{5.4.1}$$

funksiyalarni o'rganamiz, bu yerda a_k - berilgan kompleks sonlar bo'lib, $z = x + iy$ esa kompleks o'zgaruvchidir.

Agar $a_0 \neq 0$ bo'lsa, n natural son polinomning darajasi deyiladi va agar barcha $z \in \mathbf{C}$ larda $P(z) = 0$ bo'lsa, polinom aynan nolga teng deyiladi.

5.4.1 - tasdiq. *Agar polinom aynan nolga teng bo'lsa, uning barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo'ladi.*

Isbot. Quyidagi

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad z \in \mathbf{C},$$

ayniyat bajarilsin deylik.

Agar bu tenglikda $z = 0$ desak, $a_n = 0$ hosil bo'ladi. Shunday ekan, yuqoridagi ayniyatni

$$z[a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + ... + a_{n-1}] = 0, \quad z \in \mathbf{C}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Natijada, $z \neq 0$ uchun

$$a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + ... + a_{n-1} = 0$$

tenglikni olamiz.

Chap tomondagi funksiya uzluksiz bo'lgani sababli, bu tenglik $z = 0$ da ham o'rinli bo'ladi, ya'ni, bundan chiqdi, tenglik barcha $z \in \mathbf{C}$ larda bajariladi. Hosil bo'lgan ayniyatda $z = 0$ desak, $a_{n-1} = 0$ ni olamiz. Bu jarayonni davom ettirsak, P polinomni barcha koeffitsientlarining nolga tengligi kelib chiqadi.

Q.E.D.

5.4.2 - tasdiq. *Agar ikki polinom bir-biriga aynan teng bo'lsa, u holda ular bir xil koeffitsiyentlarga egadir.*

Ushbu tasdiq yuqoridagi 5.4.1 - tasdiqning natijasidir. Haqiqatan, bu polinomlarning ayirmasi aynan nolga teng bo'lib, natijada ayirmaning barcha koeffitsientlari noldan iborat bo'ladi.

Har qanday musbat darajali polinomni darajasi kichikroq bo'lgan ixtiyoriy polinomga bo'lish haqidagi navbatdagi tasdiq algebraik polinomlar nazariyasida muhim ahamiyatga egadir.

5.4.3 - tasdiq. *Agar $P(z)$ darajasi $n \geq 1$ bo'lgan ixtiyoriy polinom bo'lsa, u holda darajasi $m \leq n$ bo'lgan istalgan $H(z)$ polinom uchun darajasi $n - m$ bo'lgan shunday $Q(z)$ va darajasi m dan kichik bo'lgan shunday $R(z)$ polinomlar topiladiki, ular uchun*

$$P(z) = H(z) \cdot Q(z) + R(z) \tag{5.4.2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiqdagi polinomlarni nomlash uchun odatdagi atamalardan foydalaniladi, ya'ni P - bo'linuvchi, H - bo'luvchi, Q - nisbat, R - qoldiq deb ataladi.

5.4.3 - tasdiq «burchak» usuli bilan bo'lish orqali isbotlanadi.

5.4.1 - misol. Agar

$$P(z) = z^5 + 3z^3 + 4z^2 + 5z + 6, \quad H(z) = z^2 + 1$$

polinomlar berilgan bo'lsa,

$$P(z) = (z^2 + 1)(z^3 + 2z + 4) + (3z + 2)$$

deb yozish mumkin, ya'ni (5.4.2) dagi belgilashlarda

$$Q(z) = z^3 + 2z + 4, \quad R(z) = 3z + 2$$

tengliklar bajariladi.

Faraz qilaylik, c ixtiyoriy kompleks son bo'lsin. Agar (5.4.2) tenglikda $H(z)$ polinom sifatida chiziqli ikki had deb ataluvchi birinchi darajali $z - c$ polinomni olsak,

$$P(z) = (z - c) \cdot Q(z) + R$$

tenglikni olamiz, bu yerda R - nolinchi darajali polinom, ya'ni kompleks o'zgarmas. Bu tenglikda $z = c$ desak, $R = P(c)$ tenglik hosil bo'ladi. Shunday qilib, biz *Bezu teoremasi* deb ataluvchi quyidagi tasdiqni isbotladik.

5.4.1 - teorema (E.Bézout). *Agar $P(z)$ darajasi $n \geq 1$ bo'lgan ixtiyoriy polinom bo'lsa, u holda istalgan c kompleks soni uchun darajasi $n - 1$ bo'lgan shunday $Q(z)$ polinom topiladiki, u*

$$P(z) = (z - c) \cdot Q(z) + P(c) \tag{5.4.3}$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Agar (5.4.2) tenglikda qoldiq aynan nol bo'lsa, ya'ni $R(z) \equiv 0$ bo'lsa, $P(z)$ polinom $H(z)$ polinomga bo'linadi deymiz.

Ta'rif. *Agar $P(c) = 0$ bo'lsa, c soni P* ***polinomning ildizi*** *deb ataladi.*

5.4.2 - teorema. *Darajasi $n \geq 1$ bo'lgan $P(z)$ polinom $(z - c)$ ikki hadga bo'linishi uchun c soni P polinomning ildizi bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot bevosita Bezu teoremasidan kelib chiqadi. Haqiqatan, (5.4.3) formulaga ko'ra,

$$P(z) = (z - c) \cdot Q(z) \tag{5.4.4}$$

tenglik faqat va faqat $P(c) = 0$ bo'lganda bajariladi.

Ushbu paragrafda $z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchini qarashimizga asosiy sabab shundaki, faqat shu holdagina har qanday polinom ildizga ega bo'ladi deb aytish mumkin. Bu haqidagi tasdiq algebraning asosiy teoremasi deyilib, uning isbotini buyuk nemis matematigi Gaus nomi bilan bog'lashadi.

Algebraning asosiy teoremasi. *Musbat darajali har qanday algebraik polinom ildizga ega.*

Algebraning asosiy teoremasining isboti odatda kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi kursida keltiriladi.

E'tibor bering, agar biz algebraik polinomlarning faqat haqiqiy ildizlari bilan cheklanganimizda, teorema o'rinli bo'lmas edi. Masalan, $P(x) = x^2 + 1$ ko'phad haqiqiy ildizga ega emas.

Shuni qayd etib o'tamizki, polinom koeffitsiyentlarini ozgina o'zgartirish natijasida haqiqiy ildizlarning soni o'zgarishi mumkin. Masalan, ikkinchi darajali

$$P(x, a) = x^2 - a$$

polinom $a = 0$ da yagona haqiqiy ildizga ega: $x_0 = 0$. Agarda a koeffitsiyent noldan farqli bo'lsa, u nolga qanchalik yaqin bo'lmasin, natija o'zgaradi. Chunonchi, agar $a > 0$ bo'lsa, $P(x, a)$ polinom ikki haqiqiy ildizga ega: $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$, lekin $a < 0$ bo'lganda esa, bu polinom umuman haqiqiy ildizga ega emas.

Algebraning asosiy teoremasiga asoslanib, n - darajali istalgan polinom n ta (kompleks) ildizga ega ekanini ko'rsatamiz.

5.4.3 - teorema. *Agar $P(z)$ - (5.4.1) ko'rinishga ega bo'lgan $n \geq 1$ darajali polinom bo'lsa, shunday n ta $c_1, c_2, ..., c_n$ kompleks sonlar topiladiki, ular uchun*

$$P(z) = a_0(z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdots (z - c_{n-1}) \cdot (z - c_n) \tag{5.4.5}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, P polinom biror kompleks c_1 soniga teng bo'lgan ildizga ega. Demak, (5.4.4) tenglikka ko'ra, darajasi $n - 1$ ga teng bo'lgan shunday $Q_1(z)$ polinom topiladiki, u uchun

$$P(z) = (z - c_1) \cdot Q_1(z) \tag{5.4.6}$$

tenglik bajariladi.

Agar $n > 1$ bo'lsa, yana algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, $Q_1(z)$ polinom ham biror c_2 ga teng bo'lgan ildizga ega bo'ladi. Demak, (5.4.4) ga ko'ra, endi darajasi $n-2$ ga teng bo'lgan shunday $Q_2(z)$ polinom topiladiki, u uchun

$$Q_1(z) = (z - c_2) \cdot Q_2(z)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bundan, (5.4.6) ga asosan,

$$P(z) = (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot Q_2(z)$$

ni olamiz.

Bu mulohazalarni davom ettirib, biz quyidagi

$$P(z) = (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdots (z - c_{n-1}) \cdot (z - c_n) \cdot Q_n \tag{5.4.7}$$

tenglikka kelamiz, bu yerda Q_n - nolinchi darajali polinom, ya'ni kompleks o'zgarmas sondir.

Nihoyat, agar (5.4.7) tenglikning o'ng tomonidagi qavslarni ochib, hosil bo'lgan polinomdagi z^k lar oldidagi koeffitsiyentlarni (5.4.1) polinomdagi mos koeffitsiyentlar bilan solishtirsak, $Q_n = a_0$ tenglikni olamiz.

Q.E.D.

Eslatma. (5.4.5) tenglikda ba'zi c_k ildizlar o'zaro ustma-ust tushishi mumkin. Shuni hisobga olgan holda, polinomni ikki hadlar ko'paytmasi sifatida quyidagicha yozib olsak bo'ladi:

$$P(z) = a_0(z - c_1)^{m_1} \cdot (z - c_2)^{m_2} \cdots (z - c_l)^{m_l}, \tag{5.4.8}$$

endi bu yerda barcha c_k sonlar har xildir. Har bir m_k ko'rsatkich natural bo'lib, u c_k ildizning *karrasi* deyiladi. Ravshanki,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n. \tag{5.4.9}$$

Agar karra $m_k = 1$ bo'lsa, c_k ildiz *oddiy*, aks holda esa u *karrali* ildiz deyiladi.

Ravshanki, c soni P ko'phadning m - karrali ildizi bo'lishi uchun, $Q(c) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi biror ko'phad topilib,

$$P(z) = (z - c)^m Q(z)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

2. Ratsional funksiyalar xossalari. Aytaylik, P va Q - kompleks koeffitsiyentli algebraik polinomlar bo'lib, $Q(z) \not\equiv 0$ bo'lsin, ya'ni Q nolga teng nolinchi darajali polinom bo'lmasin. Ushbu bandda biz quyidagi

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{5.4.10}$$

ko'rinishga ega bo'lgan *ratsional funksiyalarni* o'rganamiz. Ravshanki, berilgan $f = \dfrac{P}{Q}$ ratsional funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathbf{C}$ kompleks tekislikdan maxrajning nollari olib tashlangan to'plamga teng:

$$D(f) = \mathbf{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}. \tag{5.4.11}$$

Xususan, har qanday polinom ham, $Q(z) \equiv 1$ deb qarasak, ratsional funksiya bo'ladi. Agar f va g funksiyalar ratsional bo'lsa, bevosita tekshirish orqali $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ va $\dfrac{f}{g}$ ($g(z) \not\equiv 0$ bo'lganda) funksiyalar ham ratsional ekanini ko'rish mumkin.

Agar $P(z)$ polinomning darajasi $Q(z)$ polinomning darajasidan kichik bo'lsa, $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ratsional funksiya *to'g'ri kasr* deyiladi.

5.4.4 - tasdiq. *Berilgan* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *ratsional funksiya to'g'ri kasr bo'lib,* c *kompleks soni* $Q(z)$ *polinomning* m *- karrali ildizi bo'lsin, ya'ni quyidagi tenglik bajarilsin:*

$$Q(z) = (z - c)^m Q_1(z), \quad \textit{bu yerda} \quad Q_1(c) \neq 0. \tag{5.4.12}$$

U holda

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - c)^m} + \frac{P_1(z)}{(z - c)^{m-1} Q_1(z)} \tag{5.4.13}$$

tenglik bajariladi.

Bu tenglikda $A = \dfrac{P(c)}{Q_1(c)}$ *o'zgarmas son bo'lib,* $P_1(z)$ *esa shunday polinomki,* (5.4.13) *ning o'ng tomonidagi u qatnashgan oxirgi kasr to'g'ri kasrdir.*

Isbot. Quyidagi

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A}{(z - c)^m} = \frac{P(z)}{(z - c)^m Q_1(z)} - \frac{A}{(z - c)^m} = \frac{P(z) - AQ_1(z)}{(z - c)^m Q_1(z)} \tag{5.4.14}$$

ayirmani qaraymiz.

Ravshanki, shartga ko'ra, c soni (5.4.14) ning o'ng tomonidagi oxirgi kasr suratning ildizidir. Haqiqatan,

$$P(c) - AQ_1(c) = P(c) - \frac{P(c)}{Q_1(c)} Q_1(c) = 0.$$

Shunday ekan,

$$P(z) - AQ_1(z) = (z - c)P_1(z).$$

Bu tenglikni (5.4.14) ga qo'ysak, talab qilingan (5.4.13) munosabatni olamiz.
Q.E.D.

1 - eslatma. Biz c kompleks soni qaralayotgan to'g'ri kasrning nafaqat maxrajining ildizi, balki suratining ham ildizi bo'lgan holni inkor qilmaymiz. Bu holda (5.4.13) dagi A o'zgarmas nolga aylanadi.

2 - eslatma. Shuni aytish kerakki, (5.4.13) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi kasr maxraji, darajasi dastlabki kasr maxrajining darajasidan kichik bo'lgan ko'phaddir ((5.4.2) tenglikka qarang).

5.4.4 - teorema. *Berilgan* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *ratsional funksiya to'g'ri kasr bo'lib,* $Q(z)$ *polinom quyidagi*

$$Q(z) = (z-c_1)^{m_1} \cdot (z-c_2)^{m_2} \cdots (z-c_n)^{m_n} \tag{5.4.15}$$

ko'rinishga ega bo'lsin, ya'ni $k = 1, 2, ..., n$ *uchun* c_k *kompleks soni* $Q(z)$ *polinomning* m_k *- karrali ildizi bo'lsin.*

U holda ratsional funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{kj}}{(z-c_k)^j} \;= \\ &= \frac{A_{11}}{(z-c_1)} + \frac{A_{12}}{(z-c_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(z-c_1)^{m_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{(z-c_2)} + \frac{A_{22}}{(z-c_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(z-c_2)^{m_2}} + \cdots + \\ &+ \frac{A_{n1}}{(z-c_n)} + \frac{A_{n2}}{(z-c_n)^2} + \cdots + \frac{A_{nm_n}}{(z-c_n)^{m_n}}. \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Bu tenglikda A_{kj} *lar kompleks o'zgarmaslar bo'lib, ularning bir qismi nolga teng bo'lishi mumkin.*

Isbot ketma - ket 5.4.4 - tasdiqni qo'llashdan iborat. Chunonchi, bu teoremani har bir qo'llash natijasida hosil bo'ladigan to'g'ri kasr maxrajining darajasi kamayib boradi. Bu jarayonni toki o'sha daraja birga teng bo'lguncha davom ettirish yetarlidir.

3. Ratsional funksiyalarning integrallanishi.

5.4.5 - teorema. *Haqiqiy o'zgaruvchili har qanday ratsional funksiya elementar funksiyalarda integrallanadi.*

Isbot bevosita 5.4.4 - teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan, har qanday ratsional funksiyani polinom va to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. O'z navbatida, har qanday to'g'ri kasr esa, 5.4.4 - Teoremaga ko'ra,

$$\varphi_j(z, c) \;=\; \frac{1}{(z-c)^j}. \tag{5.4.17}$$

ko'rinishdagi kasrlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida yoziladi.

Nihoyat, yuqorida ko'rilgan 5.3.2 - misolga asosan, (5.4.17) ko'rinishdagi ifodalarning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiyalardan iboratdir.
Q.E.D.

1 - eslatma. Agar $c = a + ib$ va x haqiqiy o'zgaruvchi desak,

$$\Phi(x, c) \;=\; \begin{cases} \ln|x-c| + i \operatorname{arctg} \dfrac{x-a}{b}, & \text{agar} \quad \operatorname{Im} c \neq 0 \quad \text{bo'lsa}, \\ \ln|x-c|, & \text{agar} \quad \operatorname{Im} c = 0 \quad \text{bo'lsa}, \end{cases} \tag{5.4.18}$$

ko'rinishda berilgan funksiya, (5.3.6) ga asosan,

$$\int \frac{dx}{(x-c)^j} \;=\; \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\,\Phi^{(j-1)}(x,c)+C \tag{5.4.19}$$

tenglikni qanoatlantiradi. Boshqacha aytganda, bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda (5.4.17) uchun boshlang'ich funksiyadir.

Demak, ratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ratsional kasrlar hamda quyidagi ikki :

$$L(x) \;=\; \ln|x-c| \tag{5.4.20}$$

va

$$A(x) \;=\; \operatorname{arctg}\frac{x-a}{b} \tag{5.4.21}$$

funksiyalarning yig'indisidan iborat bo'lar ekan.

2 - eslatma. Agar haqiqiy o'zgaruvchili ratsional funksiyada koeffitsiyentlari ham haqiqiy bo'lsa, u holda, albatta, boshlang'ich funksiya ham haqiqiy qiymatli funksiya bo'ladi. Bunday funksiyalar uchun yuqoridagi teorema kabi tasdiq o'rinlidir:

haqiqiy o'zgaruvchili va haqiqiy koeffitsiyentli har qanday ratsional funksiya elementar funksiyalarda integrallanadi va uning boshlang'ich funksiyasi logarifm, arktangens va ratsional funksiyalar orqali ifodalanadi.

Haqiqatan, agar $f(x)$ haqiqiy koeffitsiyentli ratsional funksiya bo'lsa, u holda 5.4.4. teoremaga ko'ra, bunday funksiya ham (5.4.16) ko'rinishda ifodalanadi, bu yerda c_k sonlar va A_{kj} koeffitsiyentlar, umuman aytganda, kompleks sonlardir. Shunday ekan, f uchun boshlang'ich funksiya ratsional funksiyalar va (5.4.20) hamda (5.4.21) ko'rinishlardagi funksiyalarning kompleks koeffitsiyentlar bilan olingan chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

Ammo f uchun boshlang'ich funksiya haqiqiy funksiya bo'lgani sababli, ravshanki, bu boshlang'ich funksiya yuqoridagi chiziqli kombinatsiyaning haqiqiy qismiga teng bo'ladi. Bu chiziqli kombinatsiyaning mavhum qismi esa o'zgarmasga teng bo'lib, biz bu o'zgarmasni nolga teng deb hisoblashimiz mumkin.

4. Ba'zi trigonometrik integrallarni hisoblash. Ushbu bandda biz ikki o'zgaruvchili ratsional funksiyalarni qaraymiz. Avval ikki o'zgaruvchili ko'phad tushunchasini kiritaylik.

Ta'rif. *Ikki* $\boldsymbol{u}$ *va* $\boldsymbol{v}$ *haqiqiy o'zgaruvchili haqiqiy ko'phad deb quyidagi chekli yig'indiga aytiladi:*

$$P(u,v)=\sum_{k,m} c_{km}u^k v^m, \tag{5.4.22}$$

bu yerda c_{km} *koeffitsiyentlar haqiqiy sonlardir.*

Masalan,

$$P(u,v)=u^4+3u^3v+5uv^2+7v^3+9$$

funksiya ikki o'zgaruvchili ko'phadga misol bo'ladi.

Ta'rif. *Ikki* $\boldsymbol{u}$ *va* $\boldsymbol{v}$ *o'zgaruvchili ratsional funksiya deb* (5.4.22) *ko'rinishdagi ikki ko'phadning nisbatiga aytamiz*:

$$R(u,v) \;=\; \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}.$$

5.4.5 - Tadiq. *Agar* $R(u,v)$ *ikki o'zgaruvchili ratsional funksiya bo'lsa, u holda*

$$f(x) \;=\; R(\sin x,\cos x)$$

ko'rinishdagi funksiya elementar funksiyalarda integrallanadi.

Isbot. O'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanamiz. Buning uchun, universal trigonometrik almashtirish deb ataluvchi, quyidagi

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{5.4.23}$$

almashtirishni bajaramiz.

U holda

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

bo'ladi.

Bundan tashqari,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

va, shunga o'xshash,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Shunday ekan, (5.4.23) almashtirishni bajarsak,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

munosabatni olamiz.

Ravshanki, o'ng tomondagi integral ostida t argumentning ratsional funksiyasi turibdi. Shuning uchun, 5.4.5 - Teoremaga asosan, bu integral $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ o'zgaruvchining elementar funksiyasidir. Demak, bunday boshlang'ich funksiya x o'zgaruvchining ham elementar funksiyasi bo'ladi.

Q.E.D.

5.4.2 - misol. Quyidagi

$$\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x + 3}$$

integralni hisoblang.

(5.4.23) universal trigonometrik almashtirishni qo'llasak,

$$\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2} + 3}\,\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{1-t^2-4t+3+3t^2} = \int \frac{dt}{t^2-2t+2} = \int \frac{dt}{(t-1)^2+1} = \operatorname{arctg}(t-1) + C$$

hosil bo'ladi.

Demak,

$$\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x + 3} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + C.$$

§ 5.5. Misollar

1 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Ko'rsatma. $t = \sqrt{e^x - 1}$ almashtirish bajaring.

2 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int (x \ln x)^3 \, dx.$$

Ko'rsatma. $t = \ln x$ almashtirish bajarib, bo'laklab integrallashni qo'llang.

3 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}.$$

Ko'rsatma. (5.4.23) universal trigonometrik almashtirishni qo'llab, ratsional funksiyani integrallashga keltiring. So'ngra, 5.4.4 - tasdiqdan foydalaning.

4 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{2x+1}{3x-2} \, dx.$$

Ko'rsatma. Ushbu

$$\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{a}{3x-2} + b$$

tenglikdan a va b koeffitsientlarni toping.

5 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a \ < \ x \ < \ b.$$

Ko'rsatma. Quyidagi

$$\frac{x-a}{b-a} = \sin^2 t$$

almashtirishni bajaring.

6 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx.$$

Ko'rsatma. $x = a \ \operatorname{sh} t$ almashtirish bajaring.

7 - misol. Agar $f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyani toping.
Ko'rsatma. $f'(x)$ funksiyani topib, uni integrallang.

8 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} \, dx.$$

Ko'rsatma. Quyidagi

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \sin x + b \cos x)'$$

tenglikdan A va B koeffitsientlarni toping.

9 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ko'rsatma. $1 - x^2 = t^2$ almashtirish bajaring.

10 - misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

Ko'rsatma. $t = \dfrac{x-2}{x+3}$ almashtirish bajaring.

VI Bob. Aniq integral

§ 6.1. Integral - integral yig'indilar limiti sifatida

1. Egri chiziqli trapetsiya yuzasi. Aniq integral tushunchasi biror kesmada berilgan funksiya grafigi va abssissalar o'qi bilan chegaralgan geometrik shakl yuzasini hisoblash masalasi bilan uzviy bog'liqdir.

Biror $[a, b]$ kesmada f funksiya berilgan bo'lib, u manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qilsin. Bu funksiya grafigi, abssissalar o'qi hamda $x = a$ va $x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlarning ikki kesmalari bilan chegaralangan shaklni T deb belgilaylik:

$$T = \{(x, y) \in R^2 \ : \ 0 \leq y \leq f(x), \quad a \leq x \leq b\}. \tag{6.1.1}$$

T shaklni odatda *egri chiziqli trapetsiya* deyishadi. Bu shaklning $S = S(T)$ yuzasini hisoblash maqsadida $[a, b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

nuqtalar yordamida $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ qismiy kesmalarga ajratamiz.

U holda T egri chiziqli trapetsiya quyidagi:

$$T_k = \{(x, y) \in R^2 \ : \ 0 \leq y \leq f(x), \quad x_k \leq x \leq x_{k-1}\}$$

ko'rinishdagi kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yig'indisiga aylanadi.

Agar

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

deb belgilash kiritsak, T_k kichik egri chiziqli trapetsiyaning $S_k = S(T_k)$ yuzasi taqriban

$$S(T_k) \ \simeq \ f(\xi_k) \ \Delta x_k$$

ga teng bo'ladi, bu yerda ξ_k nuqta $[x_{k-1}, \ x_k]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasidir.

Shunday ekan, butun T egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi taqriban

$$S(T) \ \simeq \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \ \Delta x_k \tag{6.1.2}$$

ga teng bo'ladi.

Agar har bir qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ segmentning uzunligini kichiklashtirsak (va natijada, bo'linish nuqtalari soni n ni oshirsak), (6.1.2) yig'indi egri chiziqli trapetsiya yuzasiga yanada yaqinroq bo'lishini kutish tabiiydir.

Shuni qayd etish joizki, biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining aniq ta'rifiga ega emasmiz. Shu sababli, bizning yuqoridagi mulohazalarimiz mana shu yuzani intuitiv tushunishimizga asoslangan edi. Biz boshqa yo'l tutsak ham bo'ladi, chunonchi, qismiy segmentlar uzunligi nolga intilgan vaqtdagi (6.1.2) yig'indining limitini (6.1.1) egri chiziqli trapetsiya yuzasi deb atashimiz mumkin.

2. Integral yig'indilar limiti. Shunday qilib, f funksiya (bu safar manfiy bo'lmasligi shart emas) biror $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Bu kesmaning P bo'linishi deb shunday $P = \{x_k\}_{k=1}^{n}$ nuqtalar to'plamiga aytamizki, ular

$$P \ = \ \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$$

shartni qanoatlantirsin. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy segmentda biror ξ_k nuqtani tanlaymiz:

$$x_{k-1} \ \le \ \xi_k \ \le \ x_k.$$

Ta'rif. *Berilgan f funksiyaning P bo'linish va $\{\xi_j\}$ nuqtalar tanlanishiga mos **integral yig'indisi** deb, ushbu*

$$\sigma_P(f) \ = \ \sigma_P(f, \{\xi_j\}) \ = \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{6.1.3}$$

songa aytiladi, bu yerda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

P bo'linishning *diametri* deb eng katta qismiy segmentning uzunligiga aytamiz:

$$d \ = \ d(P) \ = \ \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k. \tag{6.1.4}$$

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ son topilsaki, $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday P bo'linish uchun ξ_j oraliq nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda*

$$|\ I \ - \ \sigma_P(f, \{\xi_j\})\ | \ < \ \varepsilon \tag{6.1.5}$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda I soniga (6.1.3) **integral yig'indilarning** $d(P) \to 0$ **dagi limiti** deyiladi.*

Bunda quyidagicha yoziladi:

$$I \ = \ \lim_{d(P) \to 0} \sigma_P(f).$$

Ta'rif. *Agar berilgan f funksiya uchun (6.1.3) yig'indilarning $d(P) \to 0$ dagi I limiti mavjud bo'lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ **kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi** deyiladi.*

Ko'rsatilgan I limit f funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan **Riman aniq integrali** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \ = \ I \tag{6.1.6}$$

(«integral a dan be gacha ef iks de iks» deb o'qiladi).

(6.1.6) tenglikda f funksiya integral ostidagi funksiya deb, a soni integralning quyi chegarasi va b soni esa integralning yuqori chegarasi deb ataladi.

Eslatma. Berilgan f funksiyaning $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun istalgan integral yig'indining quyidagi:

$$\sigma_P(f) \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \;+\; \alpha_P(f) \tag{6.1.7}$$

ko'rinishga ega bo'lishi zarur va yetarli, bu yerda $\alpha_P(f)$ bo'linish diametri kichiklashganda istalgancha kichik qilish mumkin bo'lgan kattalikdir.

3. N'yuton-Leybnits formulasi. Ushbu bandda biz differensial hisobni integral hisob bilan bog'lovchi asosiy formulani isbotlaymiz. Tarixan shunday sodir bo'lganki, bu formulaning turli variantlarini har xil vaqtlarda bir-biridan bog'liqsiz ravishda ko'pgina matematiklar isbotlashgan. N'yuton xam bu formula haqida o'z ustozi Barroudan habar topib, undan ko'p foydalangan. Lekin matematik adabiyotlarda ushbu formulani, differensial va integral hisobni shakillanishida eng katta hissa qo'shganligiga hurmat ramzi sifatida, N'yuton va Leybnits nomlari bilan bog'lashadi. Darhaqiqat, fan tarixchilarining mehnati zoyi ketmadi va hozir bu formulani ko'pincha sodda qilib *integral hisobning asosiy formulasi* deb atashadi.

Riman integralining yuqoridagi integral yig'indilar limiti sifatida keltirilgan ta'rifi sal uzunroq va murakkablashgan bo'lib ko'rinishiga qaramasdan, bu ta'rif yordamida integral hisobining asosiy teoremasini eng sodda isbotini berish mumkin.

6.1.1 - Teorema (N'yuton-Leybnits formulasi). *Faraz qilaylik, f funksiya $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, F funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, har bir ichki nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin va*

$$F'(x) \;=\; f(x), \quad a < x < b \tag{6.1.8}$$

tenglik bajarilsin.

U holda quyidagi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) \;-\; F(a) \tag{6.1.9}$$

*formula (**integral hisobining asosiy formulasi**) o'rinli bo'ladi.*

Isbot. Berilgan $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy $P \;=\; \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bo'linishini olamiz. Lagranj formulasiga asosan, har qanday qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada shunday ξ_k nuqta topiladiki, u uchun

$$F(x_k) \;-\; F(x_{k-1}) \;=\; F'(\xi_k)\Delta x_k$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikni, (6.1.8) ga ko'ra,

$$F(x_k) \;-\; F(x_{k-1}) \;=\; f(\xi_k)\Delta x_k \tag{6.1.10}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi (6.1.10) tengliklarni k bo'yicha 1 dan n gacha yig'ib, zaruriy qisqartirishlarni bajarsak,

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{6.1.11}$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikning chap tomoni $[a, b]$ kesmaning bo'linishiga bog'liq emas. Tenglikning o'ng tomoni esa integral yig'indidan iborat bo'lib, uning limiti f funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan integralga teng. Shunday ekan, (6.1.11) tenglikda limitga o'tib, talab qilingan (6.1.9) formulani olamiz.

Q.E.D.

Eslatma. Odatda quyidagi

$$F(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \qquad (6.1.12)$$

belgilashlardan foydalaniladi.

Bunda (6.1.9) integral hisobining asosiy formulasini ko'pincha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (6.1.13)$$

ko'rinishda yozishadi.

4. Integrallanuvchi funksiyalarga misollar.

6.1.1 - misol. O'zgarmas $f(x) = c$ funksiya istalgan $[a, b]$ kesmada integrallanuvchidir. Haqiqatan, istalgan $P = \{x_k\}$ bo'linish va ixtiyoriy $\xi_k \in [x_{k-1},\, x_k]$ uchun $f(\xi_k) = c$ tenglikdan

$$\sigma_P(f, \{\xi_k\}) = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + ... + c\Delta x_n = c(b-a)$$

munosabat kelib chiqadi.

Demak,

$$\lim_{d\to 0} \sigma_P(f, \{\xi_k\}) = c(b-a).$$

Shuning uchun

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a). \qquad (6.1.14)$$

6.1.1 - tasdiq. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u shu kesmada chegaralangan bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, f funksiya $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, I uni integral yig'indilarining limiti bo'lsin. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki, bo'linish diametri $d(P) < \delta$ bo'lgan istalgan (6.1.3) ko'rinishdagi integral yig'indi (6.1.5) shartni qanoatlantiradi. Xususan, $\varepsilon = 1$ desak, $d(P) < \delta(1)$ bo'lganda

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k\right| \le |I| + 1 \qquad (6.1.15)$$

tengsizlikni olamiz.

Albatta, f funksiyaning har bir qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada chegaralangan ekanini ko'rsatish yetarli. Isbotni teskarisini faraz qilish yoli bilan olib boramiz. Demak, faraz qilaylik, berilgan funksiya biror qismiy kesmada chegaralanmagan bo'lsin, masalan, $[x_0, x_1]$ da. Quyidagi

$$f(\xi_1)\Delta x_1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\;\Delta x_k \;-\; \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\;\Delta x_k$$

tenglikka ko'ra, (6.1.15) dan

$$|f(\xi_1)|\,\Delta x_1 \;\leq\; |I| \;+\; 1 \;+\; \left|\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\;\Delta x_k\right| \tag{6.1.16}$$

kelib chiqadi.

Biroq bu tengsizlik f funksiyaning $[x_0, x_1]$ qismiy kesmada chegaralanmagan degan farazimizga ziddir. Haqiqatan, $k \geq 2$ bo'lsa, har qanday tayinlangan oraliq nuqtalar $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ uchun shunday $\xi_1 \in [x_0, x_1]$ nuqtani ko'rsatish mumkinki, funksiyaning chegaralanmaganligiga ko'ra, (6.1.16) ning chap tomoni uning o'ng tomonidan katta bo'ladi.

O'rnatilgan qarama-qarshilik 6.1.1 - tasdiq o'rinli ekanini ko'rsatadi.

Q.E.D.

Shunday qilib, Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya chegaralangan ekan. Ammo bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas. Haqiqatan, navbatdagi misolda chegaralangan, lekin Riman bo'yicha integrallanmaydigan funksiyaga namuna keltiramiz.

6.1.2 - misol. Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional bo'lsa,} \end{cases}$$

hech qanday $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $a < b$, kesmada integrallanuvchi emas.

Haqiqatan, $[a, b]$ sonlar o'qining ixtiyoriy kesmasi bo'lib, P uning ixtiyoriy bo'linishi bo'lsin. Quyidagi ikki integral yig'indini qaraymiz:

$$\sigma_P(D, \{\xi_k\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\;\Delta x_k$$

va

$$\sigma_P(D, \{\eta_k\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} D(\eta_k)\;\Delta x_k.$$

Oraliq ξ_k nuqta sifatida $[x_{k-1}, x_k]$ kesmadan istalgan ratsional nuqtani olamiz va ikkinchi yig'indi uchun oraliq $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqta sifatida istalgan irratsional nuqtani olamiz. U holda, ravshanki, $D(\xi_k) = 1$ va shuning uchun

$$\sigma_P(D, \{\xi_k\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

Xuddi shunga o'xshash, $D(\eta_k) = 0$ va shuning uchun

$$\sigma_P(D, \{\eta_k\}) \;=\; 0.$$

Modomiki $b - a \neq 0$ ekan, oxirgi ikki integral yig'indi o'zaro teng emas. Bundan chiqdi, Dirixle funksiyasining integral yig'indilari yuqoridagi ta'rif bo'yicha limitga ega bo'la olmaydi. Demak, Dirixle funksiyasi $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanmas ekan.

Agar $\mathsf{R}[a, b]$ simvol orqali $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar to'plamini belgilasak, u holda $\mathsf{R}[a, b]$ berilgan $[a, b]$ kesmada chegaralangan funksiyalar to'plamining qismiy to'plami bo'ladi. Bundan tashqari, bu qismiy to'plam hosmasdir, ya'ni u chegaralangan funksiyalar to'plami bilan ustma-ust tushmaydi.

Dirixle funksiyasining integrallanmasligiga sabab uni sonlar o'qining har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligidadir. Biroq bundan Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiya uzilish nuqtasiga ega bo'la olmaydi degan fikr kelib chiqmaydi.

6.1.3 - misol. Har qanday $c \in [a, b]$ uchun

$$g_c(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{agar } x = c \text{ bo'lsa,} \\ 0\,, & \text{agar } x \neq c \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{6.1.17}$$

funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_a^b g_c(x)\, dx \;=\; 0 \tag{6.1.18}$$

tenglik o'rinlidir.

Haqiqatan, agar c nuqta P bo'linishning hech bir nuqtasi bilan ustma-ust tushmasa,

$$\sigma_P(g_c, \{\xi_k\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} g_c(\xi_k)\Delta x_k \tag{6.1.19}$$

integral yig'indida faqat bitta had noldan farqli bo'lib, ravshanki, u $d(P)$ dan kichik bo'ladi. Agarda c nuqta P bo'linishning biror nuqtasi bilan ustma-ust tushsa, (6.1.19) yig'indida noldan farqli had ikkita bo'ladi. Lekin har ikkala holda ham integral yig'indilar $d(P) \to 0$ da nolga intilishi aniq. Demak, (6.1.18) tenglik o'rinli bo'lar ekan.

Q.E.D.

§ 6.2. Riman integralining asosiy xossalari

1. Riman integralining chiziqliligi. Ushbu bandda Riman integralining integral ostidagi funksiyadan chiziqli bog'liq ekanini ko'rsatamiz.

6.2.1 - teorema. *Agar f va g funksiyalar $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, istalgan haqiqiy λ va μ sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiya ham Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx \;=\; \lambda \int_a^b f(x)\, dx \;+\; \mu \int_a^b g(x)\, dx \tag{6.2.1}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar P berilgan $[a, b]$ kesmaning istalgan bo'linishi bo'lsa, $\lambda f + \mu g$ funksiyaning (6.1.3) ko'rinishdagi integral yig'indisi f va g funksiyalar integral yig'indilari bilan quyidagicha bog'langan bo'ladi:

$$\sigma_P(\lambda f + \mu g) \;=\; \lambda\sigma_P(f) \;+\; \mu\sigma_P(g). \tag{6.2.2}$$

Shartga ko'ra f va g funksiyalar integrallanuvchi, shuning uchun, (6.1.7) tenglikka asosan, ularning integral yig'indilarini quyidagi:

$$\sigma_P(f) \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \;+\; \alpha_P(f)$$

va

$$\sigma_P(g) \;=\; \int\limits_a^b g(x)\,dx \;+\; \alpha_P(g),$$

ko'rinishlarda yozish mumkin, bu yerdagi $\alpha_P(f)$ va $\alpha_P(g)$ kattaliklarni bo'linish diametri kichiklashganda istalgancha kichik qilish mumkin.

Demak,

$$\sigma_P(\lambda f+\mu g) \;=\; \lambda\int\limits_a^b g(x)\,dx \;+\; \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx \;+\lambda\alpha_P(f)+\mu\alpha_P(g). \tag{6.2.3}$$

Modomiki

$$\lambda\alpha_P(f)+\mu\alpha_P(g)$$

kattalikni P bo'linish diametri kichiklashganda istalgancha kichik qilish mumkin ekan, (6.2.3) tenglik $\lambda f+\mu g$ funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, (6.2.1) tenglik o'rinli ekanini anglatadi.

Q.E.D.

Navbatdagi muhim xossani integralning integrallash kesmasining funksiyasi sifatida *additivligi* deb atashadi.

6.2.2 - teorema. *Agar $a<b<c$ bo'lib, f funksiya $[a,b]$ va $[b,c]$ kesmalarda integrallanuvchi bo'lsa, bu funksiya $[a,c]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik bajariladi:*

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \;+\; \int\limits_b^c f(x)\,dx. \tag{6.2.4}$$

Isbot. 1. P^* simvol orqali $[a,c]$ kesmaning b nuqtani o'z ichiga olgan ixtiyoriy bo'linishini belgilaymiz, ya'ni, agar

$$P^*=\{a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=c\}$$

desak, biror m nomer uchun $b=x_m$ bo'ladi. Ravshanki, bu holda P^* bo'linish quyidagi ikki bo'linish yig'indisidan iborat bo'ladi:

1) $[a,b]$ kesmaning diametri $d(P_1)\le d(P)$ bo'lgan

$$P_1=\{a=x_0<x_1<x_2<...<x_m=b\}$$

bo'linishi va

2) $[b,c]$ kesmaning diametri $d(P_2)\le d(P)$ bo'lgan

$$P_2=\{b=x_m<x_{m+1}<x_{m+2}<...<x_n=c\}$$

bo'linishi.

Mana shu P^* bo'linishga mos kelgan f funksiyaning integral yig'indisini

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{6.2.5}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Shartga ko'ra, f funksiya $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarda integrallanuvchidir. Shuning uchun, (6.2.5) ning o'ng tomonidagi integral yig'indilar f funksiyadan mos ravishda $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarda olingan integrallarga intiladi. Demak, (6.2.5) ning chap tomonidagi integral yig'indi (6.2.4) ning o'ng tomonidagi integrallar yig'indisiga intiladi, ya'ni

$$\lim_{d(P^*)\to 0} \sigma_{P^*}(f) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_b^c f(x)\,dx. \tag{6.2.6}$$

2. Endi $[a, c]$ kesmaning, b nuqtani o'z ichiga olmagan, ixtiyoriy P bo'linishini qaraymiz. Aytaylik, b nuqta x_{m-1} va x_m nuqtalar orasida yotsin, ya'ni

$$x_{m-1} \;<\; b \;<\; x_m.$$

Agar P bo'linishga b nuqtani qo'shsak, $[a, c]$ kesmaning yangi bo'linishini olamiz. Ana shu bo'linishni P^* simvol orqali belgilaymiz. Bunda, albatta, $d(P^*) \le d(P)$ bo'ladi. Ravshanki, bu ikki bo'linishlarga mos keluvchi (6.1.3) ko'rinishdagi integral yig'indilar ayirmasini quyidagicha yozish mumkin

$$\sigma_P(f) \;-\; \sigma_{P^*}(f) \;=$$

$$=\; f(\xi_m)(x_m - x_{m-1}) \;-\; f(\xi'_m)(b - x_{m-1}) \;-\; f(\xi''_m)(x_m - b), \tag{6.2.7}$$

bu yerda $\xi'_m \in [x_{m-1}, b]$ va $\xi''_m \in [b, x_m]$. Integrallanuvchi funksiyaning chegaralanganligi haqidagi 6.1.1 - tasdiqqa ko'ra, shunday $M > 0$ o'zgarmas topiladiki, barcha $x \in [a, c]$ uchun $|f(x)| \le M$ tengsizlik bajariladi. Shuning uchun (6.2.7) dan

$$|\sigma_P(f) \;-\; \sigma_{P^*}(f)| \le M(x_m - x_{m-1}) + M(b - x_{m-1}) + M(x_m - b) =$$

$$= 2M\Delta x_m \le 2Md(P) \tag{6.2.8}$$

kelib chiqadi.

Demak, har ikkala integral yig'indi bitta limitga ega bo'lib, (6.2.6) ga ko'ra,

$$\lim_{d(P)\to 0} \sigma_P(f) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_b^c f(x)\,dx,$$

ya'ni (6.2.4) tenglik bajarilar ekan.

Q.E.D.

Eslatma. Biz (6.2.4) tenglikda $a < b < c$ deb faraz qilgan edik. Agar istalgan a uchun

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0 \tag{6.2.9}$$

deb kelishib olinsa, (6.2.4) tenglik $a \le b \le c$ bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Shuni alohida qayd etamizki, (6.2.9) tenglik isbotlanmaydi va u faqat kelishuv natijasidir.

Navbatdagi tasdiq, $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya qiymatini shu kesmaga tegishli bo'lgan ixtiyoriy c nuqtada o'zgartirsak, o'zgartirilgan funksiya yana integrallanuvchi bo'lib, bunda integralning qiymati o'zgarmasligini ko'rsatadi.

6.2.1 - tasdiq. *Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, $c \in [a,b]$ bo'lsa, istalgan haqiqiy μ uchun*

$$f_\mu(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \neq c \text{ bo'lsa,} \\ \mu \ , & \text{agar } x = c \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya ham $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_a^b f_\mu(x)\, dx \ = \ \int_a^b f(x)\, dx$$

tenglik bajariladi.

Isbot bevosita 6.2.1 - Teorema va 6.1.3 - misoldan kelib chiqadi. Buning uchun, quyidagi o'z-o'zidan ko'rinib turgan,

$$f_\mu(x) = f(x) + [\mu - f(c)]g_c(x)$$

tenglikdan foydalanish yetarli.

Eslatma. Agar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiyaning qiymatlarini shu kesmaning istalgan chekli sondagi nuqtalarida o'zgartirsak, hosil bo'lgan funksiya yana integrallanuvchi bo'lib, bunda integralning qiymati o'zgarmaydi.

Shuni aytish kerakki, Dirixle funksiyasi nolga aynan teng funksiyadan sanoqli sondagi nuqtalarda (barcha ratsional nuqtalarda) farq qiladi. Demak, agar integrallanuvchi funksiya qiymatlarini sanoqli sondagi nuqtalarda o'zgartirsak, Dirixle funksiyasi misolida ko'rganimizdek, o'zgartirilgan funksiya Riman bo'yicha integrallanmasligi ham mumkin ekan.

6.2.1 - misol. Aytaylik, $c \in \mathbf{R}$ bo'lsin. Shu nuqtada uzilishga ega bo'lgan

$$h_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \geq c \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x < c \text{ bo'lsa} \end{cases} \tag{6.2.10}$$

funksiyani aniqlab, uning istalgan $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini ko'rsatamiz.

Haqiqatan, agar c nuqta $[a,b]$ kesmadan tashqarida yotsa, bu kesmada $h_c(x)$ o'zgarmas bo'lib, 6.1.1 - misolga ko'ra, u integrallanuvchi bo'ladi.

Bordiyu $c \in [a,b]$ bo'lsa, (6.2.10) funksiya $[c,b]$ kesmada o'zgarmas bo'lib, $[a,c]$ kesmada esa, c nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda o'zgarmasga teng bo'ladi. Shuning uchun, u har ikkala kesmalarda ham integrallanuvchi bo'ladi. Demak, 6.2.3 - Teoremaga ko'ra, bu funksiya butun $[a,b]$ kesmada integrallanuvchidir. Xususan, agar $c \in [a,b]$ bo'lsa,

$$\int_a^b h_c(x)\, dx \ = \ b - c \tag{6.2.11}$$

tenglik bajariladi.

Shuni aytish kerakki, $h_c(x)$ funksiya *pog'anasimon* (yoki *bo'lakli-o'zgarmas*) deb ataluvchi funksiyalarga eng sodda misoldir. Umuman, pog'onasimon deb quyidagi ko'rinishdagi funksiyaga aytiladi:

$$f(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n} a_j h_{c_j}(x), \tag{6.2.12}$$

bu yerda a_j va c_j berilgan haqiqiy sonlardir.

6.2.2 - misol. $\Delta = [\alpha, \beta)$ - sonlar o'qining biror yarim intervali bo'lsin, ya'ni

$$\Delta \ = \ \{x \in \mathbf{R} : \alpha \leq x < \beta\}.$$

Quyidagi

$$\omega(x, \Delta) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in \Delta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \notin \Delta \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{6.2.13}$$

funksiyani aniqlayamiz.

Ushbu $\omega(x, \Delta)$ funksiya Δ yarim intervalning *xarakteristik funksiyasi* deyiladi. Agar $h_a(x)$ va $h_b(x)$ (6.2.10) tenglik orqali aniqlangan pog'onasimon funksiyalar bo'lsa, ravshanki,

$$\omega(x, \Delta) \ = \ h_\alpha(x) \ - \ h_\beta(x).$$

Aniqlanishiga ko'ra, $\omega(x, \Delta)$ funksiya istalgan kesmada integrallanuvchi bo'lib, agar Δ yarim interval biror $[a, b]$ kesmaning ichida yotsa, (6.2.1) va (6.2.11) tengliklarga asosan,

$$\int_a^b \omega(x, \Delta)\, dx \ = \ \int_a^b h_\alpha(x)\, dx - \int_a^b h_\beta(x)\, dx = (b - \alpha) \ - \ (b - \beta) \ = \ \beta - \alpha.$$

Shunday qilib, agar Δ yarim interval $[a, b]$ kesmaning ichida joylashgan bo'lib, uning uzunligini $|\Delta| = \beta - \alpha$ desak,

$$\int_a^b \omega(x, \Delta)\, dx \ = \ |\Delta| \tag{6.2.14}$$

tenglik bajarilar ekan.

6.2.3 - misol. $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ - berilgan $[a, b]$ kesmaning biror bo'linishi bo'lsin. Bu kesmada $h(x)$ funksiyani shunday aniqlaymizki, u har bir qismiy $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k)$ yarim intervalda o'zgarmas bo'lib, μ_k qiymatni qabul qilsin, ya'ni

$$h(x) \ = \ \mu_k, \quad \text{agar} \quad x \in \Delta_k \quad \text{bo'lsa} \tag{6.2.15}$$

($k = n$ bo'lganda Δ_k sifatida $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}, b]$ kesma olinadi).

Albatta, bunday aniqlangan $h(x)$ funksiya pog'onasimondir. Agar 6.2.2 - misoldagi belgilashlardan foydalanib, $\omega(x,\Delta_k)$ deb Δ_k qismiy yarim intervalning xarakteristik funksiyasini olsak, $h(x)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda yosish mumkin bo'ladi:

$$h(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, \omega(x,\Delta_k). \tag{6.2.16}$$

Demak, xulosa qilib shuni aytish mumkinki, istalgan pog'onasimon funksiya har qanday $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lar ekan. Bundan tashqari, (6.2.14) tenglikka ko'ra,

$$\int_a^b h(x)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu_k \int_a^b \omega(x,\Delta_k)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Delta_k|.$$

Bundan, (6.2.15) ta'rifni hisobga olsak, oraliq nuqtalar $\xi_k \in [x_{k-1},x_k)$ istalgancha tanlanganda ham,

$$\int_a^b h(x)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)\Delta x_k \tag{6.2.17}$$

tenglikni olamiz. Boshqacha aytganda, P bo'linishning qismiy intervallarida o'zgarmas qiymat qabul qiluvchi $h(x)$ pog'onasimon funksiyadan olingan integral shu P bo'linishga mos keluvchi integral yig'indiga teng bo'lar ekan.

Integralning navbatdagi xossasi tengsizlik belgisi bilan bog'langan funksiyalardan olingan integrallar haqidadir.

6.2.1 - lemma. *Berilgan f funksiya $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. Agar*

$$f(x) \;\geq\; 0, \quad a \leq x \leq b, \tag{6.2.18}$$

bo'lsa, quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\geq\; 0. \tag{6.2.19}$$

Isbot. Agar f funksiyadan olingan integral manfiy bo'lganda edi, (6.1.7) tenglikka ko'ra, P bo'linishning diametri yetarlicha kichik bo'lganda, $\sigma_P(f)$ integral yig'indi ham manfiy bo'lar edi. Ammo (6.2.18) shartga asosan f funksiyaning barcha integral yig'indilari musbatdir. Bu qarama-qarsilik lemmani isbotlaydi.

Q.E.D.

6.2.3 - teorema. *Berilgan f va g funksiyalar $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. Agar*

$$f(x) \;\leq\; g(x), \quad a \leq x \leq b, \tag{6.2.20}$$

bo'lsa, quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.2.21}$$

Isbot bevosita 6.2.1 - Teorema va 6.2.1 - lemmadan kelib chiqadi.

§ 6.3. Darbuning yuqori va quyi integrallari

1. Darbuning yuqori va quyi yig'indilari. Yuqorida ko'rganimizdek, Riman integralining ta'rifi uning xossalarini nisbatan oson isbotlashga imkon beradi. Ammo bu ta'rif yordamida berilgan funksiyaning biror kesmada integralanuvchiligini aniqlash ancha murakkabdir.

Integralning yana boshqacha aniqlash usulini fransuz matematigi J.G.Darbu taklif qilgan. Darbu ta'rifining ustunligi shundan iboratki, u bo'yicha integrallanish kriteriysi nisbatan yaqqolroq ifodalanib, osonroq tekshiriladi. Bu usulning asl mohiyati integrallanishga tekshirilayotgan f funksiyani ikkita pog'onasimon funksiyalar bilan ikki tomondan yaqinlashtirishdadir; ulardan biri f dan kichik bo'lib yaqinlashsa, ikkinchisi esa f dan katta bo'lib unga yaqinlashadi.

Faraz qilaylik, f funksiya biror $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, shu kesmada chegaralangan bo'lsin. Bundan tashqari, $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ berilgan kesmaning ixtiyoriy bo'linishi bo'lsin.

Endi $h(x)$ pog'onasimon funksiyani shunday aniqlaymizki, u har bir $[x_{k-1}, x_k)$ qismiy yarim intervalda biror μ_k qiymatni qabul qilsin (agar $k = n$ bo'lsa, biz $h(x)$ funksiya oxirgi qismiy $[x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}, b]$ kesmada o'zgarmasga teng deb olamiz). Bunday aniqlangan $h(x)$ funksiya, 6.2.3 - misolda ko'rganimizdek, Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'ladi va undan olingan integral (6.2.17) formula bo'yicha hisoblanadi.

Faraz qilamiz, $h(x)$ pog'onasimon funksiya shunday aniqlangan bo'lsinki, u uchun

$$h(x) \ \le \ f(x), \quad a \le x \le b, \tag{6.3.1}$$

tengsizlik bajarilsin. Bu bahoni ta'minlash uchun $h(x)$ funksiyaning $\mu_k = m_k$ qiymatlarini quyidagicha aniqlash kifoya:

$$m_k \ = \ \inf \ \{ \ f(t) \ : \ t \in [x_{k-1}, x_k] \ \}. \tag{6.3.2}$$

Hosil bo'lgan funksiyani $h(x, P)$ simvoli bilan belgilaymiz. Demak, agar $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k)$ desak ($k = n$ bo'lganda, odatdagigek, $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$ deb hisoblaymiz), biz quyidagi ta'rifga ega bo'lamiz:

$$\text{agar} \quad x \in \Delta_k \quad \text{bo'lsa,} \quad h(x, P) \ = \ m_k, \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{6.3.3}$$

Pog'onasimon $h(x, P)$ funksiyani P bo'linishga mos keluvchi *Darbuning quyi pog'onasimon funksiyasi* deb ataymiz

Shunday qilib, Darbuning quyi pog'onasimon funksiyasi (6.3.1) tengsizlikni qanoatlantirib, undan olingan integral, (6.2.17) ga ko'ra,

$$\int_a^b h(x, P)\, dx \ = \ \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \tag{6.3.4}$$

ga teng.

(6.3.4) tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi P bo'linishga mos keluvchi *Darbuning quyi yig'indisi* deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$s(f, P) \ = \ \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k. \tag{6.3.5}$$

Xuddi shu singari, berilgan P bo'linish uchun *Darbunin yuqori pog'onasimon funksiyasi* $H(x) = H(x,P)$ ni shunday aniqlaymizki, u har bir $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k)$ qismiy yarim intervalda o'zgarmas bo'lib, quyidagi

$$M_k \;=\; \sup \{\; f(t) \;:\; t \in [x_{k-1}, x_k] \;\} \tag{6.3.6}$$

tenglik bilan aniqlangan qiymatlarni qabul qilsin.

Shunday qilib,

$$H(x,P) \;=\; M_k \quad , \quad x \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{6.3.7}$$

Yuqori pog'onasimon funksiya integrali

$$\int_a^b H(x,P)\, dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \tag{6.3.8}$$

ga teng.

(6.3.8) tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi P bo'linishga mos kelgan *Darbuning yuqori yig'indisi* deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$S(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k. \tag{6.3.9}$$

Darbuning har qanday bo'linishga mos kelgan yuqori pog'onasimon funksiyasi quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi ravshan:

$$H(x,P) \;\geq\; f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{6.3.10}$$

Shuni aytish kerakki, shartimizga ko'ra o'rganilayotgan funksiya chegaralangan bo'lgani uchun, (6.3.2) va (6.3.6) kattaliklar va buning natijasida, Darbuning quyi (6.3.5) va yuqori (6.3.9) yig'indilari chegaralangan aniq sonlardir.

2. Darbuning yuqori va quyi integrallari. Darbuning quyi va yuqori yig'indilari xossalarini navbattagi bir qator sodda jumlalarda keltiramiz. Bu jumlalarda f funksiyani $[a, b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan ixtiyoriy funksiya deb qaraymiz.

1 - Jumla. *Berilgan $[a, b]$ kesmaning istalgan ikki P_1 va P_2 bo'linishlari uchun $h(x, P_1)$ quyi pog'onasimon funksiya $H(x, P_2)$ yuqori pog'onasimon funksiyadan katta emas, ya'ni*

$$h(x, P_1) \le H(x, P_2), \quad a \le x \le b. \tag{6.3.11}$$

Isbot (6.3.1) va (6.3.10) tengsizliklardan kelib chiqadi.

2 - Jumla. *Darbuning istalgan quyi pog'onasimon funksiyasidan olingan integral Darbuning har qanday yuqori pog'onasimon funksiyasidan olingan integraldan katta emas, ya'ni*

$$\int_a^b h(x, P_1)\, dx \le \int_a^b H(x, P_2)\, dx.$$

Isbot 1 - Jumla va 6.2.3 - Teoremalardan kelib chiqadi.

3 - Jumla. *Darbuning istalgan quyi yig'indisi Darbuning har qanday yuqori yig'indisidan katta emas, ya'ni*

$$s(f, P_1) \le S(f, P_2). \tag{6.3.12}$$

Isbot Darbuning quyi va yuqori yig'indilari ta'rifi hamda 2 - Jumladan kelib chiqadi.

4 - Jumla. *Darbuning barcha quyi yig'indilari to'plami yuqoridan chegaralangan bo'lib, Darbuning barcha yuqori yig'indilari to'plami quyidan chegaralangan bo'ladi.*
Isbot 3 - Jumladan kelib chiqadi.

Ta'rif. *Berilgan f funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan* ***Darbuning quyi integrali*** *$\underline{I}(f)$ deb $[a, b]$ kesmaning barcha bo'linishlari bo'yicha olingan Darbu quyi yig'indilarining aniq yuqori chegarasiga aytamiz, ya'ni*

$$\underline{I}(f) = \sup_P s(f, P). \tag{6.3.13}$$

Ta'rif. *Berilgan f funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan* ***Darbuning yuqori integrali*** *$\overline{I}(f)$ deb $[a, b]$ kesmaning barcha bo'linishlari bo'yicha olingan Darbu yuqori yig'indilarining aniq quyi chegarasiga aytamiz, ya'ni*

$$\overline{I}(f) = \inf_P S(f, P). \tag{6.3.14}$$

Ravshanki, Darbuning bunday aniqlangan quyi va yuqori integrallarining mavjudligini 4 - Jumla ta'minlaydi.

5 - Jumla. *Darbuning quyi integrali Darbuning yuqori integralidan katta emas, ya'ni*

$$\underline{I}(f) \le \overline{I}(f). \tag{6.3.15}$$

Isbot 3 - Jumladan kelib chiqadi.

Ta'rif. *Agar f funksiya uchun Darbuning quyi integrali Darbuning yuqori integraliga teng bo'lsa:*

$$\underline{I}(f) \; = \; \overline{I}(f), \tag{6.3.16}$$

u holda bu funksiya $[a, b]$ kesmada Darbu ma'nosida integrallanadi deymiz, bunda Darbuning quyi va yuqori integrallarining umumiy qiymatini, ya'ni $I_D = \overline{I} = \underline{I}$ sonni f funksiyaning $[a, b]$ kesma bo'yicha Darbu ma'nosidagi integrali deymiz.

Endi P bo'linishga yangi nuqtalarni qo'shganda Darbuning quyi va yuqori yig'indilari qanday o'zgarishini kuzatamiz.

6 - Jumla. *Agar P berilgan $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy bo'linishi bo'lib, P^* esa P ga chekli sondagi nuqtalarni qo'shishdan hosil bo'lgan yangi bo'linish bo'lsa, Darbuning quyi va yuqori yig'indilari quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiradi:*

$$s(f, P) \leq \; s(f, P^*), \quad S(f, P^*) \; \leq \; S(f, P). \tag{6.3.17}$$

Shunday qilib, bo'linishga yangi nuqtalarni qo'shganda Darbuning quyi yig'indilari o'sib, Darbuning yuqori yig'indilari esa kamayar ekan.

Isbot. Shubhasiz, bu jumlani P bo'linishga faqat bitta nuqta qo'shilgan holda isbotlash yetarlidir.

(6.3.17) dagi tengsiliklardan o'ngdagisini isbotlaymiz. Aytaylik, boshlang'ich bo'linish $P \; = \; \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n =$ ko'rinishga ega bo'lib, yangi P^* bo'linish (x_{m-1}, x_m) intervalda yotgan bitta x^* nuqtani:

$$x_{m-1} \; < \; x^* \; < \; x_m,$$

qo'shishdan hosil bo'lsin.

Bunda $\Delta_m = [x_{m-1}, x_m)$ qismiy yarim interval ikkiga bo'linadi:

$$\Delta_m \; = \; \Delta'_m \cup \Delta''_m,$$

bu yerda $\Delta'_m = [x_{m-1}, x^*)$ va $\Delta''_m = [x^*, x_m)$.

Ravshanki, bu qo'shilish natijasida (6.3.9) yig'indining faqat m - nomerli bitta hadi o'zgaradi. Demak,

$$S(f, P) - S(f, P^*) = M_m \, \Delta x_m - M'_m \, \Delta' x_m - M''_m \, \Delta'' x_m, \tag{6.3.18}$$

bu yerda M'_m va M''_m sonlar f funksiyaning mos ravishda Δ'_m va Δ''_m yarim intervallardagi aniq yuqori chegaralari bo'lib, $\Delta' x_m = (x^* - x_{m-1})$ va $\Delta'' x_m = (x_m - x^*)$.

Agar o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$M'_m \leq M_m, \quad M''_m \leq M_m$$

tengsizliklarni va

$$\Delta' x_m + \Delta'' x_m = \Delta x_m$$

tenglikni hisobga olsak, (6.3.18) dan talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi:

$$S(f, P) - S(f, P^*) \; = \; (M_m - M'_m)\Delta' x_m + (M_m - M''_m)\Delta'' x_m \geq 0. \tag{6.3.19}$$

Xuddi shunga o'xshash (6.3.17) dagi tengsizliklardan chapdagisi ham isbotlanadi.
Q.E.D.

7 - Jumla (Darbu ma'nosida integrallanish kriteriysi). *Chegaralangan f funksiyaning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday P_ε bo'linish topilib, uning uchun*

$$S(f, P_\varepsilon) \; - \; s(f, P_\varepsilon) \; < \; \varepsilon \tag{6.3.20}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. 1. Avval f funksiya Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin, deylik. U holda, (6.3.16) ta'rifga ko'ra,

$$\sup_P s(f, P) = \underline{I}(f) = I_D = \overline{I}(f) = \inf_P S(f, P). \tag{6.3.21}$$

Aniq chegaralarning ta'riflariga binoan shunday ikki $P_1 = P_1(\varepsilon)$ va $P_2 = P_2(\varepsilon)$ bo'linishlar topiladiki, ular uchun

$$s(f, P_1) > I_D - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f, P_2) < I_D + \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3.22}$$

tengsizliklar bajariladi.

Bu ikki P_1 va P_2 bo'linishlarni birlashtirish natijasida hosil bo'lgan bo'linishni P_ε simvoli bilan belgilaymiz. U holda, 6 - Jumlaga ko'ra, P_1 va P_2 bo'linishlardan P_ε bo'linishga o'tishda quyi yig'indilar faqat o'sishi mumkin va yuqori yig'indilar esa, aksincha, faqat kamayishi mumkin. Shuning uchun, (6.3.22) ga ko'ra,

$$s(f, P_\varepsilon) > I_D - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f, P_\varepsilon) < I_D + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bundan, shubhasiz, (6.3.20) tengsizlik kelib chiqadi.

2. Endi (6.3.20) shart bajarilsin, deylik. Ma'lumki, istalgan P bo'linish uchun

$$s(f, P) \; \leq \; \underline{I}(f) \; \leq \; \overline{I}(f) \; \leq \; S(f, P)$$

tengsizliklar bajariladi. Shunday ekan, istalgan bo'linish uchun quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$\overline{I}(f) \; - \; \underline{I}(f) \; \leq \; S(f, P) \; - \; s(f, P).$$

Bu bahoda $P = P_\varepsilon$ desak, (6.3.20) ga ko'ra,

$$\overline{I}(f) \; - \; \underline{I}(f) \; \leq \; \varepsilon \tag{6.3.23}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Ravshanki, bundan, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriyligiga ko'ra, $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ tenglik kelib chiqadi. Demak, f funksiya Darbu ma'nosida integrallanuvchi ekan.
Q.E.D.

7 -Jumlada o'rnatilgan Darbu ma'nosidagi integrallanish kriteriysi berilgan funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi haqidagi masalasini to'la hal qiladi.

Navbatdagi jumlalar integralga berilgan ikki ta'rifni, ya'ni Darbuning aniq yuqori va aniq quyi integrallarning ustma-ust tushishi ma'nosidagi ta'rifi bilan Rimanning integral yig'indilar limiti ma'nosidagi ta'riflarini o'zaro bog'lashga yordam beradi. Chunonchi, bu jumlalarda Darbuning quyi integrali quyi integral yig'indilarning, Darbuning yuqori integrali esa yuqori integral yig'indilarning limiti ekani ko'rsatiladi.

Dastavval, 6 - Jumlaga qo'shimcha ravishda, quyi va yuqori yig'indilarning berilgan bo'linishga qoshimcha chekli sondagi nuqtalar qo'shilgandagi o'zgarishini baholaymiz.

8 - Jumla. *Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralangan bo'lib, M bu funksiyaning $[a, b]$ kesmada aniq yuqori va m esa uning aniq quyi chegaralari bo'lsin. Bundan tashqari, P berilgan $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy bo'linishi va $d = d(P)$ uning diametri bo'lsin.*

Agar P^* bo'linish P bo'linishga yangi N ta nuqta qo'shish bilan hosil bo'lgan bo'linish bo'lsa, Darbuning quyi yig'indilari

$$s(f, P^*) \ \leq s(f, P) \ + \ N(M - m)d(P) \tag{6.3.24}$$

tengsizlikni va Darbuning yuqori yig'indilari esa

$$S(f, P) \ \leq \ S(f, P^*) \ + \ N(M - m)d(P) \tag{6.3.25}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. Ravshanki, (6.3.24) va (6.3.25) tengsizliklarni $N = 1$ da isbotlash yetarli, chunki umumiy holga N marta bittadan nuqtalar qo'shish bilan o'tish mumkin.

Shuning uchun, masalan, (6.3.25) tengsizlikni $N = 1$ da isbotlaymiz.

Aytaylik, boshlang'ich bo'linish $P \ = \ \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ ko'rinishga ega bo'lib, yangi P^* bo'linish (x_{m-1}, x_m) intervalda yotgan bitta x^* nuqtani, yani

$$x_{m-1} \ < \ x^* \ < \ x_m$$

shartni qanoatlantiruvchi nuqtani qo'shishdan hosil bo'lsin.

Bunda $\Delta_m = [x_{m-1}, x_m)$ qismiy yarim interval ikkiga bo'linadi, ya'ni

$$\Delta_m \ = \ \Delta'_m \cup \Delta''_m,$$

bu yerda $\Delta'_m = [x_{m-1}, x^*)$ va $\Delta''_m = [x^*, x_m)$.

Ravshanki, bu qo'shilishda (6.3.9) yig'indida faqat m - nomerli bitta had o'zgaradi. Demak, xuddi 6 - Jumla isbotidagidek ((6.3.19) ga qarang),

$$S(f, P) - S(f, P^*) \ = \ (M_m - M'_m)\Delta' x_m + (M_m - M''_m)\Delta'' x_m, \tag{6.3.26}$$

bu yerda M'_m va M''_m sonlar f funksiyaning mos ravishda Δ'_m va Δ''_m yarim intervallardagi aniq yuqori chegaralari bo'lib, $\Delta' x_m = (x^* - x_{m-1})$ va $\Delta'' x_m = (x_m - x^*)$.

Nihoyat, o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$(M_m - M'_m) \leq (M - m), \quad (M_m - M''_m) \leq (M - m)$$

tengsizliklarni hisobga olsak, (6.3.26) dan talab qilingan (6.3.25) bahoni $N = 1$ da olamiz:

$$S(f, P) - S(f, P^*) \leq$$

$$\leq \ (M - m)\Delta' x_m + (M - m)\Delta'' x_m = (M - m)\Delta x_m \leq (M - m)d(P).$$

Demak, yuqorida qayd qilinganidek, (6.3.25) tengsizlik ixtiyoriy N uchun ham o'rinli bo'lar ekan.

Xuddi shu singari (6.3.24) tengsizlik ham isbotlanadi.

Q.E.D.

Ta'rif. *Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, ixtiyoriy P bo'linish olganda ham $d(P) < \delta$ shartdan*

$$|s(f, P) \ - \ A| \ < \ \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqsa, A son Darbuning quyi $s(f,P)$ yig'indilarining $d(P)\to 0$ dagi limiti deyiladi.

Xuddi shunga o'xshab Darbuning yuqori $S(f,P)$ yig'indilarining $d(P)\to 0$ dagi limiti aniqlanadi.

9 - Jumla (Darbuning asosiy lemmasi). *Berilgan f funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. U holda, $d(P)\to 0$ da Darbuning quyi va yuqori yig'indilarining limiti mavjud bo'lib, quyi yig'indilar limiti Darbuning f funksiyadan olingan quyi integraliga teng, ya'ni*

$$\lim_{d(P)\to 0} s(f,P) \;=\; \underline{I},$$

yuqori yig'indilari limiti esa Darbuning f funksiyadan olingan yuqori integraliga teng, ya'ni

$$\lim_{d(P)\to 0} S(f,P) \;=\; \overline{I}$$

bo'ladi.

Isbot. Avval Darbuning yuqori yig'indilarini qaraymiz va istalgan $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilishini ko'rsatamizki, diametri δ dan kichik bo'lgan ixtiyoriy P bo'linish uchun

$$\overline{I} \;\le\; S(f,P) \;<\overline{I} \;+\; \varepsilon \tag{6.3.27}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Buning uchun aniq quyi chegara ta'rifidan foydalanamiz. Bu ta'rifga ko'ra, istalgan $\varepsilon>0$ olganda ham shunday P_ε bo'linish topiladiki, u uchun

$$S(f,P_\varepsilon) \;<\; \overline{I} \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3.28}$$

tengsizlik bajariladi.

Aytaylik, $N=N(\varepsilon)$ son P_ε bo'linish nuqtalari soni bo'lsin. U holda

$$\delta \;=\delta(\varepsilon) = \;\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{N(M-m)} \tag{6.3.29}$$

deymiz, bu yerda M orqali f funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi aniq yuqori chegarasi va m orqali esa bu funksiyaning aniq quyi chegarasi belgilangan (biz f o'zgarmasga aynan teng emas deb hisoblashimiz mumkin, shuning uchun, $M-m>0$).

Endi P diametri $d(P)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy bo'linish bo'lsin. Modomiki, $\overline{I}$ yuqori yig'indi $\{S(f,P)\}$ lardan $[a,b]$ kesmaning barcha P bo'linishlari bo'yicha olingan aniq quyi chegara ekan, biz tanlagan bo'linish uchun (6.3.27) da chapdagi tengsizlik bajariladi. Shuning uchun, bu bo'linish uchun (6.3.27) dagi tengsizlikning o'ng qismini isbotlash yetarli.

Tanlab olgan P bo'linishimizga P_ε bo'linishning barcha nuqtalarini qo'shishdan hosil bo'lgan bo'linishni P^* simvol orqali belgilaymiz. U holda, 8 - Jumlani qo'llab, (6.3.29) tanlashga ko'ra,

$$S(f,P) \;\le\; S(f,P^*) \;+\; N\cdot(M-m)\delta \;=\; S(f,P^*) \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3.30}$$

tengsizlikni olamiz.

Agar P^* bo'linshni P_ε bo'linishga P bo'linishning barcha nuqtalarini qo'shish bilan hosil bo'lgan deb qarasak, 6 - Jumlaga ko'ra,

$$S(f,P^*) \;\le\; S(f,P_\varepsilon). \tag{6.3.31}$$

Nihoyat, agar (6.3.30) tengsizlikda avval (6.3.31), so'ngra (6.3.28) baholardan foydalansak,

$$S(f,P) \;\le\; S(f,P_\varepsilon) \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \overline{I} \;+\; \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, (6.3.27) dagi tengsizlikning o'ng tomoni ham bajarilar ekan.

Albatta, (6.3.27) tengsizlikdan Darbuning yuqori integrali Darbuning yuqori yig'indilarining limiti ekani bevosita kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshab, Darbuning quyi yig'indilarining limiti Darbuning quyi integrali ekani isbotlanadi.

Q.E.D.

Darbuning asosiy lemmasidan Darbu ma'nosida integrallanishning navbatdagi yana bir kriteriysini olamiz.

10 - Jumla. *Berilgan $[a, b]$ kesmada chegaralangan f funksiyaning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun Darbuning quyi yig'indilari limiti Darbuning yuqori yig'indilari limitiga teng bo'lishi, ya'ni*

$$\lim_{d(P)\to 0} s(f, P) \;=\; \lim_{d(P)\to 0} S(f, P) \tag{6.3.32}$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot bevosita 9 - Jumla va Darbu ma'nosidagi integralning (6.3.16) ta'rifidan kelib chiqadi.

§ 6.4. Riman integrali va Darbu ma'nosidagi integralning ustma-ust tushishi

1. Riman bo'yicha integrallanish kriteriysi.

1. Ushbu paragrafdagi bizning asosiy maqsadimiz - Darbuning asosiy lemmasiga asoslanib Riman va Darbu integrallarining ustma-ust tushishini ko'rsatishdir.

6.4.1 - teorema. *Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun uning shu kesmada Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli. Bunda Riman integrali Darbu ma'nosidagi integralga teng bo'ladi.*

Isbot. 1) Dastavval f funksiya $[a, b]$ kesmada Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lib, $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n =$ shu kesmaning ixtiyoriy bo'linishi bo'lsin.

Agar m_k va M_k lar orqali f funksiyaning $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesmadagi mos ravishda aniq quyi va aniq yuqori chegaralarini belgilasak, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqtani ixtiyoriy tanlaganda ham

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k$$

tengsizlik bajariladi.

Bu qo'shaloq tengsizlikni Δx_k ga ko'paytirib, k bo'yicha yig'ib chiqsak,

$$s(f, P) \;\le\; \sigma_P(f, \{\xi_k\}) \;\le\; S(f, P) \tag{6.4.1}$$

tengsizlikni olamiz.

10 - Jumlaga ko'ra, (6.4.1) ning chap qismida turgan Darbuning quyi yig'indilari ham, uning o'ng qismida turgan Darbuning yuqori yig'indilari ham bitta limitga intiladi. Shuning uchun, (6.4.1) tengsizlikka asosan, integral yig'indilar ham xuddi o'sha limitga intiladi. Bu esa, o'z navbatida, Riman integrali mavjud bo'lib, Darbu ma'nosidagi integralga tengligini anglatadi.

2) Endi f funksiya $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ shu kesmaning ixtiyoriy bo'linishi bo'lsin. Bu bo'linish diametrini $d(P)$ orqali balgilaymiz. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ kesmadan ξ_k nuqtani shunday tanlaymizki,

$$f(\xi_k) \ > \ M_k \ - \ \frac{d(P)}{b-a} \tag{6.4.2}$$

tengsizlik bajarilsin. Bundan tashqari, $\theta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqtani shunday tanlaymizki,

$$f(\theta_k) \ < \ m_k \ + \ \frac{d(P)}{b-a} \tag{6.4.3}$$

tengsizlik bajarilsin.

Ikki (6.4.2) va (6.4.3) tengsizliklarni birgalikda quyidagi

$$f(\theta_k) \ - \ \frac{d(P)}{b-a} \ < \ m_k \ \le M_k \ < \ f(\xi_k) \ + \ \frac{d(P)}{b-a}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu qo'shaloq tengsizlikni Δx_k ga ko'paytirib, k bo'yicha yig'ib chiqsak,

$$\sigma_P(f, \{\ \theta_k\}) \ - \ d(P) \ < \ s(f,P) \ \le \ S(f,P) \ < \ \sigma_P(f, \{\xi_k\}) \ + \ d(P) \tag{6.4.4}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Ushbu tengsizlikning chap va o'ng tomonidagi integral yig'indilar, f funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgani sababli, $d(P) \to 0$ da f funksiyadan olingan integralga intiladi. Bundan chiqdi, xuddi shu limitga Darbuning quyi va yuqori yig'indilari ham intiladi. Nihoyat, 10 - Jumlaga asosan, bundan f funksiyadan olingan Darbu ma'nosidagi integral mavjud bo'lib, u Riman bo'yicha integralga tengligi kelib chiqadi.

Q.E.D.

2. Isbotlangan teorema «Darbu ma'nosidagi integarl» degan atamani tashlab, keyinchalik bunday integrallarni ham Riman integrali deyishga imkon beradi. Shuni aytish joizki, bu teoremaga asosan, avval o'rnatilgan Darbu ma'nosida integrallanish kriteriysi bir vaqtning o'zida Riman bo'yicha integrallanish kriteriysi ham bo'ladi.

Eslatib o'tamiz, m_k va M_k simvollar orqali mos ravishda (6.3.2) va (6.3.6) tenglilar bilan aniqlangan sonlar belgilangan edi.

Теорема 6.4.2 (Riman bo'yicha integrallanish kriteriysi). *Chegaralangan f funksiyaning $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integralanuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shu kesmani quyidagi*

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \ < \ \varepsilon \tag{6.4.5}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi P bo'linishining topilishi zarur va yetarlidir.

Isbot o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

tenglik va 7 - Jumladan bevosita kelib chiqadi.

Yuqoridagi kriteriy Riman integralining navbatdagi muhim xossalarini isbotlashga imkon beradi.

6.4.3 - teorema. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, bu funksiya istalgan $[c, d] \subset [a, b]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, $[c, d] \subset [a, b]$ bo'lsin. Integrallanish kriteriysiga (6.4.2 - Teorema) ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham $[a, b]$ kesmaning shunday P_ε bo'linishi topiladiki, uning uchun navbatdagi baho bajariladi:

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{6.4.6}$$

Agar biz P_ε bo'linishga ikki c va d nuqtalarni qo'shsak, 7 - Jumlaga asosan, yuqori yig'indilar faqat kamayishi va quyi yig'indilar esa faqat oshishi mumkin. Shuning uchun (6.4.6) tengsizlik saqlanadi. Demak, umumiylikni buzmagan holda, biz P_ε bo'linish c va d nuqtalarni o'z ichiga oladi deyishimiz mumkin.

Shunday ekan, P_ε bo'linishning $[c, d]$ kesmada yotuvchi nuqtalari $[c, d]$ kesmaning biror P^* bo'linishini hosil qiladi. Bundan tashqari, shubhasiz,

$$S(f, P^*) - s(f, P^*) \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) . \tag{6.4.7}$$

Agar (6.4.6) va (6.4.7) tengsizliklarni birgalikda qarasak, $[c, d]$ kesmaning P^* bo'linishiga mos kelgan Darbuning yuqori $S(f, P^*)$ va quyi $s(f, P^*)$ yig'indilari uchun quyidagi

$$S(f, P^*) - s(f, P^*) < \varepsilon$$

tengsizlikni olamiz. Demak, 6.4.2 - Teoremaga asosan, f funksiya $[c, d]$ kesmada integrallanuvchidir.

Q.E.D.

Natija. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, ixtiyoriy $c \in (a, b)$ uchun bu funksiya $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarda ham integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \tag{6.4.8}$$

tenglik bajariladi.

Eslatma. Mazkur tasdiq 6.2.2 - Teoremaga teskari tasdiqdir. O'sha teoremada (6.4.8) tenglik $a \leq b \leq c$ munosabatni qanoatlantiruvchi har qanday a, b, c sonlar uchun isbotlangan edi. Biz integralni uning yuqori chegarasi quyi chegarasidan kichik bo'lganda shunday aniqlashimiz mumkinki, natijada (6.4.8) tenglik istalgan a, b, c sonlar uchun o'rinli bo'ladi. Chunonchi, agar $a < b$ bo'lsa,

$$\int_b^a f(x)\, dx = - \int_a^b f(x)\, dx \tag{6.4.9}$$

deymiz.

Ravshanki, integralni bunday aniqlashimizda (6.4.8) tenglik har qanday a, b, c haqiqiy sonlar uchun o'rinli bo'ladi (albatta, bunda integral ostidagi funksiya mos integrallash oraliqlarida aniqlangan bo'lishi zarur).

Shuni alohida qayd etish joizki, integralning yuqori chegarasi quyi chegarasidan kichik bo'lgan vaqtda (6.4.9) tenglik isbotlanmasdan, faqat chapdagi integralning ta'rifi sifatida qabul qilinadi.

3. Agar funksiyaning kesmadagi tebranishi tushunchasini kiritsak, (6.4.5) integrallanish kriteriysini boshqa (matematik adabiyotlarda ko'p uchraydigan) ko'rinishda yozish mumkin.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, Δ sonlar o'qidagi ixtiyoriy kesma bo'lib, u berilgan f funksiyaning aniqlanish sohasiga kirsin. U holda f funksiyaning Δ kesmadagi **tebranishi** deb quyidagi kattalikka aytiladi:*

$$\omega(f,\Delta) \ = \sup_{x\in\Delta,\, y\in\Delta} |f(x)-f(y)|. \tag{6.4.10}$$

Masalan, agar $f(t)$ funksiya temperaturaning vaqtga bo'liqligini ko'rsatsa va Δ orqali 24 soatga teng bo'lgan vaqt intervalini belgilasak, (6.4.10) kattalik temperaturaning bir kecha-kunduzdagi o'rtacha tebranishlarini anglatadi.

Biror kesmadagi funksiyaning tebranishi uning shu kesmadagi aniq yuqori va aniq quyi chegaralarining ayirmasiga tengligini tekshirish qiyin emas:

$$\omega(f,\Delta) \ = \ \sup_{x\in\Delta} f(x) \ - \ \inf_{y\in\Delta} f(y). \tag{6.4.11}$$

Tebranish tushunchasidan foydalanib, 6.4.2 - Teoremani navbatdagi ko'rinishda keltirish mumkin.

6.4.2* - Teorema (Riman bo'yicha integrallanish kriteriysi). *Chegaralangan f funksiyaning $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham berilgan kesmaning shunday*

$$P \ = \ \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$$

bo'linishi topilib, u uchun

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \ < \ \varepsilon \tag{6.4.12}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli, bu yerda $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$.

2. Murakkab funksiyaning integrallanishi.

Ta'rif. *Agar g funksiya $[A,B]$ kesmada aniqlangan bo'lib, shunday o'zgarmas $L > 0$ topilsaki, istalgan ikki $x \in [A,B]$ va $y \in [A,B]$ nuqtalar uchun*

$$|g(x) \ - \ g(y)| \ \le \ L|x-y| \tag{6.4.13}$$

*tengsizlik bajarilsa, g funksiya berilgan kesmada **Lipshits shartini** qanoatlantiradi deyiladi.*

6.4.1 - misol. Ushbu

$$g(x) \ = \ |x|$$

funksiya butun sonlar o'qida Lipshits shartini qanoatlantiradi. Haqiqatan,

$$|g(x)-g(y)| = |\,|x| \ - \ |y|\,| \ \le \ |x-y|,$$

ya'ni (6.4.13) shart $L = 1$ o'zgarmas bilan bajarilar ekan.

6.4.2 - misol. Ushbu

$$g(x) \ = \ x^2$$

funksiya sonlar o'qidagi ixtiyoriy kesmada Lipshits shartini qanoatlantiradi. Haqiqatan, agar $|x| \leq M$ va $|y| \leq M$ bo'lsa,

$$|g(x) - g(y)| = |x + y| \cdot |x - y| \ \leq \ 2M|x - y|,$$

ya'ni (6.4.13) shart $L = 2M$ o'zgarmas bilan bajarilar ekan.

Ravshanki, biror kesmada Lipshits shartini qanoatlantiruvchi har qanday funksiya shu kesmada uzluksiz ham bo'ladi. Haqiqatan, agar $y \to x$ bo'lsa, (6.4.13) shartdan $g(y) \to g(x)$ kelib chiqadi, qaysiki o'z navbatida, g funksiyaning x nuqtadagi uzluksizligini anglatadi. Bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas, albatta. Masalan,

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

funksiya $[0, 1]$ kesmada uzluksiz, ammo u shu kesmada Lipshits shartini qanoatlantirmasligini ko'rish qiyin emas.

Eslatma. Agar $C[a, b]$ simvol orqali $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar to'plamini, $C^1[a, b]$ simvol orqali $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini va nihoyat, $\mathrm{Lip}[a, b]$ simvol orqali $[a, b]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini belgilasak, u holda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$C^1[a, b] \ \subset \ \mathrm{Lip}[a, b] \ \subset \ C[a, b]. \tag{6.4.14}$$

O'ng tomondagi tegishlilikni biz yuqorida ko'rsatgan edik. Chapdagi tegishlilik Lagranj formulasidan va $C^1[a, b]$ dan olingan ixtiyoriy g funksiyaning hosilasi, Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra, $[a, b]$ kesmada chegaralanganligidan kelib chiqadi. Haqiqatan, ma'lumki,

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y),$$

shuning uchun

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|,$$

ya'ni $C^1[a, b]$ dan olingan har qanday funksiya Lipshits shartini qanoatlantirar ekan. Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, (6.4.14) dagi har ikkala tegishlilik qat'iydir.

6.4.4 - teorema. *Berilgan φ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, uning qiymatlari biror $[A, B]$ kesmaga tegishli bo'lsin.*

Agar g funksiya $[A, B]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantirsa,

$$f(x) = g[\varphi(x)], \quad a \leq x \leq b \tag{6.4.15}$$

murakkab funksiya ham $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. Lipshits shartiga ko'ra, $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bo'linishi olinganda hamda $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ va $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqtalar ixtiyoriy tanlanganda ham quyidagi

$$|f(\xi_k) - f(\eta_k)| \ = \ g[\varphi(\xi_k)] - g[\varphi(\eta_k)] \ \leq \ L|\varphi(\xi_k) - \varphi(\eta_k)| \ \leq L \cdot \omega(\varphi, \Delta_k)$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikning o'ng tomonida φ funksiyaning $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesmadagi tebranishi turibdi.

Demak,

$$\omega(f, \Delta_k) \ \leq \ L \cdot \omega(\varphi, \Delta_k). \tag{6.4.16}$$

Shunday ekan, (6.4.16) ni Δx_k ga ko'paytirib, k bo'yicha 1 dan n gacha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \ \leq \ L\sum_{k=1}^{n} \omega(\varphi, \Delta_k)\Delta x_k \tag{6.4.17}$$

bo'ladi.

Shartga ko'ra φ funksiya integrallanuvchi edi. Bundan chiqdi, (6.4.17) ning o'ng tomonini, P bo'linishni tanlash hisobiga, istalgan $\varepsilon > 0$ dan kichik qilish mumkin. Demak, f funksiya ham integrallanuvchi bo'lar ekan.

Q.E.D.

1 - natija. *Agar $P(t)$ ixtiyoriy ko'phad bo'lib, f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, $g(x) = P[f(x)]$ murakkab funksiya ham $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi.*

Ravshanki, $P(t)$ ko'phad uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lganligi sababli sonlar o'qining istalgan kesmasida Lipshits shartini qanoatlantiradi. Demak, natija 6.4.4 - Teoremadan kelib chiqadi.

2 - natija. *Biror kesmada integrallanuvchi ikki funksiya ko'paytmasi ham shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.*

Agar

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

tenglikni e'tiborga olsak, isbot, o'ng tomonning, yuqorida qayd qilinganidek, integrallanuvchi ekanidan kelib chiqadi.

3 - natija. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, $|f|$ funksiya ham shu kesmada integrallanuvchi bo'lib, quyidagi tengsizlik bajariladi:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.4.18}$$

Isbot. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Ma'lumki, $g(x) = |x|$ funksiya sonlar o'qining istalgan kesmasida Lipshits shartini qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, 6.4.4 - Teoremaga asosan, $g[f(x)] = |f(x)|$ murakkab funksiya ham $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Endi (6.4.18) tengsizlikni isbotlash qoldi halos. Buning uchun

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

tengsizlikni integrallab, 6.2.2 - Teoremadan foydalanamiz. Natijada,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

tengsizlikni olamiz, qaysiki, shubhasiz, (6.4.18) tengsizlikka teng kuchlidir.

Q.E.D.

Shuni aytish kerakki, teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni $|f(x)|$ funksiyaning integrallanuvchi ekanidan $f(x)$ funksiyaning integrallanuvchi ekani, umuman aytganda, kelib chiqmaydi.

6.4.3 - misol. Agar $D(x)$ Dirixle funksiyasi bo'lsa,

$$f(x) = 2D(x) - 1$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x \text{ irratsional bo'lsa.} \end{cases}$$

Shunin uchun, $|f(x)| \equiv 1$ funksiya integrallanuvchi bo'lsada, f funksiya integrallanuvchi bo'lmaydi (aks holda Dirixle funksiyasi $D(x) = [1 + f(x)]/2$ ham integrallanuvchi bo'lar edi).

§ 6.5. Integrallanuvchi funksiyalar sinflari

1. Monoton funksiyalarning integrallanuvchanligi. Integrallanish kriteriysining (6.4.2 - Teorema) sodda natijasi sifatida ixtiyoriy monoton funksiyaning integrallanuvchi ekanini ko'rsatamiz.

6.5.1 - teorema. *Kesmada monoton bo'lgan har qanday funksiya shu kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Aniqlik uchun f funksiyani $[a, b]$ kesmada o'suvchi bo'lsin, deylik. Bunda, albatta, $f(a) < f(b)$ desak bo'ladi (agar $f(a) = f(b)$ bo'lsa, f funksiya qaralayotgan kesmada o'zgarmas bo'lib, u, 6.1.1 - misolda ko'rsatilganidek, integrallanuvchi bo'ladi). Bundan tashqari, $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ berilgan kesmaning ixtiyoriy bo'linishi bo'lib, $d(P)$ uning diametri bo'lsin. U holda, ravshanki, ixtiyoriy qismiy yarim interval $[x_{k-1}, x_k)$ uchun quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$f(x_{k-1}) \;=\; m_k \;\le\; M_k \;\le\; f(x_k), \tag{6.5.1}$$

bu yerda m_k va M_k sonlar mos ravishda (6.3.2) va (6.3.6) tengliklar bilan aniqlangan aniq chegaralardir. Demak,

$$M_k - m_k \le f(x_k) - f(x_{k-1})$$

va shuning uchun,

$$\sum_{k=1}^{n}[M_k - m_k]\Delta x_k \le d(P)\sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = d(P)[f(b) - f(a)]. \tag{6.5.2}$$

Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

desak, diametri $d(P) < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'linish uchun (6.5.2) dan (6.4.5) baho kelib chiqadi. Shunday ekan, 6.4.2 - Teoremaga asosan, f funksiya integrallanuvchi bo'lar ekan.

Q.E.D.

Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, bu kesmaning shunday

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$

bo'linishi mavjud bo'lsaki, f funksiya har bir qismiy (x_{k-1}, x_k) kesmada monoton bo'lsa, u holda f funksiyani qaralayotgan kesmada *bo'lakli monoton* deymiz.

Natija. *Kesmada bo'lakli monoton bo'lgan har qanday funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.*

Haqiqatan, isbot 6.2.2 - va 6.5.1 - Teoremalardan bevosita kelib chiadi.

2. Uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchanligi. Uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchanligi tekis uzluksizlik tushunchasi yordamida o'rnatiladi.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, har qanday $x_1 \in E$ va $x_2 \in E$ nuqtalar uchun*

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{6.5.3}$$

implikatsiya o'rinli bo'lsa, f funksiya E to'plamda ***tekis uzluksiz*** *deyiladi.*

Shubhasiz, E to'plamda tekis uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya E to'plamning har biq nuqtasida uzluksiz bo'ladi. Agar E ixtiyoriy to'plam bo'lsa, teskari tasdiq o'rinli emas, albatta. Lekin E to'plam kesma bo'lganda, natija boshqacha bo'lar ekan. Chunonchi, ixtiyoriy kesmada berilgan funksiyalar uchun uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari ustma-ust tushadi.

6.5.2 - Teorema (G. Kantor). *Kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya shu kesmada tekis uzluksizdir.*

Isbot. Berilgan f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning tekis uzluksiz ekanini teskarisini faraz qilish yoli bilan isbotlaymiz. Shunday qilib, f funksiya $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'lmasin deylik. Bundan chiqdi, quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\varepsilon_0 > 0$ son topiladi:

ixtiyoriy $\delta > 0$ son olganda ham, uning qanday kichik bo'lishidan qat'iy nazar, $[a,b]$ kesmadan doim shunday ikki x' va x'' nuqtalar topiladiki, ular uchun

$$|x' - x''| < \delta \tag{6.5.4}$$

bo'lib, f funksiya uchun esa, (6.5.3) tengsizlikka teskari tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$|f(x') - f(x'')| \ \geq \ \varepsilon_0. \tag{6.5.5}$$

(6.5.4) da δ ning ixtiyoriy musbat sonligidan foydalanib, unga ketma-ket $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ qiymatlarni beramiz. (6.5.4) va (6.5.5) tengsizliklarga asosan, har bir shunday δ_n uchun $[a,b]$ kesmdan shunday ikki x'_n va x''_n nuqtalar topiladiki,

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \tag{6.5.6}$$

bo'lib,

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \ \geq \ \varepsilon_0 \tag{6.5.7}$$

tengsizlik bajariladi.

Bolsano-Veyershtrass (2.4.1 - Teorema) teoremasiga asosan, $\{x'_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Belgilashlarda chalkashmaslik maqsadida, qismiy ketma-ketlikni qayta nomerlab, $\{x'_n\}$ ketma-ketlikning o'zi biror $c \in [a,b]$ songa intiladi deyishimiz mumkin. U holda, (6.5.6) bahodan, $\{x''_n\}$ ketma-ketlikning ham xuddi shu c soniga yaqinlashishi kelib chiqadi. Shartga ko'ra, f funksiya $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida uzluksiz edi. Shuning uchun,

$$f(x'_n) \to f(c), \quad f(x''_n) \to f(c), \quad n \to \infty,$$

bu esa (6.5.7) tengsizlikka ziddir.

Q.E.D.

Funksiya tebranishi tushunchasidan foydalanib (oldingi bandga qarang), funksiyaning kesmadagi tekis uzluksizligi ta'rifini quyidagi ko'rinishda ham keltirish mumkin. Biz $|\Delta|$ simvol orqali Δ kesmaning uzunligini belgilaganimizni eslatib o'tamiz.

6.5.1 - tasdiq. *Berilgan f funksiyaning $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'lishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, uzunligi δ dan kichik bo'lgan har qanday $\Delta \subset [a,b]$ kesmada f funksiyaning tebranishi ε dan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni istalgan $\Delta \subset [a,b]$ kesma uchun quyidagi implikatsiyaning bajarilishi zarur va yetarli:*

$$|\Delta| < \delta \quad \Rightarrow \quad \omega(f,\Delta) \ < \ \varepsilon. \tag{6.5.8}$$

Darhaqiqat, agar $\Delta = [x_1, x_2]$ desak, $E = [a, b]$ bo'lgan holda (6.5.3) va (6.5.8) implikatsiyalarning teng kuchliligiga shubha yoq.

6.5.3 - teorema. *Kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya shu kesmada integrallanuvchidir.*

Isbot. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda, 6.5.3 - Teoremaga ko'ra, u shu kesmada tekis uzluksiz ham bo'ladi. Shunday ekan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, u uchun (6.5.8) implikatsiya o'rinli bo'ladi.

Endi $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ orqali $[a, b]$ kesmaning shunday bo'linishini belgilaylikki, uning diametri δ dan kichik bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $k = 1, 2, ..., n$ uchun $x_k - x_{k-1} < \delta$ bo'lsin. U holda, (6.5.8) shartga ko'ra,

$$\omega(f, \Delta_k) \ < \ \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Demak,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \ < \ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot \Delta x_k = \varepsilon(b - a). \tag{6.5.9}$$

Mazkur bahodan, P bo'linishni tanlash hisobiga, (6.5.9) ning chap tomonidagi ifodani istalgancha kichik qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu esa f funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini anglatadi (6.4.2* - Teoremaga qarang).

Q.E.D.

Agar f funksiya berilgan kesmaning, oshib borsa biror chekli songagi nuqtalaridan tashqari, barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lib, o'sha chekli sondagi nuqtalarda birinchi turdagi uzilishga ega bo'lsa, bunday funksiyani qaralayotgan kesmada *bo'lakli uzluksiz* deymiz.

Natija. *Kesmada bo'lakli uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.*

Haqiqatan, ravshanki, har qanday bo'lakli uzluksiz funksiyani biri uzluksiz va ikkinchisi pog'onasimon bo'lgan ikki funksiya yig'indisi sifatida yozish mumkin. Ma'lumki, bunday ikki funksiyaning har biri integrallanuvchi bo'ladi. Demak, ularning yig'indisi ham integrallanuvchidir.

3. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral. Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, 6.4.3 - Teoremaga ko'ra, u istalgan kichikroq kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi va demak, ixtiyoriy $x \in [a, b]$ uchun quyidagi funksiyani aniqlash mumkin:

$$F(x) \ = \ \int_a^x f(t)\, dt. \tag{6.5.10}$$

Mazkur (6.5.10) funksiya *yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral* deyiladi.

Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, (6.5.10) integral shu kesmada uzluksiz funksiya bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Biz bundanda kuchliroq natijani, ya'ni qayd qilingan integral $[a, b]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiya ekanini isbotlaymiz.

6.5.4 - teorema. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan (6.5.10) integral shu kesmada Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiya bo'ladi.*

Isbot. Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, 6.1.1 - Teoremaga ko'ra, u shu kesmada chegaralangan bo'ladi, ya'ni

$$|f(x)| \ \leq \ M, \quad a \leq x \leq b.$$

Shuning uchun, (6.4.12) tenglikni va (6.4.22) bahoni hisobga olib, $a \le x < y \le b$ bo'lganda talab qilingan natijaga ega bo'lamiz:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le \int_x^y M\,dt = M|y-x|.$$

Q.E.D.

Har qanday Riman bo'yicha inegrallanuvchi f funksiya uchun biz yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan (6.5.10) integralni $[a, b]$ kesmaning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'ladi deya olmaymiz. Ammo f funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtalarda hosila mavjud bo'lib, u f ning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi.

6.5.1 - misol. $[-1, 1]$ kesmada berilib, $x = 0$ nuqtada birinchi turdagi uzilishga ega bo'lgan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } -1 \le x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } \quad 0 \le x \le 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Sodda hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, unga mos yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

integral quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = \frac{x + |x|}{2}.$$

Bevosita bu tenglikdan $F(x)$ funksiyaning noldan farqli barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib, $x = 0$ nuqtaning o'zida esa differensiallanuvchi emasligi kelib chiqadi. Bu hol tasodifiy emas, chunki integral ostidagi funksiya aynan $x = 0$ nuqtada uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

6.5.5 - teorema. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi va $c \in [a, b]$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan (6.5.10) integral c nuqtada hosilaga ega bo'lib, quyidagi tenglik bajariladi:*

$$F'(c) = f(c).$$

Isbot. Shartga ko'ra, f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, c nuqtada uzluksiz bo'lsin. Bundan chiqdi, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki,

$$|x - c| < \delta \quad \text{bo'lganda} \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{bo'ladi.} \tag{6.5.11}$$

Faraz qilaylik, $c + h \in [a, b]$ bo'lsin. Navbatdagi tenglikni qaraymiz:

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x)\,dx - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} [f(x) - f(c)]\,dx.$$

Agar $0 < |h| < \delta$ bo'lsa, (6.5.11) ga ko'ra, oxirgi integralda integral ostidagi funksiya absolyut qiymati bo'yicha ε dan katta bo'lmaydi. Shuning uchun,

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \le \varepsilon \cdot \frac{1}{h} \int_c^{c+h} dx = \varepsilon.$$

Demak,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$$

ekan.

Q.E.D.

Natija. *Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan (6.5.10) integral shu kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi tenglik bajariladi:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \le x \le b. \tag{6.5.12}$$

Shunday qilib, biror kesmada uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiya shu kesmada boshlang'ich funksiyga ega bo'lishi isbotlandi. Xususan, har qanday elementar funksiya boshlang'ich funksiyaga ega (albatta, bunday boshlang'ich funksiyning elementar funksiya bo'lishi shart emas).

4. Aniq integrallarni hisoblash qoidalari.

6.5.2 - tasdiq (o'zgaruvchini almashtirish qoidasi). *Berilgan g funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, uning qiymatlar to'plami $[a,b]$ kesma bo'lsin. Bundan tashqari,*

$$g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b$$

tengliklar bajarilsin.

Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)\,dt \tag{6.5.13}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. 6.5.5 - Teoremaning natijasiga ko'ra, f funksiya F boshlang'ich funksiyaga ega. Shunday ekan,

$$\Phi(t) = F[g(t)], \quad \alpha \le t \le \beta,$$

murakkab funksiya

$$\Phi'(t) = F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t)$$

hosilaga ega. Demak, N'yuton-Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \Phi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F[g(\beta)] - F[g(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Q.E.D.

6.5.2 - misol. Integralni hisoblang:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx$$

Agar $t = \operatorname{tg} x$ almashtirish bajarsak, quyidagi natijani olamiz:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}.$$

6.5.3 - tasdiq (bo'laklab integrallash qoidasi). *Agar u va v funksiyalar $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lib, ularning hosilalari shu kemada integrallanuvchi bo'lsa, quyidagi tenglik bajariladi:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx. \tag{6.5.14}$$

Isbot. Ravshanki, $u(x)v(x)$ ko'paytma

$$u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$$

funksiya uchun boshlang'ich funksiyadir. Demak, N'yuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b .$$

Q.E.D.

6.5.3 - misol. Integralni hisoblang:

$$I = \int_1^2 x \ln x\, dx.$$

Agar $u = \ln x$ va $dv = xdx$ deb, bo'laklab integrallash qoidasini qo'llasak, quyidagi natijani olamiz:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

6.5.4 - tasdiq (integral ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi). *Agar n manfiy bo'lmagan butun son bo'lib, f funksiya a nuqtaning biror atrofida $(n + 1)$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda o'sha atrofdan olingan har qanday x uchun quyidagi tenglik bajariladi:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!} +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{6.5.15}$$

Isbot. Agar $n = 0$ bo'lsa, (6.5.15) tenglik

$$f(x) \;=\; f(a) + \int_a^x f'(t)\;dt$$

ko'rinishga kelib, N'yuton-Leybnist formulasi bilan ustma-ust tushadi. Endi matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Buning uchun

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \tag{6.5.16}$$

tenglik o'rinli deb faraz qilib, bundan (6.5.15) tenglik haq ekanini keltirib chiqaramiz. Ana shu maqsadda (6.5.16) dagi integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)!}\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n} f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Hosil bo'lgan ifodani (6.5.16) ga qo'ysak, talab qilingan (6.5.15) tenglikni olamiz.

5. O'rta qiymat formulasi. Biror $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lgan f funksiyani qaraymiz.
Ta'rif. *Berilgan f funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi* ***o'rta qiymati*** *deb quyidagi kattalikka aytiladi:*

$$E(f) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.5.17}$$

Masalan, agar $[a, b]$ kesmani uzunligi $l = (b - a)$ ga teng bo'lgan biror metal g'o'laning matematik ideallashtirilgani deb qarasak va funksiyaning $f(x)$ qiymatini $x \in [a, b]$ nuqtadagi temperatura desak, u holda (6.5.17) kattalik metal g'o'laning o'rtacha temperaturasini anglatadi. Shubhasiz, agar f funksiya o'zgarmas bo'lsa, ya'ni $f(x) = c$ desak, o'rtacha qiymat ham c ga teng bo'ladi.

Ushbu misolda g'o'la bir jinsli deb faraz qilingan edi. Bordiyu g'o'laning zichligini o'zgaruvchi deb, uning x nuqtadagi qiymatini $\rho(x)$ ga teng desak, u holda o'rtacha qiymat sifatida quyidagi kattalik olinadi:

$$E_\rho(f) \;=\; \frac{1}{I(\rho)}\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{6.5.18}$$

bu yerda

$$I(\rho) \;=\; \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{6.5.19}$$

Odatda $\rho(x) \geq 0$ va $I(\rho) > 0$ deb faraz qilinadi.

Shuni aytish kerakki, bu umumiy holda ham o'zgarmasning o'rtacha qiymati o'sha songa teng o'zgarmas bo'ladi.

Matematik adabiyotlarda o'rta qiymat haqidagi teorema odatda navbatdagi ko'rinishda keltiriladi.

6.5.6 - teorema. *Berilgan f va ρ funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ρ quyidagi shartni qanoatlantirsin:*

$$\rho(x) \ \geq \ 0, \quad a \leq x \leq b. \tag{6.5.20}$$

Agar

$$m(f) = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \qquad M(f) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \tag{6.5.21}$$

desak,

$$m(f) \ \leq \ \mu \ \leq M(f) \tag{6.5.22}$$

shartni qanoatlantiruvchi shunday μ son topiladiki, u uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx = \ \mu \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{6.5.23}$$

Isbot. Yuqoridagi (6.5.21) belgilashga ko'ra, barcha $x \in [a,b]$ lar uchun

$$m(f) \ \leq f(x) \ \leq M(f)$$

tengsizlik o'rinli. Bu qo'shaloq tengsizlikni hadma-had $\rho(x) \geq 0$ ga ko'paytiramiz:

$$m(f) \cdot \rho(x) \ \leq \ f(x) \cdot \rho(x) \ \leq \ M(f) \cdot \rho(x).$$

Endi bu tengsizlikni integrallasak,

$$m(f) \cdot I(\rho) \ \leq \int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx \leq \ M(f) \cdot I(\rho) \tag{6.5.24}$$

bo'ladi, bu yerda $I(\rho)$ (6.5.19) tenglik bilan aniqlangan kattalikdir.

Agar $I(\rho) > 0$ bo'lsa,

$$\mu \ = \frac{1}{I(g)} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{6.5.25}$$

deb belgilaymiz. Buday aniqlangan μ soni uchun (6.5.23) tenglik o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Bundan tashqari, (6.5.22) shart bevosita (6.5.24) dan kelib chiqadi.

Bordiyu $I(\rho) = 0$ bo'lsa, (6.5.24) tengsizlikka ko'ra, (6.5.23) tenglikning har ikki tomonidagi integrallar nolga teng bo'lib, (6.5.23) tenglik, albatta, istalgan μ uchun bajariladi.

Q.E.D.

1 - eslatma. Agar $I(\rho) > 0$ bo'lsa, (6.5.18) tenglik bilan aniqlangan o'rta qiymat uchun quyidagi ikki tomonlama baho o'rinli bo'ladi:

$$m(f) \ \leq \ E_\rho(f) \ \leq \ M(f). \tag{6.5.26}$$

Haqiqatan, (6.5.18) va (6.5.25) tengliklarga ko'ra $\mu = E_\rho(f)$. Demak, (6.5.22) va (6.5.26) baholar ustma-ust tushar ekan.

Shunday qilib, har qanday funksiyaning (6.5.18) ko'rinishdagi o'rta qiymati bu funksiyaning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari orasida yotadi.

1 - natija (birinchi o'rta qiymat formulasi). *Agar 6.5.6 - Teoremada f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda berilgan kesmada shunday ξ nuqta topiladiki, u uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi:*

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{6.5.27}$$

Ushbu formulani isbotlash uchun avval kesmada uzluksiz har qanday funksiya shu kesmada o'zining maksimum va minimumlari orasida yotgan barcha qiymatlarni qabul qilishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, Veyershtassning ikkinchi teoremasiga binoan (3.5.5 - Teorema), $[a,b]$ kesmada shunday α va β nuqtalar topiladiki, ular uchun

$$m(f) = \min_{a\le x\le b} f(x) = f(\alpha), \qquad M(f) = \max_{a\le x\le b} f(x) = f(\beta)$$

bo'ladi. Shunday ekan, 3.5.3 - Teoremaga ko'ra, (6.5.22) shartni qanoatlantiruvchi har qanday μ son uchun shunday $\xi \in [\alpha,\beta]$ nuqta topiladiki, u uchun $f(\xi)=\mu$ tenglik bajariladi. Demak, (6.5.27) tenglik (6.5.23) dan kelib chiqadi.

Agar (6.5.27) formulada $\rho(x)\equiv 1$ desak, sodda almashtirishlardan keyin,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \tag{6.5.28}$$

tenglik hosil bo'ladi. Demak, $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya o'zining o'rta qiymatini shu kesmaning biror nuqtasida qabul qiladi. Odatda ana shu (6.5.28) formulani *birinchi o'rta qiymat formulasi* deb atashadi.

2 - natija (ikkinchi o'rta qiymat formulasi). *Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz f funksiya va differensiallanuvchi g funksiya berilgan bo'lsin. Bundan tashqari, g funksiyaning hosilasi shu kesmada integrallanuvchi bo'lib, $g'(x)\ge 0$ bo'lsin. U holda $[a,b]$ da shunday ξ nuqta topiladiki, u uchun*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \tag{6.5.29}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Natijani isbotlash uchun

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a\le x\le b,$$

deb belgilaylik.

U holda (6.5.12) tenglikka ko'ra, $F'(x)=f(x)$. Shunday ekan, bo'laklab integrallasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,g(x)\,dx =$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{6.5.30}$$

Shartga ko'ra $g'(x) \geq 0$ ekan, biz oxirgi integralga birinchi o'ta qiymat formulasini qo'llashimiz mumkin. Demak,

$$\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx = F(\xi)[g(b) - g(a)],$$

bu yerda ξ nuqta $[a, b]$ kesmaning biror nuqtasidir.

Bu munosabatni (6.5.30) tenglikka qo'ysak va $F(a) = 0$ ekanini hisobga olsak,

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)F(\xi) + g(b)[F(b) - F(\xi)]$$

formulani olamiz. Ravshanki, bu tenglik talab qilingan (6.5.29) formulaning o'zidir.

Ikkinchi o'rta qiymat formulasini Bonne formulasi ham deyishadi.

2 - eslatma. Bonne formulasi nisbatan umumiyroq holda ham o'rinli ekanini qayd etamiz. Chunonchi, $[a, b]$ kesmada f funksiya integrallanuvchi bo'lib, g funksiya esa faqat monoton bo'lgan holda ham bu formula o'rinlidir. Ammo bunda (6.5.29) formulaning isboti ancha murakkablashadi.

§ 6.6. Xosmas integrallar

Yuqorida biz chegaralangan f funksiyadan chegaralangan $[a, b]$ kesmada olingan integral tushunchasini kiritdik. Ammo, ko'p hollarda chegaralanmagan oraliqda olingan, yoki chegaralanmagan funksiyadan olingan integrallarni o'rganishga to'g'ri keladi. Bunday integrallar xosmas deb atalib, ular integral yig'indilarining limiti sifatida emas, balki biz yuqorida o'rgangan («xos») integrallarning limiti sifatida aniqlanadi.

1. Birinchi turdagi xosmas integrallar.

1. Mazkur bandda biz chegaralanmagan oraliqda olingan integrallarni chegaralangan oraliqda olingan integrallar limiti sifatida aniqlaymiz.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x \geq a$ da aniqlangan bo'lib, istalgan $A > a$ uchun $[a, A]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Agar*

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx \tag{6.6.1}$$

*limit mavjud bo'lsa, u f funksiyadan olingan **birinchi turdagi xosmas integral** deyiladi va*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{6.6.2}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Bunda (6.6.2) xosmas integral *yaqinlashadi* deyishadi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx \tag{6.6.3}$$

deb yozishadi.

Agarda (6.6.1) limit mavjud bo'lmasa, (6.6.2) xosmas integral *uzoqlashadi* deyiladi.

Shuni aytish joizki, (6.6.3) tenglik isbotlanmaydi; u yaqinlashuvchi xosmas integral qiymatining ta'rifi deb qabul qilinadi.

6.6.1 - misol. Agar $a > 0$ bo'lsa, $p \in \mathbf{R}$ ning quyidagi

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \tag{6.6.4}$$

xosmas integral yaqinlashadigan barcha qiymatlari topilsin.

Avval $p \neq 1$ deylik. U holda har qanday $A > a$ uchun

$$\int_a^A \frac{dx}{x^p} = \frac{A^{1-p} - a^{1-p}}{1-p}. \tag{6.6.5}$$

Ravshanki, (6.6.5) tenglik o'ng tomonining $A \to +\infty$ dagi limiti faqat va faqat $p > 1$ bo'lganda mavjuddir. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}, \quad p > 1, \quad a > 0, \tag{6.6.6}$$

bo'ladi.

Bordiyu $p < 1$ bo'lsa, (6.6.5) tenglikning o'ng tomoni $A \to +\infty$ da $+\infty$ ga uzoqlashadi. Nihoyat, agar $p = 1$ bo'lsa,

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln\frac{A}{a}$$

tenglikka ega bo'lamiz va ushbu holda ham limit $+\infty$ ga tengdir. Buni odatda quyidagicha yozishadi:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty, \quad p \leq 1, \quad a > 0.$$

Shunday qilib, (6.6.4) birinchi turdagi xosmas integral $p > 1$ da yaqinlashib, $p \leq 1$ da esa uzoqlashar ekan.

Agar ahamiyat bersak, xosmas (6.6.2) integralning yaqinlashishi $A \to +\infty$ da ushbu

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$$

funksiyaning limiti mavjudligini anglatadi. Shuning uchun, xosmas integralning yaqinlashish kriteriysi sifatida funksiyaning cheksizlikdagi limiti mavjudligi uchun Koshi kriteriysini olsak bo'ladi.

6.6.1 - Teorema (Koshi kriteriysi). *Xosmas (6.6.2) integralning yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A = A(\varepsilon)$ son topilib, bu son uchun quyidagi implikatsiyaning bajarilishi zarur va yetarlidir:*

$$(A' > A) \wedge (A'' > A) \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{6.6.7}$$

Isbot 3.2.2 - Teoremadan bevosita kelib chiqadi.

Navbatdagi teoremada xosmas integralning chiziqlilik xossasi o'rnatiladi.

6.6.2 - teorema. *Agar f va g funksiyalardan a dan $+\infty$ gacha olingan xosmas integrallar yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy λ va μ haqiqiy sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ yig'indidan olingan integral ham yaqinlashadi va quyidagi tenglik bajariladi:*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx + \mu \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{6.6.8}$$

Isbot. Yig'indidan olingan integralning yaqinlashishi quyidagi

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx \right| \;\le\; |\lambda| \left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| + |\mu| \left| \int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx \right|$$

tengsizlik va (6.6.7) Koshi kriteriysidan bevosita kelib chiqadi. (6.6.8) tenglik esa aniq integral va limitning chiziqlilik xossasi natijasidir.

2. Agar teoremada xosmas integrallarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi uchun yetarlilik shartlar o'rnatilgan bo'lsa, bunday teorema matematik adabiyotlarda yaqinlashish yoki uzoqlashish alomati deb nomlanadi. Navbatdagi yaqinlashish alomati o'rganilayotgan integralni yaqinlashishi avvaldan ma'lum bo'lgan integral bilan taqqoslashga asoslangandir.

6.6.3 - Teorema(taqqoslashning umumiy alomati). *Faraz qilaylik, $g(x) \ge 0$ funksiya berilib,*

$$\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx \tag{6.6.9}$$

integral yaqinlashsin. Agar f funksiya istalgan $A > a$ uchun $[a, A]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$|f(x)| \;\le\; g(x) \tag{6.6.10}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, (6.6.2) xosmas integral ham yaqinlashadi.

Isbot bevosita 6.6.1 - Teoremadan kelib chiqadi.

Yuqorida o'rganilgan 6.6.1 - misol yordamida biz taqqoslayotgan $g(x)$ funksiymizni aniq ko'rinishda tanlab olishimiz mumkin.

6.6.4 - Teorema (taqqoslashning hususiy alomati). *Faraz qilaylik, $a > 0$ bo'lib, f funksiya har qanday $A > a$ uchun $[a, A]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin.*

1) *Agar biror $p > 1$ uchun*

$$|f(x)| \le \frac{C}{x^p}, \quad x \ge a > 0, \quad p > 1, \quad C > 0, \tag{6.6.11}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (6.6.2) xosmas integral yaqinlashadi.

2) *Agar biror $p \le 1$ uchun*

$$f(x) \ge \frac{C}{x^p}, \quad x \ge a > 0, \quad p \le 1, \quad C > 0, \tag{6.6.12}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (6.6.2) xosmas integral uzoqlashadi.

Isbot. Agar 6.6.1 - misolning natijasidan foydalansak, teoremaning birinchi qismi bevosita 6.6.3 - Teoremadan va ikkinchi qismi esa, 6.2.3 - Teoremadan kelib chiqadi.

3. Navbatdagi alomat asosan integral ostidagi funksiya ossilyatsiyalanganda, ya'ni turli ishorali qiymatlar qabul qilib tebrangan holda qo'llaniladi.

6.6.5 - Teorema (Dirixle-Abel alomati). *Faraz qilaylik,*

1) f funksiya $x \ge a$ yarim to'g'ri chiziqda uzluksiz bo'lib, uning

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{6.6.13}$$

boshlang'ich funksiyasi shu yarim to'g'ri chiziqda chegaralangan bo'lsin;

2) g funksiya $x \ge a$ yarim to'g'ri chiziqda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$g(x) \ge 0, \quad g'(x) \le 0, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0. \tag{6.6.14}$$

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \tag{6.6.15}$$

xosmas integral yaqinlashadi.

Isbot. Koshi kriteriysidan foydalanish maqsadida quyidagi integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)\,g(x)\,dx = F(A'')g(A'') - F(A')g(A') - \int_{A'}^{A''} F(x)g'(x)dx, \tag{6.6.16}$$

bu yerda F funksiya (6.6.13) tenglik orqali aniqlangan. Shartga ko'ra, bu funksiya chegaralangan:

$$|F(x)| \le M, \quad x \ge a.$$

Shunday ekan, (6.6.16) tenglikka asosan,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,g(x)\,dx\right| \le M[g(A'') + g(A')] + M\int_{A'}^{A''} |g'(x)|\,dx. \tag{6.6.17}$$

Hosilasiga (6.6.14) da qo'yilgan shartga ko'ra, $|g'(x)| = -g'(x)$. Shuning uchun, (6.6.17) ning o'ng tomonidagi integral $g(A') - g(A'')$ ga teng. Demak,

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq 2Mg(A'). \tag{6.6.18}$$

Teorema shartiga asosan ((6.6.14) ga qarang), g funksiyaning cheksizlikdagi limiti nolga teng. Bundan chiqdi, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A = A(\varepsilon)$ topiladiki, $A' > A$ bo'lganda

$$g(A') \; < \; \frac{\varepsilon}{2M}$$

tengsizlik bajariladi. Agar bu bahoni (6.6.18) ga qo'ysak,

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, Koshi kriteriysiga (6.6.1 - Teorema) asosan, (6.6.15) integral yaqinlashar ekan.

Q.E.D.

6.6.2 - misol. Quyidagi integralni yaqinlashishga tekshiring:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad p > 0. \tag{6.6.19}$$

Agar

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^p}$$

desak, Dirixle-Abel alomatining barcha shartlari bajarilishini tekshirish qiyin emas. Demak, bu alomatga binoan (6.6.19) integral yaqinlashadi.

Dirixle-Abel alomati yordamida xosmas integrallarning uzoqlashishini ham ko'rsatish mumkin.

6.6.3 - misol. Ushbu

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \tag{6.6.20}$$

xosmas integralning uzoqlashishini ko'rsating.

Buning uchun quyidagi tenglikdan foydalanamiz:

$$\frac{1}{x} = \frac{\cos 2x}{x} + 2\frac{\sin^2 x}{x}. \tag{6.6.21}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi kasrdan olingan xosmas integral Dirixle-Abel alomatiga asosan yaqinlashadi. Ravshanki, bu yerdagi ikkinchi kasrdan olingan xosmas integral (6.6.20) dagi integralni ikkilanganiga teng. Shunday ekan, agar (6.6.20) integral yaqinlashganda edi, 6.6.2 - Teoremaga ko'ra, (6.6.21) tenglikning chap tomonida turgan kasrdan olingan xosmas integral ham yaqinlashar edi. Ammo, 6.6.1 - misolda ko'rsatilganidek, bu integral uzoqlashadi. Demak, (6.6.20) integral ham uzoqlashar ekan.

Shuni aytish zarurki, navbatdagi misolda ko'rsatilganidek, birinchi turdagi xosmas integralning yaqinlashishidan integral ostidagi funksiyaning na faqat cheksizlikda nolga intilishi, xattoki uning chegaralanganligi ham kelib chiqmaydi.

6.6.4 - misol. Quyidagi xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring:

$$\int_1^{+\infty} x^q \sin(x^p)\, dx, \quad p > 0, \quad q \geq 0. \tag{6.6.22}$$

Buning uchun, ko'paytmasi (6.6.22) integral ostidagi funksiyaga teng bo'lgan

$$f(x) = x^{p-1}\sin(x^p), \quad g(x) = x^{q-p+1}$$

funksiyalarni qaraymiz.

Ravshanki, $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri chegaralangan $-\dfrac{1}{p}\cos(x^p)$ funksiya bo'lib, $g(x)$ funksiya esa, $q - p + 1 < 0$ shart bajarilganda, cheksizlikda nolga monoton yaqinlashadi. Shunday ekan, Dirixle-Abel alomatiga ko'ra,

$$p > q + 1$$

shart bajarilganda (6.6.22) xosmas integral yaqinlashadi.

Ammo, q yuqoridagi shartni qanoatlantirgan holda, istalgancha katta musbat son bo'la oladi. Bundan chiqdi, yarim to'g'ri chiziqda yaqinlashuvchi integral ostidagi funksiya shu sohada chegaralanmagan bo'lishi ham mumkin ekan.

4. Xosmas integrallarni hisoblashda o'rniga qo'yish (o'zgaruvchilarni almashtirish) va bo'laklab integrallash usullaridan foydalaniladi.

6.6.1 - tasdiq (o'zgaruvchilarni almashtirish). *Faraz qilaylik, $g(t)$ funksiya $t \geq \alpha$ yarim to'g'ri chiqda uzluksiz differenaiallanuvchi bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1) $g(\alpha) = a$;
2) $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$;
3) $g'(t) \geq 0, \quad \alpha \leq t < +\infty$.

Agar $f(x)$ funksiya $x \geq a$ yarim to'g'ri chiziqda uzluksiz bo'lsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_\alpha^{+\infty} f[g(t)]g'(t)\, dt \tag{6.6.23}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, bu xosmas integrallarning birini yaqinlashishidan ikkinchisining ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Isbot. $A > a$ va $B > \alpha$ sonlar $A = g(B)$ tenglik bilan bog'langan bo'lsin. U holda, 6.5.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\int_a^{A} f(x)\, dx = \int_\alpha^{B} f[g(t)]g'(t)\, dt. \tag{6.6.24}$$

Yuqoridagi 3) shartga asosan, $A \to +\infty$ intilish $B \to +\infty$ intilishga ekvivalentdir, shuning uchun isbotlanayotgan tasdiq (6.6.24) tenglikdan kelib chiqadi.

Q.E.D.

6.6.2 - tasdiq (bo'laklab integrallash). *Berilgan u va v funksiyalar $x \geq a$ yarim to'g'ri chiziqda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi limit mavjud bo'lsin:*

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) \;=\; B.$$

U holda,

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx \;=\; B \;-\; u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx, \tag{6.6.25}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, ikki xosmas integralning birini yaqinlashishidan ikkinchisining ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Isbot. 6.5.2 - tasdiqqa ko'ra, istalgan $A > a$ uchun,

$$\int_a^{A} u(x)v'(x)\,dx = \; u(A)v(A) \;-\; u(a)v(a) \;- \int_a^{A} v(x)u'(x)\,dx$$

tenglik bajariladi.

Bu tenglikda $A \to +\infty$ deb limitga o'tsak, talab qilingan tasdiqni olamiz.

Q.E.D.

5. Xuddi yuqoridagidek, $(-\infty, a)$ yarim to'g'ri chiziq bo'yicha olingan birinchi tur xosmas integral ham aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \;=\; \lim_{A\to-\infty} \int_A^{a} f(x)\,dx. \tag{6.6.26}$$

Xosmas (6.6.26) integral ham xuddi (6.6.2) integral ega bo'lgan xossalarga ega.

Endi butun sonlar o'qi bo'yicha olingan birinchi tur xosmas integralni o'rga-namiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{6.6.27}$$

Agar ikki karrali limit

$$\lim_{A\to-\infty,\, B\to+\infty} \int_A^{B} f(x)\,dx \tag{6.6.28}$$

mavjud bo'lsa, (6.6.27) xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi va bu limit (6.6.27) xosmas integral qiymati sifatida qabul qilinadi.

Istalgan haqiqiy a son uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{6.6.29}$$

tenglik bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Bunda (6.6.29) tenglikning chap tomonidagi xosmas integral faqat va faqat bu tenglikning o'ng tomonidagi har ikkala xosmas integrallar yaqinlashgandagina yaqinlashadi.

2. Xosmas integrallarning absolyut va shartli yaqinlashishi.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x \geq a$ da aniqlangan bo'lib, har bir $[a, A]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Agar*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \tag{6.6.30}$$

xosmas integral yaqinlashsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{6.6.31}$$

xosmas integral ***absolyut yaqinlashadi*** *deyiladi.*

Bevosita 6.6.3 - Teoremadan har qanday absolyut yaqinlashuvchi xosmas integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

6.6.5 - misol. Quyidagi integralni absolyut yaqinlashishga tekshiring:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx.$$

Bu integral absolyut yaqinlashadi, chunki 6.6.3 - Teoremaga asosan, quyidagi integral yaqinlashadi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\, dx.$$

Ta'rif. *Agar (6.6.31) integral yaqinlashib, (6.6.30) integral uzoqlashsa, (6.6.31) xosmas integral* ***shartli yaqinlashadi*** *deyiladi.*

6.6.6 - misol. Quyidagi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{6.6.32}$$

integral shartli yaqinlashadi. Haqiqatan, Dirixle-Abel alomatiga ko'ra, bu integral yaqinlashadi, ammo, o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \qquad x > 0,$$

tengsizlikdan foydalanib, (6.6.20) integralning uzoqlashishini hisobga olsak, ushbu

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

integralning uzoqlashishini ko'ramiz. Ravshanki, bundan (6.6.32) integralning shartli yaqinlashishi kelib chiqadi.

3. Xosmas integralning bosh qiymati. Ko'pgina muhim tadbiqlarda (6.6.28) ko'rinishdagi ikki karrali limitga o'tayotgan vaqtda qo'shimcha ravishda $A = -B$ shart talab qilinadi, ya'ni integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan deb hisoblanadi. Bunda hosil bo'lgan xosmas integral maxsus nomga ega.

Ta'rif. *Berilgan f funksiya $\boldsymbol{R}$ butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, bu o'qning har bir kesmasida integrallanuvchi bo'lsin. Agar*

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx \tag{6.6.33}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda f funksiyani $\boldsymbol{R}$ da Koshi bo'yicha integrallanuvchi deymiz.

Bu limit f funksiyadan olingan *xosmas integralning bosh qiymati* yoki *Koshi ma'nosidagi integral* deyiladi va quyidagi ko'rinishda belgilanadi:

$$\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx. \tag{6.6.34}$$

Bunda ikki V.p. xarflar fransuzcha «bosh qiymat»ni anglatuvchi «valeur principal» so'zlarining bosh harflaridir.

6.6.7 - misol. Agar f toq funksiya bo'lsa, ya'ni $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{-A}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{A} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{A} f(x)\,dx,$$

shuning uchun,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = -\int_{0}^{A} f(x)\,dx + \int_{0}^{A} f(x)\,dx = 0.$$

Demak, toq funksiya uchun quyidagi tenglik bajarilar ekan:

$$\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$

4. Ikkinchi turdagi xosmas integrallar.

1. Ma'lumki, 6.1.1 - Teoremaga ko'ra, kesmada integrallanuvchi har qanday funksiya shu kesmada chegaralangan bo'lishi shart, aks holda integral yig'indilarining limiti mavjud bo'lmaydi, xuddi shunday, Darbuning quyi va yuqori yig'indilari ham ma'noga ega bo'lmaydi. Ammo, ba'zi muhim hollarda, chegaralanmagan funksiyadan ham olingan integralga aniq bir ma'no berish mumkin.

Masalan,

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \le 1, \tag{6.6.35}$$

funksiyani qaraylik.

Biz bu funksiyaning $[0,1]$ kesmada integrallanishi haqida gapira olmaymiz, chunki bu kesma nuqtalaridan birida, ya'ni 0 nuqtada, qaralayotgan funksiya aniqlanmagan.

Faraz qilaylik, nol nuqtada biz bu funksiyani $f(0) = A$ deb aniqladik ham deylik. Endi f funksiya $[0,1]$ kesmaning barcha nuqtalarida aniqlangan bo'ldi. Ammo, biz A sonni qanday tanlashimizdan qat'iy nazar, ravshanki, f funksiya $[0,1]$ kesmada chegaralangan bo'la olmaydi, natijada, bu kesmada u Riman bo'yicha integrallanuvchi ham bo'lmaydi.

Endi boshqacha yol tutaylik. Agar $0 < \varepsilon < 1$ bo'lsa, (6.6.35) funksiya ixtiyoriy $[\varepsilon, 1]$ kesmada uzluksizdir va demak, integrallanuvchi ham bo'ladi. Bu funksiyani $[\varepsilon, 1]$ kesmada N'yuton-Leybnits formulasidan foydalanib integrallaymiz:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \;=\; 2\sqrt{x}\,\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1} \;=\; 2 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Shubhasiz, $\varepsilon \to 0$ da integral 2 soniga yaqinlashadi va shuning uchun, (6.6.35) funksiaydan $[0,1]$ kesma bo'yicha olingan integralning qiymatini 2 ga teng deb hisoblashimiz tabi'iydir.

O'rganilgan misol umumiy holga o'tish uchun asos bo'la oladi.

Ta'rif. *Berilgan f funksiya $(a,b]$ yarim intervalda aniqlangan bo'lib, $0 < \varepsilon < b - a$ intervaldan olingan har qanday ε uchun $[a+\varepsilon, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin.*

Agar

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \; I$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit f funksiyadan olingan ***ikkinchi tur xosmas integral*** *deyiladi. Bunda f funksiya $[a,b]$ kesmada xosmas ma'noda integrallanuvchi deb ataladi.*

Bunday xosmas integral uchun odatdagi belgilashdan foydalaniladi:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{6.6.36}$$

Qayd etish joizki, (6.6.36) tenglik chap tomonda turgan integralning ta'rifi deb qabul qilinib, u isbotlanmaydi.

Xuddi birinchi tur xosmas integrallar kabi, ikkinchi tur xosmas integrallar uchun ham yaqinlashish alomatlari o'rnatiladi, xususan, umumiy va xususiy taqqoslash alomatlari isbotlanadi.

2. Endi agar f funksiya b nuqtada maxsuslikka ega bo'lsa (ya'ni f funksiya har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $[a, b-\varepsilon]$ ko'rinishdagi kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa), u holda ikkinchi tur xosmas integral qiymati quyidagi limit ko'rinishida aniqlanadi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{6.6.37}$$

Qayd etamizki, oddiygina o'zgaruvchini almashtirish yordamida ikkinchi tur xosmas integralni birinchi tur xosmas integralga keltirish mumkin. Chunonchi, (6.6.37) integralda

$$t = \frac{1}{b-x}$$

almashtirishni bajarsak,

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikda $\varepsilon \to 0+0$ deb limitga o'tsak,

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} \tag{6.6.38}$$

tenglik hosil bo'ladi. Bunda har ikkala xosmas integral bir vaqtda yoki yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

3. Ikkinchi tur xosmas integrallar uchun ham absolyut va shartli yaqinlashish tushunchalarini kiritish mumkin. Chunonchi, agar $|f(x)|$ funksiyadan olingan ikkinchi tur xosmas integral yaqinlashsa, $f(x)$ funksiyadan olingan xosmas integral absolyut yaqinlashadi deyiladi. Bundan tashqari, agar $f(x)$ dan olingan integral yaqinlashib, $|f(x)|$ dan olingan integral uzoqlashsa, f funksiyaning integrali shartli yaqinlashadi deyiladi.

6.6.8 - misol. Quyidagi:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx$$

ikkinchi tur xosmas integralning shartli yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Agar $t=\dfrac{1}{x}$ deb o'zgaruvchini almashtirsak,

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = \int\limits_1^{1/\varepsilon}\frac{\cos t}{t}dt$$

tenglikni olamiz.

Bundan chiqdi,

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt,$$

chunki o'ng tomondagi integral Dirixle-Abel alomatiga ko'ra yaqinlashadi. Demak, chap tomondagi integral ham yaqinlashar ekan.

Agar berilgan integral ostidagi funksiyani $f(x)$ deb belgilasak, $|f(x)|$ funksiyadan olingan integral uzoqlashishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan, agar u yaqinlashganda edi, yana yuqoridagi almashtirishni bajarib,

$$\int\limits_0^1 \left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|\,dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{|\cos t|}{t}dt$$

tenglikni olar edik, ammo o'ng tomondagi integral, xuddi 6.6.6 - misoldagi singari, uzoqlashadi.

Shunday qilib, qaralayotgan integralning shartli yaqinlashishi isbotlandi.

Shuni aytish kerakki, manfiy bo'lmagan $f(x)\geq 0$ funksiyadan $(a,b]$ yarim kesmada olingan integral faqat bitta holda, ya'ni bu funksiyadan $[a+\varepsilon,b]$ kesmada olingan integrallar $\varepsilon\to 0$ da $+\infty$ ga intilgandagina uzoqlashadi. Shuning uchun, odatda

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \;=\; +\infty$$

deb yozishadi. Ushbu belgilash faqat manfiy bo'lmagan funksiyalardan olingan integral uzoqlashganda ishlatiladi.

Masalan,

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right| dx \;=\; +\infty.$$

4. Berilgan funksiya $[a, b]$ kesmaning biror ichki c nuqtasida maxsuslikka ega bo'lganda ham bu funksiyadan olingan ikkinchi tur xosmas integrallar o'rganiladi. Chunonchi, agar f funksiya ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $[a, c-\varepsilon]$ va $[c+\varepsilon, b]$ ko'rinishdagi kesmalarda integrallanuvchi bo'lsa, u holda xosmas integral ikki xosmas integralning yig'indisi sifatida aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\int_a^c f(x)\, dx \;+\int_c^b f(x)\, dx.$$

Bunday aniqlangan ikkinchi tur xosmas integrallar uchun Koshi ma'nosidagi yoki bosh qiymat ma'nosidagi integral tushunchasini kiritish mumkin. Chunonchi,

$$\text{V.p.}\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx \;+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx\right). \qquad (6.6.39)$$

6.6.9 - misol. Agar f funksiya $[-1, 1]$ kesmada toq bo'lib (ya'ni barcha $x \in [-1, 1]$ lar uchun $f(-x) = -f(x)$ bo'lib), $x = 0$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lsa, uning Koshi ma'nosidagi xosmas integralini hisoblang.

Berilgan funksiyaning ta'rifiga ko'ra,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\, dx \;=\int_{\varepsilon}^{1} f(-x)\, dx \;=-\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, dx$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shuning uchun,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\, dx \;+\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, dx \;=\; 0.$$

Demak, nolda maxsuslikka ega bo'lgan toq funksiya uchun

$$\text{V.p.}\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \;=\; 0$$

bo'lar ekan.

6.6.10 - misol. Agar $a < c < b$ bo'lsa, navbatdagi tenglikni isbotlang:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} \; = \; \ln \frac{b-c}{c-a}. \tag{6.6.40}$$

Agar $\varepsilon > 0$ yetarlicha kichik bo'lsa, quyidagini olamiz:

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{\varepsilon}{|a-c|} + \ln \frac{b-c}{\varepsilon} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Demak, yuqoridagi (6.6.39) ta'rifga ko'ta, talab qilingan (6.6.40) tenglik bajarilar ekan.

§ 6.7. Haqiqiy argumentli kompleks qiymatli funksiyalardan olingan aniq integral

1. Berilgan $[a, b]$ kesmada aniqlangan $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ funksiya komleks qiymatlar qabul qilsin deylik. Bundan chiqdi, shunday ikki haqiqiy funksiyalar $u : [a, b] \to \mathbf{R}$ va $v : [a, b] \to \mathbf{R}$ mavjudki, ular uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$f(x) \; = \; u(x) \; + \; iv(x), \quad a \le x \le b. \tag{6.7.1}$$

Buday aniqlangan f funksiyadan Riman bo'yicha aniq integral xuddi haqiqiy qiymatli funksiyalar holidagidek olinadi. Chunonchi, $[a, b]$ kesmaning istalgan P bo'linishini qaraylik:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}.$$

Har bir qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada biror ξ_k nuqtani tanlaymiz:

$$x_{k-1} \; \le \; \xi_k \; \le \; x_k.$$

Endi integral yig'indini tuzamiz:

$$\sigma_P(f) \; = \; \sigma_P(f, \{\xi_j\}) \; = \; \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \, \Delta x_k, \tag{6.7.2}$$

bu yerda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, diametri $d(P) < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'linish va $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqtalarni ixtiyoriy tanlanishi uchun

$$|\sigma_P(f, \{\xi_j\}) \; - \; I| \; < \; \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, I kompleks son (6.7.2) integral yig'indilarning P bo'linish dimetri $d(P)$ nolga intilgandagi limiti deyiladi.

Agar f funksiyaning integral yig'indilari limiti mavjud bo'lsa, bu funksiya $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi deyiladi. Aynan shu limit f ning aniq integrali deb ataladi:

$$\int_a^b f(x) \, dx \; = \; \lim_{d(P) \to 0} \sigma_P(f). \tag{6.7.3}$$

Kompleks qiymatli $f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun uning $u(x)$ haqiqiy qismining va $v(x)$ mavhum qismining integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu tasdiqni va bunda bajariladigan quyidagi

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b u(x)\,dx \;+\; i\int_a^b v(x)\,dx \tag{6.7.4}$$

tenglikni isbotlash qiyin emas.

(6.7.4) tenglik yordamida kompleks qiymatli funksiyadan olingan integralning barcha asosiy xossalarini keltirib chiqarish mumkin.

Navbatdagi muhim xossani biz bevosita integral ta'rifidan foydalanib isbotlaymiz.

6.7.1 - tasdiq. *Agar $f : [a,b] \to \boldsymbol{C}$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, $|f(x)|$ funksiya ham $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib,*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{6.7.5}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Shartga ko'ra, $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ va $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$ funksiyalar integrallanuvchidir. Bundan

$$|f(x)| \;=\; \sqrt{u^2(x) \,+\, v^2(x)}$$

funksiyaning ham integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Haqiqatan, o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$|f(x) - f(y)| = \sqrt{[u(x) - u(y)]^2 + [v(x) - v(y)]^2} \leq |u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)|$$

tengsizlikdan istalgan Δ kesma uchun shu kesmadagi tebranish

$$\omega(f,\Delta) \;\leq\; \omega(u,\Delta) \;+\; \omega(v,\Delta)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Shunday ekan, Rimanning integrallanish kriteriysiga (6.4.2* - Teorema) asosan, u va v funksiyalar integrallanuvchi bo'lgani sababli, $|f|$ funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi.

Endi (6.7.2) formulaga yig'indining moduli haqidagi (1.8.14) tengsizlikni qo'llasak,

$$|\sigma_P(f)| \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \,|f(\xi_k)|\;\Delta x_k$$

bahoni olamiz.

Bu tengsizlikda $d(P) \to 0$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (6.7.5) tengsizlikka ega bo'lamiz.

Q. E. D.

§ 6.8. Misollar

1 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $[0,+\infty)$ da uzluksiz bo'lib, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ bo'lsa,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)dx \tag{6.8.1}$$

limitni toping.

Ko'rsatma. Avval $A = 0$ holni qarab, (6.8.1) dagi integralni $(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ va $(\frac{1}{\sqrt{n}}, 1)$ intervallar bo'yicha integrallar yig'indisi sifatida yozib oling. So'ngra umumiy holni o'rganilgan holga keltiring.

2 - misol. Agar f funksiya $T > 0$ davrga ega bo'lgan davriy funksiya bo'lib, $[0, T]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f(nx)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

tenglik bajarilishini isbotlang.

Ko'rsatma. Avval $nx = t$ almashtirish bajarib, so'ngra f funksiyaning davriyligidan foydalaning.

3 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $x > 0$ da monoton o'suvchi bo'lib, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ bo'lsa,

$$\int\limits_0^\infty \sin(f(x))dx$$

integral yaqinlashadimi?

Ko'rsatma. $f(x) = (4[x]^2 + 1)\frac{\pi}{2}$ funksiyani tekshiring.

3 - misol. Agar $[a, b]$ kesmada $f'(x)$ monoton va $|f'(x)| \geq A$ bo'lsa,

$$\left|\int\limits_a^b \sin(f(x))\ dx\right| \leq \frac{2}{A} \tag{6.8.2}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. (6.8.2) integralda $t = f(x)$ almashtirish bajaring. Hosil bo'lgan integralga (6.5.29) Bonne formulasini qo'llang (o'sha yerdagi 2 - eslatmaga qarang).

4 - misol. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda monoton bo'lib, $\int\limits_0^a x^p f(x)dx$ integral mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = 0$ tenglikni isbotlang.

Ko'rsatma. Ikkinchi tur xosmas integral yaqinlashishi uchun Koshi kriteriysini keltiring va undan foydalaning.

5 - misol. Berilgan $[a, b]$ kesmada $g(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsin. Agar $f(a) = f(b) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday uzluksiz differensiallanuvchi f funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

tenglik bajarilsa, $g(x) \equiv 0$ ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Berilgan kesmaning biror nuqtasida $g(x) \neq 0$ deb faraz qilib, f funksiyani $e^{-1/x^2(1-x)^2}$ funksiya yordamida tanlash hisobiga ziddiyat oling.

6 - misol. Berilgan $[a,b]$ kesmada $u(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi va $v(x)$ uzluksiz bo'lsin. Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi va $f(a) = f(b) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday f funksiya uchun

$$\int_a^b \big[u(x)f'(x) + v(x)f(x)\big]\,dx = 0 \tag{6.8.3}$$

tenglik bajarilsa, $u'(x) = v(x)$ ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Avval (6.8.3) tenglik

$$\int_a^b [u'(x) - v(x)]f(x)dx = 0$$

munosabatga teng kuchli ekanini ko'rsating. So'ngra 5 - misoldan foydalaning.

7 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $[0,1]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_0^1 f(x)dx > 0 \tag{6.8.4}$$

bo'lsa, u holda shunday $[a,b] \subseteq [0,1]$ kesma topilib, unda $f(x) \geq 0$ tengsizlik bajarilishini isbotlang.

Ko'rsatma. Agar $[0,1]$ kesma bo'linishining diametri yetarlicha kichik bo'lsa, (6.8.4) tengsizlik Darbuning quyi yig'indilari uchun ham bajarilishidan foydalaning.

8 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa,

$$\lim_{h\to 0+0} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|dx = 0$$

ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Kantor teoremasiga ko'ra f funksiya $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz ekanligidan foydalaning.

9 - misol. Integrallanuvchi toq funksiyaning istalgan boshlang'ich funksiyasi juft va juft funksiyaning boshlang'ich funksiyalari orasida faqat bittasi toq ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Berilgan f funksiyaning istalgan F boshlang'ich funksiyasini quyidagi

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$$

aniq integral ko'rinishida yozib oling.

10 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, biror $c \in (a,b)$ nuqtada bartaraf etilmaydigan birinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ funksiya c nuqtada differensiallanuvchi emasligini ko'rsating.

Ko'rsatma. $F(x)$ funksiyaning c nuqtadagi hosilasi ta'rifidan foydalaning.

11 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, manfiy bo'lmasa,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\ dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x) \tag{6.8.5}$$

tenglikni isbotlang.

Ko'rsatma. Agar $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ va (6.8.5) dagi ketma-ketlikni a_n desak, $a_n \le M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ ekanini va istalgan $\varepsilon > 0$ uchun biror $[\alpha, \beta]$ kesmada $f(x) \ge M-\varepsilon$ bo'lgani uchun $a_n \ge (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ ekanini isbotlang.

12 - misol. Agar uzluksiz $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ kesmada monoton kamaysa, istalgan $a \in (0, 1)$ uchun

$$\int_0^a f(x)\ dx \ge a \int_0^1 f(x)\ dx \tag{6.8.6}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Avval (6.8.6) tengszlikning chapidagi integralda $x = at$ almashtirish bajaring, so'ngra uni o'ngdagi integral bilan taqqoslang.

13 - misol. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, quyidagi, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi, tengsizlikni isbotlang:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\ dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\ dx}. \tag{6.8.7}$$

Ko'rsatma. Istalgan A va B sonlar uchun, ravshanki,

$$AB \le \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}.$$

Demak, agar

$$A(x) = \frac{|f(x)|}{\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\ dx}},\ B(x) = \frac{|g(x)|}{\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\ dx}}$$

desak,

$$\int_a^b A(x)B(x)\ dx \le 1$$

bo'ladi.

14 - misol. Agar $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $f(1) - f(0) = 1$ bo'lsa,

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\ dx \ge 1$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Ravshanki,

$$f(1) - f(0) = \int\limits_0^1 f'(x)\ dx = 1.$$

Bu tenglikda f' va 1 funksiyalar uchun Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llang.

15 - misol. Agar $x \neq 0$ da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ va $f(0) = 0$ desak, $f(x)$ funksiyaning $[-1, 1]$ kesmada integrallanuvchi va $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)\ dt$ funksiya $(-1, 1)$ intervalda differensiallanuvchi ekanini ko'rsating. $F'(0)$ ni toping.

Ko'rsatma. Birinchi ajoyib limitdan foydalanib, 6.2.1 - tasdiq va 6.5.5 - Teoremalarni qo'llang.

VII Bob. Aniq integralning geometrik tadbiqlari

§ 7.1. Egri chiziq yoyining uzunligi

1. Biz ushbu bandni $[a,b]$ kesmada aniqlangan $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ funksiyaning grafigini o'rganishdan boshlaymiz. Berilgan f funksiyaning grafigi $\Gamma(f)$ deganda biz $\mathbf{R}^2$ tekislikda yotgan quyidagi to'plamni tushinishimizni eslatib o'tamiz:

$$\Gamma(f) = \{\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\ :\ f(x) = y, \quad a \le x \le b\}. \tag{7.1.1}$$

Agar f uzluksiz funksiya bo'lsa, uning grafigi uzluksiz egri chiziq bo'ladi, ya'ni, sodda qilib aytganda, bunday grafikni chizganimizda qo'limiz qog'ozdan ko'tarilmaydi. Shu egri chiziqning uzunligini topishga harakat qilamiz. Berilgan $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy P bo'linishini olamiz, ya'ni

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}.$$

Ravshanki, $(x_k, f(x_k))$ koordinataga ega bo'lgan M_k nuqtalar $\Gamma(f)$ grafikda yotadi. Ketma-ket M_k nuqtalarni kesmalar bilan birlashtirib, $l(P) = M_0M_1M_2...M_n$ siniq chiziqni olamiz. Bunda M_kM_{k-1} kesmalar ushbu siniq chiziqning bo'limlari deyiladi. Pifagor teoremasiga ko'ra bu bo'limlarning uzunligi

$$|M_kM_{k-1}| \ = \ \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Demak, butun siniq chiziqning uzunligi uchun

$$|l(P)| \ = \ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

tenglikni olamiz.

$\Gamma(f)$ egri chiziqning uzunligi $|\Gamma(f)|$ deb $l(P)$ siniq chiziq uzuligining bo'limlari uzunligi nolga intilgandagi limitiga aytiladi. Ravshanki, f funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, agar P bo'linish diametri nolga intilsa, $l(P)$ siniq chiziqning har bir bo'limining uzunligi ham nolga intiladi va aksincha. Shunday ekan, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$|\Gamma(f)| \ = \ \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}. \tag{7.1.2}$$

Agar bu limit chekli bo'lsa, $\Gamma(f)$ egri chiziq to'g'rilanuvchi deyiladi. Aksincha, limit chekli bo'lmasa, bu egri chiziqni to'g'rilanmaydi deymiz.

Faraz qilaylik, f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Har bir qismiy $[x_{k-1},x_k]$ kesmada Lagranjning chekli orttirmalar formulasini qo'llasak,

$$f(x_k)-f(x_{k-1}) \;=\; f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \;=\; f'(\xi_k)\Delta x_k$$

tenglikni hosil qilamiz, bunda ξ_k - (x_{k-1},x_k) intervalning biror nuqtasi.

Demak, bu holda (7.1.2) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$|\Gamma(f)| \;=\; \lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\;\Delta x_k. \tag{7.1.3}$$

E'tibor bering, bu tenglikning o'ng tomonida $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ funksiya integral yig'indilarining limiti turibdi. Bu funksiya, farazimizga ko'ra, uzluksizdir va demak, u integrallanuvchidir. Shunday ekan, (7.1.3) tenglikning o'ng terafidagi limit mavjud va u quyidagiga teng:

$$|\Gamma(f)| \;=\; \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{7.1.4}$$

Shunday qilib, uzluksiz diffrensiallanuvchi f funksiya grafigi bo'lgan egri chiziqning uzunligi (7.1.4) formula orqali hisoblanar ekan.

7.1.1 - misol. Quyidagi

$$y \;=\; \operatorname{ch} x, \quad 0\le x\le a,$$

funksiya grafigi zanjir chiziq deb ataladi. Shu egri chiziq uzunligini toping.

Agar

$$1+(\operatorname{sh} x)^2=(\operatorname{ch} x)^2$$

tenglikdan va hosilalar uchun

$$(\operatorname{ch} x)' \;=\; \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$$

formulalardan foydalansak, (7.1.4) formulaga ko'ra misolning yechimini olamiz:

$$|L| \;=\; \int_0^a \sqrt{1+[(\operatorname{ch} x)']^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1+(\operatorname{sh} x)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^a \operatorname{ch} x\,dx = \;\operatorname{sh} x|_0^a \;=\; \operatorname{sh} a.$$

2. Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, faqat (a,b) intervaldagina uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, (7.1.4) dagi integral, umuman aytganda, ikkinchi turdagi xosmas integral bo'ladi. Bu holda integral yaqinlashishini qo'shimcha ravishda o'rganish lozim. Agar integral yaqinlashsa, funksiya grafigi to'g'irlanuvchi bo'ladi.

Eslatma. Ikkinchi turdagi (7.1.4) hosmas integral faqat va faqat f' funksiya $[a,b]$ kesmada absolyut integrallanuvchi bo'lgandagina yaqinlashadi. Bu tasdiq, quyidagi o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$|f'(x)| \;<\; \sqrt{1+|f'(x)|^2} \;\le 1 \;+\; |f'(x)|$$

tengsizlikka ko'ra, umumiy taqqoslash alomatidan kelib chiqadi.

7.1.2 - misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{agar } 0 < x \le 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya grafigi to'g'rilanmaydigan egri chiziq ekanini ko'rsatamiz.

Haqiqatan, agar $x > 0$ bo'lsa,

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} \ - \ \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

tenglikni olamiz. Endi $f'(x)$ funksiyaning absolyut integralanmasligi ravshan. Demak, yuqoridagi egri chiziq to'g'rilanmas ekan.

Agar f' hosiladan $[a, b]$ kesmada olingan xosmas integral absolyut yaqinlashsa, f funksiya grafigi to'g'rilanuvchi bo'lib, uning uzunligini (7.1.4) formula yordamida hisoblash mumkin.

7.1.3 - misol. Birlik aylananing $P = (1, 0)$ va $M = (a, b)$ nuqtalarini tutashtiruvchi PM yoy uzunligini hisoblang.

Bu yoy $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ funksiya grafigi ekanini qayd etamiz. Modomiki

$$1 + |f'(x)|^2 = 1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2 = \frac{1}{1 - x^2}$$

ekan, quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$|\widehat{PM}| \ = \ \int\limits_a^1 \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx \ = \ \int\limits_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7.1.5}$$

Biz $M = (-1, 0)$ bo'lganda $\widehat{PM}$ yoy uzunligini yunoncha π harfi bilan belgilagan edik. Shunday ekan,

$$\pi \;=\; \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integral ostidagi funksiya juft bo'lgani uchun,

$$\frac{\pi}{2} \;=\; \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bu tenglik yordamida (7.1.5) formulani

$$|\widehat{PM}| \;=\; \frac{\pi}{2} \;-\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7.1.6}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Shuni aytish kerakki, (7.1.6) formula (7.1.5) ga qaraganda ma'qulroq, chunki $0 < a < 1$ bo'lganda (7.1.6) da o'ng tomondagi integral xos integraldir.

Eslatma. $(0, \pi)$ intervaldan olingan har qanday t son uchun birlik aylanada shunday $M = (a, b)$ nuqta topilib, $P = (1, 0)$ va M nuqtalarni tutashtiruvchi yoy uzunligi t ga teng bo'lishini ko'rsatish oson.

Haqiqatan, masalan, $0 < t < \pi/2$ bo'lsin. Quyidagi

$$f(a) = \;\frac{\pi}{2} \;-\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

funksiyani qaraylik.

Ravshanki, bu funksiya $0 \le a \le 1$ bo'lganda uzluksiz bo'lib, $f(0) = \pi/2$ va $f(1) = 0$. Shunday ekan, a argument $(0, 1)$ intervalda o'zgarganda f funksiya 0 bilan $\pi/2$ orasidagi barcha qiymatlarni, xususan t qimatni ham qabul qiladi. Funksiyaning ana shu t qiymatni qabul qiladigan nuqtasini a deb belgilaylik, ya'ni $f(a) = t$, $0 < a < 1$. Endi $b = \sqrt{1 - a^2}$ deb tanlash kifoya.

3. Har qanday egri chiziq ham biror bir funksiyaning grafigi bo'lavermaydi. Shu sababli, umumiy holda egri chiziq uzunligini hisoblash masalasi nisbatan murakabdir. Masalan,$\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligida yotuvchi va markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana, ravshanki, egri chziq bo'ladi, ammo bu egri chiziq hech qanday funksiyaning grafigi bo'la olmaydi. Umumiy holda biror $[\alpha, \beta]$ kesmani tekislikka uzluksiz akslantirishdagi aksiga uzluksiz yassi egri chiziq deyiladi.

Faraz qilaylik, $[\alpha, \beta]$ kesmada ikkita uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{7.1.7}$$

Bu ikkita funksiyani $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va $\mathbf{R}^2$ tekislikda qiymat qabul qiluvchi bitta $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ vektor - funksiyaning komponentasi sifatida qarash mumkin. Bu holda $R(\Phi)$ qiymatlar to'plami koordinatalari $t \in [\alpha, \beta]$ (7.1.7) tengliklarni qanoatlantiruvchi $\mathbf{R}^2$ tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamini ifodalaydi.

Ta'rif. *Agar $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan shunday $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ vektor - funksiya mavjud bo'lsaki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

1) $\Phi(t)$ funksiyani $R(\Phi)$ qiymatlar to'plami $L \subset \mathbf{R}^2$ to'plami bilan ustma - ust tushsa;

2) $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz bo'lsa;

3) agar $t_1 \neq t_2$ ekanligidan $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$ ekanligi kelib chiqsa, u holda $L \subset \mathbf{R}^2$ to'plamiga ***sodda yassi egri chiziq*** *deyiladi.*

Bunda t kattalik *parametr* deb atalib, (7.1.7) teglama L chiziqni parametrlashtiradi deyiladi. Ravshanki, bitta egri chiziqning o'zi turli usullarda parametrlashtirilishi mumkin. Sodda egri chiziqni yana *yoy* ham deb ataladi.

Ushbu bandda bundan buyon L egri chiziq deganda sodda egri chiziqni tushunamiz.

Bundan keyingi bayonimizni osonlashtrish maqsadida, $\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligini $\mathbf{C}$ kompleks tekislik deb, ya'ni barcha $z = x + iy$ kompleks sonlar to'plami deb hisoblaymiz. Bunda x va y haqiqiy sonlar z kompleks sonining mos ravishda haqiqiy va mavhum qismlari deb ataladi.

Bu holda $\Phi(t)$ vektor - funksiyani kompleks qiymatli funksiya deb hisoblash mumkin:

$$\Phi(t) \ = \ \varphi(t) \ + \ i\,\psi(t)).$$

L egri chiziq

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

tenglamalar bilan parametrlashtirilgan bo'lsin va $\Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t))$ bo'lsin.

Bundan tashqari, P - berilgan $[\alpha, \beta]$ kesmaning

$$P \ = \ \{\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta\} \tag{7.1.8}$$

ko'rinishdagi bo'linishi bo'lsin.

Ravshanki, $M_k = \Phi(t_k)$ nuqtalar L egri chiziqda yotadi. Bu nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan birlashtirib, L egri chiziqqa ichki chizilgan quyidagi

$$l(P) \ = \ M_0 M_1 M_2 ... M_n$$

siniq chiziqni olamiz. Bunda har bir $M_{k-1}M_k$ kesma $l(P)$ siniq chiziqning *bo'limi* deyiladi. Har bir $M_{k-1}M_k$ bo'lim uzunligi

$$|M_{k-1}M_k| \ = \ |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})|$$

tenglik orqali aniqlangani uchun, $l(P)$ siniq chiziqning uzunligi

$$|l(P)| \ = \sum_{k=1}^{n} |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})| \tag{7.1.9}$$

ga teng bo'ladi.

L egri chiziqning *uzunligi* $|L|$ deb L egri chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunligining aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$|L| \ = \sup_P \ \sum_{k=1}^{n} |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})|. \tag{7.1.10}$$

Agar egri chiziq chekli uzunlikka ega bo'lsa, u *to'g'rilanuvchi* deyiladi. Ravshanki, har qanday to'g'rilanuvchi egri chiziqning uzunligi manfiy bo'lmagan songa tengdir.

7.1.1-теорема. *$L \subset \boldsymbol{C}$ egri chiziq $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi $\Phi : [\alpha, \beta] \to \boldsymbol{C}$ funksiyaning aksi bo'lsin. U holda L egri chiziq to'g'rilanuvchi bo'ladi va uni uzunligini ushbu*

$$|L| \ = \int_{\alpha}^{\beta} \left|\Phi'(t)\right| \, dt, \tag{7.1.11}$$

formula bo'yicha hisoblash mumkin.

Isbot. 1) $L(t)$ orqali $[\alpha, t]$ kesmani aksi hisoblangan L egri chiziqning qismini belgilaymiz va $S(t)$ – $L(t)$ egri chiziqni uzunligi bo'lsin, ya'ni

$$S(t) \;=\; |L(t)|.$$

Avval $S(t)$ funksiyani $[\alpha, \beta]$ kesmada chegaralangan ekanligini isbotlaylik. Ravshanki, bu funksiya o'suvchi hisoblanadi, shuning uchun $S(\beta)$ ni chekli ekanligini isbotlash yetarli . (7.1.8) ko'rinishdagi istalgan P bo'linish uchun, N'yuton - Leybnis formulasiga asosan, ushbu

$$\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1}) \;=\; \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi'(s)\, ds.$$

tenglik bajariladi.

Shuning uchun P bo'linish orqali aniqlangan $l(P)$ siniq chiziq uzunligi, (7.1.9) tenglikka binoan,

$$|l(P)| \;= \sum_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi'(s)\, ds \right|$$

ga teng.

O'z navbatida,

$$|l(P)| \;\leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(s)|\, ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(s)|\, ds.$$

Endi chap tomondagi ifodaning aniq yuqori chegarasini olsak,

$$|L| \;\leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(s)|\, ds \tag{7.1.12}$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Shunday qilib, L egri chiziq to'g'irlanuvchi bo'lib, uning uzunligi (7.1.12) bahoni qanoatlantirar ekan. Oydin bo'lgan ushbu $S(t) \leq S(\beta) = |L|$ munosabatdan $S(t)$ funksiyani chegaralanganligi kelib chiqadi.

2) $S(t)$ funksiyani differensiallanuvchi ekanligini icbotlaymiz va uni hosilasini topamiz. $t \in [\alpha, \beta)$ bo'lsin va $h > 0$ soni ushbu $(t+h) \in [\alpha, \beta]$ shartni qanoatlantirsin. (7.1.12) da $\alpha = t$ va $\beta = t + h$ deb olib, quyidagi

$$S(t+h) \;-\; S(t) \;\leq\; \int\limits_{t}^{t+h} |\Phi'(s)|\, ds \tag{7.1.13}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bundan tashqari differensiallanuvchanlikni ta'rifiga ko'ra

$$\Phi(t+h) \;-\; \Phi(t) \;=\; \Phi'(t)\, h \;+\; o(1)\, h, \quad h \to 0. \tag{7.1.14}$$

O'z navbatida $\Phi(t+h) - \Phi(t)$ ayirma $\Phi(t)$ va $\Phi(t+h)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vektorni ham ifodalaydi, u holda

$$|\Phi(t+h) \;-\; \Phi(t)| \;\leq\; S(t+h) \;-\; S(t),$$

va shuning uchun (7.1.14) dan ushbu

$$S(t+h) \; - \; S(t) \; \geq \; |\Phi'(t)\,h| \; + \; o(1)\,|h| \tag{7.1.15}$$

baho kelib chiqadi.

Bunday holda, h ning ishorasi qanday bo'lishidan qa'tiy nazar, $S(t)$ funksiyani monotonligini hisobga olgan holda (7.1.13) va (7.1.15) munosabatlardan quyidagi

$$|\Phi'(t)| \; + \; o(1) \; \leq \; \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \; \leq \; \frac{1}{h} \int\limits_{t}^{t+h} |\Phi'(s)|\,ds$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bu qo'sh tengsizlikni chap va o'ng tomonlari uzluksizlikka ko'ra $|\Phi'(t)|$ ga intiladi. O'z navbatida,

$$\frac{dS(t)}{dt} \; = \; |\Phi'(t)| \; . \tag{7.1.16}$$

3) (7.1.16) tenglik N'yuton - Leybnis formulasini qo'llashga imkon beradi, qaysiki unga ko'ra

$$S(\beta) \; - \; S(\alpha) \; = \; \int\limits_{\alpha}^{\beta} S'(t)\,dt \; = \; \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(t)|\,dt,$$

oxirgi tenglikda $S(\beta) - S(\alpha) = |L|$ munosabatni hisobga olsak, bu tenglik isbot qilinishi talab qilingan (7.1.11) formula bilan ustma - ust tushadi.

Q.E.D.

Natija. *Agar L egri chiziq (7.1.7) tenglamalar yordamida parametrlashtirilgan bo'lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda L egri chiziq to'g'rilanuvchi bo'lib, uning uzunligi quyidagi formula orqali hisoblanadi:*

$$|L| \; = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{7.1.17}$$

Isbot kompleks qiymatli (7.1.6) funksiyaning hosilasi ham kompleks qiymatli

$$\Phi'(t) \; = \; \varphi'(t) + i\psi'(t))$$

funksiya bo'lib, uning absolyut qiymati

$$|\Phi'(t)| \; = \; \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

ga tengligidan bevosita kelib chiqadi.

7.1.4 - misol. Quyidagi

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

astroida yoyi uzunligini hisoblang.

Bu egri chiziqni quyidagicha paramertlashtirish mumkin:

$$x(t) = \varphi(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = \psi(t) = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Ravshanki,

$$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \cdot \sin t, \quad \psi'(t) = 3a\sin^2 t \cdot \cos t.$$

Shuning uchun,

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = 9a^2\cos^4 t\,\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\,\cos^2 t = \frac{9a^2}{4}\sin^2 2t.$$

U holda, (7.1.11) formulani qo'llab,

$$|L| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$

tenglikni olamiz.

4. $[\alpha, \beta]$ kesmani $\Phi(t) = (\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))$ akslantirishdagi aksi hisoblangan L fazoviy egri chiziq, uch o'lchovli $\mathbf{R}^3$ fazoning qism to'plami sifatida aniqlanadi ($\mathbf{R}^3$ fazoning ta'rifini §7.3 ga qarang).

Yassi egri chiziqqa o'xshash, L fazoviy egri chiziqni uzunligi ham, bu egri chiziqqa chizilgan siniq chiziqlarning uzunliklarini aniq yuqori chegarasi sifatida aniqlanadi.

Bu akslantirishning

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

komponentalarini uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishlilik sharti asosida, L egri chiziq to'g'irlanuvchi hisoblanadi va uni uzunligi ushbu

$$|L| = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt \tag{7.1.18}$$

formula orqali aniqlanadi.

Bu formulaning isboti 7.1.1 - teoremaning isbotiga o'xshash isbotlanadi.

§ 7.2. Yassi shakl yuzi

$\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligining ixtiyoriy E to'plamini qaraylik. Bizning maqsadimiz bu to'plam yuzini aniqlash va uni hisoblash usulini topishdir.

Avvalam bor shuni qayd etaylikki, E to'plamning yuzaga ega yoki ega emasligi bu to'plam chegarasining qanchalik kattaligiga bog'liqdir.

Faraz qilaylik, $b = (b_1, b_2)$ nuqta $\mathbf{R}^2$ tekisliknig ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun b nuqtaning ε-atrofi deb markazi b nuqtada bo'lib, radiusi ε ga teng bo'lgan doiraga, ya'ni

$$|x - b| \equiv \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2} < \varepsilon \tag{7.2.1}$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ nuqtalar to'plamiga aytamiz.

Ta'rif. *$\boldsymbol{R}^2$ tekisliknining ixtiyoriy qismiy to'plami E berilgan bo'lsin. Agar $b \in \boldsymbol{R}^2$ nuqtaning ixtiyoriy ε-atrofida E to'plamga ham tegishli bo'lgan, ham tegishli bo'lmagan nuqtalari bo'lsa, b nuqta E to'plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi.*

Chegaraviy nuqtalar to'plami E to'plamning *chegarasi* deb ataladi va odatda ∂E simvoli orqali belgilanadi.

Masalan, agar a, b, c, d sonlar $a < b$ va $c < d$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsa,

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\} \tag{7.2.2}$$

to'g'ri to'rtburchak chegarasi quyidagi to'rtta kesmaning yig'indisidan iborat:

$$\partial F \ = \ S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4,$$

bu yerda

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad y = c\}, \\ S_2 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = a, \quad c \leq y \leq d\}, \\ S_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad y = d\}, \\ S_4 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = b, \quad c \leq y \leq d\}. \end{aligned}$$

Qayd etamizki, xuddi shu to'plam quyidagi:

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ a < x < b, \quad c < y < d\} \tag{7.2.3}$$

to'g'ri to'rtburchakning ham chegarasi bo'ladi, ya'ni $\partial F \ = \partial G$. Bu ikki F va G to'g'ri to'rtburchaklarning farqi shundaki, F to'plam barcha chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga olsa, G to'plam esa birorta ham chegaraviy nuqtasini o'z ichiga olmaydi. Oson ko'rsatish mumkinki,

$$\partial G \equiv \partial F = F \setminus G \ = \ \{(x, y) \in F \ : \ (x, y) \notin G\}.$$

Ta'rif. *Agar biror F to'plam o'zining barcha chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga olsa, u* ***yopiq to'plam*** *deyiladi.*

Masalan, (7.2.2) to'g'ri to'rtburchak yopiq to'plamdir.

Ta'rif. *Agar G to'plam birorta ham chegaraviy nuqtasini o'z ichiga olmasa, u* ***ochiq to'plam*** *deyiladi.*

Masalan, (7.2.3) to'g'ri to'rtburchak ochiq to'plamdir.

Ixtiyoriy to'plamning yuzini aniqlashdan oldin to'g'ri to'rtburchakning yuzini aniqlaymiz.

(7.2.2) ko'rinishdagi to'plamni *regulyar to'g'ri to'rtburchak* deymiz. Bu to'plam $[a, b]$ va $[c, d]$ kesmalarni ko'paytmasi ham deyiladi va $F = [a, b] \times [c, d]$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, **regulyar to'g'ri to'rtburchak** *deganda, biz tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ixtiyoriy yopiq to'g'ri to'rtburchakni tushunar ekanmiz.*

Ta'rif. *Quyidagi son:*

$$|P| \ = \ (b - a) \cdot (d - c) \tag{7.2.4}$$

(7.2.2) ko'rinishdagi P regulyar to'g'ri to'rtburchakning ***yuzi*** *deb ataladi.*

Ravshanki, ixtiyoriy regulyar to'g'ri to'rtburchakning yuzi musbat son bo'ladi.

Ta'rif. *Chekli sondagi (yopiq) regulyar P_k to'g'ri to'rtburchaklarning birlashmasini, ya'ni*

$$F \ = \ P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n \tag{7.2.5}$$

to'plamni ***yopiq ko'pburchakli shakl*** *deb ataymiz.*

Yopiq ko'pburchakli F shakldan barcha chegaraviy nuqtalarini olib tashlash natijasida hosil bo'lgan

$$G \ = \ F \ \setminus \ \partial F$$

to'plamni *ochiq ko'pburchakli shakl* deymiz.

Nihoyat, agar biror $E \subset \mathbf{R}^2$ to'plam berilib, u uchun shunday ochiq ko'pburchakli shakl G topilsaki, ular

$$G \ \subset \ E \ \subset \ (G \cup \partial G)$$

munosabatni qanoatlantirsa, E to'plamni *ko'pburchakli shakl* deymiz. Bunda G berilgan E ko'pburchakli shaklning *ichki qismi* deb ataladi.

Shunday qilib, biz aniqlagan *ko'pburchakli shakl, chegarasini o'z ichiga olishi yoki olmasligi, yoki bo'lmasa, chegaraning biror qisminigina o'z ichiga olishi mumkin* ekan.

Agar ikki ko'pburchakli shakllarning ichki qismlari umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, ularni *biri ikkinchisi ustiga tushmaydigan* ko'pburchakli shakllar deymiz.

Ta'rif. *Agar Q ko'pburchakli shakl (7.2.5) ko'rinishga ega bo'lib, P_k regulyar to'g'ri to'rtburchaklar o'zaro biri ikkinchisini ustiga tushmasa, u holda bu shaklning* ***yuzi*** *($|Q|$ orqali belgilanadi) deb quyidagi songa aytamiz*:

$$|Q| \ = \ \sum_{k=1}^{n} |P_k|. \tag{7.2.6}$$

Bu ta'rifning korrektligi, ya'ni uning (7.2.4) formulaga zid bo'lmay, Q qay tarzda regulyar to'g'ri to'rtburchaklarga bo'linishiga bog'liq emasligi, navbatdagi sodda tasdiqlardan kelib chiqadi.

7.2.1 - tasdiq. *Agar P regulyar to'g'ri to'rtburchak quyidagi*

$$P \ = \ P_1 \cup P_2 \tag{7.2.7}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda P_1 va P_2 - biri ikkinchisi ustiga tushmaydigan regulyar to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, u holda

$$|P| \ = \ |P_1| \ + \ |P_2| \tag{7.2.8}$$

bo'ladi.

Isbot o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Haqiqatan, agar masalan, $P_1 = [a, h] \times [c, d]$ va $P_2 = [h, b] \times [c, d]$ bo'lsa, $P = [a, b] \times [c, d]$ bo'lib, (7.2.7) tenglik bajariladi. Shunday ekan, (7.2.4) ta'rifga ko'ra,

$$|P_1| + |P_2| = (h - a)(d - c) + (b - h)(d - c) = (b - a)(d - c) = |P|.$$

Q.E.D.

7.2.2 - tasdiq. *Agar P regulyar to'g'ri to'rtburchak quyidagi*

$$P = P_1 \cup P_2 \cdots \cup P_n$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda P_k o'zaro biri ikkinchisi ustiga tushmaydigan regulyar to'g'ri to'rtburchaklar bo'lsa, u holda

$$|P| = |P_1| + |P_2| + \cdots + |P_n|$$

bo'ladi.

Isbot. Biz umumiylikni buzmasdan, berilgan P regulyar to'g'ri to'rtburchak ikki, vertikal va gorizontal, parallel to'g'ri chiziqlar ketma-ketligi yordamida P_k larga bo'lingan deb faraz qilishimiz mumkin, chunki aks holda P_k larni yanada kichikroq bo'laklarga bo'lib, talab qilingan ko'rinishga keltira olamiz. Shunday ekan, isbot 7.2.1 - tasdiqni ketma-ket qo'llashdan kelib chiqadi.

Q.E.D.

7.2.3 - tasdiq. *Faraz qilaylik, Q ko'pburchakli shakl ikki xil usulda o'zaro biri ikkinchisini ustiga tushmaydigan regulyar to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasi bo'lib ifodalansin:*

$$Q = P_1 \cup P_2 \cdots \cup P_n$$

va

$$Q = P_1' \cup P_2' \cdots \cup P_m'.$$

U holda quyidagi tenglik bajariladi:

$$|P_1| + |P_2| + \cdots + |P_n| = |P_1'| + |P_2'| + \cdots + |P_m'|.$$

Isbot. Q ko'pburchakli shaklni yanada kichikroq o'zaro biri ikkinchisi ustiga tushmaydigan to'g'ri to'rtburchaklarga shunday bo'lamizki, bunda P_k va P_j' to'g'ri to'rtburchaklardan har birini hosil bo'lgan mayda to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsin. Bundan so'ng isbot 2 - tasdiqni qo'llash bilan yakunlanadi.

Q.E.D.

7.2.4 - tasdiq. *Ko'pburchakli shakl yuzining (7.2.6) ta'rifi korrektdir.*

Isbot bevosita 3 - tasdiqdan kelib chiqadi.

Ko'pburchakli shakl yuzining eng muhim xossalarini keltiramiz.

1^0. ***Musbatligi.*** *Istalgan Q ko'pburchakli shakl uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$|Q| > 0.$$

2^0. ***Additivligi.*** *Agar Q ko'pburchakli shakl, biri ikkinchisi ustiga tushmaydigan, ikki O_1 va Q_2 ko'pburchakli shakllar birlashmasidan iborat bo'lsa, ya'ni*

$$Q = Q_1 \cup Q_2, \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$$

bo'lsa, u holda

$$|Q| = |Q_1| + |Q_2|$$

bo'ladi.

3^0. ***Monotonligi.*** *Agar P ko'pburchakli shakl Q ko'pburchakli shaklning qismiy to'plami bo'lsa, ya'ni $P \subset Q$ bo'lsa, u holda*

$$|P| \leq |Q|$$

bo'ladi.

Endi biz tekislikdagi istalgan geometrik shaklning yuzini o'rganishga o'tishimiz mumkin.

Ta'rif. $\boldsymbol{R}^2$ *tekislikning istalgan chegaralangan to'plamini* ***yassi shakl*** *deymiz.*

Aytaylik, E yassi shakl bo'lsin. Agar $P \subset E$ bo'lsa, P ko'pburchakli shaklni E shaklga *ichki chizilgan* deymiz. Shunga o'xshash, agar $E \subset Q$ bo'lsa, Q ko'pburchakli shaklni E shaklga *tashqi chizlilgan* deymiz.

Ta'rif. *Berilgan E yassi shaklning* ***quyi yuzi*** $|E|_*$ *deb bu shaklga ichki chizilgan ko'pburchakli shakllar yuzlarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi:*

$$|E|_* = \sup_{P \subset E} |P|. \tag{7.2.9}$$

Agar E shaklga birorta ham ko'pburchakli shaklni ichki chizib bo'lmasa, $|E|_* = 0$ deb qabul qilinadi.

Ta'rif. *Berilgan E yassi shaklning* ***yuqori yuzi*** $|E|^*$ *deb bu shaklga tashqi chizilgan ko'pburchakli shakllar yuzlarining aniq quyi chegarasiga aytiladi:*

$$|E|^* = \inf_{Q \supset E} |Q|. \tag{7.2.10}$$

Ta'rif. *Agar yassi shaklning quyi yuzi yuqori yuzi bilan ustma-ust tushsa, u* ***kvadratlanuvchi*** *deyiladi. Bunda*

$$|E| \;=\; |E|_* \;=\; |E|^* \tag{7.2.11}$$

son kvadratkanuvchi E shaklning ***yuzi*** *deb ataladi.*

7.2.2 - teorema. *Berilgan E yassi shaklning kvadratlanuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham unga ichki va tashqi chizilgan shunday mos ravishda P va Q ko'pburchakli shakllar topilib, ularning yuzlari*

$$|Q| \;-\; |P| \;<\; \varepsilon \tag{7.2.12}$$

shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1. Agar E yassi shakl kvadratlanuvchi bo'lsa, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday ichki chizilgan P va tashqi chizilgan Q ko'pburchakli shaklalar topiladiki, ular

$$|P| > |E| - \frac{\varepsilon}{2}, \quad |Q| < |E| + \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi.

Bundan (7.2.12) tengsizlik kelib chiqadi.

2. Agar (7.2.12) shart bajarilsa, u holda quyi va yuqori yuzlar uchun quyidagi

$$|P| \;\leq\; |E|_* \;\leq\; |E|^* \;\leq\; |Q|$$

o'z-o'zidan ko'rinib turgan tengsizliklardan

$$|E|^* \;-\; |E|_* \;<\; \varepsilon$$

munosabatni olamiz.

Bu tengsizlikdan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, yuqori va quyi yuzlarning ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Demak, E shakl kvadratlanuvchi bo'lar ekan.

Q.E.D.

Natija. *Berilgan E yassi shaklning kvadratlanuvchi bo'lishi uchun uni chegarasining yuzi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Haqiqatan, agar P shakl E ga ichki chizilgan ochiq ko'pburchakli shakl bo'lib, Q esa E ga tashqi chizilgan yopiq ko'pburchakli shakl bo'lsa, u holda

$$S \;=\; Q \setminus P \;= \{M \in Q \;:\; M \notin P\}$$

to'plam, ravshanki, ∂E chegarani o'z ichiga oluvchi yopiq ko'pburchakli shakl bo'ladi. Bundan tashqari,

$$|S| \;=\; |Q| \;-\; |P|$$

tenglik o'rinli. Demak, (7.2.12) shart chegaraning $|\partial E|^*$ tashqi yuzi nolga tengligini anglatadi. Bundan chiqdi, $|\partial E| = 0$ ekan.

Endi egri chiziqli trapetsiya deb ataluvchi shakllar yuzini o'rganishga o'tamiz.

Ta'rif. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, manfiy bo'lmasa,*

$$T \;=\; \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x \in [a, b], \quad 0 \le y \le f(x)\} \tag{7.2.13}$$

ko'rinishdagi to'plamni egri chiziqli trapetsiya deb ataymiz.

7.2.3 - teorema. (7.2.13) *egri chiziqli trapetsiya kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi quyidagicha aniqlanadi:*

$$|T| \;=\; \int_a^b f(x)\, dx. \tag{7.2.14}$$

Isbot. 6.5.3 - Teoremaga ko'ra, f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani sababli u shu kesmada integrallanuvchidir. Endi 6.4.9 - Teoremaga asosan, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham $[a, b]$ kesmaning shunday P bo'linishi topiladiki, unga mos Darbuning yuqori va quyi yig'indilari quyidagi:

$$S_P(f) \;-\; s_P(f) \;<\; \varepsilon \tag{7.2.15}$$

shartni qanoatlantiradi.

Shuni qayd etamizki, Darbuning $s_P(f)$ quyi yig'indisi egri chiziqli trapetsiyaga ichki chizilgan ko'pburchakli shakl yuziga teng bo'lib, Darbuning $S_P(f)$ yuqori yig'indisi egri chiziqli trapetsiyaga tashqi chizilgan ko'pburchakli shakl yuziga teng bo'ladi. Shunday ekan, (7.2.15) shart, 7.2.2 - Teoremaga ko'ra, T egri chiziqli trapetsiyaning kvadratlanuvchi ekanini anglatadi. Bundan tashqari, istalgan P bo'linish uchun quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$s_P(f) \ \leq |T| \ \leq S_P(f).$$

Bu tengsizliklar va (7.2.15) shart birgalikda Darbuning quyi va yuqori integrallari o'zaro ustma-ust tushib, $|T|$ ga tengligini ko'rsatadi. Shunday ekan, 6.4.2 - Teoremadan talab qilingan (7.2.14) tenglik kelib chiqadi.

Q.E.D.

1 - natija. *Agar f va g funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib,*

$$g(x) \ \leq \ f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$E \ = \ \{(x, y) \ : \ x \in [a, b], \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

yassi shakl kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi

$$|E| \ = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{7.2.16}$$

ga teng bo'ladi.

2 - natija (Kaval'eri prinsipi). *Faraz qilaylik,*

$$E_1 \ = \ \{(x, y) \ : \ x \in [a, b], \quad g_1(x) \leq y \leq f_1(x)\}$$

va

$$E_2 \ = \ \{(x, y) \ : \ x \in [a, b], \quad g_2(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

bo'lsin. Agar

$$f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x), \quad a \leq x \leq b,$$

bo'lsa, $|E_1| = |E_2|$ bo'ladi.

7.2.1 - misol. Doiraning yuzi topilsin:

$$K(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Ravshanki, bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$K(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; -1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{r^2 - x^2} \;\leq\; y \;\leq\; \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

Shuning uchun, (7.2.16) formuladan foydalansak,

$$|K(r)| \;= \int_{-1}^{1} [\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}]\, dx$$

hosil bo'ladi.

Endi $x = r \sin t$ trigonometrik almashtirishni qo'llasak,

$$|K(r)| \;= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\; \cos t\, dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$|K(r)| \;= r^2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \pi r^2. \tag{7.2.17}$$

§ 7.3. Jism hajmi

Ushbu paragrafda biz uch o'lchovli fazodagi aylanish jismlar deb ataluvchi maxsus to'plamlarning hajmini hisoblash bilan cheklanamiz.

Uch o'lchovli $\mathbf{R}^3$ fazo deganda $u = (x, y, z)$ haqiqiy sonlar uchligining tartiblangan to'plami tushuniladi. Bunda u ni $\mathbf{R}^3$ fazoning nuqtasi va x, y hamda z sonlarni u nuqtaning koordinatalari deyishadi. Yana x - abssissa, y - ordinata z esa applikata deb ham ataladi.

Agar biror koordinatani tayinlab qo'ysak, masalan, $x = x_0$ desak, u holda (x_0, y, z) ko'rinishdagi nuqtalar Ox o'qiga perpendikulyar bo'lib, uni $x = x_0$ nuqtada kesadigan quyidagi tekislikni tashkil qiladi:

$$P(x_0) \;=\; \{(x_0, y, z), \quad y \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{R}\}. \tag{7.3.1}$$

Boshqa koordinatalar o'qlariga perpendikulyar tekisliklar ham xuddi shunga o'xshash kiritiladi. Bu tekisliklar bilan chegaralangan eng sodda shakl bu yopiq parallelepiped bo'lib, u quyidagi ko'rinishga ega:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad c_1 \leq z \leq c_2\}, \tag{7.3.2}$$

bu yerda $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ lar $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ va $c_1 < c_2$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

Shunga o'xshash,

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; a_1 < x \leq a_2, \quad b_1 < y \leq b_2, \quad c_1 < z \leq c_2\} \tag{7.3.3}$$

to'plam ochiq parallelepiped deyiladi.

Faraz qilaylik, $b = (b_1, b_2, b_3)$ nuqta $\mathbf{R}^3$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun b nuqtaning ε-atrofi deb radiusi ε ga teng bo'lib, markazi b nuqtada bo'lgan sharga, ya'ni

$$|x - b| \equiv \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2} < \varepsilon$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ nuqtalar to'plamiga aytamiz.

Ta'rif. *Aytaylik, $\boldsymbol{R}^3$ fazoning ixtiyoriy qismiy to'plami E berilgan bo'lsin. Agar $b \in \boldsymbol{R}^3$ nuqtaning ixtiyoriy ε-atrofida E to'plamga ham tegishli bo'lgan, ham tegishli bo'lmagan nuqtalar topilsa, b nuqta E to'plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi.*

Chegaraviy nuqtalar to'plami E to'plamning *chegarasi* deyiladi va odatda ∂E simvol orqali belgilanadi.

Ta'rif. *Agar F to'plam o'zining barcha chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga olsa, u **yopiq** to'plam deyiladi.*

Masalan, (7.3.2) parallelepiped yopiq to'plamdir.

Ta'rif. *Agar G to'plam birorta ham chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga olmasa, u **ochiq** to'plam deyiladi.*

Masalan, (7.3.3) parallelepiped ochiq to'plamdir.

Bir vaqtning o'zida ham yopiq F parallelepipedning, ham ochiq G parallelepipedning chegarasi quyidagi to'plam bo'ladi:

$$\partial G \equiv \partial F = F \setminus G = \{(x, y, z) \in F : (x, y, z) \notin G\}.$$

Parallelepipedning chegarasi *yoq* deb ataluvchi to'g'ri to'rtburchaklardan iborat.

Biz (7.3.2) ko'rinishdagi to'plamni *regulyar parallelepiped* deymiz. Boshqacha aytganda, ***regulyar parallelepiped** deganda biz yoqlari koordinatalar o'qlariga perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy yopiq parallelepipedni tushunamiz.*

Ta'rif. (7.3.2) *ko'rinishdagi regulyar parallelepipedning **hajmi** deb quyidagi songa aytamiz:*

$$|F| = (a_2 - a_1) \cdot (b_2 - b_1) \cdot (c_2 - c_1). \tag{7.3.4}$$

Ravshanki, istalgan regulyar parallelepipedning hajmi musbat son bo'ladi.

Ta'rif. *Chekli sondagi P_k (yopiq) regulyar parallelepipedlarning F birlashmasi, ya'ni*

$$F = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n. \tag{7.3.5}$$

***yopiq ko'pyoqli jism** deyiladi.*

Yopiq ko'pyoqli F jismdan uning barcha chegaraviy nuqtalarini olib tashlash natijasida hosil bo'lgan G to'plam *ochiq ko'pyoqli jism* deyiladi, ya'ni

$$G = F \setminus \partial F.$$

Nihoyat, agar biror $E \subset \mathbf{R}^3$ to'plam uchun shunday ochiq ko'pyoqli jism G topilsaki, uning uchun

$$G \subset E \subset (G \cup \partial G)$$

munosabat bajarilsa, E to'plamni *ko'pyoqli jism* deymiz. Bunda G ko'pyoqli E jismning *ichki qismi* deb ataladi.

Shunday qilib, biz aniqlagan *ko'pyoqli jism, chegarasini o'z ichiga olishi yoki olmasligi, yoki bo'lmasa chegaraning biror qisminigini o'z ichiga olishi mumkin ekan.*

Agar ikki ko'pyoqli jismlarning ichki qismlari umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, biz bu jismlarni *biri ikkinchisini ustiga tushmaydi* deymiz.

Ta'rif. *Agar Q ko'pyoqli jism (7.3.5) ko'rinishga ega bo'lib, P_k regulyar parallelepipedlar o'zaro biri ikkinchi ustiga tushmasa, u holda $|Q|$* ***hajm*** *deb quyidagi songa aytamiz:*

$$|Q| \;=\; \sum_{k=1}^{n} |P_k|. \tag{7.3.6}$$

Bu ta'rifning korrektligi xuddi ko'pburchakli shakl yuzi ta'rifining korrektligi kabi ko'rsatiladi.

Quyi va yuqori yuz tushunchalari singari quyi va yuqori hajm tushunchalari kiritiladi.

Faraz qilaylik, B - uch o'lchovli $\mathbf{R}^3$ fazoning chegaralangan to'plami bo'lsin. Bunday to'plamni keyinchalik *jism* deb ataymiz. Jismga ichki va tashqi chizilgan ko'pyoqli jismlar tushunchalari xuddi ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar singari aniqlanadi.

Ta'rif. *B jismning* ***quyi hajmi*** *$|B|_*$ deb B ga ichiki chizilgan P ko'pyoqli jismlar hajmlarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi:*

$$|B|_* \;=\; \sup_{P \subset B} |P|.$$

Agar B jism ichiga birorta ham ko'pyoqli jism chizilmasa, $|B|_* = 0$ deb qabul qilinadi.

Ta'rif. *B jismning* ***yuqori hajmi*** *$|B|^*$ deb B ga tashqi chizilgan Q ko'pyoqli jismlar hajmlarining aniq quyi chegarasiga aytiladi:*

$$|B|^* \;=\; \inf_{Q \supset B} |Q|.$$

Ta'rif. *B jismning quyi hajmi uning yuqori hajmiga teng bo'lsa, bu jism* ***kublanuvchi*** *deyiladi. Bunda*

$$|B| \;=\; |B|_* \;=\; |B|^*$$

son kublanuvchi E jismning ***hajmi*** *deyiladi.*

7.3.1 - teorema. *Berilgan B jismning kublanuvchi bo'lishi uchun unga ichki va tashqi chizilgan shunday mos ravishda P va Q ko'pyoqli jismlar topilib, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarlidir:*

$$|Q| \;-\; |P| \;<\; \varepsilon. \tag{7.3.7}$$

Bu teoremaning isboti xuddi 7.2.2 - Teorema isbotidek olib boriladi.

Shuni aytish kerakki, jismlar hajmining umumiy nazariyasi karrali integrallar nazariyasida rivojlantiriladi. Shuning uchun, biz bu yerda hajmlarni faqat maxsus hollarda, oddiy Riman integralidan foydalanib hisoblash usullari bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, $P(a)$ va $P(b)$ tekisliklar Ox o'qiga perpendikulyar bo'lib, bu o'qni mos ravishda a va b nuqtalarda kessin. Bundan tashqari, $B \subset \mathbf{R}^3$ - yuqoridagi tekisliklar orasida joylashgan biror jism bo'lsin. U holda $B(x)$ simvol orqali B jismning $P(x)$ tekislik bilan kesishmasini belgilaymiz, ya'ni

$$B(x) \;=\; B \cap P(x).$$

$B(x)$ ni ba'zan *kesim* ham deb atashadi. Ravshanki, har bir kesim yassi shakl bo'ladi.

Har bir $x \in [a,b]$ uchun $B(x)$ kesim kvadratlanuvchi bo'lsin deylik va $S(x)$ simvol bilan bu shakl yuzini belgilaylik, ya'ni

$$S(x) \;=\; |B(x)|.$$

Navbatdagi teorema jism hajmini hisoblashni, biror kesmaga perpendikulyar bo'lgan, ko'ndalang kesimlar yuzidan shu kesma bo'yicha olingan integralni hisoblashga olib keladi.

7.3.2 - teorema. (Kaval'eri prinsipi). *Faraz qilaylik, B - ikki $P(a)$ va $P(b)$ tekisliklar orasida joylashgan jism bo'lib, B jismni $P(x)$ tekislik bilan kesimining $S(x)$ yuzi $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya bo'lsin. U holda B jismning $|B|$ hajmi uchun quyidagi formula o'rinli:*

$$|B| = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{7.3.8}$$

Isbot odatda karrali integrallar nazariyasi deb ataluvchi bo'limda keltiriladi. Bu isbot karrali integralni takroriy integralga keltirish haqidagi teoremani B jismning xarakteristik funksiyasiga qo'llashga asoslanadi.

Biz bu teoremadan aylanish jismlarning hajmlarini hisoblash uchun foydalanamiz. Aylanish jismlar deganda biz egri chiziqli trapetsiyaning abssissalar o'qi atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan shaklni tushunamiz.

Shunday qilib, agar f funksiya $[a,b]$ kesmada manfiy bo'lmasa, B *aylanish jism* deb quyidagi to'plamga aytamiz:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x \in [a,b], \quad y^2+z^2 \le f^2(x)\}. \tag{7.3.9}$$

Ravshanki, bu jism (7.2.13) egri chiziqli trapetsiyani Ox o'qning atrofida aylantirishdan hosil bo'ladi.

7.3.3 - teorema. *Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada manfiy bo'lmagan integrallanuvchi funksiya bo'lib, B (7.3.9) ko'rinishdagi aylanish jism bo'lsa, u holda B jism hajmi $|B|$ uchun quyidagi formula o'rinli:*

$$|B| = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{7.3.10}$$

Isbot. Kaval'eri prinsipidan foydalanamiz. $P(x)$ yuqorida aniqlangan tekislik bo'lsin. $B(x)$ orqali B jismni shu tekislik bilan kesish natijasida hosil bo'lgan kesimini belgilaylik. Bu kesimning radiusi $f(x)$ ga teng bo'lgan doiradan iboratligi bevosita (7.3.9) ta'rifdan kelib chiqadi. Shuning uchun, bu kesimning $S(x)$ yuzi

$$S(x) = \pi f^2(x) \tag{7.3.11}$$

ga teng bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchidir. Shunday ekan, 6.4.4 - Teoremaga ko'ra, $f^2(x)$ funksiya ham va demak, $S(x)$ funksiya ham $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. Demak, biz (7.3.8) formulani qo'llashimiz mumkin. Bu formuladan, (7.3.11) tenglikni hisobga olsak, talab qilingan (7.3.10) munosabatni olamiz.

Q.E.D.

7.3.1 - misol. Radiusi R ga teng bo'lgan sharning hajmini toping:

$$B(R) \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}.$$

Ravshanki, bu shar, agar

$$f(x) \ = \ \sqrt{R^2-x^2}, \quad -R \leq x \leq R,$$

deb olsak, (7.3.9) ko'rinishdagi aylanish jism bo'ladi.

Shuning uchun, (7.3.10) formulaga ko'ra,

$$|B(R)| \ = \pi \int\limits_{-R}^{R} f^2(x)\,dx = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2-x^2)\,dx = \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-R}^{x=R}.$$

Demak,

$$|B(R)| \ = \ \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Shuni qayd etamizki, (7.3.10) formulani aylanish jism chegaralanmagan bo'lgan holda ham qo'llash mumkin. Bunda bu jism hajmi deganda biz unga yaqinlashuvchi chegaralangan jismlar hajmlarining limitini tushunamiz. Albatta bu holda xosmas integrallarni qarashga to'g'ri keladi.

7.3.2 - misol. Quyidagi

$$f(x) \ = \ \frac{1}{x}, \quad x \geq 1,$$

funksiya grafigining abssissalar o'qi atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan B jismning hajmini hisoblang.

Avval (7.3.10) formuladan $1 \leq x \leq b$ kesmada foydalanamiz. So'ngra, bu formulada $b \to +\infty$ deb limitga o'tsak,

$$|B| \ = \pi \int\limits_{1}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \pi \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\,dx = \pi$$

tenglikni olamiz.

§ 7.4. Aylanma sirt yuzi

Ushbu paragrafda biz aylanish jismlarni chegaralovchi sirtlarnigina o'rganish bilan cheklanamiz.

Ox_1 o'q atrofida $x_2 = f(x_1)$ funksiya grafigi aylanishi natijasida hosil bo'lgan S sirtni qaraymiz. Chunonchi, agar f funksiya $[a,b]$ kesmada manfiy bo'lmasa, S *aylanma sirt* deb uch o'lchovli $\mathbf{R}^3$ fazoning quyidagi ko'rinishdagi to'plamiga aytamiz:

$$S \ = \ \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_2^2+x_3^2 = f^2(x_1), \ a \leq x_1 \leq b\}.$$

Kesmaning, ya'ni $f(x_1) = kx_1 + c$ chiziqli funksiya grafigining aylanishi natijasida hosil bo'lgan to'g'ri kesik konus sirti, ya'ni

$$K \ = \ \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_2^2 + x_3^2 = (kx_1 + c)^2, \ a \leq x_1 \leq b\}$$

ko'rinishdagi to'plam aylanma sirtga muhim misol bo'ladi.

Biz kesik konus yon sirtining yuzi:

$$|K| \ = \ 2\pi r l \tag{7.4.1}$$

bizga ma'lum deb hisoblaymiz, bu yerda r $-$ konusni asoslari radiuslarining o'rta arifmetigi, l esa konus yasovchisining uzunligi.

Ixtiyoriy $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bo'linishni olaylik. Bu bo'linishga mos kelgan quyidagi har bir

$$L_k \ = \ \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \ = \ x_k, \quad 0 \ \leq \ y \ \leq \ f(x_k)\}, \quad k = 0, 1, ..., n$$

kesmaning abssissalar o'qi atrofida aylanishidan ikkita aylana hosil bo'ladi. Shu ikki aylanani asos qilib S_k kesik konuslarni yasaymiz. Nihoyat, mana shu kesik konuslardan tashkil topgan aylanma sirtni $S(P)$ orqali belgilaymiz.

Har bir S_k kesik konus yon sirtining yuzi $|S_k|$, (7.4.1) ga ko'ra, quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$|S_k| \ = \ 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

Faraz qilaylik, f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, Lagranj formulasiga ko'ra, shunday $\xi_k \in (x_{k-1}, x_x)$ son topiladiki, u uchun

$$|S_k| \ = \ 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \ \Delta x_k$$

tenglik bajariladi.

Kantor teoremasiga asosan f funlsiya $[a, b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi. Shu sababli, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham P bo'linish diametrini shunday kichik tanlash mumkinki, har bir qismiy kesmada

$$\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \ = \ f(\xi_k) \ + \ \alpha_k$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $|\alpha_k| < \varepsilon$. Shunday ekan, o'rganilayotgan $S(P)$ aylanma sirtning yuzi uchun

$$|S(P)| \ = \ 2\pi \sum_{k=1}^{n} \ [f(\xi_k) + \alpha_k] \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \ \Delta x_k$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$|S(P)| \ = \ 2\pi \sum_{k=1}^{n} \ f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \ \Delta x_k + O(\varepsilon).$$

Agar S aylanma sirt yuzini P bo'linish diametri nolga intilgandagi $S(P)$ sirtlar yuzlarining limitiga teng deb aniqlasak, oxirgi tenglikdan

$$|S| \ = \ 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + |f'(x)|^2} \, dx \tag{7.4.1}$$

formulani olamiz.

7.4.1 - misol. Abssissa o'qi atrofida

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x}, \quad 1 \le x \le b, \quad b > 1,$$

funksiya grafigi aylanishi natijasida hosil bo'lgan $S(b)$ sirt yuzini toping.

Agar (7.4.1) formuladan foydalansak,

$$|S(b)| \;= 2\pi \int\limits_1^b f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx = 2\pi \int\limits_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

tenglikni olamiz.

Bundan qaralayotgan sirt yuzi uchun quyidagi bahoni olamiz

$$|S(b)| \;= 2\pi \int\limits_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \;\ge\; 2\pi \int\limits_1^b \frac{dx}{x} \;= 2\pi \ln b.$$

Demak, $b \to +\infty$ da $|S(b)| \to +\infty$ bo'lar ekan.

Shuni aytish kerakki, qaralayotgan sirt yuzi cheksiz bo'lishiga qaramasdan, u chegaralagan jism, 7.3.2 - misolga ko'ra, chekli hajmga egadir. Xususan, bu sirt chegaralagan «idishga» uch litrdan sal ko'proq ($V = \pi$) bo'yoq solish mumkin bo'lib, bunda bu «idish» to'ladi. Ammo xuddi shu «idish» sirtini bo'yash uchun esa, qancha ko'p bo'yoq bo'lsa ham yetmaydi.

§ 7.5. Misollar

1 - misol. Quyidagi

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\ ), \quad 0 \le x \le 1,$$

funksiya grafigining uzunligini toping.

Ko'rsatma. (7.1.4) formulani qo'llang. Hosil bo'lgan integralda $x = b\,\mathrm{sh}\,t$ giperbolik almashtirishni bajaring.

2 - misol. Quyidagi

$$y = \frac{7}{8}\,x^{8/7}, \quad 0 \le x \le 4,$$

funksiya grafigi uzunligini toping.

Ko'rsatma. (7.1.4) formulani qo'llang.

3 - misol. Quyidagi

$$y = 2^x, \quad 0 \le x \le a,$$

funksiya grafigi uzunligini toping.

Ko'rsatma. (7.1.4) formulani qo'llang.

4 - misol. Quyidagi
$$x = \frac{9}{5}\cos^3 t,\ y = \frac{9}{4}\sin^3 t$$
parametrik ko'rinishda berilgan yopiq egri chiziq uzunligini toping.

Ko'rsatma. (7.1.7) formulani qo'llang.

5 - misol. Quyidagi
$$x = \frac{1}{8}(t - \sin t),\ y = \frac{1}{8}(t - \cos t),\ 0 \le x \le 2\pi,$$
parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziq uzunligini toping.

Ko'rsatma. (7.1.7) formulani qo'llang.

6 - misol. Quyidagi
$$y = 2x^2, \quad x + y = 2$$
egri chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping.

Ko'rsatma. (7.2.16) formulani qo'llang.

7 - misol. Ushbu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
ellips yuzini toping.

Ko'rsatma. (7.2.16) formulani qo'llang.

8 - misol. Ushbu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

Ko'rsatma. (7.3.8) formulani qo'llang.

9 - misol. Quyidagi
$$y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi,$$
egri chiziqlarning Oy o'qi atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan sirt chegaralagan jism hajmini toping.

Ko'rsatma. (7.3.10) formuladan foydalaning.

10 - misol. Quyidagi
$$y = \cos x, \quad |x| \le \frac{\pi}{2},$$
funksiya grafigining Ox o'qi atrofida aylanishi natijasida hosil bolgan sirt yuzini toping.

Ko'rsatma. (7.4.1) formulani qo'llang.

VIII Bob. Tenglamalar ildizlarini va aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari

§ 8.1. Tenglamalar ildizlarini hisoblashning taqribiy usullari

Bu paragrafda biz funksiya ildizlarini va uning ekstremal qiymatlarini taqribiy hisoblash usullarini ko'rib chiqamiz. Biz o'rganadigan barcha usullarda berilgan funksiyalarni uzluksiz deb hisoblaymiz.

Shunday qilib, f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ shartlarni qanoatlantirsin. U holda, 3.5.1 - lemmaga ko'ra, (a, b) intervalda shunday c nuqta topiladiki, u uchun $f(c) = 0$ tenglik bajariladi, ya'ni c soni quyidagi

$$f(x) \ = \ 0 \tag{8.1.1}$$

tenglamaning yechimi bo'ladi.

Demak, f funksiyaga qo'yilgan shartlar c ildizning mavjudligini ta'minlar ekan. Endi biz mana shu ildizning qiymatini avvaldan berilgan istalgan aniqlikda hisoblash bilan shug'ullanamiz.

Dastavval biz (8.1.1) tenglama ildizini taqribiy hisoblashning «vilka usuli» deb nomlanadigan eng sodda usul bilan tanishamiz.

1."Vilka" usuli. Bu usulga asos qilib 3.5.1 - lemma isbotida foydalanilgan jarayon olingan. Ushbu lemmada biror kesmaning oxirlarida turli ishoraga ega bo'lgan uzluksiz funksiya grafigi abssissalar o'qini kesib o'tishi isbotlangan edi. Isbotda qo'llangan jarayon esa kesmani teng ikki bo'lakka bo'lib, ulardan qaysi birining chekkalarida funksiya turli ishoraga ega bo'lsa, kesmaning o'sha qismini tanlashdan iborat edi.

Yuqorida qayd qilinganidek, f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ shartlarni qanoatlantirsin. (8.1.1) tenglama ildizini topish maqsadida

$$h_k = \frac{b-a}{2^k} \tag{8.1.2}$$

belgilash kiritib, x_k rekurrent ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$x_0 = a \tag{8.1.3}$$

va $k \geq 0$ lar uchun

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + h_{k+1}, & \text{agar} \quad f(x_k) < 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ x_k - h_{k+1}, & \text{agar} \quad f(x_k) > 0 \quad \text{bo'lsa.} \end{cases} \tag{8.1.4}$$

Ravshanki, $h_1 = \dfrac{b-a}{2}$ va shuning uchun $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

Berilgan f funksiyaning c ildizini topish jarayoni ketma-ket $f(x_k)$ qiymatlarni hisoblashdan iborat. Agar bordiyu biror natural k uchun $f(x_k) = 0$ tenglik bajarilsa, x_k nuqta qidirilayotgan ildiz deb e'lon qilinadi va jarayon tugatiladi. Shuning uchun bundan so'ng $f(x_k) \neq 0$ deb faraz qilamiz.

8.1.1 - tasdiq. (8.1.2)-(8.1.4) *tengliklar bilan aniqlangan x_k ketma-ketlik uchun*

$$f(x_k - h_k) < 0, \qquad f(x_k + h_k) > 0 \tag{8.1.5}$$

shartlar o'rinlidir.

Isbot oddiy bo'lib, u matematik induksiya usuli bilan olib boriladi.

8.1.2 - tasdiq. (8.1.2)-(8.1.4) *tengliklar bilan aniqlangan x_k ketma-ketlik (8.1.1) tenglamaning ildiziga, ya'ni c nuqtaga yaqinlashadi va bunda quyidagi baho bajariladi:*

$$|x_n - c| < \frac{(b-a)}{2^n}. \tag{8.1.6}$$

Isbot. (8.1.2) va (8.1.4) tengliklardan

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| = \sum_{k=1}^{p} h_{n+k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{(b-a)}{2^{n+k}} = \frac{(b-a)}{2^n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} < \frac{(b-a)}{2^n}$$

bahoni olamiz.

Demak, ixtiyoriy natural n va p lar uchun

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{(b-a)}{2^n} \tag{8.1.7}$$

baho bajarilar ekan.

Hosil bo'lgan (8.1.7) baho $\{x_n\}$ ketma-ketlikning Koshi ketma-ketligi ekanini anglatadi va shuning uchun, bu ketma-ketlik biror c songa yaqinlashadi.

Agar (8.1.5) tengsizliklarni hisobga olsak, bevosita f funksiyaning uzluksizligidan $f(c) = 0$ tenglikni olamiz.

Nihoyat, agar (8.1.7) bahoda $p \to \infty$ da limitga o'tsak, talab qilingan (8.1.6) bahoga ega bo'lamiz. **Q.E.D.**

Eslatma. Yuqorida f funksiyaga qo'yilgan (8.1.1) shart tenglamaning kamida bitta ildizi borligini ta'minlaydi. Albatta bunda (a, b) intervalda bir nechta ildiz bo'lgan hol va xattoki, cheksiz sondagi ildizlar bo'lgan hol ham inkor qilinmaydi. Masalan, $[-2,\ 2]$ kesmada

$$f(x) = 2x - |x+1| + |x-1| \tag{8.1.8}$$

funksiya uzluksiz bo'lib,

$$f(-2) = -2 < 0, \quad f(2) = 2 > 0$$

shartlarni qanoatlantiradi.

3.5.1 - lemmaga ko'ra, bu shartlardan $(-2,\ 2)$ interval ichida f funksiyaning ildizi mavjudligi kelib chiqadi. Ammo bu funksiyaning aniqlanishidan $-1 \leq x \leq 1$ kesmaning har bir x nuqtasi uning ildizi ekanligi ko'rinib turibdi. Bundan chiqdi, (8.1.8) funksiya cheksiz ko'p ildizlarga ega ekan. Yuqorida ko'rilgan "vilka" usuli esa bu ildizlardan faqat bittasini, chunonchi, $c = 0$ ildizni topish imkonini beradi.

2. Vatarlar usuli. Mazkur bandda biz vatarlar usulini ko'rib chiqamiz. "Vilka" usulidan farqli o'laroq vatarlar usulida biz f funksiyaning $[a, b]$ kesmada uzluksizligidan tashqari, uning (a, b) intervalda qo'shimcha ravishda differensiallanuvchi bo'lishini ham talab qilamiz. Bunda funksiya grafigi vatari deb grafikni ixtiyoriy ikki nuqtasini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasiga aytiladi.

Vatarlar usulining asosiy g'oyasi quyidagidan iborat. Aytaylik, x_0 - (8.1.1) tenglama ildizining taqribiy qiymati bo'lsin. Agar f funksiya grafigining $(x_0,\ f(x_0))$ va $(b, f(b))$ nuqtalarini birlashtiruvchi vatar abssissalar o'qini x_1 nuqtada kessa, mana shu x_1 sonni (8.1.1) tenglama ildizining yangi taqribiy qiymati deb olamiz.

Faraz qilaylik, x_k izlanayotgan c ildizning taqribiy qiymati bo'lsin. Grafikning $(x_k, f(x_k))$ va $(b, f(b))$ koordinatalik nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini, ya'ni

$$y(x) = f(x_k) + \frac{f(b) - f(x_k)}{b - x_k}(x - x_k) \tag{8.1.9}$$

tenglamani qaraymiz.

Aytaylik, x_{k+1} son $y(x) = 0$ tenglamani ildizi bo'lsin. U holda

$$0 = f(x_k) + \frac{f(b) - f(x_k)}{b - x_k}(x_{k+1} - x_k)$$

va demak,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)} f(x_k). \tag{8.1.10}$$

Mazkur rekurrent formula (8.1.1) tenglama ildizini taqribiy hisoblashning vatarlar usuli ketma-ketligini aniqlaydi. Bunda boshlang'ich yaqinlashish sifatida

$$x_0 = a \tag{8.1.11}$$

nuqtani olishimiz mumkin.

Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada musbat va o'suvchi hosilaga ega bo'lsa, yuqoridagi ketma-ketlik korrekt aniqlanganligiga, ya'ni x_k nuqtalardan birortasi ham $[a, b]$ kesmadan tashqariga chiqmasligiga ishonch hosil qilamiz.

8.1.3 - tasdiq. *Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lib, uning $f'(x)$ hosilasi shu kesmada o'suvchi bo'lsin. Agar istalgan $x_0 \in [a, b]$ nuqta uchun quyidagi*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8.1.12}$$

ayirmali nisbatni x ning funksiyasi deb qarasak, u $x > x_0$ da o'suvchi bo'ladi.

Isbot. Agar $h > 0$ bo'lsa, x ni $x + h$ ga o'zgartirganda (8.1.12) ayirmali nisbat qiymatining kamaymasligini ko'rsatamiz. Buning uchun Lagranj formulasidan foydalanamiz. Bu formulaga asosan, shunday $\xi_1 \in (x_0, x)$ nuqta topiladiki, u uchun

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x - x_0), \quad x_0 < \xi_1 < x, \tag{8.1.13}$$

tenglik bajariladi.

Shunga o'zshash, $h > 0$ uchun shunday $\xi_2 \in (x, x + h)$ nuqta topiladiki,

$$f(x + h) - f(x) = f'(\xi_2)h, \quad x < \xi_2 < x + h, \tag{8.1.14}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Shunday ekan, (8.1.13) va (8.1.14) tengliklarga ko'ra,

$$f(x + h) - f(x_0) = [f(x + h) - f(x)] + [f(x) - f(x_0)] =$$

$$= f'(\xi_2)h + f'(\xi_1)(x - x_0).$$

Endi $f'(x)$ hosila o'suvchi ekanini qayd qilsak, $\xi_2 \geq \xi_1$ bo'lgani uchun $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shuning uchun,

$$f(x + h) - f(x_0) \geq f'(\xi_1)h + f'(\xi_1)(x - x_0) = f'(\xi_1)(x + h - x_0).$$

Bu tengsizlikdan, (8.1.13) ga ko'ra, talab qilingan natijani, ya'ni

$$\frac{f(x+h)-f(x_0)}{x+h-x_0} \geq f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

munosabatni olamiz.

Q.E.D.

Navbatdagi tasdiqda (8.1.10)-(8.1.11) tengliklar bilan aniqlangan $\{x_k\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan (8.1.1) tenglamaning ildizi, ya'ni c soni bilan chegaralangan ekanini ko'rsatamiz.

8.1.4 - tasdiq. *Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lib,*

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad a \leq x \leq b, \tag{8.1.15}$$

shartlarni qanoatlantirsin. Bundan tashqari, $f'(x)$ hosila $[a, b]$ kesmada o'suvchi bo'lsin.

U holda (8.1.10)-(8.1.11) tengliklar bilan aniqlangan x_k ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, uning barcha hadlari uchun

$$x_k \ \leq \ c \tag{8.1.16}$$

baho o'rinlidir.

Isbot. Matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Buning uchun, shartga ko'ra $x_0 = a < c$ bo'lgani sababli, $a \leq x_k \leq c$ deb faraz qilib, $x_k \leq x_{k+1} \leq c$ qo'shaloq tengsizlikni isbotlash yetarlidir.

Ma'lumki, $f(c) = 0$. Shuning uchun (8.1.10) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)}[f(c) - f(x_k)]. \tag{8.1.17}$$

Bu tenglikka ko'ra, agar $x_k = c$ bo'lsa, $x_{k+1} = c$ ekani kelib chiqadi. Ya'ni isbot qilinishi talab qilingan munosabat bajarilar ekan. Shu sababali biz bundan keyin $a \leq x_k < c$ deb faraz qilishimiz mumkin.

Sodda almashtirishlar yordamida (8.1.17) tenglikni

$$c - x_{k+1} = (c - x_k)\left[1 - \frac{(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)} \frac{f(c) - f(x_k)}{(c - x_k)}\right] \tag{8.1.18}$$

ko'rinishga keltiramiz.

Agar

$$\theta_k = \frac{(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)} \ \frac{f(c) - f(x_k)}{(c - x_k)} \tag{8.1.19}$$

deb belgilash kiritsak, (8.1.18) tenglik

$$c - x_{k+1} = (c - x_k)(1 - \theta_k) \tag{8.1.20}$$

ko'rinishga keladi.

Shartga ko'ra f o'suvchi bo'lgani sababli $\theta_k > 0$ bo'ladi. Bundan tashqari, farazimizga ko'ra $x_k < c < b$ bo'lgani uchun, 8.1.3 - tasdiq va (8.1.19) tenglikdan $\theta_k \leq 1$ tengsizlik kelib chiqadi. Ya'ni

$$0 \ < \ \theta_k \ \leq \ 1 \tag{8.1.21}$$

shart bajarilar ekan.

Shunday qilib, $x_k < c$ degan farazimizga ko'ra, (8.1.20) va (8.1.21) munosabatlardan

$$0 \ \leq \ c - x_{k+1} \ < \ c - x_k$$

baho kelib chiqadi. Bundan esa, o'z navbatida, (8.1.10)-(8.1.11) ketma-ketlik uchun talab qilingan

$$x_k \ < \ x_{k+1} \ \leq c$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Q.E.D.

Shunday qilib, (8.1.10)-(8.1.11) ketma-ketlik korrekt aniqlangan ekan.

8.1.5 - tasdiq. *Agar 8.1.4 - tasdiq shartlari bajarilsa, (8.1.10)-(8.1.11) tengliklar bilan aniqlangan* x_k *ketma-ketlik (8.1.1) tenglamaning* c *ildiziga yaqinlashadi. Bundan tashqari, biror* q, $0 < q < 1$, *o'zgarmas uchun*

$$|x_n - c| \leq (b - a) \cdot q^n \tag{8.1.22}$$

baho o'rinli bo'ladi.

Isbot. Quyidagi

$$\varepsilon_k = c - x_k$$

belgilashni kiritamiz.

8.1.4 - tasdiqdan $\{\varepsilon_k\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi va manfiy emasligi kelib chiqadi. Agar θ_k (8.1.19) formula bilan aniqlangan sonlar bo'lsa, (8.1.20) tenglikdan

$$\varepsilon_{k+1} = (1 - \theta_k)\varepsilon_k \tag{8.1.23}$$

rekurrent munosabatni olamiz. Lagranj formulasiga ko'ra, shunday $\xi_k \in (x_k, c)$ va $\eta_k \in (x_k, b)$ sonlar topiladiki, ular uchun

$$\frac{f(c) - f(x_k)}{(c - x_k)} \ = f'(\xi_k)$$

va

$$\frac{f(b) - f(x_k)}{(b - x_k)} \ = f'(\eta_k)$$

tengliklar bajariladi.

Bu tengliklarni (8.1.19) ga qo'ysak, θ_k quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\theta_k = \frac{f'(\xi_k)}{f'(\eta_k)}.$$

Endi $\alpha = \dfrac{f'(a)}{f'(b)}$ deb belgilab, yuqorida keltirilgan shartlarga ko'ra, quyidagi baho bajarilishini qayd etamiz:

$$0 < \alpha \leq 1.$$

Bu belgilashdan foydalansak, $f'(x)$ funksiyaning o'suvchligiga ko'ra,

$$\theta_k = \frac{f'(\xi_k)}{f'(\eta_k)} \geq \frac{f'(a)}{f'(b)} \ = \ \alpha$$

munosabatni olamiz. Shunday ekan, (8.1.23) dan quyidagi

$$\varepsilon_{k+1} \leq (1 - \alpha)\varepsilon_k$$

muhim tengsizlik kelib chiqadi. Demak,

$$0 \leq \varepsilon_{k+1} \leq (1-\alpha)^{k+1}\varepsilon_0. \tag{8.1.24}$$

Nihoyat, $\varepsilon_0 = c - x_0 = c - a < b - a$ bo'lgani sababli, (8.1.24) dan talab qilingan (8.1.22) bahoni olamiz.

Q.E.D.

Vatarlar usulining ustunligi taqribiy qiymatlar ketma-ketligining izlanayotgan ildizga tez yaqinlashishidadir. Bu usulning yana bir muhim xususiyati shundan iboratki, rekurrent ketma-ketlikni hisoblash vaqtida funksiya qiymatini oldingi nuqtada hisoblash yetarlidir va bundan tashqari, biz funksiyaning birinchi hosilasi mavjudligini talab qilsakda, birorta nuqtada ham uning qiymatini hisoblashga zaruriyat yo'qdir.

Agar bizda bor ma'lumotlar hosilaning ham qiymatini hisoblashga imkon bersa, taqribiy qiymatlar ketma-ketligining ildizga yaqinlashish tezligini yanada oshirish mumkin. I.N'yuton taklif qilgan urinmalar usuli aynan shunday usuldir.

3. Urinmalar usuli (N'yuton usuli). Urinmalar usulining asosiy g'oyasi quyidagidan iborat. Aytaylik, x_0 - (8.1.1) tenglama ildizining taqribiy qiymati bo'lsin. Agar f funksiya grafigiga $(x_0,\ f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma abssissalar o'qini x_1 nuqtada kessa, ana shu x_1 nuqtani (8.1.1) tenglama ildizi uchun yangi tqribiy qiymat sifatida olamiz. Bu jarayonni davom ettirib, biz urinmalar usulining taqribiy qiymatlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, grafikka $(x_k,\ f(x_k))$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini qaraylik. Bu tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Agar $y(x_{k+1}) = 0$ bo'lsa,

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

tenglik hosil bo'ladi. Demak,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{8.1.25}$$

Boshlang'ich yaqinlashish x_0 sifatida odatda ildizga yaqinligi avvaldan ma'lum bo'lgan nuqtalardan biri olinadi. (8.1.25) rekurrent formula orqali aniqlangan ketma-ketlik *urinmalar usulining taqribiy qiymatlar ketma-ketligi* deyiladi.

Faraz qilaylik, ildizini topishimiz kerak bo'lgan f funksiya biror $[a, b]$ kesmada ikkinchi hosilaga ega bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f'(x) \geq m > 0, \quad 0 \leq f''(x) \leq M, \quad a \leq x \leq b. \tag{8.1.26}$$

U holda bu kesma ichida $f(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta mavjud va yagona bo'ladi. Biz (8.1.26) shartlar bajarilganda (8.1.25) ketma-ketlikning ana shu c ildizga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

8.1.6 - tasdiq. *Agar (8.1.26) shartlar bajarilsa, u holda (8.1.25) rekurrent munosabat bilan aniqlangan $\{x_k\}$ ketma-ketlik monoton kamayib, (8.1.1) tenglamaning $x = c$ ildiziga yaqinlashadi.*

Isbot. Avval Teylor formulasidan foydalanamiz. Bu formulaga asosan, c va x_k nuqtalar orasida yotgan shunday ξ_k nuqta topiladiki, u uchun

$$f(c) - f(x_k) = f'(x_k)(c - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(c - x_k)^2$$

tenglik bajariladi. Agar $f(c) = 0$ ekanini hisobga olib, $f'(x_k)$ ga bo'lib yuborsak,

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \;=\; c \;+\; \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\,(c - x_k)^2$$

tenglikka kelamiz.

Endi (8.1.25) rekurrent munosabatni hisobga olsak, bu tenglikning chap tomoni x_{k+1} ga tengligini ko'ramiz. Demak,

$$x_{k+1} - c \;=\; \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\,(c - x_k)^2. \tag{8.1.27}$$

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomoni, (8.1.26) shartlarga ko'ra, barcha k larda musbat. Bundan chiqdi, boshlang'ich x_0 nuqtaning qanday tanlanishidan qat'iy nazar, (8.1.25) ketma-ketlikning x_1 dan boshlab barcha nuqtalari (8.1.1) tenglamaning c ildizidan o'ngda yotar ekan.

Agar $x > c$ bo'lsa, (8.1.26) shartlardan $f(x) > f(c) = 0$ ekani kelib chiqadi. Shunday ekan, hosilaning musbatligiga ko'ra,

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \;>\; 0, \quad x > c.$$

Bundan chiqdi, (8.1.25) tenglikka ko'ra, $x_k > c$ bo'lganda $x_{k+1} < x_k$ bo'ladi, ya'ni bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi bo'lar ekan.

Shunday qilib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi va quyidan chegaralangandir. Demak, bu ketma-ketlik limitga ega. Bu limitni d orqali belgilab, (8.1.25) tenglikda $k \to \infty$ deb limitga o'tsak,

$$d \;=\; d \;-\; \frac{f(d)}{f'(d)}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $f(d) = 0$ ekani kelib chiqadi. Demak, ildizning yagonaligiga ko'ra, $d = c$. Bu esa 8.1.6 - tasdiqning haqligini ko'rsatadi.

Q. E. D.

Shuni aytish kerakki, urinmalar usulidagi taqribiy qiymatlar ketma-ketligi vatarlar usulidagi ketma-ketlikka qaraganda ildizning aniq qiymatiga ancha tez yaqinlashadi. Navbatdagi tasdiq yaqinlashish tezligi asosan boshlang'ich yaqinlashishning tanlanishiga bog'liq ekanini ko'rsatadi.

8.1.7 - tasdiq. *Agar (8.1.26) shartlar bajarilib,*

$$|x_0 - c| \;<\; \frac{2m}{M} \tag{8.1.28}$$

bo'lsa, (8.1.25) tenglik orqali aniqlangan $\{x_k\}$ ketma-ketlik uchun

$$|\,x_n - c\,| \;\le\; \frac{2m}{M}\cdot q^{2^n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{8.1.29}$$

baho o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$q \;=\; |x_0 - c|\cdot\frac{M}{2m} \;<\; 1\,. \tag{8.1.30}$$

Isbot. Agar (8.1.27) tenglikdan foydalansak, (8.1.26) shartlarga ko'ra,

$$\varepsilon_{k+1} \;\le\; \frac{M}{2m}\,\varepsilon_k^2 \tag{8.1.31}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Endi (8.1.29) bahoni matematik induksiya usuli bilan o'rnatish qiyin emas. Haqiqatan, $n = 0$ uchun bu baho, (8.1.30) munosabatni hisobga olsak, o'z-o'zidan ko'rinib turgan tenglikka aylanadi. So'ngra, bahoni $n = k$ uchun o'rinli desak, (8.1.31) ga ko'ra,

$$\varepsilon_{k+1} \;\le\; \frac{M}{2m}\,\varepsilon_k^2 \;\le\; \frac{M}{2m}\left(\frac{2m}{M}\cdot q^{2^k}\right)^2 \;=\; \frac{2m}{M}\cdot q^{2\cdot 2^k} \;=\; \frac{2m}{M}\cdot q^{2^{k+1}}$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik $n = k+1$ da (8.1.29) baho bilan ustma-ust tushadi. Demak, induksiyaga ko'ra, (8.1.29) baho barcha n lar uchun o'rinli ekan.

Q. E. D.

8.1.1 - misol. Ushbu

$$x^m \;=\; a \tag{8.1.32}$$

tenglama ildizini hisoblash uchun N'yuton usulidagi taqribiy qiymatlar ketma-ketligini toping.

Agar

$$f(x) = x^m - a \tag{8.1.33}$$

deb belgilash kiritsak, u holda $f'(x) = mx^{m-1}$ va $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$ bo'ladi. Demak, (8.1.33) funksiya (8.1.26) shartlarni qanoatlantiradi va (8.1.25) rekurrent formula

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \frac{x_k^m - a}{mx_k^{m-1}}$$

ko'rinishga keladi. Bu formulani quyidagicha yozib olish ham mumkin:

$$x_{k+1} \;=\; \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_k + \frac{a}{mx_k^{m-1}}. \tag{8.1.34}$$

Xususan, agar $m = 2$ desak, (8.1.34) tenglikdan a sonining kvadrat ildizini hisoblash uchun bizga ma'lum bo'lgan N'yuton formulasini olamiz:

$$x_{k+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right). \tag{8.1.35}$$

Shu o'rinda (8.1.26) shartlarning muhim ekanligini qayd etish zarur. Agar bu shartlar bajarilmasa, N'yuton usulidagi taqribiy qiymatlar ketma-ketligi (8.1.1) tenglama ildiziga yaqinlashmasligi ham mumkin.

8.1.2 -misol. Ushbu

$$x^4 - 8x^2 - 17 = 0 \tag{8.1.36}$$

tenglama ildizini $[-4, 1]$ kesmada hisoblash uchun N'yuton usulidagi taqribiy qiymatlar ketma-ketligini toping.

Buning uchun

$$f(x) = 17 + 8x^2 - x^4 \tag{8.1.37}$$

funksiyani qaraymiz.

Agar bu funksiya qiymatini $x = -4$ va $x = 1$ nuqtalarda hisoblasak,

$$f(-4) = -111 < 0, \qquad f(1) = 24 > 0,$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Demak, $[-4,1]$ kesmada (8.1.36) tenglama ildizga ega ekan.

N'yuton usulidagi taqribiy qiymatlar ketma-ketligi, (8.1.25) formulaga binoan, quyidagi rekurrent munosabat orqali aniqlanadi:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{17 + 8x_k^2 - x_k^4}{16x_k - 4x_k^3}. \tag{8.1.38}$$

Agar boshlang'ich yaqinlashish sifatida $x_0 = 1$ ni olsak, u holda to'g'ridan-to'g'ri (8.1.38) formuladan

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1, ...$$

ketma-ketlikka ega bo'lamiz.

Demak, $x_n = (-1)^n$. Ravshanki, bu ketma-ketlik uzoqlashadi.

Shuni qayd etish joizki, (8.1.37) funksiya $[-4,1]$ kesmada (8.1.26) shartlarni qanoatlantirmaydi. Aynan shu sababli taqribiy qiymatlar ketma-ketligi ildizga yaqinlashish o'rniga $x = 1$ va $x = -1$ orasida «o'ralashib qolayapti» (XXX rasmga qarang).

§ 8.2. Funksiyaning ekstremal qiymatlarini hisoblashning taqribiy usullari

Berilgan funksiyaning ekstremal qiymatlarini topish masalasi, IV bobda keltirilgan nazariyaga ko'ra, statsionar nuqtalarni, ya'ni hosilaning nollarini aniqlab, so'ngra bu statsionar nuqtalarni o'rganishdan iboratdir. Shunday ekan, ekstremal nuqtalarni taqribiy hisoblash 8.1 - paragrafda o'rganilgan masalaga keladi. Ammo zamonaviy kompyuterlar funksiyaning ekstremal qiymatlarini, ularni hosilalarini topmasdan turib, taqribiy hisoblash imkoniyatini beradi. Ushbu paragrafda shunday usullardan biri bilan tanishamiz.

1. Funksiya ekstremumini topish algoritmi. Ushbu bandda biz funksiya ekstremumini taqribiy hisoblashning shunday usulini o'rganamizki, u funksiya nollarini topishning 1 bandda o'rganilgan «vilka» usuliga o'xshashdir.

Faraz qilaylik, f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, biror $c \in (a,b)$ nuqta uchun quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

(i) f funksiya $[a,c]$ kesmada qat'iy o'ssin;

(ii) f funksiya $[c,b]$ kesmada qat'iy kamaysin.

Shubhasiz, bu shartlar ostida c nuqta f funtsiyaning $[a,b]$ kesmadagi maksimum nuqtasi bo'ladi. Biz yana shuni ta'kidalashimiz mumkinki, bunday aniqlangan f funksiya (a,b) interval ichida lokal minimumga ega emas.

Qo'yilgan shartlar o'rganiladigan funksiyalar sinfini ancha toraytirib qo'yadi, albatta. Lekin shunga qaramasdan bunday funksiyalar tadbiqlarda tez-tez uchrab turadi. Misol tariqasida gaz molekulalari uchun tezlik bo'yicha Bol'smanning mumtoz taqsimotini olishimiz mumkin.

Bizning maqsadimiz c nuqtaga yaqinlashuvchi ketma-ketlikni tuzishdan iboratdir.

Aytaylik,

$$x_0 = a, \quad h_0 = \frac{b-a}{2} \tag{8.2.1}$$

bo'lsin. Biz c nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikni quyidagi rekurrent formuladan aniqlaymiz:

$$x_n = x_{n-1} + h_{n-1}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{8.2.2}$$

bu yerdagi $\{h_n\}$ orttirmalar ketma-ketligi navbatdagi formuladan topiladi:

$$h_n = \begin{cases} h_{n-1}, & \text{agar} \quad f(x_n) > f(x_{n-1}) \quad \text{bo'lsa,} \\ -\dfrac{h_{n-1}}{2}, & \text{agar} \quad f(x_n) \leq f(x_{n-1}) \quad \text{bo'lsa.} \end{cases} \tag{8.2.3}$$

Bundan ko'rinadiki, biz f funksiya qiymatlarini $x_0 = a$ nuqtadan boshlab hisoblab, o'ngga qarab h_0 qadam bilan toki funksiyaning navbatdagi qiymati oldingisidan kichik bo'lgunga qadar harakatlanamiz. Bunga erishishimiz bilan biz teskari yo'nalishda ikki marta kichik qadam bilan harakatlana boshlaymiz. Agar funksiya kamayishdan to'xtasa, biz yana o'nga qarab harakatlanamiz. Shunday qilib, biz goh o'suvchi va goh kamayuvchi bo'lgan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ketma-ketlikka ega bo'lamiz.

Ravshanki, (8.2.2) ketma-ketlik o'suvchidan kamayuvchiga, yoki bu ketma-ketlik-ning navbatdagi nuqtasi c nuqtadan o'ngda bo'lishi zoxoti, yoki undan keyingi qadamda o'zgaradi. Bundan so'ng ketma-ketlik ikki marta kichik qadam bilan kamaya boshlaydi. Bundan bevosita ko'rinib turibdiki, (8.2.2) ketma-ketlik nuqtalari bir tomonga (chap yoki o'ng tomonga) harakatlanayotganida ikkidan kam bo'lmagan va to'rtdan ko'p bo'lmagan sonda qadam qo'yadi.

2. Taqribiy qiymatlar ketma-ketligining yaqinlashishi. Agar (8.2.2) ketma-ketlikning x_n elementi o'zidan oldingi va o'zidan keyingi elementlardan katta bo'lsa, ya'ni

$$x_n > x_{n-1} \quad \text{va} \quad x_n > x_{n+1}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, biz bu elementni (8.2.2) ketma-ketlikning *o'ng* burilish nuqtasi deb ataymiz.

Shunga o'xshash, agar (8.2.2) ketma-ketlikning x_m elementi o'zidan oldini va o'zidan keyingi elementlardan kichik bo'lsa, ya'ni

$$x_m < x_{m-1} \quad \text{va} \quad x_m < x_{m+1}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, biz bunday elelmentni ketma-ketlikning *chap* burilish nuqtasi deb ataymiz.

O'ng va chap burilish nuqtalarini biz (8.2.2) ketma-ketlikning chekka nuqtalari deb ham ataymiz.

Navbatdagi ikki tasdiq yuqoridagi bandda keltirilgan mulohazalardan bevosita kelib chiqadi.

1 - tasdiq. *Agar x_n nuqta (8.2.2) ketma-ketlikning o'ng burilish nuqtasi bo'lsa, u holda quyidagi*

$$x_{n+2}, \ x_{n+3}, \ x_{n+4}$$

uch nuqtalardan biri (8.2.2) ketma-ketlikning chap burilish nuqtasi bo'ladi.

2 - tasdiq. *Agar x_m nuqta (8.2.2) ketma-ketlikning chap burilish nuqtasi bo'lsa, u holda quyidagi*

$$x_{m+2}, \ x_{m+3}, \ x_{m+4}$$

uch nuqtalardan biri (8.2.2) ketma-ketlikning o'ng burilish nuqtasi bo'ladi.

Agar x_{n_1} orqali (8.2.2) ketma-ketlikning birinchi o'ng burilish nuqtasini belgilasak, x_{n_2} orqali undan keyingi chap burilish nuqtasini belgilasak va bu belgilashni davom ettirsak, u holda biz (8.2.2) ketma-ketlikning barcha chekka nuqtalaridan tuzilgan va navbatma-navbat nomerlangan qism ketma-ketligini olamiz.

Asosiy tasdiq quyidagidan iborat.

3 - tasdiq. *Agar $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik (8.2.2) ketma-ketlikning navbatma-navbat nomerlangan chekka nuqtalaridan iborat qism ketma-ketligi bo'lsa, u holda $k \geq 1$ lar uchun*

$$n_k \leq 4k - 2 \tag{8.2.4}$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Qism ketma-ketlikning tuzilishiga ko'ra $1 \le n_1 \le 2$. Bundan tashqari, 1 - va 2 - tasdiqlardan ketma-ketlikning har bir o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lagi 4 dan ko'p bo'lmagan qadam natijasida hosil bo'lishi kelib chiqadi. Shunday ekan, qo'shni chekka nuqtalar nomerlari oshib borsa 4 taga farq qilishi mumkin, ya'ni

$$n_j - n_{j-1} \ \le \ 4. \tag{8.2.5}$$

Bundan chiqdi, agar o'z-o'zidan ko'rinib turgan quyidagi

$$n_k = n_1 + \sum_{j=2}^{k}(n_j - n_{j-1})$$

ayniyatdan foydalansak, u holda (8.2.5) tengsizlikdan

$$n_k \le 2 + \sum_{j=2}^{k} 4 = 2 + 4(k-1) = 4k - 2$$

munosabatni olamiz.

Q.E.D.

8.2.1 - teorema. *Agar f funksiya (i) va (ii) shartlarni qanoatlantirsa, (8.2.1)-(8.2.3) tengliklar bilan aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik f funksiyaning c maksimum nuqtasiga yaqinlashadi va bunda*

$$|x_n \ - \ c| \ \le \ A\, 2^{-n/4} \tag{8.2.17}$$

baho bajariladi, bu yerda $A = 2\sqrt{2}(b-a)$.

Isbot. Biz $\{x_{n_k}\}$ orqali (8.2.2) ketma-ketlikning chap va o'ng burilish nuqtalari ketma-ketligini belgilaymiz. Faraz qilaylik, $n_{k-1} < n \le n_k$ tengsizlik bajarilsin. U holda bevosita chap va o'ng burilish nuqtalar ta'rifidan x_n va c nuqtalarning $x_{n_{k-1}}$ va x_{n_k} nuqtalar orasida yotishi kelib chiqadi. Shunday ekan,

$$|x_n - c| \ \le \ |x_{n_k} - x_{n_{k-1}}|. \tag{8.2.7}$$

1 - va 2 - tasdiqlarga ko'ra, $x_{n_{k-1}}$ nuqtadan x_{n_k} nuqtagacha $h = (-1)^{k-1}\dfrac{b-a}{2^k}$ qadam bilan oshib borsa 4 qadamda borish mumkin. Shuning uchun, ravshanki,

$$|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}| \ \le \ 4h \ = 4\frac{b-a}{2^k}.$$

Bu baho va (8.2.7) tengsizlikka ko'ra,

$$|x_n - c| \ \le \ 4\frac{b-a}{2^k}.$$

O'z navbatida 3 - tasdiqqa ko'ra,

$$k \ge \frac{n_k + 2}{4} \ge \frac{n+2}{4}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Shunday ekan,

$$|x_n - c| \ \le \ 4\frac{b-a}{2^{(n+2)/4}} = (b-a)\,\frac{2\sqrt{2}}{2^{n/4}}$$

va demak, talab qilingan (8.2.6) baho isbotlandi.

Q.E.D.

Shuni aytish joizki, o'rganilgan usul o'zining qollanishi soddaligi bilan ajralib turadi. Chunki bu usulni amalda qo'llash uchun biz funksiya qiymatini navbatdagi nuqtada hisoblab, uni oldingi qadamda hisoblagan qiymat bilan solishtirishimiz yetarlidir.

§ 8.3. Aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari asosida integrani integral yig'indilar limiti ko'rinishidagi ta'rifi, ya'ni quyidagi

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

tenglik yotadi.

Bu ta'rifga asosan biz integralni taqriban unga mos integral yig'indi bilan almashtirishimiz mumkin. Turli usullar bilan

$$P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$$

bo'linishni va $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqtalarni tanlab, biz aniq integral hisoblashning har xil taqribiy usullariga ega bo'lamiz.

1. To'g'ri to'rtburchaklar usuli. Berilgan $[a, b]$ kesmani n ta teng bo'lakka bo'lamiz (bu bo'linish odatda *tekis to'r* deyiladi):

$$x_k \;=\; a \,+\, kh, \quad k = 0, 1, 2, ..., n, \quad \text{bu yerda} \quad h = \frac{b-a}{n}. \tag{8.3.1}$$

Oraliq ξ_k nuqtalar sifatida $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesmaning o'rtasini olamiz, ya'ni

$$\xi_k \;=\; \frac{x_{k-1} + x_k}{2}. \tag{8.3.2}$$

U holda aniq integralning taqribiy qiymati $I_R(h, f)$ sifatida quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$I_R(h, f) \;=\; h \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k). \tag{8.3.3}$$

To'g'ri to'rtburchaklar usuli xatoligini (qoldiq had ham deyiladi) $E_R(h, f)$ simvol orqali belgilaymiz, ya'ni

$$E_R(h, f) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;-\; I_R(h, f). \tag{8.3.4}$$

Endi shu kattalikni baholaymiz. Buning uchun uzunligi h ga teng bo'lgan $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesmani alohida qaraylik. Dastavval bu kesmani almashtirish bajarib, $[-h/2, h/2]$ kesmaga keltiramiz. Faraz qilaylik, f funksiya ana shu kesmada ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, Teylor formulasiga ko'ra, biror $\eta = \eta_x, 0 < |\eta_x| < |x|$, uchun

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + f''(\eta_x)\frac{x^2}{2} \tag{8.3.5}$$

tenglikni olamiz.

Shunday ekan, simmetrik kesmada integrallab,

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx \;=\; h\,f(0) + \int_{-h/2}^{h/2} f''(\eta_x)\frac{x^2}{2}\,dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shuni qayd etish joizki, $\eta = \eta_x$ nuqta x dan uzluksiz bog'liq bolmasligi mimkin. Ammo, agar $\varphi(0) = f''(0)$ desak, $\varphi(x) = f''(\eta_x)$ funksiyaning uzluksizligi (8.3.5) tenglikdan bevosita kelib chiqadi. Shuning uchun, o'rta qiymat haqidagi formulaga ko'ra,

$$\int_{-h/2}^{h/2} f''(\eta_x)\frac{x^2}{2}\,dx \;=\; f''(\theta)\int_{-h/2}^{h/2} \frac{x^2}{2}\,dx \;=\; f''(\theta)\frac{h^3}{24},$$

bu yerda $\theta - (-h/2, h/2)$ intervaldan olingan biror nuqtadir. Shunday qilib,

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx \;=\; hf(0) + \; f''(\theta)\frac{h^3}{24}. \tag{8.3.6}$$

Shubhasiz, xuddi shunday tenglik har bir qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ kesma uchun ham o'rinli, ya'ni

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \;=\; hf(\xi_k) + \; f''(\theta_k)\frac{h^3}{24}, \tag{8.3.7}$$

bu yerda ξ_k- qismiy kesmaning markazi bo'lib, θ_k esa (x_{k-1}, x_k) intervalning biror nuqtasidir.

Endi qoldiq hadni, (8.3.4) va (8.3.7) tengliklardan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$E_R(h,f) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{k-1}}^{x^k} f(x)\,dx \;-\; f(\xi_k)\,h\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f''(\theta_k)\frac{h^3}{24}. \tag{8.3.8}$$

Ma'lumki,

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\theta_k) \;\le\; \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

tengsizliklar o'rinli. Demak, ikkinchi hosilaning uzluksizligiga ko'ra, $[a, b]$ kesmadan shunday θ^* nuqta topiladiki, u uchun

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\theta_k) \;=\; f''(\theta^*). \tag{8.3.9}$$

Bu tenglik yordamida (8.3.8) qoldiq had yanada qulayroq ko'rinishga keladi:

$$E_R(h,f) \;=\; n\cdot f''(\theta^*)\frac{h^3}{24}. \tag{8.3.10}$$

Nihoyat, $nh = b - a$ bo'lgani uchun, (8.3.1)-(8.3.4) munosabatlardan va qoldiq hadning (8.3.10) ko'rinishidan foydalanib, quyidagi formulani olamiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh-h/2) \;+\; f''(\theta^*)\frac{(b-a)^3}{24n^2}, \quad h=\frac{b-a}{n}. \tag{8.3.11}$$

Bu (8.3.11) tenglik *to'g'ri to'rtburchaklar formulasi* deyiladi. Chunki bu holda (8.3.11) dagi aniq integralga teng bo'lgan egri chiziqli trapetsiya yuzi asosi $\Delta x_k = h$ va balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar yuzlari yig'indisi bilan yaqinlashtiriladi. Shuni qayd etish joizki, agar f funksiya $[a,b]$ kesmada chiziqli bo'lsa, u holda (8.3.11) formuladan ko'rinib turibdiki, integralning to'g'ri to'rtburchaklar formulasi orqali hisoblangan taqribiy qiymati uning aniq qiymati bilan ustma-ust tushadi.

2. Trapetsiyalar usuli. Yana tekis to'r deb ataluvchi bo'linishni olib, endi bu safar $f(\xi_k)$ sifatida quyidagi kattalikni olamiz:

$$f(\xi_k) \;=\; \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}.$$

Boshqacha aytganda, $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesma ustida joylashgan egri chiziqli trapetsiya yuzining taqribiy qiymati sifatida biz parallel tomonlarining uzunligi $f(x_{k-1})$ va $f(x_k)$ larga teng bo'lgan trapetsiya yuzini olamiz.

U holda aniq integralning taqribiy qiymati $I_T(h,f)$ sifatida quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$I_T(h,f) \;=\; h\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}. \tag{8.3.12}$$

Trapetsiyalar usulining xatoligini hisoblash maqsadida yana uzunligi h ga teng bo'lgan $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesmani alohida qaraylik. Almashtirish bajarib bu kesmani $[-h/2, h/2]$ ga keltiramiz. Faraz qilaylik, f funksiya ana shu kesmada ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. Dastavval, quyidagi integralni bo'laklab integrallab, bizga qulay ko'rinishga keltiramiz:

$$\int_{-x}^{x}(x^2-t^2)f''(t)\,dt \;=\; (x^2-t^2)f'(t)\big|_{t=-x}^{t=x} \;+\; 2\int_{-x}^{x} tf'(t)\,dt \;=$$

$$=\; 2tf(t)\big|_{t=-x}^{t=x} \;-\; 2\int_{-x}^{x} f(t)\,dt \;=\; 2xf(x)+2xf(-x) -\; 2\int_{-x}^{x} f(t)\,dt.$$

Shunday ekan, o'rta qiymat haqidagi formulani qo'llasak, navbatdagi tenglikka kelamiz:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt - \; x[f(-x)+f(x)] = -\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}(x^2-t^2)f''(t)\,dt \;=$$

$$=\; -\frac{f''(\theta)}{2}\int_{-x}^{x}(x^2-t^2)\,dt \;=\; -f''(\theta)\frac{2x^3}{3}.$$

Endi bu tenglikda $x = h/2$ deb,

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(t)\,dt \;=\; h\,\frac{f(-h/2)+f(h/2)}{2} \;-\; f''(\theta)\frac{h^3}{12}$$

tenglikni olamiz, bu yerda $\theta \in [-h/2, h/2]$ bo'lgan biror nuqta.

Shubhasiz, xuddi shunday baho uzunligi h ga teng bo'lgan har bir qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada o'rinli:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \;=\; h\,\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} -\; f''(\theta_k)\frac{h^3}{12}, \tag{8.3.13}$$

Bundan, xuddi to'g'ri to'rtburchaklar usulidagidek, (8.3.13) tengliklarni yig'ib chiqsak, trapetsiyalar usulidagi xatolik uchun

$$E_T(h,f) \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \;-\; I_T(h,f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f''(\theta_k)\frac{h^3}{12} \tag{8.3.14}$$

ifodani olamiz.

Ikkinchi tartibi $f''(x)$ hosilaning uzluksizligiga ko'ra shunday $\theta^* \in [a,b]$ nuqta topiladiki, u uchun (8.3.9) tenglik bajariladi. Agar $h = \dfrac{b-a}{n}$ ekanini eslasak, u holda (8.3.12) ta'rif va (8.3.14) tenglikka ko'ra, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(a+(k-1)h)+f(a+kh)] \;-\; f''(\theta^*)\frac{(b-a)^3}{12n^2}. \tag{8.3.15}$$

Bu formulani navbatdagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{f(a)+f(b)}{2} \;+\; h\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \;-\; f''(\theta^*)\frac{(b-a)^3}{12n^2}. \tag{8.3.16}$$

Ushbu (8.3.16) formula *trapetsiyalar formulasi* deyiladi. Shuni aytish kerakki, aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar usulidagi xatolik tartibi ham xuddi to'g'ri to'rtburchaklar usulidagidek.

3. Parabolalar (Simpson) usuli . Agar (8.3.11) va (8.3.16) formulalarni taqqoslasak, trapetsiyalar formulasining xatoligi to'g'ri to'rtburchaklar formulasi xatoligidan ikki marta katta bo'lib, yana ishorasi bilan farq qilishini ko'rishimiz mumkin. Shuning uchun, $I_T(h,f) + 2I_R(h,f)$ yig'indi uchga ko'paytirilgan f funksiyaning integraliga yuqori tartibli aniqlikda yaqinlashishini kutsak bo'ladi. Boshqacha aytganda,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{3}[I_T(h,f)+2I_R(h,f)] \;+\; \alpha(h)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda $h \to 0$ da $\alpha(h)$ yuqori tartib bilan nolga intilishini kutish tabiiydir. Bu tenglik qismiy interval bo'yicha olingan integralning quyidagi ifodaga yaqinlashishini anglatadi:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \;\approx\; \frac{1}{3}h\left[\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} + 2f(\xi_k)\right], \tag{8.3.17}$$

bu yerda $\xi_k = (x_{k-1}+x_k)/2$.

(8.3.17) formuladagi yaqinlashish xatoligini baholash maqsadida f funksiyani to'rt martta uzluksiz differensiallanadi deb faraz qilib,

$$I_\varepsilon \;=\; \int_0^\varepsilon [f^{(4)}(t) + f^{(4)}(-t)]\, P_\varepsilon(t)\, dt \tag{8.3.18}$$

integralni qaraymiz, bu yerda $P_\varepsilon(t)-$ to'rtinchi tartibli quyidagi polinom:

$$P_\varepsilon(t) \;=\; \varepsilon\,\frac{(\varepsilon - t)^3}{3} \;-\; \frac{(\varepsilon - t)^4}{4}. \tag{8.3.19}$$

Bu polinomning quyida keltirilgan xossalarga ega ekanini ko'rish qiyin emas:
(i) $P_\varepsilon(t) \;\geq 0, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon;$
(ii) $P_\varepsilon(\varepsilon) = P'_\varepsilon(\varepsilon) = P''_\varepsilon(\varepsilon) = 0;$
(iii) $P'_\varepsilon(0) = 0;$
(iv) $P^{(3)}_\varepsilon(0) = 4\varepsilon;$
(v) $P^{(3)}_\varepsilon(\varepsilon) = -2\varepsilon;$
(vi) $P^{(4)}_\varepsilon(t) \equiv -6, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon;$
(vii) ushbu tenglik o'rinli:

$$\int_0^\varepsilon P_\varepsilon(t)\, dt \;=\; \frac{\varepsilon^5}{30}.$$

Agar

$$\varphi(t) = f(t) + f(-t)$$

funksiyani qarasak, u

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(-t), ..., \varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) + f^{(4)}(-t),$$

va

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Shunday ekan, bu munosabatlardan foydalanib (8.3.18) integralni uch marta bo'laklab integrallasak ($P_\varepsilon(t)$ va φ funksiyalar xossalariga asosan bunda hosil bo'ladigan barcha integraldan tashqari hadlar nolga aylanadi),

$$I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \varphi^{(4)}(t)\, P_\varepsilon(t)\, dt = -\int_0^\varepsilon \varphi^{(3)}(t)\, P'_\varepsilon(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\varepsilon \varphi''(t)\, P''_\varepsilon(t)\, dt = -\int_0^\varepsilon \varphi'(t)\, P^{(3)}_\varepsilon(t)\, dt$$

tenglika ega bo'lamiz. Yana bir marta bo'laklab integrallab, (iv) va (v) shartlarni hisobga olsak, quyidagini olamiz:

$$I_\varepsilon \;= -\varphi(\varepsilon)\, P'''_\varepsilon(\varepsilon) + \varphi(0) P'''_\varepsilon(0) \;+ \int_0^\varepsilon \varphi(t)\, P^{(4)}_\varepsilon(t)\, dt \;=$$

$$= 2\varepsilon[f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)] + 8\varepsilon f(0) \;- 6\int_0^\varepsilon [f(t) + f(-t)]\, dt.$$

Oxirgi integralda almashtirish bajarib, navbatdagi muhim tenglikka kelamiz:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{3}[f(\varepsilon) + 4f(0) + f(-\varepsilon)] - \frac{1}{6}\int_{0}^{\varepsilon}[f^{(4)}(t) + f^{(4)}(-t)]\,P_\varepsilon(t)\,dt. \tag{8.3.20}$$

O'ng tomondagi integralga o'rta qiymat haqidagi formulani qo'llasak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\int_{0}^{\varepsilon}[f^{(4)}(t) + f^{(4)}(-t)]\,P_\varepsilon(t)\,dt =$$

$$= [f^{(4)}(\eta) + f^{(4)}(-\eta)]\int_{0}^{\varepsilon} P_\varepsilon(t)\,dt = 2f^{(4)}(\theta)\frac{\varepsilon^5}{30}.$$

Shunday qilib, (8.3.20) dan biz o'rganayotgan integral uchun

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{3}[f(\varepsilon) + 4f(0) + f(-\varepsilon)] - f^{(4)}(\theta)\frac{\varepsilon^5}{90} \tag{8.3.21}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Xususan, $\varepsilon = h/2$ deb, (8.3.21) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(t)\,dt = \frac{h}{6}[f(-h/2) + 4f(0) + f(h/2)] - f^{(4)}(\theta)\frac{h^5}{2880}.$$

Xuddi shunga o'xshash baho uzunligi h ga teng bo'lgan har bir $[x_{k-1}, x_k]$ qismiy kesma uchun o'rinli ekani turgan gap, ya'ni:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{6}[f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k)] - f^{(4)}(\theta_k)\frac{h^5}{2880}. \tag{8.3.22}$$

Demak,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k)] - \frac{h^5}{2880}\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(\theta_k).$$

Shartga ko'ra $f^{(4)}(x)$ uzluksiz bolgani uchun shunday $\theta^* \in [a, b]$ nuqta topiladiki, u uchun

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(\theta_k) \;=\; f^{(4)}(\theta^*).$$

Nihoyat, $nh = b - a$ ekanini e'tiborga olsak, talab qilingan formulani olamiz:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k)] - f^{(4)}(\theta^*)\frac{(b-a)^5}{2880n^4}. \tag{8.3.23}$$

Bu (8.3.23) tenglik *Simpson formulasi* yoki *parabolalar formulasi* deyiladi [T. Simpson (1710-1761)]. E'tibor bering, (8.3.17) formulaning o'ng tomoni f funksiya grafigining abssissalari x_{k-1}, ξ_k

va x_k bo'lgan uch nuqtasi orqali o'tuvchi parabola ostining yuziga teng. Aynan shu sababli (8.3.23) tenglik parabolalar formulasi ham deb ataladi.

(8.3.1) va (8.3.2) lardan foydalanib, (8.3.23) formulani yana quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}[f(a)+f(b)] + \frac{2h}{6}\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{n} f(a+kh-h/2)] - -f^{(4)}(\theta^*)\frac{(b-a)^5}{2880n^4}. \tag{8.3.24}$$

Simpson formulasi to'g'ri to'rtburchaklar hamda trapetsiyalar usullariga qaraganda ancha yuqori tartibli aniqlikka ega va zamonaviy hisoblashlarda keng foydalaniladi. Shuni qayd qilish joizki, uchinchi tartibli algebraik polinom uchun Simpson formulasi orqali hisoblangan aniq integral qiymati shu integralning aniq qiymati bialn ustma-ust tushadi.

IX Bob. Sonli qatorlar

§ 9.1. Sonli qator yig'indisi tushunchasi

1. Biror $\{a_k\}$ sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Uning elementlaridan formal ravishda tuzilgan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n + \dots$$

ko'rinishdagi ifodaga *sonli qator* (yoki oddiy qilib *qator*) deyiladi. Ketma-ketlikning a_k elementlari qatorning hadlari deb ataladi. Ushbu qatorni $\sum$ belgidan foydalanib yana quyidagicha ham belgilashadi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{9.1.1}$$

bunda yig'indining yuqori chegarasi qator hadlari sonining cheksiz ekanini anglatadi.

2*. Sonli qator yig'indisi tushunchasini aniqlash bo'yicha uchta yondashishni keltirish mumkin. Birinchisida cheksiz sondagi hadlarni, ular qanchalik kichik bo'lishidan qat'iy nazar, qo'shib chiqish jarayoni hech qachon tugamaydi deb hisoblanib, bunday yig'indining biror ma'noga ega ekani umuman inkor etiladi. Bunday yondashish, Axilles va toshbaqa nomi bilan tanilgan, Zenon Eleyskiy (eramizdan avvalgi $\approx 490 - \approx 430$ yillarda yashagan) paradoksida o'z aksini yaqqol topgan.

Bu paradoksga ko'ra, Axilles toshbaqaga yetib olish maqsadida, avval toshbaqa boshlang'ich vaqtda turgan P_0 nuqtaga kelishi kerak, ammo toshbaqa bu vaqt ichida boshqa biror P_1 nuqtada bo'ladi. Axilles P_1 nuqtaga yetib kelganda esa, toshbaqa navbatdagi P_2 nuqtaga keladi va hakazo. Modomiki Axilles bosib o'tishi kerak bo'lgan yo'l cheksiz sondagi oraliqlardan (ularning uzunligi istalgancha kichik bo'lishiga qaramasdan) iborat ekan, ularni qo'shib chiqish jarayoni (Zenon fikricha) cheksiz ko'p vaqt talab qiladi va shining uchun, Axilles hech qachon toshbaqaga yeta olmaydi.

Ikkinchi yondashish tarafdorlari istalgan cheksiz qator yig'indiga ega va bu yig'indini hisoblash uchun arifmetikaning oddiy qoidalari yetarli, deb hisoblaydilar. Ayniqsa o'rta asrlarda bunday qarash keng tarqalgan edi. Masalan,

$$S \ = \ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

belgilash kiritib, biz

$$S \ = \ 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

deb yozishimiz mumkin, ya'ni

$$S \ = \ 1 - S.$$

Bundan $S = \dfrac{1}{2}$ ekani kelib chiqadi. Qizig'i shundaki, bu yondashish tarafdorlarini butun sonlar yig'indisining to'g'ri kasr bo'lib qolgani ajablantirmagan.

Ammo bu yondashishning qoniqarli emasligi quyidagi qator misolida yaqqol ko'zga tashlanadi:

$$S^* \ = \ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Chunki

$$S^* \ = \ 1 + (1 + 1 + 1 + 1 + \dots)$$

deb yozib olsak,

$$S^* \ = \ 1 + S^*$$

bo'ladi va bundan esa shubhasiz noto'g'ri bo'lgan $0 = 1$ natijani olamiz.

Nihoyat, uchinchi yondashish shundan iboratki, unda barcha sonli qatorlar ichidan faqat biror qoniqarli ma'noda yig'indi tushunchasini kiritish mumkinlarinigina ajratib olinib, qolganlarini esa o'rganilmaydi. Limitlar nazariyasiga tayangan bu yondashish XIX asr matematiklari tomonidan rivojlantirildi va u juda sermahsul bo'lib chiqdi. O'sha vaqtda kiritilgan sonli qator yig'indisi tushunchasi, yig'indiga ega bo'lgan qatorlar sinfini kengaytirish natijasida, doimo rivojlantirildi va hozir ham rivojlantirilib kelmoqda.

3. Navbatdagi maqsadimiz (9.1.1) cheksiz yig'indiga, xuddi chekli sondagi hadlar yig'indisi xossalariga ega bo'ladigan qilib, ma'no berishdan iboratdir. Buning uchun, dastlabki n ta hadning yig'indisini hisoblab, n cheksiz kattalashganda bu yig'indining o'zgarishini kuzatamiz.

Ta'rif. *Berilgan (9.1.1) qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisini bu qatorning* ***n- xususiy yig'indisi*** *deb ataymiz va S_n simvoli orqali belgilaymiz:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n. \tag{9.1.2}$$

9.1.1 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

qatorning xususiy yig'indilari

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

ga teng.

Demak, bu misolda $\{S_n\}$ xususiy yig'indilar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti 1 ga teng ekan. Shuning uchun aynan ana shu sonni berilgan sonli qatorning yig'indisi deb hisoblash tabiiydir.

Shunday qilib, biz sonli qator yig'indisining quyidagi ta'rifini berishimiz mumkin.

Ta'rif. *Agar (9.1.1) sonli qator xususiy yig'indilaridan tuzilgan ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u holda bunday qatorni* ***yaqinlashuvchi*** *deymiz.*

Aksincha, agar xususiy yig'indilar ketma-ketligining limiti mavjud bo'lmasa, (9.1.1) qatorni ***uzoqlashuvchi*** *deymiz.*

Yaqinlashuvchi sonli qator ***yig'indisi*** *deb uning xususiy yig'indilari limitiga aytamiz:*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{9.1.3}$$

Bunda

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

deb yozamiz, ya'ni bu tenglikning o'ng tomonidagi simvolni na faqat qatorni belgilash uchun, balki, u yaqinlashgan vaqtda, qatorning yig'indisini belgilash uchun ham ishlatamiz.

Odatda, agar (9.1.3) tenglik bajarilsa, (9.1.1) qator S ga yaqinlashadi deyiladi.

4. Bevosita yuqoridagi ta'rifdan yaqinlashuvchi qator hadlarining nolga intilishi kelib chiqadi.

9.1.1 - tasdiq. *Agar sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning hadlari nolga yaqinlashadi.*

Haqiqatan, agar (9.1.1) qatorning (9.1.2) tenglik bilan aniqlangan S_n xususiy yig'indilari S soniga yaqinlashsa,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (S_n - S) - (S_{n-1} - S) \to 0, \quad n \to \infty,$$

ya'ni talab qilingan natijaga ega bo'lamiz.

Bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas. Bunga misol sifatida, *garmonik qator* deb ataluvchi, quyidagi qatorni keltirish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Ravshanki, bu qatorning hadlari nolga yaqinlashadi. Lekin, agar biz bu qatorni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots$$

ko'rinishda yozib olib, har bir qavs ichidagi hadlar yig'indisi $1/2$ dan katta ekanini hisobga olsak, uning xususiy yig'indilari $+\infty$ ga intilishiga amin bo'lamiz.

9.1.2 - misol. Geometrik progressiya hadlaridan tusilgan quyidagi qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + ... \tag{9.1.4}$$

Agar $|q| \geq 1$ bo'lsa, ravshanki, $|q^n| \geq 1$ bo'ladi. Demak, bu holda 9.1.1 - tasdiqqa ko'ra, (9.1.4) qator uzoqlashadi. Agarda $|q| < 1$ bo'lsa, ma'lumki bu qatorning n-xususiy yig'indisi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

formula orqali hisoblanadi.

Shuning uchun, $|q| < 1$ bo'lganda (9.1.4) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1 - q}$$

ga tengdir.

Navbatdagi tasdiq yaqinlashuvchi qator yig'indisi chiziqlilik xossasiga ega ekanini anglatadi.

9.1.2 - tasdiq. *Agar*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

qatorlar yaqinlashsa, istalgan haqiqiy λ va μ sonlar uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$$

qator ham yaqinlashadi va uning yig'indisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{9.1.5}$$

ga teng bo'ladi.

Isbot ketma-ketlik limitining chiziqliligidan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $S_n(a)$ simvol orqali $\sum a_k$ qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligini, $S_n(b)$ simvol orqali esa $\sum b_k$ qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligini belgilasak, (9.1.5) ning chap tomonidagi qator xususiy yig'indilari uchun

$$S_n(\lambda a + \mu b) \;=\; \lambda S_n(a) \;+\; \mu S_n(b)$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikda, limit xossalaridan foydalanib, $n \to \infty$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (9.1.5) tenglikka ega bo'lamiz.

5. Sonli qatorlar nazariyasidagi eng asosiy masala berilgan qatorning yaqinlashish yoki yaqinlashmasligini aniqlashdir. Navbatdagi shart qator yaqinlashishi uchun ham zaruriy, ham yetarli shart bo'lgani uchun uni kriteriy deb atashadi.

9.1.1 - Teorema (Koshi kriteriysi). *(9.1.1) sonli qator yaqinlashishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilib, $n \geq m \geq N$ shartni qanoatlantiruvchi barcha natural m va n sonlar uchun*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \tag{9.1.6}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot (9.1.2) tenglik bilan aniqlangan S_n xususiy yig'indilar ketma-ketligi uchun Koshi kriteriysi va o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$S_n \;-\; S_m \;=\; \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

tenglikdan bevosita kelib chiqadi.

Eslatma. Modomiki Koshi kriteriysi qatorning dastlabki hadlariga bog'liq emas ekan, qatorning istalgan chekli sondagi hadlarini o'zgartirish uning yaqinlashishiga ta'sir qilmaydi. Chunonchi, agar (9.1.1) qator berilgan bo'lsa, istalgan natural N soni uchun

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

ko'rinishdagi qatorlar (9.1.1) qator bilan bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

6. Koshi kriteriysi berilgan qatorning yaqinlashishini aniqlash uchun nihoyatda samarali vositadir. Ammo amaliyotda yaqinlashishning turli yetarli shartlaridan ko'proq foydalaniladi. Shunday shartlar safiga, o'rganilayotgan qatorni yaqinlashishi avvaldan ma'lum bo'lgan boshqa bir qator bilan solishtirishga asoslangan, taqqoslash alomatlari kiradi.

9.1.2 - Teorema (taqqoslashning umumiy alomati). *Ikki a_k va b_k haqiqiy sonlar ketma-ketligi*

$$|a_k| \;\leq\; b_k, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{9.1.7}$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin.

U holda, agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

qator yaqinlashsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

qator ham yaqinlashadi.

Isbot. Bevosita Koshi kriteriysi va

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

9.1.3 - Teorema (xususiy taqqoslash alomati). *Agar* $0 < q < 1$ *bo'lsa va* $C > 0$ *berilgan o'zgarmas bo'lib, biror* N *nomerdan boshlab*

$$|a_k| \ \leq \ Cq^k, \quad k \geq N, \tag{9.1.8}$$

tengsizliklar bajarilsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

qator yaqinlashadi.

Isbot. Yuqorida qayd qilinganidek, qatorning istalgan chekli sondagi hadlarini o'zgartirish uning yaqinlashishiga ta'sir qilmaydi. Shunday ekan, bu tasdiq 9.1.2 - Teorema va 9.1.2 - misoldan bevosita kelib chiqadi.

Q.E.D.

9.1.3 - misol. Quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2 + 1}{3^k} \tag{9.1.9}$$

qatorni qaraylik.

Ravshanki, bu qatorning hadlari

$$\left| \frac{(-1)^k \cdot 2 + 1}{3^k} \right| \leq \frac{3}{3^k}$$

bahoni qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, (9.1.8) tengsizlik $q = 1/3$ va $C = 3$ qiymatlar uchun bajarilar ekan. Demak, (9.1.9) qator yaqinlashadi.

7*. Xuddi yuqoridagi singari kompleks sonli qator tushunchasi kompleks sonlarning formal cheksiz yig'indisi sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{9.1.10}$$

Bunda har bir had $c_k = a_k + ib_k$ ko'rinishga ega bo'lib, a_k va b_k lar haqiqiy sonlardir.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \; = \; S$$

limit mavjud bo'lsa, (9.1.10) qator yaqinlashuvchi deyiladi, bunda S soni (9.1.10) qatorning yig'indisi deb ataluvchi kompleks sondir. (9.1.10) kompleks qatorning yaqinlashishi quyidagi ikki

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

haqiqiy qatorlarning yaqinlashishiga teng kuchli ekanini ko'rsatish qiyin emas. Bunda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \; = \; \mathrm{Re}S \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \; = \; \mathrm{Im}S$$

munosabatlar bajariladi.

9.1.4 - misol. Moduli $|z| < 1$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan $z = x + iy$ komleks son uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \; = \; \frac{1}{1-z} \tag{9.1.11}$$

tenglikni isbotlang.

Quyidagi

$$S_n(z) \; = \; \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \; = \; \frac{1-z^n}{1-z} \tag{9.1.12}$$

tenglik induksiya usuli orqali oson tekshiriladi. Agar bu tenglikda $n \to \infty$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (9.1.11) munosabatni olamiz.

1 - eslatma. (9.1.11) ayniyat ayniqsa kompleks sonlarning trigonometrik ko'rinishidan foydalanilgan hollarda ko'p qo'llaniladi. Chunonchi, istalgan $z = x+iy$ kompleks son uchun $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ va $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$ deb belgilaylik. U holda

$$z \; = \; re^{i\varphi} \; = \; r(\cos\varphi \; + \; i\sin\varphi)$$

va natijada

$$z^n \; = \; r^n e^{in\varphi} \; = \; r^n(\cos n\varphi \; + \; i\sin n\varphi).$$

Shu sababli (9.1.11) ayniyatni, soddalik uchun yig'indi indiksini bir birlikka surib, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k(\cos k\varphi \; + \; i\sin k\varphi) \; = \; \frac{1}{1-r(\cos\varphi \; + \; i\sin\varphi)}.$$

Mahrajdagi mavhum sondan qutilish maqsadida quyidagi

$$\frac{1}{1-r(\cos\varphi \; + \; i\sin\varphi)} = \frac{1-r\cos\varphi \; + \; i\,r\sin\varphi}{(1-r\cos\varphi)^2 \; + \; r^2\sin^2\varphi} = \frac{1-r\cos\varphi \; + \; i\,r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$$

tenglikni yozamiz.

Natijada qatorning haqiqiy qismi uchun

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\varphi \;=\; \frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \tag{9.1.13}$$

tenglikni va, mavhum yig'indida $k = 0$ ga mos kelgan hadning nolga tengligini hisobga olsak, qatorning mavhum qismi uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\varphi \;=\; \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \tag{9.1.14}$$

tenglikni olamiz.

Odatda (9.1.13) tenglik quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{1}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi \;=\; \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \tag{9.1.15}$$

Bu (9.1.15) tenglikning o'ng tomonidagi funksiya *Puasson yadrosi* deb ataladi. Barcha $0 \le r < 1$ larda o'rinli bo'lgan (9.1.14) va (9.1.15) munosabatlar matematikaning turli tarmoqlarida muhim ahamiyatga ega. Misol tariqasida kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasini, analitik funksiyalar nazariyasini, hususiy hosilali tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasini va garmonik analizni keltirish mumkin.

2 - eslatma. (9.1.12) ayniyatdan $z = e^{i\varphi} \neq 1$ bo'lganda

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi} \;=\; \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

tenglik kelib chiqadi. Bunda haqiqiy qismni ajratsak, quyidagi muhim munosabatga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi \;=\; \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{9.1.16}$$

(9.1.16) tenglikning o'ng tomonidagi kattalik trigonometrik funksiyalar nazariyasida markaziy rolni o'ynaydi va *Dirixle yadrosi* deb ataladi.

§ 9.2. Musbat hadli qatorlar

1. Ushbu bandda biz barcha hadlari manfiy bo'lmagan qatorlarni o'rganamiz. Buni alohida ta'kidlash maqsadida qatorning n-hadini bu bandda p_k simvoli orqali belgilaymiz.

Shunday qilib,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k > 0, \tag{9.2.1}$$

qatorni qaraymiz va uning qanday shartlarda yaqinlashishini o'rganamiz. Dastavval musbat hadli qatorlar yaqinlashishi haqidagi navbatdagi sodda kriteriyni keltiramiz.

9.2.1 - tasdiq. *Musbat hadli (9.2.1) qatorning yaqinlashishi uchun bu qator xususiy yig'indilari ketma-ketligining chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

Haqiqatan, qaralayotgan holda xususiy yig'indilar ketma-ketligi monoton o'suvchi bo'lib, 2.2.1 - Teoremaga ko'ra, u faqat chegaralangan bo'lganda yaqinlashadi.

2. Navbatdagi teorema (9.1.8) ko'rinishdagi bahoning bajarilishini tekshirish yollaridan birini beradi.

9.2.1 - Teorema (Koshi alomati). *Agar* $0 < q < 1$ *bo'lib, biror* N *nomerdan boshlab*

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q, \quad k \geq N, \tag{9.2.2}$$

tengsizlik bajarilsa, (9.2.1) qator yaqinlashadi.

Isbot qaralayotgan qator hadlari

$$p_k \ \leq \ q^k$$

shartni qanoatlantirishidan kelib chiqadi. Chunki bu shart, 9.1.3 - Teoremaga ko'ra, (9.2.1) qatorning yaqinlashishini kafolatlaydi.

9.2.2 - Teorema (Dalamber alomati). *Agar* $0 < q < 1$ *bo'lib, biror* N *nomerdan boshlab*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q, \quad k \geq N, \tag{9.2.3}$$

tengsizlik bajarilsa, (9.2.1) qator yaqinlashadi.

Isbot. Ravshanki, (9.2.3) tengsizlikni

$$\frac{p_{k+1}}{q^{k+1}} \ \leq \ \frac{p_k}{q^k}, \quad k \geq N,$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu esa $\frac{p_k}{q^k}$ ketma-ketlikning $k \geq N$ da monoton kamayuvchi ekanini anglatadi. Shuning uchun,

$$\frac{p_k}{q^k} \leq \frac{p_N}{q^N} \ = \ C, \quad k \geq N.$$

Demak, 9.1.3 - Teoremaga ko'ra (9.2.1) qator yaqinlashadi.

Q.E.D.

3. Navbatdagi alomatni qo'llash uchun ikki qo'shni hadlar nisbatining limitini hisoblash talab qilinadi.

9.2.3 - Teorema (Dalamberning limit ko'rinishidagi alomati). *Agar*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = \ Q \tag{9.2.4}$$

limit mavjud bo'lsa, (9.2.1) qator $Q < 1$ *bo'lganda yaqinlashadi va* $Q > 1$ *bo'lganda esa uzoqlashadi.*

Isbot. Shartga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $k \geq N(\varepsilon)$ bo'lganda

$$Q \ - \ \varepsilon \ < \ \frac{p_{k+1}}{p_k} \ < \ Q \ + \ \varepsilon \tag{9.2.5}$$

tengsizlik bajariladi.

1) Agar $Q < 1$ bo'lsa, $\varepsilon > 0$ ni shunday kichik qilib tanlaymizki, $Q + \varepsilon = q < 1$ bo'lsin. U holda (9.2.5) ning o'ng tomonidagi tengsizlikka ko'ra, barcha $k \geq N$ nomerlar uchun

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \ < \ q, \quad k \geq N,$$

baho o'rinli bo'ladi va demak, (9.2.1) qator 9.2.2 - Teoremaga asosan yaqinlashadi.

2) Agar $Q > 1$ bo'lsa, $\varepsilon > 0$ ni shunday kichik qilib tanlaymizki $Q - \varepsilon = q > 1$ baho bajarilsan. U holda (9.2.5) ning chap tomonidagi tengsizlikka ko'ra, biror N nomerdan boshlab

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \ \geq \ 1$$

tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$p_{k+1} \ \geq \ p_k.$$

Demak, (9.2.1) qator hadlari ketma-ketligi monoton o'sadi. Shuning uchun bunday ketma-ketlik nolga yaqinlashmaydi va natijada, (9.2.1) qator uzoqlashadi.

Q.E.D.

Yuqorida musbat hadli qatorlar uchun o'rnatilgan yaqinlashish alomatlari umumiy ko'rinishdagi sonli qatorlar uchun yaqinlashish alomatlarini olishga imkon beradi. Shu ma'noda ma'lum bir limitni hisoblash yordamida qo'llaniladigan navbatdagi alomat muhim ahamiyatga egadir.

Shunday qilib, yana umumiy ko'rinishdagi sonli qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ . \tag{9.2.6}$$

9.2.4 - Teorema (yuqori limit ko'rinishidagi Koshi alomati). *Agar quyidagi*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \ \sqrt[k]{|a_k|} \ = \ Q \tag{9.2.7}$$

yuqori limit mavjud bo'lsa, (9.2.6) qator $Q < 1$ bo'lganda yaqinlashadi va $Q > 1$ bo'lganda esa uzoqlashadi.

Isbot. 1) Avval $Q < 1$ deylik. Yuqori limit ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $k \geq N(\varepsilon)$ bo'lganda

$$\sqrt[k]{|a_k|} \ < \ Q + \varepsilon \tag{9.2.8}$$

tengsizlik bajariladi.

Musbat $\varepsilon > 0$ ni shunday kichik qilib tanlaymizki, $Q + \varepsilon = q < 1$ bo'lsin. U holda (9.2.8) tengsizlik

$$|a_k|^{1/k} \ \leq \ q, \quad k \geq N,$$

ko'rinishga keladi, ya'ni

$$|a_k| \ \leq \ q^k, \quad k \geq N.$$

Shu sababli, 9.1.3 - Teoremaga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

qator yaqinlashadi. Demak, umumiy taqqoslash alomatiga asosan (9.1.2 - Teorema), (9.2.6) qator ham yaqinlashadi.

2) Endi $Q > 1$ bo'lsin. U holda, (9.2.7) tenglikka ko'ra, shunday $\{a_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik topiladiki, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $k \geq N(\varepsilon)$ bo'lganda

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} \ > \ Q - \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Musbat $\varepsilon > 0$ ni shunday kichik qilib olamizki, $Q - \varepsilon > 1$ bo'lsin. U holda $k \geq N$ lar uchun

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} \ > \ 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$|a_{n_k}| \ > \ 1.$$

Demak, (9.2.6) qator hadlari nolga intilmaydi va, natijada, ushbu qator uzoqlashadi.
Q.E.D.

4. Qatorlar uchun yuqorida keltirilgan yaqinlashish alomatlari, berilgan qatorni hadlari geometrik progressiya tashkil qiluvchi boshqa bir qator bilan taqqoslashga asoslangan bo'lib, ular biroz "dag'al" alomatlar deb hisoblanadilar. Xususan, shuni qayd etish lozimki, chegaraviy $Q = 1$ hol uchun bu alomatlar qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlab bera olmaydi. Navbatdagi nisbatan "sezgir" alomat sonli qatorlarning anchagina kengroq sinfi uchun ularning yaqinlashishi to'g'risidagi masalasini hal qilishga imkon beradi.

9.2.5 - Teorema (Koshi-Maklorenning integral alomati). *Agar $f(x)$ funksiya $x \geq 1$ yarim to'g'ri chiziqda monoton kamayuvchi bo'lib, manfiy bo'lmasa, u holda bu funksiya qiymatlaridan tuzilgan quyidagi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots \tag{9.2.9}$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\, dx \tag{9.2.10}$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra, istalgan natural k va ixtiyoriy $x \in [k-1, k]$ uchun

$$f(k) \ \leq \ f(x) \ \leq \ f(k-1), \quad k - 1 \leq x \leq k,$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tengsizliklarni $[k-1, k]$ kesma bo'yicha integrallasak,

$$\int\limits_{k-1}^{k} f(k)\, dx \ \leq \ \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\, dx \ \leq \ \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)\, dx$$

ga ega bo'lamiz, yoki

$$f(k) \ \leq \ \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\, dx \ \leq \ f(k-1).$$

Endi, hosil bo'lgan tengsizliklarni k bo'yicha $m+1$ dan n gacha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \ \leq \ \sum_{k=m+1}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\, dx \ \leq \ \sum_{k=m+1}^{n} f(k-1)$$

tengsizlik hosil bo'ladi, yoki

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \ \leq \ \int_{m}^{n} f(x)\,dx \ \leq \ \sum_{k=m}^{n-1} f(k). \tag{9.2.11}$$

Nihoyat, f funksiyaning manfiy emasligini hisobga olib, Koshi kriteriysini qo'llasak, (9.2.11) tengsizlikdan (9.2.9) qator faqat va faqat (9.2.10) xosmas integral yaqinlashgandagina yaqinlashishini olamiz. **Q.E.D.**

9.2.1 - misol. Quyidagi qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}\ . \tag{9.2.12}$$

Koshi-Maklorenning integral alomatiga asosan, bu qator ushbu

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \tag{9.2.13}$$

birinchi tur xosmas integral bilan bir vaqtda yoki yaqinlashadi, yoki uzoqlashadi.

Yuqorida, 6.6.1 - misolda (9.2.13) integralning $\alpha > 1$ da yaqinlashishi va $\alpha \leq 1$ da uzoqlashishi ko'rsatilgan edi. Demak, (9.2.12) qator ham $\alpha > 1$ da yaqinlashar va $\alpha \leq 1$ da esa uzoqlashar ekan.

Eslatma. Albatta, 9.2.5 - Teoremadagi $f(x)$ funksiya monotonligi haqidagi shartni $x \geq 1$ yarim to'g'ri chiziqda talab qilishga ehtiyoj yoq. Buning o'rniga bu shartni biror natural N sonidan boshlab bajarilishini, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $x \geq N$ yarim to'g'ri chiziqda monoton kamayishini talab qilish yetarli.

9.2.2 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^{\alpha}} \tag{9.2.14}$$

qatorni qaraymiz.

Koshi-Makloren alomatiga ko'ra, (9.2.14) qator quyidagi

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} \tag{9.2.15}$$

ko'rinishdagi birinchi tur xosmas integral bilan bir vaqtda yoki yaqinlashadi, yoki uzoqlashadi.

Modomiki

$$\int_{3}^{A} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} = \int_{3}^{A} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{\alpha}} = \int_{\ln 3}^{\ln A} \frac{dt}{t^{\alpha}}$$

ekan, (9.2.15) integral $\alpha > 1$ da yaqinlashadi va $\alpha \leq 1$ da uzoqlashadi. Bundan chiqdi, (9.2.14) qator ham $\alpha > 1$ da yaqinlashar va $\alpha \leq 1$ da uzoqlashar ekan.

5*. Koshi-Makloren alomatini isbotlashda qo'llanilgan, yig'indini integral bilan almashtirishga asoslangan usul berilgan qatorning na faqat yaqinlashish yoki uzoqlashishini aniqlashga imkon beradi, balki bu usul orqali, qator uzoqlashuvchi bo'lgan holda, uni xususiy yig'indilarining o'sishini ham baholash mumkin. Boshqacha aytganda, ana shu usul yordamida bunday yig'indilarning asimptotikasini aniqlasa bo'ladi.

9.2.3 - misol. Garmonik qatorning n ta hadi yig'indisi uchun quyidagi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \;=\; \ln n \;+\; C \;+\; O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty, \tag{9.2.16}$$

asimptotik bahoni isbotlaymiz. Bu tenglikda C - Eyler o'zgarmasi deb ataluvchi o'zgarmas son.

Avvalo, istalga natural k son uchun $k-1 \le x < k$ oraliqda yotuvchi x sonining butun qismi $[x]=k-1$ ga tengligini qayd etamiz. Shu oraliqda $1/k = 1/([x]+1)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun

$$\frac{1}{k} \;=\; \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dx \;=\; \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dx}{[x]+1}.$$

Agar bu tengliklarni k bo'yicha 1 dan n gacha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dx}{[x]+1} \;=\; \int\limits_{0}^{n} \frac{dx}{[x]+1}$$

hosil bo'ladi.

Bu tenglikdan

$$\ln(n+1) \;=\; \int\limits_{0}^{n} \frac{dx}{x+1}$$

tenglikni ayirsak,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \int\limits_{0}^{n} \left(\frac{1}{[x]+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int\limits_{0}^{n} \frac{x-[x]}{([x]+1)(x+1)}\,dx \tag{9.2.17}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Endi

$$C \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x-[x]}{([x]+1)(x+1)}\,dx \tag{9.2.18}$$

deb belgilaymiz.

Ravshanki, bu xosmas integral yaqinlashadi, chunki $0 \le x-[x] < 1$ va shu sababli $x \ge 1$ bo'lganda quyidagi

$$0 \;\le\; \frac{x-[x]}{([x]+1)(x+1)} \;<\; \frac{1}{x^2}$$

qo'shaloq tengsizlik o'rinlidir.

Agar bu tengsizlikni integrallasak,

$$0 \;\le\; \int\limits_{n}^{\infty} \frac{x-[x]}{([x]+1)(x+1)}\,dx \;\le\; \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \;=\; \frac{1}{n}$$

bahoga ega bo'lamiz. Bundan chiqdi, (9.2.17) tenglikning o'ng tomonidagi integral uchun quyidagi

$$\int_0^n \frac{x-[x]}{([x]+1)(x+1)}\,dx \;=\; C \;+\; O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

tenglikni yozish mumkin ekan.

Demak, qayd etilgan (9.2.17) tenglikdan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;=\; \ln(n+1) \;+\; C \;+\; O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

munosabat kelib chiqadi.

Talab qilingan (9.2.16) asimptotik bahoni olish uchun

$$\ln(n+1) \;=\; \ln n \;+\; O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

ekanini qayd qilish yetarli.

Shuni aytish joizki, $C = 0,57721566490...$ sonning arifmetik tabiati yaxshi o'rganilmagan. Xatto uning ratsional yoki irratsional ekani ham noma'lum.

6*. Uzoqlashuvchi qatorlar xususiy yig'indilarining bizga ma'lum baholaridan yangi formulalar ham olish mumkin.

9.2.4 - misol. Quyidagi

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1} \;=\; \ln(2\sqrt{n}) \;+\; \frac{C}{2} \;+\; O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty, \tag{9.2.19}$$

asimptotik bahoni isbotlaymiz, bu yerda C - Eyler o'zgarmasi.

Garmonik qatorni

$$1 \;+\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{3} \;+\; ... \;+\; \frac{1}{2n} \;=$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}\right) \;+\; \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}\right) \tag{9.2.20}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Agar garmonik qatorning birinchi n ta hadining yig'indisini S_n orqali belgilasak, (9.2.20) ayniyatning chapida S_{2n} turganini va o'ng tomondagi ikkinchi yig'indi esa $S_n/2$ ga tengligini ko'ramiz. Shuning uchun, bu ayniyatni

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1} \;=\; S_{2n} \;-\; \frac{1}{2}\,S_n \tag{9.2.21}$$

kabi yozib olishimiz mumkin.

Endi (9.2.16) asimptotik bahoni qo'llasak,

$$S_{2n} \;-\; \frac{1}{2}\,S_n \;=\; \left[\ln(2n)+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\ln n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \;=$$

$$= \ln 2 \;+\; \frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}C+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{9.2.22}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu ikki (9.2.21) va (9.2.22) tengliklardan, ravshanki, talab qilingan (9.2.19) asimptotik baho kelib chiqadi.

§ 9.3. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

1. Xosmas integrallar uchun absolyut va shartli yaqinlashishlar kiritilgani kabi, sonli qatorlar uchun ham absolyut va shartli yaqinlashish tushunchalarini kiritish mumkin.

Ta'rif. *Agar*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tag{9.3.1}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{9.3.2}$$

*qator **absolyut** yaqinlashadi deymiz.*

Umumiy taqqoslash alomatidan har qanday absolyut yaqinlashuvchi qatorning yaqinlashuvchi ekani bevosita kelib chiqadi.

Ta'rif. *Agar (9.3.2) qator yaqinlashib, (9.3.1) qator uzoqlashsa, (9.3.2) qator **shartli** yaqinlashadi deymiz.*

Avvalgi paragrafda o'rganilgan Koshi va Dalamber yaqinlashish alomatlari aslida berilgan qatorning absolyut yaqilashishini kafolatlaydi. Shartli yaqinlashuvchi qatorlarni o'rganish, ya'ni ular uchun yaqinlashish alomatlarini aniqlash, ancha nozik masalalardandir. Quyida biz shunday alomatlardan ba'zilari bilan tanishamiz.

Navbatdagi yaqinlashish alomati quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{9.3.3}$$

ko'rinishdagi qatorlarga qo'llanadi, bu yerda a_k va b_k lar haqiqiy sonlar bo'lib, a_k turli ishorali qiymatlar qabul qilishi mumkin. Bu alomat birinchi tur xosmas integrallar uchun Dirixle-Abel yaqinlashish alomatining diskret ko'rinishidir.

9.3.1 - Teorema (Dirixle-Abel alomati). *Agar a_k ketma-ketliklardan tuzilgan (9.3.2) ko'rinishdagi qator xususiy yig'indilari chegaralangan bo'lsa:*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq M \tag{9.3.4}$$

va b_k ketma-ketlik monoton kamayib:

$$b_k \geq b_{k+1}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{9.3.5}$$

nolga intilsa:

$$b_k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{9.3.6}$$

u holda (9.3.3) qator yaqinlashadi.

Isbot. S_n simvol orqali $\sum a_k$ qatorning xususiy yig'indilarini belgilaylik. U holda

$$a_k = S_k - S_{k-1}$$

bo'ladi va shu sababli istalgan $n \geq m$ nomer uchun

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k\, b_k = \sum_{k=m+1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=m+1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} S_{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} S_k b_{k+1}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k\, b_k = \sum_{k=m+1}^{n} S_k (b_k - b_{k+1}) \ + \ S_n b_{n+1} \ - \ S_m b_{m+1}.$$

Modomiki, (9.3.4) shartga ko'ra, $|S_n| \leq M$ ekan, oxirgi tenglikdan

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k\, b_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M\, |b_k - b_{k+1}| \ + \ M b_{n+1} \ + \ M b_{m+1}$$

bahoni olamiz.

(9.3.5) monotonlik shartiga asosan $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$. Shunday ekan, oxirgi tengsizlik o'ng tomonidagi yig'indi aynan $M b_{m+1} - M b_{n+1}$ ga teng bo'ladi. Bundan chiqdi,

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k\, b_k \right| \ \leq \ 2 M b_{m+1}. \tag{9.3.7}$$

Nihoyat, (9.3.6) shartdan foydalansak, (9.3.7) tengsizlik chap tomonidagi yig'indining nolga intilishi kelib chiqadi. Demak, Koshi kriteriysiga asosan, (9.3.3) qator yaqinlashar ekan.

Q.E.D.

Ta'rif. *Agar barcha $b_k, k = 1, 2, 3, ...$ sonlar musbat bo'lsa,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k \ = \ b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + ... \tag{9.3.8}$$

*ko'rinishdagi qator **ishorasi navbatlashgan** qator deyiladi.*

9.3.2 - Teorema (Leybnits alomati). *Agar b_k musbat sonlar ketma-ketligi monoton ravishda nolga yaqinlashsa, (9.3.8) ishorasi navbatlashgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Isbot. Agar $a_k = (-1)^{k-1}$ desak va

$$S_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}$$

deb belgilasak, ravshanki, $S_1 = 1, S_2 = 0$ va umuman

$$S_{2n-1} = 1, \quad S_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

tengliklar bajariladi.

Shunday ekan, S_n yig'indilar ketma-ketligi chegaralangan bo'lib, biz 9.3.1 - Teoremani qo'llashimiz mumkin. Bu teoremadan esa (9.3.8) qatorning yaqinlashuvchi ekani kelib chiqadi.

Q.E.D.

9.3.1 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} \tag{9.3.9}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Leybnits alomatiga asosan, bu qator istalgan $\alpha > 0$ lar uchun yaqinlashuvchidir. Ammo shuni aytish joizki, 9.2.2 paragrafdagi misolga ko'ra, (9.3.9) qator $0 < \alpha \leq 1$ bo'lganda faqat shartli yaqinlashadi.

2. Ma'lumki, qo'shish arifmetik amali kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega. Shu sababli, chekli sondagi hadlar yig'indisini qarayotganda, ular qaysi tartibda joylashgani ahamiyatga ega emas. Ammo, cheksiz sondagi hadlarni qo'shayotganda, hadlarning qaysi tartibda joylashgani muhim rol o'ynaydi.

9.3.2 - misol tariqasida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \tag{9.3.10}$$

qatorni qaraylik.

Bu qatorning yaqinlashishini ko'rsatish va uning yig'indisini hisoblash uchun quyidagi

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n} + R_{n+1}$$

Teylor formulasidan foydalanamiz, bunda qoldiq had, ya'ni

$$R_{n+1} \;=\; (-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$$

Lagranj ko'rinishida olingan bo'lib, $\xi = \xi_n(x)$ bilan $0 < \xi < 1$ intervalga tegishli biror nuqta belgilangan.

Xususan, agar $x = 1$ bo'lsa,

$$\ln 2 \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\, \frac{1}{n} + R_{n+1}$$

bo'lib, qoldiq had

$$|R_{n+1}| \;\leq\; \frac{1}{n+1} \tag{9.3.11}$$

bahoni qanoatlantiradi.

Endi S_n orqali (9.3.10) qatorning xususiy yig'indisini belgilasak, oxirgi tenglikdan

$$S_n \;=\; \ln 2 \;-\; R_{n+1}$$

munosabat kelib chiqadi.

Ravshanki, (9.3.11) bahoga ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} \;=\; 0.$$

Shuning uchun,

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \ln 2,$$

ya'ni (9.3.10) qator yaqinlashar va uning yig'indisi $\ln 2$ ga teng ekan.

Bu qatorning juft $2n$ nomerli xususiy yig'indisini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$S_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right). \tag{9.3.12}$$

Endi (9.3.10) da, har bir musbat haddan keyin ikkita manfiy had keladigan qilib, hadlarini o'rnini almashtiramiz:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}+\cdots \tag{9.3.13}$$

Albatta, bunday almashtirish natijasida hosil bo'lgan qator (9.3.10) qatordan faqat hadlarining joylashish tartibi bilan farq qiladi.

Agar yangi (9.3.13) qatorning xususiy yig'indisini S'_n simvol bilan belgilasak, uning $3n$ nomerli xususiy yig'indisini

$$S'_{3n} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) \tag{9.3.14}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu tenglikni o'ng tomonidagi har bir qavsda birinchi ikki kasrni umumiy mahrajga keltirsak,

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan tenglik bilan (9.3.12) tenglikni taqqoslab,

$$S'_{3n} = \frac{1}{2}S_{2n}$$

ni olamiz.

Natijada, boshlang'ich (9.3.10) qator yig'indisi S va hadlarining o'rni almashtirilgan (9.3.13) qator yig'indisi S' o'zaro quyidagi tenglik bilan bog'langanligini ko'rish qiyin emas:

$$S' = \frac{1}{2}S,$$

ya'ni (9.3.10) qator yig'indisi, hadlarining joyi o'zgargandan keyin, ikki marta kamayib, $\ln\sqrt{2}$ ga teng bo'lib qoldi.

3*. Shuni aytish kerakki, (9.3.10) qatorning hadlarini tegishli ravishda o'rnini almashtib, uni istalgan avvaldan berilgan songa yaqinlashuvchi qilish mumkin.

Haqiqatan, agar hadlarining o'rnini almashtirish natijasida hosil bo'lgan qator xususiy yig'indilari S'_{n+m} berilgan (9.4.10) qatorning n ta dastlabki musbat va m ta dastlabki manfiy hadlariga ega bo'lsa,

$$S'_{n+m} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}$$

bo'ladi.

Bu tenglikdan, (9.2.14) va (9.2.17) asimptotik formulalarga asosan,

$$S'_{n+m} \;=\; \left[\ln(2\sqrt{n}) + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \;-\; \left[\frac{1}{2}\ln m + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{m}\right)\right] \;=$$

$$=\; \ln 2 \;+\; \frac{1}{2}\ln\frac{n}{m} \;+\; o(1), \quad n \to \infty,\; m \to \infty,$$

baho kelib chiqadi.

Ravshanki, istalgan musbat p son uchun (9.3.10) qator hadlarining o'rnini shunday almashtirish mumkinki, natijada hosil bo'lgan yangi qatorning har bir xususiy yig'indisida musbat hadlarining soni n ni manfiy hadlari soni m ga nisbati p ga yaqinlashadi. Shunday ekan, oxirgi asimptotik bahoga ko'ra, yangi qatorning yig'indisi $\ln(2\sqrt{p})$ ga teng bo'ladi.

Masalan, yangi hosil bo'lgan qatorda har bir musbat haddan so'ng bitta manfiy had kelsa, $m = n$ va $p = n/m = 1$ bo'lib, qator yig'indisi $\ln 2$ ga teng bo'ladi. Bordiyu, yangi qatorda har bir musbat haddan so'ng ikkita manfiy had kelsa, $m = 2n$ va $p = n/m = 1/2$ bo'lib, qator yig'indisi $\ln\sqrt{2}$ ga teng bo'ladi.

Nihoyat, agar (9.3.10) qatorda, har bir musbat haddan so'ng to'rtta manfiy had keladigan qilib, hadlar o'rni almashtirilsa, $m = 4n$ va $p = n/m = 1/4$ bo'lib, hosil bo'lgan qatorning yig'indisi $\ln(2\sqrt{1/4}) = 0$ ga teng bo'ladi.

4. Umumiy holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} \tag{9.3.15}$$

qator

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{9.3.16}$$

qator hadlarining o'rnini almashtirish natijasida hosil bo'lgan bo'lishi uchun m_k natural sonlar quyidagi ikki shartni qanoatlantirishi kerak:

1) agar $k \neq j$ bo'lsa, $m_k \neq m_j$ bo'ladi;

2) istalgan natural n soni uchun $m_k = n$ tenglikni qanoatlantiruvchi m_k son topiladi.

Yuqorida shartli yaqinlashuvchi qator yig'indisi uning hadlarini qaysi tartibda qo'shilayotganidan jiddiy ravishda bog'liq ekani ko'rsatildi. Agar qator absolyut yaqinlashsa, u hadlari o'rnini ixtiyoriy o'zgartirilganda ham yaqinlashadi va bunda uning yig'indisi o'zgarmaydi. Boshqacha qilib aytganda, absolyut yaqinlashuvchi qator o'rin almashtirish xossasiga egadir.

9.3.3 - teorema. *Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning hadlari o'rnini istalgancha almashtirish natijasida hosil bo'lgan yangi qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi berilgan qator yig'indisiga teng bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, (9.3.16) qator absolyut yaqinlashib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsin. Bu qator hadlarining o'rnini o'zgartirilishi natijasida hosil bo'lgan (9.3.15) qatorni qaraymiz va uning yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi aynan S ga tengligini ko'rsatamiz. Buning uchun S'_n orqali (9.3.15) qatorning xususiy yig'indilarini belgilaymiz:

$$S'_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{m_k} \tag{9.3.17}$$

va istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilib, barcha $k \geq N$ larda

$$\left|S'_n \; - \; S\right| \; < \; \varepsilon \tag{9.3.18}$$

tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz.

Modomiki (9.3.16) qator absolyut yaqinlashar ekan, Koshi kriteriysiga asosan, berilgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $m = m(\varepsilon)$ nomer topiladiki, barcha natural p sonlar uchun

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k| \; < \; \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.3.19}$$

tengsizlik bajariladi.

Demak, (9.3.16) qatorning S_m xususiy yig'indilari quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$|S_{m+p} \; - \; S_m| \; = \; \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right| \; \leq \; \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k| \; < \; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bundan, $p \to \infty$ desak,

$$|S \; - \; S_m| \; \leq \; \frac{\varepsilon}{2}, \quad m = m(\varepsilon), \tag{9.3.20}$$

bahoga ega bo'lamiz.

Yuqorida aniqlangan $m = m(\varepsilon)$ sonni tayinlab, $N = N(\varepsilon)$ nomerni shunday katta qilib olamizki, $n \geq N$ bo'lganda berilgan qatorning hadlari o'rnini almashtirish natijasida hosil bo'lgan qatorning (9.3.17) ko'rinishdagi S'_n xususiy yig'indilari quyidagi

$$a_1, \; a_2, \; a_3, ..., \; a_m$$

hadlarni o'z ichiga olsin.

U holda, shunday aniqlangan ixtiyoriy xususiy yig'indini

$$S'_n \; = \; \sum_{j=1}^{m} a_j \; + \; {\sum_k}' a_k$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda shtrix orqali S'_n ga kiruvchi $k > m$ nomerli a_k elementlardan iborat yig'indi belgilangan.

Shunday ekan, (9.3.19) ga asosan, biror p lar uchun

$$\left|S'_n \; - \; S_m\right| \; \leq \; \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k| \; < \; \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N,$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan, (9.3.20) ni e'tiborga olsak, $n \geq N$ bo'lganda talab qilingan (9.3.18) tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\left|S'_n \; - \; S\right| \; \leq \; \left|S'_n \; - \; S_m\right| \; + \; |S_m \; - \; S| \; < \; \frac{\varepsilon}{2} + \; \frac{\varepsilon}{2} \; = \; \varepsilon.$$

Q. E. D.

Natija. *Agar musbat hadli qator yaqinlashsa, u hadlarining o'rnini istalgancha almashtirgandan keyin ham xuddi o'sha yig'indiga yaqinlashadi.*

5. Shartli yaqinlashuvchi (9.3.10) qator hadlarining o'rnini almashtirish haqidagi yuqoridagi natijani B. Riman umumiy holda ham isbot qilgan. Chunonchi, agar (9.3.16) qator shartli yaqinlashsa, uning hadlarini o'rnini o'zgartirish natijasida shunday (9.3.15) qator olish mumkinki, u istalgan avvaldan berilgan songa yaqinlashadi.

Bu teoremani isbot qilishdan oldin, biz shartli yaqinlashuvchi qatorda musbat hadlari ham, manfiy hadlari ham cheksiz ko'p ekanini ko'rsatamiz. Aslida biz bundanda kuchliroq natijani, ya'ni bunday qatorlarda musbat hadlarining yig'indisi ham, manfiy hadlarining yig'indisi ham chegaralanmagan ekanini isbotlaymiz.

Shu maqsadda (9.3.16) qatorning n - nomerli xususiy yig'indisi tarkibiga kiruvchi musbat hadlari yig'indisini P_n simvol orqali va o'sha xususiy yig'indi tarkibiga kiruvchi manfiy hadlarining absolyut qiymatlari yig'indisini Q_n simvol orqali belgilaymiz.

9.3.1 - tasdiq. *Agar (9.3.16) qator yaqinlashsa, u holda*

$$\lim_{n\to\infty} P(n) \;=\; \lim_{n\to\infty} Q(n) \;=\; +\infty \tag{9.3.21}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Ravshanki, $P(n)$ va $Q(n)$ kattaliklar ta'rifiga ko'ra, (9.3.16) qatorning n - nomerli xususiy yig'indisi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; P(n) \;-\; Q(n) \tag{9.3.22}$$

ga teng bo'lib, hadlarni absolyut qiymatlaridan hosil bo'lgan qatorning n - xususiy yig'indisi esa

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \;=\; P(n) \;+\; Q(n) \tag{9.3.23}$$

ga teng.

Endi qayd etamizki, (9.3.16) qatorning biror S soniga yaqinlashishi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; S \tag{9.3.24}$$

tenglik bajarilishini anglatsa, ko'rsatilgan qatorning shartli yaqinlashishi esa, qatorning absolyut yaqinlashmas ekanini, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \;=\; +\infty \tag{9.3.25}$$

munosabat bajarilishini anglatadi.

Agar (9.3.24) va (9.3.25) tengliklarni (9.3.22) va (9.3.23) tengliklar bilan taqqoslasak,

$$\lim_{n\to\infty} [P(n) - Q(n)] \;=\; S, \quad \lim_{n\to\infty} [P(n) + Q(n)] \;=\; +\infty$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Ravshanki, bu munosabatlardan talab qilingan (9.3.21) tenglik kelib chiqadi.

Q. E. D.

Endi, (9.3.21) munosabatlarga asoslanib, yuqorida qayd etilgan Riman teoremasini isbotlash qiyin emas.

9.3.4 - Teorema (B. Riman). *Agar (9.3.16) qator shartli yaqinlashsa, istalgan haqiqiy A soni uchun bu qator hadlari o'rnini shunday almashtirish mumkinki, natijada hosil bo'lgan (9.3.15) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A ga teng bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, (9.3.16) qator shartli yaqinlashsin. U holda, qator yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra, bu qatorning musbat hadlari ham, manfiy hadlari ham nolga intiladi. Shuning uchun qatorning musbat hadlarini kamayuvchi tartibda joylashtirishimiz mumkin. Bunda hosil bo'lgan ketma-ketlikni $\{p_k\}$ orqali belgilaymiz. Xuddi shunga o'xshash, manfiy hadlar absolyut qiymatlarini kamayuvchi tartibda joylashtirib, hosil bo'lgan ketma-ketlikni $\{q_k\}$ orqali belgilaymiz.

9.3.1 - tasdiq va 9.3.3 - Teoremaning natijasidan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \ = \ +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \ = \ +\infty. \tag{9.3.26}$$

Endi A ixtiyoriy berilgan haqiqiy son bo'lsin. (9.3.16) qator hadlarini o'rnini quyidagi ravishda almashtiramiz.

1) Dastlab musbat hadlarni shunday qo'shib boramizki, toki ularning yig'indisi $S(n_1) = p_1+p_2+...+p_{n_1}$ berilgan A dan oshsin. Bunga erishishimiz bilan, hosil bo'lgan yig'indidan $q_1, q_2, ..., q_{m_1}$ sonlarni shunday ayirib boramizki, toki

$$S(n_1 + m_1) \ = \ p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} \ - \ q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} \tag{8.3.25}$$

kattalik A dan kichik bo'lsin. Modomiki (9.3.26) shart bajarilar ekan, bu har ikki qadamni ham amalga oshirish mumkin.

2) Ikkinchi qadamda yana $p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + ... + p_{n_2}$ musbat hadlarni shunday qo'shib boramizki, toki ularning ummiy yi'gindisi

$$S(n_2 + m_1) \ = \ p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} \ - \ q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} +$$

$$+ \ p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + ... + p_{n_2}$$

yana A dan oshib ketsin. So'ngra, hosil bo'lgan yig'indidan $q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, ..., q_{m_2}$ sonlarni shunday ayirib boramizki, toki

$$S(n_2 + m_2) \ = \ p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} \ - \ q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} +$$

$$+ \ p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + ... + p_{n_2} \ - \ q_{m_1+1} - q_{m_1+2} - ... - q_{m_2}$$

qiymat A dan kichik bo'lsin.

. . .

k) Bu jarayonni davom ettirib, k-qadamda hosil qilingan $S(n_{k-1}+m_{k-1})$ yig'indiga musbat hadlarni shunday qo'shib boramizki, toki umumiy yig'indi $S(n_k+m_{k-1})$ berilgan A sondan oshib ketsin, so'ngra, manfiy hadlarni shunday qo'shib (ya'ni q_j larni ayirib) boramizki, toki umumiy yig'indi $S(n_k + m_k)$ o'sha A sondan kichik bo'lsin.

Albatta, bu jarayon hech qachon tugamaydi. Chunki har bir qadamda biz hech bo'lmasa bitta musbat va bitta manfiy hadni qo'shib borayapmiz va bunday hadlarning soni, yuqorida ko'rsatganimizdek, cheksiz ko'pdir. Bu jarayon natijasida biz (9.3.16) qator hadlarining o'rni almashtirilgan yangi qatorga ega bo'lamiz.

Mana shu yangi qatorning $S(n)$ xususiy yig'indilari berilgan A soniga yaqinlashishini ko'rsatamiz. Ravshanki, hadlar o'rnini almashtirish jarayoniga asosan, $k-$ qadamdan so'ng xususiy yig'indilar

$A + p_{m_k}$ sonidan oshib ketmaydi va, xuddi shu kabi, $A - q_{m_k}$ dan kichik ham bo'lmaydi. Bundan chiqdi, $n \geq n_k + m_k$ bo'lganda quyidagi

$$A \; - \; q_{m_k} \;\leq\; S(n) \;\leq\; A \; + \; p_{n_k} \tag{9.3.27}$$

qo'shaloq tengsizlik bajariladi.

Shartga ko'ra (9.3.16) qator shartli yaqinlashgani sababli, bu qator hadlari nolga yaqinlashadi. Demak, (9.3.27) dan

$$\lim_{n\to\infty} S(n) \;=\; A$$

munosabat kelib chiqadi, ya'ni hadlarining o'rni almashtirilgan qator avvaldan berilgan A soniga yaqinlashar ekan.

Q. E. D.

Eslatma. Xuddi yuqoridagi usul bilan shartli yaqinlashuvchi qatorni $+\infty$ yo $-\infty$ ga intiladigan, yoki bo'lmasa umuman limitga ega bo'lmaydigan qilib hadlarini o'rnini o'zgartirish mumkinligi ko'rsatiladi.

§ 9.4. Ikki karrali qatorlar

Haqiqiy sonlarning $\{a_{nk}\}$ ko'rinishdagi ikki karrali ketma-ketligini qaraymiz, bu yerda n va k indekslar barcha natural qiymatlarni qabul qiladi. Ushbu

$$\sum_{n,\,k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{9.4.1}$$

formal yig'indini yozib, uni *ikki karrali qator* deb ataymiz.

Oddiy sonli qatorlardan farqli ravishda ikki karrali qator yig'indisi turli usullarda aniqlanishi mumkin. Matematik tahlilning tadbiqlarida (9.4.1) ikki karrali qatorni takroriy qator deb qarash, ya'ni qator yig'indisi sifatida

$$s \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right) \tag{9.4.2}$$

sonni olish ayniqsa ko'p uchraydi.

Bunday aniqlashda yig'indi olish tartibi muhim ahamiyatga ega, chunki boshqa tartibda olingan

$$s^* \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\right) \tag{9.4.3}$$

yig'indi s sonidan farq qilishi, yoki umuman mavjud bo'lmasligi mumkin.

9.4.1 - misol. Qator hadlari $a_{nk} = (\delta_{nk} - \delta_{2n,\,k})$ ko'rinishda aniqlangan bo'lsin, bu yerda δ_{nk} orqali Kroneker del'ta-simvoli deb ataluvchi quyidagi kattalik belgilangan:

$$\delta_{nk} \;=\; \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad n = k \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad n \neq k \quad \text{bo'lsa.} \end{cases}$$

U holda istalgan n nomer uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\delta_{nk} - \delta_{2n,\,k}) \;=\; 0 \tag{9.4.4}$$

tenglik bajariladi, chunki (9.4.4) cheksiz yig'indida faqat ikki had noldan farqli bo'lib, bulardan biri ($k = n$ bo'lgan holda) 1 ga teng bo'lsa, ikkinchisi esa ($k = 2n$ bo'lgan holda) -1 ga teng. Demak, (9.4.2) qator yaqinlashadi va $s = 0$ bo'ladi.

Ammo istalgan toq k nomer uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{nk} - \delta_{2n,\,k}) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{nk} \;=\; 1$$

tenglik bajariladi, ya'ni bu yig'indi $k \to \infty$ da nolga intilmaydi va shu sababli (9.4.3) qator uzoqlashadi.

Shuni aytish kerakki, agar (9.4.1) qatorning barcha hadlari musbat bo'lsa, (9.4.2) va (9.4.3) yig'indilar ustma-ust tushadi.

9.4.1 - teorema. *Ikki karrali (9.4.1) qatorning barcha hadlari manfiy bo'lmasin, ya'ni* $a_{nk} \geq 0$ *bo'lsin. U holda, agar (9.4.2) takroriy qator yaqinlashsa, (9.4.3) takroriy qator ham yaqinlashadi va*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \tag{9.4.5}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra, istalgan $n \geq 1$ uchun

$$b_n \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{9.4.6}$$

ko'rinishdagi qatorlar va, bundan tashqari,

$$s \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{9.4.7}$$

qator yaqinlashadi.

Shundan foydalangan holda biz istalgan $k \geq 1$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; c_k \tag{9.4.8}$$

ko'rinishdagi qatorlarning va quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \;=\; s^* \tag{9.4.9}$$

qatorning yaqinlashishini ko'rsatib,

$$s^* \;=\; s \tag{9.4.10}$$

tenglikni isbotlashimiz kerak.

Avval shuni qayd etamizki, qatorning hadlari manfiy bo'magani sababli, (9.4.6) tenglikdan istalga N uchun

$$\sum_{k=1}^{N} a_{nk} \;\leq\; b_n \tag{9.4.11}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Bundan, xususan,

$$a_{nk} \;\leq\; b_n$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik va (9.4.7) qatorning yaqinlashishiga ko'ra esa, istalgan $k \geq 1$ uchun (9.4.8) qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Ikki takroriy yig'indilardan biri chekli bo'lgan holda, 9.1.2 - tasdiqqa ko'ra, yig'indi tartibini o'zgartirish mumkin. Bundan chiqdi, (9.4.11) tengsizlikka asosan,

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \ = \ \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} a_{nk} \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ = \ s$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Ravshanki, qator hadlari manfiy bo'lmagani uchun, N o'sganda chap tomondagi yig'indining monoton o'sishi kelib chiqadi. Shunday ekan, (9.4.9) qator (demak, (9.4.3) takroriy qator ham) yaqinlashadi va

$$s^* \ \leq \ s$$

tengsizlik bajariladi.

Endi yuqoridagi mulohazalarni (9.4.3) qatorga qo'llasak, teskari tengsizlikni, ya'ni

$$s \ \leq \ s^*$$

munosabatni olamiz. Demak, talab qilingan (9.4.10) tenglik bajarilar ekan.

Q. E. D.

Agar berilgan qator hadlarining ishorasi o'zgaruvchi bo'lsa, yuqorida qayd etilganidek, (9.4.5) tenglik, umuman aytganda, bajarilmaydi. Ammo qator absolyut yaqinlashsa, navbatdagi teorema qayd etilgan tenglikning o'rinli bo'lishini ko'rsatadi.

9.4.2 - teorema. *Agar quyidagi*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| \tag{9.4.12}$$

takroriy qator yaqinlashsa, u holda har ikkala (9.4.2) va (9.4.3) takroriy qatorlar ham yaqinlashadi va ularning yig'indilari o'zaro teng bo'ladi.

Isbot. Quyidagi

$$p_{nk} \ = \ \max\{a_{nk},\ 0\}, \quad q_{nk} \ = \ \max\{-a_{nk},\ 0\}$$

belgilashlarni kiritamiz.

Ravshanki, bunda

$$0 \leq p_{nk} \leq |a_{nk}|, \quad 0 \leq q_{nk} \leq |a_{nk}| \tag{9.4.13}$$

tengsizliklar va

$$a_{nk} \ = \ p_{nk} - q_{nk}, \qquad |a_{nk}| \ = \ p_{nk} + q_{nk}$$

tengliklar bajariladi.

Shartga ko'ra

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \tag{9.4.14}$$

qator absolyut yaqinlashadi. Bundan chiqdi, 9.1.2 - tasdiqqa asosan,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} p_{jk} \ - \sum_{j=1}^{\infty} q_{jk}$$

tenglik o'rinli, chunki (9.4.13) tengsizlikdan o'ng tomondagi qatorlarning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Demak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{jk} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} q_{jk}. \tag{9.4.15}$$

Boshqa tomondan, 9.4.1 - Teoremaga asosan, (9.4.12) qatorning yaqinlashishidan quyidagi

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|,$$

takroriy qatorning ham yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi mulohazalarni takrorlasak,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q_{jk} \tag{9.4.16}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi 9.4.1 - Teoremani qo'llasak, (9.4.16) va (9.4.15) tengliklarning o'ng tomonidagi qatorlarning o'zaro tengligini olamiz. Shunday ekan, qayd etilgan tengliklarning chap tomonlari ham o'zaro tengdir.

Q. E. D.

Natija. *Ikki karrali $\{a_{nk}\}$ ketma-ketlik indekslari $n \geq k \geq 1$ tengsizlikni qanoatlantirganda aniqlangan bo'lsin. Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|$$

qator yaqinlashsa, u holda chap va o'ng tomonlari yaqinlashuvchi qatorlardan iborat bo'lgan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_{nk}$$

tenglik bajariladi.

Bu tasdiqni isbotlash uchun $k > n$ bo'lganda ikki karrali ketma-ketlik hadlarini $a_{nk} = 0$ deb aniqlab, (9.4.5) tenglikni qo'llash yetarli.

Eslatma. Agar qator absolyut yaqinlashmasa, xatto (9.4.5) tenglikning har ikkala tomonida yaqinlashuvchi qatorlar tursa ham, bu tenglikning bajarilishini kafolatlab bo'lmaydi.

9.4.2 - misol. Hadlari $a_{nk} = \delta_{nk} - \delta_{(n+1),k}$ ko'rinishda aniqlangan ikki karrali ketma-ketlikni qaraymiz. Aniqroq tassovur qilish maqsadida bu ketma-ketlik qiymatlarini quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

cheksiz matritsa ko'rinishida yozib olamiz.

Bu matritsa bosh diagonalida joylashgan barcha elementlar 1 ga teng bo'lib, undan yuqoridagi diagonalda joylashgan barcha elementlar -1 ga teng. O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki, bunda har bir satr elementlari yig'indisi ham, ikkinchi ustundan boshlab, har bir ustun elementlari yig'indisi ham nolga teng. Birinchi ustun elementlari yig'indisiga kelsak, ravshanki, u 1 ga teng. Shunday qilib, qaralayotgan holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 1,$$

ya'ni har ikki takroriy qator yaqinlashsada, ularning yig'indisi o'zaro teng bo'lmas ekan.

§ 9.5*. Uzoqlashuvchi qatorlarni jamlash

1. Biror ma'noda yig'indini mos qo'yish mumkin bo'lgan qatorlar to'plamini kengaytirish maqsadida, bir qator matematiklar tomonidan sonli qator yig'indisi tushunchasi umumlashtirib borilgani yuqorida qayd etilgan edi. Ayniqsa ko'p uchraydigan umumlashtirishlarni E. Chezaro va N. Abel nomlari bilan bog'lashadi.

Quyidagi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ \dots \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \tag{9.5.1}$$

sonli qatorni qaraylik.

Uning xususiy yig'indilari ketma-ketligi

$$1,\ 0,\ 1,\ 0, \dots,$$

ko'rinishga ega bo'lib, ravshanki, u uzoqlashadi. E. Chezaro bu xususiy yig'indilarning o'rta arifmetiklarini, ya'ni

$$\sigma_n \ = \ \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{n} \tag{9.5.2}$$

ketma-ketlikni qarashni taklif qildi. Ravshanki,

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n \ = \ \left[\frac{n}{2}\right] \ = \ \frac{n}{2} \ - \ \theta_n,$$

bu yerda θ_n sonlar n nomerning toq yoki juftligiga qarab, yo nol va yo $1/2$ ga teng. Shu sababli

$$\sigma_n \ = \ \frac{1}{2} \ - \ \frac{\theta_n}{n}.$$

Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \ = \ \frac{1}{2},$$

ya'ni (10.5.1) qator xususiy yig'indilarining o'rta arifmetiklari $1/2$ soniga yaqilashar ekan.

Endi ixtiyoriy sonli qatorni qaraylik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{9.5.3}$$

Odatdagidek S_n simvoli orqali uning xususiy yig'indilarini belgilaymiz:

$$S_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{9.5.4}$$

Ta'rif. *Agar*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ S_k$$

ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \;=\; S$$

tenglik bajarilsa, (9.5.3) qator S soniga o'rta arifmetik jamlanadi deyishadi.

Bu limit (9.5.3) qatorning Chezaro ma'nosidagi umumlashgan yig'indisi deb ataladi va

$$(C,1)\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; S$$

ko'rinishda belgilanadi.

Yuqorida biz qator yig'indisini xususiy yig'indilarning limiti sifatida aniqlagan edik. Albatta, o'z-o'zidan savol tug'iladiki, hozir aniqlangan umumlashgan yig'indi tushunchasi yuqorida kiritilgan qator yig'indisi tushunchasi bilan qanday bog'langan? Boshqacha aytganda, agar qator oddiy ma'noda yaqinlashsa, u Chezaro ma'nosida jamlanuvchi bo'ladimi, va, agar javob ijobiy bo'lsa, Chezaro ma'nosidagi yig'indi oddiy ma'nodagi yig'indi bilan ustma-ust tuishadimi? Navbatdagi tasdiq qo'yilgan savollarga ijobiy javob beradi, ya'ni bu tasdiq har bir yaqinlashuvchi qator Chezaro ma'nosida yig'indiga ega bo'lib, bu yig'indi qatorning oddiy yig'indisi bilan ustma-ust tushishini ko'rsatadi.

9.5.1 - Teorema (E. Chezaro). *Yaqinlashuvchi qator xususiy yig'indilarining o'rta arifmetiklari qator yig'indisiga yaqinlashadi.*

Isbot. Berilgan qator xususiy yig'indilarini S_n va bu yig'indilar limitini S orqali belgilaymiz.

Ravshanki,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S \;=\; S.$$

Shunday ekan, ixtiyoriy N nomerni tayinlab, (9.5.2) o'rta arifmetiklar va qator yig'indisi ayirmalari uchun $n \geq N$ bo'lganda quyidagi

$$\sigma_n - S \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (S_n - S) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} (S_n - S) \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} (S_n - S)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Shartga ko'ra $\{S_n - S\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik va shu sababli u chegaralangan, ya'ni

$$|S_n - S| \;\leq\; M, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Bundan tashqari, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $n \geq N = N(\varepsilon)$ bo'lganda

$$|S_n - S| \;<\; \varepsilon, \quad n = N, N+1, N+2, ...$$

tengsizlik bajariladi. Demak,

$$|\sigma_n - S| \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} M \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} \varepsilon \;=\; \frac{MN}{n} \;+\; \varepsilon\frac{n-N}{n} \;\leq\; \frac{MN}{n} \;+\; \varepsilon.$$

Bundan chiqdi,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; |\sigma_n - S| \;\leq\; \varepsilon$$

va $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligidan yuqori limitning nol ekani kelib chiqadi. Shunday qilib, $\{\sigma_n - S\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud va u nolga teng ekan. Bu esa, o'z navbatida, o'rta arifmetiklarning S soniga yaqinlashishini anglatadi.

Q. E. D.

Eslatma. Isbotlangan teorema o'rta arifmetiklar usulining regulyarligi haqidagi teorema deb ataladi. Ravshanki, teskari tasdiq o'rinli emas, chunki Chezaro usuli bilan jamlanadigan uzoqlashuvchi qatorlar mavjud. Misol tariqasida (9.5.1) qatorni olish mumkin.

2. Qatorlarni umumlashgan jamlashning N. Abel nomi bilan bog'liq bo'lgan yana bir usuli o'rganilayotgan qator hadlariga qo'shimcha x parametr kiritib, hosil bo'lgan funksiyaning $x \to 1-0$ dagi limitini hisoblashdan iborat.

Yana (9.5.1) qatorni qaraylik. Agar qator n-hadini x^{n-1} ga ko'paytirsak, hosil bo'lgan quyidagi

$$S(x) \;=\; 1 - x + x^2 - x^3 + ... \tag{9.5.5}$$

qator $0 < x < 1$ intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun yaqinlashadi va

$$S(x) \;=\; \frac{1}{1+x} \tag{9.5.6}$$

tenglik bajariladi.

(9.5.5) ning o'ng tomondagi qator $x = 1$ da (9.5.1) qator bilan ustma-ust tushgani sababli, (9.5.5) yig'indining $x \to 1-0$ dagi limitini hisoblashga harakat qilib ko'rish tabiiydir. Agar bu limit mavjud bo'lsa, uni (9.5.1) qatorning umumlashgan yig'indisi deb atash mumkin. Bunda, (9.5.6) ni e'tiborga olsak,

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) \;=\; \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} \;=\; \frac{1}{2}$$

tenglikka kelamiz, ya'ni (9.5.1) qatorning bunday aniqlangan umumlashgan yig'indisi bu qatorning Chezaro ma'nosidagi yig'indisi bilan ustma-ust tushar ekan.

Yana umumiy ko'rinishdagi (9.5.3) sonli qatorni qaraylik.

Ta'rif. *Agar $0 < x < 1$ intervaldan olingan ixtiyoriy haqiqiy x uchun*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} \tag{9.5.7}$$

qator yaqinlashsa va

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} \;=\; S \tag{9.5.8}$$

tenglik bajarilsa, (9.5.3) qator Abel usuli bilan S soniga yaqilashadi deyiladi.

Bunda S soni (9.5.3) qatorning Abel ma'nosidagi yig'indisi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi

$$(A)\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; S. \tag{9.5.9}$$

(9.5.7) qatorning yig'indisi (9.5.3) qatorning *Abel o'rtachasi* deyiladi.

Navbatdagi teorema Abel usulining regulyarligini ko'rsatadi.

9.5.2 - Teorema (N. Abel). *Agar (9.5.3) qator yaqinlashib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda bu qator Abel usuli bilan jamlanuvchi bo'lib, uning Abel ma'nosidagi yig'indisi ham S ga teng bo'ladi.*

Isbot. 1) Avval (9.5.7) qatorning $0 < x < 1$ intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun yaqinlashishiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan, (9.5.3) qator yaqinlashgani uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichikdir va demak, u chegaralangan, ya'ni

$$|a_n| \ \leq \ M.$$

Bundan (9.5.7) qator hadlari uchun quyidagi

$$|a_n x^{n-1}| \ \leq \ M x^{n-1}, \quad 0 < x < 1,$$

bahoni olamiz. Demak, 9.1.3 - Teoremaga ko'ra, (9.5.7) qator yaqinlashadi.

2) Ushbu

$$S(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}, 0 < x < 1, \tag{9.5.10}$$

belgilashni kiritaylik. Agar (9.5.3) qatorning xususiy yig'indilari S_n bo'lsa, $a_n = S_n - S_{n-1}$ tenglik o'rinli (bunda biz $S_0 = 0$ deb oldik). Shu sababli

$$S(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(S_n - S_{n-1}) \ =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} S_n \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} S_{n-1} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} S_n \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} x^n S_n \ .$$

Demak,

$$S(x) \ = \ (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} S_n \ . \tag{9.5.11}$$

Shunday ekan, navbatdagi

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \ = \ 1, \quad 0 < x < 1,$$

tenglikdan foydalanib, (9.5.11) dan

$$S(x) - S \ = \ (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(S_n - S) \tag{9.5.12}$$

munosabatni olamiz.

Shartga ko'ra $\{S_n - S\}$ ketma-ketlik cheksiz kichikdir va, demak, u chegaralangan, ya'ni

$$|S_n - S| \ \leq \ M, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Bundan tashqari, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topiladiki, $n \geq N = N(\varepsilon)$ bo'lganda

$$|S_n - S| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N,$$

tengsizlik bajariladi.

Natijada, agar (9.5.12) ni e'tiborga olsak,

$$|S(x) - S| \ \leq \ (1-x) \sum_{n=1}^{N} x^{n-1} |S_n - S| \ + \ (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^{n-1} |S_n - S| \ \leq$$

$$\leq \; M(1-x)\sum_{n=1}^{N} \; x^{n-1} \; + \; \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \; x^{n-1} \; \leq MN(1-x) \; + \; \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlikka kelamiz.

Endi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni

$$MN(\varepsilon)\cdot\delta \; < \; \frac{\varepsilon}{2}$$

shartdan aniqlaymiz.

U holda $0 < 1 - x < \delta$ bo'lganda

$$|S(x) - S| \; < \; \varepsilon, \quad 1-\delta < x < 1,$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan, o'z navbatida, (9.5.8) tenglik, ya'ni (9.5.6) qatorning Abel usuli bilan S soniga yaqinlashishi kelib chiqadi.

Q. E. D.

1 - eslatma. Yuqorida biz (9.5.10) qatorda yig'indi indeksini 1 birlikka surib, (9.5.11) tenglikni oldik. Mana shu almashtirishga *Abel almashtirishi* deyiladi.

2 - eslatma. 9.5.2 - Teoremaga teskari tasdiqning o'rinli emasligini (9.5.1) qator misolida ko'rishimiz mumkin. Ya'ni Abel usuli bilan jamlanadigan uzoqlashuvchi qatorlar mavjud ekan.

Trigonometrik yig'indilar bilan bog'liq bo'lgan yana bir misolni qaraymiz.

9.5.1 - misol. Ushbu

$$\frac{1}{2} \; + \; \sum_{k=1}^{\infty} \; \cos k\varphi \tag{9.5.13}$$

qatorning har bir $\varphi \in \mathbf{R}$ uchun uzoqlashishi bevosita (9.1.16) formuladan kelib chiqadi. Haqiqatan, bu formulaga ko'ra, n butun bo'lganda xususiy yig'indilar $\varphi \neq 2n\pi$ lar uchun limitga ega emas. Agar $\varphi = 2n\pi$ bo'lsa, (9.5.13) qatorning har bir hadi 1 ga teng bo'lib, yana, natijada, bu qator uzoqlashadi.

Endi, agar (9.1.15) formuladan foydalansak, $S(x)$ Abel o'rtachalarining $\varphi \neq 2\pi n$ bo'lganda quyidagi

$$S(x) \; = \; \frac{1-x^2}{1-2x\cos\varphi + x^2}$$

ko'rinishga ega ekanini ko'ramiz. Demak,

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) \; = \; 0,$$

ya'ni qator Abel usuli bilan jamlanuvchi bo'lib, uning Abel ma'hosidagi yig'indisi nolga teng ekan.

Navbatdagi misol Chezaro ma'nosida jamlanmaydigan, lekin, shu bilan bir qatroda, Abel usuli bilan jamlanuvchi qatorlar mavjuligini ko'rsatadi.

9.5.2 - misol. Ushbu

$$1-2+3-4+5-6+... \tag{9.5.14}$$

qator Chezaro usuli bilan jamlanmaydi. Haqiqatan, $\{S_n\}$ xususiy yig'indilar ketma-ketligi, ravshanki, quyidagi

$$1, \; -1, \; 2, \; -2, \; 3, \; -3, \; ...$$

ko'rinishga ega, shu sababli $\{\sigma_n\}$ o'rta arifmetiklar ketma-ketligi

$$1,\ 0,\ \frac{2}{3},\ 0,\ \frac{3}{5},\ 0,\ ...,\ \frac{n+1}{2n},\ 0, ...$$

dan iborat, ya'ni

$$\sigma_n \ = \ \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n}, & \text{agar} \quad n \quad \text{toq bo'lsa,} \\ \\ \ 0 \quad , & \text{agar} \quad n \quad \text{juft bo'lsa.} \end{cases}$$

Ravshanki, σ_n ketma-ketlik ikki 0 va 1/2 limit nuqtalariga ega va shu sababli u uzoqlashadi. Demak, (9.5.13) qator Chezaro usuli bilan jamlanmas ekan.

Endi bu qatorning Abel usuli bilan jamlanuvchi bo'lib, uning Abel ma'nosidagi yig'indisi 1/4 ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun $0 < x < 1$ intervaldagi barcha x larda o'rinli bo'lgan

$$\frac{1}{1+x} \ = \ 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ...,$$

tenglikdan foydalanamiz. Biz 10.9 - § da bu tenglikni hadma-had differensiallash mumkinligini, ya'ni

$$-\frac{1}{(1+x)^2} \ = \ -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + ...,$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz. Bu tenglikdan (9.5.13) qatorga mos keluvchi Abel o'rtachalarining

$$S(x) \ = \ 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - ... \ = \ \frac{1}{(1+x)^2} \tag{9.5.15}$$

ko'rinishga ega ekani kelib chiqadi.

Demak,

$$\lim_{x \to 1-0} S(x) \ = \ \frac{1}{4}.$$

3. Albatta, Chezaro va Abel usullari o'zaro qanday munosabatda, degan tabiiy savol tug'uladi. Bu savolga javob shundan iboratki, Chezaro usuli bilan biror S soniga jamlanuvchi har bir sonli qator Abel usuli bo'yicha ham aynan o'sha S soniga jamlanadi. Haqiqatan, (9.5.11) tenglik o'ng tomonidagi qatorga Abel almshtirishini qo'llasak,

$$S(x) - S \ = \ (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}(\sigma_n - S) \tag{9.5.16}$$

tenglikni olamiz.

Bunda biz (9.5.15) tenglikda x ni $-x$ almashtirish bilan hosil bo'ladigan quyidagi

$$(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \ = \ 1 \tag{9.5.17}$$

ayniyatdan foydalandik ((9.5.12) tenglik isboti bilan solishtiring).

Endi talab qilinayotgan tasdiq isboti xuddi 9.5.2 - Teorema isboti singari olib boriladi ((9.5.12) tenglikdan keyingi mulohazalarga qarang).

Isbotlangan tasdiq matematik adabiyotlarda Abel usuli Chezaro usulidan *kuchliroqligi* haqidagi teorema deb ataladi.

4. Chezaro, xususiy yig'indilarning o'rta arifmetiklaridan tashqari, ulardan yana o'rta arifmetik olish natijasida hosil bo'lgan xususiy yig'indilarni ham o'rgandi. Chunonchi, agar

$$\sigma_n^{(2)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + ... + \sigma_n}{n}$$

belgilash kiritsak, quyidagi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(2)} \ = \ S$$

tenglik bajarilganda (9.5.3) qator S soniga 2-tartibli Chezaro o'rta arifmetiklarida jamlanadi deyiladi.

Bu limit (9.5.3) qatorning umumlashgan 2-tartibli Chezaro yig'indisi deb ataladi va

$$(C, 2) \sum_{k=1}^{\infty} \ a_k \ = \ S$$

ko'rinishda belgilanadi.

Chezaroning ixtiyoriy natural m-tartibli o'rtachalari $m-1$- tartibli o'rtachalarning o'rta arifmetigi sifatida induksiya orqali aniqlanadi, chunonchi,

$$\sigma_n^{(m)} = \frac{\sigma_1^{(m-1)} + \sigma_2^{(m-1)} + \sigma_3^{(m-1)} + ... + \sigma_n^{(m-1)}}{n}.$$

Bu o'rtachalar limiti

$$(C, m) \sum_{k=1}^{\infty} \ a_k \ = \ \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(m)}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Xuddi yuqoridagi singari, agar $m > l$ bo'lsa, Chezaroning m-tartibli usuli Chezaroning l-tartibli usulidan kuchliligi va Abel usulining ixtiyoriy m-tartibli Chezaro usulidan kuchliligi isbotlanadi.

Shunga qaramasdan, hisoblash nuqtai nazaridan Chezaro usuli Abel usulidan ustunroq hisoblanadi, chunki Chezaro o'rtachalarini hisoblash uchun chekli sondagi arifmetik amallar bajarish talab qilinadi. Bu esa sonli qator ko'rinishda tasvirlangan turli kattaliklarni kompyuter yordamida hisoblashda nihoyatda muhimdir.

§ 9.6. Cheksiz ko'paytmalar

1. Agar $\{c_k\}$ biror sonli ketma-ketlik bo'lsa, quyidagi ko'rinishdagi

$$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot ... \cdot c_n \cdot ...$$

formal ifodaga cheksiz ko'paytma deyiladi. Ketma-ketlikning c_k elementlari cheksiz ko'paytmaning hadlari deb ataladi. Cheksiz ko'paytmani belgilash uchun quyidagi simvolik yozuvdan ham foydalaniladi:

$$\prod_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{9.6.1}$$

Xuddi sonli qatorlar holidek, (9.6.1) cheksiz ko'paytmani o'rganish maqsadida uning dastlabki n ta hadi ko'paytmasini kiritib, bu ko'paytma n cheksiz oshgan sari qanday o'zgarishini kuzatamiz.

Ta'rif. (9.6.1) *cheksiz ko'paytmaning dastlabki n ta hadining ko'paytmasini, ya'ni*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} c_k = c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_{n-1} \cdot c_n \tag{9.6.2}$$

ifodani cheksiz ko'paytmaning ***n- xususiy ko'paytmasi*** *deymiz.*

9.6.1 - misol. Ixtiyoriy tayinlangan haqiqiy x uchun quyidagi cheksiz ko'paytmani qaraymiz:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} ... \tag{9.6.3}$$

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, n-xususiy ko'paytma

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot ... \cdot \cos\frac{x}{2^n} \tag{9.6.4}$$

oson hisoblanib, uning quyidagi

$$P_n(x) \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x \tag{9.6.5}$$

tenglikni qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Dastavval, $n = 1$ da $P_1(x) = \cos\frac{x}{2}$ bo'lgani sababli, (9.6.5) tenglik

$$\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$$

ko'rinishga kelishini qayd etamiz. Demak, bu holda (9.6.5) shubhasiz o'rinli ekan.

Endi matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Xususiy ko'paytma ta'rifiga ko'ra,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x)\cos\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Bundan chiqdi,

$$P_{n+1}(x)\sin\frac{x}{2^{n+1}} = P_n(x)\cos\frac{x}{2^{n+1}}\sin\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}P_n(x)\sin\frac{x}{2^n}.$$

Agar (9.6.5) tenglikni biror n uchun o'rinli desak,

$$P_{n+1}(x)\sin\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sin x = \frac{1}{2^{n+1}}\sin x$$

munosabatga ega bo'lamiz. Demak, (9.6.5) tenglik barcha natural n lar uchun bajarilar ekan.

Isbot qilingan (9.6.5) tenglikdan $x \neq 0$ lar uchun

$$P_n(x) = \frac{\sin x}{x}\left[\frac{(x2^{-n})}{\sin(x2^{-n})}\right] \tag{9.6.6}$$

munosabat kelib chiqadi.

Agar $n \to \infty$ bo'lsa, birinchi ajoyib limitga ko'ra, kvadrat qavsdagi ifoda 1 ga intiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Bordiyu $x = 0$ bo'lsa, istalgan n nomer uchun, ravshanki, $P_n = 1$ bo'ladi. Shunday ekan, ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ uchun $\{P_n\}$ xususiy ko'paytmalar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{9.6.7}$$

ga teng bo'ladi.

2. Bir qarashda aynan shu (9.6.7) funksiyani qaralayotgan cheksiz ko'paytmaning qiymati deb qarash kerak edi. Ammo matematik adabiyotlarda sal boshqacha ta'rif qabul qilingan.

Hosil bo'lgan vaziyatga oydinlik kiritish maqsadida quyidagini qayd qilamiz. Agar cheksiz ko'paytmaning hech bo'lmasa bitta c_p hadi nolga teng bo'lsa, boshqa $c_k,\ k \neq p$, hadlarning qanday bo'lishdan qat'iy nazar, shu p nomerdan boshlab barcha xususiy ko'paytmalar nolga teng bo'ladi. Shuning uchun, cheksiz ko'paytmalar nazariyasida ko'paytmaning barcha hadlari noldan farqli deb hisoblanadi. Bundan tashqari, xususiy ko'paytmalarning limiti ham noldan farqli bo'lsin, deb talab qilinadi.

Shunday qilib, yaqinlashuvchi cheksiz ko'paytmaning quyidagi ta'rifiga kelamiz.

Ta'rif. *Agar (9.6.1) cheksiz ko'paytmaning (9.6.2) xususiy ko'paytmalari ketma-ketligi n o l d a n f a r q l i chekli limitga ega bo'lsa, u holda (9.6.1) cheksiz ko'paytmani* ***yaqinlashuvchi*** *deymiz.*

Yaqinlashuvchi cheksiz ko'paymaning ***qiymati*** *deb uning xususiy ko'paytmalari ketma-ketligining limitiga aytamiz*:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n. \tag{9.6.8}$$

Odatda

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} c_k \tag{9.6.9}$$

deb yozishadi.

Endi yuqorida ko'rilgan misol bo'yicha shuni qayd qilamizki, keltirilgan ta'rif bo'yicha (9.6.3) cheksiz ko'paytma, uning (9.6.4) xususiy ko'paytmalarining limiti istalgan haqiqiy x sonlar uchun mavjud bo'lishiga qaramasdan, $x \neq m\pi$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi, bu yerda m noldan farqli butun sondir.

Ba'zan, xususiy ko'paytmalar limiti no'lga teng bo'lganda, cheksiz ko'paytma *nolga uzoqlashadi* deyiladi.

Shunday qilib,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{9.6.10}$$

bundan tashqari, agar $x = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, ...$ bo'lsa, (9.6.10) tenglik o'rinli bo'lib qolsada, cheksiz ko'paytma nolga uzoqlashadi.

3. Bevosita yuqoridagi ta'rifdan yaqinlashuvchi cheksiz ko'paytmaning hadlari birga yaqinlashishi kelib chiqadi.

9.6.1 - tasdiq. *Cheksiz ko'paytma hadlarining birga intilishi bu ko'paytma yaqinlashishining zaruriy shartidir.*

Haqiqatan, agar (9.6.2) tenglik bilan aniqlangan P_n xususiy ko'paytmalar $P \neq 0$ songa yaqinlashsa, talab qilingan natijani olamiz:

$$c_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1, \quad n \to \infty.$$

1 - natija. *Agar (9.6.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:*

$$c_n = 1 + a_n, \tag{9.6.11}$$

bu yerda $\{a_n\}$ - cheksiz kichik ketma-ketlik, ya'ni $n \to \infty$ da $a_n \to 0$ bo'ladi.

2 - natija. *Agar cheksiz ko'paytma yaqinlashsa, biror nomerdan boshlab uning barcha hadlari musbat bo'ladi.*

Navbatdagi tasdiq cheksiz ko'paytmalar uchun yaqinlashish muammosini sonli qatorlar uchun yaqinlashish muammosiga keltirishga imkon beradi.

9.6.2 - tasdiq. *Agar $c_k > 0, k \in \boldsymbol{N}$, bo'lsa, (9.6.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lishi uchun*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln c_k \tag{9.6.12}$$

sonli qatorning yainlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir. Bunda (9.6.1) cheksiz ko'paytmaning P qiymati (9.6.12) sonli qator yig'indisi S bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan bo'ladi:

$$P = e^S. \tag{9.6.13}$$

Isbot (9.6.1) ning P_n xususiy ko'psytmalari va (9.6.12) ning S_n xususiy yig'indilari quyidagi

$$\ln P_n = S_n, \quad P_n = e^{S_n},$$

tengliklar bilan bog'langanligidan hamda ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi.

Navbatdagi teorema barcha hadlari 1 dan katta bo'lgan cheksiz ko'paytmalarga doir.

9.6.1 - teorema. *Agar $a_k > 0$ bo'lsa,*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \tag{9.6.14}$$

cheksiz ko'paytma faqat va faqat

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{9.6.15}$$

sonli qator yaqinlashganda yaqinlashadi.

Isbot. Teorema isbot bo'lishi uchun, 9.6.2 - tasdiqqa ko'ra, (9.6.15) qator faqat va faqat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k) \tag{9.6.16}$$

qator yaqinlashganda yaqinlashishini ko'rsatish yetarli.

Bizga ma'lumki, (9.6.15) qatorning va hozirgina ko'rganimizdek, (9.6.14) cheksiz ko'paytmaning ham yaqinlashishi uchun zaruriy shart a_k hadlarning nolga intilishidir. Shuning uchun biz

$$a_k \to 0, \quad k \to \infty,$$

deb hisoblashimiz mumkin.

Xususan, biror nomerdan boshlab,

$$0 \ < \ a_k \ < \ 1$$

desak bo'ladi.

Bunday shartni qanoatlantiruvchi a_k lar uchun esa quyidagi

$$\frac{1}{2}\, a_k \ < \ \ln(1 + a_k) \ < \ a_k$$

qo'shaloq tengsizlik o'rinli.

Shunday ekan, talab qilinayotgan tasdiq umumiy taqqoslash alomatidan kelib chiqadi (9.1.2 - teoremaga qarang).

Q. E. D.

Eslatma. Xuddi shunga o'xshash tasdiq barcha a_k lar manfiy bo'lganda ham o'rinli, chunki bu holda, agar $b_k = -a_k > 0$ deb belgilasak, yetarlicha katta k nomerlar uchun

$$b_k \ < \ -\ln(1 - b_k) \ < \ 2b_k$$

tengsizlik bajariladi.

9.6.2 - tasdiq yordamida cheksiz ko'paytmalar uchun absolyut yaqinlashish tushunchasini kiritish mumkin. Chunonchi, agar (9.6.12) qator absolyut yaqinlashsa, (9.6.1) cheksiz ko'paytma *absolyut yaqinlashadi* deyiladi. 9.6.1 - teorema cheksiz ko'paytmaning bunday ma'noda aniqlangan absolyut yaqinlashishi uchun navbatdagi zaruriy va yetarli shartni olishga imkon beradi.

9.6.2 - teorema. *(9.6.14)cheksiz ko'paytmaning absolyut yaqinlashishi uchun (9.6.15) sonli qatorning absolyut yaqinlashishi zarur va yetarli.*

Isbot barcha yetarlicha katta k nomerlar uchun o'rinli bo'lgan quyidagi

$$\frac{1}{2}\ |a_k| \ < \ |\ln(1 + a_k)| \ < \ 2|a_k|$$

qo'shaloq tengsizlikdan va umumiy taqqoslash alomatidan kelib chiqadi.

4*. Tub sonlarning zamonaviy nazariyasida quyidagi

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\,s}} \tag{9.6.17}$$

tenglik orqali aniqlangan Rimanning dzeta-funksiyasi nihoyatda muhim rol o'ynaydi. Bu yerda s kompleks qiymatlar ham qabul qilishi mumkin bo'lgan son: $s = \sigma + it$. Bundan tashqari, butun sonning kompleks darajasi $k^s = k^\sigma k^{it}$ kabi aniqlanib, istalgan haqiqiy t uchun

$$k^{it} \ = \ e^{it\ln k} \ = \ \cos(t\ln k) \ + \ i\sin(t\ln k)$$

deb hisoblanadi.

Ravshanki, (9.6.17) qator $\mathrm{Re}\, s > 1$ bo'lganda, ya'ni, agar $s = \sigma + it$ desak, $\sigma > 1$ ochiq yarim tekislikda yaqinlashadi.

Riman zeta-funksiyasining asosiy xossasi $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ da o'rinli bo'lgan quyidagi

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^{\,s}}\right)^{-1} \tag{9.6.18}$$

formuladan iborat, bu yerda cheksiz ko'paytma barcha tub p sonlar bo'yicha olib boriladi. Bu formula birinchi marta Leonard Eyler tomonidan s ning haqiqiy qiymatlari uchun isbotlangan.

(9.6.18) ayniyatning isboti cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisi uchun o'rinli bo'lgan quyidagi formulaga asoslangan:

$$\left(1 - \frac{1}{p^{\,s}}\right)^{-1} \;=\; 1 + \frac{1}{p^{\,s}} + \frac{1}{p^{\,2s}} + \frac{1}{p^{\,3s}} + \ldots$$

Haqiqatan, bu tenglikni p tub sonining turli qiymatlarida yozib olib, ularni o'zaro ko'paytirsak, hosil bo'lgan ifodaning chap tomonida (9.6.18) cheksiz ko'paytma bo'lib, uning o'ng tomonida esa quyidagi

$$\frac{1}{k^s} \;=\; \frac{1}{(p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n})^s}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan barcha hadlar yig'indisi turadi. Bundan, agar har bir butun k sonini yagona usulda tub sonlar darajalarining ko'paytmasi:

$$k \;=\; p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$$

sifatida yozish mumkinligini hisobga olsak, talab qilingan (9.6.18) ayniyatni olamiz.

Sodda almashtirishlar yordamida

$$\zeta(s) \;=\; \frac{s}{1-s} \;-\; s\int_1^{\infty} (x - [x])\, x^{-1-s}\, dx$$

ekanini ko'rsatish mumkin. Bu yerda $[x]$ orqali x sonining butun qismi belgilangan. Ravshanki, bu tenglikdagi xosmas integral $\operatorname{Re} s > 0$ bo'lganda yaqinlashadi. Bundan ko'rinadiki, oxirgi ifoda $\operatorname{Re} s > 1$ da (9.6.17) tenglik orqali aniqlangan Riman zeta-funksiyasining $\operatorname{Re} s > 0$ tekislikka davomini berar ekan.

Rimanning (B. Riemann) mashhur gipotezasi quyidagidan iborat: zete-funksiyaning $\operatorname{Re} s > 0$ yarim tekislikdagi nollari $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ vertikal to'g'ri chiziqda joylashgan. Bu gipotezani isbotlashga matematiklar bir yarim asrdan beri urinishadi. Agar u isbot bo'lsa (gipoteza to'g'riligiga hech kimda shubha yoq), u, zeta-funksiyaning Eyler ko'paytmasi (9.6.18) ko'rinishidagi tasviri bilan birga, sonlar nazariyasining ko'pgina muhim masalalarini yechishga imkon bergan bo'lar edi.

§ 9.7. Misollar

1 - misol. Ushbu qatorni yaqinlashishga bevosita tekshiring va qator yig'indisini toping:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

Ko'rsatma. Qatorning k - xususiy yig'indisi S_k ni

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - \sum_{n=1}^{k} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

ko'rinishda yozib olib, o'xshash hadlarini qisqartiring.

2 - misol. Har qanday musbat haqiqiy x son uchun qator yaqinlashishining zaruriy shartidan foydalanib

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

qatorning uzoqlashishini isbotlang.

Ko'rsatma. (1.9.8) bahodan foydalanib, har qanday musbat haqiqiy x son uchun shunday n_k va m_k o'suvchi natural sonlar ketma-ketliklari topilib, ular uchun

$$n_k x \;=\; 2\pi m_k \;+\; O\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

munosabat bajarilishini ko'rsating. Bundan, qator yaqinlashishining zaruriy shartiga zid bo'lgan,

$$\lim_{k\to\infty} \cos n_k x \;=\; 1$$

tenglikni keltirib chiqaring.

3 - misol. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashsa, uni hadlarini, qatorda kelish tartibini saqlagan holda, gruppalashtirish natijasida tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ bu yerda } A_n = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k, \quad (p_1 = 1,\ p_1 < p_2 < \cdots),$$

qatorning ham yaqinlashishini isbotlang.

Teskari tasdiq o'rinli emas. Misol keltiring.

Ko'rsatma. Tasdiqni isbotlashda Koshi kriteriysidan foydalaning. Teskari tasdiqni $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ qator misolida tekshiring.

4 - misol. Quyidagi

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{\sqrt{1000}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1000}} + \cdots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Qator yaqinlashishining zaruriy shartidan foydalaning.

5 - misol. Arifmetik progressiya hadlariga teskari sonlardan tuzilgan qatorning uzoqlashishini isbotlang.

Ko'rsatma. Garmonik qator hadlari bilan taqqoslang.

6 - misol. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ (a_n > 0)$ qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \tag{9.7.1}$$

limit mavjud bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \tag{9.7.2}$$

limit ham mavjud bo'lishini isbotlang.

Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni (9.7.2) limit mavjud bo'lsa, (9.7.1) limit mavjud bo'lmasligi mumkin. Misol keltiring.

Ko'rsatma. Tasdiqni bevosita sonli ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib isbotlang. Teskari tasdiqni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

qator misolida tekshiring.

7 - misol. Qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1000}.$$

Ko'rsatma. Leybnits alomatini qo'llang.

8 - misol. Qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

Ko'rsatma. (9.1.16) tenglikdan foydalanib, Dirixle-Abel alomatini qo'llang.

9 - misol. Agar ishorasi navbatlashgan (9.3.8) qatorda $b_k > 0$ va $n \to \infty$ da $b_k \to 0$ bo'lsa (ya'ni Leybnits teoremasida b_k ketma-ketlik monoton bo'lmasa), bu qator yaqinlashadimi?

Ko'rsatma. Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2+(-1)^n}{n}$$

qatorni tekshiring. Bunda (9.3.9) qator $\alpha = 1$ da yaqinlashishidan foydalaning.

10 - misol. Quyidagi

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

cheksiz ko'paytmani yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. 9.4.1 - teoremadan foydalaning.

X Bob. Funksional ketma-ketliklar va qatorlar

§ 10.1. Funksional ketma-ketliklar

1. Funksional ketma-ketlik deb barchasi bitta $E_0 \subset \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan va natural sonlar qatori bilan nomerlangan funksiyalarning sanoqli birlashmasiga, ya'ni

$$f_1(x),\ f_2(x),\ ..., f_k(x),\ ..., \quad D(f_k) = E_0, \tag{10.1.1}$$

ko'rinishdagi ketma-ketlikka aytamiz.

Funksional ketma-ketliklar odatda
$\{f_k(x)\}$ simvol orqali, yoki, agar berilgan ketma-ketlikni qaysi indeks orqali nomerlanganligiga urg'u berilmoqchi bo'lsa, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ simvol orqali belgilanadi.

Argumentning biror x_0 qiymatini tayinlab, $\{f_n(x_0)\}$ sonli qatorni qaraylik. Agar bu sonli qator biror b soniga teng bo'lgan limitga ega bo'lsa, (10.1.1) funksional qator x_0 nuqtada b soniga yaqinlashadi deyiladi.

Endi (10.1.1) ketma-ketlik biror $E \subseteq E_0$ to'plamning har bir nuqtasida yainlashadi deb faraz qilaylik. Bu holda E to'plamda tabiiy ravishda

$$f(x) \ = \ \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in E,$$

ko'rinishdagi funksiya aniqlanadi. Ushbu funksiya (10.1.1) ketma-ketlikning *limit funksiyasi*, yoki oddiy qilib, *limiti* deyiladi. Bunda (10.1.1) ketma-ketlikni f funksiyaga E to'plamning har bir nuqtasida, yoki E da *nuqtabay* yaqinlashadi deyishadi.

10.1.1 - misol. Ushbu

$$f_n(x) \ = \ x^n, \quad x \geq 0,$$

funksional ketma-ketlik $[0,1]$ kesmada quyidagi

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 0, & \text{agar } \ 0 \leq x < 1 \ \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } \quad x \ = \ 1 \ \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan funksiyaga yaqinlashadi.

2. Agar limitning ta'rifidan foydalansak, funksional ketma-ketlikning to'plamda yaqinlashishining quyidagi ta'rifini olamiz:

agar istalgan $x \in E$ qiymat va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon, x)$ nomer topilsaki, $n \geq N$ bo'lganda

$$|f_n(x) \ - \ f(x)| \ < \ \varepsilon \tag{10.1.2}$$

tengsizlik bajarilsa, (10.1.1) ketma-ketlik E to'plamda f funksiyaga yaqinlashadi deyiladi.

Ba'zi hollarda N nomerni $x \in E$ qiymatga bog'liqmas ravishda tanlashga imkon tug'iladi, ya'ni, boshqacha aytganda, (10.1.2) tengsizlik $x \in E$ ga nisbatan tekis bajariladi. Bunday hollar alohida ahamiyatga ega.

Ta'rif. *Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $n \geq N$ bo'lganda barcha $x \in E$ lar uchun (10.1.2) tengsizlik bajarilsa, (10.1.1) funksional ketma-ketlik f funksiyaga E to'plamda tekis yaqinlashadi deymiz.*

10.1.2 - misol. Quyidagi

$$f_n(x) \ = \ (1-x)^n, \quad x \geq 0,$$

funksional ketma-ketlik $0 < \alpha < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi istalgan α uchun $[\alpha, 1]$ kesmada yaqinlashadi. Bu tasdiqning haqligi

$$|f_n(x) - 0| \ \leq \ (1-\alpha)^n \ < \ \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon),$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. Bu yerda $N(\varepsilon)$ sifatida

$$N(\varepsilon) \ = \ \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\alpha)}\right] \ + \ 1$$

sonni olish mumkin (biz $\varepsilon < 1$ deb hisoblaymiz).

Navbatdagi teorema sonli qatorlar uchun Koshi kriteriysining (2.5.1 - teorema) analogi hisoblanadi.

10.1.1 - teorema (Koshi kriteriysi). (10.1.1) *funksional ketma-ketlikning f funksiyaga E to'plamda tekis yaqinlashishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilib, $n \geq N$ bo'lganda istalgan natural p va barcha $x \in E$ larda quyidagi:*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \ < \ \varepsilon, \quad n \geq N, \quad x \in E, \tag{10.1.3}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. 1) Avval $\{f_n\}$ ketma-ketlik biror f funksiyaga E to'plamda tekis yaqinlashsin deb faraz qilaylik. U holda, ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topiladiki, $n \geq N$ bo'lganda

$$|f_n(x) - f(x)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N, \quad x \in E,$$

tengsizlik bajariladi.

Demak, $n \geq N$ bo'lganda istalgan natural p va barcha $x \in E$ lar uchun

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \ \leq \ |f_n(x) - f(x)| \ + \ |f(x) - f_{n+p}(x)| \ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi, ya'ni (10.1.3) shart o'rinlidir.

2) Endi (10.1.3) shart bajarilsin. Bu shartdan har bir tayinlangan $x \in E$ qiymat uchun $\{f_n(x)\}$ sonli ketma-ketlikning fundamental ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, bu sonli qator, yuqorida (2.5.1 - teorema) keltirilgan Koshi kriteriysiga asosan, limitga ega. Demak, f_n funksional ketma-ketlik E to'plamda yaqinlashar ekan. Bunda f limit funksiya uchun (10.1.3) bahoda $p \to \infty$ deb limitga o'tsak,

$$|f_n(x) - f(x)| \ \leq \ \varepsilon, \quad n \geq N, \quad x \in E,$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu esa, o'z navbatida, $f_n(x)$ ketma-ketlikning f limit funksiyaga E to'plamda tekis yaqinlashishini anglatadi.

Q. E. D.

Eslatma. Shuni qayd etish joizki, funksional ketma-ketliklarning tekis yaqinlashishi haqidagi Koshi kriteriysining isboti sonli qatorlar uchun bizga ma'lum bo'lgan Koshi kriteriysining isbotiga asoslandi, qaysiki, o'z navbatida, haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi natijasi edi.

3. Navbatdagi tasdiq tekis yaqinlashuvchi ketma-ketliklar nazariyasidagi asosiy teoremalaridan biri hisoblanadi.

10.1.2 - teorema. *Agar f_n funksional ketma-ketlik f funksiyaga E to'plamda tekis yaqinlashsa va f_n funksiyalar biror $c \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda f funksiya ham ana shu c nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isbot. Aytaylik, E to'plam nuqtalaridan tuzilgan $\{x_j\}$ ketma-ketlik c ga yaqinlashsin. Biz $f(x_j)$ sonli ketma-ketlikning $f(c)$ ga yaqinlashishini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$|f(x_j) - f(c)| \ \le \ |f(x_j) - f_n(x_j)| \ + \ |f_n(x_j) - f_n(c)| \ + \ |f_n(c) - f(c)| \qquad (10.1.4)$$

tengsizlikdan foydalanamiz. Funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashishiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topiladiki, $n \ge N$ bo'lganda barcha $x \in E$ lar uchun

$$|f_n(x) \ - \ f(x)| \ < \ \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Xususan, bu tengsizlik $x = x_j$ va $x = c$ lar uchun o'rinli. Shunday ekan, (10.1.4) da $n = N$ desak,

$$|f(x_j) - f(c)| \ < \ \varepsilon \ + \ |f_N(x_j) - f_N(c)| \ + \ \varepsilon \qquad (10.1.5)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Shartga ko'ra, f_N funksiya c nuqtada uzluksiz. Shuning uchun, (10.1.5) ning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchining limiti nolga teng. Demak,

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \ |f(x_j) - f(c)| \ \le 2\varepsilon.$$

Modulning manfiy emasligi va $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga asosan, bu tengsizlikning chap tomonidagi yuqori limit nolga teng. Bundan chiqdi, limit ham mavjud bo'lib, u nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{j\to\infty} \ |f(x_j) - f(c)| \ = \ 0.$$

Demak, f funksiya c nuqtada uzluksiz bo'lar ekan.

Q. E. D.

Natija. *Agar f_n funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, f ga shu kesmada tekiz yaqinlashsa, u holda f funksiya ham $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi.*

Eslatma. Eslatib o'tamizki, f funksiyaning $c \in E$ nuqtadagi uzluksizligi

$$\lim_{x\to c} f(x) \ = \ f(c)$$

tenglikning bajarilishini anglatar edi. Shunday ekan, 10.1.2 - teoremani quyidagi ko'rinishda ham aytish mumkin: tekis yaqinlashuvchi ketma-ketlik uchun

$$\lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x)$$

tenglik o'rinli.

Shuni aytish kerakki, agarda ketma-ketlik yaqinlashsayu, lekin bu yaqinlashish tekis bo'lmasa, yuqoridagi tenglik bajarilmasligi ham mumkin. Masalan,

$$f_n(x) \ = \ \frac{1}{1 + nx^2}, \quad -1 \le x \le 1,$$

ketma-ketlik uchun, ravshanki, quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1.$$

§ 10.2. Uzluksiz funksiyalar fazosi

1. Biz istalgan $[a,b]$ kesma uchun $C[a,b]$ simvol orqali shu kesmada uzluksiz bo'lgan barcha $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ funksiyalar to'plamini belgilagan edik (6.4 - § ga qarang). Istalgan ikki uzluksiz f va g funksiyalar va istalgan ikki haqiqiy λ va μ sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiyaning ham uzluksiz bo'lishi turgan gap. Shunday ekan, $C[a,b]$ ni vektor fazo (yoki chiziqli fazo) deb qarash mumkin.

Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga (3.5.5 - teorema) ko'ra, har qanday $f \in C[a,b]$ funksiya uchun quyidagi

$$\|f\| \;=\; \|f\|_{C[a,b]} \;=\; \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{10.2.1}$$

kattalikni aniqlash mumkin.

Ushbu kattalik o'z-o'zidan ko'rinib turgan navbatdagi xossalarga ega:

i) *istalgan $f \in C[a,b]$ funksiya uchun*

$$\|f\| \;\geq\; 0, \quad \textit{bunda agar} \quad \|f\| = 0 \quad \textit{bo'lsa,} \quad f \equiv 0 \quad \textit{bo'ladi};$$

ii) *istalgan $f \in C[a,b]$ funksiya va ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun*

$$\|\lambda f\| \;=\; |\lambda| \cdot \|f\|$$

tenglik o'rinli

iii) *istalgan ikki f va g uzluksiz funksiyalar uchun*

$$\|f+g\| \;\leq\; \|f\| \;+\; \|g\|$$

tengsizlik o'rinli.

Bu i)-iii) xossalarga ega bo'lgan kattalikka *norma* deyiladi.

Shunday qilib, (10.2.1) tenglik bilan aniqlangan kattalik $f \in C[a,b]$ funksiyaning normasidir. Bunda $C[a,b]$ vektor fazoning o'zini *normalashgan* fazo deb atashadi.

Navbatdagi ikki tasdiq norma va tekis yaqinlashish orasidagi bog'lanishni ko'rsatadi.

10.2.1 - tasdiq. *Agar $f \in C[a,b]$ va $\varepsilon > 0$ bo'lsa,*

$$|f(x)| \;<\; \varepsilon \tag{10.2.2}$$

tengsizlikning barcha $x \in [a,b]$ larda bajarilishi uchun

$$\|f\| \;<\; \varepsilon \tag{10.2.3}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Ravshanki, shartga ko'ra, $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi, va, Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga binoan, shu kesmaning biror x_0 nuqtasida o'zining maksimumiga erishadi, ya'ni

$$|f(x)| \;\leq\; |f(x_0)|, \quad x \in [a,b].$$

Shubhasiz, (10.2.2) tengsizlikning barcha $x \in [a,b]$ larda bajarilishi uchun

$$|f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shunday ekan, isbotni yakunlash uchun $|f(x_0)| = \|f\|$ ekanini ta'kidlash kifoya.

10.2.2 - tasdiq. *Berilgan $f_n \in C[a,b]$ ketma-ketlikning f funksiyaga $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashishi uchun*

$$\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{10.2.4}$$

munosabatning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot bevosita tekis yaqinlashish ta'rifi va 10.2.1 - tasdiqdan kelib chiqadi.

Agar (10.2.4) munosabat bajarilsa, (10.1.1) ketma-ketlik f funksiyaga $C[a,b]$ fazoning normasi bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Bundan chiqdi, $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining tekis yaqinlashishi $C[a,b]$ fazo normasi bo'yicha yaqinlashish bilan ustma-ust tushar ekan.

2. Uzluksiz funksiyalar ketma-ketliklari uchun, haqiqiy sonlar ketma-ketliklari singari, fundamental ketma-ketliklar yoki Koshi ketma-ketliklari tushunchalarini kiritish mumkin..

Ta'rif. *Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $n \geq N$ va $m \geq N$ bo'lganda berilgan $f_n \in C[a,b]$ ketma-ketlik uchun*

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon, \quad n \geq N,\ m \geq N, \tag{10.2.5}$$

*tengsizlik bajarilsa, bunday ketma-ketlik $C[a,b]$ fazo normasi bo'yicha **fundamental ketma-ketlik** yoki **Koshi ketma-ketligi** deyiladi*

Navbatdagi teorema $C[a,b]$ fazosining muhim tavsifini beradi.

10.2.1 - teorema (Koshi kriteriysi). *$[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligining shu kesmada tekis yaqinlashishi uchun uning $C[a,b]$ fazo normasi bo'yicha fundamental bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1) Agar $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashsa, u holda, 10.1.2 - teoremaga ko'ra, limit funksiya uzluksiz bo'ladi va, 10.2.2 - tasdiqqa asosan, (10.2.4) shart bajariladi. Shu sababli,

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Bundan, ravshanki, (10.2.5) shartning bajarilishi kelib chiqadi.

2) Endi (10.2.5) shart bajarilsin. Funksiya normasining (10.2.1) ta'rifiga ko'ra,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. U holda, 10.1.1 - teoremaga asosan, $f_n(x)$ ketma-ketlik $[a,b]$ kesmada $f(x)$ limit funksiyaga tekis yaqinlashadi.

Q. E. D.

Eslatma. Shunday qilib, $C[a,b]$ fazo normasi bo'yicha fundamental har qanday ketma-ketlik shu fazo normasi bo'yicha yaqinlashadi, ya'ni shu fazoga kiruvchi limitga ega. Bunday xossaga ega bo'lgan va normalashgan vektor fazo to'la deyiladi. Shu sababli, 10.2.1 - teorema $C[a, b]$ fazoning to'laligi haqidagi teorema ham deb ataladi.

§ 10.3. Funksional ketma-ketliklarni differensiallash va integrallash

1. Funksional ketma-ketliklarni integrallash.

10.3.1 - tasdiq. *$[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan istalgan g funksiya uchun*

$$\int_a^b |g(x)|\, dx \ \le \ \|g\| \cdot (b-a) \tag{10.3.1}$$

tengsizlik o'rinli.

Tasdiqni isbotlash uchun funksiya normasi ta'rifidan kelib chiqadigan quyidagi

$$|g(x)| \ \le \ \|g\|, \quad a \le x \le b,$$

tengsizlikni $[a, b]$ kesma bo'yicha integrallash yetarli.

10.3.1 - teorema. *Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz f_n funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga shu kesmada tekis yaqinlashsa, u holda*

$$F_n(x) \ = \ \int_a^x f_n(t)\, dt$$

boshlang'ich funksiyalar ketma-ketligi quyidagi

$$F(x) \ = \ \int_a^x f(t)\, dt$$

boshlang'ich funksiyaga $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

Isbot. Quyidagi

$$F_n(x) \ - \ F(x) \ = \ \int_a^x [f_n(t) - f(t)]\, dt$$

tenglikni yozib, 10.3.1 - tasdiqni $g(t) = f_n(t) - f(t)$ funksiyaga qo'llaymiz. U holda

$$|F_n(x) - F(x)| \le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, dt \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \le \|f_n - f\| \cdot (b-a).$$

Agar chap tomondan $x \in [a, b]$ bo'yicha maksimum olsak,

$$\|F_n - F\| \ \le \ \|f_n - f\| \cdot (b-a)$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Bunda o'ng tomon nolga intilganligi sababli chap tomon ham nolga intiladi. Bundan chiqdi, 10.1.2 - tasdiqqa asosan, F_n ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada F funksiyaga tekis yaqinlashar ekan.

Q. E. D.

Natija. *Agar* $[a, b]$ *kesmada uzluksiz* f_n *funksiyalar ketma-ketligi shu kesmada* f *funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda quyidagi*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{10.3.2}$$

tenglik bajariladi.

1 - eslatma. Ravshanki, yuqoridagi teorema kabi tasdiq quyidagi

$$\Phi_n(x) \;=\; \int\limits_c^x f_n(t)\,dt,$$

ko'rinishdagi boshlang'ich funksiyalar uchun ham o'rinli, bu yerda $c-$ berilgan $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi.

2 - eslatma. (10.3.2) tenglik $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi uchun quyidagi

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \tag{10.3.3}$$

tenglikning bajarilishini anglatadi.

Shuni aytish joizki, uzluksiz funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi bunday xossaga ega bo'lishi shart emas. Masalan,

$$f_n(x) \;=\; \frac{n^2x}{1+n^4x^4}, \quad 0\le x\le 1,$$

ketma-ketlik $[0, 1]$ kesmaning har bir nuqtasida nolga yaqinlashishi turgan gap, ammo $n\to\infty$ da

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \;=\; \int\limits_0^1 \frac{n^2x\,dx}{1+n^4x^4} \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^{n^2}\frac{dt}{1+t^2} \;=\; \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n^2 \to \frac{\pi}{4}$$

munosabatga ega bo'lamiz (bu yerda biz $t = n^2x^2$ almashtirishdan foydalandik).

2. Funksional ketma-ketliklarni differensiallash.

Agar f funksiya $[a, b]$ kesmaning har bir ichki nuqtasida differensiallanuvchi bo'lib, a nuqtada $f'(a)$ o'ng hosilaga va b nuqtada $f'(b)$ chap hosilaga ega bo'lsa va bundan tashqari, shunday aniqlangan $f'(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, biz bunday funksiyani $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensialllanuvchi deymiz.

10.3.2 - teorema. *Faraz qilaylik,* $f_n(x)$ *funksiyalar* $[a, b]$ *kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,* $\{f'_n(x)\}$ *hosilalar ketma-ketligi shu kesmada tekis yaqinlashsin.*

Agar $\{f_n(c)\}$ *sonli ketma-ketlik biror* $c\in[a, b]$ *da yaqinlashsa, u holda:*

(i) $f_n(x)$ *funksional ketma-ketlik biror* $f(x)$ *funksiyaga tekis yaqinlashadi;*

(ii) f *limit funksiya* $[a, b]$ *kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi;*

(iii) quyidagi

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \;=\; f'(x)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar $f_n'(x)$ ketma-ketlik $[a,b]$ kesmada biror $g(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa, 10.1.1 - teoremaga asosan, g limit funksiya shu kesmada uzluksiz bo'ladi.

Faraz qilaylik, $f_n(c)$ sonli ketma-ketlik A soniga yaqinlashsin. U holda, quyidagi

$$f_n(x) \;=\; f_n(c) \;+\; \int_c^x f_n'(t)\,dt$$

N'yuton-Lyebnits formulasida $n \to \infty$ deb limitga o'tsak, 10.3.1 - teoremaga ko'ra, o'ng tomondagi ketma-ketlik tekis yaqinlashadi va biz

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; A \;+\; \int_c^x g(t)\,dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, f_n ketma-ketlik

$$f(x) \;=\; A \;+\; \int_c^x g(t)\,dt$$

funksiyaga tekis yaqinlashar ekan.

Isbotni yakunlash uchun, 6.5.5 - teoremaning natijasiga ko'ra, quyidagi

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

tenglikning bajarilishini ta'kidlash yetarli.

Q. E. D.

§ 10.4. Dini teoremasi

Yuqorida keltirilgan misollarda ko'rganimizdek, uzluksiz funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining tekis yaqinlashishi shart emas. Shu sababli bunday ketma-ketliklar bir qator noqulayliklarni tug'diradi. Masalan, ularni, umuman aytganda, hadma-had integrallash mumkin emas. Ammo, agar uzluksiz funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi monoton bo'lsa, quyida isbotlanadigan Dini teoremasi ta'kidlashiga ko'ra, bunday ketma-ketlikning tekis yaqilashishi shart ekan.

10.4.1 - lemma. *Faraz qilaylik, $[a,b]$ kesmada uzluksiz g_n funksiyalar ketma-ketligi n bo'yicha monoton kamayib, shu kesmaning har bir nuqtasida nolga yaqinlashsin:*

$$g_n(x) \;\geq\; g_{n+1}(x) \;\to\; 0, \quad n\to\infty, \quad a \leq x \leq b. \tag{10.4.1}$$

U holda istalgan $x_n \in [a,b]$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_n) \;=\; 0 \tag{10.4.2}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (10.4.2) tenglik bajarilmasin deb faraz qilaylik. U holda, (10.4.1) shartga ko'ra $g_n(x)$ funksiyalar manfiy bo'lmaganligi sababli, shunday musbat $\varepsilon_0 > 0$ son va o'suvchi n_k nomerlar ketma-ketligi topiladiki,

$$g_{n_k}(x_{n_k}) \;\geq\; \varepsilon_0$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik chegaralangan va demak, Bolsano-Veyershtrass (2.4.2 - teorema) teoremasiga asosan, uning biror qism ketma-ketligi x_{m_j} yaqinlashuvchi bo'lib, bunda x_0 limit nuqta $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'ladi. Bundan tashqari, (10.4.1) kamayuvchilik shartiga ko'ra, istalgan n nomer uchun $m_j \geq n$ bo'lganda

$$g_n(x_{m_j}) \;\geq\; g_{m_j}(x_{m_j}) \;\geq\; \varepsilon_0$$

tengsizlik o'rinli.

Endi $m_j \to \infty$ deb limitga o'tib, $x_{m_j} \to x_0$ ni va g_n funksiyaning uzluksizligini hisobga olsak,

$$g_n(x_0) \;\geq \varepsilon_0 \;>\; 0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan tengsizlik (10.4.1) shartga ziddir, chunki bu shartga ko'ra, $n \to \infty$ da $g_n(x_0) \to 0$ bo'lishi lozim.

Q. E. D.

10.4.1 - teorema (U. Dini). *Faraz qilaylik, $[a, b]$ kesmada f_n uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi n bo'yicha monoton o'suvchi, ya'ni*

$$f_n(x) \;\leq\; f_{n+1}(x), \quad a \leq x \leq b,$$

bo'lib, shu kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashsin. Agar f limit funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda yaqinlashish shu kesmada tekis bo'ladi.

Isbot. 10.2.2 - tasdiqqa ko'ra, quyidagi

$$\|f_n - f\| \;\to\; 0, \quad n \to \infty, \tag{10.4.3}$$

munosabatni isbotlash yetarli.

Demak, agar $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ desak, $\|g_n\| \to 0$ munosabatni ko'rsatishimiz zarur. Shartga ko'ra, g_n funksiyalar uzluksiz bo'lib, ular manfiy emas. Shunday ekan, Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga (3.5.5 - teorema) asosan, har bir n nomer uchun shunday $x_n \in [a, b]$ nuqta topiladiki,

$$g_n(x_n) \;=\; \|g_n\|$$

tenglik bajariladi. Boshqa tomondan, g_n funksiyalar 10.4.1 - lemmaning barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli $g_n(x_n) \to 0$. Bu esa (10.4.3) shartning o'zi.

Q. E. D.

§ 10.5. Askoli-Arsela teoremasi

Ta'rif. *Agar shunday $M > 0$ o'zgarmas topilib, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik uchun*

$$|f_n(x)| \;\leq\; M, \quad a \leq x \leq b, \quad n \geq 1, \tag{10.5.1}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, bunday ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada tekis chegaralangan deyiladi.

Bol'sano-Veyershtrassning taniqli teoremasiga ko'ra, har qanday chegaralangan sonli ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin. Funksional ketma-ketliklar uchun mos tasdiq, umuman aytganda, o'rinli emas, chunki biror kesmada chegaralangan shunday funksional ketma-ketlik ko'rsatish mumkinki, undan shu kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Lekin shunga qaramasdan, biz navbatdagi tasdiqda, Bol'sano-Veyershtrass teoremasini qo'llab, har qanday chegaralangan funksional ketma-ketlikdan istalgan sanoqli to'plamda yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatamiz.

10.5.1 - tasdiq. *Faraz qilaylik, $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy sanoqli E qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda $[a, b]$ kesmada tekis chegaralangan istalgan funksional ketma-ketlikdan E to'plamning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin.*

Isbot. Shartga ko'ra, $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada tekis chegaralangan bo'lib, $E = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ berilgan sanoqli to'plam bo'lsin.

Birinchi qadamda $\{f_n(x_1)\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlik chegaralangan va Bol'sano-Veyershtrass teoremasiga binoan, undan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin. Ushbu qism ketma-ketlikni $\{f_{1n}(x_1)\}$ deb belgilaymiz.

Ikkinchi qadamda $\{f_{1n}(x_2)\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlik ham chegaralangan va yana Bol'sano-Veyershtrass teoremasiga binoan undan yaqinlashuvchi $\{f_{2n}(x_2)\}$ sonli ketma-ketli ajratish mumkin. Ravshanki, $\{f_{2n}(x)\}$ funksional ketma-ketlik har ikki $x = x_1$ va $x = x_2$ nuqtalarda yaqinlashadi.

So'ngra uchinchi qadamda $\{f_{2n}(x_3)\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlik chegaralangani sababli undan yaqinlashuvchu $\{f_{3n}(x_3)\}$ sonli ketma-ketlik ajratish mumkin. Shubhasiz, $\{f_{3n}(x)\}$ funksional ketma-ketlik uchta $x = x_1,\ x = x_2$ va $x = x_3$ nuqtada yaqinlashadi.

Bu jarayonni davom ettirib, k-qadamda k ta $x_1, x_2, ..., x_k$ nuqtalarda yaqinlashuvchi $f_{kn}(x)$ ketma-ketlikni olamiz.

Endi

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ f_{33}(x),\ ...$$

ko'rinishdagi $\{f_{nn}(x)\}$ diagonal ketma-ketlikni qaraymiz.

Ravshanki, istalgan natural k uchun $n \geq k$ bo'lganda $\{f_{nn}(x)\}$ diagonal ketma-ketlikning barcha elementlari $\{f_{kn}(x)\}$ ketma-ketlikning elementlari bo'ladi va shuning uchun diagonal ketma-ketlik $x_1, x_2, ..., x_k$ nuqtalarda yaqinlashadi. Bundan, k ning ixtiyoriyligiga ko'ra, diagonal ketma-ketlikni E to'plamning barcha nuqtalarida yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, $\{f_{nn}(x)\}$ qidirilayotgan ketma-ketlik ekan.

Q. E. D.

Shuni aytish kerakki, berilgan kesmada tekis yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish masalasi nisbatan ancha murakkabdir. Biror kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi bo'lib, ammo uning hech qanday qism ketma-ketligi shu kesmada tekis yaqinlashmaydigan funksional ketma-ketlikka misol keltirish qiyin emas.

10.5.1 - misol. Aytaylik, $\alpha_n > 0$ sonli ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lsin, ya'ni $n \to \infty$ da $\alpha_n \to 0$ bo'lsin. Manfiy bo'lmagan va 1 dan kichik quyidagi

$$f_n(x) \ = \ \frac{\alpha_n}{\alpha_n + x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{10.5.2}$$

funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz.

Ravshanki, bu ketma-ketlik $[-1,1]$ kesmaning har bir nuqtasida

$$f(x) \; = \; \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \neq 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases} \tag{10.5.3}$$

funksiyaga yaqinlashadi.

Ushbu funksiya uzilishga ega bo'lganligi sababli, yaqinlashish $[-1,1]$ kesmada tekis bo'la olmaydi. O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki, (10.5.2) ketma-ketlikning istalgan qism ketma-ketligi ham xuddi shu ko'rinishga ega.

Tekis yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikning mavjudlik masalasini o'rganish maqsadida tekis darajali uzluksizlik deb ataluvchi muhim tushunchani kiritamiz.

Ta'rif. $[a,b]$ *kesmada uzluksiz* $\{f_n(x)\}$ *funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *olganda ham shunday* $\delta > 0$ *topilsaki, shu kesmadan olingan va* $|x-y| < \delta$ *shartni qanoatlantiruvchi istalgan ikki* x *va* y *nuqtalar uchun*

$$|f_n(x) - f_n(y)| \; < \; \varepsilon, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{10.5.4}$$

tengsizlik bajarilsa, $\{f_n(x)\}$ *funksional ketma-ketlik tekis darajali uzluksiz deyiladi.*

Shunday qilib, tekis darajali uzluksizlik Koshi bo'yicha uzluksizlik ta'rifidagi $\delta > 0$ sonni barcha $f_n(x)$ funksiyalar uchun bir xilda olish mumkinligini anglatadi.

10.5.1 - teorema (Askoli, Arsela)(G. Ascoli, C. Arzelá). *Berilgan* $[a,b]$ *kesmada tekis chegaralangan va tekis darajali uzluksiz bo'lgan har qanday funksiyalar ketma-ketligidan shu kesmada tekis yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik $[a,b]$ kesmada tekis chegaralangan va tekis darajali uzluksiz bo'lsin.

Ma'lumki (1.6.1 - teorema), $[a,b]$ kesmada yotuvchi barcha ratsional nuqtalar to'plami sanoqli. Shunday ekan, 10.5.1 - tasdiqqa asosan, tekis chegaralangan $f_n(x)$ ketma-ketlikdan $[a,b]$ kesmadagi barcha ratsional nuqtalarda yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin. Belgilashlarni soddalashtirish maqsadida ajratilgan qism ketma-ketlikni yana $\{f_n(x)\}$ simvol orqali belgilab, uning $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashishini isbotlaymiz.

Tekis darajali uzluksizlik ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham biz shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ni ko'rsatishimiz mumkinki, qaralayotgan kesmadan olingan va $|x-y| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x va y nuqtalar uchun

$$|f_n(x) - f_n(y)| \; < \; \frac{\varepsilon}{3}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{10.5.5}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Ko'rsatilgan $\delta > 0$ uchun biror natural $m > (b-a)/\delta$ sonini tayinlaymiz va $[a,b]$ kesmani m ta teng bo'lakka bo'lib, har bir qismiy kesma (uzunligi δ dan kichik bo'ladi) ichidan biror ratsional son olamiz. Natijada m ta $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ ratsional sonlarga ega bo'lamiz. .

Faraz qilaylik, x berilgan $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, ξ_k bu nuqtaga yuqorida tanlangan m ta ratsional nuqtalardan eng yaqini bo'lsin. U holda, ravshanki, $|x-\xi_k| < \delta$ bo'lib, (10.5.5) ga ko'ra, istalgan natural n va p lar uchun

$$\begin{gathered} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \; \leq \\ \leq \; |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi_k)| \; + \; |f_{n+p}(\xi_k) - f_n(\xi_k)| \; + \; |f_n(\xi_k) - f_n(x)| \; < \\ < \; |f_{n+p}(\xi_k) - f_n(\xi_k)| \; + \; \frac{2}{3} \cdot \varepsilon \end{gathered} \tag{10.5.6}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Belgilashimizga ko'ra, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik m ta $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ nuqtalarda yaqinlashadi. Bundan chiqdi, $N = N(\varepsilon)$ nomerni shunday tanlashimiz mumkinki, $n \geq N$ bo'lganda istalgan natural p uchun bir vaqtning o'zida m ta

$$|f_{n+p}(\xi_k) - f_n(\xi_k)| \ < \ \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{10.5.7}$$

tengsizlik bajariladi.

Endi (10.5.6) tengsizlikning o'ng tarifida (10.5.7) bahodan foydalansak, $n \geq N$ bo'lganda istalgan natural p uchun

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \ < \ \varepsilon, \quad a \leq x \leq b,$$

bahoni olamiz.

Koshi kriteriysiga binoan, hosil bo'lgan baho $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlikning $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashishini anglatadi.

Q. E. D.

§ 10.6. Polinomlar bilan tekis yaqinlashtirish

1. Delta-simon ketma-ketliklar. Kvant mexanikasi masalalarini yechish maqsadida, XX asrning yigirmanchi yillarida ingliz fizigi Pol Dirak «delta-funksiya» deb ataluvchi va $\delta(x)$ simvoli orqali belgilanuvchi funksiyani kiritdi. Dirak bu funksiyani $x = 0$ nuqtada $+\infty$ qiymatni, bu nuqtadan tashqarida esa, nol qiymatni qabul qilsin va, bundan tashqari, quyidagi

$$\int_{-1}^{1} \delta(x)\, dx \ = \ 1$$

tenglikni qanoatlantirsin deb aniqladi.

Dirakning tasdiqlashicha, bunday tanlash natijasida istalgan uzluksiz f funksiya va ixtiyoriy $a \in \mathbf{R}$ nuqta uchun

$$\int_{-1}^{1} \delta(x) f(x + a)\, dx \ = \ f(a) \tag{10.6.1}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ravshanki, Dirakning delta-funksiyasi oddiy ma'noda funksiya bo'la olmaydi. Shu sababli, kvant mexanikasi masalalarini yechishdagi matematik izlanishlarda bu funksiyadan foydalanmaslikka harakat qilinar edi (bu haqida batafsil ma'lumotni, masalan, Jon fon Neymanning 1932 yilda chop etilgan «Kvant mexanikasining matematik asoslari» deb ataladigan monografiyasida topish mumkin). Ammo, qizig'i shundaki, delta-funksiya yordamida olingan natijalar to'g'ri bo'lib chiqa boshladi (bu fizik eksperimentlarda hamda keyingi matematik ma'nodagi «qat'iy» isbotlarda tasdiqlandi). Natijada matematiklarning bu funksiyaga bo'lgan qiziqishi yanada ortib bordi.

Delta-funksiyaga matematik ravishda qat'iy ta'rif berish usullaridan biri «delta-simon» funksiyalar ketma-ketligini kiritishdan iboratdir.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, $[-1, 1]$ kesmada aniqlangan $\delta_n(x)$ ketma-ketlik quyidagi uchta shartni qanoatlantirsin:*

i) *ketma-ketlikning har bir funksiyasi manfiy bo'lmasin:*

$$\delta_n(x) \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

ii) *ketma-ketlikning har bir funksiyasi* $[-1,1]$ *kesmada integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_{-1}^{1} \delta_n(x)\,dx = 1$$

tenglik o'rinli bo'lsin;

iii) $0 < \alpha < 1$ *shartni qanoatlantiruvchi istalgan* α *uchun* $\delta_n(x)$ *ketma-ketlik* $\{x : \alpha \le |x| \le 1\}$ *to'plamda nolga tekis yaqinlashsin.*

U holda bunday ketma-ketlik delta-simon ketma-ketlik deyiladi.

Navbatdagi tasdiqda biz ixtiyoriy delta-simon ketma-ketlik uchun biror ma'noda limitga o'tganda (10.6.1) tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz. Odatda $C(\mathbf{R})$ simvoli orqali sonlar o'qida uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plami belgilanishini qayd etamiz.

10.6.1 - teorema. *Agar* $\{\delta_n(x)\}$ $-$ *delta-simon ketma-ketlik bo'lsa, istalgan* $f \in C(\boldsymbol{R})$ *funksiya uchun*

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} \delta_n(t) f(t+x)\,dt \tag{10.6.2}$$

ketma-ketlik sonlar o'qining har qanday kesmasida f *funksiyaga tekis yaqinlashadi.*

Isbot. Ravshanki, ii) xossaga ko'ra,

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} \delta_n(t)[f(t+x) - f(x)]\,dt.$$

Shu sababli, istalgan $\alpha > 0$ uchun

$$f_n(x) - f(x) =$$

$$= \int_{-1}^{-\alpha} \delta_n(t)[f(t+x) - f(x)]\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta_n(t)[f(t+x) - f(x)]\,dt + \int_{\alpha}^{1} \delta_n(t)[f(t+x) - f(x)]\,dt.$$

Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga asosan, $C(\mathbf{R})$ ga tegishli har qanday funksiya ixtiyoriy kesmada chegaralangandir. Shunday ekan, iii) xossa va 10.3.1 - teoremaga ko'ra, oxirgi tenglikdagi birinchi va uchinchi integrallar $n \to \infty$ da ixtiyoriy kesmada x bo'yicha tekis ravishda nolga intiladi. Demak, har qanday $[a,b]$ kesma uchun $x \in [a,b]$ bo'yicha tekis ravishda quyidagi

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta_n(t)[f(t+x) - f(x)]\,dt + o(1) \tag{10.6.3}$$

baho o'rinli bo'ladi.

Ma'lumki, f funksiya uzluksiz bo'lgani sababli, u istalgan kesmada tekis uzluksiz bo'ladi (6.5.2 - teorema). Bundan chiqdi, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\alpha > 0$ topiladiki,

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon, \quad a \le x \le b, \quad |t| < \alpha,$$

tengsizlik bajariladi.

Shunday ekan, (10.6.3) va ii) shartga asosan,

$$|f_n(x) - f(x)| \le \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \delta_n(t)|f(t+x) - f(x)|\,dt + o(1) \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \delta_n(t)\,dt + o(1) \le \varepsilon + o(1).$$

Ya'ni

$$\|f_n - f\|_{C[a,b]} \le \varepsilon + o(1)$$

va, shuning uchun,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n - f\|_{C[a,b]} \le \varepsilon.$$

Bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = 0.$$

Demak, 10.1.2 - tasdiqqa asosan, (10.6.2) ketma-ketlik f funksiyaga $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashar ekan.

Q. E. D.

Eslatma. Agar delta-funksiya deb delta-simon ketma-ketlikni olsak, u holda (10.6.1) tenglikni quyidagicha tushinishimiz mumkin:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \delta_n(x) f(x+a)\,dx = f(a).$$

Shuni qayd etish joizki, hozirgi kunda (10.6.1) tenglikni boshqacha ma'noda asoslash kengroq tarqalgan. Bu asoslashga ko'ra, (10.6.1) tenglikning chap tomonidagi integral uni o'ng tomonidagi ifodaning simvolik ravishdagi belgilanishi deb qabul qilinadi.

10.6.1 - misol. Quyidagi

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{agar} \quad |x| < 1/n \quad \text{bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar} \quad |x| \ge 1/n \quad \text{bo'lsa}, \end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligi delta-simondir.

Haqiqatan, bu ketma-ketlikning i)−iii) shartlarni qanoatlantirishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Demak, 10.6.1 - teoremaga ko'ra, istalgan uzluksiz f funksiya uchun sonlar o'qining har qanday kesmasida tekis ravishda quyidagi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int\limits_{-1/n}^{1/n} f(t+x)\,dt = f(x) \tag{10.6.4}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

10.6.2 - misol. Agar A_n o'zgarmasni

$$\frac{1}{A_n} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx \tag{10.6.5}$$

shartdan tanlab olsak,

$$K_n(x) = A_n(1 - x^2)^n, \quad -1 \le x \le 1, \tag{10.6.6}$$

ketma-ketlik delta-simon bo'ladi.

Haqiqatan, i) va ii) shartlarning bajarilishi shubhasiz. Bundan chiqdi, iii) shartni tekshirish kifoya. Buning uchun

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx = 2 \int_{0}^{1} (1 - x^2)^n \, dx \ge 2 \int_{0}^{1} (1 - x)^n \, dx = \frac{2}{(n+1)} \ge \frac{1}{n}$$

ekanini qayd etamiz.

Shu sababli, $0 < \alpha < 1$ bo'lganda $\alpha \le |x| \le 1$ to'plamda x bo'yicha tekis ravishda quyidagi

$$K_n(x) \le n(1 - x^2)^n \le n(1 - \alpha^2)^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

baho o'rinlidir. Bundan iii) shartning bajarilishi bevosita kelib chiqadi.

10.6.3 - misol. Agar B_n o'zgarmasni

$$\frac{1}{B_n} = \int_{-1}^{1} \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{2n} dx \tag{10.6.7}$$

shartdan tanlab olsak,

$$T_n(x) = B_n \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{2n} \tag{10.6.8}$$

ketma-ketlik delta-simon bo'ladi.

Yana faqat iii) shartning bajarilishini tekshirish yetarli, chunki i) va ii) shartlarning o'rinli ekanligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Integral ostidagi funksiyaning juftligini e'tiborga olib, $t = \cos \dfrac{\pi x}{2}$ almashtirish bajarsak,

$$\int_{-1}^{1} \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{2n} dx = 2 \int_{0}^{1} \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{2n} dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{t^{2n} \, dt}{\sqrt{1 - t^2}} \ge$$

$$\ge \frac{4}{\pi} \int_{0}^{1} t^{2n} \, dt = \frac{4}{\pi(2n+1)}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Shuning uchun

$$B_n = O(n).$$

Endi $(0, 1)$ intervaldan olingan ixtiyoriy α uchun

$$q = \cos \frac{\pi \alpha}{2}$$

deb belgilaymiz. U holda $\alpha \le |x| \le 1$ lar uchun $\cos\dfrac{\pi x}{2} \le q$ bo'ladi va $0 < q < 1$ bo'lgani sababli

$$K_n(x) \ \le B_n \cdot q^{2n} \ = \ O(n) q^{2n} \ \to 0, \quad n \to \infty.$$

Bundan chiqdi, iii) shart ham bajarilar ekan. Demak, (10.6.8) delta-simon ketma-ketlik ekani isbotlandi.

Shunday ekan, 10.6.1 - teoremaga asosan, istalgan uzluksiz f funksiya uchun to'g'ri chiziqning istalgan kesmasida tekis ravishda quyidagi

$$\lim_{n\to\infty} B_n \int_{-1}^{1} \left(\cos^2\frac{\pi t}{2}\right)^n f(t+x)\,dt \ = \ f(x) \tag{10.6.9}$$

tenglik bajariladi.

Yuqoridagi misollarda f sifatida butun sonlar o'qida uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiyalar qaraldi. Agar bu funksiyalar qo'shimcha xossalarga ega deb faraz qilsak, ularga tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketliklar uchun ancha qulay integral ko'rinishlar olishimiz mumkin.

10.6.4 - misol. Faraz qilaylik, f butun sonlar o'qida uzluksiz funksiya bo'lib, A_n (10.6.5) shartdan tanlab olingan o'zgarmas bo'lsin. Quyidagi

$$P_n(x) \ = \ A_n \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \ f(x+t)\,dt \tag{10.6.10}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Agar (10.6.6) delta-simon ketma-ketlikka 10.6.1 - teoremani qo'llasak, $\{P_n(x)\}$ ketma-ketlikning $f(x)$ funksiyaga sonlar o'qining har qanday kesmasida tekis yaqinlashishiga ega bo'lamiz.

Endi f funksiya $[0,1]$ kesmadan tashqarida nolga teng deylik. U holda $y = x + t$ almashtirish bajarsak,

$$P_n(x) \ = \ A_n \int_{-1+x}^{1+x} [1-(y-x)^2]^n \ f(y)\,dy$$

tenglik hosil bo'ladi.

Ravshanki, agar $0 \le x \le 1$ bo'lsa, $[0,1]$ kesma uzunligi 2 ga teng bo'lgan $[-1+x, 1+x]$ kesma ichida yotadi va shuning uchun, f funksiyaga hozirgina qo'ygan talabimizga ko'ra, integrallash aslida faqat $[0,1]$ kesma bo'yicha olib boriladi. Shu sababli, $0 \le x \le 1$ uchun quyidagi

$$P_n(x) \ = \ A_n \int_{0}^{1} [1-(y-x)^2]^n \ f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1, \tag{10.6.11}$$

integral ko'rinish o'rinli.

Bu formuladan $P_n(x)$ funksiyaning $0 \le x \le 1$ kesmada algebraik ko'phad bilan ustma-ust tushishi bevosita ko'rinib turibdi.

Davriy funksiyalar uchun integral ko'rinish alohida ahamiyatga ega.

10.6.5 - misol. Agar B_n o'zgarmas (10.6.7) shartdan tanlab olingan bo'lsa, quyidagi

$$T_n(x) \;=\; \frac{B_n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos y}{2}\right)^n f(y+x)\,dy \tag{10.6.12}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ravshanki, bu ketma-ketlik $y = \pi t$ almashtirish yordamida (10.6.9) integralning chap tomonidagi ifodaga keladi.

Agar (10.6.12) integralda $t = y + x$ almashtirishni bajarsak,

$$T_n(x) \;=\; \frac{B_n}{2^n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x}[1+\cos(t-x)]^n f(t)\,dy \tag{10.6.13}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi f funksiya 2π davrga ega bo'lgan davriy funksiya bo'lsin, deylik. U holda, navbatdagi integralda integrallash sohasini 2π ga surib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\int\limits_{\pi}^{\pi+x}[1+\cos(t-x)]^n f(t)\,dy = \int\limits_{-\pi}^{-\pi+x}[1+\cos(t-x)]^n f(t)\,dy. \tag{10.6.14}$$

Oxirgi ikki (10.6.13) va (10.6.14) tengliklarni solishtirib, (10.6.7) ketma-ketlik uchun muhim bo'lgan quyidagi

$$T_n(x) \;=\; \frac{B_n}{2^n}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[1+\cos(t-x)]^n f(t)\,dy \tag{10.6.15}$$

integral ko'rinishni hosil qilamiz.

Shunday qilib, 2π davrga ega bo'lgan ixtiyoriy f uzluksiz davriy funksiya uchun (10.6.15) ketma-ketlik sonlar o'qining har qanday kesmasida f funksiyaga tekis yaqinalshar ekan.

2. Veyershtrass teoremasi. Ushbu paragrafning asosiy maqsadi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday funksiyani algebraik polinomlar bilan tekis yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatishdan iboratdir.

Agar $x = (1-t)a + tb$ deb belgilab, quyidagi

$$g(t) \;=\; f[(1-t)a+tb] \;=\; f(x)$$

funksiyani qarasak, biz faqat $[0, 1]$ kesmada berilgan uzluksiz funksiyalarni o'rganish yetarli ekaniga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan, $f(x) = g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ bo'lgani sababli, agar $Q(t)$ polinom $[0, 1]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $g(t)$ funksiyaga t bo'yicha tekis yaqin bo'lsa, u holda

$$P(x) \;=\; Q(t) \;=\; Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

polinom $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ fuksiyaga x bo'yicha tekis yaqin bo'ladi.

10.6.2 - teorema (Veyershtrass). $[0, 1]$ *kesmada uzluksiz har qanday* $f(x)$ *funksiya uchun unga* $[0, 1]$ *kesmada tekis yaqinlashuvchi* $P_n(x)$ *algebraik polinomlar ketma-ketligi mavjud.*

Isbot. 1) Avval $f(0) = f(1) = 0$ bo'lsin deylik. U holda f funksiyani $[0,1]$ kesmadan tashqarida nol deb, butun sonlar o'qiga davom ettirish mumkin. Bunday aniqlangan funksiyaning butun sonlar o'qida uzluksiz bo'lishi turgan gap.

Endi (10.6.11) tenglik bilan aniqlangan

$$P_n(x) \;=\; A_n \int_0^1 [1-(y-x)^2]^n \; f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

polinomlarni qaraymiz.

Ravshanki, bu polinomlar ketma-ketligi, 10.6.1 - teoremaga binoan, f funksiyaga $[0,1]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

2) Agar f funksiya $[0,1]$ kesmada aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$\widetilde{f}(x) \;=\; f(x) \;-\; [(1-x)f(0) \;+\; xf(1)]$$

deb belgilab, biz masalani birinchi holga keltiramiz, chunki $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(1) = 0$ hamda f va $\widetilde{f}$ funksiyalar o'zaro birinchi tartibli polinomga farq qiladi. Shubhasiz, agar $[0,1]$ kesmada $\widetilde{f}$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi polinomlar ketma-ketligi mavjud bo'lsa, u holda berilgan f funksiya uchun ham tekis yaqinlashuvchi polinomlar ketma-ketligi mavjud bo'ladi.

Q. E. D.

Odatdagi (algebraik) polinomlardan tashqari *trigonometrik polinomlar* deb ataluvchi quyidagi

$$T(x) \;=\; c_0 + \sum_{k=1}^{n} \,(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{10.6.16}$$

ko'rinishga ega bo'lgan funksiyalar muhim ahamiyatga ega, bu yerdagi a_k, b_k va c_0 haqiqiy sonlar trigonometrik polinomlarning koeffitsientlari deb ataladi.

Misol sifatida

$$T_1(x) = 1 + 2\cos x + 3\sin 5x, \quad T_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 99x + \frac{\pi}{2}\sin 100x$$

polinomlarni olishimiz mumkin.

Trigonometrik polinomlarning chiziqli kombinatsiyasi, shubhasiz, trigonometrik polinom bo'ladi. Trigonometrik polinomlarning ko'paytmasi ham trigonometrik polinom bo'lishini tekshirish qiyin emas. Buning uchun, agar n va m sonlar natural bo'lsa, quyidagi

$$\cos nx \cdot \cos mx, \quad \cos nx \cdot \sin mx, \quad \sin nx \cdot \sin mx$$

ko'rinishga ega bo'lgan ko'paytma trigonometrik polinom bo'lishini qayd etish yetarli.

Ravshanki, har bir trigonometrik polinom 2π davrga ega bo'lgan uzlukisz davriy funksiya bo'ladi. Shunday ekan, trigonometrik polinomlarning ketma-ketligi faqat 2π davrga ega bo'lgan uzluksiz davriy funksiyaga tekis yaqinlashishi mumkin. Veyershtrss teoremasining navbatdagi ko'rinishi haqiqatan har bir 2π davrga ega bo'lgan uzluksiz davriy funksiyani trigonometrik polinomlar bilan tekis yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatadi.

10.6.3 - teorema (Veyershtrss). *$[-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz va $f(-\pi) = f(\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday f funksiya uchun $[-\pi, \pi]$ kesmada $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi $T_n(x)$ trigonometrik polinomlar ketma-ketligi mavjud.*

Isbot. Agar $m = \pm 1, \pm 2, ...$uchun berilgan f funksiyani istalgan $[2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi]$ kesmaga $f(x) = f(x - 2m\pi)$ tenglik orqali davom ettirsak, $f(-\pi) = f(\pi)$ shartga ko'ra, butun sonlar o'qida uzluksiz va 2π davrga ega bo'lgan funksiyani olamiz.

Shunday ekan, (10.6.15) tenglik bilan aniqlangan

$$T_n(x) \;=\; \frac{B_n}{2^n} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos(t - x)]^n f(t)\, dy$$

ketma-ketlik f funksiyaga $[-\pi, \pi]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

Endi har bir t uchun x o'zgaruvchining quyidagi

$$[1 + \cos(t - x)]^n$$

funksiyasi, yuqorida qayd etilganga ko'ra, (koeffitsientlari t ga bog'liq bo'lgan) trigonometrik polinom bo'lib, natijada $T_n(x)$ funksiyalar ham trigonometrik polinom ekanini qayd etish yetarli.

Q. E. D.

§ 10.7. Funksional qatorlar

1. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi. Faraz qilaylik, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik bitta $E \subset \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan funksiyalardan iborat bo'lsin. Ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{10.7.1}$$

formal yig'indi *funksional qator* deyiladi. Dastlabki n ta hadning yig'indisi, ya'ni

$$S_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \tag{10.7.2}$$

qatorning n-xususiy yig'indisi deb ataladi. Har bir tayinlangan $x \in E$ son uchun (10.7.1) sonli qatordir. Agar bu sonli qator biror S songa yaqinlashsa, u holda funksional qator x nuqtada yaqinlashadi va uning yig'indisi S ga teng deyiladi. Agarda funksional qator har bir $x \in E$ nuqtada yaqinlashsa, u holda uning yig'indisi E to'plamda aniqlangan biror $S(x)$ funksiya bo'ladi. Shunday qilib, (10.7.1) funksional qatorning $S(x)$ funksiyaga yaqinlashishi (10.7.2) funksional ketma-ketlikning shu funksiyaga yaqinlashishini anglatadi.

Agar (10.7.2) funksional ketma-ketlik E to'plamda $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa, (10.7.1) funksional qator shu funksiyaga E to'plamda *tekis yaqinlashadi* deyishadi. Bunday ta'rifdan so'ng, tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning barcha xossalarini tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketliklar xossalaridan keltirib chiqarish mumkin.

10.7.1 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} \tag{10.7.3}$$

funksional qator $[0, 1]$ kesmada $\ln(1+x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan, Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasiga ko'ra, $[0, 1]$ kesmadan olingan ixtiyoriy x va istalgan n nomer uchun

$0 < \xi < 1$ intervalda shunday ξ nuqta topiladiki,

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \;+\; \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

tenglik bajariladi.

Shu sababli, (10.7.3) qator xususiy yig'indisini $S_n(x)$ simvol orqali belgilasak,

$$|\ln(1+x) \;-\; S_n(x)| \;\le\; \frac{1}{n+1}, \quad 0 \le x \le 1, \tag{10.7.4}$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bundan esa, o'z navbatida, (10.7.3) qatorning $[0,1]$ kesmada tekis yaqinlashishi va

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}, \quad 0 \le x \le 1, \tag{10.7.5}$$

tenglikning bajarilishi kelib chiqadi.

Funksional qatorlarning tekis yaqinlashishi haqidagi eng muhim tasdiqlardan biri Koshi kriteriysidir.

10.7.1 - teorema (Koshi kriteriysi). *(10.7.1) funksional qatorning E to'plamda tekis yaqinlashishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilib, $n \ge N$ va istalgan natural p uchun barcha $x \in E$ larda quyidagi:*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \;<\; \varepsilon, \quad n \ge N, \quad x \in E,$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ushbu tasdiq tekis yaqinlashishshning ta'rifi va funksional ketma-ketliklarning yaqinlashishi uchun Koshi kriteriysidan bevosita kelib chiqadi (10.1.1 - teorema).

Navbatdagi tasdiq tekis yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi limitining uzluksizligi haqidagi 10.1.2 - teoremaga o'xshashdir.

10.7.2 - teorema. *Agar (10.7.1) funksional qator E to'plamda $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashib, $u_n(x)$ funksiyalar biror $c \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $S(x)$ funksiya ham shu c nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Endigi tasdiq esa, 10.3.1 - teoremaning funksional qatorlar uchun ko'chirilgan holidir.

10.7.3-Теорема *Agar (10.7.1) funksional qator $[a,b]$ kesmada $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashib, $u_n(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lsa, u holda ularning boshlang'ich funksiyalaridan tuzilgan qator $[a,b]$ kesmada S funksiyaning boshlang'ich funksiyasiga tekis yaqinlashadi:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k(t)\,dt \;=\; \int_a^x S(t)\,dt. \tag{10.7.6}$$

Masalan,

$$\int_0^x \ln(1+t)\,dt \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_0^x \frac{t^k}{k}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Natija. *Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz $u_n(x)$ funksiyalardan tuzilgan qator shu kesmada $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx \;=\; \int_a^b S(x)\,dx \tag{10.7.7}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Galdagi teorema 10.3.2 - teoremaga o'xshashdir.

10.7.4 - teorema. *Faraz qilaylik, $u_n(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, hosilalardan tusilgan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashsin.

Agar biror $c \in [a,b]$ uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(c)$$

sonli qator yaqinlashsa, u holda (10.7.1) funksional qator $[a,b]$ kesmada differensiallanuvch biror $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi va

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \;=\; S'(x) \tag{10.7.8}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqorida funksional ketma-ketliklar uchun isbotlangan Dini teoremasi (10.4.1 - teorema) funksional qatorlar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi. Ravshanki, funksional qator xususiy yig'indilari ketma-ketligining o'sishi qator hadlarining manfiy emasligini anglatadi.

10.7.5 - teorema (U. Dini). *Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va manfiy bo'lmagan funksiyalardan tuzilgan qator shu kesmaning har bir nuqtasida uzluksiz funksiyaga yaqinlashsa, u holda bu yaqinlashish $[a,b]$ kesmada tekis bo'ladi.*

Ushbu bandning nihoyasida funksional qatorlarning tekis yaqinlashishi uchun shunday yetarli shartni keltiramizki, bu shartning ketma-ketliklar uchun o'xshashi yoq.

10.7.6 - teorema (Veyershtrass alomati). *Faraz qilaylik, $u_n(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada chegaralangan bo'lib,*

$$|u_n(x)| \;\le c_n \tag{10.7.9}$$

shartni qanoatlantirsin. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \; c_n \tag{10.7.10}$$

sonli qator yaqinlashsa, u holda (10.7.1) funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

Isbot. Agar (10.7.9) bahoni hisobga olsak, istalgan n va p natural sonlar uchun $x \in [a,b]$ bo'yicha tekis ravishda

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \; u_k(x)\right| \;\le\; \sum_{k=n+1}^{n+p} \; c_k \tag{10.7.11}$$

tengsizlik bajarilishini ko'ramiz.

Shartga ko'ra (10.7.10) sonli qator yaqinlashadi. Bundan chiqdi, Koshi kriteriysiga (10.1.1 - teorema) asosan, (10.7.11) ning o'ng tomonini $n \geq N$ bo'lganda ε dan kichik qilish mumkin. Bu esa, 10.7.1 - teoremaga ko'ra, (10.7.1) qatorning tekis yaqinlashishini anglatadi.

Q. E. D.

Natija. *Agar* $u_n \in C[a,b]$ *bo'lib,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{C[a,b]}$$

sonli qator yaqinlashsa, u holda (10.7.1) funksional qator $[a,b]$ *kesmada tekis yaqinlashadi.*

Haqiqatan, bu holda $c_n = \|u_n\|$ deb, (10.7.9) bahoning o'rinli ekanini qayd etish yetarli.

Agar (10.7.9) baho o'rinli bo'lsa, (10.7.1) funksional qator (10.7.10) sonli qator bilan *majorirlanadi* yoki (10.7.10) sonli qator (10.7.1) funksional qator uchun *majorant* qator bo'ladi deyiladi.

1 - eslatma. 10.7.6 - teorema ko'pincha quyidagi ko'rinishda keltiriladi:

biror kesmada yaqinlashuvchi sonli qator bilan majorirlangan funksional qator shu kesmada tekis yaqinlashadi.

2 - eslatma. Veyershtrass alomati tekis yaqinlashish uchun yetarli shart bo'lib, Koshi kriteriysidan o'laroq, zaruriy shart bo'la olmaydi. Haqiqatan, agar (10.7.1) funksional qator (10.7.10) sonli qator bilan majorirlansa, ravshanki, quyidagi:

$$\sup_{x \in [a,b]} |u_k(x)| \ \leq \ c_k$$

tengsizlik bajariladi.

Endi $u_k(x) = (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k}$ deb,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$$

funksional qatorning $[0,1]$ kesmada yaqinlashishini qayd etamiz. Boshqa tomondan,

$$\sup_{x \in [0,1]} |u_k(x)| \ = \ \frac{1}{k}$$

va shuning uchun, agar bu qator (10.7.10) sonli qator bilan majorirlansa,

$$c_k \ \geq \ \frac{1}{k}$$

tengsizlik bajarilishi kerak. Ammo bu holda (10.7.10) qator uzoqlashadi.

§ 10.8. O'rtacha yaqinlashish

1. O'rtacha yaqinlashish. Berilgan $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarni silliq (ya'ni yetarli martta differensiallanuvchi) funksiyalar bilan yaqinlashtirish masalasi muhim ahamiyatga ega. Lekin, bizga ma'lumki, Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning uzluksiz bo'lishi shart emas, va shuning uchun, bunday yaqinlashtirish tekis bo'la olmaydi. Shu sababli bunday hollarda o'rtacha ma'noda, ya'ni integral ma'nosida yaqinlashishtirish o'rganiladi.

Ta'rif. $[a,b]$ *kesmada integrallanuvchi* $f_n(x)$ *funksiyalar ketma-ketligi va integrallanuvchi* $f(x)$ *funksiya berilgan bo'lsin. Agar*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \;=\; 0 \tag{10.8.1}$$

tenglik bajarilsa, $f_n(x)$ *funksiyalar ketma-ketligi* $f(x)$ *funksiyaga o'rtacha yaqinlashadi deyiladi.*

Ravshanki, biror kesmada tekis yaqinlashuvchi har qanday funksional ketma-ketlik shu kesmada o'rtacha ham yaqinlashadi. Haqiqatan, bu tasdiq quyidagi

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \;\le\; \sup_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|\cdot(b-a)$$

tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi.

Agar qaralayotgan funksiyalar uzluksiz bo'lsa, oxirgi tengsizlikni $C[a,b]$ fazo normasi orqali yozish mumkin:

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \;\le\; (b-a)\cdot\|f_n-f\|_{C[a,b]}. \tag{10.8.3}$$

Shunday qilib, tekis yaqinlashishdan o'rtacha yaqinlashish kelib chiqar ekan. Ammo bu tasdiqqa teskari tasdiq o'rinli emas. Xattoki shunday funksional ketma-ketliklar mavjudki, ular, o'rtacha yaqinlashishiga qaramasdan, biror nuqtada ham yaqinlashmaydi.

10.8.1 - misol. $[0,1]$ kesmani m ta teng bo'lakka bo'lib, ω_{mk} simvol orqali k-xususiy kesmaning xarakteristik funksiyasini belgilaymiz, ya'ni

$$\omega_{mk}(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{agar } \dfrac{k-1}{m}\le\ x\ \le\dfrac{k}{m} \quad \text{bo'lsa,}\\ 0, & \text{boshqa} \quad x \quad \text{lar uchun.}\end{cases}$$

Xususan, $[0,1]$ kesmadagi barcha x lar uchun $\omega_{11}(x)\equiv 1$. Qurilgan funksiyalarni bitta ketma-ketlik ko'rinishida joylashtiramiz:

$$\omega_{11}(x),\ \omega_{21}(x),\ \omega_{22}(x),\ \omega_{31}(x),\ \omega_{32}(x),\ \omega_{33}(x),\dots\,,$$

va shunday nomerlangan ketma-ketlikni $\{f_n(x)\}$ simvol orqali belgilaymiz.

Ravshanki, $f_n(x)\ge 0$ va agar $f_n(x)=\omega_{mk}(x)$ bo'lsa,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \;=\; \frac{1}{m}.$$

Bundan $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlikning $[0,1]$ kesmada o'rtacha nolga yaqinlashishi kelib chiqadi. Boshqa tomondan, bu ketma-ketlikning birorta ham nuqtada yaqinlashmasligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Haqiqatan, har qanday $x_0\in[0,1]$ uchun $\{f_n(x_0)\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz ko'p nol va birlardan iborat, ya'ni ikki xusuxiy limitga ega bo'lib, shu sababli u yaqinlashmaydi.

Ma'lumki, biror kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada albatta Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'ladi (6.5.3 - teorema). Lekin bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas, ya'ni Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'la turib, uzluksiz bo'lmagan funksiyalar mavjud. Qizig'i shundaki, shunga qatamasdan, har qanday integrallanuvchi funksiyani uzluksiz funksiyalar bilan o'rtacha yaqinlashtirish mumkin ekan. Chunonchi, navbatdagi teorema o'rinlidir.

10.8.1 - teorema. *Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham berilgan kesmada uzluksiz bo'lgan shunday $f_\varepsilon(x)$ funksiya topiladiki, u uchun*

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx \;<\; \varepsilon \tag{10.8.4}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Avval har qanday kesmaning xarakteristik funksiyasini, ya'ni

$$\omega(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

ko'rinishdagi funksiyani ixtiyoriy aniqlikda uzluksiz funksiyalar bilan o'rtacha yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatamiz. Bunday uzluksiz funksiya sifatida $\omega(x)$ dan faqat $\alpha < x < \alpha + \varepsilon$ va $\beta - \varepsilon < x < \beta$ intervallarda farq qilib, bu ikki intervallarda chiziqli bo'lgan $\omega_\varepsilon(x)$ funksiyani olish mumkin. Ravshanki,

$$\int_\alpha^\beta |\omega(x) - \omega_\varepsilon(x)|\, dx \;=\; \varepsilon.$$

Xuddi shunga o'xshab, istalgan $[\alpha, \beta)$ yarim interval xarakteristik funksiyasini yaqinlashtirish mumkin.

Endi har qanday pog'onasimon funksiya turli ko'rinishdagi kesma va yarim intervallar xarakteristik funksiyalarining chekli chiziqli kombinatsiyasi ekanini qayd etamiz. Bundan chiqdi, bunday funksiyalarni ham uzluksiz funksiyalar bilan ixtiyoriy aniqlikda o'rtacha yaqinlashtirish mumkin ekan.

Nihoyat, Darbu nazariyasiga ko'ra, Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiyani pog'onasimon funksiyalar bilan ixtiyoriy aniqlikda o'rtacha yaqinlashtirish mumkin (masalan, Darbuning quyi va yuqori yig'idilarini tashkil qiluvchi funksiyalar bilan) va demak, yuqorida aytilganidek, uzluksiz funksiyalar bilan ham yaqinlashtirish mumkin.

Q. E. D.

Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar uchun Veyershtrass teoremasiga (10.6.2 - teorema) o'xshash navbatdagi tasdiq o'rinli.

10.8.2 - teorema. *Berilgan $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday f funksiya uchun shunday P_n algebraik polinomlar ketma-ketligi topiladiki, bunda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - P_n(x)|\, dx \;=\; 0 \tag{10.8.5}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot 10.8.1 - va Veyershtrass teoremalaridan kelib chiqadi. Haqaqatan, 10.8.1 - teoremaga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday uzluksiz $f_\varepsilon(x)$ funksiya topiladiki, u uchun

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.8.6}$$

tengsizlik bajariladi.

10.6.2 - teoremaga asosan esa, shunday $P_\varepsilon(x)$ polinom topiladiki, u uchun

$$|f_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(x)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad a \le x \le b.$$

Shunday ekan,

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(x)|\, dx \ < \ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx \ = \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu va (10.8.6) tengsizliklardan

$$\int_a^b |f(x) - P_\varepsilon(x)|\, dx < \ \varepsilon$$

bahoga ega bo'lamiz.

Endi ε ga navbatma-navbat $\varepsilon_n = 1/n$ qiymatlar bersak, bu bahodan talab qilingan (10.8.5) tenglikni olamiz.

Q. E. D.

Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning muhim xossalaridan biri ularning o'rtacha ma'nodagi uzluksizligidir.

10.8.3 - teorema. *Berilgan $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday f funksiya uchun*

$$\lim_{h\to 0+} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|\, dx \ = \ 0 \tag{10.8.7}$$

tenglik bajariladi.

Isbot. 10.8.1 - teoremaga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday uzluksiz $f_\varepsilon(x)$ funksiya topiladiki, u uchun (10.8.4) baho o'rinli bo'ladi. U holda,

$$\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|\, dx \ \le$$

$$\le \int_a^{b-h} |f(x+h) - f_\varepsilon(x+h)|\, dx \ + \int_a^{b-h} |f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)|\, dx \ + \int_a^{b-h} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, dx.$$

O'ng tomondagi birinchi va oxirgi integrallar (10.8.4) bahoga binoan ε dan kichik bo'lgani sababli,

$$\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|\, dx \ \le 2\varepsilon + \int_a^{b-h} |f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

Shartga ko'ra, $f_\varepsilon(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va bundan chiqdi, u shu kesmada tekis uzluksiz ham bo'ladi. Demak, agar $h \to 0$ desak, oxirgi integral nolga intiladi va, shuning uchun,

$$\overline{\lim_{h\to 0+}} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|\, dx \ \le \ 2\varepsilon.$$

Endi $\varepsilon > 0$ ni ixtiyoriyligini hisobga olsak, bundan talab qilingan (10.8.7) munosabat kelib chiqadi.
Q. E. D.

Xuddi tekis yaqinlashishdagi singari, o'rtacha yaqinlashish uchun ham integral ostida limitga o'tish mumkin.

10.8.4 - teorema. *Agar Riman bo'yicha integrallanuvchi $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi integrallanuvchi $f(x)$ funksiyaga o'rtacha yaqinlashsa, u holda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \tag{10.8.8}$$

tenglik bajariladi.

Isbot o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx \;-\; \int_a^b f(x)\,dx \right| \;\le\; \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

2. O'rta kvadratik yaqinlashish. Matematik tahlil va uning tadbiqlarida o'rta kvadratik yaqinlashish muhim ahamiyatga ega.

Ta'rif. $[a,b]$ *kesmada integrallanuchi $f_n(x)$ funksiyalar ketma-ketligi va integrallanuvchi $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \; |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \;=\; 0 \tag{10.8.9}$$

tenglik bajarilsa, $f_n(x)$ funksiyalar ketma-ketligi $f(x)$ funksiyaga o'rta kvadratik yaqinlashadi deyiladi.

Biror kesmadagi o'rtacha yaqinalshish va o'rta kvadratik yaqinlashish orasidagi bog'lanish navbatdagi tengsizlik orqali o'rnatiladi.

10.8.1 - tasdiq. $[a,b]$ *kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday f va g funksiyalar uchun quyidagi*

$$\left| \int_a^b \; f(x)g(x)\,dx \right| \;\le\; \left(\int_a^b \; |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b \; |g(x)|^2\,dx \right)^{1/2}, \tag{10.8.10}$$

Koshi-Bunyakovski *tengsizligi deb atalmish tengsizlik o'rinli.*

Isbot. Har qanday haqiqiy λ uchun quyidagi

$$P(\lambda) \;=\; \int_a^b \; [\lambda f(x) - g(x)]^2\,dx \tag{10.8.11}$$

kattalikni qaraymiz.

Ravshanki,

$$P(\lambda) \;=\; \lambda^2 \int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx \;-\; 2\lambda \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \;+\; \int\limits_a^b \;|g(x)|^2\,dx \;=$$

$$= \;\lambda^2 A - 2\lambda B + C, \tag{10.8.12}$$

ya'ni $P(\lambda)$ kvadratik uchhaddir. Bu uchhad, (10.8.11) ta'rifga ko'ra, barcha $\lambda \in \mathbf{R}$ lar uchun manfiy emas. Shuning uchun, uning diskriminanti, ya'ni $B^2 - AC$ musbat bo'la olmaydi. Demak, (10.8.12) dagi belgilashlarni hisobga olsak,

$$B^2 - AC \;=\; \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \;-\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx \cdot \int\limits_a^b |g(x)|^2\,dx \;\le\; 0.$$

Ravshanki, hosil bo'lgan tengsizlik (10.8.10) munosabatning o'zidir.
Q. E. D.

10.8.5 - teorema. *Riman bo'yicha integrallanuvchi $f(x)$ funksiyaga o'rta kvadratik yaqinlashuvchi integrallanuvchi har qanday $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi shu funksiyaga o'rtahca ham yaqinalshadi.*

Isbot. (10.8.10) Koshi-Bunyakovski tengsizligida $f(x)$ funksiya sifatida $|f_n(x) - f(x)|$ funksiyani olib va $g(x) \equiv 1$ deb,

$$\int\limits_a^b \;|f_n(x) - f(x)|\,dx \;\le\; \sqrt{(b-a)} \cdot \left(\int\limits_a^b \;|f_n(x) - f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Agar ketma-ketlik o'rta kvadratik yaqinlashsa, o'ng tomon nolga intiladi va shu sababli, chap tomon ham nolga intiladi. Demak, bu ketma-ketlik o'rtacha ham yaqinlashar ekan.
Q. E. D.

Shuni aytish kerakki, biz 10.8.5 - teorema yordamida o'rtacha yaqinlashuvchi ketma-ketliklar xossalarini o'rta kvadratik yaqinlashuvchi ketma-ketliklar holiga o'tkazishimiz mumkin. Masalan, navbatdagi tasdiq o'rinli.

10.8.6 - teorema. *Agar Riman bo'yich integrallanuvchi $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi integrallanuvchi $f(x)$ funksiyaga o'rta kvadratik yaqinlashsa, navbatdagi*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

tenglik bajariladi.

Eslatma. Shuni alohida qayd etish joizki, biz o'rtacha yaqinlashish uchun Koshi kriteriysini keltirmadik va bu tasodif emas, albatta. Aslida o'rtacha yoki o'rta kvadratik ma'noda fundamental ketma-ketlik ta'rifini berish oson. Ammo har qanday fundamental ketma-ketlik ham Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyaga yaqinlashavermaydi. Bunga sabab faqatgina limit funksiyani chegaralanmagan bo'li-shining mumkinligi emas. Chunki bu sababni bartaraf qilish uchun biz xosmas ma'noda

Riman bo'yicha integrallanuvchi (yoki kvadrati xosmas ma'noda Riman bo'yicha integrallanuvchi) funksiyalarni qo'shib, qaralayotgan fazoni kengaytirishimiz mumkin. Lekin bu yerda boshqa muhim sabab borki, fazoni bunday kengaytirish vaziyatni o'zgartirmaydi.

Hosil bo'lgan muammo integralni yangicha aniqlash orqali hal qilinadi. Bunda yangi integral Lebeg integrali deb atalib, u, birinchidan, Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar uchun Riman integrali bilan ustma-ust tushadi va, ikkinchidan, Lebeg integrali Riman bo'yicha integrallanmaydigan ko'pgina funksiyalar uchun ham aniqlanadi. Vengriyalik matematik F. Riss (F. Riesz) va, undan bog'liqmas ravishda, nemis matematigi E. Fisher (E. Fischer) tomonidan Lebeg integrali yordamida aniqlangan o'rtacha (xuddi shu kabi, o'rta kvadratik) yaqinlashish uchun Koshi kriteriysi o'rinli ekanligi isbotlangan.

§ 10.9. Darajali qatorlar

1. Quyidagi

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{10.9.1}$$

ko'rinishdagi funksional qator *darajali qator* deb ataladi, bunda c_k haqiqiy sonlar darajali qatorning *koeffitsientlari* deyiladi.

Har qanday darajali qator uchun

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{10.9.2}$$

tenglik orqali aniqlangan R kattalikni kiritamiz. Bunda, agar o'ng topmondagi yuqori limit $+\infty$ ga teng bo'lsa, biz $R = 0$ deb hisoblaymiz, bordiyu yuqori limit nolga teng bo'lsa, biz formal ravishda $R = +\infty$ deymiz.

10.9.1 - teorema. *Agar (10.9.1) darajali qator berilgan bo'lib, R kattalik (10.9.2) tenglik orqali aniqlangan bo'lsa, u holda (10.9.1) qator $|x| < R$ bo'lganda absolyut yaqinlashib, $|x| > R$ lar uchun u uzoqlashadi.*

Isbot. Agar $a_n = c_n x^n$ desak,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \frac{1}{R}$$

bo'ladi.

Yuqori limit ko'rinishidagi Koshi alomatiga (10.2.3 - teorema) binoan, (10.9.1) qator oxirgi tenglikning o'ng topmonidagi kattalik 1 dan kichik bo'lsa (ya'ni $|x| < R$ bo'lsa), absolyut yaqinlashadi va o'sha kattalik 1 dan katta bo'lsa (ya'ni $|x| > R$ bo'lsa), uzoqlashadi

Q. E. D.

(10.9.2) tenglik bilan aniqlangan R soni (10.9.1) darajali qatorning *yaqinlashish radiusi* deyiladi va $(-R, R)$ interval esa yaqinlashish intervali deyiladi.

10.9.1 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

darajali qator istalgan $x \in \mathbf{R}$ uchun yaqinlashadi, chunki

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

va shu sababli, yaqinlashish radiusi $+\infty$ ga teng.

10.9.2 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$$

darajali qator $x = 0$ da yaqinlashib, istalgan $x \neq 0$ uchun uzoqlashadi, chunki

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

va shu sababli, yaqinlashish radiusi 0 ga teng.

Shuni aytish kerakki, agar $0 < R < \infty$ bo'lsa, darajali qator yaqilashish intervalining chegaraviy nuqtalarida yaqinlashi ham va uzoqlashishi ham mumkin.

10.9.3 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi birga teng. Ravshanki, qator har ikkala chegaraviy $x = 1$ va $x = -1$ nuqtalarda uzoqlashadi.

Darajali qator yaqinlashish intervalining bir chegaraviy nuqtasida yaqinlashib, ikkinchisida uzoqlashishi mumkin.

10.9.4 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi birga teng bo'lib, qator $x = 1$ da yaqinlashadi va $x = -1$ da uzoqlashadi.

Navbatdagi misol darajali qator yaqinlashish intervalining har ikkala chegaraviy nuqtalarida yaqinlashishi mumkinligini ko'rsatadi.

10.9.5 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi birga teng. Ravshanki, bu qator $-1 \leq x \leq 1$ kesmaning barcha nuqtalarida yaqinlashib, bu kesmadan tashqarida uzoqlashadi.

Navbatdagi teorema yaqinlashish intervali ichida yotgan har qanday kesmada darajali qatorning tekis yaqinlashishini ko'rsatadi.

10.9.2 - teorema. *Agar (10.9.1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $R > 0$ ga teng bo'lsa, $0 < r < R$ intervaldan olingan istalgan r uchun bu qator $[-r, r]$ kesmada tekis yaqinlashadi.*

Isbot. Ravshanki, agar $-r \leq x \leq r$ bo'lsa,

$$|c_k x^k| \leq |c_k| r^k$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan tashqari, 10.9.1 - teoremaga asosan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$$

sonli qator yaqinlashadi. Shunday ekan, Veyershtrass alomatiga (10.7.6 - teorema) ko'ra, (10.9.1) qator $[-r, r]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

Q. E. D.

Natija. *Darajali qator yig'indisi yaqinlashish intervali ichida uzluksiz funksiya bo'ladi.*

Haqiqatan, 10.9.2 - teoremaga asosan, darajali qator yig'indisi yaqinlashish intervali ichidagi har qanday kesmada uzluksiz bo'ladi. Demak, u bu intervalning istalgan nuqtasida ham uzluksizdir.

2*. Qayd etish joizki, agar darajali qator yaqinlashish intervalining biror chegaraviy nuqtasida yaqinlashsa, u holda qator yig'indisi mana shu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Ravshanki, isbotni faqat yaqinlashish radiusi 1 ga teng bo'lgan holda keltirish yetarli. Mazkur holdagi tasdiq Abel teoremasi deb ataladi.

10.9.5 - teorema (N. Abel). *Faraz qilaylik, (10.9.1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi 1 ga teng bo'lib,*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad -1 < x < 1,$$

bo'lsin.

Agar (10.9.1) qator $x = 1$ da S soniga yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \;=\; S$$

tenglik bajariladi.

Isbot Abel jamlash usulining regulyarligi haqidagi 9.5.2 - teoremadan kelib chiqadi.

Q. E. D.

Eslatma. Xuddi shu kabi tasdiq funksiya $x = -1$ nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lgan holda ham o'rinli.

10.9.6 - misol. Ma'lumki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

darajali qator $-1 < x \leq 1$ da yaqinlashadi va uning yig'indisi $S(x)$ quyidagi

$$S(x) \;=\; \ln(1 + x)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Qator $x = 1$ nuqtada yaqinlashgani sababli uning yig'indisi, Abel teoremasi ta'kiqlaganidek, shu nuqtada uzluksizdir.

Qayd etish joizki, Abel teoremasining teskarisi o'rinli emas, ya'ni chekli

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

limitning mavjudligidan (10.9.1) qatorning $x = 1$ nuqtada yaqinlashishi kelib chiqmaydi.

10.9.7 - misol. Ushbu
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$
qatorni qaraymiz.

Ravshanki, $|x| < 1$ bo'lganda bu qator yaqinlashib, uning yig'indisi $S(x)$ quyidagi
$$S(x) \ = \ \frac{1}{1+x}$$
ko'rinishga ega.

Shubhasiz, quyidagi
$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \ = \ \frac{1}{2}$$
limit mavjud, ammo $x = 1$ nuqtada qator uzoqlashadi.

Qator har ikkala chegaraviy nuqtalarda uzoqlashib, ammo bir tomonlama limitlar bu ikki nuqtada mavjud bo'lishi ham mumkin.

10.9.8 - misol. Ushbu
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$
qatorni qaraymiz.

Agar $|x| < 1$ bo'lsa, bu qator, shubhasiz, yaqinlashib, uning yig'indisi $S(x)$ quyidagi
$$S(x) \ = \ \frac{1}{1+x^2}$$
ko'rinishga ega bo'ladi.

Chegaraviy $x = 1$ va $x = -1$ nuqtalarda qator uzoqlashsada, shunga qaramasdan,
$$\lim_{x\to 1-0} S(x) \ = \ \lim_{x\to -1+0} S(x) \ = \ \frac{1}{2}$$
tengliklar o'rinlidir.

3. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Ushbu bandda biz qanday shartlar ostida berilgan funksiyani darajali qator ko'rinishida tasvirlash mumkinligini aniqlashga harakat qilamiz.

Ta'rif. *Agar $(-R, R)$ intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun unga har bir $x \in (-R, R)$ nuqtada yaqinlashuvchi darajali qator mavjud bo'lsa, f funksiya shu intervalda darajali qatorga yoyiladi deymiz.*

Avvalo shuni qayd etamizki, 10.9.2 - teoremaning natijasiga ko'ra, darajali qatorga yoyiluvchi bo'lishi uchun f funksiyaning uzluksiz bo'lishi shart. Lekin, quyida isbot qilinadigan 10.9.3 - teoremaga binoan, bu yetarli emas ekan.

10.9.1 - lemma. *Berilgan darajali qatorning va uni formal ravishda differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish radiuslari o'zaro tengdir.*

Isbot. Aytaylik, R soni quyidagi
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad -R < x < R,$$
darajali qatorning yaqinlashish radiusi bo'lsin.

U holda formal ravishda differensiallashdan hosil bo'lgan qator

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k \tag{10.9.3}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ravshanki,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1} = 1.$$

U holda (10.9.2) ta'rifga asosan, differensiallangan qator yaqinlashish radiusi R_1 uchun

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{(k+1)\cdot|c_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)} \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_{k+1}|} =$$

$$= 1 \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\sqrt[k+1]{|c_{k+1}|} \right]^{(k+1)/k} = \frac{1}{R}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Q. E. D.

10.9.3 - teorema. *Yaqinlashish intervali ichida darajali qator yig'indisi cheksiz differensiallanuvchi funksiyadir.*

Isbot. Faraz qilaylik, $R > 0$ uchun f funksiya $(-R, R)$ intervalda darajali qatorga yoyilsin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad -R < x < R. \tag{10.9.4}$$

Formal ravishda differensiallash natijasida hosil bo'lgan (10.9.3) qator, 10.9.1 - lemmaga asosan, berilgan (10.9.4) qator bilan bir xil yaqinlashish radiusiga ega bo'ladi. U holda, 10.3.2 - va 10.9.2 - teoremalarga ko'ra, darajali qator yig'indisi yaqinlashish intervali ichida differensiallanuvchidir. Shu sabali, f funksiya differensiallanuvchi bo'lib,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

tenglik bajariladi.

Demak, darajali qatorga yoyilayotgan funksiyaning hosilasi ham xuddi o'sha yaqinlashish radiusiga ega bo'lib, darajali qatorga yoyilar ekan. Shunday ekan, biz hosila uchun yana avvalgi mulohazalarni qaytarishimiz mumkin. Natijada, ravshanki, qaralayotgan funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi.

Q. E. D.

Eslatma. 10.9.3 - teoremaning isbotidan ko'rinib turibdiki, darajali qatorga yoyiluvchi funksiyaning hosilasini hadma-had differensiallab topishimiz mumkin ekan.

Biror intervalda darajali qatorga yoyiluvchi har qanday funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'lib, bu boshlang'ich funksiya ham o'sha intervalda darajali qatorga yoyilishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan, agar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad -R < x < R, \tag{10.9.5}$$

desak, u holda formal ravishda integrallangan darajali qator quyidagi

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -R < x < R, \tag{10.9.6}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ravshanki, (10.9.5) qator (10.9.6) darajali qatorni formal ravishda differensiallashdan hosil bo'lgan deyishimiz mumkin. U holda, 10.9.1 - lemmaga asosan, bu ikki qatorning yaqinlashish radiuslari o'zaro teng bo'ladi. 10.9.2 - teoremadan bu ikki qator yaqinlashish intervalida yotgan istalgan kesmada tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Shuning uchun,10.9.3 - teoremaga ko'ra,

$$F'(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bundan $F(x)$ funksiya $(-R, R)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekani kelib chiqadi.

Shuni aytish kerakki, 10.7.3 - teoremaga asosan, darajali qatorlarni hadma-had integrallash mumkin, ya'ni

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\, x^{k+1}, \quad -R < x < R, \tag{10.9.7}$$

tenglik o'rinli.

Darajali qatorga yoyiluvchi funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi ekani qatorning koeffitsientlarini topishga imkon beradi.

10.9.4 - teorema. *Agar f funksiya (10.9.4) darajali qatorga yoyilsa, u holda qator koeffitsientlari quyidagi*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.9.8}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Isbot. (10.9.4) darajali qatorni n marta differensiallab, 10.9.3 - teoremaga ko'ra,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k x^{k-n}, \quad -R < x < R,$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar $x = 0$ bo'lsa, o'ng tomondagi yig'indida birinchi haddan tashqari barcha hadlar nolga teng bo'ladi. Demak,

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdots 1 \cdot c_n = n! \cdot c_n.$$

Q. E. D.

Natija. $(-R, R)$ *intervalda darajali qatorga yoyiluvchi funksiyaning darajali qatori quyidagi*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad -R < x < R, \tag{10.9.9}$$

ko'rinishga ega.

(10.9.9) qator f funksiyaning *Teylor qatori* deb ataladi. E'tibor bering, (10.9.9) qatorning koeffitsientlari xuddi Teylor formulasidagi (§ 4.5 ga qarang) ko'rinishga ega.

Shunday qilib, biror intervalda darajali qatorga yoyiluvchi funksiya shu intervalda cheksiz differensiallanuvchi bo'lar ekan. Ammo, navbatdagi misoldan ko'rinib turibdiki, har qanday cheksiz differensiallanuvchi funksiya ham darajali qatorga yoyilavermaydi.

10.9.9 - misol. Quyidagi

$$h(x) \ = \ \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{agar} \quad x \neq 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ \ \ 0 \ \ , & \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases} \tag{10.9.10}$$

funksiyani qaraymiz.

Ravshanki, bu funksiya sonlar o'qining barcha nuqtalarida, xususan $x = 0$ nuqtada ham, uzluksizdir. Bundan tashqari, har qanday natural m uchun

$$\lim_{x \to 0} x^{-m} h(x) \ = \ 0 \tag{10.9.11}$$

tenglik ham o'rinli.

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, (10.9.10) funksiyaning ixtiyoriy $h^{(n)}(x)$ hosilasi $x^{-m}h(x)$ ko'rinishdagi funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lib, (10.9.11) tenglikka ko'ra, bu funksiya butun sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchidir. Bundan tashqari,

$$h^{(n)}(0) \ = \ 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Bundan chiqdi, $h(x)$ funksiyaning barcha Teylor koeffitsientlari nolga teng bo'lib, bu darajali qator nolga (ya'ni $x \neq 0$ bo'lganda $h(x)$ funksiyaga emas) yaqinlashadi. Shunday qilib, $h(x)$ cheksiz differensiallanuvchi bo'lishiga qaramasdan, birorta ham $(-R, R)$ ko'rinishdagi intervalda darajali qatorga yoyilmaydi.

Darajali qatorga yoyilish shartini quyidagi

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \ + R_{n+1}(x), \quad -R < x < R, \tag{10.9.12}$$

Teylor formulasini kuzatish orqali olish mumkin.

10.9.5 - teorema. *Berilgan f funksiyaning $(-R, R)$ intervalda darajali qatorga yoyilishi uchun (10.9.12) Teylor formulasidagi $R_{n+1}(x)$ qoldiq hadning shu intervalda $n \to \infty$ da nolga intilishi zarur va yetarli.*

Isbot (10.9.12) tenglikdan bevosita kelib chiqadi.

1 - natija. *Agar f funksiya $(-R, R)$ intervalda cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, biror $M > 0$ o'zgarmas bilan*

$$|f^{(n)}(x)| \ \leq \ M \frac{n!}{R^n}, \quad -R < x < R, \tag{10.9.13}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda bu funksiya $(-R, R)$ intervalda darajali qatorga yoyiladi.

Haqiqatan, agar qoldiq hadni Lagranj ko'rinishida olsak,

$$|R_{n+1}(x)| \ = \ \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \ \leq \ M \left| \frac{x}{R} \right|^{n+1}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan qoldiq hadning nolga intilishi kelib chiqadi.

2 - natija. *Agar f funksiya $(-R, R)$ intervalda cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, biror $M > 0$ o'zgarmas bilan*

$$|f^{(n)}(x)| \ \leq \ M, \quad -R < x < R, \tag{10.9.14}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda bu funksiya $(-R, R)$ intervalda darajali qatorga yoyiladi.

Haqiqatan, (10.9.14) tengsizlikdan biror yangi M o'zgarmas bilan (10.9.13) shart kelib chiqadi.

10.9.10 - misol. Ko'rsatkichli funksiya quyidagi yoyilmaga ega:

$$e^x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{10.9.15}$$

Haqiqatan, istalgan musbat R uchun

$$|f^{(n)}(x)| \ = e^x \leq \ M \ = \ e^R, \quad -R < x < R,$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni (10.9.14) shart bajariladi. Ravshanki, (10.9.15) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $+\infty$ ga teng.

10.9.11 - misol. Kosinusning yoyilmasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\cos x \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{10.9.16}$$

Bu holda butun sonlar o'qida

$$|f^{(n)}(x)| \ = \left|\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \leq \ 1, \quad -\infty < x < +\infty,$$

tengsizlik o'rinli. Bundan (10.9.16) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $+\infty$ ga tengligi kelib chiqadi.

10.9.12 - misol. Xuddi shunga o'xshash, sinus quyidagi

$$\sin x \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{10.9.17}$$

yoyilmaga ega bo'lib, (10.9.17) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $+\infty$ ga tengligi ko'rsatiladi.

10.9.13 - misol. Logarifmik funksiya quyidagi yoyilmaga ega:

$$\ln(1+x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1. \tag{10.9.18}$$

Odatda bu tenglikning isboti alohida $-1 < x < 0$ interval va alohida $0 \leq x \leq 1$ kesma uchun amalga oshiriladi. Agar $0 \leq x \leq 1$ bo'lsa, qoldiq hadni Lagranj ko'rinishda olib,

$$R_{n+1}(x) \ = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot x^{n+1} \ \leq \ \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq \xi < x \leq 1,$$

bahoga ega bo'lamiz va bundan qoldiq hadning nolga intilishi kelib chiqadi. Bodiyu $-1 < x < 0$ bo'lsa, qoldiq hadni Koshi ko'rinishida olish qulay bo'ladi, ya'ni:

$$R_{n+1}(x) \ = \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \, x\, (x-\xi)^n, \quad -1 < x < \xi < 0. \tag{10.9.19}$$

Demak,

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot |x| \cdot |x-\xi|^n = \frac{|x|}{1-|\xi|}\left(\frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|}\right)^n.$$

Argumentning qaralayotgan qiymatlari uchun qavs ichidagi ifoda 1 dan kichik bo'lgani uchun, qoldiq had $n \to \infty$ da nolga intiladi.

4*. Biror intervalda darajali qatorga yoyiladigan funksiyani shu intervalda analitik funksiya deyishadi. Shunday qilib, analitik funksiyani nolning istalgancha kichik atrofida bilsak, uning qiymatlarini funksiya analitiklik bo'lgan intervalning ixtiyoriy nuqtasida aniqlashimiz mumkin. Boshqacha aytganda, analitik funksiyaning grafigini chizar ekanmiz, biz grafikni istalgancha davom ettira olmaymiz, ya'ni biz uni faqat Teylor qatoriga binoan chizishimiz mumkin. Aynan shunday funksiyalarni matematik tahlil asoschilari XVII-XVIII asrlarda «haqiqiy» funksiyalar deyishgan. Grafigi «qo'lning erkin harakati bilan»(«libera manu ducta») chiziladigan funksiyalarni esa, ular funksiya deb qarashmagan.

Xuddi (10.9.1) ko'rinishdagi darajali qatorlar singari quyidagi

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{10.9.20}$$

ko'rinishdagi qatorlar ham o'rganiladi, bu yerda $a-$ sonlar o'qining istalgan nuqtasi.

Bu (10.9.20) qatorning yaqinlashish radiusi ham (10.9.2) formula bilan aniqlanadi, bunda yaqinlashish intervali $(a-R, a+R)$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar funksiya $a \in \mathbf{R}$ nuqtaning biror atrofida (10.9.20) ko'rinishdagi darajali qatorga yoyilsa, bunday funksiya shu nuqtada analitik deyiladi.

Agar funksiya $(-R, R)$ intervalda (10.9.1) ko'rinishdagi darajali qatorga yoyilsa, u holda bunday funksiya shu intervalning har biq nuqtasida analitik ekanini navbatdagi teoremada ko'rsatamiz.

10.9.6 - teorema. *Agar biror $R > 0$ uchun f funksiya $(-R, R)$ intervalda quyidagi*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad -R < x < R, \tag{10.9.21}$$

darajali qatorga yoyilsa, u holda istalgan $a \in (-R, R)$ nuqta uchun shunday $\rho > 0$ son topiladiki, u uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad a-\rho < x < a+\rho. \tag{10.9.22}$$

Isbot. Agar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad -R < x < R,$$

desak, $[a+(x-a)]^n$ ni N'yuton binomi bo'yicha yoyib,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a+x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}(x-a)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}c_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k, \tag{10.9.23}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} c_n \,.$$

Biz (10.9.23) da yig'ish tartibini o'zgartirdik. Bunday o'zgartirish faqat quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} |a|^{n-k} |x-a|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (|a| + |x-a|)^n. \tag{10.9.24}$$

qator yaqinlashgandagina ma'noga ega. Hozir biz ana shu yaqinlashishni ko'rsatamiz.

Avval (10.9.24) ning o'ng tomonidagi qatorni

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| t^n \tag{10.9.25}$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $t = |a| + |x-a|$. Endi $\rho = R - |a|$ deb belgilaymiz. U holda $x \in (a-\rho, a+\rho)$ lar uchun

$$t = |a| + |x-a| < |a| + \rho = R$$

tengsizlik o'rinli va shuning uchun, (10.9.25) qator va demak, (10.9.24) qator ham yaqinlashadi.

(10.9.23) va (10.9.22) darajali qatorning koeffitsientlarining o'zaro ustma-ust tushishi xuddi 10.9.4 - teorema isbotidagidek ko'rsatiladi.

Q. E. D.

1 - eslatma. Teoremaning isbotidan ko'rinib turibdiki, (10.9.22) qatorning yaqinlashish radiusi $R - |a|$ sonidan kichik emas. Lekin (10.9.22) qatorning yaqinlashish radiusi bu sondan katta bo'lgan holga va xattoki, bu radius dastlabki qator yaqinlashish radiusi R dan katta bo'lgan holga ham misollar keltirish mumkin.

10.9.14 - misol. Yaqinlashish radiusi 2 ga teng bo'lgan ushbu

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{2^k}, \quad -2 < x < 2,$$

funksiyaning darajali qatorini qaraymiz.

10.9.6 - teoremaga ko'ra, xuddi shu funksiya $a = 1$ nuqta atrofida ham qatorga yoyiladi va mos yoyilma, ravshanki,

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^k}{3^k}$$

ko'rinishga ega. Bu qatorning yaqinlashish radiusi 3 ga tengligini ko'rish qiyin emas.

2 - eslatma. Veyershtrass teoremasiga (10.6.2 - teorema) ko'ra, $[-R, R]$ kesmada uzluksiz har qanday $f(x)$ funksiyani tekis yaqinlashuvchi $P_n(x)$ polinimlar ketma-ketligining limiti sifatida qarash mumkin. Demak, agar

$$Q_1(x) = P_1(x), \quad Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x), \ n = 2, 3, ...,$$

desak, quyidagi tenglik bajariladi:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x), \quad -R \leq x \leq R.$$

Shunday qilib, Veyershtrass teoremasiga binoan, har qanday uzluksiz funksiyani tekis yaqinlashuvchi polinomlar qatori ko'rinishida yozish mumkin ekan. Ammo bu polinomlar qatornini doim ham darajali qator sifatida yozib olish mumkin emas. Masalan, agar Veyershtrass teoremasidagi $P_n(x)$ polinomlar ketma-ketligi

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = c_n x^n$$

shartni qanoatlantirsa, biz darajali qatorga ega bo'lamiz.

Umumiy holda tekis yaqinalshuvchi polinomlar qatorini darajali qatorga faqat yoyilayotgan funksiya yaqinlashish intervali ichida analitik bo'lgandagina o'zgartirish mumkin.

5*. Kompleks o'zgaruvchili darajali qatorlar. Kompleks $z = x + iy \in \mathbf{C}$ o'zgaruvchili va kompleks $c_k = a_k + ib_k$ koeffitsientli ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{10.9.26}$$

ko'rinishdagi darajali qatorlar muhim ahamiyatga ega.

Bunday qatorlar uchun *yaqinlashish radiusi* R xuddi haqiqiy o'zgaruvchili darajali qatorlar holidagidek aniqlanadi:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \,. \tag{10.9.27}$$

(10.9.26) darajali qatorning $|z| < R$ da yaqinlashib, $|z| > R$ da uzoqlashishi ham xuddi haqiqiy o'zgaruvchilik darajali qatorlardagidek isbotlanadi.

Kompleks tekislikda $\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ to'plam radiusi R ga teng va markazi koordinatalar boshida bo'lgan ochiq doirani anglatadi va u *yaqinlashish doirasi* deb ataladi. Xususan, yaqinlashish radiusi degan nomning kiritilishiga sabab ham aynan shundadir.

Agar

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \,, \quad |z| < R, \tag{10.9.28}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, kompleks o'zgaruvchili $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ funksiya $\{|z| < R\}$ doirada darajali qatorga yoyiladi, bunda $f(z)$ funksiya shu doirada *analitik* deyiladi.

Masalan,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \,, \quad |z| < 1,$$

funksiya radiusi 1 ga teng bo'lgan doirada analitik bo'ladi.

Shuni aytish joizki, agar (10.9.28) qatorning c_k koeffitsientlari haqiqiy bo'lsa, $f(x)$ funksiya argumentning haqiqiy x qiymatlari uchun haqiqiy qiymatlar qabul qiladi:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,, \quad -R < x < R. \tag{10.9.29}$$

Bunda (10.9.28) funksiya (10.9.29) funksiyani sonlar o'qining $(-R, R)$ intervalidan kompleks tekislikning $\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ doirasiga *analitik davom ettiradi* deyiladi.

Analitik davom ettirish, dastlab argumentning haqiqiy qiymatlari uchun aniqlangan, asosiy elementar funksiyalarni kompleks qiymatlar uchun aniqlashning asosida yotadi.

10.9.15 - misol. Argumentning kompleks qiymatlari uchun ko'rsatkichli funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{10.9.30}$$

Bu funksiyaning kompleks sohada ham xuddi argumentning haqiqiy qiymatlari uchun ega bo'lgan asosiy xossalarga ega ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun, N'yuton binomiga ko'ra, istalgan natural n uchun quyidagi

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!}\, a^k b^m = \sum_{k+m=n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^m}{m!}$$

tenglik o'rinli ekanini qayd etamiz.

Bu tenglikda yig'indisi n ga teng bo'lgan barcha manfiy bo'lmagan butun k va m lar bo'yicha yig'indi olinayapti

Ushbu tenglikni ixtiyoriy kompleks a va b sonlar uchun qo'llasak,

$$e^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^m}{m!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} = e^a \cdot e^b$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib, komleks sohada ko'rsatkichli funksiyaning asosiy xossasi o'rinli bo'lar ekan:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b, \quad a \in \mathbf{C},\ b \in \mathbf{C}. \tag{10.9.31}$$

Agar $z = it$ desak,

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Endi $i^2 = -1$ ekanini hisobga olsak,

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \sin t.$$

Shunday qilib, biz Eyler formulasini isbotladik:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{10.9.32}$$

(10.9.31) va (10.9.32) tengliklardan quyidagi

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{10.9.33}$$

ayniyat kelib chiqadi.

Ahamiyat bering, agar argumentning mavhum qismiga 2π ni qo'shsak, funksiya qiymati o'zgarmaydi:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

ya'ni (10.9.30) tenglik bilan aniqlangan ko'rsatkichli funksiya davriy bo'lib, uning davri $2\pi i$ ga teng ekan. Ma'lumki, haqiqiy to'g'ri chiziqda ko'rsatkichli funksiya qat'iy monoton edi.

10.9.16 - misol. Argumentning kompleks qiymatlari uchun sinus va kosinus trigonometrik funksiyalarini quyidagi tenglik orqali aniqlaymiz:

$$\sin z \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{10.9.34}$$

va

$$\cos z \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{10.9.35}$$

Bu ta'rifdan bevosita

$$\sin(-z) \;=\; -\sin z, \quad \cos(-z) \;=\; \cos z, \quad z \in \mathbf{C},$$

munosabatlar kelib chiqadi.

Endi, (10.9.30) ta'rifni hisobga olib, har qanday kompleks z uchun o'rinli bo'lgan, quyidagi

$$e^{iz} \;=\; \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{10.9.36}$$

ayniyatni yozishimiz mumkin. Bevosita bu ayniyatdan navbatdagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\cos z \;=\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z \;=\; \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{10.9.37}$$

Ma'lumki, haqiqy argumentli sinus va kosinus funksiyalarining absolyut qiymatlari 1 dan oshmas edi. Ammo kompleks tekislikda (10.9.34) va (10.9.35) tengliklar orqali aniqlangan sinus va kosinus funksiyalari har qanday kompleks qiymat qabul qilishi mumkin. Masalan, quyidagi

$$\cos z \;=\; 2 \tag{10.9.38}$$

tenglamani yechaylik.

Buning uchun $\lambda = e^{iz}$ deb belgilash kiritamiz. U holda, (10.9.37) dagi chap tenglikni hisobga olsak,

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 4, \quad \text{ya'ni} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0.$$

Hosil bo'lgan kvadratik tenglama ikki musbat haqiqiy ildizlarga ega:

$$\lambda_{1,2} \;=\; 2 \pm \sqrt{3}.$$

Agar $z = x + iy$ son (10.9.38) tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda $e^{iz} = \lambda$ bo'lib, (10.9.33) ga ko'ra,

$$e^{iz} \;=\; e^{-y+ix} \;=\; e^{-y}(\cos x + i \sin x) \;=\; \lambda$$

tenglikni olamiz.

Bundan, λ ning musbat va haqiqiy bo'lgani uchun, $\sin x = 0$ va $\cos x > 0$. Demak, $x = 2k\pi$, bu yerda k ixtiyoriy butun son. Shuning uchun,

$$e^{-y} \;=\; \lambda, \quad \text{ya'ni} \quad y = \ln \frac{1}{\lambda}.$$

Shunday qilib, (10.9.38) tenglama ikki qismdan iborat yechimga ega ekan:

$$z_{1,k} = 2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3}), \qquad z_{2,k} = 2k\pi + i\ln(2-\sqrt{3}), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Agar markazi $c \in \mathbf{C}$ nuqtada bo'lgan doira mavjud bo'lib, uning ichida

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-c)^k \tag{10.9.39}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya c *nuqtada analitik* deyiladi.

Yaqinlashish radiusi xuddi o'sha (10.9.27) tenglik bilan aniqlanadi.

Yaqinlashish radiusi bilan funksiyaning analitiklik sohasi orasidagi bog'liqlik darajali qatorlarni aynan kompleks tekislikda qaraganda yaqqol ko'zga tashlanadi. Masalan, quyidagi

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiyani haqiqiy argumentlar uchun qarasak, u haqiqiy o'qning har bir nuqtasida analitik bo'ladi, ammo uning ushbu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Teylor qatorining yaqinlashish radiusi, biz kutgandek $+\infty$ ga emas, balki 1 ga teng. Agar biz argumentning haqiqiy qiymatlari bilan cheklansak, bu holni tushuntirib bo'lmaydi. Bodiyu biz bu funksiyani kompleks tekislikda qarasak, ya'ni uning kompleks tekislikka analitik davomini, ya'ni quyidagi

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}, \quad |z| < 1,$$

funksiyani qarasak, u holda uning yaqinlashish radiusi yana 1 ga teng bo'ladi, lekin endi yaqinlashish doirasi chegarsida bu funksiya analitik bo'lmagan nuqtalar paydo bo'ladi, chunonchi, $z = \pm i$ nuqtada qaralayotgan funksiya analitik emas.

Umumiy holda, agar funksiya (10.9.39) ko'rinishdagi darajali qatorga yoyilsa, kompleks tekislikdagi yaqinlashish doirasining chegarasida bu funksiya anlitik bo'lmagan nuqta albatta topilishini isbotlash mumkin.

Qo'shimchalar

Taqdim qilinayotgan matematik tahlil kursida o'quvchidan boshlang'ich tushunchalarga ega bo'lishlik talab qilinmaydi. Lekin shunday bo'lsada, ushbu darslikda matematik mantiq va to'plamlar nazariyasining hozirgi kunda an'anaviy bo'lib qolgan belgilashlaridan foydalaniladi.

§ Q.1. Matematiк mantiq belgilashlari

1. Matematik mantiqning asosiy ob'ekti mulohazalar va ular ustida bajariladigan turli amallardir. Har bir mulohaza rost yoki yolg'on bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, har bir mulohaza uchun quyidagi ikki «rost» yoki «yolg'on» qiymatlardan birigina rost bo'ladi.

Mulohazalar ustidagi eng sodda amallardan biri *inkor* amalidir. Inkor amali uchun quyidagi $\rceil$ belgilash ishlatiladi. Masalan, agar A mulohaza bo'lsa, uning inkori $\rceil A$ orqali belgilanadi va «A emas » deb o'qiladi. Quyidagi inkorning rost qiymatlari o'z-o'zidan tushunarlidir:

agar A rost bo'lsa, $\rceil A$ yolg'on;

agar A yolg'on bo'lsa, $\rceil A$ rost.

Mulohazalar ustidagi muhim amallar qatoriga kon'yunksiya va diz'yunksiyalar ham kiradi.

Ikki A va B mulohazalarning *kon'yunksiya*si

$$A \wedge B$$

ko'rinishda belgilanib («A va B» deb o'qiladi), faqat va faqat har ikkala A va B mulohazalar rost bo'lgandagina rost qiymatni qabul qiladigan mulohazadan iboratdir.

Ikki A va B mulohazalarning *diz'yunksiya*si esa

$$A \vee B$$

ko'rinishda belgilanib («A yoki B» deb o'qiladi), faqat va faqat A va B mulohazalardan kamida bittasi rost bo'lgandagina rost qiymatni qabul qiladigan mulohazadan iboratdir.

Implikatsiya yoki «*kelib chiqmoqlik*» mulohazalar ustidagi yana bir muhim amallardan biridir.

Implikatsiya

$$A \Rightarrow B$$

ko'rinishda belgilanib(«A mulohaza B ni implikatsiyalaydi» yoki «agar A bajarilsa, B ham bajariladi » deb o'qiladi), quyidagicha aniqlanadigan mulohazani anglatadi:

agar A rost bo'lsa, B ham rostdir,

agar A yolg'on bo'lsa, B rost ham, yolg'on ham bo'lishi mumkin.

Boshqacha aytganda, rost rostni implikatsiyalaydi, yolg'on esa har qanday mulohazani implikatsiyalashi mumkin.

Ikki A va B mulohazalar *ekvivalentlikligi* yoki *teng kuchlikligi*

$$A \Leftrightarrow B$$

ko'rinishda belgilanib(«A mulohaza B ga ekvivalent» deb o'qiladi), u faqat va faqat A va B bir xil qiymat qabul qilgandagina rost bo'ladi.

Ekvivalentlikka misol sifatida quyidagi mulohazani keltiramiz:

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\rceil B \Rightarrow \rceil A).$$

Bu mulohaza teoremalarni teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlashda asqatadi. Chunonchi, A dan B ning kelib chiqishini isbotlash o'rniga, biz B yolg'on, ya'ni $\rceil B$ rost deb faraz qilamiz va bundan $\rceil A$ ni keltirib chiqaramiz, ya'ni bu holda A ham yolg'on bo'lishini ko'rsatamiz.

2. Oddiy mulohazalardan nisbatan murakkabroq mulohazalar tuzilishi mumkin. Murakkab mulohazalarni tushunishni osonlashtirish maqsadida ba'zi ko'p uchraydigan ifodalar uchun maxsus belgilashlar kiritish qulay bo'ladi.

Agar $P(x)$ ifoda x ning P xossaga ega ekanligini bildirsa,

$$\forall x P(x)$$

yozuv orqali «ixtiyoriy x uchun P xossa o'rinli» degan tasdiqni belgilashga kelishib olamiz. Bu yerda $\forall$ belgisi *umumiylik kvantori* deyiladi.

Quyidagi

$$\exists x P(x)$$

ifoda orqali «P xossaga ega bo'lgan kamida bitta x ob'ekt mavjud» degan tasdiqni belgilaymiz. Bu yerda $\exists$ belgisi *mavjudlik kvantori* deyiladi.

§ Q.2. To'plamlar nazariyasi belgilashlari

1. To'plam matematikaning boshlang'ich, ta'rifsiz qabul qilinadigan tushunchalaridan biridir. Biz uchun muhimi to'plamning o'z elementlari bilan aniqlanishidir, ya'ni har qanday ob'yekt uchun u berilgan to'plamning elementi yoki elementi emasligi haqida aniq aytish mumkinligidir. Odatda to'plamlarni belgilash uchun katta (bosh) harflar, to'plam elementlari uchun esa kichik (yozma) harflar ishlatiladi. Masalan, $A = \{a, b, c\}$ to'plam 3 ta elementdan iborat.

Agar a ob'yekt A to'plamning elementi bo'lsa, bu tasdiq quyidagicha yoziladi:

$$a \in A.$$

Masalan, $A = \{1, 2, 3\}$ bo'lsa, $2 \in A$ bo'ladi.

Aksincha, agar a berilgan A to'plamning elementi bo'lmasa,

$$a \notin A$$

deb belgilanadi. Masalan, agar A yuqoridagi to'plam bo'lsa, $4 \notin A$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, to'plamda ikkita bir xil element bo'lmaydi, ya'ni to'plam elementlarining qaytarilib kelishi mumkin emas. Masalan, quyidagi oltita element birlashmasi:

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$$

to'plam bo'lmaydi. Bu birlashmaga kiruvchi elementlar quyidagi to'plamni tashkil etadi:

$$\{1, 2, 3\}.$$

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning *qismiy to'plami* deb ataladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi. Masalan, agar $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{1, 2, 3, 4\}$

bo'lsa, $A \subset B$ bo'ladi. Qismiy to'plam ta'rifini matematik mantiq belgilashlari yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$(A \subset B) \quad \Leftrightarrow \quad [(a \in A) \Rightarrow (a \in B)].$$

Agar bir vaqtning o'zida $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, A va B to'plamlar teng deyiladi va $A = B$ deb yoziladi. Boshqacha aytganda, agar ikki to'plam bir xil elementlardan iborat bo'lsa, ular teng deyiladi.

Bunday ta'rif, o'zining tabiiy ko'rinishiga qaramasdan, bizni ba'zi matematik ob'yektlar to'g'risida shakllangan tasavvurimizni qayta ko'rib chiqishga majbur qiladi. Masalan, agar har bir geometrik shaklga biror nuqtalar to'plami deb qarasak, ikki geometrik shakl faqat ustma-ust tushgandagina teng bo'lar edi. Xususan, bunday qarashda har bir uchburchak faqat o'zigagina teng bo'ladi.

Yuqoridagi ta'rifdan har qanday to'plam o'zining qismiy to'plami ekanligi kelib chiqadi. Agar $A \subset B$ va $A \neq B$ bo'lsa, A to'plam B ning xos qismiy to'plami deyiladi.

2. Biz quyida to'plamlar ustida bajariladigan eng sodda amallarni keltiramiz.

Ikki A va B to'plamlar *birlashmasi* deb A yoki B to'plamga tegishli bo'lgan, ya'ni shu to'plamlardan aqalli bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementlar to'plamiga aytiladi. A va B to'plamlar birlashmasi $A \cup B$ simvoli orqali belgilanadi. Masalan, $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{3, 4, 5\}$ bo'lsa, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bo'ladi. Birlashmaning ta'rifini matematik mantiq belgilashlari yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$(a \in A \cup B) \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A) \vee (a \in B).$$

Ikki A va B to'plamlar *kesishmasi* deb bir vaqtning o'zida ham A, ham B to'plamlarga tegishli barcha elementlar to'plamiga aytiladi. A va B to'plamlar kesishmasi $A \cap B$ simvoli orqali belgilanadi. Masalan, yuqoridagi to'plamlar uchun $A \cap B = \{3\}$, ya'ni kesishma bitta elementdan iborat. Matematik mantiq belgilashlari yordamida kesishma ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:

$$(a \in A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A) \wedge (a \in B).$$

Umuman elementi bo'lmagan to'plamga *bo'sh* to'plam deyiladi va $\emptyset$ ko'rinishda belgilanadi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan foydalanib, ixtiyoriy A to'plam uchun quyidagi tengliklar o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Agar ikki A va B to'plamlar uchun

$$A \cap B = \emptyset$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ular *kesishmaydigan* to'plamlar deyiladi. Masalan, $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{4, 5, 6\}$ bo'lsa, $A \cap B = \emptyset$ bo'ladi.

Ikki A va B to'plamlarning *ayirmasi* $A \setminus B$ deb, A to'plamning B ga kirmagan barcha elementlari to'plamiga aytiladi:

$$(x \in A \setminus B) \;\Leftrightarrow\; (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Boshqacha aytganda, $A \setminus B$ to'plam A dan B ga tegishli (agar shundaylari mavjud bo'lsa) barcha elementlarni chiqarib tashlash bilan hosil qilinadi. Masalan, $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{3, 4, 5\}$ bo'lsa, $A \setminus B = \{1, 2\}$ bo'ladi. Albatta, agar A va B to'plamlar kesishmasa, $A \setminus B = A$ bo'ladi.

3. To'plamlar nazariyasidagi eng muhim tushunchalardan biri *akslantirishdir*. Bu tushuncha ham odatda boshlang'ich tushunchalar qatoriga kiritilib, ta'rifsiz qabul qilinadi. Agar ikki A va B to'plamlar berilib, A to'plamning har bir a elementiga B to'plamning biror $f(a)$ elementi ma'lum bir qonuniyat asosida mos qo'yilsa,

$$f\ :\ A\ \to\ B$$

akslantirish berilgan deyiladi.

$f : A \to B$ akslantirish *o'zaro bir qiymatli* deyiladi, agarda quyidagi ikki shart o'rinli bo'lsa:

(i) har qanday $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ va $a_1 \neq a_2$ uchun $f(a_1) \neq f(a_2)$ bo'lsin;

(ii) har qanday $b \in B$ uchun shunday $a \in A$ topilsinki, u uchun $f(a) = b$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Birinchi shart f akslantirishning turli elementlarga turli elementlarni mos qo'yishini anglatadi. Demak, agar bu shart bajarilsa, biz $f(a)$ elementga a elementni mos qo'yuvchi *teskari* f^{-1} akslantirishni aniqlashimiz mumkin.

Ikkinchi shart f ning A to'plamni B to'plamning ustiga akslantirishini bildiradi. Shunday ekan, agar ikkinchi shart bajarilsa, teskari $f^{-1} : B \to A$ akslantirish B to'plamning barcha elementlarida aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) har qanday $a \in A$ uchun $f^{-1}(f(a)) = a$ tenglik o'rinli;

2) har qanday $b \in B$ uchun $f(f^{-1}(b)) = b$ tenglik o'rinli.

Shubhasiz, har qanday o'zaro bir qiymatli akslantirishga teskari akslantirish ham o'zaro bir qiymatli bo'ladi. Agar ikki A va B to'plamlar uchun birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantirish mavjud bo'lsa, bu to'plamlar *ekvivalent* deyiladi. Bunday holda ikki A va B to'plamlarni bir xil *quvvatga* ega ham deyishadi.

Chekli sondagi elementlarga ega bo'lgan to'plam *chekli* to'plam deyiladi. Bunday to'plamlar bir xil quvvatga ega bo'lishi uchun ularning elementlari soni o'zaro teng bo'lishi zarur. Shu ma'noda to'plam quvvati tushunchasini natural sonlar tushunchasining umumlashmasi deyish mumkin.

M U N D A R I J A

ALIFBOLI KO'RSATMA